



**Universidad de Valladolid**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES**

**Grado en Ingeniería Mecánica**

**Sistemas de mitigación de vibraciones  
basados en TLDs.**

**Simulación numérica y estudio experimental**

**Autor: CASTAÑO LERMA, Francisco**

**Tutor: LORENZANA IBÁN, Antolín**

**Departamento: Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del  
Terreno, Mecánica de los medios Continuos y Teoría de Estructuras**

**Valladolid, Octubre de 2015**



# Resumen

Los TLDs son soluciones baratas para mitigar las vibraciones producidas en estructuras, especialmente en edificios altos. Este trabajo se aplica a una estructura de laboratorio consistente en una maqueta de edificio de dos plantas. Primero se hace una aproximación teórica del valor de las frecuencias modales de la maqueta. A continuación se determinan experimentalmente las frecuencias y los amortiguamientos modales. A partir de los datos obtenidos se calcula el TMD óptimo para la primera frecuencia natural y el TLD de equivalente. También se crea un modelo numérico con el TLD calculado previamente usando solamente elementos elásticos con el objetivo de ahorrar tiempo de cálculo. Por último la respuesta dinámica del modelo se compara con el comportamiento de la estructura real.

**Palabras clave:** TLD, TMD, dinámica de estructuras, mitigación de vibraciones

# Abstract

TLDs are low cost solutions to reduce structural vibrations, especially in tall buildings. In this work a TLD mitigation device is applied to a scaled to store building. To begin with, a theoretical estimation of the structure's modal frequencies is made. After that, modal frequencies and damping of the real structure are experimentally determined. This data is used to calculate the optimum TMD tuned to the first natural frequency and the equivalent TLD. In addition, a numerical model of the structure and the TLD previously calculated is created using only elastic elements with the aim of saving computing time. Finally the behaviors of the real structure and the model are compared.

**Keywords:** TLD, TMD, Damping, Control Devices



# Índice

Lista de figuras.....	9
Lista de tablas.....	13
Nomenclatura.....	15
Capítulo 1. Introducción .....	19
1.1. Justificación .....	19
1.2. Objetivos .....	21
1.3. Organización del documento .....	22
Capítulo 2. Análisis modal del modelo analítico.....	23
2.1. Modos y frecuencias naturales de vibración.....	23
2.2. Cálculo de las frecuencias y los modos de vibración .....	26
2.3 Descripción de la estructura.....	28
2.3. Estimación de los modos de vibración y las frecuencias de la estructura .....	30
Capítulo 3. Análisis de la respuesta en el dominio temporal.....	35
3.1. Series de Fourier complejas .....	35
3.2. Respuesta permanente .....	36
3.3. Respuesta permanente con una excitación arbitraria .....	38
3.4. Transformada discreta de Fourier.....	39
3.4.1. Discretización de la excitación .....	39
3.4.2. Representación de la excitación discretizada mediante series de Fourier.....	40
3.4.3. Función compleja de respuesta en frecuencia.....	41
3.4.4. Cálculo de la respuesta .....	42
3.4.5. Transformada rápida de Fourier (FFT en inglés).....	42
3.5. Ejemplo .....	43

Capítulo 4. Análisis de respuesta en el dominio de la frecuencia .....	45
4.1. Análisis estadístico de una función aleatoria .....	45
4.2. Análisis de potencia espectral .....	47
4.3. Función de respuesta en frecuencia .....	48
4.4. Ejemplo.....	49
 Capítulo 5. Matriz clásica de rigidez. Amortiguamiento de Rayleigh .....	51
 Capítulo 6: Descripción del montaje experimental .....	55
6.1. Mesa agitadora .....	55
6.2. Módulo universal de potencia y tarjeta de adquisición de datos.....	56
6.3. Acelerómetros .....	56
6.4. PC.....	57
 Capítulo 7. Caracterización de la estructura .....	59
7.1. Determinación de la respuesta en frecuencia.....	59
7.1.1. Análisis de densidad de potencia espectral .....	59
7.1.2. Análisis FRF.....	61
7.2. Determinación del amortiguamiento relativo .....	62
7.2.1. Determinación del amortiguamiento relativo mediante ajuste de la exponencial.....	62
7.2.2. Determinación del amortiguamiento relativo mediante el método del ancho de banda de mitad de potencia .....	66
 Capítulo 8. Modelado de la estructura .....	69
8.1. Comprobación de la rigidez de las columnas .....	69
8.2. Modelo de uniones rígidas .....	71
8.2.1. Descripción del modelo.....	71
8.2.2. Validación.....	73
8.3. Modelo con uniones semirrígidas.....	76
8.3.1. Descripción del modelo.....	76
8.3.2. Análisis de convergencia de malla .....	78
8.3.3. Actualización del modelo .....	78

8.3.4. Validación .....	80
8.4. Cálculo de la masa modal.....	88
8.5. Resumen de las propiedades de la estructura .....	88
Capítulo 9. Diseño y modelado del TLD.....	89
9.1. Cálculo del TMD.....	89
9.2. Cálculo del TLD equivalente .....	91
9.3. Comprobación de la equivalencia entre el TLD y el TMD sin amortiguamiento.....	94
9.3.1. Descripción del modelo con TLD.....	94
9.3.2. Comprobación de la validez del elemento FLUID80.....	96
9.3.3. Modelo con TMD sin amortiguamiento .....	100
9.3.4. Comparación del modelo con TMD sin amortiguamiento y el modelo con TLD.....	101
9.3.5 Comparación entre el TLD y el TMD óptimo.....	102
9.4. Pruebas experimentales y validación del modelo de ANSYS .....	104
9.4.1. Comparación de la FRF experimental con y sin TLD .....	104
9.4.2. Análisis de amortiguamiento.....	106
9.4.3. Validación del modelo de ANSYS .....	109
Conclusiones .....	111
Bibliografía.....	113
Anexo I. Códigos de Ansys .....	115
I.1. Prueba de rigidez sin giro.....	115
I.2. Prueba de rigidez con giro.....	117
Modelo de uniones rígidas	
I.3. Análisis estático 1.....	118
I.4. Análisis estático 2.....	122
I.5. Análisis modal .....	123

Modelo de uniones semirígidas	
I.6. Análisis estático 1 .....	124
I.7. Análisis estático 2 .....	131
I.8. Análisis modal .....	132
I.9. Análisis armónico .....	133
I.10. Análisis transitorio 1: primer modo .....	134
I.11. Análisis transitorio 2: segundo modo .....	135
I.12. Análisis transitorio 3: desplazamiento de 5cm.....	136
I.13. Análisis transitorio 5: Función de respuesta en frecuencia.....	138
Modelo de uniones semirígidas con TMD	
I.14. Análisis transitorio: Función de respuesta en frecuencia.....	140
I.15. Análisis modal .....	142
Anexo II. Modelo analítico en MATLAB .....	145
Anexo III. Obtención de la FRF con MATLAB .....	147

# Lista de figuras

Figura 1.1 TMD para una pasarela .....	20
Figura 1.2 TLD instalado en un rascacielos .....	20
Figura 2.1 Oscilación libre de un sistema con 2 g.d.l debido a un desplazamiento inicial arbitrario.....	24
Figura 2.2 Oscilación de un sistema de 2 g.d.l en su primer modo .....	25
Figura 2.3 Oscilación de un sistema de 2 g.d.l en su segundo modo .....	25
Figura 2.4 Montaje de la estructura .....	28
Figura 2.5 Medida de la rigidez.....	29
Figura 2.6 Modelo de la estructura real con 2 g.d.l .....	30
Figura 2.7 Formas modales del primer y segundo modo del modelo de 2 g.d.l .....	34
Figura 3.1 Solución de la respuesta a una fuerza periódica mediante transformación al dominio de la frecuencia .....	37
Figura 3.2 Excitación $p(t)$ y su versión discretizada .....	39
Figura 3.3 Extensión periódica de $p(t)$ .....	40
Figura 3.4 Señal de ejemplo .....	43
Figura 3.5 Densidad espectral de la señal del ejemplo.....	43
Figura 4.1 Función aleatoria en función del tiempo.....	45
Figura 4.2 Medias y desviación típica .....	46
Figura 4.3 Aceleraciones de la base y el segundo piso en el ejemplo.....	49
Figura 4.4 Función de respuesta en frecuencia del ejemplo .....	49
Figura 5.1 Amortiguamiento proporcional a la masa y amortiguamiento proporcional a la rigidez .....	51
Figura 5.2 Variación del amortiguamiento relativo modal en función de la frecuencia .....	52
Figura 6.1 Mesa agitadora .....	55
Figura 6.2 Módulo de potencia y tarjeta de adquisición de datos .....	56
Figura 6.3 Detalle de acelerómetro y posición de los mismos .....	56
Figura 7.1 Aceleración del piso superior al aplicar un movimiento de barrido en la base .....	59
Figura 7.2 Aceleración del piso superior en oscilación libre.....	60

Figura 7.3 Densidad de potencia espectral a partir de datos experimentales	60
Figura 7.4 Comparación de la FRF de la aceleración de los dos pisos debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales .....	61
Figura 7.5 Deformadas de los modos de vibración de la estructura .....	62
Figura 7.6 Aceleración en el piso superior en el primer modo de vibración ...	63
Figura 7.7 Aceleración en el piso superior en el segundo modo de vibración	63
Figura 7.8 Efectos del amortiguamiento en oscilación libre .....	64
Figura 7.9 Ajuste de la curva exponencial en el primer modo .....	65
Figura 7.10 Ajuste de la curva exponencial en el segundo modo .....	65
Figura 7.11 Método del ancho de banda de mitad de potencia.....	66
Figura 8.1 Elemento SHELL181 .....	69
Figura 8.2 Condiciones de contorno de las pruebas de rigidez en una columna .....	70
Figura 8.3 Resultado de las pruebas de rigidez en una columna .....	70
Figura 8.4 Modelo de uniones rígidas .....	71
Figura 8.5 Elemento TARGE170.....	72
Figura 8.6 Modelo rígido con fuerza en el segundo piso.....	73
Figura 8.7 Modelo rígido con fuerza en el primer piso .....	74
Figura 8.8 Resultados del análisis modal del modelo rígido .....	75
Figura 8.9 Modelo de uniones semirrígidas .....	76
Figura 8.10 Elemento MPC184.....	77
Figura 8.11 Convergencia de malla .....	78
Figura 8.12 Detalle de las uniones de los dos pisos .....	79
Figura 8.13 Resultados del análisis modal del modelo semirrígido.....	79
Figura 8.14 Condiciones de contorno y resultado del análisis estático del modelo semirrígido con la fuerza aplicada en el piso superior.....	80
Figura 8.15 Condiciones de contorno y resultado del análisis estático del modelo semirrígido con la fuerza aplicada en el primer piso .....	81
Figura 8.16 Ajuste de la curva exponencial en el primer modo.....	82
Figura 8.17 Ajuste de la curva exponencial en el segundo modo .....	82
Figura 8.18 Análisis armónico a partir de datos experimentales y del modelo .....	83
Figura 8.19 Densidad de potencia espectral a partir de la oscilación libre del modelo.....	84

Figura 8.20 Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales y de datos de ANSYS .....	85
Figura 8.21 Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales y de datos de ANSYS .....	85
Figura 8.22 Esquema de cálculo de la FRF partiendo del modelo y de datos experimentales.....	86
Figura 8.23 Comparación de la aceleración de la oscilación libre en el piso superior tras un desplazamiento inicial de 5cm.....	87
Figura 9.1 Modelo del TLD en CATIA.....	93
Figura 9.2 Modos de vibración de la estructura con la masa del TLD.....	93
Figura 9.3 Keypoints del modelo del TLD.....	94
Figura 9.4 Paredes del TLD y volumen del fluido .....	94
Figura 9.5 Elemento FLUID80 .....	95
Figura 9.6 Mallado y condiciones de contorno del análisis modal del líquido	96
Figura 9.7 Primer modo del TLD en ANSYS y experimentalmente .....	97
Figura 9.8 Segundo modo del TLD en ANSYS y experimentalmente .....	98
Figura 9.9 Quinto modo del TLD en ANSYS y experimentalmente .....	99
Figura 9.10 Elemento COMBIN14 .....	100
Figura 9.11 Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD (sin amortiguamiento) y con TLD .....	101
Figura 9.12 Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD (sin amortiguamiento) y con TLD .....	102
Figura 9.13 Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD óptimo y con TLD.....	103
Figura 9.14 Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD óptimo y con TLD.....	103
Figura 9.15 Montaje del TLD.....	104
Figura 9.16 Comparación de la FRF experimental de la aceleración de los dos pisos debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales con y sin TLD .....	104
Figura 9.17 Movimiento del TLD en los dos picos alrededor de la primera frecuencia.....	105

Figura 9.18 Comparación de la respuesta con y sin TLD .....	106
Figura 9.19 Oscilación libre de la estructura tras la aplicación de un desplazamiento con la frecuencia de 2.17Hz.....	107
Figura 9.20 Oscilación libre tras un desplazamiento inicial de 1 cm.....	108
Figura 9.21 Oscilación libre tras un desplazamiento inicial de 2 cm.....	108
Figura 9.21 Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base. Modelo de ANSYS y datos experimentales.....	109
Figura 9.22 Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base. Modelo de ANSYS y datos experimentales.....	110

## Lista de tablas

Tabla 7.1 Valores de los coeficientes de amortiguamiento de Rayleigh .....	67
Tabla 8.1 Comparación entre el amortiguamiento real y el del modelo.....	83
Tabla 8.2 Masas modales de la estructura.....	88
Tabla 8.3 Tabla resumen de las propiedades de la estructura.....	88
Tabla 9.1 Tabla resumen de las propiedades de la estructura para el primer modo .....	89
Tabla 9.2 Frecuencia y amortiguamiento del TMD.....	90
Tabla 9.3 Medidas del TLD.....	92
Tabla 9.4 Propiedades del fluido .....	95
Tabla 9.5 Modos del TLD en el eje X .....	96
Tabla 9.6 Comparación del amortiguamiento experimental con y sin TLD .	107
Tabla 9.7. Amortiguamiento en función del desplazamiento inicial. ....	108



# Nomenclatura

## Símbolos romanos

A (teoría)	Área de la sección [m <sup>2</sup> ]
A <sub>i</sub> (experimental)	Amplitud de un punto de la FRF [dB]
a <sub>0</sub>	Coefficiente de masa de Rayleigh [-]
a <sub>1</sub>	Coefficiente de rigidez de Rayleigh [-]
B	Coefficiente de compresibilidad [Pa]
c	Matriz de amortiguamiento [N/ms]
c <sub>d</sub>	Amortiguamiento del TMD [N/ms]
C <sub>n</sub>	Amortiguamiento modal [N/ms]
E	Módulo de elástico [Pa]
f <sub>n</sub>	Frecuencia natural de vibración del n-ésimo modo [Hz]
f	Índice de frecuencia del TMD [-]
f <sub>s</sub>	Frecuencia de sintonizado del TMD [Hz]
g	Aceleración de la gravedad [m/s <sup>2</sup> ]
H	Función de respuesta en frecuencia [-]
H*	Altura óptima del TLD [m]
I	Inercia de la sección [m]
k <sub>d</sub>	Rigidez del TMD [N/m]
k <sub>i</sub>	Rigidez asociada a cada grado de libertad [N/m]
k	Matriz de rigidez [N/m]
K	Índice de masa activa/masa total [-]
L	Longitud [m]
L*	Longitud del TLD [m]
m	Matriz de masa [kg]
m <sub>i</sub>	Masa asociada al i-ésimo grado de libertad [kg]
m <sub>d</sub>	Masa del TMD [kg]

$\bar{m}$	Índice de masa [-]
$M_n$	Masa generalizada en el modo n [kg]
$M_{\text{modal}}$	Masa modal [kg]
$N$	Número de instantes equiespaciados [-]
$P$	Fuerza externa [N]
$P_j$	Coficiente de Fourier [-]
$P(\omega)$	Transformada de Fourier de $p(t)$
$P_n$	Fuerza generalizada en el modo n [N]
$q_n$	N-ésima coordenada modal [-]
$R$	Autocorrelación [-]
$s$	Densidad de potencia espectral [-]
$t$	Tiempo [s]
$t_d$	Duración de la excitación [s]
$T_0$	Periodo de la extensión periódica de $p(t)$ [s]
$T_n$	Periodo natural de vibración [s]
$u$	Desplazamiento [m]
$W$	Anchura del TLD [m]
$x$	Función aleatoria en el tiempo [-]
$\bar{x}$	Media [-]
$\bar{x}^2$	Cuadrado de la media [-]
$X_{\text{rms}}$	Raíz cuadrada de la media al cuadrado [-]

## Símbolos griegos

$\lambda_n$	n-ésimo autovalor [-]
$\mu$	Viscosidad [Pas]
$\xi_d$	Amortiguamiento relativo del TMD[-]
$\xi_n$	Amortiguamiento relativo modal [-]
$\rho$	Densidad [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_x^2$	Varianza [-]
$\tau$	Retardo [s]
$\Phi_n$	Deformada nodal [-]
$\Phi_{m\acute{a}x}$	Máximo desplazamiento modal [-]
$\omega_n$	Frecuencia angular natural (sin amortiguar) [rad/s]
$\omega_D$	Frecuencia angular natural (amortiguada) [rad/s]
$\omega_{m\acute{a}x}$	Frecuencia de Nyquist [rad/s]



# Capítulo 1. Introducción

## 1.1. Justificación

La tendencia actual hacia la construcción de edificios cada vez más altos, el uso de materiales ligeros de gran resistencia y las técnicas avanzadas de construcción han hecho que las estructuras actuales sean más flexibles y ligeras. Esto hace que sean más sensibles a excitaciones del entorno como el viento, las olas o los terremotos, que causan vibraciones no deseadas causantes de posibles fallos estructurales, molestias para los usuarios o fallos en los equipos contenidos en la estructura. Por lo tanto, es importante buscar dispositivos prácticos y efectivos que mitiguen estas vibraciones, el estudio de lo anterior se conoce como “control estructural”. Estos dispositivos pueden ser pasivos o activos en función de sus requerimientos:

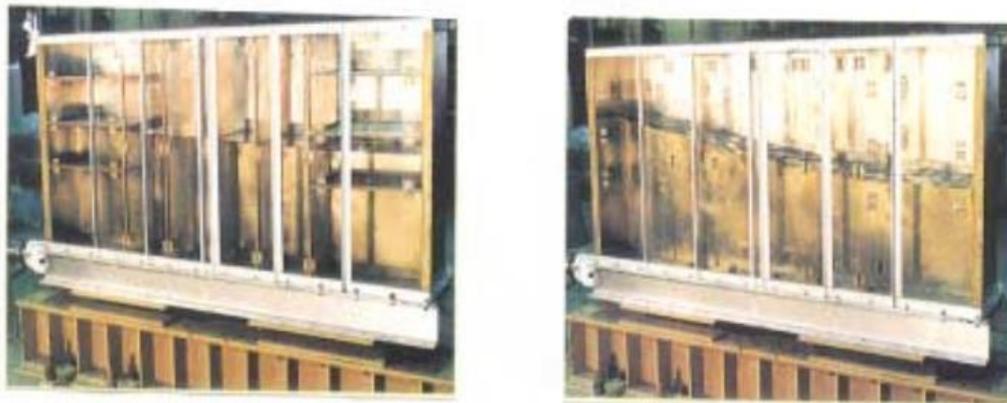
Los pasivos no requieren de un suministro de energía, las fuerzas que ejercen sobre la estructura son consecuencia del movimiento de la misma. En esta categoría se encuentran los TMDs (amortiguadores de masa sintonizados) y los TLDs (amortiguadores líquidos sintonizados).

En los dispositivos activos hay un suministro externo de energía, que es utilizada para aplicar una fuerza opuesta a las vibraciones que se quieren eliminar. En esta categoría están los AMDs (amortiguador de masa activo) y los sistemas de tendones activos. Estos sistemas tienen el inconveniente de necesitar un suministro de energía en grandes cantidades durante condiciones extremas, ya que desarrollan una gran potencia al llevar a cabo las acciones de control. Por este motivo se prefieren los dispositivos pasivos a los activos.



**Figura 1.1** TMD para una pasarela (fuente: [http://www.kti-trautmann.com/tl\\_files/projekt/img/news/2014-01-27/Schwingungstilger\\_Salzachsteg.png](http://www.kti-trautmann.com/tl_files/projekt/img/news/2014-01-27/Schwingungstilger_Salzachsteg.png))

Un TMD es un sistema formado por una masa unida a la estructura mediante muelles y amortiguadores. Las características de los tres elementos que lo componen tienen que tener unos valores óptimos para que mitigue las vibraciones de una determinada frecuencia, una vez encontrados estos valores se dice que el dispositivo está sintonizado. En el caso de los TMDs la sintonización es sencilla.



**Figura 1.2** TLD instalado en un rascacielos (fuente: Capítulo 1, "Liquid dampers for mitigation of structural response: Theoretical development and experimental validation", Swaroop Krishna Yalla)

Un TLD consiste en un tanque fijado a la estructura con cierta cantidad de líquido en su interior. En este caso la sintonización depende de la forma, las dimensiones del depósito y de la cantidad de líquido.

Su principal ventaja es que necesitan poco mantenimiento, pero tienen el inconveniente de su dificultad de sintonizado, ya que su respuesta depende de la amplitud del movimiento. También es complicado calcular el amortiguamiento debido al TLD, ya que depende de la interacción del fluido con las paredes del depósito y de los posibles obstáculos (como mallas o placas con agujeros) que haya en su interior. Por estas dos razones los TLDs han sido objeto de muchas investigaciones en la segunda mitad del siglo XX para tratar de modelar su comportamiento.

## 1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo era el diseño de un TLD sintonizado para la frecuencia natural más importante de una estructura a escala de laboratorio y la posterior creación de un modelo numérico que reprodujese con la mayor precisión posible el comportamiento de la estructura real con un TLD instalado en su piso superior.

En la mayoría de simulaciones por ordenador se modela el TLD y la estructura por separado. Esto implica que hay que utilizar dos programas diferentes (o dos módulos del mismo), uno para modelar sólidos elásticos y otro para modelar fluidos. Hacer que ambos trabajen en paralelo es complicado y hacer simulaciones con fluidos tiene costes computacionales muy elevados.

Por estas razones en este trabajo se comprobó la validez del elemento FLUID80 de ANSYS Mechanical APDL para el modelado de TLDs para pequeños desplazamientos. Este tipo de elemento es un sólido elástico, lo que soluciona los dos problemas anteriores, ya que no se modelan fluidos y se utiliza un sólo programa.

Como objetivo secundario se comprobó la equivalencia entre controlar la estructura con un TLD y con un TMD sin amortiguamiento, lo cual es interesante para utilizar ecuaciones para modelar TMDs y utilizar después los resultados para calcular el TLD equivalente.

### 1.3. Organización del documento

El trabajo se divide en dos partes, la primera es teórica y trata de explicar las herramientas que se utilizan posteriormente en la parte experimental. En el segundo capítulo se explica cómo se calculan los modos de vibración de un sistema de varios grados de libertad y se hace una primera aproximación de los modos de vibración de la estructura real discretizándola como un sistema de dos grados de libertad. En el tercer capítulo se introducen los métodos numéricos empleados para el análisis de la respuesta en el dominio temporal. El cuarto trata sobre el análisis de la respuesta en el dominio de la frecuencia. En el quinto capítulo se explica el modelo de amortiguamiento de Rayleigh, herramienta utilizada para modelar el amortiguamiento de la estructura en el modelo numérico.

Los siguientes capítulos se centran en la parte experimental del trabajo. En el sexto se describe el montaje experimental utilizado. En el séptimo se determinan los modos de vibración y los amortiguamientos de cada modo. El octavo capítulo trata de la creación y validación del modelo numérico con ANSYS, dando una breve descripción de los elementos utilizados en su construcción. Por último, el noveno capítulo se centra primero en el diseño del TMD óptimo y de su TLD equivalente despreciando el amortiguamiento. A continuación se modelan ambos y se comprueba que tienen la misma respuesta. Finalmente se valida modelo numérico del TLD a partir de datos experimentales.

## Capítulo 2. Análisis modal del modelo analítico

### Introducción

En este capítulo se presenta la forma teórica de obtención de los modos de vibración de un sistema de varios grados de libertad. A continuación se utiliza el método presentado anteriormente para calcular los modos de vibración de la estructura estudiada en la parte experimental.

### 2.1. Modos y frecuencias naturales de vibración

Como es sabido (capítulo 10, parte A, Dynamics of Structures) la oscilación libre de sistemas de múltiples grados de libertad está determinada por la siguiente ecuación:

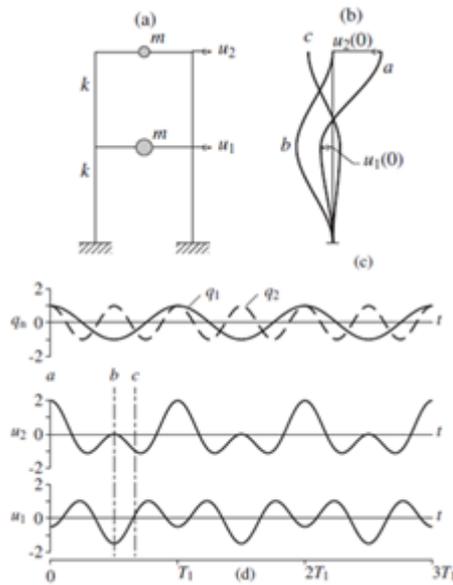
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \quad (2.1)$$

En el caso de las estructuras los amortiguamientos son pequeños, por lo que se puede despreciar el término del amortiguamiento quedando la ecuación 2.1:

$$m\ddot{x}+kx=0 \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 representa N (grados de libertad del sistema) ecuaciones diferenciales homogéneas que se relacionan a través de la matriz de rigidez, la de masa, o las dos a la vez. Además el sistema tiene unas condiciones de contorno para  $t=0$ :

$$u=u(0) \quad \dot{u}=\dot{u}(0) \quad (2.3)$$



**Figura 2.1** Oscilación libre de un sistema con 2 g.d.l debido a un desplazamiento inicial arbitrario.

En el ejemplo de la figura 2.1 se muestra la oscilación libre de la estructura de dos pisos. En la figura se muestran las rigideces de las columnas y los valores de las masas concentradas situadas en los pisos.

La oscilación libre se inicia mediante los desplazamientos mostrados por la curva  $a$  en la figura 2.1.b, donde también se ve los desplazamientos iniciales de los dos pisos. El movimiento resultante  $u_j$  de las dos masas se muestra en 2.1.d en función del tiempo,  $T_1$  se definirá más tarde.

Como se puede observar, el movimiento de cada piso no es un movimiento armónico simple y la frecuencia del movimiento no se puede definir. Además, la deformada cambia con el tiempo, como indican las curvas  $b$  y  $c$  de la figura 2.1.b.

En cambio, si el movimiento es iniciado por la distribución adecuada de desplazamientos la estructura tendrá un movimiento armónico simple sin cambios en la forma desplazada, como se puede ver en las figuras 2.2 y 2.3.

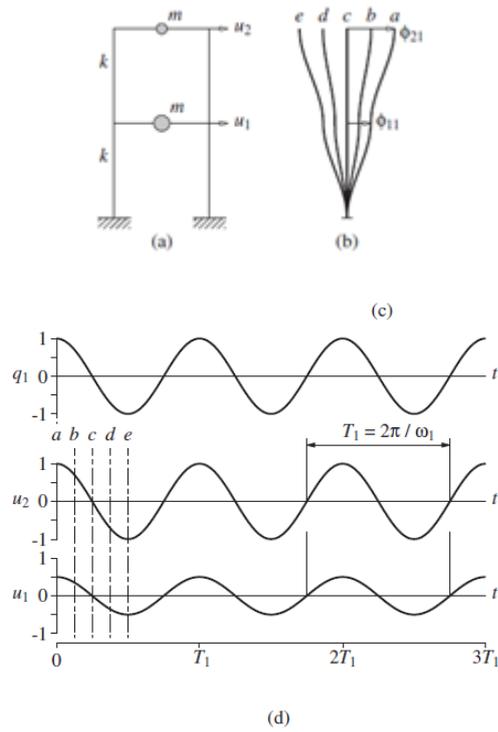


Figura 2.2 Oscilación de un sistema de 2 g.d.l en su primer modo

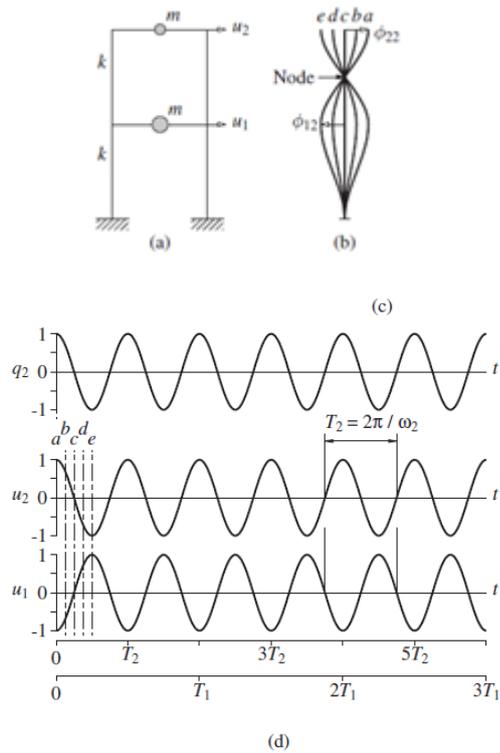


Figura 2.3 Oscilación de un sistema de 2 g.d.l en su segundo modo

En este ejemplo existen dos deformadas que cumplen con lo anterior. Estas deformadas características se conocen como *modos naturales de vibración* de un sistema de varios grados de libertad.

Como se observa en las figuras 2.2 y 2.3, los desplazamientos en los pisos para el primer modo están en fase, mientras que los del segundo modo están en oposición de fase. Los puntos de desplazamiento nulo como el mostrado en 2.3.b se denominan *nodos*.

El *periodo natural de vibración* ( $T_n$ ) de un sistema de varios grados de libertad es el tiempo requerido para un ciclo de movimiento de un punto cuando el sistema se mueve en el  $n$ -ésimo modo de vibración.

Las correspondientes frecuencias de vibración tienen la siguiente expresión:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad f_n = \frac{1}{T_n} \quad (2.4)$$

## 2.2. Cálculo de las frecuencias y los modos de vibración

La obtención de las frecuencias naturales y sus modos de vibración se obtienen resolviendo un problema de autovalores como se explica a continuación. La oscilación libre de un sistema sin amortiguar en uno de sus modos naturales de vibración se puede describir matemáticamente como:

$$u(t) = q_n(t)\phi_n \quad (2.5)$$

Donde la deformada  $\phi_n$  no varía con el tiempo. La variación temporal de los desplazamientos se describe igual que un movimiento armónico simple:

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (2.6)$$

Donde  $A_n$  y  $B_n$  son constantes que se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales.

Combinando 2.5 y 2.6 se obtiene:

$$u(t)=\varphi_n(A_n\cos\omega_n t+B_n\sen\omega_n t) \quad (2.7)$$

Donde  $\varphi_n$  y  $\omega_n$  se desconocen. Sustituyendo 2.7 en 2.2:

$$[-\omega_n^2 m\varphi_n+k\varphi_n]q_n(t)=0 \quad (2.8)$$

Ecuación donde se tiene que anular  $q_n(t)$  (solución trivial) o anularse el término  $[-\omega_n^2 m\varphi_n+k\varphi_n]$ , o lo que es lo mismo:

$$k\varphi_n=\omega_n^2 m\varphi_n \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 se conoce como problema matricial de autovalores y comúnmente se expresa de la siguiente manera:

$$k\varphi_n=\lambda_n m\varphi_n \quad \lambda_n=\omega_n^2 \quad (2.10)$$

Para facilitar la resolución mediante métodos numéricos, se pasa la ecuación 2.10 a la forma standard de la siguiente manera:

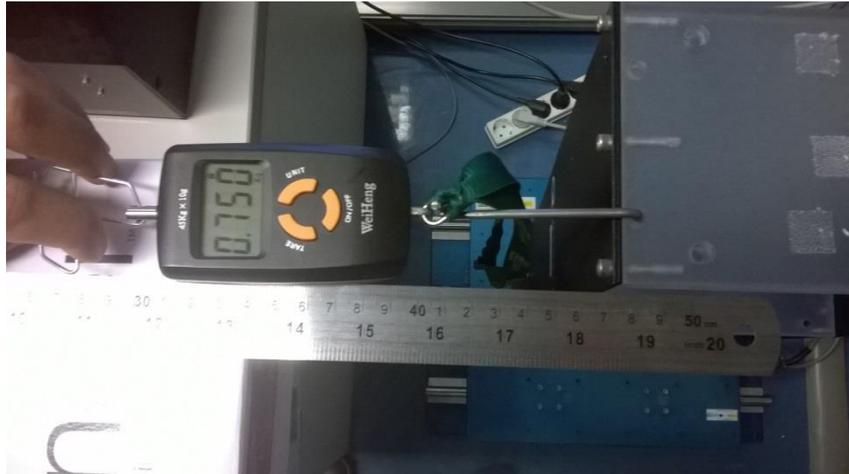
$$\begin{aligned} m^{-1}k\varphi_n &= \lambda_n m^{-1}m\varphi_n \\ A\varphi_n &= \lambda_n \varphi_n \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.3 Descripción de la estructura



**Figura 2.4** Montaje de la estructura (fuente: Manual Quanser AMD-2)

La estructura está formada por dos módulos de una planta puestos uno encima del otro. Cada módulo está formado por dos placas de metal (columnas) y otras dos de plástico (pisos). La rigidez combinada de los dos módulos se comprobó desplazando el piso superior 3 cm mediante una fuerza de 7,5 N medida con un dinamómetro, resultando ser de 250 N/m. La de cada módulo por separado será de 500 N/m.



**Figura 2.5** Medida de la rigidez

## Descripción de los elementos de la estructura

### Columnas

Son placas de 0,5 m de longitud y 108,1 mm de anchura con 1,75 mm de espesor. En el manual se especifica que están hechas de acero, pero si se calcula la densidad teniendo en cuenta sus dimensiones y su masa (0,24 kg) se obtiene  $2537,3 \text{ kg/m}^3$ , que corresponde al aluminio.

Para la realización del modelo se ha supuesto que están hechas de aluminio.

### Pisos

Se consideran rígidos, las masas de los pisos incluyen la de los acelerómetros. El primer piso tiene una longitud de 0,32 m y una anchura de 0,108 m con un espesor de 2,4 cm. Su masa es de 1,16 kg. El segundo piso tiene la misma anchura y longitud con espesor de 1,2 cm. Su masa es de 0,68 kg.

## 2.3. Estimación de los modos de vibración y las frecuencias de la estructura

La estructura se discretizó como una barra empotrada en su base con dos masas puntuales. Como se ve en la figura inferior el sistema tiene 2 grados de libertad, los desplazamientos en el eje y en los puntos 1 y 2.

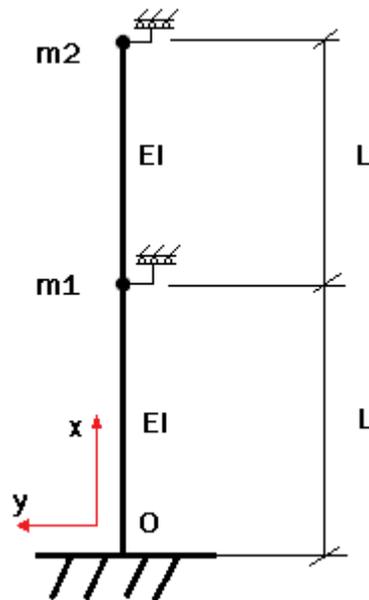


Figura 2.6 Modelo de la estructura real con 2 g.d.l

La matriz de rigidez del sistema está formada por dos matrices de rigidez de viga biempotrada montadas de la siguiente manera.

$$k = \begin{pmatrix} k_{00}^1 & k_{01}^1 & 0 \\ k_{00}^1 & k_{11}^{1+2} & k_{12}^2 \\ 0 & k_{12}^2 & k_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Como la base está empotrada los términos de la primera fila y la primera columna se eliminan.

$$k = \begin{pmatrix} 2EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 24EI/L^3 & 0 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 8EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Ahora se eliminan las filas y columnas 1, 3, 4 y 6, correspondientes al desplazamiento en x y al giro en z de los puntos 1 y 2. Finalmente la matriz de rigidez queda de la siguiente manera:

$$k = \begin{pmatrix} 24EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Lo mismo se hace partiendo de la siguiente matriz de masas para una barra:

$$m = \frac{\rho AL}{420} \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Las matrices de masa de las dos barras se montan de la misma manera y se simplifican igual que en el caso anterior. Por último se suman las masas puntuales resultando la siguiente matriz de masas.

$$m = \begin{pmatrix} \frac{312\rho AL}{420} + m_1 & \frac{54\rho AL}{420} \\ \frac{54\rho AL}{420} & \frac{156\rho AL}{420} + m_2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

La masa por unidad de longitud se fijó en 0,96 kg/m, ya que la estructura mide 1 m y la suma de las masas de las columnas es de 0,96 kg. La inercia se calculó a partir de la rigidez de la estructura, que tenía que ser de 500N/m con la base empotrada y la fuerza en el primer piso, lo que se escribe matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 24EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \text{ N} \\ 500 \text{ N} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Donde:

$$L=0,5\text{m} \quad (2.18)$$

$$E=7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

A partir de 2.17 se despeja la inercia:

$$I = \frac{500 \cdot L^3}{12 \cdot E} = \frac{500 \text{ N} \cdot (0,5 \text{ m})^3}{12 \cdot 7 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = 7,44 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4 \quad (2.19)$$

Lo que manteniendo la anchura de 108,1 mm en la columna equivale a un espesor de:

$$\text{espesor} = \sqrt[3]{\frac{12I}{A}} = 2,021 \text{ mm} \quad (2.20)$$

Este espesor es un 15% mayor que el de las columnas de la maqueta. Los datos se introdujeron en un script de MATLAB (ver Anexo II) que resolvía el problema de autovalores de la ecuación 2.11 y normalizaba las formas modales con respecto a la matriz de masas de la siguiente manera:

$$\varphi_{im} = \frac{A_i}{\sqrt{\varphi_i^t m \varphi_i}} \quad (2.21)$$

La normalización de las formas modales permite calcular la masa modal a partir del desplazamiento máximo de cada modo mediante la siguiente ecuación:

$$M_{\text{modal}} = \frac{1}{\phi_{\text{max}}^2} \quad (2.22)$$

Este parámetro es la masa de un sistema de un grado de libertad con el mismo movimiento que el punto de desplazamiento máximo del modo.

El resultado fue el siguiente:

Primer modo:

$$f_1 = 2,0853 \text{ Hz} \quad (2.23)$$

$$\phi_1 = 0,5347$$

$$\phi_2 = 0,7744$$

$$M_{\text{modal}} = 1,668 \text{ kg}$$

Segundo modo:

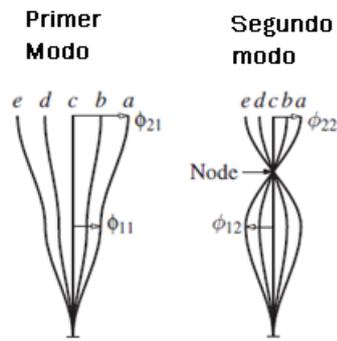
$$f_2 = 5,3283 \text{ Hz} \quad (2.24)$$

$$\phi_1 = 0,6124$$

$$\phi_2 = -0,7539$$

$$M_{\text{modal}} = 1,759 \text{ kg}$$

En este caso los desplazamientos de los dos modos coinciden con el modelo de dos grados de libertad de las figuras 2.2.b y 2.3.b, que se repiten a continuación por conveniencia.



**Figura 2.7** Formas modales del primer y segundo modo del modelo de 2 g.d.l

Con estos datos se tiene una primera aproximación del valor de las frecuencias modales de la estructura real (que diferirán debido a la simplificación realizada), de las masas modales y de las formas que tendrán los modos.

# Capítulo 3. Análisis de la respuesta en el dominio temporal

## Introducción

En este capítulo (desarrollado a partir del primer apéndice del libro Dynamics of Structures) se expone un resumen de los conceptos básicos de la transformada rápida de Fourier, método que fue utilizado en la parte experimental para obtener la densidad de potencia espectral.

### 3.1. Series de Fourier complejas

Una excitación  $p(t)$  periódica de periodo  $T_0$  puede separarse en sus componentes armónicas usando las series complejas de Fourier:

$$p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} P_j e^{i(j\omega_0 t)} \quad (3.1)$$

Donde el primer armónico tiene la frecuencia:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.2)$$

Y donde  $\omega_j = \omega_0$  es la frecuencia angular del  $j$ -ésimo armónico. Los coeficientes  $P_j$  se pueden expresar en función de  $p(t)$  porque las funciones exponenciales son ortogonales:

$$P_j = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) e^{-i(j\omega_0 t)} dt \quad j=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.3)$$

Los términos de signo contrario son conjugados y en el caso de  $j=0$ :

$$P_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt \quad (3.4)$$

$P_0$  es el valor medio de  $p(t)$ .

La excitación  $p(t)$  tiene un valor real pese a que los términos al otro lado de la igualdad en la ecuación 3.1 sean un producto de dos términos complejos. Esto se debe a que la suma de cada elemento  $j$ -ésimo y su conjugado es real y en el caso de  $j=0$  el valor es real, como se ve en la ecuación 3.4.

## 3.2. Respuesta permanente

La respuesta de un sistema lineal a una fuerza periódica se puede determinar combinando las respuestas individuales de cada elemento de la serie de Fourier correspondiente a la excitación.

La respuesta permanente de un sistema a una fuerza  $p(t) = 1 \cdot e^{i\omega t}$  (fuerza con componentes seno y coseno) será un movimiento armónico con la frecuencia  $\omega$  de la excitación, que se puede expresar de la siguiente manera:

$$u(t) = H(\omega) e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

Como se observa en la expresión 3.5 la amplitud del movimiento es dependiente de la frecuencia de la fuerza. La expresión de la amplitud se obtiene de sustituir 3.5 en la ecuación de movimiento del sistema.

Según lo expuesto anteriormente, la respuesta permanente  $u_j(t)$  del sistema cuando se aplica una fuerza  $p_j(t) = P_j e^{i\omega t}$  será la siguiente:

$$u_j(t) = U_j e^{i(j\omega_0 t)} \quad (3.6)$$

Donde

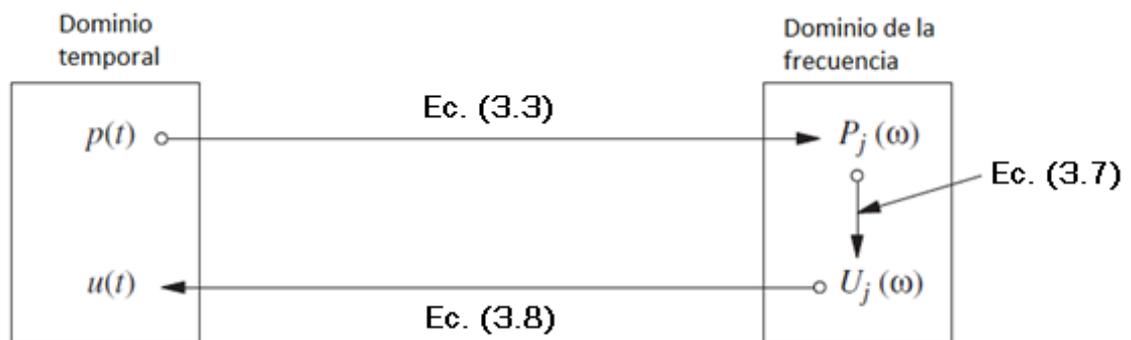
$$U_j = H(j\omega_0) P_j \quad (3.7)$$

La expresión 3.6 se obtiene de sustituir el valor de la frecuencia  $j\omega_0$  en la expresión 3.5. El término  $P_j$  se debe a la amplitud de  $p_j(t)$ , que en el caso de la ecuación 3.5 tenía valor unidad. Finalmente la expresión para la serie de Fourier en conjunto es la siguiente:

$$u(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H(j\omega_0) P_j e^{i(j\omega_0 t)} \quad (3.8)$$

Donde los coeficientes de Fourier  $P_j$  están definidos en 3.3.  $H(j\omega_0)$  se obtiene como se mencionó anteriormente.

El procedimiento para analizar la respuesta temporal de una estructura se muestra en la siguiente figura:



**Figura 3.1** Solución de la respuesta a una fuerza periódica mediante transformación al dominio de la frecuencia

La excitación  $p(t)$  se transforma con la ecuación 3.3 del dominio temporal al de las frecuencias, donde se expresa con los términos de Fourier  $P_j$ . A partir de ahí con la ecuación 3.7 se obtiene el desplazamiento en el dominio de las frecuencias para cada término de la serie de Fourier. Finalmente con la ecuación 3.8 se combinan las respuestas para cada armónico y se obtiene el desplazamiento en el dominio temporal.

### 3.3. Respuesta permanente con una excitación arbitraria

Lo expuesto anteriormente permite representar funciones de  $p(t)$  periódicas. En caso de que no lo sean se pueden expresar con la integral de Fourier:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.9)$$

Donde

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.10)$$

Las ecuación 2.10 es la transformada directa de Fourier de  $p(t)$ . La respuesta  $u(t)$  del sistema a una excitación  $P(\omega) e^{i\omega t}$  será (como se vio en el apartado 3.2)  $H(\omega)P(\omega) e^{i\omega t}$ . Superponiendo la respuesta a todas las frecuencias se expresa de la siguiente manera:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.11)$$

Donde

$$U(\omega) = H(\omega)P(\omega) \quad (3.12)$$

La ecuación 3.11 es la transformada inversa de Fourier.

### 3.4. Transformada discreta de Fourier

La solución analítica de la integral de Fourier raramente es posible en casos prácticos de análisis dinámico de estructuras, por lo que estas integrales necesitan ser resueltas mediante métodos numéricos.

#### 3.4.1. Discretización de la excitación

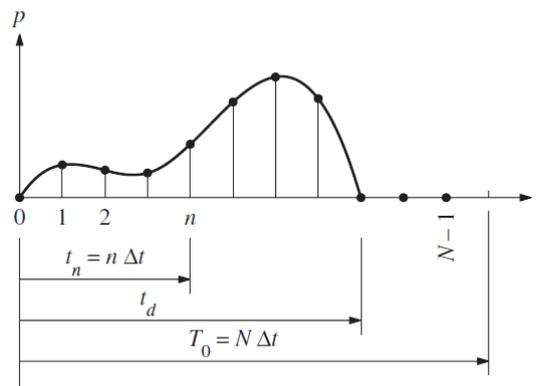


Figura 3.2 Excitación  $p(t)$  y su versión discretizada

Se supone un sistema excitado por una fuerza  $p(t)$  de duración  $t_d$  como la de la figura superior. Como en los casos anteriores se pretende determinar el desplazamiento  $u(t)$  del sistema, que se supone en reposo inicialmente. Como el máximo de la respuesta puede ocurrir una vez ha terminado la excitación es necesario que la duración del análisis ( $T_0$ ) sea mayor que  $t_d$ . Este máximo se producirá en el primer medio ciclo de vibración libre, ya que el movimiento decaerá en los siguientes ciclos debido al amortiguamiento. Por lo tanto hay que escoger el siguiente valor de  $T_0$ :

$$T_0 \geq t_d + \frac{T_n}{2} \quad (3.13)$$

En este caso  $p(t)$  se muestrea en  $N$  puntos igualmente espaciados numerados de 0 a  $N-1$ , con un intervalo de valor  $\Delta t$ . Por lo que:

$$T_0 = N \Delta t \quad (3.14)$$

Ahora la función  $p(t)$  está definida por una serie de valores  $p_n \equiv p(t_n) \equiv p(n \Delta t)$ , representados por los puntos de la figura superior. El intervalo de muestreo  $\Delta t$  tiene que ser suficientemente corto comparado con los periodos de los armónicos significativos y  $T_n$ , el periodo natural del sistema.

Con el primer requerimiento se asegura una buena representación de la excitación y de la oscilación forzada. El segundo requerimiento asegura una correcta representación de la oscilación libre del sistema.

### 3.4.2. Representación de la excitación discretizada mediante series de Fourier

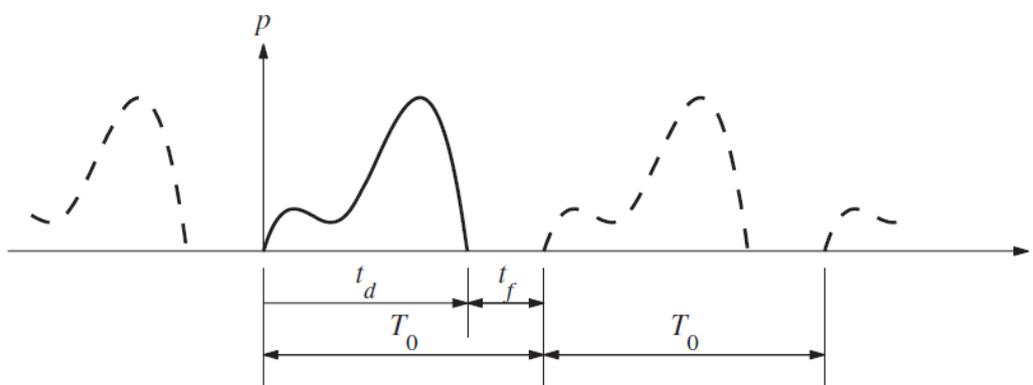


Figura 3.3 Extensión periódica de  $p(t)$ .

En la figura 3.3 se muestra una extensión periódica de la excitación del apartado 3.4.1 con un periodo  $T_0$ . Partiendo de la serie de Fourier compleja 3.1 se puede expresar el vector  $p_n$  del apartado anterior como una superposición de  $N$  funciones armónicas:

$$p_n = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i(j\omega_0 t_n)} = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i(2\pi n j/N)} \quad (3.15)$$

Donde  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  es la frecuencia del primer armónico de la extensión de  $p(t)$  y  $\omega_j = j\omega_0$  es la frecuencia angular del armónico  $j$ -ésimo.  $P_j$  es el coeficiente complejo que define la amplitud y la fase del armónico  $j$ -ésimo. A partir de la ecuación 3.3  $P_j$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_j = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(j\omega_0 t_n) \Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(2\pi n j/N)} \quad (3.16)$$

Las ecuaciones 3.15 y 3.16 forman el par de la transformada discreta de Fourier (DFT en inglés). La diferencia entre el par (3.10; 3.11) y el par (3.15; 3.16) está en que el primero es una representación verdadera de  $p(t)$  mientras que el segundo sólo representa una versión periódica de la misma.

En las ecuaciones 3.15 y 3.16 sólo se consideran frecuencias positivas, lo que se conoce expansión unilateral de Fourier. La ecuación 3.1 es una expansión bilateral en la que las frecuencias negativas no tienen significado físico, en el caso de la unilateral esto ocurre para  $N/2 \leq j \leq N-1$ .

Si se truncase la serie de la ecuación 3.1 para valores de  $j$  entre  $-N/2$  y  $N/2$ ,  $\omega$  se extendería de  $-\omega_{N/2}$  a  $\omega_{N/2}$ . En este caso  $\omega_{N/2}$  sería la frecuencia más alta, lo que también ocurre en el caso unilateral, ya que las frecuencias mayores que  $N/2$  no tienen significado físico. Esta frecuencia ( $\omega_{\max}$ ) es conocida como *frecuencia de Nyquist* o *frecuencia de plegado* y se calcula de la siguiente manera:

$$\omega_{\max} = \frac{N}{2} \omega_0 = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (3.17)$$

### 3.4.3. Función compleja de respuesta en frecuencia

La función  $H(\omega)$  se calcula para cada  $\omega_j$  y se anota como  $H_j$ . En una expansión bilateral de Fourier se incluyen frecuencias positivas y negativas, en ese caso  $H_{-j}$  es el complejo conjugado de  $H_j$ . En el caso de una expansión unilateral ocurre lo mismo, los valores de  $H_j$  en ambos lados de  $H_{N/2}$  también son complejos conjugados.  $H(\omega)$  se calcula con la siguiente interpretación de  $\omega_j$ :

$$\omega_j = \begin{cases} j\omega_0 & 0 \leq j \leq N/2 \\ -(N-j)\omega_0 & \frac{N}{2} < j \leq N-1 \end{cases} \quad (3.18)$$

### 3.4.4. Cálculo de la respuesta

Primero se calcula la respuesta para cada frecuencia de la siguiente manera:

$$U_j = H_j P_j \quad 0 \leq j \leq N-1 \quad (3.19)$$

Después se calcula la respuesta  $u_n \equiv u(t_n)$  para instantes de tiempo discretos  $t_n \equiv n\Delta t$  mediante una versión truncada de la ecuación 3.8:

$$u_n = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(j\omega_0 t_n)} = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(2\pi n j / N)} \quad (3.20)$$

La ecuación 3.20 forma un par con 3.16. Este tipo de solución se conoce como DFT clásica.

### 3.4.5. Transformada rápida de Fourier (FFT en inglés)

En método DFT para determinar la respuesta dinámica de un sistema requiere el cálculo de la transformada de la secuencia  $p_n$  (ecuación 3.16) y después hacer la transformada inversa de  $U_j$  (Ecuación 3.20). Este cálculo se hizo práctico tras la publicación del algoritmo Cooley-Tukey para la transformada rápida de Fourier en 1965. No es un nuevo tipo de transformada, pero es una manera muy eficiente y precisa de calcular la DFT y su inversa. El algoritmo original requiere que el número de puntos  $N$  sea una potencia de 2, pero se ha generalizado para permitir un valor arbitrario de  $N$ .

Con la FFT el esfuerzo computacional requerido se reduce drásticamente. Una medida de la reducción de este coste es el número de productos de valores complejos. En el caso de la DFT se necesitan realizar  $N^2$  productos complejos para calcular la transformada y otros tantos para calcular la inversa. En cambio, con la FFT sólo se necesitan  $(N/2)\log_2 N$  productos complejos para hacer lo mismo. Por ejemplo, si  $N=2^{10}=1024$  el algoritmo FFT sólo requiere el 0,5% del coste computacional de la DFT.

### 3.5. Ejemplo

En la parte experimental se calcula la densidad de potencia espectral mediante Sigview. Este programa la obtiene haciendo la transformada de Fourier de la señal de entrada mediante el algoritmo FFT descrito anteriormente. Introduciendo la siguiente señal se obtiene:

$$x = 0,001\text{sen}(10\pi t) \quad (3.21)$$

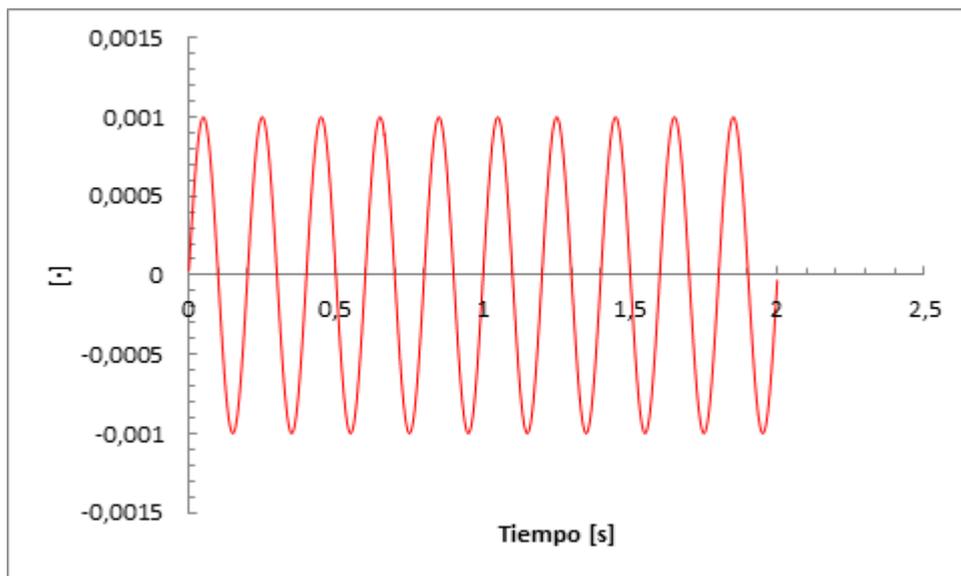


Figura 3.4 Señal de ejemplo

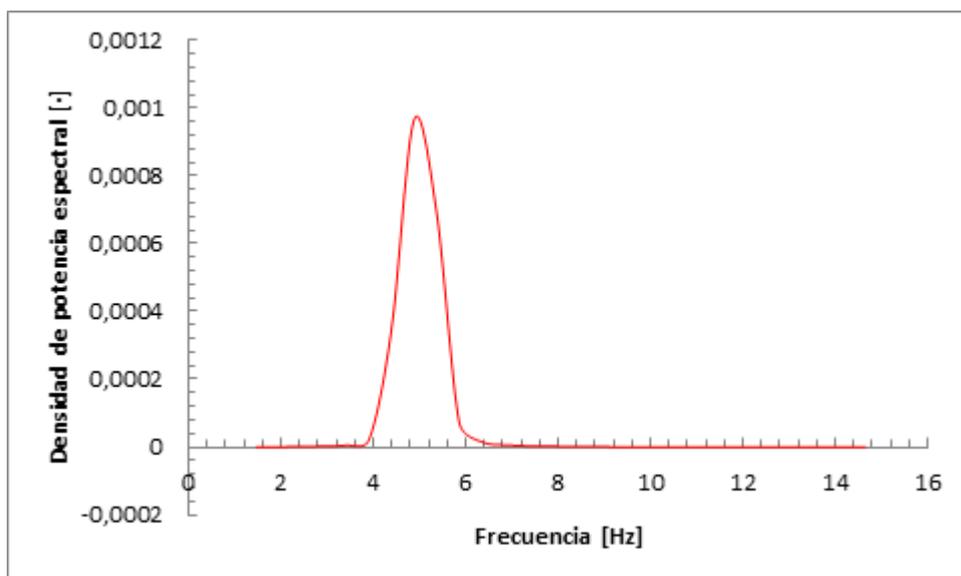


Figura 3.5 Densidad espectral de la señal del ejemplo

La señal de la ecuación 3.21 es de tipo senoidal con una frecuencia natural de 5 Hz, por lo que al calcular la densidad de potencia espectral aparece un pico a esa frecuencia.

# Capítulo 4. Análisis de respuesta en el dominio de la frecuencia

## Introducción

Este capítulo (desarrollado a partir del primer capítulo del libro Structural Dynamics in Industry) da una breve descripción de los estadísticos utilizados para calcular la función de respuesta en frecuencia en la parte experimental.

### 4.1. Análisis estadístico de una función aleatoria

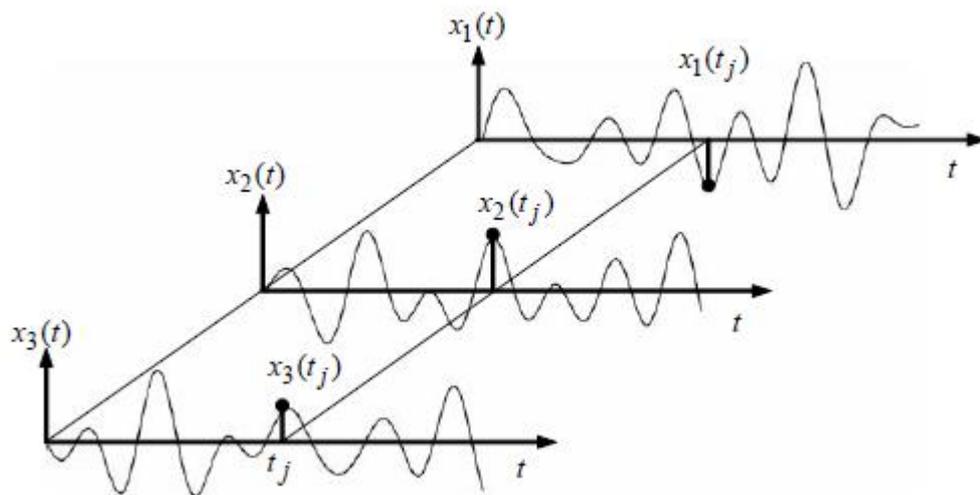


Figura 4.1 Función aleatoria en función del tiempo

Para este análisis se utilizan los siguientes estadísticos:

Media:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (4.1)$$

Cuadrado de la media:

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (4.2)$$

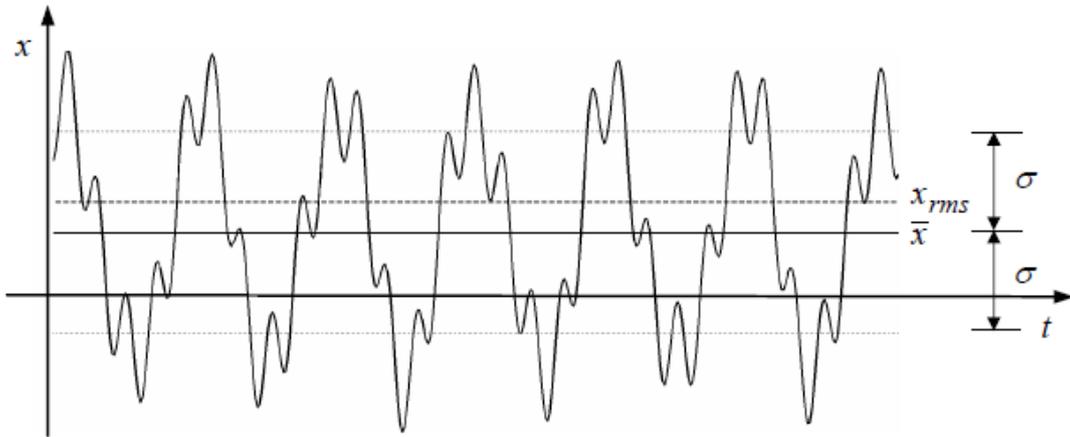
De los que se deduce que la raíz cuadrada de la media al cuadrado (rms en inglés) es:

$$x_{rms} = \sqrt{\bar{x^2}} \quad (4.3)$$

Varianza ( $\sigma_x^2$ ):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt = \bar{x^2} - \bar{x}^2 \quad (4.4)$$

De la que se deduce la desviación típica ( $\sigma_x$ ), que es la raíz cuadrada de la varianza.



**Figura 4.2** Medias y desviación típica

Si el valor de las propiedades es independiente del intervalo temporal  $T$  considerado, el proceso se considera estacionario. A continuación se considerará este caso.

Si se considera la media del producto  $x(t)x(t+\tau)$ , donde  $\tau$  es el retardo, se obtiene una función dependiente de  $\tau$  llamada autocorrelación de  $x$ :

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (4.5)$$

Esta función es par, por lo que:

$$R_{xx}(0) = \overline{x^2} \quad (4.6)$$

Para dos procesos  $x(t)$  e  $y(t)$ , la media del producto  $x(t)x(t+\tau)$  es la correlación cruzada entre  $x$  e  $y$ :

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (4.7)$$

## 4.2. Análisis de potencia espectral

Se puede pasar del dominio temporal al de la frecuencia usando las funciones de correlación definidas anteriormente. A partir de ellas se define la densidad de potencia espectral (PSD) de un proceso  $x(t)$  como la transformada de Fourier de su correlación:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.8)$$

Siendo su inversa:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.9)$$

Lo que implica según 4.6 que:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (4.10)$$

El análisis de potencia espectral de los datos de aceleración de un sistema en oscilación libre permite conocer dónde están sus frecuencias de resonancia y cuál es la más importante. Lo anterior también se puede determinar a partir del cálculo de la función de respuesta en frecuencia.

En el caso de dos procesos  $x(t)$  e  $y(t)$ , se define la densidad de potencia espectral cruzada como la transformada de Fourier de su correlación cruzada:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.11)$$

Las integrales necesarias para el cálculo de la densidad de potencia espectral se resuelven mediante la transformada rápida de Fourier, ya expuesta en el capítulo 3.

### 4.3. Función de respuesta en frecuencia

La función de respuesta en frecuencia relaciona la excitación y la respuesta de un sistema en el dominio de la frecuencia. Si se considera una respuesta  $Y(\omega)$  y una excitación  $X(\omega)$  ambas se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$Y(\omega) = H_{yx}(\omega) \cdot X(\omega) \quad (4.12)$$

Donde  $H_{yx}(\omega)$  es la función de respuesta en frecuencia. En el caso de un movimiento aleatorio se calcula de la siguiente manera:

$$H_{yx}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \quad (4.13)$$

Donde  $S_{xx}(\omega)$  es la densidad de potencia espectral de la excitación y  $S_{xy}(\omega)$  es la densidad de potencia espectral cruzada de la excitación y la respuesta.

## 4.4. Ejemplo

Calculando la FRF de dos señales se obtiene cómo influye una señal en la otra. Partiendo de datos de aceleración de la base y el segundo piso de la estructura, se calcula la FRF mediante el script de Matlab del anexo III. En ese script se calcula la autocorrelación, la correlación cruzada y se dividen para obtener la FRF como se ha visto en este capítulo. Como se observa en las figuras 4.3 y 4.4 los picos de la FRF se producen cuando mayores son las diferencias entre el movimiento de la base y el del segundo piso. Para valores cercanos a 0 dB los valores de las aceleraciones son prácticamente iguales.

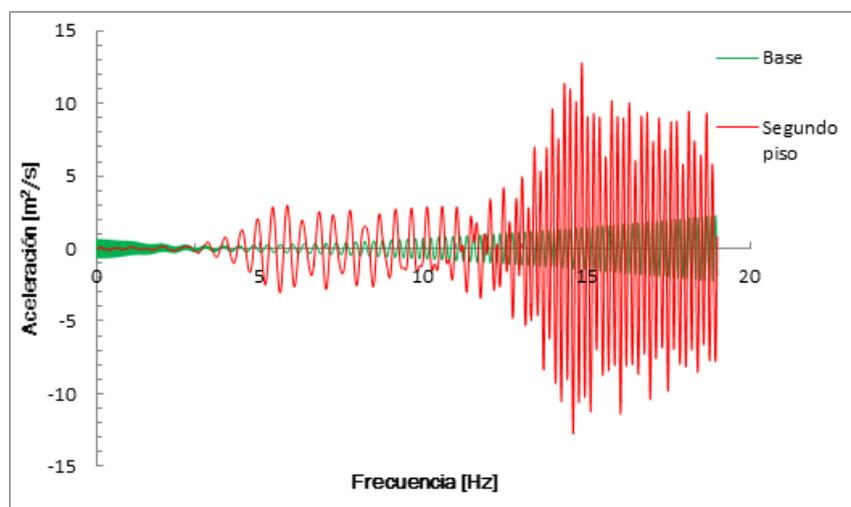


Figura 4.3 Aceleraciones de la base y el segundo piso en el ejemplo

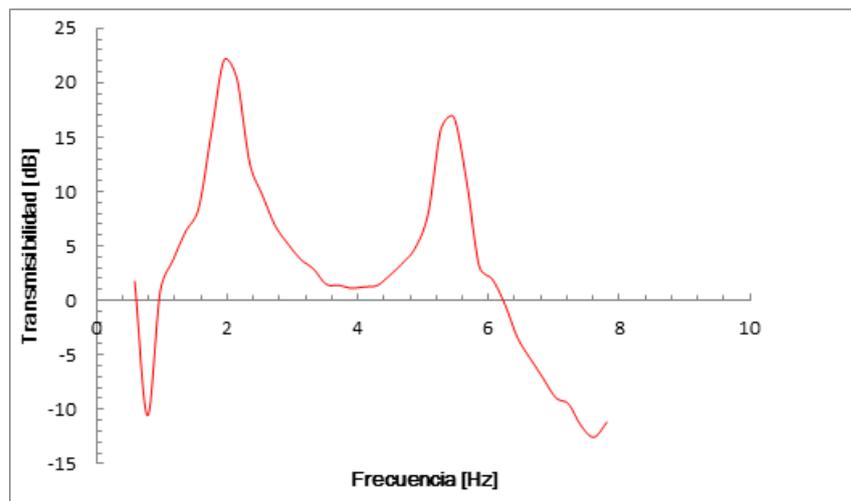


Figura 4.4 Función de respuesta en frecuencia del ejemplo



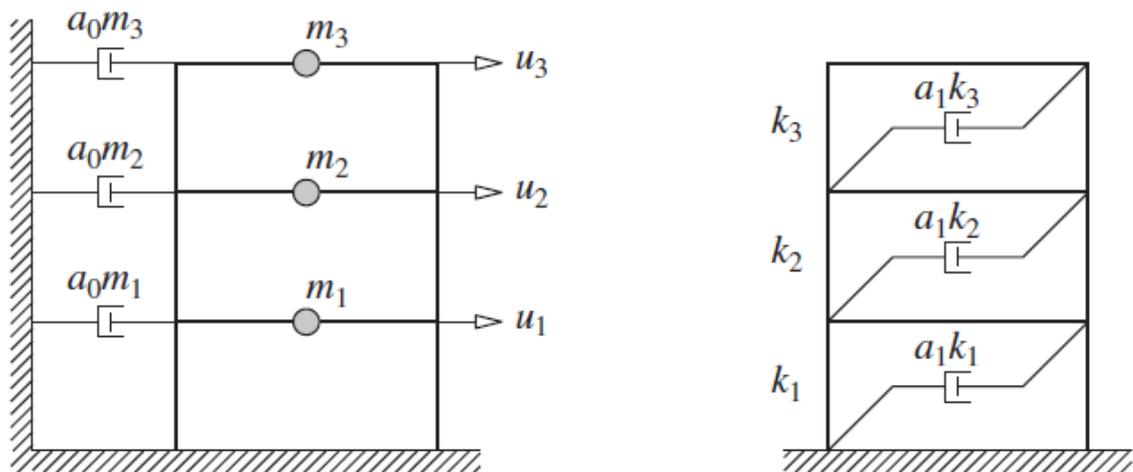
## Capítulo 5. Matriz clásica de rigidez. Amortiguamiento de Rayleigh

A la hora de realizar un análisis dinámico del modelo de una estructura e necesario modelar el amortiguamiento. En este caso se utilizó el modelo de amortiguamiento de Rayleigh, que se presenta en este capítulo (desarrollado a partir del capítulo 11 del libro Dynamics of Structures).

Se considera que el amortiguamiento es proporcional a la masa y a la rigidez:

$$c = a_0 m \quad c = a_1 k \quad (5.1)$$

Donde las constantes  $a_0$  y  $a_1$  tienen unidades de  $\text{seg}^{-1}$  y  $\text{seg}$  respectivamente. Las ecuaciones de 5.1 representan los modelos de amortiguamiento mostrados en la figura 5.1.



**Figura 5.1** Amortiguamiento proporcional a la masa y amortiguamiento proporcional a la rigidez

Lo siguiente es relacionar los amortiguamientos modales de un sistema con el coeficiente de amortiguamiento proporcional a la masa  $a_0$ . El amortiguamiento modal ( $C_n$ ) para el  $n$ -ésimo modo es el siguiente:

$$C_n = a_0 M_n \quad (5.2)$$

Y el amortiguamiento relativo modal ( $\xi_n$ ) es:

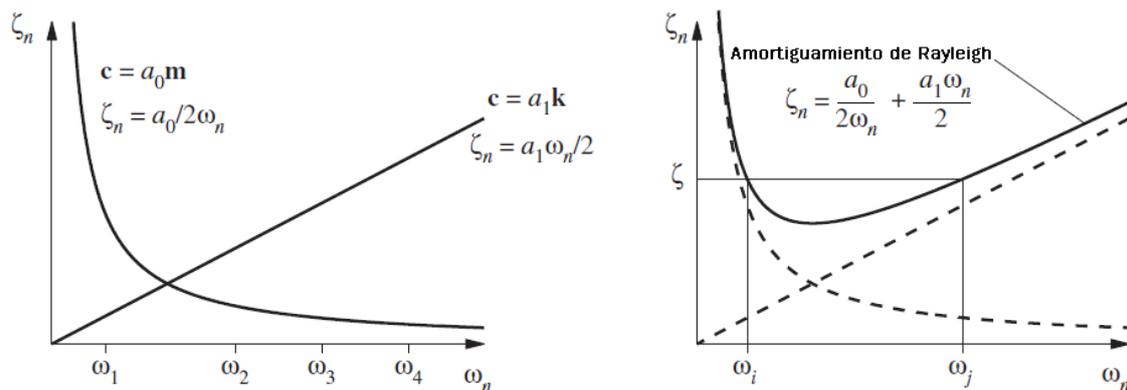
$$\xi_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} \quad (5.3)$$

Como se observa en la figura 5.2 el valor del amortiguamiento relativo debido a la masa disminuye con la frecuencia natural. El coeficiente  $a_0$  se puede fijar para obtener el valor deseado del amortiguamiento relativo para un modo  $i$ -ésimo especificado.

A partir de la ecuación 5.3 se obtiene:

$$a_0 = 2\xi_i \omega_i \quad (5.4)$$

Para un coeficiente  $a_0$  determinado, la matriz de rigidez  $c$  se obtiene mediante la ecuación 5.1.a y el amortiguamiento relativo para cualquier modo se calcula con la ecuación 5.3.



**Figura 5.2** Variación del amortiguamiento relativo modal en función de la frecuencia

De manera similar, los coeficientes modales de amortiguamiento para un sistema con amortiguamiento proporcional a la rigidez se pueden relacionar con  $a_1$  de la siguiente manera:

$$C_n = a_1 \omega_n^2 M_n \quad \xi_n = \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (5.5)$$

Como se muestra en la figura 5.2, el amortiguamiento relativo debido a la rigidez es directamente proporcional a la frecuencia natural. El coeficiente  $a_1$  se puede seleccionar para obtener un valor determinado del amortiguamiento modal en cualquier modo  $j$ -ésimo. A partir de la ecuación 5.5.b se obtiene:

$$a_1 = \frac{2\xi_j}{\omega_j} \quad (5.6)$$

Con  $a_1$  determinado, la matriz de amortiguamiento  $c$  se conoce de 5.1b y el amortiguamiento relativo para cualquier modo se puede calcular a partir de 5.5.b.

Ninguna de las dos matrices de amortiguamiento definidas anteriormente es apropiada para para el análisis de sistemas de varios grados de libertad. Las variaciones del amortiguamiento modal que predicen no son consistentes con los datos experimentales, que muestran que el valor real se mantiene de manera aproximada para varios modos de vibración de la estructura.

Por lo tanto es necesario considerar el modelo de amortiguamiento de Rayleigh, que combina las dos matrices anteriores:

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (5.7)$$

Siendo el coeficiente de amortiguamiento relativo del  $n$ -ésimo modo:

$$\xi_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (5.8)$$

Los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  se pueden calcular a partir de los coeficientes de amortiguamiento relativo de dos modos, lo que se expresa de forma matricial en la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen ambos coeficientes. Si se supone que ambos modos tienen el mismo coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ , lo que concuerda con los datos experimentales,  $a_0$  y  $a_1$  toman los siguientes valores:

$$a_0 = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (5.10)$$

Estos valores determinan la matriz de amortiguamiento a partir de 5.7 y los amortiguamientos relativos modales a partir de 5.8, que varían en función de la frecuencia natural como se muestra en la figura 5.2.

A la hora de aplicar este modelo a un problema práctico, se tienen que escoger dos modos  $i$  y  $j$  que contribuyan significativamente a la respuesta del sistema, ya que los modos a partir del  $j$ -ésimo tendrán un amortiguamiento creciente y a partir de cierto modo serán eliminados por el alto amortiguamiento.

## Capítulo 6: Descripción del montaje experimental

### 6.1. Mesa agitadora

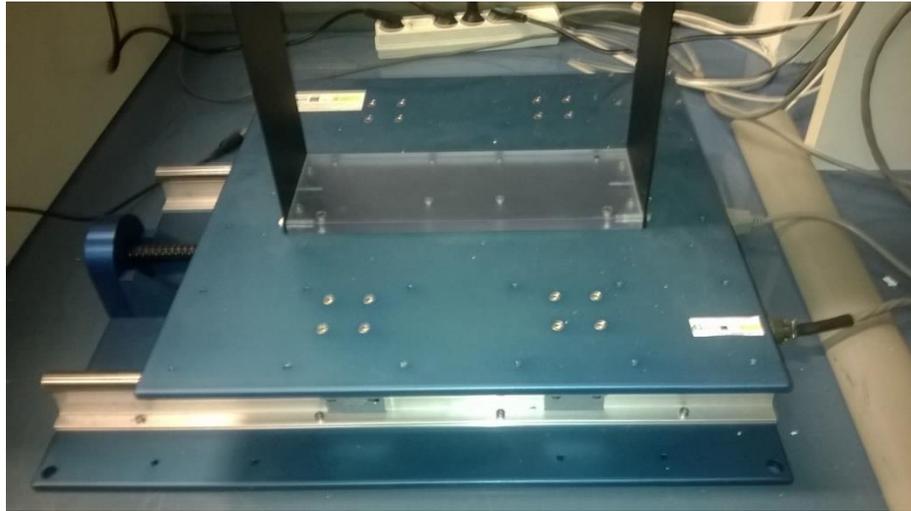


Figura 6.1 Mesa agitadora

Se ha utilizado el modelo Quanser Shake Table II, capaz de desplazar una carga de 7,5 kg a una distancia de 7,62 cm en cada sentido. La plataforma se desplaza sobre dos carriles de metal usando rodamientos lineales para conseguir movimientos suaves.

La plataforma se mueve mediante un tornillo sin fin accionado por un motor trifásico sin escobillas de 400 Wattios. El motor cuenta con un encóder de alta resolución que permite medir la posición lineal con una resolución de 3,1  $\mu\text{m}$ .

## 6.2. Módulo universal de potencia y tarjeta de adquisición de datos



Figura 6.2 Módulo de potencia y tarjeta de adquisición de datos

El control del movimiento de la mesa se realiza mediante un PC. La señal generada pasa por la tarjeta de adquisición de datos y de ahí al módulo universal de potencia.

## 6.3. Acelerómetros



Figura 6.3 Detalle de acelerómetro y posición de los mismos

Se han utilizado tres acelerómetros, situados en la base y en cada piso de la estructura. Miden la aceleración en el plano XY y están calibrados para que 1 Voltio equivalga a 1g, pudiendo medir en un rango de  $\pm 5g$ . Los sentidos positivos de medida vienen indicados por las flechas impresas sobre cada acelerómetro.

Cada sensor está conectado con el módulo de potencia, y su señal va de ahí a la tarjeta de adquisición de datos.

## 6.4. PC

Está conectado con la placa de adquisición de datos. El control y la adquisición de datos se hacen mediante el programa WinCon, que permite guardar los registros de los acelerómetros y generar la señal de control.



# Capítulo 7. Caracterización de la estructura

## 7.1. Determinación de la respuesta en frecuencia

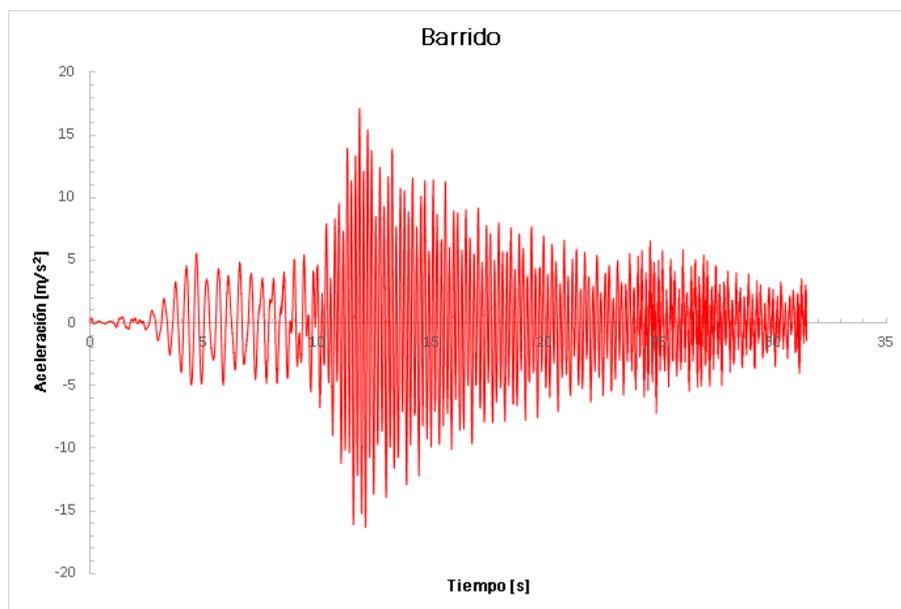
Por la distribución de masas de la estructura, se espera que se comporte de manera parecida a un sistema de dos grados de libertad, con dos frecuencias de resonancia que destaquen sobre el resto.

Se han determinado realizando un análisis mediante el cálculo de la densidad de potencia espectral y otro mediante la función de respuesta en frecuencia.

### 7.1.1. Análisis de densidad de potencia espectral

En este caso se obtuvo con el programa Sigview a partir de los datos experimentales. Se tomaron datos en dos situaciones diferentes:

En la primera se aplicó un desplazamiento senoidal con una amplitud constante de 0.002 m y una frecuencia creciente hasta 10 Hz. Este tipo de función se conoce como barrido o chirp en inglés.



**Figura 7.1** Aceleración del piso superior al aplicar un movimiento de barrido en la base

En la segunda se aplicó un desplazamiento inicial a la estructura dejándola oscilar libremente.

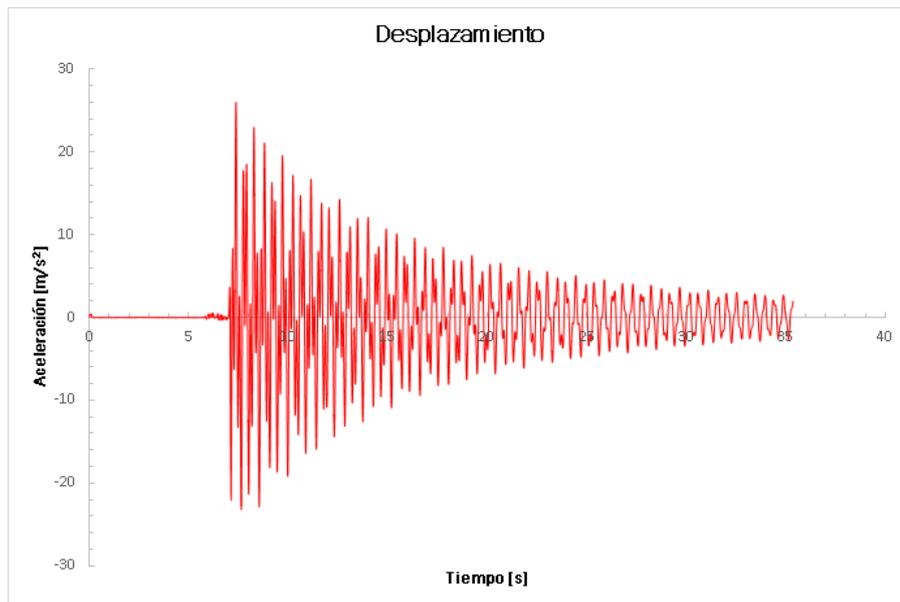


Figura 7.2 Aceleración del piso superior en oscilación libre

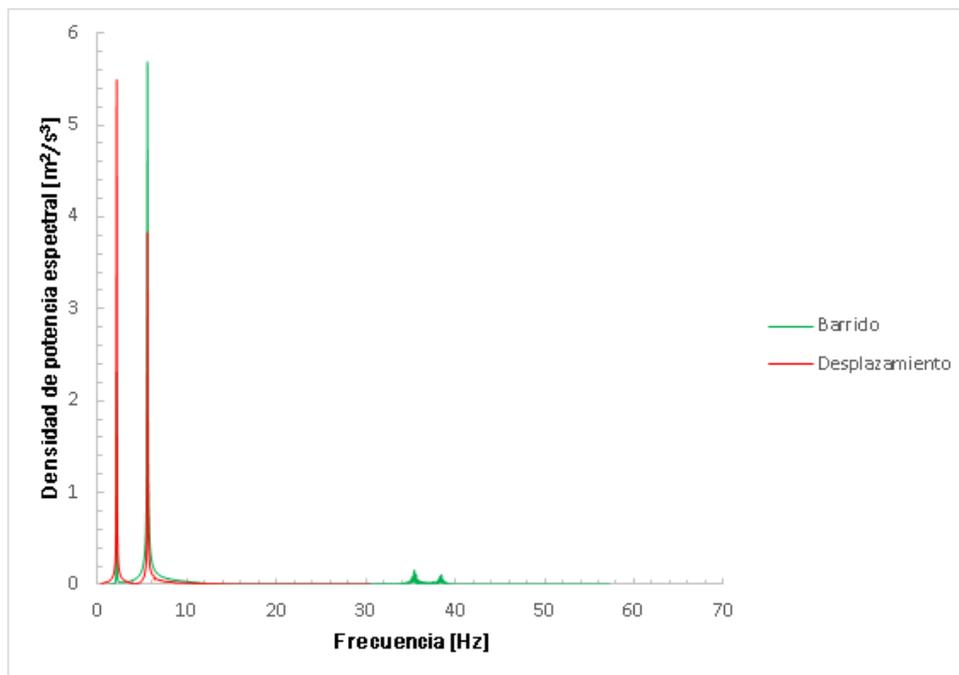


Figura 7.3 Densidad de potencia espectral a partir de datos experimentales

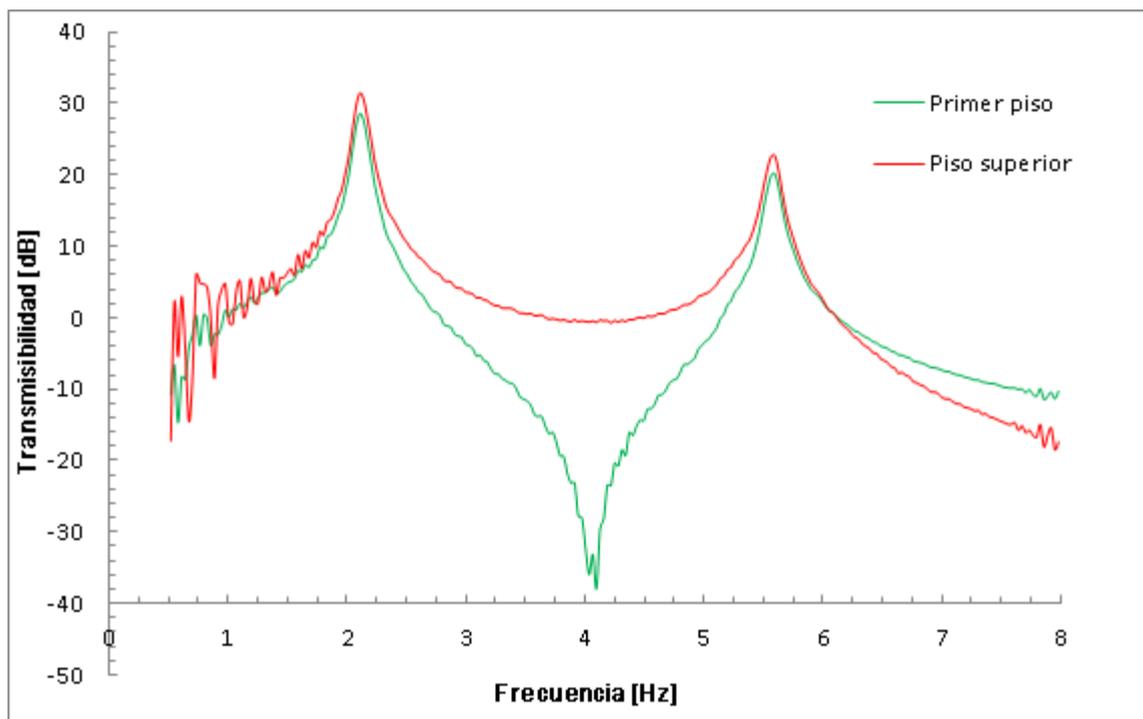
Como se puede observar, hay dos modos de vibración que destacan sobre el resto. El más importante es el primero, situado en 2,1057 Hz. El segundo está situado en 5,5542 Hz.

### 7.1.2. Análisis FRF

Consiste en calcular la función de transferencia entre la aceleración de la base de la mesa y la de cada piso. Todas las FRFs (las experimentales y las del modelo de ANSYS) se calcularon de la misma manera a lo largo del trabajo. Para calcularla se le aplicó un barrido en la base de 0,5 Hz a 8 Hz en 100 s con la siguiente expresión:

$$u(t)=A\text{sen}\left(2\pi(0,5t+0,5kt^2)\right) \quad (7.1)$$

Los datos obtenidos se procesaron con un script de MATLAB (ver Anexo III) con los siguientes resultados:



**Figura 7.4** Comparación de la FRF de la aceleración de los dos pisos debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales

Como se observa en la gráfica aparecen dos modos de resonancia (los mismos que los de la FFT) en los que los dos pisos se mueven mucho más que la base. Estos picos aparecen en 2,11 Hz y 5,54 Hz respectivamente, con valores de transmisibilidad mayores de 25 dB.

También aparece una frecuencia de antiresonancia a la frecuencia de 4,1 Hz. En esta frecuencia el segundo piso tiene un valor de la transmisibilidad de aproximadamente 0 dB, lo que indica que se mueve con una amplitud similar a la de la base. El primer piso en cambio tiene valores cercanos a -40 dB, lo que equivale a estar prácticamente parado cuando la base se mueve a esa frecuencia.

Los dos modos de vibración tenían las siguientes deformadas:

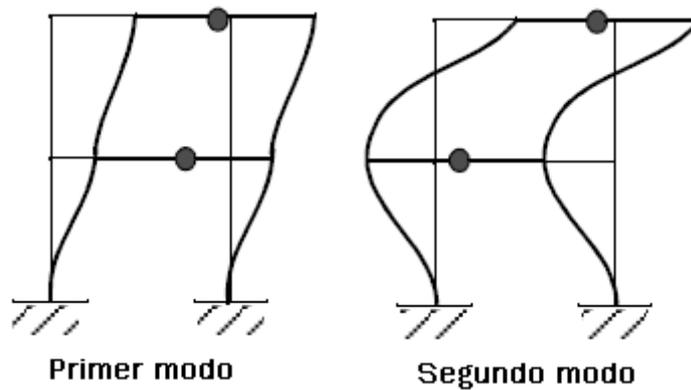


Figura 7.5 Deformadas de los modos de vibración de la estructura

## 7.2. Determinación del amortiguamiento relativo

El cálculo del coeficiente de amortiguamiento relativo ( $\zeta_n$ ) en las dos frecuencias modales se llevó a cabo mediante ajuste logarítmico y mediante el método del ancho de banda de mitad de potencia.

### 7.2.1. Determinación del amortiguamiento relativo mediante ajuste de la exponencial

Para el primero se aplicó un desplazamiento en la base de amplitud 0.002 m y la frecuencia de cada modo. Una vez se había estabilizado se paró el desplazamiento y se dejó a la estructura oscilar libremente.

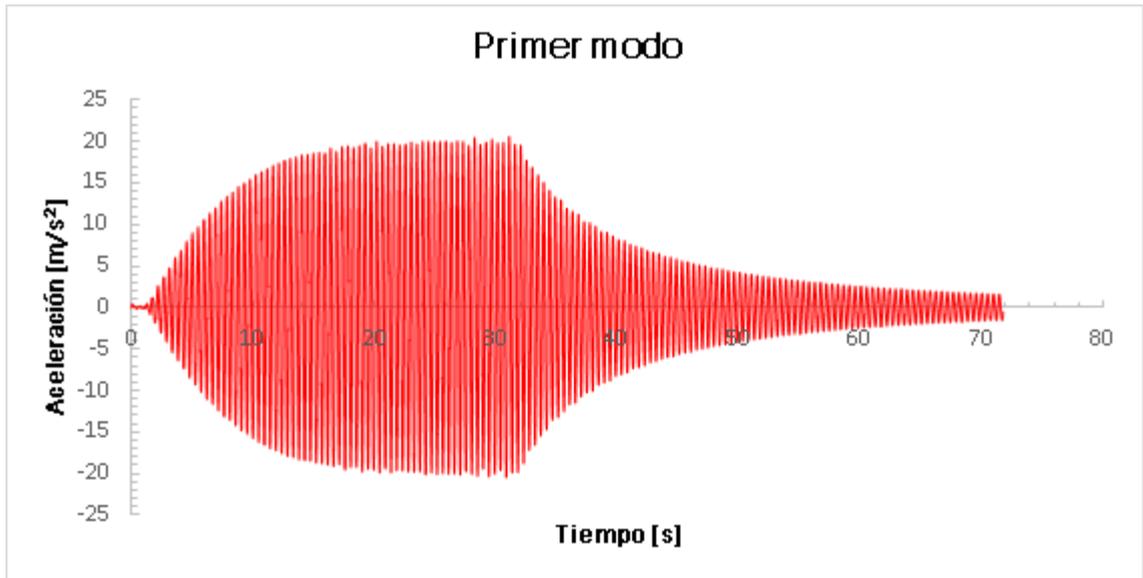


Figura 7.6 Aceleración en el piso superior en el primer modo de vibración

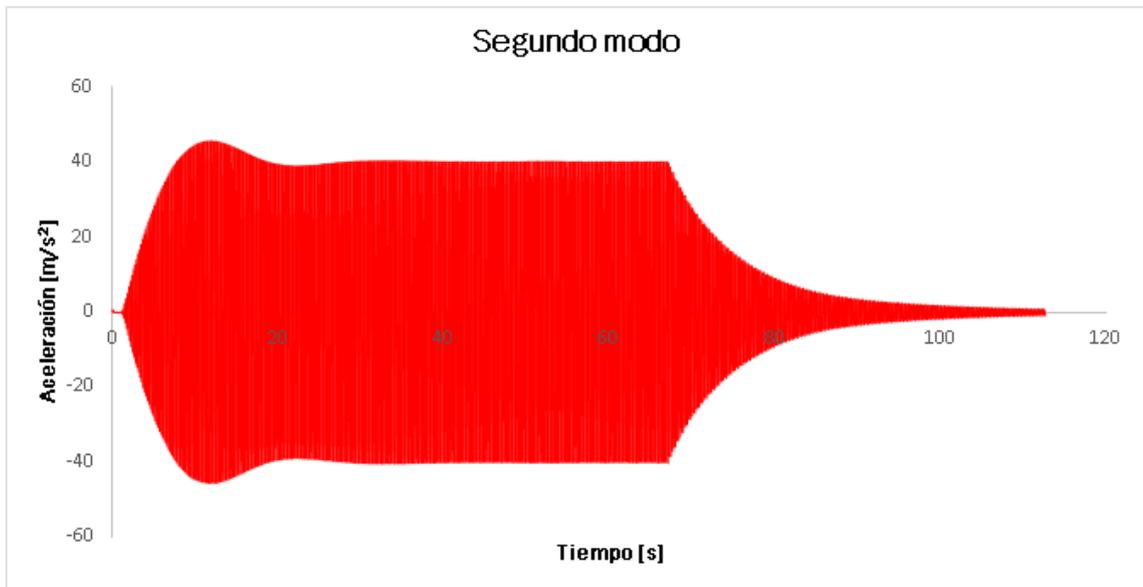
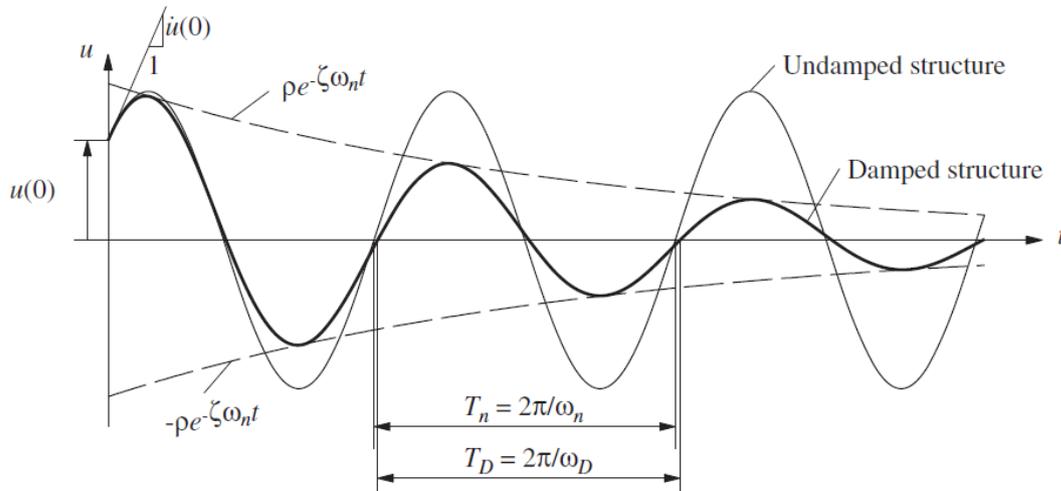


Figura 7.7 Aceleración en el piso superior en el segundo modo de vibración

La forma de la segunda gráfica se debe a que el motor de la mesa agitadora no tiene suficiente potencia para desplazar la estructura con la frecuencia del segundo modo. A continuación se determinó el amortiguamiento relativo a partir de las gráficas anteriores.

La ecuación que describe el movimiento de un sistema subamortiguado de un grado de libertad es la siguiente:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ u(0) \cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D} \text{sen}\omega_D t \right] \quad (7.2)$$



**Figura 7.8** Efectos del amortiguamiento en oscilación libre (Capítulo 2, Anil K.Chopra: "Dynamics of structures. Theory and applications to earthquake engineering")

A partir de ella se obtienen ecuaciones de las curvas envolventes de la figura anterior. Calculando las curvas envolventes de la oscilación libre de cada modo se puede obtener el amortiguamiento relativo de la siguiente manera.

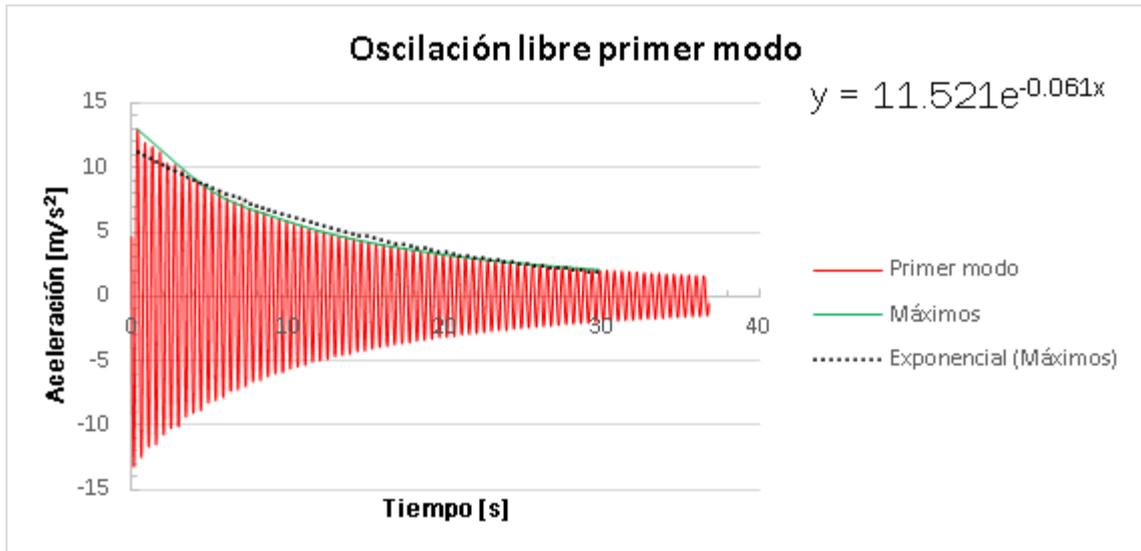


Figura 7.9 Ajuste de la curva exponencial en el primer modo

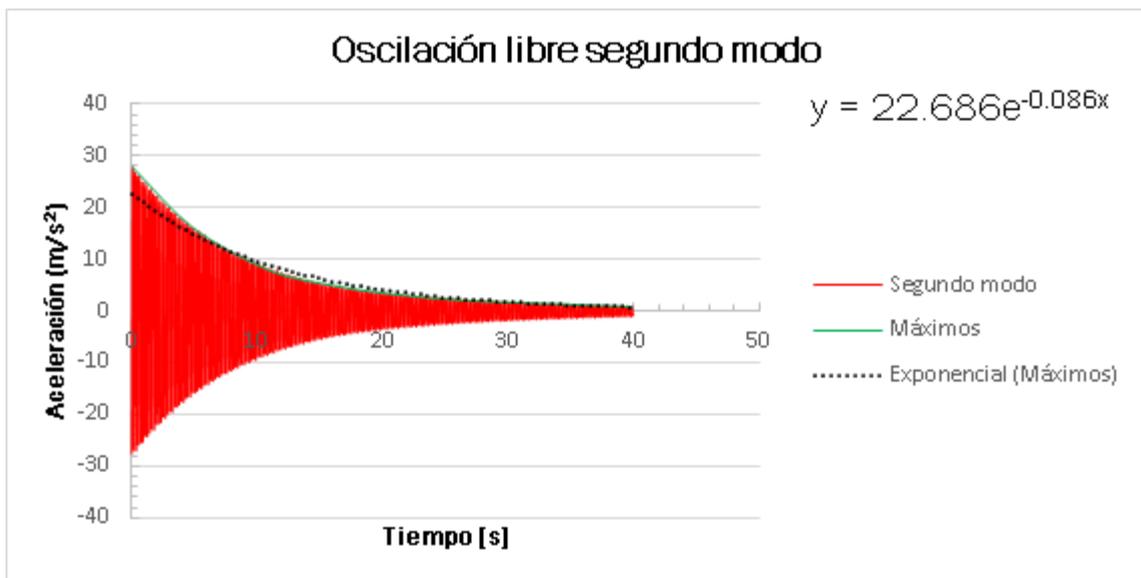


Figura 7.10 Ajuste de la curva exponencial en el segundo modo

Despejando del exponente de la curva envolvente exponencial:

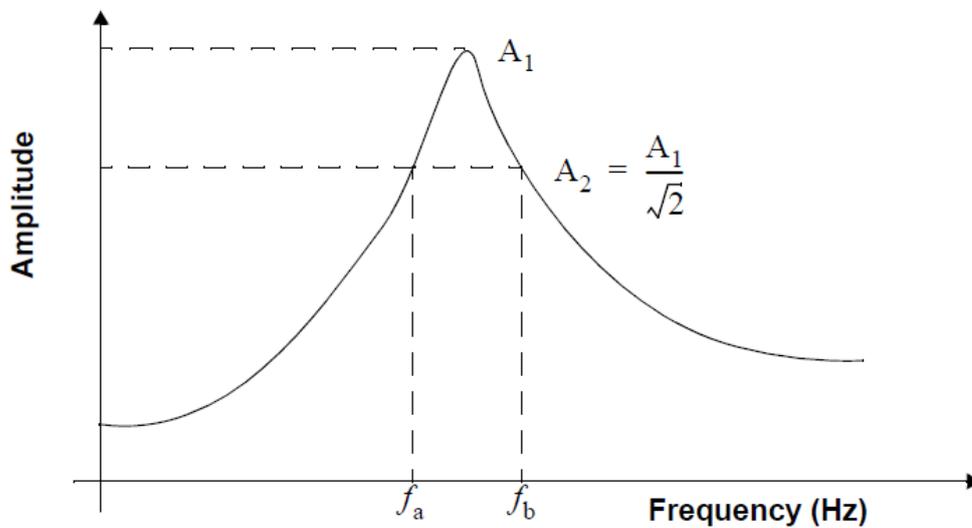
$$\xi_n = \frac{\text{Exponente}}{\omega_n} \quad (7.3)$$

$$\xi_1 = \frac{0,061}{2 \cdot \pi \cdot 2,1057} = 0,00461$$

$$\xi_2 = \frac{0,061}{2 \cdot \pi \cdot 5,5542} = 0.00247$$

### 7.2.2. Determinación del amortiguamiento relativo mediante el método del ancho de banda de mitad de potencia

En este método se usa la FRF calculada anteriormente (Figura 7.4).



**Figura 7.11** Método del ancho de banda de mitad de potencia (Capítulo 3, Anil K.Chopra: "Dynamics of structures. Theory and applications to earthquake engineering")

Consiste en determinar las frecuencias en las que la amplitud de la función de transferencia  $A_2$  cumple:

$$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \quad (7.4)$$

Donde  $A_1$  es la amplitud del pico (ver figura 7.12). Las frecuencias  $f_a$  y  $f_b$  son las asociadas con los puntos de mitad de potencia a ambos lados del pico. A partir de estas frecuencias el amortiguamiento relativo se calcula de siguiente manera:

$$\xi_n = \frac{f_b - f_a}{f_b + f_a} \quad (7.5)$$

En este caso:

$$\xi_1 = \frac{2,23\text{Hz} - 2,015\text{Hz}}{2,23\text{Hz} + 2,015\text{Hz}} = 0,0506478$$

$$\xi_2 = \frac{5,68\text{Hz} - 5,47\text{Hz}}{5,68\text{Hz} + 5,47\text{Hz}} = 0,0188341$$

Los valores calculados mediante este método difieren notablemente de los calculados mediante ajuste de la exponencial. Esto se debe a que el método de ancho de banda de mitad de potencia da errores significativos cuando, como en este caso, el amortiguamiento del sistema es pequeño.

La falta de precisión se debe a que los picos de la FRF son más estrechos cuanto menor es el amortiguamiento, siendo mayor la probabilidad de errar al coger las frecuencias con amplitud  $A_1/\sqrt{2}$ . Por lo tanto, para amortiguamientos pequeños es mejor escoger el método de ajuste de la exponencial y de aquí en adelante se considerarán los datos de amortiguamiento obtenidos mediante este método. A partir de los datos de amortiguamiento se calcularon los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  del modelo de amortiguamiento de Rayleigh resolviendo el sistema de ecuaciones 5.9.

**Tabla 7.1** Valores de los coeficientes de amortiguamiento de Rayleigh

$a_0$	0,10103
$a_1$	5,6329E-005



# Capítulo 8. Modelado de la estructura

## 8.1. Comprobación de la rigidez de las columnas

Primero había que determinar si el giro entre las dos columnas estaba restringido o no, esto se hizo modelando una columna con la base empotrada. Para ello se fijaron 4 keypoints, se creó un área a partir de ellos y se malló (ver figura 8.2) utilizando elementos SHELL181, aptos para modelar sólidos elásticos de pequeño espesor como el de este caso.

Cada elemento cuenta con cuatro nodos con seis grados de libertad en cada nodo. Para mallar con este tipo de elementos se ha introducido el área a mallar y el espesor de la sección.

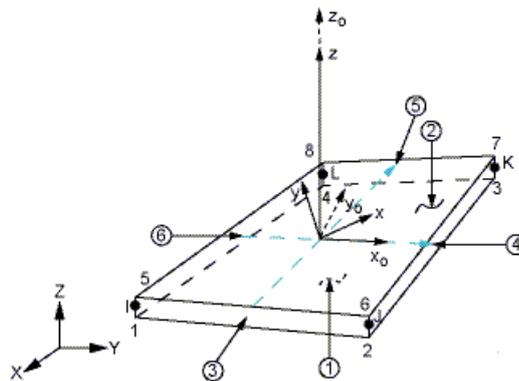
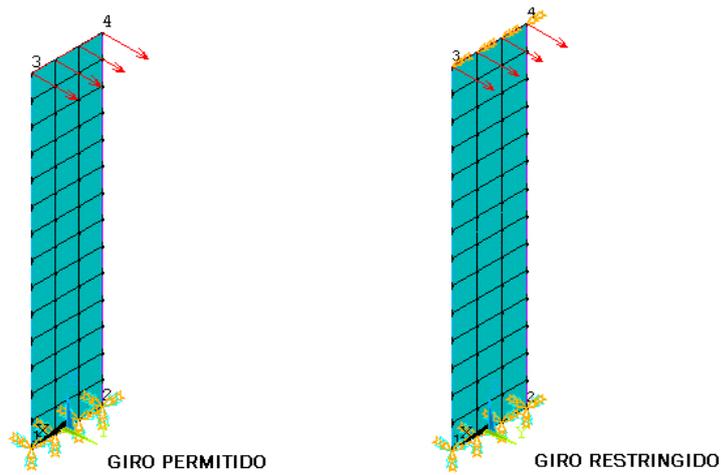


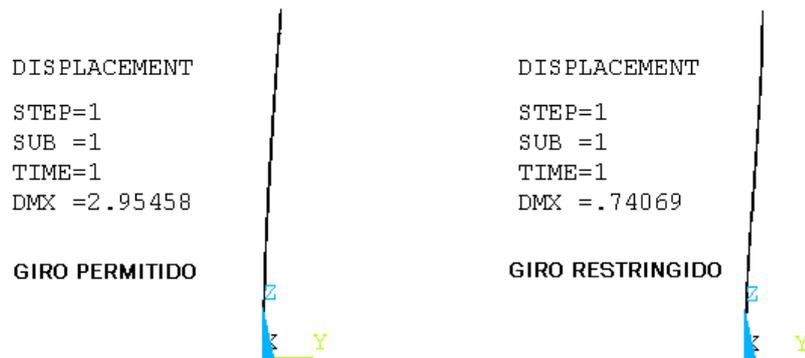
Figura 8.1 Elemento SHELL181

Se probaron dos situaciones diferentes, ambas con una fuerza de 250 N aplicada en la parte superior de la columna. En la primera (ver Anexo I.1) el giro estaba restringido y en la otra (ver Anexo I.2) no.



**Figura 8.2** Condiciones de contorno de las pruebas de rigidez en una columna

Según los datos del fabricante la columna debía tener una rigidez de 250 N/m, los resultados fueron los siguientes:

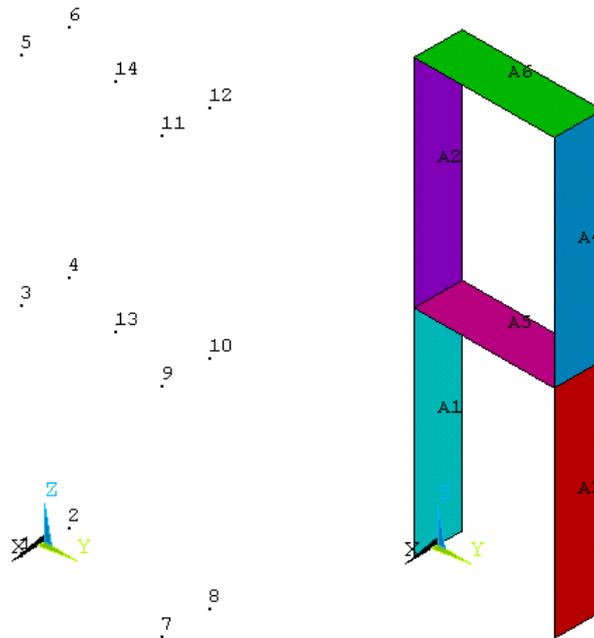


**Figura 8.3** Resultado de las pruebas de rigidez en una columna

Claramente el caso que más se aproxima a los datos conocidos es el caso de giro restringido, por lo que se modeló la estructura completa suponiendo uniones rígidas.

## 8.2. Modelo de uniones rígidas

### 8.2.1. Descripción del modelo



**Figura 8.4** Modelo de uniones rígidas

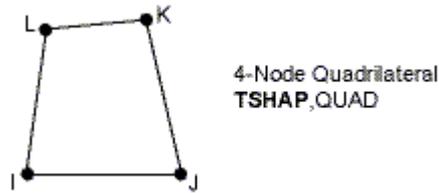
La geometría se modeló mediante 12 keypoints en los extremos de las columnas y en los centros de masas de los pisos. A partir de ellos se crearon las 6 áreas que componen la estructura.

El amortiguamiento se introdujo mediante los dos coeficientes del amortiguamiento de Rayleigh calculados en el capítulo 7.

Para mallar la estructura se utilizaron los siguientes elementos:

En las columnas se utilizaron elementos SHELL181, como se hizo para anteriormente para modelar la columna por separado.

Los pisos se han considerado rígidos, y se han utilizado elementos TARGE170 para su mallado. Este tipo de elementos tienen varias configuraciones, pero en este caso se ha utilizado el elemento de cuatro lados con un nodo en cada esquina, similar al anterior.



**Figura 8.5** Elemento TARGE170

Los grados de libertad del sólido rígido se definen mediante un nodo piloto asociado a él, que en este caso está situado en el centro de masas de cada piso. Dentro de las opciones del elemento se ha escogido condiciones de contorno definidas por el usuario (Keyopt(2)=1) , ya que permite poner condiciones de contorno en cualquier nodo de la superficie, condición necesaria para modelar la unión entre el piso (rígido) y la columna (flexible).

El elemento TARGE170 está asociado a una superficie y no tiene en cuenta la sección, por lo tanto, es necesario otro tipo de elemento para incluir el peso de cada piso en el modelo. Este elemento se denomina MASS21 y se utiliza para mallar masas puntuales. Como datos de entrada se introdujo la masa de cada piso y la posición de su centro de masas.

## 8.2.2. Validación

La rigidez de dos columnas y un piso tenía que ser de 500 N/m. Para comprobarlo se puso una carga de 500N en el piso superior inmovilizando el primero (ver Anexo I.3) y después se hizo lo mismo colocando la fuerza en el primer piso con la base empotrada (ver Anexo I.4). Los resultados fueron los siguientes:

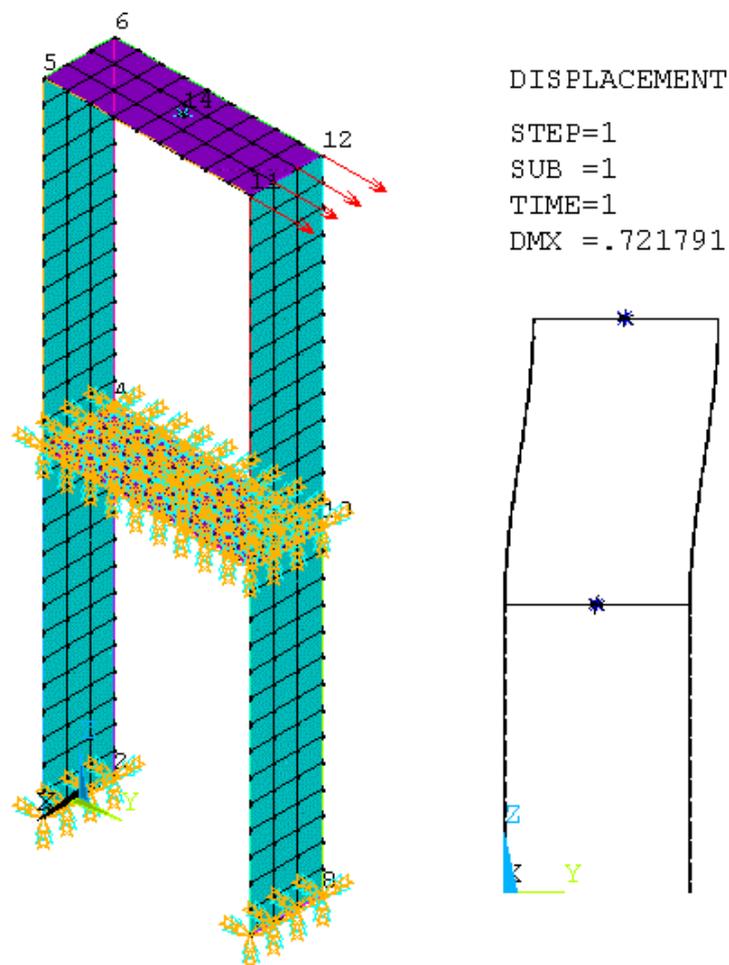
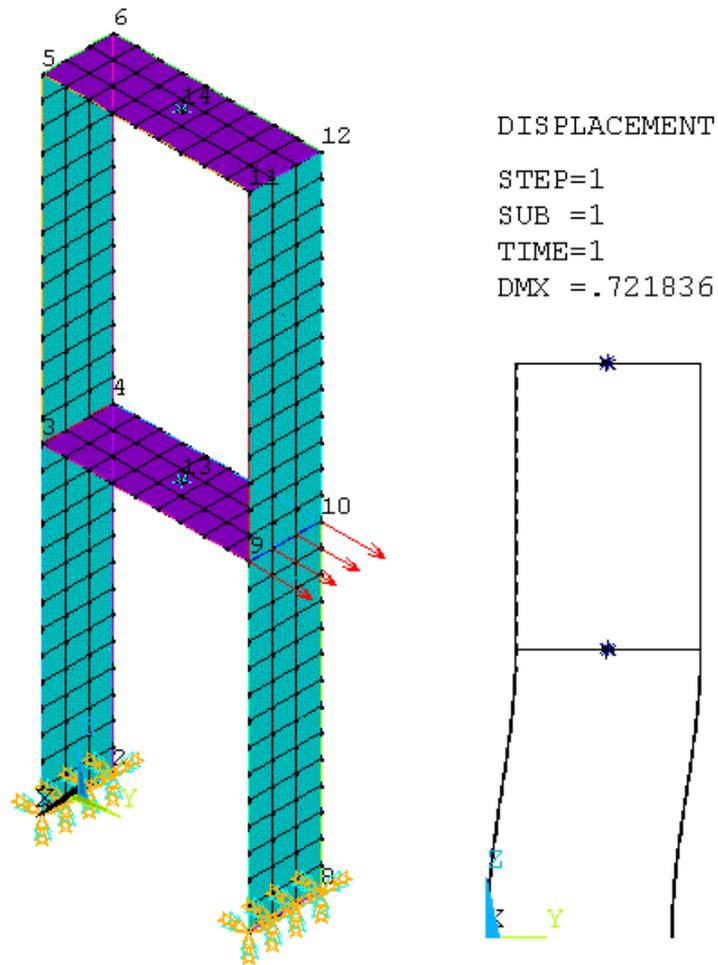


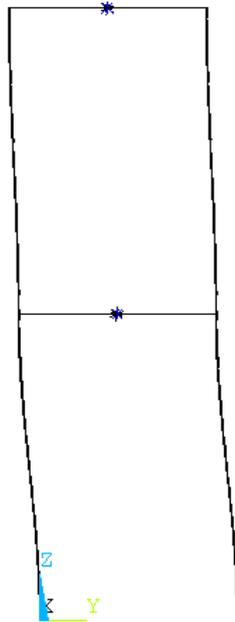
Figura 8.6 Modelo rígido con fuerza en el segundo piso



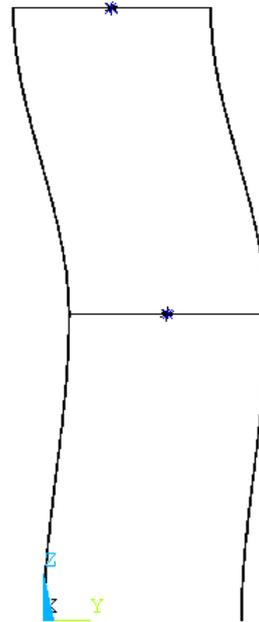
**Figura 8.7** Modelo rígido con fuerza en el primer piso

Como se puede observar, el desplazamiento máximo en ambos casos era bastante menor que el que debería tener, lo que indicaba que la rigidez era superior a la deseada. Para confirmar este hecho, se realizó un análisis modal (ver Anexo I.5) con los siguientes resultados:

DISPLACEMENT  
STEP=1  
SUB =1  
FREQ=2.44881  
DMX =.772327



DISPLACEMENT  
FREQ=6.2598  
DMX =.752514



**Figura 8.8** Resultados del análisis modal del modelo rígido

Como se ve en la imagen superior, la frecuencia de los dos primeros modos estaba por encima de las determinadas experimentalmente, lo que según la ecuación de la frecuencia natural (ecuación 8.1) indica que el modelo tiene una rigidez más alta que la de la estructura real.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.1)$$

Por lo tanto, fue necesario crear un modelo con uniones semirrígidas y actualizarlo para que los modos de vibración tuviesen las mismas frecuencias.

## 8.3. Modelo con uniones semirrígidas

### 8.3.1. Descripción del modelo

Hay algunas diferencias con el modelo anterior. Se modeló la placa inferior, ya que es necesaria para crear la unión semirrígida entre la placa inferior (sobre la que se aplican los desplazamientos) y las columnas. Además se duplicaron los keypoints en las esquinas de las columnas, con el objetivo de que también haya parejas de nodos en estas zonas después de mallar, condición necesaria para los elementos que modelan uniones semirrígidas.

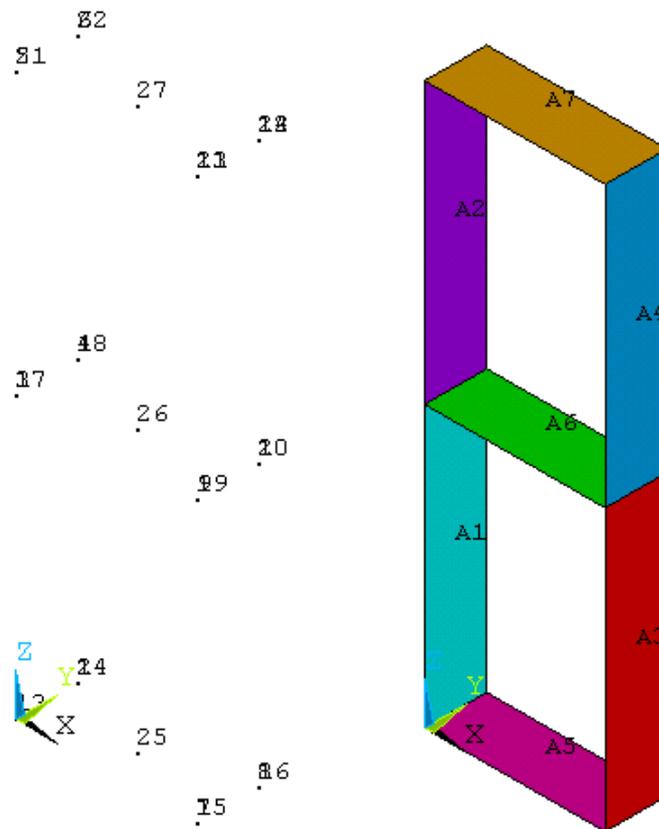
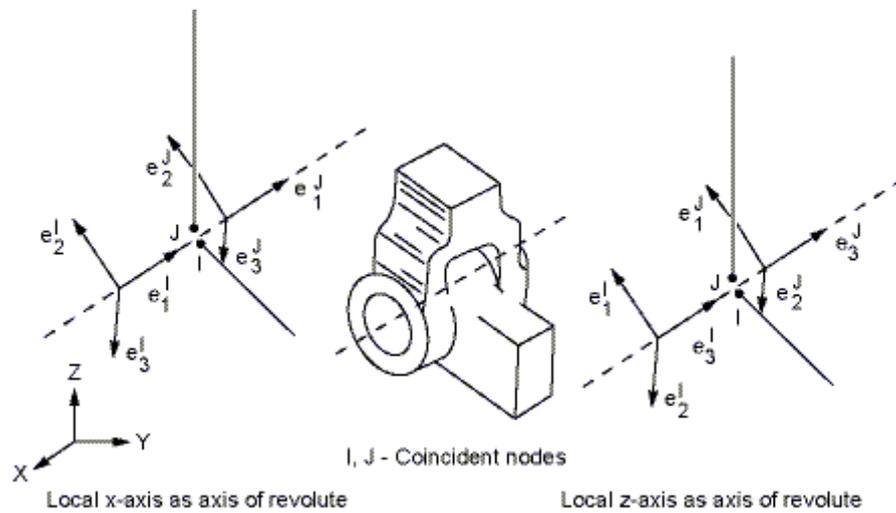


Figura 8.9 Modelo de uniones semirrígidas

Para su mallado se utilizaron los mismos elementos que en el caso anterior para modelar los pisos y las columnas. La diferencia está en las uniones, malladas utilizando elementos MPC184, que sirven para crear uniones de diferentes tipos. En este caso se utilizaron los MPC184 con keyopt(1)=6, que es la opción de uniones de revolución.



**Figura 8.10** Elemento MPC184

Se le asignó un valor diferente a la rigidez de las uniones de cada piso.

### 8.3.2. Análisis de convergencia de malla

El modelo semirrígido de ANSYS contiene un parámetro para fijar el número de elementos de la malla, llamado Número de Divisiones. Se llevó a cabo un análisis modal con valores crecientes de este parámetro con los siguientes resultados:

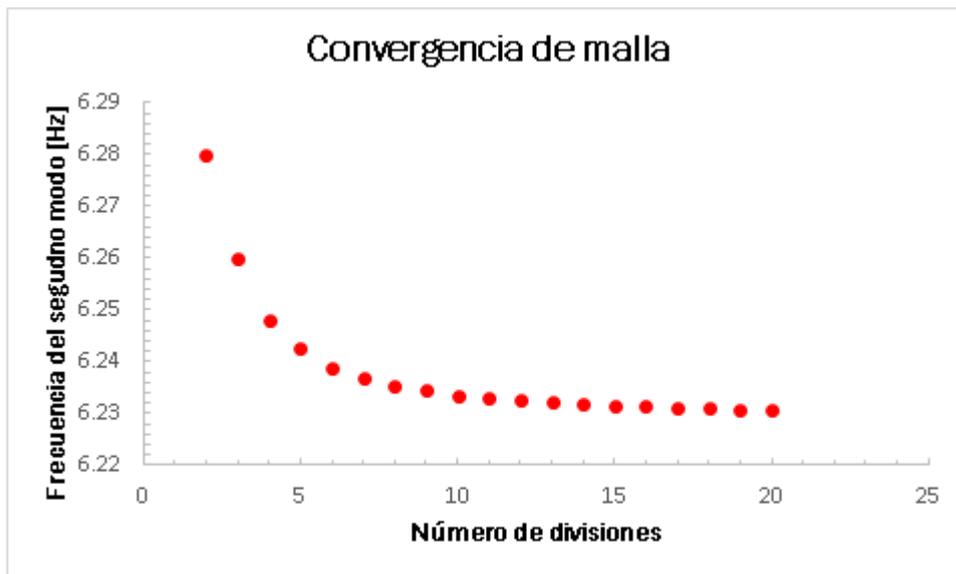


Figura 8.11 Convergencia de malla

Se escogió un valor de 10 para este parámetro, ya que un valor más alto requiere más tiempo de cálculo y, como se ve en la figura 8.11, no varía apenas el resultado.

### 8.3.3. Actualización del modelo

El modelo se actualizó usando ANSYS Workbench, utilizando la rigidez de cada unión como entradas y las frecuencias de los dos primeros modos como salidas. En un principio se supuso que la unión entre la base y la columna era rígida y que las de los dos pisos tenían la misma rigidez.

El resultado no fue el deseado, ya que las frecuencias del segundo modo estaban por encima del valor real y las del primero por debajo, por lo que la suposición de que las dos uniones tenían la misma rigidez era incorrecta.

Se volvió a hacer lo mismo con valores diferentes y suponiendo mayor la rigidez de la unión del primer piso que la del segundo, algo razonable debido a que el espesor del primer piso es mayor que el del segundo.

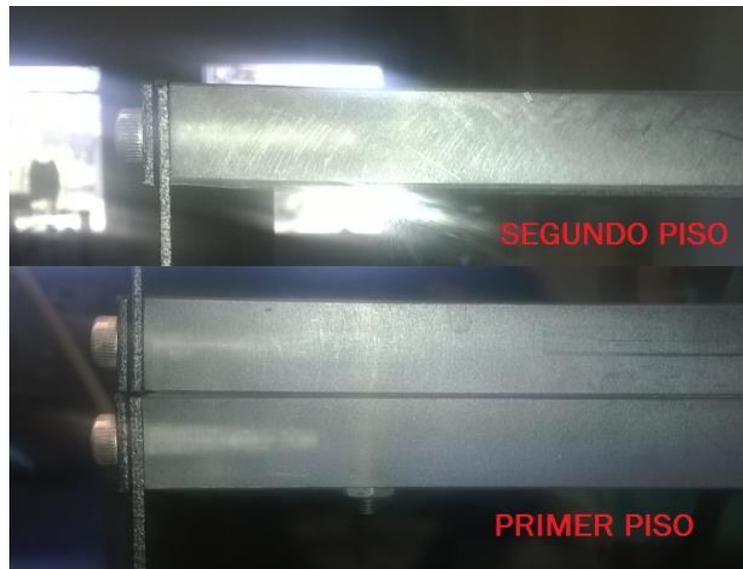


Figura 8.12 Detalle de las uniones de los dos pisos

Finalmente se escogieron valores de rigidez de 12,036 Nm/rad para la unión del primer piso y de 5,6101 Nm/rad para la del segundo, con los que se obtienen frecuencias (imagen inferior) muy parecidas a los valores medidos experimentalmente (2,1057Hz y 5,5542Hz).

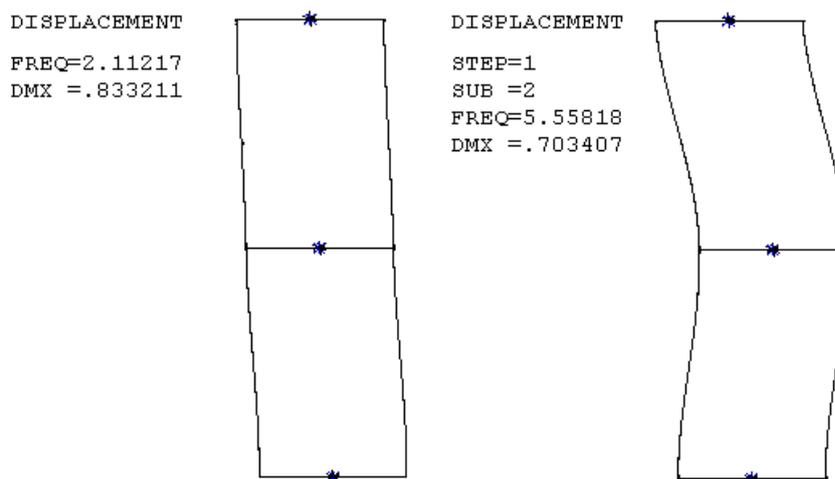
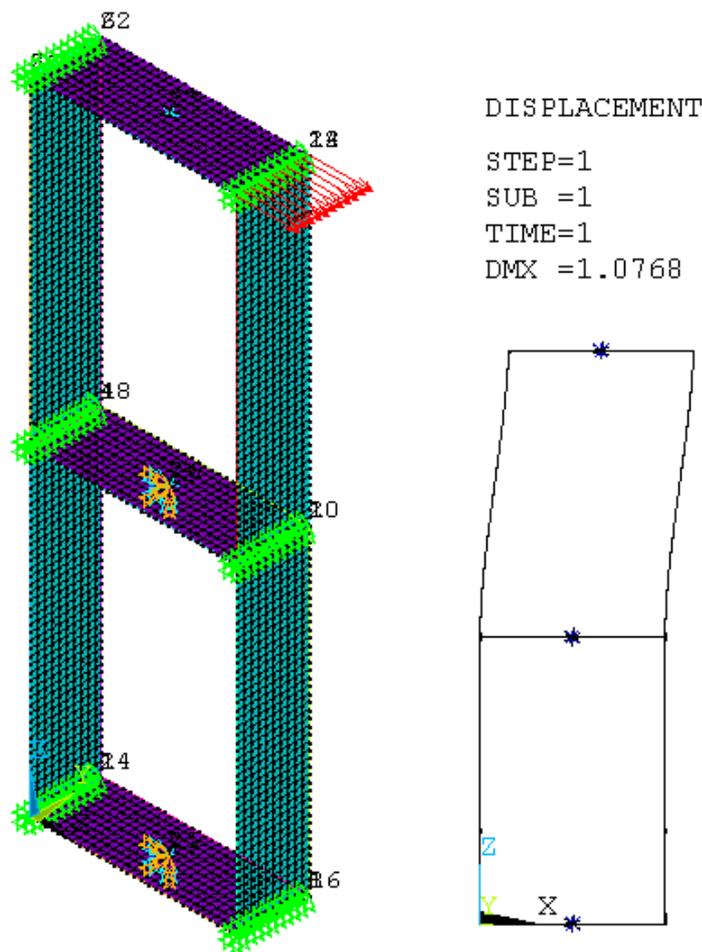


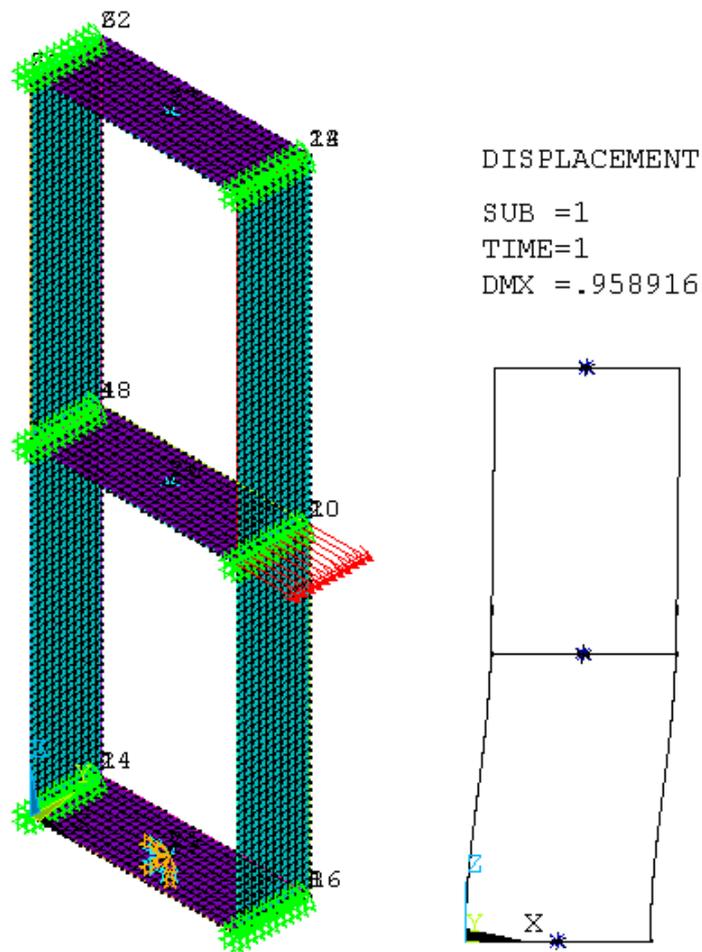
Figura 8.13 Resultados del análisis modal del modelo semirrígido

### 8.3.4. Validación

Como anteriormente, primero se realizó un análisis estático con dos cargas diferentes. En el primero (ver Anexo I.6) se aplicó una carga de 500 N en el piso superior con el primer piso inmobilizado. En el segundo (ver Anexo I.7) se aplicó la misma carga en el primer piso con la base empotrada. Los resultados fueron los siguientes:



**Figura 8.14** Condiciones de contorno y resultado del análisis estático del modelo semirrígido con la fuerza aplicada en el piso superior



**Figura 8.15** Condiciones de contorno y resultado del análisis estático del modelo semirrígido con la fuerza aplicada en el primer piso

Como se puede observar en ambos casos, el desplazamiento coincide bastante bien con el de una rigidez de 500 N/m.

La siguiente comprobación fue el amortiguamiento, que se determinó mediante ajuste de la exponencial. Primero se le aplicó al modelo un desplazamiento senoidal de amplitud 2 mm en la base con la frecuencia de cada modo (ver Anexo I.10), después se representaron los datos de aceleración frente al tiempo y por último se ajustaron con una curva exponencial como se hizo anteriormente en la parte experimental.

Los resultados fueron los siguientes:

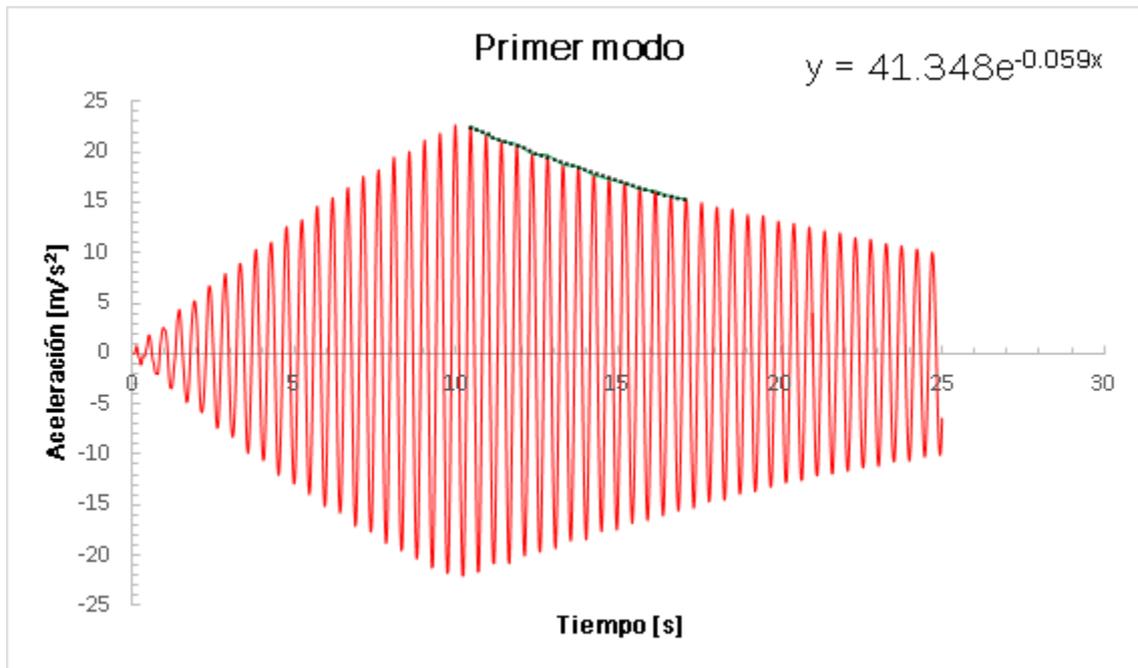


Figura 8.16 Ajuste de la curva exponencial en el primer modo

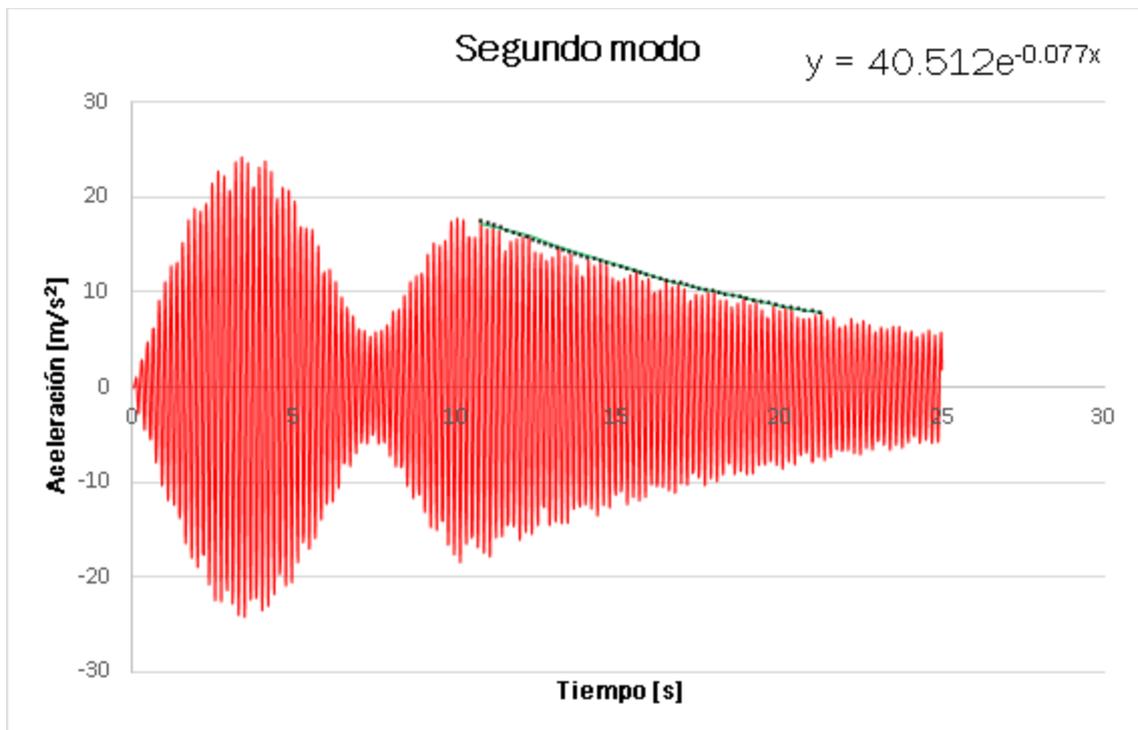


Figura 8.17 Ajuste de la curva exponencial en el segundo modo

**Tabla 8.1** Comparación entre el amortiguamiento real y el del modelo

	Amortiguamiento experimental	Amortiguamiento del modelo
Modo 1	0,00461	0,00446
Modo 2	0,00247	0,00221

Como se puede ver, los amortiguamientos son muy parecidos a los de los datos experimentales.

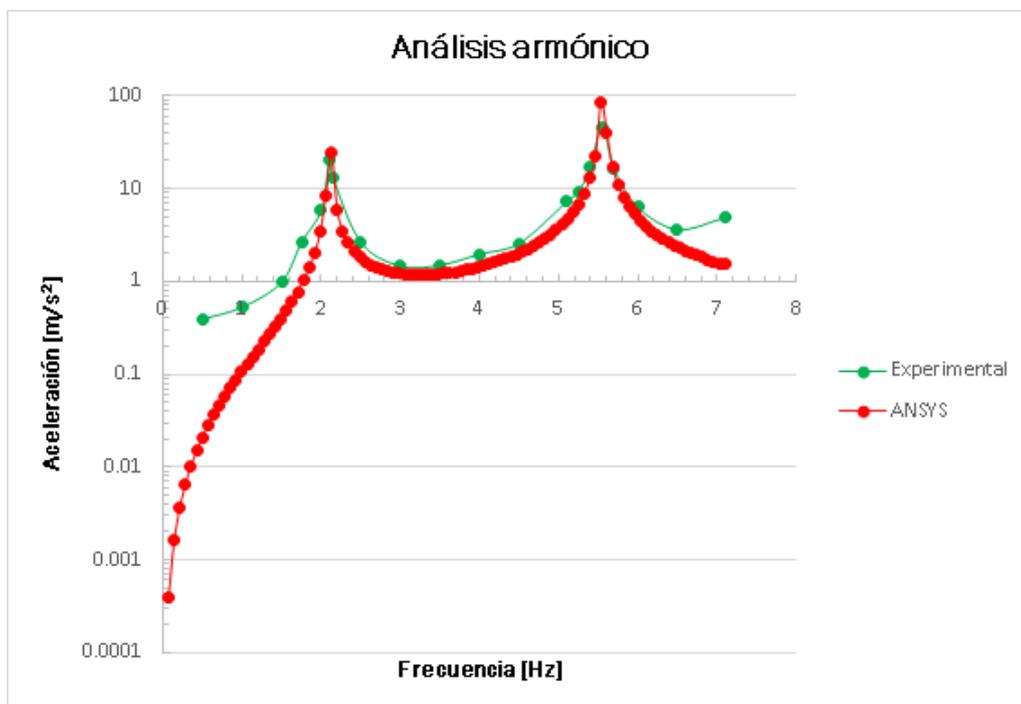
También se comprobó la respuesta en frecuencia realizando primero un análisis armónico del modelo (ver Anexo I.9). En el análisis armónico ANSYS sólo da datos de posición en función de la frecuencia, por lo que se calculó la aceleración a partir de estos datos como se muestra a continuación:

$$x=A \cos(\omega t) \quad (8.2)$$

$$\dot{x}=-A\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\ddot{x}=-A\omega^2 \cos(\omega t)$$

Por lo tanto, sólo fue necesario multiplicar los datos obtenidos con ANSYS por el cuadrado de la frecuencia y cambiar el signo. El resultado fue el siguiente:



**Figura 8.18** Análisis armónico a partir de datos experimentales y del modelo

La segunda comprobación de la respuesta en frecuencia fue el cálculo de la densidad de potencia espectral mediante los datos de aceleración obtenidos a partir de la oscilación libre del modelo después de aplicarle un desplazamiento de 0,005 m en el piso superior (ver Anexo I.12). El resultado fue el siguiente:

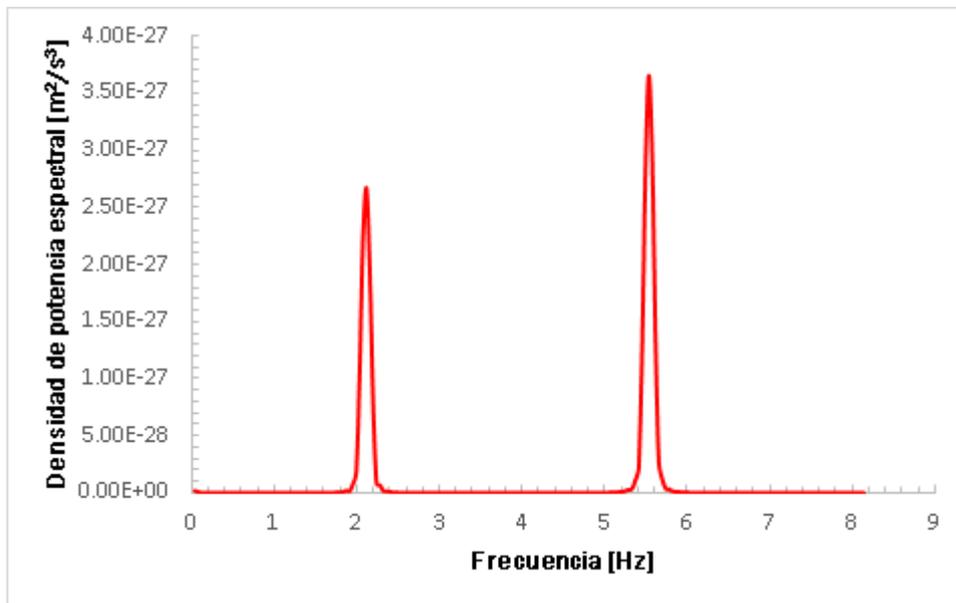
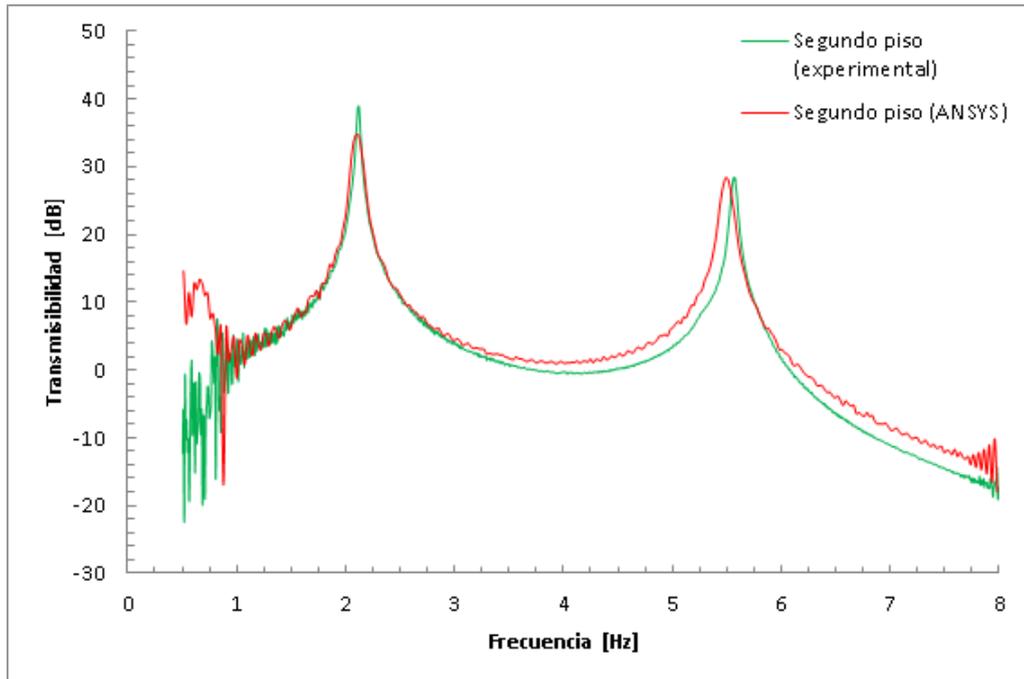
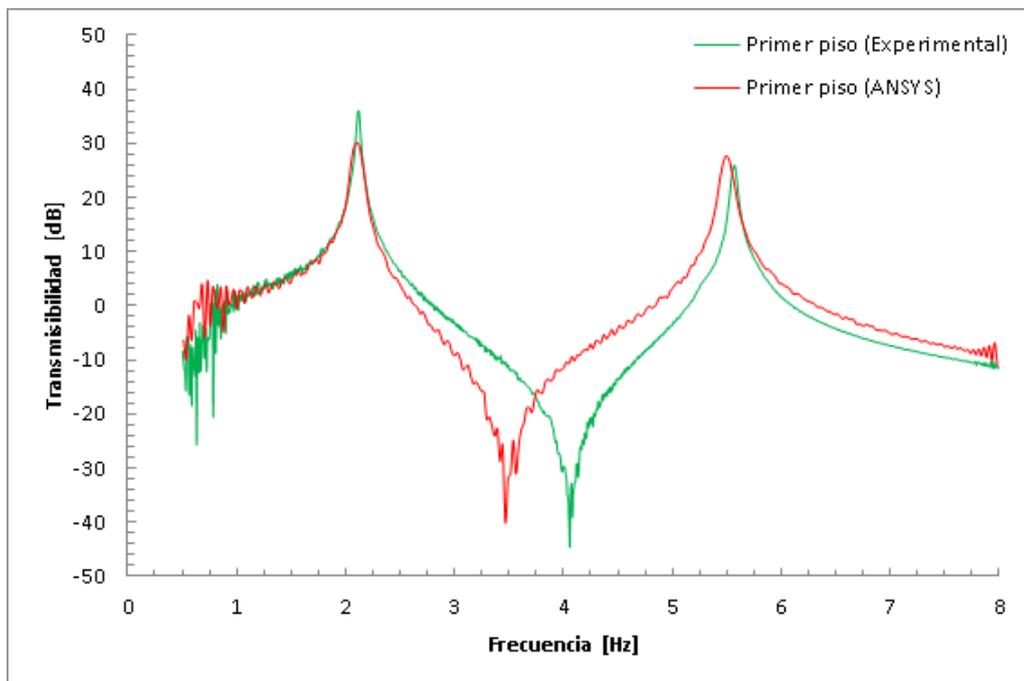


Figura 8.19 Densidad de potencia espectral a partir de la oscilación libre del modelo.

También se comparó la FRF del modelo de ANSYS con la experimental (Ver Anexo I.13).



**Figura 8.20** Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales y de datos de ANSYS



**Figura 8.21** Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales y de datos de ANSYS

En este caso se observa que la respuesta del modelo semirrígido de ANSYS ajustado a las frecuencias modales difiere de la obtenida experimentalmente. Esto se debe a que las matrices de rigidez y amortiguamiento del modelo de ANSYS son una aproximación de las reales, por lo que a partir de ellas siguiendo el esquema de la figura 8.21 se obtendrá una función de respuesta en frecuencia similar pero no igual.

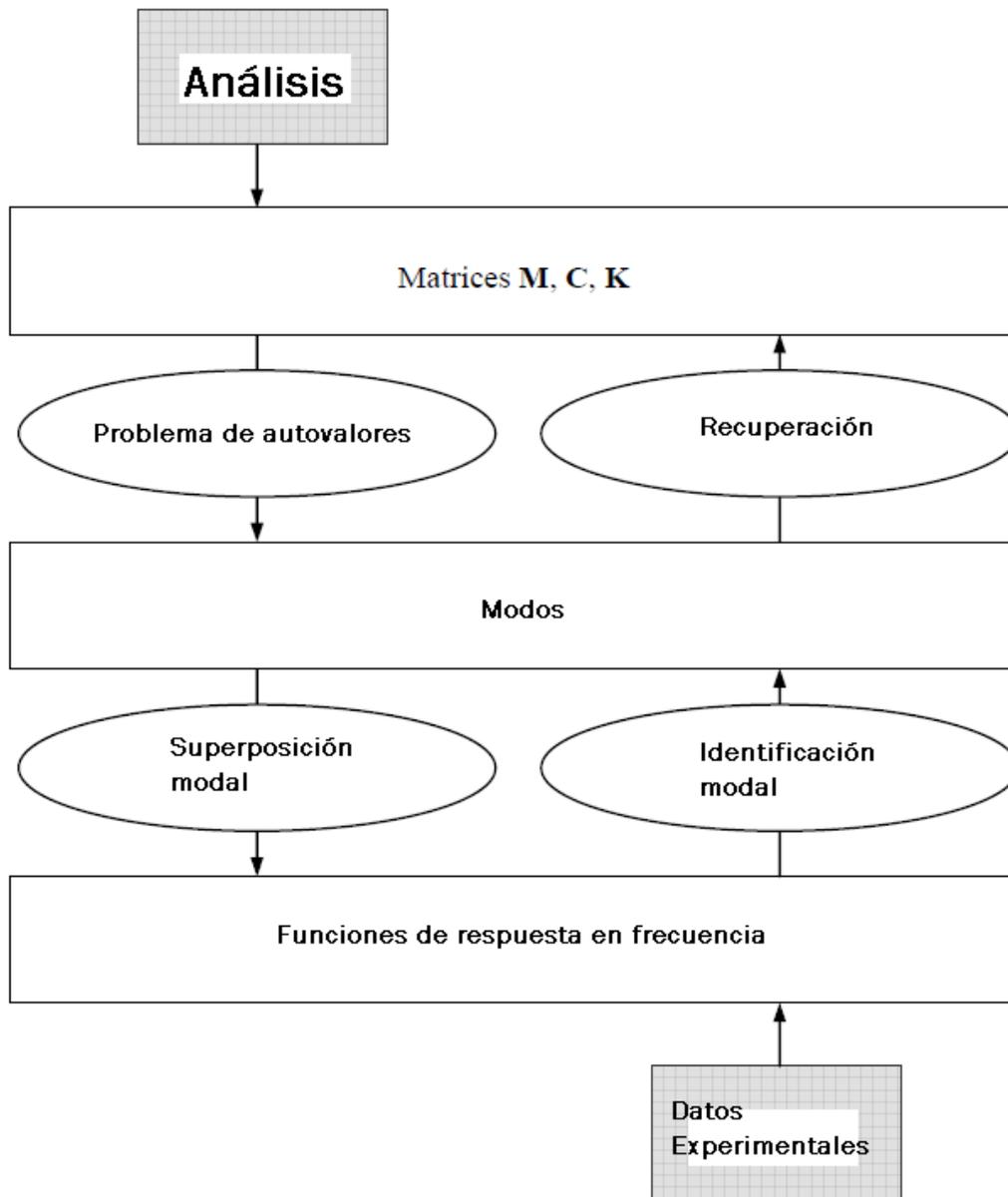
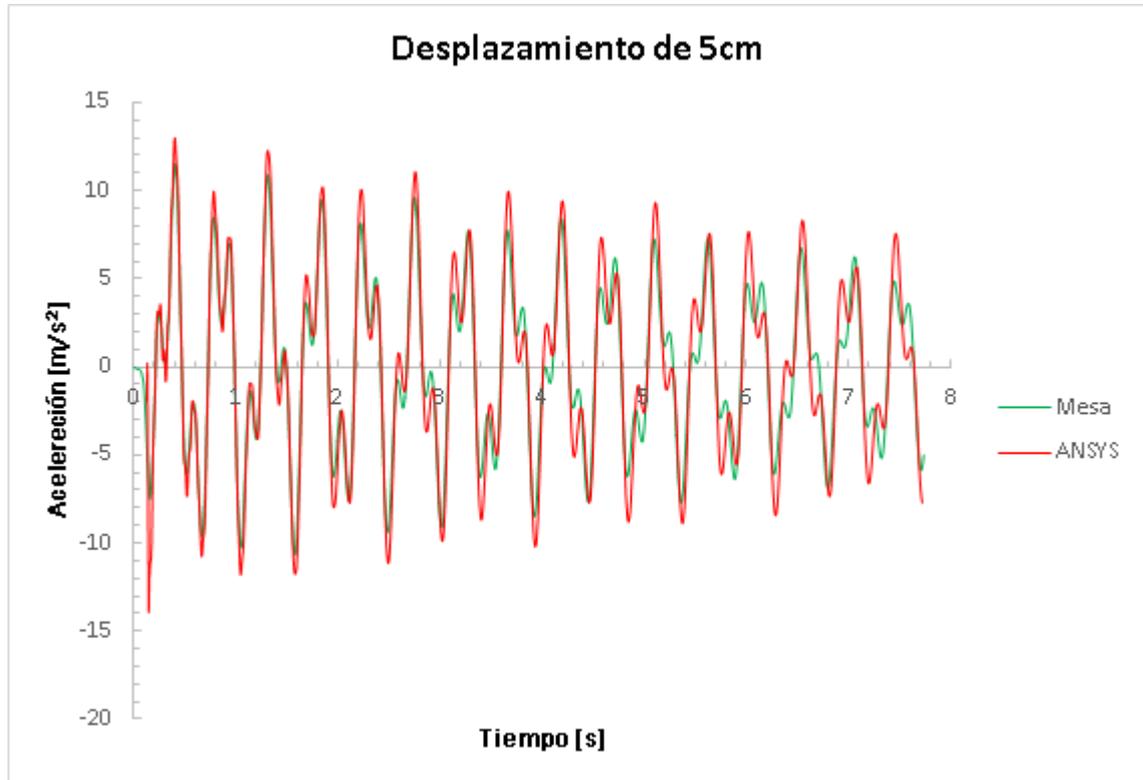


Figura 8.22 Esquema de cálculo de la FRF partiendo del modelo y de datos experimentales

Por último se compararon las aceleraciones del modelo y las obtenidas experimentalmente para la oscilación libre (Ver Anexo I.12).



**Figura 8.23** Comparación de la aceleración de la oscilación libre en el piso superior tras un desplazamiento inicial de 5cm

Como se ve la figura superior, los valores de las aceleraciones son muy parecidos, por lo que se dio por bueno el modelo semirrígido de ANSYS.

## 8.4. Cálculo de la masa modal

Para calcular posteriormente las dimensiones del TLD es necesario conocer la masa modal, que en este caso tiene la siguiente expresión:

$$M_{\text{modal}} = \frac{1}{\varphi_{\text{max}}^2} \quad (8.3)$$

Donde  $\varphi_{\text{max}}^2$  es el desplazamiento máximo de cada modo, en los dos el desplazamiento máximo se produce en el piso superior.

**Tabla 8.2** Masas modales de la estructura

Modo	$\varphi_{\text{max}}^2$ (m)	M.MODAL (kg)
1	0,833	1,440
2	0,703	2,021

## 8.5. Resumen de las propiedades de la estructura

**Tabla 8.3** Tabla resumen de las propiedades de la estructura

	Modo 1	Modo 2
f (Hz)	2,1057	5,5542
M. Modal (kg)	1,440	2,021
$\xi$ (%)	0,461	0,247

# Capítulo 9. Diseño y modelado del TLD

## Introducción

Para calcular el TLD se parte de los datos del modo para el que se quiere sintonizar y se calcula el TMD (masa con amortiguador y muelle) óptimo para después calcular el TLD a partir de éste.

### 9.1. Cálculo del TMD

El objetivo es amortiguar el primer modo de vibración de la estructura, del que se conocen los siguientes datos:

**Tabla 9.1** Tabla resumen de las propiedades de la estructura para el primer modo

Frecuencia (Hz)	2,1057
Masa modal (kg)	1,44
$\xi$	0,00461

El TMD está modelado como un sistema de un grado de libertad con una masa ( $m_d$ ), una rigidez ( $k_d$ ), un amortiguamiento ( $c_d$ ) y una frecuencia natural ( $f_d$ ) que se calculan de la siguiente manera:

El índice de frecuencia y el amortiguamiento óptimos se obtienen a partir de las ecuaciones experimentales de Tsai y Lin (1993). Estas ecuaciones introducen dos nuevos parámetros, el índice de frecuencia ( $f$ ) y el de masa ( $\bar{m}$ ).

El índice de masa ( $\bar{m}$ ), que es de libre elección (interesa que sea lo menor posible) y se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{m} = \frac{m_d}{m} \quad (9.1)$$

Donde  $m_d$  es la masa del TMD y  $m$  la masa del modo de vibración para el que se calcula el TMD. En este caso se escogió un valor del 7% siendo la masa del TMD:

$$m_d = \bar{m}m = 0.1183 \text{ Kg} \quad (9.2)$$

El índice de frecuencia ( $f$ ) relaciona la frecuencia del TMD con la modal ( $f_s$ ):

$$f = \frac{f_d}{f_s} \quad (9.3)$$

Las ecuaciones del índice de frecuencia y del amortiguamiento relativo óptimos son las siguientes:

$$f = \left( \frac{\sqrt{1-0,5\bar{m}}}{1+\bar{m}} + \sqrt{1-2\xi-1} \right) \quad (9.4)$$

$$-[2,375-1,034\sqrt{\bar{m}}-0,426\bar{m}]\xi\sqrt{\bar{m}}$$

$$-(3,730-16,903\sqrt{\bar{m}}+20,496\bar{m})\xi^2\sqrt{\bar{m}}$$

$$\xi_d = \sqrt{\frac{3\bar{m}}{8(1+\bar{m})(1-0,5\bar{m})} + (0,151\xi-0,170\xi^2) + (0,163\xi+4,98\xi^2)\bar{m}} \quad (9.5)$$

Se sustituyó en las ecuaciones y se obtuvo:

**Tabla 9.2** Frecuencia y amortiguamiento del TMD

f	0,91552676
$\xi_d$ (Ns/m)	0,016

A partir de estos dos parámetros se calcularon el resto:

$$\omega_d = 2\pi f f_s = 12.11 \text{ rad/s} \quad (9.6)$$

$$f_d = f f_s = 1.9278 \text{ Hz}$$

$$k_d = \omega_d^2 m = 14,7896 \text{ N/m}$$

$$c_d = 2\xi_d \omega_d m = 0,0391 \text{ Ns/m}$$

Posteriormente se usó la rigidez y la frecuencia del TMD para calcular el TLD equivalente. El amortiguamiento del TMD no se usa porque esta propiedad no se puede controlar en los TLDs salvo que éstos tengan mallas o agujeros que obstaculicen el movimiento del fluido lo cual excede el alcance de este trabajo.

## 9.2. Cálculo del TLD equivalente

Se eligió construir un TLD con forma rectangular, siendo las ecuaciones empleadas sólo válidas para esta geometría. El proceso de cálculo es iterativo y se llevó a cabo con una hoja de cálculo.

Primero es necesario conocer qué cantidad de líquido, agua en este caso, tiene movimiento relativo al depósito, ya que es la que producirá el efecto deseado. La parte del líquido mencionada anteriormente se conoce como masa convectiva (o activa), mientras que la que no se mueve en el depósito se denomina masa impulsiva. Ambas masas están relacionadas mediante un parámetro  $K$  que se calcula de la siguiente manera:

$$K = \varphi(H^*, L^*) = \frac{8L^* \tanh\left(\frac{\pi H^*}{L^*}\right)}{\pi^3 H^*} \quad (9.7)$$

En un principio se conocía la masa convectiva y la frecuencia, ya que tienen el mismo valor que la masa y la frecuencia del TMD calculado anteriormente. La anchura ( $W$ ) se fijó en 6 mm (2 depósitos de 3 mm cada uno) y  $K$  se fijó inicialmente en 0,8. Con estos datos se calculó la altura óptima de agua para 1000 longitudes diferentes en el intervalo [0; 0,32 m] con la siguiente expresión:

$$H^* = \varphi(H^*, W, L^*) = \frac{m_d}{\rho L^* W K} \quad (9.8)$$

A partir de la altura calculada y la longitud se calculó a continuación la frecuencia del primer modo del TLD mediante la siguiente ecuación:

$$f = \varphi(H^*, L^*) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g}{L^*} \tanh\left(\frac{\pi h}{L^*}\right)} \quad (9.9)$$

De los 1000 valores calculados se escogió el que tenía la frecuencia más cercana a la del TMD y se calculó el parámetro  $K$  con la ecuación 9.7 para compararlo con el supuesto inicialmente. El proceso anterior se repite hasta que los dos valores de  $K$  difieren en menos de un 1%, lo que ocurre normalmente tras tres iteraciones.

El TLD se fabricó a partir de una lámina de metacrilato de 5mm de grosor y su altura se fijó en 6 cm. Una vez conocidas sus dimensiones se calculó su peso y se sumó a la masas convectiva e impulsiva para obtener la masa total del TLD. Esta masa se introdujo en los parámetros del modelo semirrígido y se llevó a cabo un análisis modal (pág. 18 del Anexo I), ya que esta masa adicional modifica las frecuencias de resonancia de la estructura.

A continuación se repitió todo el proceso hasta que la variación de la frecuencia de diseño de TLD y la del análisis modal difería en menos de 1%. Como se observa en la figura 9.1 el depósito calculado de anchura 6 cm se construyó a partir de dos de 3 cm. Esto se hizo para limitar el movimiento transversal del fluido, ya que las ecuaciones con las que se diseñó suponen flujo potencial en el plano. Las medidas del TLD se presentan en la tabla a continuación.

**Tabla 9.3** Medidas del TLD

Anchura ( $W$ ) (m)	0,06
Altura de agua ( $H^*$ )(m)	0,1248
Longitud ( $L^*$ )(m)	0,021329

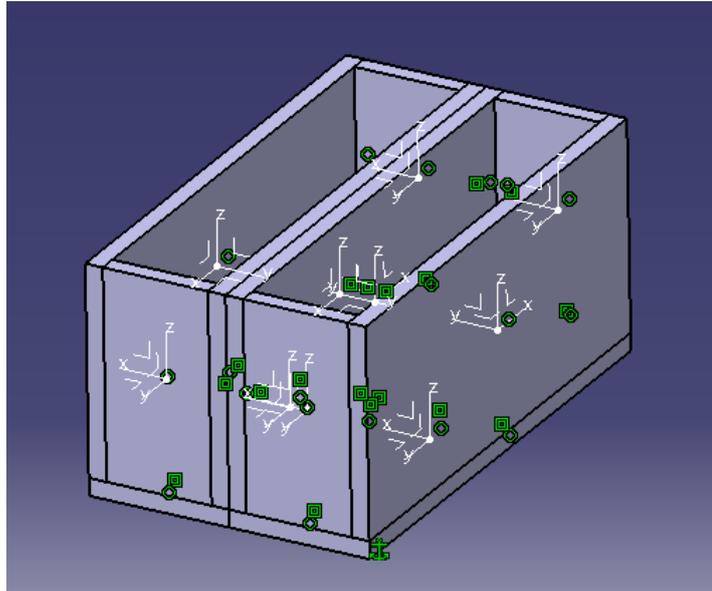


Figura 9.1 Modelo del TLD en CATIA

Y las frecuencias de la estructura:

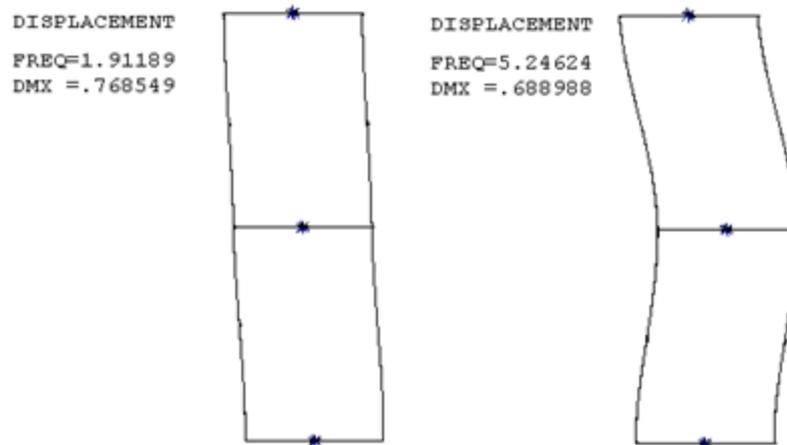


Figura 9.2 Modos de vibración de la estructura con la masa del TLD

### 9.3. Comprobación de la equivalencia entre el TLD y el TMD sin amortiguamiento

#### 9.3.1. Descripción del modelo con TLD

Para modelar el TLD se crearon los keypoints necesarios para establecer sus dimensiones.

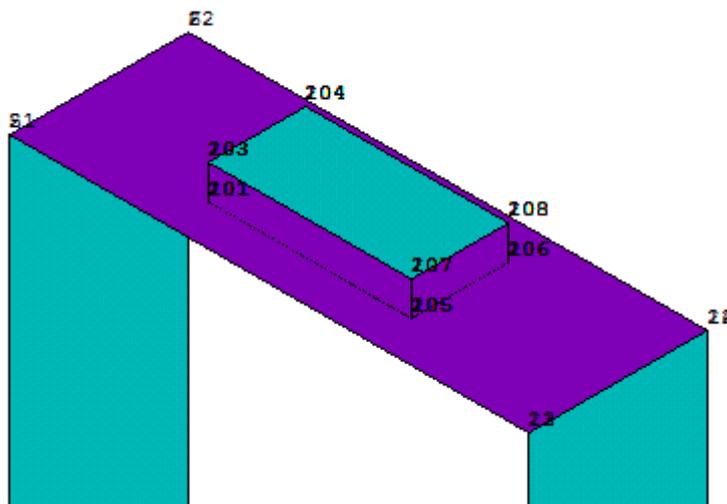


Figura 9.3 Keypoints del modelo del TLD

Fue necesario poner dos keypoints en cada esquina para poder crear por separado las paredes del TLD y el volumen del fluido.

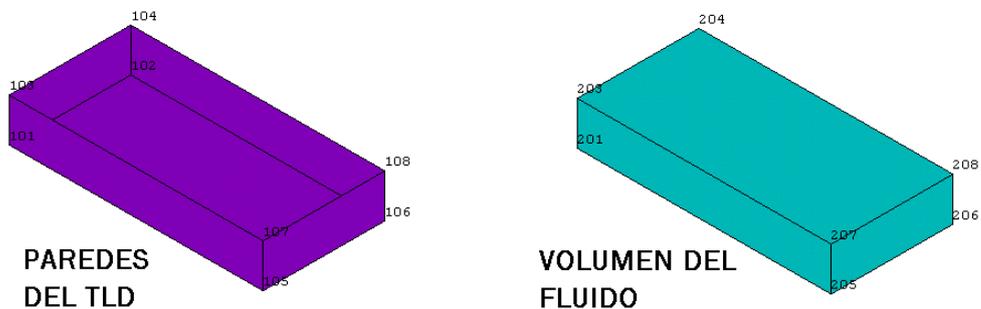


Figura 9.4 Paredes del TLD y volumen del fluido

Para mallar el TLD se utilizaron elementos TARGE170 (sólido rígido) para las paredes, este tipo de elemento ya fue descrito en el modelado de la estructura. Para modelar el fluido se utilizó un nuevo elemento, el FLUID80.

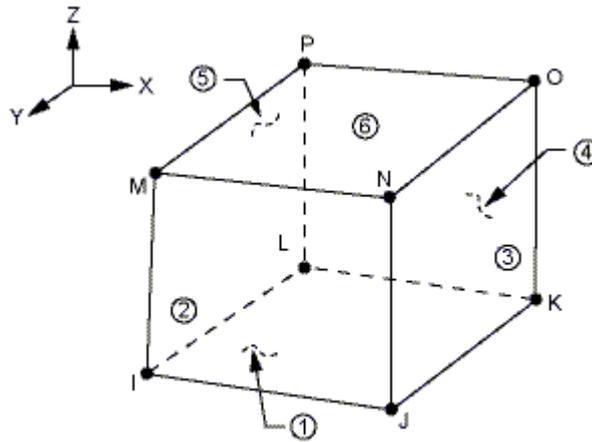


Figura 9.5 Elemento FLUID80

Este tipo de elemento se usa para modelar fluidos contenidos en recipientes, con la condición de que no exista flujo másico con el exterior. Se utiliza para calcular presiones hidrostáticas e interacciones entre fluidos y sólidos. Además puede modelar efectos de aceleraciones siempre que no se produzcan grandes desplazamientos.

Este elemento está definido por ocho nodos con tres grados de libertad (traslaciones) cada nodo. Además hay que introducir la densidad, la viscosidad y el módulo de compresibilidad del líquido. En este caso el líquido utilizado es agua, que tiene las siguientes propiedades:

Tabla 9.4 Propiedades del fluido

$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000
$\mu$ (Pa·s)	10 <sup>-3</sup>
B (Pa)	2,2·10 <sup>9</sup>

Una vez mallados el volumen y las paredes se restringen los desplazamientos de los bordes del volumen para impedir que atraviesen las paredes.

### 9.3.2. Comprobación de la validez del elemento FLUID80

Para comprobar que el elemento FLUID80 representaba adecuadamente el comportamiento del fluido se creó un script (ver Anexo I.15) en el que sólo se modeló el volumen de líquido y se llevó a cabo un análisis modal.

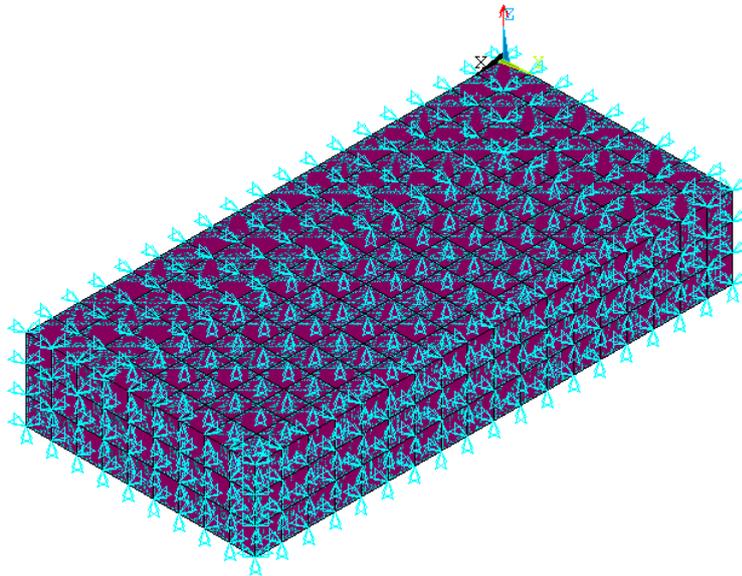


Figura 9.6 Mallado y condiciones de contorno del análisis modal del líquido

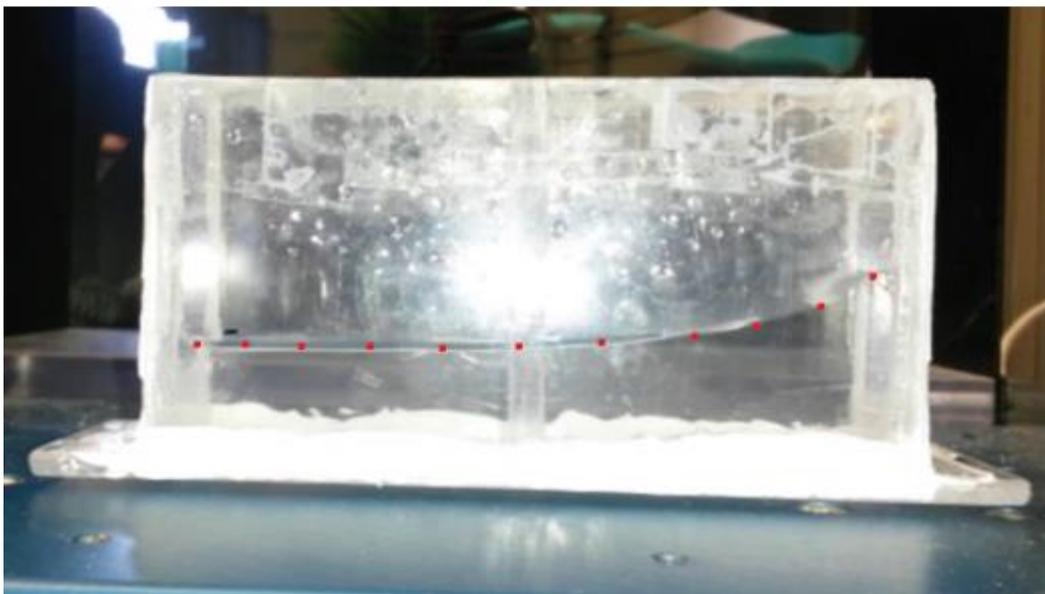
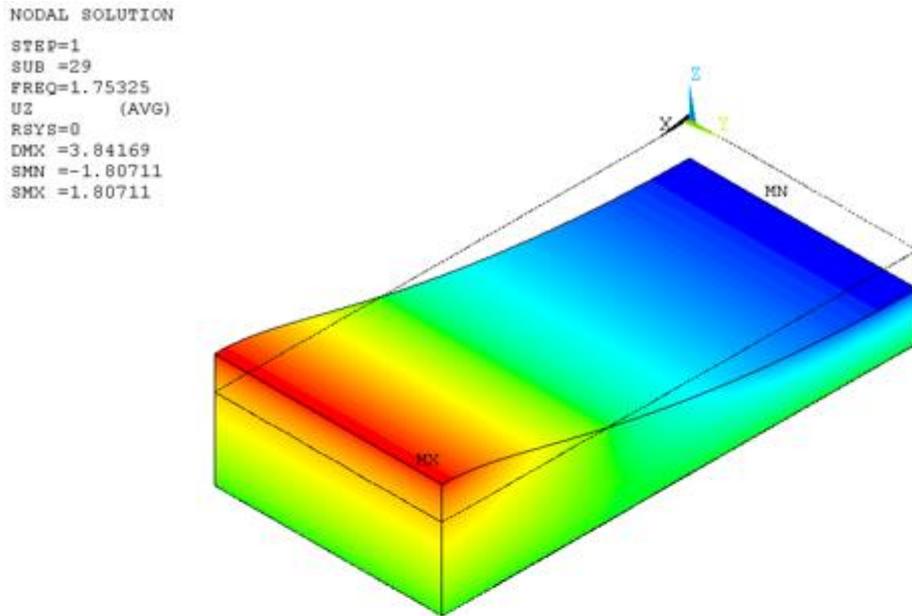
El análisis mostraba un número muy elevado de modos de vibración, por lo que fue necesario calcular el factor de participación de los modos para discernir cuáles eran relevantes y cuáles no. Además sólo se tuvieron en cuenta los modos en los que se producía un movimiento en el eje X, ya que son los que van a aparecer en este caso, ya que el movimiento es horizontal.

Los modos relevantes eran los siguientes:

Tabla 9.5 Modos del TLD en el eje X

Modo	Frecuencia(Hz)
1	1,75325
3	4,14883
5	5,46295

Una vez obtenidos los modos se comprobaron experimentalmente colocando el TLD sobre la base de la mesa agitadora y fijando la frecuencia del movimiento senoidal de la mesa al del modo correspondiente.



**Figura 9.7** Primer modo del TLD en ANSYS y experimentalmente

```
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1067
FREQ=4.14883
U2 (AVG)
RSYS=0
DMX =4.25305
SMN =-4.25305
SMX =4.25305
```

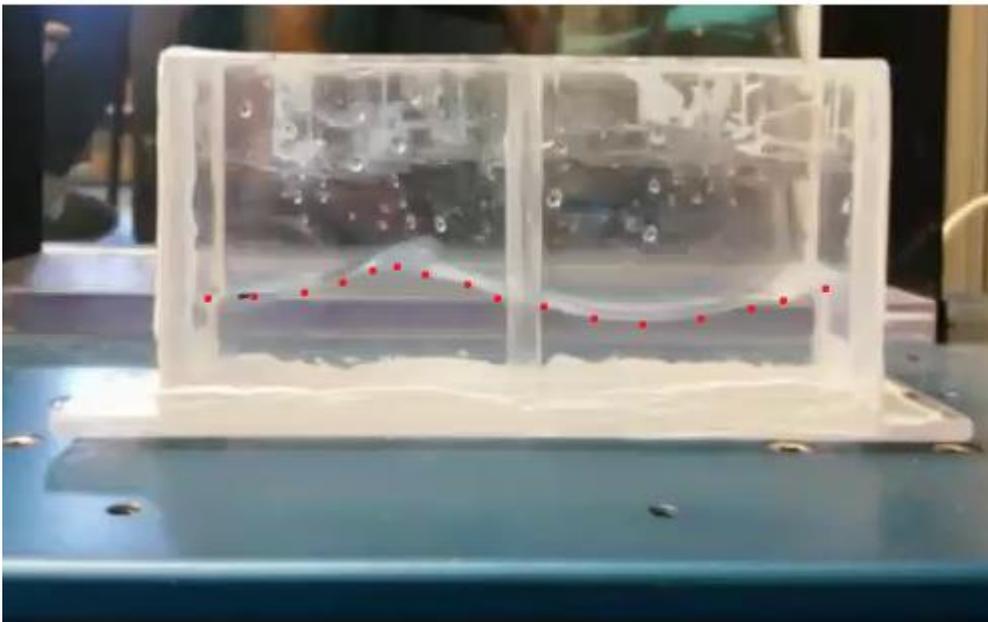
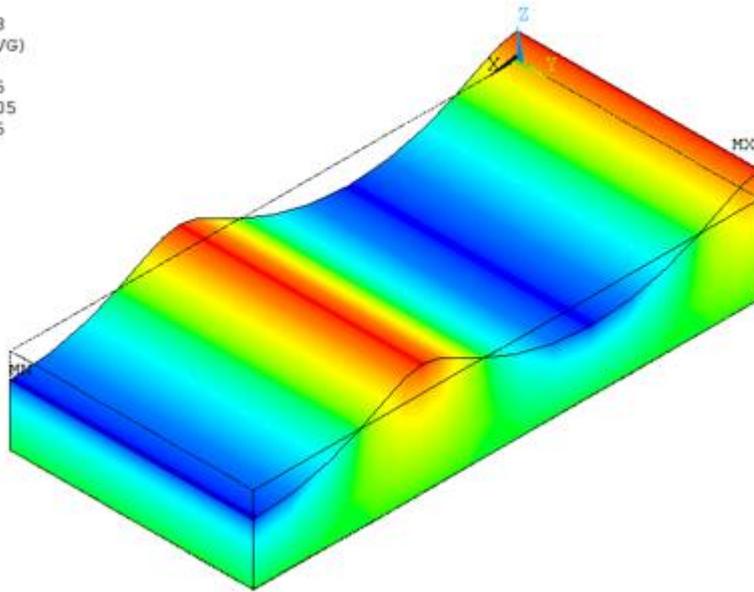
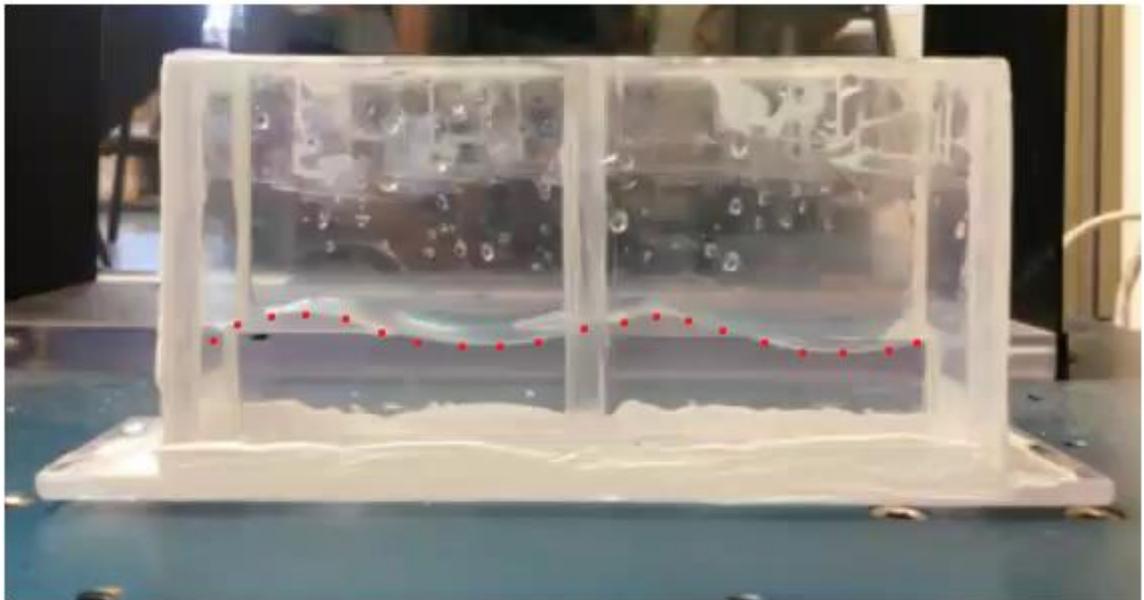
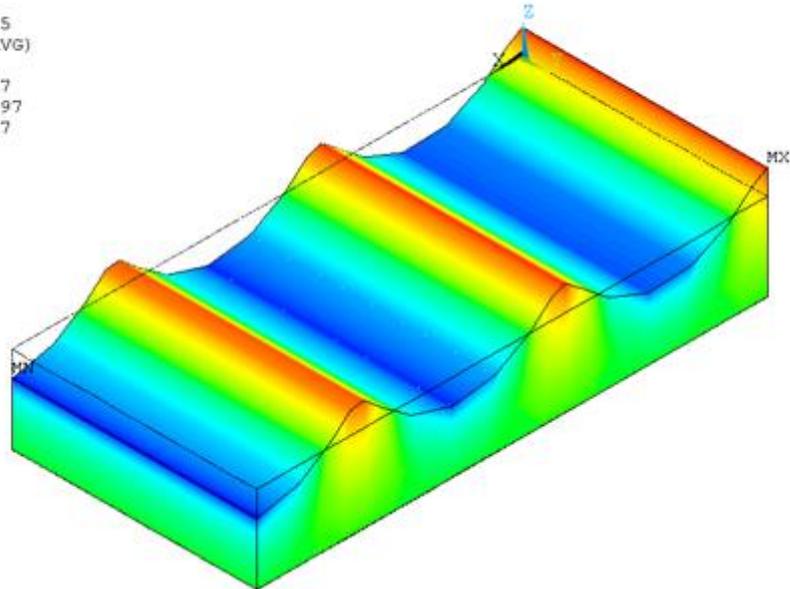


Figura 9.8 Segundo modo del TLD en ANSYS y experimentalmente

```
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1074
FREQ=5.46295
U2 (AVG)
RSYS=0
DMX =5.55097
SMN =-5.55097
SMX =5.55097
```



**Figura 9.9** Quinto modo del TLD en ANSYS y experimentalmente

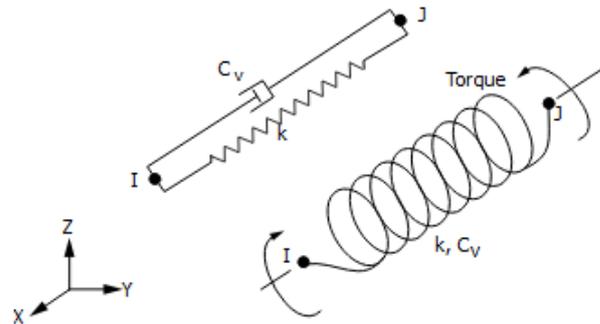
Como se observa en las figuras 9.7, 9.8 y 9.9 las formas de los modos aparecen con claridad en el TLD.

En cuanto a los nodos (puntos inmóviles) de cada modo aparecen diferencias. En el primer modo no se puede apreciar con claridad ningún punto que se desplace poco, esto se debe a que es el modo con mayores desplazamientos, por lo que no cumple la hipótesis de pequeños desplazamientos del modelo de ANSYS.

En el resto de modos sí que se ven los nodos con claridad, ya que los desplazamientos de los modos disminuyen al aumentar la frecuencia. Por lo tanto se concluyó que este elemento es adecuado para la representación del comportamiento del fluido.

### 9.3.3. Modelo con TMD sin amortiguamiento

Para modelar el modelo con un TMD se partió del modelo de uniones semirrígidas del capítulo 8 y se le añadió la posibilidad de poner un TMD en ambos pisos (Ver Anexo I.14). Para ello se utilizó el elemento COMBIN14 de ANSYS.



**Figura 9.10** Elemento COMBIN14

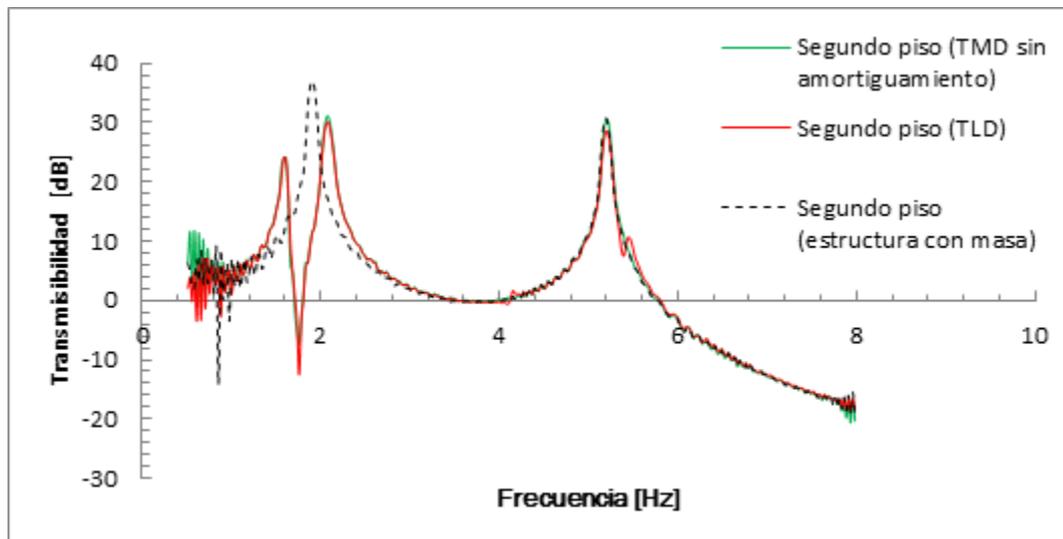
Este elemento modela muelles y amortiguadores de tracción/compresión o torsión. En este caso se modeló un conjunto muelle-amortiguador de tracción/compresión en el eje X. Un extremo se fijó en el centro de masas del piso correspondiente y el otro en la masa del TMD, modelada con el elemento MASS21 visto anteriormente.

Para la comprobación que se realizó a continuación se colocó el TMD en el piso superior, con los valores de rigidez y masa calculados anteriormente sin tener en cuenta el amortiguamiento.

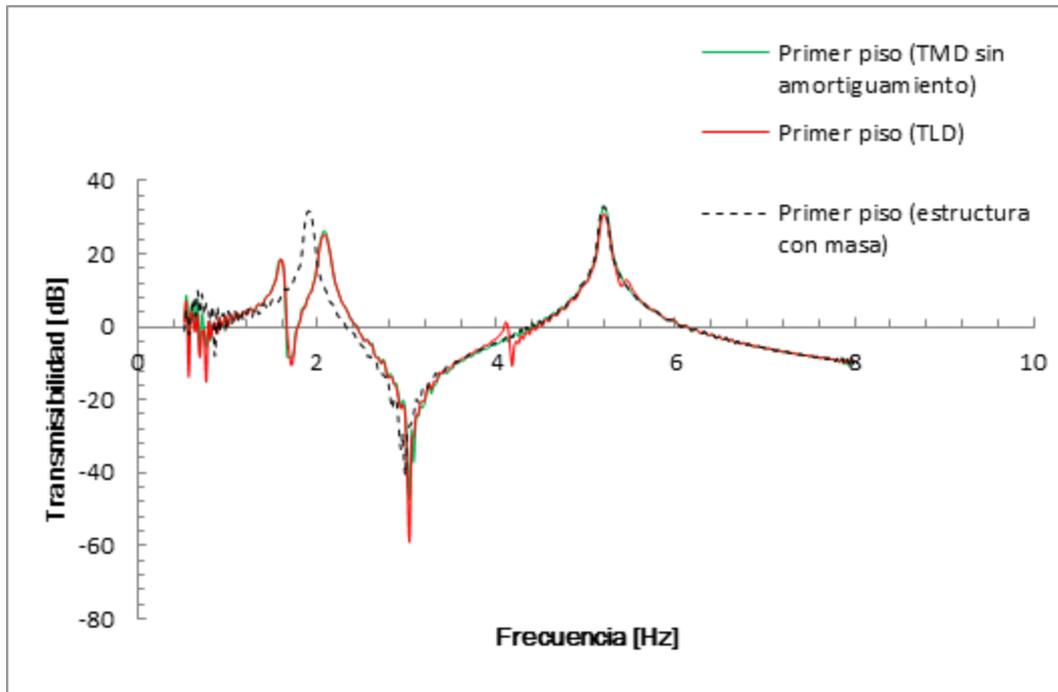
### 9.3.4. Comparación del modelo con TMD sin amortiguamiento y el modelo con TLD

Como se mencionó anteriormente, con esta geometría a la hora de calcular el TLD equivalente a un TMD no se tiene en cuenta el amortiguamiento del mismo. Para comprobarlo se obtuvo la FRF para el modelo con TLD y para el modelo con TMD sin amortiguamiento.

El resultado fue el siguiente:



**Figura 9.11** Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD (sin amortiguamiento) y con TLD

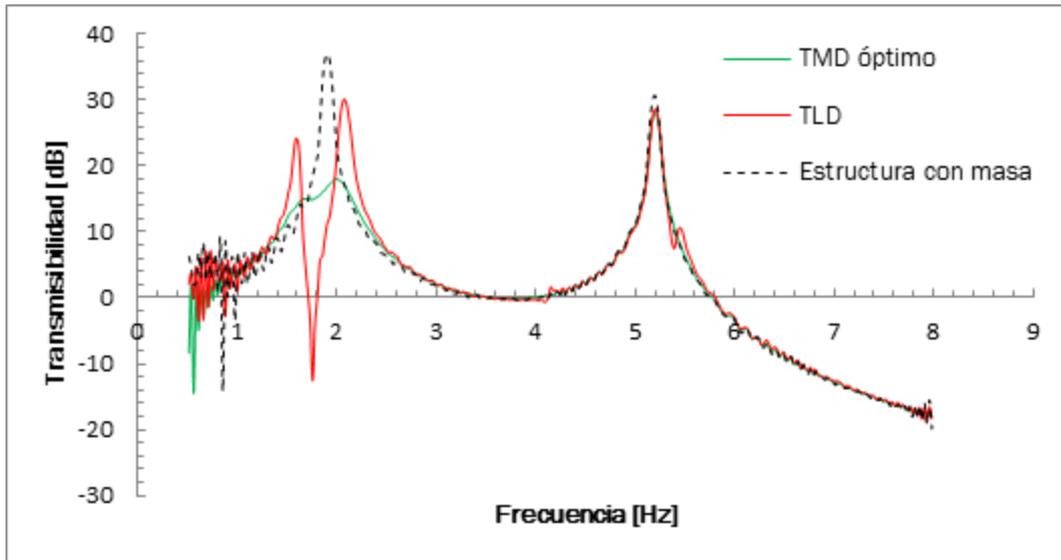


**Figura 9.12** Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD (sin amortiguamiento) y con TLD

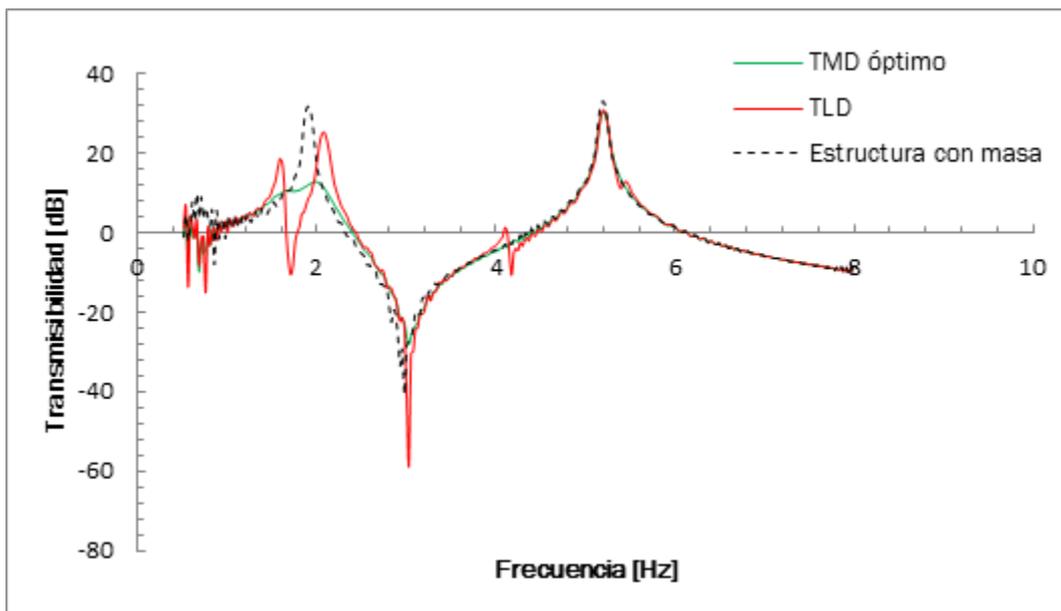
Como se observa en las figuras 9.11 y 9.12 la FRF es prácticamente igual, lo que indica que el despreciar el amortiguamiento del TMD es correcto para la geometría escogida para el TLD.

### 9.3.5 Comparación entre el TLD y el TMD óptimo

También se hizo la comparación entre el TMD óptimo y el TLD calculado a partir de él. En este caso se incluyó el valor de la masa, la rigidez y el amortiguamiento óptimos al modelo con TMD en el segundo piso.



**Figura 9.13** Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD óptimo y con TLD

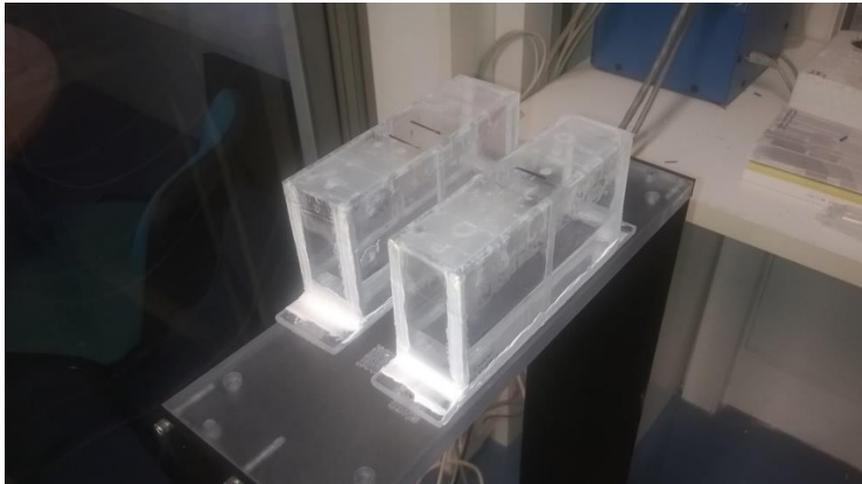


**Figura 9.14** Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base del modelo con TMD óptimo y con TLD

Como se observa en ambas figuras el amortiguamiento del TMD óptimo es mayor que el del TLD calculado a partir de su masa y su rigidez, lo que era de esperar.

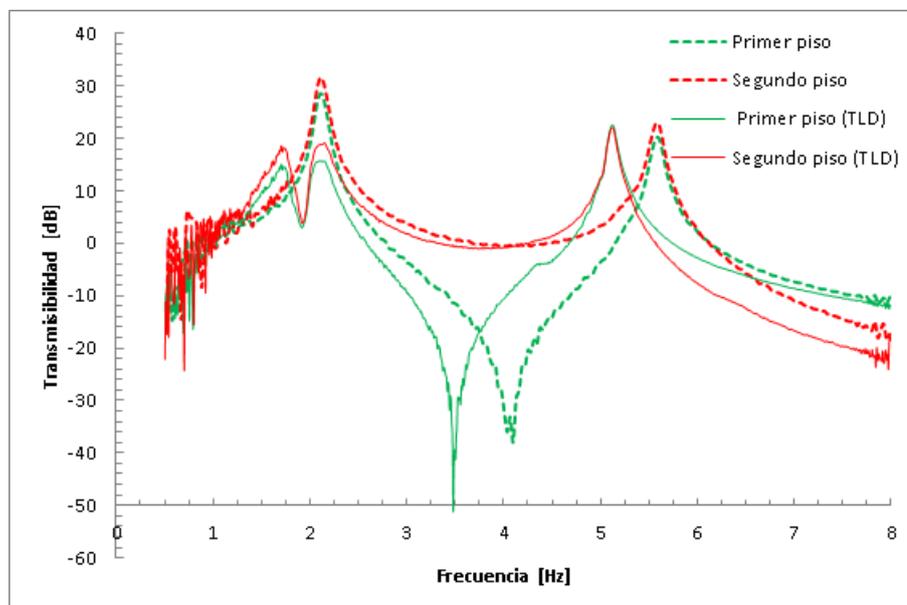
## 9.4. Pruebas experimentales y validación del modelo de ANSYS

### 9.4.1. Comparación de la FRF experimental con y sin TLD



**Figura 9.15** Montaje del TLD

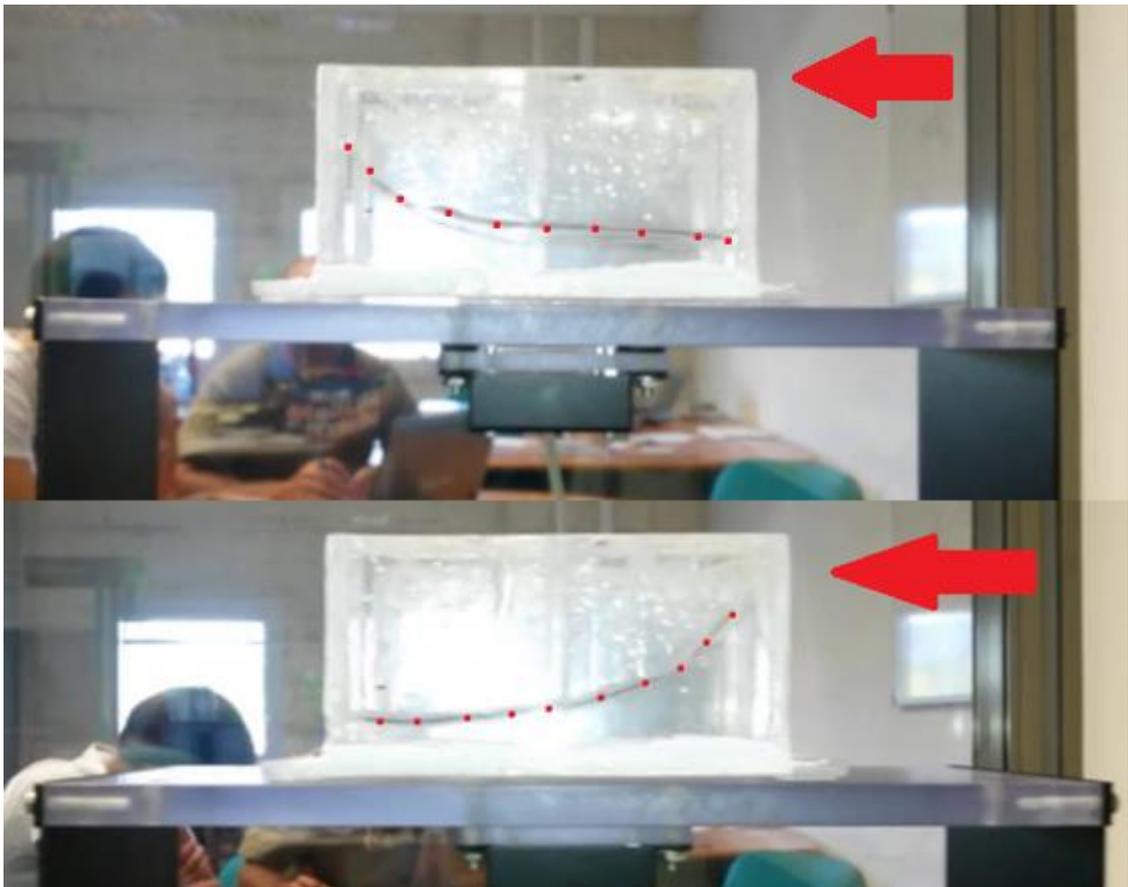
Una vez construido y montado el TLD se aplicó un movimiento de barrido se calculó la FRF experimental y se comparó con la de la estructura sin TLD



**Figura 9.16** Comparación de la FRF experimental de la aceleración de los dos pisos debida al movimiento de la base a partir de datos experimentales con y sin TLD

En la figura 9.16 se pueden apreciar varias diferencias, la primera es que el pico de la primera frecuencia de resonancia se ha desdoblado. Ahora hay dos picos con un mínimo entre ellos correspondiente a la frecuencia del primer modo, que es a la que se sintonizó el TLD.

Como se ve en las fotos inferiores, en el primer pico el líquido se mueve en fase con la estructura y en el segundo se mueve en oposición de fase.



**Figura 9.17** Movimiento del TLD en los dos picos alrededor de la primera frecuencia

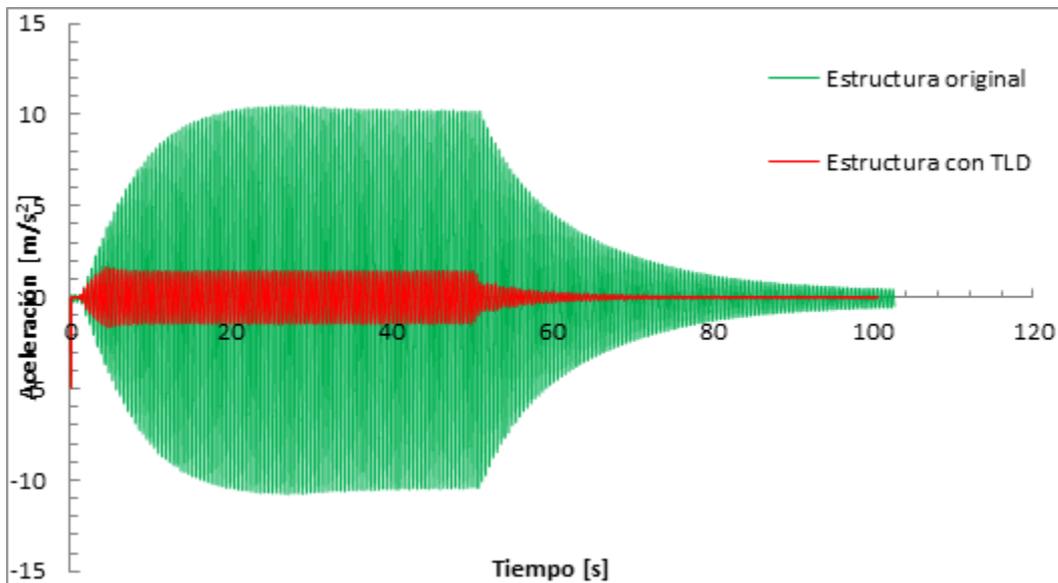
En la FRF también se puede apreciar que las dos frecuencias de resonancia se han desplazado a la izquierda, esto se debe a que, como se ve en la fórmula 9.10, el aumento de la masa total debido al TLD hace que las frecuencias modales disminuyan.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9.10)$$

Además la altura de los dos picos de la primera resonancia es menor que el pico que había antes, este amortiguamiento se produce por la disipación viscosa del fluido.

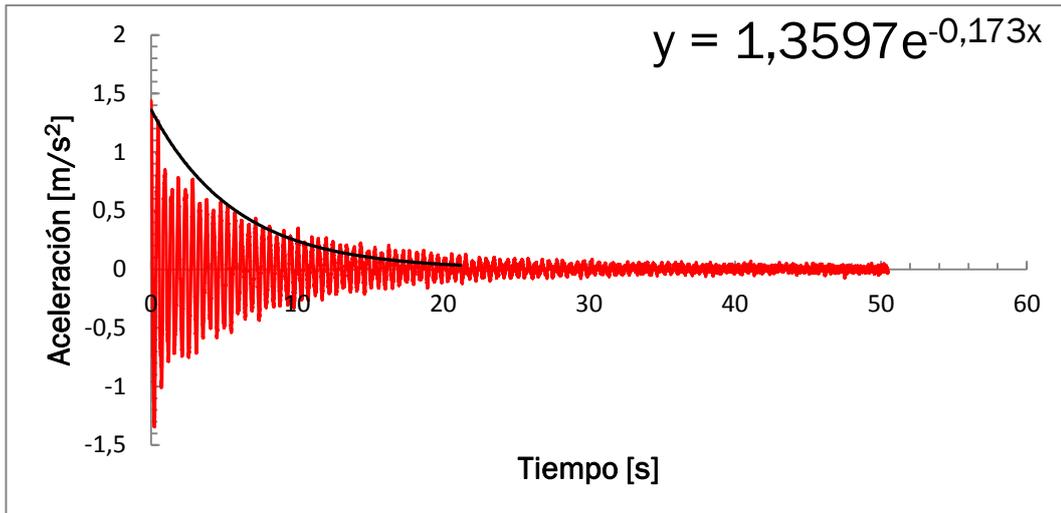
#### 9.4.2. Análisis de amortiguamiento

Se comparó el comportamiento de la estructura con y sin TLD cuando se aplica en la base un movimiento senoidal de amplitud 1 mm con la frecuencia del primer modo (2.11 Hz y 2,17 Hz, la del segundo pico de la figura 9.12) y después se deja en oscilación libre.



**Figura 9.18** Comparación de la respuesta con y sin TLD

Como se ve en la figura 9.18 el amortiguamiento es mayor con el TLD, lo que se manifiesta en una menor amplitud durante la oscilación forzada y un decaimiento más rápido en la oscilación libre. Para ver mejor este incremento del amortiguamiento se calculó el amortiguamiento con TLD mediante ajuste de la exponencial, como se muestra en la figura 9.19.



**Figura 9.19** Oscilación libre de la estructura tras la aplicación de un desplazamiento con la frecuencia de 2.17Hz

**Tabla 9.6** Comparación del amortiguamiento experimental con y sin TLD

	$\xi$
Sin TLD	0,00461
Con TLD	0,01269

En la tabla superior se compara el amortiguamiento del primer modo de la estructura sin TLD con el calculado a 2.17 Hz. Se ve que el amortiguamiento prácticamente se ha triplicado con la instalación del TLD, confirmandose su correcto sintonizado.

También se calculó el amortiguamiento del TLD en oscilación libre tras un desplazamiento inicial de 1 cm y 2 cm, con el objetivo de ver cómo variaba su eficacia con la amplitud.

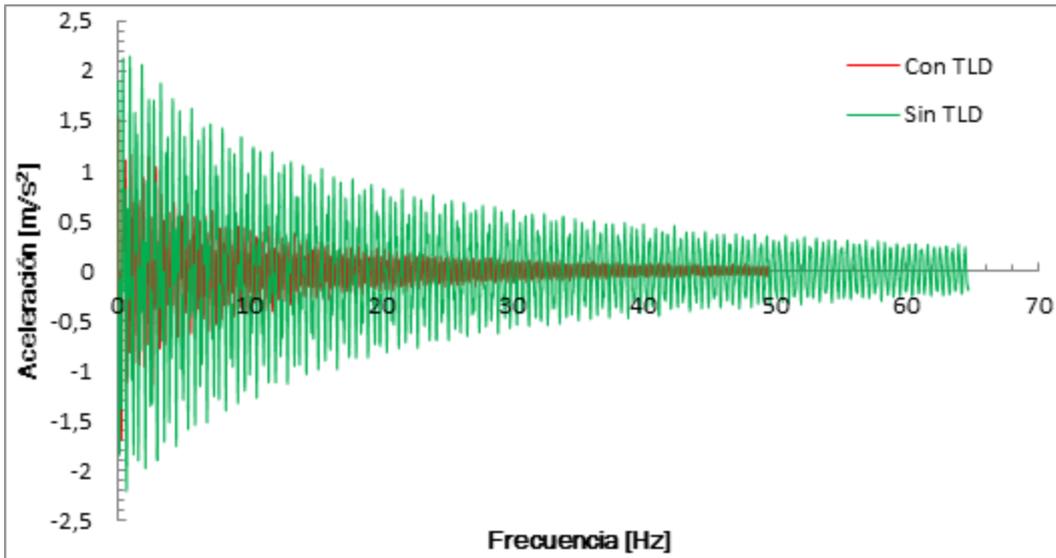


Figura 9.20 Oscilación libre tras un desplazamiento inicial de 1 cm

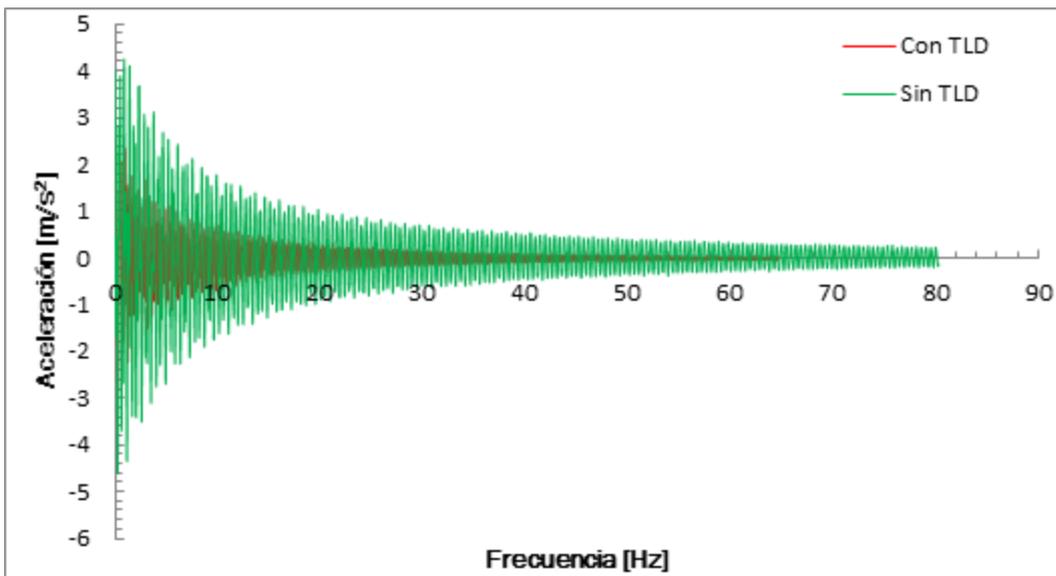


Figura 9.21 Oscilación libre tras un desplazamiento inicial de 2 cm

Tabla 9.7. Amortiguamiento en función del desplazamiento inicial.

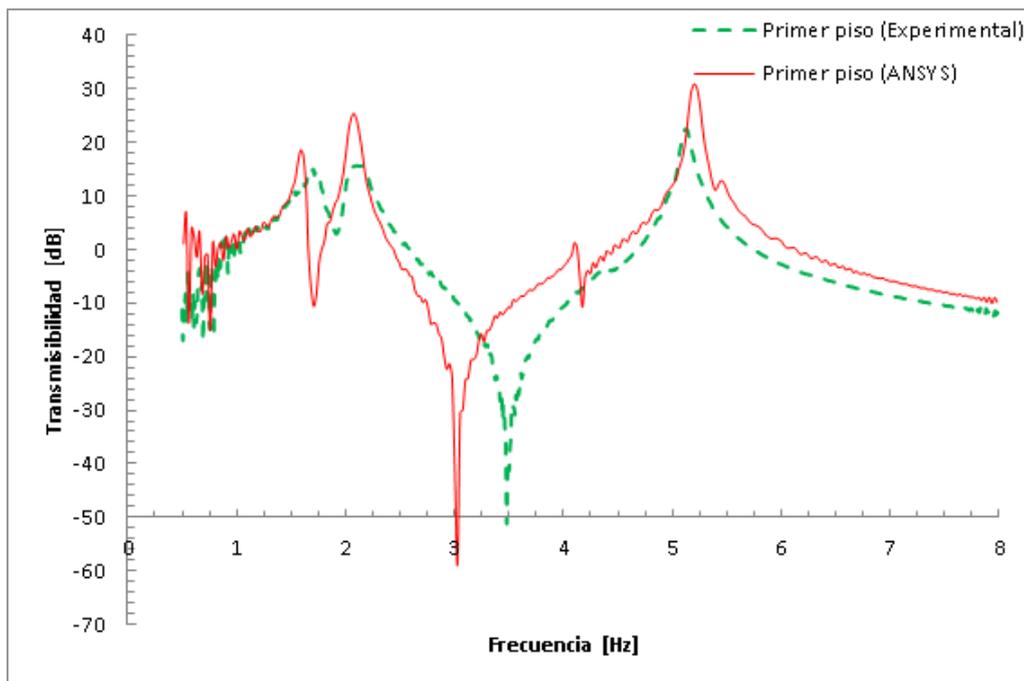
	$\xi$ (1 cm)	$\xi$ (2 cm)
Con TLD	0,010127	0,009539
Sin TLD	0,003698	0,004226
ConTLD/sin TLD	2,738	2,257

En la tabla se compara el amortiguamiento de la estructura con y sin TLD para el mismo desplazamiento. La eficacia del TLD será mayor cuanto mayor sea el cociente entre los amortiguamientos. En este caso se ve que el TLD funciona peor cuando se aumenta el desplazamiento.

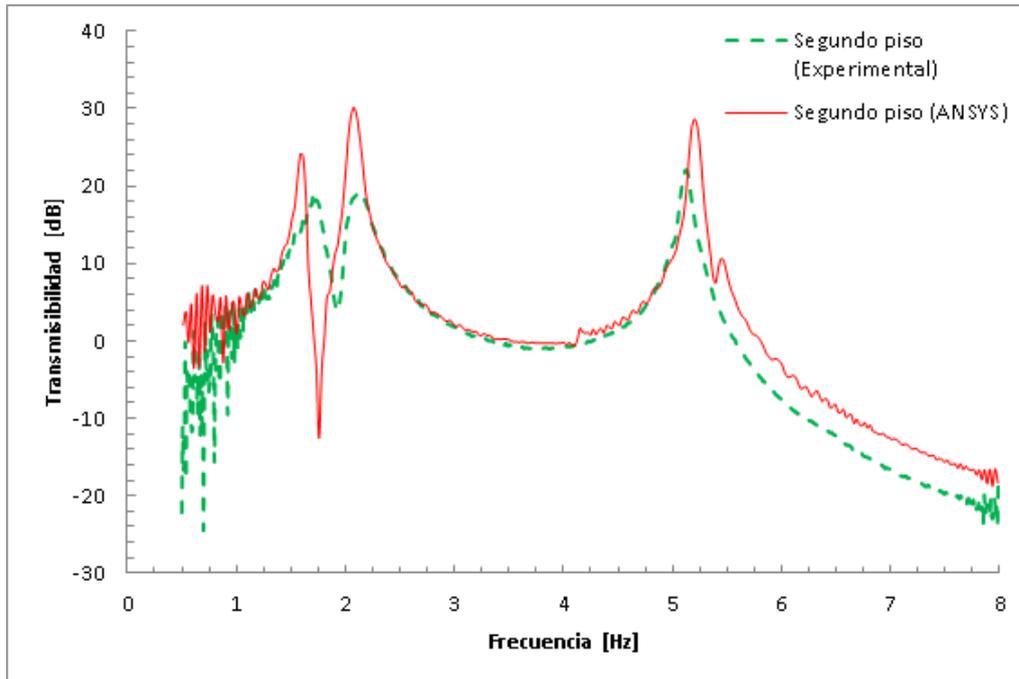
Este comportamiento se debe a que cuando los desplazamientos son mayores se deja de cumplir la hipótesis de linealidad, que es utilizada en las ecuaciones con las que se diseñó el TLD.

### 9.4.3. Validación del modelo de ANSYS

Primero se calculó la función de respuesta en frecuencia del modelo de ANSYS y se comparó con la obtenida experimentalmente.



**Figura 9.21** Comparación de la FRF de la aceleración del primer piso debida al movimiento de la base. Modelo de ANSYS y datos experimentales



**Figura 9.22** Comparación de la FRF de la aceleración del segundo piso debida al movimiento de la base. Modelo de ANSYS y datos experimentales

Comparando el modelo de ANSYS y los datos experimentales se observan varias diferencias. La primera es que en zonas de resonancia el modelo no reproduce adecuadamente los resultados experimentales, esto se debe a que con el elemento FLUID80 los desplazamientos de la superficie tienen que ser pequeños, condición que no se da en esas zonas.

También se aprecia que la altura de los picos es mayor que en el modelo experimental, esto se debe a la disipación viscosa del líquido contenido en el TLD, fenómeno no reproducido por el elemento FLUID80 de ANSYS.

## Conclusiones

De la realización de este trabajo se concluye en primer lugar que es razonable calcular un TLD a partir de los datos del TMD óptimo sin tener en cuenta el amortiguamiento del mismo. Además se ha conseguido representar con algunas limitaciones el comportamiento del TLD para pequeños desplazamientos usando elementos de sólido elástico para modelar el comportamiento del fluido.

Como se vio en las figuras 9.21 y 9.22 el modelo difería del comportamiento real en el amortiguamiento, que en la realidad es algo mayor, aunque también es bastante pequeño. También se ha puesto de manifiesto que si se desea un amortiguamiento mayor habría que cambiar el diseño del TLD.

Una manera de hacerlo sería cambiar a un fluido más viscoso como por ejemplo la glicerina, aumentando de esta manera la disipación viscosa. Haciéndolo así se podría aprovechar el modelo anterior, aunque las diferencias de amortiguamiento serían mayores. También habría que rediseñar el depósito, ya que como se vio en el capítulo 9 las ecuaciones para su diseño incluyen la densidad del fluido.

La otra manera es colocar obstáculos dentro del TLD, ya sean mallas o paredes agujereadas. En este caso el modelo del TLD creado en este trabajo no valdría y habría que utilizar programas de mecánica de fluidos.

En ambos casos sería interesante el estudio experimental de cómo afectan las diferentes configuraciones al amortiguamiento y a la frecuencia de sintonizado, para tratar de obtener fórmulas empíricas que faciliten el diseño de un TLD con el amortiguamiento y la frecuencia de sintonizado oportunas.



## Bibliografía

- Alain Girard and Nicolas Roy: “Structural Dynamics in Industry”, Wiley, 2008
- Anil K.Chopra: “Dynamics of structures. Theory and applications to earthquake engineering”, Prentice Hall, 2012
- Jerome Connor, Simon Laflamme: “Structural Motion Engineering”, Springer, 2014
- Jimin He and Zhi-Fang Fu: “Modal Analysis”, Butterworth Heinemann, 2001
- Mario Paz: “Structural Dynamics: theory and computation”, Kluwer Academic Publishers, 1997
- M.I. Friswell and J.E. Mottershead: “Finite Element Model Updating in Structural Dynamics”, Kluwer Academic Publishers, 1995
- M.J Tait: “Modelling and preliminary design of a structure-TLD system”, McMaster University
- M.J Tait and X.Deng: “The performance of structure-tuned liquid damper systems with different tank geometries”, McMaster University
- Raouf A.Ibrahim: “Liquid Sloshing Dynamics Theory and Applications”, Cambridge University Press, 2005
- Swaroop Krishna Yalla: “Liquid dampers for mitigation of structural response: Theoretical development and experimental validation”, University of Notre Dame



# Anexo I. Códigos de Ansys

## I.1. Prueba de rigidez sin giro

Realiza un análisis estático de media columna, con la base empotrada y el giro restringido en la parte superior, donde se aplica una fuerza de 250N.

```
FINISH
/CLEAR
/FILNAME,Columna,1
/TITLE,columna
/CWD,'C:\Users\CAE\Desktop\FRAN\Cosas del
proyecto\4.Prueba de rigidez\Con giro'
!*****
*****
!PARÁMETROS
!-----
-----
!Columna
    longitud=0.5 ! [m] Longitud de la columna
    anchura=0.11 !Anchura de la columna
    t=0.00175
    rho=2537.33
    E=70e9
    espesor1=0.00175
!Longitud de los pisos
    lonpisos=0.32
!Piso 1
    MASA1=1.16
!Piso 2
    MASA2=0.68
!*****
*****
/VUP,all,z !Eje z para arriba
/VIEW,all,1,1,1 !Vista en isométrico
!*****
*****
!PREPROCESADO
!-----
-----
/PREP7
!*****Propiedades material 1
(Aluminio)
MP,ex,1,E !Módulo elástico
MP,prxy,1,0.3 !Poisson
MP,dens,1,2537.33 !Densidad del material
!*****Geometría
```

```

!*****Coordenadas de los keypoints
k,1,(anchura)/2,0,0
k,2,-(anchura)/2,0,0
k,3,(anchura)/2,0,longitud
k,4,-(anchura)/2,0,longitud
A,1,2,4,3 !Área de la columna

!*****
*****
ET,1,SHELL181 !Creación del elemento placa
!Opciones del elemento 1
KEYOPT,1,8,2
KEYOPT,1,3,2
!Sección de tipo placa con espesor según el parámetro
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,espesor1
!*****Mallado
TYPE,1 !Selección del elemento 1 para el mallado
ASEL,s,area,,1,!Selección del área 1
AMESH,ALL !Mallado de las áreas seleccionadas
ALLSEL

!*****Condicion
es de contorno
NSEL,S,LOC,Z,0,0,!Selección de los nodos en la base
D,all,ALL,0,!Empotramiento
ALLSEL
NSEL,S,LOC,Z,0.5,0.5,!Selección de los nodos de la
parte superior
F,all,fy,62.5,!Fuerza de 62,5N en cada nodo
D,all,rotx,0,!Restricción del giro en el eje x
ALLSEL
FINISH

!Análisis
/SOLU
ANTYPE,static !Análisis estático
SOLVE
Finish

```

## I.2. Prueba de rigidez con giro

Realiza un análisis estático de media columna con la base empotrada. Se aplica una fuerza de 250N en la parte superior, el código es igual que el anterior hasta las condiciones de contorno.

```
!*****Condicion
es de contorno
NSEL,S, LOC, Z, 0,0, !Selección de los nodos en la base
D,all,ALL,0, !Empotramiento
ALLSEL
NSEL,S, LOC, Z, 0.5,0.5, !Selección de los nodos de la
parte superior
F,all,fy,62.5, !Fuerza de 62,5N en cada nodo
ALLSEL
FINISH

!Análisis
/SOLU
ANTYPE,static !Análisis estático
SOLVE
Finish
```

## Modelo de uniones rígidas

### I.3. Análisis estático 1

Realiza un análisis estático aplicando una fuerza de 500N en el piso superior con la base y el primer piso empotrado.

```
FINISH
/CLEAR
/FILNAME,Columna,1
/TITLE,columna
/CWD,'C:\Users\CAE\Desktop\FRAN\Cosas del
proyecto\3.Shell'
!*****
*****
!PARÁMETROS
!-----
-----
!Columna
    longitud=0.5 ! [m] Longitud de la columna
    anchura=0.11 !Anchura de la columna
    t=0.00175
    rho=2537.33
    E=70E9
    espesor1=0.00175
!Longitud de los pisos
    lonpisos=0.32
!Piso 1
    MASA1=1.16
!Piso 2
    MASA2=0.68

!*****
*****
/VUP,all,z !Eje z para arriba
/VIEW,all,1,1,1 !Vista en isométrico
!*****
*****
!PREPROCESADO
!-----
-----
/PREP7
!*****Propiedades material 1
(Aluminio)
MP,ex,1,E !Módulo elástico
MP,prxy,1,0.3 !Poisson
MP,dens,1,2537.33 !Densidad del material
```

```

!*****Columna inferior izquierda
!Posicionamiento de los keypoints
k,1,(anchura)/2,0,0
k,2,-(anchura)/2,0,0
k,3,(anchura)/2,0,longitud
k,4,-(anchura)/2,0,longitud
!Creación del área
A,1,2,4,3
!*****Columna superior izquierda
k,5,(anchura)/2,0,2*longitud
k,6,-(anchura)/2,0,2*longitud
A,3,4,6,5

!*****Columna inferior derecha
k,7,(anchura)/2,longpisos,0
k,8,-(anchura)/2,longpisos,0
k,9,(anchura)/2,longpisos,longitud
k,10,-(anchura)/2,longpisos,longitud
A,7,8,10,9
!*****Columna superior derecha
k,11,(anchura)/2,longpisos,2*longitud
k,12,-(anchura)/2,longpisos,2*longitud
A,9,10,12,11
!Piso 1
A,3,4,10,9
k,13,0,longpisos/2,longitud !Creación del keypoint del
centro de masa del piso 1
!Piso 2
A,6,12,11,5
k,14,0,longpisos/2,2*longitud

!*****
*****
ET,1,SHELL181 !Creación del elemento 1 (placa)
!Opciones del elemento 1
KEYOPT,1,8,2
KEYOPT,1,3,2
!Sección de tipo placa con espesor según el parámetro
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,espesor1
ET,2,TARGE170 !Creación del elemento 2 (sólido rígido)
!Opciones del elemento 2
KEYOPT,2,1,0
KEYOPT,2,2,1
KEYOPT,2,4,11111
ET,4,MASS21 !Creación del elemento 4 (masa puntual)
!Opciones del elemento 4
KEYOPT,4,3,2
!Valores de las masas puntuales

```

R,4,MASA1  
R,5,MASA2

!\*\*\*\*\*Mallado  
TYPE,1 !Selección del elemento 1  
ASEL,s,area,,1,4,1 !Selección de las áreas 1,2,3 y  
4  
AMESH,ALL !Mallado de las columnas  
ALLSEL

TYPE,2 !Selección del elemento 2  
REAL,2  
ASEL,s,area,,5 !Selección del área 5  
AMESH,ALL  
ALLSEL  
KSEL,S,KP,,13 !Selección del centro de masas del  
primer piso  
TSHAP,PILO !Designación del keypoint 13 como nodo  
piloto  
KMESH,ALL !Mallado del primer piso

TYPE,2  
REAL,3  
ASEL,s,area,,6  
AMESH,ALL  
ALLSEL  
KSEL,S,KP,,14  
TSHAP,PILO  
KMESH,ALL

TYPE,4 !Selección del elemento 4  
REAL,4 !Selección del valor 4 (masa del primer piso)  
E,265 !Asignación del elemento 4 con su valor al  
centro de masas del primer  
!piso

TYPE,4  
REAL,5  
E,298

!\*\*\*\*\*Condiciones de contorno

NSEL,S,LOC,Z,0,0, !Selección de los nodos de la  
base  
D,all,ALL,0, !Empotramiento  
ALLSEL

```

NSEL,S, LOC, Z, 0.5,0.5,      !Selección de los nodos en
el primer piso
D,all,ALL,0,      !Empotramiento
ALLSEL
FINISH
!Análisis
/SOLU
ANTYPE,static, !Análisis estático
!Fuerza de 500N en el piso superior
k=1
x=190
*DOWHILE,k
x=x+1
f,x,fy,125 !Fuerza en x
*if,x,eq,193,then
f,x,fy,125 !Fuerza en x
f,177,fy,125 !Fuerza en x
ALLSEL
k=0
*endif
*enddo
SOLVE
Finish

```

## I.4. Análisis estático 2

Realiza un análisis estático con una fuerza de 500N aplicada en el primer piso y la base empotrada. El código es igual que en el análisis estático 1 hasta las condiciones de contorno.

```
!*****Condicion
es de contorno
NSEL,S, LOC, Z, 0,0, !Selección de los nodos de la base
D,all,ALL,0, !Empotramiento
ALLSEL
FINISH

!Análisis
/SOLU
ANTYPE,static, !Análisis estático
!Fuerza de 500N en el primer piso
k=1
x=134
*DOWHILE,k
x=x+1
f,x,fy,125 !Fuerza en x
*if,x,eq,137,then
f,x,fy,125 !Fuerza en x
f,121,fy,125 !Fuerza en x
ALLSEL
k=0
*endif
*enddo
SOLVE
Finish
```

## I.5. Análisis modal

Realiza un análisis modal del modelo de uniones rígidas. El código es igual que en el análisis estático 1 hasta las condiciones de contorno.

```
!*****Condicion  
es de contorno  
NSEL,S, LOC, Z, 0,0, !Selección de los nodos de la base  
D,all,ALL,0, !Empotramiento  
ALLSEL  
FINISH
```

```
!Análisis  
/SOLU  
ANTYPE,modal, !Análisis modal  
!Opciones del análisis modal  
MODOPT,LANB,2,2,  
MXPAND,,,,YES  
SOLVE  
FINISH
```

# Modelo de uniones semirígidas

## I.6. Análisis estático 1

Realiza un análisis estático aplicando una fuerza de 500N en el piso superior con la base y el primer piso empotrado.

```
finish
/clear
/filename,Shake_Table_II,1
/title,Shake Table II
/cwd,'C:\Users\Usuario\Desktop\Shake Table II'
!*****
*****
!PARÁMETROS
  L=0.32 ![m] Largo
  W=0.11 ![m] Ancho
  H1=0.5 ![m] Altura Inferior (Base <-> P1)
  H2=0.5 ![m] Altura Superior (P1 <-> P2)
  T=1.75E-3 ![m] Espesor de las placas
  E=70E9 ![Pa] Módulo elástico
  RHO=2500 ![kg/m^3] Densidad
  NU=0.3 ![-] Coeficiente de Poisson
  F1=2.11218 ![Hz] Frecuencia del 1er modo
  F2=5.55819 ![Hz] Frecuencia del 2º modo
  XI1=0.00418 ![-] Coeficiente de amortiguamiento (Modo
1)
  XI2=0.00243 ![-] Coeficiente de amortiguamiento (Modo
2)
  M0=10 ![kg] Masa de la mesa
  M1=1.16 ![kg] Masa del primer piso
  M2=0.68 ![kg] Masa del segundo piso
  M2TLD=1e-6 ![kg] Masa impulsiva + masa depósito
  RIG_0=1E6 ![N·m/rad] Rigidez Base
  RIG_1=12.036 ![N·m/rad] Rigidez primer piso
  RIG_2=5.6101 ![N·m/rad] Rigidez segundo piso
  AMP=0.002 ![m] Amplitud del desplazamiento de la mesa
  FREQ=F1 ![Hz] Frecuencia del desplazamiento de la
mesa
  T1=10 ![s] Duración de la respuesta forzada
  T2=15 ![s] Duración de la respuesta libre
!*****
*****
*afun,rad
/vup,all,z
/view,all,1,-1,1
pi=acos(-1)
```

```

/prep7 !***** PREPROCESADO
*****
!Frecuencias naturales en radianes
W1=2*pi*F1
W2=2*pi*F2
!*****Propiedades del material (aluminio)
mp,ex,1,E !Módulo elástico
mp,dens,1,RHO !Densidad
mp,prxy,1,NU !Poisson

!Coeficientes del modelo de amortiguación de Rayleigh
ALPHA=(2/((1/W1)*W2-W1*(1/W2)))*(W2*XI1-(W1)*XI2)
BETA=(2/((1/W1)*W2-W1*(1/W2)))*((1/W1)*XI2-
(1/W2)*XI1)
!Asignación de los coeficientes al material
mp,alpd,1,ALPHA
mp,betd,1,BETA

!*****
*****
!Creación de los keypoints de las columnas
k,1,0,0,0
kgen,2,1,,,,W
kgen,2,1,2,1,,,H1
kgen,2,1,2,1,,, (H1+H2)
kgen,2,1,6,1,L
kgen,2,1,2,1,0
kgen,2,7,8,1,0
kgen,2,3,4,1,0
kgen,2,9,10,1,0
kgen,2,5,6,1,0
kgen,2,11,12,1,0
!Creación de los keypoints de los centros de masas de
los pisos
k,25,L/2,W/2,0
k,26,L/2,W/2,H1
k,27,L/2,W/2, (H1+H2)
!Creación de las áreas de los pisos y las columnas
a,1,2,4,3
a,3,4,6,5
a,7,8,10,9
a,9,10,12,11
a,13,14,16,15
a,17,18,20,19
a,21,22,24,23
et,1,shell181 !Creación del elemento 1 (placa)
!Opciones del elemento 1
keyopt,1,8,2

```

```

keyopt,1,3,2
!Sección de tipo placa con espesor según el parámetro
sectype,1,shell
secdata,T

et,2,targe170 !Creación del elemento 2 (sólido
rígido)
!Opciones del elemento 2
keyopt,2,1,0
keyopt,2,2,1
keyopt,2,4,111111

et,5,mass21 !Creación del elemento 5 (masa puntual)
!Opciones del elemento 5
keyopt,5,3,2
!Valores de las masas puntuales
r,5,M0
r,6,M1
M2=M2+M2TLD
r,7,M2
et,8,combin14 !Creación del elemento 8 (unión
semirrígida)
keyopt,8,2,5 ! Muelle de torsión 1-D (rotación en el
eje Y)
!Asignación de la rigidez en cada piso
r,8,RIG_0
r,9,RIG_1
r,10,RIG_2

!Densidad de mallado
DIV=10 ! <-----
lsel,s,loc,y,W/2
lesize,all,,DIV
lsel,inve
lesize,all,W/DIV
allsel

mshape,0,2D !Mallado con elementos de forma cuadrada
mshkey,1 !Malla estructurada

type,1 !Selección del elección del elemento 1
secnum,1 !Selección del área 1
mat,1 !Selección del material 1
asel,s,area,,1,4,1 !Selección de las columnas
amesh,all !Mallado de los elementos seleccionados
allsel

type,2 !Selección del elemento 2
real,2 !Selección del valor 2

```

```

asel,s,area,,5 !Selección del área 5 (base)
amesh,all !Mallado de la selección
allsel
ksel,s,kp,,25 !Selección del keypoint 25
tshap,pilo !Designación de la selección como nodo
piloto
kmesh,all !Mallado de la selección
allsel

type,2
real,3
asel,s,area,,6
amesh,all
allsel
ksel,s,kp,,26
tshap,pilo
kmesh,all
allsel

type,2
real,4
asel,s,area,,7
amesh,all
allsel
ksel,s,kp,,27
tshap,pilo
kmesh,all
allsel

!Determinación del nodo situado en el centro de masas
de la base
nsel,s,loc,x,L/2
nsel,r,loc,y,W/2
nsel,r,loc,z,0
*get,n0,node,0,num,max

!Determinación del nodo situado en el centro de masas
del primer piso
nsel,s,loc,x,L/2
nsel,r,loc,y,W/2
nsel,r,loc,z,H1
*get,n1,node,0,num,max

!Determinación del nodo situado en el centro de masas
del segundo piso
nsel,s,loc,x,L/2
nsel,r,loc,y,W/2
nsel,r,loc,z,(H1+H2)
*get,n2,node,0,num,max

```

```

!Asignación de la masa a la base
type,5
real,5
e,n0

!Asignación de la masa al primer piso
type,5
real,6
e,n1

!Asignación de la masa al segundo piso
type,5
real,7
e,n2

type,8 !Selección del elemento 8
real,8

!Creación de la primera unión semirrígida base-columna
*do,i,1,(DIV+1),1
  !Selección de las parejas de nodos (en la base y en
  la columna)
  nsel,s,loc,x,loc,0
  nsel,r,loc,z,loc,0
  nsel,r,loc,y,(W/DIV)*(i-1)
  *get,nmax,node,0,num,max
  *get,nmin,node,0,num,min
  e,nmax,nmin !Definición del elemento como conexión de
  la pareja de nodos
  !Definición de los grados de libertad comunes en
  ambos nodos
  cp,next,ux,nmax,nmin
  cp,next,uy,nmax,nmin
  cp,next,uz,nmax,nmin
  cp,next,rotx,nmax,nmin
  cp,next,rotz,nmax,nmin
  allsel
*enddo
!Creación de la segunda unión semirrígida base-columna
*do,i,1,(DIV+1),1
  nsel,s,loc,x,L
  nsel,r,loc,z,loc,0
  nsel,r,loc,y,(W/DIV)*(i-1)
  *get,nmax,node,0,num,max
  *get,nmin,node,0,num,min
  e,nmax,nmin
  cp,next,ux,nmax,nmin
  cp,next,uy,nmax,nmin

```

```

    cp,next,uz,nmax,nmin
    cp,next,rotx,nmax,nmin
    cp,next,rotz,nmax,nmin
    allsel
*enddo

!Creación de la primera unión semirrígida columna-
primer piso
type,8
real,9
*do,i,1,(DIV+1),1
    nsel,s,loc,x,loc,0
    nsel,r,loc,z,H1
    nsel,r,loc,y,(W/DIV)*(i-1)
    *get,nmax,node,0,num,max
    *get,nmin,node,0,num,min
    e,nmax,nmin
    cp,next,ux,nmax,nmin
    cp,next,uy,nmax,nmin
    cp,next,uz,nmax,nmin
    cp,next,rotx,nmax,nmin
    cp,next,rotz,nmax,nmin
    allsel
*enddo

!Creación de la segunda unión semirrígida columna-
primer piso
*do,i,1,(DIV+1),1
    nsel,s,loc,x,L
    nsel,r,loc,z,H1
    nsel,r,loc,y,(W/DIV)*(i-1)
    *get,nmax,node,0,num,max
    *get,nmin,node,0,num,min
    e,nmax,nmin
    cp,next,ux,nmax,nmin
    cp,next,uy,nmax,nmin
    cp,next,uz,nmax,nmin
    cp,next,rotx,nmax,nmin
    cp,next,rotz,nmax,nmin
    allsel
*enddo

!Creación de la primera unión semirrígida columna-
segundo piso
type,8
real,10
*do,i,1,(DIV+1),1
    nsel,s,loc,x,loc,0
    nsel,r,loc,z,(H1+H2)
    nsel,r,loc,y,(W/DIV)*(i-1)
    *get,nmax,node,0,num,max

```

```

*get,nmin,node,0,num,min
e,nmax,nmin
cp,next,ux,nmax,nmin
cp,next,uy,nmax,nmin
cp,next,uz,nmax,nmin
cp,next,rotx,nmax,nmin
cp,next,rotz,nmax,nmin
allsel
*enddo
!Creación de la segunda unión semirrígida columna-
segundo piso
*do,i,1,(DIV+1),1
  nsel,s,loc,x,L
  nsel,r,loc,z,(H1+H2)
  nsel,r,loc,y,(W/DIV)*(i-1)
  *get,nmax,node,0,num,max
  *get,nmin,node,0,num,min
  e,nmax,nmin
  cp,next,ux,nmax,nmin
  cp,next,uy,nmax,nmin
  cp,next,uz,nmax,nmin
  cp,next,rotx,nmax,nmin
  cp,next,rotz,nmax,nmin
  allsel
*enddo
finish
!***** SOLUCIÓN
*****
/SOLU
d,n0,all !Empotramiento de la base
d,n1,all !Empotramiento del primer piso
  k=1
  !Selección de 11 nodos
  x=2772
  Nsel,s,node,,x,
  *DOWHILE,k
  x=x+1
  Nsel,a,node,,x,
  *if,x,eq,2781,then
  Nsel,a,node,,2742,
  f,all,fx,45.45 !Fuerza de 500N en el piso superior
  ALLSEL
  k=0
  *endif
*enddo
ANTYPE,static !Análisis estático
SOLVE
/GROPTS, view,1
finish

```

## I.7. Análisis estático 2

Realiza un análisis estático con una fuerza de 500N aplicada en el primer piso y la base empotrada. El código es igual que en el análisis estático 1 hasta la solución.

```
!***** SOLUCIÓN
*****
/SOLU
d,n0,all !Empotramiento de la base
k=1
!Selección de 11 nodos
x=1080
*DOWHILE,k
x=x+1
f,x,fx,45.45 !Fuerza en x
*if,x,eq,1090,then
f,x,fx,45.45 !Fuerza en x           !Fuerza de 500N en el
primer piso
f,1035,fx,45.45 !Fuerza en x
ALLSEL
k=0
*endif
*enddo

ANTYPE,static !Análisis estático
SOLVE
/GROPTS, view,1
Finish
```

## I.8. Análisis modal

Realiza un análisis modal del modelo de uniones semirrígidas. El código es igual que en el análisis estático 1 hasta la solución.

```
/solu !***** SOLUCIÓN
*****
d,n0,all !Empotramiento de la base
antype,modal !Análisis modal
modopt,lanb,2 !Extracción de dos modos mediante Block
Lanczos
mxpand,2
solve
finish
/post1 !***** PREPROCESADO
*****
/RGB,INDEX,100,100,100, 0
/RGB,INDEX, 80, 80, 80,13
/RGB,INDEX, 60, 60, 60,14
/RGB,INDEX, 0, 0, 0,15
/WINDOW,1,left
/WINDOW,2,right
/PLOPTS,title,0
/PLOPTS,logo,0
/PLOPTS,date,0
/TRIAD,off
/WINDOW,all,off
*DO,i,1,2
  /WINDOW,i,on
  /vup,all,z
  /view,all,0,1,0
  SET,1,i
  *GET,f%i%,active,0,set,freq
  PLDISP,1
  /WINDOW,i,off
  /noerase
*ENDDO
/ERASE
/WINDOW,1,full
finish
```

## I.9. Análisis armónico

Realiza un análisis armónico del modelo de uniones semirrígidas aplicando un desplazamiento de 0,002m de amplitud en la base. El código es igual que en el análisis estático 1 hasta la solución.

```
/solu !***** SOLUCIÓN
*****
***
cncheck,auto
antype,harmic, !Análisis armónico
HROUT, OFF,
HROPT,FULL
HARFRQ, ,7.1 !Rango de frecuencias
NSUBST, 100,
KBC,1
d,n0,uy,0,,,uz,rotx,roty,rotz !Restricción de los g.d.l
uy,uz,rotx,roty,rotz
d,n0,ux,0.002
allsel
outres,all,all
solve
finish
```

## I.10. Análisis transitorio 1: primer modo

Realiza un análisis transitorio aplicando a la base un desplazamiento sinusoidal de amplitud 0,002m y frecuencia 2,11Hz. El código es igual que en el análisis estático 1 hasta la solución.

```
/solu !***** SOLUCIÓN
*****
***
d,n0,uy,0,,,uz,rotx,roty,rotz !Empotramiento de la base
cncheck,auto

antype,trans !Análisis transitorio

!Parámetros de integración
tintp,0
TS=1/(30*F1)
deltim,TS
kbc,1

!Creación de la matriz con los valores de
desplazamiento del primer modo
DIM=nint(T1/TS)+1
*dim,desplazamiento,table,DIM,1,1,time
*do,i,1,DIM,1
  TIME=TS*(i-1)
  desplazamiento(i,0,1)=TIME
  A=AMP*sin(2*pi*FREQ*TIME)
  desplazamiento(i,1,1)=A
*ENDDO
!Movimiento de la base
time,T1
timint,on
d,n0,ux,%desplazamiento%
outres,nsol,2
outres,v,2
outres,a,2
allsel
solve
!Fin del movimiento y comienzo de la oscilación libre
time,(T1+T2)
timint,on
ddele,n0,ux
d,n0,velx,0
outres,nsol,2
outres,v,2
outres,a,2
solve
```

```
finish
```

```
/post26 !***** POSTPROCESADO
*****
/RGB,INDEX,100,100,100, 0
/RGB,INDEX, 80, 80, 80,13
/RGB,INDEX, 60, 60, 60,14
/RGB,INDEX, 0, 0, 0,15
numvar,200
nsol,2,n0,a,x,A0
nsol,3,n1,a,x,A1
nsol,4,n2,a,x,A2
DIM=nint((T1+T2)/TS)
*dim,A0,table,DIM,1
vget,A0(1,0),1
vget,A0(1,1),2
/OUTPUT,'SENOIDAL_Aceleración_Piso_0','txt'
*VWRITE,A0(1,0),A0(1,1)
%G, %G
/OUTPUT
*dim,A1,table,DIM,1
vget,A1(1,0),1
vget,A1(1,1),3
/OUTPUT,'SENOIDAL_Aceleración_Piso_1','txt'
*VWRITE,A1(1,0),A1(1,1)
%G, %G
/OUTPUT
*dim,A2,table,DIM,1
vget,A2(1,0),1
vget,A2(1,1),4
/OUTPUT,'SENOIDAL_Aceleración_Piso_2','txt'
*VWRITE,A2(1,0),A2(1,1)
%G, %G
/OUTPUT
finish
```

## I.11. Análisis transitorio 2: segundo modo

Realiza un análisis transitorio aplicando a la base un desplazamiento sinusoidal de amplitud 0,002m y frecuencia 5,55Hz. El código es igual que en el transitorio 1, asignando a la variable `FREQ` (definida en la parte de parámetros) el valor de la frecuencia del segundo modo.

## I.12. Análisis transitorio 3: desplazamiento de 5cm

Realiza un análisis transitorio de la oscilación libre de la estructura tras un desplazamiento inicial de 5cm en el piso superior. El código es igual que en el análisis estático 1 hasta la solución.

```
/solu !***** SOLUCIÓN
*****
***
d,n0,all !Empotramiento de la base
cncheck,auto
antype,trans !Análisis transitorio
!Parámetros de integración
TS=1/(30*F2)
deltim,TS
kbc,1

    time,2*TS
    timint,off
    d,n2,ux,DELTA !Desplazamiento del piso superior una
distancia DELTA
    outres,nsol,all
    outres,a,all
    solve

    time,15
    timint,on
    ddele,n2,ux !Comienzo de la oscilación libre
    outres,nsol,all
    outres,a,all
    solve

finish

/post26 !***** POSTPROCESADO
*****
/RGB,INDEX,100,100,100, 0
/RGB,INDEX, 80, 80, 80,13
/RGB,INDEX, 60, 60, 60,14
/RGB,INDEX, 0, 0, 0,15
numvar,200
nsol,2,n0,a,x,A0
nsol,3,n1,a,x,A1
nsol,4,n2,a,x,A2
DIM=nint((2*TS+10/F1)/TS)

*dim,A0,table,DIM,1
vget,A0(1,0),1
```

```
vget,A0(1,1),2  
/OUTPUT,'Aceleración Piso 0','txt'  
*VWRITE,A0(1,0),A0(1,1)  
%G, %G  
/OUTPUT
```

```
*dim,A1,table,DIM,1  
vget,A1(1,0),1  
vget,A1(1,1),3  
/OUTPUT,'Aceleración Piso 1','txt'  
*VWRITE,A1(1,0),A1(1,1)  
%G, %G  
/OUTPUT
```

```
*dim,A2,table,DIM,1  
vget,A2(1,0),1  
vget,A2(1,1),4  
/OUTPUT,'Aceleración Piso 2','txt'  
*VWRITE,A2(1,0),A2(1,1)  
%G, %G  
/OUTPUT
```

```
Finish
```

### 13. Análisis transitorio 5: Función de respuesta en frecuencia

Realiza un análisis transitorio de la oscilación de la estructura cuando la base se mueve con un barrido (movimiento senoidal de amplitud constante y frecuencia creciente con el tiempo). El código es prácticamente igual que en el análisis estático 1 hasta la solución, sólo hay que añadir los siguientes parámetros:

```
!***** CHIRP *****
      TF=100 ![s] Tiempo final
      F0=0.5 ![Hz] Frecuencia inicial
      FF=8 ![Hz] Frecuencia final
      A=0.001 ![m] Amplitud
      !*****
Siendo la parte de solución:
/solu
TS=0.01 ! <----- Time Step (100Hz)
DIM=nint(TF/TS)+1 !Creación de la matriz con los
valores de desplazamiento
                        !del barrido
K=(FF-F0)/TF !Constante de la función del barrido
*dim,chirp,table,DIM,1,1,time
*do,i,1,DIM,1
      TIME=TS*(i-1)
      chirp(i,0,1)=TIME
      X=A*sin(2*pi*(F0*TIME+0.5*K*TIME**2))
      chirp(i,1,1)=X
*ENDDO
antype,transient
trnopt,full
!Movimiento de la base en el eje X según los
desplazamientos del barrido
d,n0,ux,%chirp%
!Restricción del resto de grados de libertad de la base
d,n0,uy,0,, ,uz,rotx,roty,rotz
kbc,1
time,TF
autots,off
deltim,TS
outres,nsol,all
outres,a,all
solve
finish
!***** POSTPROCESADO
*****
/post26
```

```

numvar,200
nsol,2,n0,acc,x,BASE
*dim,BASE,table,DIM,1
vget,BASE(1,0),1
vget,BASE(1,1),2
/output,'C:\Users\Usuario\Desktop\ANSYS-
MATLAB\BASE','txt'
*vwrite,BASE(1,0),BASE(1,1)
%g, %g
/output
nsol,3,n1,acc,x,P1
*dim,P1,table,DIM,1
vget,P1(1,0),1
vget,P1(1,1),3
/output,'C:\Users\Usuario\Desktop\ANSYS-
MATLAB\P1','txt'
*vwrite,P1(1,0),P1(1,1)
%g, %g
/output
nsol,4,n2,acc,x,P2
*dim,P2,table,DIM,1
vget,P2(1,0),1
vget,P2(1,1),4
/output,'C:\Users\Usuario\Desktop\ANSYS-
MATLAB\P2','txt'
*vwrite,P2(1,0),P2(1,1)
%g, %g
/output
finish

```

Los datos obtenidos se guardan en los archivos BASE, P1 y P2, que después se procesan con MATLAB (ver Anexo II) para obtener la función de respuesta en frecuencia.

## Modelo de uniones semirígidas con TMD

### I.14. Análisis transitorio: Función de respuesta en frecuencia

Realiza un análisis transitorio de la oscilación de la estructura cuando la base se mueve con un barrido (movimiento senoidal de amplitud constante y frecuencia creciente con el tiempo). El código parte del análisis de función de respuesta en frecuencia del modelo semirrígido, al que hay que añadir:

#### En los parámetros:

```
!***** TMD1 *****
  POSTMD1=0
  MTMD1=0.107 ![kg]
  KTMD1=13.4476 ![N/m]
  CTMD1=0.14394 ![N·s/m]
!*****

!***** TMD2 *****
  POSTMD2=0
  MTMD2=0.1924 ![kg]
  KTMD2=217.2563 ![N/m]
  CTMD2=0.69938 ![N·s/m]
!*****
```

#### En la parte de preprocesado:

```
! Insertamos los TMD's

et,11,combin14,,1 !Creación del elemento 11 (muelle en
el eje X)
r,12,KTMD1,CTMD1 !Creación del conjunto de constantes
del primer TMD
r,13,KTMD2,CTMD2 !" " " " " " segundo TMD
et,14,mass21,,0,4 !Creación del elemento 14 (masa
puntual)
r,15,MTMD1 !Valor de la masa del primer TLD
r,16,MTMD2 !" " " " " " segundo TLD
!TMD1
*if,POSTMD1,eq,0,then
*elseif,POSTMD1,eq,1
  n,,L/4,W/2,H1 !Define un nodo
  *get,nTMD1,node,0,num,max !Asigna el número del
nodo donde se coloca el TMD
  type,11 !Selección del elemento muelle
  real,12 !Selección del conjunto de valores del
TMD
```

```

    e,n1,nTMD1 !Conexión del centro de masas del
primer piso y el TMD
    type,14 !Selección del elemento masa puntual
    real,15 !Selección del valor de la masa del TMD
    e,nTMD1 !Fijación del elemento en el nodo
!Lo mismo pero en el piso superior
*elseif,POSTMD1,eq,2
    n,,L/4,W/2,H1+H2
    *get,nTMD1,node,0,num,max
    type,11
    real,12
    e,n2,nTMD1
    type,14
    real,15
    e,nTMD1
*else
    /eof
*endif

!TMD2
*if,POSTMD2,eq,0,then
*elseif,POSTMD2,eq,1
    n,,3*L/4,W/2,H1
    *get,nTMD2,node,0,num,max
    type,11
    real,13
    e,n1,nTMD2
    type,14
    real,16
    e,nTMD2
*elseif,POSTMD2,eq,2
    n,,3*L/4,W/2,H1+H2
    *get,nTMD2,node,0,num,max
    type,11
    real,13
    e,n2,nTMD2
    type,14
    real,16
    e,nTMD2
*else
    /eof
*endif

```

## Modelo del TLD

### I.15. Análisis modal

```
FINISH
/CLEAR
/FILNAME,TLD_Benchmark,1
/TITLE,Tuned Liquid Damper, Benchmark
/CWD,'C:\****'
!*****
*****
!PARÁMETROS
!-----
-----
!TLD
  a=0.125120 ![m] Longitud X
  b=0.06 ![m] Longitud Y
  h=0.021404 ![m] Altura del líquido Z
!*****
*****
/VUP,all,z
/VIEW,all,1,1,1
!*****
*****
!PREPROCESADO
!-----
-----
/PREP7
BLC4,0,0,a,b,-h !Creación del volumen de líquido
(Volumen de área rectangular)
ET,1,FLUID80,,0 !Creación del elemento FLUID80
MP,EX,1,2.2E9 !Módulo de compresibilidad del fluido
MP,DENS,1,1000 !Densidad del fluido
mp,visc,1,1E-3 !Viscosidad del fluido
LESIZE,all,h/3,,,,,1 !Tamaño de malla
VMESH,all
NSEL,s,loc,x,0 !Selección de los nodos de las paredes
con normal en el eje x
NSEL,a,loc,x,a
D,all,ux,0 !Restricción del desplazamiento en x
NSEL,s,loc,y,0 !Selección de los nodos de las paredes
con normal en el eje y
NSEL,a,loc,y,b
D,all,uy,0 !Restricción del desplazamiento en y
NSEL,s,loc,z,-h !Selección de los nodos de la base
D,all,uz,0 !Restricción del desplazamiento en z
ALLSEL
FINISH
```

```
/SOLU
/OUTPUT,salida_BM,txt
ACEL,,9.81 !Aceleración de la gravedad en el eje z
ANTYPE,MODAL !Análisis modal
MODOPT,LANB,10000,1.7,10 !Análisis modal mediante Block
Lanczos entre 1.7 Hz
MXPAND,0 !y 10 Hz
SOLVE
FINISH
```



## Anexo II. Modelo analítico en MATLAB

```
clear all;
clc;

%***** PARÁMETROS *****
E=70e9; % Módulo elástico [Pa]
I=7.4405e-11; % Inercia a flexión de la sección
equivalente [m^4]
L=0.5; % Longitud del tramo [m]
mu=0.9625; % Masa por unidad de longitud [kg/m]

m1=1.16; %Masa puntual en P1 [kg]
m2=0.68; %Masa puntual en P2 [kg]
%*****

k=[ 24*E*I/L^3,      -12*E*I/L^3;
   -12*E*I/L^3,      12*E*I/L^3];

m=[ 312*mu*L/420+m1,    54*mu*L/420;
    54*mu*L/420,        156*mu*L/420+m2];

A=inv(m)*k;
[V,D]=eig(A);

fn_1=sqrt(D(1,1))/2/pi;
fn_2=sqrt(D(2,2))/2/pi;

psi_1=[V(1,1);V(2,1)];
psi_2=[V(1,2);V(2,2)];

phi_1=psi_1/sqrt(transpose(psi_1)*m*psi_1);
phi_2=psi_2/sqrt(transpose(psi_2)*m*psi_2);

fn_1
psi_1

fn_2
psi_2
```



## Anexo III. Obtención de la FRF con MATLAB

Este script permite calcular la función de respuesta en frecuencia a partir de los datos de aceleración en función del tiempo de la base y los pisos. Para que funcione es necesario que los datos estén en formato CSV.

```
%Código FRF Shake Table II (ANSYS)

clear all;
clc;
close all

load('BASE.txt')%Carga archivo con los datos de
aceleración de la base
load('P1.txt')
load('P2.txt')

u0=BASE(:,2);%Creación de un vector con las
aceleraciones de la base
u1=P1(:,2);
u2=P2(:,2);

Fs=1/(BASE(2,1)-BASE(1,1)); %Cálculo de la duración del
step

% Espectros cruzados de potencia
[Pu1u0,fu1u0] = cpsd(u1,u0,[],[],[],Fs); %GXF
[Pu2u0,fu2u0] = cpsd(u2,u0,[],[],[],Fs); %GXF

% Auto-power spectra
[Pu0u0,fu0u0] = cpsd(u0,u0,[],[],[],Fs); %GFF

% FRF
H1_u1u0=Pu1u0./Pu0u0; %FRF entre la base y el primer
piso
H1_u2u0=Pu2u0./Pu0u0; %FRF entre la base y el segundo
piso

%Selección de los valores contenidos entre 0,5 Hz y 8
Hz
frec1=fu1u0(fu1u0>0.5&fu1u0<8);
frec2=fu2u0(fu2u0>0.5&fu2u0<8);

MAG1=H1_u1u0(fu1u0>0.5&fu1u0<8);
MAG2=H1_u2u0(fu2u0>0.5&fu2u0<8);
figure;
plot(frec1,20*log10(abs(MAG1)), 'r',frec2,20*log10(abs(M
AG2)), 'b')
```