



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

Modelos simplificados para simulación numérica (Matlab) de la acción de las personas sobre las estructuras

Trabajo Fin de Grado

Álvaro Magdaleno González

Marzo de 2015



Universidad de Valladolid



ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería mecánica

**Modelos simplificados para simulación
numérica (Matlab) de la acción de las
personas sobre las estructuras**

Autor:

Magdaleno González, Álvaro

Tutor:

Lorenzana Ibán, Antolín

Departamento:

**Construcciones Arquitectónicas,
Ingeniería del Terreno, Mecánica de los
medios Continuos y Teoría de
Estructuras**

Valladolid, marzo de 2014

Contenido

Índice de figuras.....	7
Notación.....	11
1. Introducción	13
1.1. Antecedentes y contexto.....	13
1.2. Objetivos	14
2. Modelización de la estructura: método de los elementos finitos	15
2.1. Principio básico del método	15
2.2. El modelo de viga.	17
2.3. Construcción del sistema de ecuaciones	20
2.3.1. Cálculo de la energía cinética	20
2.3.2. Cálculo de la energía potencial de deformación	21
2.3.3. Aplicación del formalismo de Lagrange	22
2.4. Validación del sistema de ecuaciones. Introducción al análisis modal	24
3. Formulación de los modelos mecánicos del peatón.....	28
3.1. Modelo de fuerza puntual móvil.....	28
3.2. Modelo MCK	31
3.3. Modelo de péndulo invertido sobre base elástica	33
4. Implementación y validación de los modelos mediante Matlab	35
4.1. Programación de los modelos	35
4.1.1. El espacio de estados	35
4.1.2. La actualización del problema	37
4.2. El amortiguamiento	41
4.2.1. Amortiguamiento de Rayleigh	42
4.2.2. Amortiguamiento modal	42
4.3. Las condiciones iniciales	43
4.4. Simulaciones de verificación	44
4.4.1. Simulaciones de verificación interna.....	44
4.4.2. Simulaciones de verificación externa.....	46
5. Análisis de las respuestas.....	50
5.1. Efecto de la inclusión de la masa del peatón.....	51
5.2. Efecto de los pasos del peatón	57
5.3. Influencia del valor de la masa del peatón sobre la estructura.....	62

5.4. Influencia del amortiguamiento	67
5.5. Guías de diseño existentes: SETRA.....	69
6. Conclusiones.....	74
7. Líneas de futuro	78
7.1. Otros modelos más sofisticados	78
7.2. Otros fenómenos asociados	79
7.3. Modelos <i>multipersona</i>	80
Anexo I. Cálculos	81
A1.1. Funciones de forma	81
A1.2. Energía cinética de la viga	82
A1.3. Elementos de la matriz \mathbb{M}	84
A1.4. Energía potencial de deformación de la viga	85
A1.5. Elementos de la matriz \mathbb{K}	86
A1.6. Obtención de las ecuaciones del sistema MCK.....	87
A1.7. Obtención de las ecuaciones del sistema de péndulo invertido	88
Anexo II. Documentación de usuario del software desarrollado	93
Anexo III. Extracto del código del programa en Matlab	102
Bibliografía.....	111

Índice de figuras

Figura 1. Ejemplo de elemento 3D tetraédrico.....	15
Figura 2. Ejemplo de estructura discretizada en elementos, con elemento de viga aislado.....	16
Figura 3. Definición del elemento viga: $ux, vx, \theta x$	18
Figura 4. Ilustración del ensamblaje de una matriz.....	23
Figura 5. Fuerzas de empotramiento generadas por una fuerza puntual.	30
Figura 6. Modelo de masa, resorte y amortiguador sobre la viga	31
Figura 7. Modelo de péndulo invertido con doble apoyo sobre base elástica desplazándose sobre la viga.....	33
Figura 8. Construcción del vector de tiempos de recorrido de la fuerza por la viga.....	38
Figura 9. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga a lo largo del tiempo empleando la simplificación del modelo MCK.....	44
Figura 10. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga para los tres modelos, con k muy elevado.....	45
Figura 11. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga a lo largo del tiempo empleando la simplificación del modelo PI. En verde, respuesta para $\varphi_0 = 0.04 \text{ rad}$	46
Figura 12. Comparación de la deflexión del punto medio de una viga sometida a una carga puntual móvil: simulación por elementos finitos vs. solución analítica.	47
Figura 13. Comparación de la deflexión del punto medio de una viga sometida a la acción de un sistema masa-resorte circulando a velocidad constante. A la izquierda, solución mediante modelo elementos finitos; a la derecha, solución analítica superpuesta a una solución modal extraída de [4].	48
Figura 14. Superposición de las curvas de la Figura 13	49
Figura 15. Esquema y datos de la simulación de verificación común a los tres modelos para el análisis de su respuesta	50
Figura 16. Respuesta del punto medio de la estructura a lo largo del tiempo para el modelo de fuerza puntual móvil y detalle de las micro-oscilaciones. .	51
Figura 17. Detalle de la Figura 15 con marcas para medir el periodo de oscilación	52
Figura 18. Respuesta del modelo de masa con resorte. Solución analítica...	52
Figura 19. Curvas resultado de emplear el modelo mck para modelar al peatón caminando sobre la viga.	53
Figura 20. Superposición de las curvas asociadas al modelo de fuerza puntual y MCK, con algunos detalles para su comparación.	54
Figura 21. Detalle del desplazamiento vertical de la masa entre los instantes $t = 30 \text{ s}$ y $t = 33 \text{ s}$	55
Figura 22. Transformada de Fourier de las respuestas del punto medio de la viga para el modelo de fuerza puntual (izquierda) y modelo MCK (derecha) .	56
Figura 23. Ampliación de la FFT correspondiente a la fuerza puntual.....	57

<i>Figura 24. Respuesta del punto medio de la viga excitada mediante el modelo de péndulo doble invertido.</i>	58
<i>Figura 25. Detalles de la respuesta del punto medio de la viga excitada mediante el modelo de péndulo doble invertido.</i>	58
<i>Figura 26. Oscilación del peatón (ángulo φ) y oscilación de su base (ξ) durante los primeros 10 segundos de simulación.</i>	59
<i>Figura 27. FFT de la respuesta del punto medio de la viga. Simulación con el péndulo invertido.</i>	60
<i>Figura 28. Comparación del modelo de péndulo invertido con el modelo MCK.</i>	61
<i>Figura 29. Comparación de la fuerza de contacto entre peatón y estructura entre los modelos de péndulo invertido y de masa-resorte-amortiguador. A la derecha, detalle entre los instantes $t = 20s$ y $t = 27s$.</i>	61
<i>Figura 30. Resultados del barrido de masa para el modelo MCK. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.</i>	64
<i>Figura 31. Resultados del barrido de masa extremo para el modelo MCK. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.</i>	65
<i>Figura 32. Dependencia de la frecuencia de oscilación con μ para el modelo MCK.</i>	65
<i>Figura 33. Resultados del barrido de masa para el modelo de péndulo. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.</i>	66
<i>Figura 34. Resultados del barrido de masa extremo para el modelo de péndulo. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.</i>	66
<i>Figura 35. Dependencia de la frecuencia de oscilación con μ para el modelo MCK.</i>	67
<i>Figura 36. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga amortiguada y sin amortiguar, cargada con una fuerza puntual móvil y el subsistema MCK.</i>	68
<i>Figura 37. Respuestas de los modelos de peatón con amortiguamiento: a la izquierda, modelo MCK; a la derecha, modelo de péndulo invertido.</i>	69
<i>Figura 38. Fuerzas de contacto entre peatón y estructura, con amortiguamiento: a la izquierda, modelo MCK; a la derecha, modelo de péndulo invertido.</i>	69
<i>Figura 39. Fuerza ejercida por el peatón sobre el suelo, según el Sétra.</i>	70
<i>Figura 40. Respuesta del punto medio de la viga, excitada con una carga según el Sétra.</i>	70
<i>Figura 41. Comparación de la respuesta del punto medio de una viga a la que se aplica el modelo de fuerza de Sétra (en azul) y la combinación de los</i>	

<i>modelos MCK y puntual (en rojo). A la derecha, un detalle del cuadro punteado.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 42. Fuerzas de contacto de los modelos de péndulo y Sétra.....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 43. Modelo de péndulo con $m_p = 48 \text{ Kg}$.</i>	<i>72</i>
<i>Figura 43. Modelo de péndulo con $m_p = 40 \text{ Kg}$ junto con modelo de fuerza puntual con $F = -392.4 \text{ N}$.</i>	<i>73</i>

Notación

- A – Función de forma para la definición de $u(x)$.
- a – Distancia del punto de aplicación de una fuerza intraelemental al nodo izquierdo del elemento.
- B – Función de forma para la definición de $u(x)$
- \mathbb{C} – Matriz de amortiguamiento
- c – Velocidad de recorrido de una fuerza sobre la estructura.
- c_p – Amortiguamiento del peatón.
- E – Módulo de Young
- E_c, E_d – Energías cinética y potencial de deformación de la viga
- f – Frecuencia propia o de oscilación
- \mathbf{F} – Vector de fuerzas sobre la estructura
- \mathbf{G} – Vector de fuerzas en el espacio de estados
- g – Aceleración de la gravedad
- h – Altura del centro de masas del peatón
- i, j, k – Numeración de elementos o iteraciones
- I_z – Momento de inercia de segundo orden de la sección de un elemento
- k_f – Constante de rigidez a flexión de un elemento de viga
- k_p – Rigidez del peatón
- k_t – Constante de rigidez a tracción/compresión de un elemento de viga
- \mathbb{K} – Matriz de rigidez
- l – Longitud de un elemento
- L – Longitud de la viga
- L_p – Longitud de la pierna de un peatón
- m_p – Masa del peatón
- \mathbb{M} – Matriz de masa
- N – Número de grados de libertad
- N_e – Número de elementos
- N_i – Funciones de forma del problema de flexión
- p – Longitud de paso del peatón
- \mathbf{p} – Vector de grados de libertad en el espacio de estados
- \mathbf{q} – Vector de grados de libertad
- \mathbf{r} – Vector de coordenadas modales
- R – Matriz de masa/rigidez en el espacio de estados
- S – Matriz de rigidez/amortiguamiento en el espacio de estados
- Área de la sección de la viga
- t – Coordenada temporal
- T – Periodo de oscilación
- u – Desplazamiento horizontal

U – Desplazamiento generalizado
 v – Desplazamiento vertical
 V – Matriz de modos propios
 w – Coordenada vertical del peatón
 x, y – Coordenadas en el plano
 X, Y - Sistema de referencia plano
 α, β – Factores
 θ – Giro de una sección de la viga
 ξ – Coordenada de la base del peatón
 ρ – Densidad de la viga.
 φ – Coordenada angular del péndulo
 φ_i – Modo propio i -ésimo
 ω – Pulsación de excitación o respuesta de un grado de libertad

1. Introducción

1.1. Antecedentes y contexto

El estudio dinámico de las estructuras no es una disciplina nueva. Desde elementos de máquinas de reducido tamaño hasta grandes estructuras civiles prácticamente todas las estructuras que se conciben hoy en día están diseñadas para soportar estados de cargas variables en el tiempo. Innumerables son los estudios que se han realizado hasta la fecha sobre la caracterización de cargas fruto de, por ejemplo, máquinas rotativas no equilibradas, viento, movimientos del terreno, etc. La respuesta de las estructuras a cargas de esta naturaleza está, en la mayoría de los casos, bien estudiada y es suficientemente bien conocida.

Son muchos menos, sin embargo, los estudios orientados a caracterizar las cargas inducidas por el propio ser humano. Las cargas debidas al hombre, de muy diversa naturaleza, no han sido tradicionalmente objeto de preocupación para los diseñadores estructurales, debido en gran parte a la poca influencia que estas tenían en la respuesta de la estructura, a menudo sobredimensionada (incertidumbre en modelización de la carga, simplificaciones en cálculos, imperfecciones en la realización de la estructura...).

De un tiempo a esta parte, nuevos y mejores métodos de diseño y análisis de estructuras así como la aparición de materiales más ligeros y resistentes han permitido ajustar mejor las dimensiones de las construcciones a los requerimientos establecidos. Lo que a priori supone una gran ventaja, tanto estética como económicamente gracias al enorme ahorro de material, ha demostrado ser con el paso del tiempo un problema en estructuras sometidas a la acción humana, como pasarelas y forjados^[8]. Al reducirse las dimensiones de las secciones de éstas (con el consiguiente aumento de su esbeltez), las acciones que antes no influían significativamente en la respuesta, como la de los peatones, cuya masa ya no es igual de despreciable que antes frente a la masa total de la estructura, ahora sí que lo hacen, y se convierten en un problema más a resolver en la etapa de diseño.

En este contexto se ubican todos los estudios realizados hasta la fecha entorno a las acciones humanas, acciones como pueden ser caminar, correr o saltar^{[3][5][7][8]}. Diversos modelos se han desarrollado a partir de la observación del movimiento y de las fuerzas ejercidas por peatones al caminar, con el objetivo, una vez más, de conseguir predecir la respuesta de cualquier estructura frente a este tipo de cargas. El presente trabajo se sitúa dentro del mismo ámbito, formulando y analizando la respuesta de algunos modelos y comparándola con algún modelo ya existente.

1.2. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es el de formular, resolver y analizar la respuesta de una serie de modelos mecánicos discretos que pretenden de alguna forma representar a un peatón caminando sobre una estructura: un modelo de fuerza puntual, un modelo de masa-resorte-amortiguador y un modelo de péndulo invertido sobre apoyo doble. Este último, nunca antes tratado como se abordará en este texto.

Se centrará gran parte de la atención en evaluar qué fenómeno (o fenómenos) de la acción humana caracteriza cada uno de los modelos, y hasta qué punto este es fiel a la realidad. Así, en los análisis a realizar, cobrará especial relevancia la influencia de cada uno de los elementos añadidos respecto del modelo anterior. En la última etapa, se estudiará brevemente una guía de diseño propuesta por el Sétra^[15] (*Service d'études techniques des routes et autoroutes*) con el fin de tratar de ajustar los modelos estudiados a la respuesta que ofrece esta guía de diseño.

De forma paralela, como objetivo secundario, se encuentra la creación de la herramienta principal de trabajo para realizar el estudio: un software de elementos finitos que permita analizar dinámicamente la estructura. Dicho software, programado íntegramente en Matlab, poseerá la capacidad suficiente para almacenar la información acerca de una estructura sencilla y de las cargas dinámicas que se aplican en ella para después resolver y mostrar los resultados de dicho cálculo.

Se empleará a lo largo del trabajo, y a conveniencia del autor, un enfoque tanto en el dominio del tiempo como en el dominio frecuencial, con el fin de dilucidar en cada caso no solo la forma de las respuestas a lo largo del tiempo sino también, en algunas ocasiones, el contenido frecuencial de las mismas. El software contará, pues, con una herramienta adicional para obtener la denominada Transformada de Fourier de una señal en el tiempo.

2. Modelización de la estructura: método de los elementos finitos

(Para más detalles, consultar las referencias [2],[10] y [13])

La descripción formal de todo fenómeno o entidad física, cuando se realiza con cierta profundidad o rigor, entraña la utilización de una serie de ecuaciones y modelos matemáticos que, en la práctica, son muy complejos de manejar. Son muchas las situaciones en las que el modelo no admite solución analítica directa, para lo cual se recurre a métodos de resolución alternativos e incluso métodos numéricos, como es el caso planteado aquí.

De desarrollo más o menos reciente en comparación con otros métodos, el método de los elementos finitos ha demostrado ser de gran utilidad en la resolución de un gran tipo de problemas, no solo en mecánica de sólidos, sino también en mecánica de fluidos, ingeniería térmica, ingeniería química, etc. Esto es debido a su potencia, puesto que permite realizar un tratamiento eficaz de las ecuaciones diferenciales (a menudo en derivadas parciales) que se desprenden de las teorías y leyes de cada disciplina.

Como se detalla en este capítulo, la piedra angular de este método es la subdivisión del medio continuo en diversas entidades a las cuales se aplican las ecuaciones que correspondan por separado, cumpliendo algunas condiciones de continuidad entre entidades. Las ecuaciones desprendidas están, por supuesto, acopladas unas con otras, transmitiéndose los efectos aplicados sobre una entidad al resto de entidades. La solución obtenida, valores discretos asociados a cada entidad, se extiende de forma adecuada al resto de cada una consiguiéndose en última instancia la solución global del problema.

2.1. Principio básico del método

El método de los elementos finitos tiene como punto de partida la discretización del medio continuo en un cierto número (*finito*) de elementos, separados entre sí por aristas (o *fronteras*), las cuales convergen en una serie de puntos (*nodos*) como se aprecia en la Figura 1. Al espacio delimitado por estas fronteras y nodos se le denomina *elemento*, y es a este a quien se le aplican las leyes que rigen el problema a resolver, generalmente en forma de ecuaciones en derivadas parciales.

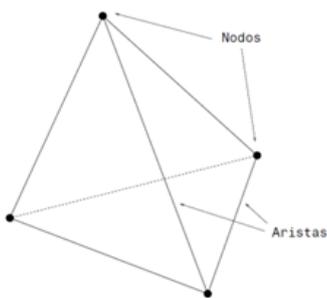


Figura 1. Ejemplo de elemento 3D tetraédrico

Para ello, se asume inicialmente una hipótesis acerca del *campo físico* solución del problema. Es decir, suponiendo conocido lo que sucede en un número discreto de puntos del modelo (los

nodos), se realiza una hipótesis acerca de la forma que adopta el campo de la magnitud que se desea estudiar sobre el subespacio continuo del elemento.

Para el caso tratado en este texto, se centrará la atención en estructuras de barras (sólidos deformables con una dimensión notablemente mayor que las otras dos). El campo que se va a estudiar es el desplazamiento de los puntos pertenecientes a las barras. La discretización de la estructura proveerá de una serie de nodos repartidos por la misma, dividiéndola en tramos (como se muestra en la Figura 2, en la que se ha dividido una estructura plana de dos barras en un total de 7 elementos). Estos serán los elementos del modelo: elementos de barra o viga.

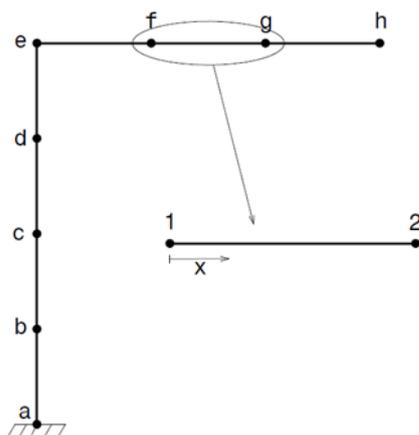


Figura 2. Ejemplo de estructura discretizada en elementos, con elemento de viga aislado.

Estos elementos se caracterizan por ser unidimensionales, es decir, una sola coordenada local es suficiente para definir y acceder a todos sus puntos. Típicamente, la línea que recorre esta coordenada local es la línea media de la barra, y lo que sucede en puntos externos a esta línea media puede ser inferido a partir de lo que sucede en la misma (hipótesis de Resistencia de Materiales). Cabe destacar que, en el caso de elementos definidos en una dimensión, como aquí, las fronteras de los elementos son precisamente sus nodos, lo cual contribuirá a simplificar su formulación, sin necesidad de pasar por elementos de referencia para garantizar continuidad del campo de desplazamientos entre elementos (ver literatura de elementos 2D y 3D).

No se debe confundir, sin embargo, la dimensión del elemento (1D) con la dimensión del problema, es decir, dimensión del espacio en el que se encuentran las barras y sus cargas. En este sentido, es posible, aunque raro, encontrar problemas en una dimensión si todas las barras y cargas están definidas en una misma dirección; problemas en dos dimensiones si tanto la geometría de la estructura como sus cargas están definidas en un mismo plano y se adopta la hipótesis de que la deformada no sale de ese plano; y problemas tridimensionales en cualquier otra situación (tanto las barras, como las cargas y las deformadas definidas en un espacio tridimensional). Se adelanta ya que los problemas abordados en este texto serán todos bidimensionales.

Finalmente, se define un grado de libertad como una coordenada local que permite definir, a partir de su posición inicial, la posición de un nodo en la configuración deformada. De forma general, para problemas en los que la geometría evoluciona en el espacio tridimensional, seis grados de libertad serán necesarios para ubicar de forma completa un nodo en el espacio (tres de posición y tres de orientación de la sección correspondiente). Es posible sin embargo reducir mediante hipótesis más o menos restrictivas este número de grados de libertad, pudiendo en el límite llegar al caso más sencillo: el de una barra trabajando a tracción/compresión. En esta situación los nodos de los elementos de dicha barra podrán ser definidos en la configuración deformada mediante un único grado de libertad, de traslación y dirigido según la línea media de la barra.

2.2. El modelo de viga.

De entre todos los tipos de estructuras que pueden analizarse, en este texto se tratará únicamente aquellas formadas por barras (sólido con una dimensión característica mucho mayor que las otras dos). Además, estas barras estarán todas en un único plano y las cargas han de ser tales que tanto éstas como la deformada de la estructura en cada instante de tiempo estén contenidas en el mismo plano de la estructura. Se trabajará únicamente, pues, con *pórticos planos*.

Dentro de este contexto, la posición de un sólido rígido se define mediante 3 grados de libertad en el plano (dos coordenadas traslacionales, típicamente perpendiculares entre sí, y una orientación). Un sólido deformable, en cambio requiere de más grados de libertad, que definan de algún modo la deformación sufrida por el sólido. De forma general, esta deformación se podría definir conociendo las coordenadas en el plano de cada punto que conforma el sólido. Aun admitiendo simplificaciones de forma, realizar todo este trabajo para una viga es poco práctico y se prefiere recurrir a teorías concretas para este tipo de sólidos.

Más concretamente, en este texto se recurre a la teoría de vigas de Euler-Bernouilli (teoría clásica de vigas o teoría de vigas esbeltas), cuya hipótesis primordial es considerar cualquier sección inicialmente plana y perpendicular a la línea media igualmente plana y perpendicular a la línea media tras deformación de la viga. Así, la posición de cualquier punto perteneciente a una sección cualquiera puede ser conocido sin más que conocer la ubicación de la sección dentro de la viga tras deformación (coordenada longitudinal, $u(x,t)$), la deflexión de la viga (coordenada transversal, $v(x,t)$) y la orientación de dicha sección ($\theta(x,t)$) (ver detalles en la Figura 3).

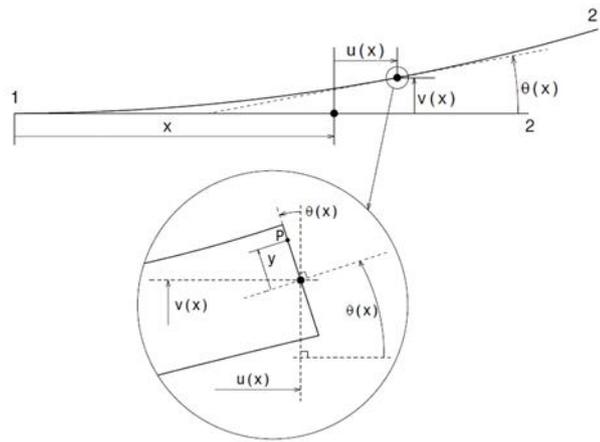


Figura 3. Definición del elemento viga: $u(x), v(x), \theta(x)$.

Es más, tal y como se aprecia en la figura, debido a la perpendicularidad de la sección con la línea media de la viga, el ángulo de desviación de dicha sección de su posición inicial coincide con el ángulo de la tangente de la línea media en ese punto. El desplazamiento de cualquier punto P de la viga puede, pues, escribirse respecto del sistema de referencia (\vec{x}_0, \vec{y}_0) como se especifica en la ecuación (1) (1).

$$\vec{r}_P(x, y, t) = [u(x, t) - y\theta(x, t)]\vec{x}_0 + v(x, t)\vec{y}_0 \quad (1)$$

No confundir $\vec{r}_P(x, y, t)$, una función vectorial que representa la posición en el plano de un punto cualquiera de la viga, con $u(x, t), v(x, t)$ o $\theta(x, t)$, funciones escalares que representan el desplazamiento horizontal, vertical y orientación respectivamente de una sección cualquiera. Dado que el giro de la sección, como se ha visto, se puede calcular como derivada de la flecha (ecuación (2)), el número de incógnitas independientes se reduce a dos: $u(x, t)$ y $v(x, t)$.

$$\theta(x, t) = \frac{dv(x, t)}{dx} \quad (2)$$

Dentro del marco de los elementos finitos presentado anteriormente, el medio sólido de la viga se discretiza en una serie de elementos, con dos extremos cada uno. Dos elementos adyacentes comparten uno de sus extremos (o nodos). Uno de los pilares clave de la discretización por elementos finitos es la aproximación de las funciones de desplazamientos $u(x, t)$ y $v(x, t)$ mediante las denominadas funciones de forma. De alguna forma, conociendo lo que sucede en los nodos del elemento, las funciones de forma permiten aproximar qué sucede en un punto cualquiera intermedio. Puesto que los nodos son comunes a los elementos que conectan, se garantiza la continuidad de las funciones que se van a aproximar.

Sean u_1, v_1, θ_1 los valores del primer nodo (primera sección) de la viga y u_2, v_2, θ_2 los valores del segundo nodo (última sección). Como funciones de aproximación se emplean típicamente polinomios, dada su versatilidad y sencillez de uso. Además, se puede demostrar que cuanto más pequeño es el elemento dentro del sólido, mejor aproximan localmente la deformada a la realidad. Se construye para la función de desplazamiento horizontal $u(x)$ un polinomio de grado 1, puesto que únicamente se conocen dos valores de dicha función (ecuación (3)). Ver detalles de cálculo en Anexo I.1).

$$u(x) = A(x) u_1 + B(x) u_2 \Rightarrow \begin{cases} A(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ B(x) = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (3)$$

Se omite la dependencia temporal de u_1 y u_2 por simplicidad. La misma consideración se puede hacer para la función $v(x)$. En este caso además, puesto que este grado de libertad está ligado a $\theta(x, t)$, son conocidas dos coordenadas para cada extremo. Por este motivo, se pueden emplear funciones de forma de grado 3 (ecuación (4)). Ver detalles de cálculo en Anexo I.1).

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2$$

$$v(x) = \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)v_1 + x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2\theta_1 + \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right)v_2 + \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)\theta_2 \quad (4)$$

Donde se ha vuelto a obviar la dependencia temporal de los grados de libertad v_1, v_2, θ_1 y θ_2 por simplicidad de escritura. Si se expresan las coordenadas de los puntos de la viga de forma vectorial se obtienen las ecuaciones (5) y (6).

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & 0 & 0 & B(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(x) & N_2(x) & 0 & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbb{N} \cdot \underline{q} \quad (5)$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \left\langle 0 \quad \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \quad 0 \quad \frac{dN_3}{dx} \quad \frac{dN_4}{dx} \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbb{N}_\theta \cdot \underline{q} \quad (6)$$

Aunque no esté explícitamente expresado, notar que tanto $u(x)$ como $v(x), \theta(x)$ y q dependen del tiempo: $u(x, t), v(x, t), \theta(x, t), q(t)$. Así pues, es posible conocer, a partir de los valores de los extremos, lo que sucede en

cualquier otro punto dentro de la viga. La forma de hallar los valores de u_i, v_i, θ_i se tratará el epígrafe siguiente.

2.3. Construcción del sistema de ecuaciones

Este epígrafe se dedicará a mostrar cómo se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento de una viga a flexión y a tracción/compresión. Se adoptará para ello un punto de vista energético, calculando las energías cinética (E_c) y potencial de deformación (E_d) para aplicar finalmente el formalismo de Lagrange (ecuación (7)) y extraer de ahí las ecuaciones. Además q es una coordenada generalizada, D cuantifica la energía disipada y F la fuerza externa que afecta al sistema. Se empleará en todo caso el modelo de viga desarrollado en el epígrafe anterior.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_d}{\partial q} = \mathbf{F}_{est} \quad (7)$$

Todos los cálculos se realizan considerando un elemento de viga individual. El modo de emplear este elemento cuando se desea analizar la estructura completa se abordará con posterioridad una vez se obtengan las ecuaciones que involucran al elemento individual.

2.3.1. Cálculo de la energía cinética

El cálculo de la energía cinética se fundamenta en la distribución de masa en el elemento viga así como de la velocidad de cada punto de la viga (ecuación (8)).

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{P \in \mathfrak{D}} \rho \|\dot{\vec{r}}_P\|^2 dP \quad (8)$$

Donde ρ es la densidad del material y $\|\dot{\vec{r}}_P\|$ indica la norma o módulo de la derivada temporal del vector r (ecuación (1)). La integral se extiende a todo punto P perteneciente al dominio \mathfrak{D} del elemento. Sustituyendo el valor de \vec{r}_P y operando (ver Anexo I.2) se obtiene la expresión buscada para la energía cinética, ecuación (9), simplificada en la ecuación (10), en términos de las funciones de forma calculadas con anterioridad (ecuaciones (5) y (6)).

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \rho S \left[\int_0^L \mathbf{N}^t \mathbf{N} dx \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \rho I_z \left[\int_0^L \mathbf{N}_\theta^t \mathbf{N}_\theta dx \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (9)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M}_\theta \dot{\mathbf{q}}} \quad (10)$$

Donde \mathbb{M} y \mathbb{M}_θ son las matrices de masa y de inercia rotacional respectivamente. Estas matrices pueden ser calculadas sin más que integrar en el dominio del elemento las funciones de forma (cf...) convenientemente multiplicadas. Como resultado se tienen las matrices (11) y (12), donde ρ expresa la densidad del material, S el área de la sección transversal constante, I_z el momento de inercia de segundo orden de la sección transversal y L la longitud del elemento:

$$\mathbb{M} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbb{M}_\theta = \frac{\rho I_z}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Cabe destacar que, debido al reducido orden de magnitud de sus términos, la matriz \mathbb{M}_θ (inercia de rotación) suele no considerarse en los cálculos. Se ilustra el cálculo de dos elementos de la matriz \mathbb{M} en el anexo A1.3.

2.3.2. Cálculo de la energía potencial de deformación

El cálculo de esta energía está apoyado en los tensores de tensión y de deformación en cada punto M del elemento. De esta forma, la expresión involucra al producto interior de ambos como se muestra en la ecuación (13).

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{M \in \mathfrak{D}} \underline{\underline{\sigma}}(M, t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(M, t) dM \quad (13)$$

Donde $:$ indica el producto contraído de los tensores tensión (σ) y deformación (ε). En el contexto de la viga de Euler-Bernouilli, se demuestra que únicamente tiene un valor significativo la componente ε_{xx} del tensor deformación, y está ligado a su correspondiente componente del tensor de tensiones a través de la ley de comportamiento. Suponiendo esta ley lineal, y el material elástico, homogéneo e isótropo, se llega a la expresión de la energía de deformación, ecuación (14). Para más detalles consultar el Anexo I.3.

$$E_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \int_0^L E \mathbb{N}_\varepsilon^t \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \mathbb{N}_\varepsilon dx \dot{\mathbf{q}} \quad (14)$$

Donde E es el módulo de Young del material y S e I_z el área y momento cuadrático de inercia de la sección transversal del elemento. Esta es la expresión más general para la energía potencial de deformación, donde todas las propiedades dentro de la integral pueden depender eventualmente de x y variar a lo largo del elemento. Si además se supone que ninguna de las propiedades del material y de la sección dependen de x , entonces la expresión se puede integrar dando origen a la ecuación (15) y a la matriz de rigidez (16), donde E es el módulo de Young del material.

$$E_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbb{K} \dot{\mathbf{q}} \quad (15)$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 & -k_t & 0 & 0 \\ 0 & 12k_f & 6Lk_f & 0 & -12k_f & 6Lk_f \\ 0 & 6Lk_f & 4L^2k_f & 0 & -6Lk_f & 2L^2k_f \\ -k_t & 0 & 0 & k_t & 0 & 0 \\ 0 & -12k_f & -6Lk_f & 0 & 12k_f & -6Lk_f \\ 0 & 6Lk_f & 2L^2k_f & 0 & -6Lk_f & 4L^2k_f \end{bmatrix} \text{ con } \begin{cases} k_t = \frac{ES}{L} \\ k_f = \frac{EI_z}{L^3} \end{cases} \quad (16)$$

Se ilustra el cálculo de dos elementos de la matriz \mathbb{K} en el anexo A1.5.

2.3.3. Aplicación del formalismo de Lagrange

Por ahora, se supone el elemento viga ideal, sin disipación de energía ($D = 0$). De esta forma, operando la ecuación (7) término a término se obtienen las expresiones de (17).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbb{M} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^t \mathbb{M}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (2\mathbb{M} \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \\ \frac{\partial E_d}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\mathbb{K} \mathbf{q} + \mathbf{q}^t \mathbb{K}) = \mathbb{K} \mathbf{q} \end{cases} \quad (17)$$

Donde se ha aprovechado la simetría de las matrices \mathbb{M} y \mathbb{K} para poder simplificar sus expresiones. Agrupando todo en una misma expresión se obtiene el sistema de ecuaciones (18) que rige el elemento viga.

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}_{est} \quad (18)$$

Es conveniente recordar las hipótesis de aplicación de esta expresión: viga de Euler-Bernouilli, material homogéneo, isótropo y elástico, propiedades de la sección constantes a lo largo de la viga, ausencia de disipación interna (amortiguamiento).

El vector F reúne todas las fuerzas puntuales aplicadas sobre los grados de libertad, incluidas reacciones. Si existen cargas ubicadas fuera de los nodos, como será el caso en los problemas que se tratarán en este texto, será preciso transferirlas a los nodos extremos del elemento de una forma conveniente. Así, se calcularán las *fuerzas de equivalentes* ligadas a ese tipo de carga en particular, pues cada tipo de carga tiene su propia forma de tratarse. Este punto se tratará con mayor claridad al desarrollar los modelos del peatón (capítulo 3).

Todo lo explicado hasta el momento está referido al tratamiento de un elemento individual. Cuando exista más de un elemento, será preciso ensamblar todas las *matrices elementales* para formar la *matriz global* de la estructura. Este ensamblaje se realiza atendiendo a la disposición de los nodos en la estructura y a qué barras convergen en dichos nodos. Se repartirá cada matriz elemental dividida en submatrices 3x3 por la matriz global ocupando aquellas posiciones que ocupe el nodo a que correspondan dentro del vector q . Se muestra un ejemplo en la Figura 4, donde se ven dos elementos, con sus respectivas matrices de rigidez elementales subdivididas en cuatro matrices 3x3 y la matriz global ensamblada K_g . El mismo método de ensamblaje se aplica para la matriz de masa.

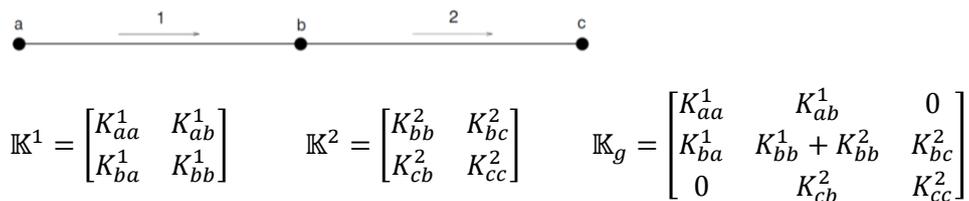


Figura 4. Ilustración del ensamblaje de una matriz.

Es importante, pues, la forma en que están ordenados los nodos dentro de dicho vector. Esto influirá en la estructura interna de las dos matrices. Un ordenado óptimo de los nodos resultará en matrices con un reducido *ancho de banda*: todos los valores no nulos de las matrices se concentrarán entorno a la diagonal, habiendo una importante acumulación de ceros en los cuadrantes más alejados de la misma. Controlando este hecho, es posible encontrar métodos de operar matrices especialmente diseñados y optimizados para este tipo de matrices, que permiten ahorrar tiempo y recursos informáticos cuando se trabaja con ellas.

Por último, es preciso notar algunas propiedades de las matrices resultantes de la discretización, propiedades que pueden eventualmente ser objeto de comprobación:

- Matriz de masa \mathbb{M} : esta matriz cuantifica la masa total que existe en el sistema, haciéndola intervenir no estáticamente (su peso, que iría incluido en las cargas) sino en términos de inercia. Si la densidad del material no es nula (cualquier situación no ideal), entonces la matriz de masa es definida positiva: todos sus valores propios son estrictamente positivos. Además, la suma de los términos de la diagonal asociados a grados de libertad traslacionales (u_i, v_i) es igual a la masa total de la estructura.
- Matriz de rigidez \mathbb{K} : esta matriz cuantifica la rigidez de la estructura, es decir, la cantidad de esfuerzo que es necesario que desarrolle el material para que se deforme (desplace) una cierta cantidad. Esta matriz es siempre semidefinida positiva, es decir, sus valores propios son siempre positivos o nulos. Habrá tantos valores propios nulos como grados de libertad de sólido rígido tenga la estructura. Para poder realizar cualquier cálculo estático o dinámico es preciso que estos grados de libertad de sólido rígido desaparezcan, imponiendo las condiciones de contorno adecuadas.

Con todo lo tratado hasta el momento, se está en disposición de realizar los primeros análisis con la estructura sola. En el epígrafe siguiente se procede a realizar una pequeña aproximación al análisis modal, el más inmediato de todos los cálculos posibles.

2.4. Validación del sistema de ecuaciones. Introducción al análisis modal

El sistema de ecuaciones planteado es suficientemente generalista para poder abordar con él el cálculo de cualquier estructura de barras plana cargada sobre su plano (pórtico). Esto incluye cualquier tipo de condición de contorno, condición inicial o carga que se aplique. Para comprobar que el sistema de ecuaciones representa adecuadamente este tipo de estructuras se realizará un análisis dinámico de los más sencillos posible: el análisis modal.

Un análisis modal consiste en la determinación de los parámetros modales de la estructura a partir bien de sus propiedades geométricas/físicas, bien a partir de mediciones experimentales. En este caso, en ausencia de experimentación, se realizará a partir de sus propiedades mecánicas, incluidas todas ellas en las matrices de la estructura. Las propiedades modales objetivo de este análisis son, entre otras, las frecuencias propias de

la estructura y sus modos propios de vibración. Otros parámetros de interés suelen ser los coeficientes de amortiguamiento modal, las masas modales, etc...

El cálculo de frecuencias y modos propios se realiza bajo dos hipótesis principales. Por un lado, se supone la estructura sin cargas, evolucionando libremente en el tiempo. Por otro lado, se supone que la evolución de los grados de libertad de la estructura es periódica, de frecuencia ω . Ignorando el amortiguamiento por el momento, se tiene el desarrollo mostrado en las ecuaciones (19) y (20).

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}\mathbf{q} = 0 \quad (19)$$

$$\text{con } \begin{cases} \mathbf{q}(t) = \underline{\mathbf{q}}_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) = -\omega^2 \underline{\mathbf{q}}_0 e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$(-\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K})\mathbf{q}_0 e^{i\omega t} = 0 \quad (20)$$

Puesto que la función exponencial no toma nunca valor nulo se llega al problema de valores propios (21).

$$(-\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K})\mathbf{q}_0 = 0 \quad (21)$$

Donde las diferentes soluciones para ω son las denominadas frecuencias propias de la estructura, y los vectores \mathbf{q}_0 asociados son los llamados vectores propios. Su interpretación física es sencilla: las frecuencias propias son las frecuencias de excitación bajo las cuáles aparecen las máximas amplitudes de oscilación (resonancia); por su parte, los modos propios describen la forma de vibrar particular que tiene la estructura para cada una de las frecuencias propias. Una excitación periódica de frecuencia intermedia no proporcionará las máximas amplitudes de oscilación y la forma de vibración podrá ser descrita como composición de los modos propios más cercanos.

La resolución de este problema pasa por resolver el determinante de la matriz del sistema de ecuaciones homogéneo formado en (21). Esto responde al hecho de que, de no ser nulo este, el sistema de ecuaciones tendría solución, y al ser este homogéneo, esa solución sería la trivial ($\mathbf{q}_0 = 0$), carente de interés físico. Se impone, pues, que el sistema no tenga una solución única mediante $\det(-\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K}) = 0$. Como resultado de esta expresión se obtiene una ecuación en ω , que al ser resuelta proporciona las frecuencias propias de la estructura.

La implicación más directa de este hecho es la ausencia de solución única del sistema de ecuaciones (21). Sí que existirán soluciones, infinitas, todas ellas dependientes de un factor multiplicativo. Físicamente, esto es

coherente, pues los valores de q_0 son la amplitud de la respuesta de la estructura para cada grado de libertad. No se puede definir exactamente la amplitud de una respuesta si no se conoce la amplitud de la carga aplicada, y para el cálculo llevado a cabo no se dispone de dicha carga. Así pues, los modos propios indican una *relación* que cumplen los grados de libertad para cada forma de oscilar.

La gran utilidad de los modos y frecuencias propias es que constituyen una de las vías de resolución del problema dinámico, a través del denominado espacio modal. Se calcula la solución en desplazamientos como una suma ponderada de una serie de modos propios. Para ello, se impone que la solución es de la forma de la ecuación (22), donde $\boldsymbol{\varphi}_i$ es cada uno de los modos propios y $r_i(t)$ (con $i = 1, 2 \dots$) representa el factor multiplicativo de cada uno en cada instante t .

$$\mathbf{q}(t) = [\boldsymbol{\varphi}_1 | \boldsymbol{\varphi}_2 | \dots | \boldsymbol{\varphi}_n] \cdot \begin{Bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{V} \mathbf{r} = r_1(t)\boldsymbol{\varphi}_1 + r_2(t)\boldsymbol{\varphi}_2 + \dots + r_n(t)\boldsymbol{\varphi}_n \quad (22)$$

El problema se traduce, pues, en hallar esas funciones $r_i(t)$ por medio del sistema de ecuaciones expresado en la ecuación (23) mediante las matrices modales, matrices resultantes de multiplicar por la izquierda y por la derecha a las matrices masa y rigidez por la matriz de modos propios \mathbf{V} .

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{F}}_{est} \\ \text{con } \begin{cases} \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^t \mathbf{M} \mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{V}^t \mathbf{K} \mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{est} = \mathbf{V}^t \mathbf{F}_{est} \end{cases} & \end{aligned} \quad (23)$$

Como característica fundamental de estas matrices es que son diagonales (multiplicar por los vectores propios es en realidad una forma de *diagonalizar* una matriz). El problema a resolver en $r_i(t)$ es, pues, muy sencillo, aunque no es la óptica de resolución que se adopta en este trabajo.

Para finalizar el capítulo, una breve reseña en referencia al amortiguamiento en el cálculo de los modos propios. El cálculo propuesto anteriormente es resultado de no incluir amortiguamiento en la estructura, el cual se introduce a través de la matriz \mathbf{C} , no mencionada hasta el momento. Se profundiza en la construcción de esta matriz en capítulos posteriores. El sistema de ecuaciones, incluyendo dicha matriz, es el indicado en la ecuación (24).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad \rightarrow \quad [-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{q}_0 e^{i\omega t} = 0 \quad (24)$$

Teniendo en cuenta el amortiguamiento, el problema general de valores propios pasaría al dominio complejo. Tanto las frecuencias propias como los elementos de los vectores propios serían números complejos, pues el problema de valores propios a resolver sería el presentado en la ecuación (24). De forma general, el módulo de las frecuencias propias representa la frecuencia propia de oscilación asociada a cada modo, y su fase representa un desfase de oscilación que posee cada uno. Ese desfase es proporcional al amortiguamiento del modo en cuestión. Finalmente, el problema en el espacio modal se resolvería de forma idéntica a como se ha planteado anteriormente, pero considerando una vez más la matriz de amortiguamiento, esta vez en forma modal, ecuación (25).

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{F}}_{est} \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{V}^t \mathbf{C} \mathbf{V} \quad (25)$$

3. Formulación de los modelos mecánicos del peatón

En el presente capítulo se presenta de forma detallada el desarrollo matemático de los modelos que se han previsto para simular la acción de un peatón sobre una estructura. Dichos modelos siguen de alguna forma un cierto patrón lógico, aumentando progresivamente su complejidad a la vez que van permitiendo simular algún aspecto adicional del caminar del peatón. Están además diseñados de forma que cada uno contiene al anterior, es decir, es más generalista en algún aspecto y bajo simplificaciones se podrían simular los modelos anteriores.

Así, se presenta en primer lugar el modelo de una **fuerza puntual móvil**, en lo sucesivo **F**, representando únicamente *el peso* del peatón circulando por la viga. Este modelo admite una generalización inmediata, que es la de considerar la fuerza como variable en el tiempo (¿periódica?), con la intención quizás de simular los pasos del peatón y los efectos propios de la inercia del peatón.

En segundo lugar se presenta el modelo **masa – resorte – amortiguador**, en lo sucesivo **MCK**, que da cuenta además de la inercia del peatón. Efectivamente, al estar la masa en sí misma presente en el modelo, automáticamente aparecerán todos los efectos ligados a ella: peso e inercia. Esta masa es susceptible de admitir cargas puntuales adicionales, que se podrán incluir en un intento de simular otros fenómenos, como los pasos.

En tercer lugar, y último, se realiza una primera aproximación de los pasos mediante un modelo de **péndulo invertido de doble apoyo sobre base elástica**, en lo sucesivo **PI**. El conjunto se desplaza a velocidad constante a lo largo de la viga. La oscilación natural del péndulo hace las veces de pasos y la base elástica en que se encuentra caracteriza la rigidez del peatón.

Cabe destacar un aspecto común a todos ellos y es el hecho de que se considera en todo caso que el peatón circula a velocidad constante c por la estructura, excepto la masa del modelo PI, que por su naturaleza presenta ligeras oscilaciones entorno a este valor. A continuación se detalla cada uno de los modelos, así como su tratamiento formal a través de las leyes de la dinámica. El objetivo en cada caso es obtener una serie de ecuaciones de movimiento y de acoplamiento dinámico que permitan simular al peatón mediante Matlab.

3.1. Modelo de fuerza puntual móvil (F)

La realización de este modelo tiene un objetivo doble. Por un lado, es un buen principio para someter a la viga al peso del peatón, pues este puede modelarse mediante una fuerza puntual constante atravesando la estructura.

Se puede ir más allá y hacer de esta fuerza una carga variable en el tiempo, con el fin de simular otros efectos deseados; eso sí, todos como funciones conocidas previamente. Por otro lado, es el caso más sencillo de una configuración en el que la carga se desplaza por la estructura a velocidad constante. Será necesario dominar este modelo antes de abordar los siguientes, pues para la modelización de aquellos será necesario recurrir al modelo aquí expuesto.

Las hipótesis a considerar en este modelo no son muchas ni muy restrictivas. Se empleará el elemento de viga de Euler-Bernouilli (ver capítulo 2), mediante el cual se modelará la estructura en una serie de elementos. Se considerará únicamente una fuerza vertical, perpendicular al elemento en que se aplica y desplazándose por éste a *velocidad constante* c .

Las ecuaciones que gobiernan este problema se pueden recoger fácilmente en un sistema matricial expresado mediante las ya conocidas matrices masa, amortiguamiento y rigidez, ecuación (26).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_{est} \quad (26)$$

Puesto que ya se llevó a cabo la discusión acerca de las matrices de la estructura, es el turno ahora de detallar el vector \mathbf{F}_{est} , vector de fuerzas generalizadas conteniendo todas las cargas que actúan sobre la estructura, a saber, fuerzas nodales, cargas intraelementales y reacciones, ecuación (27). De las reacciones R no es necesario (ni posible, en este estado del problema) preocuparse, pues tras la aplicación de las condiciones de contorno¹ las ecuaciones que contienen estas incógnitas desaparecerán. A su vez, el tratamiento de las fuerzas nodales F_{nod} es muy simple: se añadirá al vector \mathbf{F}_{est} el valor de la fuerza, con su signo, en la posición del grado de libertad en que esté aplicada.

$$\mathbf{F}_{est} = \mathbf{F}_{eq} + \mathbf{F}_{nod} + \mathbf{R} \quad (27)$$

Las cargas intraelementales, las que son de interés en este problema, expresadas en forma de fuerzas equivalentes \mathbf{F}_{eq} se tratan a partir de las fuerzas de empotramiento que generan. Las fuerzas de empotramiento son las reacciones que sufriría el elemento si este estuviera aislado, biempotrado y sometido a las mismas cargas que posee en el modelo original. Estas fuerzas de empotramiento, localizadas en los nodos del mismo, están directamente asociadas a los grados de libertad correspondientes. Es posible, pues, tratarlas como fuerzas puntuales y añadirlas al vector de fuerzas equivalentes, previa consideración de dos puntos importantes:

¹ Las condiciones de contorno se supondrán constantes en el tiempo y nulas a para todos los modelos tratados.

- En primer lugar, las fuerzas de empotramiento indican de alguna forma las reacciones del terreno sobre el elemento y no aquello que lo excita. Las fuerzas equivalentes son, pues, en virtud del principio de acción y reacción, de sentido opuesto a las fuerzas de empotramiento, lo que matemáticamente se traduce en un cambio de signo de todas las componentes.
- En segundo lugar, las fuerzas de empotramiento suelen calcularse en coordenadas locales al elemento, es decir, con el elemento en posición horizontal y con el nodo "1" a la izquierda. Dentro de la estructura, el elemento puede estar ubicado de cualquier forma, por lo que es preciso considerar un cambio de coordenadas (de locales a globales) también para las cargas que sobre él se aplican.

En resumen, las fuerzas equivalentes se calculan mediante la ecuación (28).

$$\mathbf{F}_{eq}(t) = -\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{F}_{emp}(t) \quad (28)$$

El caso tratado en este epígrafe es el de una fuerza vertical (F) situada en un punto genérico de la viga, como se muestra en la Figura 5. Hay que notar que este punto es móvil. Para una fuerza de estas características fija a una distancia a del nodo izquierdo, las fuerzas de empotramiento son las expresadas en la ecuación (29).



Figura 5. Fuerzas de empotramiento generadas por una fuerza puntual.

$$\mathbf{F}_{emp} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ M_{z1} \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{(L-a)^2(L+2a)}{L^3} \\ -\frac{a(L-a)^2}{L^2} \\ 0 \\ -\frac{a^2(3L-2a)}{L^3} \\ \frac{a^2(L-a)}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Donde F representa el peso del peatón, típicamente $F = -m_p g$, con m_p la masa del peatón y g la aceleración de la gravedad. Puesto que la fuerza se desplaza a velocidad constante, el valor de a es variable en el tiempo, ecuación (30).

$$a(t) = x_0 + ct \quad (30)$$

Siendo x_0 el punto de partida de la fuerza dentro del elemento, c la velocidad constante y t el tiempo. Es, pues, evidente que el vector de fuerzas generalizadas F varía con el tiempo. No solo lo hacen sus componentes por contener el parámetro $a(t)$ sino la ubicación de los mismos, pues a lo largo del tiempo la fuerza pasa de un elemento a otro y los nodos afectados cambian.

El tratamiento de este fenómeno, ahora ya un problema matemático, se realizará *online*, es decir, puesto que la solución se obtendrá por incremento temporal mediante la aplicación un método de integración de ecuaciones diferenciales, para cada paso temporal será necesario reconstruir el vector F_{est} a partir de la posición actualizada de la fuerza. Lo que a priori puede parecer un tanto complicado, se facilita enormemente trabajando en Matlab. Se expondrá con más detalle en el capítulo 4, apartado 4.1.

El modelo aquí expuesto, suponiendo que se sabe resolver el caso de fuerza constante, es fácilmente generalizable al caso de una fuerza también variable en el tiempo. Conocida $F(t)$, en la expresión de las fuerzas de empotramiento serán variables en el tiempo dos parámetros: $a(t)$ y $F(t)$. El tratamiento de esta dependencia temporal se realiza exactamente igual que en el caso anterior, actualizando el vector F en cada paso temporal.

3.2. Modelo MCK

El siguiente modelo a tratar es el modelo de masa puntual m_p unida a la viga mediante un resorte de constante k_p y un amortiguador de constante c_p , como se aprecia en la Figura 6. Este modelo pretende simular de una forma más realista la inercia vertical del propio peatón, generándose de forma “natural” una fuerza constante (peso) y otra variable (oscilaciones) sobre la viga, sin necesidad de añadir ninguna fuerza externa. Dos hipótesis fundamentales: la masa se desplaza con velocidad constante c a lo largo de la viga y su movimiento se describe únicamente mediante un grado de libertad vertical (w), pues el horizontal es conocido en todo momento.

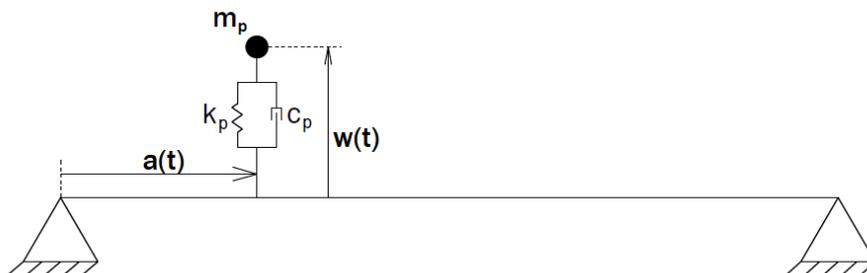


Figura 6. Modelo de masa, resorte y amortiguador sobre la viga

Aunque no hay ninguna fuerza explícitamente impuesta sobre la masa, es su peso la que inicia su movimiento oscilatorio. Ese peso se transmite a la viga, la cual se deforma y hace descender ligeramente la base del resorte a la que está conectada la masa. Estos dos fenómenos (peso y deformación de la viga) constituyen los dos iniciadores del movimiento vertical de la masa.

Para su formulación, el primer paso es dividir el sistema en dos subsistemas. Por un lado, la viga, cuyo tratamiento mediante el método de elementos finitos ha sido tratado en el capítulo 2; por otro lado, el subsistema masa-resorte-amortiguador (en lo sucesivo, MCK), cuyo análisis se realiza mediante un equilibrio dinámico en la dirección vertical tanto de la masa aislada como del conjunto masa-resorte-amortiguador.

El resultado son dos ecuaciones: una ecuación de movimiento (31) y una ecuación de acoplamiento dinámico entre los dos subsistemas (32), donde $F(t)$ es la fuerza generada por el subsistema MCK que excita a la viga de igual forma que una fuerza puntual móvil (ver apartado 3.1). Para más detalles sobre su obtención, consultar el anexo A1.6. Ambas expresiones se incorporan al sistema de ecuaciones de la viga para su resolución mediante Matlab.

$$m_p \ddot{w} + c_p (\dot{w} - \dot{v}) + k_p (w - v) = -m_p g \quad (31)$$

$$F(t) = -m_p g - m_p \ddot{w} = c_p (\dot{w} - \dot{v}) + k_p (w - v) \quad (32)$$

Existen varias precauciones a tomar a la hora de incluir las ecuaciones en el sistema. En primer lugar, el tratamiento de ese grado de libertad “virtual” v que se ha empleado en ambas ecuaciones. De forma general, no se posee información acerca de lo que sucede en un punto cualquiera de un elemento en cada instante de tiempo. Dos planteamientos de este problema son posibles. El más complejo de ellos es considerar un nodo adicional en el punto de unión de ambos subsistemas, con sus 3 grados de libertad, modificando las matrices de la viga adecuadamente. Esto supondría reconstruir todo el problema (ensamblaje de matrices incluido) en cada iteración del *solver*, con todo el coste computacional que conlleva.

El otro tratamiento, el aquí empleado, es aproximar lo que sucede en un punto genérico del elemento a partir de lo que sucede en los extremos del elemento afectado. Este enfoque, además de computacionalmente más eficiente, es muy sencillo de aplicar, pues la formulación del propio elemento viga se fundamenta en una aproximación de este estilo (ver capítulo 2). Se utilizarán para ello las mismas funciones de forma, considerando que la variable x que contienen varía en el tiempo igual que lo hace la coordenada α de las fuerzas de empotramiento. Se puede, pues, reescribir la ecuación en términos de los grados de libertad del problema y de las funciones de forma, obteniendo la ecuación (33).

$$m_p \dot{w} + c_p (\dot{w} - (N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{\theta}_1 + \dots)) + k_p (w - (N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + \dots)) = -m_p g \quad (33)$$

Esta ecuación, aunque larga, es posible incluirla directamente en las matrices \mathbb{M} , \mathbb{C} y \mathbb{K} del problema. De la misma forma se puede operar para obtener una expresión de la fuerza de contacto entre peatón y viga en función de los grados de libertad del problema y las funciones de forma, como se expone en la ecuación (34). Se detallan los pormenores de su inclusión en el sistema de ecuaciones en el apartado 4.1.

$$F(t) = c_p (\dot{w} - (N_1 \dot{v}_1 + \dots)) + k_p (w - (N_1 v_1 + \dots)) \quad (34)$$

3.3. Modelo de péndulo invertido sobre base elástica (PI)

Este modelo, el más complicado de los tres considerados, trata de simular en primera aproximación los pasos del peatón sobre la estructura. Aunque sus debilidades son muchas, se cuenta con una fortaleza importante y es que se consigue simular un movimiento oscilante (pendular) acoplado con el propio movimiento de la viga. Nuevamente, la única “excitación” externa es forzar al conjunto a desplazarse con velocidad constante.

El movimiento en este caso se transmitirá de tres formas: por un lado, se tiene el peso del peatón, que se transmitirá a la viga a través de la deflexión de la base del mismo; por otro lado, se tiene la propia deformación de la viga, que se transmitirá a la base del peatón, imponiéndole un movimiento; por último, se tienen las condiciones iniciales no nulas del peatón, el cual comenzará su caminar con uno de los pies alzado. Por estas tres causas mencionadas se iniciará y perpetuará el movimiento del peatón a su paso por la viga, transmitiéndose constantemente la energía entre ambos.

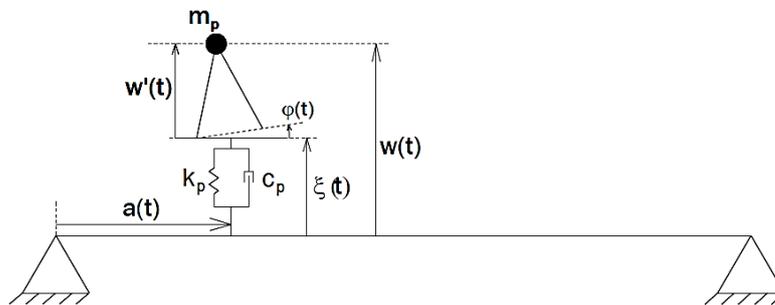


Figura 7. Modelo de péndulo invertido con doble apoyo sobre base elástica desplazándose sobre la viga.

La formulación de este modelo incluye la participación de dos grados de libertad a mayores de los considerados para la viga. Se tiene por un lado el movimiento vertical del peatón (w) y por otro el desplazamiento vertical de la base en que se apoya (ξ), como se aprecia en la Figura 7. Se considera además, para facilitar su formulación, un grado de libertad local adicional φ .

Este grado de libertad está, sin embargo, relacionado con el resto y no forma parte del sistema de ecuaciones de forma directa. Para la obtención de las correspondientes ecuaciones de movimiento y expresiones de fuerzas de excitación se divide el sistema en tres subsistemas: por un lado, la viga con la fuerza de acoplamiento, sistema idéntico al tratado en apartados anteriores; por otro lado, el peatón (m_p) modelado como un péndulo invertido sobre dos apoyos alternantes; y finalmente la base elástica *sin masa* unida a la viga mediante un resorte (k_p) y un amortiguador (c_p).

Las ecuaciones que rigen el subsistema se muestran en las ecuaciones de (35) a (40), de las cuales se pueden obtener detalles acerca de su obtención en el anexo A1.7.

$$w - \xi = \frac{p}{2}\varphi + h \quad (35)$$

Si $\varphi \geq 0$

$$\dot{w} - \dot{\xi} = \left(\frac{p}{2} - h\varphi\right)\dot{\varphi}$$

$$L_p^2\ddot{\varphi} - gh\varphi = -\frac{gp}{2}$$

$$\ddot{w} - \ddot{\xi} = -\left(\frac{p}{2}\varphi + h\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{p}{2} - h\varphi\right)\ddot{\varphi} \quad (38)$$

Si $\varphi < 0$

$$\dot{w} - \dot{\xi} = \left(\frac{p}{2} + h\varphi\right)\dot{\varphi} \quad (36)$$

$$L_p^2\ddot{\varphi} - gh\varphi = \frac{gp}{2} \quad (37)$$

$$m_p\ddot{w} + c(\dot{\xi} - \dot{v}) + k(\xi - v) = -m_p g \quad (39)$$

$$F(t) = -m_p g - m_p\ddot{w} = c(\dot{\xi} - \dot{v}) + k(\xi - v) \quad (40)$$

La ecuación (35), que liga el grado de libertad local φ a los grados de libertad w y ξ del problema, se empleará para determinar el signo del ángulo, es decir, si el peatón apoya sobre una pierna u otra, y poder así decidir acerca de qué conjunto de ecuaciones emplear. Las ecuaciones (36), obtenidas por derivación de la primera, se empleará para obtener la velocidad angular instantánea del peatón y emplear este valor junto con el de φ para calcular su aceleración angular mediante (37), las ecuaciones de movimiento del péndulo invertido doble. Con todo, se puede calcular al miembro derecho de la ecuación (38)(38), la ecuación de movimiento que relaciona los grados de libertad w y ξ considerados en el problema, fruto de la derivación de la ecuación (36). Por último, las ecuaciones (39) y (40) son análogas a las obtenidas en el modelo MCK, y son fruto del equilibrio de la base del peatón.

Se puede razonar igual que se vio en el apartado anterior respecto de estas ecuaciones, que contienen coordenada v . Esta puede ser expresada en función de las funciones de forma obtenidas en el capítulo 2, siendo así posible incluir esta ecuación directamente en el sistema de ecuaciones de la viga. $F(t)$ se puede expresar asimismo en función de velocidades y posiciones, en lugar de la aceleración \ddot{w} .

4. Implementación y validación de los modelos mediante Matlab

Cada uno de los modelos hasta ahora presentados resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que se resuelven con la ayuda de Matlab. Para aprovechar la potencia del software, se formula cada problema en la forma matricial propuesta en los capítulos anteriores. Posteriormente se adapta todo a las exigencias de la función que resolverá el sistema de ecuaciones diferenciales (en lo sucesivo, *solver*) que permite extraer la solución del problema.

4.1. Programación de los modelos

Las ecuaciones planteadas se resolverán mediante las funciones de tipo 'ode???' de Matlab, donde ??? es una etiqueta que identifica de alguna forma el tipo de método y orden de integración que se va a aplicar, todos ellos diseñados para la resolución de ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) diferenciales lineales ordinarias de primer orden. Sin embargo, adaptando el código es posible resolver ecuaciones de orden superior e incluso ecuaciones no lineales^[16]. Los tres modelos presentados se integran mediante la función *ode15s*, especialmente adaptada para problemas denominados '*stiff*', en los que existen fuertes diferencias numéricas entre las matrices que intervienen, haciendo que la evolución de las múltiples funciones involucradas sea notablemente desigual.

4.1.1. El espacio de estados

Las funciones que resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales en Matlab están diseñadas para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de orden uno. Como se aprecia, el sistema que es preciso resolver en cada uno de los problemas tratados es de orden 2. Es necesario, pues, realizar una reducción del orden de las ecuaciones, pasando a lo que se denomina el espacio de estados^[10].

Para realizar esta operación, se aplica en primer lugar un cambio de variable. Se define el vector de estado como aquel que contiene las variables de estado del problema, que en los casos trabajados contendrá los N grados de libertad así como las primeras derivadas de todos ellos, ecuación (41). Este vector es de longitud $2N$.

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Es posible reescribir la formulación original de los problemas, que constaba de tres matrices, los vectores de coordenadas y sus derivadas y el vector de fuerzas en un problema con dos matrices, el vector de estado y su

derivada y un vector de fuerzas modificado, tal y como se muestra en la ecuación (42).

$$R\dot{\mathbf{p}} + S\mathbf{p} = \mathbf{G} \quad (42)$$

Para operar dicha transformación hay que encontrar una forma adecuada que adopten R, S y G . Se puede comprobar que las matrices de (43) reproducen el problema original así como el cambio de variable, como se aprecia en la ecuación (44).

$$R = \begin{bmatrix} -\mathbb{K} & \emptyset \\ \emptyset & \mathbb{M} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \emptyset & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & \mathbb{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{K} & \emptyset \\ \emptyset & \mathbb{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde \mathbb{M} , \mathbb{K} , \mathbb{C} y \mathbf{F} son las matrices y vector originales del problema y \emptyset representa un grupo de ceros, matriz o vector según el caso, de dimensión adecuada. Las primeras filas del problema en el espacio de estados corresponden al cambio de variable. Hay que hacer una pequeña observación, y es que se ha operado el cambio de variable a través de \mathbb{K} , como se muestra en la ecuación (45), lo que evidentemente no influye en la transformación.

$$-\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mathbb{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (45)$$

La ventaja de esta transformación es la forma que adquiere la matriz S , que pasa a ser simétrica. Es decir, si se operase la transformación directamente, existirían sendas matrices identidad en R y en S , y aunque la matriz R seguiría siendo simétrica, S no lo sería. De esta forma, se asegura esa forma para la matriz S , lo cual supone grandes ventajas en tiempo de cálculo, almacenamiento en memoria y demás consideraciones tanto matemáticas como informáticas.

Por otro lado, esta transformación no influye de ninguna forma sobre las condiciones iniciales. Al estar estas expresadas en términos de posiciones iniciales y velocidades iniciales, pueden ser agrupadas en un vector inicial \mathbf{p}_0 conteniendo toda la información al respecto, ecuación (46)(46).

$$\mathbf{p}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Este problema, así expresado, ya es directamente resoluble mediante las funciones implementadas en Matlab. La función empleada se emplea con la siguiente forma:

```
>> ode15s(@function, [t_i t_f], X_0, options);
```

Donde `@function` es una referencia a una función que devuelve la derivada de cada una de las variables. Es importante precisar que dicha función recibe como parámetros un vector de estado \mathbf{p} y el instante de tiempo t asociado a ese estado. La operación que básicamente se lleva a cabo es la expresada en la ecuación (47), obtenida a partir de (42). Esta derivada se calcula paso a paso en el tiempo a partir del instante t_i , siendo el estado inicial \mathbf{x}_0 , es decir, las condiciones iniciales \mathbf{p}_0 .

$$\dot{\mathbf{p}} = R^{-1}[\mathbf{G} - S\mathbf{p}] \quad (47)$$

Puesto que hay que indicarle al `solver` una función que contenga la operación de la ecuación (42), creada por el programador, es posible añadir más código a dicha función para que, en función del vector de estado \mathbf{p} y el instante t recibidos, se modifiquen a conveniencia los vectores y matrices que toman parte del cálculo antes de obtener $\dot{\mathbf{p}}$. Algunas de estas modificaciones incluyen el identificar la posición de la carga en cada instante de tiempo e incluir las fuerzas equivalentes asociadas en las posiciones adecuadas del vector \mathbf{G} , o identificar el ángulo φ del péndulo doble invertido y emplear las ecuaciones adecuadas en función de si apoya con una pierna u otra. Esta estrategia se desgrana en detalle en el epígrafe siguiente.

4.1.2. La actualización del problema

Para simular el tránsito de las fuerzas y la evolución de los subsistemas a lo largo del tiempo se hace necesario modificar las matrices R y S así como el vector \mathbf{G} a medida que se avanza en la resolución del problema. Para ello es necesario interpretar en cada iteración el estado del sistema en cada llamada a la función `@function` por el `solver` y decidir en cada instante qué ecuación o ecuaciones aplican para calcular las nuevas velocidades y aceleraciones $\dot{\mathbf{p}}$.

Caso de la fuerza puntual móvil

Para el caso del modelo de la fuerza puntual móvil hay, de forma general, dos factores a evaluar. En primer lugar, se trata de ubicar la fuerza dentro de la viga, es decir, identificar en qué elemento n_{act} se encuentra actualmente y cuál es su coordenada local x_{act} en ese instante. El tratamiento de este problema se vuelve bastante sencillo siempre que la velocidad c de la fuerza sea conocida a priori. De esta forma, es posible antes de comenzar la aplicación del método de integración, construir un vector \mathbf{t}_n con la información acerca de los instantes de tiempo en los que la fuerza supera cada uno de los nodos, como se muestra en la Figura 8.

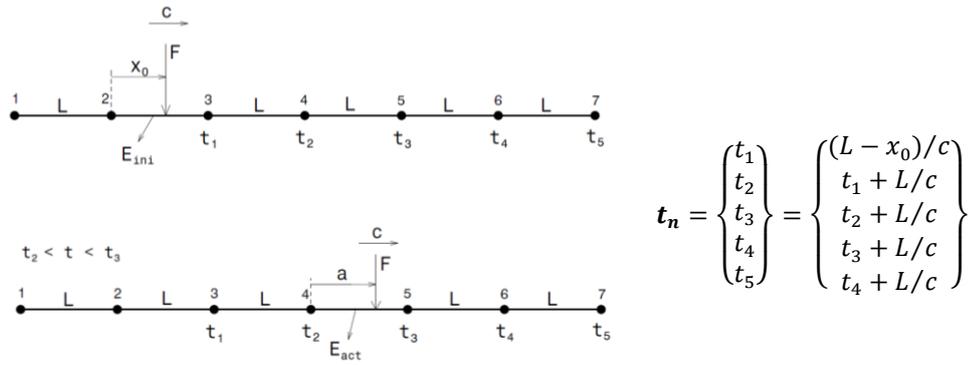


Figura 8. Construcción del vector de tiempos de recorrido de la fuerza por la viga.

Así, en cada llamada a la función no hay más que “contar” el número de nodos que se han superado y la distancia adicional que se ha recorrido dentro del elemento en el que está actualmente para ubicar adecuadamente las fuerzas equivalentes y proporcionar un valor de $a(t)$ adecuado para su cálculo. En la figura, por ejemplo, se ha alcanzado un valor de t tal que se ha superado el segundo nodo $t > t_2$. El elemento en que se encuentra la fuerza es $E_{act} = E_{ini} + N_s = 2 + 2 = 4$, con E_{ini} el elemento inicial (conocido a priori al definir la carga) y N_s el número de nodos superados. El cuarto elemento se sitúa entre los nodos 4 y 5, y es ahí donde se ubicarán las componentes de las fuerzas equivalentes asociadas. Se calcula $a(t)$ como se muestra en la ecuación (48).

$$a(t) = c(t - t_2) \quad (48)$$

Esta aproximación es ventajosa en el sentido de que incluye un problema dinámico previo, que es aquel en el que la fuerza no se desplaza por la estructura. Así, estableciendo la velocidad nula, nunca se llegará a superar el siguiente nodo y algorítmicamente siempre se computará el mismo valor de *elemento actual* y *coordenada local actual*, como se muestra en la ecuación (49). Además, no es complicado añadir un último detalle y es el hecho de que se hayan superado todos los nodos. Si al inicio de la iteración se detecta que se han superado todos los nodos, en lugar de detener la simulación es posible en este caso indicar que el módulo de la fuerza aplicada sobre la estructura se anule. Así, continúa la simulación con la estructura libre pudiéndose evaluar más fácilmente fenómenos de amortiguamiento.

$$\begin{aligned} \text{Ningún nodo superado: } a(t) &= x_0 + ct \\ \text{Todos los nodos superados: } F(t) &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Caso del modelo MCK

En lo que respecta al modelo MCK, al problema de ubicar la fuerza dentro de la estructura en cada instante se añade el de calcular el valor de la fuerza que excita a la misma. Para ello, como se ha visto anteriormente, ecuación (34), es necesario recuperar o bien la aceleración vertical de la masa o bien las posiciones y velocidades de la masa y del punto de unión con la viga. Es mucho más accesible este último abordaje, pues dichas posiciones y velocidades se obtienen directamente del estado de movimiento \mathbf{p} pasado por argumento a `@function`. Se resumen a continuación las expresiones que se implementan en `@function` y el orden en que se operan.

Acción	Resultado de la acción
Se reciben el estado de movimiento y el instante de tiempo asociado	$\mathbf{p} = \langle u_i \ v_i \ \theta_i \ \dots \ w \mid \dot{u}_i \ \dot{v}_i \ \dot{\theta}_i \ \dots \ \dot{w} \rangle$ t
Se ubica la posición del sistema MCK y se calcula la coordenada local	<i>Nodos 1 y 2 del elemento actual</i> $a(t)$
Se calcula la deflexión y su derivada en ese punto	$v = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2$ $\dot{v} = N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{\theta}_1 + N_3 \dot{v}_2 + N_4 \dot{\theta}_2$
Se calcula el valor de la fuerza	$F(t) = -m_p g + c_p(\dot{w} - \dot{v}) + k_p(w - v)$
Se construye el vector de fuerzas equivalentes y se introduce en las posiciones adecuadas	$\mathbf{F}_{eq} \rightarrow \mathbf{F}$ $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$
Se añade la ecuación de movimiento del subsistema MCK (ver abajo), ubicando cada sumando en la posición adecuada	R y S $m_p \ddot{w} + c_p (\dot{w} - (N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{\theta}_1 + \dots)) + k_p (w - (N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + \dots)) = 0$
Se aplican las condiciones de contorno, que típicamente son nulas (lo serán en este trabajo), por lo que se eliminan las filas y columnas correspondientes.	R' S' G'
Se calcula la derivada del vector de estado mediante la ecuación de movimiento,	$\dot{\mathbf{p}} = R'^{-1}(G' - S'\mathbf{p})$

En este modelo no es solo el vector de fuerzas lo que evoluciona en el tiempo sino también el valor de algunos elementos de las matrices R y S (a través de \mathbb{K} y \mathbb{C}). Y es que en la ecuación de movimiento que actualiza la

posición de la masa aparecen términos en los grados de libertad de los extremos del elemento en el que se encuentra la masa en cada instante ($v_i, \theta_i, \dot{v}_i, \dot{\theta}_i$). Puesto que la masa se desplaza a lo largo de la estructura, los grados de libertad que intervienen sucesivamente también van cambiando, y los valores asociados van evolucionando, no solo en valor, sino también en posición dentro de la matriz. No se trata sin embargo de reconstruir todo el problema en cada iteración, sino tan solo de modificar los términos adecuados en cada instante.

Caso del modelo de péndulo doble invertido

El problema ahora se vuelve un poco más complejo. La actualización en este caso se hace en aún más sentidos. En primer lugar, y como viene siendo costumbre, es preciso actualizar en cada instante la posición del subsistema que circula por la estructura, así como el valor de la fuerza que excita la estructura en función de las posiciones y velocidades de los grados de libertad involucrados. En segundo lugar, es preciso actualizar la ecuación de movimiento que rige el movimiento de la plataforma del peatón, igual que se hizo en el modelo anterior.

Por último, hay que tratar la ecuación que rige el movimiento pendular del peatón. Esta ecuación se ha visto que es doble, pues el momento del peso actúa en un sentido u otro en función de si apoya con un pie o con otro. Es entonces esa característica la que hay que evaluar en cada instante: con qué pie apoya el peatón. Como se vio en el Capítulo 3, se utilizará el ángulo φ , calculado en cada iteración a partir del estado de movimiento del sistema, y en función de su signo se determinará la ecuación a aplicar.

A continuación se muestra un resumen de las diferentes etapas programadas en la función pasada al *solver* para obtener en cada instante de tiempo la derivada del vector de estado.

Acción	Resultado de la acción
Se reciben el estado de movimiento y el instante de tiempo asociado	$\mathbf{p} = \langle u_i \ v_i \ \theta_i \ \dots \ w \mid \dot{u}_i \ \dot{v}_i \ \dot{\theta}_i \ \dots \ \dot{w} \rangle$ t
Se ubica la posición del subsistema y se calcula la coordenada local	<i>Nodos 1 y 2 del elemento actual</i> $a(t)$
Se calcula la deflexión y su derivada en ese punto	$v = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2$ $\dot{v} = N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{\theta}_1 + N_3 \dot{v}_2 + N_4 \dot{\theta}_2$
Se calcula el valor de la fuerza	$F(t) = -m_p g + c_p (\dot{\xi} - \dot{v}) + k_p (\xi - v)$
Se construye el vector de fuerzas equivalentes y se introduce en las posiciones adecuadas	$\mathbf{F}_{eq} \rightarrow \mathbf{F}$ $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$

Se calcula el valor del ángulo que forma el peatón con su base	$\varphi = 2(w - h - \xi)/P$
Se calcula su velocidad. Si $\varphi \geq 0$	$\dot{\varphi} = (\dot{w} - \dot{\xi})/(P/2 - h\varphi)$
Si $\varphi < 0$	$\dot{\varphi} = (\dot{w} - \dot{\xi})/(P/2 + h\varphi)$
Y su aceleración, con la ecuación de movimiento del péndulo. Si $\varphi \geq 0$	$\ddot{\varphi} = -g(P/2 - h\varphi)/L^2$
Si $\varphi < 0$	$\ddot{\varphi} = g(P/2 + h\varphi)/L^2$
Se añade la ecuación de movimiento de la base del peatón (ver debajo), ubicando cada sumando en la posición adecuada	R y S
$m_p \ddot{w} + c_p (\dot{\xi} - (N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{\theta}_1 + \dots)) + k_p (\xi - (N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + \dots)) = -m_p g$	
Y se añade la ecuación de movimiento (der debajo), asociada al subsistema completo	R y S
Si $\varphi \geq 0$	$\ddot{w} - \ddot{\xi} = -(h + (P/2)\varphi)\dot{\varphi}^2 + (P/2 - h\varphi)\ddot{\varphi}$
Si $\varphi < 0$	$\ddot{w} - \ddot{\xi} = -(h - (P/2)\varphi)\dot{\varphi}^2 + (P/2 + h\varphi)\ddot{\varphi}$
<i>Donde el miembro de la derecha se puede calcular completamente en este momento</i>	
Se aplican las condiciones de contorno, que típicamente son nulas (lo serán en este trabajo), por lo que se eliminan las filas y columnas correspondientes.	R' S' G'
Se calcula la derivada del vector de estado mediante la ecuación de movimiento	$\dot{p} = R'^{-1}(G' - S'p)$

Con esta construcción de los modelos en Matlab, es posible comenzar las simulaciones, teniendo en cuenta algunas puntualizaciones acerca de las condiciones iniciales del problema, que se detallarán en el epígrafe 4.3.

4.2. El amortiguamiento

Hasta ahora, todos los cálculos y consideraciones han sido realizados sin tener en cuenta la disipación de energía por amortiguamiento tanto de la viga, como del peatón. Como se anticipó en su momento, este fenómeno se incluirá en el problema mediante una matriz de amortiguamiento \mathbb{C} . No existe, sin embargo, forma única de calcular dicha matriz, y existen diversos modelos

de amortiguamiento que cuantifican de alguna forma el amortiguamiento real. Se exponen en este epígrafe los dos más importantes^[10].

4.2.1. Amortiguamiento de Rayleigh

Uno de los principales problemas que produce el trabajar con una matriz adicional es el hecho de que, en ausencia de un método sistemático de cálculo como para \mathbb{M} y \mathbb{K} , no es posible, a priori, suponer que la matriz de amortiguamiento tenga sus mismas propiedades (simetría, valores propios positivos...).

A pesar de que esto puede a priori no parecer un problema, se convierte en tal cuando se pretende calcular una estructura mediante un enorme número de grados de libertad. La ausencia de simetría y el hecho de tener que trabajar en el plano complejo (debido a la forma que adoptan las ecuaciones al añadir la nueva matriz) alargan en exceso los tiempos de cálculo. Es por esto, que muchas de las aproximaciones que se realizan de esta matriz de amortiguamiento estén encaminadas, precisamente, a dotarla de propiedades ventajosas para mejor tratamiento durante el cálculo.

En este contexto, la aproximación de Rayleigh se fundamenta en extender las mismas propiedades de las matrices \mathbb{M} y \mathbb{K} a la nueva matriz \mathbb{C} . La propuesta se centra sencillamente en una combinación lineal de ambas matrices, ecuación (50). Puesto que ambas matrices son simétricas, la matriz de amortiguamiento resultante también lo será.

$$\mathbb{C} = \alpha\mathbb{M} + \beta\mathbb{K} \quad (50)$$

Existen diversas formas de hallar los dos factores α y β : ajustarlos a datos experimentales, conseguir un cierto valor de amortiguamiento global, imponiendo un valor al amortiguamiento modal... Sea como fuere, la combinación hallada tendrá las propiedades de las matrices masa y rigidez.

4.2.2. Amortiguamiento modal

Otra forma muy habitual de calcular la matriz de amortiguamiento de la estructura es asignando a cada modo propio (ver epígrafe 2.4) un valor de amortiguamiento, típicamente de porcentaje de amortiguamiento crítico (ξ). De esta forma, se construye directamente la matriz de amortiguamiento modal como una matriz ya diagonal, como se muestra en la ecuación (51).

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (51)$$

Una vez construida esta matriz, se puede calcular la matriz de amortiguamiento original deshaciendo la transformación al espacio modal, como se muestra en la ecuación (52) (52).

$$\tilde{C} = V^t \cdot C \cdot V \rightarrow C = (V^t)^{-1} \cdot \tilde{C} \cdot V^{-1} \quad (52)$$

Este último paso no es evidentemente necesario cuando se calcula la respuesta de la estructura en el espacio modal, pues se resuelve directamente con la matriz modal.

Cuando se emplee amortiguamiento para calcular la respuesta de la viga en alguna simulación de este trabajo, se empleará la aproximación modal, por ser la más sencilla de implementar.

4.3. Las condiciones iniciales

Una vez planteado todo el problema tan solo queda plantear las condiciones iniciales de la simulación. Retomando el origen de todo el esfuerzo, se trata de simular la acción de personas sobre estructuras, en este caso una pasarela. El caso más normal es aquel en que la persona entra en la pasarela sobre la marcha, sin detenerse al principio. Es por este motivo que no es del todo correcto, para simulaciones con pretensiones de verosimilitud, imponer condiciones iniciales nulas, como si el peatón comenzara desde el reposo al principio de la estructura.

En realidad, la forma más adecuada de imponer estas condiciones es hallarlas mediante simulaciones previas, haciendo evolucionar al sistema fuera de la estructura, es decir, sobre un soporte infinitamente rígido. La idea es que evolucione hasta alcanzar un estado permanente, ya amortiguado el estado transitorio inicial, y haciéndolo entrar a la pasarela en ese momento. El tiempo que puede tardar el sistema en alcanzar un ritmo estacionario varía de un modelo a otro. Hay casos en los que, evidentemente, no es necesaria esta simulación previa, como es el caso de la fuerza puntual.

Este proceso cobra especial relevancia en modelos en los que el peatón se representa mediante más de un grado de libertad, como es el caso aquí del doble péndulo invertido. Como se verá en el capítulo posterior, el hecho de hacer al peatón entrar a la pasarela desde el reposo o hacerle caminar unos metros previos afectará de algún modo a la respuesta de la estructura.

La forma en que se incluirá este hecho en el problema aquí tratado es muy sencillo: se incluirá en el software desarrollado la posibilidad de que las cargas comiencen a circular unos metros antes de tomar contacto con la estructura. Así, en la misma simulación, se calculan las condiciones (el estado de movimiento) con que entra el peatón en la estructura y se aplican

directamente para empezar a excitarla. Durante los metros que “ande” fuera de la estructura los dos grados de libertad (ξ y w) llegarán a sincronizarse, y entrará en la estructura con un ritmo de variación periódico y uniforme.

4.4. Simulaciones de verificación

Con todo lo expuesto anteriormente, es posible lanzar algunas simulaciones. Las primeras estarán destinadas a validar los modelos desarrollados. Esta validación se realizará en tres sentidos:

- Verificación interna, es decir, que cada modelo subsiguiente, bajo simplificaciones, simule al anterior.
- Verificación externa, es decir, que los modelos programados en Matlab correspondan bien con los modelos discretos expuestos.

Todas las simulaciones se van a realizar sobre la estructura más sencilla que se puede modelar: una viga.

4.4.1. Simulaciones de verificación interna

Las verificaciones internas son relativamente sencillas de realizar. Se proponen dos. Por un lado, comprobar si el modelo MCK contiene al modelo de la fuerza puntual es tan sencillo como anular el amortiguador ($c_p = 0$) y proporcionar al resorte una rigidez extraordinariamente alta ($k_p > 1 \cdot 10^{13} N/m$). Cuanto más alta es la rigidez, más se aproxima el modelo al de una masa rígidamente unida a la viga, que solo transmite excitación a través de su peso. Así, la simulación en el modelo de la fuerza puntual se realizará imponiendo una fuerza constante de valor $F = m_p g$.

Parámetros de simulación.

- $L = 20 \text{ m}$
- $S = 0.16 \text{ m}^2$
- $I_z = 5.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
- $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$
- $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- $v = 10 \text{ m/s}$
- $N = 6 \text{ elementos}$
- Modelo Fuerza Puntual:**
- $F = -700 \text{ N}$
- Modelo MCK:**
- $m = 71.36 \text{ Kg}$
- $c = 0 \text{ Ns/m}$
- $k = 10^{13} \text{ N/m}$

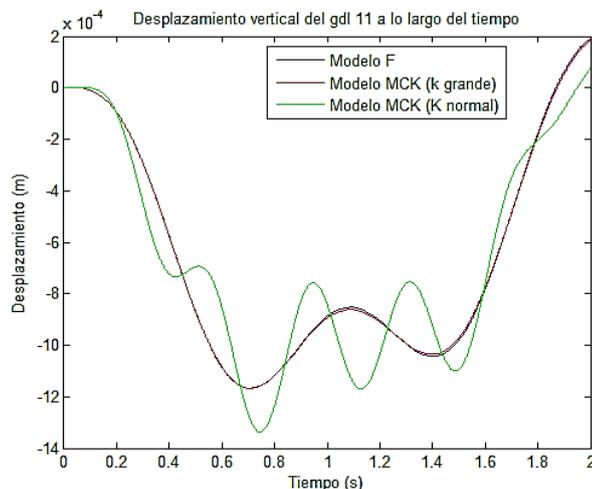


Figura 9. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga a lo largo del tiempo empleando la simplificación del modelo MCK.

Se obtienen las curvas de la Figura 9. Como se puede comprobar, ambas simulaciones son prácticamente idénticas, con algunas diferencias derivadas de la realidad de que existe el resorte. Se admite pues como válido que el modelo MCK contiene al modelo de la fuerza puntual. Y aún más, es posible realizar la simulación con el modelo PI imponiéndole una rigidez del resorte igualmente muy elevada y comprobar qué sucede cuando las condiciones iniciales de φ son muy, muy pequeñas (casi sin oscilación del péndulo) y de un valor “normal” (para que el péndulo oscile a aproximadamente 2 Hz. Se muestra la superposición de todas las curvas en la Figura 10.

Parámetros de simulación.

$$\begin{aligned}
 L &= 24 \text{ m} \\
 S &= 0.16 \text{ m}^2 \\
 I_z &= 5.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\
 \rho &= 7850 \text{ Kg/m}^3 \\
 E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\
 v &= 10 \text{ m/s} \\
 N &= 6 \text{ elementos} \\
 m &= 71.36 \text{ Kg} \\
 k &= 10^{13} \text{ N/m} \\
 c &= 0 \text{ Ns/m}
 \end{aligned}$$

Modelo péndulo:

$$\begin{aligned}
 L_p &= 1.2 \text{ m} \\
 h_p &= 0.8 \text{ m} \\
 \varphi_0 &= 10^{-4} \text{ rad}
 \end{aligned}$$

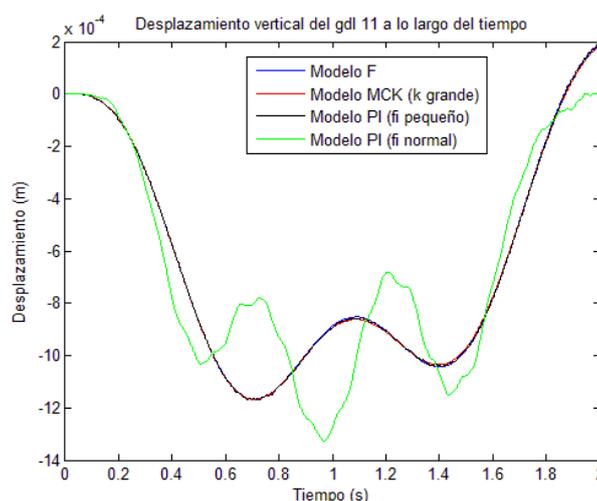


Figura 10. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga para los tres modelos, con k muy elevado.

Finalmente, se comprueba que el modelo PI contiene al modelo MCK. La simulación se realizará imponiendo a ambos la misma rigidez y amortiguamiento nulo así como la misma masa del peatón. Se indicará, además, al modelo PI, condiciones iniciales nulas (o casi) para el ángulo (φ), con lo que a priori las oscilaciones van a ser pequeñas. Es imposible conseguir oscilaciones nulas, pues el desplazamiento vertical de la viga excitará el movimiento pendular, pero puesto que las condiciones iniciales son pequeñas, su influencia será también pequeña.

Parámetros de simulación.

$$\begin{aligned}
 L &= 24 \text{ m} \\
 S &= 0.16 \text{ m}^2 \\
 I_z &= 5.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\
 \rho &= 7850 \text{ Kg/m}^3 \\
 E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\
 v &= 10 \text{ m/s} \\
 N &= 6 \text{ elementos} \\
 m &= 71.36 \text{ Kg} \\
 k &= 6 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\
 c &= 0 \text{ Ns/m}
 \end{aligned}$$

Modelo péndulo:

$$\begin{aligned}
 L_p &= 1.2 \text{ m} \\
 h_p &= 0.8 \text{ m} \\
 \varphi_0 &= 10^{-4} \text{ rad}
 \end{aligned}$$

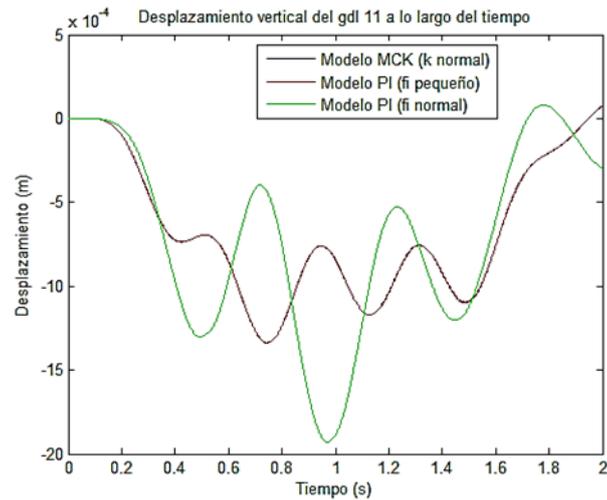


Figura 11. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga a lo largo del tiempo empleando la simplificación del modelo PI. En verde, respuesta con $\varphi_0 = 0.04 \text{ rad}$

Como se aprecia en la Figura 11, en rojo y azul, ambos modelos coinciden exactamente. Se muestra además en verde cómo cambia la respuesta del modelo PI al considerar un valor más elevado de φ_0 . Por cuestiones de estabilidad numérica, no es posible introducir un valor nulo como condición inicial del ángulo φ , que sería ideal para reproducir el modelo MCK, ni siquiera un valor muy pequeño; es necesario, pues, introducir el valor más pequeño posible que garantice una solución estable y tener consciencia de que esto influye en la curva obtenida. Sin embargo, la correspondencia entre un modelo y otro en una situación como la presentada queda patente.

4.4.2. Simulaciones de verificación externa

Otra verificación que se realiza es la comprobación de que las ecuaciones planteadas en los apartados anteriores y que han sido programadas en Matlab corresponden con los modelos que se pretenden analizar. Para ello, se comparará la respuesta de cada uno de los modelos con simulaciones realizadas o bien por terceros o bien con la ayuda de un software diferente a Matlab.

Para el caso de la fuerza puntual móvil, se empleará para la comparación la respuesta que proporciona la solución analítica de la ecuación diferencial del problema^[1]. Dicha solución tiene una forma como la presentada en la ecuación (53) y proporciona las curvas que se muestran en la Figura 12.

$$v(x, t) = v_0 \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{j\pi x}{l} \frac{1}{j^2(j^2 - \alpha^2)} \left(\sin(j\omega t) - \frac{\alpha}{j} \sin(\omega_j t) \right) \quad (53)$$

Esta expresión representa la flecha de la línea media de una viga sometida a una carga puntual móvil desplazándose a velocidad constante. Se encuentran los siguientes parámetros en ella: l , longitud de la viga; α , parámetro adimensional que relaciona la velocidad de la fuerza con una velocidad crítica dada por la primera frecuencia propia de la viga ($\alpha = c/2f_1l$); ω es la frecuencia circular de la fuerza, calculada como $\omega = \pi c/l$; y ω_j son las frecuencias propias de la viga en rad/s . Esta expresión solo es válida para la viga sin amortiguamiento.

Parámetros de simulación.

$L = 25 \text{ m}$
 $S = 0.16 \text{ m}^2$
 $I_z = 5.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
 $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$
 $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
 $v = 3 \text{ m/s}$
 $N = 6 \text{ elementos}$
 $F = -700 \text{ N}$

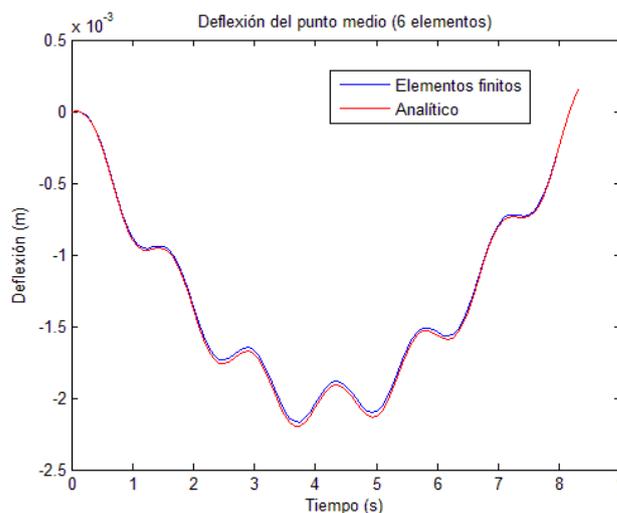


Figura 12. Comparación de la deflexión del punto medio de una viga sometida a una carga puntual móvil: simulación por elementos finitos vs. solución analítica.

Nº de elementos	RMS deflexión punto medio ² (m)
2	$2.38 \cdot 10^{-5}$
6	$2.11 \cdot 10^{-5}$
12	$2.09 \cdot 10^{-5}$
24	$2.089 \cdot 10^{-5}$

Tabla 1. Estudio de convergencia de la respuesta del punto medio de la viga sometida a una fuerza constante móvil en relación a la solución analítica.

Como se aprecia en la Figura 12, la diferencia entre el resultado aportado por el método de los elementos finitos y la calculada analíticamente es muy pequeña. Cabe destacar que la solución es tanto mejor cuanto más fino es el

² El error global ha sido calculado mediante la ecuación que se muestra debajo, un valor cuadrático medio de las diferencias entre ambas respuestas, donde v_{ef_i} es la deflexión del punto medio en cada instante i y v_{an_i} es la misma deflexión calculada mediante la expresión analítica. La simulación se ha calculado mediante un total de N instantes.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{ef_i} - v_{an_i})^2}$$

mallado. Así, como se puede comprobar en la Tabla 1, el error global de la respuesta representada se reduce cuando aumenta el número de elementos con que se representa la viga. Este fenómeno es fruto de la aproximación por elementos finitos, y sucede para toda solución convergente aportada por la misma. Sin embargo, alcanzada la convergencia para un número elevado de elementos, se aprecia que la diferencia entre ambas no se anula. Esto se debe a las simplificaciones aplicadas en uno y otro método de cálculo, que conducen a aproximaciones, que aunque razonables, son en esencia diferentes.

Por otro lado, para el caso del *modelo MCK* se realizará la comparación con otro trabajo realizado en el mismo sentido^[4]. La simulación es esencialmente idéntica, aunque su forma de abordar el problema es diferente, como se comprueba en la Figura 13 donde “Método directo” (*Direct method*) se refiere a una solución por descomposición modal.

Parámetros de simulación.

$$L = 25 \text{ m}$$

$$S = 0.293 \text{ m}^2$$

$$I_z = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$$

$$E = 2.87 \cdot 10^{12} \text{ Pa}$$

$$v = 27.78 \text{ m/s}$$

$$N_e = 6 \text{ elementos}$$

$$m = 5750 \text{ Kg}$$

$$c = 0 \text{ Ns/m}$$

$$k = 1.595 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

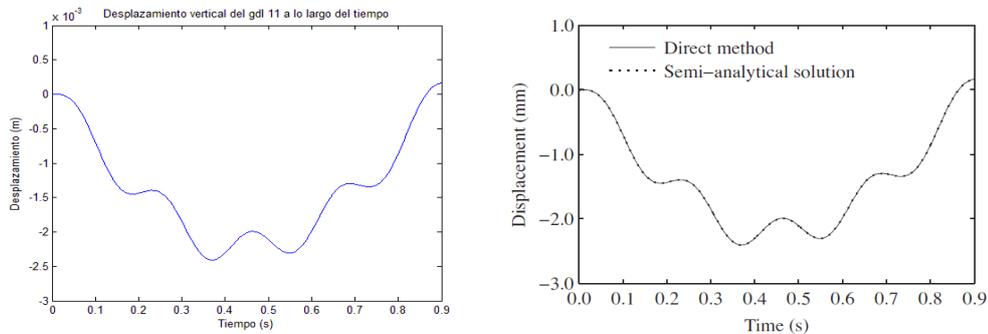


Figura 13. Comparación de la deflexión del punto medio de una viga sometida a la acción de un sistema masa-resorte circulando a velocidad constante. A la izquierda, solución mediante modelo elementos finitos; a la derecha, solución analítica superpuesta a una solución modal extraída de [4].

Cabe destacar que en el artículo [4] se aborda el problema desde dos perspectivas: una resolución analítica (bajo simplificaciones admisibles de carácter matemático para la resolución de la ecuación diferencial) y descomposición modal de la respuesta de la viga (como se planteó en el capítulo 2 del presente trabajo), arrojando ambas una respuesta prácticamente idéntica. Para la comparación entre ambas, no se dispone en este caso de datos concretos para la construcción de la curva de comparación, por lo que no se puede calcular un valor medio de la diferencia entre ambas curvas. Lo que sí se puede hacer, y se muestra en la Figura 14 es superponer las dos curvas (incluyendo la solución aquí obtenida) para comprobar que, efectivamente, la solución es prácticamente idéntica.

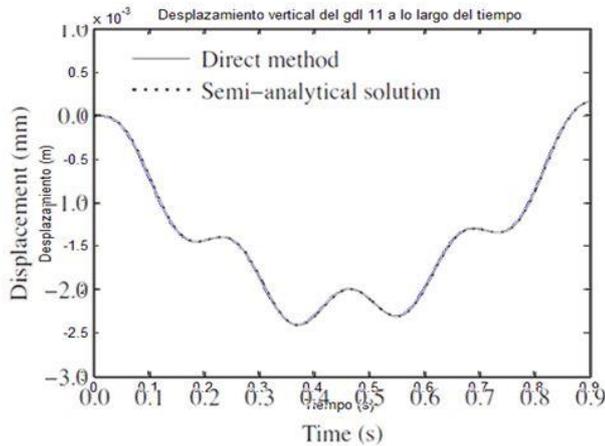


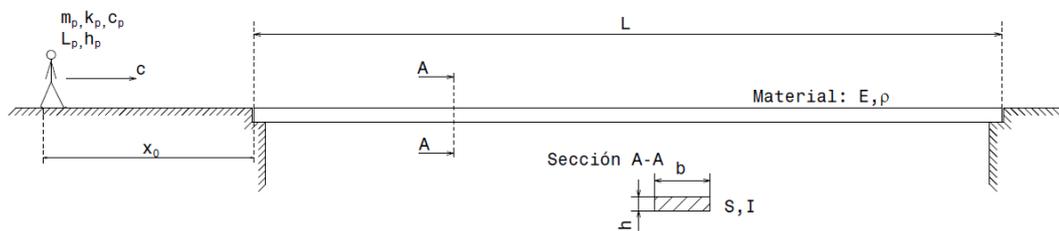
Figura 14. Superposición de las curvas de la Figura 13

Finalmente, la comparación del modelo del péndulo invertido no se ha podido realizar de forma alguna debido a dos motivos. Por un lado, no se ha encontrado ninguna referencia que trabajase con el modelo planteado, o que presentase de alguna forma resultados de las simulaciones con los que poder comparar los aquí obtenidos. Por otro lado, debido a la complejidad e hipótesis adoptadas a la hora de desarrollar matemáticamente el modelo así como de implementarlo en Matlab, no ha sido posible su simulación exacta mediante un software distinto. En contrapartida, se ha visto cómo los dos modelos anteriores desprenden resultados más que aceptables y cómo el modelo de péndulo invertido sobre base elástica representa suficientemente bien el modelo de masa móvil bajo las simplificaciones adecuadas. No hay pues motivo para pensar que no pueda reproducir adecuadamente otros modelos.

5. Análisis de las respuestas

En el presente capítulo se realizará una comparación de la respuesta de un mismo problema, empleando para el análisis cada uno de los tres modelos planteados a lo largo de los capítulos precedentes. El objetivo es evaluar el efecto que tiene la adición de cada uno de los elementos extra (masa y péndulo) en la respuesta del sistema. Se discutirá además, brevemente, sobre el efecto de incluir amortiguamiento tanto en la estructura como en el peatón y finalmente se resolverá mediante el modelo propuesto por una guía de diseño (Sétra) para su comparación con los modelos trabajados.

El problema que se va a tratar en cada uno de los apartados es el que se muestra en la Figura 15. En él se muestra una única viga (la estructura más sencilla) por la que se dispone a circular un peatón. Se muestran los datos de cada uno en la propia figura. Se suponen apoyos fijos en los extremos de la viga, sin solape entre esta y el terreno (apoyos puntuales).



Parámetros de simulación

$L = 50 \text{ m}$	$c_p = 0 \text{ Ns/m}$
$h = 0.4 \text{ m}$	$f_p = 2 \text{ Hz}$
$b = 1.2 \text{ m}$	$L_p = 1.1 \text{ m}$
$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$h_p = 0.8 \text{ m}$
$\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$	$x_0 = 5 \text{ m}$
$m_p = 80 \text{ Kg}$	$c = 0.8 \text{ m/s}$
$k_p^3 = 20000 \text{ N/m}$	

Figura 15. Esquema y datos de la simulación de verificación común a los tres modelos para el análisis de su respuesta

Una de las principales dificultades a la hora de abordar el estudio de un mismo problema con los tres modelos es el hecho de que cada uno cuenta con un número diferente de parámetros con los que ajustarlo a la “realidad”. De esta forma, el modelo de fuerza puntual constante cuenta únicamente con un solo parámetro para su modelización (F); el modelo MCK cuenta con un total de tres, masa, rigidez y amortiguamiento; y el modelo de péndulo invertido cuenta, además con la longitud de pierna y altura de centro de masas así como ángulo inicial de ataque del peatón φ_0 . Es por este motivo que el modelo de péndulo invertido es el más completo de los tres, pues no

³ Valor simbólico^[9]. En un análisis más riguroso y con base experimental, se trataría de aproximar un valor de k_p tal que la respuesta de la estructura se asemejase lo más posible a los registros.

habrá que sacrificar propiedades del peatón para ajustar su frecuencia de paso y viceversa.

5.1. Efecto de la inclusión de la masa del peatón

En primer lugar se realizará la simulación con el modelo de fuerza puntual. Se establecerá para el mismo un valor de fuerza equivalente al peso del peatón, es decir, de $F = -784.8 \text{ N}$. Se muestra en la Figura 16 la deflexión a lo largo del tiempo del punto medio de la viga. Aunque no influye en nada el añadir un recorrido previo de la fuerza fuera de la viga, pues una fuerza puntual sola no tiene nada que evolucionar, se incluirá este margen x_0 con el fin de facilitar las comparaciones con las respuestas de los otros modelos.

Es preciso notar que la fuerza tarda $t_0 = 5/0.8 = 6.25 \text{ s}$ en recorrer el margen inicial, y un total de $t_f = 55/0.8 = 68.75 \text{ s}$ en alcanzar el extremo final de la viga.

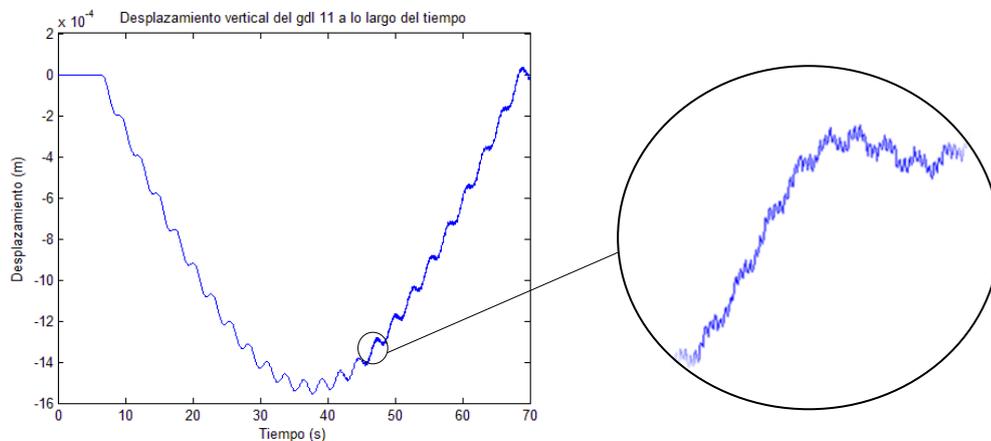


Figura 16. Respuesta del punto medio de la estructura a lo largo del tiempo para el modelo de fuerza puntual móvil y detalle de las micro-oscilaciones.

Como se observa en la Figura 16, la respuesta de una viga frente a una carga móvil contiene oscilaciones de varia naturaleza. En primer lugar, la curva dibuja un arco pronunciado, típico en el trabajo a flexión de una viga, que alcanza su máximo cuando la fuerza pasa por el punto medio. Dicho máximo se encuentra entorno a 1.5 mm , salvo oscilaciones, valor que casa perfectamente con el valor arrojado por la Resistencia de Materiales para el caso estático de una carga situada en el centro de la viga, ecuación (54).

$$\delta_{max} = \frac{FL^3}{48EI} = \frac{784.8 \cdot 50^3}{48 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 6.4 \cdot 10^{-3}} = 0.00152 \text{ m} \quad (54)$$

Superpuesta a esta deflexión, se encuentra una oscilación de periodo aproximado de $T_0 = 2.7 \text{ s}$, como se aprecia en la Figura 17. Este periodo se

corresponde con una frecuencia de oscilación de $f_o = 0.37 \text{ Hz}$. Empleando lo expuesto en el epígrafe 2.4, se obtiene una primera frecuencia propia de esta viga de $f_1 = 0.3753 \text{ Hz}$, muy cercano al valor de las oscilaciones que sufre el punto medio de la viga bajo la carga puntual. Se puede deducir, pues, que estas oscilaciones son fruto de la inercia propia de la viga y de las fuerzas elásticas internas de la misma, que tienden a conducirla siempre hacia un estado de equilibrio en cada posición de la fuerza.

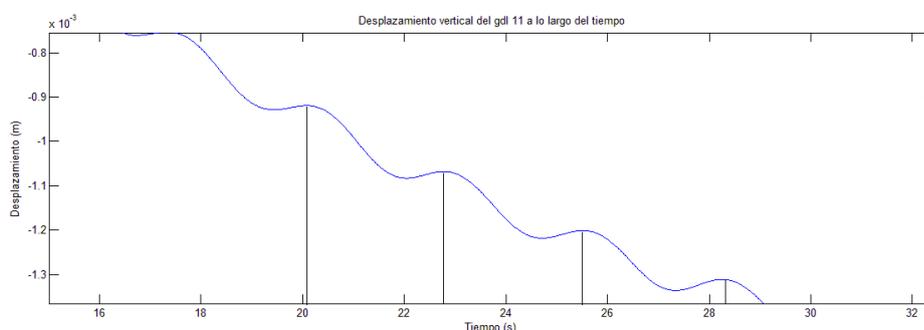


Figura 17. Detalle de la Figura 16 con marcas para medir el periodo de oscilación

Finalmente se aprecian unas micro-oscilaciones, sobre todo en la segunda mitad de la respuesta, que se muestran en detalle en la Figura 17. Estas oscilaciones poseen un periodo de $T_{mo} = 0.0491 \text{ s}$, que conduce a una frecuencia de oscilación de aproximadamente $f_{mo} = 20.34 \text{ Hz}$. Esta frecuencia se parece, efectivamente, a la séptima frecuencia propia de la viga ($f_7 = 20.28 \text{ Hz}$), pero nada conduce a pensar que este modo deba ser excitado antes que el tercero o el quinto (los modos simétricos anteriores), y es muy posible que estas micro-oscilaciones sean fruto de algún error numérico en el proceso de integración de las ecuaciones diferenciales. Se comprueba esto de forma muy sencilla, empleando el modelo analítico para solucionarlo, Figura 18, y comprobando que, efectivamente, no posee dichas oscilaciones.

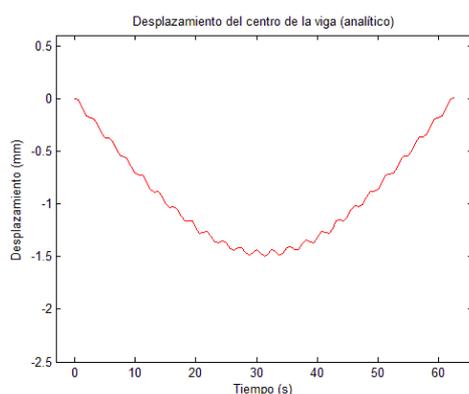


Figura 18. Respuesta del modelo de masa con resorte. Solución analítica.

Se pasa ahora a resolver el mismo problema, pero aplicando el modelo de masa móvil sobre resorte. A la hora de realizar una simulación con este modelo es preciso tomar una decisión sobre el valor que se establece para la rigidez del resorte, puesto que hay dos posibles enfoques. Por un lado,

establecer la rigidez igual a la del peatón (en este caso, 20000 N/m) implica sacrificar la frecuencia de paso del peatón, pues de forma general no coincidirá esta frecuencia con la frecuencia propia del subsistema MCK. Por otro lado, se puede priorizar dicha frecuencia (en este caso, 2 Hz), y entonces establecer un valor de k que proporcione una frecuencia propia adecuada. En este apartado se opta por analizar la primera situación, en que se establece $k = 20000 \text{ N/m}$.

Se muestran las dos curvas más relevantes en la Figura 19, ilustrando el desplazamiento vertical del punto medio de la viga y de la masa. Hay que notar que la masa tiene una posición inicial nula (a la altura de la viga) y que por tanto el resorte tiene una elongación natural propia nula. Como elemento ideal que es, usado únicamente para modelar la interacción entre masa y estructura, esta simplificación es perfectamente aceptable.

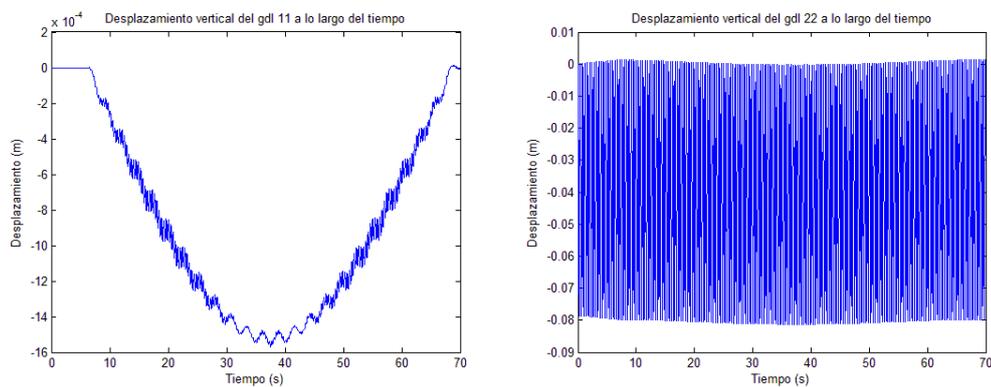


Figura 19. Curvas resultado de emplear el modelo mck para modelar al peatón caminando sobre la viga.

Como se aprecia, la respuesta del punto medio es globalmente similar a la curva obtenida con el modelo de fuerza puntual. Existen sin embargo varias diferencias apreciables entre ambas curvas, como se muestra en la Figura 20, junto a algunos detalles. En el detalle (a) se aprecia una característica importante de la curva arrojada por el modelo MCK: unas oscilaciones pequeñas (en rojo), a lo largo de toda la curva, que no se presentan en la curva asociada al modelo de fuerza puntual (en rojo). Este fenómeno es una consecuencia directa de haber introducido la masa unida a un resorte. Estas oscilaciones están provocadas por las oscilaciones propias del subsistema masa-resorte. Es más, estas micro-oscilaciones suceden con un periodo de $T_{mo} = 0.4 \text{ s}$. De forma ideal, si el subsistema MCK estuviera ligado a un soporte perfectamente rígido, poseería un periodo propio calculado en la ecuación (55).

$$T_{MCK} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{80}{2 \cdot 10^4}} = 0.397 \text{ s} \quad (55)$$

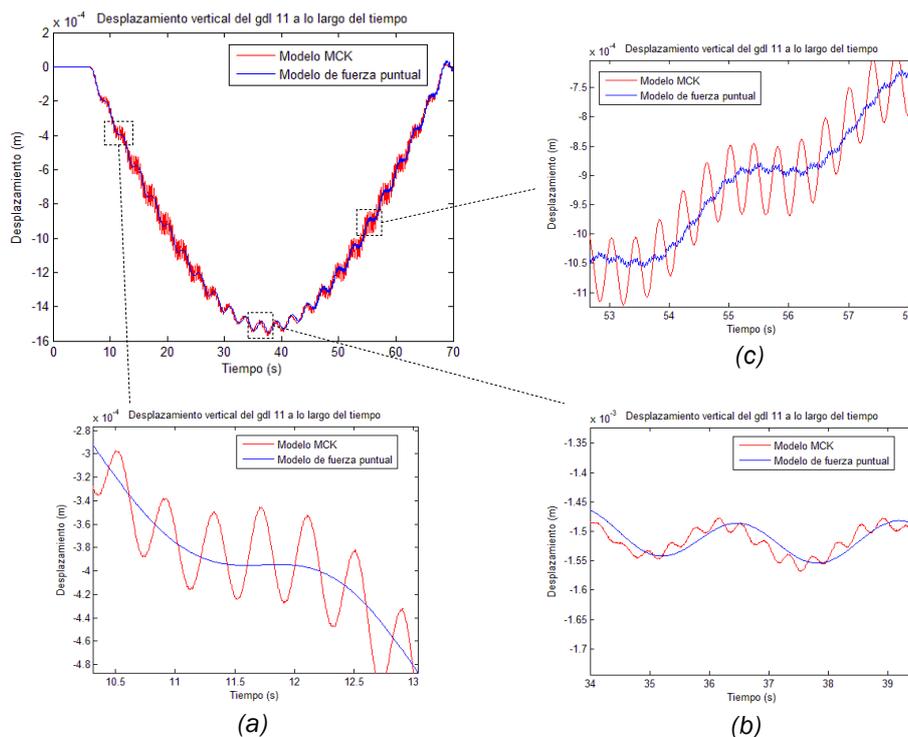


Figura 20. Superposición de las curvas asociadas al modelo de fuerza puntual y MCK, con algunos detalles para su comparación.

Como se aprecia, los valores son similares, por lo que queda demostrado que las micro-oscilaciones son una influencia de la masa unida al resorte sobre la estructura. Existen además otras micro-oscilaciones (detalle b), pero son de la misma naturaleza que las discutidas anteriormente en el análisis de la respuesta del modelo puntual y tienen como origen errores numéricos de integración, pues no se manifiestan en ningún otro lugar de la curva.

Se aprecia además otro fenómeno interesante, en lo que a la respuesta se refiere y es el hecho de que los máximos relativos de ambas curvas no coinciden exactamente. Es decir:

- En la primera mitad de la primera mitad de la simulación (detalle a) la curva correspondiente al modelo de fuerza puntual cae más pronunciadamente, lo que es debido al resorte, que al flectar la viga, se encuentra por lo general más tiempo estirado que comprimido, con lo que disminuye (mínimamente) el efecto del peso del peatón sobre la estructura.
- Hacia la mitad de la simulación (detalle b), ambas curvas alcanzan los mismos valores extremos en las oscilaciones, pero lo hacen sin embargo desfasadas. La primera en alcanzar esos máximos es la curva asociada al modelo mck, el que tiene en cuenta la inercia de la masa del peatón. Y es esta inercia la que, cuando la simulación está

próxima de alcanzar la deflexión máxima, excita a la viga con más severidad, incrementando el efecto del peso del peatón.

- Finalmente (detalle c) , siguiendo la misma línea de razonamiento, la inercia del peatón, junto a su peso, de alguna forma continua ejerciendo una fuerza descendente sobre la viga, haciendo que esta recupere de forma más tardía su forma (es decir, alcanza unos extremos relativos de valor más reducido que la curva del modelo de fuerza puntual). Es el fenómeno opuesto al del tramo inicial.

Por otro lado, se presenta también en la Figura 19 (derecha) el desplazamiento vertical de la masa. Se aprecia en dicha figura una gruesa curva que sigue muy sutilmente la senda de la viga al flectar. Este hecho no se aprecia en exceso, pues la amplitud de oscilación propia de la masa es muy superior al desplazamiento máximo de la viga en cada punto. La forma extraña, de franja casi continua, viene dada por una frecuencia de oscilación muy elevada, y su forma es, efectivamente, de función armónica simple como se aprecia en la Figura 21 (un detalle de dicha curva).

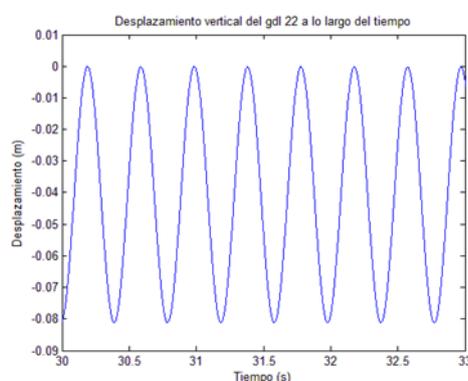


Figura 21. Detalle del desplazamiento vertical de la masa entre los instantes $t = 30$ s y $t = 33$ s.

Es preciso notar varios detalles respecto de esta curva. En primer lugar, el hecho de que la cota máxima de la misma sea 0 es por conveniencia, y no hay que extraer ninguna interpretación física de ello. Es fruto, simplemente, de haber establecido la elongación natural del resorte nula para simplificar las ecuaciones que gobiernan el subsistema. Por otro lado, hay que notar además que el desplazamiento de esta masa no es comparable al desplazamiento del punto medio en cada instante de tiempo, pues la masa está situada sobre diversos puntos de la viga a lo largo del tiempo, y solo alcanza las proximidades del punto medio hacia la mitad de la simulación. Por último, y como se ampliará en el apartado dedicado al modelo PI, la respuesta de la masa no es analizable como si se tratara de un peatón de verdad. El modelo ha sido concebido para simular la acción del mismo sobre la estructura (las cargas sobre la misma) y no como medio para analizar la cinemática del peatón.

Análisis frecuencial

En otro orden de cosas, es interesante realizar un análisis *frecuencial* de ambas señales de respuesta (las correspondientes a la deflexión del punto medio). Este análisis se realiza descomponiendo la curva mediante un desarrollo en serie de Fourier, en una suma de señales sinusoidales de distinta frecuencia y amplitud de oscilación, de forma que se aproxime lo más posible a la curva original. Esta operación se realiza igualmente mediante Matlab, empleando para ello la función `fft` que incluye el software. Se obtienen así las dos curvas de la Figura 22.

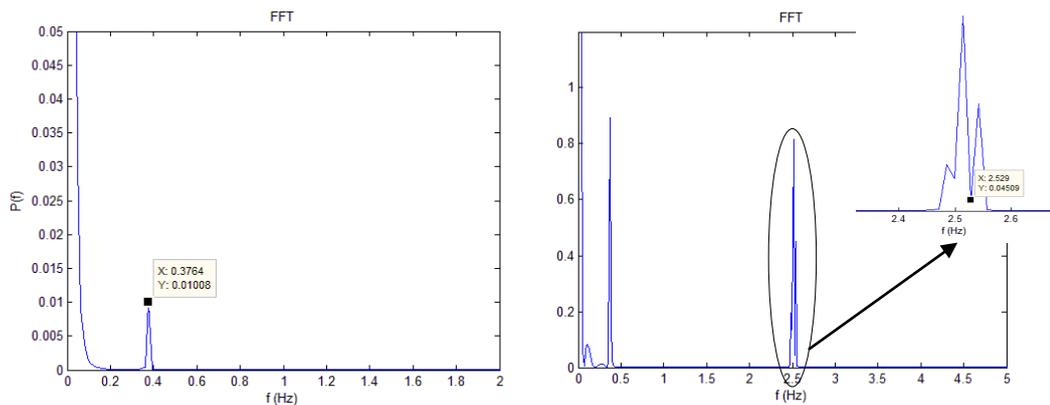
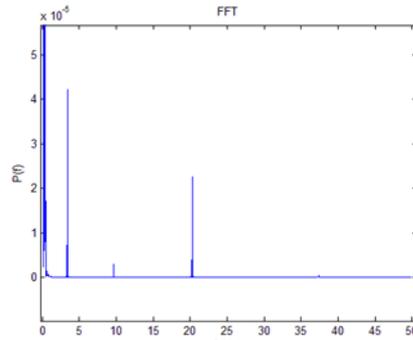


Figura 22. Transformada de Fourier de las respuestas del punto medio de la viga para el modelo de fuerza puntual (izquierda) y modelo MCK (derecha)

Como se aprecia, en ambos casos predomina un pico en la frecuencia $f = 0.3764$ Hz, que corresponde, como se vio anteriormente, a la primera frecuencia propia de la viga y que se manifiesta en forma de pequeñas oscilaciones entorno a la deformada global del punto medio. En el caso de la fuerza puntual no existe más contribución significativa (notar que aquellas micro-oscilaciones que se apreciaban en la segunda parte de la respuesta, no se manifiestan significativamente en una FFT como esta. De hecho, sí que se aprecia una pequeña protuberancia en la curva entorno a $f = 20.28$ Hz, frecuencia de las micro-oscilaciones, pero de amplitud tres órdenes de magnitud inferior ($2.261 \cdot 10^{-5}$ frente a 0.01). Se muestra una ampliación de dicha FFT en la Figura 23, en la que se manifiesta el pico mencionado, junto a otro par de ellos: los correspondientes a los modos impares de la viga.



Frecuencias propias asociadas a los modos pares de la viga.

$$f_1 = 0.3753 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3.391 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 9.630 \text{ Hz}$$

$$f_7 = 20.28 \text{ Hz}$$

$$f_9 = 37.69 \text{ Hz}$$

Figura 23. Ampliación de la FFT correspondiente a la fuerza puntual.

El hecho de que sean las frecuencias de los modos impares las únicas que se manifiestan no es ninguna coincidencia. La curva que se está analizando representa la deflexión del punto medio de la viga en cada instante de tiempo. La principal característica de los modos *pares* de una viga es precisamente que el punto medio de la misma es un nodo de vibración, y permanece inmóvil en el tiempo. Sería, pues, un contrasentido advertir la contribución a esta respuesta de algún modo par.

En lo que a la curva FFT asociada al modelo MCK respecta, se encuentra prácticamente la misma información mencionada, salvo por una contribución añadida, como se aprecia notablemente en el detalle de la Figura 22. La presencia de dos picos muy próximos entorno a un valor, en el que la amplitud de oscilación es próxima a cero recuerda en cierto sentido a la forma de trabajar de un absorbedor pasivo de vibraciones sintonizado (en lo sucesivo, TMD por las siglas en inglés de *tuned mass damper*) en forma de sistema masa-resorte. En efecto, se calculó anteriormente el periodo propio de este subsistema, que era de uno $T_{mck} = 0.4 \text{ s}$, lo que correspondería a una frecuencia propia de $f_{mck} = 2.5 \text{ Hz}$, precisamente el valor entorno al que ha surgido este fenómeno.

5.2. Efecto de los pasos del peatón

En el presente apartado se analizará la respuesta del modelo de péndulo invertido, comparándolo con los modelos anteriores, y tratando de evaluar el efecto de modelar los pasos del peatón mediante un péndulo invertido. Este modelo incluye aún más parámetros a ajustar, en concreto tres más: longitud de la pierna, altura del centro de masas del peatón y condición inicial del mismo. Es posible ahora establecer para el resorte la rigidez propia del peatón y ajustar los parámetros del péndulo de forma que se obtenga una oscilación deseada, de 2 Hz en este caso. De esta forma, empleando los valores indicados en la Figura 15 es necesario emplear un ángulo inicial de $\varphi_0 = 0.04 \text{ rad}$ para obtener una excitación de la viga de 2 Hz . Se muestra en

la Figura 24 la respuesta en el tiempo del punto medio de la viga sometida a la carga mencionada.

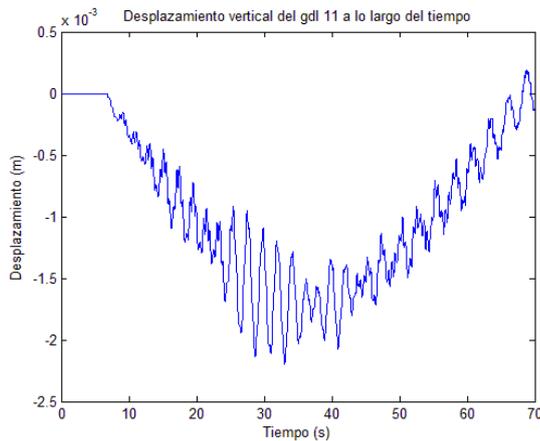


Figura 24. Respuesta del punto medio de la viga excitada mediante el modelo de péndulo doble invertido.

Tal y como se aprecia en la figura, la respuesta en esta situación es notablemente distinta a la ya conocida. Aunque globalmente respeta la tendencia de la deformada impuesta por el peso de la masa, el hecho de que esta articule un movimiento pendular excita de forma más brusca a la estructura. A priori se comprueba que la flecha máxima se sitúa nuevamente entorno a los 1.5 mm , quizás esta vez un poco por encima de este valor, aunque las oscilaciones son mucho más acusadas. En la Figura 25 se muestran varios detalles que permiten analizar dichas oscilaciones.

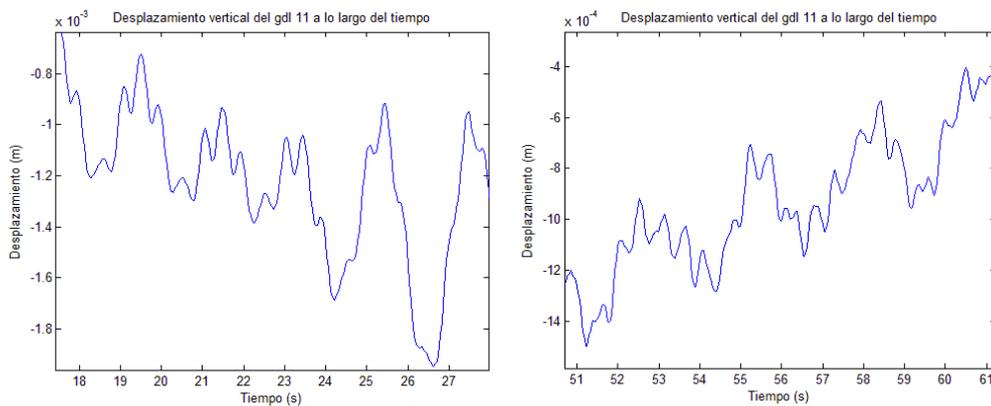


Figura 25. Detalles de la respuesta del punto medio de la viga excitada mediante el modelo de péndulo doble invertido.

Se aprecian de forma general dos tipos de oscilaciones, una con más amplitud que otra. Se aprecia claramente cómo la oscilación de periodo mayor, presumiblemente propiciada por la rigidez de la propia viga (de primera frecuencia propia $f_1 = 0.375\text{ Hz}$), aumenta intensamente de amplitud según el subsistema se aproxima al centro de la viga. Se recupera, no obstante, la amplitud inicial una vez se supera dicho punto medio. En el detalle izquierdo de la Figura 25 se aprecia este aumento de amplitud y cómo, a pesar de ello, la respuesta conserva la oscilación de periodo más corto,

aunque de forma más sutil. Esta oscilación de periodo corto está producida por la oscilación conjunta del resorte y el péndulo, que poseen una frecuencia de oscilación similar desde el principio tal y como se aprecia en la Figura 26. Se aprecia cómo el ángulo comienza en $\varphi_0 = 0.04 \text{ rad}$ y los máximos y mínimos relativos se alcanzan prácticamente a la vez durante la simulación.

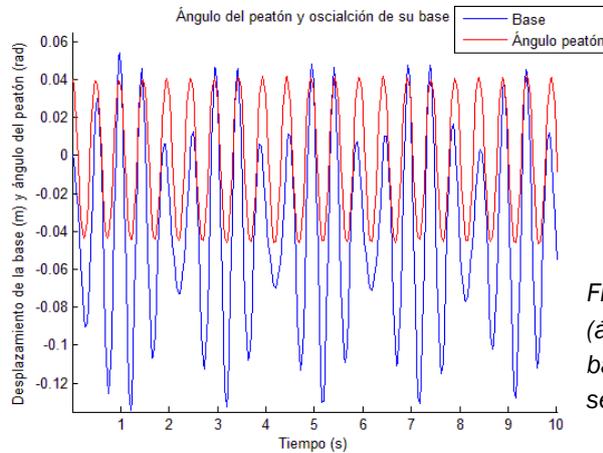


Figura 26. Oscilación del peatón (ángulo φ) y oscilación de su base (ξ) durante los primeros 10 segundos de simulación.

En este caso, sin embargo, es mucho más complicado medir las oscilaciones. Sí se puede, sin embargo, realizar un análisis en frecuencia de la respuesta del punto medio, como se muestra en la Figura 27. En dicha figura se observan dos crestas muy superiores al resto de la curva y muy próximas entre sí. La más pequeña de ellas corresponde a la primera frecuencia de la viga, a $f_1 = 0.3753 \text{ Hz}$. El segundo corresponde a la frecuencia de oscilación del péndulo doble invertido. Puesto que la duración del apoyo con las dos “piernas” es instantánea y éstas carecen de masa propia, el movimiento de este péndulo se puede aproximar, a nivel frecuencial, a un péndulo simple aunque invertido. La frecuencia de un péndulo de estas características se expresa en la ecuación (56), y se aprecia cómo la frecuencia coincide con la observada en el pico de mayor amplitud.

$$f_{pend} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.81}{1.1}} = 0.475 \text{ Hz} \quad (56)$$

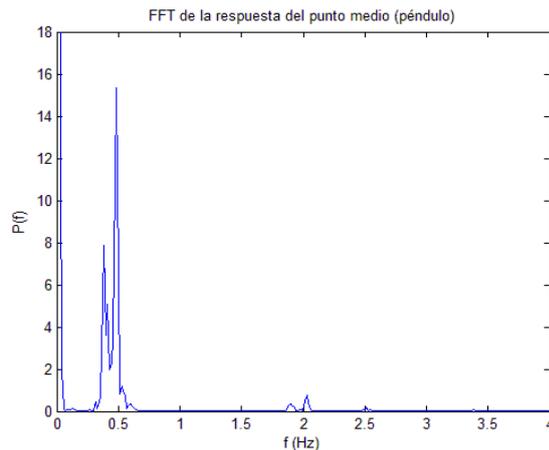


Figura 27. FFT de la respuesta del punto medio de la viga. Simulación con el péndulo invertido.

Se aprecian a continuación, entorno a 2 Hz otro par de crestas. Estas son sin duda debidas a la *interacción* entre péndulo y resorte, que debido a las condiciones iniciales y características de cada uno proporcionan una excitación a la viga con a una frecuencia entorno a 2 Hz , como se trató anteriormente y se aprecia en la Figura 26. Finalmente, se aprecian muy sutilmente dos pequeñas crestas en 2.51 Hz y 3.39 Hz . Estas corresponden, respectivamente, a la frecuencia propia del sistema MCK con la masa y rigidez empleadas en esta simulación y a la tercera frecuencia propia de la viga (asociada al segundo modo simétrico).

Se puede comprobar en la Figura 28, cómo las amplitudes de oscilación, así como la distribución de máximos y mínimos relativos de la oscilación de periodo mayor, son diferentes entre un modelo y otro. Como se aprecia, aunque al inicio de la simulación, con el peatón próximo al extremo izquierdo de la viga, ambas curvas evolucionan de forma paralela, según avanza el tiempo la respuesta del punto de ambos modelos se distancian progresivamente. Aunque el modelo de péndulo invertido respeta la forma global de la respuesta, las oscilaciones que este presenta son mucho más acusadas que las obtenidas con el modelo MCK. Tanto es así, que hacia la mitad de la simulación, cuando el peatón alcanza el punto medio de la viga, la respuesta asociada al péndulo invertido sobrepasa completamente la proporcionada por el modelo MCK.

Y el único motivo para que esto suceda, que es la única diferencia entre ambos modelos, es precisamente la presencia del péndulo. El hecho de permitir evolucionar a la masa de forma pendular, apoyándose alternativamente en uno y otro “pie”, permite a la aceleración vertical del mismo evolucionar de forma más libre, lo que, en virtud de la ecuación (57), añade una componente de fuerza extra al sistema. Se muestra en la Figura 29 la fuerza de contacto entre los subsistemas y la viga, calculadas ambas mediante la misma ecuación, en valor absoluto.

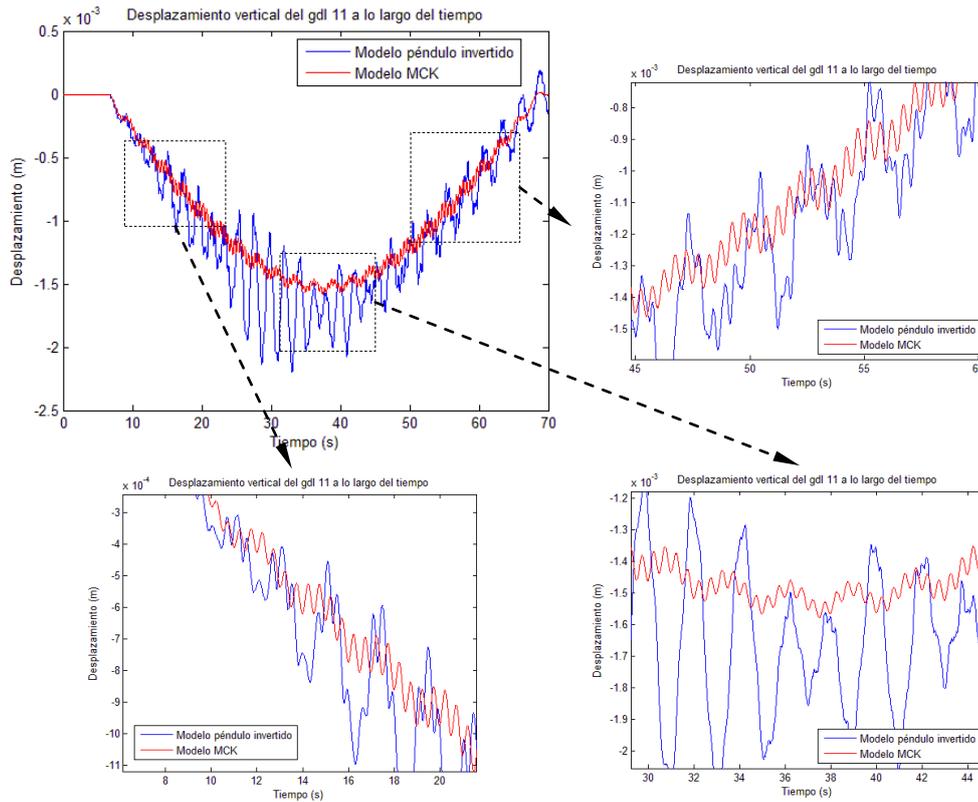


Figura 28. Comparación del modelo de péndulo invertido con el modelo MCK.

$$R_y = m\ddot{w} + mg \quad (57)$$

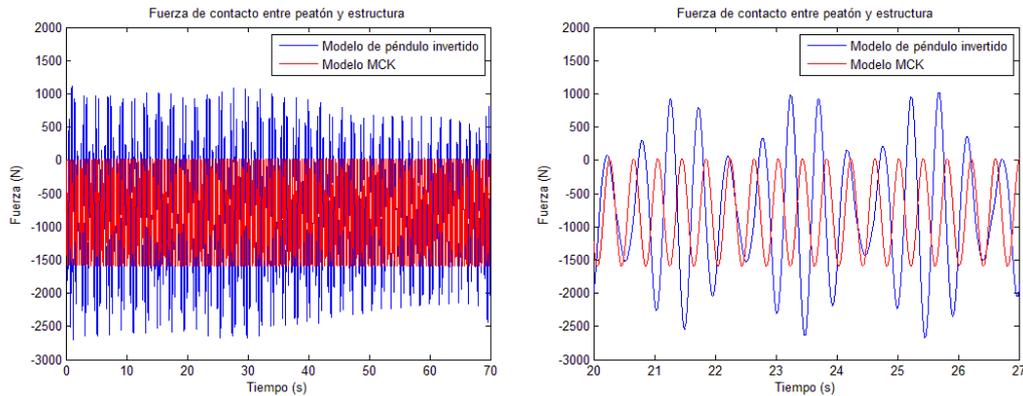


Figura 29. Comparación de la fuerza de contacto entre peatón y estructura entre los modelos de péndulo invertido y de masa-resorte-amortiguador. A la derecha, detalle entre los instantes $t = 20s$ y $t = 27s$.

Como se observa, ambas fuerzas oscilan entorno al mismo valor: el peso estático del peatón, $784.8 N$. Sin embargo, como se adelantó al analizar la respuesta del punto medio, las oscilaciones de la fuerza desarrollada en el modelo de péndulo invertido son, en general, de amplitud superior. Tanto es así, que en varios instantes de tiempo esta fuerza se vuelve positiva, lo que físicamente se traduciría en que el peatón estaría tirando de la estructura en sentido vertical ascendente. Puesto que esto no tiene ningún sentido físico

admisible, en el algoritmo de resolución (Matlab) se ha contemplado esta posibilidad y en las situaciones en que esto sucediese, la fuerza sería simplemente nula. Todas las simulaciones han sido realizadas con esta precaución.

Otros dos detalles que se desprenden del detalle de la Figura 29 que la fuerza asociada al modelo MCK se desfasa progresivamente respecto de la del modelo de péndulo invertido y que esta segunda presenta una oscilación global adicional, haciendo que los máximos y mínimos crezcan y decrezcan progresivamente en el tiempo. El primer fenómeno es fruto de lo que se trató al comenzar el estudio del modelo MCK: se prefirió conservar la rigidez $k = 20000 \text{ N/m}$ en detrimento de la frecuencia de paso real del peatón pues en este modelo el número de parámetros ajustables no es suficiente para simular todas las propiedades del problema. Efectivamente, conservando esta rigidez, la frecuencia de paso resultante es de 2.51 Hz , ligeramente superior a 2 Hz , tal y como se aprecia en el detalle.

El segundo fenómeno, en el que los máximos relativos forman a su vez una forma sinusoidal, es lo que en acústica se conoce como *fenómeno de batimiento o pulsación*. Es el resultado de la superposición de dos señales periódicas de pulsación ligeramente diferente. El resultado es otra señal, doblemente periódica, en el que las dos señales originales se combinan primero constructivamente, luego destructivamente, sucediendo estos fenómenos a una frecuencia que depende de la diferencia de las pulsaciones originales y del desfase original entre ellas.

El caso presentado, las dos señales superpuestas suceden una a 2 Hz (peatón) y otra a 2.5 Hz (resorte), con una diferencia de 0.5 Hz . Efectivamente, los nodos globales de vibración de la fuerza de contacto suceden cada 2 s , aproximadamente. Se aprecia, sin embargo, que los máximos no se alcanzan de forma perfectamente regular, lo que es síntoma de otras contribuciones menores así como posibles desfases entre ellas.

En definitiva, y a modo de resumen del apartado, la influencia del péndulo como peatón se manifiesta en dos sentidos: por un lado, amplifica la fuerza que se ejerce sobre la estructura, provocando unos desplazamientos superiores que con el modelo MCK solo; por otro, acoplar el péndulo al resorte contribuye a modular la respuesta de éste, con lo que en algunos instantes de tiempo la excitación sobre la viga es máxima y en otros, mínima.

5.3. Influencia del valor de la masa del peatón sobre la estructura

En este apartado se analizará más en profundidad el efecto que tiene la masa del peatón sobre la respuesta. Más concretamente, se analizará qué

influencia tiene la variación de dicho valor y cómo repercute ésta en la respuesta de la viga.

El análisis reposará sobre dos magnitudes: la masa del peatón (en lo sucesivo M_p) y la deflexión de un punto de la viga (en lo sucesivo U , que podrá contener subíndices referentes a un punto o instante concreto de la respuesta). El trabajo se llevará a cabo sobre estas dos magnitudes adimensionalizadas, con el fin de poder comparar de forma más directa la influencia de una sobre otra. Así, se definen en las ecuaciones (58) y (59) las dos magnitudes adimensionales: μ , relación másica, y δ , deflexión relativa.

$$\mu = \frac{M_p}{M_v} = \frac{M_p}{\rho S L} \quad (58)$$

$$\delta = \frac{U L^3}{I} \quad (59)$$

Los valores que típicamente se encuentran para μ rara vez superan 10^{-2} , mientras que los valores de δ rara vez descienden de 10^8 . Se realizarán los análisis con dos caracteres: por un lado, respetando los valores típicos de μ y δ ; por otro lado, llevando al extremo la relación de masas, llegando esta al valor unitario.

Se realizarán, pues, barridos de masa, modificando μ y analizando el efecto sobre δ . Sin embargo, en lugar de modificar M_p en cada ensayo (quizá la opción a priori más accesible) se va a modificar M_v , la masa de la viga, modificando en cada iteración del barrido la densidad de la misma, ρ , así se modifica la viga y no el peatón, el cual se encarna en un modelo diferente para cada caso.

Surge, sin embargo, un problema a resolver adicional: al modificar la masa de la viga, se modifica la naturaleza frecuencial de la viga, modificándose sus frecuencias y modos propios. Para evitar eso, se modificará adecuadamente la inercia de la sección de la misma, según la ecuación (60) (para vigas biapoyadas como la tratada), para no alterar sus frecuencias propias.

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (60)$$

Así, ρ e I habrán de variar en la misma proporción para no alterar la naturaleza frecuencial de la viga. De esta forma, se realizarán dos barridos, uno para cada modelo con masa de los presentados (modelo MCK y de péndulo invertido), modificando ρ e I y anotando para cada ensayo el valor de la deflexión máxima, a la que se denotará $U_{m\acute{a}x}$, y que proporcionará valores

de $\delta_{m\acute{a}x}$. Se obtienen en primer lugar la Figura 30, correspondiente al modelo MCK, donde se hace variar μ entre $1.4 \cdot 10^{-3}$ y 10^{-2} .

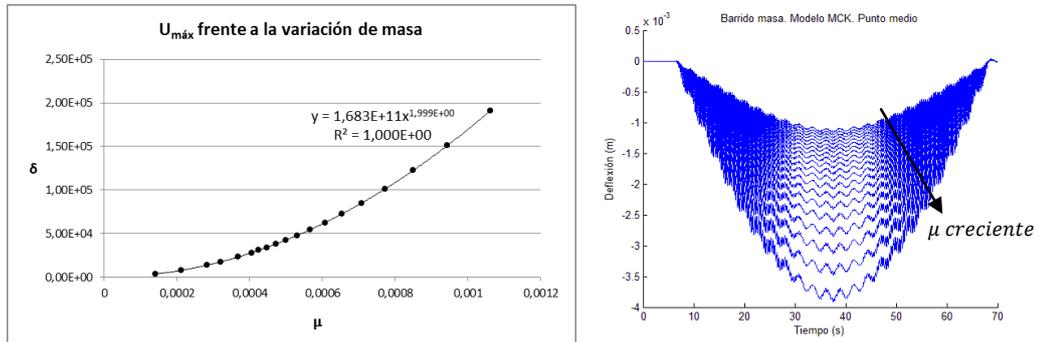


Figura 30. Resultados del barrido de masa para el modelo MCK. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.

Cabe destacar dos detalles. Por un lado, se encuentra con que los máximos desplazamientos (su coordenada adimensional) siguen una ley potencial exactamente. Esta ley se expresa en la ecuación (61) con los parámetros del problema.

$$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{U_{m\acute{a}x}L^3}{I} = 1.683 \cdot 10^{11} \mu^2 = 1.683 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{M_p}{\rho SL}\right)^2$$

$$U_{m\acute{a}x} = 1.683 \cdot 10^{11} \frac{I}{L^3} \left(\frac{M_p}{\rho SL}\right)^2 \quad (61)$$

Es interesante notar cómo la constante numérica que aparece tiene el mismo orden de magnitud que el módulo de Young, luego es esperable que ambas magnitudes estén relacionadas. Por otro lado, se encuentra que en las sucesivas curvas de desplazamiento del punto medio, la deflexión máxima sucede siempre en el mismo instante de tiempo. No solo eso, sino que todas las curvas parecen ser la misma reescalada.

A continuación, se opta por analizar lo que sucede cuando se toman valores de ρ más radicales, de forma que se haga variar μ entre 0.1 y 1. Empleando las mismas consideraciones que anteriormente se obtienen las curvas de la Figura 31.

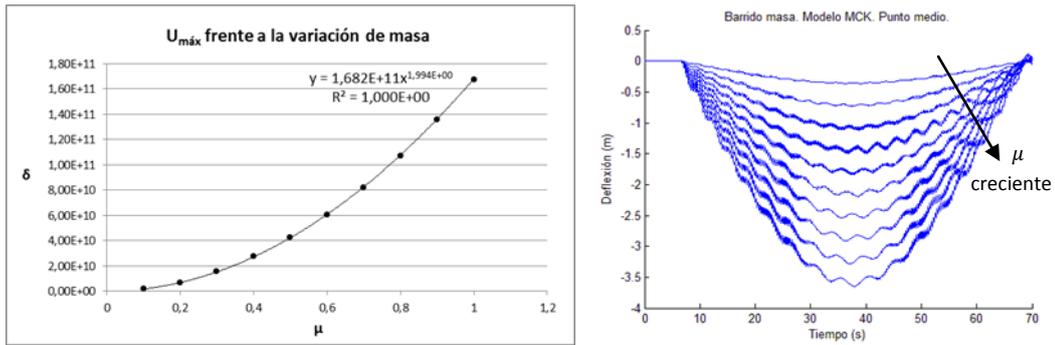


Figura 31. Resultados del barrido de masa extremo para el modelo MCK. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.

Como queda de manifiesto, la relación entre δ y μ es casi exactamente la misma (exactamente si se consideran las diferencias pequeños errores numéricos). Se admite, pues, que la ley expuesta en la ecuación (61) se cumple para un rango de valores de relación entre las masas muy amplio.

Por otro lado, se aprecia en el gráfico de las respuestas del punto medio que esta vez los desplazamientos máximos no suceden al mismo tiempo. Existe un desfase en todas y cada una de las curvas, desfase producido por una diferencia de frecuencia global de oscilación (más allá de las microoscilaciones producidas por el resorte). Es posible “medir” sobre el gráfico el periodo de estas oscilaciones y con él calcular unas frecuencias para cada curva. El resultado de ello se muestra en la Figura 32, donde queda patente la disminución de la frecuencia de oscilación (aumento del periodo cresta-cresta) con el aumento del parámetro μ .

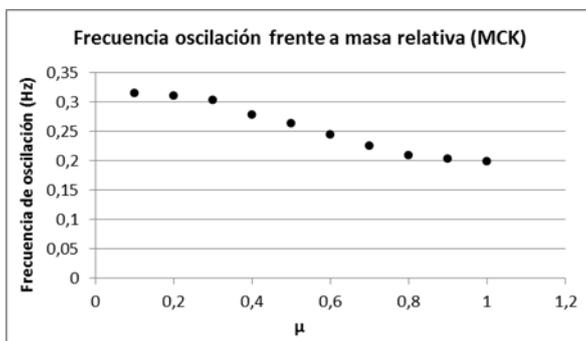


Figura 32. Dependencia de la frecuencia de oscilación con μ para el modelo MCK.

Como detalle de esta gráfica, se comprueba cómo para valores inferiores a $\mu = 0.1$ la curva parece alcanzar una asíntota, por lo que para valores muy pequeños de este parámetro, la variación de frecuencia es prácticamente nula, tal y como se mencionó anteriormente.

Finalmente, se operan los mismos barridos para el caso del modelo de péndulo invertido. Los resultados para el primero de ellos pueden observarse en la Figura 33.

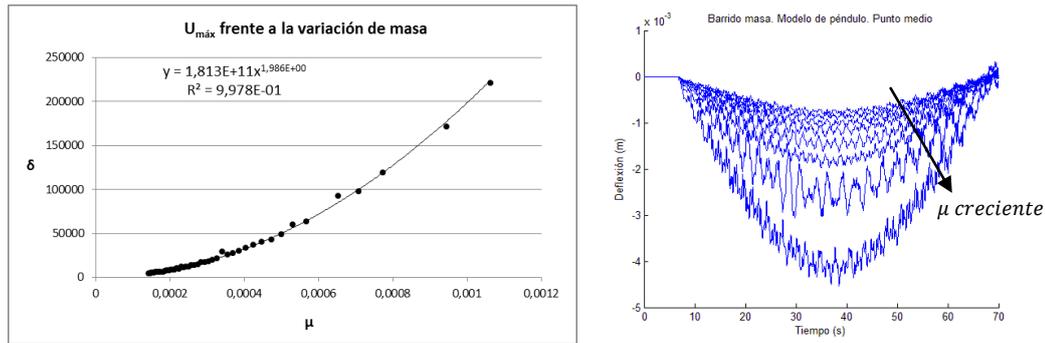


Figura 33. Resultados del barrido de masa para el modelo de péndulo. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.

La primera impresión de la figura de las respuestas del punto medio es lo errático de las mismas. Cabe decir que este modelo es más inestable que el anterior y cuenta con más grados de libertad, por lo que no se comporta de forma tan “exacta” como el modelo MCK. No obstante, la correlación que se alcanza entre los parámetros δ y μ , ecuación (62), es más que buena, siendo de la misma naturaleza que la conseguida en el caso anterior.

$$\delta_{máx} = \frac{U_{máx}L^3}{I} = 1.813 \cdot 10^{11} \mu^2 = 1.813 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{M_p}{\rho SL}\right)^2$$

$$U_{máx} = 1.813 \cdot 10^{11} \frac{I}{L^3} \left(\frac{M_p}{\rho SL}\right)^2 \quad (62)$$

Es más, la única diferencia entre ambas leyes es una constante, en la que influye de alguna forma el módulo de Young. En este caso no es posible asegurar al 100% que las crestas de cada curva del punto medio coincidan en el tiempo, pues la forma de unas curvas y otras es muy distinta.

En la Figura 34 se muestra, por último, el barrido en valores extremos llevado a cabo para el modelo de péndulo invertido.

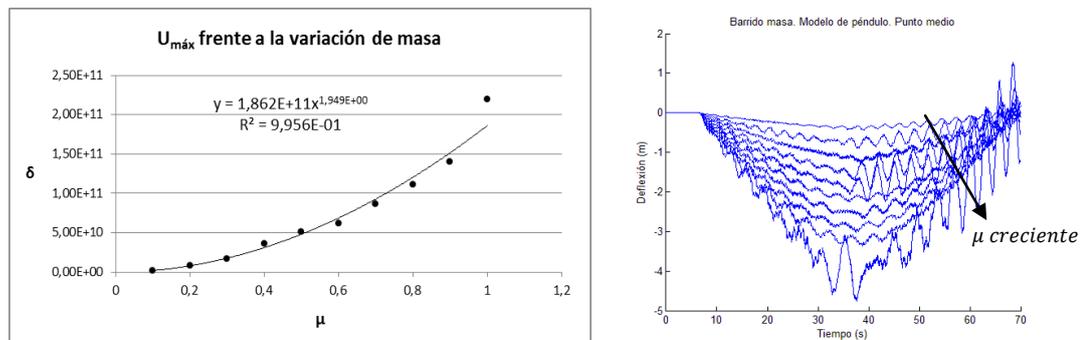


Figura 34. Resultados del barrido de masa extremo para el modelo de péndulo. A la izquierda, dependencia del parámetro δ con μ ; a la derecha, las sucesivas respuestas del punto medio.

Como se puede comprobar, las respuestas en este caso son mucho más erráticas, en general. Ello conlleva, entre otras cosas, que no se pueda establecer una correlación tan exacta como en ocasiones anteriores entre δ y μ . Sin embargo, la correlación alcanzada esta vez responde bastante bien a la obtenida con el barrido en valores “usuales”, estando ambas constantes muy próximas una de otra.

En cuanto a las frecuencias de oscilación, la fuerte irregularidad de las respuestas hace prácticamente incomparable cualquier medición hecha en cualquier respuesta. No obstante, se ha obtenido la Figura 35 en un intento de medición en la segunda mitad de las respuesta, donde parece que algunas curvas presentan oscilaciones más acusadas. Se puede comprobar cómo, grosso modo, la tendencia general de la frecuencia de oscilación es a disminuir según disminuye la masa de la viga.

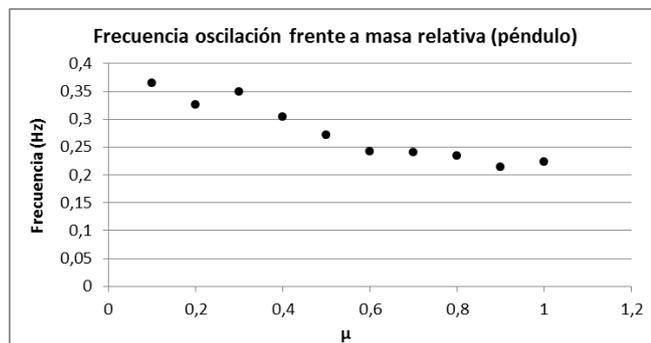


Figura 35. Dependencia de la frecuencia de oscilación con μ para el modelo MCK.

5.4. Influencia del amortiguamiento

Existen dos formas de añadir amortiguamiento en el sistema: amortiguamiento estructural y amortiguamiento del peatón. El primero de ellos se cuantifica mediante una matriz de amortiguamiento (\mathbb{C} , ver epígrafe 4.2), que en este problema se construirá a partir de valores que se fijen de amortiguamiento modal. En concreto, para una estructura de estas características el amortiguamiento suele ser débil, del orden de un 0.3% para cada modo. Se calculará, pues, una matriz diagonal de amortiguamiento modal que posteriormente se transformará en una matriz de amortiguamiento \mathbb{C} . La mejor forma de apreciar la influencia de este amortiguamiento estructural es comparar la viga amortiguada y sin amortiguar en el modelo de fuerza puntual, que se muestra en la Figura 36.

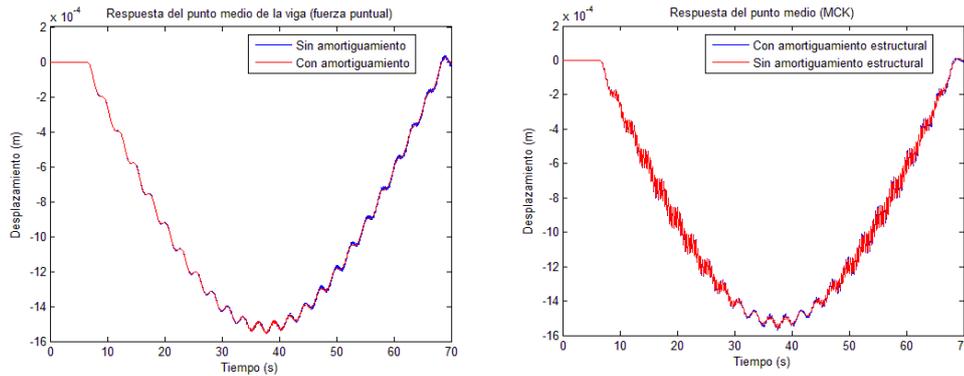


Figura 36. Comparación de la respuesta del punto medio de la viga amortiguada y sin amortiguar, cargada con una fuerza puntual móvil y el subsistema MCK.

Como se aprecia, la adición de amortiguamiento, aunque débil, suaviza la respuesta de la viga bajo una carga puntual móvil, desapareciendo aquellas oscilaciones residuales en la segunda mitad de la simulación. Globalmente, la respuesta es muy similar, con los máximos relativos alcanzándose aproximadamente al mismo tiempo. Existen sin embargo, y en ambos casos, pequeñas diferencias en cuanto al valor de estos máximos, que son sutilmente menores para el caso de la viga amortiguada, como cabría esperar. De esta forma, se puede admitir que la influencia del amortiguamiento estructural reduce la amplitud de oscilación de la viga.

El segundo amortiguamiento que se puede introducir es el asociado al peatón. Este disipa mejor las vibraciones que la viga, luego se le asignará un porcentaje de disipación superior, del orden de $\zeta = 8\%$. Este factor se incluirá en los modelos bajo forma de coeficiente de amortiguamiento c , relacionada con ζ como se muestra en la ecuación (63), donde se muestra además el valor de c según los datos empleados para la resolución del problema propuesto.

$$c = 2\zeta\sqrt{km} = 202.39 \text{ Ns/m} \quad (63)$$

Con todo, se muestran en la Figura 37 las respuestas de los modelos MCK y péndulo invertido. Como se aprecia, las dos curvas se parecen a sus modelos “anteriores”. Así, el modelo MCK amortiguado se parece al de fuerza puntual móvil, mientras que la respuesta del modelo de péndulo invertido amortiguado se asemeja a la respuesta del modelo MCK. Y esto es así debido a las fuerzas de contacto, que se amortiguan de la misma manera. En la Figura 38 se aprecia cómo la fuerza de contacto del modelo MCK se amortigua completamente hasta volverse prácticamente constante antes incluso de que el peatón entre en la viga. Por su parte, el modelo de péndulo invertido, debido al amortiguamiento, pierde la modulación tan característica y permanece oscilando uniformemente en el tiempo gracias únicamente a la excitación del propio péndulo.

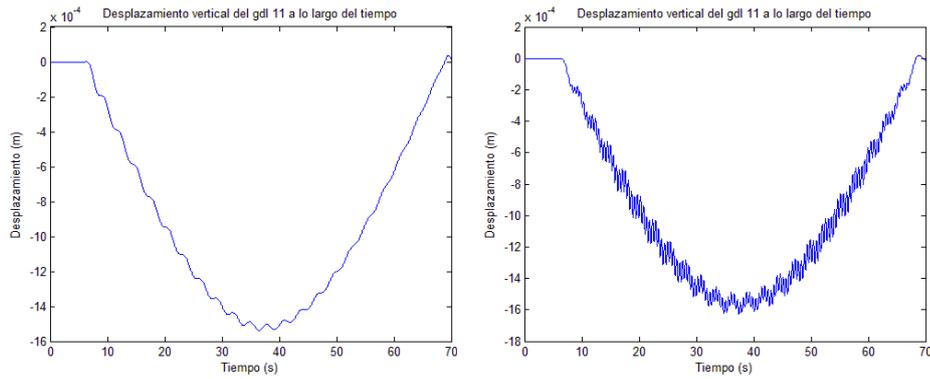


Figura 37. Respuestas de los modelos de peatón con amortiguamiento: a la izquierda, modelo MCK; a la derecha, modelo de péndulo invertido.

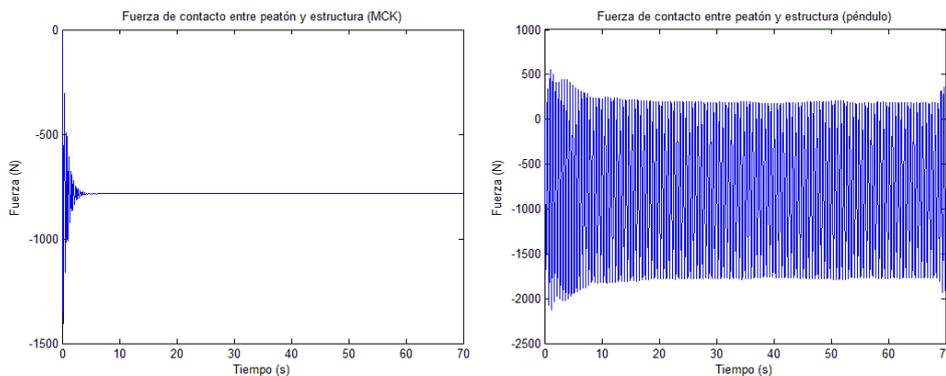


Figura 38. Fuerzas de contacto entre peatón y estructura, con amortiguamiento: a la izquierda, modelo MCK; a la derecha, modelo de péndulo invertido.

En resumen, la existencia de un amortiguamiento un poco importante en el peatón anula de alguna manera el efecto del resorte en el modelo MCK, y controla las oscilaciones, manteniéndolas uniformes en el tiempo, en el modelo PI.

5.5. Guías de diseño existentes: SETRA

A día de hoy existen una serie de recomendaciones de diseño de estructuras sometidas a la circulación de peatones. De entre todas ellas, una de las que mejor reproduce la excitación peatonal es el elaborado por el Sétra^[15] (*Service d'études techniques des routes et autoroutes*). El enfoque consiste en un ajuste de los registros experimentales de la fuerza que ejerce un peatón sobre sus apoyos mediante un valor constante corregido por funciones sinusoidales, de amplitudes y desfases diferentes (serie de Fourier), tal y como se muestra en la ecuación (64).

$$F(t) = G_0 + G_1 \sin(2\pi f_m t) + \sum_{i=2}^n G_i \sin(2\pi i f_m t - \varphi_i) \quad (64)$$

El documento recomienda asimismo el empleo de un total de 3 armónicos ($n = 3$), puesto que los de orden superior poseen una amplitud suficientemente pequeña para no influir significativamente en la excitación. Para el resto de parámetros se recomiendan los siguientes valores:

G_0 – Peso del peatón

$$G_1 = 0.4 G_0$$

$$G_2 = G_3 = 0.1 G_0$$

f_m – frecuencia de paso del peatón, entorno a 2 Hz.

φ_i – Desfases de los armónicos, aproximadamente $\pi/2$ cada uno.

Para un peatón de 80 Kg (784,8 N) se consigue una función excitación como se muestra en la Figura 39.

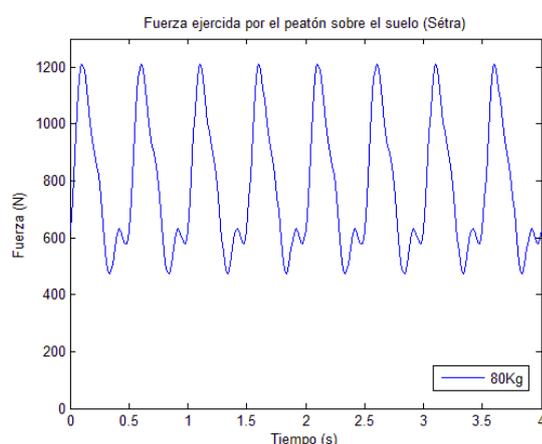


Figura 39. Fuerza ejercida por el peatón sobre el suelo, según el Sétra.

Esta excitación, de carácter periódico y casi sinusoidal, excitará a la viga, produciendo una respuesta como la mostrada en la Figura 40.

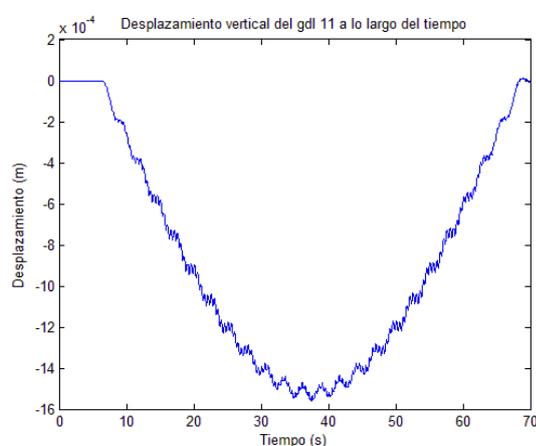


Figura 40. Respuesta del punto medio de la viga, excitada con una carga según el Sétra.

Como se aprecia, guarda un parecido bastante razonable con la respuesta que proporcionan tanto el modelo de fuerza puntual como el modelo MCK. Esto es debido a que la excitación de este modelo está construida principalmente mediante la superposición de dos señales de la misma naturaleza: una constante (G_0) y otra sinusoidal (G_1). Existen otras dos

componentes que intervienen en la respuesta, pero de forma mucho más discreta, por lo que la respuesta global apenas se ve afectada. En la Figura 41 se pueden ver tanto la fuerza excitadora como la respuesta del punto medio de la viga bajo la superposición de una carga puntual igual al 60% del valor nominal del peso del peatón y a un sistema MCK con el 40% de dicho peso, y con una rigidez ajustada para obtener una excitación a 2 Hz, ecuación (65) con f en Hz y la masa m en Kg para obtener k en N/m.

$$k = 4\pi^2 f^2 m \quad (65)$$

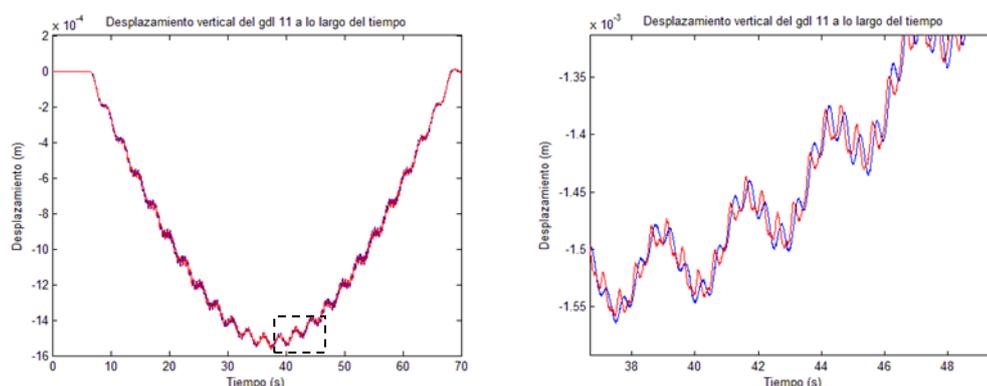


Figura 41. Comparación de la respuesta del punto medio de una viga a la que se aplica el modelo de fuerza de Séttra (en azul) y la combinación de los modelos MCK y puntual (en rojo). A la derecha, un detalle del cuadro punteado.

Como se aprecia en la Figura 41, ambas respuestas son muy similares. Globalmente podría decirse que son iguales (figura de la izquierda), alcanzan prácticamente los mismos valores al mismo tiempo. Existen sin embargo pequeñas diferencias (ver detalle) procedentes de las dos componentes de la fuerza propuesta por Séttra que no se tienen evidentemente en cuenta en la combinación de los modelos MCK y puntual. Estas contribuciones, aunque pequeñas, afectan a la respuesta de la viga modificando la amplitud de algunas crestas y desfasándolas levemente respecto de la respuesta del modelo combinado.

Por otro lado, se puede analizar hasta qué punto el modelo de péndulo invertido puede simular una acción del tipo Séttra. Como se aprecia a simple vista a partir de las figuras hasta ahora presentadas, a pesar de que la masa del peatón es la misma y el modelo de péndulo está sintonizado para excitar a la viga a 2 Hz, la respuesta del punto medio de la misma no es en absoluto similar. Ello se debe a la forma que adoptan las fuerzas de contacto en ambos modelos, que se presentan conjuntamente en la Figura 42.

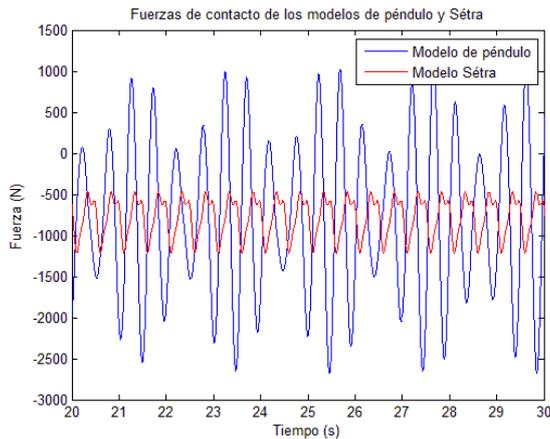


Figura 42. Fuerzas de contacto de los modelos de péndulo y Sétra.

Como se muestra en la figura, las respuestas en fuerza de contacto de ambos modelos calculadas con las mismas propiedades son muy diferentes. Ya no únicamente en tipología (recordar la modulación de la señal, apartado 5.2), sino también en amplitud. Sería preciso, pues, en primer lugar, reducir la amplitud de estas oscilaciones, reduciendo naturalmente la masa del peatón. Como bien puede preverse, reduciendo la masa del peatón se reducirá automáticamente la excitación total de la viga, siendo la deflexión de ésta mucho menor de lo que debiera, tal y como se aprecia en la Figura 43 donde, para una masa de 48 Kg no se alcanza apenas una deflexión de 1 mm , cuando esta debería superar los 1.5 mm .

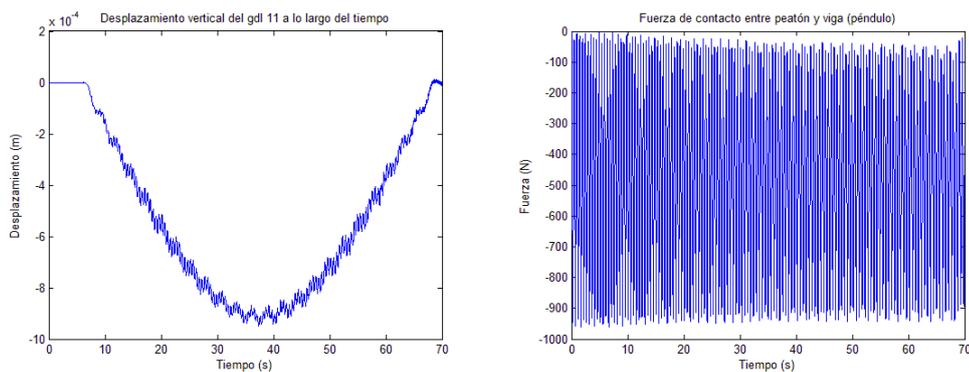


Figura 43. Modelo de péndulo con $m_p = 48\text{ Kg}$.

Como se observa en la forma de la fuerza aplicada, ésta posee una oscilación propia de aproximadamente 900 N , cuando la fuerza del Sétra apenas oscila 750 , por lo que hay que reducir aún más la masa del peatón, por ejemplo, a 40 Kg , la mitad. En otro orden de cosas, como es evidente, esta fuerza oscila en torno a un valor de equilibrio, que es el peso introducido, que en el caso de la figura es de 470.9 N , y en el caso nuevo será de unos 392.4 N . Es necesario centrar esta curva entorno al peso real del peatón, a ser posible sin modificar las oscilaciones que ya se han “ajustado”. La única forma de conseguir esto es introduciendo nuevamente una fuerza puntual, de

igual valor al peso que falte para completar el peso real del peatón (otros 40 Kg , igual a 392.4 N). De esta forma, se obtienen las curvas respuesta de la Figura 44.

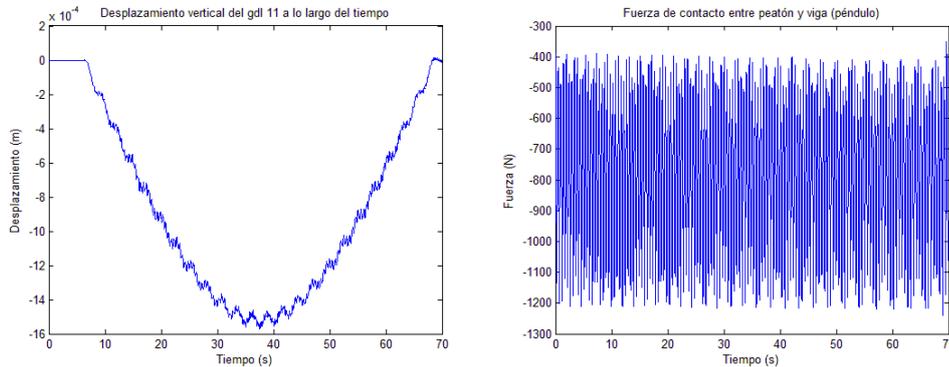


Figura 44. Modelo de péndulo con $m_p = 40\text{ Kg}$ junto con modelo de fuerza puntual con $F = -392.4\text{ N}$.

Esta vez, como se puede comprobar, la curva se parece mucho ya a la proporcionada por los modelos tratados anteriormente. Se ha obtenido, nuevamente, una buena aproximación del modelo provisto por el Sétra aunando un modelo con masa inercial (en este caso el de péndulo invertido) con el modelo de fuerza puntual constante.

En definitiva, y a modo de resumen del apartado, cualquier modelo que suponga una excitación periódica, de tipo sinusoidal, a la viga va a producir una respuesta que puede considerarse “parecida” a la predicha por el modelo de diseño propuesto por el Sétra, dado que esta misma tiene un fuerte parecido con una excitación de este tipo. Existen, sin embargo, pequeñas diferencias, producidas por las dos contribuciones de amplitud $0.1G_0$, desfasadas $\pi/2$ respecto de la oscilación principal. La aproximación más acertada la proporcionará, pues, un modelo que sea capaz de simular estas contribuciones adicionales, presumiblemente bajo la forma de una combinación de señales sinusoidales sencillas, como en el caso de la fuerza del Sétra, pero producidas por elementos físicamente reales y no añadidos como una fuerza puntual.

6. Conclusiones

Como se ha visto, y como se propuso como objetivo del trabajo, se ha logrado la confección de un software en el entorno de programación de Matlab, capaz de almacenar la información acerca de una estructura, sus condiciones de contorno y sus cargas y resolverla gracias a las funciones que el propio programa tiene programadas para ello. Aunque no del todo eficientes, las funciones *ode* de Matlab han permitido obtener la solución por integración directa de todos los problemas planteados en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales desprendido de su formulación en elementos finitos.

Las ecuaciones se han obtenido de dos formas diferentes. En el caso de la viga, capítulo 2, se ha construido el sistema de ecuaciones diferenciales a través de un balance de fuerzas operado a través del formalismo de Lagrange. Se han calculado para la misma, y de forma genérica, sus energías cinética y potencial para su posterior derivación. En el proceso se han calculado dos matrices, la matriz masa y la matriz de rigidez, que han permitido una formulación compacta del sistema de ecuaciones que rige el comportamiento de la viga.

Por su parte, los modelos de peatón (capítulo 3), han sido descritos a partir de aquello que pretendían de alguna forma simular. Así, el modelo de fuerza puntual, ha sido concebido para emular únicamente el peso del mismo, el modelo MCK contiene además los efectos dinámicos del mismo (pudiéndose ajustar para respetar la rigidez del mismo o su frecuencia de paso) y el modelo de péndulo permite a la vez simular los efectos dinámicos de la masa, la rigidez del peatón y el efecto de sus pasos. Los tres han sido tratados mediante un balance dinámico de fuerzas, obteniéndose así sendas ecuaciones de movimiento y de acoplamiento dinámico fácilmente incorporadas al sistema de ecuaciones ya formulado para la viga. Especial relevancia cobra en este sentido el modelo de péndulo invertido, el cual además contiene expresiones de cambio de variables entre las coordenadas longitudinales (w y ξ) y su coordenada angular local φ . Esta coordenada local es la que ha permitido conocer en cada instante de tiempo sobre qué apoyo reposaba el peatón, con el fin de emplear para cada caso el conjunto de ecuaciones adecuado.

Las ecuaciones presentadas se han implementado en Matlab, capítulo 4, empleando para la resolución del sistema una función llamada por el *solver* que permitía calcular dónde se encontraba el peatón en cada instante y el valor de su fuerza sobre la viga, así como el valor de las derivadas de los grados de libertad en cada instante. Nuevamente, esta fortaleza del método empleado ha permitido además conocer la estado de movimiento del péndulo en cada instante, permitiendo dilucidar sobre la marcha qué conjunto de

ecuaciones rigen el movimiento del mismo. Todo ello ha permitido obtener los primeros resultados, que han servido para las primeras comparaciones. Se ha comprobado cómo las respuestas proporcionadas por el modelo de fuerza puntual y el de masa móvil coinciden casi perfectamente con otros obtenidos analíticamente o por terceras personas, y cómo cada uno de los modelos presentados simulaba al anterior, al realizar simulaciones adecuadas (el modelo MCK simula al de fuerza puntual al establecer una rigidez k muy elevada; el modelo de péndulo simula al modelo MCK al establecer una condición inicial del péndulo φ_0 suficientemente pequeña).

Como culmen a todo el proceso, se ha resuelto un problema ficticio concreto con los tres modelos, capítulo 5, que, como se propuso como objetivo, ha permitido analizar más en profundidad las características de cada uno de ellos. Como cabría esperar, el tránsito de una fuerza constante por la viga produce, además de la deflexión característica de una fuerza estática, oscilaciones de frecuencia igual a la primera frecuencia natural de la viga. Cuando, en lugar de ser transitada por una fuerza, es transitada por el sistema MCK, a estas oscilaciones se añaden otras correspondientes a la excitación armónica del resorte bajo la masa. Se comprueban ambos fenómenos en las figuras del epígrafe 5.1, donde se muestran además diversas FFTs que corroboran el hecho de que, además de la primera frecuencia propia, es posible encontrar excitados alguno de los modos superiores impares (simétricos) de la viga.

En cuanto al péndulo, epígrafe 5.2, se ha podido comprobar cómo las oscilaciones que sufre la viga se ven fuertemente potenciadas. Esto es debido al nuevo grado de libertad, w , que evoluciona de forma más libre, únicamente sometido a la aceleración de la gravedad y a un breve impulso cuando algún apoyo toma contacto con el resorte, que es a su vez excitado por el péndulo. Así, aunque de forma global se respeta la misma topología de respuesta del punto medio de la viga, las oscilaciones son mucho más acusadas y la deflexión máxima es claramente superior. Como detalle adicional de este modelo cabe destacar la forma tan particular que tiene la fuerza de contacto entre peatón y viga, una señal periódica con fenómeno de batimiento, resultado de la combinación de varias señales sinusoidales de diferente frecuencia, como son en este caso la oscilación del péndulo y la oscilación del resorte libre.

Sobre los dos modelos másicos se ha estudiado más en profundidad la relación entre la masa del peatón y la deflexión máxima, epígrafe 5.3. En concreto, se han propuesto dos magnitudes adimensionales, δ y μ , representando respectivamente una deflexión adimensionalizada y la relación entre la masa del peatón y la de la viga. Se ha comprobado cómo para ambos modelos, la relación entre ambas es cuadrática, $\delta = C \mu^2$, diferenciándose ambas únicamente por una constante de igual orden de magnitud que el

módulo de Young y válida esta expresión tanto para valores ordinarios como para valores más extremos en que ambas masas sean del mismo orden de magnitud. En este mismo contexto, se ha evaluado además la influencia de μ sobre la frecuencia de oscilación del punto medio de la viga y se ha comprobado cómo para valores de μ comprendidos entre 0.1 y 1 las frecuencias se reducen progresivamente, alcanzándose valores asintóticos para valores inferiores a 0.1 y superiores a 1. Por esta razón, en el entorno de relaciones de masa habituales, dichas frecuencias no varían de forma apreciable.

Por último, se ha realizado un breve análisis acerca de la influencia del amortiguamiento en estos modelos, epígrafe 5.4, y una comparación de la respuesta de estos modelos con una guía de diseño de uso común (Sétra). En cuanto al amortiguamiento, se ha comprobado cómo la adición de amortiguamiento a la estructura reduce, como cabría esperar, la amplitud de las oscilaciones producidas por el peatón. Sin embargo, el amortiguamiento típico de este tipo de estructuras esbeltas es pequeño y, por tanto, apenas se aprecia su efecto. Añadir amortiguamiento al peatón tiene, sin embargo, efectos mucho más notables. Como es natural, amortiguar la oscilación del sistema MCK hace desaparecer la influencia del resorte sobre la viga y termina, con el tiempo, asemejándose a un modelo de fuerza puntual constante. Por su parte, el modelo de péndulo, puesto que este no se ve amortiguado, excita de forma periódica al resorte, que sí está amortiguado, transmitiéndose toda la fuerza de la masa a la viga sin apenas intervención de este. Desaparece, pues, el fenómeno de batimiento tan característico de este modelo.

En cuanto a la guía de diseño, se ha mostrado la propuesta de fuerza de contacto peatón/estructura así como de la respuesta del punto medio resultante de la aplicación de ésta. Se ha ilustrado cómo la combinación de los modelos MCK y puntual constante, así como el modelo de péndulo invertido con el puntual constante, debidamente ajustados, logran una aproximación suficientemente buena de la respuesta del punto medio de la viga. Si bien es cierto que la fuerza de contacto presenta diferencias, sobre todo en lo que a contenido frecuencial respecta, estas diferencias son de amplitudes sensiblemente menores que el resto de la señal (cuatro veces inferiores a la amplitud de la oscilación principal). De esta forma, en ambos casos se ha conseguido superponer una fuerza constante con otra de tipo sinusoidal, y con ello se ha conseguido un ajuste de la respuesta suficientemente bueno.

En definitiva, los tres modelos pueden considerarse adecuados como medio de evaluar la influencia de un peatón sobre una estructura, existiendo matices en cuanto a la forma de la fuerza de contacto entre ambos. Es posible, pues, ajustar los parámetros de cada uno para lograr en cada caso

que se ajuste bien la fuerza transmitida o bien la frecuencia de paso del peatón. Además, mediante la combinación entre ellos es posible emular con mejor resultado la fuerza transmitida por un peatón real al suelo por el que transita.

7. Líneas de futuro

Los modelos aquí presentados en el marco de las hipótesis empleadas no son más que el principio de un vastísimo campo con múltiples líneas evolucionando en muchos sentidos. Algunas de esas líneas se presentan someramente en este capítulo, a modo de clausura del presente trabajo.

7.1. Otros modelos más sofisticados

La línea de evolución más evidente y natural es la de continuar complicando el modelo del peatón con el fin de simular otros fenómenos del caminar. De entre esos fenómenos se pueden destacar los siguientes:

- Pasos más realistas y evolución horizontal más natural. En los tres modelos presentados, la velocidad del peatón venía impuesta y era siempre constante, salvo en el modelo PI que presentaba pequeñas oscilaciones entorno a este valor. Aunque ello facilitó las tareas de simulación, la realidad es que esta velocidad es, en realidad, variable y supone un grado de libertad añadido. Es la pierna trasera la que se encarga de impulsar periódicamente al peatón. Algunos autores simulan con bastante éxito este fenómeno con un modelo bipedal^[3] al que añaden una fuerza que compensa las pérdidas de energía de la viga y del peatón. Esta fuerza actúa pues a modo de impulso, como lo haría la pierna trasera.
- Contacto peatón/suelo no puntual^[5]. Efectivamente, aunque pequeña, la superficie de contacto entre el peatón y el suelo que pisa no es puntual, como se ha modelado aquí. Es más, es una superficie finita que evoluciona en el tiempo. El contacto comienza en un punto donde impacta el talón del peatón en el suelo. A continuación, el resto del pie desciende progresivamente, habiendo un momento en que todo el pie está apoyado repartiendo la fuerza del peatón uniformemente. En un tercer momento, el talón despega y solo la parte delantera del pie (que pertenece a la pierna trasera) está apoyada, impulsando al peatón para continuar su marcha.
- Estructura interna del peatón más compleja. Aunque la relevancia de este aspecto sería discutible en lo que a la respuesta de la estructura se refiere, y podría ser algo más propio del ámbito de la biomecánica, la realidad es que el peatón no es una simple masa puntual, como se ha presentado hasta ahora. Contiene elementos tales como brazos actuando a modo de péndulos, piernas con masa (y por tanto, con inercia) y la cabeza, donde se encuentra el sentido del equilibrio, responsable de “informar” de lo confortable del lugar sobre el que se está andando. La capacidad de evaluar los efectos de las extremidades sobre el movimiento del peatón, así como de la respuesta de la cabeza durante

el proceso, puede conducir a un mejor control del aspecto confort de la estructura.

7.2. Otros fenómenos asociados

Algunas de las hipótesis adoptadas en este texto están dirigidas en la línea de simplificar la estructura y los modelos asociados. Algunas de las vías de evolución irían, pues, encaminadas a romper con algunas de estas hipótesis y a la consideración de otros aspectos encaminados a calcular estructuras más complejas y visualizar otros fenómenos diferentes a los aquí presentados. Algunas de estas vías son:

- Representación de más elementos estructurales. En efecto, una simplificación necesaria para emplear los modelos aquí presentados es la reducción de toda una pasarela a una sola viga. Esto, aunque válido para una primera aproximación y acercamiento a los órdenes de magnitud, es escaso a la hora de realizar proyectos de mayor envergadura. Vigas en celosía, tirantes, pilares... existe toda una suerte de elementos que contribuyen a la rigidez y sustentación de la pasarela que es complicado representar en una simplificación como la aquí empleada.

- Representación de la viga/pasarela en el espacio tridimensional. Las virtudes de esta representación frente a la bidimensional son muchas. Entre ellas, la más destacable es la posibilidad de representar dos modos de trabajo no considerados en los modelos bidimensionales: la torsión y la flexión lateral. Efectivamente, los peatones rara vez caminan siguiendo la línea media de la estructura (línea que sigue los centros de gravedad de las infinitas secciones de la estructura). Es por ello que, además de la flexión manifiesta, se produce torsión entorno a esta línea. Además, tal y como queda patente en muchas circunstancias [Millenium Bridge], los desplazamientos asociados a la torsión de la estructura son mayores que los debidos a flexión. Junto a esta torsión pueden aparecer fenómenos de inestabilidad como es la flexión lateral.

- Ampliación a otro tipo de elementos. El método de simulación aquí abordado no es exclusivo de los elementos de viga en dos o tres dimensiones. Otros elementos pueden ser igualmente incluidos, como elementos de placa o elementos tridimensionales. Así, mediante elementos 2D sería posible representar, por ejemplo, forjados de edificaciones, sometidos igualmente al tránsito de los peatones.

7.3. Modelos *multipersona*

Finalmente, la última línea de futuro que se presenta aquí, va dirigida a los denominados modelos *multipersona* o de multitud. Se distinguen en este ámbito dos tipos de modelos: aquellos que simulan unas pocas personas, pero más de una; y aquellos que simulan un elevado número de peatones.

Los modelos *multipersona*, con pocos peatones, están encaminados fundamentalmente a evaluar y simular las influencias que se producen entre los peatones. Estas simulaciones pueden ser llevadas a cabo explícitamente, sin más que incluir más modelos de peatón circulando sobre la estructura. Es preciso, eso sí, disponer de datos (habitualmente de carácter estadístico) acerca de frecuencias de llegada de peatones y características mecánicas de los mismos^{[6][15]}.

Los modelos destinados a simular la acción de una muchedumbre^{[6][7]} son completamente inabordables de forma explícita debido al enorme número de grados de libertad involucrados en la simulación. En este caso se opta por modelos de fuerzas discretas o continuas de valores obtenidos mediante alguna distribución estadística. El objetivo primordial es el estudio de la respuesta de la estructura bajo la carga de un elevado número de peatones, los cuales se comportan casi como masas uniformemente repartidas y que se desplazan a velocidad aproximadamente constante.

Anexo I. Cálculos

A continuación se detallan algunos desarrollos matemáticos no expuestos a lo largo del texto con el fin de facilitar su lectura fluida y evitar la pérdida del sentido global de cada capítulo.

A1.1. Funciones de forma

Para los desplazamientos horizontales $u(x)$ se busca una aproximación lineal. Se calcula una interpolación entre los valores del desplazamiento en los dos extremos del elemento, empleando para ello dos funciones de forma lineales como se muestra en la ecuación (A1.1).

$$u(x) = A(x)u_1 + B(x)u_2 \Rightarrow \begin{cases} A(x) = a_1 + a_2x \\ B(x) = b_1 + b_2x \end{cases} \quad (A1.1)$$

Se imponen a continuación las condiciones de contorno, es decir, que la función lineal resultante interpole correctamente los valores de u_1 y u_2 . Por comparación de coeficientes se obtienen las condiciones que han de cumplir las funciones $A(x)$ y $B(x)$ (ecuación A1.2)

$$\text{Cond. de contorno} \begin{cases} u(0) = u_1 \Rightarrow \begin{cases} A(0) = 1 \rightarrow a_1 = 1 \\ B(0) = 0 \rightarrow b_1 = 0 \end{cases} \\ u(L) = u_2 \Rightarrow \begin{cases} A(L) = 0 \rightarrow a_2 = -1/L \\ B(L) = 1 \rightarrow b_2 = 1/L \end{cases} \end{cases} \quad (A1.2)$$

Resolviendo el sistema se llega a la expresión A1.3 de las funciones de forma lineales para la interpolación de los desplazamientos horizontales.

$$\Rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2 \Rightarrow \begin{cases} A(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ B(x) = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (A1.3)$$

Se busca ahora una expresión análoga para los desplazamientos verticales $v(x)$. Estos se expresarán en función de los desplazamientos verticales de los extremos así como de los giros en los extremos (ecuación A1.4), ya que como se vio en el apartado 2, estos últimos son la derivada de la flecha dentro del contexto de la viga de Euler-Bernouilli. De esta forma, se dispone de un total de cuatro condiciones de contorno (dos en cada extremo) por lo que las funciones de forma podrán ser de hasta grado 3.

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2 \quad (A1.4)$$
$$\begin{cases} N_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 \\ N_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 \\ N_3(x) = a_3 + b_3x + c_3x^2 + d_3x^3 \\ N_4(x) = a_4 + b_4x + c_4x^2 + d_4x^3 \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de contorno se consigue un total de cuatro sistemas de ecuaciones que, una vez resueltos, proporcionan los valores de los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i . Se ilustra el cálculo de los coeficientes para la función N_1 (ecuaciones A1.5, A1.6 y A1.7) y se obvia el cálculo del resto, pues es análogo a este primero.

$$\text{Cond. de contorno} \left\{ \begin{array}{l} v(0) = v_1 \quad \begin{cases} N_1(0) = 1, & N_2(0) = 0 \\ N_3(0) = 0, & N_4(0) = 0 \end{cases} \\ v'(0) = \theta_1 \quad \begin{cases} N_1'(0) = 0, & N_2'(0) = 1 \\ N_3'(0) = 0, & N_4'(0) = 0 \end{cases} \\ v(L) = v_2 \quad \begin{cases} N_1(L) = 0, & N_2(L) = 0 \\ N_3(L) = 1, & N_4(L) = 0 \end{cases} \\ v'(L) = \theta_2 \quad \begin{cases} N_1'(L) = 0, & N_2'(L) = 0 \\ N_3'(L) = 0, & N_4'(L) = 1 \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{A1.5})$$

$$\left. \begin{array}{l} N_1(0) = a_1 = 1 \\ N_1'(0) = b_1 = 0 \\ N_1(L) = a_1 + b_1L + c_1L^2 + d_1L^3 = 0 \\ N_1'(L) = b_1 + 2c_1L + 3d_1L^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.6})$$

$$N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (\text{A1.7})$$

La forma de calcular el resto de funciones es muy análoga a la presentada para $N_1(x)$. De hecho, el sistema de ecuaciones prácticamente igual, salvo por el vector de términos independientes, en el que el 1 va tomando posiciones diferentes. Así, siendo b dicho vector de términos independientes, se tiene cada una de las ecuaciones (A1.8), (A1.9) y (A1.10).

$$N_2 \rightarrow b_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow N_2(x) = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (\text{A1.8})$$

$$N_3 \rightarrow b_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow N_3(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (\text{A1.9})$$

$$N_4 \rightarrow b_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow N_4(x) = \frac{x^2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (\text{A1.10})$$

A1.2. Energía cinética de la viga

Para este cálculo se partirá de la ecuación (A1.11).

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{M \in \mathfrak{D}} \rho \|\dot{\vec{r}}\|^2 dM \quad (A1. 11)$$

Donde ρ es la densidad del material y r es la posición de un punto genérico de la viga, dado por la expresión (1). La integral se extiende a todo punto M perteneciente al dominio \mathfrak{D} del elemento, ecuación (A1. 12)

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{M \in \mathfrak{D}} \rho \left([\dot{u}(x, t) - y\dot{\theta}(x, t)]^2 + \dot{v}(x, t)^2 \right) dM \quad (A1. 12)$$

Omitiendo la dependencia con x y con t por reducir escritura, se tiene la ecuación (A1. 13).

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_{M \in \mathfrak{D}} \rho (\dot{u}^2 - 2\dot{u}y\dot{\theta} + y^2\dot{\theta}^2 + \dot{v}^2) dM = \\ &= \frac{1}{2} \int_{M \in \mathfrak{D}} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dM - \int_{M \in \mathfrak{D}} \rho \dot{u}y\dot{\theta} dM + \frac{1}{2} \int_{M \in \mathfrak{D}} \rho y^2\dot{\theta}^2 dM \end{aligned} \quad (A1. 13)$$

Puesto que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ están referidas a la línea media, línea que une todos los centros de gravedad de las secciones, en la ecuación (A1. 14) se tiene que el momento de área de primer orden de cualquier sección $S(x)$ es nulo.

$$\int_{M \in \mathfrak{D}} \rho \dot{u}y\dot{\theta} dM = \int_0^L \rho \dot{u}\dot{\theta} \left(\int_{S(x)} y dS \right) dx = 0 \quad (A1. 14)$$

Los otros dos términos se refieren respectivamente a la energía cinética de traslación y de rotación. La de traslación se opera en la ecuación (A1. 15).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{M \in \mathfrak{D}} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dM &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \left(\int_{S(x)} dS \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \langle \dot{u} \quad \dot{v} \rangle \left\{ \begin{matrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{matrix} \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{N}^t \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} dx \end{aligned} \quad (A1. 15)$$

Donde se ha recurrido a las funciones de forma obtenidas en el apartado 2 para expresar las componentes del vector posición. La correspondiente a la energía de rotación se trata en la ecuación (A1. 16).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{M \in \mathcal{D}} \rho y^2 \dot{\theta}^2 dM &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{\theta}^2 \left(\int_{S(x)} y^2 dS \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \dot{\theta}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{N}_\theta^t \mathbf{N}_\theta \dot{\mathbf{q}} dx \end{aligned} \quad (A1.16)$$

Todo ello se reúne en la ecuación (A1.17):

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{N}^t \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{N}_\theta^t \mathbf{N}_\theta \dot{\mathbf{q}} dx \quad (A1.17)$$

Esta es la expresión más general de la energía cinética, en la que ρ , S e I_z pueden variar a lo largo del elemento de viga. Suponiendo que esto no es así, salen de las integrales, al igual que $\dot{\mathbf{q}}$. De esta forma se obtienen las ecuaciones (A1.18) y (A1.19):

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \rho S \left[\int_0^L \mathbf{N}^t \mathbf{N} dx \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \rho I_z \left[\int_0^L \mathbf{N}_\theta^t \mathbf{N}_\theta dx \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (A1.18)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbb{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbb{M}_\theta \dot{\mathbf{q}}} \quad (A1.19)$$

A1.3. Elementos de la matriz \mathbb{M}

Como se ha visto en apartados anteriores, dicha matriz se calcula según la ecuación A1.20.

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \rho S \int_0^L \mathbf{N}^t \mathbf{N} dx = \\ &= \rho S \int_0^L \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) \\ 0 & N_2(x) \\ B(x) & 0 \\ 0 & N_3(x) \\ 0 & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(x) & 0 & 0 & B(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(x) & N_2(x) & 0 & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} dx = \\ &= \rho S \int_0^L \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 & AB & 0 & 0 \\ 0 & N_1^2 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ 0 & N_1 N_2 & N_2^2 & 0 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ AB & 0 & 0 & B^2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 N_3 & N_2 N_3 & 0 & N_3^2 & N_3 N_4 \\ 0 & N_1 N_4 & N_2 N_4 & 0 & N_3 N_4 & N_4^2 \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (A1.20)$$

Con las funciones de forma calculadas en apartados anteriores. Se ilustra en las ecuaciones A1.21 y A1.22, a modo de ejemplo, el cálculo de los elementos (1,1) y (2,2).

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(1,1) &= \int_0^L A^2 dx = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) dx = \\
&= L - \frac{2L^2}{L^2} + \frac{1L^3}{L^2 \cdot 3} = \frac{L}{3} = \frac{140L}{420}
\end{aligned} \tag{A1.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(2,2) &= \int_0^L N_1^2 dx = \int_0^L \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)^2 dx = \\
&= \int_0^L \left(1 + \frac{9x^4}{L^4} + \frac{4x^6}{L^6} - \frac{6x^2}{L^2} + \frac{4x^3}{L^3} - \frac{12x^5}{L^5}\right) dx = \\
&= L + \frac{9}{5}L + \frac{4}{7}L - 2L + L - 2L = \frac{13}{35}L = \frac{156L}{420}
\end{aligned} \tag{A1.22}$$

A1.4. Energía potencial de deformación de la viga

Se parte de la expresión en A1.23.

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{M \in \mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}(M, t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(M, t) dM \tag{A1.23}$$

En el contexto de la viga de Euler-Bernouilli se puede demostrar que solo juega un papel significativo la primera componente del tensor de deformación, ε_{xx} . Por otro lado, Ambos tensores están ligados a través de la ley de comportamiento del material. Suponiendo un comportamiento lineal del mismo, se tiene la ley de comportamiento A1.24.

$$\underline{\underline{\sigma}}(M, t) = C \underline{\underline{\varepsilon}}(M, t) \tag{A1.24}$$

Dentro del marco de la teoría de vigas Euler-Bernouilli, puesto que solo es importante ε_{xx} , y suponiendo que el material obedece la ley de Hooke (y es por tanto isótropo, homogéneo y elástico) la expresión integrando se reduce a A1.25.

$$\underline{\underline{\sigma}}(M, t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(M, t) = \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} = E \varepsilon_{xx}^2 \tag{A1.25}$$

El valor de la deformación ε_{xx} tiene dos componentes: una ligada a la deformación por tracción/compresión y otra ligada a la flexión a través de la curvatura del elemento, ambas expresadas en las ecuaciones A1.26 y A1.27.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} = \langle 1 \quad -y \rangle \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d^2v}{dx^2} \end{Bmatrix} \quad (A1.26)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d^2v}{dx^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dA}{dx} & 0 & 0 & \frac{dB}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_2}{dx^2} & 0 & \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbb{N}_\varepsilon \cdot \mathbf{q} \quad (A1.27)$$

Puesto que la transpuesta de un escalar coincide con el propio escalar, se puede expresar $\varepsilon_{xx}^2 = \varepsilon_{xx}^t E \varepsilon_{xx}$, y se tiene el resultado en A1.28.

$$\begin{aligned} E_d &= \frac{1}{2} \int_{M \in \mathcal{D}} \mathbf{q}^t \mathbb{N}_\varepsilon^t \begin{Bmatrix} 1 \\ -y \end{Bmatrix} \cdot E \cdot \langle 1 \quad -y \rangle \mathbb{N}_\varepsilon \mathbf{q} \, dM = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \int_{M \in \mathcal{D}} E \mathbb{N}_\varepsilon^t \begin{bmatrix} 1 & -y \\ -y & y^2 \end{bmatrix} \mathbb{N}_\varepsilon \, dM \mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \int_0^L E \mathbb{N}_\varepsilon^t \begin{bmatrix} \int_{S(x)} dS & \int_{S(x)} (-y) dS \\ \int_{S(x)} (-y) dS & \int_{S(x)} y^2 dS \end{bmatrix} \mathbb{N}_\varepsilon \, dx \mathbf{q} \end{aligned} \quad (A1.28)$$

Se ha supuesto que el módulo de Young E del material no varía dentro de la sección. Además, como se vio en el cálculo de la energía cinética, puesto que la coordenada y está referida desde la línea media del elemento, el momento de área de primer orden es nulo (términos fuera de la diagonal de la matriz). Así, la energía potencial de deformación se muestra en A1.29.

$$E_d = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \int_0^L E \mathbb{N}_\varepsilon^t \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \mathbb{N}_\varepsilon \, dx \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbb{K} \mathbf{q} \quad (A1.29)$$

A1.5. Elementos de la matriz \mathbb{K}

Como se ha visto en apartados anteriores, dicha matriz se calcula según A1.30.

$$\mathbb{K} = \int_0^L E \mathbb{N}_\varepsilon^t \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \mathbb{N}_\varepsilon \, dx \quad (A1.30)$$

Empleando la expresión de N_ε vista en el apartado anterior y utilizando la notación *prima* (') para indicar una derivada con respecto de x , se tiene la matriz genérica A1.31.

$$\mathbb{K} = E \int_0^L \begin{bmatrix} SA'^2 & 0 & 0 & SA'B' & 0 & 0 \\ 0 & I_z N_1''^2 & I_z N_1'' N_2'' & 0 & I_z N_1'' N_3'' & I_z N_1'' N_4'' \\ 0 & I_z N_1'' N_2'' & I_z N_2''^2 & 0 & I_z N_2'' N_3'' & I_z N_2'' N_4'' \\ SA'B' & 0 & 0 & SB'^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_z N_1'' N_3'' & I_z N_2'' N_3'' & 0 & I_z N_3''^2 & I_z N_3'' N_4'' \\ 0 & I_z N_1'' N_4'' & I_z N_2'' N_4'' & 0 & I_z N_3'' N_4'' & I_z N_4''^2 \end{bmatrix} dx \quad (A1.31)$$

Con las funciones derivadas en A1.32.

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{1}{L} & B' &= \frac{1}{L} \\ N_1'' &= -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & N_2'' &= -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & N_3'' &= \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & N_4'' &= \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{aligned} \quad (A1.32)$$

Ejemplo de cálculo de los elementos $\mathbb{K}(1,1)$ y $\mathbb{K}(2,2)$ en A1.33 y A.34.

$$\mathbb{K}(1,1) = E \int_0^L S \left(-\frac{1}{L} \right)^2 dx = \frac{ES}{L} = k_t \quad (A1.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(2,2) &= E \int_0^L I_z \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 dx = EI_z \int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} \right) dx = \\ &= EI_z \left(\frac{36}{L^3} - \frac{72}{L^3} + \frac{48}{L^3} \right) = \frac{12EI_z}{L^3} = 12k_f \end{aligned} \quad (A1.34)$$

A1.6. Obtención de las ecuaciones del sistema MCK

La obtención de estas ecuaciones, así como las correspondientes al sistema de péndulo invertido, se realizará mediante la aplicación de las correspondientes ecuaciones de equilibrio a los sólidos convenientemente aislados. Se buscarán dos tipos de ecuaciones, a saber, ecuaciones de movimiento, relacionando las variables cinemáticas y sus derivadas entre sí, y ecuaciones de acoplamiento dinámico, expresiones para las fuerzas de interacción entre los sistemas entre sí.

En la Figura A1.1 se muestra el aislamiento de sólidos propuesto para la obtención de las ecuaciones del sistema MCK. Del aislamiento de la masa sola se obtiene la expresión de la ecuación A1.35. Junto a las expresiones de las fuerzas del resorte y del amortiguador (ecuación A1.36), se obtiene la ecuación de movimiento A1.37.

$$F_k + F_c - m_p g = m_p \ddot{w} \quad (A1.35)$$

$$F_k = -k(w - v) \quad ; \quad F_c = -c(\dot{w} - \dot{v}) \quad (A1.36)$$

$$m_p \ddot{w} + c(\dot{w} - \dot{v}) + k(w - v) = -m_p g \quad (A1.37)$$

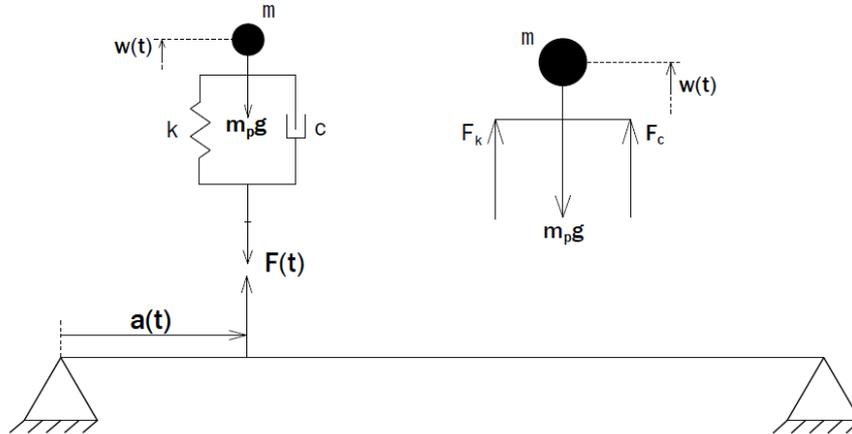


Figura A1.1. Aislamiento del subsistema MCK para la obtención de sus ecuaciones.

Por otro lado, del aislamiento del subsistema MCK completo se obtiene una expresión para la fuerza de contacto $F(t)$, que se muestra en la ecuación A1.38. Empleando la ecuación A1.39 se puede escribir esta expresión en función de posiciones y velocidades (ecuación (A1.39)), más conveniente para su programación en Matlab.

$$-F(t) - m_p g = m_p \ddot{w} \quad \rightarrow \quad F(t) = -m_p g - m_p \ddot{w} \quad (A1.38)$$

$$F(t) = c(\dot{w} - \dot{v}) + k(w - v) \quad (A1.39)$$

Ambas ecuaciones, A1.36 y A1.38, son las ecuaciones que gobiernan el subsistema y lo acoplan a las ecuaciones de la viga a través de la coordenada v . Como se desarrolla en el capítulo 3, la coordenada v no es un grado de libertad explícito del sistema, pero puede expresarse en función de los mismos mediante las funciones de forma de los elementos finitos.

A1.7. Obtención de las ecuaciones del sistema de péndulo invertido

De la misma forma que para el modelo MCK, para obtener las ecuaciones del modelo de péndulo invertido con doble apoyo se procederá a la separación del mismo en un total de 3 sólidos: por un lado, la viga, que soportará la fuerza $F(t)$ como ya es costumbre; por otro lado, la plataforma

sobre la que se apoya el peatón, sin masa; finalmente, la propia masa con sus apoyos, estos últimos sin masa. Se muestra el esquema en la figura ().

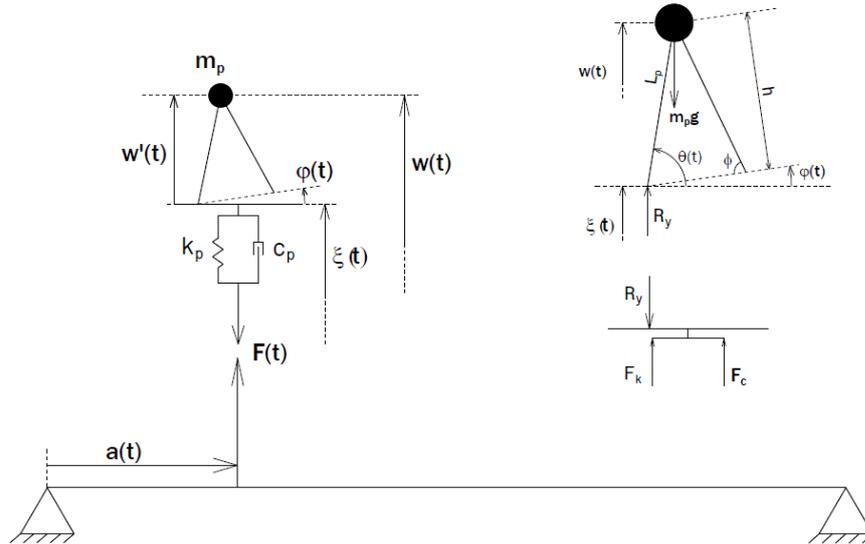


Figura A1.2. Aislamiento del subsistema del péndulo invertido para la obtención de sus ecuaciones.

Aislando la masa con sus dos apoyos se pueden obtener dos ecuaciones: una ecuación de acoplamiento dinámico equilibrando las fuerzas verticales y otra de movimiento equilibrando momentos. El equilibrio de fuerzas verticales proporciona la ecuación (A1.39).

$$R_y - m_p g = m_p \ddot{w} \quad (A1.40)$$

Para obtener la ecuación de movimiento equilibrando momentos conviene emplear los ángulos que se muestran en la figura, relacionados los tres mediante la ecuación (A1.40). Se obtiene así la ecuación de movimiento (A1.41).

$$\theta(t) = \varphi(t) + \phi \quad (A1.41)$$

$$-m_p g \cdot L_p \cos(\theta(t)) = m_p L_p^2 \ddot{\theta}(t) \quad (A1.42)$$

Siendo p el paso del peatón, esto es, la distancia entre los dos apoyos, se tiene la transformación de la ecuación (A1.42), con la que se puede simplificar la ecuación (A1.43), obteniendo la ecuación de movimiento en $\varphi(t)$.

$$\cos(\theta(t)) = \cos(\varphi) \cos(\phi) - \sin(\varphi) \sin(\phi) = \frac{p}{2L_p} \cos(\varphi) - \frac{h}{L_p} \sin(\varphi) \quad (A1.43)$$

$$L_p^2 \ddot{\varphi} + g \left(\frac{p}{2} \cos(\varphi) - h \sin(\varphi) \right) = 0 \quad (A1.44)$$

Se admitirá que las oscilaciones de φ no serán grandes en el tiempo, por lo que la ecuación de movimiento se puede simplificar, linealizándola. Se obtiene así la ecuación de movimiento (A1.44) que se conservará para cálculos posteriores.

$$L_p^2 \ddot{\varphi} - gh\varphi = -\frac{gp}{2} \quad (A1.45)$$

Sin embargo, φ no es un grado de libertad del modelo. Es preciso, pues, encontrar una relación entre este y los grados de libertad del problema (w y ξ). Esta relación se expresa en la ecuación (A1.45) que, mediante el cambio de coordenada expresado en (A1.46), se convierte en la ecuación (A1.47) también linealizada.

$$w - \xi = L_p \sin(\theta) \quad (A1.46)$$

$$\sin(\theta) = \sin(\varphi) \cos(\phi) + \cos(\varphi) \sin(\phi) = \frac{p}{2L_p} \sin(\varphi) + \frac{h}{L_p} \cos(\varphi) \quad (A1.47)$$

$$w - \xi = \frac{p}{2} \varphi + h \quad (A1.48)$$

Derivando la ecuación (A1.45) se obtiene la relación entre las velocidades, expresada en (A1.48), y derivando una vez más se obtiene la relación entre las aceleraciones, expresada en (A1.49).

$$\dot{w} - \dot{\xi} = L_p \cos(\theta) \dot{\theta} = \left(\frac{p}{2} - h\varphi\right) \dot{\varphi} \quad (A1.49)$$

$$\ddot{w} - \ddot{\xi} = L_p(-\sin(\theta) \dot{\theta}^2 + \cos(\theta) \ddot{\theta}) = -\left(\frac{p}{2} \varphi + h\right) \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{p}{2} - h\varphi\right) \ddot{\varphi} \quad (A1.50)$$

Y es esta ecuación, junto con la obtenida en (A1.44), la ecuación de movimiento buscada, puesto que relaciona los dos grados de libertad incluidos en el sistema de ecuaciones. La ecuación de movimiento del péndulo (A1.44) se empleará para hallar un valor de $\ddot{\varphi}$ en cada iteración, y las expresiones (A1.47) y (A1.48) se emplearán para hallar un valor para φ y $\dot{\varphi}$ respectivamente.

Todo lo anterior es válido para la configuración del péndulo presentada en la Figura A1.2, en que el ángulo φ es positivo. Cuando dicho ángulo es negativo, las ecuaciones son diferentes. Se muestra en la Figura A1.3 la configuración mencionada.

En esta situación, puesto que φ es negativo, se calcula $\theta = \phi - \varphi$. Sin embargo, Puesto que el signo global para los ángulos sigue siendo positivo en sentido antihorario, velocidades y aceleraciones no modifican su signo: $\dot{\theta} = \dot{\varphi}$,

$\ddot{\theta} = \ddot{\varphi}$. De esta forma, se tienen las ecuaciones asociadas a esta configuración en las ecuaciones (A1.50), (A1.51) y (A1.52).

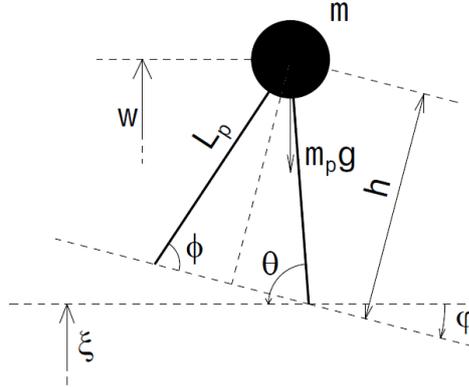


Figura A1. 3. Péndulo asilado apoyado con $\varphi < 0$.

$$m_p g \cdot L_p \cos(\theta) = m_p L_p^2 \ddot{\theta} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{p}{2L_p} + \frac{h}{L_p} \varphi$$

$$L_p^2 \ddot{\varphi} - gh\varphi = \frac{gp}{2} \quad (A1. 51)$$

$$w - \xi = L_p \sin(\theta) = h - \frac{p}{2} \varphi$$

$$\dot{w} - \dot{\xi} = \left(\frac{p}{2} + h\varphi \right) \dot{\varphi} \quad (A1. 52)$$

$$\ddot{w} - \ddot{\xi} = - \left(h - \frac{p}{2} \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{p}{2} + h\varphi \right) \ddot{\varphi} \quad (A1. 53)$$

Independientemente de si el péndulo se encuentra en una configuración u otra, el equilibrio de fuerzas verticales proporciona siempre la misma ecuación (A1.53), similar a la del subsistema MCK.

$$R_y - m_p g = m_p \ddot{w} \quad (A1. 54)$$

También similar es la ecuación de movimiento que se obtiene de aislar la plataforma, donde las fuerzas F_k y F_c , asociadas al resorte y al amortiguador respectivamente, se muestran en las ecuaciones (A1.54) y (A1.55).

$$F_k = -k(\xi - v) \quad , \quad F_c = -c(\dot{\xi} - \dot{v}) \quad (A1. 55)$$

$$F_k + F_c - R_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_y + k(\xi - v) + c(\dot{\xi} - \dot{v}) = 0 \quad (A1. 56)$$

Empleando la ecuación (A1.53) para sustituir R_y se obtiene la ecuación (A1.56), análoga a la obtenida para el modelo MCK (A1.37).

$$m_p \ddot{w} + c(\dot{\xi} - \dot{v}) + k(\xi - v) = -m_p g \quad (A1.57)$$

Finalmente, aislando el subsistema en su conjunto se obtiene la ecuación de acoplamiento dinámico con la viga (A1.57), idéntica a la obtenida en el caso del subsistema MCK (A1.38).

$$-F(t) - m_p g = m_p \ddot{w} \quad \rightarrow \quad F(t) = -m_p g - m_p \ddot{w} \quad (A1.58)$$

Empleando la ecuación (A1.56), se simplifica y se obtiene finalmente la ecuación (A1.58).

$$F(t) = c(\dot{\xi} - \dot{v}) + k(\xi - v) \quad (A1.59)$$

Anexo II. Documentación de usuario del software desarrollado

A. Introducción

El presente software tiene como fin el análisis de estructuras planas cargadas en su plano (pórticos). A pesar de encontrarse aún en desarrollo, abarca una buena cantidad de posibilidades tanto en el ámbito del cálculo estático como del cálculo dinámico. Entre sus capacidades se pueden destacar:

- Crear estructuras de barras de nudos rígidos de un número a priori ilimitado de barras. No se contempla la posibilidad de introducir libertades internas.
- Mallar las barras en un número determinado de elementos, no necesariamente igual para cada barra.
- Calcular estáticamente la estructura sometida a cargas nodales, puntuales extranodales, distribuidas, térmicas y de defecto de forma.
- Introducir cualquier tipo de condición de contorno, tanto rígido como elástico, y en cualquier sistema de coordenadas nodal.
- Calcular las frecuencias y modos propios de la estructura, así como representar gráficamente estos últimos
- Calcular dinámicamente la estructura, sometida a cargas dinámicas: fuerza puntual constante fija o móvil; sistema masa-resorte-amortiguador fijo o móvil; péndulo doble invertido sobre base elástica fija o móvil.
- Representación gráfica de deformadas instantáneas, evoluciones temporales de distintos grados de libertad y animación de deformadas dinámicas.

El software ha sido desarrollado en el entorno de programación de Matlab, empleando funciones propias del programa. Por este motivo, todo cálculo que se desee realizar habrá de hacerse en este mismo entorno, empleando los editores de script dedicados a tal fin.

B. Creación de una estructura

Una estructura nueva, así como todo el trabajo a realizar con ella, ha de crearse en un único fichero .m de Matlab. Las primeras líneas del script que generará la estructura han de ser siempre las mismas:

```
ID = Proyecto('nombre');
```

```
ID = ID.SetMAT('nombre', ρ, E, ν, G, σp, α);
ID = ID.SetSEC('nombre', A, I, h);
```

La primera línea crea el proyecto en el que se almacenará toda la información relativa a la estructura y los cálculos que se realicen. Hay que indicar una etiqueta (ID) para emplearlo en todo el script así como un nombre identificador propio (*nombre*). Este último puede ser cualquier cadena de caracteres.

La segunda línea, crea un material dentro del proyecto. Este material tendrá un *nombre* así como todas sus propiedades, en este orden:

- Densidad, ρ .
- Módulo de Young, E .
- Coeficiente de Poisson, ν .
- Módulo de cizalladura, G .
- Límite elástico, σ_p .
- Coeficiente de dilatación térmica, α .

Se pueden crear tantos materiales como se desee, añadiendo tantas líneas de este formato como sea necesario. Internamente, los materiales se registrarán en orden. Es decir, el material 1 será el correspondiente a la primera línea *SetMat*; el material 2 será el siguiente, y así sucesivamente.

La siguiente línea corresponde a la creación de una sección. Igualmente, contiene un *nombre*, así como el área A de la sección, su momento cuadrático de inercia I respecto del eje perpendicular al plano de la estructura y el canto h del perfil, medido paralelamente al plano de la estructura. Todas las propiedades han de figurar en ese orden.

A continuación se añaden cuatro líneas de objetos “nulos”, con el fin de crear una estructura vacía. Esta estructura vacía se irá completando a lo largo del script con comandos que se detallan más adelante.

```
nodoNull = Nodo(0,0,0,0,0);
elemNull = Elem(nodoNull,nodoNull,0,0,0,'',' ',0,0);
barraNull = Barra(0,nodoNull,nodoNull,0,0,0,'',' ',0,0);
IDe = Estructura(0,0,0,0,nodoNull,nodoNull,elemNull,barraNull);
```

Las tres primeras líneas de este código han de escribirse tal cual. La cuarta línea acepta una modificación, que debe realizarse, que es proporcionar una etiqueta ID para la estructura que se va a crear, etiqueta que será invocada a lo largo del script.

La forma más fácil de crear la geometría de una estructura es repetir tantas veces como sea necesario, las siguientes cuatro líneas.

```
n1 = Nodo(0,0,1,x1,y1);
n2 = Nodo(0,0,2,x2,y2);
```

```
b1 = Barra(n,n1,n2,0,L,θ,'MAT','SEC',N,LN);
IDe = IDe.NewBar(b1);
```

Las dos primeras líneas crean dos nodos, de etiquetas $n1$ y $n2$ (modificables). Dentro del paréntesis encontramos información diversa. El primer 0, que no se debe modificar, indicará más adelante el número del nodo en la estructura (lo calculará el programa); el segundo 0, que tampoco se debe modificar, indicará el elemento, o elementos a los que pertenece el nodo (lo calculará el programa); el tercer número, 1 ó 2, que tampoco se debe modificar, indica si el nodo es el extremo izquierdo (1) o derecho (2) de la barra. Finalmente, ambos tienen dos argumentos más del tipo (x, y) que son las coordenadas en el plano del punto en cuestión. Estos dos últimos valores sí han de ser establecidos por el usuario.

A continuación se crea una barra de identificador $b1$. Esta barra irá numerada, n , y estará comprendida entre los nodos $n1$ y $n2$. Posteriormente se indica cuáles de los 6 grados de libertad que posee posee una libertad. Por el momento, ha de ser nulo (0). A continuación, se indica la longitud L y ángulo θ que forma dicha barra con la horizontal. Finalmente, se indica como cadena de caracteres el identificador del material y sección que posee, además de incluir el número de elementos en que se divide así como un vector L_N con las longitudes de cada elemento.

La línea siguiente añade la barra anteriormente creada a la estructura. El comando `NewBar`, perteneciente a la clase `Estructura` (`IDe` es el identificador de una estructura creada anteriormente) admite como argumento un objeto de la clase `Barra`, que ha sido identificado en el ejemplo con la etiqueta $b1$. Este proceso de creación de barras puede ser repetido tantas veces como sea necesario para crear una estructura plana tan compleja como se desee.

Cuando todas las barras estén creadas, y añadidas a la estructura, se procede a guardar la estructura en el proyecto, mediante la orden:

```
ID = ID.SetEST(IDe);
```

Donde, una vez más, `ID` es el identificador del proyecto que se creó al principio e `IDe` es el identificador de la estructura. A continuación se añaden las condiciones de contorno. Para ello son necesarios tres comandos.

```
IDcc = CC(nNodo);
IDcc = IDcc.SetCC(nombre,nCC,[ux uy th],[kx ky kth],alfa);
ID = ID.SetCC(IDcc);
```

La primera línea crea una condición de contorno vacía en el nodo de número $nNodo$. Para el conteo del número de este nodo solo se tienen en cuenta los nodos extremos de las barras, puesto que en este software solo se pueden aplicar condiciones de contorno a los extremos de las barras. Así, una

barra sola, aunque esté dividida en un gran número de elementos, solo admitirá para `nNodo` los valores 1 ó 2.

La segunda línea ejecuta el comando `SetCC`, que especifica las propiedades de la condición de contorno, en el siguiente orden: un nombre, en forma de cadena de caracteres; un número de condición de contorno, según sea la primera introducida, la segunda, etc; los valores de desplazamientos y giro conocidos, siendo un valor desconocido introducido como `NaN(1, 1)`; los valores de rigidez, en caso de existir algún apoyo semirrígido; por último, la orientación del apoyo, de ser no concordante.

Por último, se guarda la condición de contorno creada en el proyecto mediante el comando `SetCC` asociado al proyecto de identificador `ID`.

Después de introducir las condiciones de contorno se puede, de manera opcional, dibujar el esquema de la estructura creada mediante el comando:

```
ID.Draw(h);
```

Donde `h` es un objeto tipo `axes`, que puede ser inicializado por ejemplo mediante `h = axes()`. Finalmente, y antes de lanzar los cálculos, queda por introducir la carga en la estructura. Se diferenciará a partir de ahora el problema estático del problema dinámico

C. Cálculo estático

Para realizar un cálculo estático es preciso indicar, en primer lugar, una serie de cargas estáticas que soporta la estructura creada anteriormente. Todas ellas se crean empleando los mismos comandos:

```
F = Carga(nombre, número, tipo, N, posicion, valor);  
ID = ID.SetF(F);
```

En todos los casos se ha de explicitar un `nombre` y un `número` para la carga creada mediante el comando `Carga`. El resto de parámetros dependen del tipo de fuerza que se cree, detallándose estos a continuación. Finalmente, una vez la carga creada, se guarda en el proyecto de identificador `ID` mediante el comando `SetF`.

- Carga nodal (`'nodal'`). Hay que explicitar en `N` el número del nodo (solo extremos de barras) que afecta, en `posicion` indicar el valor 0, y en `valor` un vector de tres elementos indicando las componentes en coordenadas globales de la fuerza aplicada en los ejes X e Y y el momento en Z (`[Fx Fy Mz]`).
- Carga puntual (`'int_punt'`). Se indica en `N` el número de barra que afecta, en `posicion` la coordenada local relativa (entre 0 y 1) en que

se ubica dicha fuerza, y en `valor` las componentes de la fuerza en coordenadas locales.

- Carga distribuida (`'int_dist'`). Se indica en `N` el número de barra a la que afecta y en `posición` un vector de dos componentes, siendo el primero allí donde empieza la distribución y el segundo donde termina. Ambos valores se indican relativos (de 0 a 1). En `valor` se indica nuevamente el valor de la fuerza descompuesta en sus tres componentes, en coordenadas locales.
- Carga térmica (`'termica'`). Se indica en `N` el número de barra afectada. En `posición` se indicará 1 si se trata de una carga térmica transversal y 0 si es longitudinal. Finalmente, en `valor` se introducirá un vector de dos componentes, siendo la primera la temperatura en la parte superior o izquierda de la barra (*vista en coordenadas locales*) y la segunda, la temperatura de la zona inferior o derecha.
- Defecto de forma (`'def_form'`). Se indica en `N` el número de barra afectada. En `posición` es indiferente el valor que se indique, recomendándose el valor 0. Finalmente, en `valor` hay que indicar el defecto de forma que existe en el extremo derecho de la barra (*vista en coordenadas locales*).

D. Cálculo dinámico

Para realizar un cálculo dinámico es preciso especificar al menos una carga dinámica, que de forma general es variable en el tiempo. Las cargas dinámicas contempladas en este software son las presentadas a continuación.

- Carga puntual móvil constante. Se crea una carga de este tipo mediante la orden

```
IDf = CargaDin(nombre, nF, 'punt_cte', barra, x0, t0, v, F);
```

Donde `nombre` se establece por el usuario, `nF` es el número de la fuerza que también ha de ser establecido por el usuario, `'punt_cte'` indica que se trata de una fuerza puntual constante, `barra` indica la barra a la que afecta, `x0` es la coordenada local de “aparición” de la fuerza y `t0` el instante en que “aparece” dicha fuerza. Finalmente, `v` es la velocidad de recorrido por la barra y `F` el módulo de la misma.

- Carga puntual móvil sinusoidal. Se crea una carga de este tipo mediante la orden

```
IDf = CargaDin(nombre, nF, 'punt_sin', barra, x0, t0, v, F, w, fi);
```

Donde 'punt_sin' indica que se trata de una fuerza puntual sinusoidal y F , w y f_i son los parámetros de la expresión sinusoidal:

$$F(t)=F \cdot \sin(w t - f_i)$$

- Sistema masa-resorte-amortiguador móvil. Se crea una carga de este tipo mediante la orden

```
IDf = CargaDin(nombre,nF,'MCK',barra,x0,t0,v,m,c,k);
```

Donde m , c y k son los parámetros del subsistema masa (m) – resorte (k) –amortiguador (c).

- Sistema de péndulo invertido con apoyo doble sobre base elástica móvil. Se crea una carga de este tipo mediante el comando

```
IDf = CargaDin(nombre,nF,'pend2inv',barra,x0,t0,v,m,c,k,L,h);
```

Donde L es la longitud de la pierna del peatón y h es la altura de su centro de masas en la fase de doble apoyo del paso.

Es interesante notar que se pueden crear cargas “estáticas” sin más que establecer la velocidad de avance v nula y la posición inicial x_0 la posición deseada dentro de la barra. Para cada carga hay que añadir un comando adicional, que es el que guarda la carga dentro del proyecto.

```
ID = ID.SetFd(IDf);
```

Una vez todas las cargas creadas, es preciso crear el vector de condiciones iniciales. Si el modelo contiene un total de N_t grados de libertad, de los cuales N_i están impedidos por las condiciones iniciales el número efectivo de grados de libertad del modelo es de $N = N_t - N_i$ y la dimensión del vector de condiciones iniciales es $\dim(vCI) = 2N = 2(N_t - N_i)$, puesto que se incluyen condiciones iniciales en posición y velocidad. Es especialmente importante este vector cuando se incluye el subsistema de péndulo invertido sobre base elástica. La condición inicial de la coordenada asociada a la masa en relación a la condición inicial de la coordenada de la base establecerá la condición inicial del ángulo que forma el péndulo doble con la horizontal, que conviene que sea diferente de cero.

Antes de lanzar el cálculo, como sucedía en el caso estático, es necesario crear un step, que contenga toda la información que se empleará en el cálculo. La creación del step se realiza mediante el comando

```
IDs =  
IDs.newStep(name,tipo,ptos,nodos,elems,bars,MAT,SEC,CC,F,t0,pt,tf,X0);
```

El primer argumento es un nombre que lo identifique; el segundo es el tipo de step que crea, 'static' para cálculo estático, 'dinam' para cálculo dinámico y 'modal' para análisis modal de la estructura; los siguientes son

vectores con los número de puntos (nodos entre barras), nodos, elementos y barras de la estructura; a continuación, vectores con los número de materiales, secciones condiciones de contorno y fuerzas que se desean incluir. Por último, información sobre el vector de tiempos (tiempo inicial, t_0 , paso temporal, p_t , e instante final, t_f). El último argumento son las condiciones de contorno, X_0 .

El cálculo se realizará únicamente teniendo en cuenta la información proporcionada al step. De esta forma, es posible crear multitud de barras, condiciones de contorno y cargas, y realizar cálculos de forma parcial a subconjuntos de los mismos.

E. Resultados

El último paso es lanzar los cálculos y obtener los resultados. Los cálculos se lanzan con una orden muy sencilla:

```
ID = ID.GetResults(n,tipo);
```

Donde n es el número de step que se desea resolver (los steps se numeran por orden de creación) y $tipo$ puede ser 'Static', 'Dinam' o 'Modal', en función del tipo de step que se trate. Este es el comando que más se tarda en computar, pues lanza todo el ensamblaje del problema y los solvers necesarios para obtener la solución. Una vez ha finalizado, se puede proceder a obtener los resultados. Aquí se distinguen, pues, tres situaciones: caso estático, caso dinámico y caso modal.

E.1. Resultados del cálculo estático

Por ahora, los resultados del cálculo estático son muy limitados, pues únicamente se muestra la deformada de la estructura. Para ello, se emplea el siguiente comando:

```
ID = ID.GetResults(n, 'Static');  
ID.DrawRES(h, 'deform', (factor));
```

Donde n se corresponde al número de step que se va a resolver y h es nuevamente un objeto de tipo axes, fácilmente inicializable mediante $h=axes()$; . Se puede incluir de forma opcional un factor de escala para apreciar con más detalle la deformada. La figura obtenida se puede tratar como cualquier otra figura de Matlab, pudiéndose añadir título, leyenda, etc.

E.2. Resultados del cálculo dinámico

La salida del cálculo dinámico es mucho más amplia. Todo se almacena en un objeto de la clase ResDin, y se puede acceder directamente empleando

la sintaxis adecuada. Se detalla a continuación cómo proceder para cada tipo de información.

- *Deformada instantánea.* Todos los valores de desplazamientos de todos los grados de libertad a lo largo del tiempo se almacenan en la propiedad **Uest** de la clase ResDin. Es decir, para acceder al valor de un grado de libertad determinado en un instante determinado se emplea `ID.RED(n).Uest(t, gdl)`. ID es el identificador del proyecto que se viene manejando desde el principio; RED es la abreviatura de Resultado Dinámico, que es un vector de objetos de la clase ResDin que almacenan los resultados; n es el número de cálculo realizado; Uest es la matriz de desplazamientos de los grados de libertad; t es el instante de tiempo deseado y gdl el grado de libertad deseado. De forma excepcional se puede obtener la deformada en el tiempo de un grado de libertad determinado ejecutando la función

`ID.RED(n).PLOT(gdl);`

Donde gdl es el grado de libertad que se desea visualizar en el tiempo.

- *Velocidades instantáneas.* De forma análoga a las deformadas, se pueden obtener las velocidades instantáneas de cada grado de libertad. Estas velocidades se almacenan en la propiedad **dUest(t, gdl)** de la clase ResDin.
- *Aceleraciones instantáneas.* De la misma forma, las aceleraciones instantáneas se almacenan en la propiedad **d2Uest(t, gdl)**.
- *Vector de tiempos.* Almacenado en la propiedad **T** de la clase ResDin.
- *Fuerza de contacto peatón/estructura.* Almacenado en la propiedad **Fdin** de la clase ResDin. Se crea una columna por cada fuerza dinámica que interviene en el problema. Contiene tantas filas como pasos temporales se han empleado para resolverlo.
- *Esfuerzos en la estructura.* Se almacenan los esfuerzos de la estructura a lo largo del tiempo en la matriz de dimensión 3 **ESF**, propiedad de la clase ResDin. Esta matriz contiene un total de 6 filas, correspondientes a los esfuerzos de un elemento. Cada fila tiene tantas columnas como pasos temporales tiene el problema. Finalmente, la variable contiene tantas matrices como elementos tiene la estructura calculada. Así, para acceder al valor de un esfuerzo **F** de un elemento concreto **E** en un cierto instante de tiempo **t** se emplea el comando `ID.RED(n).ESF(F, t, E)`.
- *Fuerzas de empotramiento.* Se pueden obtener asimismo las fuerzas de empotramiento de cada elemento en función del tiempo,

almacenadas en **Femp**, otra propiedad de la clase ResDin. La estructura de esta variable es la misma que **ESF**.

- *Frecuencias propias*. Puesto que se incluyen cargas inducidas por subsistemas con masa y rigidez propia que se desplazan por la estructura, las frecuencias propias del sistema son susceptibles de cambiar a lo largo del tiempo. Se puede analizar este fenómeno gracias a esta propiedad, **f_p**, que almacena las frecuencias propias del sistema completa a lo largo del tiempo. Para acceder a una frecuencia determinada f (están ordenadas de menor a mayor) en un instante determinado t se emplea `ID.RED(n).fp(f,t)`.
- *Modos propios*. Igual que las frecuencias, se incluyen los modos propios en la propiedad **MOD** de la clase ResDin. Se trata de otra matriz de dimensión 3, donde cada matriz sucesiva almacena por columnas los modos propios en un instante de tiempo determinado. Así, para acceder al modo N en un instante de tiempo t se emplea `ID.RED(n).MOD(:,N,t)`.

E.3. Resultados del cálculo modal

Como resultados del cálculo modal se muestran por pantalla, al completarse el cálculo, las frecuencias y modos propios de la estructura. Se puede solicitar, además, dibujar un modo propio determinado mediante el comando:

```
ID.RED(n).Draw(h,'mode',N,(factor));
```

Donde h es un objeto de la clase axes, fácilmente inicializable mediante `h=axes()`; , 'mode' indica que se va a dibujar un modo propio, N indica el número del modo propio y de forma opcional se puede indicar un factor de escala factor que si no se especifica se emplea el factor por defecto 1.

Anexo III. Extracto del código del programa en Matlab

En este último anexo se expondrá un extracto del código de Matlab, cuya programación se ha presentado en el capítulo 4. El software se ha escrito empleando programación orientada a objetos. Por esta razón, está articulado en una serie de clases, cada una correspondiente aproximadamente a una parte del problema dinámico. Así, se han elaborado las siguientes clases:

- Proyecto: un objeto de esta clase contiene toda la información de todo el problema, desde geometría y condiciones de contorno hasta resultados. Al guardar un problema, se guarda un objeto de esta clase.
- Estructura: contiene información acerca de barras, nodos y sus materiales y secciones asociados, así como métodos para calcular las matrices elementales. Suministra toda la información geométrica a la hora de operar los cálculos.
- Material: Contiene la información relativa a un material (en esta versión, densidad, módulo de Young, coeficiente de Poisson y módulo de cortadura)
- Sección: Contiene la información relativa a una sección, a saber área, momento cuadrático de inercia y canto.
- Nodo: un objeto que contiene información acerca de su posición, de la(s) barra(s) a la(s) que pertenece, del (los) elemento(s) al (los) que pertenece, así como numeración local dentro de los mismos.
- Barra: posee información de la geometría de la barra así como del material y sección de la misma y de los dos nodos que la limitan.
- Elemento: posee información de la geometría del mismo, así como de su material y sección. Además contiene información de a qué barra pertenece, su numeración local y qué nodos lo limitan.
- Condición de contorno: posee información acerca del nodo afectado y sobre qué grados de libertad son conocidos (en coordenadas nodales, si fuera el caso) así como de la eventual rigidez de un apoyo elástico.
- Carga: contiene toda la información referente a una carga. Además de su tipo, contiene todos los parámetros necesarios para llevar a cabo el cálculo en su correspondiente etapa, según se expuso en el capítulo 4 del presente trabajo.
- Step: clase que agrupa toda la información que se va a emplear en el cálculo, que puede ser un subconjunto de aquellos objetos creados dentro del proyecto.

- Resultados: clase que incluye el step que se ha calculado junto con los resultados que proporciona. Contiene métodos para el post-procesado de dichos resultados.

Se presenta a continuación el código de la clase Step dinámico (denominado CalculoDinamico), que incluye la función de actualización del problema, que ubica al peatón en cada instante de tiempo y calcula la fuerza que actúa en la viga en cada instante.

Step

```

% Esta clase contiene toda la información necesaria para llevar a término
% el análisis dinámico solicitado. Requiere la siguiente información:
%
% - EST: información de la estructura
% - F, CC: información de cargas y condiciones de contorno
% - MAT, SEC: información de materiales y secciones
% - Kest, Mest, Cest: matrices de la estructura
% - vCC: vector condiciones de contorno
% - Kll, Mll, Cll: matrices post-aplicación de las CC
% - T0, pT, Tf: tiempo inicial, paso temporal y tiempo final
%
% Se aplica el método de integración directa a todos los cálculos
%

classdef CalculoDinamico
    properties (SetAccess = private)
        name;
        EST; % Estructura para ensayo
        CC; % Condiciones de contorno de la misma
        F; % Cargas que le afectan
        MAT; % Materiales involucrados
        SEC; % Secciones involucradas
        Kest; % Matriz de rigidez de la estructura sin CC
        Mest; % Matriz de masa sin CC
        Cest; % Matriz de amortiguamiento sin CC
        vCC; % Vector de condiciones de contorno
        Kll; % Matriz de rigidez con CC
        Mll; % Matriz de masa con CC
        Cll; % Matriz de amortiguamiento con CC
        Vll; % Matriz de modos propios de la estructura post-CC
        fll; % Vector de frecuencias propias de la estructura post-CC
        kll; % Matriz de rigidez modal post-CC
        mll; % Matriz de masa modal post-CC
        cll; % Matriz de amortiguamiento modal post-CC
        T0; % Instante inicial (s)
        pT; % Paso temporal de simulación (s)
        TF; % Instante final (s)
        X0; % Condiciones iniciales
        k; % Número de gdl extra
        avanT; % Vector de tiempos de pasada de las fuerzas móviles
        posiX; % Posición local de los nodos por los que pasan las fzas móviles.
    end

    methods
        function obj = CalculoDinamico(name,puntos,nodos,elems,barras,CC,F,...
            ...MAT,SEC,t0,pt,tf,X0)
            obj.name = name;
            obj.EST = Estructura(length(puntos),length(nodos),length(elems),...
                ...length(barras),puntos,nodos,elems,barras);
            obj.CC = CC;
            obj.F = F;
            obj.MAT = MAT;
            obj.SEC = SEC;
            obj.T0 = t0;
            obj.pT = pt;
            obj.TF = tf;
            obj.X0 = X0;
    end
end

```

```

end

function obj = CalKest(obj)
    obj.EST.CalKest(obj.MAT,obj.SEC);
    obj.Kest = obj.EST.Kest;
end

function obj = applyCC(obj)
    % Cálculo del vector Condiciones de Contorno (vCC) y aplicación
    % a las matrices de masa y rigidez. Se aplica además a la
    % matriz de amortiguamiento, por si no se desea construir
    % ninguna a posteriori, aunque esto es posible sobreescribirlo
    % mediante la función adecuada.

    obj.vCC = zeros(obj.EST.Nnodos*3,2);

    for i = 1:length(obj.CC)
        if obj.CC(i).n ~= 0
            n = obj.EST.puntos(obj.CC(i).n).n;
            u = obj.CC(i).u;
            obj.vCC(3*n-2:3*n,1) = isfinite(u);
            obj.vCC(3*n-2:3*n,2) = u;
        end
    end

    obj.Kll = obj.Kest(obj.vCC(:,1)==0,obj.vCC(:,1)==0);
    obj.Mll = obj.EST.Mest(obj.vCC(:,1)==0,obj.vCC(:,1) == 0);
end

function [obj,p,V] = Modal(obj,Nmodos)
    % Esta función aplica a la estructura post-CC
    % Obtención de las propiedades modales de la estructura, modos
    % y frecuencias propias, y cálculo de las matrices modales
    % asociadas.

    [obj.Vll,obj.fll] = eig(obj.Kll,obj.Mll);
    obj.kll = obj.Vll'*obj.Kll*obj.Vll;
    obj.mll = obj.Vll'*obj.Mll*obj.Vll;
    obj.fll = sqrt(diag(obj.fll))/(2*pi);
    auxV = obj.Vll; auxF = obj.fll;
    obj.fll = sort(obj.fll);

    for i = 1:length(obj.fll)
        obj.Vll(:,i) = auxV(:,find(auxF==obj.fll(i)));
    end
    obj.fll = obj.fll(1:Nmodos);
    obj.Vll = obj.Vll(:,1:Nmodos);

    % Reconstitución de los modos propios, con las condiciones de
    % contorno.
    V = zeros(size(obj.Kest,1),Nmodos);

    V(obj.vCC(:,1)==0,:) = obj.Vll;
    p = obj.fll;
end

function obj = calCmod(obj,ksi)
    % obj = calCmod(obj,ksi)
    % Calcula una matriz de amortiguamiento a partir de la
    % información de amortiguamiento modal (valor de ksi en tanto
    % por 1 de amortiguamiento de cada modo). Si solo se introduce
    % un valor de ksi, el método interpreta que es el mismo para
    % todos los modos.

    [obj,p,V] = obj.Modal(length(obj.Kll)); % Cálculo de los modos y f
    % frecuencias propias

    Ksi = zeros(length(obj.Kll),1); % Aquí van a ir todos los
    % amortiguamientos modales

    if length(ksi) == 1
        Ksi(1:length(Ksi)) = ksi; % El mismo para todos los modos, forma
        % abreviada
    elseif length(ksi) > length(Ksi)
        Ksi(1:length(Ksi)) = ksi(1:length(Ksi));
    end

```

```

else
    Ksi(1:length(ksi)) = ksi; % Uno diferente para cada modo
end

obj.c11 = diag(2*Ksi.*obj.f11*2*pi); % Cálculo de la matriz modal de
                                     % amortiguamiento
obj.C11 = obj.V11'\(obj.c11/obj.V11); % Cálculo y almacenamiento de
la
                                     % matriz de amortiguamiento del
sistema
end

function [obj,Uest,dUest,T] = CalEST(obj)
T = obj.T0:obj.pT:obj.TF;
len = length(obj.K11);

if ~isempty(obj.F)
    % Problema forzado.
    obj.k = 0; % Número de gdl extra

    % Adición de tantos gdl como sea necesario a las matrices.
    for i = 1:length(obj.F)
        if strcmp(obj.F(i).type,'MCK')
            obj.k = obj.k + 1;
            obj.M11(len+obj.k,len+obj.k) = obj.F(i).m;
            obj.K11(len+obj.k,len+obj.k) = obj.F(i).k;
            obj.C11(len+obj.k,len+obj.k) = obj.F(i).c;
            obj.F(i) = obj.F(i).setCo(obj.k,0);
        elseif strcmp(obj.F(i).type,'pend2inv')
            obj.k = obj.k + 1;
            obj.M11(len+obj.k,len+obj.k) = obj.F(i).m;
            obj.K11(len+obj.k,len+obj.k) = 0;
            obj.C11(len+obj.k,len+obj.k) = 0;
            obj.k = obj.k + 1;
            obj.M11(len+obj.k,len+obj.k) = -1;
            obj.M11(len+obj.k,len+obj.k-1) = 1;
            obj.K11(len+obj.k,len+obj.k) = 0;
            obj.K11(len+obj.k-1,len+obj.k) = obj.F(i).k;
            obj.C11(len+obj.k,len+obj.k) = 0;
            obj.C11(len+obj.k-1,len+obj.k) = obj.F(i).c;
            obj.F(i) = obj.F(i).setCo(obj.k-1,obj.k);
        end
    end

    % Condiciones iniciales
    if length(obj.X0) == 1
        obj.X0 = obj.X0*ones(2*size(obj.K11,1),1);
    elseif length(obj.X0) > 1 && length(obj.X0) < len+obj.k
        errordlg('El vector de condiciones de contorno no está...
...completo.');
```

```

        if x0 <= obj.posiX(i,j)
            obj.avanT(i,j) = 0;
        else
            obj.avanT(i,j) = (x0 - obj.posiX(i,j))/abs(c);
        end
    end
end
end
options = odeset('Refine',3,'Stats','on','AbsTol',2e-6);
[T,Q] = ode15s(@(t,x) obj.solvefun(t,x,len,obj.M11,obj.C11,...
    ...obj.K11,obj.F,obj.avanT,obj.posiX,obj.k),T,obj.X0,options);

% Reconstrucción del problema completo, con los gdl
% conocidos:
Uest = zeros(length(T),3*obj.EST.Nnodos + obj.k);
Uest(:,obj.vCC(:,1)==0) = Q(:,1:len);
Uest(:,3*obj.EST.Nnodos+1:3*obj.EST.Nnodos+obj.k) = ...
    ...Q(:,len+1:len+obj.k);

dUest = zeros(length(T),3*obj.EST.Nnodos + obj.k);
dUest(:,obj.vCC(:,1)==0) = Q(:,len+obj.k+1:2*len+obj.k);
dUest(:,3*obj.EST.Nnodos+1:3*obj.EST.Nnodos+obj.k) = ...
    ...Q(:,2*len+obj.k+1:2*len+2*obj.k);

else
    % Problema de condiciones iniciales
    options = odeset('Refine',3,'Stats','on','AbsTol',2e-6);
    [T,Q] = ode15s(@(t,x) obj.solvefun(t,x,len,obj.M11,obj.C11,...
        ...obj.K11,0,0,0,0),T,obj.X0,options);

    % Reconstrucción del problema completo, con los gdl
    % conocidos:
    Uest = zeros(length(T),3*obj.EST.Nnodos);
    Uest(:,obj.vCC(:,1)==0) = Q(:,1:len);
end
end

function d2q = solvefun(obj,t,x,len,M,mC,K,F,avanT,posiX,k)
    % Función empleada por el solver ode15s para resolver el
    % problema.

    FsinCC = zeros(3*obj.EST.Nnodos+k,1);

    % Reconstrucción de x para mejor uso del vector
    desp = zeros(3*obj.EST.Nnodos+k,1);
    vel = zeros(3*obj.EST.Nnodos+k,1);
    desp(obj.vCC(:,1) == 0) = x(1:len);
    vel(obj.vCC(:,1) == 0) = x(len+k+1:2*len+k);
    if k ~= 0 % Aquí van las condiciones iniciales de los gdl extra
        desp(3*obj.EST.Nnodos+1:3*obj.EST.Nnodos+k) = x(len+1:len+k);
        vel(3*obj.EST.Nnodos+1:3*obj.EST.Nnodos+k) = ...
            ...x(2*len+k+1:2*len+2*k);
    end

    for i = 1:length(F)
        % ¿Dónde está el peatón en cada instante de tiempo?
        quedan = posiX(i,avanT(i,:)>t);
        if ~isempty(quedan) && t >= F(i).t(1)
            nk = find(posiX(i,:) == quedan(1)); % Próximo nodo a superar
                                                % (numeración local)

            if nk-1 > 0
                Nele = nk - 1; % Elemento en que nos encontramos
                                % (numeración local)
                a = F(i).x0 + F(i).v*(t-F(i).t) - posiX(i,nk-1);
                % Distancia al nodo izquierdo, coordenada 'a'
            else
                Nele = 1;
                a = 0;
            end

            % Coeficientes A B C D de interpolación
            Le = obj.EST.barras(F(i).n).Lelems(Nele);
            A = 1.0 - 3*(a/Le)^2 + 2*(a/Le)^3;
            B = 3*(a/Le)^2 - 2*(a/Le)^3;
            C = a - 2*(a^2)/Le + a*(a/Le)^2;
        end
    end
end

```

```

D = -(a^2)/Le + a*(a/Le)^2;

% Matriz de cambio de base para pasar de coordenadas
% locales a coordenadas globales las fuerzas
th = obj.EST.barras(F(i).n).th*pi/180;
cth = cos(th); sth = sin(th);
T = [cth sth 0 0 0 0;
     -sth cth 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 cth sth 0;
     0 0 0 -sth cth 0;
     0 0 0 0 0 1];

% Nodos extremos del elemento al que afecta la fuerza
n1 = obj.EST.barras(F(i).n).elems(Nele).nodos(1).n;
n2 = obj.EST.barras(F(i).n).elems(Nele).nodos(2).n;

% Cálculo de la fuerza
switch F(i).type
case 'punt_cte'
    P = F(i).F;
case 'punt_sin'
    P = F(i).F*sin(F(i).w*(t-F(i).t) - F(i).fi);
case 'punt_setra'
    P = -F(i).m*9.81*(1+0.4*sin(F(i).w*2*pi*(t-F(i).t))...
        ... + 0.1*sin(F(i).w*4*pi*(t-F(i).t) - pi/2)...
        ... + 0.1*sin(F(i).w*6*pi*(t-F(i).t) - pi/2));
case 'MCK'
    w = desp(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col);
    v = A*desp(3*n1-1) + B*desp(3*n2-1) + C*desp(3*n1)...
        ... + D*desp(3*n2);
    dw = vel(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col);
    dv = A*vel(3*n1-1) + B*vel(3*n2-1) + C*vel(3*n1)...
        ... + D*vel(3*n2);
    P = F(i).k*(w-v) + F(i).c*(dw-dv) - 48*9.81;

    FsinCC(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col) = - F(i).m*9.81;

    modK = zeros(1,3*obj.EST.Nnodos);
    modC = zeros(1,3*obj.EST.Nnodos);
    modM = zeros(1,3*obj.EST.Nnodos);
    modK(3*n1-2:3*n1) = [0,-F(i).k*A,-F(i).k*C];
    modK(3*n2-2:3*n2) = [0,-F(i).k*B,-F(i).k*D];
    modC(3*n1-2:3*n1) = [0,-F(i).c*A,-F(i).c*C];
    modC(3*n2-2:3*n2) = [0,-F(i).c*B,-F(i).c*D];

    M(len + F(i).col,1:len) = modM(obj.vCC(:,1) == 0);
    K(len + F(i).col,1:len) = modK(obj.vCC(:,1) == 0);
    mC(len + F(i).col,1:len) = modC(obj.vCC(:,1) == 0);
case 'pend2inv'
    v = A*desp(3*n1-1) + B*desp(3*n2-1) + C*desp(3*n1)...
        ... + D*desp(3*n2);
    dv = A*vel(3*n1-1) + B*vel(3*n2-1) + C*vel(3*n1)...
        ... + D*vel(3*n2);
    w = desp(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col);
    dw = vel(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col);
    ksi = desp(3*obj.EST.Nnodos + F(i).co2);
    dksi = vel(3*obj.EST.Nnodos + F(i).co2);

    P = F(i).k*(ksi-v) + F(i).c*(dksi-dv);

    FsinCC(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col) = - F(i).m*9.81;

    modK = zeros(1,3*obj.EST.Nnodos);
    modC = zeros(1,3*obj.EST.Nnodos);
    modM = zeros(1,3*obj.EST.Nnodos);
    modK(3*n1-2:3*n1) = [0 -F(i).k*A -F(i).k*C];
    modK(3*n2-2:3*n2) = [0 -F(i).k*B -F(i).k*D];
    modC(3*n1-2:3*n1) = [0 -F(i).c*A -F(i).c*C];
    modC(3*n2-2:3*n2) = [0 -F(i).c*B -F(i).c*D];

    M(len + F(i).col,1:len) = modM(obj.vCC(:,1) == 0);
    K(len + F(i).col,1:len) = modK(obj.vCC(:,1) == 0);
    mC(len + F(i).col,1:len) = modC(obj.vCC(:,1) == 0);

```

```

% Posición del péndulo (FI)
FI = (2/F(i).p)*(w - F(i).h - ksi);

if FI >= 0
    dFI = (dw - dksi)/(F(i).p/2 - F(i).h*FI);
    d2FI = (-F(i).p*9.81/2 + ...
            ... 9.81*F(i).h*FI)/F(i).L^2;
    fFI = -(F(i).h + F(i).p*FI/2)*dFI^2 ...
            ...+ (F(i).p/2 - F(i).h*FI)*d2FI;
else
    dFI = (dw - dksi)/(F(i).p/2 + F(i).h*FI);
    d2FI = (F(i).p*9.81/2 + 9.81*F(i).h*FI)/F(i).L^2;
    fFI = -(F(i).h - F(i).p*FI/2)*dFI^2 ...
            ... + (F(i).p/2 + F(i).h*FI)*d2FI;
end

FsinCC(3*obj.EST.Nnodos + F(i).co2) = fFI;
end

% Sentido físico: si P es positivo, no hay carga
if P > 0 || (nk-1) <= 0
    P = 0;
end

femp = [0;
        -P*((Le-a)^2/Le^3)*(Le+2*a);
        -P*a*(Le-a)^2/Le^2;
        0;
        -P*(a^2/Le^3)*(Le+2*(Le-a));
        P*(a^2)*(Le-a)/Le^2];
feq = -T'*femp;

% Adición al vector FsinCC
FsinCC(3*n1-2:3*n1) = FsinCC(3*n1-2:3*n1) + feq(1:3);
FsinCC(3*n2-2:3*n2) = FsinCC(3*n2-2:3*n2) + feq(4:6);
elseif isempty(quedan) && t >= F(i).t(1)
    switch F(i).type
        case 'MCK'
            FsinCC(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col) = - F(i).m*9.81;
        case 'pend2inv'
            w = desp(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col);
            dw = vel(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col);
            ksi = desp(3*obj.EST.Nnodos + F(i).co2);
            dksi = vel(3*obj.EST.Nnodos + F(i).co2);

            FsinCC(3*obj.EST.Nnodos + F(i).col) = - F(i).m*9.81;
            % El asunto de FI
            FI = (2/F(i).p)*(w - F(i).h - ksi);

            if FI >= 0
                dFI = (dw - dksi)/(F(i).p/2 - F(i).h*FI);
                d2FI = (-F(i).p*9.81/2 + ...
                        ... 9.81*F(i).h*FI)/F(i).L^2;
                fFI = -(F(i).h + F(i).p*FI/2)*dFI^2 ...
                        ... + (F(i).p/2 - F(i).h*FI)*d2FI;
            else
                dFI = (dw - dksi)/(F(i).p/2 + F(i).h*FI);
                d2FI = (F(i).p*9.81/2 + 9.81*F(i).h*FI)/F(i).L^2;
                fFI = -(-F(i).h + F(i).p*FI/2)*dFI^2...
                        ... + (F(i).p/2 + F(i).h*FI)*d2FI;
            end

            FsinCC(3*obj.EST.Nnodos + F(i).co2) = fFI;
        end
    end
end

% Con todas las fuerzas contenidas en el vector FsinCC, que es
% el vector de fuerzas en el instante de tiempo dado, se
% obtiene el vector de fuerzas en el espacio de estado:
G = zeros(2*len+2*k,1);
G(len+k+1:2*len+k) = FsinCC(obj.vCC(:,1)==0);
if k ~= 0
    G(2*len+k+1:2*len+2*k) = ...
        ...FsinCC(3*obj.EST.Nnodos+1:3*obj.EST.Nnodos+k);
end

```

```

end

R = [eye(size(K)) zeros(size(K)); zeros(size(K)) M];
S = [zeros(size(K)) -eye(size(K)); K mC];
d2q = R \ (G - S*x);
end

function Draw(obj,h)
% Función que dibuja el proyecto (estructura, condiciones de
% contorno y cargas) en los axes h especificados.

% Dibujo de la estructura
Nbar = obj.EST.Nelems;

for i = 1:Nbar
[a,b] = obj.EST.elems(i).GetNodos();
[x1,y1] = a.GetCoord();
[x2,y2] = b.GetCoord();
plot(h,[x1,x2],[y1,y2]); hold on;
end

% Tamaño característico de la estructura
x = get(h,'XLim');
y = get(h,'YLim');
tamC = sqrt((x(2)-x(1))^2 + (y(2)-y(1))^2);

% Dibujo de las condiciones de contorno
for i = 1:length(obj.CC)
[u,k,th] = obj.CC(i).GetPCC();
type = obj.CC(i).GetType();
n = obj.EST.puntos(obj.CC(i).n).n;
if n ~= 0
[xn,yn] = obj.EST.nodos(n).GetCoord();
DrawSymbol(h,type,xn,yn,th,0.05*tamC,0,[0 0.6 0]);
end
end

% Ajuste de ejes
delta = max([x(2)-x(1),y(2)-y(1)]); % Distancia entre límites
delta = delta+0.2*tamC; % Aire por los lados del dibujo
Xmid = (x(2)+ x(1))/2;
Ymid = (y(2) + y(1))/2;

set(h,'XLim',[Xmid - delta/2, Xmid + delta/2]);
set(h,'YLim',[Ymid - delta/2, Ymid + delta/2]);
end
end
end

```


Bibliografía

Libros

- [1] FRÝBA, L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Ed. Thomas Telford. Tercera edición, año 1999. ISBN: 0-7277-2741-9.
- [2] SHRIKHANDE, M. *Finite element method and computational structural dynamics*. PHI Learning Pvt. Ltd. 2014.

Artículos

- [3] QIN, J.W et al. *Pedestrian-bridge dynamic interaction, including human participation*. Journal of Sound and Vibration. 332 (2013), 1107 - 1124.
- [4] NEVES, S.G.M et al. *A direct method for analyzing the vertical vehicle-structure interaction*. Engineering Structure, 34 (2012), 414 - 420.
- [5] WHITTINGTON, B.R., THELEN, D.G. *A simple mass-spring model with roller feet can induce the ground reactions observed in human walking*. Journal of Biomechanical Engineering. 131 (2009), 011013.1 - 011013.8.

Conferencias

- [6] PAVIC, A. *Vertical crowd dynamic action on footbridges: review of design guidelines and their application*. 4th Footbridge International Conference (2011), Varsovia, Polonia.
- [7] RACIC, V., BROWNJOHN, J.M.W., PAVIC, A.. *Random model of vertical walking force signals*. Proceedings of the SEM IMAC XXX Conference (2012). Society of Experimental Mechanics, Jacksonville, EEUU.
- [8] ZIANOVIC, M., PAVIC, A. *Dynamic response of footbridges due to vertical load models of pedestrians*. Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURO DYN 2011, 1027 - 1034.
- [9] ZHANG, L., et al. *Stiffness and viscous damping of the human leg*. Proceedings of the 24th Anniversary Meeting of the American Society of Biomechanics, Chicago, IL. 2000.

Apuntes de asignaturas

- [10] ARNOULT, E. *Dynamique des structures. Notes des cours*. Université de Technologie de Compiègne, año académico 2013/2014.

[11] DAUCHEZ, N. *Vibrations des milieux continus. Notes des cours*. Université de Technologie de Compiègne, año académico 2013/2014.

[12] HERRÁEZ, M. *Vibraciones de sistemas de un grado de libertad*. Apuntes de Diseño de Máquinas. Universidad de Valladolid, año académico 2012/2013.

[13] LARDEUR, P., DRUESNE, F. *Modélisation des structures par éléments finis. Notes des cours*. Université de Technologie de Compiègne, año académico 2013/2014

[14] *Control de Vibraciones*. Apuntes de Elementos de Máquinas y Vibraciones. Departamento de Ingeniería Mecánica, energética y de materiales. Universidad de Navarra.

Normativa

[15] Service d'études techniques des routes et autoroutes. *Technical guide : footbridges. Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading*. Octubre 2006.

Software

[16] Documentación de usuario de Matlab R2014a