Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Estudio de las soluciones de las ecuaciones lineales en q-diferencias

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Investicación en Matemáticas.

Valladolid, 4 de julio de 2016

Autora: Carmen Eugenia Velasco Lorenzo
Tutor: Jose Cano Torres

Índice general

Introducción

Clásicamente hay tres tipos de ecuaciones funcionales de particular importancia: ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y ecuaciones en q-diferencias.

La importancia de las ecuaciones en diferencias y en q-diferencias radica en el hecho de que toda ecuación funcional sobre la esfera de Riemann del tipo

$$F(z, h(z), h(T(z)), \ldots, h(T^{(n)}(z))) = 0, \tag{1}$$

siendo $T(z)$ un automorfismo de la esfera de Riemann, se pueden transformar, mediante un cambio de variable en una ecuación o bien en diferencias o bien en q-diferencias. Más precisamente, por ser $T(z)$ un automorfismo de la esfera de Riemann es una transformación de Möebius,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1.$$

Por lo tanto $T(z)$ es o bien la identidad o bien tiene un único punto fijo o bien tiene dos puntos fijos. Si T es la identidad la ecuación (1) es una ecuación algebraica. Si T tiene un único punto fijo, existe una homografía $h : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tal que $w = h(z)$, y $h \circ T \circ h^{-1}(w) = w + 1$. Y por lo tanto, (1) se convierte en una ecuación en diferencias en la variable w. Si en cambio tiene dos puntos fijos, exsite h tal que $h \circ T \circ h^{-1}(w) = qw$, dando lugar a una ecuación en q-diferencias.

Aunque las ecuaciones diferenciales pueden ser vistas como una confluencia de las ecuaciones en q-diferencias, haciendo tender q a 1 en la expresión $\frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z}$, $\quad |q| < 1$, en esta memoria no estudiaremos este aspecto.

Las primeras utilizaciones de ecuaciones en q-diferencias vienen por el trabajo de Euler sobre el número de particiones de un entero que detallaremos en el primer capítulo. También aparecen en diferentes ámbitos como la combinatoria, la aritmética, los sistemas integrables, el q-cálculo, etc. En este trabajo únicamente nos interesaremos por el estudio de las ecuaciones en q-diferencias lineales en el campo complejo. Para una mayor consideración en cuestiones históricas en el ámbito de aparición de las ecuaciones en q-diferencias, remitimos al lector a [7].

El estudio de las ecuaciones diferenciales en el campo complejo está en un estada más avanzado de desarrollo que el de las ecuaciones en q-diferencias. En particular, se ha desarrollado una teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales que está en proceso de desarrollo en el caso de las ecuaciones en q-diferencias. Uno de los resultados clave en el estudio del grupo de Galois de una ecuación diferencial es una descripción precisa de las soluciones en los entornos de las singularidades, y en segundo término dotar de sentido funcional a las soluciones formales mediante el desarrollo de la teoría de la multisumabilidad.

En el caso de las ecuaciones diferenciales es bien conocido que dado un operador lineal homogéneo de orden n en la variable x, existe un sistema fundamental de soluciones de la forma:

$$\exp(P(\frac{1}{z})) \cdot z^{\gamma} \cdot (\hat{\varphi}_0(z) + \hat{\varphi}_1(z)\ln(z) + \ldots + \hat{\varphi}_l(z)\ln(z)^l), \quad l \leq n$$

siendo z una variable ramificada de la variable originaria x, $(z^k = x)$, P un polinomio en $1/z$, y $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_l$ series de potencias formales en z. Este es un resultado clásico, que puede obtenerse mediante las formas normales estudadas por Turrittin de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, o bien, directamente como indica Singer en [16] refiriéndose al trabajo de Schelinger [15].

Nos dedicaremos únicamente de la descripción precisa de las soluciones formales de una ecuación lineal en q-diferencias. Nuestro trabajo está basado en los artículos de Adams [1] [2] que continúan el trabajo de Carmichael [5] que estudia las soluciones de sistemas en q-diferencias. En esta memoria se demuestra con precisión el análogo de este teorema. En particular, encontraremos un sistema de soluciones linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

Dada una ecuación lineal en q-diferencias,

$$a_n(x)f(q^n x) + a_{n-1}(x)f(q^{n-1}x) + \ldots + a_0(x)f(x) = 0, \tag{2}$$

construimos n soluciones $\mathbb{C}$-linealmente independientes de la forma

$$q^{\frac{\mu}{2}(\log_q^2 x - \log_q x)} \cdot x^{\gamma} \cdot (\hat{\phi}_0(x) + \ldots + (\hat{\phi}_l(x)\log_q^l x) \tag{3}$$

donde $\gamma \in \mathbb{C}$, y $\hat{\phi}_j(x)$ es una serie de potencias formales.

También damos un sentido preciso a la expresión (3) mediante la construcción de un cuerpo $\mathcal{K}$ extensión del cuerpo gérmenes de funciones meromorfas en el cero $K = \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$, y que contenga tanto a las series formales como a las funciones multivaloradas de la forma x^γ, y $q^{\frac{\mu}{2}(\log_q^2 x - \log_q x)}$. Igualmente consideramos una extensión del operador $\sigma_q : K \to K$ dada por $(\sigma_q f)(x) = f(qx)$. De esta forma, el operador (2) y sus soluciones tienene perfecto sentido en $\mathcal{K}$).

El problema que nos aparece es el posible aumento del cuerpo de constantes. El cuerpo de constantes de $\sigma_q : K \to K$ es $\mathbb{C}$, pero el de $\sigma_q : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ puede haber aumentado y no hemos conseguido demostrar que sea $\mathbb{C}$. Sin embargo, sí encontramos n soluciones de la forma (3) linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

En esta memoria, no sólo nos ocupamos de las series solución formales, sino que también estudiamos la convergencia de las soluciones que obtenemos. En particular, damos unas condiciones suficientes para que una solución formal de un operador sea necesariamente convergente. A esta propiedad, le damos la noción rigidez (ver definición 5). Igualmente demostramos el resultado que J. Sauloy denomina lema de Adams: todo operador lineal tiene al menos una solución convergente. Esta propiedad no se da en el caso de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 1

Motivación y ejemplos históricos

En este capítulo introduciremos una serie de funciones clásicas que son soluciones de ecuaciones en q-diferencias de orden uno y dos. Las referencias que hemos seguido son los artículos [7] y [11].

1.1. Ejemplos clásicos de orden uno

Definición 1 (q-análogos al símbolo de Pochhammer). *Sea* $|q| < 1$. *Dado un complejo* z*, se define:*

$$(z;q)_0 = 1$$

$$(z;q)_n = (1-z)(1-qz)\dots(1-q^{n-1}z) = \prod_{i=0}^{n-1}(1-q^i z).$$

$$(z;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(z;q)_n = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i z).$$

Lema 1. *La función* $(z;q)_\infty$ *está bien definida, es entera y tiene ceros de orden 1 en el conjunto* $\{z = q^{-N}; N \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Veamos que el producto está bien definido. Consideramos $g_i(z) = -q^i z$. Por el criterio normal de convergencia B, basta demostrar que la serie de funciones $\sum_i g_i(z)$ converge absolutamente en todo compacto $K \subset \mathbb{C}$. Es decir,

$$\sum_i |-q^i z|_K < \infty.$$

El compacto K estará contenido en una bola $B(0,R)$. Así que

$$|-q^i z|_K \leqslant |q^i| \cdot |z|_K \leqslant |q^i| \cdot R.$$

La serie $\sum_i |q|^i \cdot R$ converge justamente cuando $|q| < 1$, por el criterio de mayoración. La función $(z;q)_\infty$ se anula en $z = q^{-N}$ en el N-ésimo factor (es decir, $(1 - q^N q^{-N}) = 0$) y es distinto de cero en el resto de factores. Por lo cual, tiene ceros de orden 1 en el conjunto: $\{z = q^{-N}; N \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Como $(z;q)_\infty$ es entera, la función $\frac{1}{(z;q)_\infty}$ es meromorfa con polos de orden 1 en la espiral logarítmica $\{z = q^{-N}; N \in \mathbb{N}\}$. Como $z = 0$ no es un polo, podemos desarrollar $\frac{1}{(z;q)_\infty}$ en serie de potencias en $z = 0$:

Lema 2.

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{(1-q)\dots(1-q^n)}, \qquad |z| < 1$$

Demostración. Consideramos la función $f(z) = \frac{1}{(z;q)_\infty}$. Esta función es holomorfa en la bola abierta $B(0,1)$ por lo dicho anteriormente.

Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ su desarrollo en serie con radio de convergencia 1, ya que el primer polo está en $z = 1$. La función f satisface la ecuación en q-diferencias de orden 1:

$$f(qz) = (1-z) f(z) \tag{1.1}$$

En efecto,

$$f(qz) = \frac{1}{(qz;q)_\infty} = \frac{1}{(1-qz)(1-q^2 z)\dots} = (1-z)\, f(z).$$

Insertamos la serie de potencias en la ecuación en q-diferencias 1.1:

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n q^n z^n = (1-z) \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n.$$

Igualando los coeficientes obtenemos que $a_0 = 1 = f(0)$ y para $n \geqslant 1$, obtenemos la relación de recurrencia:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{1-q^n}.$$

Tenemos finalmente que:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{1-q^n} = \frac{a_{n-2}}{(1-q^n)(1-q^{n-1})} = \dots = \frac{1}{(1-q)\dots(1-q^n)}.$$

$\square$

La función $(z;q)_\infty$ es entera, calculemos su desarrollo de Taylor en $z=0$:

Lema 3.

$$(z;q)_\infty = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)\dots(1-q^n)} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Consideramos la función

$$g(z) = (1+z)(1+qz)(1+q^2z)\dots = \prod_{i=0}^{\infty}(1+q^iz).$$

La función g es entera (ya que $(-z;q)_\infty = g(z)$ y $(-z;q)_\infty$ es entera por el Lema 1) y es se puede escribir como serie de potencias: $\sum b_n z^n$, y su radio de convergencia es 1. Además, satisface la ecuación en q-diferencias:

$$g(z) = (1+z)\, g(qz) \tag{1.2}$$

En efecto,

$$g(qz) = (1+qz)(1+q^2z)\dots = \frac{g(z)}{(1+z)}.$$

Identificando coeficientes, tenemos que para $n=0$ se tiene que $b_0 = 1$, y para $n \geqslant 1$, se tiene la relación de recurrencia:

$$b_n = b_n q^n + b_{n-1} q^{n-1},$$

equivalentemente

$$b_n = \frac{q^{n-1}}{1-q^n}\, b_{n-1}.$$

Así:

$$b_n = \frac{q^{n-1}}{1-q^n}\, b_{n-1} = \frac{q^{n-1}}{1-q^n}\frac{q^{n-2}}{1-q^{n-1}}\, b_{n-2}$$

$$= \dots = \frac{q^{(n-1)+(n-2)+\dots+1}}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q)} = \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{(1-q)\dots(1-q^n)}.$$

Finalmente deducimos el resultado:

$$(z;q)_\infty = g(-z) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n b_n z_n.$$

□

Recordamos el teorema binomial generalizado y su demostración, posteriormente enunciaremos su q-análogo.

Teorema 4 (Teorema binomial generalizado)**.** *La identidad que sigue es válida cuando* $\alpha \in \mathbb{C}$ *y* $|z| < 1$*:*

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n \tag{1.3}$$

donde $(\alpha)_0 = 1$ *y* $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$ *cuando* $n \geqslant 0$*, es el símbolo de Pochhammer clásico.*

Demostración. Observamos que $(1-z)^{-\alpha}$ está definida como sigue: tomamos una rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $\ln 1 = 0$. La función $\ln(1-z)$ está definida en $\mathbb{C}\setminus[1, +\infty)$ por lo que $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}\setminus[1, +\infty)$. Denotamos por $f(z)$ la función $(1-z)^{-\alpha}$. Esta función satisface la ecuación diferencial:

$$(1-z)f'(z) = \alpha f(z). \tag{1.4}$$

La función f es analítica en la bola abierta $B(0, 1)$ luego se puede desarrollar en serie de potencias convergente cuando $|z| < 1$:

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n.$$

Tenemos que $a_0 = f(0) = 1$. Podemos sustituir la función $f(z)$ por su desarrollo en 1.4. Igualando los coeficientes:

$$(1-z) \sum_{n \geqslant 0} a_n n z^{n-1} = \alpha \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \qquad |z| < 1, n \geqslant 0,$$

obtenemos la relación de recurrencia en los coeficientes del desarrollo

$$a_{n+1} = a_n \frac{\alpha + n}{n+1} \qquad n \geqslant 0,$$

Como $a_0 = 1$, a_n queda unívocamente determinado por esta ecuación de recurrencia. Luego es suficiente probar que $b_n = \frac{(\alpha)_n}{n!}$ cumple (2.3).

$$b_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}{(n+1)!} = b_n \frac{\alpha+n}{n+1}.$$

Entonces $a_n = b_n$ para todo n. La serie de potencias es convergente cuando $|z| < 1$, pues usando el criterio del radio se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a|_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha)_n}{(n+1)!} \frac{n!}{(\alpha)_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+n}{n+1} = 1.$$

Por lo que la igualdad 1.3 se da para $|z| < 1$. $\square$

Teorema 5 (Cauchy-Heine)**.** *q-análogo del teorema binomial*

Sea $|q| < 1$*. Dado un complejo* $a \in \mathbb{C}$ $|z| < 1$*, se tiene la siguiente identidad cuando* $|z| < 1$*:*

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n \tag{1.5}$$

Demostración. Consideramos la función $g(z) = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$. La función g es meromorfa con polos de orden uno: es el cociente de dos funciones enteras y en el conjunto $\{z = -q^N : N \in \mathbb{N}\}$ están contenidos los ceros de orden uno del denominador. En la bola abierta unidad $B(0,1)$, g es holomorfa (el dicha bola no se anula el denominador), por lo tanto se desarrolla en serie de potencias en $z = 0$: $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$. Además, $g(z)$ cumple la ecuación en q-diferencias:

$$(1-z)g(z) = (1-az)g(qz) \tag{1.6}$$

En efecto,

$$g(z) = \frac{\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i az)}{\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i z)} = \frac{(1-az)}{(1-z)} \frac{\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^{i+1}az)}{\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^{i+1})} = \frac{(1-az)}{(1-z)} g(qz).$$

Insertamos el desarrollo en serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$ en la ecuación en q-diferencias 1.6:

$$(1-z)\sum_{n\geqslant 0} g_n z^n = (1-az)\sum_{n\geqslant 0} g_n q^n z^n.$$

Igualando coeficientes, resulta que obtenemos la relación de recurrencia:

$$g_n - g_{n-1} = g_n q^n - a q_{n-1} q^{n-1}.$$

Equivalentemente:

$$g_n(1-q^n) = (1-aq^{n-1})g_{n-1}, n \geqslant 1.$$

Veamos ahora que la sucesión $b_n = \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}$, $n \geqslant 0$ satisface la misma ecuación de recurrencia que g_n:

$$\begin{aligned} b_n(1-q^n) &= (1-q^n)\frac{(1-q)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-2})(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-1})(1-q^n)} \\ &= (1-aq^{n-1})b_{n-1} \end{aligned}$$

Como $g_0 = b_0 = 1$, tenemos que todos los coeficientes coinciden $b_n = g_n$ para todo $n \geqslant 0$. $\square$

1.2. q-analogías

Notación:

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$$

Observamos que

$$\lim_{q\to 1}[n]_q = \lim_{q\to 1}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{(1-q)(1+q+\ldots+q^{n-1})}{(1-q)} = n.$$

por lo tanto los números $[n]_q$ se pueden considerar una deformación del entero n. De este modo, se puede introducir otros símbolos del q-cálculo:

$$[n]_q! = \prod_{i=0}^{n}[i]_q$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q![m-n]_q!}$$

Es inmediato ver que:

$$\lim_{q\to 1}[n]_q! = n! \qquad \lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \binom{m}{n}.$$

Lema 6. *Si N es un número natural, tenemos la siguiente identidad:*

$$\sum_{n=0}^{N} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q z^n = (1+z)\cdots(1+q^{N-1}z).$$

Demostración. En el teorema de Cauchy-Heine, si hacemos $a = q^{-N}$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\sum_{n\geqslant 0}^{N} \frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n} z^n = (1-q^{-1}\,z)\,(1-q^{-2}\,z)\cdots(1-q^{-N}\,z) \tag{1.7}$$

Por un lado,

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n}z^n = \sum_{n\geqslant 0}^{N}\frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n}z^n,$$

ya que para un $n > N$, $(q^N;q)_n = 0$ puesto que contiene al factor $(1 - q^{-N+N}) = 0$. Por otro lado,

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \frac{(q^{-N}\,z;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \frac{(1-q^{-N}\,z)\,(1-q^{-N+1})\ldots(1-q^{-1}\,z)\,(1-z)\,(1-q\,z)\ldots}{(z;q)_\infty}$$

$$= \frac{(1-q^{-N}\,z)\,(1-q^{-N+1}\,z)\cdots(1-q^{-1}\,z)\,(z;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = (1-q^{-1}\,z)\,(1-q^{-2}\,z)\cdots(1-q^{-N}\,z).$$

Ahora intercambiamos en 1.7 z por $-q^N\,z$:

$$(1-q^{-1}\,(-q^N)\,z)\,(1-q^{-2}\,(-q^N)\,z)\cdots(1-q^{-N}\,(-q^N)\,z) = (1+q^{-1+N}\,z)\,(1+q^{-2+N}\,z)\cdots(1+z).$$

$$\sum_{n\geqslant 0}^{N} \frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n} z^n = \sum_{n\geqslant 0}^{N} \frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n}\,(-q^N)^n\,z^n$$

Sacando $\frac{1}{-q^{N-i}}$ factor común en cada producto:

$$(q^{-N};q)_n\,(-q^N)^n = (1-q^{-N})\,(1-q^{-N+1})\cdots(1-q^{-N+n-1})$$

$$= \frac{1}{-q^N}(1-q^N)\,\frac{1}{-q^{N-1}}(1-q^{N-1})\ldots\frac{1}{-q^{N-n+1}}(1-q^{N-n+1})$$

Ahora bien, al multiplicar estos factores comunes por $(-q^N)^n$ obtenemos:

$$= \frac{-q^N}{-q^N}\,\frac{-q^N}{-q^{N-1}}\cdots\,\frac{-q^N}{-q^{N-1}} = q^0\,q^1\cdots q^{n-1} = q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Llegamos pues a la expresión:

$$\frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n} = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{(1-q^N)\,(1-q^{N+1})\cdots(1-q^{N-n+1})}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

Calculando $\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q$ completamos la prueba:

$$\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[N-n+1]_q\cdots[N]_q}{[1]_q\cdots[n]_q} = \frac{(1-q^{N-n+1})\cdots(1-q^N)}{(1-q)^n}\,\frac{(1-q)^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)}.$$

ya que

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n}.$$

□

De modo análogo, podemos definir las q-deformaciones de los números complejos como:

$$[\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q}, \qquad q \neq 1.$$

Para ello escogemos un $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $q = \exp^{2i\pi\tau}$, $Im\tau > 0$. Entonces $q^\alpha = \exp^{2i\pi\tau\alpha}$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Calculamos el siguiente límite, haciendo uso de la fórmula binomial para números complejos (ya que se cumple que $|q-1| < 1$ cuando $|q| < 1$ y $q \to 1$):

$$\lim_{q\to 1}[\alpha]_q = \lim_{q\to 1}\frac{1-q^\alpha}{1-q} = \lim_{q\to 1}\frac{1-(1+(q-1))^\alpha}{1-q} = \lim_{q\to 1}\frac{1-(\sum_{k\geqslant 0}\binom{\alpha}{k}(q-1)^k)}{1-q}$$

$$= \lim_{q\to 1}\frac{1-(1+\alpha\,(q-1)+\frac{\alpha\,(\alpha+1)}{2}\,(q-1)^2+\cdots}{1-q} = \alpha$$

Lema 7.

$$\lim_{q\to 1}\frac{(q^\alpha;q)_n}{(q;q)_n} = \frac{(\alpha)_n}{n!}$$

Demostración.

$$\lim_{q\to 1}\frac{1-q^{\alpha+r}}{1-q^{r+1}} = \frac{\alpha+r}{r+1}.$$

$r = 0$, $\lim_{q\to 1}\frac{1-q^\alpha}{1-q} = \alpha$. Haciendo el cambio de variable $t = q^{r+1}$ tenemos que $q^{r+\alpha} = t^{\frac{\alpha+r}{r+1}}$ y que $t \to 1$ cuando $q \to 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{q\to 1}\frac{(q^\alpha;q)_n}{(q;q)_n} = \lim_{q\to 1}\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\cdots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

$$= \frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha+1}{2}\cdots\frac{\alpha+n-1}{n} = \frac{(\alpha)_n}{n!}.$$

$\square$

1.3. Ejemplos de orden 2

Funciones hipergeométricas básicas de Heine La serie hipergeométrica de Gauss se define como:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \tag{1.8}$$

Es conocido que esta serie verifica la ecuación diferencial de segundo grado:

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{d\, z^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\,\frac{d\, f}{d\, z} - \alpha\beta\, f = 0 \tag{1.9}$$

Demostración. Sea w solución de 1.9. Tenemos que:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n, \quad w' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, c_n\, z^{n-1}, \quad w'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, c_n\, z^{n-2}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 1.9 obtenemos el coeficiente de grado n:

$$\{n(n+1) + \gamma(n+1)\}c_{n+1} + \{-n(n-1) - (\alpha + \beta + 1)n - \alpha\beta\}c_n = 0$$

$$c_{n+1} = \frac{n(n-1) + (\alpha + \beta + 1)n + \alpha\beta}{n(n+1) + \gamma(n+1)}\, c_n = \frac{n^2 + \alpha n + \beta n + \alpha\beta}{(\gamma + n)(n+1)}\, c_n.$$

Por otro lado, veamos que los coeficientes de la serie 1.8 verifican la misma relación de recurrencia:

$$\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(\gamma)_n n!}{\alpha)_n(\beta)_n(\gamma)_{n+1}(n+1)!} = \frac{(\alpha - (n+1) + 1)(\beta + n)}{(\gamma + n)(n+1)} = \frac{\alpha\beta + \alpha n + \beta n + n^2}{(\gamma + n)(n+1)}$$

□

Heine consideró una q- deformación, la serie hipergeométrica básica (el término básico viene de base q):

$$\phi(a, b; c; q, z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(c; q)_n (q; q)_n}\, z^n \tag{1.10}$$

Lema 8. *Cuando $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, el radio de convergencia de la serie es* 1.

Demostración. Si hacemos $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|} = \frac{(q^\alpha; q)_{n+1}}{(q^\alpha; q)_n}\, \frac{(q; q)_n}{(q; q)_{n+1}}\, \frac{(q^\beta; q)_{n+1}}{(q^\beta; q)_n}\, \frac{(q^\gamma; q)_n}{(q^\gamma; q)_{n+1}}$$

□

Lema 9. *Cuando $q \to 1$ los coeficientes de la q-deformación tienden a los de $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$.*

Demostración.

$$\lim_{q\to 1} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n} = \lim_{q\to 1} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}\frac{(b;q)_n}{(q;q)_n}\frac{(q;q)_n}{(c;q)_n} = \frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_n}{n!}\frac{n!}{(\gamma)_n} = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}.$$

□

La serie hipergeométrica básica es solución de una ecuación funcional.

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(1-aq^n)(1-bq^n)}{(1-cq^n)(1-q^{n+1})}$$

$$(1-cq^n)(1-q^{n+1})f_{n+1} = (1-aq^n)(1-bq^n)f_n$$

$$(1-(\frac{c}{q}+1)q^{n+1} + \frac{c}{q}q^{2n+2})f_{n+1} = (1-(a+b)q^n + abq^{2n})f_n$$

Usando la notación $\sigma_q f(z) = f(qz)$, tenemos una ecuación en q-diferencias de orden 2:

$$(1-(\frac{c}{q}+1)\sigma_q + \frac{c}{q}\sigma_q^2)(f) = z(1-(a+b)\sigma_q + ab\sigma_q^2)(f)$$

$$(\frac{c}{q} - abz)\sigma_q^2(f) - ((\frac{c}{q}+1) - (a+b)z)\sigma_q(f) + (1-z)f = 0$$

Para ver que esta ecuación en q-diferencias es una q-deformación de la ecuación diferencial hipergeométrica, introducimos la notación $\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q-1}$ que es el operación de "q-derivación"que envía una función $f(z)$ en $\frac{f(qz)-f((z)}{q-1}$. Tenemos la siguiente versión de la regla de Leibniz:

$$\delta_q(fg) = f\delta_q(g) + \delta_q(f)\sigma_q(g)$$

Las funciones $E_q(z) = (-z;q)_\infty$ y $e_q(z) = \frac{1}{(-z;q)_\infty}$ se consideran q-análogas de la función exponencial.

$$\tilde{e}_q(z) := e_q((1-q)z) = \frac{1}{(-(1-q)z;q)_\infty} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(1-q)^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} z^n$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(1-q)(1-q)\cdots(1-q)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} z^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{[n]_q!} z^n$$

$$\tilde{E}_q(z) := E_q((1-q)z) = (-(1-q)z;q)_\infty$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\,(-1)^n\,(1-q)^n\,z^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!}\,z^n$$

$$\frac{\tilde{e}_q(q\,z)-\tilde{e}_q(z)}{(q-1)\,z} = \tilde{e}_q(z)$$

$$\frac{\tilde{E}_q(q\,z)-\tilde{E}_q(z)}{(q-1)\,z} = \frac{1}{1+(q-1)\,z}\tilde{E}_q(z)$$

Veamos ahora otro ejemplo, la serie de Tshakaloff.

$$\Upsilon(z) = \sum_{n\geqslant 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$$

Lema 10. *La serie de Tshakaloff es la solución de la ecuación en q-diferencias:*

$$z\sigma_q(f) - f = -1. \tag{1.11}$$

Demostración. Sea $f(z)$ solución de (1.11). Podemos escribir $f(z) = \sum_n a_n(q)z^n$. Sustituyendo,

$$z\sigma_q(\sum_n a_n(q)z^n) - \sum_n a_n(q)z^n = -1$$

$$1 + \sum_n a_n(q)q^n z^{n+1} - \sum_n a_n(q)z^n = 0.$$

Identificando coeficientes, obtenemos que $a_0(q) = 1$, $a_1(q) = a_0(q) = 1$, $a_2(q) = a_1(q)q = q$, en general

$$a_n(q) = q^{n-1}a_{n-2}(q) = q^{n-1}q^{n-1}\cdots q\cdot 1 = q^{\frac{n(n-1)}{2}}1.$$

□

Podemos homogenizar la ecuación:

$$(z\sigma_q)f = -1, \qquad (\sigma_q - I)(-1) = 0$$

$$(\sigma_q - I)\cdot(z\sigma_q - 1)f = 0$$

Desarrollando,

$$(\sigma_q\cdot z\cdot\sigma_q - \sigma_q - z\sigma_q + I)f = 0.$$

Ya que $(\sigma_q\cdot z)(h) = \sigma_q(zh) = q\cdot zh(qz) = qz\sigma_q h$ y por lo tanto $\sigma_q\cdot z = qz\sigma_q$. Por lo tanto obtenemos una ecuación lineal homogénea de orden 2 en q-diferencias

$$qz\sigma_q^2 - (1+z)\sigma_q + I = 0,$$

de la cual una solución es la serie de Tshakaloff.

Capítulo 2

Ecuaciones lineales en q-diferencias

2.1. Ecuaciones lineales no homogéneas

Definición 2. *Un operador lineal en q-diferencias es una expresión de la forma:*

$$L(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, f(q^i\, x), \tag{2.1}$$

donde $a_i(x)$ son funciones meromorfas en un entorno del cero o bien del punto del infinito, $q \in \mathbb{C}$ es una constante no nula. En este trabajo vamos a considerar que los coeficientes $a_i(x)$ son funciones meromorfas en un entorno de $0 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, podemos considerar su desarrollo en serie. Llamamos ecuación lineal en q-diferencias a una expresión del tipo

$$L(f) = b \tag{2.2}$$

con $b(x)$ en el cuerpo base. Se dice homogénea si $b = 0$. La solución f la buscaremos en un cuerpo extensión del cuerpo base.

Desarrollando los coeficientes $a_i(x)$ en sus series de Laurent, dado que son funciones meromorfas, tendremos que sus partes principales son finitas, y los podremos expresar para $i = 0, 1, \ldots, n$:

$$a_i(x) = \sum_{j=k}^{\infty} a_{i,j}\, x^j, \quad |x| < R, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Notación: Dado K un espacio de funciones, denotamos por σ_q al operador

$$\begin{array}{rccc} \sigma_q : & K & \longrightarrow & K \\ & f(x) & \mapsto & f(qx) \end{array}$$

De este modo, $\sigma_q^n(f) = f(q^n x)$ y podemos escribir (2.1) como:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, \sigma_q^i(f).$$

Observaciones 11. *1. Multiplicando la ecuación 2.2 por x^ν, obtenemos una ecuación equivalente. Podemos siempre suponer que*

$$\nu = \min\{ord_x(a_i)\}_\infty.$$

2. *Si $a_0(x) \neq 0$, haciendo el cambio $f(x) = g(\frac{1}{q}\, x)$, obtenemos una ecuación equivalente de orden menor. Por lo tanto, podemos suponer que $a_0(x) \neq 0$ y que $a_n(x) \neq 0$. En este caso, diremos que la ecuación tiene orden n.*

3. *El operador σ_q tiene inverso: $\sigma_{\frac{1}{q}}$.*

Definición 3. *Se llama polinomio característico del operador,*

$$L(f) = a_0(x)\, f(x) + a_1(x)\, f(q\, x) + \cdots + a_n(x)\, f(q^n\, x),$$

al polinomio

$$P(\rho) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}\rho + \ldots + +a_{n,\nu}\rho^n$$

siendo $\nu = \min_{i=0\ldots n}\{ord_x a_i(x)\}$.

Lema 12. *Dado un operador lineal L, existe $\{d_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ de modo que podemos expresar $L(c_\mu\, x^\mu)$ como:*

$$L(c_\mu\, x^\mu) = c_\mu\, P(q^\mu)\, x^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, x^{\mu+i}.$$

Demostración. Por ser L lineal,

$$L(c_\mu\, x^\mu) = c_\mu\, L(x^\mu).$$

Sustituyendo,

$$c_\mu\, L(x^\mu) = c_\mu\, (a_0(x)\, x^\mu + a_1(x)\, q^\mu x^\mu + \cdots + a_n(x)\, q^{n\mu} x^\mu)$$

$$c_\mu\, L(x^\mu) = c_\mu\, x^\mu\, (a_0(x) + a_1(x) q^\mu + \cdots + a_n(x) q^{n\mu})\,.$$

Desarrollando en serie los coeficientes $a_i(x)$,

$$c_\mu\, L(x^\mu) = c_\mu\, x^\mu \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{0,i}\, x^i \right) + q^\mu \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i}\, x^i \right) + \ldots + q^{n\mu} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i}\, x^i \right) \right)$$

Por lo tanto,

$$c_\mu\, L(x^\mu) = c_\mu\, (a_{0,0} + a_{1,0}\, q^\mu + \ldots + a_{n,0}\, q^{n\mu})\, x^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, x^{\mu+i},$$

donde

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i\, x^{\mu+i} = c_\mu \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{0,i}\, x^i \right) x^\mu + c_\mu \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i}\, x^i \right) q^\mu\, x^\mu + \cdots + c_\mu \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}\, x^i \right) q^{n\mu}\, x^\mu.$$

Efectivamente,

$$a_{0,0} + a_{1,0}\, q^\mu + \ldots + a_{n,0}\, q^{n\mu} = P(q^\mu).$$

□

Proposición 13. *Sea L el operador:*

$$L(f) = a_0(x)\, f(x) + a_1(x)\, f(q\, x) + \cdots + a_n(x)\, f(q^n\, x) \tag{2.4}$$

con $a_i(x)$ series formales en $\mathbb{C}((x))$. Sea $b(x) \in \mathbb{C}((x))$ una serie formal. Consideramos la ecuación (2.2). Sea $P(\rho)$ el polinomio característico de L y sea $\nu = \min_i\{ord(a_i(x)\}$. Supongamos que se cumple la siguiente condición:

$$P(q^n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z},\, n \geqslant ord(b(x) - \nu). \tag{2.5}$$

Entonces existe una única solución formal $f(x) \in \mathbb{C}((x))$ de la ecuación (2.2) tal que

$$ord(f(x)) = ord(b(x)) - \nu.$$

Demostración. Si $b(x) = 0$, y el orden de $\mathrm{ord}(b) - \nu = \infty - \nu = \infty$. La única serie con orden infinito es el 0, y $f = 0$ verifica la ecuación ($L(0) = 0$). Suponemos a partir de ahora que $b(x) \neq 0$. Si $f(x) = c_\mu\, x^\mu + g(x)$, por linealidad del operador L,

$$L(f) = L(c_\mu\, x^\mu) + L(g).$$

Ahora bien, por el lema (12) podemos expresar $L(c_\mu\, x^\mu)$ como:

$$L(c_\mu\, x^\mu) = c_\mu\, P(q^\mu)\, x^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, x^{\mu+i}.$$

Además, si $g \in \mathbb{C}((x))$, se cumple que:

$$\mathrm{ord}(L(g)) \geqslant \mathrm{ord}(g) + \nu.$$

Veamos la unicidad y luego la existencia. Multiplicando la ecuación (2.2) por $x^{-\nu}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 = \nu = \text{mín}_i\{\text{ord}(a_i(x); \quad i = 0 \dots n\}$. Nuestra hipótesis (2.5) se convierte en:

$$P(q^n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant \text{ord}(b(x)).$$

Supongamos que tanto $f(x)$ como $\bar{f}$ en $\mathbb{C}((x))$ verifican que son solución de 2.2 y que su orden es el mismo que el de $b(x)$. Consideramos $h(x) = f(x) - \bar{f}$. Por un lado,

$$\mu = \text{ord}(h) \geqslant \text{ord}(b).$$

Por otro lado, h cumple la ecuación (2.2):

$$L(h) = L(f - \bar{f}) = L(f) - L(\bar{f}) = b - b = 0.$$

Si $h \neq 0$ entonces podemos expresarla como $h = c_\mu \cdot x^\mu + \bar{h}$ con $\text{ord}(\bar{h}) \geqslant \mu + 1$ y $c_\mu \neq 0$.

$$L(h) = L(c_\mu \cdot x^\mu) + L(\bar{h}) = P(q^\mu) c_\mu x^\mu + O(x^{\mu+1}) = 0$$

Lo que implica que

$$P(q^\mu) = 0$$

Pero $\mu = \text{ord}(h) \in \mathbb{Z}$ y $\mu \geqslant \text{ord}(b)$ en contradicción con la hipótesis por lo que $f = \bar{f}$ y queda probada la unicidad. Veamos ahora la existencia. Sea $\mu = \text{ord}(b)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $\{c_{\mu+i}\}_{i=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{C}$ tales que

$$\text{ord}(L(c_\mu\, x^\mu + \ldots + c_{\mu+j}\, x^{\mu+j}) - b(x)) \geqslant \text{ord}(b) + j + 1. \tag{2.6}$$

Como $\mu = \text{ord}(b)$, podemos escribir $b(x)$ como $b(x) = b_\mu x^\mu + b_{\mu+1} x^{\mu+1} + \ldots$. Para $i = 0$, definimos c_μ como:

$$c_\mu = \frac{b_\mu}{P(q^\mu)}.$$

Veamos que c_μ verifica la propiedad (2.6) exigida a los elementos de la sucesión $\{c_{\mu+i}\}$.

$$\text{ord}\left(L(c_\mu\, x^\mu) - b(x)\right) = \text{ord}\left(\frac{b_\mu}{P(q^\mu)}\, P(q^\mu)\, x^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, x^{\mu+i} - \sum_{i=0}^{\infty} b_{\mu+i}\, x^{\mu+i}\right)$$

$$= \text{ord}\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i\, x^{\mu+i} - \sum_{i=1}^{\infty} b_{\mu+i}\, x^{\mu+i}\right) \geqslant \mu + 1 = \text{ord}(b) + 1.$$

Supongamos construidos $c_\mu, c_{\mu+1}, \ldots, c_{\mu+j-1}$ de modo que

$$\operatorname{ord}(L(c_\mu\, x^\mu + c_{\mu+1}\, x^{\mu+1}, \ldots, c_{\mu+j-1}\, x^{\mu+j-1}) - b(x)) \geqslant \operatorname{ord}(b) + j.$$

Vamos a construir $c_{\mu+j}$. Por la hipótesis de inducción respecto al orden, podemos reescribir:

$$L(c_\mu\, x^\mu + c_{\mu+1}\, x^{\mu+1}, \ldots, c_{\mu+j-1}\, x^{\mu+j-1}) - b(x) := \sum_{i=0}^{\infty} r_i\, x^{\mu+j+i}.$$

Por otro lado,

$$L(c_{\mu+j}\, x^{\mu+j}) = c_{\mu+j}\, P(q^{\mu+j})\, x^{\mu+j} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i\, x^{\mu+j+i}.$$

Ahora bien, por linearidad del operador L,

$$L(c_\mu\, x^\mu + \ldots, c_{\mu+j}\, x^{\mu+j}) = L(c_\mu\, x^\mu + \ldots, c_{\mu+j-1}\, x^{\mu+j-1}) + L(c_{\mu+j}\, x^{\mu+j}).$$

$$\operatorname{ord}(L(c_\mu\, x^\mu + \ldots, c_{\mu+j}\, x^{\mu+j}) - b(x)) = \operatorname{ord}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i\, x^{\mu+j+i} + L(c_{\mu+j}\, x^{\mu+j})\right)$$

$$= \operatorname{ord}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i\, x^{\mu+j+i} + c_{\mu+j}\, P(q^{\mu+j})\, x^{\mu+j} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i\, x^{\mu+j+i}\right).$$

Para que este orden sea mayor o igual que $\mu + j + 1$, es necesario que los coeficientes de $x^{\mu+j}$ se cancelen, es decir, que

$$r_0 + c_{\mu+j}\, P(q^{\mu+j}) = 0$$

es decir, haciendo

$$c_{\mu+j} = \frac{-r_0}{P(q^{\mu+j})} \tag{2.7}$$

obtenemos el resultado, y esto es posible ya que por la hipótesis (2.5) en particular $P(q^{\mu+j}) \neq 0$.

Definimos $f(x)$ como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{\mu+i}\, x^{\mu+i},$$

y veamos que es solución de la ecuación (2.2). Supongamos que $L(f) \neq b$. Llamamos k al orden de la diferencia : $k = \operatorname{ord}(L(f) - b)$. Sea j_0 de modo que $\operatorname{ord}(b) + j_0 > k$. Podemos expresar f como:

$$f(x) = \left(\sum_{i=\mu}^{\mu+j_0} c_i\, x^i\right) + \bar{f}, \qquad \text{donde} \quad \operatorname{ord}(\bar{f}) \geqslant \mu + j_0 > k.$$

Entonces

$$\operatorname{ord}(L(f) - b) > k,$$

y llegamos a contradicción por lo que $L(f) = b$.

$\square$

Definición 4. *Dado el operador L y $\mu \in \mathbb{R}$ se define el operador L^*_μ como el operador que cumple que si $f(x) = x^\mu\, g(x)$,*

$$L(f) = x^\mu\, L^*_\mu g(x).$$

Lema 14. *Si $P(\rho)$ es el polinomio característico de L entonces:*

a) el polinomio característico de L^*_μ es:

$$P^*_\mu(\rho) = P(q^\mu \rho).$$

b) Si L tiene coeficientes convergentes sí y solo sí L^* tiene coeficientes convergentes.

Demostración. Veamos quién es L^*_μ y para ello vamos a calcular $L(x^\mu\, g)$:

$$L(f) = a_0(x)\, f(x) + a_1(x)\, f(q\, x) + \cdots + a_n(x)\, f(q^n\, x),$$

$$L(x^\mu\, g) = a_0(x)\, x^\mu\, g(x) + a_1(x)\, q^\mu\, x^\mu\, g(q\, x) + \cdots + a_n(x)\, q^{n\mu}\, x^\mu\, g(q^n\, x).$$

Haciendo $a^*_i(x) = a_i(x)\, q^{i\mu}$ para $i = 0, \ldots, n$, tenemos que:

$$L(x^\mu\, g) = x^\mu\, [a^*_0(x)\, g(x) + a^*_1(x)\, g(q\, x) + \cdots + a^*_n(x)\, g(q^n\, x)].$$

Por lo tanto,

$$L^*_\mu(g) = a^*_0(x)\, g(x) + a^*_1(x)\, g(q\, x) + \cdots + a^*_n(x)\, g(q^n\, x).$$

Si $a_i(x) = \sum_{j=0}^\infty a_{i,j}\, x^j$, entonces:

$$a^*_i(x) = q^{i\mu} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\, x^j, \quad \text{por lo que} \quad a^*_{i,0} = a_{i,0}\, q^{i\mu}$$

Por lo tanto, el polinomio característico de L^*_μ es:

$$P^*_\mu(\rho) = a^*_{0,0} + a^*_{1,0}\rho + \ldots + a^*_{n,0}\rho^n$$

$$P^*_\mu(\rho) = a_{0,0} + a_{1,0}\, q^\mu\, \rho + \ldots + a_{n,0}\, q^{n\mu}\, \rho^n = P(q^\mu \rho).$$

$\square$

Para poder evitar la hipótesis de la proposición 13, introduciremos la función logaritmo y sus potencias de la variable principal. Más adelante construiremos una extensión de cuerpos en la que la función multivalorada $\ln x$ tiene sentido y demostraremos que es algebraicamente independiente sobre $\mathbb{C}((x)) = \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$. Para simplificar la notación, llamaremos

$$t = \frac{\ln x}{\ln q},$$

tomando el logaritmo de q en la rama principal del logaritmo.

Teorema 15. *Sea $\bar{L}$ el operador lineal con coeficientes constantes sobre $\mathbb{C}((x))$ definido por:*

$$\bar{L}(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \sigma_q^i(f) \qquad \textit{donde} \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Llamamos P al polinomio caracaterístico:

$$P(\rho) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \rho^i.$$

Sea $d(t) \in \mathbb{C}$, un polinomio de grado s. Consideramos la ecuación:

$$\bar{L}(x^k\, c(t)) = d(t)\, x^k. \tag{2.8}$$

1) Si $P(q^k) \neq 0$, entonces existe un único polinomio en $\mathbb{C}[t]$ que satisface que la ecuación (2.8). En particular, si $d(t) = 0$, $c(t) = 0$.

2) Si $P(q^k) = 0$, y ν es la multiplicidad de la raiz q^k en el polinómio característico $P(\rho)$, entonces para cada elección de constantes complejas $c_0, c_1, \ldots c_{\nu-1}$, existe un único polinomio $c(t) \in \mathbb{C}[t]$ tal que satisface la ecuación (2.8) y que:

$$c(t) \equiv c_0 + c_1 + \ldots + c_{\nu-1}\, t^{\nu-1} \pmod{t^\nu}.$$

Además, el grado de $c(t)$ es $\nu + s$.

Demostración. Sea s_0 el grado de $d(t)$. Fijamos un $s \in \mathbb{C}$ arbitrario de modo que $s \geqslant s_0$. Vamos a estudiar la matriz de la aplicación $\mathbb{C}$-lineal:

$$A_s : \mathbb{C}[t]_s \longrightarrow \mathbb{C}[t]_s$$

$$c(t) \longmapsto \frac{\bar{L}(c(t)x^k}{x^k}$$

en las bases estándar $\{1, t, \ldots, t^s\}$. Sea $c(t)$ un polinomio cualquiera en t de grado s:

$$c(t) = \sum_{j=0}^{s} c_j\, t^j.$$

Calculemos $\bar{L}(x^k\, c(t))$. Para ello, tendremos en cuenta que:

$$\sigma_q^i(x^k\, c(t)) = q^{ki}\, x^k c_j (t+i)^j, \qquad \text{ya que} \quad \frac{\ln q^i\, x}{\ln q} = i + t.$$

$$\bar{L}(x^k\, c(t)) = \left(\sum_i a_i\, \sigma_q^i\right)\left(\sum_i c_j\, t^j \cdot x^k\right) = \left(\sum_{i,j} a_i\, c_j (t+i)^j\, q^{ki}\right) x^k.$$

Usando que

$$\sum_j c_j\,(t+i)^j = c(t+i)$$

$$c(t+i) = c(i) + c'(i)\, t + \ldots + \frac{c^{(s)}(i)}{s!}\, t^s$$

tenemos que:

$$\sigma_q^i = \sum_{i,j} a_i\, c_j (t+i)^j\, q^{ki} = \sum_i a_i\, q^{ki} \left(\sum_j c_j (t+i)^j\right) = \sum_i a_i\, q^{ki}\, c(t+i)$$

$$= \sum_i a_i\, q^{ki} \left(\sum_j \frac{c^{(j)}(i)}{j!}\, t^j\right) = \sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{n} a_i\, q^{ki}\, \frac{c^{(j)}(i)}{j!}\, t^j = \sum_{j=0}^{s} d_j\, t^j.$$

Calculemos los d_j:

$$d_j = \sum_{i=0}^{n} a_i\, q^{ki}\, \frac{c^{(j)}(i)}{j!}.$$

Por ejemplo,calculemos la expresión para d_s,d_{s-1} y d_{s-2}:

$$d_s = \sum_{i=0}^{n} a_i\, q^{ki}\, \frac{c^{(s)}(i)}{s!} = \sum_{i=0}^{n} a_i\, q^{ki}\, \frac{c_s\, s!}{s!} = c_s\, P(q^k).$$

$$c^{(s-1)}(t) = (s-1)! c_{s-1} + c_{s-1} + (s)_{(s-1)}\, t$$

$$d_{s-1} = \sum_{i=0}^{n} a_i\, (q^k)^i\, \frac{c^{(s-1)}(i)}{(s-1!} = \sum_{i=0}^{n} a_i\, (q^k)^i (c_{s-1} + c_s\, s\, i$$

$$d_{s-1} = c_{s-1}\, P(q^k) + s\, c_s\, q^k\, P'(q^k)$$

$$\frac{c^{(s-2)}(i)}{(s-2)!} = c_{s-2} + (s-1)c_{s-1}(i) + c_s\,\frac{(s-1)s}{2}\,i^2$$

$$= c_{s-2} + i[(s-1)c_{s-1} + c_s\,\frac{(s-1)s}{2}] + i(i-1)\,c_s\,\frac{(s-1)s}{2}$$

Ya que $i^2 = i(i-1) + i$.

$$d_{s-2} = c_{s-2}\,P(q^k) + [(s-1)c_{s-1} + \frac{(s-1)s}{2}\,c_s]\,q^k\,P'(q^k) + \frac{(s-1)s}{2}\,c_s\,q^{2k}\,P''(q^k).$$

Notación: $(a)_m := a(a-1)\cdots(a-m+1)$.

Calculemos ahora un d_{s-t}, en general. Determinemos antes $\frac{c^{(s-t)}(i)}{(s-t)!}$.

$$\frac{c^{(s-t)}(i)}{(s-t)!} = \frac{(s-t)!}{(s-t)!}\,c_{s-t} + \frac{(s-t+1)_{s-t}}{(s-t)!}\,c_{s-t+1}\,i + \ldots + \frac{(s-t+t)_{s-t}}{(s-t)!}\,c_{s-t+t}\,i^t$$

$$= \sum_{p=0}^{t} (s-t+p)_p\,c_{s-t+p}\,i^p.$$

La base de polinomios de grado $\geqslant N$ de $\mathbb{C}[i]$:

$$\beta_1 = \{1, i, i^2, \ldots, i^N\}$$

podemos reescribirla como combinación de elementos de la base:

$$\beta_2 = \{1, i, i(i-1), \ldots, (i)_N\}.$$

Es decir, dado i^p, se puede escribir como:

$$i^p = \alpha_{p,p}\,i(i-1)\cdots(i-p+1) + \cdots + \alpha_{p,1}\,i + \alpha_{p,0} = \sum_{l=0}^{p} \alpha_{p,l}(i)_l.$$

Observemos que para cualquier p, $\alpha_{p,p} = 1$.

Finalmente tenemos que:

$$\frac{c^{(s-t)}(i)}{(s-t)!} = \sum_{p=0}^{t} (s-t+p)_p\,c_{s-t+p}\,\sum_{l=0}^{p} \alpha_{p,l}(i)_l.$$

Sustituyendo lo obtenido en la fórmula de los d_j:

$$d_{s-t} = \sum_{i=0}^{n} a_i\,q^{ki}\,\frac{c^{(s-t)}(i)}{(s-t)!} = \sum_{i=0}^{n} a_i\,q^{ki}\,\sum_{p=0}^{t} (s-t+p)_p\,c_{s-t+p}\,\sum_{l=0}^{p} \alpha_{p,l}(i)_l$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{p=0}^{t} \sum_{l=0}^{p} a_i\, q^{ki}\, (s-t+p)_p\, c_{s-t+p}\, \alpha_{p,l} (i)_l$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{p=0}^{t} \sum_{l=0}^{p} a_i\, (i)_l\, (q^k)^{i-l}\, (q^k)^l\, (s-t+p)_p\, c_{s-t+p}\, \alpha_{p,l}$$

$$= \sum_{p=0}^{t} \sum_{l=0}^{p} (q^k)^l\, (s-t+p)_p\, c_{s-t+p}\, \alpha_{p,l} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i\, (i)_l\, (q^k)^{i-l}$$

Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, (i)_l\, (q^k)^{i-l} = P^{(l)}(q^k).$$

Por lo que

$$d_{s-t} = \sum_{l=0}^{t} (q^k)^l\, P^{(l)}(q^k)\, \sum_{p=l}^{t} (s-t+p)_p\, c_{s-t+p}\, \alpha_{p,l}$$

$$d_{s-t} = \sum_{p=0}^{t} c_{s-t+p}\, \{(s-t+p)_p\, \sum_{l=0}^{p} (q^k)^l\, P^{(l)}(q^k)\, \alpha_{p,l}\}. \tag{2.9}$$

Hemos escrito los datos $\{d_j\}$ en función de las incógnitas $\{c_j\}$, y ahora nos interesa calcular la matriz del sismema $A_s c(t) = d(t)$.

$$\begin{pmatrix} a_{s,s} & a_{s,s-1} & \cdots & a_{s,0} \\ a_{s-1,s} & a_{s-1,s-1} & & a_{s-1,0} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{0,s} & a_{0,s-1} & \cdots & a_{0,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_s \\ c_{s-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_s \\ d_{s-1} \\ \vdots \\ d_0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Por un lado observamos que A_s es una matriz cuadrada de orden s, y triangular inferior ya que d_{s-t} depende únicamente de $c_{s-t}, c_{s-t+1} \ldots c_s$. Calculemos los elementos de la matriz diagonal por diagonal.

Los elementos de la diagonal principal, $a_{s-t,s-t}$, corresponden a los coeficientes que acompañan a c_{s-t} en la fórmula (2.9). Esto ocurre cuando $p = 0$.

$$a_{s-t,s-t} = P(q^k).$$

Es decir, en la diagonal principal son siempre coeficientes $P(q^k)$. Veamos cómo son la segunda diagonal, y luego en general. La segunda diagonal corresponde a $p = 1$ en (2.9)

$$a_{s-t,s-t+1} = (s-t+1)_1 (P(q^k)\alpha_{1,0} + (q^k)\, P'(q^k)\, \alpha_{1,1}) = (s-t+1)\, q^k\, P'(q^k).$$

En general, para una subdiagonal $p+1$, $p=0,\ \dots\ ,t.$, se tiene que:

$$a_{s-t,s-t+p} = (s-t+p)_p \sum_{l=0}^{p} (q^k)^l\, P^{(l)}(q^k)\, \alpha_{p,l}$$

$$= (s-t+p)_p (q^k)^p\, P^{(p)}(q^k) + \left(\sum_{l=0}^{p-1} (s-t+p)_p (q^k)^l\, P^{(l)}(q^k)\, \alpha_{p,l} \right).$$

Es decir, podemos escribir $a_{s-t,s-t+p}$ de la forma:

$$a_{s-t,s-t+p} = \beta_{s,t,p} P^{(p)}(q^k) + \gamma_{s,t,p}, \tag{2.11}$$

donde

$$\beta_{s,t,p} = (s-t+p)_p (q^k)^p \neq 0$$

$$\gamma_{s,t,p} = \sum_{l=0}^{p-1} (s-t+p)_p (q^k)^l\, P^{(l)}(q^k)\, \alpha_{p,l}.$$

Si $P(q^k) \neq 0$, y $s \geqslant s_0$, al ser la matriz del sistema A_s triangular con elementos no nulos en la diagonal, existen únicos $\{c_s, c_{s-1},\ \dots\ , c_0\}$ tales que:

$$A_s \left(\begin{array}{c} c_s \\ \vdots \\ c_{s_0+1} \\ \hline c_{s_0} \\ \vdots \\ c_0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline d_{s_0} \\ \vdots \\ d_0 \end{array} \right). \tag{2.12}$$

Si $s > s_0$ entonces la primera ecuación es $P(q^k) \cdot c_s = 0$ por lo que $c_s = 0$. Por la estructura triangular y la diagonal no nula, se llega a que $c_{s-1} = \cdots c_{s_0+1} = 0$. Para ver la unicidad, si tenemos $c_1(t)$ y $c_2(t)$ dos soluciones entonces veamos que son iguales. Llamando s al máximo de los grados de c_1, c_2 y d. Tanto c_1 como c_2 son soluciones del sistema $A_s \cdot c = d$, y como el sistema tiene solución única, $c_1 = c_2$.

Veamos ahora segunda parte de la proposición, es decir cuando $P(q^k) = 0$. Si hacemos $s = s_0$ no podemos resolver el sistema pues la primera ecuación es $0 \cdot c_s = d_s \neq 0$. Observamos que si $P(q^k) = 0$ y $P'(q^k) \neq 0$, entonces la primera diagonal es nula pero la segunda es no nula. En general, si la multiplicidad de q^k en el polinomio característico es ν,

$$P(q^k) = P'(q^k) = \ldots = P^{(\nu-1)}(q^k) = 0,$$

las primeras ν diagonales son nulas puesto que son combinaciones lineales de $P(q^k), P'(q^k), \ldots, P^{(\nu-1)}(q^k)$. En cambio, la diagonal $\nu+1$ no, ya que la diagonal $\nu+1$ es de la forma:

$$a_{s-t,s-t+\nu} = (s-t+\nu)_\nu (q^k)^\nu \, P^{(\nu)}(q^k) \neq 0.$$

En este caso, considerando

$$d = \sum_{j=0}^{s_0+\nu} d_j t^j, \qquad \text{con} \quad d_{s_0+1} = \cdots d_{s_0+\nu} = 0,$$

podemos resolver el sistema $A_{s_0+\nu} \cdot c(t) = d(t)$. Los asteriscos representan coeficientes no nulos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & 0 & & & 0 \\ \hline * & 0 & & & \\ & * & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & * & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} c_{s_0+\nu} \\ \vdots \\ c_{s_0+1} \\ \hline c_{s_0} \\ c_{s_0-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline d_{s_0} \\ d_{s_0-1} \\ \vdots \\ d_0 \end{array}\right) \tag{2.13}$$

Las ν primeras ecuaciones son $0=0$ por lo tanto el sistema es equivalente a las últimas s_0 ecuaciones matriz tiene rango s_0 con lo que el sistema es compatible. Es más, por la estructura triangular de la matriz, podemos considerar las varialbles $c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$ como variables independientes y las $c_\nu, \ldots, c_{s_0}$ como variables dependientes. $\square$

Definición 5. *Sea L un operador lineal, $L = \sum_{i=0}^n a_i(x)\sigma_q^i$, con coeficientes $a_i(z) \in \mathbb{C}(\{x\})$ y $\nu = \min_{i=0,\ldots,n}\{ord(a_i(z))\}$. Diremos que L es rígido en $x=0$ si cumple que $a_{n,\nu} \neq 0$ en el caso $|q|>1$ o bien $a_{0,\nu} \neq 0$ en el caso $|q|<1$.*

Teorema 16. *Sea L rígido y sea $b(x) \in \mathbb{C}(\{x\})$. Sea $c(x) \in \mathbb{C}((x))$ una serie formal tal que:*

$$L(c(x)) = b(x). \tag{2.14}$$

Entonces $c(x)$ es una serie convergente.

Demostración. Sea $\nu = \min\{\mathrm{ord} a_i(x)\}$. Multiplicando la ecuación $L(c(x)) = b(x)$ por $x^{-\nu}$ obtenemos una ecuación equivalente, por lo que a partir de ahora supondremos que $\nu = 0$.

Si $|q| < 1$ y L es un operador rígido

$$L(c(x)) = a_0(x)c(x) + a_1(x)c(qx) + \ldots + a_n(x)c(q^n x)$$

$$L(c(x)) = b(x),$$

mediante el cambio de variable $y = q^n x$, llegamos a un operador en $\frac{1}{q}$-diferencias, $\bar{L}(c(y))$, que es rígido en $y = 0$. En efecto, llamando $\bar{q} = \frac{1}{q}$,

$$L(c(y)) = a_0(\bar{q}^n y)c(\bar{q}^n y) + a_1(\bar{q}^n y)c(q\bar{q}^n y) + \ldots + a_n(\bar{q}^n y)c(q^n\bar{q}^n y)$$

$$= a_0(\bar{q}^n y)c(\bar{q}^n y) + a_1(\bar{q}^n y)c(\bar{q}^{n-1} y) + \ldots + a_n(\bar{q}^n y)c(y)$$

$$L(c(y)) = b(\bar{q}^n y)$$

Renombramos ahora los coeficentes del operador y el término independiente:

$$\bar{a_0}(y) = a_n(\bar{q}^n y), \ldots, \bar{a_n}(y) = a_0(\bar{q}^n y), \quad \bar{b}(y) = b(\bar{q}^n y)$$

De este modo, consideramos el operador $\bar{L}$ definido por:

$$\bar{L}(c(y)) = \bar{a_0}(y)c(y) + \bar{a_1}(y)c(\bar{q}y) + \ldots + \bar{a_n}(y)c(\bar{q}^n y).$$

La ecuación:

$$\bar{L}(c(y)) = \bar{b}(y)$$

es una ecuación en $\bar{q}$-diferencias con $|\bar{q}| > 1$ y los coeficientes de $\bar{L}$ son, donde se da la convergencia de los $\bar{a}_i$ y de $\bar{b}$ (ya que $\bar{a}_i(y) = a_{n-i}(x)$ y $\bar{b}(y) = b(x)$).

$$\bar{a}_{n,0} \neq 0 \Longleftrightarrow a_{0,0} \neq 0.$$

De ahora en adelante, también supondremos que $|q| > 1$.

Veamos también que podemos suponer sin pérdida de generalidad las siguientes condiciones:

H1) $\mathrm{ord}(b(x)) = \mathrm{ord}(c(x)) = 0$

H2) $P(q^n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para ello, consideramos $\mu = \mathrm{ord}(b(x))$. Como $a_{0,n} \neq 0$, el polinomio característico es no nulo y tiene un número finito de raíces. Como $|q| > 1$, existe un N suficientemente grande que cumple que $N \geqslant \nu$ y que $P(q^n) \neq 0$, $\forall n \geqslant N$. Escribimos $c(x)$ y $b(x)$ como

$$c(x) = c_0(x) + x^N c_1(x),$$

$$b(x) = b_0(x) + x^N b_1(x),$$

siendo $c_0(x)$ y $b_0(x)$ polinomios de grado menor o igual que N y $c_1(x), b_1(x) \in \mathbb{C}\{x\}$. Por lo tanto,

$$L(c_0(x) + x^N c_1(x)) = L(c_0(x)) + L(x^N c_1(x)) = b_0(x) + x^N b_1(x).$$

Como hemos visto en la demostración del teorema (13), sabemos que el orden en x de $L(x^N c_1(x)) \geqslant N$, por lo que:

$$\mathrm{ord}_x(L(c_0(x) - b_0(x)) = \mathrm{ord}_x(-L(x^N c_1(x) + x^N b_1(x)) \geqslant N.$$

Llamamos a

$$d(x) = L(c_0(x) - b_0(x))$$

De nuevo, podemos escribir $d(x)d(x) = x^N \bar{d}(x)$ siendo $\bar{d}(x)$ de orden mayor o igual que 0. Con esta notación,

$$L(x^N c_1(x)) = x^N (b_1(x) - \bar{d}(x)).$$

Utilizando la definición de L^*,

$$L(x^N c_1(x)) = x^N L^*(c_1(x)).$$

Así,

$$L^*(c_1(x)) = b_1(x) - \bar{d}(x) \tag{2.15}$$

Además,por el lema (14), se cumple que $P(q^{n+N}) = P^*(q^n) \neq 0$. Basta demostrar que $c_1(x)$ converge. Observamos que la ecuación (2.15) verifica que: En resumen, hemos visto que podemos suponer las siguientes hipótesis en la ecuación $L(c(x)) = b(x)$:

- $|q| > 1$
- $\mathrm{mín}\{\mathrm{ord} a_i(x)\} = 0$
- $\mathrm{ord}(b(x)) = \mathrm{ord}(c(x)) = 0$
- $P(q^n) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Como habíamos visto en la demostración de la proposición (13), si $c(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s\, x^s$ es solución, entonces los coeficientes c_s cumplen la siguiente relación de recurrencia:

$$c_0 = \frac{b_0}{P(q^0)}$$

$$c_s = \frac{-1}{P(q^s)} \left[coef_{x^s} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, \sigma_q^i(c_0 + \ldots + c_{s-1} x\, t^{s-1}) \right) - b_s \right], \quad s \geqslant 1.$$

Entonces, si $s \geqslant 1$,

$$c_s = \frac{-1}{P(q^s)} \left[coef_{x^s} \left(\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\, x^j \right) \left(c_0 + c_1 q^i x + \ldots + c_{s-1} q^{i(s-1)}\, x^{s-1} \right) \right) - b_s \right]$$

$$c_s = \frac{-1}{P(q^s)} \left[coef_{x^s} \left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\, c_k\, q^{ki}\, x^{j+k} \right) - b_s \right]$$

$$c_s = \frac{-1}{P(q^s)} \left[\left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{j+k=s \\ 0 \leqslant k < s}} a_{i,j}\, c_k\, q^{ki} \right) - b_s \right].$$

Observamos que no aparecen elementos $a_{0,j}$ para $k < s$. Para cada s, consideramos un polinomio en la familia de indeterminadas $A_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $j \in \mathbb{N}$ y en $C_0, C_1 \ldots C_{s-1}, Q$ definido por:

$$H_s(A_{i,j}, C_0, C_1 \ldots, C_{s-1}, Q) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{j+k=s \\ 0 \leqslant k < s}} A_{i,j}\, C_k\, Q^{ki}.$$

Con esta escritura:

$$c_s = \frac{-1}{P(q^s)} \left[H_s(a_{i,j}, c_0, c_1 \ldots, c_{s-1}, q) - b_s \right]. \tag{2.16}$$

Vamos a acotar los coeficientes c_s. Tomando módulos en la ecuación anterior,

$$|c_s| \leqslant \frac{1}{|P(q^s)|} \left[\left(\sum_{i,j+k=s} |a_{i,j}|\, |c_k|\, |q|^{ki} \right) + |b_s| \right].$$

Como estamos en el caso $|q| > 1$ y L es rígido en $x = 0$, tenemos que $|a_{0,n}| \neq 0$. Veamos que existe $R > 0$ tal que:

$$|P(q^s)| \geqslant R \cdot |q|^{sn}, \qquad \forall s \in \mathbb{N}.$$

En efecto, como $|a_{0,n}| \neq 0$ y $|q| > 1$, se tiene que:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{P(q^s)}{q^{sn}} = \frac{a_{0,0} + a_{0,1} q^s + \ldots + a_{0,n-1} q^{s(n-1)} + a_{0,n} q^{sn}}{q^{sn}}$$

$$= \lim_{s \to \infty} \frac{a_{0,0}}{q^{sn}} + \frac{a_{0,1}}{q^{s(n-1)}} + \ldots + \frac{a_{0,n-1}}{q^s} + a_{0,n} = a_{0,n} \neq 0$$

Entonces existe un natural N tal que $R_s \geqslant \frac{|a_{0,n}|}{2} > 0$ si $n \geqslant N$. Sea

$$R = \text{mín}\left(\frac{|a_{0,n}|}{2}, \frac{|P(q^0)|}{|q|^0}, \frac{|P(q^1)|}{|q|^n}, \dots, \frac{|P(q^{N-1})|}{|q|^{n(N-1)}}\right).$$

Tenemos el resultado ya que $R > 0$ debido a que $|P(q^s)| \neq 0$, $\forall s \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$|c_s| \leqslant \frac{1}{R}\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j+k=s}|a_{i,j}|\,|c_k|\,\frac{|q|^{ki}}{|q|^{sn}}\right) + \frac{|b_s|}{|q|^{sn}}\right]$$

Como $i \leqslant n$, $k \leqslant$ entonces $ki \leqslant ns$. Además $|q| > 1$ por lo que $|q|^{ki-sn} \leqslant 1$.

$$|c_s| \leqslant \frac{1}{R}\left(\left(\sum_{i,j+k=s}|a_{i,j}|\,|c_k|\right) + |b_s|\right). \tag{2.17}$$

Definimos una sucesión de números reales no negativos $d_0, d_1, d_2, \dots$ como sigue:

$$d_0 = \frac{|b_0|}{R}$$
$$d_s = \frac{1}{R}\left(\left(\sum_{i}\sum_{j+k=s}|a_{i,j}|\,d_k\right) + |b_s|\right), \qquad s \geqslant 1.$$

Para finalizar la prueba vamos a demostrar lo siguiente: 1) $|c_s| \leqslant d_s$ 2) $g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s$ es solución convergente de la ecuación algebraica:

$$A(x)g(x) = \tilde{b}(x),$$

siendo

$$A(x) = -R + \sum_{j\geqslant 1}\left(\sum_{i=0}^{n}|a_{i,j}|\right)x^j.$$

y

$$\tilde{b}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} -|b_s|x^s.$$

Ambas son series convergentes y $A(x)$ es no nula ya que $R \neq 0$ por lo que tiene inverso. Con lo cual $g(x)$ sería una serie convergente, al ser cociente de elementos convergentes. Se tiene por inducción que $|c_s| \leqslant d_s$, $\forall s \in \mathbb{N}$: Para $s = 0$,

$$|c_0| = \frac{b_0}{P(q^0)} \leqslant \frac{|b_0|}{R} = d_0.$$

Supongamos que la desigualdad se cumple hasta $s-1$. Veamos que también se cumple para s.

$$|c_s| \leqslant \frac{1}{|P(q^s)|}\left[\left(\sum_i \sum_{j+k=s} |a_{i,j}|\,|c_k|\,|q|^{ki}\right) + |b_s|\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{R}\left[\left(\sum_i \sum_{j+k=s} |a_{i,j}|\,d_k\right) + |b_s|\right] \leqslant \frac{1}{R}\left[\left(\sum_i \sum_{j+k=s+1} |a_{i,j}|\,d_k\right) + |b_{s+1}|\right] = d_{s+1}.$$

Así tendríamos la convergencia de $c(x)$ demostrada y habríamos completado la demostración. Sólo falta ver que efectivamente $g(x)$ es solución de la ecuación $A(x)g(x) = \tilde{b}(x)$. Esta ecuación, en particular es una ecuación lineal en q-diferencias con coeficientes en $\mathbb{C}((x))$:

$$L(g(x)) = A_0(x)g(x) + \ldots + A_n(x)g(q^n\,x) = B(x)$$

con

- $q = 1$
- $A_0(x) = -R + \sum_{j=1}^{\infty} |a_{0,j}|$
- $A_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|, \quad i = 1, \ldots n$
- $B(x) = \tilde{b}(x)$.

Por lo cual, los coeficientes d_s han de satisfacer la relación de recurrencia de (2.16).

$$\frac{\tilde{b}_0}{P(1^0)} = \frac{-|b_0|}{-R)} = \frac{|b_0|}{R} = d_0$$

$$-\frac{1}{P(1^s)}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j+k=s} \tilde{a}_{i,j} d_k 1^{ki}\right) - \tilde{b}_s\right] = \frac{1}{R}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j+k=s} |a_{i,j}| d_k\right) + |b_s|\right] = d_s.$$

En efecto $g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s$ es solución y por tanto hemos finalizado la prueba. $\square$

Teorema 17. *Sea L un operador rígido en $x=0$. Sean $b_0(x), \ldots, b_l(x) \in \mathbb{C}(\{x\})$ y supongamos que existen $c_0(x), \ldots, c_k(x) \in \mathbb{C}((x))$ tales que:*

$$L(c_0(x) + \ldots + c_k(x)t^k) = b_0(x) + \ldots + b_l(x)t^l.$$

Entonces $c_0(x), \ldots, c_k(x)$ son convergentes en $x=0$.

Demostración. Inducción sobre k. Supongamos que la proposición es cierta para $p = 0, \ldots, k-1$ y veamos qué ocurre cuando $p = k$.

$$L(c_0(x) + \ldots + c_k(x)t^k) = L(c_k(x))t^k + \textit{términos de menor orden en } t$$
$$= b_0(x) + \ldots + b_l(x)t^l$$

Igualando los coficientes de t^k (si $k > l$, $b_k = 0$):

$$L(c_k(x)) = b_k(x)$$

Como $b_k(x)$ es convergente, tenemos que $c_k(x)$ también lo es (estaríamos en el caso $p = 0$ que es lo que hay que demostrar en el paso 3). Por linealidad del operador,

$$L(c_0(x)+\ldots+c_k(x)t^k) = L(c_0(x)+\ldots+c_{k-1}(x)t^{k-1})+L(c_k(x)t^k) = b_0(x)+\ldots+b_l(x)t^l$$

$$L(c_0(x) + \ldots + c_{k-1}(x)t^{k-1}) = b_0(x) + \ldots + b_l(x)t^l - L(c_k(x)t^k) \in \mathbb{C}(\{x\}).$$

Por hipótesis de inducción, $c_{k-1}(x), \ldots, c_0(x)$ son convergentes. $\square$

2.2. Ecuaciones lineales homogéneas

Definición 6. *Relación de equivalencia asociada a q. Sea $q \in \mathbb{C}$ con $q \neq 0$ y $|q| \neq 1$. Decimos que los números complejos ρ, ρ' están q-relacionados ($\sim_q$) si existen $r, r' \in \mathbb{C}$ tales que $q^r = \rho$, $q^{r'} = \rho'$ y $r - r' \in \mathbb{Z}$.*

Lema 18. *Si $q^{r_1} = \rho$ y $q^{r_2} = \rho'$, se tiene que:*

$$\rho_1 \sim_q \rho_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} + \omega_q \mathbb{Z}$$

donde $\omega_q = \frac{2\pi i}{\ln q}$, siendo $\ln q = ln|q| + i\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Supongamos que $q^r = q^{r'}$. Entonces veamos que es equivalente a que $r - r' \in \omega_q \mathbb{Z}$.

$$\exp(r \ln q) = \exp(r' \ln q) \Leftrightarrow \exp((r - r') \ln q) = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : (r - r') \ln q = 2\pi i k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : r - r' = k \frac{2\pi i}{\ln q} = k\, \omega_q.$$

Supongamos que $\rho \sim_q \rho'$. Entonces por definición, existen r_1', r_2' con $q^{r_1'} = \rho_1$, $q^{r_2'} = \rho_2$ y $r_1' - r_2' \in \mathbb{Z}$. Por la equivalencia vista anteriormente, tenemos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $r_1 - r_1' = k_1 \omega_q$ y $r_2 - r_2' = k_2 \omega_q$. Ahora bien,

$$(r_1 - r_1') - (r_2 - r_2') = (k_1 - k_2)\, \omega_q$$

$$r_1 - r_2 = (r_1' - r_2') + (k_1 - k_2)\, \omega_q \in \mathbb{Z} + \omega_q \mathbb{Z}.$$

Supongamos ahora que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} + \omega_q \mathbb{Z}$ y veamos que $\rho_1 \sim_q \rho_2$. Tenemos que $r_1 - r_2 = a + b\omega_q$ para ciertos enteros a y b. Consideramos $r_1' = r_2 + a$. De este modo, como $r_1 - (r_2 + a) = b\, \omega_q$, por el lema anterior tenemos que $\rho_1 = q^{r_1} = q^{r_1'}$ $r_1 = r_1' + b\, \omega_q$. Así, $r_1' - r_2 = a \in \mathbb{Z}$ por lo que $\rho_1 \sim_q \rho_2$. $\square$

De este modo, podemos hacer una partición de las raíces no nulas de un polinomio en clases de equivalencia. Además, en cada clase respecto de la relación $\sim_q$, podemos ordenar las raíces de modo que:

$$\begin{array}{ll} \rho_1 = q^{r_1} & \qquad r_1 = r_1 + m_1 \\ \rho_2 = q^{r_2} & \qquad r_2 = r_1 + m_2 \\ \cdots & \qquad \cdots \\ \rho_p = q^{r_p} & \qquad r_p = r_1 + m_p \end{array}$$

donde $m_i \in \mathbb{N}$ y $0 = m_1 < m_2 < \cdots < m_p$.

Observaciones 19. *Dado el operador L, consideramos el operador L^* definido por $L(x^r \cdot f) = x^r\, L^*(f)$.Si $P(\rho)$ y $P^*(\rho)$ son los polinomios característicos de L y L^* respectivamente, la aplicación entre los conjuntos de raíces no nulas:*

$$\rho = q^{r'} \to \rho^* = q^{r'+r}$$

conserva el orden y las multiplicidades. Si tenemos una clase de raíces ordenada de un polinomio $P(\rho)$, $\rho_1 = q^{r_1}, \ldots, \rho_p = q^{r_p}$ entonces dado $r \in \mathbb{C}$, $q^{r_1+r}, \ldots, q^{r_p+r}$ forma una clase de las raíces de P_r^* que conserva el orden y las multiplicidades.

Esto es trivial, ya que si $\rho_j = q^{r_j}$ raíz de $P(\rho)$, el lema (14) dice que $\rho_j = q^{r_j+r}$ es raiz de $P_r^*(\rho)$ con la misma multiplicidad. Por otro lado, si $r_j = r_1 + m_2$ entonces $r_j + r = r_1 + r + m_2$ por lo que se converva el orden.

Definición 7. *Vamos a definir una valoración sobre $\mathbb{C}((x))[t]$: Sea*

$$f(x,t) = a_{i,0}(x) + a_{i,1}(x)t + \ldots + a_{i,T}(x)t^T = \sum_{j=0}^{T}\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j}x^i t^j.$$

Sean

$$v_x(f) = ord_x(f(x,t))$$

y

$$v_t(f) = \max_{0 \leqslant j \leqslant T}\{j : a_{v_x(f),j} \neq 0\}.$$

Consideramos la aplicación de $f(x,t)$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}: & \mathbb{C}((x))[t] & \longrightarrow & (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \preceq) \\ & f(x,t) & \longmapsto & (v_x(f), v_t(f)) \end{array}$$

donde $\preceq$ es una relación de orden definida por:

$$(s,r) \preceq (s',r') \Leftrightarrow s < s' \ o \ \{s = s' \ y \ r \geqslant r'\}.$$

Dado $f(x,t) \in \mathbb{C}((x))[t]$ definimos $in(f)$ como el término inicial de f respecto a la valoración $\mathcal{V}$.

Obseramos que $\mathcal{V}$ está bien definida, es decir, cumple las propiedades de valoración: $\mathcal{V}(fg) = \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(g)$ y $\mathcal{V}(f+g) \geqslant \min(\mathcal{V}(f), \mathcal{V}(g))$.

Proposición 20. *Consideramos la ecuación lineal homogénea $L(f) = 0$. Sean $\rho_1, \ldots, \rho_p$ los elementos ya ordenados de una clase de equivalencia de* *las raíces del polinomio característico del operador L, y $\nu_1, \ldots, \nu_p$ sus multiplicidades respectivas. Sean $r_1, \ldots, r_p$ como en el Lema 18. Se pueden construir $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_p$ soluciones linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ de la forma:*

$$x^{r_1} \cdot g_{i,j}(x,t),$$

con $g_{i,j}(x,t) \in \mathbb{C}((x))[t]$, siendo $1 \leq i \leq p$ y $0 \leq j \leq \nu_i - 1$, De modo que:

- *$deg_t(g_{i,j}(x,t) \leqslant \nu - 1$*
- *$in(g_{i,j}(x,t)) = x^{r_i - r_1}\, t^{b_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p,\ 0 \leqslant b_i \leqslant \nu_i - 1.$*

Demostración. Podemos suponer que $\mu = \text{mín}(\text{ord}(a_i)) = 0$ (multiplicando por $x^{-\mu}$ al operador L). Primero veamos que podemos suponer que $r_1 = 0$. Para ello consideramos el operador $L^*_{r_1}$.

$$L(x^{r_1}\, f) = x^{r_1} L^*_{r_1}(f).$$

Por las propiedades vistas en las observaciones 19, $P(q^{r_1}) = 0$ es equivalente a $P^*_{r_1}(q^0) = 0$. Las raíces de $P^*_{r_1}$ conservan las clases, el orden y las multiplicidades de P. Por lo tanto suponemos que $r_1 = 0$, es decir $\rho_1 = q^0 = 1$ y $P(q^0) = 0$.

Tomamos una clase de las raíces ya ordenada como en las observación anterior: $0 = r_1, r_2, \cdots, r_p$ con multiplicidades $\nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_p$, y los naturales $m_i = r_i - r_1$. Consideramos los pares (i,j) con $i = 1, \ldots, p$ y $0 \leqslant j \leqslant \nu_i - 1$. Hay ν pares de este tipo y para cada (i,j) construiremos una solución $x^{r_1}\, g_{(i,j)}(x,t)$ con

- $g_{(i,j)}(x,t) \in \mathbb{C}((x))[t]$
- $\text{in}(g_{i,j}(x,t)) = x^{r_i - r_1}\, t^j$.

Si vemos esto, solo faltará demostrar la independencia.

Fijamos el par (i,j) con $i = 1, \ldots, p$ y $0 \leqslant j \leqslant \nu_i - 1$. Vamos a construir una solución

$$g(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\, x^k = g_0(t) + g_1(t)\, x + g_2(t)\, x^2 + \cdots, \qquad \text{con } g_k(t) \in \mathbb{C}[t],$$

con las siguientes propiedades:

1. $\text{ord}_x(g) = m_i$, en particular, $g_0 = \cdots = g_{m_i - 1} = 0$,
2. $g_{m_i}(t) = t^j$,

3. $\deg_t(g_k(t)) \leqslant j + \bar{\nu}_k, \quad k \geqslant m_i.$

siendo $\bar{\nu}_k = \nu_{i+1} + \cdots + \nu_l$ con $l \in \mathbb{N}$ de modo que $m_l \leqslant k < m_{l+1}$ (poniendo $m_{p+1} = \infty$).

Busquemos por recurrencia los $g_k(t)$ con las propiedades (1-3) y además cumpliendo:

4. $\operatorname{ord}_x(L(g_0(t) + \cdots + g_k(t)\, x^k)) \geqslant k + 1.$

Definimos $g_0 = \cdots = g_{m_i-1} = 0$ y $g_{m_i} = t^j$. Estas funciones verifican claramente las propiedades (1-3) ($\bar{\nu}_{m_i} = 0$). Veamos que también verifica (4):

$$L(g_0(t) + \cdots + g_{m_i}(t)\, x^{m_i}) = L(t^j\, x^{m_i}).$$

Descomponemos el operador $L = \bar{L} + x\,\bar{\bar{L}}$, siendo $\bar{L}$ un operador con coeficientes constantes. Así:

$$L(t^j\, x^{m_i}) = \bar{L}(t^j\, x^{m_i}) + x\,\bar{\bar{L}}(t^j\, x^{m_i})$$

donde $\operatorname{ord}_x(x\,\bar{\bar{L}}(t^j\, x^{m_i}) \geqslant m_i + 1$. Tenemos que q^{m_i} es raiz del polinomio característico con multiplicidad ν_i. Por el teorema (15), $\bar{L}(t^j\, x^{m_i}) = 0$. Entonces,

$$\operatorname{ord}_x(L(g_0(t)+\cdots+g_{m_i}(t)\, x^{m_i})) = \operatorname{ord}_x(L(t^j\, x^{m_i})) = \operatorname{ord}_x(x\,\bar{\bar{L}}(t^j\, x^{m_i}) \geqslant m_i+1$$

cumpliendo así (4).

Supongamos elegidos $g_0(t), \ldots, g_{k-1}(t)$, cumpliendo las propiedades (1-4). Veamos que podemos encontrar $g_k(t)$ cumpliendo (1-4) también. Llamamos

$$d(x,t) = L(g_0(t) + \cdots + g_{k-1}(t)\, x^{k-1}).$$

Por la propiedad (4) de la hipótesis de inducción,

$$d(x,t) = d_k(t)\, x^k + \bar{d}(x,t)$$

donde $\bar{d}(x,t)$ está compuesto por términos de orden en x mayor que k. Por la propiedad (3),

$$\deg_t(d_k(t)) \leqslant j + \bar{\nu}_{k-1}.$$

Definamos $g_k(t)$ de modo que:

$$\bar{L}(g_k(t)\, x^k) = -d_k(t)\, x^k. \tag{2.18}$$

Esto es posible usando de nuevo el teorema (15).

Por un lado, si tenemos que si q^k no es raiz del polinomio característico, esto es, que $k \notin \{m_1 = 0, m_2, \dots, m_p\}$ lo cual implica que $\bar{\nu}_k = \bar{\nu}_{k-1}$ entonces existe un $g_k(t)$ satisfaciendo (2.18) con grado:

$$\deg_t(g_k(t)) \leqslant \deg_t(d_k(t)) \leqslant j + \bar{\nu}_{k+1} = j + \bar{\nu}_k.$$

En cambio, si q^k es raiz, esto es, $k = m_l$ para algún l, por lo que $\bar{\nu}_{k+1} + m_l = \bar{\nu}_k$ entonces existe $g_k(t)$ satisfaciendo (2.18) con grado:

$$\deg_t(g_k(t)) \leqslant \deg_t(d_k(t)) + m_l \leqslant j + \bar{\nu}_{k+1} + m_l = j + \bar{\nu}_k.$$

Es decir, hemos encontrado en ambos casos un $g_k(t)$ satisfaciendo (2.18) y verificando (3). Veamos para finalizar la inducción, que también verifica (4). Tenemos así que

$$\begin{gathered} L((g_0(t) + \cdots + g_{k-1}(t)\, x^{k-1} + g_k(t)\, x^k) \\ = L((g_0(t) + \cdots + g_{k-1}(t)\, x^{k-1}) + L(g_k(t)\, x^k) \\ = d(x,t) + L(g_k(t)\, x^k) \\ = d(x,t) + \bar{L}(g_k(t)\, x^k) + x\, \bar{\bar{L}}(g_k(t)\, x^k) \\ = d_k(t)\, x^k + \bar{d}(x,t) - d_k(t)\, x^k + x\, \bar{\bar{L}}(g_k(t)\, x^k) = \bar{d}(x,t) + x\, \bar{\bar{L}}(g_k(t)\, x^k). \end{gathered}$$

Tenemos pues que

$$\operatorname{ord}_x(\bar{d} + x\, \bar{\bar{L}}(g_k(t)\, x^k)) \geqslant k + 1,$$

finalizando la inducción.

Veamos que efectivamente la serie construida

$$g(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\, x^k$$

es solución. Supongamos que no lo es, es decir $L(g(x,t)) \neq 0$. Sea

$$N = \operatorname{ord}_x(L(g)).$$

Podemos expresar g como

$$g(x,t) = \sum_{k=0}^{N} g_k(t)\, x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(t)\, x^k$$

Ahora bien, por construcción,

$$\mathrm{ord}_x\left(L\left(\sum_{k=0}^{N} g_k(t)\,x^k\right)\right) > N$$

y por otro lado

$$\mathrm{ord}_x\left(L\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(t)\,x^k\right)\right) \geqslant N+1$$

por lo que $\mathrm{ord}_x(L(g)) > N$ llegando así a una contradicción.

Para ver la independencia lineal de los $g_{(i,j)}(x,t)$, tomamos una combinación lineal finita y la igualamos a 0:

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j}\, g_{(i,j)}(x,t) = 0.$$

Sea $in(\sum_{i,j} \lambda_{i,j}\, g_{(i,j)}(x,t)) = \alpha_0 x^{i_0} t^{j_0}$. Este monomio no se puede poner en combinación con el resto, por ser mínimo (i_0, j_0) respecto a la valoriación $\mathcal{V}$. Esto implica que su coeficiente α_0 ha de ser nulo. Repetimos este razonamiento, y obtenemos que todos los $\lambda_{i,j} = 0$. □

Teorema 21. *Consideramos la ecuación lineal homogenea*

$$L(f) = 0. \tag{2.19}$$

Sea h el número de raíces distintas de cero del polinomio característico $P(\rho)$ de L. Existen h series formales $\mathbb{C}$-linealmente independientes soluciones de (2.19) de la forma:

$$x^r \cdot g(x,t), \qquad g(x,t) \in \mathbb{C}[[x]][t],$$

con r de tal forma que $P(q^r) = 0$.

Demostración. Sean $\rho_1, \ldots, \rho_s$ reprentantes de las s clases de equivalencia de las raíces de $P(\rho)$, de tal forma que cada ρ_l sea mínimo dentro de su clase, es decir: si $\rho_l = q^{r_l}$ y si ρ es otra raíz de la misma clase, entonces existe r de modo que $\rho = q^r$ y $r = r_l + m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$.

Por el teorema anterior, para cada l con $1 \leqslant l \leqslant s$, existen $\nu^{(l)} = \nu_1 + \cdots \nu_l$ soluciones de la forma $x^{r_l}\, g_{l,i}(x,t)$, $1 \leq i \leq \nu^{(l)}$ y siendo , $g_{l,i}(x,t) \in \mathbb{C}[[x]][t]$. Para cada l, las soluciones $x^{r_l}\, g_{l,i}(x,t)$ son $\mathbb{C}$-linealmente independientes por la proposición anterior. La demostración de que todas ellas son $\mathbb{C}$-linealmente independientes la realizaremos en la proposición 28. □

2.3. Caso general

Consideramos el operador lineal en q-diferencias

$$L(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\sigma_q^i = \sum_{i,j} a_{i,j}\, x^j\, \sigma_q^i$$

Tomamos el conjunto de puntos:

$$\mathcal{C}(L) = \{(j,i),\, a_{i,j} \neq 0\}$$

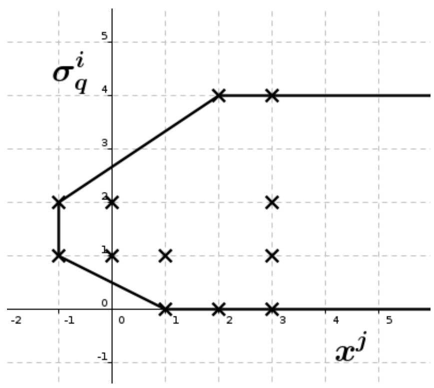
Llamaremos polígono de Newton de L a la envolvente convexa del conjunto:

$$\mathcal{C}(L) + (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\}).$$

Por ejemplo, al operador:

$$L = (x+2x^2-x^5+\cdots)\sigma_q^0 + (x^{-1}+4-x)\sigma_q^1 + (2x^{-1}+3+x^3)\sigma_q^2 + (x^2-x^3)\sigma_q^4$$

le corresponde la siguiente representación:

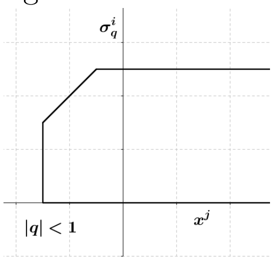


Su polinomio característico $P(\rho) = \rho^2 + \rho$ se ve reflejado en los puntos del lado vertical. Observamos que en general, la longitud del lado vertical corresponde con el número de raíces no nulas del polinomio característico, ya que si el polinomio característico es:

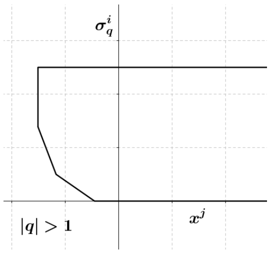
$$P(\rho) = a_{\nu,k}\rho^k + \cdots a_{\nu,k+h}\rho^{k+h} = \rho^k(a_{\nu,k} + \cdots a_{\nu,k+h}\rho^h)$$

siendo $a_{\nu,k}$ y $a_{\nu,k+h}$ no nulos, entonces el segmento del lado vertical del polinomio de Newton es justamente $[A,B]$ siendo $A = (\nu,k)$ y $B = (\nu,k+h)$. Por lo tanto, utilizando el Teorema 21, podemos construir h soluciones $\mathbb{C}$-linealmente independientes de $L(f) = 0$.

También podemos interpretar gráficamente las soluciones convergentes: si L es rígido, su polígono de Newton tiene un ángulo recto. En el caso $a_{0,\nu} \neq 0$, el ángulo recto está en el inferior del lado vertical:



y las soluciones que correspondan al segmento del lado vertical serán convergentes si $|q| < 1$, y en el caso $a_{n,\nu} \neq 0$, el ángulo recto estará en la parte superior del lado vertical y ocurre lo mismo si $|q| > 1$:



Para construir otras $n - h$ soluciones independientes de las anteriores, vamos a considerar la siguiente transformación:

$$f = q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)} \cdot g \tag{2.20}$$

Definición 8. *Dado el operador L y $\mu \in \mathbb{R}$, se define el operador $\hat{L}_\mu$ como el operador que cumple que si $f(x) = q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\, g(x)$, entonces*

$$L(f) = q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)} \cdot \hat{L}_\mu(g).$$

Lema 22. *Con esta definición,*

$$\hat{L}_\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, x^{i\mu}\, q^{\frac{(i-1)i}{2}\mu}\, \sigma_q^i.$$

Demostración. Veamos por inducción que

$$\sigma_q^n(f) = q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\, x^{n\mu}\, q^{\frac{(n-1)n}{2}\mu}\, \sigma_q^n(g), \quad n \geqslant 0.$$

Para $n = 0$, se cumple trivialmente la igualdad:

$$\sigma_q^0(f) = q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\, g = f.$$

Para $n=1$, usando que $\sigma_q(t)=t+1$,

$$\sigma_q(f)=\sigma_q(q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\,g)=q^{\frac{\mu}{2}((t+1)^2-(t+1))}\,\sigma_q(g)=q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\,q^{\frac{\mu}{2}2t}\,\sigma_q(g).$$

Ahora bien,

$$q^{\frac{\mu}{2}2t}=q^{\mu t}=q^{\mu\frac{\ln x}{\ln q}}=\exp\left(\mu\frac{\ln x}{\ln q}\ln q\right)=\exp(\mu\ln x)=x^{\mu}.$$

Entonces,

$$\sigma_q(f)=q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\,x^{\mu}\,\sigma_q(g).$$

Supongamos que es cierto hasta n. Veamos que se cumple para $n+1$.

$$\sigma_q^{n+1}(f)=\sigma_q(\sigma_q^n(f))=\sigma_q(q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\,x^{n\mu}\,q^{\frac{(n-1)n}{2}\mu}\,\sigma_q^n(g)).$$

Aplicando σ_q,

$$\sigma_q^{n+1}(f)=q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\,x^{\mu}\,q^{n\mu}\,x^{n\mu}\,q^{\frac{(n-1)n}{2}\mu}\,\sigma_q^{n+1}(g)$$

$$\sigma_q^{n+1}(f)=q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\,x^{(n+1)\mu}\,q^{\frac{(n+1)n}{2}\mu}\,\sigma_q^{n+1}(g),$$

y obtenemos así el resultado.

Entonces,

$$L(f)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\,\sigma_q^i(f)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\,q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\,x^{i\mu}\,q^{\frac{(i-1)i}{2}\mu}\,\sigma_q^i(g)$$

$$=q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\,x^{i\mu}\,q^{\frac{(i-1)i}{2}\mu}\,\sigma_q^i(g)=q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}\cdot\hat{L}_{\mu}(g).$$

□

Veamos ahora cómo se transforma el polígono de Newton de L en el de $\hat{L}_{\mu}$ mediante la transformación estudiada.

$$\hat{L}_{\mu}=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\,x^{i\mu}\,q^{\frac{(i-1)i}{2}\mu}\,\sigma_q^i=\sum_{i,j}a_{ij}x^j\,x^{i\mu}\,q^{\frac{(i-1)i}{2}\mu}\,\sigma_q^i$$

$$=\sum_{i,j}\left(a_{ij}\,q^{\frac{(i-1)i}{2}\mu}\right)\,x^{i\mu+j}\,\sigma_q^i.$$

Consideramos la afinidad

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (j,i) & \mapsto & (j+i\mu,i)\end{array}$$

Tenemos que si $a_{ij} \neq 0$ si y solo si $a_{ij}\, q^{\frac{(i-1)i}{2}\mu} \neq 0$, por lo que

$$\mathcal{C}(\hat{L}_\mu) = \{(j + i\mu, i),\, a_{i,j} \neq 0\},$$

$$\Phi(\mathcal{C}(L)) = \mathcal{C}(\hat{L}_\mu).$$

Observamos que un punto (j, i) que se transforma en $(j + i\mu, i)$ conserva la altura, y que conserva los conjuntos convexos, los vértices van a parar a vértices y los lados van a parar a lados.

Veamos esto último. Dado el segmento de extremos $A = (j_1, i_1)$ y $B = (j_2, i_2)$, su pendiente es $p = \frac{i_1 - i_2}{j_1 - j_2}$ y su inclinación es $-\frac{1}{p}$. Tomando μ como esta inclinación, es decir

$$\mu = -\frac{1}{p} = -\frac{j_1 - j_2}{i_1 - i_2},$$

los puntos transformados $A' = (j_1 + i_1\mu, i_1)$ y $B' = (j_2 + i_2\mu, i_2)$ forman un segmento de inclinación 0:

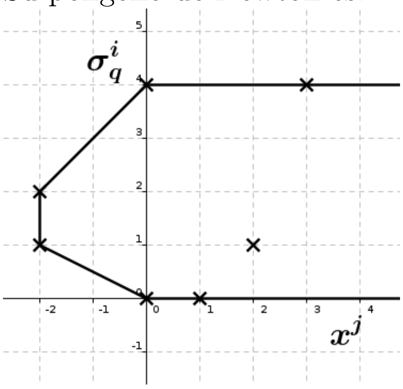
$$\frac{(j_1 - j_2) + (i_1 - i_2)(-\frac{j_1 - j_2}{i_1 - i_2})}{i_1 - i_2} = 0.$$

Por lo tanto, el segmento transformado $[A'B']$ es vertical.

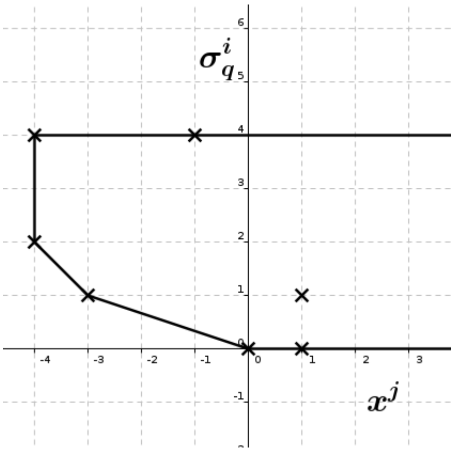
Por ejemplo, consideramos el operador :

$$L = (1 + 2x) + (x^{-2} + x^2)\sigma_q - 3x^{-2}\sigma_q^2 + (5 + 2x^3)\sigma_q^4).$$

Su polígono de Newton es:



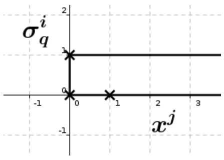
Vamos a transformar el segmento $[AB]$,donde $A = (-2, 2)$ y $B = (0, 4)$. Haciendo $\mu = -1$, $A' = (-4, 2)$, $B = (-4, 4)$ y nuestro polígono pasa a ser:



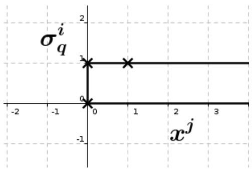
Del mismo modo, podemos transformar el segmento inferior. Así pues, podemos asegurar al menos una solución convergente.

Los ejemplos que hemos visto en el capítulo anterior son tres ecuaciones en q-diferencias de primer y segundo orden:

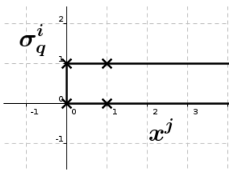
$$f(qz) = (1-z)f(z) \qquad (z;q)_\infty = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)\dots(1-q^n)} z^n$$



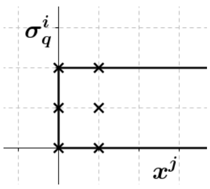
$$f(qz) = (1+z)f(z) \qquad \frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{(1-q)\dots(1-q^n)}$$



$$(1-z)f(z) = (1-az)f(qz) \qquad \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n$$

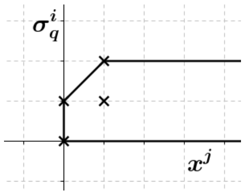


$$(\frac{c}{q} - abz)\sigma_q^2 f - ((\frac{c}{q}+1) - (a+b)z)\sigma_q f + (1-z)f = 0$$



Por lo visto anteriormente, sus polígonos de Newton nos dicen que todas las soluciones son convergentes si $|q| \neq 1$.

$$qz\sigma_q^2 - (1+z)\sigma_q + I = 0, \qquad \sum_{n\geqslant 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$$



En este último caso, la serie de Tshakaloff es convergente si $|q| < 1$, y en cuanto a la otra solución no podemos garantizar la convergencia.

2.4. Sistema fundamental de soluciones

Lema 23. *Supongamos que tenemos k soluciones de la ecuación en q-diferencias lineal homogénea: $L(f) = 0$, $y_1(x)$, $y_2(x)$,. . .,$y_k(x)$.*

Sean $p_1(x)$, $p_2(x)$,. . .,$p_k(x)$ funciones constantes, es decir, invariantes por σ_q: $\sigma_q(p_i(x)) = p_i(x)$. Entonces, una combinación lineal $\sum_i p_i(x)y_i(x)$ también es solución.

Observamos que dado $j \in \mathbb{N}$, $\sigma_q^j(p_i(x)) = p_i(x)$.

Demostración.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\sigma_q^i\left(\sum_j p_j(x)y_j(x)\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_j a_i(x)\sigma_q^i(p_j(x)y_j(x))$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_j a_i(x)\sigma_q^i(p_j(x))\sigma_q^i(y_j(x)) = \sum_{i=0}^{n}\sum_j a_i(x)p_j(x)\sigma_q^i(y_j(x))$$

$$= \sum_j p_j(x)\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\sigma_q^i(y_j(x)) = \sum_j p_j(x)\cdot 0 = 0.$$

□

Definición 9. *Decimos que $y_1(x)$, $y_2(x)$,. . .,$y_k(x)$ son linealmente dependientes si existen constantes no todas nulas $p_1(x)$, $p_2(x)$,. . .,$p_k(x)$ tales que*

$$\sum_{j=1}^{k} p_i(x)y_i(x) = 0.$$

Si no son linealmente dependientes, diremos que son linealmente independientes.

Proposición 24. *Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$,. . .,$y_n(x)$ soluciones de $L(f) = 0$ siendo L un operador lineal en q-diferencias de orden n. Consideramos el determinante de de Casorati:*

$$D(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1(qx) & y_2(qx) & \dots & y_n(qx) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(q^{n-1}x) & y_2(q^{n-1}x) & \dots & y_n(q^{n-1}x) \end{vmatrix}$$

Entonces se cumple que $D(x) \equiv 0$ si y solo si y_1, y_2, . . . , y_n son soluciones linealmente dependientes.

Demostración. Supongamos que y_1, $y_2, \ldots$, y_n son soluciones linealmente dependientes. Por definición, existen constantes no todas nulas $p_1(x)$, $p_2(x)$,. . .,$p_n(x)$ tales que

$$p_1(x)y_1(x) + p_2(x)y_2(x) + \ldots + p_n(x)y_n(x) = 0.$$

Aplicamos $\sigma_q^0, \sigma_q^1, \ldots, \sigma_q^{n-1}$ a la ecuación y teniendo en cuenta que $\sigma_q^j(p_i(x)) = p_i(x)$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1(qx) & y_2(qx) & \cdots & y_n(qx) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(q^{n-1}x) & y_2(q^{n-1}x) & \cdots & y_n(q^{n-1}x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el vector $(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x))$ por hipótesis es no nulo, el determinante de la matriz, que es precisamente $D(x)$ ha de ser nulo.

Recíprocamente, supongamos que $D(x) = 0$. Denotamos por $Y_1(x)$, $Y_2(x) \ldots, Y_n(x)$ a los adjuntos de la última fila de $D(x)$. Supongamos que al menos uno de ellos no es nulo. Por ejemplo, $Y_1(x) \neq 0$. Desarrollando el determinante por la última fila, obtenemos la ecuación:

$$Y_1(x)y_1(q^{n-1}x) + Y_2(x)y_2(q^{n-1}x) + \ldots + Y_n(x)y_n(q^{n-1}x) = 0.$$

Si sustituímos la última fila por la primera fila, el determinante es nulo

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n(q^{n-2}) & \cdots & y_n(q^{n-2}) \\ y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix} = 0,$$

ya que tiene una fila repetida. Como los adjuntos a los elementos de la última fila siguen siendo $Y_1(x)$, $Y_2(x) \ldots, Y_n(x)$, desarrollando este determinante por la última fila, obtenemos:

$$Y_1(x)y_1(x) + Y_2(x)y_2(x) + \ldots + Y_n(x)y_n(x) = 0.$$

Repitiendo este proceso con el resto de filas, llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1(x)y_1(x) + Y_2(x)y_2(x) + \ldots + Y_n(x)y_n(x) = 0 \\ Y_1(x)y_1(qx) + Y_2(x)y_2(qx) + \ldots + Y_n(x)y_n(qx) = 0 \\ \cdots\cdots \\ Y_1(x)y_1(q^{n-1}x) + Y_2(x)y_2(q^{n-1}x) + \ldots + Y_n(x)y_n(q^{n-1}x) = 0 \end{array} \right. \qquad (2.21)$$

Por otro lado, los adjuntos de los elementos de la primera fila son justamente $Y_1(qx)$, $Y_2(qx), \dots, Y_n(x)$. Mediante un proceso análogo al anterior, tenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} Y_1(qx)y_1(x) + Y_2(qx)y_2(x) + \ldots + Y_n(qx)y_n(x) = 0 \\ Y_1(qx)y_1(qx) + Y_2(qx)y_2(qx) + \ldots + Y_n(qx)y_n(qx) = 0 \\ \cdots\cdots \\ Y_1(qx)y_1(q^{n-1}x) + Y_2(qx)y_2(q^{n-1}x) + \ldots + Y_n(qx)y_n(q^{n-1}x) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Como no todos los adjuntos son nulos, y el determinante es nulo, el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1(qx) & y_2(qx) & \cdots & y_n(qx) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(q^{n-1}x) & y_2(q^{n-1}x) & \cdots & y_n(q^{n-1}x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango exactamente $n-1$. Además, tanto $(Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x))$ como $(Y_1(qx), Y_2(qx), \dots, Y_n(x))$ son soluciones. Por lo tanto, al ser el espacio de soluciones de dimensión 1, han de ser proporcionales, es decir, existe una constante no nula $\lambda(x)$ tal que:

$$\lambda(x)(Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)) = (Y_1(qx), Y_2(qx), \dots, Y_n(x)).$$

Por lo tanto,

$$\frac{Y_2(qx)}{Y_1(qx)} = \frac{\lambda(x)Y_2(x)}{\lambda(x)Y_1(x)} = \frac{Y_2(x)}{Y_1(x)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{Y_n(qx)}{Y_1(qx)} = \frac{\lambda(x)Y_n(x)}{\lambda(x)Y_1(x)} = \frac{Y_n(x)}{Y_1(x)}.$$

Finalmente, dividiendo la primera ecuación de (2.21) por $Y_(x)$ y denotando

$$p_1(x) = 1, p_2(x) = \frac{Y_2(x)}{Y_1(x)}, \dots, p_n = \frac{Y_n(x)}{Y_1(x)},$$

tenemos la combinación que buscamos

$$p_1(x)y_1(x) + p_2(x)y_2(x) + \ldots + p_n(x)y_n(x) = 0,$$

ya que $p_i(qx) = p_i(x)$, son constantes y no todas nulas.

Falta ver cuando $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_n = 0$. Observamos que $Y_n(x)$ es el determinante de Casorati para las $n-1$ soluciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x)$. Mediante un proceso inductivo, llegamos a la dependencia lineal deseada. $\square$

Definición 10. *Sea L un operador lineal en q-diferencias de orden $n > 0$. Diremos que el conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ forma un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $L(f) = 0$ si son solunciones linealmente independientes.*

Lema 25. *Si $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de $L(f) = 0$, con L operador lineal en q-diferencias no nulo de orden n, toda solución $y(x)$ puede expresarse como:*

$$y(x) = p_1(x)y_1(x) + p_2(x)y_2(x) + \ldots + p_n(x)y_n(x) = 0.$$

Demostración. Ya que todas ellas son soluciones, $L(y_j) = 0$, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0(x)y(x) + a_1(x)y(qx) + \ldots + a_n(x)y(q^n x) = 0 \\ a_0(x)y_1(x) + a_1(x)y_1(qx) + \ldots + a_n(x)y_1(q^n x) = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_0(x)y_n(x) + a_1(x)y_n(qx) + \ldots + a_n(x)y_n(q^n x) = 0 \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que no todos los coeficientes $a_i(x)$ son nulos. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{pmatrix} y(x) & y(qx) & \ldots & y(q^n x) \\ y_1(x) & y_1(qx) & \ldots & y_1(q^n x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n(x) & y_n(q^n x) & \ldots & y_n(q^n x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(x) \\ a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \ldots & y(q^n x) \\ y_1(x) & y_1(qx) & \ldots & y_1(q^n x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n(x) & y_n(q^n x) & \ldots & y_n(q^n x) \end{vmatrix} = 0$$

Su determinante de Casorati se anula, por lo que aplicando la proposición anterior, las soluciones $y, y_1, \ldots, y_n$. han de ser linealmente dependientes y tenemos una combinación lineal:

$$p(x)y(x) + p_1(x)y_1(x) + p_2(x)y_2(x) + \ldots + p_n(x)y_n(x) = 0,$$

donde $p(x)$ no es nula ya que $y_1, \ldots, y_n$ forman un sistema fundamental de soluciones. $\square$

2.5. Extensión de $\mathbb{C}(\{z\})$

Dado un operador lineal en q-diferencias, $|q| \neq 1$, con coeficientes en $\mathbb{C}((z))$, somos capaces de construir soluciones en de la forma $x^\gamma \cdot f(z)$, donde $\gamma \in \mathbb{C}$ y $f(k) \in \mathbb{C}((z))$. Añadiendo la variable algebraicamente independiente $t = \frac{\ln z}{\ln q}$ (ver lema 26, al final de la sección), ampliamos las soluciones que serán del tipo $x^\gamma \cdot f(z,t)$ donde $f(z,t)$ es un polinomio en t con coeficientes en $\mathbb{C}((z))$. Más adelante vimos que introduciendo el elemento $q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}$ podíamos construir un conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$ generador de soluciones. Buscamos un cuerpo o anillo donde estas soluciones estén todas ellas contenidas. Nos encontramos esencialmente ante dos dificultades:

- Añadir funciones multivaloradas del tipo z^γ y $\ln z$, que no están en el cuerpo $\mathbb{C}(\{z\})$.
- Añadir los objetos formales, que no tienen entidad en el cuerpo de funciones (algunos de ellos sí, cuando son convergentes)

Nuestro cuerpo base será el cuerpo de las series formales convergentes:

$$K = \mathbb{C}(\{z\}).$$

Para abordar el primer problema, consideramos la extensión de cuerpos $K \subseteq \hat{K}$, siendo

$$\hat{K} = \mathbb{C}((z)),$$

el cuerpo de las series formales de Laurent con parte principal finita.

Tomamos el límite inductivo de las funciones meromorfas

$$K_\infty := \underset{a\to-\infty}{\underleftarrow{\text{lím}}}\, \mathcal{M}(\text{Re} < a),$$

donde $(\text{Re} < a)$ designa el semiplano de los complejos que cumplen que su parte real es menor que un real a dado. El cuerpo K_∞ está compuesto por los gérmenes de función

$$\psi = [(h, (\text{Re} < a))],$$

donde $h \in \mathcal{M}(\text{Re} < a)$ y se da la relación de equivalencia $\sim$:

$$(h, (\text{Re} < a)) \sim (h', (\text{Re} < b)) \Leftrightarrow$$

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } h|_{(\text{Re}<c)} = h'|_{(\text{Re}<c)} \text{ y } c < \text{mín}(a,b).$$

Efectivamente K_∞ es un cuerpo, los gérmenes se pueden sumar, multiplicar, si son no nulos su inversa es meromorfa también. Veamos que existe una inmersión de K en K_∞. Para ello interpretamos K como isomorfo a los gérmenes de las funciones meromorfas en el cero, dado que un germen de función en el 0 queda completamente determinado por su desarrollo en el 0. La inmersión de K en K_∞ se construye vía el recubrimiento universal de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dado por la función exponencial $\exp : \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}_z$, dado por $z = \exp(w)$. Más precisamente, si $\psi \in K$, tiene un representante $[(h, B(0, R)]$, h es una función meromorfa en la bola abierta de radio R. La aplicación

$$\bar{h}(w) \mapsto h \circ \exp(w)$$

es meromorfa en el semiplano (Re $<$ $\ln R$). Es fácil ver que $h(\exp(w)) \in \mathcal{M}(\mathrm{Re} < \ln R)$, ya que si $w = a + ib$:

$$|\exp(w)| < R \Leftrightarrow |e^a|\,|e^{ib}| < r \Leftrightarrow (e^a) < R \Leftrightarrow a < \ln R.$$

Así, $(\bar{h}, (\mathrm{Re} < \ln R))$, define un germen en K_∞. Es trivial ver que ese germen no depende del representante de ψ. Tenemos así la aplicación

$$\begin{array}{lrcl} \Phi : & K & \longrightarrow & K_\infty \\ & [(h(z), B(0, R)] & \longmapsto & [(h \circ \exp(w), (\mathrm{Re} < \ln R)] \end{array}$$

Además, Φ es un homomorfismo de anillos pues

$$(h_1 + h_2) \circ \exp(w) = h_1 \circ \exp(w) + h_2 \circ \exp(w),$$

$$(h_1\, h_2) \circ \exp(w) = (h_1 \circ \exp(w))(h_2 \circ \exp(w))$$

$$\Phi(1) = 1, \text{ por lo que es no nulo.}$$

Como K es un cuerpo, Φ es un homomorfismo inyectivo de anillos. Por lo tanto K_∞ es una extensión de K. Identificamos K con $\Phi(K)$ en K_∞.

Aplicación de Monodromía. Dada la translación,

$$\begin{array}{rccl} \tau = \tau_{2\pi i} : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \longmapsto & w + 2\pi i \end{array}$$

llamamos aplicación de monodromía a

$$\begin{array}{rccl} m = \tau^* : & \mathcal{M}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathbb{C}) \\ & g(w) & \longmapsto & g \circ \tau \end{array}$$

Calculemos algunas monodromías a modo de ejemplo:

1) $m(z^p)$. por un lado, $z^p = \exp(p \ln z) = [(\exp(pw), (\mathrm{Re} < 0))]$. Entonces

$$m(\exp(pw)) = \exp(p(w + 2\pi i)) = \exp(pw)\exp(2\pi i p).$$

Por lo tanto, $z^p \in \Phi(K) \Leftrightarrow \exp(2\pi i p) = 1 \Leftrightarrow p \in \mathbb{Z}$.

2) $m(\ln z)$. $\ln z = [(w, (\mathrm{Re} < 0))]$.

$$m(\ln z) = m(w) = (\tau^* \circ \mathrm{Id})(w) = w + 2\pi i = lnz + 2\pi i.$$

Entonces $m(\ln z) \neq \ln z$ por lo que $\ln z$ no pertence a K, como ya sabíamos.

Con esto hemos conseguido un espacio K_∞, donde el logaritmo está bien definido, corresponde al germen de la función identindad en $\mathbb{C}_w$. Los elementos del tipo z^ρ con $\rho \in \mathbb{C}$, corresponden con las funciones en el plano $\mathbb{C}_w$ con la función $\exp(\rho w)$. Tenemos pues un espacio que incluye a $q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)}$, pues $q^{\frac{\mu}{2}(t^2-t)} = \exp(\frac{\mu}{2}((w/\ln q)^2 - (w/\ln q))\ln q)$.

Veamos como se transforma la aplicación σ_q, que es un isomorfismo de cuerpos. Necesitamos que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\sigma_q} & K \\ \Phi\downarrow & & \downarrow\Phi \\ K_\infty & \xrightarrow{\hat{\sigma}_q} & K_\infty \end{array}$$

Es decir, que se cumpla:

$$\begin{array}{ccc} [(h(z), B(0,R)] & \longrightarrow & [(h(qz), B(0, \frac{1}{q}R)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [(h \circ \exp(w), (\mathrm{Re} < \ln R))] & \longrightarrow & [(h(q\,exp(w)), (\mathrm{Re} < \ln \frac{1}{q}R))] \end{array}$$

Para definir $\hat{\sigma}_q$, necesitamos escoger un $\varrho \in \mathbb{C}$ de modo que $\exp(\varrho) = q$. De este modo tenemos por cada ϱ una extensión $\hat{\sigma}_q$ de σ_q que envía $h(w)$ a $h(w + \varrho)$.

Observamos que las constantes respecto $\sigma_q : K \longrightarrow K$

$$C = \{f \in K : \sigma_q(f) = f\}.$$

forman un cuerpo.

De este modo podemos construir $\bar{L}$ como extensión de L. Entonces tenemos dos extensiones de nuestro cuerpo base K, por un lado $\hat{K}$ y por otro K_∞. El teorema de Puiseux nos dice que K es algebraicamente cerrado en $\hat{K}$.

Como K_∞ es una extensión de cuerpos separable, estamos en condiciones de aplicar el siguiente proposición que podemos encontrar en [4](pág 85):

> *Si la extensión* $A \subset B$ *es separable y* A *es algebraicamente cerrado en* C*, entonces el álgebra* $B \otimes_A C$ *es íntegra.*

Es decir, tenemos que el producto tensorial

$$K_\infty \otimes_K \hat{K}$$

es un álgebra íntegro. Por lo tanto podemos construir su cuerpo de fracciones que lo denotaremos por $\mathcal{M}_\infty$, y obtendremos así un cuerpo donde pertenezcan nuestras soluciones.

Veamos ahora cómo incluimos σ_q y L. Tenemos la inyección:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K_\infty \otimes_K \hat{K} \\ h(z) & \longmapsto & h(z) \otimes 1 = 1 \otimes h(z) \end{array}$$

Para que la aplicación σ_q se ajuste a nuestras necesidades de multilinealidad en vez que ver $K_\infty \otimes_K \hat{K}$ como K-módulo, lo podemos ver como K-módulo vía σ_q. Es decir, se cumplirá que dados $h \in K$ y $\alpha \in K_\infty \otimes_K \hat{K}$, definimos:

$$h * \alpha := \sigma_q(h) \cdot \alpha.$$

Así, la aplicación ϕ

$$\begin{array}{ccc} K_\infty \times \hat{K} & \xrightarrow{\phi} & K_\infty \otimes_{K_\sigma} \hat{K} \\ (f, g) & \longmapsto & f \otimes g \end{array}$$

es K-multilineal.

Considerando ahora la aplicación ψ

$$\begin{array}{ccc} K_\infty \times \hat{K} & \xrightarrow{\psi} & K_\infty \otimes_K \hat{K} \\ (f, g) & \longmapsto & f \otimes g \end{array}$$

por la aplicación universal del producto tensorial, existe un único K-homomorfismo $\hat{\sigma}$ definido en

$$K_\infty \otimes_K \hat{K} \xrightarrow{\hat{\sigma}} K_\infty \otimes_{K_\sigma} \hat{K}$$

que hace conmutativo el diagrama, $\phi = \hat{\sigma}\psi$. Es decir, tenemos que

$$\hat{\sigma}(f(z) \otimes g(z)) = f(qz) \otimes g(qz).$$

Lema 26. *Sea* $t = \log x$*, tomando la rama principal del logaritmo. Entonces* t *es algebraicamente independiente sobre* $\mathbb{C}((x))$*.*

Demostración. Si $t \in \mathcal{M}_\infty$ fuera algebraico sobre $\mathbb{C}((x))$ entonces tendría un polinomio mínimo de t es:

$$P = t^n + a_{n-1}(x)t^{n-1} + \ldots + a_0(x) = 0, \qquad a_i(x) \in \mathbb{C}((x)).$$

Derivando,

$$P' = nt^{n-1}t' + a_{n-1}(n-1)t^{n-2}t' + \ldots + a_1(x)t' + a'_{n-1}(x)t^{n-1} + \ldots + a'_0(x) = 0$$

$$(nt^{n-1} + a_{n-1}(x)(n-1)t^{n-2} + \ldots + a_1(x))t' + a'_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a'_0(x) = 0$$

Como $t' = \frac{1}{x}$,

$$\frac{n}{x}t^{n-1} + \frac{a_{n-1}(x)(n-1)}{x}t^{n-2} + \ldots + \frac{a_1(x)}{x} + a'_{n-1}(x)t^{n-1} + \ldots + a'_0(x) = 0$$

Reordenando,

$$(\frac{n}{x} + a'_{n-1}(x))t^{n-1} + (\frac{a_{n-1}(x)(n-1)}{x} + a'_{n-2}(x))t^{n-2} + \ldots + (\frac{a_1(x)}{x} + a'_0(x)) = 0.$$

Entonces, por ser P polinomio mínimo, han de anularse todos los coeficientes de este nuevo polinomio de grado menor en t.

$$a'_{n-1}(x) = \frac{-n}{x}.$$

Si $a_{n-1}(x) = \sum_{j \geqslant k} \alpha_j x^j$, su derivada será $a'_{n-1}(x) = \sum_{j \geqslant k} j\alpha_j x^{j-1}$. Igualando coeficientes, $0 \cdot \alpha_0 \cdot x^{-1} = \frac{-n}{x}$ lo cual es absurdo. □

Proposición 27. *Consideremos* $h_1(x,t), \ldots, h_n(x,t)$ *en el subcuerpo de fracciones de* $\hat{K}[t] \subseteq \mathcal{M}_\infty$*. Sean* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ *cumpliendo que* $r_i + \mathbb{Z} \neq r_j + \mathbb{Z}$*, si* $i \neq j$*. Supongamos que se tiene que*

$$x^{r_1}h_1 + \cdots + x^{r_n}h_n = 0, \tag{2.24}$$

entonces $h_1 = \cdots = h_n = 0$*.*

Demostración. Realizamos la demostración por inducción en n. Si $n = 1$, es obvio. Supongamos el resultado cierto para un número menor de n términos. Reordenando los r_i, podemos suponer que si hubiera alguno de ellos tal que $r_i + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, entonces $i = 1$. Por lo tanto, podemos suponer que $r_2 + \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ y que $h_2 \neq 0$.

Dividiendo la relación (2.24) por x^{r_1}, obtenemos una nueva relación

$$h_1 + x^{r_2-r_1}h_2 + \cdots + x^{r_n-r_1}h_n = 0. \tag{2.25}$$

Llamamos $\alpha_i = r_i - r_1$, $i = 2, \ldots, n$. Como en el cuerpo $\mathcal{M}_\infty$ se extiende el operador de derivación (ver [4]), podemos considerar la derivada de 2.25, obteniendo una nueva relación (R). Considerando $h_1' \times$(2.25)-$h_1 \times$(R), obtenemos:

$$x^{\alpha_2}(h_1'\, h_2 - \frac{\alpha_2}{x} h_1\, h_2 - h_1 h_2') + \cdots + x^{\alpha_n}(\cdots) = 0.$$

Por hipótesis de inducción:

$$h_1'\, h_2 - \frac{\alpha_2}{x} h_1\, h_2 - h_1 h_2' = 0.$$

Dividiendo por h_2^2 esta última expresión, lo que obtenemos es:

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)' = \frac{\alpha_2}{x}\left(\frac{h_1}{h_2}\right). \tag{2.26}$$

Sea $h = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)$, podemos escribir $h = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)$, siendo $a_1, a_2 \in \hat{K}[t]$. Escribiendo

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1,0}(x) + a_{1,1}(x)\, t + \cdots + a_{1,r}(x)\, t^r \\ a_2 &= a_{2,0}(x) + a_{2,1}(x)\, t + \cdots + a_{2,s}(x)\, t^s. \end{aligned}$$

El coeficiente de t^{r+s} en la expresión (2.26) obtenemos

$$\left(\frac{a_{1,r}}{a_{2,s}}\right)' = \frac{\alpha_2}{x}\left(\frac{a_{1,r}}{a_{2,s}}\right)$$

Dado que $a_{1,r}(x), a_{2,s}(x) \in \hat{K}$, esta relación es sólo posible si $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$, en contradicción con la hipótesis. $\square$

Proposición 28. *Sean $g_1, \ldots, g_n$ elementos del cuerpo $\mathcal{M}_\infty$ de la forma $x^{r_1}h_1 + \cdots + x^{r_n}h_n$, siendo $h_i \in \hat{K}(t)$. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Q}$, dos a dos diferentes. Supongamos que*

$$q^{\frac{\mu_1}{2}(t^2-t)}\, g_1 + \cdots + q^{\frac{\mu_n}{2}(t^2-t)}\, g_n = 0. \tag{2.27}$$

Entonces $g_1 = \cdots = g_n = 0$.

Demostración. Por inducción en n. El caso $n = 1$ es obvio. Aplicando σ_q a la expresión (2.27) obtenemos

$$x^{\mu_1} q^{\frac{\mu_1}{2}(t^2-t)} \sigma_q(g_1) + \cdots + x^{\mu_n} q^{\frac{\mu_n}{2}(t^2-t)} \sigma_q(g_n) = 0. \qquad (2.28)$$

Multiplicando (2.27) por x^{μ_1} y restando (2.28) y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos:

$$\sigma_q(g_2) = x^{\mu_1-\mu_2} g_2.$$

Como g_2 es de la forma $x^{r_1}h_1 + \cdots + x^{r_n}h_n$, siendo $h_i \in \hat{K}(t)$. Por un argumento similar a la anterior proposición se demuestra que esta última relación es imposible si $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$, en contradicción con nuestra hipótesis. $\square$

Apéndice A

Series de potencias formales

Sea R un anillo conmutativo. Usaremos las siguientes notaciones.

- Anillo de polinomios en x con coeficientes en R:

$$R[x] = \{f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R\}.$$

- Anillo de las funciones racionales en x con coeficientes en R:

$$R(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)} \,:\, f(x) \in R[x],\, g(x) \in R[x]^*\}.$$

- Anillo de las series formales en x con coeficientes en R:

$$R[[x]] = \{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R\}.$$

- Anillo de las series formales de Laurent con parte principal finita y coeficientes en R:

$$R((x)) = \{f(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i\, x^i : k \in \mathbb{Z}, a_i \in R\}.$$

- $R\{x\} \equiv$ gérmenes de las funciones holomorfas en 0
- $R(\{x\}) \equiv$ gérmenes en de las funciones meromorfas en 0

Si R es un cuerpo, se dan las contenciones:

$$\begin{array}{ccccc} R[x] & \subseteq & R\{x\} & \subseteq & R[[x]] \\ \cap| & & \cap| & & \cap| \\ R(x) & \subseteq & R(\{x\}) & \subseteq & R((x)) \end{array}$$

Proposición 29. *Sea R un anillo conmutativo. Un elemento $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}$ es inversible en $R[[x]]$ si y solo si a_0 tiene inverso en R.*

Demostración. Buscamos un elemento $g(x) \in R[[x]]$ con $f(x)g(x) = 1$.

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i\, b_j\, x^{i+j} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}\right) x^k.$$

Para que esto sea igual a 1, los coeficientes de x^k han de ser nulos salvo para $k = 0$, en este caso 1.

$$a_0\, b_0 = 1$$

Para que esto se de, a_0 ha de tener inverso en R. De la otra identificación deducimos que:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i} = 0$$

Por otro lado

$$a_0\, b_k = -\sum_{i=1}^{k} a_i\, b_{k-i} \quad \text{luego} \quad b_k = -b_0 \sum_{i=1}^{k} a_i\, b_{k-i}$$

Por lo tanto $f(x)$ tiene inverso en $R[[x]]$ si y solo existe a_0^{-1} en R. □

Proposición 30. *Sea R un anillo conmutativo. Si R es un cuerpo, entonces $R((x))$ es un cuerpo.*

Demostración. Sea $f(x) \neq 0$ un elemento de $R((x))$. Podemos escribir $f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, x^n$ con $a_k \neq 0$. Por ser R un cuerpo, a_k es invertible. Además,

$$f(x) = x^k\, g(x), \quad \text{donde} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \;\in R[[x]].$$

El coeficiente de x^0 de $g(x)$ es precisamente $a_k \neq 0$, por lo que por la proposición anterior, $g(x)$ tiene inverso en $R[[x]]$, y por lo tanto en $R((x))$. Veamos que $x^{-k}\, g^{-1}$ es el inverso de $f(x)$:

$$f(x)\, x^{-k}\, g^{-1} = x^k\, g(x)\,,x^{-k}\, g^{-1} = 1.$$

Tenemos que $f(x)$ es invertible en $R((x))$ por lo que es un cuerpo. □

Apéndice B

Productos infinitos de funciones holomorfas

Productos infinitos de números complejos

Definición 11. *Sea una sucesión de números complejos* $(a_j)_{j\geqslant k}$. *Para cada* $k \leqslant m \leqslant n$ *denotamos la sucesión de productos parciales por:*

$$p_{k,n} := a_k\, a_{k+1} \ldots\, a_n = \prod_{j=k}^{n} a_j.$$

Diremos que el producto $\prod a_j$ *es convergente si existe un índice* m *tal que la sucesión* $(p_{m,n})_{n\geqslant m}$ *tiene límite no nulo* $\hat{a}_m$. *El valor de* $\prod a_j$ *es:*

$$\prod_{j\geqslant k} a_j := a_k\, a_{k+1} \ldots a_{m-1}\, \hat{a}_m = a.$$

El valor a es independiente del índice m: como $\hat{a}_m \neq 0$, tenemos que $a_n \neq 0$ si $n \geqslant m$; luego fijado un $l > m$, la sucesión $(p_{l,n})_{n\geqslant l}$ también tiene un límite $\hat{a}_l \neq 0$ y $a = a_k\, a_{k+1} \ldots a_{l-1}\, \hat{a}_l$.

Observaciones 31. *a) Un producto* $\prod a_j$ *es convergente sí y solo sí la sucesión* (a_j) *contiene un número finito de ceros y la sucesión de productos parciales que no incluyan ceros tiene límite no nulo.*

b) Un producto convergente $\prod a_j$ *es cero sí y solo sí al menos uno de sus factores es cero.*

c) Si $\prod_{j\geqslant 0} a_j$ *converge, entonces* $\hat{a}_n := \prod_{j=n}^{\infty} a_j$ *existe para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Además,* $\lim \hat{a}_n = 1$ *y* $\lim a_n = 1$. *En efecto, podemos suponer que* $a := \prod a_j \neq 0$. *Entonces* $\hat{a}_n = \frac{a}{p_{0,n-1}}$. *Como* $\lim p_{0,n-1} = a$, *el límite de los* $\hat{a}_n$ *ha de ser* 1. *Para ver que* $\lim a_n = 1$ *basta con ver que para todo* n *y* $\hat{a}_n \neq 0$ *se tiene que* $a_n = \frac{\hat{a}_n}{\hat{a}_{n+1}}$.

Productos infinitos de funciones Sea X un espacio métrico localmente compacto. Sabemos que los conceptos de convergencia compacta y convergencia uniforme local coinciden en este espacio.

Definición 12. *Consideremos una sucesión de funciones $f_j \in \mathcal{C}(X)$. Diremos que el producto de funciones $\prod f_j$ converge uniformemente en los compactos de X, o alternativamente, converge compactamente en X, si para cada conjunto compacto $K \subset X$ existe un entero m tal que la sucesión de funciones:*

$$p_{m,n} = f_m f_{m+1} \dots f_n, n \geqslant m$$

converge uniformemente en K hacia una función $\hat{f}_m$ que no se anula.

En particular, para cada $x \in X$, el producto $\prod f_j(x)$ existe:

$$f(x) := \prod f_j(x) \in \mathbb{C}.$$

Además, dado un compacto K se cumple que:

$$f|K = (f_0|K) \dots (f_{m-1}|K)\hat{f}_m \tag{B.1}$$

Proposición 32. *a) Si el producto $\prod f_j$ converge compactamente hacia f en X entonces f es continua en X y la sucesión f_j converge compactamente en X hacia 1.*

b) Si los productos $\prod f_j$ y $\prod g_j$ convergen compactamente en X, entonces $\prod f_j g_j$ también y se tiene que $\prod f_j g_j = \prod f_j \prod g_j$.

c) Sea G es un dominio en $\mathbb{C}$ (abierto conexo no vacío). Si $\prod f_j$ es un producto de funciones holomorfas en G que converge compactamente en G entonces su límite f también es holomorfo en G.

Proposición 33. *Criterio de convergencia Sea $f_j \in \mathcal{C}(x), j \geqslant 0$. Supongamos que la funciones f_j tienen un logaritmo en X a partir de un cierto índice, es decir, $\exists \ln f_j \in \mathcal{C}(x)$ cuando $j \geqslant m$. Si $\sum_{j \geqslant m} \ln f_j$ converge compactamente en X hacia una funcion continua $s \in \mathcal{C}(x)$, entonces $\prod f_j$ converge compactamente en X hacia $f_0 f_1 \dots f_{m-1} \exp s$.*

Demostración. Como la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{j=m}^{n} \ln f_j$ converge en los compactos hacia una función s, la sucesión de productos parciales:

$$p_{m,n} = \prod_{j=m}^{n} f_j = \exp\left(\sum_{j=m}^{n} \ln f_j\right) = \exp s_n$$

converge en los compactos hacia $\exp s \in X$. Como la función exponencial $\exp s$ nunca se anula, tenemos el resultado. $\square$

Convergencia normal El criterio anterior es complicado a la hora de aplicar puesto que las series con logaritmos son difíciles de manejar. Por ello, es interesante introducir un criterio de convergencia más fuerte pero más manejable, la convergencia normal, que asegura la convergencia uniforme en los compactos para todos los productos parciales y todas las reordenaciones. Nótese que un producto puede converger compactamente sin converger normalmente.

Definición 13. *Un producto* $\prod f_j$ *con* $f_j = 1 + g_j \in \mathcal{C}(x)$ *se dice que es normalmente convergente en* X *si la serie* $\sum g_j$ *converge normalmente en* X*, es decir* $\sum_j |g_j|_X$ *converge.*

Observaciones 34. *Se comprueba fácilmente que si* $\prod_{j\geqslant 0} f_j$ *converge normalmente en* X *entonces:*

a) Si $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una biyección, el producto* $\prod_{j\geqslant 0} f_{\tau(j)}$ *converge normalmente en* X*.*

b) Cada subproducto $\prod_{k\geqslant 0} f_{j_k}$ *converge normalmente en* X*.*

c) El producto converge compactamente en X*.*

Teorema 35 (Teorema de reordenación)**.** *Sea* $\prod_{j\geqslant 0} f_j$ *un producto normalmente convergente en* X*. Entonces existe una función* $f : X \to \mathbb{C}$ *tal que para cada biyección* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, la reordenación del producto* $\prod_{j\geqslant 0} f_{\tau(j)}$ *converge compactamente a* $f \in X$*.*

Demostración. Sea $w \in B(0, 1)$.

$$\ln(1 + w) = \sum_{j\geqslant 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\, w^j$$

$$|\ln(1 + w)| = \left|\sum_{j\geqslant 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\, w^j\right| \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{j-1}}{j}\, w^j\right| \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \frac{|w|^j}{j}$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 1} |w|^j \leqslant |w|\,(1 + |w| + |w|^2 \ldots) = |w|\,\frac{1}{1 - |w|}$$

Si $|w| \leqslant \frac{1}{2}$ entonces $\frac{1}{1-|w|} \geqslant \frac{1}{2}$ y tnemos que:

$$|\ln(1 + w)| \leqslant 2\,|w| \tag{B.2}$$

Sea K un compacto en X. Consideramos la sucesión de funciones $g_n = f_n - 1$. Tenemos que $|g_n|_K \leqslant \frac{1}{2}$ para todo natural a partir de un cierto m, ya que por hipótesis, $\prod_j f_j$ en normalmente convergente lo cual implica que dado un compacto K, la suma $\sum_j |g_j|_K$ converge, luego $|g_j| \to 0$. Entonces:

$$\ln f_n = \sum_j \frac{(-1)^{j-1}}{j} g_n^j,$$

donde $|\ln f_n|_K \leqslant 2\,|g_n|_K$ por B.2. Tenemos que:

$$\sum_{j \geqslant m} |\ln f_j|_K \leqslant \sum_{j \geqslant m} 2\,|g_j|_K < \infty.$$

Por el teorema de reordenación de series (REF I.0.4.3), la serie $\sum_{j \geqslant m} \ln f_{\sigma(j)}$ converge uniformemente en K (compactamente) hacia $\sum_{j \geqslant m} \ln f_j$ para cada biyección σ en $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant m\}$. Entonces, los productos $\prod_{j \geqslant} f_{\sigma(j)}$ y $\prod_{j \geqslant m} f_j$ convergen en K hacia una misma función.

Una biyección en los naturales se diferencia de una permutación solo de un número finito de traslaciones, que no alteran la convergencia.

$$\exists\, \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \#\{j : \tau(j) \neq j\} \text{ es finito.}$$
$$\exists\, \sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \{j : \sigma'(j) = j,\, j = 0, 1, \ldots, m\}$$

Entonces $\sigma = \tau \circ \sigma'$ por lo cual tomando $\tau^{-1} \circ \sigma = \sigma'$.

Por lo cual existe una función $f : X \to \mathbb{C}$ tal que cada producto $\prod_{j \geqslant 0} f_{\tau(j)}$ converge compactamente en X hacia una función f. □

Corolario 36. *Sea $f = \prod_{j \geqslant 0} f_j$ una función que converge normalmente en X. Entonces se cumple que:*

a) Cada producto $\hat{f}_n = \prod_{j \geqslant n} f_j$ converge normalmente en X y además se tiene que:

$$f = f_0\, f_1\, \ldots f_{n-1}\, \hat{f}_n$$

b)Si $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ es una partición de los naturales de conjuntos N_k disjuntos dos a dos entre sí, entonces cada producto $\prod_{j \in N_j} f_j$ converge normalmente en X y

$$f = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j \in N_k} f_j \right).$$

Productos normalmente convergentes de funciones holomorfas El conjunto de ceros $Z(f)$ de una función no nula y holomorfa en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ es localmente finito en G, por lo que $Z(f)$ es a lo sumo infinito numerable. Para un conjunto finito de funciones no nulas $f_0,\, f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(G)$,

$$Z(f_0\, f_1 \ldots f_n) = \bigcup_{k=0}^{n} Z(f_j)$$

$$o_c(f_0\, f_1 \dots f_n) = \sum_{j=0}^{n} o_c(f_j), \quad c \in G,$$

donde $o_c(f)$ es el orden del cero de f en c. Para productos infinitos, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 37. *Sea $f = \prod f_j$, con $f_j \neq 0$ un producto normalmente convergente en G de funciones holomorfas en G. Entonces $f \neq 0$ y se cumple que:*

$$Z(f) = \bigcup Z(f_j) \qquad y \qquad o_c(f) = \sum o_c(f_j) \qquad \forall c \in G$$

(Nota: este resultado también es cierto si se da solo la convergencia en los compactos)

Demostración. Fijamos un punto c en G. El producto $f(c) = \prod f_j(c)$ converge. Tenemos que a partir de un índice n, $f_j(c)$ ha de ser distinto de 0 (ya que un producto convergente solo puede tener un número finito de ceros). Tenemos que $f = f_0\, f_1\, \dots f_{n-1}\, \hat{f}_n$, con $\hat{f}_n = \prod_{j \geqslant n} f_j$ holomorfa en G. Por lo tanto podemos calcular el orden del cero de f en el punto c:

$$o_c(f) = \sum_{j=0}^{n-1} o_c(f_j) \;+\; o_c(\hat{f}_n).$$

Se da que $o_c(\hat{f}_n) = 0$ ya que $\hat{f}_n(c) \neq 0$. Con esto queda probada la regla aditiva de productos infinitos. Se tiene que:

$$Z(f) = \bigcup Z(f_j).$$

Como las funciones f_j son no nulas, los conjuntos $Z(f_j)$ son numerables por lo que $Z(f)$, unión de numerables es numerable, lo cual implica que $f \neq 0$. $\square$

Bibliografía

[1] C Raymond Adams. On the linear ordinary q-difference equation. *Annals of mathematics*, pages 195–205, 1928.

[2] Clarence Raymond Adams. Linear q-difference equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 37(6):361–400, 1931.

[3] Paul Mason Batchelder. *An introduction to linear difference equations.* New York, 1967.

[4] J Cano and JP Ramis. Théorie de galois différentielle, multisommabilité et phénomenes de stokes.

[5] Robert Daniel Carmichael. The general theory of linear q-difference equations. *American journal of mathematics*, 34(2):147–168, 1912.

[6] Gregory Derfel and Fritz Vogl. Divide-and-conquer recurrences—classification of asymptotics. *aequationes mathematicae*, 60(3):243–257, 2000.

[7] Lucia Di Vizio and Jacques Sauloy. Outils pour la classification locale des équations aux g-différences linéaires complexes. 2009.

[8] Gareth A Jones and David Singerman. *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, 1987.

[9] Serge Lang. Algebra revised third edition. *Graduate Texts in Mathematics*, 1(211):ALL–ALL, 2002.

[10] Thomas E Mason. On properties of the solutions of linear q-difference equations with entire function coefficients. *American journal of mathematics*, 37(4):439–444, 1915.

[11] J Moulin, Jean-Pierre Ramis, and André Warusfel. Cours de mathématiques pures et appliquées. volume 1. algèbre et géométrie. 2010.

[12] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*, volume 122. Springer Science & Business Media, 2012.

[13] Reinhold Remmert. *Classical topics in complex function theory*, volume 172. Springer Science & Business Media, 2013.

[14] J. Sauloy. Etude locale des équations aux q-différences linéaires analytiques dans le champ complexe: Classification et théorie de galois.

[15] L. Schlesinger. *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. Number v. 2 in Bibliotheca Mathematica Teubneriana. B. G. Teubner, 1898.

[16] Michael F Singer. Formal solutions of differential equations. *Journal of Symbolic Computation*, 10(1):59–94, 1990.