Programación por Metas Lexicográficas con Criterios Fraccionales No Lineales

Teresa Peña García[1,2], **Carmen Castrodeza Chamorro**[1]

[1] *Departamento de Economía Aplicada, Universidad de Valladolid, España*

[2] *Premio Extraordinario de Doctorado (A.D.E.), Curso 2005-2006*

Resumen En este trabajo se analiza la resolución de un modelo de programación fraccional multiobjetivo bajo el enfoque de la programación por metas minimax lexicográficas. Cuando se utiliza este enfoque nos encontramos con la dificultad de tener que resolver para cada nivel de prioridad un problema no convexo. Para obviar esta dificultad proponemos ciertas transformaciones en dicho problema de tal forma que la solución del mismo pueda ser obtenida utilizando algoritmos estándar de programación convexa.

Palabras clave Programación fraccional no lineal, programación por metas.
Clasificación JEL C61, C69.

1 Introducción

En el mundo real las decisiones, con frecuencia, no se toman en base a un único criterio sino que muchas veces se desean optimizar simultáneamente varios objetivos, generalmente en conflicto, sujetos a un conjunto de restricciones. Surge

Correspondencia a: Teresa Peña García (e-mail: maitepe@eco.uva.es)

así lo que se conoce como programación multiobjetivo. Dentro del campo de la programación multiobjetivo la mayor parte de la bibliografía existente hace especial énfasis en los problemas lineales multiobjetivo, donde todas las funciones objetivo son lineales y el conjunto de restricciones es un poliedro convexo, o en los problemas convexos multiobjetivo, en los que el conjunto de restricciones es convexo y las funciones objetivo son convexas si se tratan de minimizar y cóncavas si se tratan de maximizar. Sin embargo, en numerosas ocasiones los problemas reales no se formulan adecuadamente a través de modelos lineales o convexos sino que necesitan ser modelizados a través de un cociente de funciones. Aparecen así los problemas con funciones objetivo fraccionales que, en general, no son cóncavas ni convexas y a los que se denomina problemas o programas fraccionales multiobjetivo.

Los objetivos fraccionales se presentan repetidamente en el campo de la planificación económica. Teniendo en cuenta que la eficiencia de un sistema viene generalmente caracterizada por el ratio de términos técnicos y/o económicos, maximizar la eficiencia de un sistema da lugar a un objetivo fraccional como maximizar ganancia/inversión, maximizar output/input, maximizar ganancia/riesgo, minimizar coste/tiempo, etc. En Stancu-Minasian (1997) se muestra una visión amplia de las aplicaciones de la programación fraccional no sólo en el ámbito económico sino también en áreas tales como la teoría de la información, el análisis numérico, la teoría de juegos y la teoría de la localización. Además, se señala también cómo los objetivos fraccionales aparecen a veces de forma indirecta, por ejemplo, al hallar el determinista equivalente de un objetivo estocástico lineal. Algunas de las aplicaciones mencionadas por este autor son sugerencias interesantes que podrían servir para abordar problemas reales en el futuro pero que en la actualidad no se han desarrollado debido fundamentalmente a que los modelos con funciones objetivo fraccionales son más difíciles de tratar desde el punto de vista computacional.

En este trabajo estudiamos la resolución bajo la técnica de programación por metas lexicográficas de un problema con k objetivos fraccionales de la forma $\dfrac{n_i(x)}{d_i(x)}$, $i = 1, \ldots, k$ y un conjunto factible S donde:

- $S = \{x \in D \subseteq \mathbb{R}^n |\, g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m\}$ siendo D un conjunto convexo y abierto, $g_j : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, m$ funciones continuas y convexas y S no vacío y compacto.
- $n_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k$ funciones continuas y convexas, $d_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k$ funciones continuas, cóncavas y estrictamente positivas en S. Además, n_i es estrictamente positiva en S si d_i no es lineal.

En la literatura hay pocas referencias relativas a programación por metas con criterios fraccionales. Además, la mayor parte de las mismas se centran en problemas con criterios fraccionales lineales Hannan (1977, 1981), Soyster y Lev (1978), Kornbluth and Steuer (1981), Caballero y Hernández (2006) y son escasas las relativas a problemas con criterios fraccionales no lineales Jagannathan (1985), Pal y Basu (1995).

La técnica de la programación por metas necesita un conocimiento *a priori* de las preferencias del centro decisor. Dichas preferencias vendrán reflejadas, de un lado, en la fijación de niveles de aspiración para cada objetivo y, de otro, en la ordenación de las funciones objetivo por su importancia relativa para el decisor, estableciéndose entre las mismas un sistema de prioridades excluyentes (preemptive priority) e incluso ponderaciones dentro de cada nivel de prioridad, si hubiere lugar. Una vez fijados los niveles de aspiración, esta técnica consiste en encontrar aquellas soluciones que verifiquen todos los niveles de aspiración impuestos a las funciones objetivo. Tales soluciones se denominan soluciones satisfactorias. En caso de no existir soluciones satisfactorias, este método trata de encontrar aquellas soluciones que estén "más cerca" de la verificación de las metas. El centro decisor, mediante el establecimiento de un orden de prioridades, indica a qué metas está más dispuesto a renunciar.

En este trabajo vamos a suponer que el centro decisor ha impuesto un nivel de aspiración mínimo para cada uno de los objetivos, $b_i,\ i = 1, \ldots, k$, dando lugar a las siguientes metas: $\dfrac{n_i(x)}{d_i(x)} \leq b_i,\ i = 1, \ldots, k$. Teniendo en cuenta las hipótesis del problema, b_i será estrictamente positivo en los casos en los que el denominador del ratio sea una función no lineal y podrá tener cualquier signo para aquellos ratios con denominador lineal. Supondremos también que ha dividido las metas en $l(l \leq k)$ niveles de prioridad. Bajo estos supuestos el planteamiento general del problema a resolver sería:

$$\begin{aligned} & \text{lex } \min[h_1(\rho),\, h_2(\rho), \ldots,\, h_l(\rho)], \\ \text{s.a. } & \frac{n_i(x)}{d_i(x)} - \rho_i \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & \rho_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & x \in S, \end{aligned} \tag{1}$$

donde x son las variables de decisión del modelo, $\rho_i,\ i = 1, \ldots, k$, son las conocidas como variables de desviación positivas, y $h_s(\rho),\ s = 1, \ldots, l$ es una función de las variables de desviación positivas correspondientes al nivel de prioridad s.

Aunque lo habitual en la literatura dedicada a la programación por metas es que dada una meta de este tipo $\dfrac{n_i(x)}{d_i(x)} \leq b_i,\ i = 1, \ldots, k$ se incluyan variables de desviación tanto positivas como negativas, obteniéndose una igualdad del tipo $\dfrac{n_i(x)}{d_i(x)} + \eta_i - \rho_i = b_i,\ i = 1, \ldots, k$, en (1) las expresiones anteriores han sido sustituidas por $\dfrac{n_i(x)}{d_i(x)} - \rho_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, k$, con objeto de facilitar la resolución del problema. Ambos conjuntos de expresiones conducen a los mismos resultados ya que teniendo en cuenta que bajo nuestras hipótesis todas las metas son de la forma $\leq$, únicamente interesa minimizar el exceso de realización de una meta y no el defecto y por tanto la variable desviación negativa, η_i, no aparece en la función objetivo actuando sólo como una variable de holgura para transformar la restricción en desigualdad en una en igualdad (véase Romero (1991)).

La minimización lexicográfica implica la minimización ordenada de sus componentes. En otras palabras, se encuentra primero el valor más pequeño de $h_1(\rho)$, seguidamente se busca el valor más pequeño de $h_2(\rho)$ compatible con el valor de $h_1(\rho)$ previamente obtenido y así sucesivamente.

En la programación por metas lexicográfica la función $h_s(\rho)$ a minimizar en cada nivel de prioridad puede tomar diferentes formas (véase Romero (2004)). Para analizar la resolución de (1) hemos considerado que $h_s(\rho) = \max_{i \in Q_s} w_i \rho_i,\ s = 1, \ldots, l$ (enfoque minimax lexicográfico) donde $Q_s,\ s = 1, \ldots, l$ denota el nivel de prioridad s, $i \in Q_s$ si la meta $\dfrac{n_i(x)}{d_i(x)} \leq b_i$ está en el nivel s y $w_i,\ i \in Q_s$ son pesos estrictamente positivos que representan la importancia relativa dada por el centro decisor a las variables de desviación ρ_i asociadas al nivel s.

Cuando se analiza la resolución de (1) bajo el enfoque considerado nos encontramos con la dificultad de tener que resolver para cada nivel de prioridad un problema no convexo. En este trabajo estudiamos cómo obviar esta dificultad intentando que el correspondiente problema pueda ser resuelto utilizando algoritmos estándar de programación convexa. Para llevar a cabo esa tarea vamos a distinguir dos apartados. En el primero analizaremos el caso más sencillo, es decir, supondremos que en cada nivel de prioridad hay una sola meta ($l = k$). En el segundo, admitiremos que haya más de una meta por nivel de prioridad ($l < k$) agrupadas de forma minimax.

2 Una meta por nivel de prioridad

Si hay una sola meta por nivel de prioridad y suponemos, sin pérdida de generalidad, que las funciones se hallan ordenadas de partida por niveles, el problema (1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{lex } \min[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k], \\ \text{s.a. } & \frac{n_i(x)}{d_i(x)} - \rho_i \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & \rho_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & x \in S. \end{aligned} \tag{2}$$

En el nivel de prioridad s el problema a resolver será:

$$\begin{aligned} & \min \rho_s, \\ \text{s.a.} \quad & \frac{n_s(x)}{d_s(x)} - \rho_s \leq b_s, \\ & \rho_s \geq 0, \\ & x \in S', \end{aligned} \tag{3}$$

donde $S' = \{x \in S | \; \frac{n_h(x)}{d_h(x)} - \rho_h \leq b_h, \; \rho_h \leq \; \rho_h^*, \; \rho_h \geq 0, \; h = 1, \ldots, s-1\}$, siendo ρ_h^* el valor óptimo de ρ_h al resolver el problema correspondiente al nivel de prioridad h.

S' se puede escribir, eliminando las variables de desviación, de la siguiente forma:

$$S' = \{x \in S | \; \frac{n_h(x)}{d_h(x)} \leq b_h^*, \quad h = 1, \ldots, s-1\}, \tag{4}$$

donde:

- $b_h^* = b_h$ para los índices h pertenecientes a los niveles de prioridad en los que se ha satisfecho la meta asociada al mismo, es decir, para los cuales $\rho_h^* = 0$ y
- $b_h^* = b_h + \rho_h^*$ para los índices h pertenecientes a los niveles de prioridad en los que no se ha satisfecho la meta.

Se observa que bajo las hipótesis del problema, las funciones $n_h(x) - b_h^* d_h(x)$ son convexas. Por tanto, S', escrito como en (4), es un conjunto convexo. En este apartado cuando hablemos de S' supondremos que está escrito como en (4).

Aunque S' es convexo, el conjunto factible de (3) no lo es, ya que $\frac{n_s(x)}{d_s(x)} - \rho_s$ no tiene por qué ser una función cuasiconvexa. Para evitar el problema que ocasiona la no convexidad del conjunto factible de (3) y facilitar su resolución, se podría pensar en, antes de introducir la variable de desviación, escribir la meta $\frac{n_s(x)}{d_s(x)} \leq b_s$ de la siguiente forma: $n_s(x) - b_s d_s(x) \leq 0$ y, a continuación, introducir la variable de desviación ρ'_s: $n_s(x) - b_s d_s(x) - \rho'_s \leq 0$, con lo cual el problema a resolver sería:

$$\begin{aligned} &\min \rho'_s, \\ \text{s.a.}\ \ & n_s(x) - b_s d_s(x) - \rho'_s \leq 0, \\ & \rho'_s \geq 0, \\ & x \in S'. \end{aligned} \tag{5}$$

El problema (5) es convexo, ya que bajo las hipótesis del problema $n_s(x) - b_s d_s(x) - \rho'_s$ es una función convexa. Además, en el caso particular de que $n_j(x)$ y $d_j(x)$, $j = 1, \ldots, s$ sean funciones lineales y S un poliedro convexo, es un problema lineal.

Es evidente que desde el punto de vista computacional, el problema (5) es más sencillo de resolver que el problema (3). El inconveniente está en que los problemas (3) y (5) no son, en general, equivalentes. Para mantener la equivalencia, cualquier operador matemático que se aplique a una meta se debe aplicar también a las variables de desviación, y en nuestro caso no sucede así. Si multiplicamos por $d_s(x)$ la meta $\dfrac{n_s(x)}{d_s(x)} \leq b_s$ se obtiene: $n_s(x) - b_s d_s(x) - \rho_s d_s(x) \leq 0$ con lo cual el problema equivalente a (3) es:

$$\begin{aligned} &\min \rho_s, \\ \text{s.a.}\ \ & n_s(x) - b_s d_s(x) - \rho_s d_s(x) \leq 0, \\ & \rho_s \geq 0, \\ & x \in S'. \end{aligned} \tag{6}$$

Sin embargo en (5) la variable de desviación no aparece multiplicada por $d_s(x)$.

A pesar de no ser, en general, problemas equivalentes, en algunas situaciones la solución del problema convexo (5) proporciona la solución del problema (3) e incluso en los casos en los que esto no es posible, resolviendo el problema (5) podremos extraer información útil acerca del problema (3). Veamos la relación exacta entre ambos problemas.

– Si al resolver el problema (5) la solución óptima es (x^*, ρ'^*_s) con $\rho'^*_s = 0$, entonces $n_s(x^*) - b_s d_s(x^*) \leq 0$. Dado que x^* pertenece a S' y $\dfrac{n_s(x^*)}{d_s(x^*)} \leq b_s$, tenemos que (x^*, ρ_s^*) con $\rho_s^* = 0$ es una solución factible para el problema (3) y es obvio que una solución óptima del mismo. Además, siempre que al resolver el problema (5) $\rho_s'^* = 0$, es evidente que cualquier solución óptima x^* de (3) puede ser obtenida resolviendo (5).

– Si al resolver el problema (5) la solución óptima es $(x^*, \rho_s'^*)$ con $\rho_s'^* > 0$, entonces podemos afirmar que no existe solución satisfactoria para el problema (3), es decir, no existe ningún punto de S' en el que se verifique la meta $\dfrac{n_s(x)}{d_s(x)} \leq b_s$ impuesta en ese nivel. Este hecho es fácil de comprobar. Si $\rho_s'^* > 0$, no existe $\hat{x} \in S'$ tal que $n_s(\hat{x}) - b_s d_s(\hat{x}) \leq 0$, ya que, en caso contrario, $(\hat{x}, \hat{\rho}_s')$ con $\hat{\rho}_s' = 0$ sería solución óptima de (5) y no $(x^*, \rho_s'^*)$ con $\rho_s'^* > 0$ como se ha supuesto. Por tanto, podemos asegurar que $n_s(x) - b_s d_s(x) > 0$ $\forall x \in S'$, es decir, $\dfrac{n_s(x)}{d_s(x)} > b_s$, $\forall x \in S'$. Sin embargo, en este caso, x^* no tiene por qué ser solución óptima de (3).

Si $\rho_s'^* \geq 0$, $\dfrac{n_s(x)}{d_s(x)} > b_s \ \ \forall x \in S'$, entonces el problema (3) es equivalente al siguiente problema fraccional mono-objetivo:

$$\begin{aligned} &\min \ \frac{n_s(x)}{d_s(x)}, \\ &\text{s.a. } \ x \in S'; \end{aligned} \tag{7}$$

mientras que (5) es equivalente a:

$$\begin{aligned} &\min \ n_s(x) - b_s d_s(x), \\ &\text{s.a. } \ x \in S'. \end{aligned} \tag{8}$$

Es obvio que la solución de ambos problemas no tiene por qué coincidir. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 1 Supongamos que el planteamiento del problema (3) es:

$$\begin{aligned} &\min\ \rho_s, \\ \text{s.a.}\ &\frac{0.25x_1^2 - x_2 + 6x_1 + 5.5}{2 + 2x_1} - \rho_s \leq 1, \\ &\rho_s \geq 0, \\ &(x_1, x_2) \in S', \end{aligned} \tag{9}$$

siendo $S' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}|\ 15x_2 - 55x_1 \leq 9.5,\ 0.1 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 0.75\}$.

El problema convexo asociado (5) es:

$$\begin{aligned} &\min \rho'_s, \\ \text{s.a.}\ &(0.25x_1^2 - x_2 + 6x_1 + 5.5) - (2 + 2x_1) - \rho'_s \leq 0, \\ &\rho'_s \geq 0, \\ &(x_1, x_2) \in S'. \end{aligned} \tag{10}$$

En la Figura 1 aparece sombreada la región factible S', en negro las curvas de nivel de la función $f_1(x_1, x_2) = \dfrac{0.25x_1^2 - x_2 + 6x_1 + 5.5}{2 + 2x_1}$ y en rojo las curvas de nivel de la función $f_2(x_1, x_2) = (0.25x_1^2 - x_2 + 6x_1 + 5.5) - (2 + 2x_1)$.

1. Si la solución óptima de (5) es $(x^*, \rho_s'^*)$ con $\rho_s'^* = 0$, entonces (x^*, ρ_s^*) con $\rho_s^* = 0$ será solución óptima del problema (3).
2. Si, por el contrario, la solución óptima del problema (5) es $(x^*, \rho_s'^*)$ con $\rho_s'^* > 0$, x^* no tiene por qué ser solución óptima de (3). Resolver, entonces, el problema fraccional monoobjetivo (7), que es equivalente en este caso a (3). Este problema puede reducirse a un problema convexo utilizando el cambio de variable propuesto por Schaible (1976). Un punto x^* será una solución óptima de (7) si y sólo si $(x^*, \rho_s^* = \dfrac{n_s(x^*)}{d_s(x^*)} - b_s)$ es una solución óptima de (3).

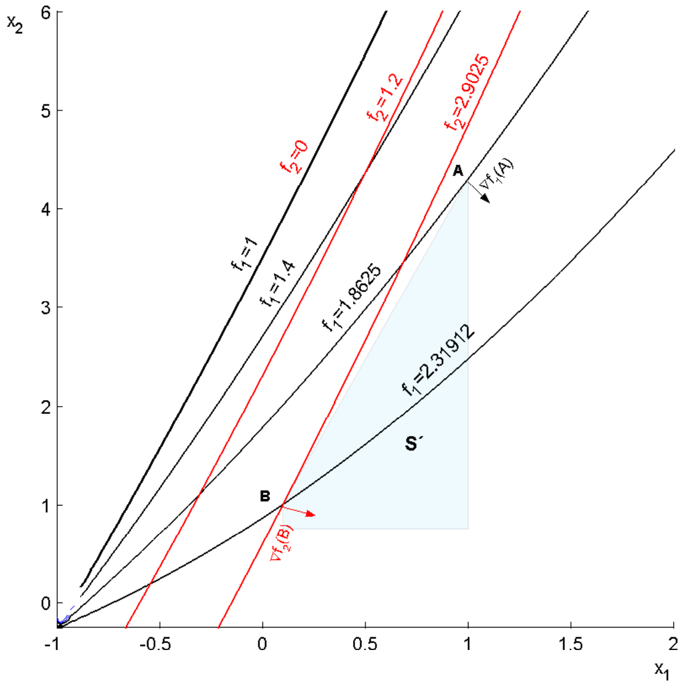

Figura 1: Gráfica del Ejemplo 1.

3 Más de una meta por nivel de prioridad

Supongamos que se han fijado los niveles de prioridad $Q_1, ..., Q_l$ y que $l < k$. Si utilizamos el enfoque lexicográfico minimax el problema (1) tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{lex } \min \, [\, \max_{i \in Q_1} w_i \rho_i, \, \max_{i \in Q_2} w_i \rho_i, \ldots, \, \max_{i \in Q_l} w_i \rho_i \,], \\ \text{s.a. } & \frac{n_i(x)}{d_i(x)} - \rho_i \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & \rho_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & x \in S. \end{aligned} \tag{11}$$

En el nivel de prioridad s, el problema a resolver será:

$$
\begin{aligned}
&\min \max_{i \in Q_s} w_i \rho_i,\\
\text{s.a. } &\frac{n_i(x)}{d_i(x)} - \rho_i \leq b_i, \quad i \in Q_s,\\
&\rho_i \geq 0, \quad i \in Q_s,\\
&x \in S',
\end{aligned}
\tag{12}
$$

donde $S' = \left\{ x \in S \ : \ \begin{cases} \dfrac{n_j(x)}{d_j(x)} - \rho_j \leq b_j, \ \rho_j \geq 0, \ \forall j \in \bigcup\limits_{h=1}^{s-1} Q_h; \\ \max\limits_{j \in Q_h} w_j \rho_j \leq \max\limits_{j \in Q_h} w_j \rho_j^*, \quad \forall h = 1, \ldots, s-1. \end{cases} \right\}$, siendo $\max\limits_{j \in Q_h} w_j \rho_j^*$ el valor óptimo de la función objetivo del problema correspondiente al nivel de prioridad h. Obviamente, eliminando las variables de desviación, el conjunto S' se puede escribir de la siguiente forma:

$$
S' = \{x \in S | \ \frac{n_j(x)}{d_j(x)} \leq b_j^*, \ \ j \in \bigcup_{h=1}^{s-1} Q_h\},
\tag{13}
$$

siendo $b_j^* = b_j + \dfrac{\max\limits_{j \in Q_r} w_r \rho_r^*}{w_j}$, donde $\max\limits_{j \in Q_r} w_r \rho_r^*$ es el valor óptimo de la función objetivo del problema correspondiente al nivel al que pertenece la meta $\dfrac{n_j(x)}{d_j(x)} \leq b_j$.

El conjunto S', escrito como en (13), es convexo ya que las funciones $n_j(x) - b_j^* d_j(x)$ son convexas. En este apartado cuando hablemos de S' supondremos que está escrito como en (13).

Aunque S' es convexo, el conjunto factible de (12) no lo es. Se podría pensar en sustituir el problema no convexo (12) por el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\min \max_{i \in Q_s} \ w_i \rho_i',\\
\text{s.a. } &n_i(x) - b_i d_i(x) - \rho_i' \leq 0, \quad i \in Q_s,\\
&\rho_i' \geq 0, \quad i \in Q_s,\\
&x \in S',
\end{aligned}
\tag{14}
$$

cuya solución se puede obtener resolviendo el siguiente problema diferenciable equivalente:

$$\begin{aligned} & \min\ \lambda', \\ \text{s.a.}\ & w_i\rho_i' \leq \lambda', \\ & n_i(x) - b_i d_i(x) - \rho_i' \leq 0, \quad i \in Q_s, \\ & \rho_i' \geq 0, \quad i \in Q_s, \\ & x \in S'. \end{aligned} \tag{15}$$

El problema (15) es un problema convexo y en el caso particular de que $n_i(x)$ y $d_i(x)$, $i \in \bigcup_{r=1}^{s} Q_r$ sean funciones lineales y S un poliedro convexo será un problema lineal. En cualquier caso es más sencillo de resolver que (12).

Los problemas (14) y (12) y, por tanto, (15) y (12) no son, en general, equivalentes. A pesar de ello, al igual que ocurría cuando sólo había una meta por nivel de prioridad, en algunas situaciones la solución del problema diferenciable y convexo asociado (15) proporciona la solución del problema (12) e incluso en los casos en los que esto no es posible, resolviendo el problema (15) podremos extraer información útil acerca del problema (12). A continuación, analizaremos la relación exacta entre ambos problemas.

– Si al resolver el problema (15) la solución óptima es $(x^*, (\rho_i'^*)_{i\in Q_s}, \lambda'^*)$ con $\lambda'^* = 0$ entonces $\rho_i'^* = 0 \quad \forall i \in Q_s$ y, por tanto, $n_i(x^*) - b_i d_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i \in Q_s$. Como $x^* \in S'$ y $\dfrac{n_i(x^*)}{d_i(x^*)} \leq b_i \quad \forall i \in Q_s$, $(x^*, (\rho_i^*)_{i\in Q_s})$ con $\rho_i^* = 0 \quad \forall i \in Q_s$ es una solución factible para el problema (12). Es obvio que en esa solución la función objetivo de (12) vale cero, el valor mínimo que puede alcanzar, luego $(x^*, (\rho_i^*)_{i\in Q_s})$ con $\rho_i^* = 0 \quad \forall i \in Q_s$ será una solución óptima del problema (12).

Además, siempre que al resolver el problema (15) $\lambda'^* = 0$, cualquier solución óptima x^* de (12) puede ser obtenida resolviendo el problema (15).

– Si al resolver el problema (15) la solución óptima es $(x^*, (\rho_i'^*)_{i\in Q_s}, \lambda'^*)$ con $\lambda'^* > 0$, entonces $\rho_i'^* > 0$ para algún $i \in Q_s$ y no existe solución satisfactoria para el problema (19), es decir, no existe ningún punto en S' en el que se verifiquen todas las metas $\dfrac{n_i(x^*)}{d_i(x^*)} \leq b_i$, $i \in Q_s$ impuestas en ese nivel. Esta afirmación es fácil de comprobar. Si en la solución óptima del problema (15) $\rho_i'^* > 0$ para algún $i \in Q_s$, entonces no existe $\hat{x} \in S'$ tal que $n_i(\hat{x}) - b_i d_i(\hat{x}) \leq 0 \quad \forall i \in Q_s$, ya que, en caso contrario, $(\hat{x}, (\hat{\rho}_i')_{i \in Q_s}, \hat{\lambda}')$ con $\hat{\rho}_i' = 0 \quad \forall i \in Q_s$ y $\hat{\lambda}' = 0$ sería solución óptima del problema (15) y no $(x^*, (\rho_i'^*)_{i \in Q_s}, \hat{\lambda}'^*)$ con $\lambda'^* > 0$ como se ha supuesto.

Por tanto, en este caso podemos asegurar que no existe $\hat{x} \in S'$ tal que $\dfrac{n_i(\hat{x})}{d_i(\hat{x})} \leq b_i, \ \forall i \in Q_s$, es decir, no existe solución satisfactoria para el problema (12). Sin embargo, al igual que ocurría cuando sólo había una meta por nivel de prioridad, x^*, no tiene por qué ser solución óptima del problema (12), por lo que habrá que resolver este problema directamente.

No obstante, si no existe solución satisfactoria en el nivel s, el problema no convexo (12) se puede escribir como el siguiente problema minimax:

$$\begin{array}{ll} \min & \max\limits_{i \in Q_s} w_i \left(\dfrac{n_i(x)}{d_i(x)} - b_i \right), \\ \text{s.a.} & \quad x \in S'. \end{array} \tag{16}$$

Así, x^* es solución óptima de (16) si y sólo si $(x^*, (\rho_i^*)_{i \in Q_s})$, con $\rho_i^* = \dfrac{n_i(x^*)}{d_i(x^*)} - b_i$ si $\dfrac{n_i(x^*)}{d_i(x^*)} \geq b_i$ y $\rho_i^* = 0$ si $\dfrac{n_i(x^*)}{d_i(x^*)} < b_i$, es solución óptima de (12).

El problema (16) es un problema de programación fraccional generalizada y para la resolución del mismo se pueden emplear algoritmos que exploten la especial estructura de la función objetivo, como el algoritmo generalizado de Dinkelbach Dinkelbach, Crouzeix *et al.* (1985, 1986) o las variantes del mismo que han sido propuestas por Crouzeix y Ferland (1991), Gugat (1996). Estos algoritmos nos permiten encontrar una . Estos algoritmos nos permiten encontrar una solución óptima de (16) resolviendo una serie de problemas convexos. Como punto inicial de los citados algoritmos se puede tomar la solución obtenida al resolver el problema convexo asociado (15), ya que esa solución si no coincide será en todo caso “relativamente cercana” a la solución del problema (16).

Como consecuencia de la discusión anterior a la hora de resolver el problema (12) parece adecuado proceder de la siguiente forma:

Resolver el problema convexo asociado (15), teniendo en cuenta las dos posibilidades siguientes:

1. Si la solución óptima es $(x^*, (\rho_i'^*)_{i\in Q_s}, \lambda'^*)$ con $\lambda'^* = 0$, entonces $(x^*, (\rho_i^*)_{i\in Q_s})$ con $\rho_i^* = 0 \quad \forall i \in Q_s$ será una solución óptima del problema (12).
2. Si, por el contrario, la solución óptima es $(x^*, (\rho_i'^*)_{i\in Q_s}, \lambda'^*)$ con $\lambda'^* > 0$, la solución óptima en términos de las variables x de (15) no tiene por qué ser solución óptima de (12). Resolver, entonces, el problema (16) que es equivalente en este caso a (12). La solución del problema (16) puede ser obtenida con técnicas de programación convexa a través del algoritmo de Dinkelbach generalizado o de las variantes del mismo que han sido propuestas.

4 Conclusiones

En este trabajo hemos analizado la resolución de un modelo de programación con k funciones objetivo fraccionales, de la forma numerador convexo y denominador cóncavo, y un conjunto factible convexo bajo el enfoque de la programación por metas minimax lexicográficas. Cuando se utiliza este enfoque nos encontramos con la dificultad de tener que resolver para cada nivel de prioridad un problema no convexo en el que las funciones fraccionales aparecen en las restricciones. Hemos mostrado cómo se puede explotar la estructura fraccional de esas funciones con el objeto de facilitar la resolución del mismo.

En concreto, hemos planteado un problema convexo asociado al verdadero problema con metas fraccionales a resolver en cada nivel y hemos demostrado que la resolución de dicho problema asociado nos permite conocer si el problema con metas fraccionales tiene o no solución factible en la que se cumplan todas las metas impuestas en dicho nivel. Además, en el caso de que la tenga, proporciona la misma. En caso contrario la solución del problema convexo asociado no tiene por qué coincidir con la solución del problema con metas fraccionales original, por lo que habría que resolver éste directamente. Para llevar a cabo esta tarea, si hay una sola meta en el nivel de prioridad considerado, hemos propuesto sustituir dicho problema por un problema fraccional monoobjetivo equivalente que puede reducirse a un problema convexo utilizando un cambio de variable. En el caso de que haya más de una meta en el nivel de prioridad sugerimos sustituir dicho problema por un problema fraccional minimax equivalente para el que existen en la literatura algoritmos disponibles que permiten hallar su solución y cuyos principales cálculos consisten en resolver una serie de problemas convexos.

Agradecimientos Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Junta de Castilla y León (Consejería de Educación y Cultura, Proyectos VA040A05 y VA099/04) y el Ministerio de Educación y Ciencia y FEDER (Proyecto MTM2005-06534).

Referencias

1. Caballero, R., Hernández, M. (2006): *Restoration of efficiency in a goal programming problem with linear fractional criteria.* European Journal of Operational Research, 172, pp. 31-39.
2. Crouzeix, J.P., Ferland, J.A. (1991): *Algorithms for generalized fractional programs.* Mathematical Programming, 52, pp. 191-207.
3. Crouzeix, J.P., Ferland, J.A., Schaible, S. (1985): *An algorithm for generalized fractional programs.* Journal of Optimization Theory and Applications, 47, pp. 35-49.
4. Crouzeix, J.P., Ferland, J.A., Schaible, S. (1986): *A note on an algorithm for generalized fractional programs.* Journal of Optimization Theory and Applications, 50, pp. 183-187.
5. Gugat, M. (1996): *A fast algorithm for a class of generalized fractional programs.* Management Science, 42, pp. 1493-1499.
6. Hannan, E. (1977): *Effects of substituting a linear goal for a fractional goal in the goal programming problem.* Management Science, 24, pp. 105-107.

7. Hannan, E. (1981); *On "An interpretation of fractional objectives in goal programming as related to papers by Awerbuch et al. and Hannan"*. Management Science, 27, pp. 847-848.
8. Jagannathan, R. (1985): *An algorithm for a class of nonconvex programming problems with nonlinear fractional objectives.* Management Science, 31, pp. 847-851.
9. Kornbluth, J. S. H., Steuer, R. E. (1981). *Goal programming with linear fractional criteria.* European Journal of Operational Research, 8, pp. 58-65.
10. Pal, B.B., Basu, I. (1995): *A goal programming method for solving fractional programming problems via dynamic programming.* Optimization, 35, pp. 145-157.
11. Romero, C. (1991): *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press, Oxford Wesley.
12. Romero, C. (2004): *A general structure of achievement function for a goal programming model.* European Journal of Operational Research, 153, pp. 675-686.
13. Schaible, S. (1976): *Fractional programming II. On Dinkelbach´s algorithm.* Management Science, 22, pp. 868-873.
14. Soyster, A.L., Lev, B. (1978): *An interpretation of fractional objectives in goal programming as related to papers by Awerbuch et al. and Hannan.* Management Science, 24, pp. 1546-1549.
15. Stancu-Minasian, I.M. (1997): *Fractional Programming. Theory, Methods and Applications.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht-Boston-London.