

# Cálculo directo de la carga crítica de pandeo de pórticos. Parte I

Antolín Lorenzana Ibán y Mariano Cacho Pérez

Aula UVa-CIMNE, ETS de Ingenieros Industriales  
Universidad de Valladolid  
Paseo del Cauce, s/n, 47011, Valladolid, España  
Tel.: 34 983 423529, 423391; Fax: 34 983 423631  
e-mail: ali@eis.uva.es; cacho@eis.uva.es

## Resumen

De todas las condiciones de diseño de una estructura de barras, en muchos casos, la condición más crítica consiste en asegurar que bajo cualquier combinación posible de cargas no se produzca inestabilidad por flexión, más cuando la tendencia actual es diseñar estructuras esbeltas con aceros de mayor calidad. Resulta por tanto interesante contar con un método de cálculo que permita determinar de forma sencilla y precisa el máximo nivel de carga admisible, conocido habitualmente como carga crítica de pandeo. Para ello, se plantea el equilibrio de cada barra en su configuración deformada, bajo hipótesis de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos (Teoría de Primer Orden), resultando un sistema de ecuaciones diferenciales lineal para cada barra. Para obtener la respuesta no lineal del conjunto es necesario imponer en cada unión compatibilidad de desplazamientos y equilibrio en el nudo, nuevamente en la configuración deformada. El objetivo de este trabajo es desarrollar un método sistemático que permita determinar la carga crítica y el modo de pandeo de cualquier pórtico plano sin necesidad de recurrir a las simplificaciones que usualmente se asumen en planteamientos matriciales o de elementos finitos. Esto permitirá obtener resultados precisos con independencia de la discretización realizada.

**Palabras clave:** *carga crítica y modo de pandeo, no-linealidad geométrica, Teoría de Primer Orden.*

## STRAIGHT METHOD FOR CRITICAL BUCKLING LOAD OF FRAMES. PART I

## Summary

Of all the design conditions for frames, in many cases the most critical one consists on ensuring that, under any possible combination of loads, flexural buckling should not take place, specially when the current trend is to design slender structures with high strength steels. Therefore, it is important to have a method to determine in a simple and clear way the maximum acceptable load level, usually known as the critical buckling load. With this purpose, we consider the equilibrium equations of each beam in its deformed configuration, under the hypothesis of infinitesimal strains and displacements (First-Order Theory), resulting in a system of linear differential equations for each element. To obtain the nonlinear response of the frame, it is necessary to impose in each beam-end the compatibility of displacements and the equilibrium also in the deformed configuration. The objective of this work is to develop a systematic method to determine the critical buckling load and the buckling mode of any frame, without using the common simplifications usually assumed in matrix analysis or finite element approaches. This allow to obtain precise results regardless of the discretization done.

**Keywords:** *critical buckling load, buckling mode, geometrical non-linearity, First-Order Theory.*

## INTRODUCCIÓN

El problema de calcular la carga crítica de pandeo de vigas bajo cargas de compresión fue ya resuelto por Euler en el 1744<sup>13</sup>. Sin embargo, menos usual es encontrar, incluso en la actualidad, herramientas sistemáticas de cálculo que permitan determinar de forma suficientemente precisa, sin un gran esfuerzo de cálculo, el menor nivel de carga que puede originar el pandeo por flexión de cualquier estructura de barras.

Los programas comerciales de aplicación del método de los elementos finitos, en general, resuelven el problema de pandeo con una formulación teórica aproximada que da lugar a la modificación de la rigidez de cada barra mediante la denominada matriz de rigidez geométrica<sup>2</sup>. Con este planteamiento se requiere gran número de elementos por barra para conseguir precisión suficiente de los resultados.

Para evitar estos inconvenientes, en este trabajo se desarrolla una herramienta matemática sencilla, implementada con la ayuda de un manipulador simbólico, que permite calcular de forma precisa la carga crítica de pandeo con deformaciones de flexión de cualquier estructura de barras. Sin pérdida de generalidad se expone el método para el caso plano.

Para alcanzar dicho objetivo, el trabajo se ha organizado de la manera siguiente: en primer lugar, tras esta breve introducción, se presenta el marco teórico para caracterizar el comportamiento no lineal del elemento estructural barra. A continuación se extiende la formulación al análisis de cualquier pórtico plano sometido a cualquier sistema de cargas y condiciones de contorno y se expone cómo determinar para dicho pórtico la carga crítica y el modo de pandeo. En el cuarto apartado se presentan resultados numéricos para tres ejemplos y por último, en base a los resultados se resumen las principales conclusiones obtenidas de este trabajo.

## COMPORTAMIENTO DE LA BARRA

A continuación vamos a obtener el conjunto de ecuaciones que rigen el comportamiento no lineal de una barra aislada. Para ello, en primer lugar, estableceremos las hipótesis básicas adoptadas para seguidamente imponer las condiciones de equilibrio que debe satisfacer cualquier porción de sólido bajo dichas hipótesis dentro del objetivo marcado, junto con las relaciones de compatibilidad-comportamiento.

### Hipótesis básicas

- Se consideran únicamente pórticos planos constituidos por barras esbeltas de directriz recta de sección constante.
- Se supone que los desplazamientos que experimenta la estructura bajo carga son pequeños respecto a la longitud de las barras.
- Se asume que el comportamiento a nivel de punto material, es decir, la relación entre las tensiones y las deformaciones que desarrolla el material que constituye las barras al deformarse, es de tipo elástico-lineal.
- Se consideran cargas aplicadas en los extremos de las barras.
- Se utiliza el modelo de barra de Navier-Bernoulli para barras esbeltas y se desprecia la deformación por cortante.

Comentar que algunas de estas hipótesis, como por ejemplo, sección constante y cargas aplicadas en los nudos, se pueden no exigir y no suponen ninguna modificación del método salvo un mayor esfuerzo computacional.

## Ecuaciones de equilibrio

En este apartado vamos a establecer las condiciones de equilibrio que debe satisfacer cualquier porción de sólido analizado, más concretamente, cualquier rebanada diferencial de barra.

Antes de pasar directamente a plantear dicho equilibrio, y debido a que en este tipo de análisis el equilibrio debe plantearse en la configuración real, es decir, en la deformada, se hace necesario fijar el sistema de referencia. Vamos a considerar dos sistemas de ejes de referencia a los que referir las magnitudes monodimensionales, desplazamientos y esfuerzos de la barra, que son:

1. Sistema local de la barra ( $s, y, z$ ): es un sistema de referencia que varía su orientación con la deformación de tal manera que el eje  $s$  siempre es normal a la sección transversal de la barra deformada.
2. Sistema global de la barra ( $X, Y, Z$ ): es un sistema de referencia cartesiano de orientación fija independientemente de la deformación de la barra.

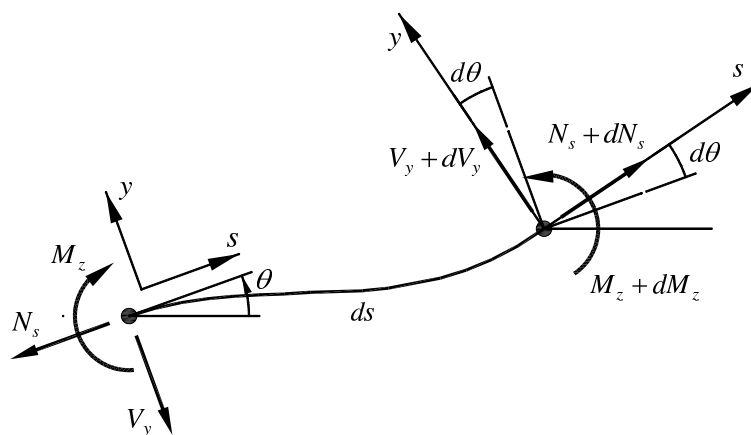
En ambos sistemas, tanto el eje  $y$  en el local como el eje  $Y$  en el global pertenece al plano que contiene la estructura/barra, y por lo tanto, tanto el plano  $sy$  como el  $XY$  es el plano en que ésta se deforma.

Por lo tanto, como consecuencia, vamos a disponer de dos conjuntos de ecuaciones de equilibrio, uno por cada sistema de referencia, de idéntico significado físico, pero relativo a referencias distintas.

### *Sistema de referencia local*

Lógicamente, si empleamos el sistema de referencia local, las magnitudes monodimensionales del modelo de barra, es decir, los desplazamientos y los esfuerzos tendrán la dirección de dichos ejes ( $s, y, z$ ).

Este hecho da lugar a la definición de esfuerzos que comúnmente se denomina esfuerzos verdaderos o esfuerzos de Cauchy<sup>7</sup>. Seguidamente se impone el equilibrio de cualquier rebanada diferencial de barra según dicha referencia. Para ello hacemos uso de la Figura 1, resultando de dicho equilibrio de fuerzas y momentos, el siguiente sistema de ecuaciones



**Figura 1.** Equilibrio. Sistema local

diferenciales:

$$\begin{cases} N'_s(s) = V_y(s)\theta'(s) \\ V'_y(s) = -N_s(s)\theta'(s) \\ M'_z(s) + V_y(s) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde las variables primadas indican derivada respecto de la coordenada  $s$  donde el ángulo ( $\theta$ ), es el ángulo girado por la sección de la izquierda del elemento diferencial de longitud  $ds$ , mientras que la sección de la derecha gira ( $\theta + d\theta$ ).

### Sistema de referencia global

Otra posibilidad consiste en plantear el equilibrio en la configuración deformada, igual que antes, pero ahora empleando magnitudes estáticas monodimensionales referidas al sistema de referencia global de la barra. Del equilibrio de fuerzas según los ejes ( $X, Y$ ) y de momentos según  $Z$ , resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} H'(s) = 0 \\ V'(s) = 0 \\ M'(s) - H(s)\theta(s) + V(s) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

donde se ha aproximado el seno del ángulo por el ángulo ( $\theta$ ) y su coseno por la unidad en base a la hipótesis de pequeños desplazamientos.

Los esfuerzos en este sistema de ejes reciben el nombre de pseudo esfuerzos o esfuerzos de Piola-Kirchhoff<sup>7</sup>.

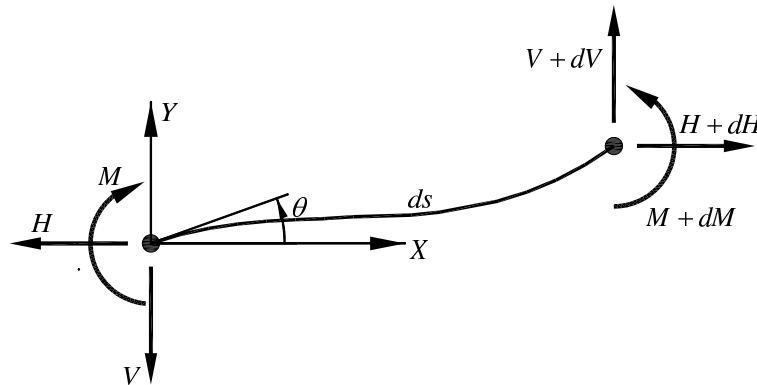


Figura 2. Equilibrio. Sistema global

### Ecuaciones de compatibilidad-comportamiento

Las ecuaciones que relacionan esfuerzos y desplazamientos en base a las hipótesis adoptadas son las usuales de la Resistencia de Materiales<sup>3,4</sup>:

$$\begin{cases} N_s(s) = EAu'(s) \\ v'(s) = \theta(s) \\ M_z(s) = EI_z\theta'(s) \end{cases} \quad (3)$$

### Solución no lineal

En primer lugar, haremos uso de las expresiones que nos permiten relacionar esfuerzos en ambos sistemas de ejes, local y global, estas son:

$$\begin{cases} N_s(s) = H(s) \cos(\theta) + V(s) \sin(\theta) \simeq H(s) + V(s)\theta(s) \\ V_y(s) = -H(s) \sin(\theta) + V(s) \cos(\theta) \simeq V(s) - H(s)\theta(s) \\ M_z(s) = M(s) \end{cases} \quad (4)$$

El conjunto de ecuaciones anterior (4), las de equilibrio (1) y (2) junto con las ecuaciones de compatibilidad-comportamiento (3), constituyen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{cases} EAu''(s) = V \cdot \theta'(s) \\ v'(s) = \theta(s) \\ EI_z \theta'''(s) - H \cdot \theta'(s) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

cuya solución general depende del signo de la magnitud  $H$ , resultando para:

Compresión ( $H < 0$ ):

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \sin(Ks) + C_2 \cos(Ks) + C_3 s + C_4 \\ \theta(s) = C_1 K \cos(Ks) - C_2 K \sin(Ks) + C_3 \\ u(s) = C_5 + C_6 s - (C_2 C_3 \cos(Ks) + C_1 C_3 \sin(Ks)) \frac{I_z K^2}{A} \end{cases} \quad (6)$$

Tracción ( $H > 0$ ):

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \sinh(Ks) + C_2 \cosh(Ks) + C_3 s + C_4 \\ \theta(s) = C_1 K \cosh(Ks) + C_2 K \sinh(Ks) + C_3 \\ u(s) = C_5 + C_6 s + (C_2 C_3 \cosh(Ks) + C_1 C_3 \sinh(Ks)) \frac{I_z K^2}{A} \end{cases} \quad (7)$$

siendo  $K = \sqrt{\frac{-H}{EI_z}}$  en el primer caso y  $K = \sqrt{\frac{H}{EI_z}}$  en el segundo .

Conocida la respuesta de cada barra será necesario solamente exigir compatibilidad y equilibrio entre las barras que constituyen la estructura para determinar la respuesta del conjunto.

## ANÁLISIS DEL FENÓMENO DE PANDEO

### Equilibrio y compatibilidad en los nudos

Lo primero de todo, siempre que analizamos estructuras compuestas por más de una barra, es establecer un sistema de referencia común a todas las barras de la estructura, que denominaremos sistema de referencia/ejes global ( $X_g, Y_g, Z_g$ ).

El segundo paso es discretizar la estructura/pórtico, es decir, dividir la estructura en un número adecuado de barras. Debido a la formulación empleada en este trabajo y en base a las hipótesis asumidas es suficiente con emplear un número de barras mínimo, coincidente con los tramos rectos entre nudos.

A continuación, una vez identificados los desplazamientos y los esfuerzos de cada barra, en el sistema local o global de barra, debemos pasar dichas magnitudes monodimensionales al sistema de referencia común de toda la estructura. Este cambio de base se realiza en función de la orientación inicial de las barras, dada por el ángulo  $\alpha$  de cada barra.

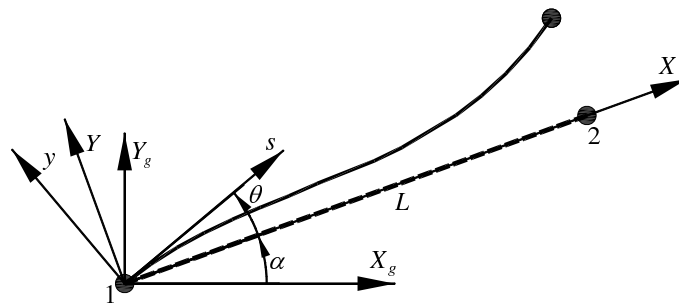


Figura 3. Orientación inicial de la barra

Solo queda ‘unir’ todas las barras para formar el pórtico, este proceso se lleva a cabo imponiendo en cada uno de los nudos de la estructura las correspondientes condiciones de compatibilidad de desplazamientos y de equilibrio de fuerzas y momentos.

En la herramienta de análisis desarrollada, este proceso, aunque sencillo es de casuística muy variada dependiendo de las libertades consideradas en cada nudo, se ha conseguido sistematizar para que una vez definidos los datos del problema (geometría, perfiles, materiales, cargas, apoyos, libertades, etc.) se realice de forma automática sin la intervención del usuario, consiguiendo de esta manera el objetivo buscado.

### Condiciones de contorno

A la vista del orden del sistema de ecuaciones diferenciales ((6) y (7)), es necesario imponer seis condiciones de contorno por barra en desplazamientos y/o esfuerzos para determinar las constantes  $C_i$ . Como es sabido del teorema de unicidad<sup>12</sup>, en cada sección donde se impongan condiciones de contorno, si es conocido el desplazamiento en una determinada dirección el esfuerzo en esa misma dirección será una incógnita del problema y viceversa.

Para un problema plano, toda la casuística posible relativa a la imposición de condiciones de contorno se puede resumir como sigue, por ejemplo, en el extremo ( $s = L$ ), relativas al sistema de referencia local de la barra, se pueden expresar como:

$$\begin{cases} N_s(L) = -k_u u(L) \\ V_y(L) = -k_v v(L) \\ M_z(L) = -k_\theta \theta(L) \end{cases} \quad (8)$$

Esta representación de las condiciones de contorno, incluye entre otras, las más habituales: apoyo rígido ( $k_i = \infty$ ), extremo libre ( $k_i = 0$ ), apoyos semirrígidos ( $0 < k_i < \infty$ ), etc.

El siguiente paso será resolver el conjunto de ecuaciones ((6) y (7)) de todas las barras de la estructura junto con las condiciones de contorno correspondiente para determinar, como es usual, el valor de  $\lambda$  por el que hay que ponderar el estado de cargas actuante para que aparezcan desplazamientos indeterminados. Se asume por tanto la hipótesis de proporcionalidad de cargas.

### Carga crítica de pandeo

Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio de los nudos, junto con las condiciones de contorno constituyen un sistema de ecuaciones algebraicas de  $(3n) \times (3n)$  (siendo  $n$ , es el número de nudos de la estructura) del tipo:

$$f_j(C_{ij}, \lambda) = F_j(\lambda); \quad i = 1 \dots 6; \quad j = 1 \dots b \quad (9)$$

siendo  $b$  el número de elementos tipo barra con los que se discretiza la estructura.

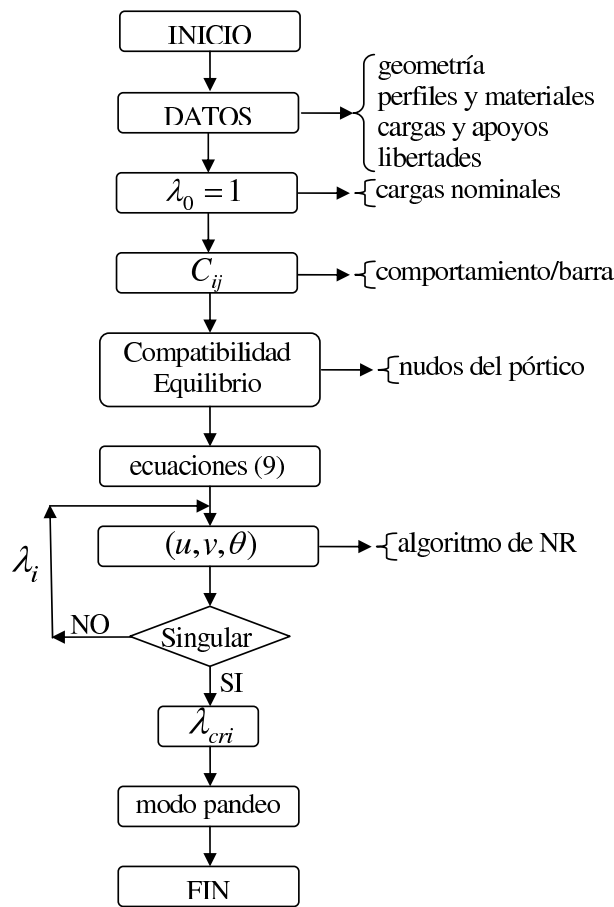


Figura 4. Proceso numérico de cálculo

Para calcular numéricamente la carga crítica de pandeo ( $\lambda_{cri}$ ) será necesario determinar el menor valor del factor  $\lambda$  que anula el determinante del sistema de ecuaciones anterior. Dada la no linealidad del sistema (9) se usará un proceso iterativo basado en la técnica numérica de Newton-Raphson. El esquema de resolución se representa en el diagrama de la Figura 4.

### Modo de pandeo

La deformada del pórtico justo en el instante en el que la carga alcanza el valor crítico de pandeo resulta indeterminada, de hecho es lo que se ha buscado al exigir que el determinante del sistema de ecuaciones sea nulo.

Para determinar el modo de pandeo asociado, lo que se hace es resolver el sistema de ecuaciones dado por (9) para el valor de  $\lambda_{cri}$  obtenido, sustituyendo una de las ecuaciones de equilibrio por una condición adicional en desplazamientos, es decir, imponiendo un valor arbitrario para uno de los grados de libertad del pórtico objeto de análisis.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan tres ejemplos, de complejidad creciente, con los que se pretende mostrar la metodología de cálculo expuesta en los puntos anteriores.

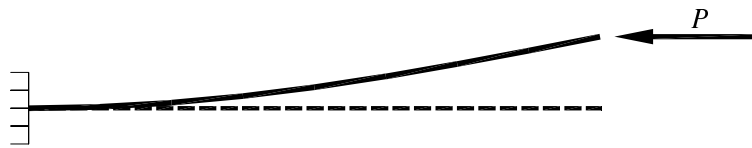


Figura 5. Barra a compresión (modo de pandeo)

### Barra a compresión

Es conocido que la solución exacta al problema de una barra empotrada-libre sometida a compresión es:

$$P_{cri} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2}$$

En este caso sencillo, la estrategia de resolución se reduce a imponer las condiciones de contorno, en desplazamientos en la sección empotrada ( $s = 0$ ) mediante las condiciones ( $u(0) = v(0) = \theta(0) = 0$ ) y en esfuerzos en el extremo libre ( $s = L$ ) mediante ( $V(L) = M(L) = 0$ ,  $H(L) = -P$ ), con lo que el determinante del sistema de ecuaciones dado por (9) tiene como menor raíz:

$$P_{cri} = \frac{9,8696 EI_z}{(2L)^2}$$

Se ha resuelto empleando un único elemento y para una tolerancia del proceso de Newton-Raphson (NR) de  $10^{-6}$  han sido necesarias solo ocho iteraciones. Los coeficientes  $C_i$  obtenidos son:

$$C_2 = C_3 = C_5 = 0; C_4 = -C_1; C_6 = -0,00260289 \cdot C_1$$

El modo de pandeo se muestra con trazo grueso en la Figura 5.

Como inconveniente, debemos comentar que el método iterativo no asegura que la raíz encontrada sea la menor, ya que depende como es lógico de la estimación inicial o punto de partida del algoritmo. Para ello se pueden usar aproximaciones obtenidas mediante otros planteamientos más sencillos, por ejemplo, los basados en la matriz  $K_g$  de rigidez geométrica<sup>2</sup>, o bien emplear en las primeras iteraciones otras técnicas numéricas como el algoritmo de la Secante y acelerar posteriormente la convergencia mediante el algoritmo de Newton-Raphson.

En este ejemplo concreto, está claro que los resultados son los mismos con independencia de que se considere o no la deformación axil.

Se compara seguidamente la técnica empleada en este trabajo con los resultados obtenidos mediante métodos matriciales basados en  $K_g$ , donde como es sabido la precisión de los resultados depende de la discretización. La Tabla I muestra los resultados para 1, 2, 4, 8 y 16 elementos:

b	1	2	4	8	16
$P_{cri} \left( \cdot \frac{EI_z}{(2L)^2} \right)$	9.94385	9.87466	9.86993	9.86963	9.86961
$\varepsilon_r$ (%)	0.7522	0.05122	0.003344	0.003299	0.00005673

Tabla I. Barra a compresión. Método matricial aproximado



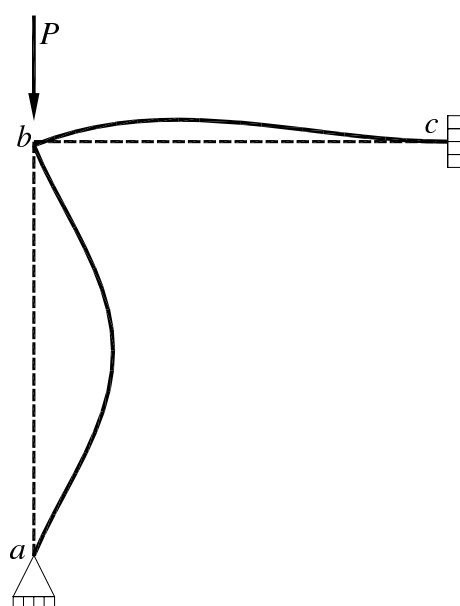


Figura 6. Pórtico de Lee (modo de pandeo)

### Pórtico de Lee

La estructura de la figura, denominada en la literatura<sup>8</sup> ‘Pórtico de Lee’, permite ilustrar de forma clara y sencilla el objetivo de este trabajo y las posibilidades de generalización de la técnica numérica empleada.

Vamos a considerar por simplicidad que el pórtico está formado por barras iguales en cuanto a longitud ( $L$ ), material ( $E$ ) y perfil tubular de diámetro ( $D$ ) y espesor ( $t$ ).

Para el caso de la Figura 6, se supone unión rígida en la sección  $b$ , por lo que las condiciones de compatibilidad y equilibrio adecuadas son:

$$\begin{cases} u_1(L) = v_2(0) \\ v_1(L) = -u_2(0) \\ \theta_1(L) = \theta_2(0) \end{cases} \begin{cases} -P = H_1 + V_2 \\ F = H_2 - V_1 \\ M = M_1(L) + M_2(0) \end{cases} \quad (10)$$

Tras imponer las condiciones de contorno en los apoyos (secciones  $a$  y  $c$ ) se llega a un sistema de doce ecuaciones con doce incógnitas, cuya primera raíz real positiva de su determinante es:

$$P_{cri} = 14,6257 \frac{EI_z}{L^2}$$

resultado obtenido tras diez iteraciones para la convergencia con una tolerancia de  $10^{-6}$ . El modo de pandeo correspondiente se representa con trazo grueso en la propia Figura 6.

Nótese que se podría haber estimado el valor inicial de la carga crítica en el intervalo  $\pi^2 \dots (\pi/0,7)^2$ , que son los valores correspondientes a la carga de pandeo de un pilar biapoyado (caso en el que el dintel  $bc$  fuese muy flexible) y otro empotrado-apoyado (caso en el que el dintel fuese muy rígido). También se podría haber tomado como valor inicial de entrada del algoritmo de resolución el obtenido mediante planteamientos matriciales en base a la aproximación de la matriz de rigidez geométrica. En este caso, con el ánimo de comparar

el esfuerzo computacional, se presentan en la siguiente tabla los resultados para 1, 2, 4, 8 y 16 elementos por barra.

b/barra	1	2	4	8	16
$P_{cri}(\cdot \frac{EI_z}{L^2})$	20.0847	14.8928	14.7449	14.7328	14.732
$\varepsilon_r$ (%)	37.32	1.826	0.8153	0.7325	0.7269

**Tabla II.** Pórtico de Lee. Método matricial aproximado

Como es sabido, ciertos planteamientos<sup>2</sup> desprecian de partida la deformación asociada al esfuerzo axial durante el pandeo. Para comprobar la influencia en este caso se presentan los resultados obtenidos con la técnica propuesta para áreas 10, 100 y 1000 veces superior a la inicial y se confirma que hasta cierto punto la hipótesis (no asumida en el planteamiento propuesto) es admisible.

Área	$A$	$10 \cdot A$	$100 \cdot A$	$1000 \cdot A$
$P_{cri}(\cdot \frac{EI_z}{L^2})$	14.6257	14.6567	14.6598	14.6601

**Tabla III.** Pórtico de Lee. Influencia de la deformación axial

Como muestra de la versatilidad del método se plantea también la posibilidad de cambiar las condiciones de contorno o de incluir libertades en las uniones entre barras. Así por ejemplo, en el caso de apoyar el pilar mediante un empotramiento la carga crítica aumenta hasta:

$$P_{cri} = 26,9535 \frac{EI_z}{L^2}$$

Y si por ejemplo la unión de ambas barras en  $b$  fuera mediante una articulación disminuiría al valor:

$$P_{cri} = 9,90084 \frac{EI_z}{L^2}$$

En este último caso, las condiciones de compatibilidad en el nudo  $b$  deben ser:

$$\begin{cases} u_1(L) = v_2(0) \\ v_1(L) = -u_2(0) \end{cases} \begin{cases} -P = H_1 + V_2 \\ 0 = H_2 - V_1 \\ 0 = M_1(L) \\ 0 = M_2(0) \end{cases} \quad (11)$$

### Pórtico simple a dos aguas

Se aplica finalmente la técnica de análisis al pórtico simple a dos aguas indicado en la Figura 7.

Considerando una discretización de sólo cuatro elementos coincidentes con las barras que forman el pórtico y asumiendo un estado proporcional de cargas (siendo  $\lambda$  dicho factor de proporcionalidad), resulta, tras un total de siete iteraciones un valor crítico de:

$$\lambda_{cri} = 3,08654 \cdot 10^6$$

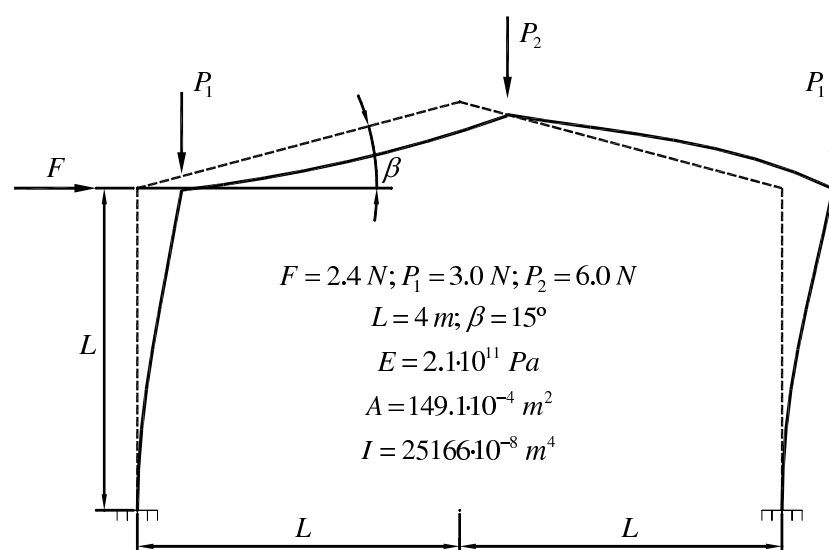


Figura 7. Pórtico simple a dos aguas

Para conseguir resultados con un nivel de precisión similar mediante la técnica de la matriz de rigidez geométrica sería necesario un mínimo de veinte elementos por barra. En la propia Figura 7 se representa el modo de pandeo correspondiente.

## CONCLUSIONES

Para finalizar, vamos a comentar de forma breve las principales conclusiones que se desprenden de este trabajo. En primer lugar, respecto al modelo teórico, el punto de partida ha sido la teoría de pandeo de Euler, que asume pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones, y que da lugar a los conceptos de carga crítica y modo de pandeo, consecuencia del modelo matemático planteado. Por tanto no es posible conocer los desplazamientos en el instante de pandeo ni el posible comportamiento post-pandeo.

En segundo lugar, relativo a la herramienta de análisis desarrollada comentar que es totalmente sistemática, sencilla, y permite incluir modelos más generales, por ejemplo, barras de sección variable, cargas distribuidas sobre las barras, estructuras espaciales (3D), etc. A pesar de que la aplicación informática se ha desarrollado mediante manipulador simbólico (Mathematica v6) no es posible en general obtener soluciones analíticas en función de todos los parámetros, sino sólo numéricas.

Respecto a los resultados numéricos, comprobamos que gracias a una formulación matemática rigurosa (la solución de desplazamientos se basa en funciones de estabilidad), se obtiene la ventaja de que luego, al calcular, se obtienen resultados precisos con discretizaciones mínimas y que para discretizaciones más finas los resultados son prácticamente los mismos.

## REFERENCIAS

- 1 R.L. Burden y J.D. Faires, *Análisis numérico*, Thomson, Mexico, (1998).
- 2 A. Chajes, *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice Hall, (1974).
- 3 J.A. Garrido y A. Foces, *Resistencia de Materiales*, Universidad de Valladolid, (2002).
- 4 J.M. Gere, *Timoshenko. Resistencia de Materiales*, Thomson, (2005).

- 5 M.R. Horne y W. Merchant, *The Stability of Frames*, Pergamon Press, (1965).
- 6 C. Lázaro, *Formulación material y espacial del modelo geoméricamente exacto de piezas alargadas*, Universidad Politécnica de Valencia, (2005).
- 7 S. Monleón, *Análisis de vigas, arcos, placas y láminas, una presentación unificada*, Universidad Politécnica de Valencia, (1999).
- 8 M.A. Ortega, J. L. Romero y E. Rosa, *Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Parte I*, Informes de la Construcción, Vol. **59**, N° 507, pp. 69-81, Jul-Sept,(2007).
- 9 M.A. Ortega, J.L. Romero y E. Rosa, *Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Parte II*, Informes de la Construcción, Vol. **59**, N° 508, pp. 61-71, Oct-Dic,(2007).
- 10 G.J. Simitses y D.H. Hodges, *Fundamentals of Structural Stability*, Elsevier Inc., (2006).
- 11 S.P. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, (1963).
- 12 S.P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Teoría de la Elasticidad*, Urmo, (1975).
- 13 C. Truesdell, *Ensayos de Historia de la Mecánica*, Tecnos, Madrid, España, (1975).