Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Teoría de la Dimensión

Autor: Fco. Javier Oto González

Tutor: Jesús M. Domínguez Gómez

Índice general

Introducción

La Teoría de la Dimensión es la rama de la topología dedicada a la definición y estudio de la noción de dimensión en distintas clases de espacios topológicos. La dimensión de ciertos objetos geométricos simples es una de las nociones mas intuitivas de las matemáticas. No hay duda de que un segmento, un cuadrado y un cubo han de tener dimensión 1, 2 y 3 respectivamente y, por lo tanto, cualquier definición coherente de ella tiene que respetar estos hechos. La necesidad de una definición precisa se hizo patente a raíz de dos descubrimientos de finales del siglo XIX: la correspondencia biyectiva de Cantor entre los puntos de una recta y de un plano, y la aplicación continua de Peano de un intervalo en todo un cuadrado. Una importante pregunta quedó entonces planteada: ¿es posible establecer una correspondencia entre el n-ésimo y el m-ésimo espacio euclídeo, combinando las construcciones de Cantor y Peano, de manera que ésta sea biyectiva y continua? La importancia de esta cuestión es que, si la respuesta fuera afirmativa, la noción de dimensión no sería una propiedad topológica, y no fue contestada satisfactoriamente hasta 1911, cuando Brouwer demostró que el n-ésimo y el m-ésimo espacio euclídeo no son homeomorfos salvo que $n = m$ (veáse [HW]).

A partir de 1920 se desarrollaron tres formas de definir la dimensión de un espacio topológico, que reciben respectivamente los nombres de dimensión inductiva “pequeña”(ind), dimensión inductiva “grande”(Ind) y dimensión de recubrimiento (dim). Uno de los objetivos de esta memoria es profundizar en el estudio de estas dimensiones sobre los espacios métricos separables y comprobar que sobre ellos las tres distintas dimensiones coinciden. Cabe mencionar, aunque no sea el objetivo de esta memoria, que al salirnos de estos espacios la equivalencia entre estas dimensiones deja de ser cierta en general, aunque por ejemplo, en los espacios métricos sigan coincidiendo la Ind y la dim.

Otro de los objetivos será probar algo que, aunque a priori parece intuitivo, ya hemos comentado que no es ni mucho menos trivial, como es el hecho de que el n-ésimo espacio euclídeo R^n tiene dimensión topológica n. Para probar esto último necesitaremos de un conocido resultado, el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. La demostración de este teorema se hará a través de la Homología Simplicial, lo que nos llevará a hacer una no tan breve incursión en la Topología Algebraica. Puesto que el objetivo al desarrollar esta parte de la memoria es únicamente la demostración del teorema antes mencionado, el estudio de esta teoría estará enfocado a ello y no profundizaremos tanto como la materia en sí podría permitir. Aun así se buscará un equilibrio entre conceptos que no necesitamos desarrollar y, por otra parte, no pasar demasiado de puntillas para la compresión de la materia tratada.

Queremos hacer notar que aunque en este trabajo hayamos elegido esta vía para la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer existen otros caminos como pueden ser el Lema de Sperner (veáse [ES] o [Long]). El hecho de elegir el camino de la Homología Simplicial permite de forma natural continuar con el desarrollo de la asignatura Topología Algebraica del cuarto curso del Grado en Matemáticas. Además nos permite unir en un sólo trabajo dos materias que inicialmente creíamos separadas, como son la Homología Simplicial y la Teoría de la Dimensión.

Pasamos a resumir los contenidos por capítulos. El primer capítulo será un breve repaso de algunos conceptos y resultados básicos sobre complejos simpliciales que necesitaremos posteriormente. El objetivo será recordar las nociones de símplice, subdivisión baricéntrica o aproximación simplicial, así como enunciar el Teorema de Aproximación Simplicial. (No incluimos las demostraciones correspondientes).

En el segundo capítulo comenzamos dando los rudimentos del Álgebra Homológica que necesitaremos más adelante. Pasaremos después a desarrollar la Teoría de Homología Simplicial orientada. Ésta es la única versión de la Homología Simplicial tratada en esta memoria. Por último, calcularemos los grupos de homología de una triangulación concreta de la esfera, y a partir de la definición de grado de una aplicación continua, demostraremos el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Veremos además que no será necesario tratar la Invarianza Topológica de la Homología, que nos dice que los grupos de homología de un espacio triangulable no dependen de la triangulación escogida (salvo isomorfismo), para llevar a cabo la demostración de dicho teorema.

En el tercer y último capítulo se tratará el tema principal de la memoria, la Teoría de la Dimensión. Trabajaremos siempre, como ya hemos advertido, en espacios métricos separables. Definiremos las tres dimensiones clásicas, ind (dimensión inductiva "pequeña"), Ind (dimensión inductiva "grande") y dim (dimensión de recubrimiento), desarrollaremos nuestra teoría en torno a ellas, y veremos que las tres coinciden en estos espacios. Probaremos también que la dimensión del espacio euclídeo n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, es n, haciendo uso del Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Capítulo 1

Complejos Simpliciales

En este breve capítulo nos limitaremos a resumir algunos conceptos y resultados básicos sobre complejos simpliciales que necesitaremos a lo largo de la memoria. El objetivo será recordar las nociones de símplice, subdivisión baricéntrica o aproximación simplicial, así como enunciar el Teorema de Aproximación Simplicial. No incluimos las demostraciones de los mismos ya que éstas fueron vistas en la asignatura de Topología Algebraica del cuarto curso del Grado en Matemáticas. Las referencias para este capítulo son [ADQ], [Maun] y [Munk].

1.1. Símplices y complejos simpliciales finitos

Definición 1.1.1. Se dice que los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{R}^n$ son *afínmente independientes* si, para cualesquiera escalares $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ reales, las siguientes ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 0$$

implican que $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_q = 0$.

Los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_q$ son afínmente independientes si, y sólo si, los vectores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_q - a_0$ son linealmente independientes.

Definición 1.1.2. Dados $q+1$ puntos afínmente independientes $a_0, a_1, \ldots, a_q$ en $\mathbb{R}^n$, llamaremos *q-símplice*, o *símplice de dimensión q*, al conjunto convexo

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i, \text{ con } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i\}.$$

Los coeficientes λ_i están unívocamente determinados por el punto x y se les conoce como *coordenadas baricéntricas* de x con respecto a los puntos

$a_0, a_1, \ldots, a_q$. Se llama *interior geométrico* de σ a $\mathrm{int}^g \sigma = \{x \in \sigma : \lambda_i > 0\}$, donde los λ_i son las coordenadas baricéntricas. Los puntos a_i se llaman *vértices* de σ y se escribe $\sigma = \langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle$. Así, un 0-símplice es un conjunto unipuntual, un 1-símplice, o *arista*, es un segmento, un 2-símplice es un triángulo, un 3-símplice es un tetraedro, etc. En general, el símplice $\sigma = \langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle$ es la envolvente convexa de los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_q$. Además, cada símplice σ determina sus vértices, ya que éstos son los únicos puntos de σ que no están en ningún segmento abierto determinado por dos puntos distintos de σ.

En adelante no estableceremos diferencia alguna entre el 0-símplice $\langle a_0 \rangle$ y el punto a_0.

Nota. Si $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ es un q-símplice con $q \neq n$, entonces su interior geométrico, $\mathrm{int}^g \sigma$, no coincide con el interior topológico, pues este último es vacío.

Definición 1.1.3. Sean σ y τ dos símplices en $\mathbb{R}^n$. Se dice que τ es *cara* de σ, y se denota por $\tau \leq \sigma$, si los vértices de τ son vértices de σ. Si además se tiene que $\tau \neq \sigma$, entonces se dice que τ es una *cara propia* de σ y se denota en este caso por $\tau < \sigma$.

Si $\tau \leq \sigma$ se dice que $\mathrm{int}^g \tau$ es una *cara abierta* de σ, y se llama *frontera geométrica* de σ a la unión de sus caras propias, que se denota por $\mathrm{Fr}^g \sigma$. Sea $\sigma = \langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle$. Como

$$\mathrm{Fr}^g \sigma = \{x \in \sigma : x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i, \text{ tales que } \lambda_j = 0 \text{ para algún j } \}$$

donde los λ_i son las coordenadas baricéntricas, se tiene por lo tanto que $\mathrm{int}^g \sigma = \sigma - \mathrm{Fr}^g \sigma$.

Propiedades 1.1.4.

i) Todo símplice es unión disjunta de sus caras abiertas.

ii) Dos caras de un símplice o son disjuntas o su intersección es una cara común.

Definición 1.1.5. Llamaremos *complejo simplicial* en $\mathbb{R}^n$ a una colección finita K de símplices en $\mathbb{R}^n$ verificando:

1. Dados dos símplices σ_1, σ_2 de K, entonces su intersección, $\sigma_1 \cap \sigma_2$, es una cara común de ambos o es el vacío.

2. Si σ es un símplice de K, y τ es una cara de σ, entonces τ es un símplice de K.

Un subconjunto de símplices L de K, que sea a su vez un complejo simplicial, se llama *subcomplejo simplicial* de K. El número

$$\text{máx}\{\dim(\sigma) : \sigma \in K\}$$

se llama dimensión de K.

El conjunto $K^n = \{\sigma \in K : \dim(\sigma) \leq n\}$ se llama *n-esqueleto* de K. Obsérvese que K^0 es el conjunto de vértices de K. Al conjunto de los puntos de los símplices de K se le denomina *poliedro* subyacente a K, y lo denotaremos por $|K|$, es decir:

$$|K| = \bigcup\{\sigma : \sigma \in K\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Observación 1.1.6. Todo símplice σ determina un complejo simplicial al considerar σ y todas sus caras. En lo que sigue, σ denotará indistintamente un símplice o el complejo simplicial determinado por él.

Propiedades 1.1.7.

i) Sea K un complejo simplicial y $x \in |K|$. Entonces x está en el interior de un único símplice de K, al que se le conoce como *símplice soporte* de x.

ii) Sean σ y $\tau \in K$ con $\text{int}^g\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Entonces $\sigma \leq \tau$.

Definición 1.1.8. Sean K_1 y K_2 dos complejos simpliciales. Se dice que una aplicación $\varphi : |K_1| \to |K_2|$ es *simplicial* si se verifica que:

1. Las imágenes de los vértices de K_1 son vértices de K_2.
2. Dado un símplice $\sigma = \langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle \in K_1$, sus vértices imagen, es decir, $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_q)$, están en un mismo símplice de K_2.
3. $f|_\sigma$ es una aplicación afín, para todo $\sigma \in K$.

Es claro que la composición de aplicaciones simpliciales es siempre una aplicacion simplicial, y que toda aplicación simplicial es continua.

Definición 1.1.9. Una aplicación simplicial $\varphi : |K_1| \to |K_2|$ se dice que es *isomorfismo simplicial* si existe una aplicación simplicial $\psi : |K_2| \to |K_1|$ de manera que $\psi \circ \varphi = \text{id}_{|K_1|}$ y $\varphi \circ \psi = \text{id}_{|K_2|}$.

Todo isomorfismo simplicial es un homeomorfismo. Además, se tiene que una aplicación simplicial $\varphi : |K_1| \to |K_2|$ es isomorfismo si, y sólo si, es biyectiva.

1.2. Subdivisión baricéntrica

Definición 1.2.1. Sean K y K' complejos simpliciales. Se dice que K' es una *subdivisión* de K si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $|K| = |K'|$.
2. Si $\sigma' \in K'$ entonces existe un $\sigma \in K$ tal que $\sigma' \subseteq \sigma$.

La condición 2. puede sustituirse por: Todo símplice de K es unión de símplices de K'. En particular los vértices de K son vértices de K'.

Vamos a definir ahora la subdivisión más importante y la que se utilizará a lo largo del trabajo.

Definición 1.2.2. Dado un q-símplice $\sigma = \langle a_0, \ldots, a_q \rangle$, llamamos *baricentro* de σ al punto $b(\sigma) = \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \frac{1}{q+1} a_i$. Dado un complejo simplicial K y los símplices $\sigma_0 < \sigma_1 < ... < \sigma_q \in K$ se tiene que los puntos $b(\sigma_0), b(\sigma_1), ..., b(\sigma_q)$ son afínmente independientes y determinan así un símplice contenido en σ_q.

Se llama *subdivisión baricéntrica* de K, y se denota por $\mathrm{sd}K$, al complejo simplicial formado por los símplices descritos más arriba y cuyos vértices son baricéntros $b(\sigma)$ con $\sigma \in K$.

Nota. Para subdivisiones baricéntricas reiteradas vamos a utilizar la notación $\mathrm{sd}^r K = \mathrm{sd}(\mathrm{sd}^{r-1} K)$, $r \geq 1$, y $\mathrm{sd}^0 K = K$.

Definición 1.2.3. Se dice que un especio topológico X es *triangulable* si existe un poliedro $|K|$ y un homeomorfismo $h : |K| \to X$. Al par (K, h) se le llama *triangulación* de X.

Nota. Cuando nos refiramos a la triangulación de un espacio, a menudo omitiremos la alusión al homeomorfismo.

1.3. Aproximación simplicial

Definición 1.3.1. Sea K un complejo simplicial y sea a un vértice de K. Se llama *estrella* de a con respecto a K, y se denota por $\mathrm{st}(a, K)$, a la unión de los interiores (geométricos) de los símplices de K de los que a es un vértice.

Sean dos complejos simpliciales K_1 y K_2 y $f : |K_1| \to |K_2|$ una aplicación continua. Llamamos *aproximación simplicial* de f a una aplicación simplicial $\varphi : |K_1| \to |K_2|$ tal que $f(\mathrm{st}(a, K_1)) \subseteq \mathrm{st}(\varphi(a), K_2)$, para cada vértice $a \in K_1$.

Proposición 1.3.2. Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una aplicación continua. Si para cada vértice a de K_1, existe un vértice b de K_2 tal que

$$f(\mathrm{st}(a, K_1)) \subseteq \mathrm{st}(b, K_2)$$

entonces f admite una aproximación simplicial φ tal que $\varphi(a) = b$ para cada vértice a de K_1.

Proposición 1.3.3. Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una aplicación continua, y sea φ una aproximación simplicial de f. Para cada $x \in |K_1|$ existe un símplice $\tau \in K_2$ tal que $f(x) \in \mathrm{int}^g \tau$ y $\varphi(x) \in \tau$.

Proposición 1.3.4. Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una aplicación continua, y sea φ una aproximación simplicial de f. Entonces f y φ son aplicaciones homótopas relativamente al conjunto de puntos donde coinciden.

Nota. Notemos que, por lo tanto, toda aproximación simplicial de una aplicación simplicial f coincide con f.

Consideremos ahora el recubrimiento abierto de $|K|$ formado por las estrellas de los vértices de K, y denotemos por $\mathrm{m}(K)$ el máximo de los diámetros de dichas estrellas.

Proposición 1.3.5. Se verifica que

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{m}(\mathrm{sd}^r K) = 0$$

Teorema 1.3.6. (Teorema de Aproximación Simplicial) Sea f una aplicación continua de $|K|$ en $|L|$ y sea $(K_r)_{r\in\mathbb{N}}$ una sucesión de complejos simpliciales verificando:

1. Los poliedros subyacentes a K y a K_r coinciden para cada r.
2. Todo vértice de K es un vértice de K_r para cada r.
3. $\mathrm{m}(K_r) \to 0$ cuando $r \to \infty$.

Entonces, existe un r tal que $f : |K_r| \to |L|$ admite una aproximación simplicial φ. Si suponemos además que $a_1, \ldots, a_q$ son vértices de K tales que $f(a_1), \ldots, f(a_q)$ son vértices de L, entonces r y φ pueden elegirse de manera que $\varphi(a_i) = f(a_i)$, para todo i.

Corolario 1.3.7. (Teorema clásico de Aproximación Simplicial) Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y $f : |K_1| \to |K_2|$ continua. Entonces existe una subdivisión baricéntrica $\mathrm{sd}^r K_1$ tal que $f : |\mathrm{sd}^r K_1| \to |K_2|$ admite una aproximación simplicial.

Capítulo 2

Homología Simplicial

Como ya se comentó anteriormente en la introducción, el objetivo de este capítulo es demostrar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Comenzaremos desarrollando nociones básicas del Álgebra Homológica que necesitaremos más adelante. Este uso sistemático del Álgebra en Topología consiste en definir la homología a partir de un complejo de cadenas.

Pasaremos después a desarrollar la Teoría de Homología Simplicial. La versión de la Homología Simplicial que se trata en este capítulo es la orientada. El principio básico subyacente a esta aproximación es la idea de asignar signos a las orientaciones, lo que constituye una relación muy rudimentaria entre la Geometría y el Álgebra. Existen otras teorías de la Homología Simplicial como la ordenada o la singular, pero no serán desarrolladas aquí.

Por último, calcularemos los grupos de homología de la esfera y a partir de la definición de grado de una aplicación continua, demostraremos el teorema del punto fijo de Brouwer. Hablando con rigor, no podemos hablar de grupos de homología de la esfera, pues se trabajará con una triangulación concreta de ésta y se calcularán sus grupos de homología. No se probará que los grupos de la esfera son independientes de la triangulación elegida. Sin embargo, para nuestro objetivo, veremos que no será necesario.

Las referencias básicas utilizadas serán de nuevo los libros [ADQ] y [Munk], así como el libro [Croo].

2.1. Rudimentos del Álgebra Homológica

Comencemos dando la noción de sucesión exacta de grupos abelianos, sobre la cual se basan estos rudimentos.

Definición 2.1.1. Dada una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos de la forma

$$\cdots \to M_{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} M_q \xrightarrow{f_q} M_{q+1} \to \cdots$$

diremos que es *exacta* en M_q si $\mathrm{Im}(f_{q-1}) = \mathrm{Ker}(f_q)$. Se dice que la sucesión es *exacta* si es exacta en cada M_q.

Son inmediatas las siguientes propiedades:

Propiedades 2.1.2.

a) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2$ es exacta si y sólo si f es inyectiva.

b) $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to 0$ es exacta si y sólo si f es sobre.

c) $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$ es exacta si, y sólo si, se tiene que f_1 es inyectiva, f_2 es sobreyectiva e $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Ker}(f_2)$ (en consecuencia f_2 induce un isomorfismo entre $\mathrm{Coker}(f_1)$ y M_3).

Definición 2.1.3. Una sucesión exacta del tipo del apartado c) se denomina *sucesión exacta corta*.

Definición 2.1.4. Un *complejo de cadenas* $\mathcal{C}$ es un diagrama del tipo

$$\cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \cdots$$

donde cada C_q es un grupo abeliano y $\partial_q \partial_{q+1} = 0$. Los homomorfismos ∂_q se denominan *operadores borde*.

Se denominan *q-ciclos* a los elementos de $Z_q(\mathcal{C}) = \mathrm{Ker}(\partial_q)$ y *q-bordes* a los elementos de $B_q(\mathcal{C}) = \mathrm{Im}(\partial_{q+1})$. Nótese que $B_q(\mathcal{C}) \subseteq Z_q(\mathcal{C})$. Se define entonces el *q-ésimo grupo de homología* de $\mathcal{C}$ como el cociente $H_q(\mathcal{C}) = Z_q(\mathcal{C})/B_q(\mathcal{C})$. La clase de homología de un ciclo z se denota por $[z]$, y diremos que dos ciclos z_1 y z_2 son *homólogos* si $[z_1] = [z_2]$.

Definición 2.1.5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos complejos de cadenas. Se llama *suma directa* de ambos complejos, y se denota por $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$, al complejo de cadenas definido por los operadores borde $\partial_q \oplus \partial'_q \colon C_q \oplus C'_q \to C_{q-1} \oplus C'_{q-1}$.

Se va a definir ahora la noción de homomorfismo de complejos de cadenas, que junto con la de aplicación simplicial, será fundamental en el desarrollo de la Homología Simplicial.

Definición 2.1.6. Sean $\mathcal{C}^1 = \{C_q^1, \partial_q^1\}$ y $\mathcal{C}^2 = \{C_q^2, \partial_q^2\}$ dos complejos de cadenas. Un *homomorfismo de complejos de cadenas* es una familia de homomorfismos $f = \{f_q : C_q^1 \to C_q^2\}$ verificando que, para cada q, el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_q^1 \arrow[r, "\partial_q^1"] \arrow[d, "f_q"'] & C_{q-1}^1 \arrow[d, "f_{q-1}"] \\ C_q^2 \arrow[r, "\partial_q^2"] & C_{q-1}^2 \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Escribiremos abreviadamente $f : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^2$. En particular, esta conmutatividad implica que $f_q(Z_q(\mathcal{C}^1)) \subseteq Z_q(\mathcal{C}^2)$ y $f_q(B_q(\mathcal{C}^1)) \subseteq B_q(\mathcal{C}^2)$. Por tanto, f induce homomorfismos $f_* : H_q(\mathcal{C}^1) \to H_q(\mathcal{C}^2)$, donde $f_*([z]) = [f_q(z)]$. A f_* se le conoce como *homomorfismo inducido* por f.

Son inmediatas las siguientes propiedades:

Propiedades 2.1.7.

i) $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

ii) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Definición 2.1.8. Sean $\mathcal{C}^1 = \{C_q^1, \partial_q^1\}$, $\mathcal{C}^2 = \{C_q^2, \partial_q^2\}$ y $\mathcal{C}^3 = \{C_q^3, \partial_q^3\}$ complejos de cadenas. Se dice que la sucesión de complejos

$$0 \to \mathcal{C}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{g} \mathcal{C}^3 \to 0$$

donde f y g son homomorfismos de complejos de cadenas, es *exacta* cuando para todo entero q se verifica que la sucesión

$$0 \to C_q^1 \xrightarrow{f_q} C_q^2 \xrightarrow{g_q} C_q^3 \to 0$$

es exacta.

Proposición 2.1.9. Sea una sucesión exacta de complejos como la dada en la definición 2.1.8. Entonces se tiene que la sucesión

$$H_q(\mathcal{C}^1) \xrightarrow{f_*} H_q(\mathcal{C}^2) \xrightarrow{g_*} H_q(\mathcal{C}^3)$$

es exacta.

Demostracion:

Se tiene que ver que $\mathrm{Im}(f_*) = \mathrm{Ker}(g_*)$.

Puesto que $f \circ g = 0$ por ser la sucesión $0 \to \mathcal{C}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{g} \mathcal{C}^3 \to 0$ exacta, se deduce que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0_* = 0$. Esto prueba que $\mathrm{Im}(f_*) \subseteq \mathrm{Ker}(g_*)$.

Para la otra contención, se toma $[z_2] \in H_q(\mathcal{C}^2)$ de manera que $g_*([z_2]) = [g_q(z_2)] = 0$, es decir, $[z_2] \in \mathrm{Ker}(g_*)$. Por definición de q-borde, se tiene que existe un $x_3 \in C^3_{q+1}$ con $\partial^3_{q+1} x_3 = g_q(z_2)$ y por exactitud existe $x_2 \in C^2_{q+1}$ con $g_{q+1}(x_2) = x_3$. Entonces, por ser g_q homomorfismo, $g_q(z_2 - \partial^2_{q+1} x_2) = g_q(z_2) - g_q(\partial^2_{q+1} x_2) = g_q(z_2) - \partial^3_{q+1} x_3 = 0$, y por exactitud existe un $z_1 \in C^1_q$ con $f_q(z_1) = z_2 - \partial^2_{q+1}(x_2)$. Además,

$$f_{q-1}\partial^1_q z_1 = \partial^2_q f_q(z_1) = \partial^2_q(z_2 - \partial^2_{q+1} x_2) = 0$$

de donde, por ser f_{q-1} inyectiva, se deduce que $\partial^1_q z_1 = 0$. Así, z_1 es un ciclo y $f_*[z_1] = [z_2 - \partial^2_{q+1} x_2] = [z_2]$ y por lo tanto $\mathrm{Ker}(g_*) \subseteq \mathrm{Im}(f_*)$.

Proposición 2.1.10. Dada una sucesión exacta de complejos como la de la definición 2.1.8, existe un homomorfismo $\partial_* : H_q(\mathcal{C}^3) \to H_{q-1}(\mathcal{C}^1)$ tal que la sucesión larga

$$\cdots \to H_q(\mathcal{C}^2) \xrightarrow{g_*} H_q(\mathcal{C}^3) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(\mathcal{C}^1) \xrightarrow{f_*} H_{q-1}(\mathcal{C}^2) \to \cdots$$

es exacta. Esta sucesión es llamada *sucesión exacta larga de homología.*

Demostración:

Definamos el homomorfismo ∂_*. Tomamos $[z_3] \in H_q(\mathcal{C}^3)$. Entonces, por exactitud, existe un $x_2 \in C^2_q$ con $g_q(x_2) = z_3$. Tenemos que

$$g_{q-1}\partial^2_q x_2 = \partial^3_q g_q(x_2) = \partial^3_q z_3 = 0$$

Existe por lo tanto un único $y_1 \in C^1_{q-1}$ con $f_{q-1}(y_1) = \partial^2_q(x_2)$. Observamos que

$$f_{q-2}\partial^1_{q-1} y_1 = \partial^2_{q-1} f_{q-1}(y_1) = \partial^2_{q-1}\partial^2_q x_2 = 0$$

Además, por ser f_{q-2} inyectiva, he de ser $\partial^1_{q-1} y_1 = 0$, de donde se deduce que y_1 es un ciclo y se puede considerar $[y_1] \in H_{q-1}(\mathcal{C}^1)$.

Para ver que la definición del homomorfismo así dada es consistente, veamos que $[y_1]$ no depende de las elecciones tomadas anteriormente. En efecto, si $x'_2 \in C^2_q$ verifica que $g_q(x'_2) = z'_3$ para un cierto z'_3 con $[z'_3] = [z_3]$, tenemos que existe un $w_3 \in C^3_{q+1}$ de manera que $z'_3 = z_3 + \partial^3_{q+1} w_3$. Entonces, se tiene que $g_q(x'_2) = z_3 + \partial^3_{q+1} w_3$.

Ahora, como

$$g_{q-1}(\partial^2_q x'_2) = \partial^3_q g_q(x'_2) = \partial^3_q(z_3 + \partial^3_{q+1} w_3) = 0$$

existe un único y'_1 con $f_{q-1}(y'_1) = \partial^2_q x'_2$. Se tiene que $g_q(x'_2 - x_2) = \partial^3_{q+1} w_3$ y para w_3 existe $y_2 \in C^2_{q+1}$ con $g_{q+1}(y_2) = w_3$. Así, tenemos por tanto que

$$g_q(x'_2 - x_2 - \partial^2_{q+1} y_2) = \partial^3_{q+1}(w_3) - \partial^3_{q+1} g_{q+1}(y_2) = 0$$

Por exactitud, existe un único elemento $a_1 \in C^1_q$ con

$$f_q(a_1) = x'_2 - x_2 - \partial^2_{q+1}(y_2)$$

Entonces,

$$f_{q-1}(y'_1 - y_1) = \partial^2_q(x'_2 - x_2) = \partial^2_q(f_q(a_1) - \partial^2_{q+1}(y_2)) = \partial^2_q f_q(a_1) = f_{q-1}(\partial^1_q a_1)$$

Como f_{q-1} es inyectiva, ha de ser $y'_1 - y_1 = \partial^1_q a_1$ y, por tanto, $[y'_1] = [y_1]$.

Definimos entonces $\partial_*[z_3] = [y_1]$. Notemos que ∂_* es en realidad un homomorfismo, pues dado $\lambda[z^1_3] + \mu[z^2_3]$ podemos elegir el x_2 asociado a $\lambda z^1_3 + \mu z^2_3$ como $\lambda x^1_2 + \mu x^2_2$, donde x^i_2 está asociado a z^i_3, $i = 1, 2$ y λ, $\mu \in \mathbb{Z}$.

Estamos en condiciones de probar la exactitud de la sucesión. Para ello, teniendo en cuenta la proposición 2.1.9, basta probar las siguientes inclusiones.

i) $Im(\partial_*) \subseteq Ker(f_*)$. Dado $\partial_*[z_3] = [y_1]$, sabemos que $f_{n-1}(y_1) = \partial^2_n x_2$. Entonces, $f_*([y_1]) = [f_{n-1}(y_1)] = [\partial^2_n x_2] = 0$.

ii) $Ker(f_*) \subseteq Im(\partial_*)$. Sea $f_*([y_1]) = 0$. Entonces existe $x_2 \in C^2_n$ con $f_{n-1}(y_1) = \partial^2_n x_2$. Como $\partial^3_n g_n(x_2) = g_{n-1}\partial^2_n(x_2) = g_{n-1} f_{n-1}(y_1) = 0$ por exactitud, tenemos que $z_3 = g_n(x_2)$ es un ciclo y $\partial_*[z_3] = [y_1]$.

iii) $Im(g_*) \subseteq Ker(\partial_*)$. Tenemos que $\partial_* g_* = \partial_*[g_n(x_2)] = [y_1] = 0$, pues y_1 verifica que $f_{n-1}(y_1) = \partial^2_n x_2 = 0$ y por ser f_{n-1} inyectiva se tiene que $y_1 = 0$.

iv) $Ker(\partial_*) \subseteq Im(g_*)$. Sea $[z_3]$ con $\partial_*[z_3] = [y_1] = 0$. Entonces, $f_{n-1}(y_1) = \partial^2_n x_2$, $g_n(x_2) = z_3$ y existe $w_1 \in C^1_n$ con $\partial^1_n w_1 = y_1$. Así, se tiene entonces que

$$f_{n-1}(y_1) = f_{n-1}(\partial^1_n w_1) = \partial^2_n f_n(w_1) = \partial^2_n x_2$$

Luego $\partial_n^2(x_2 - f_n(w_1)) = 0$ y $x_2 - f_n(w_1)$ es un ciclo. Además,

$$g_*([x_2 - f_n(w_1)]) = [g_n(x_2) - g_n f_n(w_1)] = [z_3]$$

pues $g_n f_n(w_1) = 0$ por exactitud.

Definición 2.1.11. Se dice que un complejo $\{C_q, \partial_q\}$ de grupos abelianos es *positivo* cuando $C_q = 0$ para todo enero $q < 0$.

2.2. Homología Simplicial orientada

Definición 2.2.1. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_q$ puntos afínmente independientes de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que

$$\sigma := \langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle$$

es el símplice geométrico de vértices $a_0, a_1, \ldots, a_q$, es decir, la envolvente convexa del conjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_q\}$. Diremos que dos ordenaciones de los vértices de σ son equivalentes si tienen la misma paridad, es decir, si se puede pasar de una ordenación a la otra mediante un número par de trasposiciones. Así pues, la ordenación $(a_0, a_1, \ldots, a_q)$ es equivalente a la ordenación

$$(a_{\pi(0)}, a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(q)})$$

si π es una permutación par de los índices $0, 1, \ldots, q$. Tenemos una única clase de equivalencia si $q = 0$, en los demás casos tenemos dos clases de equivalencia. Cada una de estas clases es una *orientación* de σ. Un *símplice orientado* es un símplice geométrico junto con una orientación del mismo. Así pues, salvo en dimensión cero ($q = 0$), cada símplice geométrico da lugar a dos símplices orientados. Denotaremos con $[a_0, a_1, \ldots, a_q]$ el símplice orientado formado por el símplices geométrico $\langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle$ y la clase de equivalencia de la ordenación $(a_0, a_1, \ldots, a_q)$. Diremos a veces que $\langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle$ es el soporte geométrico de $[a_0, a_1, \ldots, a_q]$.

Denotaremos con $G_q(K)$, $q \geq 0$, el grupo abeliano libre engendrado por los q-símplices orientados de K. Para cada q-símplice $\sigma \in K$, $q > 0$, sean σ_1 y σ_2 los dos símplices orientados con soporte σ. Denotaremos con $N_q(K)$ el subgrupo de $G_q(K)$ engendrado por los elementos $\sigma_1 + \sigma_2$, variando σ en el conjunto de los q-símplices de K. Consideraremos el grupo cociente $C_q(K) := G_q(K)/N_q(K)$. Diremos que $C_q(K)$ es el grupo de las *q-cadenas orientadas* de K. Si $c \in G_q(K)$, denotaremos provisionalmente con $\widetilde{c}$ la clase de equivalencia de c en $C_q(K) := G_q(K)/N_q(K)$.

Si σ es un 0-símplice geométrico, entonces sólo hay un símplice orientado con soporte σ. Así pues, $C_0(K)$ es el grupo abeliano libre engendrado por los 0-símplices (o vértices) de K. Para $q > 0$, $C_q(K)$ también es un grupo abeliano libre. En este caso, una base se obtiene al tomar, para cada q-símplice $\sigma \in K$, la clase en $C_q(K)$ de uno (y sólo de uno) de los q-símplices orientados con soporte σ. Obsérvese que $\widetilde{\sigma_2} = -\widetilde{\sigma_1}$. Como es tradicional en esta materia, omitiremos la tilde en la escritura las q-cadenas y, por tanto, escribiremos $\sigma_2 = -\sigma_1$.

Para definir un homomorfismo de grupos $\overline{f} : C_q(K) \to G$, lo habitual será definir un homomorfismo de grupos $f : G_q(K) \to G$ y obtener $\overline{f}$ por paso al cociente de f, una vez comprobado que f se anula sobre los generadores $\sigma_1+\sigma_2$ de N_q, es decir, que $f(\sigma_2) = -f(\sigma_1)$, para todo q-símplice $\sigma \in K$. Para definir el homomorfismo $f : G_q(K) \to G$, es frecuente definirlo primero sobre los elementos de la base formada por los q-símplices orientados, y extenderlo después por linealidad. Ahora bien, si σ es un q-símplice orientado de K, lo habitual para definir $f(\sigma)$ será tomar una orientación concreta $(a_0, a_1, \ldots, a_q)$ de los vértices de σ y ver que la definición de $f(\sigma)$ no varía si efectuamos una permutación par de los índices. Así pues, siguiendo este esquema, una vez definido $f([a_0, a_1, \ldots, a_q])$ utilizando la ordenación $(a_0, a_1, \ldots, a_q)$, para definir correctamente $\overline{f}$ tenemos que comprobar las dos siguientes condiciones:

1. $f([a_0, a_1, \ldots, a_q])$ no varía si efectuamos una permutación par de los índices. Garantizamos así que el representante elegido de la orientación del q-símplice no influye en el valor que toma f sobre el q-símplice orientado en cuestión.

2. $f([a_0, a_1, \ldots, a_q])$ cambia de signo si efectuamos una permutación impar de los índices. Garantizamos así que el homomorfismo f pasa el cociente.

Puesto que el grupo simétrico S_q está engendrado por las trasposiciones de índices consecutivos, las anteriores condiciones (1) y (2) quedarán satisfechas si comprobamos que $f([a_0, a_1, \ldots, a_q])$ cambia de signo cuando trasponemos dos índices consecutivos. Así lo haremos habitualmente.

Definición 2.2.2. Denotamos ∂_q al homomorfismo

$$\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$$

dado por la extensión lineal de

$$\partial_q[a_0, \ldots, a_q] = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q]$$

donde $[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q]$ representa al $(q-1)$-símplice orientado obtenido al eliminar el vértice que ocupa el lugar i.

Lema 2.2.3. Este homomorfismo está bien definido, es decir, no depende de la permutación que define $[a_0, \ldots, a_q]$. De hecho, si σ_1 y σ_2 son las dos orientaciones de un q-símplice se tiene

$$\partial_q(\sigma_1^q + \sigma_2^q) = 0.$$

Demostración:

Basta con probar que si $\sigma_1 = [a_0, a_1, \ldots, a_q]$ y $\sigma_2 = [a_1, a_0, \ldots, a_q]$, se tiene que $\partial_q(\sigma_1 + \sigma_2) = \partial_q\sigma_1 + \partial_q\sigma_2 = 0$. Notemos que σ_1 y σ_2 así definidas son las dos orientaciones de $\sigma = \langle a_0, \ldots, a_q \rangle$ pues una se obtiene mediante una única trasposición y por tanto es una permutación impar de los índices.

Observemos que

$$\partial_q\sigma_1 = [a_1, a_2, \ldots, a_q] - [a_0, a_2, \ldots, a_q] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [a_0, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n]$$

y

$$\partial_q\sigma_2 = [a_0, a_2, \ldots, a_q] - [a_1, a_2, \ldots, a_q] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [a_1, a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n].$$

Es evidente ahora, por la definición de $C_{q-1}(K)$, que $\partial_q(\sigma_1^q + \sigma_2^q) = 0$.

Lema 2.2.4. Se verifica $\partial_q\partial_{q+1} = 0$.

Demostración:

Tenemos

$$\partial_q\partial_{q+1}[a_0 \ldots, a_{q+1}] = \partial_q\left(\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{q+1}]\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i \left[\sum_{j>i}^{q+1}(-1)^{j-1}[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_{q+1}] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{j<i}(-1)^j[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_{q+1}]\right].$$

Observamos que el símplice $[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_{q+1}]$ aparece en dos ocasiones en la expresión de arriba y con signos opuestos, una vez cuando desaparece a_k y otra cuando lo hace a_t. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k < t$. En el primer caso $i = k < j = t$ y el coeficiente es $(-1)^k(-1)^{t-1}$; en el segundo caso $i = t > j = K$ y el coeficiente es $(-1)^t(-1)^k$. Por lo tanto, todo símplice figura con coeficiente nulo.

Hemos probado que $\partial_q\partial_{q+1}$ es nulo sobre los generadores, y por tanto es el homomorfismo nulo.

Estamos en condiciones ahora de construir un complejo de cadenas como en la definición 2.1.4, donde los $C_q(K)$ son grupos abelianos libres y los ∂_q son los operadores borde. Además, por construcción, es claro que se trata de un complejo de cadenas positivo. Vamos a formalizarlo con una definición:

Definición 2.2.5. El complejo de cadenas $\mathcal{C}(K) = \{C_q(K), \partial_q\}$ positivo es llamado el complejo de cadenas simpliciales orientadas de K. La homología de este complejo se denota por $H_q(K)$. Diremos que $H_q(K)$ es el *q-ésimo grupo de homología orientada de K*.

Así pues, $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$, donde $Z_q(K) = \mathrm{Ker}(\partial_q)$ es el subgrupo de los q-ciclos y $B_q(K) = \mathrm{Im}(\partial_{q+1})$ es el subgrupo de los q-bordes. Recordemos que los elementos de $H_q(K)$, es decir, las clases laterales inducidas por $B_q(K)$ en $Z_q(K)$, se denominan clases de homología. Recordemos también que dos q-ciclos w y z del complejo K se dicen homólogos si sus clases de homología coinciden, es decir, si $[w] = [z]$.

Observación 2.2.6. Puesto que cada subgrupo de un grupo abeliano libre es también un grupo abeliano libre (véase [Munk]), en particular lo son $Z_q(K)$ y $B_q(K)$. Sin embargo $H_q(K)$ no tiene por qué serlo.

La estructura del grupo de homología de dimensión 0 de un complejo K, es decir, $H_0(K)$, muestra una importante propiedad geométrica, y es que este grupo es isomorfo a la suma directa de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como componentes conexas tenga el poliedro $|K|$. Nosotros únicamente vamos a probar que si $|K|$ es conexo entonces $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, pues es lo que vamos a necesitar a lo largo del trabajo.

Para evitar problemas con las diferentes propiedades de conexión de un poliedro, antes de probar que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ si K es un complejo simplicial cuyo poliedro es conexo, es conveniente probar el siguiente resultado:

Teorema 2.2.7. Sea K un complejo simplicial. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $|K|$ es conexo.

2. $|K|$ es conexo por caminos.

3. K es conexo por caminos de aristas, es decir, para cada par de vértices de K, existe un camino de aristas en K que va de uno al otro vértice. (También se dice que K es combinatoria o simplicialmente conexo.)

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2): El poliedro $|K|$ es localmente conexo por caminos, ya que las estrellas de los vértices de K son conjuntos abiertos y conexos por caminos (que recubren $|K|$). Luego las componentes conexas por caminos de $|K|$ son conjuntos abiertos y disjuntos dos a dos, así que también son cerrados. Como, por hipótesis, $|K|$ es conexo, concluimos que hay una única componente conexa por caminos.

2) $\Rightarrow$ 3): Sean a y b dos vértices de K. Existe, por hipótesis, un camino topológico $\alpha : [0,1] \to |K|$ que va del vértice a al vértice b. Aplicando la versión general (no la versión clásica) del Teorema de Aproximación Simplicial (1.3.6), se obtiene el camino de aristas que va del vértice a al vértice b.

3) $\Rightarrow$ 1): Fijamos un vértice a de K. Veremos que, para cada $x \in |K|$, existe un subconjunto conexo A_x de $|K|$ que contiene al vértice a y al punto x. Concluiremos así que $|K|$ es conexo por ser unión de subconjuntos conexos con un punto en común. Probemos ahora la existencia de los conjuntos conexos A_x. Si $x = a$, basta tomar $A_x := \{a\}$. Sea $x \neq a$. El punto x pertenece al interior geométrico de un (único) símplice $\sigma \in K$. Existe un vértice a_n de σ que es diferente de a (pues $\sigma \neq < a >$). Existe, por hipótesis, un camino de aristas $aa_1 \dots a_n$ que va del vértice a al vértice a_n. Podemos suponer que en ese camino de aristas no hay vértices repetidos, y tomar

$$A_x := < a, a_1 > \cup \cdots \cup < a_{n-1}, a_n > \cup \, \sigma.$$

Teorema 2.2.8. Sea K un complejo simplicial cuyo poliedro es conexo. Entonces el grupo de homología de dimensión 0 es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Demostración:

Fijamos un 0-símplice a de K, es decir, a es un vértice del complejo. Dado cualquier vértice b de K, y puesto que $|K|$ es conexo, existe entonces un camino de aristas α_b que va desde a hasta b

$$\alpha_b = aa_1 \dots a_n$$

Para cada $b \neq a$, eliminamos los vértices repetidos que sean consecutivos en α_b. Podemos suponer por lo tanto que en α_b no hay vértices consecutivos repetidos.

Consideramos la 1-cadena

$$c_b = [a, a_0] + [a_0, a_1] + \ldots + [a_p, b]$$

Aplicando ahora el operador borde a dicha 1-cadena obtenemos $\partial_1(c_b) = b - a$.

Consideramos ahora el homomorfismo $\phi : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ que envía la 0-cadena $\sum_b n_b b$ en el entero n_b.

(Obsérvese que ϕ se obtiene definiendo $\phi(b) = 1$ para todo vértice b de K, y extendiéndolo después por linealidad.)

Con el objetivo de utilizar el primer teorema de isomorfía, vamos a ver que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es $B_0(K)$.

1) ϕ sobreyectivo: Basta observar que $\phi(na) = n$ para todo entero n.

2) $B_0(K) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$: Sea c un 0-borde, entonces c es de la forma

$$c = \partial_1(\sum_i n_i[a_i, b_i]) = \sum_i n_i(b_i - a_i)$$

y por lo tanto

$$\phi(c) = \phi(\sum_i n_i(b_i - a_i)) = \sum_i n_i\phi(b_i - a_i) = \sum_i n_i 0 = 0$$

Por lo que c está en el núcleo del homomorfismo ϕ.

3) $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq B_0(K)$: Sea c una 0-cadena en el núcleo de ϕ, es decir,

$$c = \sum_b n_b b \quad \text{con} \quad \sum_b n_b = 0$$

Entonces, para cualquier vértice a, se tiene

$$c = \sum_b n_b b - \sum_b n_b a = \sum_b n_b(b - a) =$$

$$= \sum_{a \neq b} n_b \partial_1 c_b = \partial_1(\sum_{a \neq b} n_b c_b) \in B_0(K)$$

Por el primer teoría de isomorfía, se tiene que $C_0(K)/\mathrm{Ker}(\phi) \cong \mathbb{Z}$ y, por lo tanto, de la igualdad $B_0(K) = \mathrm{Ker}(\phi)$, se deduce

$$C_0(K)/B_0(K) = H_0(K) \cong \mathbb{Z}$$

2.3. Grupos de Homología de la esfera

Vamos a considerar un $(n+1)$-símplice $\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n+1}\rangle$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Llamamos K al n-esqueleto de σ (visto como complejo simplicial según la observación 1.1.6). K es una triangulación de la n-esfera.

Proposición 2.3.1. $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración:

Vamos a tomar en K la base dada por los elementos $(-1)^i\sigma_i$, para $i = 0, \dots, n+1$ y con $\sigma_i = [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_{n+1}]$. Una n-cadena cualquiera de K viene dada entonces por $z = \sum_{i=0}^{n+1} g_i(-1)^i\sigma_i$. Para que z sea un n-ciclo se tiene que verificar que $\partial_n(z) = 0$.

Denotemos ahora $\sigma_{ij} = [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_{a+1}]$. Notemos que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Se tiene entonces que

$$\partial_n(z) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i g_i \partial_n \sigma_i = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i g_i \left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\sigma_{ij} + \sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{j+1}\sigma_{ij}\right)$$

Suponemos ahora $i < j$, sin pérdida de generalidad pues $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Entonces cada $(n-1)$-símplice σ_{ij} aparece en dos ocasiones, en una ocasión con coeficiente $(-1)^i g_i(-1)^{j+1}$ y otra con coeficiente $(-1)^j g_j(-1)^i$. Por tanto,

$$\partial_n(z) = \sum_{\sigma_{ij}}\left((-1)^i g_i(-1)^{j+1} + (-1)^j g_j(-1)^i\right)\sigma_{ij} =$$

$$= \sum_{\sigma_{ij}}(g_j(-1)^{i+j} - g_i(-1)^{i+j})\sigma_{ij} = \sum_{\sigma_{ij}}(-1)^{i+j}(g_j - g_i)\sigma_{ij}$$

Al igualar a 0 llegamos entonces a que debe verificarse que $g_i = g_j$ para todos $i, j = 0, \dots, n+1$. Por tanto z es de la forma $z = g\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\sigma_i$ y por tanto $Z_n(K)$ es el grupo abeliano libre engendrado por $\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\sigma_i$, es decir, $Z_n(K) \cong \mathbb{Z}$, y puesto que es claro que $B_n(K) = 0$, se tiene que $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$.

Nota. El hecho de tomar la base utilizada en la demostración anterior y no otra cualquiera, es simplemente para la simplificación de los cálculos.

Proposición 2.3.2. $H_q(K) = 0$ si $0 < q < n$.

Demostración:

Vamos a emplear para esta prueba la siguiente notación: si tenemos un q-símplice orientado $\tau = [a_0, a_1, \ldots, a_q]$ y w un vértice de K para el cual los puntos $w, a_0, a_1, \ldots, a_q$ son afínmente independientes, entonces denotamos por $[w, \tau]$ al $(q+1)$-símplice $[w, a_0, a_1, \ldots, a_q]$. Además, si $c_q = \sum g_i \tau_i$ es una q-cadena, denotamos por $[w, c_q]$ a la $(q+1)$-cadena $\sum g_i [w, \tau_i]$.

Notemos que

$$\partial_{q+1}[w, \tau] = \tau - [w, \partial_q \tau]$$

y también

$$\partial_{q+1}[w, c_q] = c_q - [w, \partial_q c_q]$$

Nos conviene provisionalmente escribir τ^q para indicar que la dimensión del símplice es q. Para probar que $H_q(K) = 0$, vamos a ver que todo q-ciclo es también un borde. Sea entonces z un q-ciclo. Fijado un vértice v, escribiremos z de la forma siguiente

$$z = \sum g_i \tau_i^q + \sum h_j [v, \tau_j^{q-1}]$$

donde v es vértice de los símplices del segundo sumando pero no es vértice de los símplices del primero. Puesto que z es un q-ciclo, se tiene que

$$0 = \partial_q z = \partial_q(\sum g_i \tau_i^q) + \partial_q(\sum h_i [v, \tau_j^{q-1}]) =$$

$$= \partial_q(\sum g_i \tau_i^q) + \sum h_j \tau_j^{q-1} - [v, \partial_{q-1}(\sum h_j \tau_j^{q-1})]$$

Deducimos entonces que $\partial_{q-1}(\sum h_j \tau_j^{q-1})] = 0$ y que

$$\partial_q(\sum g_i \tau_i^q) = -\sum h_j \tau_j^{q-1}$$

Luego, de esta última igualdad concluimos que

$$\partial_{q+1}([v, \sum g_i \tau_i^q]) = \sum g_i \tau_i^q - [v, \partial_q(\sum g_i \tau_i^q)] =$$

$$= \sum g_i \tau_i^q + [v, \sum h_j \tau_j^{q-1}] = z$$

Así pues, z es también un borde, como queríamos ver.

Considerando que K es un complejo simplicial cuyo poliedro $|K|$ es conexo, entonces por el teorema 2.2.8, junto con las proposiciones 2.3.1 y 2.3.2, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.3.3.

$$H_q(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < q < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ o } q = n \end{cases}$$

2.4. Homomorfismos en grupos de Homología

Proposición 2.4.1. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y $\varphi : K_1 \to K_2$ una aplicación simplicial. Entonces φ induce un homomorfismo de complejos de cadenas $C(\varphi)$ definido de la siguiente manera. Definiremos primero $C(\varphi)$ sobre los símplices orientados y después lo extenderemos por linealidad. Definimos $C(\varphi)[a_0, \ldots, a_q] = [\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_q)]$ si no aparece ningún vértice repetido y $C(\varphi)[a_0, \ldots, a_q] = 0$ en caso contrario.

En particular si $\varphi = \text{id}$ entonces $C(\varphi) = \text{id}$ y si $\psi : K_2 \to K_3$ es otra aproximación simplicial se tiene $C(\psi \circ \varphi) = C(\psi) \circ C(\varphi)$.

Demostración:

Es inmediato que la definición de $C(\varphi)$ no depende de la permutación que define la orientación. Comprobaremos por tanto que el diagrama es conmutativo, es decir, que se verifica la igualdad $\partial_q \circ C(\varphi) = C(\varphi) \circ \partial_q$. Si φ no repite ningún vértice, tenemos que

$$C(\varphi)\partial_q([a_0, \ldots, a_q]) = C(\varphi)\left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i [a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q]\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i ([\varphi(a_0), \ldots, \varphi(\hat{a}_i), \ldots, \varphi(a_q)]) = \partial_q C(\varphi)([a_0, \ldots, a_q])$$

Si φ repite algún vértice, digamos $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$, entonces se tiene que $\partial_q C(\varphi)([a_0, \ldots, a_q]) = 0$. Por otro lado

$$\sum_{i=0}^{q} (-1)^i C(\varphi)([a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q]) = 0$$

pues si $k \neq i, j$, entonces $C(\varphi)([a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_q]) = 0$ y, suponiendo sin pérdida de generalidad que $i < j$, se tiene que

$$(-1)^i [\varphi(a_0), \ldots, \varphi(\hat{a}_i), \ldots, \varphi(a_j), \ldots, \varphi(a_q)] +$$

$$+ (-1)^j [\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_i), \ldots, \varphi(\hat{a}_j), \ldots, \varphi(a_q)] = 0$$

ya que, en caso de no haber más vértices repetidos, como $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ entonces el número de trasposiciones para pasar del primer símplice ordenado al segundo es $j-i-1$. Obsérvese que $\varphi(a_j)$ ocupa el lugar $j-1$ en el primer símplice. La fórmula $C(\psi \circ \varphi) = C(\psi) \circ C(\varphi)$ se deduce inmediatamente de la propia definición de $C(\varphi)$.

Corolario 2.4.2. Dados K_1, K_2 y K_3, se tiene que toda aplicación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ induce un homomorfismo

$$\varphi_* : H_q(K_1) \to H_q(K_2)$$

tal que si $\psi : K_2 \to K_3$ es otra aplicación simplicial, entonces $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ y además $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

Nota. Con el fin de simplificar la notación y siempre y cuando no haya lugar a confusión, utilizaremos también φ_* como notación alternativa para representar $C(\varphi)$.

Definición 2.4.3. Sean K y L complejos simpliciales y $f : |K| \to |L|$ una aplicación continua. Por el teorema de aproximación simplicial, existe una subdivisión baricéntrica $\mathrm{sd}^r K$ de K y una aplicación simplicial

$$g : |\mathrm{sd}^r K| \to |L|$$

que es aproximación simplicial de f. Como ya hemos visto con anterioridad, g induce homomorfismos $g_* : H_q(K) \to H_q(L)$ para cada dimensión q. A estos homomorfismos les llamaremos *homomorfismos inducidos por la aplicación continua* f, y les denotaremos por f_*.

Observación 2.4.4. Es claro que deberíamos probar que esta definición es coherente, es decir, que es independiente de la subdivisión baricéntrica r y de la aproximación simplicial g que tomemos.

La demostración puede verse en [ADQ], pero ésta no es sencilla y requiere la introducción de la homología ordenada.

Dando por probado que la sucesión de homomorfismos inducida por una aplicación continua está bien definida, es inmediata la siguiente proposición:

Proposición 2.4.5. Si $f : |K_1| \to |K_2|$ y $h : |K_2| \to |K_3|$ son aplicaciones continuas, entonces $(h \circ f)_* : H_q(K_1) \to H_q(K_3)$ es la composición $h_* \circ f_* : H_q(K_1) \to H_q(K_3)$ en cada dimensión q.

Estamos ya en condiciones de dar ahora la noción de grado, que será fundamental a la hora de probar el teorema del punto fijo de Brouwer.

Definición 2.4.6. Sea $\sigma = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle$ un $(n+1)$-símplice en $\mathbb{R}^{n+1}$. Como hemos hecho antes ya, llamamos K al n-esqueleto de σ (de nuevo visto como complejo simplicial). Sabemos que $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$.

Toda aplicación continua $f : |K| \to |K|$ induce un homomorfismo de grupos

$$f_* : H_n(K) \to H_n(K)$$

Fijado uno de los generadores de $H_n(K)$, digamos α, se ha de verificar que $f_*(\alpha) = \rho\,\alpha$, con ρ un número entero (ρ es independiente de la elección del generador).

Al entero ρ se le llama *grado de la aplicación* f y se denota por $\deg(f)$.

Nota. Notemos que en realidad únicamente podemos aplicar esta definición a la triangulación K para la cual hemos calculado los grupos de homología simplicial. Probar que, para cualquier triangulación de S^n, los grupos de homología coinciden (salvo isomorfismo) no es trivial (ya comentamos en la introducción que no probaríamos la Invariancia Homotópica de la Homología), pero una vez probado, podríamos hablar con rigor de grupos de homología de la esfera. Así la noción de grado quedaría bien definida para cualquier aplicación continua dada de $S^n \to S^n$. Veremos que esto no supone ningún impedimento para poder, más adelante, concluir que S^n no es contráctil y posteriormente probar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Teorema 2.4.7.

i) Si $f, g : |K| \to |K|$ son aplicaciones continuas, entonces $\deg(g \circ f) = \deg g \deg f$.

ii) La aplicación identidad $\mathrm{id} : |K| \to |K|$ tiene grado $+1$.

iii) Un homeomorfismo $h : |K| \to |K|$ tiene grado ± 1.

iv) Una aplicación constante $f : |K| \to |K|$ tiene grado 0.

Demostración:

i) Sea α un generador del grupo $H_n(K)$ y sean $f_*, g_* : H_n(k) \to H_n(K)$ los homomorfismos inducidos por f y g respectivamente. Entonces por un lado tenemos que

$$(g \circ f)_* = \deg(g \circ f)\alpha$$

y por otro lado

$$(g_* \circ f_*)(\alpha) = g_*(\deg(f)(\alpha)) = \deg(g)\deg(f)\,\alpha$$

Puesto que se tiene que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, por la proposición 2.4.5, entonces concluimos que $\deg(g \circ f) = \deg g \deg f$.

ii) Hemos probado ya que $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$, luego $\mathrm{id}_*(\alpha) = \alpha$, y por tanto es claro que $\deg(\mathrm{id}) = 1$.

iii) Se tiene que

$$1 = \deg(\mathrm{id}) = \deg(h \circ h^{-1}) = \deg(h) \cdot \deg(h^{-1})$$

Puesto que $\deg(h)$ tiene que ser un número entero, entonces únicamente puede ser ± 1. También se sigue que h y h^{-1} tienen el mismo grado, es decir, ambas tienen grado 1 o ambas grado -1.

iv) Toda aplicación constante $f : |K| \to |K|$ tiene grado 0, pues admite como aproximación simplicial una aplicación constante (que induce el homomorfismo nulo en homología).

Antes de enunciar y probar el teorema siguiente, vamos a recordar la definición de aplicaciones homótopas.

Definición 2.4.8. Sean X e Y espacios topológicos y sean f, g aplicaciones continuas de X en Y. Entonces decimos que f *es homótopa a* g si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ de manera que, para todo $x \in X$, $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. La función H se llama *homotopía* entre f y g. En adelante escribiremos $I = [0,1]$.

Teorema 2.4.9. (Teorema del Grado de Brouwer) Dos aplicaciones continuas, $f, g : |K| \to |K|$, que son homótopas, tienen el mismo grado.

Demostración:

Sea $h : |K| \times I \to |K|$ una homotopía de manera que, para todo $x \in |K|$, se tiene que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$. Por comodidad denotaremos h_t a la restricción de h a $|K| \times t$. En particular, $h_0 = f$ y $h_1 = g$.

Consideramos el recubrimiento abierto de $|K|$ formado por las estrellas de los vértices de K, es decir, el recubrimiento

$$\{\mathrm{st}(w_i, K) : \text{ donde } w_i \text{ varía en el conjunto de vértices de } K\}$$

Sea ε un número de Lebesgue para dicho recubrimiento. Puesto que h es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si A y B son subconjuntos de $|K|$ e I respectivamente con $\mathrm{diam}(A) < \delta$ y $\mathrm{diam}(B) < \delta$, entonces $\mathrm{diam}(h(A \times B)) < \varepsilon$.

Sea $\mathrm{sd}^r(K)$ una subdivisión baricéntrica de K para la cual se tiene que $\mathrm{m}(\mathrm{sd}^r(K)) < \frac{\delta}{2}$. Entonces, si v es un vértice de $\mathrm{sd}^r(K)$, se verifica que $\mathrm{diam}(\mathrm{st}(v, \mathrm{sd}^r(K))) < \delta$.

Sea

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = 1$$

una partición de I para la cual puntos sucesivos distan entre sí $< \delta$. Entonces, cada conjunto $h(\mathrm{st}(v_i), \mathrm{sd}^r(K) \times [t_{j-1}, t_j])$, donde v_i es un vértice de $\mathrm{sd}^r(K)$, y t_{j-1} y t_j son puntos sucesivos de la partición, tiene diámetro $< \epsilon$. Por tanto, estos conjuntos están contenidos en algún conjunto $\mathrm{st}(w_{ij}, K)$ para un cierto vértice w_{ij} de K. Esto es

$$h(\mathrm{st}(v_i), \mathrm{sd}^r(K) \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq \mathrm{st}(w_{ij}, K)$$

Si $t_{j-1} < t < t_j$, podemos elegir una aproximación simplicial φ_t de h_t que cumple $\varphi_t(v_i) = w_{ij}$. Luego todas las aplicaciones h_t para $t_{j-1} < t < t_j$ tienen el mismo grado. Puesto que dos intervalos consecutivos $[t_{j-1}, t_j]$ y $[t_j, t_{j+1}]$ tienen t_j en común, concluimos que el grado de h_t es constante para $0 \leq t \leq 1$. En particular, $h_0 = f$ y $h_1 = g$ tienen el mismo grado.

2.5. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Comencemos dando la intuitiva noción de punto fijo de una aplicación continua.

Definición 2.5.1. Si $f : X \to X$ es una aplicación continua de un espacio X es sí mismo, entonces decimos que un punto x_0 es un *punto fijo de f* si $f(x_0) = x_0$.

Definición 2.5.2. Una función continua $g : X \to Y$ se dice *homotópicamente nula* si es homótopa a una aplicación constante.

Definición 2.5.3. Un espacio X se dice *contráctil* si la función identidad, $\mathrm{id} : X \to X$ es homotópicamente nula. En otras palabras, X es contráctil si existe un punto x_0 en X y una homotopía $H : X \times I \to X$ de tales que, para todo $x \in X$ se tiene que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$. A la homotopía H se le llama *contracción* del espacio X.

Teorema 2.5.4. El poliedro $|K|$ no es contráctil para ningún $n \geq 1$.

Demostración:

Hemos probado ya que la función identidad en $H_n(K)$ tiene grado 1 para todo $n \geq 1$, y que cualquier función constante tiene grado 0. Puesto que aplicaciones homótopas tienen el mismo grado (teorema 2.4.9) entonces la aplicación identidad no es homotópicamente nula, y por tanto, K no es contráctil para $n \geq 1$.

Corolario 2.5.5. La n-esfera no es contráctil para ningún $n \geq 0$.

Demostración:

Para $n \geq 1$, como hemos visto que $|K|$ no es contráctil, tampoco lo será S^n, pues $S^n \cong |K|$.

Para $n = 0$, vemos que la 0-esfera es el conjunto dado por $S^0 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$. Es claro que un conjunto discreto con más de un punto no puede ser contráctil.

Teorema 2.5.6. (Teorema de No Retracción de Brouwer) No existe una aplicación continua de la $(n+1)$-bola en S^n que deje fijo cada punto de S^n, $n \geq 0$.

Demostración:

Recordemos que

$$B^{n+1} = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \leq 1\}$$

Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que existe una aplicación $f : B^{n+1} \to S^n$ de manera que $f(x) = x$ para cada $x \in S^n$. Definimos entonces una homotopía $H : S^n \times I \to S^n$ dada por $H(x,t) = f((1-t)x)$ para $x \in S_n$ y $t \in I$. Aquí, $(1-t)x$ denota el producto de un número real y un vector en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces H es una contracción de S^n, pues $H(x,0) = f(x) = x$ y $H(x,1) = 0$ para todo $x \in S^n$. Esto supone una contradicción con el teorema anterior, donde hemos probado que S^n no es contráctil para $n \geq 0$. Por tanto no existe dicha aplicación f.

Teorema 2.5.7. (Teorema del Punto Fijo de Brouwer) Si $f : B^{n+1} \to B^{n+1}$ es una aplicación continua de la $(n+1)$-bola en sí misma y $n \geq 0$, entonces f tiene al menos un punto fijo.

Demostración:

Razonamos de nuevo por reducción al absurdo, suponiendo ahora que f no tiene ningún punto fijo. Esto es, para todo $x \in B^{n+1}$, se tiene que $f(x) \neq x$. Se puede considerar entonces la semirrecta desde $f(x)$ y que pasa por x. Denotemos por $g(x)$ a la intersección de dicha semirrecta con S^n.

Entonces podemos considerar la aplicación $g : B^{n+1} \to S^n$ que manda cada punto $x \in B^{n+1}$ en el punto $g(x)$ antes descrito. Esta aplicación es continua y además es claro que $g(x) = x$ para cada $x \in S^n$. Esto contradice el Teorema de No Retracción de Brouwer (2.5.6), y por lo tanto f tiene al menos un punto fijo.

Capítulo 3

Teoría de la Dimensión

En este capítulo se trata el tema principal de la memoria, la Teoría de la Dimensión. Trabajaremos siempre, como ya hemos advertido, en espacios métricos separables. Definiremos las tres dimensiones clásicas, ind (dimensión inductiva "pequeña"), Ind (dimensión inductiva "grande") y dim (dimensión de recubrimiento), desarrollaremos nuestra teoría en torno a ellas, y veremos que las tres coinciden en estos espacios. También se probará que la dimensión del espacio euclídeo n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, es n, haciendo uso del ya demostrado Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

A lo largo de este capítulo, X denotará un espacio métrico separable. Además, puesto que en los tres casos la dimensión del vacío se define como -1, en adelante supondremos que X es no vacío a no ser que se indique lo contrario.

La referencia básica para este capítulo es el libro [HW]. Utilizaremos también otras referencias como [Eng1], [Eng2] o [ES].

3.1. Dimensión 0

Definición 3.1.1. Diremos que un espacio X tiene *dimensión inductiva pequeña 0 en un punto* p, si p tiene entornos abiertos arbitrariamente pequeños con frontera vacía, es decir, si para cada entorno abierto U de p, existe un entorno abierto V de p de manera que

$$V \subset U \text{ y } \mathrm{Fr}(V) = \emptyset$$

Diremos que un espacio X tiene *dimensión inductiva pequeña 0*, o que es *0-dimensional*, si tiene dimensión inductiva pequeña 0 en cada uno de sus puntos. Como ya hemos advertido, se denotará por $\mathrm{ind}(X) = 0$.

Propiedades 3.1.2.

i) La propiedad de un espacio de ser 0-dimensional es una propiedad topológica, es decir, es invariante por homeomorfismos.

ii) Un espacio 0-dimensional es un espacio no vacío que tiene una base de abiertos formada por conjuntos que también son cerrados. En adelante, diremos que un subconjunto de un espacio X es *abierto-cerrado* si es a la vez abierto y cerrado.

Nota. Observemos que un conjunto tiene frontera vacía si, y sólo si, es abierto-cerrado. En adelante no haremos distinción entre el punto p y el conjunto unipuntual formado por p.

Ejemplo 3.1.3. Todo espacio numerable es 0-dimensional. En particular, se tiene que el conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ de los números racionales es 0-dimensional.

Ejemplo 3.1.4. El conjunto $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ de los irracionales es 0-dimensional, pues tiene una base numerable de conjuntos abierto-cerrados, los conjuntos de la forma $\mathbb{I} \cap (a, b)$, donde a y b son números racionales.

Ejemplo 3.1.5. El conjunto triádico de Cantor y cualquier conjunto de números reales que no contenga ningún intervalo es 0-dimensional.

Teorema 3.1.6. Un subespacio no vacío de un espacio 0-dimensional es también 0-dimensional.

Demostración.

Sean X un espacio 0-dimensional, X' un subconjunto no vacío de X y $p \in X'$. Si U' es un entorno abierto de p en X', entonces, por la topología de subespacio, existe un entorno abierto U de p en X de manera que $U' = U \cap X'$. Ahora, por ser X 0-dimensional, existe un conjunto abierto-cerrado V en X tal que $p \in V \subset U$. Tomamos el conjunto $V' = V \cap X'$, que es abierto-cerrado en X', y es claro que $p \in V' \subset U'$. Por tanto, se tiene que X' es 0-dimensional.

Definición 3.1.7. Sean A_1, A_2 y B subconjuntos disjuntos dos a dos de un espacio X. Decimos que A_1 y A_2 *están separados en* X *por* B, si $X - B$ es unión de dos conjuntos disjuntos, abiertos en $X - B$, y que contengan respectivamente a A_1 y A_2. Es decir, si existen A_1' y A_2' ambos abiertos (o ambos cerrados) en $X - B$ y tales que

$$X - B = A_1' \cup A_2'$$

$$A_1 \subset A_1', \; A_2 \subset A_2'$$

$$A'_1 \cap A'_2 = \emptyset$$

Si A_1 y A_2 están separados por el vacío entonces decimos simplemente que ambos conjuntos *están separados en* X.

Observación 3.1.8. A_1 y A_2 están separados en X si, y sólo si, existe un conjunto A'_1 abierto-cerrado de manera que

$$A_1 \subset A'_1$$

$$A'_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Basta tomar en este caso $A'_2 = X - A_1$.

A partir de esta propiedad de separación de espacios vamos a dar una caracterización relevante para la dimensión inductiva pequeña, pues es la que se usará más adelante para probar la equivalencia con la dimensión inductiva grande.

Proposición 3.1.9. Un espacio tiene dimensión inductiva pequeña 0, esto es $\text{ind}(X) = 0$, si, y sólo si, cada punto p puede separarse de cada conjunto cerrado que no lo contenga.

Demostración.

Supongamos primero que X es un espacio tal que $\text{ind}(X) = 0$. Sean un punto p y un cerrado C que no contiene a p. Como entonces $X - B$ es un entorno abierto de p, existe un conjunto V abierto-cerrado con

$$p \in V \subset X - C$$

Puesto que $V \cap C = \emptyset$, a partir de la 3.1.8 se tiene que p y C están separados, como queríamos probar.

Supongamos ahora que cada punto de X puede separase de cada cerrado que no lo contenga. Sea U un entorno abierto de un punto arbitrario $p \in X$. Puesto que el punto p y el cerrado $X - U$ pueden separarse, existe un conjunto abierto-cerrado V tal que $p \in V$ y $V \cap (X - U) = \emptyset$. Luego, $p \in V \subset U$ y, puesto que V es abierto-cerrado, $\text{Fr}(V) = \emptyset$.

Proposición 3.1.10. Todo espacio 0-dimensional y conexo está formado por un único punto.

Demostración.

Sea X un espacio 0-dimensional. Supongamos, por reducción al absurdo, que existieran dos puntos p y q en X con $p \neq q$. Entonces p y q podrían separarse en virtud de 3.1.9, pues en un espacio Hausdorff todo punto es cerrado. Esto es absurdo pues X es conexo.

Proposición 3.1.11. Un espacio 0-dimensional no tiene subconjuntos que sean conexos y contengan más de un punto, es decir, un subconjunto conexo de un espacio 0-dimensional es unipuntual.

Demostración.

Consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Proposición 3.1.12. Un espacio es 0-dimensional si, y sólo si, dos conjuntos cerrados y disjuntos cualesquiera pueden separarse.

Demostración.

Es obvio que si dos conjuntos cerrados disjuntos pueden separarse en un espacio X, entonces también pueden separarse todo punto y todo cerrado que no contenga a dicho punto, y por tanto X es 0-dimensional.

Supongamos ahora que X es 0-dimensional. Entonces todo punto p de X puede separarse de cualquier cerrado que no contenga a p. Sean C y K dos cerrados disjuntos de X, veamos que pueden separarse. Para cada $p \in X$ se tiene que o bien $p \cap C = \emptyset$ o bien $p \cap K = \emptyset$. Por lo tanto existen entornos $U(p)$, para cada p, que son abierto-cerrados y con $U(p) \cap C = \emptyset$ o $U(p) \cap K = \emptyset$. Puesto que X tiene una base numerable de abiertos, por ser espacio métrico existe una sucesión $U_1, U_2, \ldots$ de los $U(p)$ cuya unión es X.

Vamos a definir una nueva sucesión de la manera siguiente.

$$V_1 = U_1$$

$$V_i = U_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k = U_i \cap \left(X - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k \right), \quad \text{para } i = 2, 3, \ldots$$

Tenemos entonces que:

$$[1] \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

$$[2] \quad V_i \cap V_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

$$[3] \quad V_i \text{ abierto}$$

$$[4] \quad V_i \cap C = \emptyset \text{ o } V_i \cap K = \emptyset$$

donde la condición [3] es consecuencia de que $\bigcup_{k=1}^{i-1} U_k$ es un conjunto cerrado y, por lo tanto, $X - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k$ es abierto. Como V_i está definido como la intersección de este último conjunto y U_i, también abierto, se deduce que V_i es abierto.

Sea C' la unión de los V_i tales que $V_i \cap C = \emptyset$ y sea K' la unión de los V_i tales que $V_i \cap K = \emptyset$. Entonces

$$[1] \Rightarrow X = C' \cup K'$$

$$[2] \Rightarrow C' \cap K' = \emptyset$$

$$[3] \Rightarrow C' \text{ y } K' \text{ son abiertos}$$

$$[4] \Rightarrow (C' \cap K) \cup (K' \cap C) = \emptyset$$

Por tanto se sigue que $C \subset C'$ y $K \subset K'$. La separación buscada es entonces la dada por C' y K'.

Recordemos, antes de continuar, las definiciones y alguna caracterización de espacio normal y espacio completamente normal, que necesitaremos en adelante.

Definición 3.1.13. Se dice que un espacio topológico es *normal* si para dos subconjuntos cerrados y disjuntos cualesquiera C_1 y C_2, existen subconjuntos abiertos V_1 y V_2 tales que $C_1 \subset V_1$, $C_2 \subset V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Es consecuencia inmediata de la normalidad que existen abiertos U_1 y U_2 tales que $C_1 \subset U_1$, $C_2 \subset U_2$ y $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$.

Recordemos que todo espacio métrico es normal.

Definición 3.1.14. Se dice que un espacio es *completamente normal* si todo subespacio suyo es normal. Es inmediato entonces que todo espacio métrico es completamente normal, pues todo subespacio de un espacio métrico es a su vez métrico.

Para dos subconjuntos disjuntos X_1 y X_2 de un espacio completamente normal, de los cuales ninguno contiene un punto de adherencia del otro, se tiene que existen conjuntos abiertos W_1 y W_2 verificando que $X_1 \subset W_1$, $X_2 \subset W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Además es claro que $\bar{W}_1 \cap X_2 = \emptyset$

Proposición 3.1.15. Sean C_1 y C_2 dos subconjuntos cerrados y disjuntos de un espacio X, y sea A un subconjunto 0-dimensional de X. Existe entonces un subconjunto cerrado B que separa a C_1 y C_2 y tal que $A \cap B = \emptyset$.

Demostración.

Puesto que X es normal, existen abiertos U_1 y U_2 tales que $C_1 \subset C_1$, $C_2 \subset U_2$ y $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$. Los conjuntos $\bar{U}_1 \cap A$ y $\bar{U}_1 \cap A$ son cerrados y disjuntos en A, y por lo tanto pueden separarse por ser A 0-dimensional.

Tenemos por tanto conjuntos disjuntos C_1 y C_2, que son abierto-cerrados en A, que satisfacen

$$[1] \quad A = C_1' \cup C_2' \ , \ \bar{U}_1 \cap A \subset C_1' \text{ y } \bar{U}_2 \cap A \subset C_2'$$

De donde,

$$[2] \quad (C_1' \cap \bar{U}_2) \cup (C_2' \cap \bar{U}_1) = \emptyset$$

$$[3] \quad (C_1' \cap \bar{C}_2') \cup (\bar{C}_1' \cap C_2') = \emptyset$$

Además [1] y [2] implican

$$[4] \quad (C_1' \cap \bar{C}_2) \cup (C_2' \cap \bar{C}_1) = \emptyset$$

Utilizando ahora que U_1 y U_2 son abiertos, tenemos por [2] que

$$(\bar{C}_1' \cap \bar{U}_2) \cup (\bar{C}_2' \cap \bar{U}_1) = \emptyset$$

Y puesto que $C_1 \subset U_1$ y $C_1 \subset U_1$, entonces se tiene que

$$[5] \quad (\bar{C}_1' \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_2' \cap \bar{C}_1) = \emptyset$$

Teniendo en cuenta que $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 = C_1 \cap C_2 = \emptyset$, junto con [3], [4] y [5] se deduce que los conjuntos $(C_1 \cup C_1')$ y $(C_2 \cup C_2')$, además de ser disjuntos, ninguno contiene puntos de adherencia del otro.

Como X es completamente normal, existe entonces un abierto W con $C_1 \cup C_1' \subset W$ y $\bar{W} \cap (C_1 \cup C_2) = \emptyset$. El conjunto $B = \bar{W} - W = \mathrm{Fr}(W)$ separa C_1 y C_2 y es disjunto de $C_1' \cup C_2' = A$. Por lo tanto hemos terminado.

Teorema 3.1.16. (Unión Numerable de conjuntos 0-dimensionales) Un espacio que es unión numerable de subconjuntos cerrados 0-dimensionales es 0-dimensional.

Demostración.

Supongamos nuestro espacio X dado por

$$X = C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_i \cup \ldots$$

donde cada C_i es cerrado y 0-dimensional. Sean K y L dos cerrados disjuntos en X. Se tiene que probar que ambos conjuntos pueden separarse.

Tomamos los conjuntos $K \cap C_1$ y $L \cap C_1$, que son cerrados y disjuntos en el espacio 0-dimensional C_1. Existen por tanto subconjuntos A_1 y B_1 cerrados de C_1 (y entonces también cerrados de X), tales que

$$K \cap C_1 \subset A_1 \quad \text{y} \quad L \cap C_1 \subset B_1$$

$$A_1 \cup B_1 = C_1 \quad \text{y} \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset$$

Además $K \cup A_1$ y $L \cup B_1$ son cerrados y disjuntos en X. Por la normalidad de X, existen abiertos G_1 y H_1 para los cuales

$$K \cup A_1 \subset G_1 \text{ y } L \cup B_1 \subset H_1$$

$$G_1 \cap H_1 = \emptyset$$

Entonces, como $C_1 = A_1 \cup B_1 \subset K \cup A_1 \cup L \cup B_1 = G_1 \cup H_1$, se tiene en resumen que

$$C_1 \subset G_1 \cup H_1$$

$$K \subset G_1 \text{ y } L \subset H_1$$

$$\bar{G}_1 \cap \bar{H}_1 = \emptyset$$

Repitamos el mismo proceso, cambiando ahora K y L por los cerrados $\bar{G}_1$ y $\bar{H}_1$, y sustituyendo C_1 por C_2. Llegamos entonces a que existen abiertos G_2 y H_2 de X para los cuales

$$C_2 \subset G_2 \cup H_2$$

$$\bar{G}_1 \subset G_2 \text{ y } \bar{H}_1 \subset H_2$$

$$\bar{G}_2 \cap \bar{H}_2 = \emptyset$$

Inductivamente construimos sucesiones $\{G_i\}$ y $\{H_i\}$ de conjuntos abiertos de X de manera que

$$C_i \subset G_i \cup H_i$$

$$\bar{G}_{i-1} \subset G_i \text{ y } \bar{H}_{i-1} \subset H_i$$

$$\bar{G}_i \cap \bar{H}_i = \emptyset$$

Llamamos ahora $G = \bigcup G_i$ y $H = \bigcup H_i$. Entonces G y H son conjuntos abiertos y disjuntos para los que $G \cup H \supset \bigcup C_i = X$, y por tanto $X = G \cup H$. Además $K \subset G$ y $L \subset H$. Luego hemos encontrado la separación buscada.

Corolario 3.1.17. Un espacio que es unión numerable de conjuntos F_σ 0-dimensionales es también 0-dimensional. Recordemos que un conjunto F_σ es aquel que es unión numerable de cerrados.

Corolario 3.1.18. La unión de dos subconjuntos 0-dimensionales de un espacio, de los cuales uno al menos es cerrado, es 0-dimensional.

Demostración.

Sean A y B dos subconjuntos 0-dimensionales de X y supongamos, sin pérdida de generalidad, que B es cerrado. Entonces se tiene que $(A \cup B) - B$ es abierto en $A \cup B$. Como todo abierto en un espacio métrico es un F_σ, $(A \cup B) - B$ es F_σ en $A \cup B$. Concluimos el resultado juntando el corolario anterior y el hecho de que $A \cup B = B \cup \Big((A \cup B) - B\Big)$.

Consecuencia inmediata de este último corolario es el siguiente resultado.

Corolario 3.1.19. Un espacio 0-dimensional al que se le añade un único punto sigue siendo 0-dimensional.

Teorema 3.1.20. (Producto Numerable de espacios 0-dimensionales) Sea X un espacio que es producto cartesiano de una familia numerable $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, es decir, $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces X es 0-dimensional si, y sólo si, todos los espacios X_i son 0-dimensionales.

Demostración.

Supongamos $X \neq \emptyset$, pues si no $\operatorname{ind}(X) = -1$. Entonces cada X_i es homeomorfo a un subespacio de X, luego si X es 0-dimensional, entonces también los espacios X_i serán 0-dimensionales.

Para probar la otra implicación, supongamos X_i 0-dimensional, para todo i, y consideremos para cada X_i una base $\mathcal{B}_i$ de abiertos formada por conjuntos abierto-cerrados. Observemos que los conjuntos de la forma

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k \times \cdots$$

donde $U_i \in \mathcal{B}_i$ para todo i, constituye una base de X formada por conjuntos abierto-cerrados, luego X es 0-dimensional.

Ejemplo 3.1.21. Para cada par k, n de números enteros tales que $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, denotemos por $\mathbb{Q}_k^n$ al subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por los puntos que tienen exactamente k coordenadas racionales. Entonces $\mathbb{Q}_k^n$ es un conjunto 0-dimensional.

Demostración.

Vimos en otro ejemplo que $\mathbb{Q}$ es 0-dimensional, luego, por el Teorema del Producto Numerable (3.1.20), $\mathbb{Q}_n^n = \mathbb{Q}^n$ es también 0-dimensional.

Si $k < n$, para cada elección de k naturales distintos, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ y k racionales, $r_1, r_2, \ldots, r_k$, el producto $\prod_{i=1}^{n} R_i$, donde $R_{i_j} = \{r_j\}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ y $R_i = \mathbb{R}$ para $i \neq i_j$, es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$. Por tanto $\mathbb{Q}_k^n \cap \prod_{i=1}^{n} R_i$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{Q}_k^n$. Además, como $\mathbb{Q}_k^n \cap \prod_{i=1}^{n} R_i$ es homeomorfo al subespacio de $\mathbb{R}^{n-k}$ formado por todos los puntos con coordenadas irracionales, se deduce del ejemplo 3.1.4, junto con el Teorema del Producto Numerable (3.1.20), que es un conjunto 0-dimensional. Al variar la elección de los k números naturales $i_1, i_2, \ldots, i_k$ y la de los k racionales $r_1, r_2, \ldots, r_k$ obtenemos una cantidad numerable de espacios $\mathbb{Q}_k^n \cap \prod_{i=1}^{n} R_i$, cuya unión es $\mathbb{Q}_k^n$. Por el Teorema de la Unión Numerable (3.1.16),concluimos que $\mathbb{Q}_k^n$ es 0-dimensional.

Nota. Mención aparte merecen los espacios compactos. Vamos a considerar primero las siguientes propiedades de un espacio X.

1) X es totalmente desconectado, es decir, cada componente conexa de X se reduce a un punto.

2) Dos puntos distintos cualesquiera en X pueden separarse.

3) Cualquier punto puede separarse de cada cerrado que no lo contiene, es decir, X es 0-dimensional.

4) Dos conjuntos cerrados cualesquiera pueden separarse.

Es claro que 4) implica 3), que 3) implica 2) y que 2) implica 1). Hemos probado además a lo largo de esta sección, que 3) implica 4). Sin embargo, las propiedades 1),2) y 3) no son equivalentes en nuestros objetos de estudio, los espacios métricos separables. Aquí reside la importancia de los espacios compactos, para los cuales se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.1.22. Las propiedades 1), 2), 3) y 4) son equivalentes si X es un espacio compacto.

Únicamente resta por probar que 1) implica 2) y que 2) implica 3). Probaremos primero dos proposiciones auxiliares.

Proposición 3.1.23. Sea X un espacio compacto, C un subconjunto cerrado de X y p un punto de X. Entonces, si p y cualquier punto de C pueden separarse, p y C pueden separarse.

Demostración.

Sea q un punto de C. Como p y q pueden separarse, existen por tanto dos conjuntos, U_q y V_q, disjuntos y abierto-cerrados, de manera que $p \in U_q$ y $q \in V_q$. Puesto que C es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, existe un número finito de puntos de C, $q_1, q_2, \ldots, q_s$, tales que

$$C \subset V_{q_1} \cup V_{q_2} \cup \cdots \cup V_{q_s}$$

Sean $U = \bigcap_{i=1}^{s} U_{q_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{s} U_{q_i}$. Entonces $p \in U$ y $C \subset V$. Además U y V son disjuntos y ambos abierto-cerrados en X. Por tanto, p y C pueden separarse, lo que concluye el resultado.

Proposición 3.1.24. Sea X un espacio compacto. Sean además p un punto de X y $M(p)$ el conjunto de todos los puntos de X que no pueden separarse de p. Entonces se tiene que $M(p)$ es conexo.

Demostración.

Comencemos probando que $M(p)$ es cerrado, o equivalentemente que el conjunto $X - M(p)$ es abierto. Un punto arbitrario x pertenece al con junto $X - M(p)$ si, y sólo si, puede separarse de p, es decir, si, y sólo si, existen conjuntos abiertos U y V verificando

$$X = U \cup V$$

$$U \cap V = \emptyset$$

$$x \in U, \quad p \in V$$

Se sigue inmediatamente que $U \subset X - M(p)$ y, por tanto, cada punto de $X - M(p)$ tiene un entorno abierto U contenido en $X - M(p)$, lo que prueba que $X - M(p)$ es abierto.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $M(p)$ no es conexo. Entonces existirían conjuntos C y K cerrados en $M(p)$ y tales que

$$M(p) = C \cup K$$

$$C \neq \emptyset, \quad K \neq \emptyset$$

$$C \cap K = \emptyset$$

Es claro que $M(p)$ contiene al propio punto p. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p \in C$. Puesto que $M(p)$ es cerrado en X, se tiene también que C y K son cerrados en X. Por la normalidad de X, existe entonces un abierto W en X, de manera que $C \subset W$ y $\bar{W} \cap K = \emptyset$. Puesto que $\mathrm{Fr}(W) = \bar{W} - W$, se tiene que

$$\mathrm{Fr}(W) \cap M(p) = \mathrm{Fr}(W) \cap (C \cup K) = \emptyset$$

De aquí se deduce que cada punto de $\mathrm{Fr}(W)$ puede separarse de p. Como $\mathrm{Fr}(W)$ es un conjunto cerrado, podemos aplicar la proposición 3.1.23, y obtenemos un conjunto V abierto-cerrado para el cual se tiene que

$$\mathrm{Fr}(W) \subset V, \quad p \cap V = \emptyset$$

Puesto que $p \in C \subset W$, se deduce que $p \in W - V$. Por ser V cerrado, podemos escribir el conjunto $W - V$ como $W - \bar{V}$, y por verificarse que $\mathrm{Fr}(W) \subset V$, también se puede escribir $W - V$ como $\bar{W} - V$. De la primera forma se deduce que $W - V$ es abierto y de la segunda que $W - V$ es cerrado. Sin embargo, $(W - V) \cap K = \emptyset$. Por consiguiente, p puede separarse de los puntos de $K \subset M(p)$. Esto contradice la definición de $M(p)$.

Una vez probadas estas dos propiedades, podemos demostrar ya el teorema antes enunciado:

Demostración. (de 3.1.22)

Veamos primero que 1) implica 2). Supongamos que X es totalmente desconectado y consideremos el conjunto $M(p)$. Hemos probado ya que el conjunto $M(p)$ es conexo, luego $M(p)$ se reduce al punto p. Por tanto, dos puntos cualesquiera de X pueden separarse.

Que 2) implica 3) se deduce directamente de la proposición 3.1.23.

Corolario 3.1.25. Cuando se habla de espacios compactos, los espacios 0-dimensionales son justamente los espacios totalmente desconectados.

3.2. Dimensión n

Definamos ahora la dimensión inductiva pequeña en general.

Definición 3.2.1. El conjunto vacío y únicamente el conjunto vacío verifica que $\mathrm{ind}(X) = -1$.

Un espacio X tiene *dimensión inductiva pequeña* $\leq n \geq 0$ *en un punto* si dicho punto tiene un sistema fundamental de entornos abiertos cuyas fronteras tienen dimensión $\leq n - 1$.

Se dice que X tiene *dimensión inductiva pequeña* $\leq n$, y se representa por $\text{ind}(X) \leq n$, si tiene dimensión inductiva pequeña $\leq n$ en cada uno de sus puntos.

Cuando $\text{ind}(X) \leq n$ en un punto, pero sea falso que $\text{ind}(X) \leq n-1$ en dicho punto, entonces decimos que X tiene *dimensión inductiva pequeña* n en dicho punto.

Si $\text{ind}(X) \leq n$, pero es falso que $\text{ind}(X) \leq n-1$, entonces decimos que X tiene *dimensión inductiva pequeña* n, y lo representaremos por $\text{ind}(X) = n$.

Diremos que un espacio tiene *dimensión inductiva pequeña* ∞ si es falso que $\text{ind}(X) \leq n$ para todo $n = -1, 0, 1, \ldots$

A la dimensión inductiva pequeña, ind, también se le conoce como la *dimensión de Menger - Urysohn*.

Propiedades 3.2.2.

i) Es claro que la propiedad de un espacio de tener dimensión inductiva pequeña n es una propiedad topológica.

ii) Equivalente a la condición $\text{ind}(X) \leq n$ es la existencia de una base de abiertos de X formada por abiertos cuyas fronteras tengan dimensión inductiva pequeña $\leq n-1$.

iii) Es claro que esta definición para $n = 0$ coincide con la ya dada en la sección anterior.

Proposición 3.2.3. Supongamos que $\text{ind}(X) = n$, con n finito. Entonces X contiene un subconjunto m-dimensional para cada $m \leq n$.

Demostración.

Como $\text{ind}(X) > n-1$, existe un punto $p_0 \in X$ y un entorno abierto U_0 de dicho punto con la propiedad de que si V es cualquier abierto verificando $p_0 \in V \subset U_0$, entonces

$$\text{ind}(\text{Fr}(V)) \geq n-1 \quad [*]$$

Por otro lado, puesto que $\text{ind}(X) \leq n$, existe un abierto V_0 que satisface que $p_0 \in V_0 \subset U_0$, para el que

$$\text{ind}(\text{Fr}(V_0)) \leq n-1$$

Puesto que V_0 también verifica la condición $[*]$, el conjunto $\text{Fr}(V_0)$ es un subconjunto de X de dimensión $n-1$. Inductivamente se prueba el resto del resultado.

Observación 3.2.4. Este resultado no puede extenderse a espacios con ind infinita.

Teorema 3.2.5. Todo subespacio de un espacio con ind $\leq n$ tiene también ind $\leq n$.

Demostración.

Razonamos por inducción sobre n. El resultado es obvio para $n = -1$.

Supongamos ahora que es cierto para $n-1$. Sea X un espacio con $\text{ind}(X) \leq n$, X' un subespacio de X y p un punto de X'. Sea además U' un entorno abierto de p en X'. Entonces existe un entorno abierto U de p en X tal que $U' = U \cap X'$. Como $\text{ind}(X) \leq n$, existe un conjunto V que es abierto en X y que verifica que

$$p \in V \subset U$$

$$\text{ind}(\text{Fr}(V)) \leq n-1$$

Sea $V' = V \cap X'$. Así definido, V' es abierto en X' y $p \in V' \subset U'$. Sea $B = \text{Fr}(V)$ en X y $B' = \text{Fr}(V')$ en X'. Se tiene que $B' \subset B \cap X'$ y, por la hipótesis de inducción, $\text{ind}(B') \leq n-1$, como queríamos probar.

Ejemplo 3.2.6. La recta real $\mathbb{R}$ y cualquier intervalo suyo, tienen ind 1.

Demostración.

Comencemos probando que $\text{ind}(\mathbb{R}) \leq 1$. Es claro que para cada punto x de $\mathbb{R}$ y cada entorno abierto V de x, existe un abierto U de X de manera que $x \in U \subset V$, y cuya frontera es un conjunto formado por dos puntos, esto es, es 0-dimensional por ser numerable.

Probar además que $\text{ind}(\mathbb{R})$ no es ni -1 ni 0 es inmediato, pues $\mathbb{R}$ no es vacío y es conexo con mas de punto (ya vimos que si un espacio X es 0-dimensional sus componentes conexas se reducen a un único punto). El mismo razonamiento vale para un intervalo.

Ejemplo 3.2.7. Todo polígono tiene ind 1.

Vamos ahora a caracterizar la definición de la ind en general al igual que hicimos para la ind 0. Como ya advertimos, cuando probemos la equivalencia entre la ind n y Ind n, utilizaremos esta caracterización junto con otra para la Ind, que será precisamente la de separación de dos cerrados cualesquiera.

Proposición 3.2.8. Un espacio tiene $\mathrm{ind}(X) \leq n$ si, y sólo si, cada punto de X puede separarse de cualquier conjunto cerrado que no contenga a dicho punto, por un conjunto cerrado de dimensión $\leq n-1$.

Para probar este resultado, haremos uso de que todo espacio métrico es regular. Recordemos que significa que un espacio sea regular.

Definición 3.2.9. Un espacio topológico es *regular* si cada entorno abierto U de un punto p contiene un entorno abierto V de p verificando $\bar{V} \subset U$.

Demostración. (de 3.2.8)

Supongamos primero que $\mathrm{ind}X \leq n$. Sean p un punto de X y C un cerrado que no contiene a dicho punto. Entonces $X - C$ es un entorno abierto de p y por lo tanto, por la regularidad de X, existe otro entorno abierto V de p que verifica que $\bar{V} \subset X - C$. Existe entonces un entorno abierto W de p para el que $W \subset V$ y cuya frontera tiene dimensión $\leq n-1$. Si llamamos $B = \mathrm{Fr}(W)$, entonces B es un conjunto de dimensión $\leq n-1$ que separa p y C.

Supongamos ahora que cada punto de X puede separarse de cualquier cerrado que no lo contenga, por un cerrado con ind $\leq n-1$. Veamos que $\mathrm{ind}(X) \leq n$. Sea U un entorno abierto de p, entonces $X - U$ es un cerrado que no contiene a p. Por lo tanto $X - U$ puede separarse de p por un conjunto cerrado B con ind $\leq n-1$. Esto significa que se tienen conjuntos U' y V' abiertos en $X - B$ (luego también abiertos en X) para los cuales

$$X - B = U' \cup V'$$

$$p \in U'$$

$$X - U \subset V'$$

$$U' \cap V' = \emptyset$$

Notemos que de las dos últimas expresiones se deduce que $U' \subset U$. Por tanto, U' es un entorno abierto de p contenido en U. Además, como $\mathrm{Fr}(U') \subset B$ y B tiene ind $\leq n-1$, sabemos que $\mathrm{Fr}(U')$ tiene ind $\leq n-1$ y, por tanto, $\mathrm{dim}X \leq n-1$.

Vamos a tratar ahora la dimensión de los subespacios y propiedades interesantes de ellos. Algunas veces cuando consideramos la dimensión de un subespacio X' de un espacio X, es conveniente determinar su dimensión en términos de entornos abiertos del espacio total X. Veámoslo explícitamente.

Proposición 3.2.10. Un subespacio X' de X tiene ind $\leq n$ si, y sólo si, todo punto de X' tiene entornos abiertos arbitrariamente pequeños en X, cuyas fronteras tienen intersecciones con X' verificando ind $\leq n-1$.

Demostración.

Sea X' un subespacio de X.

Supongamos primero que todo punto de X' tiene entornos abiertos en X arbitrariamente pequeños, cuyas fronteras tienen intersecciones con X' con ind $\leq n-1$. Sea un punto $p \in X'$ y U' un entorno de p en X'. Existe por tanto U, un entorno abierto de p en X, con $U' = U \cap X'$. Ahora, por hipótesis, existe un abierto V en X verificando que

$$p \in V \subset U$$

$$\operatorname{ind}(X' \cap \operatorname{Fr}(V)) \leq n-1$$

Llamemos $V' = V \cap X'$. El conjunto V' es entonces un abierto de X' tal que $p \in V' \subset U'$. Denotando ahora $B = \operatorname{Fr}(V)$ en X y $B' = \operatorname{Fr}(V')$ en X', se tiene que $B' \subset B \cap X'$ y, por tanto, ind$B \leq n-1$. Concluimos entonces que ind$X' \leq n$.

Supongamos ahora que ind$X' \leq n$. Sea $p \in X'$ y U un entorno abierto de p en X. Entonces $U' = U \cap X'$ es un entorno abierto de p en X' y existe por tanto un entorno V' de p en X' para el cual

$$p \in V' \subset U'$$

$$\operatorname{ind}(B') \leq n-1$$

siendo $B' = \operatorname{Fr}(V')$ en X'. Ninguno de los conjuntos disjuntos V' y $X' - \bar{V}'$, tiene un punto de adherencia del otro, luego por la normalidad completa de X se tiene que existe un abierto W con

$$V' \subset W$$

$$\bar{W} \cap (X' - \bar{V}') = \emptyset$$

Podemos suponer que $W \subset U$, tomando si es necesario W como $W \cap U$. El conjunto $\operatorname{Fr}(W) = \bar{W} - W$ no contiene ningún punto de $X' - \bar{V}'$ ni de V', por lo que $X' \cap \operatorname{Fr}(W) \subset B$. Entonces $\operatorname{ind}(X' \cap \operatorname{Fr}(W)) \leq n-1$ y hemos acabado.

Vamos a utilizar ahora este resultado para probar una proposición de vital importancia sobre la dimensión de la unión de dos conjuntos. Hemos notado ya que la dimensión de la unión de dos conjuntos no queda determinada por las dimensiones de ambos conjuntos. Sin embargo, se verifica que

Proposición 3.2.11. Para dos subespacios A, B cualesquiera de X, se tiene que

$$\mathrm{ind}(A \cup B) \leq 1 + \mathrm{ind}A + \mathrm{ind}B$$

Demostración.

Vamos a razonar por inducción doble sobre las dimensiones de A y B.

Probemos el resultado primero para el caso en el que $\mathrm{ind}A = \mathrm{ind}B = -1$. En este caso $A = B = \emptyset$ y por tanto $A \cup B = \emptyset$ y $\mathrm{ind}(A \cup B) = -1$. Por otro lado $1 + \mathrm{ind}A + \mathrm{ind}B = 1 - 1 - 1 = -1$. Luego se verifica el resultado.

Vamos a probar el resultado para $\mathrm{ind}A = m$ y $\mathrm{ind}B = n$. Planteemos ahora nuestra hipótesis de inducción. Suponemos el resultado cierto para los siguientes casos,

$$[1] \quad \mathrm{ind}A \leq m \ , \ \mathrm{ind}B \leq n - 1$$

$$[2] \quad \mathrm{ind}A \leq m - 1 \ , \ \mathrm{ind}B \leq n$$

Sea $p \in A \cup B$. Supongamos además, sin pérdida de generalidad, que $p \in A$. Sea U un entorno de p en X. Por la proposición 3.2.10, existe un abierto V de manera que

$$p \in V \subset U$$

$$\mathrm{ind}(W \cap A) \leq m - 1$$

siendo $W = \mathrm{Fr}(V)$. Sin embargo, como $W \cap B$ es un subconjunto de B, se verifica que $\mathrm{ind}(W \cap B) \leq n$. Por las hipótesis [1] y [2] de inducción, se tiene que

$$\mathrm{ind}(W \cap (A \cup B)) \leq m + n$$

De nuevo por 3.2.10, concluimos que

$$\mathrm{ind}(A \cup B) \leq m + n + 1$$

lo que completa la inducción.

Proposición 3.2.12. La unión de $n + 1$ subespacios con ind ≤ 0 tiene ind $\leq n$.

Ejemplo 3.2.13. Para cada par k, n de números enteros tales que $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, denotemos por $\mathcal{M}_k^n$ al subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por los puntos que tienen como mucho k coordenadas racionales, y por $\mathcal{L}_k^n$ al subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por los puntos que tienen como mínimo k coordenadas racionales. Entonces

$$\mathrm{ind}(\mathcal{M}_k^n) \leq k, \quad \text{y}$$

$$\mathrm{ind}(\mathcal{L}_k^n) \leq n - k$$

Demostración.

Se tiene que

$$\mathcal{M}_k^n = \mathbb{Q}_0^n \cup \cdots \cup \mathbb{Q}_q^n, \quad \text{y}$$

$$\mathcal{L}_k^n = \mathbb{Q}_q^n \cup \cdots \cup \mathbb{Q}_n^n$$

Entonces el resultado se deduce de la proposición 3.2.12 y del hecho de que cada $\mathbb{Q}_q^n$ es un espacio 0-dimensional, como vimos en el ejemplo 3.1.21.

Teorema 3.2.14. (Unión Numerable para ind n) Un espacio que es unión numerable de subconjuntos cerrados con ind $\leq n$ tiene ind $\leq n$.

Demostración.

Probaremos el resultado por inducción sobre n. Denotaremos por P_n al Teorema de la Unión Numerable para dimensión n. Es claro que P_n es equivalente a la afirmación de que todo espacio que es unión numerable de conjuntos F_σ con ind $\leq n$ tiene ind $\leq n$.

Para $n = -1$ es trivial. Para probar que P_{n-1} implica P_n, haremos uso del resultado para $n = 0$, que ya lo probamos en la sección anterior (Teorema 3.1.16). Probemos primero que P_{n-1} implica el siguiente aserto:

[$**$]. *Cualquier espacio con ind $\leq n$ es unión de un subespacio con ind $\leq n-1$ y un subespacio con ind ≤ 0.*

Sea X un espacio con ind $\leq n$. Entonces existe una base de abiertos de X formada por conjuntos cuyas fronteras tienen ind $\leq n-1$. Puesto que X es separable, existe una base numerable de abiertos, $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, formada por conjuntos cuyas fronteras tienen ind $\leq n-1$. Llamemos B_i a la frontera de U_i en X. De P_{n-1} se sigue que el conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene ind $\leq n-1$.

Veamos que $X - B$ tiene ind $\leq n-1$. Es claro que las fronteras de los conjuntos U_i tienen intersección vacía con $X - B$. Se verifican entonces las condiciones de la proposición 3.2.10 (con $n = 0$ y $X' = X - B$). Por tanto $\operatorname{ind}(X - B) \leq n - 1$. Por tanto [$**$] se deduce del hecho de que

$$X = B \cup (X - B)$$

Probaremos ahora que P_n es consecuencia de combinar P_{n-1} junto con [$**$]. Supongamos que

$$X = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_i \cup \cdots$$

donde cada conjunto C_i es cerrado y tiene ind $\leq n$. Queremos probar que $\operatorname{ind}(X) \leq n$. Definimos los conjuntos

$$K_1 = C_1$$

$$K_i = C_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j = C_i \cap \left(X - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j \right), \ i = 1, 2, \dots$$

Entonces se tiene que

$$[1] \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

$$[2] \quad K_i \cap K_j = \emptyset \quad \text{si } \ i \neq j$$

$$[3] \quad K_i \ \text{ es un } F_\sigma \text{ en}$$

$$[4] \quad \operatorname{ind}(K_i) \leq n$$

Las afirmaciones [1] y [2] son inmediatas. Para [3], notemos que $\bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ es cerrado, luego $X - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j = C_i$ es abierto. Por lo tanto, por ser abierto en un espacio métrico es un F_σ. Puesto que K_i es la intersección de estos F_σ con los conjuntos cerrados C_i, es a su vez un F_σ. [4] es consecuencia de que K_i es un subconjunto de C_i.

La condición [4] nos permite aplicar [$**$] a cada K_i. Tenemos por lo tanto

$$K_i = M_i \cup N_i, \ \text{ donde}$$

$$\operatorname{ind}(M_i) = \leq n - 1, \quad \operatorname{ind}(N_i) = \leq 0$$

Llamando $M = \bigcup M_i$ y $N = \bigcup N_i$, se tiene por [1] que

$$X = M \cup N$$

Veamos que M_i y N_i son F_σ en M y N respectivamente. Puesto que $M_i \subset K_i$, y por [2] se tiene que $K_i \cap K_j = \emptyset$ para $i \neq j$, se verifica que

$$M_i = M_i \cap K_i = (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_i \cup \cdots) \cap K_i = M \cap K_i$$

Como por [3] K_i es un F_σ, entonces $M_i = M \cap K_i$ es también un F_σ en M. Podemos aplicar [$**$] para deducir que

$$\operatorname{ind}(M) \leq n - 1$$

De igual modo se prueba que N_i es un F_σ en N, luego, por P_0 deducimos que

$$\mathrm{ind}(N) \leq 0$$

En resumen, tenemos que $X = M \cup N$ con $\mathrm{ind}(M) \leq n-1$ y $\mathrm{ind}(N) \leq 0$. Entonces, por la proposición 3.2.11, deducimos que $\mathrm{ind}(X) \leq n$, y concluimos el resultado.

Corolario 3.2.15. La unión de dos subespacios ambos con ind $\leq n$, uno de los cuales es cerrado, tiene ind $\leq n$.

Demostración.

Sean A y B dos subespacios de X ambos con ind $\leq n$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que B es cerrado. Entonces se tiene que $(A \cup B) - B$ es abierto en $A \cup B$. Como todo abierto en un espacio métrico es un F_σ, $(A \cup B) - B$ es F_σ en $A \cup B$. Concluimos el resultado por el hecho de que $A \cup B = B \cup \Big((A \cup B) - B \Big)$.

Corolario 3.2.16. La ind de un espacio no vacío no puede incrementarse añadiendo un único punto.

Demostración.

Es consecuencia inmediata del corolario anterior.

Corolario 3.2.17. Si un espacio X' con ind $\leq n$ está contenido en un espacio arbitrario X, entonces cada punto de X tiene entornos abiertos en X arbitrariamente pequeños cuyas fronteras tienen intersecciones con X' de dimensión ind $\leq n-1$.

Demostración.

Por el corolario anterior, para cada punto p de X, se verifica que $X' \cup p$ tiene ind $\leq n$. El resultado ahora se sigue de la proposición 3.2.10.

Nota. Observemos que en 3.2.10 únicamente imponemos la condición en los entornos abiertos de los puntos de X'.

Corolario 3.2.18. Si un espacio tiene ind $\leq n$, entonces es unión de un subespacio con ind $\leq n-1$ y un subespacio con ind ≤ 0.

Demostración.

Esto es [$**$], que ya hemos probado en la demostración del Teorema de la Unión para la ind n.

Teorema 3.2.19. (Teorema de Descomposición para la ind n) Un espacio tiene ind $\leq n$, n finito, si, y sólo si, es unión de $n+1$ subespacios con ind ≤ 0.

Demostración.

Este resultado se sigue de la aplicación reiterada del corolario 3.2.18 y la proposición 3.2.12.

Como consecuencia inmediata de este teorema obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.2.20. Sea X un espacio con ind n, y p, q enteros ≥ 1, verificando que $p+q+1=n$. Entonces X es unión de dos subespacios P y Q con ind p y q respectivamente.

Teorema 3.2.21. (Teorema del Producto) Sean A y B dos espacios tales que $A \cup B \neq \emptyset$. Se verifica que

$$\text{ind}(A \times B) \leq \text{ind}A + \text{ind}B$$

Demostración.

Vamos a razonar de nuevo por inducción doble sobre ind$A$ e ind$B$.

El resultado es inmediato para ind$A = -1$ o ind$B = -1$, teniendo en cuenta que $A \times \emptyset = \emptyset$.

Sean ind$A = m$ e ind$B = n$, y supongamos, como hipótesis de inducción, que el resultado es cierto para

$$[1] \quad \text{ind}A \leq m \text{ , ind}B \leq n-1$$

$$[2] \quad \text{ind}A \leq m-1 \text{ , ind}B \leq n$$

Un punto $(a, b) \in A \times B$ tiene entornos abiertos arbitrariamente pequeños de la forma $U \times V$ siendo U un entorno abierto de a en A y V un entorno abierto de b en B. Suponemos ind(Fr(U)) $\leq m-1$ e ind(Fr(V)) $\leq n-1$. Tenemos además que

$$\text{Fr}(U \times V) = (\bar{U} \times \text{Fr}(V)) \cup (\bar{V} \times \text{Fr}(U))$$

Ambos conjuntos de la unión anterior son cerrados y, por las hipótesis [1] y [2] de inducción, para ambos se tiene que ind $\leq m+n-1$. Luego, por el Teorema de la Suma (3.2.14), se deduce que ind(Fr($U \times V$)) $\leq m+n-1$ y por tanto que ind$(A \times B) \leq m+n$.

Ejemplo 3.2.22. El espacio euclídeo, $\mathbb{R}^n$, tiene ind $\leq n$. Recordemos que uno de nuestros objetivos es probar que esta dimensión es precisamente n. Para ello más adelante probaremos que $\mathrm{Ind}(\mathbb{R}^n) \geq n$, pero aún no estamos en condiciones para ello.

Demostración.

Aplicaremos inducción sobre n. Ya sabemos que $\mathrm{ind}(\mathbb{R}) = 1$ (ejemplo 3.2.6).

El hecho de que $\mathrm{ind}(\mathbb{R}) = 1$, junto con el teorema del producto, nos permiten concluir el resultado inductivamente.

Corolario 3.2.23. Si B es 0-dimensional entonces

$$\mathrm{ind}(A \times B) = \mathrm{ind}A + \mathrm{ind}B$$

Demostración.

Puesto que B es no vacío por ser 0-dimensional, se tiene que $A \times B$ contiene una copia de A, es decir, $A \cong A \times \{b\} \subset A \times B$, con $b \in B$. Por lo tanto,

$$\mathrm{ind}(A \times B) \geq \mathrm{ind}A = \mathrm{ind}A + \mathrm{ind}B$$

La otra desigualdad viene dada por el Teorema del Producto (3.2.21) y por lo tanto hemos terminado.

3.3. Equivalencia entre ind e Ind

Vamos ahora a definir la segunda de las dimensiones que trataremos en el trabajo, la Ind o dimensión inductiva grande. Daremos también una caracterización para dicha dimensión y probaremos que coincide con la ind probando la equivalencia entre dicha caracterización y la caracterización ya mencionada dada por la proposición 3.2.8.

Comencemos definiendo la dimensión inductiva grande, o Ind.

Definición 3.3.1. El conjunto vacío y únicamente el conjunto vacío verifica que $\mathrm{Ind}(X) = -1$.

Un espacio X tiene *dimensión inductiva grande* $\leq n \geq 0$, y se representa por $\mathrm{Ind}(X) \leq n$, si para cada conjunto cerrado $A \subset X$ y cada conjunto abierto V con $A \subset V \subset X$, se tiene que existe un abierto $U \subset X$ tal que

$$A \subset U \subset V \quad \text{y} \quad \mathrm{Ind}(\mathrm{Fr}(U)) \leq n - 1$$

Si $\mathrm{Ind}(X) \leq n$ pero es falso que $\mathrm{Ind}(X) \leq n-1$, entonces decimos que X tiene *dimensión inductiva grande* n, y lo representaremos por $\mathrm{Ind}(X) = n$.

Diremos que un espacio tiene *dimensión inductiva grande* ∞ si es falso que $\mathrm{ind}(X) \leq n$ para todo $n = -1, 0, 1, \ldots$

La dimensión inductiva grande, Ind, también se conoce como la *dimensión de Brouwer - Čech*.

Propiedades 3.3.2.

i) La propiedad de un espacio de tener dimensión inductiva grande n es, como sucedía con la dimensión inductiva pequeña, una propiedad topológica.

ii) Se puede reformular la condición $\mathrm{Ind}(X) \leq n$ de la siguiente manera: para cada cerrado de X, existe un sistema fundamental de entornos abiertos cuyas fronteras tienen $\mathrm{Ind} \leq n-1$.

Lema 3.3.3. Si X es un espacio con $\mathrm{Ind} \leq n$ y X' es un subespacio cerrado de X, entonces $\mathrm{Ind}(X') \leq n$.

Demostración.

Probaremos el lema por inducción sobre n. Para $n = -1$ el resultado es obvio. Supongamos que es cierto para $n-1$ $(n > -1)$. Sea X un espacio tal que $\mathrm{Ind}(X) \leq n$, y sea X' un subespacio de X. Queremos probar que todo cerrado de X' tiene un sistema fundamental de entornos abiertos cuyas fronteras tienen $\mathrm{Ind} \leq n-1$.

Sea A' un cerrado de X' y sea V' un abierto de X' que contiene a A'. Por tanto, existe un abierto V de X de manera que $V' = V \cap X'$. Luego $A' \subset V$.

Puesto que $\mathrm{Ind}(X) \leq n$, concluimos que existe un abierto U de X tal que

$$A' \subset U \subset V$$

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{Fr}(U)) \leq n-1$$

Sea $U' = U \cap X'$. Entonces U' es un abierto de X' y tenemos

$$A' \subset U \cap X' = U' \subset V \cap X' = V'$$

Sean ahora $B = \mathrm{Fr}(U)$ en X, $B' = \mathrm{Fr}(U')$ en X' y denotemos por $\mathrm{cl}_{X'}U'$ a la adherencia (o clausura) de U' en X'. Es claro que $B = \bar{U} - U$. Además,

$$B' = \bar{U}' - U' = X' \cap \mathrm{cl}_{X'}U' - X' \cap U \subset X' \cap \bar{U} - X' \cap U =$$

$$= X' \cap (\bar{U} - U) \subset \bar{U} - U = B$$

El conjunto B' es un cerrado de X', luego es también un cerrado de X contenido de B. Por tanto B' es cerrado en B.

Puesto que $\mathrm{Ind}(B) \leq n-1$, basta aplicar la hipótesis de inducción para concluir que $\mathrm{Ind}(B') \leq n-1$.

La siguiente proposición es a la que llevamos tiempo haciendo referencia, pues es la que nos dará una caracterización para la Ind. Como ya venimos advirtiendo, utilizaremos dicho caracterización para probar la equivalencia con la Ind.

Proposición 3.3.4. Un espacio X tiene Ind $\leq n$ si, y sólo si, dos conjuntos cerrados y disjuntos cualesquiera en X pueden separarse por un conjunto cerrado con Ind $\leq n-1$.

Demostración.

Comencemos suponiendo que $\mathrm{Ind}(X) \leq n$. Sean A y B dos conjuntos cerrados y disjuntos. Puesto que X es un espacio norma, existen dos conjuntos V y U de X, abiertos y disjuntos tales que $A \subset V$ y $B \subset U$. Luego

$$A \subset V \subset X - U \subset X - B$$

donde $X - U$ es cerrado. Así pues, se tiene que

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset X - B$$

Puesto que $\mathrm{Ind}(X) \leq n$, existe un abierto W de X tal que

$$A \subset W \subset V$$

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{Fr}(W)) \leq n-1$$

Veamos que $\mathrm{Fr}(W)$ separa A y B. Tenemos que $X - \mathrm{Fr}(W) = W \cup (X - \bar{W})$, y la unión es disjunta. Ciertamente, $A \subset W$. Probemos que $B \subset X - \bar{W}$. Sabemos que $\bar{W} \subset \bar{V} \subset X - B$, luego $B \subset X - \bar{W}$, con lo que demostramos la primera implicación.

Supongamos ahora, para demostrar la otra implicación, que cada par de cerrados disjuntos de X pueden separarse mediante un cerrado con Ind $\leq n-1$.

Sea A un cerrado de X y V un entorno abierto de A. Se tiene entonces que $X - V$ es cerrado y $A \cap (X - V) = \emptyset$. Puesto que A y $X - V$ son cerrados y disjuntos, se deduce de nuestra suposición que existe un cerrado B con $\mathrm{Ind}(B) \leq n-1$ tal que

$$X - B = V' \cup U'$$

$$A \subset V', \quad X - V \subset U'$$

$$V' \cap U' = \emptyset$$

donde V' y U' son abiertos disjuntos de $X - B$, y por tanto abiertos en X.

Observemos que V' es un entorno abierto de A contenido en V (pues $V' \subset V' \cup (X - B) = X - U' \subset V$). Observemos además que $\mathrm{Fr}(V') \subset B$.

Puesto que $\mathrm{Fr}(V')$ es un cerrado de B, e $\mathrm{Ind}(B) \leq n-1$, aplicando el lema anterior concluimos que $\mathrm{Ind}(\mathrm{Fr}(V')) \leq n-1$, y por lo tanto que $\mathrm{Ind}(X) \leq n$.

Estamos ya en condiciones de probar que ambas dimensiones coinciden. Veremos que la prueba no es sino la demostración de que las caracterizaciones de ambas dimensiones, 3.2.8 y 3.3.4, son equivalentes.

Probemos primero, por comodidad. una proposición auxiliar que será necesaria en la demostración.

Proposición 3.3.5. Si C_1 y C_2 son cerrados disjuntos en un espacio X con ind arbitraria, y A es un subconjunto de X con ind $\leq n$, existe entonces un conjunto cerrado B que separa a C_1 y C_2 y con ind $\leq n-1$.

Demostración.

Si $n = 0$, se puede tener $\mathrm{ind}(A) = -1$, en cuyo caso el resultado es obvio, o $\mathrm{ind}(A) = 0$, y entonces el resultado ya fue probado (proposición 3.1.15).

Supongamos ahora que $n > 0$. Aplicando el corolario 3.2.18, podemos descomponer A como $A = D \cup E$, con $\mathrm{ind}(D) \leq n-1$ e $\mathrm{ind}(E) \leq 0$. Como para $n = 0$ ya hemos probado el resultado, obtenemos una separación de C_1 y C_2 por un conjunto B cuya intersección con E es vacía. Entonces $A \cap B \subset D$, y puesto que $\mathrm{ind}(D) \leq n-1$, entonces se tiene que

$$\mathrm{ind}(A \cap B) \leq n-1$$

y hemos terminado.

Teorema 3.3.6. Las dimensiones ind e Ind coinciden en los espacios métricos separables, es decir, $\mathrm{ind}(X) = \mathrm{Ind}(X)$.

Demostración.

Veamos primero que $\mathrm{ind}(X) \leq \mathrm{Ind}(X)$, o lo que es lo mismo, que

$$\mathrm{Ind}(X) \leq n \Longrightarrow \mathrm{ind}(X) \leq n$$

Si Ind $\leq n$, entonces dos conjuntos cerrados y disjuntos cualesquiera en X pueden separarse por un conjunto cerrado con Ind $\leq n-1$. Puesto que todo punto es cerrado, en particular se tiene que todo punto de X puede separarse de cada cerrado que no lo contenga, mediante un conjunto cerrado con Ind $\leq n-1$. Esta última propiedad es la caracterización de la ind, luego se tiene que $\mathrm{ind}(X) \leq n$.

Veamos ahora que $\mathrm{Ind}(X) \leq \mathrm{ind}(X)$, o lo que es lo mismo, que

$$\mathrm{ind}(X) \leq n \Longrightarrow \mathrm{Ind}(X) \leq n$$

Se tiene que probar que si $\mathrm{ind}(X) \leq n$, entonces dos conjuntos cerrados y disjuntos cualesquiera en X pueden separarse por un conjunto cerrado con ind $\leq n-1$. Pero esto no es más que un caso particular, para $X = A$, de la proposición 3.3.5. Puesto que esta última propiedad es la caracterización de la Ind, se tiene que $\mathrm{Ind}(X) \leq n$.

Tenemos ya por tanto la equivalencia entre las dimensiones ind e Ind. Probemos ahora un resultado que jugará un papel importante en el capítulo siguiente.

Proposición 3.3.7. Sea X un espacio con Ind $\leq n-1$ y sean C_i y C'_i, para $i = 1, \ldots, n$, n pares de subconjuntos cerrados de X para los cuales

$$C_i \cap C'_i = \emptyset$$

Existen entonces n conjuntos cerrados B_i, tales que B_i separa C_i y C'_i y además

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = \emptyset$$

Demostración.

De la proposición 3.3.4 se deduce que existe un conjunto cerrado B_1 que separa C_1 y C'_1 con

$$\mathrm{Ind}(B_1) \leq n-2$$

Utilizando ahora la proposición 3.3.5 obtenemos un conjunto cerrado B_2 que separa C_2 y C'_2 y de manera que

$$\mathrm{Ind}(B_1 \cap B_2) \leq n-3$$

Iterando esta aplicación de la proposición 3.3.5, llegamos a que existen n conjuntos cerrados B_i, de manera que cada B_i separa a C_i y C_i' y además

$$\operatorname{Ind}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k) = n - k - 1 \quad \text{para } k = 1, \ldots, n$$

Para $k = n$ se tiene que $\operatorname{Ind}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = -1$ y por lo tanto concluimos que

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = \emptyset$$

Observación 3.3.8. La propiedad anterior caracteriza a los espacios con Ind (o ind) $\leq n$.

Antes de pasar a la siguiente sección, y como ya hiciéramos para los espacios 0-dimensionales, vamos a ver ciertas propiedades relevantes de los espacios compactos. Comencemos considerando los siguientes asertos para un espacio X.

1) Dos puntos distintos cualesquiera de X pueden separarse por un cerrado de X con ind $\leq n - 1$.

2) Todo punto de X puede separarse de cualquier cerrado que no lo contenga, por un cerrado con ind $\leq n - 1$, es decir, $\operatorname{ind}(X) \leq n$.

3) Dos subconjuntos cerrados y disjuntos cualesquiera de X se pueden separar por un conjunto cerrado con ind $\leq n-1$, es decir, $\operatorname{Ind}(X) \leq n$.

Es claro que 3) implica 2) y que 2) implica 1). Además, hemos probado también que 2) implica 3). En analogía con el caso 0-dimensional, probaremos el siguiente teorema característico para espacios compactos.

Teorema 3.3.9. Las propiedades 1), 2) y 3) son equivalentes si X es un espacio compacto.

Demostración.

Es claro que únicamente resta por probar que 1) implica 2). Esto es consecuencia inmediata del siguiente resultado.

Proposición 3.3.10. Sea X un espacio compacto, C un subconjunto cerrado de X y p un punto de X. Si p puede separarse de cada punto de C por un cerrado con ind $\leq n - 1$, entonces p puede separarse de C por un cerrado con ind $\leq n - 1$.

Demostración.

Sea q un punto cualquiera de C. Como p y q pueden separarse por un cerrado con ind $\leq n-1$, existe un abierto $U(q)$ para el cual se tiene que

$$q \in U(q), \quad p \notin \bar{U}(q)$$

$$\text{ind}(\text{Fr}(U(q))) \leq n-1$$

Por ser C un conjunto cerrado en un espacio compacto, se tiene también que C es compacto. Existen por tanto una cantidad finita de puntos de C, $q_1, q_2, \ldots, q_s$, de manera que

$$C \subset U = U_{q_1} \cup U_{q_2} \cup \cdots \cup U_{q_s}$$

Se tiene entonces, para $\text{Fr}(U) = \bar{U} - U$, que

$$\text{Fr}(U) \subset \text{Fr}(U_{q_1}) \cup \text{Fr}(U_{q_2}) \cup \cdots \cup \text{Fr}(U_{q_s})$$

Del Teorema de la Unión (3.2.14), se deduce que $\text{ind}(\text{Fr}(U)) \leq n-1$. Además $p \notin \bar{U}$. Por tanto, p puede separarse de C por el conjunto $\text{Fr}(U)$, conjunto con ind $\leq n-1$.

Corolario 3.3.11. Un espacio compacto tiene ind $\leq n-1$ si, y sólo si, dos puntos distintos cualesquiera de dicho espacio pueden separarse por un cerrado con ind $\leq n-1$.

3.4. Dimensión de los espacios euclídeos

El objetivo de esta sección es probar que el espacio euclídeo n-dimensional tiene dimensión n. Recordemos que las dimensiones hasta ahora tratadas son la ind y la Ind y coinciden sobre los espacios métricos separables. Aquí es donde el teorema de punto fijo de Brouwer jugará su papel.

Comencemos probando una propiedad geométrica importante del n-cubo $I^n = [0,1]^n$. El hecho de tomar como n-cubo el conjunto $[0,1]^n$, en lugar de $[-1,1]^n$, como suele ser habitual, es por el simple hecho de simplificar algunos cálculos. Esto no supone inconveniente alguno pues ya hemos comentado que las dimensiones hasta ahora definidas son invariantes por homeomorfismos.

Proposición 3.4.1. Sean A_i y B_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, los subconjuntos del n-cubo I^n definidos por las siguientes condiciones,

$$A_i = \{\{x_j\} \in I^n : x_i = 0\}$$

$$B_i = \{\{x_j\} \in I^n : x_i = 1\}$$

es decir, A_i y B_i son los pares de caras opuestas de I^n. Si L_i es un conjunto que separa A_i y B_i, para cada i, entonces se tiene que $\cap_{i=1}^n L_i \neq \emptyset$.

Demostración.

Existen abiertos U_i , $W_i \subset I^n$ tales que $A_i \subset$, $B_i \subset W_i$, $U_i \cap W_i = \emptyset$ y $I^n - L_i = U_i \cup W_i = \emptyset$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Consideremos ahora las fórmulas siguientes,

$$f_i(x) = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{d(x, L_i)}{d(x, L_i) + d(x, A_i)} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in I^n - W_i \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{d(x, L_i)}{d(x, L_i) + d(x, B_i)} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in I^n - U_i \end{cases}$$

Puesto que $(I^n - W_i) \cap (I^n - U_i) = I^n - (U_n \cup W_i)$, $f_i(x)$ define para todo i una función continua $f_i : I^n \to I$. Además, claramente se tiene que

$$f_i^{-1}(1/2) = L_i \ , \quad f_i(A_i) = 1 \ , \quad f_i(B_i) = 0$$

Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $\cap_{i=1}^n L_i = \emptyset$.

Consideremos la función continua $f : I^n \to I^n$ dada por

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

Esta función nunca toma el valor $a = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$, puesto que hemos supuesto que $\cap_{i=1}^n L_i = \emptyset$.

Consideremos ahora la aplicación $g : I^n \to I^n$ dada por la siguiente composición,

$$I^n \xrightarrow{f} I^n - a \xrightarrow{p} B = \cup_{i=1}^n (A_i \cup B_i)$$

donde p es la proyección radial desde el punto a hasta la frontera de I^n. Explícitamente,

$$g(x) = a + \frac{1}{2}\frac{x - a}{\|x - a\|_1}$$

donde $\|y\|_1 = \sup\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|\}$.

Por la ya visto hasta ahora, se tiene inmediatamente que

$$g(I^n) \subseteq B \ , \quad g(A_i) \subseteq B_i \ , \quad g(B_i) \subseteq A_i$$

Estas últimas inclusiones muestran que $g(x) \neq x$ para todo $x \in I^n$, lo que contradice el teorema del punto fijo de Brouwer.

Observación 3.4.2. El hecho de estar aplicando el Teorema del Punto Fijo de Brouwer a I^n en vez de a B^n, conjunto para el cual demostramos dicho teorema, no supone ninguna contradicción, pues son espacios homeomorfos.

Probaremos ahora los resultados más importantes de esta sección.

Proposición 3.4.3. $\mathrm{ind}(I^n) \geq n$

Demostración.

Supongamos, de nuevo por reducción al absurdo, que $\mathrm{ind}(I^n) \leq n-1$, o lo que es lo mismo, $\mathrm{Ind}(I^n) \leq n-1$. Entonces, por la proposición 3.3.7, existirían n subconjuntos cerrados B_i de I^n separando cada par de caras opuestas y con $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = \emptyset$. Sin embargo, esto contradice la proposición 3.4.1 que acabamos de probar.

Proposición 3.4.4. $\mathrm{ind}(\mathbb{R}^n) \geq n$

Demostración.

Es evidente a partir del hecho de que I^n es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y por tanto

$$\mathrm{ind}(\mathbb{R}^n) \geq \mathrm{ind}(I^n) \geq n$$

Esta última proposición junto con el ejemplo 3.2.22 nos permiten enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.4.5. El espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n.

Además, combinando la proposición 3.4.3 junto con el hecho de que I^n es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, podemos enunciar también el siguiente corolario.

Corolario 3.4.6. El n-cubo I^n tiene dimensión n.

3.5. Equivalencia entre dim, ind e Ind

En esta sección trataremos la dimensión de recubrimiento de Lebesgue o dim, la última de las tres dimensiones que estudiaremos en esta memoria. Esta tercera dimensión es equivalente a las dos primeras en nuestros objetos de estudio, los espacios métricos separables. Probaremos únicamente que $\mathrm{ind}(X) \leq n$ implica que $\dim(X) \leq n$ (teorema 3.5.6), o lo que es equivalente, que $\dim(X) \leq \mathrm{ind}(X)$. La desigualdad contraria, que no demostraremos, se puede probar a través de los *espacios universales* como en [HW] o mediante el Teorema de Compactificación [Eng1].

Definición 3.5.1. Llamaremos *recubrimiento abierto* de un espacio X a una colección finita $U_1, U_2, \ldots, U_r$, de conjuntos abiertos de X, cuya unión es X. El *orden* de un recubrimiento es el mayor entero n de manera que existen $n+1$ elementos del recubrimiento con intersección no vacía. Si X es acotado, la *medida* de un recubrimiento de X es el mayor de los diámetros de los U_i.

Sea M un subespacio de X. Se dice que una colección finita de conjuntos abiertos de X recubre a M, si su unión contiene a M.

Definición 3.5.2. Sean β y α dos recubrimientos abiertos de un espacio X. Se dice que β es un *refinamiento* de α si cada elemento de β está contenido en algún miembro de α.

Definamos ahora la dimensión de recubrimiento.

Definición 3.5.3. Un espacio X tiene *dimensión de recubrimiento* $\leq n$, y se representa por dim $\leq n$, donde $n = -1, 0, 1, \ldots$, si cada recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento de orden $\leq n$.

Si $\dim(X) \leq n$ pero es falso que $\dim(X) \leq n-1$, entonces decimos que X tiene *dimensión de recubrimiento* n, y lo representaremos por $\dim(X) = n$.

Decimos que un espacio X tiene *dimensión de recubrimiento* ∞ si es falso que $\dim(X) \leq n$ para todo $n = -1, 0, 1, \ldots$

La dimensión de recubrimiento, dim, también se conoce como la *dimensión de Čech - Lebesgue.*

Proposición 3.5.4. Sea M un subespacio de X de dimensión ind (o Ind) ≤ 0. Supongamos que U_1 y U_2 son dos conjuntos abiertos de X que recubren M. Entonces existen dos conjuntos abiertos de X, V_1 y V_2, que recubren M y que satisfacen que

$$V_1 \subset U_1\ , \quad V_2 \subset U_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Demostración.

Si $\operatorname{ind}(M) = -1$, esto es, $M = \emptyset$, el resultado es evidente. Veamos entonces el caso $\operatorname{ind}(M) = -0$.

Podemos suponer que $X = U_1 \cup U_2$, pues si no reemplazamos X por $U_1 \cup U_2$. Entonces

$$[1] \quad C_1 = X - U_2\ , \quad C_2 = X - U_1$$

son conjuntos cerrados disjuntos. Puesto que M es 0-dimensional, podemos aplicar el resultado 3.1.15, y obtenemos un conjunto cerrado B que tiene intersección vacía con M y que separa a C_1 y C_2. Esta separación implica la existencia de conjuntos abiertos V_1 y V_2 que satisfacen:

$$[2] \quad V_1 \supset C_1 \ , \quad V_2 \supset C_2$$

$$[3] \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

$$[4] \quad X - B = V_1 \cup V_2$$

De [1],[2] y [3] obtenemos que

$$V_1 \subset U_1 \ , \quad V_2 \subset U_2$$

y, de [4] junto con $M \cap B = \emptyset$, deducimos que

$$V_1 \cup V_2 \supset M$$

con lo que terminamos la prueba.

Proposición 3.5.5. Sea M un subespacio de X con $\mathrm{ind}(M) \leq 0$ y sean $U_1, U_2, \ldots, U_r$ conjuntos abiertos de X que recubren M. Entonces existen conjuntos abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_r$ que recubren M y de manera que

$$V_i \subset U_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset \ , \quad i \neq j$$

Demostración.

Vamos a aplicar inducción sobre el número de conjuntos U_i. Para un único conjunto U_1, el resultado es trivial. Supongamos ahora que el número de conjuntos es r y que el resultado es cierto para cualquier colección de $r-1$ conjuntos.

Llamemos $U'_{r-1} = U_{r-1} \cup U_r$ y consideremos el recubrimiento de M dado por los $r-1$ conjuntos abiertos siguientes

$$U_1, \ldots, U_{r-2}, U'_{r-1}$$

Por la hipótesis de inducción este recubrimiento verifica el enunciado, es decir, existe un recubrimiento

$$V_1, \ldots, V_{r-2}, V'_{r-1}$$

de M de manera que

$$V_1 \subset U_1 \ , \ \ldots \ , V_{r-2} \subset U_{r-2} \ , V'_{r-1} \subset U'_{r-1}$$

y cuyas intersecciones son vacías dos a dos.

Puesto que M es 0-dimensional, también lo es $V_{r-1} \cap M$. Se tiene además que U_{r-1} y U_r recubren a $V_{r-1} \cap M$. Por la proposición 3.5.4, existen entonces conjuntos abiertos V_{r-1} y V_r que recubren $V_{r-1} \cap M$ y que satisfacen

$$V_{r-1} \subset U_{r-1} \ , \quad V_r \subset U_r$$

$$V_{r-1} \cap V_r = \emptyset$$

Entonces se tiene la colección de conjuntos $V_1, \ldots, V_{r-2}, V_{r-1}, V_r$ verifica las condiciones pedidas y hemos terminado.

De este último resultado vamos a deducir ahora un nuevo teorema, que es precisamente el nos da la desigualdad (en el único sentido en el que ya hemos advertido que vamos a probarla) entre las dimensiones ind e Ind con la dimensión dim.

Teorema 3.5.6. Sea X un espacio con ind $\leq n$ y α un recubrimiento de X. Existe entonces un refinamiento β de α de orden $\leq n$.

Demostración.

Es inmediato para $n = \infty$. Supongamos que n es finito. Aplicando el Teorema de Descomposición, 3.2.19, se tiene que

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}$$

en donde cada sumando A_i tiene ind ≤ 0. Puesto que α es un recubrimiento de cada A_i, aplicamos la proposición 3.5.5 a cada A_i y obtenemos $n+1$ colecciones finitas β^i de conjuntos abiertos tales que

$$\beta^i = (V_1^i, V_2^i, \ldots, V_{r(i)}^i) \ , \quad i = 1, \ldots, n+1$$

donde β^i es un recubrimiento de A_i y se tiene que

$$[*] \quad V_j^i \cap V_k^i = \emptyset, \text{ siempre que } j \neq k$$

Sea β el recubrimiento de X formado por todos los conjuntos V_j^i, para $i = 1, \ldots, n+1$ y para $j = 1, \ldots, r(i)$. Podemos asegurar entonces que β tiene orden $\leq n$, pues cualquier elección de $n+2$ conjuntos V_j^i, tiene seguro dos conjuntos en uno de los recubrimientos β^i, pues son $n+1$ recubrimientos. En virtud de [*] esa elección tendría intersección vacía.

Corolario 3.5.7. Sea X un espacio compacto con ind $\leq n$. Entonces X tiene recubrimientos de medida arbitrariamente pequeña y orden $\leq n$.

Demostración.

Consideremos, para cualquier ϵ positivo, la colección de bolas abiertas de radios $\frac{1}{2}\epsilon$, que es un recubrimiento de X, no necesariamente finito. Puesto que X es compacto, existe un subrecubrimiento finito de medida $\leq n$. Aplicando el teorema anterior (3.5.6) a este último recubrimiento se deduce el resultado.

Bibliografía

[ADQ] R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero, *Elementos de la Teoría de Homología Clásica*, Universidad de Sevilla, 2002.

[Croo] F.H. Croom, *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer, New York Inc., 1978.

[Eng1] R. Engelking, *Dimension Theory*, North Holland, 1978.

[Eng2] R. Engelking, *Theory of Dimensions, Finite and Infinite*, Heldermann, 1995.

[ES] R. Engelking and K. Sieklucki, *Topology, A Geometric Approach*, Heldermann, 1992.

[HW] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Priceton University, 1941.

[Long] M. de Longueville, *A Course in Topological Combinatorics*, Springer, 2013.

[Maun] C.R.F. Maunder, *Algebraic Topology*, Cambridge University, 1980.

[Munk] J.R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.