Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Clases de Von Neumann-Schatten.

Alumno: Adrián Suazo López

Tutor: Manuel Núñez Jiménez

A mi familia y a María.

The equation of heaven and earth remains unsolved.
Yehuda Amichai

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se introducen y demuestran los resultados básicos en la teoría de los ideales de operadores compactos en espacios de Hilbert. Tras introducir la descomposición de un operador compacto en términos de sus valores singulares, se define la clase de traza y se prueban ciertas desigualdades numéricas preparatorias. A continuación se definen los productos tensorial y exterior de espacios de Hilbert y de operadores: el estudio de las normas del producto exterior de operadores implicará la desigualdad de Hölder sobre las normas en las clases de Schatten. Por último, se prueba la desigualdad de Minskowski y el hecho de que las clases de Schatten forman ideales cerrados en el espacio de los operadores acotados.

Summary

In this report we introduce and prove the basic results in the theory of ideals of compact operators in Hilbert spaces. After presenting the main theorems on the descomposition of a compact operator in terms of its singular values, we define the trace class and show certain preliminary numerical inequalities. Definitions of tensorial and exterior products of Hilbert spaces and operators follow: the study of the norm of the exterior product of an operator implies Hölder's inequality on the norms of the Schatten classes. Finally we prove Minkowski's inequality and the fact that the Schatten classes form closed ideals in the space of compact operators.

Índice general

Introducción

El Trabajo de Fin de Grado que presentamos desarrolla los elementos fundamentales de la teoría de los ideales clásicos de operadores entre dos espacios de Hilbert. Los primeros resultados se deben a Von Neuman (ver [1] y sus referencias); dichos trabajos fueron sistematizados y generalizados por R. Schatten [1]. Una versión simplificada, en la que las desigualdades fundamentales Hölder y Minkowski se prueban aproximando los operadores compactos por matrices y utilizando ciertos teoremas de convexidad puede verse en [2], p. 1089 ss. Un estudio general de los operadores compactos no autoadjuntos que incluye los resultados presentados en esta memoria, puede verse en [3]. Entre los ideales de Von Neumann-Schatten, los más importantes forman la llamada Clase de Traza S_1 y la clase de operadores de Hilbert-Schmidt S_2. Para ellos los resultados básicos admiten demostraciones más sencillas [4]. La prueba más elegante de la desigualdad de Hölder en las clases S_p se debe a Barry Simon [5]. Otra demostración, utilizando interpolación de operadores puede verse en [6]. La versión de la prueba en [5], más detallada que en la monografía original, es la expuesta en este trabajo. Aunque el resultado fundamental acaba reduciéndose a la misma definición de norma de un operador, ello se consigue a expensas de la introducción de los productos tensoriales y exteriores de espacios de Hilbert, así como a la demostración de ciertas desigualdades numéricas, en absoluto triviales, cuya prueba requiere la utilización del teorema de Hanh-Banach. Por ello el argumento completo es un excelente ejemplo de la definición de espacios de funciones apropiados para sistematizar y resolver problemas analíticos; la esencia del Análisis Funcional.

La estructura del trabajo es la siguiente: en la Sección 1 se introducen las nociones básicas de valores singulares de un operador compacto (generalizando el mismo concepto para matrices), así como la representación de dicho operador en términos de los valores singulares. Estos conceptos se relacionan con la descomposición polar del operador y de su adjunto. Asimismo se analiza el caso particular en el que el operador es autoadjunto y la relación con la descomposición espectral del mismo. En la Sección 2 se define primero la clase de traza S_1, y se prueba que la traza de un operador de S_1, aunque en principio necesita en su definición del uso de una base ortonormal del espacio, en realidad no depende de ésta. También se demuestra que S_1 es un ideal en el espacio de los operadores acotados. La sección 3 se dedica a definir las clases de Schatten S_p y prueba la desigualdad de Hölder para operadores composición de uno de la clase S_p y otro en S_q, donde p y q son conjugados. Éste es posiblemente el resultado más importante de la memoria y requiere de ciertas desigualdades sobre sucesiones finitas de números cuya prueba es una intersante e intrincada aplicación del teorema de Hanh-Banach. A continuación se introducen las nociones de productos tensoriales y exterior de una familia finita de espacios de Hilbert, así como la de producto exterior de operadores: una vez desarrollada la teoría, la desigualdad de Hölder surge del cálculo de la norma de uno de estos operadores. La sección 4 prueba la desigualdad de Minkowski y concluye que S_p es un ideal de operadoes; además comprobamos que es cerrado en la familia de los operadores acotados. Finalmente analizamos un caso particular en el que estas desigualdades se reducen a las elementales para espacios de sucesiones.

Capítulo 1

Valores singulares

Nota. Consideramos que todos los espacios de Hilbert son separables y que todas las bases son bases de Hilbert (i.e., bases completas). También, a no ser que se denote lo contrario, la norma $\|\cdot\|$ denotará la norma estándar de operadores acotados.

Definición 1.1. Para dos espacios cualesquiera de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se dice que es **compacto** si envía conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. El conjunto de operadores compactos se denota mediante $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Otra definición equivalente es la siguiente:

Para espacios cualesquiera de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se dice que es **compacto** si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada en $\mathcal{H}_1$, la sucesión $\{A(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_2$.

Cuando $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y A es un operador autoadjunto y compacto, puede ser descompuesto en una cantidad numerable de múltiplos de operadores proyección sobre distintos subespacios mutuamente ortogonales. Es decir,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad \text{en } \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

donde $\lambda_n \in \mathbb{R}$, P_n es el operador proyección sobre un subespacio (de dimensión finita si $\lambda_n \neq 0$) y $P_m P_n = 0$ si $n \neq m$.
Aunque esta caracterización no es cierta para operadores compactos en general, los operadores compactos se pueden descomponer en múltiplos de isometrías sobre subespacios mutuamente ortogonales en $\mathcal{H}_1$. Específicamente:

Teorema 1.2. Descomposición en valores singulares
Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Existe una sucesión de números positivos $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ y un conjunto ortonormal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_1$ tal que $\|A(x_n)\| = \mu_n$ y los vectores de la sucesión $\{A(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son dos a dos ortogonales. Además, si la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene infinitos términos, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$ y si $v \in \{x_n\}^{\perp}$, $A(v) = 0$.

Para este teorema necesitamos unos lemas previos.

Lema 1.3. Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Existe un vector unitario $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $\|A(x)\| = \|A\|$.

Demostración: Dado que $\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| = 1\}$ existe una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}_1$ tal que $\|x_k\| = 1$ para todo k y $\lim\limits_{k\to\infty} \|A(x_k)\| = \|A\|$. Por la compacidad de A, $\{A(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión de Cauchy. Sin pérdida de generalidad denotamos dicha subsucesión mediante $\{A(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Por la ley del paralelogramo aplicada a los vectores $A(x_n)$ y $A(x_m)$, para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\|A(x_n) + A(x_m)\|^2 + \|A(x_n) - A(x_m)\|^2 = 2\|A(x_n)\|^2 + 2\|A(x_m)\|^2,$$

y por tanto,

$$\|A(x_n) + A(x_m)\|^2 = 2(\|A(x_n)\|^2 + \|A(x_m)\|^2) - \|A(x_n) - A(x_m)\|^2.$$

De la definición de la norma de operador se obtiene

$$\|A\|^2\|x_n + x_m\|^2 \geq \|A(x_n + x_m)\|^2$$

$$\|x_n + x_m\|^2 \geq \frac{\|A(x_n + x_m)\|^2}{\|A\|^2}.$$

Además, cuando m y n tiende a infinito, $\|A(x_n)\|^2$ y $\|A(x_m)\|^2$ tienden hacia $\|A\|^2$. En consecuencia,

$$2(\|A(x_n)\|^2 + \|A(x_m)\|^2) \longrightarrow 4\|A\|^2.$$

A causa de que $\{A(x_k)\}$ es de Cauchy, $\|A(x_n) - A(x_m)\|^2 \longrightarrow 0$. Por tanto,

$$\frac{\|A(x_n + x_m)\|^2}{\|A\|^2} = \frac{2(\|A(x_n)\|^2 + \|A(x_m)\|^2) - \|A(x_n) - A(x_m)\|^2}{\|A\|^2} \longrightarrow 4$$

cuando n y m tienden a infinito.
Dado que $\|x_k\| = 1$ para todo k y haciendo uso de la ley del paralelogramo

$$\|x_n + x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) = 4$$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 4 - \|x_n + x_m\|^2 \leq 4 - \frac{\|A(x_n + x_m)\|^2}{\|A\|^2} \to 0,$$

es decir, $\{x_k\}$ es de Cauchy.
Por la completitud de los espacios de Hilbert, $x_k \to x$ para algún $x \in \mathcal{H}_1$. Además, debido a la continuidad de la norma, $\|A(x)\| = \lim_{k\to\infty} \|A(x_k)\| = \|A\|$ y al ser $\|x_k\| = 1$ para todo k, x es unitario. ■

Denotaremos a x como un vector maximal de A en $\mathcal{H}$.

Lema 1.4. Sea x es un vector maximal en $\mathcal{H}_1$ de $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $v \in x^\perp$. Entonces $A(v) \in A(x)^\perp$.

Demostración: Usaremos que el vector x es un vector maximal. Tomamos $f(y) = \frac{\|A(y)\|^2}{\|y\|^2}$ y $\gamma(t) = x + t(\omega v)$ donde $\omega \in \mathbb{K}$ y $t \in \mathbb{R}$. Notemos que f es una función real, no negativa, y que $f(y) \leq \|A\|^2$ para todo $y \in \mathcal{H}_1$. Por lo tanto, f alcanza un máximo en x. Tomamos el vector v unitario. Entonces

$$g(t) := f(\gamma(t)) = \frac{\langle A(x + t(\omega v)), A(x + t(\omega v))\rangle}{\langle x + t(\omega v), x + t(\omega v)\rangle} =$$

$$\frac{\langle A(x), A(x)\rangle + 2tRe\langle \omega A(v), A(x)\rangle + t^2\langle A(v), A(v)\rangle}{\langle x, x\rangle + 2tRe\langle \omega v, x\rangle + t^2\langle v, v\rangle} =$$

$$\frac{\|A(x)\|^2 + 2tRe\langle \omega A(v), A(x)\rangle + t^2\|A(v)\|^2}{\|x\|^2 + 2tRe\langle \omega v, x\rangle + t^2\|v\|^2}.$$

Dado que x y v son vectores unitarios y que $x \perp v$ tenemos que

$$g(t) = \frac{\|A(x)\|^2 + 2tRe\langle \omega A(v), A(x)\rangle + t^2\|A(v)\|^2}{1 + t^2}.$$

Al ser g una división de polinomios cuyo denominador no se anula, g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y su derivada es

$$g'(t) = \frac{(2Re\langle \omega A(v), A(x)\rangle + 2t\|A(v)\|^2)(1 + t^2) - g(t)2t}{(1 + t^2)^2}.$$

Por tanto, $g'(0) = 2Re\langle \omega A(v), A(x)\rangle$.
Como g tiene un máximo en 0 debido a que f tiene un máximo en x, se verifica que $0 = g'(0) = 2Re\langle \omega A(v), A(x)\rangle$. Tomando $\omega = 1$ obtenemos que $Re\langle A(v), A(x)\rangle = 0$ y tomando $\omega = i$ sucede que $0 = Re\langle iA(v), A(x)\rangle = Im\langle A(v), A(x)\rangle$. En conclusión, $A(v) \in A(x)^\perp$. ■

Demostración del teorema 1.2:
Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y x_1 el vector maximal de A en $\mathcal{H}_1$. Haremos la demostración mediante inducción. Sea $D_1 = \{x_1\}$. Restringimos A al subespacio $D_1^\perp$; A sigue siendo compacto y por tanto existe otro vector maximal x_2, ortogonal a x_1. Entonces en virtud del lema 1.4 tenemos que $y_1 := A(x_1)$ y $y_2 := A(x_2)$ son ortogonales dado que $x_2 \in D_1^\perp$, es decir, $D_2 := \{x_k\}_{k=1}^2$ es un conjunto de vectores ortonormales y por tanto $R_2 := \{y_k \in \mathcal{H}_2 : y_k := A(x_k) \quad k = 1, 2\}$ es un conjunto de vectores ortogonales.
Supongamos que existe un conjunto ortonormal $D_n := \{x_k\}_{k=1}^n$ de manera que para cada k entre 1 y $n-1$ si restringimos A a $D_k^\perp$ entonces x_{k+1} es un vector maximal. Sabemos que $R_n := \{y_k \in \mathcal{H}_2 : y_k := A(x_k)\ k = 1, \ldots, n\}$ es un conjunto de vectores ortogonales. El lema 1.3 nos garantiza la existencia de un vector maximal cuando restringimos A a $D_n^\perp$. Dado que $x_{n+1} \perp x_k$ para todo k tal que $1 \leq k \leq n$ por ser x_{n+1} un vector maximal de A en $D_n^\perp$, D_{n+1} es un conjunto ortonormal. Además, para todo $k \leq n$, como x_k es un vector maximal en $D_{k-1}^\perp$ y $D_{k-1}^\perp$ contiene a $D_{n+1}^\perp$, en virtud del lema 1.4, tenemos que $y_{n+1} \perp y_k$. En consecuencia, R_{n+1} es un conjunto de vectores ortogonales.
La inducción termina en x_n siempre que A sea el operador nulo en $D_n^\perp$. Por tanto, por inducción, tenemos una sucesión de números positivos $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$. Si sólo hay un número finito de elementos de $\{\mu_n\}$ distinto de cero, la inducción terminaría en un número finito de pasos. Esta sucesión cumple que $\mu_n = \|y_n\|$ y que los $y_n := A(x_n)$ son ortogonales.
Debido a que los μ_n son iguales al valor de la norma del operador A restringido al subespacio $D_n^\perp$ y como $D_n \subset D_{n+1}$ implica que $D_{n+1}^\perp \subset D_n^\perp$, se demuestra que

$$\mu_{n+1} = \|A|_{D_{n+1}^\perp}\| \leq \|A|_{D_n^\perp}\| = \mu_n.$$

Lo cual implica que la sucesión $\{\mu_n\}$ es no creciente.
Si la inducción no termina, como $\{\mu_n\}$ es una sucesión de números positivos, no creciente tiene un límite no negativo μ.
Observamos que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es un conjunto ortonormal y acotado por 1. Para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$ como y_n, y_m son ortogonales

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|y_n\|^2 + \|y_m\|^2 \geq 2\mu^2.$$

Por tanto, si $\mu > 0$, $\{y_n\}$ no contiene una subsucesión de Cauchy y esto entra en contradicción con la compacidad de A.
Finalmente, supongamos que $v \in D^\perp$ y $\|A(v)\| > 0$ con $\|v\| = 1$. Sea N suficientemente grande de modo que $\mu_N < \|A(v)\|$. Como $v \in D^\perp$, $v \in D_N^\perp$. Por tanto, $\|A(v)\|$ es menor o igual que la norma de A restringida a $D_N^\perp$ (i.e., μ_{N+1}). Esto implica que $\mu_N < \|A(v)\| \leq \mu_{N+1} \leq \mu_N$, lo cual es absurdo. Por consiguiente, $T(v) = 0$.

■

Observación 1.5.

· Para todo operador compacto A tenemos la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, asociada al operador, que es no creciente. Entonces los μ_n pueden estar repetidos, esto es, $\mu_m = \mu_{m+1}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Redefinimos una nueva sucesión de números reales positivos $\{\mu'_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $\mu'_1 := \mu_1$ y $\mu'_{n+1} = \max\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\mu_n : \mu_n \neq \mu'_j$ siendo $j \in \{1 \ldots n\}\}$. Notemos que siempre existe el siguiente valor μ'_n porque la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y tiende hacia cero. Sea ahora $E_n = Span(\{x : x \in D \text{ con } \|A(x)\| = \mu'_n\})$. Supongamos que E_n no es de dimensión finita. Entonces existiría una subsucesión de $\{\mu'_n\}_{n=1}^{\infty}$ que no convergería a cero, lo cual es absurdo. Por tanto, E_n es de dimensión finita para todo $n \in \mathbb{N}$.

· Sean $\{x_n^1 \ldots x_n^{k_n}\}$ los elementos de D para los cuales $\|A(x_n^j)\| = \mu'_n$ donde $j \in \{1 \ldots k_n\}$. Definimos el operador

$$U_n : Span(\{\underset{x_n^j}{x_n^1 \ldots x_n^{k_n}}\}) \longrightarrow Span(\{\underset{U_n(x_n^j)=z_n^j}{A(x_n^1) \ldots A(x_n^{k_n})}\})$$

donde $z_n^j = (1/\mu'_n)A(x_n^j)$ para todo $j \in \{1 \ldots k_n\}$. Al ser $\{z_n^j\}_{j=1}^{k_n}$ ortonormal y si tomamos $x = \sum\limits_{j=1}^{k_n} a_j x_n^j$ donde $a_j \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\|U_n(x)\|^2 = \|\sum_{j=1}^{k_n} a_j z_n^j\|^2 = \sum_{j=1}^{k_n} |a_j|^2 = \|x\|.$$

Por esta razón, U_n es una isometría.
Es fácil ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu'_n = 0$ y que $A = \mu'_n U_n$ cuando nos restringimos al espacio E_n. Además, el operador A se anula en el complemento ortogonal de $Span(\{E_n\}_{n=1}^{\infty}) = Span(D)$.

Definición 1.6. Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Llamamos **n-ésimo valor singular** al n-ésimo elemento μ'_n de la sucesion $\{\mu'_n\}_{n=1}^{\infty}$ construida en la observación 1.5. Lo denotamos mediante $\mu_n[A]$.

Definición 1.7. Decimos que x es un **n-ésimo vector singular** si x es un vector que tiene asociado el valor $\mu_n[A]$, es decir, que $\|A(x)\| = \mu_n[A]$. Según la observación 1.5, exiten k_n n-ésimos vectores singulares, que denotaremos mediante $x_n^j[A]$ donde $j \in \{1 \ldots k_n\}$.

Nota. Consideraremos, mientras no haya confusión, que existe un único n-ésimo vector singular $x_n[A]$, aunque existan vectores singulares que tengan el mismo valor singular.

Ahora vamos a realizar la descomposición polar de operadores compactos. Para ello debemos dar unas definiciones relativas a operadores acotados, aunque la descomposición polar se pueda dar para operadores acotados generales no haremos dicha demostración dado que se escapa de nuestro propósito.

Definición 1.8. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si para todo $v \in \mathcal{H}$ tenemos que $\langle T(v), v\rangle \geq 0$.

Definición 1.9. Sea $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Decimos que U es una **isometría parcial** si para todo $v \in Ker(U)^{\perp}$, $\|U(v)\| = \|v\|$.

Teorema 1.10. Descomposición polar para operadores compactos Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces $A = U|A|$ donde U es una isometría parcial y $|A|$ es un operador positivo, ambos pertenecientes a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Además, si D está definido como en el teorema 1.2, $D^{\perp}$ es el núcleo de U y de $|A|$, y cada $x_n[A]$ es un autovector de $|A|$ con autovalor $\mu_n[A]$.

Demostración: Sea $\{w_n[A]\}$ una base ortonormal del $Ker(A)$. Notemos que por el teorema 1.2 se verifica que $Ker(A) = D^{\perp}$. Por tanto, $S[A] = \{w_n[A]\} \cup \{x_n[A]\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Dicha base la llamaremos **base singular**. Sea ahora P_n el operador proyección sobre el subespacio generado por $\{x_n^1[A] \dots x_n^{k_n}[A]\}$, siendo estos los vectores asociados al n-ésimo valor singular $\mu_n[A]$. Por tanto, $P_n(\cdot) = \sum_{j=1}^{k_n} \langle \cdot, x_n^j[A]\rangle x_n^j[A]$. Supondremos que para cada valor singular $\mu_n[A]$ existe un único vector singular $x_n[A]$.
Si definimos $|A| := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]P_n$, para cualquier $v \in \mathcal{H}$ de manera que $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n[A] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n[A]$

$$\langle |A|(v), v\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k[A]a_k x_k[A], \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n[A] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n[A]\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k[A]|a_k|^2 \geq 0.$$

Por tanto, $|A|$ es positivo. Si tomamos el vector unitario $U(x_n[A]) = z_n[A]$ de modo que $z_n[A] = (1/\mu_n[A])y_n[A]$ y $U(w_n[A]) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como el conjunto $\{z_n[A]\}$ es un conjunto ortonormal y debido a que para cualquier $v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k[A] \in E$ se cumple que

$$\|U(v)\|^2 = \| \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k[A]\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|v\|^2.$$

Por lo tanto, U es una isometría en $E = Span(D)$.
El teorema 1.2 implica también que $Ker(U) \cap E = 0$ y por tanto $\{w_n[A]\}$ forma una base ortonormal de $Ker(U)$ (i.e., U es una isometría parcial).
Ahora, tenemos que

$$|A|(x_n[A]) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k(x_n[A]) = \mu_n x_n[A],$$

es decir, $|A|$ cumple la condición de los autovalores.
Sea $v \in D^{\perp}$. Entonces $P_n(v) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual implica que $|A|(v) = 0$. En consecuencia, $D^{\perp} = Ker(|A|)$. Luego, $Ker(A) = Ker(U)$.
Por último, de la linealidad de los operadores, de $A(w_n[A]) = 0 = U|A|(w_n[A])$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de

$$A(x_n[A]) = \mu_n[A]z_n[A] = \mu_n[A]U(x_n[A]) = U(\mu_n[A]x_n[A]) = U|A|(x_n[A])$$

se deduce que $A = U|A|$. ■

Nota. Es claro, por el teorema anterior, que un operador compacto A siempre tiene una descomposición de la forma $A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle \cdot, x_n[A]\rangle z_n[A]$. Esta descomposición se llama **descomposición canónica de operadores compactos**. Además, tenemos que $|A| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle \cdot, x_n[A]\rangle x_n[A]$ y que $U = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, x_n[A]\rangle z_n[A]$.

Teorema 1.11. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ para la norma del operador. $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de operadores de rango finito que tiende A en la norma del operador.

Demostración: Veamos que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es cerrado, es decir, si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores compactos que converge en la norma del operador a A, entonces A es compacto.
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de $\mathcal{H}$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\|x_n\| \leq 1$. Vamos a hallar una subsucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que para todo A_i tengamos que $\{A_i(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Dado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y que A_1 es compacto, $\{A_1(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión de Cauchy. A esta subsucesión la denotamos mediante $\{A_1(x_{1n})\}_{n=1}^{\infty}$. Al aplicar a A_2 la sucesión $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ de la misma manera que antes, obtenemos una subsucesión $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ de manera

que $\{A_2(x_{2n})\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Repitiendo este procedimiento inductivamente, para cada $i \in \mathbb{N}$ obtenemos una sucesión $\{x_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que $\{x_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_{(i-1)n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_i(x_{in})\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Entonces la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} := \{x_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $\{A_i(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para todo $i \in \mathbb{N}$ cuando $n \geq i$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $A_i \xrightarrow[i\to\infty]{\|\cdot\|} A$ existe un A_{i_0} tal que $\|A - A_{i_0}\| < \varepsilon/3$. También existe un $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $m > i_0$; $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; y $n_1, n_2 > m$ se tiene que

$$\|A_{i_0}(y_{n_1}) - A_{i_0}(y_{n_2})\| < \varepsilon/3.$$

Por tanto, tenemos que para todo $n_1, n_2 > m$

$$\|A(y_{n_1}) - A(y_{n_2})\| \leq$$

$$\|A(y_{n_1}) - A_{i_0}(y_{n_1})\| + \|A_{i_0}(y_{n_1}) - A_{i_0}(y_{n_2})\| + \|A_{i_0}(y_{n_2}) - A(y_{n_2})\| <$$

$$\|A - A_{i_0}\|\|y_{n_1}\| + \|A_{i_0}(y_{n_1}) - A_{i_0}(y_{n_2})\| + \|A - A_{i_0}\|\|y_{n_2}\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Se concluye que la sucesión $\{A(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión de Cauchy $\{A(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, es decir, A es compacto.
Sea A un operador compacto y sea $A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle \cdot, x_n[A]\rangle z_n[A]$ su descomposición canónica. Si tomamos $A_N = \sum_{n=1}^{N} \mu_n[A]\langle \cdot, x_n[A]\rangle z_n[A]$ en virtud del teorema 1.2 se verifica que

$$\|A - A_N\| = \|\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n[A]\langle \cdot, x_n[A]\rangle z_n[A]\| = \mu_{N+1}[A] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Por tanto, A es límite de operadores de rango finito.
Recíprocamente, sea B un operador de rango finito y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada. Entonces $\{B(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada sumergida en un espacio de dimensión finita, por ende, en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión convergente. Luego B es un operador compacto. Por la primera parte del teorema $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es cerrado. Por tanto el limite de operadores de rango finito es un operador compacto. ■

Teorema 1.12. La aplicación que envía $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un isomorfismo isométrico lineal conjugado de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Teorema 1.13. $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ si, y sólo si, $A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Demostración: Sea A un operador compacto. Para ver que A^* es compacto probaremos que es límite de operadores de rango finito.
Por el teorema 1.11 sabemos que A es límite de operadores de rango finito A_n. Aplicando el teorema 1.12

$$\|A^* - A_n^*\| = \|(A - A_n)^*\| = \|A - A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Falta ver que el adjunto de un operador de rango finito es de rango finito.
Sea B un operador de rango finito. Entonces $Im(B) \subset D$ siendo D un subespacio de dimensión finita. Sea $\{y_1, \cdots, y_n\}$ una base ortonormal de D. Entonces

$$B(\cdot) = \phi_1(\cdot)y_1 + \cdots + \phi_n(\cdot)y_n$$

donde los $\phi_i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ $1 \leq i \leq n$ expresan las coordenadas en dicha base. De la igualdad $B(x + y) = B(x) + B(y)$ se deduce que los ϕ_i son lineales. Como la base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es ortonormal tenemos

$$|\phi_i(x)|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\phi_j(x)|^2 = \|\sum_{j=1}^{n} \phi_j(x)y_j\|^2 = \|B(x)\|^2 \leq \|B\|^2\|x\|^2.$$

Por lo tanto, los $\phi_i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ $1 \leq i \leq n$ son funcionales lineales y acotados. Por el teorema de representación de Riesz existen vectores $v_i \in \mathcal{H}$ para todo $1 \leq i \leq n$ tal que $\phi_i(\cdot) = \langle \cdot, v_i\rangle$. Ahora bien, el operador acotado definido mediante $B'(\cdot) = \langle y_1, \cdot\rangle v_1 + \cdots + \langle y_n, \cdot\rangle v_n$ cumple

$$\langle Bx, z\rangle = \langle x, v_1\rangle\langle y_1, z\rangle + \cdots + \langle x, v_n\rangle\langle y_n, z\rangle = \langle x, B'z\rangle.$$

Por tanto, $B' = B^*$ y el adjunto es de rango finito.
La equivalencia se deduce de todo lo anterior y de $B^{**} = B$. ■

El siguiente lema se incluye por su utilidad a la hora de trabajar con los operadores adjuntos, pero por su sencillez no se incluye demostración:

Lema 1.14. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entonces
$Ker(T) = Ran(T^*)^{\perp}$.
$Ker(T)^{\perp} = \overline{Ran(T^*)}$.

Proposición 1.15. Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ de manera que su descomposición canónica es $A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle, x_n[A]\rangle z_n[A]$. Entonces $A^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle, z_n[A]\rangle x_n[A]$. En particular, A y A^* tienen idénticos valores singulares con la misma multiplicidad.

Demostración: La comprobación de la caracterización del adjunto es inmediata. Por el teorema 2.13 $A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y para todo $v, w \in \mathcal{H}$ resulta

$$\langle A(v), w\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle v, x_n[A]\rangle z_n[A], w\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle v, x_n[A]\rangle\langle z_n[A], w\rangle.$$

Por otro lado se cumple,

$$\langle v, A^*(w)\rangle = \langle v, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle w, z_n[A]\rangle x_n[A]\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\overline{\langle w, z_n[A]\rangle}\langle v, x_n[A]\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle z_n[A], w\rangle\langle v, x_n[A]\rangle.$$

Para mostrar la igualdad de los valores singulares, primero completamos $\{z_n[A]\}_{n=1}^{\infty}$ a una base $\{z_n[A]\}_{n=1}^{\infty} \cup \{z'_n[A]\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $z = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j[A] + \sum_{j=1}^{\infty} a'_j z'_j[A] \in \mathcal{H}$ un vector unitario, es decir, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |a'_j|^2 = 1$. Dado que $\{z_n[A]\}$ y $\{x_n[A]\}$ son ortonormales, aplicando la identidad de Parseval se obtiene

$$\|A^*(z)\| = \|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\mu_j[A]x_j[A]\| = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2\mu_j[A]^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dado que la sucesión $\{\mu_n[A]\}_{n=1}^{\infty}$ es no creciente,

$$\|A^*(z)\| \leq (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2\mu_1[A]^2)^{\frac{1}{2}} = \mu_1[A](\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_1[A].$$

Sin embargo, $\|A^*(z_1[A])\| = \mu_1[A]$ así que $\mu_1[A^*] = \|A^*\| = \mu_1[A]$. Repitiendo el mismo proceso inductivamente sobre $\{z_1[A], \ldots, z_n[A]\}^{\perp}$ y teniendo en mente que $\{z_n[A]\}_{n=1}^{\infty} \cup \{z'_n[A]\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de este espacio se obtiene que $\mu_n[A^*] = \mu_n[A]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Nota. Los operadores unitario U^* y positivo $|A^*|$ asociados a A^* provenientes de la descomposición polar del teorema 1.10 son $U^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, z_n[A]\rangle x_n[A]$ y $|A^*| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle \cdot, z_n[A]\rangle z_n[A]$.

La demostración del siguiente lema no se incluye por ser conocida:

Lema 1.16. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entonces A es autoadjunto si, y sólo si, para todo $v \in \mathcal{H}$ tenemos que $\langle A(v), v\rangle \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.17. Sea $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador de la forma $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, y_n \rangle v_n$, donde las familias de vectores$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ son ortonormales, la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos, no creciente y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ (la sucesión puede ser finita). Entonces:

a) A es compacto.

b) Los λ_n son los valores singulares de A.

c) Las familias $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ corresponden a la descomposición canónica de A. La diferencia que existe es que si $\lambda_n = \cdots = \lambda_{n+k}$ y si $A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A] \langle \cdot, x_n[A] \rangle z_n[A]$ es la descomposición canónica de A, los vectores $\{x_m^1[A], \ldots, x_m^k[A]\}$ asociados al valor singular tal que $\mu_m[A] = \lambda_n$ y los vectores $\{y_n, \ldots, y_{n+k}\}$ generan el mismo espacio y de manera análoga sucede con los vectores $\{z_m^1[A], \ldots, z_m^k[A]\}$ y $\{v_n, \ldots, v_{n+k}\}$.

Demostración: Tenemos

a) Por la ortonormalidad de la familia $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ y la desigualdad de Bessel tenemos que para todo $x \in \mathcal{H}$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle|^2 \lambda_n^2 \leq \|x\|^2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\lambda_n^2\}.$$

Esto implica que

$$\|A\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\lambda_n\} = \lambda_1.$$

Pero como $Ay_1 = \lambda_1 v_1$ sucede que $\|Ay_1\| = \lambda_1$. Y por tanto,

$$\|A\| = \lambda_1.$$

Si llamamos $A_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \cdot, y_n \rangle v_n$, por lo anterior

$$\|A - A_N\| = \lambda_{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Como los A_N son de rango finito, A es compacto.

b) Supongamos que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r > \lambda_{r+1}$. Para cada $x \in Span(\{y_1, \ldots, y_r\}) = D_1$

$$Ax = \lambda_1 \sum_{k=1}^{r} \langle x, y_k \rangle v_k.$$

Entonces

$$\|Ax\|^2 = \lambda_1^2 \sum_{k=1}^{r} |\langle x, y_k\rangle|^2 = \lambda_1^2 \|x\|^2.$$

Luego en los vectores del subespacio $Span(\{y_1, \dots, y_r\})$, $\|Ax\| = \lambda_1\|x\|$. En cambio, si x tiene alguna componente fuera de D_1, aparece un sumando $\lambda_s\langle x, y_s\rangle$ o bien $\langle x, z\rangle$, $z \in Ker(A)$. En cualquier caso como

$$\|Ax\|^2 = \lambda_1^2 \sum_{k=1}^{r} |\langle x, y_k\rangle|^2 + \text{términos} \leq \lambda_1^2 \sum_{k=1}^{r} |\langle x, y_k\rangle|^2 + \lambda_1^2 |\langle x, y_s\rangle|^2$$

con lo que $\|Ax\| \leq \lambda_1\|x\|$. Luego $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1[A]$ y D_1 es exactamente el subepacio que asociado al primer valor singular de la descomposición canónica de A. La elección de la base ortonormal de D_1 es arbitraria, pero D_1 no lo es.
Ahora, al restringir A a $D_1^{\perp}$ tenemos que

$$A|_{D_1^{\perp}} = \sum_{n=r+1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, y_n\rangle v_n.$$

Aplicamos los cálculos anteriores a $A|_{D_1^{\perp}}$. Procediendo así inductivamente se llega a la igualdad de los valores singulares.

■

Corolario 1.18. La base singular de cualquier operador autoadjunto y compacto $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es una base de autovectores donde el autovalor asociado a $x_n[A]$ es ó $\mu_n[A]$ ó $-\mu_n[A]$. En particular, los valores singulares son reales.

Demostración:

Sea A compacto y autoadjunto. Sea $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n\rangle e_n$ su descomposición espectral. Tomando $y_n = e_n$, $v_n = e_n$ si $\lambda_n > 0$, $v_n = -e_n$ si $\lambda_n < 0$, con la notación de la proposición anterior. Entonces $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n\rangle e_n$, la sucesión $\{\lambda_n\}$ tiende hacia 0; si elegimos los $\{\lambda'_n\}$ de modo que la sucesión $\{|\lambda'_n|\}$ sea decreciente, por la unicidad ésta es la descomposición de A en los valores singulares. Así, $\mu_n[A] = \lambda_n$ si $\lambda_n > 0$ o $\mu_n[A] = -\lambda_n$ si $\lambda_n < 0$. ■

Capítulo 2

Clase de Traza

Antes de definir la Clase de Schatten vamos a definir los operadores de la Clase de Traza y la Traza de un operador de la Clase de Traza. Esto es debido a que las clases de Schatten son una generalización de los operadores de la Clase de Traza.

Definición 2.1. Clase de Traza
Un operador $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ se dice que es un operador de la **clase de traza** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]$ es convergente. Denotamos el conjunto de operadores de la clase de traza mediante $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ y definimos $\|A\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]$.

Veremos más adelante que $\|\cdot\|_1$ es una norma.

Definición 2.2. Traza
Sea $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$. Sea $A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, x_n[A] \rangle \mu_n[A] z_n[A]$ la descomposición canónica de A. La **traza** de A es $Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(x_n[A]), x_n[A] \rangle$.

Nota. Sea $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz término a término y debido a que $\|A(x_n[A])\| = \mu_n[A]$ tenemos que

$$|Tr(A)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle A(x_n[A]), x_n[A] \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A(x_n[A])\| \|x_n[A]\| = \|A\|_1.$$

Por tanto, $Tr(A)$ converge absolutamente. A menos que se diga lo contrario, siempre que usemos la operación $Tr(A)$ supondremos que $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$.

Teorema 2.3. Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces

$$\mu_n[A] = \text{mín}\{\|A|_{\Gamma^\perp}\| : \Gamma = \{\phi_1 \dots \phi_{n-1}\} \text{ ortonormal } \}.$$

Demostración: Sea $\Gamma = \{\phi_1 \ldots \phi_{n-1}\}$ un conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Denotamos mediante E_{n-1} al conjunto

$$E_{n-1} = Span(\{x_1[A] \ldots x_n[A]\}) \cap Span(\{\phi_1 \ldots \phi_{n-1}\})^{\perp}.$$

Comprobemos que $\dim(E_{n-1}) \geq 1$. Sea $x \in Span(\{x_1[A] \ldots x_n[A]\})$ y $x \in Span(\{\phi_1 \ldots \phi_{n-1}\})^{\perp}$. Entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i[A] \text{ y } \langle x, \phi_j \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad j \in \{1 \ldots n-1\}.$$

Estas dos propiedades plantean el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \langle x_1[A], \phi_1 \rangle & ... & \langle x_n[A], \phi_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1[A], \phi_{n-1} \rangle & ... & \langle x_n[A], \phi_{n-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Este sistema de ecuaciones tiene $n-1$ ecuaciones y n incógnitas. Por tanto existen infinitas soluciones. Debido a esto E_{n-1} define un subespacio de al menos dimensión 1. Sea x unitario y perteneciente a $E_{n-1} \subset Span(\{x_1[A] \ldots x_n[A]\})$, es decir, $x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k[A]$ con $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = 1$. Del teorema 1.2 deducimos

$$\|A(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \mu_k[A]^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \mu_n[A]^2 = \mu_n[A]^2.$$

Dado que $\|A|_{\Gamma^{\perp}}\| \geq \|A(x)\|$ y que $x \in \Gamma^{\perp}$ se verifica

$$\text{mín}\{\|A|_{\Gamma^{\perp}}\| : \Gamma = \{\phi_1 \ldots \phi_{n-1}\} \text{ ortonormal } \} \geq \mu_n[A].$$

Por otro lado, como $\mu_n[A]$ es la norma de A cuando restringimos A al complemento ortogonal de $Span(\{x_1[A] \ldots x_{n-1}[A]\})$, si tomamos

$$\Gamma = \{x_1[A], \ldots, x_{n-1}[A]\}$$

particular, observamos que el mínimo es alcanzado. ■

Usando el teorema 2.3 podemos hacer una prueba alternativa para hallar la igualdad de los valores singulares de un operador compacto y su adjunto. Vamos a probar que A y A^* tienen idénticos valores singulares con la misma multiplicidad:

Corolario 2.4. Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces $\mu_n[A] = \mu_n[A^*]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Debido al teorema 2.3, si demostramos que para todo conjunto ortonormal $\Gamma_1 \subset \mathcal{H}$ de $n-1$ vectores, existe un correspondiente conjunto $\Gamma_2 \subset \mathcal{H}$ de $n-1$ vectores tal que $\|A^*|_{\Gamma_2^\perp}\| \leq \|A|_{\Gamma_1^\perp}\|$, entonces $\mu_n[A^*] \leq \mu_n[A]$. Esto sería suficiente para demostrar el corolario dado que $(A^*)^* = A$.
Sea $\Gamma_1 = \{\phi_1 \dots \phi_{n-1}\}$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$ y sea $E_1 = Span(\Gamma_1)$. Definimos ahora $E_2' := A(E_1)$ y se tiene que $\dim(E_2') \leq \dim(E_1)$. Elegimos una base ortonormal en E_2' y completamos dicha base hasta tener un conjunto de $n-1$ vectores ortonormales. Llamamos a dicho conjunto Γ_2 y denotamos $E_2 := Span(\Gamma_2)$. Aplicando el teorema 1.2 sabemos que existe $v \in E_2^\perp$ con $\|v\| = 1$ tal que $\|A^*|_{\Gamma_2^\perp}\| = \|A^*(v)\|$. Si $A^*(v) = 0$ es trivial que $\|A^*|_{\Gamma_2^\perp}\| \leq \|A|_{\Gamma_1^\perp}\|$. Por tanto suponemos que $A^*(v) \neq 0$ y tomamos $u := A^*(v)/\|A^*(v)\|$ el vector unitario en la dirección de $A^*(v)$. En virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se prueba que

$$\|A^*|_{\Gamma_2^\perp}\| = \langle A^*(v), u\rangle = \langle v, A(u)\rangle \leq \|A(u)\|.$$

Sin embargo, para todo $1 \leq k < n$, como $A(\phi_k) \in E_2$ y $v \in E_2^\perp$, se deduce que

$$\langle \phi_k, A^*(v)\rangle = \langle A(\phi_k), v\rangle = 0.$$

Por lo tanto, $\phi_k \perp A^*(v)$ para todo $1 \leq k < n$, es decir, $u \in E_1^\perp$. En consecuencia,

$$\|A^*|_{\Gamma_2^\perp}\| \leq \|A(u)\| \leq \|A^*|_{\Gamma_1^\perp}\|.$$

■

El siguiente resultado prueba una definición equivalente de la Traza.

Teorema 2.5. Sea $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ y sea una base ortonormal cualquiera $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ de $\mathcal{H}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A(e_k), e_k\rangle| \leq \|A\|_1$ y $Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_k), e_k\rangle$.

Demostración: De la desigualdad de Bessel deducimos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n[A]\rangle|^2 \leq \|x_n[A]\|^2 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle z_n[A], e_k\rangle|^2 \leq \|z_n[A]\|^2 = 1.$$

Por tanto, $f_z := \{|\langle z_n[A], e_k\rangle|\}_{k=1}^{\infty}$ y $f_x := \{|\langle e_k, x_n[A]\rangle|\}_{k=1}^{\infty}$ están en el espacio de Hilbert ℓ^2 con $\|f_x\|_{\ell^2}, \|f_x\|_{\ell^2} \leq 1$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para ℓ^2 obtenemos que

$$|\langle f_x, f_z\rangle_{\ell^2}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle z_n[A], e_k\rangle\langle e_k, x_n[A]\rangle| \leq \|f_x\|_{\ell^2}\|f_z\|_{\ell^2} \leq 1.$$

Dado que $e_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle e_k, x_n[A]\rangle x_n[A] + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle e_k, w_n[A]\rangle w_n[A]$ y que los $w_n[A]$ están en el $Ker(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle A(e_k), e_k\rangle| = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle A(\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_k, x_n[A]\rangle x_n[A] + \sum_{n=1}^{\infty}\langle e_k, w_n[A]\rangle w_n[A]), e_k\rangle| =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle A(\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_k, x_n[A]\rangle x_n[A], e_k\rangle| = \sum_{k=1}^{\infty}|\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_k, x_n[A]\rangle\langle A(x_n[A]), e_k\rangle| =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}|\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_k, x_n[A]\rangle\langle \mu_n[A]z_n[A], e_k\rangle|.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle A(e_k), e_k\rangle| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[A]|\langle e_k, x_n[A]\rangle\langle z_n[A], e_k\rangle| =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[A]\sum_{k=1}^{\infty}|\langle e_k, x_n[A]\rangle\langle z_n[A], e_k\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[A] \leq \|A\|_1.$$

La igualdad en el intercambio de los sumatorios está asegurada por el hecho de que los sumandos son no negativos. Además, el hecho de que la serie converja absolutamente permite poder hacer reordenamientos de la serie. Notemos que

$$x_n[A] = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x_n[A], e_k\rangle e_k$$
$$z_n[A] = \sum_{k=1}^{\infty}\langle z_n[A], e_k\rangle e_k.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(e_k), e_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[A]\langle e_k, x_n[A]\rangle\langle z_n[A], e_k\rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[A]\sum_{k=1}^{\infty}\langle z_n[A], e_k\rangle\langle e_k, x_n[A]\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[A]\langle z_n[A], x_n[A]\rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle A(x_n[A]), x_n[A]\rangle = Tr(A).$$

■

El siguiente resultado es bien conocido:

Lema 2.6. Sean $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entonces $AB, BA \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Aunque $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es no conmutativo, vamos a probar que la traza respeta la conmutatividad.

Teorema 2.7. Se verifica las siguientes propiedades:

a) Si $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces AB y $BA \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$.

b) Sea $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entonces $\mu_n[BA], \mu_n[AB] \leq \|B\|\mu_n[A]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

c) Además, $Tr(BA) = Tr(AB)$ y

$$|Tr(BA)|, |Tr(AB)| \leq \|AB\|_1.$$

Demostración: Es claro que $b)$ implica $a)$.

b) Por el lema 2.6 AB y BA son compactos. Tenemos que

$$\|BA(v)\| \leq \|B\|\|A(v)\| \quad \text{para todo } v \in \mathcal{H}.$$

Entonces por el teorema 2.3

$$\mu_n[BA] \leq \|B\|\mu_n[A].$$

Además, por el Corolario 2.4

$$\mu_n[AB] = \mu_n[B^*A^*] \leq \|B^*\|\mu_n[A^*] = \|B\|\mu_n[A].$$

c) Por el teorema 2.5, para toda $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ base ortonormal

$$|Tr(AB)| = |\sum_{n=1}^{\infty}\langle AB(e_k), e_k\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\langle AB(e_k), e_k\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[AB].$$

Por otra parte,

$$|Tr(BA)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\langle BA(e_k), e_k\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[BA] < \infty.$$

Por tanto, las trazas convergen absolutamente. Para probar la acotación de $|Tr(BA)|$ por $\|AB\|_1$ demostraremos la igualdad entre las trazas de AB y de BA. Notemos que para cualquier $z \in \{z_n[A]\}^{\perp} = Ran(A)^{\perp} = Ker(A^*)$,

$$\langle AB(z), z\rangle = \langle B(z), A^*(z)\rangle = \langle B(z), 0\rangle = 0.$$

Por el teorema 2.5 y el hecho de que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal se comprueba

$$Tr(AB) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle AB(z_n[A]), z_n[A]\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle AB(z'_n[A]), z'_n[A]\rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle AB(z_n[A]), z_n[A]\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k[A]\langle B(z_n[A]), x_k[A]\rangle z_k[A], z_n[A]\rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle B(z_n[A]), x_n[A]\rangle.$$

Dado que $\{w_n[A]\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $Ker(A)$ se verifica que

$$BA(w_n[A]) = B(0) = 0.$$

A causa de que $\{x_n[A]\}_{n=1}^{\infty}$ es base de $Ker(A)^{\perp}$ y que $\mu_n[A]z_n[A] = A(x_n[A])$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$Tr(BA) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle (B(A(x_n[A])), x_n[A]\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle (B(\mu_n[A]z_n[A]), x_n[A]\rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\langle (B(z_n[A]), x_n[A]\rangle.$$

■

Teorema 2.8. $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\|\cdot\|_1$ es una norma sobre $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$. Además, la traza es un funcional lineal y continuo para la norma $\|\cdot\|_1$ sobre $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$.

Demostración: Sea $a, b \in \mathbb{C}$ y sea $A, B \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$. Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base singular reordenada del operador compacto $C := aA + bB$, es decir, considerando los vectores tanto del núcleo como los vectores asociados a los valores singulares. Sea f_k el vector unitario en la dirección $C(e_k)$ (ó 0 si $C(e_k) = 0$). Finalmente, sea U la isometría parcial dada por $U(e_k) = f_k$ (i.e., la isometría parial dada en la descomposición polar del teorema 1.10). Entonces

$$\|C\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \|C(e_k)\| = |\sum_{k=1}^{\infty} \langle C(e_k), f_k \rangle| = |\sum_{k=1}^{\infty} \langle aA(e_k), U(e_k)\rangle +$$
$$\langle bB(e_k), U(e_k)\rangle| = |\sum_{k=1}^{\infty} a\langle U^*A(e_k), e_k\rangle + b\langle U^*B(e_k), e_k\rangle|.$$

Sin embargo, debido a que $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ es cerrado bajo la composición de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y para $X \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ y $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\|YX\|_1 \leq \|Y\|\|X\|_1$, U^*A y U^*B están ambas en la clase de traza. Por tanto, la serie converge absolutamente y por el teorema 2.5 tenemos que

$$\|C\|_1 = |\sum_{k=1}^{\infty} a\langle U^*A(e_k), e_k\rangle + b\langle U^*B(e_k), e_k\rangle| \leq |a| \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*A(e_k), e_k\rangle| +$$
$$|b| \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*B(e_k), e_k\rangle| \leq |a|\|U^*A\|_1 + |b|\|U^*B\| \leq |a|\|A\|_1 + |b|\|B\|.$$

Tomando $a = 1, b = 1$ se prueba la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_1$.
Para ver el resto de propiedades de norma debemos tener en cuenta la relación de los valores singulares y la norma de operador vista en el teorema 1.2.
Dado que todo $\mu_n[A] \geq 0$ se tiene que

$$\|A\|_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_n[A] = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Sea $A \neq 0$ un operador de la clase de traza. Si $A \neq 0$, $\|A\| \neq 0$. En consecuencia, la sucesión $\{\mu_n[A]\}_{n=1}^{\infty}$ de valores singulares tiene algún valor singular distinto de cero. Luego, $\|A\|_1 \geq 0$.
Que $\|\lambda A\|_1 = |\lambda|\|A\|_1$ se deduce del hecho de que $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ y, por consiguiente, $\mu_n[\lambda A] = |\lambda|\mu_n[A]$.
Veamos que la linealidad se deduce del teorema 2.5. Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal cualquiera de $\mathcal{H}$. Entonces

$$Tr(aA + bB) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle aA + bB(e_k), e_k\rangle = a\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), e_k\rangle + b\sum_{k=1}^{\infty} \langle B(e_k), e_k\rangle =$$
$$aTr(A) + bTr(B)$$

donde los términos se pueden reordenar por que la traza de de A y B convergen absolutamente.
La continuidad se demuestra aplicando el teorema 2.5, debido a $|Tr(A)| \leq \|A\|_1$. ■

Definición 2.9. Un ideal-$*$ bilateral en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un subconjunto Γ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que cumple:

· Γ es un espacio vectorial.

· Si $A \in \Gamma$ y $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces AB y BA pertenecen a Γ.

· Si $A \in \Gamma$, entonces $A^* \in \Gamma$.

Nota. De los teoremas anteriores se tiene que $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ es un
ideal-$*$ bilateral en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Además, la traza de un operador cualquiera se puede definir en función del teorema 2.5. En este caso aceptando el valor infinito para cuando la traza no converja. Un ejemplo de esto se consigue consideranro el operador identidad.

Definición 2.10. Para cualquier conjunto $X \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, denotamos X^+ a los operadores positivos de X.

Definición 2.11. Sean $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operadores autoadjuntos. Decimos que $T \geq S$ cuando $T - S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$.

Lema 2.12. Sean $A, B \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})^+$. Se verifica:

a) La traza es no decreciente; i.e., si $A \geq B$, entonces $Tr(A) \geq Tr(B)$.

b) Sea la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_1(\mathcal{H})^+$ de manera que $A_{n+1} \geq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A en la norma del operador. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} Tr(A_n) = Tr(A)$. Sin embargo, el límite puede ser infinito. Cuando eso ocurre decimos que la traza del operador es infinito.

Demostración:

a) Sean $A, B \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})^+$ y $A \geq B$. Notemos que $Tr(A), Tr(B)$ son reales. Por el teorema 2.8 se verifica que

$$Tr(A) = Tr(B) + Tr(A - B).$$

Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y recordemos que $A - B$ es positivo. Entonces

$$Tr(A) = Tr(B) + Tr(A-B) = Tr(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A-B)(e_k), e_k \rangle \geq Tr(B).$$

b) Sea $\{A_n\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_1(\mathcal{H})^+$ una sucesión no decreciente que converge a A en la norma del operador. Tenemos que $f_v(x) := \langle x, v \rangle$ es un funcional continuo para todo $v \in \mathcal{H}$ fijo debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ahora bien, como $\langle A_n(v), v \rangle \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y dado que

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} A$ se verifica que $\langle A(v), v\rangle \geq 0$, para todo $v \in \mathcal{H}$. Con lo cual A es positivo.
También

$$\langle A_{n+1}(v), v\rangle - \langle A_n(v), v\rangle = \langle (A_{n+1} - A_n)(v), v\rangle \geq 0,$$

es decir, $\{\langle A_n(v), v\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente. Por tanto

$$\langle A(v), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A_n(v), v\rangle \geq \langle A_N(v), v\rangle$$

para cualquier $N \in \mathbb{N}$ fijo. Así que

$$\langle (A - A_N)(v), v\rangle \geq 0$$

para todo $v \in \mathcal{H}$. Por el apartado a) tenemos que

$$Tr(A) \geq \lim_{n\to\infty} Tr(A_n).$$

Notemos, también por el apartado a), que el límite existe en la recta real extendida porque $\{Tr(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos no decreciente.
Si el limite es finito, supongamos que $Tr(A)$ es estrictamente mas grande que $\lim_{n\to\infty} Tr(A_n)$. Dado que $Tr(A)$ es un límite de sumas parciales, para algún $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{K} \langle A(e_k), e_k\rangle > \lim_{n\to\infty} Tr(A_n).$$

Sin embargo, llegamos a una contradicción pues

$$\lim_{n\to\infty} Tr(A_n) > \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \langle A_n(e_k), e_k\rangle = \sum_{k=1}^{K} \langle A(e_k), e_k\rangle > \lim_{n\to\infty} Tr(A_n).$$

■

Nota. Para ilustrar que límite de una sucesión de operadores $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, en las condiciones del teorema 2.12,b), no es un operador de la clase de Traza basta tomar un operador compacto y positivo de modo que $A \notin \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$. Tomando la sucesión de operadores $A_n := AP_n$, donde P_n es la proyección sobre $Span(x_1[A], \ldots, x_n[A])$, la sucesión cumple las hipótesis del lema y la $Tr(A)$ no es finita.

Capítulo 3

Desigualdad de Hölder para $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$

Definición 3.1. Clase p-ésima de Schatten
Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Decimos que A es un operador que pertenece a la **p-ésima clase de Schatten** para $1 \leq p < \infty$ si la sucesión $\{\mu_n[A]\} \in \ell^p$. Denotamos a la p-ésima clase de Schatten mediante $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

Definición 3.2. Norma p-ésima de Schatten
Sea $A \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$. Definimos la **p-ésima norma de Schatten** como la suma $(\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n[A])^p)^{\frac{1}{p}}$ y la denotamos mediante $\|A\|_p$.

El hecho de que la norma de Schatten sea realmente una norma es a lo que nos dedicamos en esta sección. Ahora haremos unos comentarios sobre las clases de Schatten y su notación.

Nota.

· Si denotamos mediante $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ a los elementos de $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tales que $\{\mu_n[A]\} \in \ell^\infty$ del teorema 1.2 se deduce que $\mu_1[A] = \|A\|_\infty$ y que todo operador compacto pertenece a $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$. Ahora bien, también del teorema 1.2, se deduce que $\|A\|_\infty = \|A\|$. Por tanto tiene sentido considerar a $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ como la clase de los operadores compactos, es decir, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

· La relación entre las Clases de Traza y las Clases de Schatten está en la descomposición polar. Primero notemos que la 1-clase de Schatten es la Clase de Traza y que $\|A\|_1 = Tr(|A|)$ al ser $|A|$ autoadjunto y tener autovectores $x_n[A]$ y autovalores $\mu_n[A]$. Luego, dado que $|A|^p = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n[A]^p P_n$, siendo P_n la proyección sobre el n-ésimo vector singular de A, tenemos que $\mu_n[A]^p$ son los valores singulares de $|A|^p$. Este hecho se demuestra posteriormente en el teorema 4.1. Por tanto, $\|A\|_p^p = Tr(|A|^p)$ para todo $A \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

· A partir de ahora consideraremos p y q exponentes conjugados.

Ahora probaremos que las normas de Schatten cumplen una generalización de la Desigualdad de Hölder. Enunciaremos el teorema, pero no estaremos en condiciones de demostrarlo hasta el final del capítulo.

Teorema 3.3. Desigualdad de Hölder para normas de Schatten
Si $A \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$ para $1 \leq p, q \leq \infty$, entonces AB es un operador de la Clase de Traza y $\|AB\|_1 \leq \|A\|_p \|B\|_q$.

Para la demostración de este teorema necesitamos desarrollar ciertas desigualdades y construir los productos tensorial y alternado.

3.1. Desigualdades

Definición 3.4. Sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Definimos $a^* := (a_1^*, \ldots, a_n^*) \in \mathbb{R}^n$ al vector tal que sus componentes forman una reordenación de $\{|a_i|\}$ en orden no creciente, es decir, de manera que $a_1^* \geq \ldots \geq a_n^*$.

Ejemplo 3.5. Sea $a = (3, 1, 10, -3, -12)$. Entonces $a_1^* = 12$, $a_2^* = 10$, $a_3^* = 3$, $a_4^* = 3$, $a_5^* = 1$.

Lema 3.6. Si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*.$$

Demostración: Dado que $\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j|$ es la misma suma que $\sum_{j=1}^{n} a_j^* |b_{\pi^{-1}(j)}|$ de modo que $\pi \in S_n$ es la permutación que envía $a_{\pi(k)} = a_j^*$, podemos suponer que $|a_1| \geq \ldots \geq |a_n|$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| + |a_n| \sum_{j=1}^{n-1} |b_j| - |a_n| \sum_{j=1}^{n-1} |b_j| + |a_{n-1}| \sum_{j=1}^{n-2} |b_j| -$$
$$|a_{n-1}| \sum_{j=1}^{n-2} |b_j| + \ldots + |a_2||b_1| - |a_2||b_1| + |a_1||b_1| =$$
$$|a_n| \sum_{j=1}^{n} |b_j| + (|a_{n-1}| - |a_n|) \sum_{j=1}^{n-1} |b_j| + \ldots + (|a_1| - |a_2|)|b_1| =$$

A causa de que $|a_1| \geq \ldots \geq |a_n|$ la cantidad anterior coincide con

$$a_n^* \sum_{j=1}^{n} |b_j| + (a_{n-1}^* - a_n^*) \sum_{j=1}^{n-1} |b_j| + \ldots + (a_1^* - a_2^*)|b_1|$$

Por el orden no decreciente de la sucesión $\{b_j^*\}$ y su construcción tenemos que $\sum_{j=1}^{k} |b_j| \le \sum_{j=1}^{k} b_j^*$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Así pues, esta última cantidad está acotada por

$$a_n^* \sum_{j=1}^{n} b_j^* + (a_{n-1}^* - a_n^*) \sum_{j=1}^{n-1} b_j^* + \ldots + (a_1^* - a_2^*) b_1^* = \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*.$$

■

Definición 3.7. Se dice que L es la envolvente convexa de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ si L es el mínimo conjunto convexo que contiene a X. Si el conjunto X es finito, es decir, de la forma $X = \{a_0, \ldots, a_m\}$, entonces

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \quad y \quad \lambda_j \ge 0 \text{ para todo } j\}.$$

El siguiente resultado es clásico: ver por ejemplo [7].

Proposición 3.8. Sea $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Sea K un subconjunto de $\mathcal{H}$ cerrado, convexo y no vacío y sea $h \in \mathcal{H}$. Entonces existe un único $k_0 \in K$ tal que

$$\|h - k_0\| = dist(h, k) := \inf\{\|h - k\| : k \in K\}.$$

El siguiente resultado es una versión elemental del teorema de Hanh-Banach geométrico.

Proposición 3.9. Sean $b \in \mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^n$ compacto y convexo. Si $b \notin L$, entonces existe un funcional lineal $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $g(b) > g(x)$ para cualquier $x \in L$.

Demostración: Observemos que $g(b) > g(x)$ es equivalente a que $g(b-x) > 0$ para todo $x \in L$. Definimos $C := b - L$. Tenemos que comprobar que para todo $y \in C$ existe $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $g(y) > 0$. Como L es convexo y compacto, también lo es C. Sea $x_0 \in C$ el elemento de norma mínima de C cuya existencia garantiza la proposición 3.8. Dado que $0 \notin C$, a causa de $b \notin L$, tenemos que $x_0 \neq 0$.
Definimos $g(x) = \langle x, x_0 \rangle$. Si $y \in C$, $(1-t)x_0 + ty \in C$ y se verifica que

$$\|x_0\| < \|ty + (1-t)x_0\| = \|t(y - x_0) + x_0\| \text{ si } t \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\|x_0\|^2 < \|t(y-x_0)+x_0\|^2 = t^2\|y-x_0\|^2 + \|x_0\|^2 + 2t\langle y-x_0, x_0\rangle$$

$$2t\langle -(y-x_0), x_0\rangle < t^2\|y-x_0\|^2 \quad \text{para todo } t>0$$

$$2\langle -(y-x_0), x_0\rangle < t\|y-x_0\|^2 \quad \text{para todo } t>0.$$

Si hacemos tender t hacia 0 obtenemos que $2\langle -(y-x_0), x_0\rangle \leq 0$, es decir, $\langle -y, x_0\rangle + \|x_0\|^2 \leq 0$. Esto implica que

$$0 < \|x_0\|^2 \leq \langle y, x_0\rangle = g(y) \quad \text{para todo } y \in C.$$

■

Teorema 3.10. Sean $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, con $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ y de forma que

$$\sum_{j=1}^{k} b_j^* \leq \sum_{j=1}^{k} a_j \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Entonces $b \in L$, siendo L la envolvente convexa del conjunto $X = \{v \in \mathbb{R}^n : v^* = a\} = \{v \in \mathbb{R}^n : v = ((-1)^{k_1}a_{\sigma(1)}, \dots, (-1)^{k_n}a_{\sigma(n)})$ con $\sigma \in S_n$ y $k_j \in \{1,2\}\}$.

Demostración: Al ser L un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, L es compacto. Además, L es convexo. Si $b \notin L$, por el teorema 3.9 existe un funcional $g \in (\mathbb{R}^n)^*$ tal que $g(b) > \max_{x\in L}\{g(x)\}$. Por tanto, si para todo $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ tenemos que $|f(b)| \leq M_f := \max_{x\in L}\{f(x)\}$ entonces, $b \in L$. Sea $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Sabemos entonces que f tiene la forma $f(x) = f_1x_1 + \dots f_nx_n$. Por el lema 3.6 tenemos que

$$|f(b)| = |\sum_{j=1}^{n} f_jb_j| \leq \sum_{j=1}^{n} f_j^*b_j^* \leq$$

$$f_n^*\sum_{j=1}^{n} b_j^* + (f_{n-1}^* - f_n^*)\sum_{j=1}^{n-1} b_j^* + \dots + (f_1^* - f_2^*)b_1^*$$

Como por hipótesis se cumple que $\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^* \leq \sum\limits_{j=1}^{k} a_j$ para $1 \leq k \leq n$ y $(f_{j-1}^* - f_j) \geq 0$ tenemos que esta cantidad está acotada por

$$f_n^* \sum_{j=1}^{n} a_j + (f_{n-1}^* - f_n^*) \sum_{j=1}^{n-1} a_j + \cdots + (f_1^* - f_2^*) a_1 = \sum_{j=1}^{n} f_j^* a_j.$$

Ahora bien, veamos existe un $a' \in \mathbb{R}^n$ con $(a')^* = a$ tal que $f^*(a) = f(a')$. Sea $\sigma \in S_n$ la permutación tal que $f_k \longmapsto f_j^* = |f_{\sigma(k)}|$. Denotamos mediante θ_k al valor

$$\theta_k := \begin{cases} 1 \text{ si } sgn(f_k) \text{ es negativo} \\ 0 \text{ si } sgn(f_k) \text{ es positivo} \end{cases}$$

y mediante a' al vector

$$a' = ((-1)^{\theta_1} a_{\sigma(1)}, \ldots, (-1)^{\theta_n} a_{\sigma(n)}).$$

Entonces, dado que $\sigma^{-1}(j) = k$ y un reordenamiento de la suma no altera el valor de esta, tenemos que

$$f^*(a) = \sum_{j=1}^{n} f_j^* a_j = \sum_{j=1}^{n} f_j^* (-1)^{\theta_{\sigma^{-1}(j)}} (-1)^{\theta_{\sigma^{-1}(j)}} a_j = \sum_{k=1}^{n} f_k (-1)^{\theta_k} a_{\sigma(k)} = f(a').$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} f_j^* a_j = \sum_{j=1}^{n} f_j a_j' \leq M_f.$$

■

El siguiente resultado es elemental:

Lema 3.11. Desigualdad de Jensen
Sea f una función convexa y sean $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq n$ tales que $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ y $\lambda_j \geq 0 \quad$ para todo j. Entonces $f(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$.

Corolario 3.12. Sean $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que las sucesiones finitas $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$ son no crecientes y positivas, y tales que para cualquier $1 \leq k \leq n$ se tiene que

$$\prod_{j=1}^{k} b_j \leq \prod_{j=1}^{k} a_j.$$

Entonces $\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Demostración: Suponemos que $b_j, a_j \geq 1$. Una vez visto el resultado para ese caso, dado que existe un $c \in \mathbb{R}^+$ para el cual se cumple que $cb_j, ca_j \geq 1$ tenemos que $\sum_{j=1}^{n} cb_j \leq \sum_{j=1}^{n} ca_j$. Por ello, al dividir por c se obtiene la desigualdad buscada.

Definimos $b'_j := \log(b_j)$ y $a'_j := \log(a_j)$. Por la propiedad del logaritmo del producto y dado que el logaritmo es una función creciente, deducimos que

$$\sum_{j=1}^{k} b'_j = \log(\prod_{j=1}^{k} b_j) \leq \log(\prod_{j=1}^{k} a_j) = \sum_{j=1}^{k} a'_j.$$

Luego, como $a_j, b_j > 1$, también $a'_j, b'_j > 0$ si $1 \leq j \leq k$. Además, dado que las sucesiones $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$ son no crecientes, también lo son las sucesiones $\{a'_j\}$ $\{b'_j\}$. Debido a que se verifica que $(b'_j)^* = b'_j$ se satisfacen las hipótesis del teorema 3.10. Por tanto, para $a' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ y $b' = (b'_1, \ldots, b'_n)$,

$$b' = \sum_{i=1}^{m} \beta_i (a')^{(i)}$$

donde $((a')^{(i)})^* = a'$ para todo $1 \leq i \leq m$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

La función exponencial $f(x) = e^x$ tiene segunda derivada estrictamente positiva para todo $x > 0$. Por esta razón, la función es convexa en $(0, \infty)$.

Para todo $1 \leq i \leq m$, si tomamos $a^{(i)} = (e^{|(a')^{(i)}_1|}, \ldots, e^{|(a')^{(i)}_n|})$, existe un $\sigma_i \in S_n$ de modo que

$$a^{(i)}_j = e^{|(a')^{(i)}_j|} = e^{|a'_{\sigma_i(j)}|} = e^{\log(a_{\sigma_i(j)})} = a_{\sigma_i(j)}.$$

Aplicando la desigualdad de Jensen se tiene que:

$$b_j = e^{b'_j} = e^{\sum_{i=1}^{m} \beta_i (a')^{(i)}_j} \leq \sum_{i=1}^{m} \beta_i e^{(a')^{(i)}_j} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i a^{(i)}_j.$$

Dado que $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$ por ser una combinación convexa, sumando los b_j obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \beta_i a^{(i)}_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{n} a^{(i)}_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma_i(j)} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

$\blacksquare$

3.2. Producto tensorial y alternado

Ahora queremos desarrollar las herramientas para establecer una relación entre $\mu_n[AB]$ y $\mu_n[A]\mu_n[B]$ para $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Para ello vamos a construir el producto tensorial y alternado de n copias de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Para mayor claridad, las demostraciones las haremos para $n = 2$, aunque las propiedades serán enunciadas para un n general.

Definición 3.13. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Para cada $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$ definimos la **forma multilineal conjugada** $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ que actúa sobre $\mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H}$ de manera que

$$[\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n](\psi_1, \dots, \psi_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \psi_i \rangle.$$

Sea Σ el conjunto de las combinaciones lineales finitas de las formas multilineales conjugadas $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$. Definimos el **producto interno en** Σ mediante

$$\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n, \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_i \rangle \tag{3.1}$$

y lo extendemos de forma sesquilineal a toda Σ.

Proposición 3.14. El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida en (3.1) está bien definido y es definida positiva en Σ.

Demostración: Sea $n = 2$.
Vamos a demostrar que está bien definida.

Si $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i[\phi_i \otimes \psi_i] = \sum_{j=1}^{m} b_j[\eta_j \otimes \gamma_j]$, quiere decir que como formas bilineales en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ coinciden, esto es, para todo par $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \langle \phi_i, \alpha \rangle \langle \psi_i, \beta \rangle = \sum_{j=1}^{m} b_j \langle \eta_j, \alpha \rangle \langle \gamma_j, \beta \rangle.$$

Ahora bien, esto es equivalente a que

$$\langle \sum_{i=1}^{n} a_i[\phi_i \otimes \psi_i], \alpha \otimes \beta \rangle = \langle \sum_{j=1}^{m} b_j[\eta_j \otimes \gamma_j], \alpha \otimes \beta \rangle$$

y para cualquier suma $\sum_{k=1}^{p} c_k \alpha_k \otimes \beta_k$, también se da la igualdad. Por tanto el producto interno no depende de la representación del elemento de Σ.

Supongamos ahora que $\lambda = \sum_{k=1}^{M} d_k(\eta_k \otimes \mu_k)$ donde $d_k \in \mathbb{C}$ y $\eta_k, \mu_k \in \mathcal{H}$. Denotamos por M_1 y M_2 los subespacios generados respectivamente por $\{\eta_k\}_{k=1}^{M}$ y $\{\mu_k\}_{k=1}^{M}$. Sean $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_1}$ y $\{\psi_l\}_{l=1}^{N_2}$ bases ortonormales para M_1, M_2 respectivamente. Estas bases se pueden obtener, por ejemplo, mediante el método de ortonormalización de Gram-Schmidt. Podemos expresar cada η_k y μ_k en términos de los φ_j y los ψ_l de manera que

$$\lambda = \sum_{j=1,l=1}^{N_1,N_2} c_{jl}(\varphi_j \otimes \psi_l) \text{ de manera que } c_{jl} \in \mathbb{C}.$$

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \sum_{j=1,l=1}^{N_1,N_2} c_{jl}(\varphi_j \otimes \psi_l), \sum_{i=1,m=1}^{N_1,N_2} c_{im}(\varphi_i \otimes \psi_m) \rangle =$$

$$\sum_{j=1,l=1,i=1,m=1}^{N_1,N_2} c_{jl}\overline{c_{im}} \langle (\varphi_j \otimes \psi_l), (\varphi_i \otimes \psi_m) \rangle =$$

$$\sum_{j=1,l=1,i=1,m=1}^{N_1,N_2} c_{jl}\overline{c_{im}} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \langle \psi_l, \psi_m \rangle =$$

$$\sum_{j=1,l=1}^{N_1,N_2} |c_{jl}|^2 \geq 0.$$

Además, $\langle \lambda, \lambda \rangle = 0 \Leftrightarrow c_{j,l} = 0$ para todo j, l, es decir, si λ es la forma 0. ■

Definición 3.15. Definimos la compleción de Σ bajo el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida en (3.1) como el **producto tensorial de n copias** de $\mathcal{H}$ y lo denotamos mediante $\otimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}$.

Proposición 3.16. Sean $\{\varphi_{k_1}^1\}_{k_1=1}^{\infty}, \ldots, \{\varphi_{k_n}^n\}_{k_n=1}^{\infty}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$. Entonces $\{\varphi_{k_1}^1 \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}^n : k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\otimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}$.

Demostración: Lo probamos para $n = 2$.
Sean $\{\varphi_k\}_{k_1=1}^{\infty}$ y $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$. El resultado se demostraría de forma idéntica si la dimensión de $\mathcal{H}$ es finita. $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}_{k,l=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal debido a que

$$\langle \varphi_k \otimes \psi_l, \varphi_{k'} \otimes \psi_{l'} \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_{k'} \rangle \langle \psi_l, \psi_{l'} \rangle = 1 \quad \text{si } (k, l) = (k', l')$$

y cero si $(k,l) \neq (k',l')$. Si probamos que $\Sigma \subset \overline{Span(\{\varphi_k \otimes \psi_l : k,l \in \mathbb{N}\})}$, el conjunto $\{\varphi_k \otimes \psi_l : k,l \in \mathbb{N}\}$ es denso en Σ. En consecuencia, es una base ortonormal. Sea $\varphi \otimes \psi \in \Sigma$. Como $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty}$ son bases ortonormales de $\mathcal{H}$ se cumple que $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ y que $\psi = \sum_{l=1}^{\infty} d_l \psi_l$ donde $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ y $\sum_{l=1}^{\infty} |d_l|^2 < \infty$.
Ahora bien, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se verifica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k d_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{l=1}^{\infty} |d_l|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Por ello,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k d_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k d_k|)(\sum_{l=1}^{\infty} |c_l d_l|) < \infty.$$

Por la identidad de Parseval el vector μ está bien definido:

$$\mu = \sum_{k=1,l=1}^{\infty} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l \in \overline{Span(\{\varphi_k \otimes \psi_l : k,l \in \mathbb{N}\})}.$$

Notemos que por la definición del producto interno en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$,

$$\|\varphi \otimes \psi\|^2 = \langle \varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle = \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2.$$

Por tanto, si llamamos $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$, $g_n = \sum_{l=1}^{n} d_l \psi_l$ tenemos $\|\varphi - f_n\| \longrightarrow 0$, $\|\psi - g_n\| \longrightarrow 0$. Así,

$$\|\varphi \otimes \psi - f_n \otimes g_n\| = \|\varphi \otimes \psi - f_n \otimes \psi + f_n \otimes \psi - f_n \otimes g_n\| \leq$$

$$\|(\varphi - f_n) \otimes \psi\| + \|f_n \otimes (\psi - g_n)\| = \|\varphi - f_n\|\|\psi\| + \|f_n\|\|\psi - g_n\| \longrightarrow 0.$$

Pero $f_n \otimes g_n = \sum_{k=1,l=1}^{n} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l \longrightarrow \mu$ si $n \longrightarrow \infty$. Luego $\mu = \varphi \otimes \psi$, que está en la adherencia de $Span(\{\varphi_k \otimes \psi_l : k,l \in \mathbb{N}\})$.

■

Definición 3.17. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y sea $\otimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}$ el espacio tensorial de n copias de $\mathcal{H}$. Definimos la aplicación $\otimes_{j=1}^{n} A : \otimes_{j=1}^{n} \mathcal{H} \longrightarrow \otimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}$ mediante

$$\otimes_{j=1}^{n} A(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) = A(\varphi_1) \otimes \cdots \otimes A(\varphi_n)$$

y lo extendemos de forma lineal.

Nota. Se cumple que $\otimes_{j=1}^n(AB) = (\otimes_{j=1}^n A)(\otimes_{j=1}^n B)$ dado que:

$$\otimes_{j=1}^n(AB)(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) = AB(\varphi_1) \otimes \cdots \otimes AB(\varphi_n) =$$
$$\otimes_{j=1}^n A(B(\varphi_1) \otimes \cdots \otimes B(\varphi_n)) = \otimes_{j=1}^n A(\otimes_{j=1}^n B(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)).$$

Proposición 3.18. El operador $\otimes_{j=1}^n A$ está bien definido y $\otimes_{j=1}^n A \in \mathcal{L}(\otimes_{j=1}^n \mathcal{H})$. Además, $\| \otimes_{j=1}^n A\| = \|A\|^n$.

Demostración: Supongamos que para $\lambda \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ existen dos representaciones

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i \otimes \psi_i = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \phi'_j \otimes \psi'_j$$

donde $c_i, d_j \in \mathbb{C}$ y $\phi_i, \phi'_j, \psi_i, \psi'_j \in \mathcal{H}$. Usando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt en los espacios generados por $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\phi'_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{\psi'_j\}_{j=1}^{\infty}$ obtenemos bases ortonormales $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\theta_l\}_{l=1}^{\infty}$ para cada espacio, respectivamente. Lo cual implica

$$\phi_i \otimes \psi_i = \sum_{k=1,l=1}^{\infty} \alpha_{kl}^i \eta_k \otimes \theta_l$$
$$\phi'_j \otimes \psi'_j = \sum_{k=1,l=1}^{\infty} \beta_{kl}^i \eta_k \otimes \theta_l$$

donde los $\alpha_{kl}^i, \beta_{kl}^i \in \mathbb{C}$. Reordenando la expresión de λ respecto de la nueva base $\{\eta_k \otimes \theta_l\}$ e igualando los coeficientes con el mismo elemento del par (k,l) de la base, obtenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{kl}^i = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \alpha_{kl}^j$.

Por tanto,

$$(A \otimes A)(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i \otimes \psi_i) = \sum_{k=1,l=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{kl}^i)(A\eta_k \otimes A\theta_l) =$$
$$\sum_{k=1,l=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} d_j \alpha_{kl}^j)(A\eta_k \otimes A\theta_l) = (A \otimes A)(\sum_{j=1}^{\infty} d_j \phi'_j \otimes \psi'_j).$$

En consecuencia, $A \otimes A$ está bien definido.
Que $A \otimes A$ es lineal se deduce por construcción de $A \otimes A$ y por las operaciones del producto tensorial.
Veamos que es acotado. Tomamos bases ortonormales $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ y la suma finita de elementos $\sum_{k=1,l=1}^{N_1,N_2} c_{kl} \phi_k \otimes \psi_l$ con $c_{kl} \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\|(A \otimes I) \sum_{k=1,l=1}^{N_1,N_2} c_{kl} \phi_k \otimes \psi_l\|^2 = \sum_{l=1}^{N_2} \| \sum_{k=1}^{N_1} c_{kl} A\phi_k\|^2 \leq \sum_{l=1}^{N_2} \|A\|^2 \sum_{k=1}^{N_1} |c_{kl}|^2 =$$
$$\|A\|^2 \| \sum_{k=1,l=1}^{N_1,N_2} c_{kl} \phi_k \otimes \psi_l\|^2.$$

Dado que las sumas finitas son densas en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ concluimos que $\|A \otimes I\| \leq \|A\|$. Como $A \otimes A = (A \otimes I)(I \otimes A)$,

$$\|A \otimes A\| \leq \|A \otimes I\| \|I \otimes A\| \leq \|A\|^2.$$

Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, existen vectores unitarios $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ tal que $\|A\phi\| \geq \|A\| - \varepsilon$ y $\|A\psi\| \geq \|A\| - \varepsilon$. Entonces

$$\|(A \otimes A)(\phi \otimes \psi)\| = \|A\phi\| \|A\psi\| \geq \|A\|^2 - \varepsilon\|A\| - \varepsilon\|A\| + \varepsilon^2.$$

Al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, $\|(A \otimes A)\| \geq \|A\|^2$. ∎

Nota. Si $x_j \in Ker(A)$ para algún j, se cumple que:

$$\otimes_{j=1}^n A(x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_n) = Ax_1 \otimes \cdots \otimes Ax_j \otimes \cdots \otimes Ax_n = \\ Ax_1 \otimes \cdots \otimes 0 \otimes \cdots \otimes Ax_n = 0$$

donde la última igualdad se deduce de la linealidad del producto tensorial. Por tanto, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_n \in Ker(\otimes_{j=1}^n A)$.

Ahora describiremos el espacio alternado de n copias de un espacio de Hilbert, que en realidad es un subespacio del espacio de Hilbert $\otimes_{j=1}^n \mathcal{H}$.

Definición 3.19. Sea S_n el n-ésimo grupo de permutaciones y sea $i(\sigma)$ el índice de la permutación $\sigma \in S_n$. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}$. Definimos $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \in \otimes_{j=1}^n \mathcal{H}$ mediante

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} i(\pi)(\varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)}).$$

Llamamos **n-ésimo espacio alternado de $\mathcal{H}$** a la adherencia en $\otimes_{j=1}^n \mathcal{H}$ del espacio generado por $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, es decir,

$$\Lambda^n(\mathcal{H}) := \overline{Span(\{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n : \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}\})}.$$

Nota. Dado que el número de elementos de S_n es finito entonces la definición de $\cdot \wedge \cdots \wedge \cdot$ tiene sentido. Además, notemos que el subespacio $\Lambda^n(\mathcal{H})$ es completo por ser un subespacio cerrado en un espacio de Banach.

Proposición 3.20. Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\langle \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n \rangle = \det(\langle \varphi_i, \eta_j \rangle_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}).$$

Recordamos que $\det((a_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}) = \sum_{\pi \in S_n} i(\pi)(a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)})$.

Demostración:

$$\langle \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n \rangle =$$

$$\langle \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} i(\pi)(\varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)}), \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma)(\eta_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \eta_{\sigma(n)}) \rangle =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} i(\pi) i(\sigma) \langle \varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)}, \eta_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \eta_{\sigma(n)} \rangle =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma) i(\pi) \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_{\pi(i)}, \eta_{\sigma(i)} \rangle.$$

Ahora bien, como todo $\pi \in S_n$ es una biyección, π^{-1} también es una biyección. Reordenando el productorio y debido a la conmutatividad del producto tenemos que $\prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_{\pi(i)}, \eta_{\sigma(i)} \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_{\sigma(\pi^{-1}(i))} \rangle$. El término anterior coincide con

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma) i(\pi) \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_{\sigma(\pi^{-1}(i))} \rangle.$$

A causa de que $i(\pi) = i(\pi^{-1})$ y $i(\sigma) i(\pi^{-1}) = i(\sigma\pi^{-1})$ se verifica que la suma anterior es igual a

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma\pi^{-1}) \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_{\sigma(\pi^{-1}(i))} \rangle.$$

Dado que para todo $\pi \in S_n$, $\underset{\sigma}{\{S_n\}} \longrightarrow \underset{\sigma\pi^{-1}}{\{S_n\}}$ es un isomorfismo de grupos, al variar σ recorremos todas las permutaciones. Por consiguiente, obtenemos

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma\pi^{-1}) \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_{\sigma(\pi^{-1}(i))} \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} i(\tau) \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_{\tau(i)} \rangle.$$

Finalmente, debido a que el cardinal de S_n es $n!$, el sumatorio anterior es equivalente a

$$\sum_{\tau \in S_n} i(\tau) \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_{\tau(i)} \rangle = \det(\langle \varphi_i, \eta_j \rangle_{i,j \in \{1,\dots,n\}}).$$

$\blacksquare$

Proposición 3.21. Si $\{e_k\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$, $E = \{e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_n}\}_{k_1 < \ldots < k_n}$ es un conjunto ortonormal en $\Lambda^n(\mathcal{H})$. Además, si $\{e_k\}$ es una base ortonormal, $\{e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_n}\}_{k_1 < \ldots < k_n}$ es una base ortonormal de $\Lambda^n(\mathcal{H})$.

Demostración: La caracterización producto interno de $\Lambda^n(\mathcal{H})$ mediante el determinante garantiza que el conjunto $E = \{e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_n}\}_{k_1 < \ldots < k_n}$ es ortonormal en $\Lambda^n(\mathcal{H})$. En efecto, $\|e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_n}\|^2 = \det(I_n) = 1$ donde I_n es la matriz identidad. Si $e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_n} \neq e_{k'_1} \wedge \ldots \wedge e_{k'_n}$ con $k_1 < \ldots < k_n$ y $k'_1 < \ldots < k'_n$, existe un vector $e_{k'_j}$ tal que $e_{k'_j} \neq e_{k_i}$ para todo i. Por tanto, la matriz $(\langle e_{k_i}, e_{k'_j}\rangle_{i,j\in\{1,\ldots,n\}})$ tiene una columna igual a cero y el determinante es nulo.
Supongamos ahora que $\{e_k\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Al ser el determinante de una matriz con alguna fila o columna igual cero, si tomamos el conjunto $\{e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}\}$ con algún elemento igual

$$\|e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_n}\|^2 = \det(\langle e_{k_i}, e_{k_j}\rangle_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}) = 0.$$

Luego, supongamos que $\{e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}\}$ son distintos. Entonces existe una permutación $\pi' \in S_n$ tal que $k_{\pi'(1)} < \cdots < k_{\pi'(n)}$. Por lo tanto ocurre que

$$e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi\in S_n} i(\pi)(e_{k_{\pi(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{k_{\pi(n)}}) =$$

Según lo explicado en la demostración de la proposición 3.20 esta suma es idéntica a

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi\in S_n} i(\pi\pi')(e_{k_{\pi(\pi'(1))}} \otimes \cdots \otimes e_{k_{\pi(\pi'(n))}}) =$$

$$i(\pi')\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi\in S_n} i(\pi)(e_{k_{\pi(\pi'(1))}} \otimes \cdots \otimes e_{k_{\pi(\pi'(n))}}) =$$

$$\pm e_{k_{\pi'(1)}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{\pi'(n)}}.$$

En consecuencia, $e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_n} \in Span(E)$ y
$Span(E) = Span(\{e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_n} : \forall e_{k_i} \in \{e_k\}\})$.
Ahora bien, si consideramos la aplicación $\Gamma : \otimes^n(\mathcal{H}) \longrightarrow \Lambda^n(\mathcal{H})$ definida mediante $\Gamma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$, ésta es lineal, continua y sobre. También es abierta en virtud del teorema de la aplicación abierta. Dado que por la proposición 3.16 $\{e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_n} : \forall e_{k_i} \in \{e_k\}\}$ es una base de Hilbert de $\otimes^n(\mathcal{H})$ y la aplicación Γ es sobreyectiva, el conjunto
$\{e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_n} : \forall e_{k_i} \in \{e_k\}\}$ es un sistema de generadores de
$Span(\{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n : \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}\})$. Entonces

$$\Lambda^n(\mathcal{H}) = \Gamma(\otimes^n(\mathcal{H})) = \Gamma(\overline{Span(\{e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_n} : \forall e_{k_i} \in \{e_k\}\})})$$

Al ser la aplicación Γ continua y cerrada esto es equivalente a

$$\overline{\Gamma(Span(\{e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_n} : \forall e_{k_i} \in \{e_k\}\}))}$$

Por ser lineal lo anterior coincide con

$$= \overline{Span(\Gamma(\{e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_n} : \forall e_{k_i} \in \{e_k\}\}))} =$$
$$= \overline{Span(\{e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_n} : \forall e_{k_i} \in \{e_k\}\})} =$$
$$= \overline{Span(E)}.$$

Por lo tanto, E es una base ortonormal. ■

Definición 3.22. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Denotamos mediante $\Lambda^n(A)$ a la restricción de $\otimes_{j=1}^n A$ al subespacio $\Lambda^n(\mathcal{H})$, es decir,

$$\Lambda^n(A) : \underset{\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n}{\otimes_{j=1}^n \mathcal{H}|_{\Lambda^n(\mathcal{H})}} \longrightarrow \underset{A(\varphi_1)\wedge\cdots\wedge A(\varphi_n)}{\otimes_{j=1}^n \mathcal{H}|_{\Lambda^n(\mathcal{H})}} = \underset{\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n}{\Lambda^n(\mathcal{H})} \longrightarrow \underset{A(\varphi_1)\wedge\cdots\wedge A(\varphi_n)}{\Lambda^n(\mathcal{H})}.$$

Corolario 3.23. Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se cumple que $\Lambda^n(A)$ está bien definida, que $\Lambda^n(A) \in \mathcal{L}(\Lambda^n(\mathcal{H}))$ y si $x_j \in Ker(A)$ para algún j, entonces $x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_n \in Ker(\Lambda^n(A))$. Además, tenemos que $\Lambda^n(AB) = (\Lambda^n A)(\Lambda^n B)$.

Demostración: Se deduce de la definición de $\Lambda^n(\mathcal{H})$, de la proposición 3.18 y de la nota siguiente a la proposición 3.18. ■

Proposición 3.24. Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces

$$\|\Lambda^n(A)\| = \sup_{x\in\Lambda^n(\mathcal{H}):\|x\|=1} \|\Lambda^n(A)(x)\| = \prod_{j=1}^n \mu_j[A].$$

Demostración: Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. A tiene asociada una base singular de $\mathcal{H}$, $S[A] = \{x_j[A]\} \cup \{w_j[A]\}$. Dicha base está construida en el teorema 1.10 y es ortonormal. Esta base verifica que $\{w_j[A]\}$ es base de $Ker(A)$. Además tenemos que $A(x_j[A]) = \mu_j[A]z_j[A]$ donde $\mu_j[A]$ es el j-ésimo valor singular y el conjunto $\{z_j[A]\}$ es un conjunto ortonormal.
Renumeramos $S[A]$ uniendo los vectores $x_j[A]$ y $w_j[A]$ en $e_k[A]$, pero de modo que si $x_i[A] = e_k[A]$ y $x_j[A] = e_l[A]$ y $i > j$, entonces $k > l$; esto es, conservando el orden de los $x_i[A]$. Dado que $\{e_j[A]\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $E = \{e_{k_1}[A] \wedge \ldots \wedge e_{k_n}[A]\}_{k_1<\ldots<k_n}$ es una base de $\Lambda^n(\mathcal{H})$. Por lo tanto,

$$\Lambda^n(A)(\sum_{k_1<\ldots<k_n}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} e_{k_1}[A] \wedge \ldots \wedge e_{k_n}[A]) =$$
$$= \sum_{k_1<\ldots<k_n}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} A(e_{k_1}[A]) \wedge \ldots \wedge A(e_{k_n}[A]).$$

Por la proposición 3.23, $\{w_j[A]\} \subset Ker(A)$, y dado que hemos supuesto que si $i > j$, $x_i[A] = e_k[A]$ y $x_j[A] = e_l[A]$, entonces $k > l$, si $k_1 < \ldots < k_n$ tenemos que $k'_1 < \ldots < k'_n$. Por tanto, la última expresión coincide con

$$\sum_{k'_1<\ldots<k'_n}^{\infty} a_{k'_1,\ldots,k'_n} A(x_{k'_1}[A]) \wedge \ldots \wedge A(x_{k'_n}[A]).$$

Por el teorema 1.2 esto es igual a

$$\sum_{k'_1<\ldots<k'_n}^{\infty} (\prod_{j=1}^{n} \mu_{k'_j}[A]) a_{k'_1,\ldots,k'_n} z_{k'_1}[A] \wedge \ldots \wedge z_{k'_n}[A].$$

Luego, como $\{z'_k[A]\}$ es un conjunto ortonormal, por el teorema 3.21

$$\{z_{k'_1}[A] \wedge \ldots \wedge z_{k'_n}[A]\}_{k_1<\ldots<k_n}^{\infty}$$

es un conjunto ortonormal de $\Lambda^n(\mathcal{H})$. Debido a la identidad de Parseval

$$\|\Lambda^n(A)(\sum_{k_1<\ldots<k_n}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} e_{k_1}[A] \wedge \ldots \wedge e_{k_n}[A])\|^2 = \sum_{k'_1<\ldots<k'_n}^{\infty} (\prod_{j=1}^{n} \mu_{k'_j}[A])^2 |a_{k'_1,\ldots,k'_n}|^2.$$

Supongamos que $\sum\limits_{k_1<\ldots<k_n}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} e_{k_1}[A] \wedge \ldots \wedge e_{k_n}[A]$ es un vector unitario. Esto conlleva a que

$$0 \leq \sum_{k'_1<\ldots<k'_n}^{\infty} |a_{k'_1,\ldots,k'_n}|^2 \leq \sum_{k_1<\ldots<k_n}^{\infty} |a_{k_1,\ldots,k_n}|^2 = 1.$$

Luego, al ser $\{\mu_j[A]\}$ una sucesión no creciente,

$$\sum_{k'_1<\ldots<k'_n}^{\infty} (\prod_{j=1}^{n} \mu_{k'_j}[A])^2 |a_{k'_1,\ldots,k'_n}|^2 \leq \sup_{k'_1<\ldots<k'_n} \sum_{k'_1<\ldots<k'_n}^{\infty} (\prod_{j=1}^{n} \mu_{k'_j}[A])^2 |a_{k'_1,\ldots,k'_n}|^2 \leq$$

$$\leq \sup_{k'_1<\ldots<k'_n} \sum_{k'_1<\ldots<k'_n}^{\infty} (\prod_{j=1}^{n} \mu_{k'_j}[A])^2 = (\prod_{j=1}^{n} \mu_j[A])^2.$$

Lo cual implica que

$$\|\Lambda^n(A)\| = \sup_{x\in\Lambda^n(\mathcal{H}):\|x\|=1} \|\Lambda^n(A)(x)\| \leq \prod_{j=1}^{n} \mu_j[A].$$

Ahora bien, si tomamos el vector unitario en $\Lambda^n(\mathcal{H})$ $x_1[A] \wedge \ldots \wedge x_n[A]$ se constata que

$$\|A(x_1[A] \wedge \ldots \wedge x_n[A])\| = \|(\prod_{j=1}^{n} \mu_j[A])z_1[A] \wedge \ldots \wedge z_n[A]\| = \prod_{j=1}^{n} \mu_j[A].$$

En conclusión, $\|\Lambda^n(A)\| \geq \prod_{j=1}^{n} \mu_j[A]$, es decir, $\|\Lambda^n(A)\| = \prod_{j=1}^{n} \mu_j[A]$. ■

Corolario 3.25. Sean $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[AB] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\mu_n[B]$.

Demostración: Es suficiente probar que para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que $\sum_{n=1}^{N} \mu_n[AB] \leq \sum_{n=1}^{N} \mu_n[A]\mu_n[B]$. Por el corolario 3.23, $\Lambda^n(AB) = (\Lambda^n(A))(\Lambda^n(B))$. Por tanto, como consecuencia de la submultiplicatividad de la norma de operador tenemos que $\|\Lambda^N(AB)\| \leq \|\Lambda^N(A)\|\|\Lambda^N(B)\|$. También debido a la proposición 3.24

$$\prod_{n=1}^{N} \mu_n[AB] = \|\Lambda^N(AB)\| = \|\Lambda^N(A)(\Lambda^N(B))\| \leq \|\Lambda^N(A)\|\|\Lambda^N(B)\| =$$
$$(\prod_{n=1}^{N} \mu_n[A])(\prod_{n=1}^{N} \mu_n[B]) = \prod_{n=1}^{N} \mu_n[B]\mu_n[A].$$

Dado que $\{\mu_n[AB]\}_{n=1}^{N}$ y que $\{\mu_n[A]\mu_n[B]\}_{n=1}^{N}$ son no crecientes y positivas se satisfacen las hipótesis del corolario 3.12. En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n[AB] \leq \sum_{n=1}^{N} \mu_n[A]\mu_n[B].$$

■

Teorema 3.3. Desigualdad de Hölder para normas de Schatten
Si $A \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$ para $1 \leq p, q \leq \infty$, entonces AB es un operador de Clase de Traza y $\|AB\|_1 \leq \|A\|_p\|B\|_q$.

Demostración: La desigualdad de Hölder para $p = 1$ y $q = \infty$ y $p = \infty$ y $q = 1$ está probada en el teorema 2.7. Supongamos p y q distintos de estos. Denotamos $\|\cdot\|_{\ell^p}$ la norma estándar en ℓ^p. En virtud del corolario 3.25 y la desigualdad de Hölder estándar de ℓ^p

$$\|AB\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[AB] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]\mu_n[B] = \|\{\mu_n[A]\mu_n[B]\}\|_{\ell^1} \leq \|\{\mu_n[A]\}\|_{\ell^p}\|\{\mu_n[B]\}\|_{\ell^q} = \|A\|_p\|B\|_q$$

■

Capítulo 4

Norma de Schatten y Completitud

Ahora es turno de probar la desigualdad de Minkowski para las normas de Schatten, y de esta forma comprobar que las normas de Schatten son una norma. Para ello probaremos el siguiente lema:

Lema 4.1. Sea $A \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ de modo que $1 < p < \infty$. Entonces

$$\|A\|_p = \sup_{\{B \in \mathcal{S}_q : \|B\|_q \leq 1\}} \|AB\|_1.$$

Demostración: De la desigualdad de Hölder 3.3 se deduce que si $\|B\|_q \leq 1$, entonces

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_p \|B\|_q \leq \|A\|_p.$$

Luego

$$\|A\|_p \geq \sup_{\{B \in \mathcal{S}_q : \|B\|_q \leq 1\}} \|AB\|_1$$

Veamos que el extremo se alcanza. Para ello tomaremos el operador $B = \frac{|A|^{p-1}}{\|A\|_p^{p-1}}$ donde $|A|$ es el operador positivo de la descomposición polar del teorema 1.10. Veamos que B está en $\mathcal{S}_q$ y tiene norma 1.
$|A|$ es autoadjunto y tiene como descomposición espectral

$$|A| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A] \langle \cdot, x_n[A] \rangle x_n[A].$$

Si tomamos algún $r \in \mathbb{N}$, como los vectores $\{x_j[A]\}$ son ortonormales y

$$|A|^r = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A] \langle |A|^{r-1}(\cdot), x_n[A] \rangle x_n[A] = \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n[A])^r \langle \cdot, x_n[A] \rangle x_n[A],$$

entonces $\mu_n[|A|^r] = \mu_n[A]^r$ y $x_n[|A|^r] = x_n[A]$ para todo $n \in \mathbb{N}$
Ahora bien, al ser $q = p/(p-1)$, $\|A\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]^p)^{\frac{1}{p}}$ y, por el teorema 2.8, $\mu_n[\alpha A] = \alpha\mu_n[A]$ cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\|B\|_q = \|\tfrac{|A|^{p-1}}{\|A\|_p^{p-1}}\|_q = (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[\tfrac{|A|^{p-1}}{\|A\|_p^{p-1}}]^q)^{\frac{1}{q}} = \tfrac{1}{\|A\|_p^{p-1}}(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]^p)^{\frac{p-1}{p}} = 1.$$

Finalmente,

$$\|AB\|_1 = \tfrac{1}{\|A\|_p^{p-1}}\|A|A|^{p-1}\|_1 = \tfrac{1}{\|A\|_p^{p-1}}\|U|A|^p\|_1$$

donde U es la isometría parcial asociada al operador A deducida del teorema 1.10. Por el teorema 2.7 se verifica que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n[U|A|^p] \leq \|U\|\mu_n[|A|^p] = \mu_n[A]^p.$$

Además,

$$\|U|A|^p(x_n[A])\| = \|\mu_n[A]^p U(x_n[A])\| = \mu_n[A]^p\|z_n[A]\| = \mu_n[A]^p.$$

Debido a que $\mu_n[X] = \|X|_{\{x_1[A],.,x_{n-1}[A]\}^\perp}\|$,

$$\mu[\frac{A|A|^{p-1}}{\|A\|_p^{p-1}}] = \frac{1}{\|A\|_p^{p-1}}\mu_n[A]^p.$$

Finalmente,

$$\|AB\|_1 = \tfrac{1}{\|A\|_p^{p-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[A]^p = \tfrac{1}{\|A\|_p^{p-1}}\|A\|_p^p = \|A\|_p.$$

■

Teorema 4.2. Desigualdad de Minkowski para normas de Schatten Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ para cualquier $1 \leq p < \infty$. Entonces $\|A_1 + A_2\|_p \leq \|A_1\|_p + \|A_2\|_p$.

Demostración: Para $1 \leq p < \infty$, por el lema 4.1 y dado que $\|\cdot\|_1$ es una norma obtenemos que

$$\|A_1 + A_2\|_p = \sup_{\{B\in\mathcal{S}_q:\|B\|_q\leq 1\}} \|(A_1 + A_2)B\|_1 \leq$$

$$\sup_{\{B\in\mathcal{S}_q:\|B\|_q\leq 1\}} (\|A_1B\|_1 + \|A_2B\|_1) \leq$$

$$\leq \sup_{\{B\in\mathcal{S}_q:\|B\|_q\leq 1\}} (\|A_1B\|_1) + \sup_{\{B\in\mathcal{S}_q:\|B\|_q\leq 1\}} (\|A_2B\|_1) \leq$$

$$\|A_1\|_p + \|A_2\|_p.$$

■

Teorema 4.3. La p-ésima norma de Schatten es un norma vectorial.

La demostración es trivial por el teorema 2.8 y por la desigualdad de Minkowski para normas de Schatten.

Teorema 4.4. $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $\{A_k\} \subset \mathcal{S}_p \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ una sucesión de Cauchy para la norma de $\mathcal{S}_p$ para todo $1 \leq p < \infty$. Dado que para todo $X \in \mathcal{S}_p$

$$\|X\|_p \geq \|X\|$$

$\{A_k\}$ es una sucesión de Cauchy para la norma del operador. Al ser $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ de Banach, existe $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \|A - A_k\| = 0$. Veamos que $A \in \mathcal{S}_p$.
Para cualquier $\varepsilon > 0$, elegimos $M \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|A_{k_1} - A_{k_2}\|_p < \varepsilon \quad \text{para todo } k_1, k_2 > M.$$

Supongamos que $K > M$ y que $\|A - A_K\|_p > \varepsilon$ (pudiendo ser infinito). Para algún $N \in \mathbb{N}$ y $d > 0$ se tiene que

$$(\sum_{n=1}^{N} \mu_n[A - A_K]^p)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon + d.$$

Debido a que $\lim\limits_{k\to\infty} \|A - A_k\| = 0$ podemos elegir $J > M$ natural de modo que $\|A - A_J\| < \frac{d}{N^{\frac{1}{p}}}$.
Ahora nos reducimos al caso finito. Sea P_N la proyección sobre

$$C = Span(z_1[A - A_K], \dots, z_N[A - A_K]).$$

Entonces

$$\mu_n[P_N(A - A_K)] = \mu_n[A - A_K] \text{ para todo } 1 \leq n \leq N.$$

También, como

$$\|P_N(A - A_J)\| < \frac{d}{N^{\frac{1}{p}}}$$

tenemos que

$$\mu_n[P_N(A - A_J)] < \tfrac{d}{N^{\frac{1}{p}}} \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Además, puesto que $P_N(A-A_J)|_{C^\perp} = 0$ se verifica que $\mu_{N+1}[P_N(A-A_J)] = 0$. En consecuencia, $\{\mu_n[P_N(A-A_J)]\}_n$ es no creciente y nula para toda $n > N$. Por tanto,

$$\|P_N(A - A_J)\|_p = (\sum_{n=1}^{N} \mu_n[P_N(A - A_J)]^p)^{\frac{1}{p}} < (\sum_{n=1}^{N} \tfrac{d^p}{N})^{\frac{1}{p}} = d.$$

Sin embargo, se tiene también la desigualdad $\|P_N(A_J - A_K)\|_p < \varepsilon$. Esto es debido al teorema 2.7, al hecho de que la sucesión $\{A_k\}$ es de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_p$ y a que si $J, K > M$

$$\|P_N(A_J - A_K)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n[P_N(A_J - A_K)]^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$(\sum_{n=1}^{\infty} \|P_N\|^p \mu_n[A_J - A_K]^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|A_J - A_K\|_p < \varepsilon.$$

Esto produce una contradicción dado que, por a Desigualdad de Minkowski para normas de Schatten,

$$d + \varepsilon = \|P_N(A - A_K)\|_p \leq \|P_N(A - A_K)\|_p + \|P_N(A_J - A_k)\|_p < d + \varepsilon.$$

Por tanto, se cumple que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $K > M$

$$\|A - A_K\|_p \leq \varepsilon,$$

luego

$$\lim_{k\to\infty} \|A - A_K\|_p = 0.$$

Así que A es límite de $\{A_k\}$ en $\mathcal{S}_p$. Ahora bien, dado que Desigualdad de Minkowski para normas de Schatten es cierta, se cumple la segunda desigualdad triangular, es decir, para todo $A, B \in \mathcal{S}_p$

$$|\|A\|_p - \|B\|_p| \leq \|A - B\|_p.$$

Si tomamos K grande de manera que $\|A - A_K\|_p \leq 1$, por lo tanto,

$$\|A\|_p < 1 + \|A_K\|_p < \infty$$

y $A \in \mathcal{S}_p$. En conclusión, $\mathcal{S}_p$ es completo. ∎

Definición 4.5. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge hacia 0. Consideramos la sucesión $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ como la extensión de la definición 3.4 a una sucesión.

Nota. Si $p, q \in (1, \infty), p < q$, se verifican las siguientes contenciones:

$$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$$

donde mediante c representamos al conjunto de las sucesiones convergentes, por c_0 al conjunto de sucesiones que convergen hacia 0, y por c_{00} al conjunto de las sucesiones con un número finito de términos no nulos.

La siguiente proposición relaciona los espacios ℓ^p y los espacios $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$. Haremos las demostraciones que no consideremos obvias.

Proposición 4.6. Inmersión de $\ell^p \subset \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$
Consideremos el operador $T_\alpha : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definido mediante $T_\alpha(y) = \{\alpha_n y_n\}_{n=1}^\infty$ para todo $y \in \mathcal{H}$. Entonces:

a) T_α lleva ℓ^2 en ℓ^2 si, y sólo, si $\alpha \in \ell^\infty$. Además es acotado y $\|T_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

b) T_α es compacto si, y sólo, si $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Además $T_\alpha^*(y) = \{\overline{\alpha_n} y_n\}_{n=1}^\infty$.

c) T_α es siempre normal ($T_\alpha T_\alpha^* = T_\alpha^* T_\alpha$). T_α es autoadjunto si, y sólo, si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

d) $T_\alpha \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ si, y sólo, si $\alpha \in \ell^p$. Además, $\|T_\alpha\|_p = \|\alpha\|_p$.

e) $T_\beta T_\alpha(y) = \{\beta_n \alpha_n y_n\}_{n=1}^\infty = T_\alpha T_\beta(y)$.

f) La desigualdad de Hölder

$$\|T_\beta T_\alpha\|_1 \leq \|T_\alpha\|_p \|T_\beta\|_q$$

equivale a

$$\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n \beta_n| \leq \|\alpha\|_{\ell^p} \|\beta\|_{\ell^q}.$$

Esto es, la desigualdad de Hölder para sucesiones.

g) La desigualdad de Minkowski

$$\|T_\beta + T_\alpha\|_p = \|T_{\beta+\alpha}\|_p \leq \|T_\alpha\|_p + \|T_\beta\|_p$$

equivale a

$$\|\beta + \alpha\|_{\ell^p} \leq \|\alpha\|_{\ell^p} + \|\beta\|_{\ell^p}.$$

Esto es, la desigualdad de Minkowsky para sucesiones.

Demostración:

a) Supongamos que $T_\alpha(y) \in \ell^2$ para todo $y \in \ell^2$. Veamos que $\alpha \in \ell^\infty$. Si $\alpha \notin \ell^\infty$, tomando el vector $e_n = (0, \ldots, \underbrace{1}_{n}, \ldots, 0, \ldots)$ tenemos que

$$|\alpha_n| = |T_\alpha(e_n)| \leq \|T\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que T no está acotado y esto es absurdo. Por lo tanto, $\alpha \in \ell^\infty$.

b) Demostraremos que T_α es compacto si, y sólo, si $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$. Supongamos que T_α es compacto. Veamos que la sucesión $\{\alpha_n^*\}_{n=1}^\infty$ es la sucesión de los valores singulares. Sea σ la permutación que reordena la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ de forma que $\alpha_{\sigma(n)} = \alpha_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea $\{\alpha_{n'}\}_{n'=1}^\infty$ la subsucesión de $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ de los elementos que son distintos de cero. Entonces

$$T_\alpha(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n = \sum_{n'=1}^{\infty} |\alpha_{n'}| \langle \cdot, \frac{|\alpha_{n'}|}{\alpha_{n'}} e_{n'} \rangle e_{n'}.$$

Si consideramos los vectores $e_{\sigma(n)} = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\sigma(n)}, \ldots, 0, \ldots)$, la descomposición canónica de T_α es:

$$T_\alpha = \sum_{n'=1}^{\infty} |\alpha_{n'}^*| \langle \cdot, \frac{|\alpha_{n'}^*|}{\alpha_{n'}^*} e_{\sigma(n')} \rangle e_{\sigma(n')}. \tag{4.1}$$

En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$.
La equivalencia se deduce de la proposición 1.17 y la fórmula (4.1).
Para todo $v, w \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$\langle T_\alpha(v), w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \overline{w_n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \overline{\overline{\alpha_n} w_n} = \langle v, T_\alpha^*(w) \rangle.$$

A partir de la caracterización de los valores singulares anterior las demás propiedades son triviales.

∎

Bibliografía

[1] R. SCHATTEN, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators,* Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete **27**, Springer-Verlag, Heildelberg 1960

[2] N. DUNFORD, J.T. SCHWARZ,*Linear Operators II,* J. Wiley and Sons, New York 1963

[3] I. C. GOH'BERG, M. G. KREIN, *Introduction to the theory of linear nonself adjoint operatoperators,* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, American Mathematical Society,Providence, RI, 1969.

[4] MICHAEL REED, BARRY SIMON, *Methods Of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis (Revised and Enlarged Edition)*, Academic Press, INC. 1980.

[5] BARRY SIMON, *Trace Ideals and Their Applications, Second Edition,* Mathematical Surveys and Monographs **120** American Mathematical Society, 2005

[6] MICHAEL REED, BARRY SIMON, *Methods Of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, INC. 1975.

[7] JOHN B. CONWAY,*A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Springer. 1990.

[8] JORDY GREENBLATT *Presentation on Singular Value Decomposition and Schatten-Classes* URL: http://www.math.ucla.edu/ jsg66