



**Universidad de Valladolid**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES**

**Grado en Ingeniería Mecánica**

**Modelado, prototipaje y caracterización de  
una maqueta de una chimenea con  
propiedades mecánicas configurables**

**Autor: González García, Álvaro**

**Tutor: Lorenzana Ibán, Antolín**

**Cotutor: González Magdaleno, Álvaro**

**Departamento: Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería  
del Terreno, Mecánica de los medios continuos y Teoría de  
Estructuras.**

**Valladolid, Junio de 2017.**



## **Resumen**

Este trabajo está fundamentado en el diseño y fabricación de una maqueta de laboratorio a escala, que simula una chimenea industrial o cualquier tipo de estructura con una geometría similar para posteriormente realizar un análisis modal para caracterizar dicha maqueta. También se lleva a cabo la construcción de un sistema auxiliar resonante para caracterizarlo y por último realizar la caracterización conjunta de la maqueta de la chimenea más el sistema auxiliar.

Durante el trabajo se detallan los pasos seguidos para el diseño y fabricación de la maqueta y sus componentes, descripción de los modelos analíticos y modelos simulados utilizados para la caracterización, métodos de medición empleados y tratamiento de datos.

Por último se exponen los resultados conseguidos experimentalmente, simuladamente y teóricamente para ser comparados y obtener conclusiones. Así se da por finalizado la caracterización de la estructura para posibles futuras aplicaciones.

## **Palabras clave**

Modelo a escala, montaje en laboratorio, medida de modos propios, formulación del problema de autovalores, técnicas de ajuste de modelos.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta  
de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## ÍNDICE

Resumen.....	1
ÍNDICE.....	3
ÍNDICE DE FIGURAS .....	5
ÍNDICE DE TABLAS .....	8
ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	10
Capítulo 1. Introducción.....	13
1.1 Objetivos.....	13
1.2 Organización del documento .....	14
Capítulo 2. Diseño experimental soporte y viga .....	17
2.1 Diseño del soporte .....	17
2.1.1 Diseño del soporte opción 1.....	18
2.1.2 Diseño del soporte opción 2.....	19
2.2 Diseño de la viga.....	20
2.2.1 Modificaciones en la viga .....	28
2.2.2 Viabilidad de las modificaciones .....	29
2.3 Rediseño del soporte.....	33
2.4 Diseño definitivo del soporte .....	34
Capítulo 3. Descripción, fabricación y montaje de la maqueta .....	39
3.1 Fabricación de la maqueta .....	39
3.1.1 Base.....	39
3.1.2 Viga .....	40
3.1.3 Casquillo inferior.....	40
3.1.4 Resorte.....	41
3.1.5 Casquillo superior .....	42
3.2 Montaje de la maqueta .....	43
Capítulo 4. Descripción, fabricación y montaje de los sistemas TMD's.....	47
Capítulo 5. Dispositivos y proceso de medida .....	53
5.1 Iniciación en el método experimental.....	53

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta  
de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

5.2 Instrumentos de medida .....	55
5.3 Dispositivo de procesamiento de la señal .....	56
5.4 Configuración del software.....	57
Capítulo 6. Movimiento oscilatorio .....	63
6.1 Vibración libre.....	64
6.1.1 Ecuaciones de movimiento-Frecuencia natural.....	64
6.2 Sistemas de 2 grados de libertad.....	66
6.2.1 Ecuaciones del movimiento: Formulación matricial.....	67
6.2.2 Vibraciones libres no amortiguadas: Modos de vibración ..	69
Capítulo 7. Dinámica de la rotación .....	73
7.1 Energía cinética rotacional. Momento de inercia .....	73
7.2 Momento angular .....	74
7.3 Segunda ley de Newton para la rotación. Sistemas de partículas.....	75
Capítulo 8. Caracterización del sistema TMD.....	79
8.1 Modelo analítico. Expresión exacta.....	79
8.1.1 Aproximación matricial .....	81
8.1.2 Aproximación por solido rígido.....	86
8.2 Modelo experimental .....	91
8.3 Modelo simulado. Cosmos .....	94
Capítulo 9. Caracterización de la Chimenea.....	99
9.1 Modelo analítico .....	99
9.2 Modelo experimental.....	105
9.3 Modelo simulado. Cosmos .....	110
Capítulo 10. Caracterización de la Chimenea más el sistema TMD .....	115
10.1 Modelo analítico .....	115
10.2 Modelo experimental .....	122
10.3 Modelo simulado. Cosmos .....	125
Capítulo 11. Resultados .....	131
11.1 Caracterización del sistema TMD .....	131
11.1.1 Modelo analítico .....	131

11.1.2 Modelo experimental .....	138
11.1.3 Modelo simulado .....	139
11.2 Caracterización de la chimenea .....	142
11.2.1 Modelo experimental .....	143
11.2.2 Modelo analítico .....	145
11.2.3 Modelo simulado .....	161
11.3 Caracterización de la chimenea más el sistema TMD .....	166
11.3.1 Modelo analítico .....	166
11.3.2 Modelo experimental .....	170
11.3.3 Modelo simulado .....	171
Capítulo 12. Conclusiones, trabajo futuro .....	175
Capítulo 13. Bibliografía .....	177
ANEXO A .....	179
ANEXO B .....	183
ANEXO C .....	185
ANEXO D .....	187
ANEXO E .....	189
ANEXO F .....	193
ANEXO G .....	195
ANEXO H .....	197

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Chimenea industrial con TMD pendular.....	14
Figura 2. Diseño soporte opción 1 .....	18
Figura 3. Diseño soporte opción 2 .....	19
Figura 4. Viga empotrada con carga uniforme .....	21
Figura 5. Rediseño soporte opción 1 .....	33
Figura 6. Detalle unión resorte-base.....	35

Figura 7. Detalle unión casquillo-resorte .....	36
Figura 8. Diseño definitivo del soporte .....	36
Figura 9. Base.....	39
Figura 10. Viga .....	40
Figura 11. CAD e impresión 3D del casquillo inferior .....	40
Figura 12. Resorte.....	41
Figura 13. Detalle del acoplamiento.....	42
Figura 14. CAD e impresión 3D del casquillo superior .....	42
Figura 15. Detalle apoyos .....	43
Figura 16. Unión resorte-base .....	44
Figura 17. Unión tubo-casquillo inferior .....	44
Figura 18. Unión dos subconjuntos .....	45
Figura 19. Maqueta de la chimenea .....	45
Figura 20. Sistema TMD pendular .....	48
Figura 21. Varilla del TMD a flexión.....	49
Figura 22. Casquillo y varilla del TMD a flexión.....	49
Figura 23. Masa puntual del TMD a flexión.....	50
Figura 24. Unión de la masa puntual y la varilla del TMD a flexión .....	50
Figura 25. Sistema TMD a flexión .....	50
Figura 26. Toma de datos experimentales de la chimenea.....	53
Figura 27. Toma de datos experimentales del sistema TMD a flexión .....	54
Figura 28. Toma de datos experimentales de la chimenea más el TMD a flexión .....	54
Figura 29. Distanciómetro láser .....	55
Figura 30. Detalle conector D-SUB .....	55
Figura 31. Detalle conexión alimentación al láser.....	56
Figura 32. Sirius HD-STG .....	56
Figura 33. Registro de datos procesado .....	57
Figura 34. Interface del software para selección del láser.....	58
Figura 35. Interface del software para la calibración del láser .....	58
Figura 36. Detalle de la interface en la calibración del láser.....	59



Figura 37. Añadir pantalla FFT .....	60
Figura 38. Detalle de la precisión en la frecuencia natural.....	61
Figura 39. Sistema masa-resorte y diagrama de cuerpo libre .....	65
Figura 40. Sistemas mecánicos con 2 gdl.....	67
Figura 41. Sistema con 2 gdl .....	68
Figura 42. Sólido rígido rotando con velocidad $w$ .....	74
Figura 43. Fuerzas internas en sistema de dos partículas .....	75
Figura 44. Momento angular de un sólido rígido .....	76
Figura 45. Viga en voladizo (TMD) .....	79
Figura 46. Grados de libertad del sistema TMD.....	82
Figura 47. Modelo de sólido rígido del sistema TMD .....	86
Figura 48. Grado de libertad del modelo de sólido rígido (sistema TMD) .....	87
Figura 49. Diagrama de sólido libre (sistema TMD).....	88
Figura 50. Modelo experimental del sistema TMD.....	92
Figura 51. Báscula.....	93
Figura 52. Datos experimentales del sistema TMD .....	93
Figura 53. Postprocesado geométrico del sistema TMD .....	95
Figura 54. Mallado del sistema TMD .....	95
Figura 55. Deformada del sistema TMD .....	96
Figura 56. Tabla de resultados del Cosmos (sistema TMD) .....	96
Figura 57. Modelo analítico de la chimenea .....	99
Figura 58. Grado de libertad del modelo analítico de la chimenea.....	100
Figura 59. Diagrama de sólido libre de la chimenea .....	101
Figura 60. Modelo experimental de la chimenea .....	106
Figura 61. Modelo experimental de la chimenea con masa puntual .....	108
Figura 62. Datos experimentales de la chimenea .....	109
Figura 63. Postprocesado geométrico del sistema chimenea .....	110
Figura 64. Mallado de las tres secciones de la chimenea sin masa puntual .....	111
Figura 65. Mallado de las tres secciones de la chimenea con masa puntual .....	112
Figura 66. Deformada de la chimenea .....	113

Figura 67. Tabla de resultados del Cosmos (sistema chimenea) .....	114
Figura 68. Modelo analítico de la chimenea más el sistema TMD .....	115
Figura 69. Sistema de 2 gdl.....	116
Figura 70. Chimenea más resorte con masa puntual (simplificación del TMD). 118	
Figura 71. Diagrama de sólido libre de la masa puntual .....	118
Figura 72. Diagrama de sólido libre de la chimenea .....	119
Figura 73. Nuevo gdl en el sistema chimenea más resorte-masa puntual (TMD).....	121
Figura 74. Modelo experimental de la chimenea con el sistema TMD.....	123
Figura 75. Datos experimentales de la chimenea más sistema TMD.....	124
Figura 76. Postprocesado geométrico de la chimenea más el sistema TMD.....	126
Figura 77. Mallado de la chimenea más el sistema TMD .....	127
Figura 78. Deformada del sistema conjunto (modo 1 de vibración derecha) ...	128
Figura 79. Tabla de resultados del Cosmos (sistema conjunto).....	128
Figura 80. Deformada del sistema conjunto (modo 1 de vibración izquierda)..	129
Figura 81. Modelo experimental del sistema TMD pendular.....	197
Figura 82. Datos experimentales del sistema TMD pendular .....	198
Figura 83. Modelo experimental de la chimenea más el sistema TMD pendular.....	199
Figura 84. Datos experimentales de la chimenea más el sistema TMD pendular.....	199

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Parámetros del sistema TMD.....	132
Tabla 2. Valores de la masa puntual en el sistema TMD.....	132
Tabla 3. Resultados de la caracterización del TMD ('expresión exacta') .....	133
Tabla 4. Resultados de la caracterización del TMD ('aproximación matricial') .	134
Tabla 5. Resultados caracterización TMD ('aprox. Sólido rígido con efecto de $g'$ ) .....	134
Tabla 6. Resultados caracterización TMD ('aprox. Sólido rígido sin efecto de $g'$ ) .....	135

Tabla 7. Influencia de la gravedad en la rigidez (sistema TMD) .....	137
Tabla 8. Error en la frecuencia natural por efecto de la gravedad (sistema TMD) .....	137
Tabla 9. Resultados caracterización sistema TMD (modelo experimental) .....	138
Tabla 10. Resultados caracterización sistema TMD (modelo simulado) .....	139
Tabla 11. Resultados caracterización sistema TMD (modelo simulado ajustado) .....	141
Tabla 12. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental).....	143
Tabla 13. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental).....	143
Tabla 14. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental).....	144
Tabla 15. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental).....	144
Tabla 16. Parámetros del sistema chimenea .....	145
Tabla 17 Resultados de $K_{\theta}$ (promedio).....	146
Tabla 18. Resultados caracterización chimenea (1 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	148
Tabla 19. Resultados caracterización chimenea (1 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	149
Tabla 20. Resultados caracterización chimenea (1 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	149
Tabla 21. Resultados caracterización chimenea (1 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	149
Tabla 22. Resultados caracterización chimenea (2 <sup>o</sup> caso modelo analítico) .....	150
Tabla 23. Resultados caracterización chimenea (2 <sup>o</sup> caso modelo analítico) .....	150
Tabla 24. Resultados caracterización chimenea (2 <sup>o</sup> caso modelo analítico) .....	151
Tabla 25. Resultados caracterización chimenea (2 <sup>o</sup> caso modelo analítico) .....	151
Tabla 26. Resultados caracterización chimenea (3 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	153
Tabla 27. Resultados caracterización chimenea (3 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	153
Tabla 28. Resultados caracterización chimenea (3 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	153
Tabla 29. Resultados caracterización chimenea (3 <sup>er</sup> caso modelo analítico) .....	154
Tabla 30. Influencia de la gravedad en la rigidez (sistema chimenea) .....	157
Tabla 31. Influencia de la gravedad en la rigidez (sistema chimenea) .....	157
Tabla 32. Influencia de la gravedad en la rigidez (sistema chimenea) .....	158
Tabla 33. Influencia de la gravedad en la rigidez (sistema chimenea) .....	159
Tabla 34. Error cometido al despreciar la gravedad (sistema chimenea) .....	159
Tabla 35. Error cometido al despreciar la gravedad (sistema chimenea) .....	160

Tabla 36. Error cometido al despreciar la gravedad (sistema chimenea).....	160
Tabla 37. Error cometido al despreciar la gravedad (sistema chimenea).....	161
Tabla 38. Resultados caracterización de la chimenea (modelo simulado) .....	162
Tabla 39. Resultados caracterización de la chimenea (modelo simulado) .....	162
Tabla 40. Resultados caracterización de la chimenea (modelo simulado) .....	162
Tabla 41. Resultados caracterización de la chimenea (modelo simulado) .....	163
Tabla 42. Parámetros chimenea más sistema TMD (modelo analítico).....	167
Tabla 43. Rigidez del resorte que sustituye al sistema TMD.....	168
Tabla 44. Resultados caracterización sistema conjunto (modelo analítico).....	169
Tabla 45. Resultados caracterización sistema conjunto (modelo experimental).....	170
Tabla 46. Resultados caracterización sistema conjunto (modelo simulado).....	171

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Resultados caracterización TMD (modelo analítico) .....	135
Gráfico 2. Resultado caracterización sistema TMD.....	140
Gráfico 3. Resultados caracterización sistema TMD (modelos con efecto de g).....	142
Gráfico 4. Rigidez del resorte en función de las espiras activas.....	147
Gráfico 5. Caracterización chimenea modelo analítico (1 <sup>er</sup> y 2 <sup>o</sup> caso).....	152
Gráfico 6. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (ninguna tuerca) .....	154
Gráfico 7. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (1 tuerca) .....	155
Gráfico 8. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (2 tuercas).....	155
Gráfico 9. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (3 tuercas).....	156
Gráfico 10. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (ninguna tuerca) .....	163
Gráfico 11. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (1 tuerca) .....	164

Gráfico 12. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (2 tuercas) .....	164
Gráfico 13. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (3 tuercas) .....	165
Gráfico 14. Resultado caracterización chimenea más sistema TMD.....	172

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta  
de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## Capítulo 1. Introducción

---

La construcción y utilización de estructuras esbeltas tiene como principal inconveniente la vulnerabilidad ante cualquier excitación. El problema se acentúa si se usan materiales ligeros de alta resistencia, porque de ese modo las estructuras son más livianas y flexibles lo que provoca que sean más sensibles todavía ante cualquier excitación del entorno como puede ser el viento o movimientos sísmicos.

En relación al viento, cuando este incide sobre un obstáculo, en este caso de estudio sobre una chimenea industrial (figura 1), suelen producirse vórtices detrás del mismo. Este fenómeno también ocurre si el obstáculo se mueve con cierta velocidad dentro del seno del fluido. Los vórtices que se forman detrás del obstáculo son arrastrados por el aire y se van desprendiendo alternativamente a un lado y a otro en la dirección del viento.

Cada vez que se produce un desprendimiento de un torbellino o vórtice, la chimenea recibe un impulso en la dirección perpendicular al flujo y hacia el lado opuesto en donde se forma el vórtice. Así la chimenea se dobla ligeramente hacia un lado y debido a su comportamiento elástico intenta recuperar su posición de equilibrio doblándose ligeramente hacia el lado opuesto. Una vez que se producen las primeras oscilaciones provocadas por el desprendimiento del vórtice y del comportamiento elástico de la chimenea, el movimiento oscilatorio de la misma continúa por inercia.

Como consecuencia se producen vibraciones no deseables causantes de posibles fallos estructurales, disminución de la vida útil, molestias en los usuarios o fallos en los equipos incorporados en la estructura. De ahí la importancia de caracterizar este tipo de estructuras de forma experimental para conocer los posibles fallos que se pueden presentar dependiendo del lugar donde se construya o utilice.

### 1.1 Objetivos

Como condición de diseño se ha impuesto que la maqueta tiene que ser configurable en su primera frecuencia propia y en su masa, de tal manera que se pueda hacer vibrar a cualquier frecuencia (dentro de un rango) y su masa efectiva en el extremo superior se pueda también ajustar. Con ello se pretende disponer de una maqueta sobre la que instalar sistemas de control pasivo de

vibraciones de tipo TMD (*tuned mass damper*) o TLD (*tuned liquid damper*). El TMD puede consistir en un sistema pendular o en un sistema flexible. El TLD suele consistir en un depósito con una cierta cantidad de líquido. El péndulo, el sistema flexible o el líquido deben tener frecuencias de vibración cercanas a la frecuencia de la chimenea (es decir, se acopla un mecanismo resonante). Además debe incorporar algún elemento amortiguador que disipe energía. Sea TMD o TLD, en su instalación se modifica la masa en el extremo de la chimenea y por tanto su frecuencia, de ahí la conveniencia tener caracterizada la maqueta.

El principal objetivo de este trabajo final de grado (TFG) es conseguir la caracterización de dicha maqueta de laboratorio que simula una chimenea industrial o cualquier estructura de geometría similar, la caracterización simplificada del sistema de control pasivo de vibraciones, que en este trabajo se trata de un sistema tipo TMD, y la caracterización de la estructura al completo.

Por tanto, en primer lugar se diseña y se construye la maqueta y el sistema TMD que van a ser objeto de estudio, seguidamente se realizan las caracterizaciones de forma experimental, simulada y teórica de la maqueta, del TMD y del conjunto de la maqueta más el TMD y por último se equiparan los resultados obtenidos y se extraen las conclusiones.

Nótese que a lo largo de este documento se entenderá por TMD la parte fundamental del sistema (rigidez y masa). Por dificultades de materialización no se ha considerado la posibilidad de regular el amortiguamiento, resultando un sistema de control pasivo de vibraciones cuyo amortiguamiento es solo el estructural.



**Figura 1. Chimenea industrial con TMD pendular**



## **1.2 Organización del documento**

El trabajo se divide en tres partes, la primera está relacionada con el diseño y el proceso de prototipaje de la maqueta y sus diferentes componentes y el diseño y prototipaje del TMD. La segunda parte tiene que ver con los dispositivos y el proceso de medida y con la explicación de los tres modelos llevados a cabo, experimental, analítico y simulado con sus respectivos resultados y por último se presentan las conclusiones y las directrices futuras.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## Capítulo 2. Diseño experimental del soporte y de la viga

---

El diseño de la maqueta se basa en la idea de una viga en voladizo empotrada en uno de sus dos extremos. Para ello se diseña una maqueta que se compone de dos elementos principales, la propia viga y el soporte que simula el empotramiento.

Para llevar a cabo la caracterización de la chimenea se necesita alterar el estado de equilibrio de la misma. La idea inicial y principal para realizar dicha excitación es mediante una corriente de aire, es decir, mediante viento. A pesar de esta idea inicial, se tiene en cuenta poder realizar dicha excitación de diferentes formas. Estas posibilidades son, una mesa vibrante simulando un movimiento sísmico o un pequeño empujón para sacarla de su posición de equilibrio, que como se verá más adelante es el método que se ha utilizado para realizar dicha caracterización.

Con la opción de excitar la chimenea mediante una mesa vibrante se limita de cierta manera los posibles diseños del soporte, porque el empotramiento se hará efectivo en dicha mesa. Por tanto el soporte tendrá que estar en concordancia con la geometría de la mesa para poder llevar a cabo dicho empotramiento entre soporte y mesa.

A pesar de esta primera idea que es la principal, se diseñará el soporte para que se pueda colocar en distintos emplazamientos y poder provocar la excitación de la viga de diferentes formas.

### 2.1 Diseño del soporte

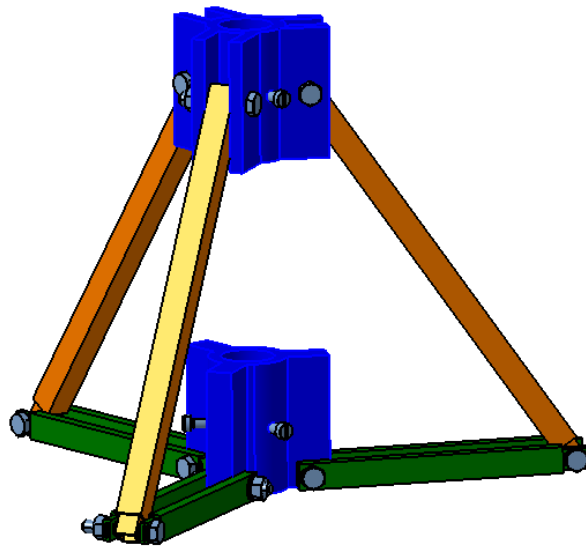
Para el diseño de este primer elemento de la maqueta se toma la idea de los soportes tipo trípode. Continuando con esta idea y el tipo de soporte, se introducen una serie de modificaciones para conseguir un soporte que reproduzca con la mayor similitud posible un empotramiento.

La variante de mayor importancia es la que se introduce con el objeto de conseguir un soporte con mayor estabilidad y la de tener un mecanismo que cuando se encuentre en funcionamiento tenga una configuración crítica, es decir, una configuración en la que por sí solo no se articule y no haga falta apretar ningún tipo de unión, en definitiva sea un mecanismo autoenclavante.

Siguiendo estas directrices se llega a dos tipos de configuraciones, una de las dos se escogerá como la más adecuada explicando los diferentes motivos por los que se toma dicha decisión.

### 2.1.1 Diseño del soporte opción 1

Este primer diseño se compone de dos piezas que sirven de alojamiento para la viga impidiendo el giro, los cuales se sustentan y se colocan en la situación precisa mediante una serie de perfiles huecos articulados en los alojamientos superior e inferior de la viga y articulados entre ellos. En la figura 2 se puede entender de manera más clara cómo es este primer diseño.



**Figura 2. Diseño soporte opción 1**

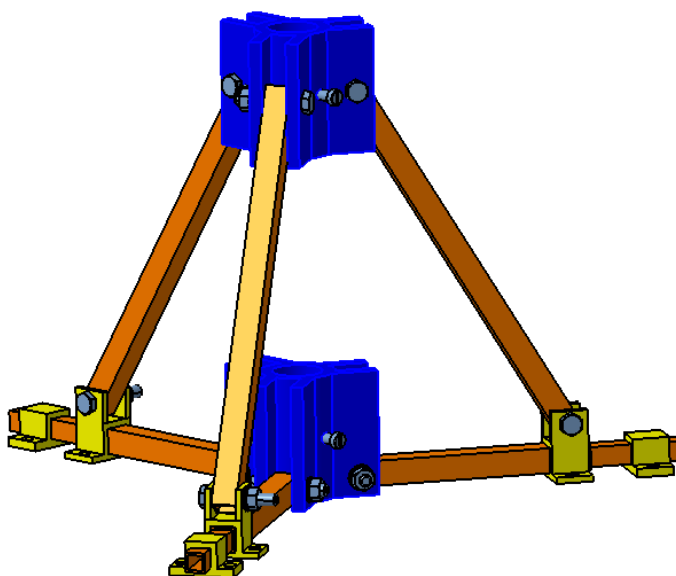
De este primer diseño hay que destacar que todos los perfiles son extensibles, es decir, dentro de cada perfil hueco se desliza otro por su interior. Así este primer diseño nos permite modificar tanto la longitud de los perfiles que sirven de apoyo del soporte ganando en estabilidad, como variando la altura del alojamiento superior.

La configuración del soporte que aparece en la figura 2, sería la que dispondríamos en la mesa vibrante o en otro tipo de localización para realizar los distintos estudios en sobre la maqueta. En esa disposición se puede ver que los perfiles sobre los que descansa el soporte forman 90 grados con el eje de los alojamientos. De este modo el mecanismo quedaría en una situación crítica, es

decir, el mecanismo sería autoenclavante con lo que no sería necesario apretar las uniones del alojamiento inferior.

### 2.1.2 Diseño del soporte opción 2

La diferencia principal de este segundo diseño respecto al primero es que no van a ser todos los perfiles extensibles, en este caso los perfiles sobre los que se apoya el soporte son los que alojan en su interior otro perfil que se desliza por su interior. De ese modo el soporte sigue teniendo la capacidad de aumentar la zona de apoyo para tener mejor estabilidad y también sigue dando la opción de modificar en altura la posición del alojamiento superior.



**Figura 3. Diseño soporte opción 2**

En este diseño se reducen en tipo y número los perfiles huecos y en tipo de alojamiento para la viga. Como se puede ver en la figura 3 el alojamiento superior e inferior para la viga es igual exceptuando la posición de los tres taladros pasantes y en cuanto a los perfiles se tiene menor número que en el diseño anterior y solamente de dos tipos diferentes.

Para esta opción de soporte se ha diseñado dos tipos de pieza que en el diseño anterior no aparecían.

La primera es una especie de orejeras, la cual se desliza por uno de los perfiles y permite la articulación de otro, de este modo se puede regular en altura el alojamiento superior de la viga. También permite el apoyo y el anclaje del

soporte a la mesa vibrante en la posición que se desee a través de dos taladros pasantes.

La segunda tiene una geometría similar a la anterior, sirve para el apoyo de los perfiles extensibles y el anclaje de los mismos mediante dos taladros pasantes.

La disposición del soporte que aparece en la imagen sería la que se utilizaría para realizar los diferentes estudios sobre la maqueta. En esta disposición los perfiles sobre los que descansa el soporte forman un ángulo recto con el eje de los alojamientos como en el primer diseño, así el mecanismo se comportaría de forma autoenclavante.

Ante los dos diseños del soporte se selecciona el segundo, los motivos por los que se toma esta decisión son porque el mecanismo se maneja y se articula con mayor facilidad que el primero y es más barato y sencillo de fabricar porque se compone de menor número y tipo de piezas y requiere de menos operaciones de mecanizado.

## 2.2 Diseño de la viga

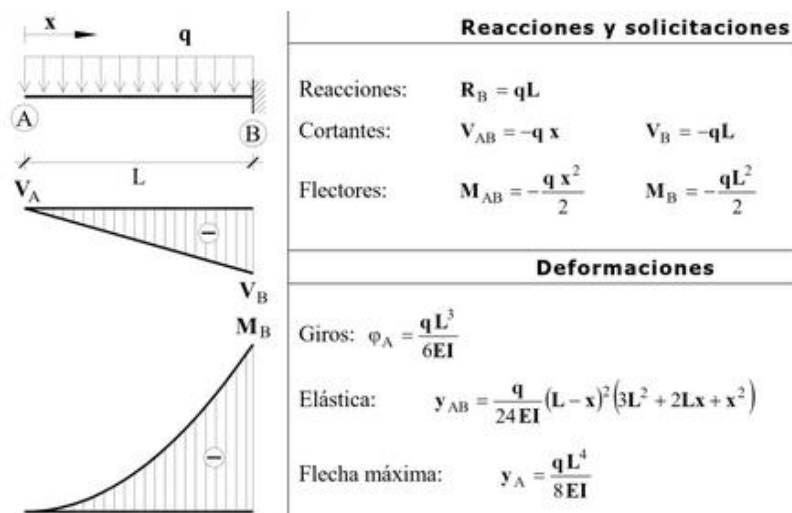
El diseño de la viga se va a realizar mediante la selección de un tubo comercial a partir del material, diámetro y espesor. Para ello se va a seguir una serie de directrices o condiciones que debe de cumplir dicho tubo, lo que nos lleva a determinar los tres parámetros con los que se selecciona el tubo comercial que mejor se ajuste.

Las condiciones que debe de cumplir el tubo son las siguientes:

1. Su longitud se encuentre entre 1,3 m. y 3m.
2. Para vientos  $U$  entre 5m/s y 15 m/s la flecha en la dirección del viento tiene que ser del orden de su diámetro ( $\varphi$ ).
3. Que no plastifique, es decir que la tensión admisible del material sea mayor que la tensión normal máxima en la viga.
4. Para el viento  $U$  se desprendan torbellinos a una frecuencia ( $wT$ ) similar a su primera ( $w1$ ) o segunda ( $w2$ ) frecuencias propias

A continuación se va a detallar los pasos seguidos y los cálculos realizados para llegar a determinar un primer posible material.

La primera condición que se va a tratar es que para el viento indicado anteriormente la flecha máxima sea del orden del diámetro ( $\varphi$ ) en la dirección del viento.



**Figura 4. Viga empotrada con carga uniforme**

En primer lugar se va a determinar la carga  $q$  en función de  $U$  y  $\varphi$ :

$$q = \frac{1}{2} \rho U^2 \varphi C_D \quad (2.1)$$

Dónde:

$\rho$  es la densidad del aire y se toma el valor de  $1,2 \text{ kg/m}^3$ .

$U$  es la velocidad del viento en  $\text{m/s}$ .

$\varphi$  es el diámetro exterior de la tubería en  $\text{m}$ .

$C_D$  es el coeficiente de arrastre, que para el caso del cilindro su valor es  $0,5$ .

Con todo esto la carga  $q$  queda:

$$q = 0,3U^2\varphi$$

De la figura 4 se toma la expresión de la flecha máxima que va a tener lugar en el extremo libre:

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

$$y_{max} = \frac{qL^4}{8EI} \quad (2.2)$$

Sustituyendo el valor de  $q$  en la expresión (2.2) se tiene:

$$y_{max} = \frac{0,3U^2\varphi L^4}{8EI} \quad (2.3)$$

Dónde:

$L$  es la longitud de la tubo en m.

$E$  es el módulo de elasticidad del material en  $N/m^2$ .

$I$  es el momento de inercia de la sección de la tubo que en nuestro caso es una sección circular en  $m^4$ .

La inercia en función del diámetro ( $\varphi$ ) y en función del espesor ( $e$ ) queda:

$$I = \frac{\pi}{4} [\varphi^4 - (\varphi - 2e)^4] \quad (2.4)$$

Sustituyendo la expresión (2.4) en la expresión (2.3) y la flecha máxima por el diámetro ( $\varphi$ ) (la condición exige que la flecha máxima sea del orden del diámetro) se despeja el módulo de elasticidad del material ( $E$ ) y queda:

$$E = \frac{0,3U^2L^4}{2\pi[\varphi^4 - (\varphi - 2e)^4]} \quad (2.5)$$

Para determinar el valor del módulo de elasticidad ( $E$ ) y poder seleccionar el material, se dan valores a  $L$  y a  $U$  dentro del rango marcado en las condiciones, al espesor ( $e$ ) y al diámetro ( $\varphi$ ). Como estamos buscando un tubo comercial tanto el diámetro como el espesor están de cierto modo acotados por los catálogos de fabricantes.

Según el módulo de elasticidad ( $E$ ) que me resulte de cada combinación de valores al sustituir en la expresión (2.5), puedo modificarlos para llegar a un módulo de elasticidad ( $E$ ) similar al de un material posible de conseguir. Siempre cumpliendo con la condición de la flecha máxima y con poder encontrarlo en catálogos.

Unos valores posibles son los siguientes:

$$\varphi = 40 \text{ mm.} \quad U = 14 \text{ m/s}$$



Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

$$e = 3,7 \text{ mm.} \quad L = 2,7 \text{ m.}$$

Con estos valores el módulo de elasticidad ( $E$ ) toma el siguiente valor:

$$E = 347,83 \text{ MPa.}$$

Un material que se aproxima a este valor de módulo de elasticidad es el polietileno (PE), más concretamente el PE40 cuyo módulo de elasticidad esta entre 400-500 MPa. y además hay posibilidad comercial de conseguir tubo de este material con los valores del diámetro ( $\varphi$ ), espesor( $e$ ) y longitud ( $L$ ) establecidos anteriormente.

Seleccionando este material PE40, se tiene un tubo con las siguientes características:

$$\begin{aligned} \rho &\geq 0,93 \text{ g/cm}^3 & \varphi &= 40 \text{ mm.} \\ E &\in [400,500] \text{ MPa} & e &= 3,7 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Así seleccionando un módulo de elasticidad intermedio entre los valores extremos, la flecha máxima que se tendría es:

$$y_{max} = 0,0309 \text{ m.}$$

Y el diámetro ( $\varphi$ ) del tubo seleccionado es:

$$\varphi = 0,04 \text{ m.}$$

Como se puede ver ambos resultados son del mismo orden, por lo que se cumple con la condición.

El siguiente requisito a tratar es que no se produzca plastificación, es decir, se tiene que cumplir la siguiente ecuación:

$$\textit{tension admisible material } (\sigma_{adm}) \geq \textit{tension normal máxima } (\sigma_{max}) \quad (2.6)$$

Para ello lo primero que se va a realizar, es calcular la tensión normal máxima en la viga ( $\sigma_{max}$ ). Para calcular dicha tensión ( $\sigma_{max}$ ) se hace uso de la siguiente expresión:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W} \quad (2.7)$$

Dónde:

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

$M_{max}$  es el máximo de los momentos flectores en el vano de la viga, el cual se produce en la sección del empotramiento en N/m.

$W$  es el módulo resistente en  $m^3$ .

Para calcular el valor de  $M_{max}$  se recurre a la expresión del momento flector a lo largo de la viga que puede verse en la figura 4, singularizada en la sección del empotramiento cuyo resultado es el siguiente:

$$M_{max} = -\frac{qL^2}{2}$$

Que sustituyendo el valor de la carga queda de la siguiente forma:

$$M_{max} = -\frac{0,3U^2\varphi L^2}{2} \quad (2.8)$$

Al valor del módulo resistente se llega a través de la siguiente expresión:

$$W = \frac{I}{\frac{\varphi}{2}} \quad (2.9)$$

donde ya se ha calculado anteriormente el término de inercia con la expresión (2.4).

Sustituyendo las expresiones (2.8) y (2.9) en la ecuación (2.7) se llega a la siguiente expresión de la tensión normal máxima:

$$\sigma_{max} = \frac{0,3U^2\varphi^2 L^2}{\pi[\varphi^4 - (\varphi - 2e)^4]} \quad (2.10)$$

Para obtener el valor de la tensión máxima sustituimos los parámetros de la expresión (2.10) por los valores calculados con la primera condición, es decir:

$$\begin{aligned} \varphi &= 40 \text{ mm.} & U &= 14 \text{ m/s} \\ e &= 3,7 \text{ mm.} & L &= 2,7 \text{ m.} \end{aligned}$$

Y el resultado que se tiene es:

$$\sigma_{max} = 0,1526 \text{ MPa.}$$

Lo siguiente es determinar la tensión normal admisible del material seleccionado. El material seleccionado es PE40 y se va a calcular la tensión

normal admisible del material como se calcula la tensión normal de diseño ( $\sigma_{diseño}$ ) para tubería.

$$\sigma_{diseño} \equiv \sigma_{admisible} = \frac{\text{Resistencia mínima requerida (MRS)}}{\text{Coeficiente de seguridad (C)}} \quad (2.11)$$

Para el PE40 los parámetros de la expresión (2.11) toman los siguientes valores:

$$\text{Resistencia mínima requerida (MRS)} = 4 \text{ MPa.}$$

$$\text{Coeficiente de seguridad (C)} = 1,25$$

Por lo que el resultado de la expresión (2.11) es:

$$\sigma_{diseño} \equiv \sigma_{admisible} = 3,2 \text{ MPa.}$$

Volviendo a la expresión (2.6):

$$3,2 \text{ MPa} \geq 0,1526 \text{ MPa}$$

Se ve que no se produce plastificación y se cumple así con la tercera condición.

La última condición a comprobar es que se desprendan torbellinos con una frecuencia ( $w_T$ ) similar a la primera ( $w_1$ ) o segunda ( $w_2$ ) frecuencia propia de la viga para una determinada velocidad de viento ( $U$ ).

Para ello lo primero que se realiza es el cálculo de la primera y segunda frecuencias propias de la viga. Por tanto para determinar las frecuencias propias se hace uso de las siguientes expresiones:

$$w_n = 2\pi f_n$$

$$f_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (2.12)$$

donde  $f_n$  es la frecuencia del modo normal  $n$  de vibración y  $C_n$  es un número que corresponde a dicho modo. Sus primeros valores son:  $C_1=0,56$ ,  $C_2=3,51$ ,  $C_3=9,82$ ,  $C_4=19,24$ ...

Para calcular la frecuencia del modo normal 1 de vibración ( $f_1$ ) se utiliza la expresión (2.12):

$$f_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

en la que los diferentes parámetros toman los siguientes valores:

$C_n$  toma el valor de  $C_1$ , porque se va a calcular el modo normal 1 de vibración.

$E$  es el modulo de elasticidad del material escogido, determinado por la primera condición. Es decir el PE40 el cual tiene un módulo de elasticidad  $E$  comprendido en el siguiente intervalo (400,500) MPa. Entre los posibles valores en ese intervalo escogemos 450 MPa, por tanto ese será el valor que tome  $E$  en la expresión.

$I$  es el momento de inercia de la sección de la viga, el cual se calcula con la expresión (2.4) y con los valores del diámetro ( $\varphi$ ), espesor ( $e$ ) determinados al seleccionar el material PE40.

$\rho$  es la densidad del material escogido, es decir la densidad del PE40. El valor que va a tomar es 0,93 g/cm<sup>3</sup>.

$A$  es el área de la sección de la viga que se calcula sustituyendo los valores del diámetro ( $\varphi$ ) y espesor ( $e$ ) determinados en la siguiente expresión:

$$A = \pi \left[ \left( \frac{\varphi}{2} \right)^2 - \left( \frac{\varphi - 2e}{2} \right)^2 \right]$$

$L$  es la longitud de la viga y su valor ya está determinado.

Sustituyendo en la expresión (2.12) los parámetros por sus valores correspondientes se llega al siguiente valor de la frecuencia del modo normal 1 de vibración:

$$f_1 = 2,75 \text{ s}^{-1}$$

Para calcular la frecuencia del modo normal de vibración 2 se hace de la misma forma que la frecuencia para el modo 1 con la única diferencia de que  $C_n$  toma el valor de  $C_2$ . De esta forma el valor de la frecuencia del modo normal 2 de vibración es el siguiente:

$$f_2 = 17,27 \text{ s}^{-1}$$

Por tanto el valor de la primera y segunda frecuencia propia de la viga son los siguientes:

$$w_1 = 2\pi \cdot 2,75 \text{ s}^{-1}$$

$$w_2 = 2\pi \cdot 17,27 \text{ s}^{-1}$$

Por otro lado los torbellinos se desprenden según el número de Strouhal:

$$St = f \frac{\varphi}{U} \quad (2.13)$$

Que para el caso de cilindros, que es la geometría que tiene la viga, el valor que adopta el número de Strouhal es de 0,2.

En la expresión (2.13) el valor que toman los distintos parámetros son los siguientes:

$f$  es la frecuencia de desprendimiento de torbellinos y el valor que toma es:

$$f = \frac{w_T}{2\pi}$$

Asique sustituyendo en la expresión (2.13) queda lo siguiente:

$$w_T = 0,2 \frac{U}{\varphi} 2\pi$$

Los otros dos parámetros son el valor del diámetro ( $\varphi$ ) y de la velocidad del viento ( $U$ ) que ya se conocen, sustituyendo resulta la frecuencia a la que se desprenden los torbellinos para los valores de  $U$  y  $\varphi$  determinados anteriormente:

$$w_T = 70 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1}$$

Ahora comparamos la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos con la primera frecuencia propia para ver si son similares como imponía esta última condición:

$$w_1 = w_T$$

$$2\pi \cdot 2,75 \text{ s}^{-1} = 70 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1}$$

Como se ve las frecuencias no son similares, en el caso de compararlo con la segunda frecuencia propia ocurre lo mismo:

$$w_2 = w_T$$

$$2\pi \cdot 17,27 \text{ s}^{-1} = 70 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1}$$

Por tanto concluimos con que la última condición no se cumple para el material seleccionado.

### 2.2.1 Modificaciones en la viga

En este apartado se va a estudiar qué variaciones se pueden realizar y sobre que parámetros para poder llegar a cumplir con la última condición en el diseño de la viga, es decir, que la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos sea similar a la primera o segunda frecuencia propia de la viga.

Se tiene la maqueta objeto de estudio, compuesta por el soporte que simula el empotramiento y el tubo que simula la viga en voladizo. Como ya se ha explicado la maqueta en conjunto simula una chimenea o cualquier estructura con una geometría similar.

La frecuencia propia del tubo ( $w_1$ ), despreciando las constantes, viene determinada por la siguiente expresión:

$$w_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

Dónde:

$k$  es la rigidez del tubo y está definida por la siguiente expresión:

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (2.15)$$

$m$  es la masa del tubo y su valor se determina mediante la siguiente relación, donde el signo del tanto por ciento indica la longitud libre de la tubería, es decir, la longitud que está por encima del soporte:

$$m = \% \rho AL \quad (2.16)$$

Por tanto se ve que la frecuencia propia de la viga ( $w_1$ ) se puede variar a partir de la modificación de la rigidez ( $k$ ) o de la masa ( $m$ ) de la viga.

Para modificar la rigidez el parámetro que se puede variar es el momento de inercia, para ello la forma de conseguirlo es mediante la incorporación de unas masas puntuales en el extremo de la viga. De la misma forma se consigue modificar la masa porque con la incorporación de dichas masas puntuales se varía la densidad del tubo.

Por otro lado la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos viene determinada por la expresión (2.13) como ya se ha visto anteriormente.

En dicha expresión hay unos parámetros fijos que no se pueden modificar y otros que sí se pueden modificar.

El número de Strouhal no se puede variar porque está determinado por la geometría de la viga, para modificarlo se tendría que cambiar el tipo de viga y no es el caso.

La velocidad del viento  $U$  es un parámetro que sí se puede modificar, pero en el estudio sobre la maqueta se va a mantener fijo en un valor, porque si variamos el valor de la velocidad del viento ya no cumplimos con la segunda condición en el diseño de la viga.

Asique el único parámetro que se puede modificar es el diámetro ( $\varphi$ ). La forma para modificar este parámetro es mediante una carcasa de mayor diámetro ( $\varphi'$ ) que no influya en el diámetro resistente de la viga ( $\varphi$ ).

Así con estas opciones se puede modificar tanto la frecuencia propia de la viga ( $w_1$ ) como la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos ( $w_T$ ).

### 2.2.2 Viabilidad de las modificaciones

A continuación se va a estudiar si es posible llevar a cabo las modificaciones expuestas en el apartado anterior a la tubería seleccionada.

Una primera posible modificación es la de incorporar una carcasa cilíndrica en el extremo libre del tubo y en la misma carcasa introducir masas puntuales.

Al colocar una carcasa cilíndrica en el extremo libre lo que se consigue es que en la zona donde se van a desprender los torbellinos se pase de tener un diámetro ( $\varphi$ ) que es el del tubo a tener un diámetro ( $\varphi'$ ) mayor que es el de la carcasa que se coloque.

De esta manera se modifica la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos ( $w_T$ ) sin variar la sección resistente del tubo. Con esta variación hay que tener en cuenta la siguiente expresión para el cálculo de ( $w_T$ ):

$$St = \frac{w_T \varphi'}{2\pi U}$$

Por lo que al incorporar una carcasa cilíndrica con un diámetro mayor al del tubo la frecuencia  $w_T$  se modifica de forma inversa. Es decir cuanto mayor sea el diámetro de la carcasa ( $\varphi'$ ) menor será la  $w_T$ .

La otra parte de la modificación que es la de incorporar masas puntuales en la carcasa tiene como objetivo modificar la rigidez y la masa de la tubería.

La rigidez de la tubería ( $k$ ) viene determinada por la expresión (2.15) donde un parámetro de esa expresión es el momento de inercia. Al introducir las masas puntuales el momento de inercia cambia porque ahora no se tiene solo la sección circular de la tubería sino que hay que tener en cuenta las masas puntuales.

El momento de inercia de la sección del tubo sin las masas puntuales está determinado por la expresión (2.4), al introducir las masas puntuales en la carcasa cilíndrica en el extremo libre del tubo el momento de inercia de la sección toma un valor más grande, porque dichas masas puntuales contribuyen al momento de inercia de la sección sumando:

$$I' = I + \sum (I_{\text{Masas puntuales}} + A_{\text{Masas puntuales}} \cdot r^2)$$

Entonces haciendo uso de la expresión (2.15) y teniendo en cuenta la variación del momento de inercia se tiene:

$$k = \frac{3EI'}{L^3}$$

De forma que se observa que la rigidez de la tubería ( $k$ ) adquiere un valor más grande.

Por último la masa del tubo está definida por la expresión (2.16) donde el parámetro que se modifica es la densidad. Por tanto al introducir las masas puntuales el valor de la densidad ( $\rho$ ) aumenta y por consiguiente la masa del tubo también lo hace.

Asique con la introducción de las masas puntuales se aumenta la rigidez y la masa de la tubería, se tiene que ajustar tanto el diámetro de la carcasa cilíndrica como las masas puntuales y a la distancia que se colocan para conseguir que el aumento sea mayor en el término de rigidez que en el de la masa, para que así el valor de la frecuencia de la viga ( $w_1$ ) tenga un valor mayor como se puede ver con la expresión (2.14).



Entonces con estas modificaciones sin tener de momento en cuenta si en el material del tubo seleccionado se pueden realizar, se podría conseguir que  $w_T$  y  $w_1$  tomaran valores similares, porque la situación que se tenía inicialmente es que la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos era mayor a la frecuencia del tubo y con estas modificaciones se puede conseguir justo lo contrario aumentar  $w_1$  y disminuir  $w_T$ .

A continuación se va a tratar si estas modificaciones serían posibles realizarlas en el material del tubo ya seleccionado.

El material seleccionado es el PE40, químicamente es el polímero más simple y es uno de los plásticos más comunes. Se trata de un material fácilmente deformable ante un esfuerzo relativamente pequeño y el problema de esa deformación es que una parte es permanente. Otro inconveniente es que el suministro de este tipo de tuberías es en rollos lo que hace que no se consiga un tramo completamente recto para la viga de la maqueta.

Por tanto la modificación de incorporar la carcasa cilíndrica con masas puntuales no se va a poder llevar a cabo en este material porque no se va a conseguir tener un tramo de tubería completamente recto y al colocar las masas puntuales el material se va a deformar. Como no vamos a conseguir un tramo de tubo completamente recto la acción del peso de las masas puntuales va a favorecer que el tubo se doble más, también esta acción se ve favorecida porque el material del tubo es fácilmente deformable.

Llegado a este punto donde se ha visto que el material seleccionado para la construcción de la viga no es adecuado, porque no permite llevar a cabo la modificación en la misma para cumplir con la última de las condiciones del diseño de la viga, se replantean las condiciones a cumplir para el diseño de la viga.

Otro motivo por el que se replantean las condiciones a cumplir para el diseño de la viga es la velocidad del viento ( $U$ ), porque a pesar de que se han presentado una serie de modificaciones en la viga para poder cumplir con la última de las condiciones, hay un problema que hasta el momento no se ha mencionado y este es la velocidad del viento ( $U$ ). Del cumplimiento de la segunda condición se ha obtenido los resultados de una serie de parámetros, uno de ellos es la velocidad del viento ( $U$ ), el valor de este parámetro es muy elevado como para conseguirlo en el laboratorio de la Escuela.

Por tanto la conclusión es que, aunque se pudiera introducir la modificación en el tubo de las masas puntuales la última condición en el diseño de la viga no se va a poder llevar a cabo porque se necesita una velocidad del viento ( $U$ ) muy elevada.

Al igual que no se puede cumplir la última de las condiciones porque se necesita una velocidad del viento muy elevada como para poder conseguirla en el laboratorio, lo mismo ocurre para la segunda condición. Es decir, para conseguir que la flecha máxima sea del orden del diámetro ( $\varphi$ ) es necesario esa velocidad del viento ( $U$ ). Por tanto esta segunda condición tampoco se puede llegar a cumplir.

Tras el replanteamiento para seleccionar el material del tubo que simula la viga, se llega a la conclusión de no cumplir con ninguna de las condiciones del diseño de la viga. El nuevo enfoque para seleccionar el material del tubo es el siguiente; tener un material ligero y lo suficientemente rígido como para poder colocar una serie de masas puntuales en el extremo libre y con una longitud que sea fácilmente manejable dentro del laboratorio. El hecho de poder colocar una serie de masas puntuales en el extremo libre de la viga se debe a que servirán para poder llevar a cabo el sintonizado del TMD o un futuro TLD.

Con estas premisas el material seleccionado es aluminio lacado con los siguientes valores de los diferentes parámetros:

$$\begin{aligned}\varphi &= 50mm & E &= 70000 MPa \\ e &= 1,2 mm & \rho &= 2922 kg/m^3\end{aligned}$$

Llegado a este punto donde ya se ha seleccionado el material adecuado para el tubo que simula la viga, se da por terminado el apartado del diseño de la viga.

Hasta el momento se tiene dos opciones de soporte para el tubo de las cuales hemos descartado una de ellas. El desarrollo de esas dos ideas de soporte está influenciado en gran parte por las condiciones iniciales que debía de cumplir la viga y la forma en la que iba a ser excitado (mesa vibrante y viento). Dado que ahora dichas condiciones no se van a cumplir y la principal forma de excitar la chimenea va a consistir en la aplicación de una fuerza externa puntual y de muy corto tiempo de aplicación, manteniendo la posibilidad de hacerlo mediante la mesa vibrante, el escenario para diseñar el soporte cambia por completo. El nuevo enfoque es el siguiente, realizar una serie de modificaciones en el soporte elegido para conseguir tener diferentes valores de rigidez de la chimenea.

La forma de variar la rigidez de la chimenea través del soporte se consigue realizando dos modificaciones fundamentales. Las variaciones principales que

hay que introducir en el soporte seleccionado para conseguir modificar la rigidez son:

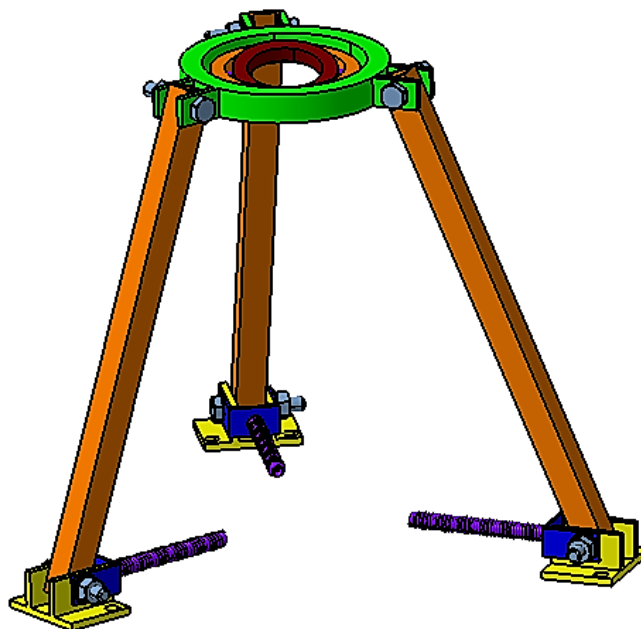
- Un alojamiento superior para el tubo que lo permita girar.
- En la parte inferior unas sujeciones al tubo que sean elásticas.

En este caso la rigidez no se va a modificar mediante la inercia sino que directamente se va a modificar el valor de  $k$ . La forma de llevarlo a la práctica es mediante resortes que de algún modo se conectan entre el tubo y el soporte que variando el número de espiras activas se modifica la rigidez del tubo ( $k$ ).

Lo siguiente por determinar es si es posible llegar a un diseño del soporte que cumpla con las dos principales modificaciones.

## 2.3 Rediseño del soporte

La modificación en el alojamiento superior para permitir que el tubo pueda girar se plantea con tres anillos concéntricos de diferentes diámetros. Dentro del más grande se aloja el de tamaño intermedio y en este el más pequeño que tiene un diámetro interior igual al diámetro exterior del tubo.



**Figura 5. Rediseño soporte opción 1**

La forma de conectarlos para que permitan el giro de la tubería es la siguiente, el anillo grande y el intermedio se unen mediante dos pasadores de forma que

queden alineados por sus eje y el anillo intermedio y el pequeño también mediante dos pasadores pero que su eje sea perpendicular al de los anteriores. De esta forma la tubería puede girar sin ningún impedimento.

La segunda modificación importante es la unión de la parte inferior del tubo con el soporte mediante resortes. Para ello se ha modificado también las piezas con las que se une toda la estructura a la mesa vibrante (para un posible montaje) y se ha diseñado otra pieza (color azul), su función es la de permitir la unión del soporte con el resorte mediante un tornillo con un diámetro igual al diámetro interior del resorte para que se pueda roscar. De la misma forma se realiza la unión de los tres resortes con el tubo, en el que se dispone tres taladros pasantes dispuestos a 120 grados en los que se introducen tres tornillos para roscar en ellos los resortes. En la figura 5 se pueden apreciar de una manera más clara las modificaciones que se han explicado (figura 5).

Por tanto sí que es posible llegar a un diseño de soporte que cumpla con las dos modificaciones principales, estableciendo que esta opción de modificar la rigidez es una opción viable tanto para la viga como para el soporte.

La idea de modificar la rigidez de la chimenea mediante resortes se va a llevar a cabo, pero no con el último diseño de soporte que se ha presentado sino que se va a realizar sobre otro tipo de soporte que no sigue con el estilo del anterior.

El nuevo soporte se diseña con la intención de conseguir una construcción más sencilla y que no requiera de tantos componentes y además permita realizar el estudio de caracterización estática y modal de la viga. Con el siguiente soporte que se presenta a continuación se llega a una maqueta de una chimenea configurable mediante los siguientes parámetros:

- Numero espiras activas del resorte.
- Longitud del tubo (se puede utilizar diferentes longitudes).
- Masas en el extremo.

## 2.4 Diseño definitivo del soporte

Con el objetivo de llegar a un soporte más sencillo y conseguir una maqueta de una chimenea configurable como se presentaba anteriormente se abandona la idea de seguir con el soporte tipo trípode y se plantea una opción en la que la tubería se fije mediante un solo resorte sin que sea necesario los tres perfiles

huecos que ejercían la función de patas y permitirían el anclaje a la mesa vibrante (en un posible montaje).

Ahora la unión entre el soporte y la mesa vibrante (en un posible montaje) no se va a efectuar mediante tres piezas, sino que se realiza mediante una base o plato en el que se dispondrán taladros pasantes a través de los cuales se realiza dicha unión.

En el centro de dicha base se dispone de otro taladro pasante que servirá para fijar el muelle. Para realizar esta unión lo primero será realizar un acoplamiento que permita unir la base y el resorte. El acoplamiento es el siguiente, un tornillo unido a una arandela mediante un cordón de soldadura. Lo siguiente es unir este acoplamiento al resorte, para ello se vuelve a ejecutar un cordón de soldadura entre la arandela y la primera espira del resorte, quedando así una unión rígida entre los tres componentes.

En la figura 6 se puede ver de manera más clara el resultado de la unión entre el acoplamiento y el resorte.



**Figura 6. Detalle unión resorte-base**

Por último el tornillo se introduce en el taladro central de la base, donde el conjunto queda fijado a la misma mediante una tuerca.

Otra situación conflictiva es la manera de unir el resorte al tubo de manera que permita el movimiento deseado, es decir, que no se produzca movimiento relativo entre el tubo y el muelle y que permita variar el número de espiras activas del resorte para así conseguir modificar la rigidez del tubo ( $k$ ). Tras varias opciones con sus ventajas e inconvenientes, la mejor idea por la sencillez y rapidez es construir un casquillo que se aloje en el interior del tubo y en dicho casquillo rosque el muelle.

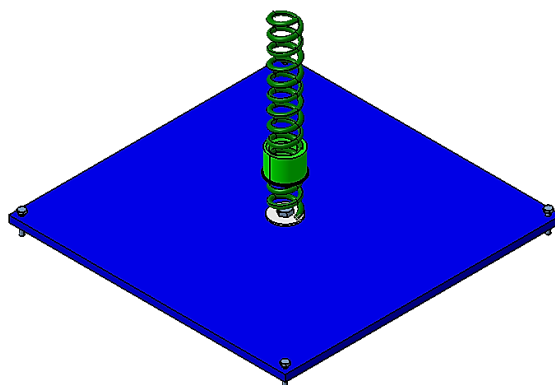
Lo más complicado de esta idea es diseñar con buena precisión la rosca en el interior del casquillo, la precisión debe ser buena porque cualquier movimiento relativo entre el muelle y el casquillo se refleja en los resultados experimentales. Para ello se toma los datos del paso de las espiras, diámetro del alambre y diámetro exterior del resorte, ahí la dificultad de diseñar con precisión la rosca en el interior del casquillo porque la toma de medidas en el resorte de los diferentes parámetros no se puede realizar con gran precisión.

Para impedir que dicho casquillo se introduzca en el tubo, se diseña un pequeño saliente o reborde con el objetivo de hacer tope contra el tubo y así conseguir que siempre este en la misma posición (Figura 7).



**Figura 7. Detalle unión casquillo-resorte**

Para fijar las masas puntuales en el tubo se diseña otra pieza, esta sigue la idea del casquillo anterior, pero el diseño es mucho más sencillo. La función que tiene que cumplir es la hacer de unión entre las masas puntuales y el tubo.



**Figura 8. Diseño definitivo del soporte**

Para ello se diseña un tope que encaje en el tubo con un pequeño saliente como en el caso anterior para que no se introduzca en su interior y con un taladro pasante roscado, que sirve para fijar las masas mediante un tornillo.

Por último, en cada una de las esquinas de la base se dispone de un taladro roscado, donde se introduce un tornillo, mediante los cuatro tornillos se permite nivelar la maqueta y que a la hora de la toma de datos no se produzca ningún movimiento ni vibración no deseada. En la figura 8 se puede ver el resultado definitivo del diseño del soporte.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables



## Capítulo 3. Descripción, fabricación y montaje de la maqueta

---

### 3.1 Fabricación de la maqueta

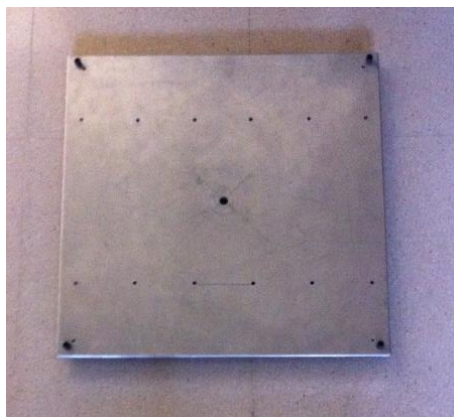
La construcción de la maqueta se realiza en el laboratorio S10 de la Escuela de Ingenieros Industriales con sede en Paseo del Cauce, en la que se dispone de las herramientas necesarias.

En primer lugar se compra los elementos necesarios para llevar a cabo la fabricación de la maqueta y los cuales no se disponen en el laboratorio. Por tanto se compran una serie de perfiles tubulares de aluminio lacados en blanco, como se estableció en el diseño de la viga, y el resorte con el que se une el tubo a la base.

A continuación se detallan los diferentes componentes que conforman la maqueta y las diferentes operaciones realizadas para llevar a cabo su fabricación.

#### 3.1.1 Base

Es el primer componente que se fabrica, se parte de una placa de aluminio cuadrada de 50 mm de lado y 10 mm de espesor. Con una taladradora eléctrica se realiza un taladro en cada esquina de la placa con una broca para metal de diámetro 5 mm y se rosca con macho de rosca métrica M (5.5) por último se realiza un taladro pasante en el centro de la placa con una broca para metal de diámetro 12mm (figura 9).



**Figura 9. Base**

### 3.1.2 Viga

Se establece que la medida que debe de tener el tubo es de 1 metro por dos razones. La primera razón tiene que ver porque es una longitud fácilmente manejable dentro del laboratorio y la segunda porque al no ser una longitud demasiado grande, se va a conseguir mantener la verticalidad del tubo en la maqueta mejor que si se tiene una longitud mayor (figura 10).



**Figura 10. Viga**

### 3.1.3 Casquillo inferior

La fabricación de este componente se ejecuta mediante una impresora 3D, para poder llevarlo a cabo en primer lugar se realiza el diseño del mismo mediante Catia V5-6r2015, en el anexo F se presenta el plano del modelo CAD que se ha utilizado para la impresión 3D. Es el componente de la maqueta que más dificultades ha presentado para su fabricación, ya que se ha tenido que rediseñar porque el resultado no era el correcto.



**Figura 11. CAD e impresión 3D del casquillo inferior**

Como se ha comentado en el párrafo anterior la primera pieza que se obtuvo no era correcta porque no se podía roscar el resorte en el casquillo. A partir de esta primera pieza se analizó porque no se podía roscar el resorte y qué medidas eran las causantes de dicho fallo. Una vez obtenidos las conclusiones sobre dicho análisis, se modificaron dichas medidas en el diseño para tener la pieza con las dimensiones correctas (figura 11).

La causa del fallo en el diseño del casquillo se debe a la toma de las medidas necesarias sobre el resorte. Estas medidas se realizan mediante un pie de rey electrónico, de esta forma es complicado obtener las medidas necesarias para el diseño del casquillo con la suficiente precisión para que a la hora de roscar el resorte el resultado sea perfecto.

### 3.1.4 Resorte

Para su fabricación se compra un resorte que inicialmente no es adecuado porque su longitud es demasiado grande. Con objeto de determinar la longitud del resorte adecuada para la construcción de la maqueta y poder llevar a cabo los ensayos experimentales se tienen en cuenta dos puntos.

El primero es la estabilidad del tubo que simula la chimenea, ya que si la longitud del resorte es muy grande en la situación donde se caracterice la chimenea con el mayor número de espiras activas del resorte, será más complicado mantener la verticalidad del tubo.



**Figura 12. Resorte**

El segundo es la influencia que tiene en los resultados el hecho de que el muelle se encuentre en el interior del tubo, por lo que cuanto menor sea la longitud del

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

resorte en el interior del tubo se tienen unos resultados que reflejan con mayor exactitud el ensayo experimental llevado a cabo en maqueta.

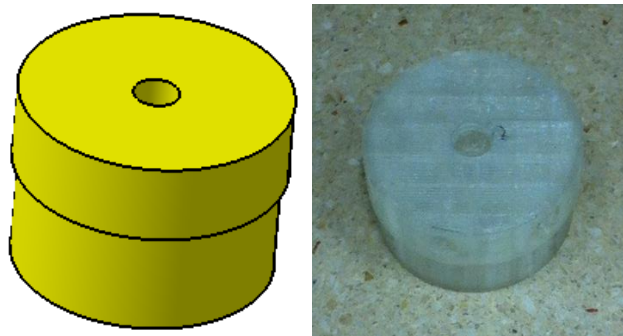
La siguiente y última operación sobre este componente es unir el acoplamiento, esta pieza ya se ha explicado anteriormente en el diseño del soporte, es una pieza que sirve para permitir la unión entre el resorte y la base. El acoplamiento se fabrica mediante una arandela de diámetro 16 mm., en la que se introduce un tornillo de rosca métrica M12 (figura 12). Para fijar estos dos primeros componentes se ejecuta un cordón de soldadura entre la arandela y la cabeza del tornillo, llevada a cabo esta primera operación se concluye uniendo este acoplamiento con el resorte mediante un nuevo cordón de soldadura entre la arandela y el alambre del resorte de la primera espira (figura 13).



**Figura 13. Detalle del acoplamiento**

### 3.1.5 Casquillo superior

Es el último componente de la maqueta que se fabrica, al igual que el casquillo inferior se ejecuta mediante una impresora 3D.



**Figura 14. CAD e impresión 3D del casquillo superior**

Se toman las medidas necesarias para realizar el diseño de la pieza con el programa Catia V5-6r2015 (figura 14), en este caso las medidas a tomar son pocas y sencillas. Interesa que el casquillo ajuste bien en el tubo, por lo que una medida crítica es el diámetro interior del tubo. Una condición más que debe de cumplir el casquillo es que no se introduzca en su interior, por lo que otra medida crítica es el espesor del tubo para así determinar la dimensión del reborde. Las medidas se llevan a cabo mediante un pie de rey electrónico.

La última operación sobre este componente es realizar un taladro roscado pasante desde la parte superior a la inferior. Esta operación se lleva a cabo mediante un taladro eléctrico con una broca de diámetro 9 mm y el taladro pasante se rosca mediante un macho de rosca métrica M10 (figura 14).

En el anexo G se presenta el plano del CAD con el que se ha realizado la impresión 3D del casquillo superior.

### 3.2 Montaje de la maqueta

El montaje de la maqueta es una tarea rápida y sencilla, ya que se compone de pocas piezas y la unión entre ellas se realiza de manera fácil básicamente en dos operaciones. Esta característica de que sea una maqueta sencilla de armar, es uno de los puntos condicionantes que se trató en el diseño del soporte.

La primera operación en llevarse a cabo es la unión entre el resorte y la base. Antes de esta unión se roscan en la base los cuatro tornillos (figura 15) que desempeñan la función de apoyos rígidos a la vez que sirven para nivelar la maqueta.



**Figura 15. Detalle apoyos**

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Estos dos componentes se fijan mediante un tornillo y una tuerca de rosca métrica M12, se da un par de apriete suficiente para que no exista ningún tipo de movimiento entre los dos mediante una llave inglesa. El resultado de esta unión se puede ver en la figura 16.



**Figura 16. Unión resorte-base**

La siguiente operación es unir el tubo con el casquillo inferior, esta tarea es tan sencilla como introducir el casquillo en el interior del tubo y aplicar unos pequeños golpes en el mismo para introducirlo en la totalidad de su longitud, es decir, hasta que haga tope el tubo con el reborde saliente del casquillo (figura 17).



**Figura 17. Unión tubo-casquillo inferior**

Ya solo queda la última operación en la que se une el subconjunto base-resorte al subconjunto casquillo inferior-tubo. Esta unión se lleva a cabo roscando el subconjunto casquillo inferior-tubo en el resorte (figura 18).



**Figura 18. Unión dos subconjuntos**

En las distintas figuras en las que aparece el resorte se puede ver que una parte del resorte es de color negro. Esto se debe a que existe un pequeño movimiento entre el casquillo inferior y el resorte no deseable, por lo tanto se pone cinta adhesiva al contorno de las espiras para así tener un ajuste mejor y eliminar dicho movimiento entre los dos componentes.



**Figura 19. Maqueta de la chimenea**

## Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

El montaje del casquillo superior se lleva a cabo en las situaciones que se coloquen las masas puntuales, de todas formas la unión de este componente es similar a la del casquillo inferior, la diferencia se encuentra en el montaje de las masas puntuales que se explicara en su momento.

En la figura 19 se puede ver el resultado definitivo de la maqueta de la chimenea una vez unidos los diferentes componentes que la conforman.



## Capítulo 4. Descripción, fabricación y montaje de los sistemas TMD's

---

El TMD (*tuned mass damper*) es un sistema de amortiguamiento pasivo cuyo objetivo es la disminución de la respuesta dinámica de la estructura donde se coloca, está formado por una masa conectada por lo general a un amortiguador lineal y a un amortiguador viscoso y que posee una frecuencia natural de vibración acoplada a la de la estructura. La razón de esta configuración es que es amortiguamiento producido es máximo. Los TMD's están fundamentados en la ecuación del cálculo dinámico (4.1):

$$\bar{M} \cdot \ddot{u} + \bar{C} \cdot \dot{u} + \bar{K} \cdot u = F_{eff} \quad (4.1)$$

Siendo M la masa del sistema, C la matriz de amortiguamiento y K la matriz de rigidez. En cuanto a  $F_{eff}$  son las fuerzas efectivas sobre los nudos del sistema y 'u' son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de cada nudo.

Por tanto serán las fuerzas efectivas actuantes sobre el TMD las que disipen energía del sistema y el amortiguamiento será función de la masa del TMD, del propio amortiguamiento del TMD y de su rigidez.

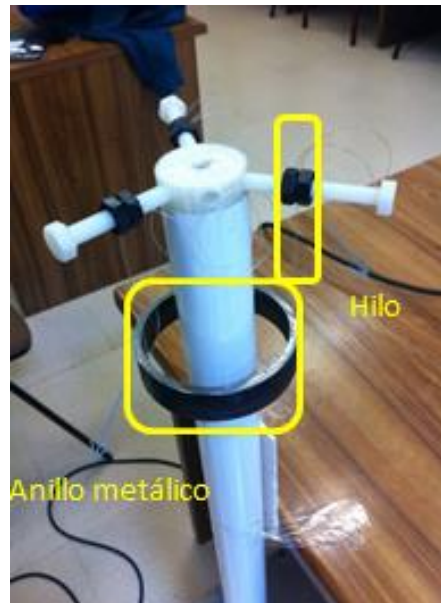
Hasta este punto se ha considerado que el sistema de amortiguamiento que se va a diseñar para este trabajo es un sistema TMD de hecho así se ha llamado cuando se le ha hecho referencia, pero realmente no es así. Como se ha explicado anteriormente un TMD consta de una masa conectada a un amortiguador lineal y a un amortiguador viscoso, que en este caso no se va a tener. Por este motivo los sistemas que se van a presentar a continuación no son exactamente un TMD y por consiguiente el objetivo principal de estos sistemas no es el de reducir la respuesta dinámica sino el de conseguir desdoblarse el pico de la frecuencia natural de la chimenea, aunque incorporando estos sistemas a pesar de no ser exactamente un TMD, la amplitud de la respuesta ante cualquier excitación sobre la chimenea se ve reducida.

Hecha la aclaración de que no son un TMD, se seguirá utilizando este término para referirse a los sistemas, ya sabiendo que no se tiene el elemento amortiguador de momento pudiendo en un futuro modificar dichos sistemas para la incorporación de un elemento amortiguador.

A continuación se presentan los dos sistemas de amortiguamiento pasivo que se construyen en el laboratorio S10 de la sede del Paseo del Cauce de la Escuela de Ingenieros Industriales.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Lo más habitual es utilizar un TMD de tipo péndulo, esta configuración es la que sigue el primer sistema TMD que se presenta.



**Figura 20. Sistema TMD pendular**

En la Figura 20 se muestra el primer sistema de amortiguamiento pasivo acoplado a la maqueta de la chimenea. Este primer sistema se compone de una masa puntual a través de un anillo metálico y tres hilos que sujetan dicho anillo.

Para acoplar este primer sistema a la maqueta de la chimenea se modifica el casquillo superior realizando tres taladros roscados de M10 dispuestos a 120°, en dichos taladros se roscan tres tornillos en los que mediante dos tuercas en cada uno de ellos se fijan los hilos que sujetan al anillo.

Mediante este sistema, separando las dos tuercas de cada tornillo, se puede variar la longitud de los hilos para así modificar la frecuencia de vibración.

Para determinar la frecuencia de un TMD pendular se utiliza la expresión de la frecuencia de un péndulo simple (4.2):

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.2)$$

Donde  $g$  es la gravedad y  $l$  la longitud del péndulo, es decir, para este sistema la longitud de los tres hilos que sujetan al anillo.

El segundo sistema de amortiguamiento pasivo no sigue con la configuración del primero, sino que se basa en una 'varilla a flexión'. Esta idea consiste en una varilla de acero de sección circular de 1.7 mm de diámetro y 40 mm de longitud

(Figura 21), la cual se acopla en la chimenea a través del casquillo superior. Cabe destacar que cuando se acople el TMD a la chimenea, no se tendrán masas puntuales en su extremo libre, porque habría que rediseñar el casquillo superior para poder acoplarlo y no se ha considerado necesario.



**Figura 21. Varilla del TMD a flexión**



**Figura 22. Casquillo y varilla del TMD a flexión**

Para sujetar dicha varilla al casquillo superior basta simplemente con realizar un taladro pasante en el casquillo superior con una broca de diámetro ligeramente inferior al diámetro de la varilla, para así no tener problema de deslizarse por el taladro, Figura 22.

En el extremo opuesto se sitúa la masa puntual que constituye prácticamente la masa del TMD, porque esta masa en comparación con la masa de la varilla es muy superior por lo que se puede despreciar la masa de la varilla y los resultados no se van a modificar sustancialmente. La forma de situar la masa en el extremo es mediante un conjunto de tuercas, de esta manera se permite modificar la masa en el extremo del TMD y así poder llevar a cabo su caracterización.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Para colocar dichas tuercas en el extremo de la varilla se roscan en dos tornillos de plástico en los cuales se realiza un taladro pasante con un diámetro algo superior al diámetro de la varilla, figura 23.



**Figura 23. Masa puntual del TMD a flexión**

Para evitar que los tornillos y las tuercas se deslicen por la varilla, lo que se hace es apretar las tuercas contra la varilla (figura 24) de esta forma los dos tornillos junto con las tuercas quedan fijados en el extremo a la distancia adecuada.



**Figura 24. Unión de la masa puntual y la varilla del TMD a flexión**

En la figura 25 se puede ver el resultado final del sistema TMD.



**Figura 25. Sistema TMD a flexión**

Debido a la dificultad que se presenta al realizar la simulación mediante elementos finitos del primer sistema de amortiguamiento pasivo, es decir, el sistema TMD pendular, se escoge el segundo de ellos como el sistema TMD que se utiliza de aquí en adelante en este trabajo.

De esta forma la caracterización del sistema TMD mediante los modelos analítico, experimental y simulado, se realiza al segundo sistema. También será este sistema el que se acople a la maqueta de la chimenea para realizar también la caracterización del sistema conjunto a través de los diferentes modelos.

Aun así, para comprobar que el sistema TMD pendular es viable y funciona adecuadamente cuando se acopla a la maqueta de la chimenea, se determina mediante el modelo experimental la frecuencia natural de vibración para una masa determinada (la del anillo metálico) y para una longitud que sustituyendo en la ecuación (4.2) da como resultado una frecuencia próxima a la frecuencia natural de vibración de la chimenea en el caso de 4 espiras activas y ninguna masa puntual, es decir, se trata de conseguir sintonizar el sistema TMD pendular.

Una vez determinada la frecuencia de vibración del sistema TMD pendular, se acopla a la maqueta de la chimenea para el caso mencionado anteriormente, y mediante el modelo experimental se determinan las dos frecuencias naturales de vibración del sistema conjunto.

En el anexo H se presenta el procedimiento seguido y el resultado obtenido en la determinación de la frecuencia natural de vibración del sistema TMD pendular y en la determinación de las dos frecuencias naturales de vibración del sistema conjunto.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## Capítulo 5. Dispositivos y procesos de medida

En este capítulo se expone que equipos se han utilizado para la medida de los diferentes ensayos realizados sobre la maqueta, como llevar a cabo la configuración de los mismos y la forma de obtener los registros.

### 5.1 Introducción en el método experimental

En la figura 26 se puede ver el prototipo de la maqueta, los diferentes aparatos que se utilizan para el registro experimental de la frecuencia natural del sistema y la disposición de los mismos a la hora de tomar los datos experimentales.



**Figura 26. Toma de datos experimentales de la chimenea**

En la figura 27 y 28 puede verse el prototipo del TMD y el conjunto de la chimenea más el sistema TMD, también se puede ver al igual que en la figura anterior los dispositivos para el registro experimental de la frecuencia natural de los dos sistemas, TMD y chimenea más TMD, y la disposición de los mismos.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

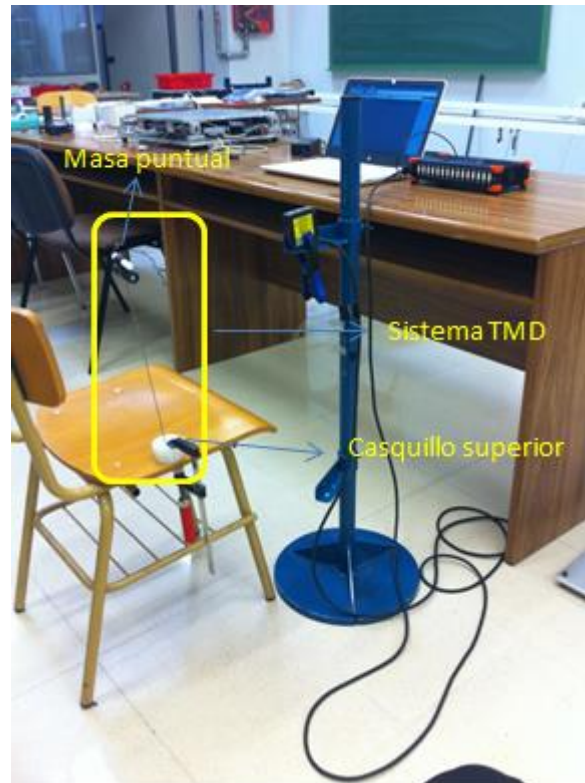


Figura 27. Toma de datos experimentales del sistema TMD a flexión



Figura 28. Toma de datos experimentales de la chimenea más el TMD a flexión



En primer lugar se va a proceder a explicar brevemente los equipos de medida utilizados y como realizar su configuración, posteriormente se desarrollará el método seguido para la recogida de los datos.

## 5.2 Instrumentos de medida

El instrumento de medida utilizado para la recogida de datos ha sido un sensor de desplazamiento o también llamado vibrómetro laser.

El láser es un instrumento que sirve para la cuantificación de oscilaciones mecánicas en una dirección. Se relaciona con la metrología de superficies de cuerpos relativamente medianos y microscópicos para ayudar a hacer el análisis modal y relacionar resultados con el Análisis de Elementos Finitos.

Este dispositivo tiene un láser, el cual se enfoca a la superficie a medir. Por el efecto *Doppler*, la frecuencia de la luz del láser que llega al objeto y se refleja varía si la superficie enfocada del objeto se desplaza.

En este trabajo el dispositivo laser que se ha utilizado es el que se ve en la figura 29, este es un sensor laser de la marca Panasonic modelo HL-G112-A-C5.

Este distanciómetro laser tiene un rango de medida de  $\pm 60$  mm. y una resolución de  $8 \mu\text{m}$ . En el anexo A se pueden encontrar las especificaciones completas.



**Figura 29. Distanciómetro laser**



**Figura 30. Detalle conector D-SUB**

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Para el funcionamiento del láser es necesario que tenga alimentación de energía eléctrica, para ello se ha colocado en el mismo conector un cable que sirve de alimentación y que se conectara al dispositivo de procesamiento de la señal (figura 31).



**Figura 31. Detalle conexión alimentación al laser**

### 5.3 Dispositivo de procesamiento de la señal



**Figura 32. Sirius HD-STG**

En la figura 32 se puede ver el hardware con el que se ha llevado a cabo el procesamiento y la adquisición de datos. El nombre del equipo es SIRIUS HD-STG y su desarrollador es el fabricante DEWESOFT.

Este equipo tiene 16 canales de entrada del tipo D-SUB (Figura 30) donde se pueden conectar diferentes sensores, de desplazamiento, de carga, acelerómetros, etc., en uno de estos canales se conecta el sensor láser de desplazamiento. Para poder procesar los datos registrados es necesario conectar el SIRIUS a un dispositivo donde se tenga instalado el software específico del equipo proporcionado por el fabricante (Dewesoft X2, versión XP5), para llevar a cabo la conexión SIRIUS dispone de un puerto USB 2.0 en la parte opuesta a los 16 canales. Las especificaciones y características restantes se pueden ver en el anexo B.

En la figura 33 se muestra un ejemplo de procesamiento de un registro de datos mediante el software del equipo.

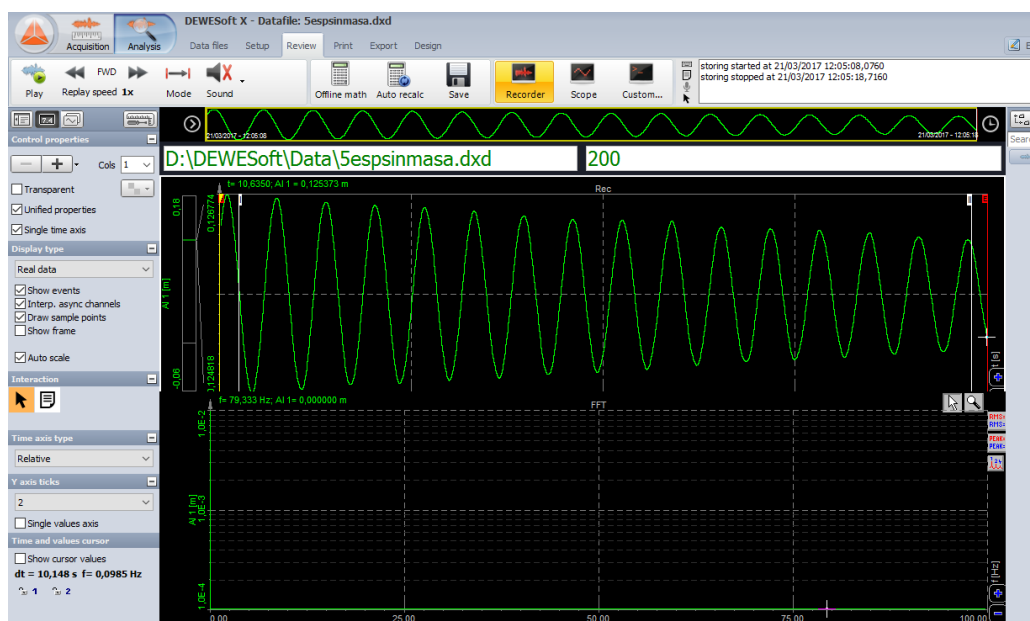


Figura 33. Registro de datos procesado

Este software nos permite visualizar el registro de la señal temporal en tiempo real, también nos permite ver la FFT, realizar grabaciones de señales y exportarlas en distintos formatos como por ejemplo .xls y .txt dentro de las muchas posibilidades que ofrece.

## 5.4 Configuración del software

La obtención de datos experimentales en este trabajo se centrará en la obtención de las frecuencias propias de vibración del tubo en diferentes situaciones de número de espiras activas del resorte y las frecuencias propias de vibración del sistema TMD en diferentes situaciones de masa puntual.

Este proceso se hace directamente mediante el software explicado anteriormente, es decir, no es necesario utilizar otros equipos para postprocesar de los datos registrados.

En primer lugar hay que conectar el sensor que se vaya a utilizar en uno de los 16 canales tipo D-SUB, en este caso se conecta el sensor láser de desplazamiento explicado en el apartado anterior. Una vez conectado lo siguiente a realizar es seleccionar dentro de la pestaña *Ch. setup* el canal en el que se ha conectado el

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

láser, es decir, el canal donde se ha conectado el láser pasará del estado *unused* al estado *used* y configurarlo a través de la pestaña *setup* (figura 34).

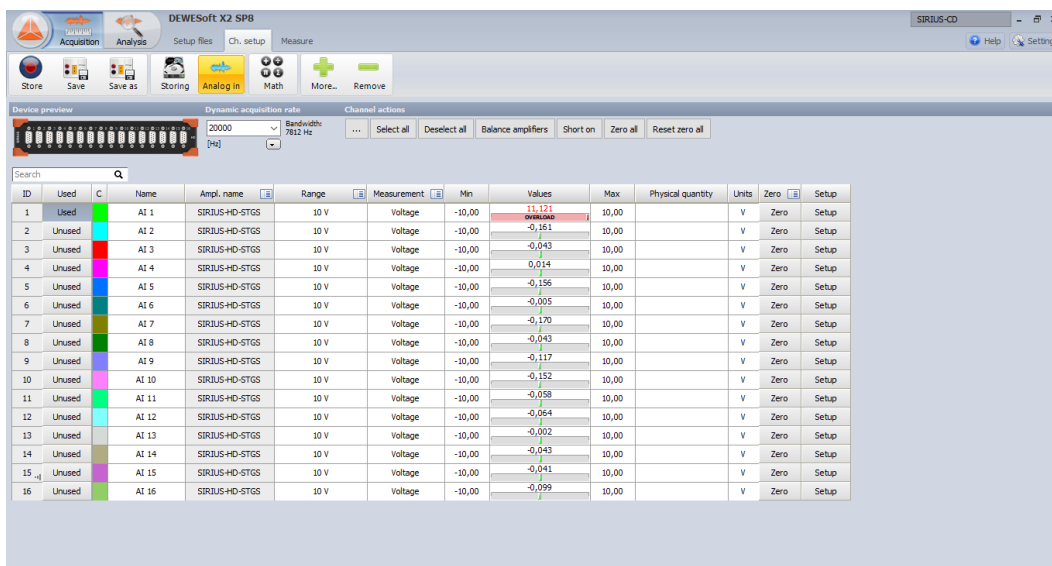


Figura 34. Interface del software para selección del láser

Una vez que se accede a la opción de configurar el láser, mediante la opción *setup*, saldrá la siguiente ventana que se muestra en la figura 35.

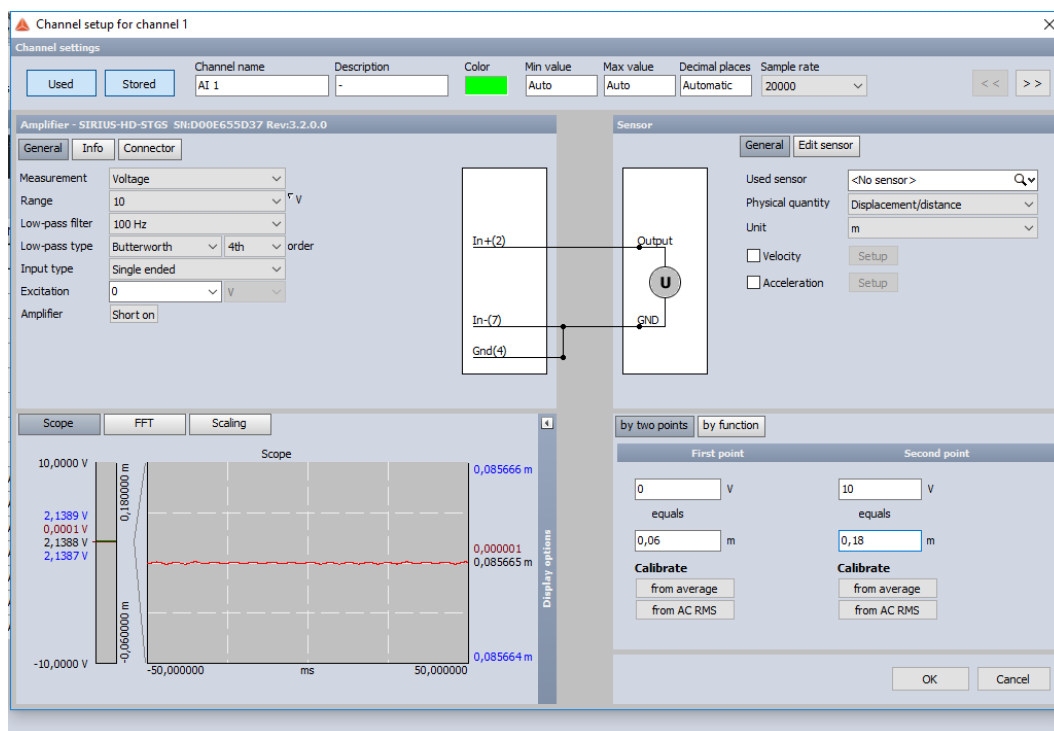
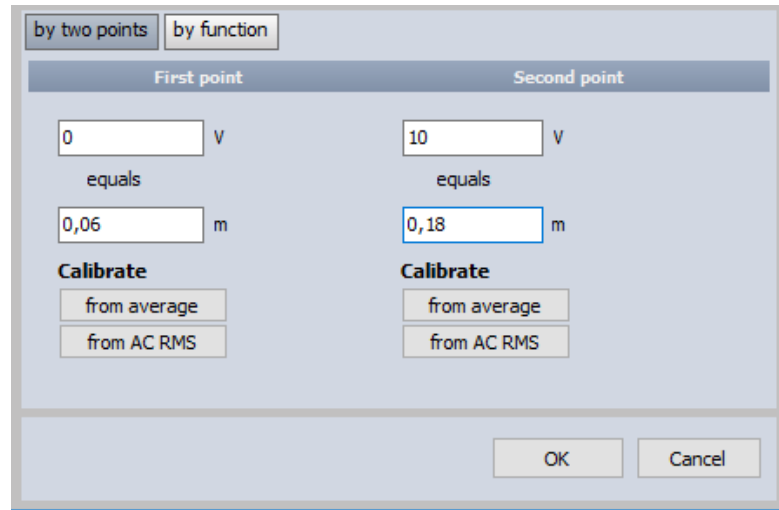


Figura 35. Interface del software para calibración del láser

Dentro de esta ventana es donde se dan los valores adecuados para la calibración requerida por el láser. En primer lugar se configuran los filtros para tener una señal limpia y sin ruido, para ello se establece el filtro de baja en 100 Hz y el tipo de filtro *Butterworth* de cuarto orden. En el caso del láser en la pestaña de cualidad física se selecciona desplazamiento y por último se introducen los valores requeridos por la calibración del láser, estos son 0,06 m para 0 V y 0,18 m para 10 V (figura 36).



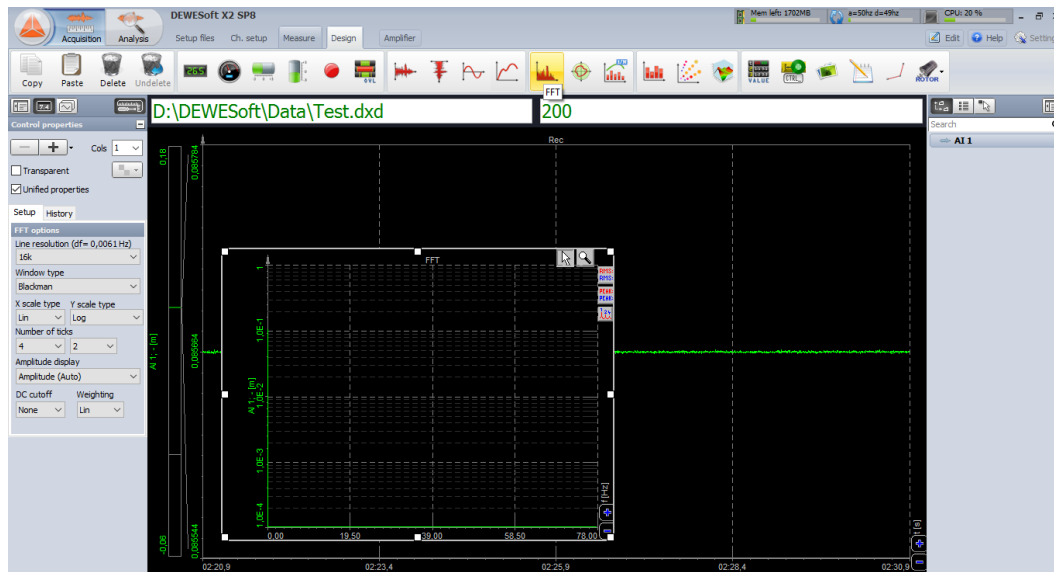
**Figura 36. Detalle de la interface en la calibración del láser**

A la hora de colocar el láser para obtener los registros experimentales hay que tener en cuenta la calibración, por lo que la distancia entre el láser y la superficie donde se refleja el mismo ha de estar entre los valores de 0,06 y 0,18 m, porque si la distancia es menor de 0,06 m el láser se encuentra fuera de rango y lo mismo ocurre si la distancia es mayor a 0,18m.

Terminada la calibración de los sensores se pasa a configurar la interface para obtener en pantalla los datos deseados de la señal registrada. Para este caso el diseño de interface que se va a utilizar es de dos pantallas, en una se muestra el desplazamiento en función del tiempo, es decir, la señal temporal en tiempo real y en la segunda se muestra la FFT correspondiente.

Por defecto el software solo muestra la pantalla de señal en tiempo real, para conseguir sacar la pantalla de la FFT hay que seleccionar la pestaña *Desing* que se encuentra dentro de la pestaña *Measure*. Una vez dentro se selecciona el icono que corresponde con la FFT, y una vez seleccionado aparece una nueva ventana que se puede colocar dentro de la interface (figura 37).

## Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

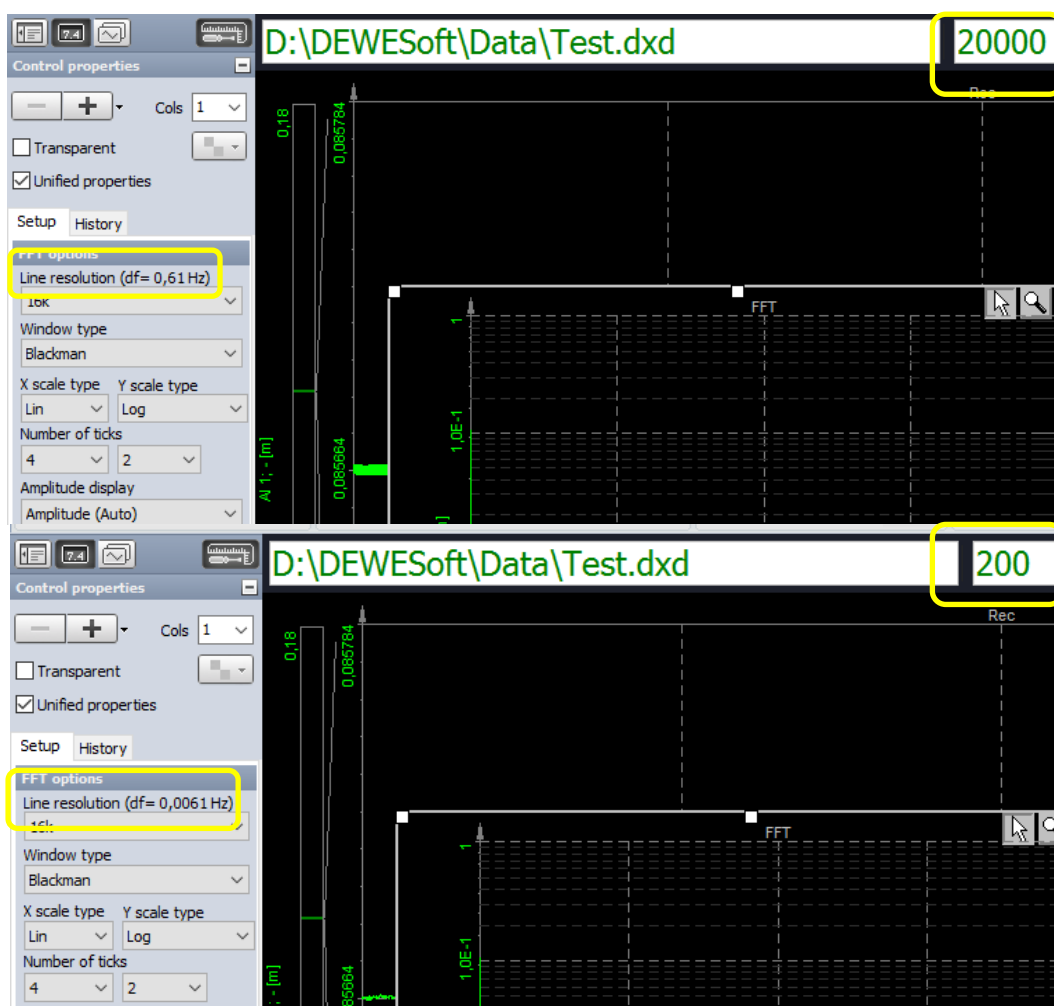


**Figura 37. Añadir pantalla FFT**

Esta nueva ventana requiere configurarla, en primer lugar es necesario que la escala del eje de ordenadas este en escala logarítmica para seleccionar esta opción se hace desde la parte izquierda de la pantalla dentro de la opción *setup*, también dentro de esta pestaña se selecciona la máxima resolución que acepte el sensor, en el caso del láser es 16k.

Para terminar, una última particularidad que hay que tener en cuenta que aunque no afecta al mal funcionamiento del software sí que afecta en la precisión de la frecuencia natural presentada en la pantalla, es la frecuencia de muestreo con que se está registrando la señal.

Para aclarar este último detalle a tener en cuenta, si por ejemplo la frecuencia de muestreo es de 20.000 datos por segundo la resolución que se obtiene es de 0.61 Hz sin embargo si la frecuencia de muestreo es de 200 datos por segundo se obtiene una frecuencia de 0.0061 Hz (figura 38).



**Figura 38. Detalle de la precisión en la frecuencia natural**

En este trabajo la frecuencia de muestreo se va a establecer en 200 datos por segundo, para todos los registros de datos experimentales para así tener una resolución admisible. El inconveniente de usar este valor de frecuencia de muestreo es que se necesita mayor cantidad de tiempo para tener la FFT, esto ocurre porque para obtener la FFT se necesitan un determinado número de datos.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables



## Capítulo 6. Movimiento oscilatorio

---

El estudio de las vibraciones se refiere a los movimientos oscilatorios de los cuerpos y a las fuerzas asociadas a ellos. Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar.

Los sistemas oscilatorios pueden clasificarse como lineales o no lineales. Para los sistemas lineales, rige el principio de la superposición y las técnicas matemáticas para su tratamiento están bien desarrolladas. Por el contrario las técnicas para el análisis de sistemas no lineales son menos conocidas y difíciles de aplicar. Sin embargo, algún conocimiento de sistemas no lineales es deseable puesto que todos los sistemas tienden a volverse no lineales cuando crece la amplitud de la oscilación.

Hay dos clases generales de vibraciones, libres o forzadas. La vibración libre es la que ocurre cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas inherentes al sistema mismo y cuando las fuerzas aplicadas externamente son inexistentes. El sistema bajo vibración libre vibrará a una o más de sus frecuencias naturales que son propiedades del sistema dinámico que dependen de su distribución de masa y de rigidez.

La vibración que tiene lugar bajo la excitación de fuerzas externas es una vibración forzada. Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es obligado a vibrar a la frecuencia de la excitación. Si esta coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce una situación de resonancia y ocurren oscilaciones peligrosamente grandes.

Todos los sistemas vibratorios están sometidos a cierto grado de amortiguamiento puesto que la energía se disipa por fricción y otras resistencias. Si el amortiguamiento es pequeño, tiene escasa influencia sobre las frecuencias naturales del sistema y, por consiguiente, los cálculos de las frecuencias naturales se hacen generalmente ignorando el amortiguamiento.

El número de coordenadas independientes que se requieren para describir el movimiento de un sistema, es el grado de libertad del sistema. Un cuerpo elástico continuo requerirá un número infinito de coordenadas (tres por cada punto) para describir su movimiento y, por lo tanto, tiene infinitos grados de libertad. Sin embargo, en muchos casos puede suponerse que partes de dicho cuerpos son rígidas y el sistema puede ser considerado dinámicamente equivalente a uno con un número finito de grados de libertad. En efecto, un número sorprendente de problemas de vibración pueden ser tratados, con

aproximación suficiente, reduciéndolos a un sistema con un grado de libertad [2]. A continuación se va a tratar sobre vibración libre no amortiguada en sistemas 2 grados de libertad, ya que más adelante se utilizarán las expresiones analíticas de este tipo de sistemas.

## 6.1 Vibración libre

Todo sistema que posea masa y elasticidad es capaz de vibrar libremente, es decir, sin excitación externa. De gran importancia para tales sistemas, es su frecuencia natural de vibración. El objetivo principal es escribir su ecuación de movimiento y evaluar su frecuencia natural que es principalmente una función de la masa y rigidez del sistema.

Un amortiguamiento moderado tiene poca influencia sobre la frecuencia natural y puede ignorarse. Puede entonces considerarse el sistema como conservativo y, el principio de la conservación de la energía ofrece otro método para el cálculo de la frecuencia natural. El efecto del amortiguamiento es especialmente evidente en la disminución de la amplitud de la vibración con el tiempo [2].

### 6.1.1 Ecuaciones de movimiento-Frecuencia natural

El sistema oscilatorio más simple consta de una masa y un resorte como el que se muestra en la Figura 39. Se supone despreciable la masa del resorte cuya rigidez es  $k$  Newtons por metro de deflexión. El sistema posee un grado de libertad puesto que en su movimiento queda descrito por una coordenada singular  $x$ .

Cuando se le pone en movimiento, la oscilación tendrá lugar a la frecuencia natural  $f_n$ , que es una propiedad del sistema. Ahora se examinará algunos de los conceptos básicos asociados con la vibración libre de sistemas con 1 grado de libertad.

La segunda ley de Newton es la primera base para examinar el movimiento del sistema. Como se muestra en la Figura 39 la deformación del resorte en la posición de equilibrio estático es  $\Delta$  y, la fuerza del resorte  $k\Delta$  es igual a la fuerza gravitacional  $W$  que actúa en la masa  $m$ :

$$k\Delta = W = mg$$

Midiendo el desplazamiento  $x$  a partir de la posición de equilibrio estático, las fuerzas que actúan en  $m$  son  $k(\Delta + x)$  y  $W$ . Si  $x$  se toma positiva hacia abajo, todas las cantidades-fuerza, velocidad y aceleración-son también positivas en la dirección vertical hacia abajo.

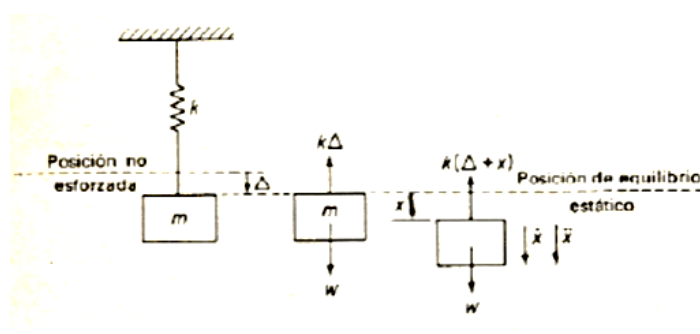


Figura 39. Sistema masa-resorte y diagrama de cuerpo libre

Se aplica ahora la segunda ley de Newton a la masa  $m$ :

$$m\ddot{x} = \sum F = W - k(\Delta + x)$$

Donde  $k\Delta = W$ , se obtiene

$$m\ddot{x} = -kx \quad (6.1)$$

Es evidente que la escogencia de la posición de equilibrio estático como referencia para  $x$  ha eliminado a  $W$ , la fuerza debida a la gravedad, y a la fuerza estática del resorte  $k\Delta$ , de la ecuación de movimiento y, la fuerza resultante en  $m$  es simplemente la fuerza de resorte debida al desplazamiento  $x$ .

Definiendo la frecuencia circular  $w_n$  por medio de la siguiente expresión:

$$w_n^2 = \frac{k}{m}$$

La ecuación (6.1) puede escribirse como

$$\ddot{x} + w_n^2 x = 0 \quad (6.2)$$

La expresión (6.2) es una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden, que se corresponde con la ecuación del movimiento armónico y tiene la siguiente solución general

$$x = A \sin w_n t + B \cos w_n t \quad (6.3)$$

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

En donde A y B son dos constantes arbitrarias. Estas se evalúan a partir de las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$  y la expresión (6.3) se reduce a

$$x = \frac{\dot{x}(0)}{w_n} \sin w_n t + x(0) \cos w_n t$$

El periodo natural de oscilación se establece a partir de  $w_n t = 2\pi$ , o

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Y la frecuencia natural es

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.4)$$

Estas cantidades pueden expresarse en función de la deflexión estática  $\Delta$ , donde  $k\Delta = mg$ . Así la ecuación (6.4) puede expresarse como

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

Y la frecuencia natural de un sistema de un grado de libertad queda determinada unívocamente por la deflexión estática  $\Delta$  [2].

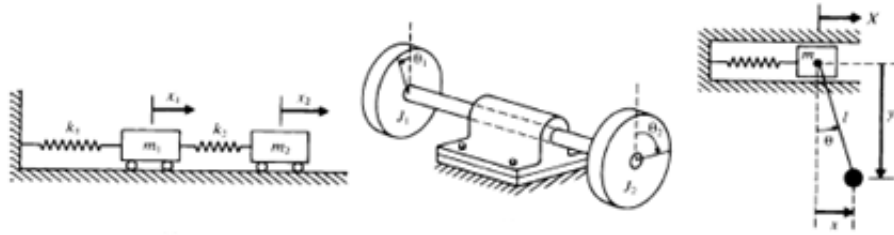
## 6.2 Sistemas de 2 grados de libertad

Para los sistemas de 1 grado de libertad se conoce que:

- Si un sistema no amortiguado es sacado de su posición de equilibrio y dejado en libertad, comienza a oscilar armónicamente con una frecuencia característica del sistema denominada frecuencia natural.
- El fenómeno de resonancia se presenta al excitar al sistema con una fuerza armónica de frecuencia igual a la frecuencia natural.

Los sistemas 2 gdl (grados de libertad) presentan importantes diferencias respecto a los sistemas de 1 gdl; de hecho su comportamiento es muy parecido a los sistemas de N grados de libertad. Aunque, si bien los conceptos matemáticos y físicos que aparecen en los sistemas con 2 gdl son idénticos a los de sistemas con N gdl, tienen la ventaja de que sus ecuaciones algebraicas son todavía

relativamente manejables y los ejemplos accesibles. Permiten, por ello, una formulación analítica sencilla y no dependiente del álgebra matricial.



**Figura 40. Sistemas mecánicos con 2 gdl**

Se puede ver que si un sistema con 2 gdl sin amortiguamiento es desplazado de su posición de equilibrio y dejado en libertad, no siempre realiza un movimiento armónico y ni tan siquiera periódico, sino solo para determinadas formas (tantas como gdl) de perturbar el equilibrio. Solo para dos tipos (2 gdl) de perturbaciones el movimiento subsiguiente es armónico y, en general, con distinta frecuencia para cada tipo de perturbación.

Un sistema con 2 gdl tendrá, por lo tanto, dos frecuencias naturales y, sometido a una excitación armónica, llegará a la condición de resonancia para dos frecuencias de excitación diferentes [3].

### 6.2.1 Ecuaciones del movimiento: Formulación matricial

Sea el sistema discreto de 2 gdl de la Figura 41.a. En este caso tan sencillo, las ecuaciones diferenciales del movimiento pueden obtenerse aplicando a cada una de las masas el Principio de D'Alembert y estableciendo el equilibrio de fuerzas en la dirección del movimiento.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

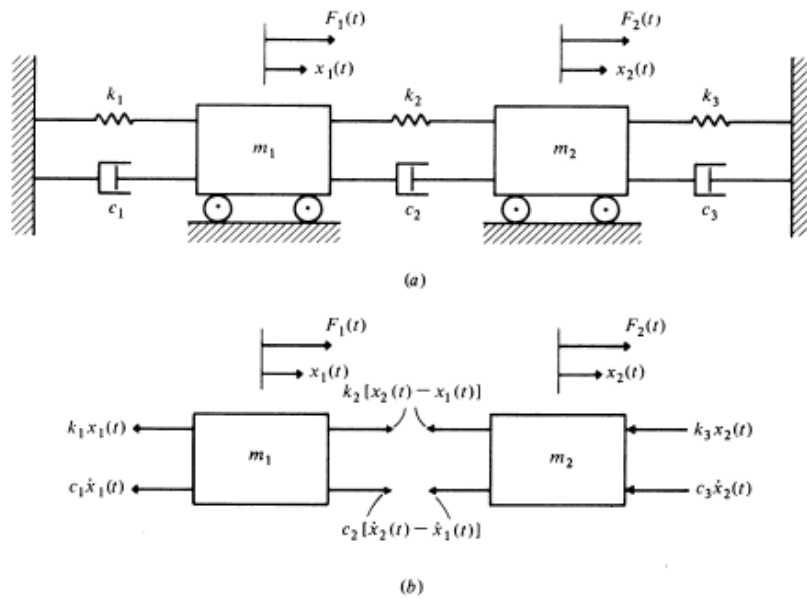


Figura 41. Sistema con 2 gdl

Así, teniendo en cuenta que la fuerza en el resorte y amortiguador centrales dependen de la posición y velocidades relativas entre ambas masas, estableciendo el equilibrio de las fuerzas en dirección  $x$ , puede verse en la Figura 41.b resultan las expresiones (6.5) y (6.6):

$$-m_1\ddot{x}_1 - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2 \cdot (x_2 - x_1) + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1(t) = 0 \quad (6.5)$$

$$-m_2\ddot{x}_2 - k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 + k_2 \cdot (x_2 - x_1) + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_2(t) = 0 \quad (6.6)$$

Ecuaciones diferenciales, que no son independientes y constituyen un sistema ya que ambas incógnitas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  aparecen en las dos, y pueden expresarse matricialmente, expresión (6.7):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

O, de forma más abreviada, con notación matricial mediante la expresión (6.8):

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (6.8)$$

Las matrices  $[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$ , llamadas respectivamente matriz de inercia, matriz de amortiguamiento y matriz de rigidez, son simétricas, como se puede apreciar.

Se observa, además, en este ejemplo que la matriz  $[M]$  es diagonal. Esta es una característica de los sistemas de parámetros discretos que no se presentan en muchas otras ocasiones. Si en la expresión las tres matrices  $[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$

fueran diagonales, las dos ecuaciones serían independientes o estarían desacopladas [3].

### 6.2.2 Vibraciones libres no amortiguadas. Modos de vibración

La resolución del problema de vibraciones libres no amortiguadas permitirá la determinación de los parámetros modales característicos del sistema de dos grados de libertad: sus dos frecuencias naturales y sus dos modos naturales de vibración.

Suponiendo que no hay fuerzas exteriores aplicadas al sistema y que los términos disipativos de energía son nulos, el sistema de ecuaciones del movimiento, expresión (6.7), se reduce a:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & -k_2 \\ -k_2 & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

Siendo,  $k_{11} = k_1 + k_2$  y  $k_{22} = k_2 + k_3$ , para el caso de la Figura 41a.

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales (6.9) puede abordarse por distintos procedimientos. Teniendo interés en la posibilidad de que el sistema realice un movimiento armónico sincrónico, se supondrán, soluciones de la forma:

$$x_1(t) = X_1 \cdot e^{i\omega t} \quad (6.10)$$

$$x_2(t) = X_2 \cdot e^{i\omega t} \quad (6.11)$$

Sustituyendo las expresiones (6.10) y (6.11) y sus segundas derivadas como requiere la expresión (6.9) se obtienen las siguientes ecuaciones (6.12) y (6.13):

$$(-m_1\omega^2 + k_{11}) \cdot X_1 - k_2 X_2 = 0 \quad (6.12)$$

$$-k_2 X_1 + (-m_2\omega^2 + k_{22}) \cdot X_2 = 0 \quad (6.13)$$

Lo que forma un sistema de ecuaciones en  $X_1$  y  $X_2$  (6.14):

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_{11} & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Para que dicho sistema tenga solución distinta de la idénticamente nula, se tendrá que cumplir que el determinante del sistema sea nulo:

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

$$\det \begin{vmatrix} -m_1 w^2 + k_{11} & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 w^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y ordenando, se obtiene una ecuación bicuadrática, que para este caso concreto queda de la siguiente forma:

$$w^2 = \frac{(m_1 k_{22} + m_2 k_{11})}{2m_1 m_2} \pm \frac{\sqrt{(m_1 k_{22} - m_2 k_{11})^2 + 4m_1 m_2 k_2^2}}{2m_1 m_2} \quad (6.15)$$

Si  $w_1^2$  y  $w_2^2$  son las dos soluciones de la ecuación (6.15), solo podrá tener lugar movimiento armónico en estas dos frecuencias  $w_1$  y  $w_2$  que son las frecuencias naturales del sistema.

El sistema de dos ecuaciones en  $X_1$  y  $X_2$ , expresiones (6.12) y (6.13) puede ponerse, a su vez, de la siguiente forma:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k_2}{k_{11} - w^2 m_1} \quad (6.16)$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k_{22} - w^2 m_2}{k_2} \quad (6.17)$$

Sustituyendo en cualquiera de estas expresiones los valores de  $w_1^2$  y  $w_2^2$  se determina la relación existente entre las amplitudes de los movimientos de las dos masas. Los movimientos síncronos que cumplen esta relación de amplitudes son armónicos, y reciben el nombre de modo natural de vibración. Hay dos modos naturales,  $(X_1^1, X_2^1)$  y  $(X_1^2, X_2^2)$ , uno para cada frecuencia  $w_1^2$  y  $w_2^2$ . Al desplazar el sistema de su posición de equilibrio según un modo natural y soltarlo, comenzara a oscilar libre y armónicamente a la frecuencia del modo.

Se puede demostrar que, ambos modos son ortonormales entre si respecto a las matrices de inercia y rigidez; es decir:

$$\{X_1^1, X_2^1\} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{X_1^1, X_2^1\} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & -k_2 \\ -k_2 & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} = 0$$

Como las dos amplitudes de un modo no están determinadas más que en la relación entre ellas, es una práctica habitual el normalizar los modos de forma que:



$$\{X_1^j, X_2^j\} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1^j \\ X_2^j \end{Bmatrix} = 1 \quad j = 1, 2 \quad [3].$$

Hasta el momento se han presentado las expresiones particularizadas para el ejemplo de la figura 39, si la expresión (6.14) se expresa de forma generalizada se tiene la siguiente expresión (6.18):

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + K_{rigidez}^{11} & K_{rigidez}^{12} \\ K_{rigidez}^{21} & -m_2\omega^2 + K_{rigidez}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Donde este sistema se suele expresar de la siguiente forma (6.19):

$$(-\omega^2[M] + [K]) \cdot \{X\} = \{0\} \quad (6.19)$$

Como ya se ha explicado para que la expresión (6.19) tenga solución distinta de la nula, el determinante de los términos dentro del paréntesis tiene que ser igual a cero.

Hay otra posibilidad de resolver el problema y es que se anule el término  $(-\omega^2[M] + [K]) \cdot \{X\}$ , o lo que es lo mismo:

$$[K]\{X\} = \omega^2[M]\{X\} \quad (6.20)$$

La expresión (6.20) se conoce como problema matricial de autovalores, y normalmente se expresa de la siguiente forma:

$$[K]\{\varphi_n\} = \lambda_n[M]\{\varphi_n\} \quad (6.21)$$

Donde  $\lambda_n = \omega^2$  y  $\{\varphi_n\} = \{X\}$

Para facilitar la resolución mediante métodos numéricos, se pasa la expresión (6.21) a la forma estándar de la siguiente forma:

$$[M]^{-1}[K]\{\varphi_n\} = [M]^{-1}[M]\lambda_n\{\varphi_n\}$$

$$[A]\{\varphi_n\} = \lambda_n\{\varphi_n\} \quad (6.22)$$

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## Capítulo 7. Dinámica de la rotación

---

El centro de masas se define como el punto que se comporta como si todas las fuerzas que actúan sobre el sistema se concentraran en él. El movimiento de un cuerpo extenso se puede describir en términos del movimiento traslacional de su centro de masas y del movimiento de los puntos del sistema respecto al centro de masas (por ejemplo, respecto a un eje que pasa por el). El estudio de este tipo de movimiento rotacional es análogo al traslacional, pero introduciendo nuevas magnitudes físicas que siempre tienen su equivalente lineal. Por ejemplo, si la ecuación de movimiento del centro de masas de un cuerpo relaciona aceleración con fuerzas externas, la de rotación, como se verá más adelante, relaciona aceleración angular con el momento de las fuerzas aplicadas.

La principal hipótesis simplificadora en el estudio de movimientos rotacionales suele ser la consideración del objeto a estudiar como un cuerpo rígido. Este es aquel sistema en que la distancia entre dos puntos cualesquiera no varía con el tiempo. Se considera que un cuerpo rígido describe un movimiento de rotación cuando cada una de sus partículas (salvo las que están sobre el eje) realiza un movimiento circular.

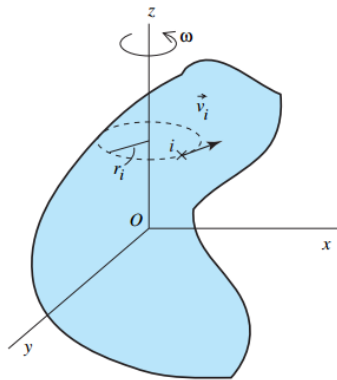
El movimiento más general de un cuerpo rígido tiene lugar cuando el eje de rotación cambia de dirección al mismo tiempo que se traslada. En este capítulo se estudiara la rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje que no cambia de orientación [4].

### 7.1 Energía cinética rotacional. Momento de inercia

Se considera un sólido rígido rotando con velocidad angular  $w$ , tal y como muestra la figura 42.

Su energía cinética se puede expresar como la suma de las energías cinéticas de todos los puntos que lo componen:

$$E_c = \sum_i^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i r_i^2 w^2 \quad (7.1)$$



**Figura 42. Sólido rígido rotando con velocidad  $w$**

Como  $w$  es igual para todos los puntos, la ecuación (7.1) puede ponerse de la siguiente forma:

$$E_c = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) w^2$$

Si se denomina  $I$  a la magnitud  $\sum_i m_i r_i^2$ , se obtiene la ecuación (7.2) para la energía cinética de la rotación similar a la de la traslación:

$$E_c = \frac{1}{2} I w^2 \quad (7.2)$$

La magnitud  $I$  se denomina momento de inercia del sistema y como se irá comprobando en este capítulo constituye de algún modo, la magnitud equivalente en dinámica de la rotación a la masa en dinámica de la traslación.

Conviene resaltar que en esta definición, las distancias que aparecen son las distancias de cada masa del sistema al eje de giro, luego el momento de inercia depende del eje de giro elegido [4].

## 7.2 Momento angular

El análogo rotacional del momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula es una nueva magnitud física denominada momento angular. Se define el momento angular de una partícula en un instante determinado y respecto a un cierto origen de coordenadas  $O$  como:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (7.3)$$

Donde en la expresión (7.3),  $\vec{r}$  es el vector de posición de la partícula respecto a ese origen y  $\vec{p}$  es su momento lineal en ese instante. Con esta definición se ve que  $\vec{l}$  es una magnitud vectorial, perpendicular tanto a  $\vec{r}$  como a  $\vec{p}$ .

Conviene recalcar que la definición de esta nueva magnitud depende del origen de coordenadas elegido, por lo que siempre que se hable de momento angular debe quedar claro a qué sistema de coordenadas se refiere [4].

### 7.3 Segunda ley de Newton para la rotación. Sistemas de partículas

Se define el momento angular total de un sistema de partículas como la suma de los momentos individuales de cada una:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{\tau}_t \quad (7.4)$$

Donde en la ecuación (7.4),  $\vec{\tau}_t$  representa el momento de fuerzas total sobre el sistema, que se puede descomponer en un momento asociado a fuerzas internas al sistema y otro a externas.

$$\vec{\tau}_t = \vec{\tau}_{int} + \vec{\tau}_{ext}$$

Es fácil darse cuenta que  $\vec{\tau}_{int} = 0$ . Por ejemplo en la Figura 43, para un sistema de dos partículas:

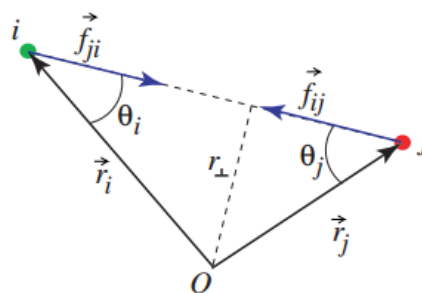


Figura 43. Fuerzas internas en sistema de dos partículas

$$-\vec{f}_{ij} = \vec{f}_{ji} \rightarrow \vec{f}_{ij} = \vec{f}_{ji}$$

Si el eje perpendicular al papel es el z:

$$\overline{\tau}_{int} = \vec{f}_{ji}(r_{\perp} - r_{\perp})\vec{k} = 0$$

La demostración para un número arbitrario de partículas será análoga. Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overline{\tau}_{ext} \quad (7.5)$$

La ecuación (7.5) es la expresión de la segunda ley de Newton para la rotación aplicada a un sistema de partículas.

Esta expresión no solo es válida en cualquier sistema de referencia inercial, sino que también lo es siempre respecto al sistema de referencia de centro de masas del sistema, aunque este acelerado. Es por esto que siempre se puede descomponer el movimiento de un cuerpo extenso en traslación del centro de masas y rotación respecto a él. En el primer caso se elige un sistema de referencia inercial y se aplica la segunda ley de Newton respecto a él. Para la rotación se considera como sistema de referencia el centro de masas y se aplica la segunda ley de Newton para la rotación respecto a él.

Se tratará a continuación expresar la segunda ley de Newton para la rotación de modo análogo a la ecuación,  $\vec{f} = m\vec{a}$ . Se considera un sólido rígido rotando alrededor del eje z y se toma como origen un punto cualquiera del eje, como se puede ver en la Figura 44

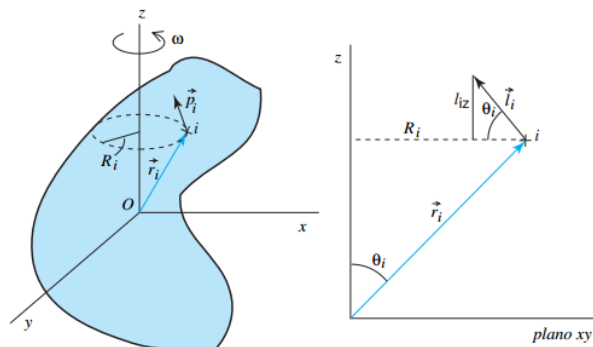


Figura 44. Momento angular de un sólido rígido

$$l_i = r_i p_i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = r_i m_i v_i = r_i R_i m_i \omega$$

Componente z de  $l_i$ :

$$l_i = r_i R_i m_i \omega \sin \theta_i \rightarrow l_{iz} = R_i^2 m_i \omega$$

Sumando para todas las partículas que forman el objeto:

$$L_z = \sum_{i=1}^n l_{iz} = \left( \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right) \omega = I \omega$$

Luego para todo sólido rígido, la componente sobre el eje de rotación del momento angular verifica una ecuación muy similar a  $p = mv$ . Aunque no se demuestre se puede comprobar que para cualquier sólido rígido con simetría axial se tiene la siguiente ecuación:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Es decir, que  $\vec{L}$  está dirigido en la dirección de  $\vec{\omega}$ . Pero no es cierto para cualquier sólido rígido. En resumen,

- Para un sólido rígido ( $I = cte$ ) cualquiera:

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha \rightarrow \tau_z = I \alpha \quad (7.6)$$

Donde  $\tau_z$  es la componente z de  $\vec{\tau}_{ext}$ .

- Si además de ser rígido tiene simetría de revolución:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha} \rightarrow \vec{\tau}_{ext} = I \vec{\alpha} \quad (7.7)$$

Las expresiones (7.6) y (7.7) constituyen la analogía rotacional de  $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$  para la segunda ley de Newton en movimientos lineales. De  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}$  [4].

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables



## Capítulo 8. Caracterización del sistema TMD

---

La caracterización del sistema TMD a flexión va a consistir en determinar la frecuencia natural de vibración para diferentes valores de masa en el extremo de la varilla. Los demás parámetros relativos al sistema TMD que son la longitud y la masa, sección y material de la varilla, van a permanecer constantes durante la caracterización del sistema.

La caracterización de este sistema se va a realizar mediante tres métodos, experimental, analítico y simulado. A continuación se va a explicar detalladamente como se ha procedido en cada uno de los métodos para llegar a determinar los resultados de la caracterización.

### 8.1 Modelo analítico. Expresión exacta

Como lo que se busca en la caracterización del sistema TMD es la frecuencia natural de vibración, se tiene que llegar a una expresión en la cual a partir de los parámetros conocidos del sistema TMD permita determinar dicha frecuencia de vibración.

El sistema TMD se comporta como una viga en voladizo con una masa puntual en su extremo libre orientada verticalmente, es decir como un medio continuo deformable, lo cual se puede ver en la figura 45.



**Figura 45. Viga en voladizo (TMD)**

Donde el empotramiento sería el casquillo superior y las masas puntuales el cuadrado que está colocado en el extremo superior, todo ello unido por la varilla que en la figura corresponde con la viga. El momento que ilustra la figura 45 es la situación donde el sistema TMD estaría oscilando alrededor de su posición de

equilibrio. Hay que destacar que en la viga en voladizo de la figura 45 se tienen tres grados de libertad, el desplazamiento horizontal, el giro y el desplazamiento longitudinal del extremo libre. En el sistema TMD solo se tiene un grado de libertad, que es el desplazamiento horizontal, es decir, el desplazamiento en dirección perpendicular a la varilla. Tanto el desplazamiento en dirección longitudinal como el giro de la sección libre se eliminan porque una condición para calcular experimentalmente la frecuencia del TMD es la de pequeños desplazamientos y de ese modo el grado de libertad correspondiente al giro y al desplazamiento longitudinal de la sección del extremo libre se puede despreciar.

Por tanto con lo expuesto anteriormente la expresión de la frecuencia natural para el sistema TMD es la misma que para una viga en voladizo con una masa puntual concentrada en su extremo libre:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{3EI}{L^3(M_i + 0.2357m_b)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1) \quad [1]$$

Esta es la expresión exacta de la frecuencia natural correspondiente al problema de la viga en voladizo con una masa puntual en su extremo libre, donde:

E, es el módulo de elasticidad de la viga en  $N/m^2$ .

I, es el momento de inercia de la sección de la viga en  $m^4$ .

L, es la longitud total de la viga en m.

$M_i$ , es la masa puntual en Kg.

$m_b$ , es la masa de la viga en Kg.

$f_n$ , es la frecuencia natural de vibración de la viga en  $s^{-1}$ .

Hay que decir que en la expresión (8.1) los parámetros que están referidos a la viga, en el sistema TMD se refieren a la varilla.

Hay que destacar que en la expresión (8.1) se está despreciando el efecto péndulo. Es decir, en un péndulo el sistema está formado por una masa puntual unida a un punto fijo mediante un elemento que no tiene rigidez. Donde la masa oscila respecto a su posición de equilibrio debido exclusivamente a la gravedad, porque si la masa puntual se saca de su posición de equilibrio el elemento que los une no tiene capacidad de devolver la masa a su posición inicial. Esto se puede ver en la expresión de la frecuencia natural de un péndulo (8.2):

$$f_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (8.2)$$

El sistema TMD al estar colocado en posición vertical la gravedad juega una parte dentro del movimiento alrededor de la posición de equilibrio, lo que se analizará más adelante cuanto de importante es la influencia de la gravedad y si es asumible despreciarla.

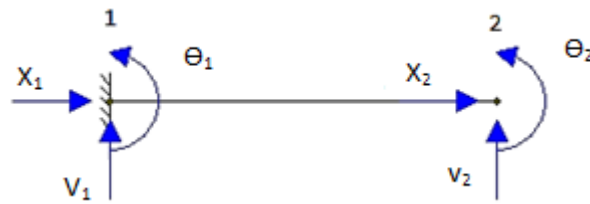
Llegado a este punto se tiene una primera expresión analítica (8.1) que no se ha deducido y que se corresponde con el modelo de una viga en voladizo con masa puntual en el extremo libre y en la que no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad porque es una expresión que está referida a estructuras, donde los desplazamientos son pequeños y las rigideces grandes y en esos casos la rigidez pendular  $\left(\frac{Mg}{L}, \text{si la varilla no tuviese masa}\right)$  se puede despreciar. A continuación se va a exponer una primera aproximación analítica para llegar a una expresión similar a (8.1) con la que obtener unos resultados en la caracterización del sistema TMD cercanos a los resultados de la expresión (8.1)

### 8.1.1 Aproximación matricial

A continuación se va a presentar un método analítico para llegar a una expresión aproximada de la expresión exacta de la frecuencia de una viga en voladizo con masa puntual en el extremo. Para poder explicarlo adecuadamente primero se ha tratado en el Capítulo 6 el movimiento oscilatorio en sistemas de 2 grados de libertad no amortiguados, que se corresponde con el sistema TMD omitiendo de momento que solo se tiene un grado de libertad. Para poder seguir con este método es necesario que se consideren 2 grados de libertad, aunque al final solo se tendrá en cuenta el desplazamiento en la dirección perpendicular como se estableció al inicio.

La forma de proceder para llegar a la expresión aproximada de la frecuencia natural en este método es igual que cuando se tiene un sistema de 2 grados de libertad, la única diferencia es que la frecuencia natural asociada al segundo grado de libertad no se tendrá en cuenta.

En la siguiente Figura 46 puede verse un esquema del sistema TMD orientado horizontalmente, donde el extremo 1 es el empotramiento que corresponde con la unión en el casquillo superior y el extremo 2 corresponde con el extremo libre en el que se encuentra la masa puntual.



**Figura 46. Grados de libertad del sistema TMD**

En el extremo 1 debido al empotramiento están restringidos los tres grados de libertad de la sección, en el segundo extremo al ser libre no está restringido ninguno de los grados de libertad. Dado que los movimientos para la caracterización del sistema TMD deben ser pequeños, se puede despreciar el grado de libertad que corresponde al movimiento en la dirección de la directriz de la varilla y el grado de libertad correspondiente al giro de la sección.

Aunque este último se pueda despreciar y se va a despreciar, es necesario tenerlo en cuenta para poder realizar este método de aproximación matricial.

De esta manera por lo visto en el Capítulo 6 al tener dos grados de libertad se obtendrán dos expresiones de frecuencias naturales de vibración, una correspondiente al grado de libertad en la dirección perpendicular a la directriz de la varilla y la segunda expresión de la frecuencia natural será la correspondiente al giro de la sección del extremo 2. De las dos expresiones que se obtendrán, la expresión aproximada a la expresión exacta (8.1) es la que se corresponde al grado de libertad perpendicular a la varilla.

Particularizando la expresión (6.4) correspondiente a la ecuación del movimiento para un sistema de 2 grados de libertad, para el estudio del sistema TMD, se llega a la expresión (8.3):

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (8.3)$$

En la cual no se tiene matriz de amortiguamiento  $[C]=[0]$ , ni aplicación de fuerzas externas  $F(t) = 0$ , ya que se trata de un sistema de vibración libre no amortiguado.

En este caso los grados de libertad son el desplazamiento vertical, según el esquema de la figura 39, y un giro. De ahora en adelante se denotará al desplazamiento mediante la letra 'v' y al giro a través de la letra 'θ'. Por tanto la expresión (8.3) tomará la siguiente forma:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (8.4)$$

Lo siguiente es determinar las matrices de rigidez  $[K]$  y de masa  $[M]$ , en primer lugar se determina la matriz de rigidez. Para ello en primer lugar se plantea la expresión (8.5) correspondiente al método matricial de la rigidez:

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\} \quad (8.5)$$

Dónde:

$\{F\}$  se corresponde con las fuerzas nodales equivalentes asociadas a las fuerzas exteriores aplicadas sobre la estructura.

$[K]$  es la matriz de rigidez que relaciona las fuerzas nodales equivalentes con los desplazamientos de los nodos de la estructura  $\{u\}$ .

Particularizando el método matricial de la rigidez para el sistema TMD, tomando la nomenclatura de la Figura 46 y las letras N, V y M para indicar los esfuerzos axiales, cortantes y flectores respectivamente, con el subíndice adecuado para referir cada uno de los extremos, sabiendo que la matriz de rigidez tiene la siguiente forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La expresión del método matricial de la rigidez adquiere el siguiente aspecto:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

De las condiciones de contorno del sistema TMD se tiene que todos los grados de libertad son nulos excepto, como ya se ha comentado anteriormente,  $v_2$  y  $\theta_2$ . Así, la matriz de rigidez se simplifica eliminando la filas y columnas: 1, 2, 3 y 4, y quedando la matriz de rigidez que se está buscando para la ecuación del movimiento del sistema TMD, a esta matriz resultante de la denotará como  $K_{TMD}$ :

$$K_{TMD} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Una vez determinada la matriz de rigidez para el sistema TMD, se continúa con la matriz de masas. Se conoce que la matriz de masas para una viga tiene la siguiente forma:

$$[M] = \frac{m \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Siendo  $m$  la masa lineal y  $L$  su longitud.

Al igual que en la matriz de rigidez, por las condiciones de contorno esta matriz de masas se simplifica de la misma manera quedando la matriz de masas para el sistema TMD, que se denotará como  $[M_{TMD}]$ :

$$[M_{TMD}] = \begin{bmatrix} \frac{156mL}{420} & \frac{-22mL^2}{420} \\ \frac{-22mL^2}{420} & \frac{4mL^3}{420} \end{bmatrix}$$

Hasta el momento no se ha tenido en cuenta dentro de la matriz de masas la masa puntual en el extremo libre. La masa puntual hay que tenerla en cuenta como un sumando dentro de los términos de la diagonal de la matriz de masas. En este caso como el grado de libertad que interesa es el perpendicular a la varilla el término de masa puntual se suma al elemento  $M_{TMD(1x1)}$ , porque es el término que multiplica a dicho grado de libertad. Por tanto la matriz de masas del TMD quedaría de la siguiente manera:

$$[M_{TMD}] = \begin{bmatrix} \frac{156mL}{420} + M_{puntual} & \frac{-22mL^2}{420} \\ \frac{-22mL^2}{420} & \frac{4mL^3}{420} \end{bmatrix}$$

Llegados a este punto ya se puede resolver la expresión (8.4), para ello se plantea la expresión general del problema matricial de valores propios (6.15) y se sustituyen las matrices calculadas anteriormente (8.6):

$$\left( -w^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{156mL}{420} + M_{puntual} & \frac{-22mL^2}{420} \\ \frac{-22mL^2}{420} & \frac{4mL^3}{420} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \right) \cdot \{X\} = \{0\} \quad (8.6)$$

Donde en el Capítulo 6 se ha visto que para que tenga solución distinta de la propiamente nula, el determinante del sistema tiene que ser igual a cero:

$$\det \begin{vmatrix} -w^2 \left( \frac{156mL}{420} + M_{puntual} \right) + \frac{12EI}{L^3} & -w^2 \left( \frac{-22mL^2}{420} \right) + \frac{-6EI}{L^2} \\ -w^2 \left( \frac{-22mL^2}{420} \right) + \frac{-6EI}{L^2} & -w^2 \left( \frac{4mL^3}{420} \right) + \frac{4EI}{L} \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver este determinante se tendrá un ecuación bicuadrática en  $w$ , es decir, se tendrán cuatro posibles soluciones de la frecuencia natural del sistema TMD. De las cuatro dos no serán de interés ya que son negativas y las otras dos corresponden con los dos grados de libertad, de estas dos solo interesa la que corresponde con el grado de libertad del desplazamiento.

El objetivo era llegar a una expresión aproximada a la exacta del modelo analítico (8.1), pero debido a que las expresiones se complican mucho no ha sido posible llegar a tener la expresión en una forma similar. Sin embargo, este método se ha programado en Matlab para poder determinar la expresión de la frecuencia natural asociada al desplazamiento en la dirección perpendicular a la varilla de forma simbólica y numérica, y de las dos formas explicadas dentro del Capítulo 6.

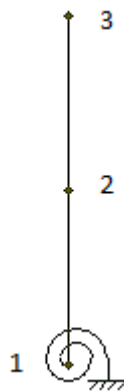
En el anexo C se encuentra este script, en donde, hay que destacar que para la resolución del problema de autovalores se ha utilizado el comando 'eig()', el cual da como resultado dos matrices [V] y [D]. En la matriz [D] se tiene en las posiciones de la diagonal las frecuencias asociadas a los grados de libertad, en este caso interesa la primera posición. En la matriz [V] por columnas se tiene los modos de vibración, que en este caso no son de interés.

Se utilizara el script del anexo C para caracterizar también el sistema TMD y poder comparar como de aproximado es este método respecto a la expresión exacta (8.1). Hay que destacar que en este método matricial aproximado al igual que en el método exacto no se tiene en cuenta la gravedad.

### 8.1.2 Aproximación por sólido rígido

Hasta el momento, para el cálculo de la expresión analítica de la frecuencia natural de vibración del sistema TMD se ha considerado un sólido deformable, tanto en la expresión (8.1) que se corresponde con la expresión exacta como en el método de aproximación matricial.

En esta nueva aproximación a la ecuación (8.1) el sistema TMD se modela como un sólido rígido con un grado de libertad.



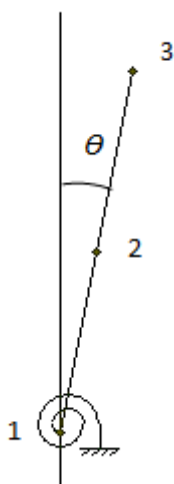
**Figura 47. Modelo de sólido rígido del sistema TMD**

Para poder modelar el sistema TMD a través de un sólido rígido es necesario introducir un muelle con un cierto valor de rigidez torsional para permitir el movimiento real del TMD como sólido deformable.

En la Figura 47 el punto 1 se corresponde con el origen del sistema de referencia, más adelante se detallara el sistema de referencia escogido, el punto 2 se corresponde con el centro de masas de la varilla y el punto 3 se ajusta a la posición de las masas puntuales, las cuales en este modelo se modelan como un punto con el valor de masa correspondiente en cada caso.

Si en un determinado instante el sistema TMD se desplaza de su posición de equilibrio, este comienza a oscilar alrededor de dicha posición. En la Figura 48 puede verse esta situación donde también se indica el grado de libertad del modelo,  $\theta$ .





**Figura 48. Grado de libertad del modelo de sólido rígido (sistema TMD)**

Para llevar a cabo la resolución del problema se va a utilizar la teoría y algunas de las expresiones que se encuentran en el Capítulo 7. El sólido rígido que modela el sistema TMD se compone a su vez de dos sólidos, el primero es la varilla y el segundo son las masas puntuales. Para cada sólido se determina su centro de gravedad, anteriormente ya se ha indicado que el punto 2 corresponde con el centro de gravedad de la varilla (sólido 1), las masas en el extremo (sólido 2) se consideran como un punto en el esquema del modelo, por lo que su centro de gravedad se sitúa en el punto 3.

El sistema de referencia escogido es fijo situándose su origen en el punto 1, donde el eje Z está orientado en dirección vertical y sentido positivo hacia arriba y el eje X orientado en dirección horizontal y sentido positivo hacia la derecha, por lo que el eje Y es perpendicular al papel y con sentido positivo hacia fuera del mismo y es el eje de giro del sistema.

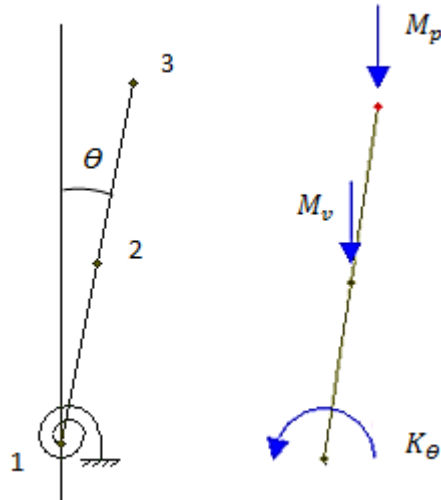
El planteamiento para determinar la expresión de la frecuencia natural de vibración del sistema TMD es llegar a la ecuación de movimiento (6.2) del sistema de la Figura 48 en función de la variable del grado de libertad  $\theta$ :

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (8.7)$$

Para ello se va a plantear la segunda ecuación de la ley de Newton para la rotación vista en el Capítulo 7. Debido a que el sólido rígido objeto de estudio posee simetría de revolución se va a utilizar la expresión (7.6):

$$\tau = I\alpha \quad (8.8)$$

$\tau$  corresponde con el momento de las fuerzas total sobre el sistema. En este problema este término se calcula en el punto de origen del sistema de referencia, es decir, en el punto 1. Para calcular este término en primer lugar se plantea el diagrama de sólido libre, Figura 49, en la situación donde se encuentra fuera del equilibrio.



**Figura 49. Diagrama de sólido libre (sistema TMD)**

En la Figura 49, puede verse que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso de la varilla ( $M_v \cdot g$ ), el peso de las masas puntuales en el extremo ( $M_p \cdot g$ ) y el momento producido por la rigidez torsional del resorte ( $K_\theta \cdot \theta$ ). Las fuerzas debidas a la masa de la varilla y a las masas puntuales en el extremo, están aplicadas en el centro de gravedad de cada sólido.

Determinadas ya las fuerzas que actúan en el sistema el siguiente paso es calcular el término  $\tau$ . Para ello se toman momentos respecto del punto 1 y tomando como sentido positivo el sentido de las agujas del reloj, se obtiene la siguiente expresión:

$$M_p g L_v \sin \theta + M_v g \frac{L_v}{2} \sin \theta - K_\theta \theta = \tau \quad (8.9)$$

Donde  $L_v$  se corresponde con la longitud de la varilla del TMD.

El siguiente término a calcular de la expresión (8.8) es  $I$ , que es el momento de inercia del sólido rígido respecto al eje de rotación, que como se ha indicado anteriormente coincide con el eje Y del sistema de referencia.

Este término se calcula como el momento de inercia de una varilla respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos más el momento de inercia debido a las masas puntuales respecto al punto 1, es decir:

$$I = I_v + I_{M_p} \quad (8.10)$$

Donde  $I_v$  es el momento de inercia de la varilla respecto al eje Y que pasa por el punto 1. Este término se calcula a partir de la siguiente expresión conocida que se corresponde con el momento de inercia de una varilla respecto un eje que pasa por uno de sus extremos:

$$I_v = \frac{1}{3} M_v L_v^2$$

El término  $I_{M_p}$  se calcula como momento de inercia de una masa puntual, porque así se consideran las masas puntuales en el extremo del sistema TMD. Por tanto este término adquiere la siguiente expresión:

$$I_{M_p} = M_p \cdot L_v^2$$

De esta forma queda determinado el momento de inercia de la aproximación de sólido rígido del sistema TMD respecto al eje de giro que pasa por el punto 1, ya que todos los parámetros que intervienen en las expresiones son conocidos.

El último término de la expresión (8.8) es  $\alpha$ , que corresponde con la aceleración angular del centro de gravedad del sólido rígido. En este problema todos los puntos del sólido van a tener la misma velocidad y aceleración angular. El grado de libertad en el problema se ha determinado mediante la letra  $\theta$ , esta es la coordenada de posición del centro de gravedad del sólido rígido, para que la expresión (8.8) quede en función de la misma variable, es decir, en función de la variable  $\theta$  la aceleración angular  $\alpha$  se sustituye por  $\ddot{\theta}$ .

Así sustituyendo en la expresión (8.8) las expresiones (8.9) y (8.10) se obtiene la siguiente expresión:

$$M_p g L_v \sin \theta + M_v g \frac{L_v}{2} \sin \theta - K_\theta \theta = \left( \frac{1}{3} M_v L_v^2 + M_p \cdot L_v^2 \right) \cdot \ddot{\theta} \quad (8.11)$$

Manipulando la expresión (8.11) y con la aproximación para ángulos pequeños ( $\theta \Downarrow \rightarrow (\sin \theta) = \theta$ ), se llega a la siguiente expresión:

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{K_\theta - M_p g L_v - M_v g \frac{L_v}{2}}{\frac{1}{3} M_v L_v^2 + M_p \cdot L_v^2} \right) \cdot \theta = 0 \quad (8.11)$$

Donde la expresión (8.11) se corresponde con la ecuación de movimiento del modelo de sólido rígido del sistema TMD. El término que está dentro del paréntesis se corresponde con  $w_n^2$  (8.7). De este término se conoce el valor de todos los parámetros excepto la rigidez torsional del resorte  $K_\theta$ . El valor que adopta la rigidez del resorte es el siguiente:

$$K_\theta = \frac{3EI}{L}$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material de la varilla del TMD,  $I$  es el momento de inercia de la sección de la varilla y  $L$  la longitud de la varilla del TMD. Este valor se obtiene de la expresión (8.1) donde la frecuencia es el cociente de una rigidez entre una masa, hablando en términos generales. La única diferencia que en la expresión (8.1) la longitud esta elevada al cubo y aquí no, la razón es porque así la expresión (8.11) es dimensionalmente correcta, al igual que puede verse también que los dos términos tienen como unidades [Nm].

De esta manera la expresión (8.11) tiene la siguiente forma:

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{\frac{3EI}{L} - M_p g L_v - M_v g \frac{L_v}{2}}{\frac{1}{3} M_v L_v^2 + M_p \cdot L_v^2} \right) \cdot \theta = 0 \quad (8.12)$$

La frecuencia natural es el cociente de una rigidez  $K$  [N/m] entre un masa  $M$  [Kg]. Para conseguirlo se divide el todo el término que esta entre paréntesis en la expresión (8.12) por  $L_v^2$ :

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{\frac{3EI}{L_v^3} - \frac{M_p g}{L_v} - \frac{M_v g}{2L_v}}{\frac{1}{3} M_v + M_p} \right) \cdot \theta = 0 \quad (8.13)$$

Donde en la expresión (8.13)

$$w_n = \sqrt{\frac{\frac{3EI}{L_v^3} - \frac{M_p g}{L_v} - \frac{M_v g}{2L_v}}{\frac{1}{3} M_v + M_p}}$$

En esta expresión se puede ver que el termino de rigidez es el del numerador y sus unidades son [N/m] y el denominador se corresponde con el termino de masas y sus unidades son [Kg]. Las unidades de  $w_n$  en esta expresión están en el SI, que son [rad/s], si se quiere expresarlo en Hz. hay que dividirlo entre  $2\pi$ , expresión (8.14):

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{3EI}{L_v^3} - \frac{M_p g}{L_v} - \frac{M_v g}{2L_v}}{\frac{1}{3}M_v + M_p}} \quad (8.14)$$

Por lo tanto se ha llegado a una expresión aproximada de la frecuencia natural de vibración para el sistema TMD en función de las masas puntuales en el extremo libre. En (8.14) a diferencia de (8.1) y de la expresión aproximada por el método matricial, puede verse que está incluido el efecto de la gravedad, es decir, esta es la expresión que más debe aproximarse a la realidad si solamente nos ceñimos a la influencia del efecto péndulo.

Por tanto a la hora de caracterizar el sistema TMD con este método analítico se procederá a realizarlo con efecto de la gravedad a través de la expresión (8.14) y sin efecto de la gravedad mediante (8.15):

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{L_v^3 \left(\frac{1}{3}M_v + M_p\right)}} \quad (8.15)$$

Donde (8.15) es la expresión aproximada a la expresión exacta (8.1) del modelo analítico, ya que en las dos expresiones no se tiene en cuenta el efecto péndulo. Puede notarse que mediante dos planteamientos diferentes, uno considerando el sistema como un sólido deformable y el otro considerando el sistema como sólido rígido, se han obtenido dos expresiones muy similares.

En el capítulo de resultados se presentarán las frecuencias obtenidas en la caracterización del sistema TMD con las diferentes aproximaciones dentro del método analítico y se podrá evaluar la influencia de la gravedad en los resultados obtenidos.

## 8.2 Modelo experimental

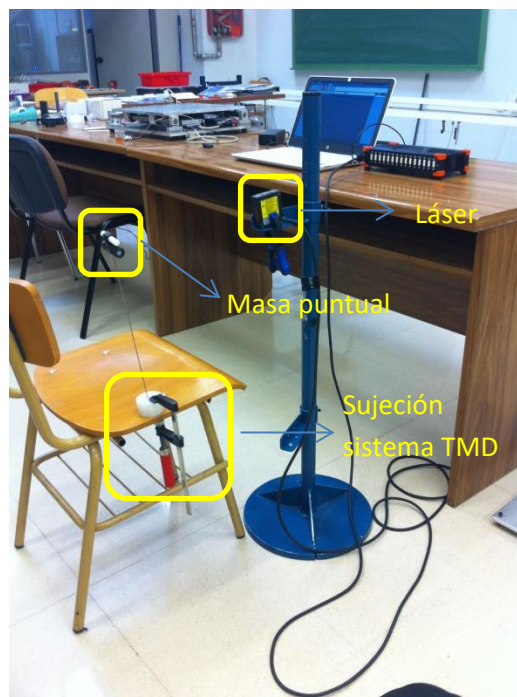
En el modelo experimental se explica el procedimiento que se ha seguido en el laboratorio S10 de la Escuela de Ingenieros Industriales para llegar a determinar la frecuencia natural de vibración del sistema TMD en función de la masa en el extremo, es decir, realizar la caracterización del sistema.

Los instrumentos de medida que se utilizan en este modelo experimental están explicados detalladamente dentro del Capítulo 5, también dentro de este

capítulo se ha explicado la manera de conectarlos entre ellos y como realizar la configuración adecuada en software con el que se procesan los registros de datos.

Este apartado se centra en explicar cómo se procede para la toma de datos una vez que se tengan los dispositivos de medida correctamente conectados, esto como se ha dicho anteriormente se explica en el Capítulo 5.

Una vez conectados los dispositivos de medida y configurado correctamente el software y el láser, se continúa colocando adecuadamente el sistema TMD para proceder a la toma de datos experimentales. En primer lugar se monta el sistema TMD como se ha explicado dentro del Capítulo 4, una vez montado se fija en una silla mediante un sargento, como se puede ver en la Figura 50.



**Figura 50. Modelo experimental del sistema TMD**

A una distancia donde no se encuentre fuera de rango se coloca el láser, dentro del Capítulo 5 se recoge el rango de este dispositivo. Para colocarlo adecuadamente se hace uso de un soporte que permite regular el láser en altura, de ese modo se hace incidir la luz en las masas puntuales, es decir, en una de las tuercas. Hay que destacar que para recoger una buena señal y así tener un resultado de frecuencia correcto se intenta que la luz incida en una misma referencia durante la toma de datos para cada situación de masa en el extremo. Para conseguirlo se hace incidir la luz del láser en una tuerca de entre todas las que están colocadas y a la hora de sacar el sistema TMD fuera de su posición de

equilibrio para que empiece a oscilar se hace mediante un pequeño desplazamiento.

La caracterización de este sistema se realiza para cuatro valores diferentes de masa puntual en el extremo. Una vez que se tiene todo colocado la forma de proceder para colocar los diferentes valores de masas puntuales es, sacar los tornillos de plástico de la varilla del TMD y colocar las tuercas adecuadas para llegar al valor de masa puntual en el extremo establecida. Los valores de la masa puntual se han medido con báscula de la Figura 51, más adelante en el capítulo de resultados se detallan cuáles son los diferentes valores de masa puntual que se tienen que colocar en el extremo.



Figura 51. Báscula

Una vez que se saca del equilibrio al sistema TMD, mediante un golpe pequeño, este comienza a oscilar y el dispositivo de procesamiento de señal trata los datos recogidos por el láser mostrando en el display del software la señal de amplitud en función del tiempo.

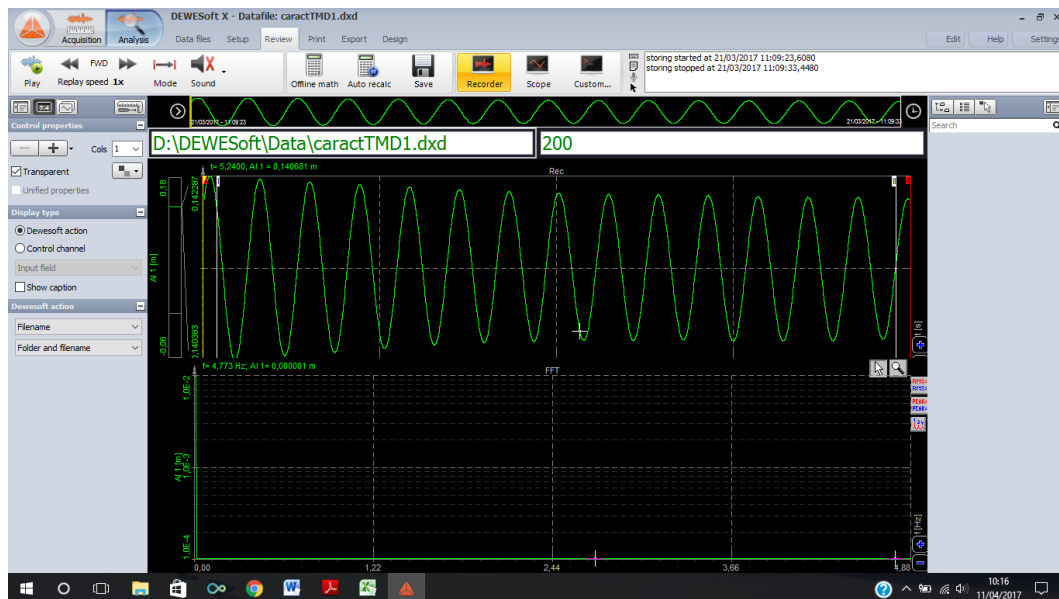


Figura 52. Datos experimentales del sistema TMD

En la Figura 52 se puede ver que en el display del software aparecen dos pantallas, la superior es el registro temporal del láser donde se representa la amplitud en función del tiempo y la pantalla inferior es la FFT (Transformada rápida de Fourier) que debido a que la frecuencia de muestreo es pequeña para que la precisión en la frecuencia natural sea alta, se necesita mucho tiempo para que aparezca el pico de la frecuencia natural de vibración.

Por tanto para determinar la frecuencia natural de vibración no se va a realizar a través de la FFT sino que se va a hacer a través de la señal temporal de la amplitud. Para ello se toma se utiliza la inversa del periodo, es decir, se toma el valor del tiempo de la última y la primera cresta se divide entre el número de periodos que hay entre las dos crestas y se hace la inversa de dicho cociente, expresándolo de forma general:

$$f_n = \left( \frac{t_2 - t_1}{N^{\circ} \text{ periodos}} \right)^{-1} \quad (8.16)$$

Por lo tanto a través de la expresión (8.16) será como se calcule la frecuencia natural de vibración del sistema TMD para los cuatro casos de masa puntual en el extremo. En el capítulo de resultados se detallarán los valores de frecuencias obtenidos y poder compararlos con el resto de los modelos de caracterización del sistema TMD. Hay que esperar que de las diferentes aproximaciones respecto al modelo analítico exacto la que más se aproxime a los resultados del modelo experimental sea la expresión donde se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, es decir, la expresión deducida a través del modelo de sólido rígido en la que se tiene en cuenta el efecto pendular.

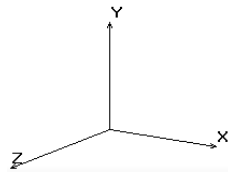
### 8.3 Modelo simulado. Cosmos

En este apartado se explica cómo se realiza la simulación del sistema TMD en Cosmos, para los otros dos sistemas, chimenea y chimenea mas sistema TMD, el modelo simulado también se realiza a través de este mismo programa. Cosmos es un software que permite calcular desplazamientos y frecuencias naturales de vibración para estructuras definidas previamente.

Para definir el sistema TMD en primer lugar se crean los materiales que lo componen, introduciendo el valor de la densidad y de su módulo de elasticidad. En este sistema solo es necesario crear el material de la varilla, es decir, acero. Los siguientes parámetros que se definen son la longitud, diámetro de la varilla y

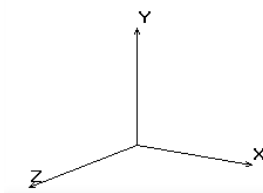
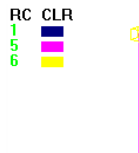


el valor de la masa en el extremo, este último será el parámetro que hay que ir modificando en los diferentes casos de la caracterización de este sistema.



**Figura 53. Postprocesado geométrico del sistema TMD**

En la Figura 53 se muestra el postprocesado geométrico correspondiente al sistema TMD, donde en color verde se muestra la curva número 5 que se sitúa entre los puntos 5 y 7.



**Figura 54. Mallado del sistema TMD**

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

El mallado realizado para el sistema TMD es el siguiente, la varilla se malla con un elemento finito tipo viga y la masa puntual se malla con un elemento finito tipo cubo, esto puede verse en la Figura 54.

Por último, una vez que se ejecuta el script que se encuentra en el anexo E, el programa muestra la deformada del sistema TMD y una tabla con los valores de la frecuencia natural de vibración del sistema.

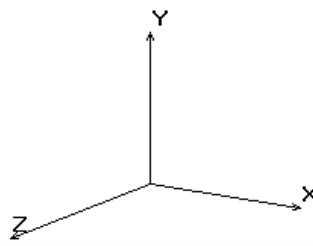


Figura 55. Deformada del sistema TMD

En la Figura 55, se muestra al mismo tiempo la indeformada y la deformada del sistema TMD correspondiente al modo 1 de vibración en una de las direcciones principales.

Frequency#	Frequency (Rad/sec)	Frequency (cycles/sec)	Period (seconds)
1	9.62429e+000	1.53175e+000	6.52847e-001
2	9.63392e+000	1.53329e+000	6.52194e-001
3	4.07666e+002	6.48820e+001	1.54126e-002
4	4.08074e+002	6.49470e+001	1.53972e-002
5	1.31173e+003	2.08769e+002	4.78999e-003
6	1.31305e+003	2.08978e+002	4.78520e-003
7	2.65050e+003	4.21839e+002	2.37057e-003
8	2.65315e+003	4.22262e+002	2.36820e-003
9	3.50616e+003	5.58023e+002	1.79204e-003
10	4.00968e+003	6.38161e+002	1.56700e-003

Figura 56. Tabla de resultados del Cosmos (sistema TMD)

En la Figura 56 se presenta la tabla de resultados que el programa Cosmos muestra una vez que se ha ejecutado el script del anexo E en el caso donde solo se tiene activado la parte correspondiente al sistema TMD. De todos los valores que aparecen en dicha tabla interesa el que aparece dentro del recuadro amarillo, que corresponde con la frecuencia natural de vibración del modo 1 en la dirección de vibración que se ha presentado en la Figura 55.

Por tanto la caracterización del sistema TMD mediante el modelo simulado va a consistir en ejecutar el script que se encuentra en el anexo E, dejando solo activo la parte correspondiente al mismo, e ir variando la masa en el extremo, que en el script del anexo E se define a través del parámetro 'mTMD', según los valores establecidos los cuales se detallan en el capítulo de resultados.

A través de este modelo simulado la determinación de los valores de la frecuencia natural de vibración del sistema TMD se realiza sin tener en cuenta el efecto de la gravedad, por tanto es de esperar que los resultados mediante este modelo estén próximos a los resultados obtenidos con las expresiones del modelo analítico, las cuales no tienen en cuenta el efecto de la gravedad. Más adelante en el capítulo de resultados como ya se ha comentado anteriormente se va a determinar si es asumible despreciar la gravedad en este sistema o no, si la conclusión es que no es asumible despreciar el efecto de la gravedad dentro del capítulo de resultados referente al modelo simulado del sistema TMD se presentara el ajuste necesario para corregir el error cometido debido a no contemplar el efecto de la gravedad.

Hay que destacar que en el mencionado script del anexo E se encuentra el programa correspondiente al modelo simulado en Cosmos del sistema al completo, es decir, de la chimenea más el sistema TMD. Para poder simular solamente el sistema TMD, como se ha mencionado anteriormente, es necesario desactivar la parte correspondiente al modelado de la chimenea.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## Capítulo 9. Caracterización de la Chimenea

La caracterización de la chimenea consiste en determinar la frecuencia natural de vibración en función del número de espiras activas del resorte para distintos valores de masa puntual en el extremo. Estos dos parámetros son los únicos que se modifican durante la caracterización.

La caracterización de la chimenea al igual que la del sistema TMD se realiza a través de tres métodos: analítico, experimental y simulado. A continuación se explica detalladamente la manera de proceder en cada uno de los métodos para llegar a determinar el resultado de la caracterización de la chimenea.

### 9.1 Modelo analítico

Se va a detallar el proceso seguido para determinar una expresión mediante la cual se pueda determinar el valor de la frecuencia natural de vibración en función del número de espiras activas del resorte y del valor de la masa puntual en el extremo.

El modelo analítico que se ajusta a la realidad, es decir, a la maqueta de la chimenea, es un modelo de sólido rígido con un grado de libertad. Este modelo es igual al que ya se ha presentado en la aproximación por sólido rígido en el modelo analítico del sistema TMD (Figura 47), con la diferencia de que en el sistema TMD el modelo era una aproximación al sistema real y aquí el modelo es el que se ajusta a la realidad.

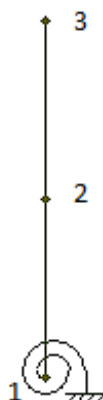
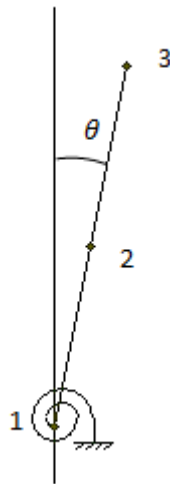


Figura 57. Modelo analítico de la chimenea

En la Figura 57 se puede ver el modelo de sólido rígido para la chimenea, donde el punto 1 corresponde con la unión ente el resorte y el casquillo inferior, en este punto se tiene el origen del sistema de referencia. En el punto dos se sitúa el centro de masas de la chimenea, es decir, del tubo y el punto 3 corresponde con la masa puntual que se modela como un punto.

El sistema de referencia que se escoge, es uno fijo con el origen en el punto 1. Donde el eje Z tiene dirección vertical y sentido positivo hacia arriba, el eje X tiene dirección horizontal y sentido positivo hacia la derecha y el eje Y es perpendicular al papel con sentido positivo hacia fuera del mismo, este eje Y coincide con el eje de giro del modelo.



**Figura 58. Grado de libertad del modelo analítico de la chimenea**

En la Figura 58 se muestra el grado de libertad del sistema, este se nombra a través de la letra  $\theta$ . Esta coordenada indica la posición del centro de gravedad del modelo de la chimenea, donde su primera derivada temporal  $\left(\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\right)$  se corresponde con la velocidad angular del centro de masas, donde en este sistema la velocidad angular es igual para todos los puntos de la chimenea. Lo mismo ocurre con la aceleración angular que se corresponde con la segunda derivada temporal de la coordenada de posición  $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}\right)$ .

El planteamiento para determinar la expresión de la frecuencia natural de vibración es análogo al planteamiento en la aproximación por sólido rígido del modelo analítico del sistema TMD. Por tanto hay que determinar la ecuación del movimiento del sistema, que según lo visto en el Capítulo 6 a través de la expresión (6.2) tiene la siguiente estructura:

$$\ddot{x} + w_n^2 x = 0$$

Donde en este caso la expresión de la ecuación del movimiento hay que expresarla en función de  $\theta$  y  $\ddot{\theta}$ , que es la variable correspondiente al grado de libertad del sistema.

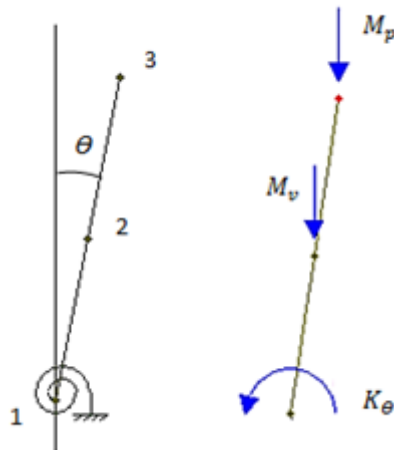
Para llegar a la ecuación del movimiento del sistema en función de la variable  $\theta$ , se plantea la ecuación de la segunda ley de Newton para la rotación, Capítulo 7 expresión (7.5):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

Donde según el Capítulo 7, al tener un sólido rígido con geometría de revolución, la expresión (7.5) pasa a tener la forma de la ecuación (7.7):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha} \quad (9.1)$$

El primer término,  $\vec{\tau}_{ext}$  indica el momento de fuerzas total sobre el sistema. En este problema el punto respecto del cual se toman los momentos producidos por las fuerzas resultantes en el sistema es el punto 1, siendo el sentido positivo el sentido de las agujas del reloj.



**Figura 59. Diagrama de sólido libre de la chimenea**

En la figura 59 se muestra el diagrama de sólido libre de la chimenea en una posición fuera del equilibrio, donde se puede ver que las fuerzas que actúan sobre el sistema son, el peso de la chimenea ( $M_{chim} \cdot g$ ) que está aplicada en el centro de gravedad de la misma (punto 2), el peso de las masas puntuales ( $M_p \cdot g$ ) aplicada en el punto 3 que se corresponde con el centro de gravedad de

dichas masas puntuales y por último el momento producido por el resorte ( $K_\theta \cdot \theta$ ) donde este momento está aplicado en el punto 1.

Una vez analizado ya el diagrama de sólido libre donde se han visto las fuerzas que actúan sobre el sistema, el siguiente paso es determinar el primer término de la expresión (9.1). Ya se ha explicado antes que para determinar  $\vec{\tau}_{ext}$  se toman momentos respecto al punto 1 y con sentido positivo el giro de las agujas del reloj, de esta manera se obtiene lo siguiente:

$$M_p g L_c \sin \theta + M_{Chim} g \frac{L_c}{2} \sin \theta - K_\theta \theta = \tau_{ext} \quad (9.2)$$

Donde en la expresión (9.2) el parámetro  $L_c$  se corresponde con la longitud de la chimenea.

Siguiendo con la expresión (9.1) el siguiente término a calcular es  $I$ , que corresponde con el momento de inercia del sistema respecto al eje de rotación, que como se ha explicado anteriormente coincide con el eje Y del sistema de referencia.

La forma de calcular este momento de inercia  $I$ , es como la suma de dos momentos de inercia correspondientes a la chimenea y a las masas puntuales, es decir:

$$I = I_{Chimenea} + I_{Mp} \quad (9.3)$$

El momento de inercia correspondiente a la chimenea ( $I_{Chimenea}$ ), se calcula como el momento de inercia de una varilla respecto a un eje que pase por uno de los dos extremos a través de la siguiente expresión ya conocida, donde todos los parámetros se conocen por lo que dicho momento de inercia está perfectamente determinado.

$$I_{Chimenea} = \frac{1}{3} M_{Chimenea} L_{Chimenea}^2$$

El término  $I_{Mp}$  se calcula a través de la expresión del momento de inercia de una masa puntual, ya que son consideradas como tal. Por tanto dicho término adquiere la siguiente expresión, donde todo es conocido.

$$I_{Mp} = M_p \cdot L_{Chimenea}^2$$

Así queda determinado el momento de inercia del sistema de sólido rígido correspondiente con el modelo analítico de la chimenea respecto al eje de giro que pasa por el punto 1.



El tercer y último término de la expresión (9.1) es  $\alpha$  y esta referido a la aceleración angular del centro de gravedad del sólido rígido. Como se ha explicado antes todos los puntos del sistema van a tener la misma velocidad y aceleración angular. En este modelo analítico el grado de libertad del sólido rígido se ha determinado a través de  $\theta$ , que indica la posición del centro de gravedad. Si se deriva dos veces respecto del tiempo dicha variable se obtiene la aceleración angular del centro de gravedad del sistema  $\ddot{\theta}$ . Este parámetro será el que tome como valor  $\alpha$ , así se obtendrá la expresión de la ecuación del movimiento (6.2) en función del grado de libertad del problema (9.4).

$$\ddot{\theta} + w_n^2 \theta = 0 \quad (9.4)$$

Sustituyendo en la ecuación (9.1) las expresiones (9.2) y (9.3) se obtiene la siguiente ecuación en función de la variable del grado de libertad.

$$M_p g L_c \sin \theta + M_c g \frac{L_c}{2} \sin \theta - K_\theta \theta = \left( \frac{1}{3} M_{Chim} L_{Chim}^2 + M_p \cdot L_{Chim}^2 \right) \ddot{\theta} \quad (9.5)$$

Trabajando sobre la ecuación (9.5) y con la aproximación para ángulos pequeños ( $\theta \downarrow \rightarrow (\sin \theta) = \theta$ ) se a la siguiente expresión:

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{K_\theta - M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2}}{\frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2} \right) \cdot \theta = 0 \quad (9.6)$$

La ecuación (9.6) se corresponde con la ecuación del movimiento del sistema sólido rígido de la chimenea. Haciendo una comparación entre la expresión (9.4) y la expresión (9.6) se puede ver la expresión que corresponde con la frecuencia angular del sistema ( $w_n$ ). De todo este término que está dentro de paréntesis en la ecuación (9.6) se conoce todo menos el valor de la rigidez del resorte. Este valor se determinará a través de los resultados experimentales de la frecuencia natural de vibración de la chimenea según el número de espiras activas del resorte y de las masas puntuales en el extremo.

$$w_n^2 = \frac{K_\theta - M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2}}{\frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2} \quad (9.7)$$

El planteamiento para determinar  $K_\theta$  es que la rigidez del resorte ha de ser la misma para un determinado número de espiras en diferentes situaciones de masa puntual en el extremo. Con esa idea se determina la ecuación (9.8) con la que se obtiene el valor de la rigidez del resorte, esta se obtiene despejando  $K_\theta$  de (9.7)

$$K_{\theta} = \left( \frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2 \right) \cdot \omega_n^2 + M_p g L_c + M_{Chim} g \frac{L_c}{2} \quad (9.8)$$

Donde el valor de  $\omega_n$  se obtiene de la caracterización experimental, en la ecuación (9.8) este valor hay que introducirlo en unidades de [rad/s]. Analizando dimensionalmente la ecuación (9.8) se puede ver que las unidades de  $K_{\theta}$  corresponden con las de rigidez torsional [Nm].

Por tanto la forma de proceder es la siguiente, una vez hecha la caracterización experimental de la chimenea, con los resultados obtenidos de la frecuencia natural de vibración, se coge la ecuación (9.8) y se va determinando  $K_{\theta}$  para cada número de espiras sustituyendo  $\omega_n$  y  $M_p$  correspondientes en cada situación de espiras, y teóricamente el resultado de  $K_{\theta}$  ha de ser igual para las diferentes situaciones de  $\omega_n$  y  $M_p$  en cada caso concreto de número de espiras.

Con la ecuación (9.9) se tiene la expresión con la que se realizará la caracterización de la chimenea en el modelo analítico. Para tener los resultados en las mismas unidades que los modelos experimental y simulado a la ecuación (9.7) hay que multiplicarla por el siguiente factor  $\left( \frac{1}{2\pi} \right)$  así las unidades de la frecuencia serán en [Hz] y se denotará a través de  $f_n$ .

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K_{\theta} - M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2}}{\frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2}} \quad (9.9)$$

Puede verse que la ecuación (9.9) si tiene en cuenta el efecto de la gravedad, en la caracterización de la chimenea dentro del modelo analítico se realizarán los dos casos, teniendo en cuenta el efecto de la gravedad ecuación (9.9) y sin tener en cuenta el efecto de la gravedad (9.10).

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K_{\theta}}{\frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2}} \quad (9.10)$$

De esta forma se analizará en el capítulo de resultados su influencia comparando con los resultados obtenidos con el modelo experimental y simulado, y así poder ver si es asumible despreciar o no la gravedad. También dentro del capítulo de resultados se presentarán los valores obtenidos de la rigidez del resorte en función del número de espiras y de la masa puntual.

Destacar que dentro de este modelo analítico a pesar de tener solo la ecuación (9.9) para realizar la caracterización de la chimenea, se realizaran 3 casos diferentes.

El primer caso se corresponde con la caracterización de la chimenea donde se tiene en cuenta la influencia de la gravedad y el valor de la rigidez del resorte se determina como un promedio de los diferentes valores obtenidos con las diferentes situaciones de masa puntual en el extremo en cada caso de espiras activas.

El segundo caso se diferencia del primero porque el valor de la rigidez del resorte se determina a través de una expresión analítica, que se corresponde con la tendencia que sigue este parámetro en función de las espiras activas, esta representación de la tendencia de la rigidez del resorte se presentará en el capítulo de resultados.

Con estos dos primeros casos lo que se quiere ver es si la expresión de la tendencia de la rigidez del resorte es aceptable, para ello se compara con los resultados obtenidos con la rigidez obtenida a través del promedio y con los resultados del modelo experimental y simulado.

Y el tercer y último caso se corresponde con la caracterización de la chimenea donde no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad y la rigidez del resorte se obtiene a través de la ecuación analítica de la tendencia de la rigidez, porque como se verá en el capítulo de resultados los valores de frecuencia obtenidos con el valor de rigidez del resorte determinado a través del promedio o determinado a través de la ecuación de tendencia son prácticamente iguales.

## 9.2 Modelo experimental

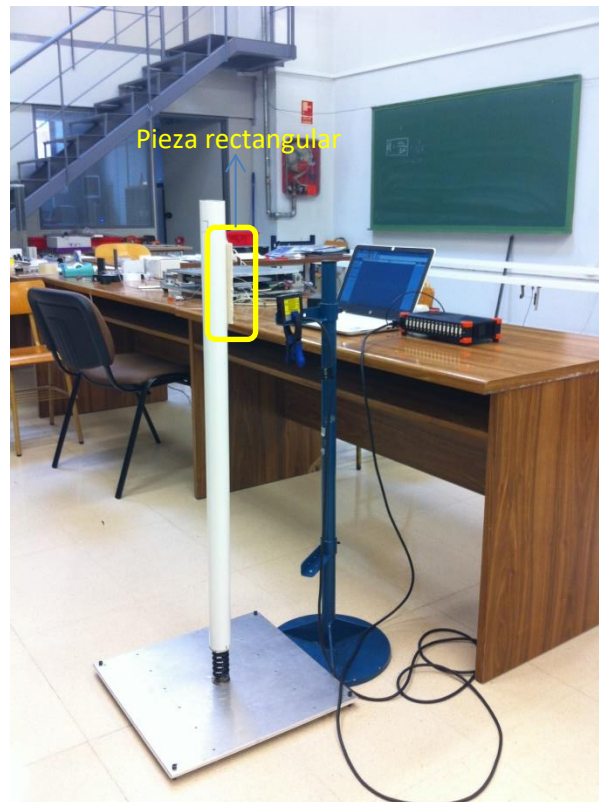
En el modelo experimental de la chimenea se explica el procedimiento llevado a cabo en el laboratorio S10 de la Escuela Ingenierías Industriales para determinar los valores de la frecuencia natural de vibración en función del número de espiras activas del resorte y de las masas puntuales en el extremo, es decir, se explica cómo se ha realizado la caracterización de la chimenea.

Los instrumentos que se han utilizado en el laboratorio para la caracterización de la chimenea se han explicado detalladamente dentro del Capítulo 5 y son los mismos que se utilizan para la caracterización del modelo experimental del sistema TMD. Dentro del Capítulo 5 se detalla también como hay que realizar las

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

conexiones correctamente entre los diferentes equipos y como configurar el software para procesar los datos registrados por el láser.

Como ya hay un capítulo dedicado a la explicación y preparación de los equipos que se van a utilizar en este modelo experimental, este apartado se centra en explicar el procedimiento llevado a cabo una vez que se tenga todos los equipos conectados y preparados para el registro de los datos.



**Figura 60. Modelo experimental de la chimenea**

Una vez conectados los diferentes equipos necesarios para la toma de datos experimentales, configurado correctamente el software y calibrado adecuadamente el láser lo siguiente a realizar es colocar la maqueta de la chimenea. Antes de colocar la maqueta de la chimenea hay que montar los diferentes componentes que la conforman, el montaje de la maqueta se encuentra detallado en el segundo punto del Capítulo 3. Una vez que se tiene la maqueta montada se deja en suelo procurando que asiente perfectamente para evitar vibraciones no deseadas que afecten al registro de datos (Figura 60), esto se consigue girando el o los tornillos necesarios para conseguir un asentamiento perfecto.

Para la colocación del láser se hace uso del mismo soporte que se utiliza para la caracterización del sistema TMD en el modelo experimental, puede verse en la

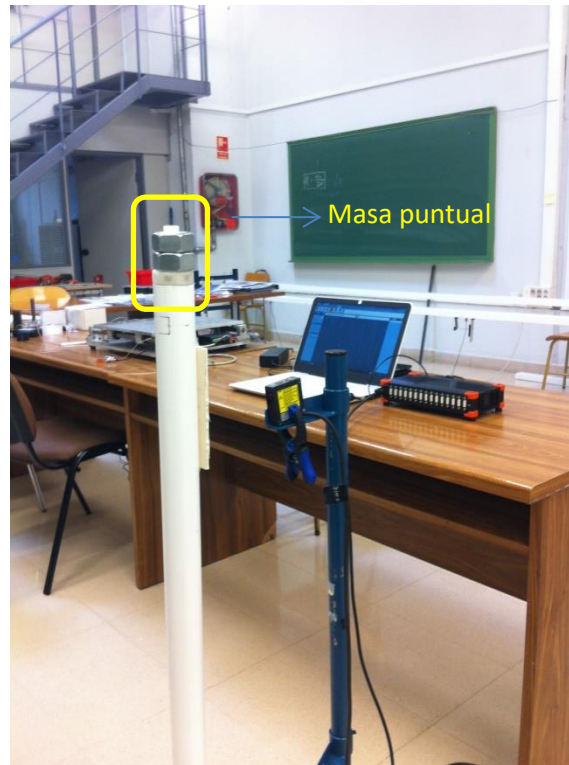
Figura 60. Hay que tener en cuenta la distancia a la que se coloca el láser para que no se encuentre fuera su rango de medida, este rango está detallado en el Capítulo 5.

En la Figura 60 se puede apreciar que en la parte superior de la chimenea se coloca una pieza rectangular, la cual hasta este momento no se ha mencionado. Esta pieza se coloca para que la toma de datos sea correcta y no se tenga error a la hora de calcular el valor de la frecuencia natural de vibración debido a que la chimenea es de sección circular y la luz del láser no incide siempre en el mismo punto sino que su posición oscila ligeramente. Si no se pusiera dicha pieza los datos registrados de la amplitud del movimiento no serían siempre del mismo punto por lo que la determinación de la frecuencia natural sería errónea. De este modo la amplitud de movimiento que se registra siempre es del mismo punto porque aunque la luz del láser oscile dentro de dicha pieza la distancia entre ella y el láser siempre va a ser la misma.

Por tanto la luz del láser siempre tiene que incidir en esta pieza, esto hay que tenerlo en cuenta a la hora de colocar el láser en altura. La caracterización de la chimenea va desde 1 espira activa del resorte hasta 9 espiras, se toman estos números de espiras activas porque se decide como condición que el casquillo inferior siempre tiene que estar roscado entero en el resorte. Así que una altura adecuada es aquella que no hay que modificarla durante la caracterización debido a que la luz del láser no incida en la pieza rectangular colocada en la chimenea, es decir, durante la caracterización se va variando las espiras activas esto conlleva que la distancia entre esta pieza y el suelo va ir aumentando, así que una altura correcta para el láser es situarlo a una altura algo menor a la que corresponden 9 espiras, esta altura se consigue a través del soporte anteriormente mencionado.

Otra condición es que las espiras del resorte deben de ser enteras, es decir, no es correcto tener 1,5 espiras activas, por ejemplo. Para ello se marca en la base una línea que indica vueltas enteras de espiras del resorte, es decir, en cada vuelta de espira entera en el resorte la pieza donde tiene que incidir el láser es paralela con esta línea de la base. De este modo en los diferentes registros de datos siempre se va a tener la misma longitud de resorte por cada espira entera.

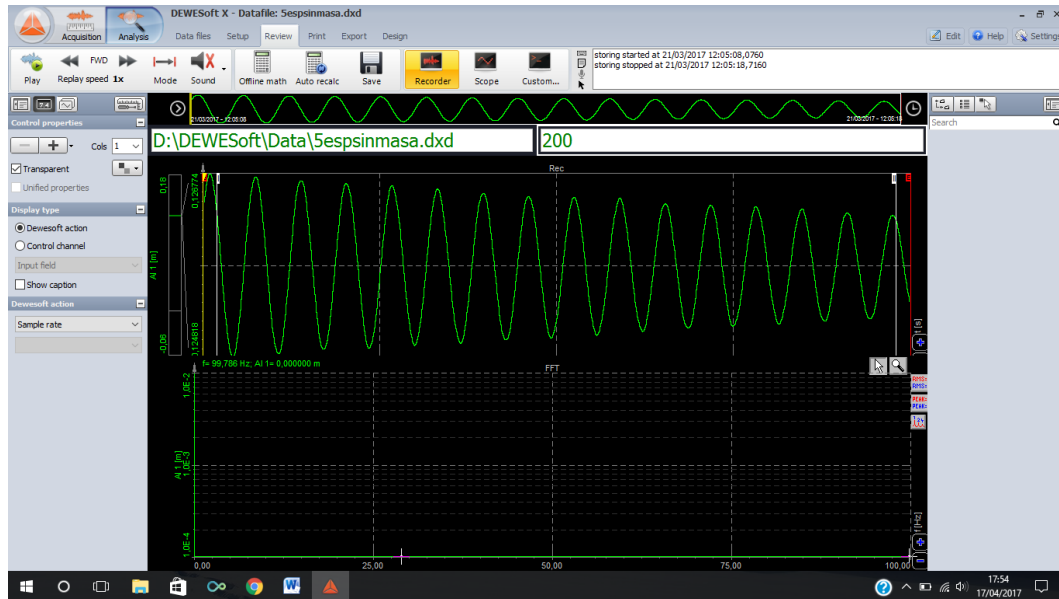
La Figura 60 muestra el caso de un número determinado de espiras activas del resorte y ninguna masa puntual. Los casos donde se tienen masas puntuales la disposición es la misma (Figura 61) con la única diferencia que en el casquillo superior se colocan tuercas, estas tuercas son las que actúan como masas puntuales.



**Figura 61. Modelo experimental de la chimenea con masa puntual**

Como se ha explicado anteriormente la caracterización de la chimenea se va a realizar para nueve casos de espiras activas, es decir, de la 1 a la 9. En lo relativo a las masas puntuales se va a realizar de 1 a 3 tuercas, colocándolas de una en una. Es decir en el modelo experimental de la caracterización de la chimenea se van a tener cuatro situaciones, la primera es ninguna tuerca (masa puntual) y variar las espiras activas de 1 a 9, la segunda igual pero con una tuerca las dos situaciones restantes igual pero con 2 y 3 tuercas respectivamente. Para determinar el valor de las masas puntuales se hace uso de la balanza de la Figura 51.

Para iniciar el registro de datos hay que sacar fuera del equilibrio a la chimenea, para ello se la da un pequeño golpe en la dirección del láser. Una vez que se saca a la chimenea fuera de la posición de equilibrio esta comienza a oscilar y el láser empieza a registrar los datos de amplitud, los cuales son tratados por el dispositivo de procesamiento de la señal y a través del software se muestra por pantalla la amplitud en función del tiempo.



**Figura 62. Datos experimentales de la chimenea**

En la Figura 62 se muestra la interface del software donde aparecen los datos procesados de un registro que corresponde con una situación donde la chimenea no tiene ninguna tuerca en el extremo y tiene 5 espiras activas. En dicha figura puede verse que aparecen dos pantallas, la superior corresponde con la amplitud del movimiento en función del tiempo y la inferior corresponde con la FFT (Transformada rápida de Fourier).

Para determinar el valor de la frecuencia natural de vibración de la chimenea se realiza a través de la señal de la amplitud en función del tiempo. Otra opción es usar la FFT, pero no es posible en este caso porque la frecuencia de muestreo que se fija es muy pequeña para tener una buena precisión en el valor de la frecuencia natural de vibración y debido a ello se necesita más tiempo para registrar mayor número de datos para que aparezca el pico correspondiente al valor de la frecuencia natural de la chimenea y el problema se encuentra en que el movimiento se detiene.

Asique la señal que se va a utilizar para determinar el valor de la frecuencia natural de vibración es la amplitud en función del tiempo. La forma de determinar dicho valor es a través de la inversa del periodo. Una vez obtenida la señal de la amplitud se toma el tiempo entre dos crestas ( $t_2 - t_1$ ) y se cuenta el número de periodos entre esas dos crestas, con ello se va a la siguiente ecuación:

$$f_n = \left( \frac{t_2 - t_1}{N^{\circ} \text{ periodos}} \right)^{-1} \quad (9.11)$$

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

La ecuación (9.11) será la que se utilice para determinar los valores de la frecuencia natural de vibración de la chimenea en las diferentes situaciones mencionadas anteriormente.

En el capítulo de resultados se detallarán los valores obtenidos de la caracterización de la chimenea con este modelo y se comparan con los obtenidos a través de los otros modelos, analítico y simulado.

### 9.3 Modelo simulado. Cosmos

A continuación se procede a la explicación de la parte correspondiente al sistema de la chimenea que se encuentra dentro del script del anexo E, mediante el que se ejecuta su simulación en el software Cosmos.

En primer lugar se definen los parámetros relativos a la geometría de los distintos componentes que conforman la maqueta de la chimenea, es decir, el tubo, el resorte y la masa en el extremo.

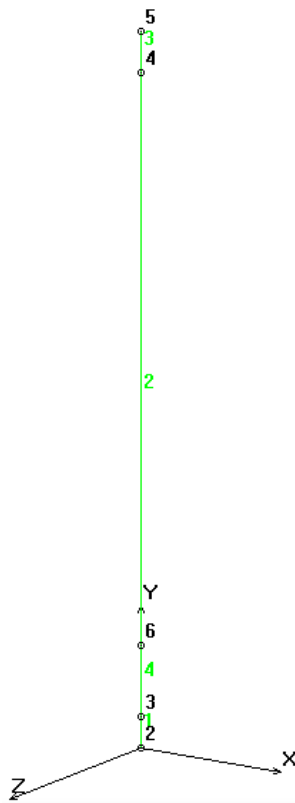


Figura 63. Postprocesado geométrico del sistema chimenea



El resorte destacar que se define como un tubo de sección rectangular, de este modo se asegura tener dos direcciones principales conocidas y si la longitud de los lados no es la misma se tiene dos frecuencias naturales de vibración algo diferentes.

En la Figura 63 se muestra el postprocesado geométrico correspondiente al sistema de la chimenea, en donde los puntos están indicados en color negro y las curvas en color verde.

El mallado de las tres secciones, zona de las espiras, tubo y zona de las masas puntuales puede verse en la Figura 64 y se va a realizar mediante elementos finitos tipo viga. Se definen los tres materiales correspondientes a las tres secciones, aluminio para el tubo, acero para las tuercas y un material ficticio para la zona de las espiras, para ello se introduce el valor de la densidad y el módulo de elasticidad.

El valor de la densidad del aluminio se determina pesando el tubo de la maqueta y dividiendo entre el volumen del mismo, determinado a través de los valores de los parámetros geométricos definidos en el script del anexo E referentes al tubo, y en el valor del módulo de elasticidad se introduce su valor teórico.

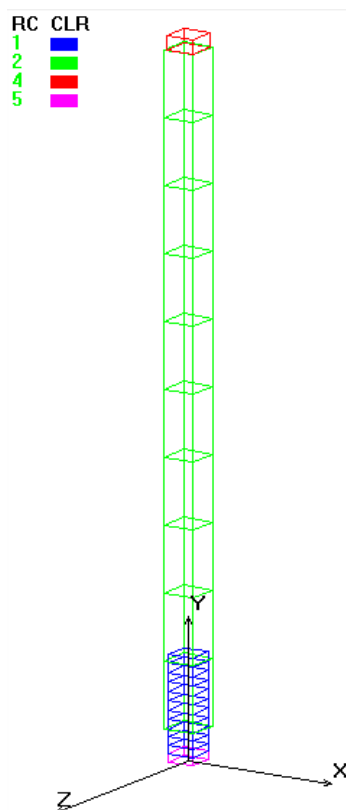
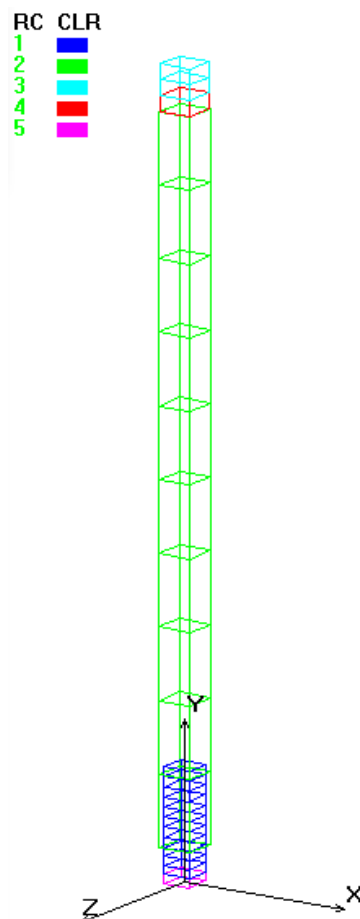


Figura 64. Mallado de las tres secciones de la chimenea sin masa puntual

En el valor de la densidad del acero y en el de su módulo de elasticidad se introducen los valores teóricos de dicho material. La forma de determinar los valores de los parámetros geométricos que se introducen en el script del anexo E para la zona de las masas puntuales (tuercas), y que se definen como un cilindro, es la siguiente. En primer lugar se toma como valor realista, es decir medido, la altura de las tuercas que se utilizan en el modelo experimental y por último el valor del diámetro y del espesor de dichas tuercas se ajusta de tal forma que el cálculo del peso de una tuerca coincide su peso real.

La densidad del material ficticio se determina pesando el resorte de la maqueta de la chimenea y dividiendo dicha masa por el volumen de la sección rectangular de la zona de las espiras, determinada mediante los parámetros definidos en el script del modelo y multiplicada por la longitud correspondiente al número de espiras totales del resorte, este es un parámetro que también está definido dentro del script del anexo E.



**Figura 65. Mallado de las tres secciones de la chimenea con masa puntual**

El módulo de elasticidad del material ficticio es el parámetro que permite ajustar el modelo simulado de la chimenea con el experimental, para ello se toma el valor experimental de la frecuencia de vibración de la chimenea en una situación concreta de espiras activas y tuercas en el extremo y se ajusta el módulo de elasticidad del material ficticio para obtener ese valor experimental de la frecuencia natural de vibración a partir del modelo simulado, una vez ajustado, este valor no se modifica.

En la Figura 64 puede verse que la primera espira de la zona del resorte adquiere un color diferente del resto, se debe a que esta espira se ha debilitado como consecuencia de la unión entre el resorte y la arandela, que como se vio en el Capítulo 3, se realiza mediante un cordón de soldadura.

En la Figura 65 se aprecia en la zona de las masas puntuales dos elementos diferentes, uno son las tuercas que se mallan en color azul clarito y el otro elemento es el casquillo superior mallado en color rojo, la única diferencia entre el casquillo superior y las tuercas, es que el primero se ha modelado con un espesor ridículo para que su masa no sea relevante, como sucede en el modelo experimental. El modelo de la chimenea está programado para que el casquillo superior siempre esté en el extremo libre, como es el caso que se presenta en la Figura 64.

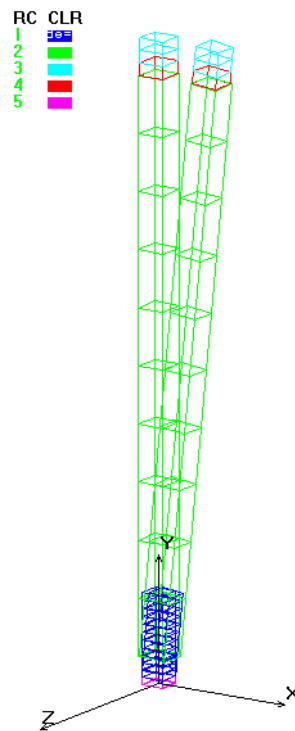
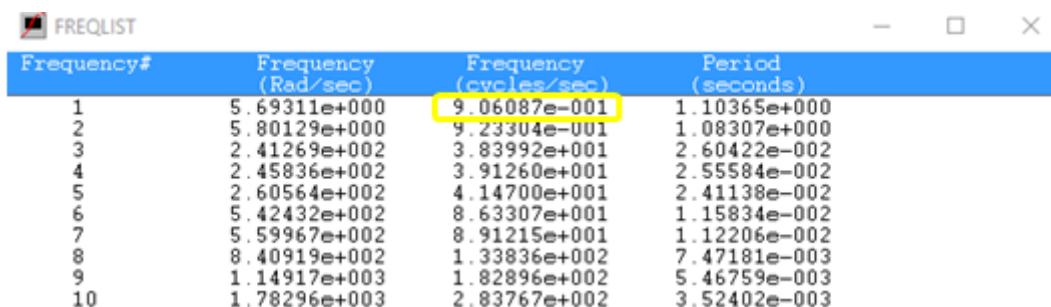


Figura 66. Deformada de la chimenea

El resultado obtenido tras la ejecución del script del anexo E se muestra en la Figura 66, donde se presenta la deformada del sistema de la chimenea correspondiente al modo de vibración 1 en una de las dos direcciones principales en el caso de dos tuercas en el extremo. Además de dicha representación también se tiene en forma de tabla los valores de la frecuencia natural de vibración del sistema, Figura 67.



Frequency#	Frequency (Rad/sec)	Frequency (cycles/sec)	Period (seconds)
1	5.69311e+000	9.06087e-001	1.10365e+000
2	5.80129e+000	9.23304e-001	1.08307e+000
3	2.41269e+002	3.83992e+001	2.60422e-002
4	2.45836e+002	3.91260e+001	2.55584e-002
5	2.60564e+002	4.14700e+001	2.41138e-002
6	5.42432e+002	8.63307e+001	1.15834e-002
7	5.59967e+002	8.91215e+001	1.12206e-002
8	8.40919e+002	1.33836e+002	7.47181e-003
9	1.14917e+003	1.82896e+002	5.46759e-003
10	1.78296e+003	2.83767e+002	3.52402e-003

**Figura 67. Tabla de resultados del Cosmos (sistema chimenea)**

En la Figura 67 se ha recuadrado en color amarillo el valor de la frecuencia natural de vibración que corresponde con el modo de vibración 1 en la dirección que se presenta en la Figura 66.

Mencionar que al igual que en modelo simulado del sistema TMD este modelo calcula la frecuencia de vibración de la chimenea sin tener en cuenta el efecto de la gravedad. En el capítulo de resultados se analizara si para este sistema es asumible despreciar dicho efecto, y en caso de no ser asumible despreciar el efecto de la gravedad se realizará un ajuste sobre el script del modelo simulado de la chimenea para corregir dicho efecto.

Por tanto la caracterización de la chimenea con el modelo simulado consiste en ejecutar el script del anexo E desactivando la parte referente al sistema TMD, esto se hace poniendo a 0 el valor del TMD en el script, e ir modificando los parámetros del número de espiras activas, que en el script este parámetro está definido como 'ne' y el número de tuercas en el extremo que en el script se define como 'nm'.

## Capítulo 10. Caracterización de la Chimenea más el sistema TMD

La caracterización de este sistema, chimenea más TMD a flexión, consiste en determinar el valor de las dos frecuencias naturales de vibración en función de la masa puntual en el extremo del sistema TMD, en este caso no se va a tener masa puntual en el extremo de la chimenea. La caracterización se podría hacer también variando el número de espiras activas del resorte, en este caso la caracterización se va a realizar solo para un número concreto de espiras activas del resorte. Al combinar los dos sistemas, chimenea y sistema TMD, se tiene un nuevo sistema el cual tiene dos grados de libertad, como se vio en el Capítulo 6, un sistema que tiene 2 grados de libertad posee dos frecuencias naturales de vibración, donde cada una se corresponde con un grado de libertad de los dos.

### 10.1 Modelo analítico

A continuación se va a explicar el proceso seguido para llegar a una expresión analítica mediante la cual se pueda determinar los valores de las dos frecuencias naturales de vibración y los modos de vibración del sistema de 2 grados de libertad, chimenea mas sistema TMD, en función de la masa puntual colocada en el sistema TMD y en función de la rigidez del resorte.

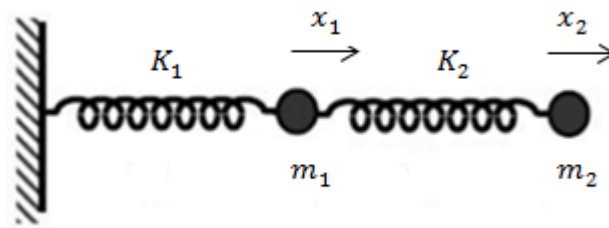


**Figura 68. Modelo analítico de la chimenea más el sistema TMD**

En la Figura 68 se muestra el modelo analítico correspondiente al sistema chimenea mas TDM, donde la línea que va del punto 2 al punto 3 se corresponde

con el sistema TMD y el punto 3 está referido a las masas puntuales de dicho sistema. El rectángulo que se sitúa entre el punto 1 y el punto 2 se corresponde con la chimenea y donde el punto 1 es el punto de unión entre el resorte y el casquillo inferior de la misma y el punto 2 es el punto donde se coloca la varilla del sistema TMD. También en la misma figura aparecen los dos grados de libertad del sistema, el grado de libertad correspondiente al sistema TMD se denota mediante la letra 'x' y se corresponde con el desplazamiento horizontal del punto 3 y el grado de libertad correspondiente a la chimenea se denota con la letra  $\theta$  y se corresponde con la posición del centro de gravedad de la chimenea.

La resolución de este modelo se abordará desde la teoría detallada dentro del Capítulo 6, sistemas de 2 grados de libertad, y que ya se ha utilizado en la aproximación matricial del modelo analítico en la caracterización del sistema TMD, con la diferencia que este problema sí que posee 2 grados de libertad y el anterior mencionado solo tenía 1.



**Figura 69. Sistema de 2 gdl**

En el Figura 69 se ilustra un sistema de 2 grados de libertad sin amortiguar y formado por dos masas puntuales ( $m_1$  y  $m_2$ ) y dos resortes con constantes elásticas ( $K_1$  y  $K_2$ ), para el que ya se conocen los métodos para resolverlo (Capítulo 6), es decir, determinar los dos valores de la frecuencia natural de vibración y los modos de vibración.

La primera idea que se plantea para resolver el problema del modelo analítico formado por la chimenea más el sistema TMD, es decir, el de la Figura 68, es ver si es posible simplificar alguno de los dos sistemas, la chimenea o el sistema TMD, por un resorte y una masa puntual como en el sistema de la Figura 69, para ello se analizan los dos sistemas que se tienen en el modelo analítico de la Figura 68.

El primero en ser analizado es el sistema TMD, este como ya se vio en su caracterización cuando se saca de su posición de equilibrio y comienza a oscilar

se comporta como una viga empotrada en uno de sus extremos con una masa puntual en el otro, en resumen se comporta como un sólido deformable. A continuación se presenta el procedimiento para determinar la rigidez del resorte que sustituye a la varilla del sistema TMD.

En el capítulo de resultados se presentará la conclusión de que no es asumible despreciar el efecto de la gravedad para la caracterización del sistema TMD, por lo que para la caracterización del sistema conjunto hay que tener en cuenta dicho efecto.

Por tanto la forma de tener en cuenta la gravedad en el sistema TMD en el sistema conjunto es que a la hora de calcular la rigidez del resorte que sustituye la varilla del TMD, se tenga en cuenta la gravedad.

$$f_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Esta ecuación es la que rige la frecuencia natural de vibración de un resorte con una masa puntual, pues a través de esta expresión es como se va a determinar la rigidez del resorte.

Para ello se toman los valores de la frecuencia natural de vibración del sistema TMD para cada caso concreto de masa en el extremo, y sustituyendo los valores en la expresión anterior se tiene el valor de la rigidez del resorte que sustituye a la varilla del sistema TMD, decir que la frecuencia natural de vibración hay que sustituirla con unidades de [rad/s].

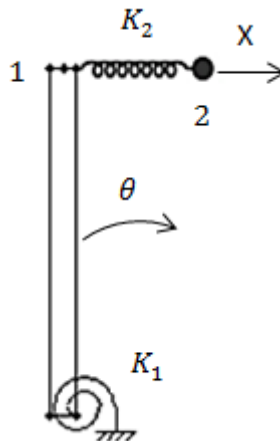
Teóricamente la rigidez del resorte ha de ser la misma para los cuatro casos de masa en el extremo, pero debido a pequeños errores de medición o montaje del sistema, no se va a tener el mismo valor por lo que se tomara un valor promedio de los cuatro.

Por lo tanto con esto se ha querido demostrar que el sistema TMD sí que es posible sustituirlo por un resorte con la rigidez anteriormente calculada (K) y con una masa puntual, la cual tendrá el valor de la masa puntual que se sitúe en el sistema TMD.

A continuación se analiza el sistema de la chimenea para ver si es posible sustituirlo por un resorte y una masa puntual. Este sistema no se comporta como un sólido deformable cuando se le saca de su posición de equilibrio y comienza a oscilar, sino que el comportamiento que tiene es el de un sólido girando respecto

de un punto, por tanto de este sistema no podemos tener un valor de rigidez ( $K$ ), asique no es posible sustituirlo por un resorte y una masa puntual.

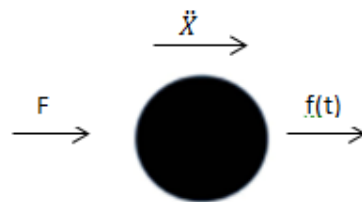
Asique por lo explicado hasta este punto el único sistema que es posible sustituirlo por un resorte con un valor de rigidez conocido y una masa puntual es el sistema TMD. En la Figura 70 se muestra como queda el sistema chimenea más TMD una vez que este último se sustituya por una masa puntual y un resorte.



**Figura 70. Chimenea más resorte con masa puntual (simplificación del TMD)**

La Figura 70 muestra el esquema final que reproduce el sistema de chimenea más TMD, el punto 1 se corresponde con el punto de unión entre el resorte y el extremo superior de la chimenea y el punto 2 con la masa puntual. Este esquema será el que se analice y se resuelva con la teoría de 2 grados de libertad (Capítulo 6) para determinar las dos frecuencias naturales de vibración y sus modos.

En primer lugar se plantea el diagrama de sólido libre de la masa puntual que en la Figura 70 se corresponde con el punto 2.



**Figura 71. Diagrama de sólido libre de la masa puntual**

Se supone que el desplazamiento positivo del grado de libertad denotado a través de 'X' es cuando tiene sentido hacia la derecha. De esta manera la Figura 71 muestra el diagrama de sólido libre de la masa puntual en el momento en que



la chimenea se ha sacado de su posición de equilibrio con un pequeño ángulo en sentido de las agujas del reloj. De ese modo la masa puntual experimenta una fuerza  $F$  positiva que se corresponde a la fuerza ejercida por el resorte debido a la compresión sufrida y también experimenta una aceleración denotada a través de  $\ddot{X}$ . La fuerza  $F$  que experimenta la masa puntual tiene el siguiente valor:

$$F = K_2(L\theta - X)$$

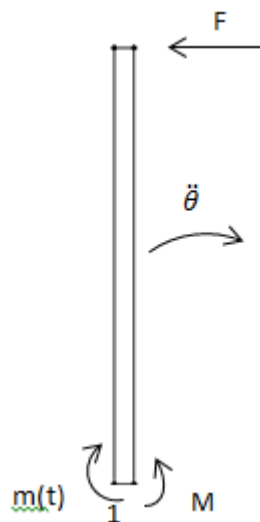
Donde el término  $L\theta$  se corresponde con el desplazamiento horizontal del punto 1 y a este término se resta 'X' que se corresponde con el desplazamiento que experimenta el punto 2 al desplazar el punto 1. Por tanto la diferencia entre el desplazamiento del punto 1 y el punto 2 es la compresión que sufre el muelle 2 que multiplicado por su constante elástica es la fuerza sobre la masa puntual. El término  $f(t)$  se corresponde con las fuerzas externas en un determinado instante. De este modo si se aplica la segunda ley de Newton queda la siguiente expresión:

$$K_2(L\theta - X) + f(t) = m \cdot \ddot{x}$$

O lo que es lo mismo

$$m \cdot \ddot{x} - K_2L\theta + K_2X = f(t) \quad (10.1)$$

A continuación se plantea el diagrama de sólido libre de la chimenea.



**Figura 72. Diagrama de sólido libre de la chimenea**

Se toma como sentido positivo del grado de libertad de la chimenea, es decir  $\theta$ , el sentido de las agujas del reloj. De este modo la Figura 72 muestra el diagrama de sólido libre de la chimenea en el momento en que se saca de su posición a través de un pequeño desplazamiento angular  $\theta$  positivo. Así la chimenea

experimenta una fuerza  $F$  de igual valor pero de sentido contrario que la que experimenta la masa puntual y también experimenta un momento concentrado  $M$  debido a la rigidez torsional del resorte,  $K_1$ .

Si se aplica la segunda ecuación de Newton para la rotación expresión (7.7) tomando momentos en el punto inferior de la chimenea punto 1 en la Figura 72, se tiene la siguiente expresión:

$$K_1 \cdot \theta + K_2 \cdot L(L\theta - X) - m(t) = -I_{chimenea} \cdot \ddot{\theta}$$

O lo que es lo mismo:

$$I_{chimenea} \cdot \ddot{\theta} + K_1\theta + K_2L^2\theta - K_2LX = m(t) \quad (10.2)$$

Con las expresiones (10.1) y (10.2) se obtienen dos ecuaciones diferenciales que no son independientes y que forman un sistema ya que ambas incógnitas,  $\theta$  y  $X$  aparecen en las dos expresiones y pueden escribirse de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2L^2 & -K_2L \\ -K_2L & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

O también de forma más abreviada la expresión (10.3) puede escribirse como:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = \{F(t)\} \quad (10.4)$$

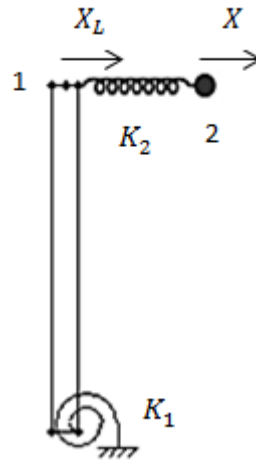
Donde en el Capítulo 6 se vio que  $[M]$  corresponde con la matriz de inercia,  $[K]$  corresponde con la matriz de rigidez y el término  $F(t)$  corresponde con fuerzas exteriores, que en este caso son cero.

A continuación se plantea realizar un cambio de variable en el grado de libertad correspondiente a la posición del centro de gravedad de la chimenea, es decir,  $\theta$ . Este cambio de variable se plantea porque una coordenada indica posición angular y la otra indica posición longitudinal, con esta nueva variable lo que se consigue es que tanto una como la otra tengan la misma naturaleza.

Por tanto para conseguir este cambio de variable hay que determinar un nuevo grado de libertad que se pueda relacionar con el ya fijado  $\theta$ . Este nuevo grado de libertad se corresponde con la posición horizontal del punto 1 de la Figura 73 y se denota a través de  $X_L$ , de este modo los dos grados de libertad son de la misma naturaleza.

Lo siguiente a realizar es introducir esta nueva variable en la expresión (10.3) para ello se deduce la relación entre  $\theta$  y  $X_L$ :

$$X_L = L \cdot \theta \rightarrow \theta = \frac{X_L}{L} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{X}_L}{L}$$



**Figura 73. Nuevo gdl en el sistema chimenea más resorte-masa puntual (TMD)**

Por tanto al introducir la nueva variable la expresión (10.3) adquiere la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_L \\ \ddot{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 L^2 & -K_2 L \\ -K_2 L & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(t) \\ f(t) \end{bmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{bmatrix} \frac{I}{L} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_L \\ \ddot{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_1}{L} + K_2 L & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

En la expresión (10.5) puede verse que tanto las matrices de inercia como de rigidez son diagonales, también puede notarse que las dos expresiones resultantes si se desarrolla la expresión (10.5) son dimensionalmente correctas, la primera tiene unidades de [Nm] y la segunda tiene unidades de [N].

Escribiendo de forma general la expresión (10.5) de la siguiente forma:

$$[M] \cdot \{\ddot{X}\} + [K] \cdot \{X\} = \{F(t)\} \quad (10.6)$$

Y haciendo uso de la teoría planteada sobre sistemas de 2 grados de libertad dentro del Capítulo 6 se escribe la expresión (10.6) de la siguiente forma:

$$(-w^2[M] + [K]) \cdot \{X\} = \{0\} \quad (10.7)$$

Como ya se ha explicado para la expresión (10.7) que tenga solución distinta de cero hay dos opciones, una es que el determinante de los términos de dentro del paréntesis sea igual a cero y la segunda es que se anule el término  $(-w^2[M] + [K]) \cdot \{X\}$ , o lo que es lo mismo

$$[K]\{X\} = w^2[M]\{X\} \quad (10.8)$$

A la expresión (10.8) se la conoce como problema matricial de autovalores y normalmente se expresa con la siguiente estructura:

$$[K]\{\varphi_n\} = \lambda_n[M]\{\varphi_n\}$$

Donde  $\lambda_n$  se corresponde con  $w^2$  y  $\{\varphi_n\}$  con  $\{X\}$ .

Para la resolución del problema se ha utilizado Matlab donde se ha programado un script, que se encuentra en el anexo D, en el cual se definen todos los parámetros que intervienen en el problema, estos parámetros son todos conocidos y en el capítulo de resultados se detallará cual es el valor de cada uno y como han sido calculados. Una vez que se han definido todos, lo siguiente que se introduce son las matrices del problema de valores propios, es decir,  $[M]$  y  $[K]$ .

Por último se utiliza el comando 'eig()' como ya se utilizó en la aproximación matricial a la expresión exacta del modelo analítico del sistema TMD, en esta ocasión como no se va a resolver de forma simbólica el problema de valores propios, al comando 'eig()' se le entregan por este orden la matriz de rigidez  $[K]$  y la matriz de inercia  $[M]$ . Como resultado se tiene dos matrices  $[V]$  y  $[D]$  donde en la segunda matriz, en las posiciones de la diagonal se tiene los dos valores de las frecuencias naturales de vibración y en la primera matriz por columnas se tiene los modos de vibración asociados a las dos frecuencias. En el capítulo de resultados se detallarán los valores obtenidos a través de este modelo analítico.

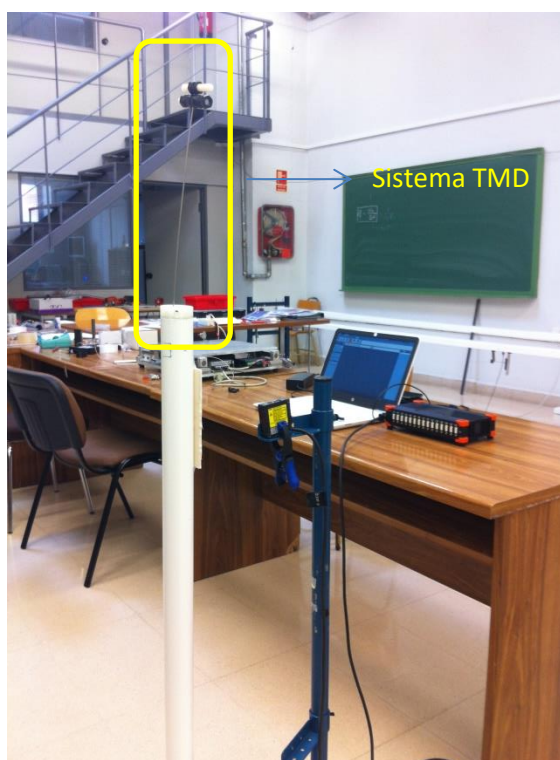
## 10.2 Modelo experimental

Al igual que en los modelos experimentales para la caracterización de los otros dos sistemas, chimenea y TMD, en este apartado se va a explicar el procedimiento seguido para la determinación de los dos valores de la frecuencia natural de vibración del sistema de 2 grados de libertad, chimenea más TMD.

También al igual que en los otros dos modelos experimentales, los instrumentos de medida que se han utilizado para la caracterización de este sistema son los

mismos. Y como ya se sabe hay un capítulo dedicado a la explicación detallada de dichos instrumentos de medida y la forma de llevar a cabo su correcta conexión, configuración y calibración.

Por tanto este apartado se centra en explicar el procedimiento llevado a cabo para la determinación de los valores de la frecuencia natural de vibración una vez que se encuentran conectados todos los aparatos de medida.



**Figura 74. Modelo experimental de la chimenea con el sistema TMD**

Una vez que están todos los instrumentos de medida conectados se dispone a colocar la maqueta de la chimenea. En este modelo experimental la caracterización del sistema se va a realizar solo para un caso concreto de número de espiras activas del resorte, la situación que se ha caracterizado ha sido la de 4 espiras activas. Así que para colocar adecuadamente el número de espiras activas, es decir, colocar espiras del resorte enteras como se explicó en el modelo experimental de la chimenea, se utiliza como ayuda la línea que se encuentra marcada en la base de la misma forma que se ha explicado en el modelo experimental de la caracterización de la chimenea.

Una vez que se tiene fijado correctamente el número de espiras activas del resorte, se continúa nivelando la chimenea por medio de los cuatros tornillos regulables en altura situados en la base, de este modo se evita cualquier vibración no deseada que pudiera influir en los resultados.

## Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Por último se coloca el sistema TMD en el extremo de la chimenea. En primer lugar se monta el sistema TMD siguiendo la explicación del Capítulo 4, teniendo en cuenta la masa puntual que hay que situar en el extremo, para ello se utiliza la balanza de la Figura 51. Una vez que se encuentra montado el sistema TMD basta con introducir el casquillo superior en el extremo de la chimenea, de esta manera el conjunto de la chimenea más el sistema TMD queda montado como puede verse en la Figura 74.

Durante la caracterización hay que ir variando la masa puntual del sistema TMD, como ya se sabe por el Capítulo 4 la masa puntual de este sistema se consigue por medio de unas tuercas las cuales están roscadas en unos tornillos de plástico. Para modificar dicha masa lo único que hay que hacer es sacar los tornillos y poner o quitar las tuercas adecuadas, las cuales se disponen en el laboratorio, para llegar al valor de masa correcto en cada situación de la caracterización.

El láser se coloca de la misma forma que se explicó para el modelo experimental en la caracterización de la chimenea. Esto es, se utiliza el mismo soporte para fijarlo y se coloca a una distancia la cual este dentro del rango del láser y en relación a la altura hay que colocarlo de manera que la luz del mismo incida sobre la pieza rectangular que está colocada en la chimenea para evitar el error que ya se comentó en el apartado del modelo experimental de la chimenea.

Una vez que se tiene todo perfectamente colocado se procede al registro de datos. Como ya se ha comentado, en esta caracterización hay que ir variando la masa del extremo del sistema TMD, estos valores de la masa puntual son los mismos que se utilizaron en la caracterización del sistema TMD.

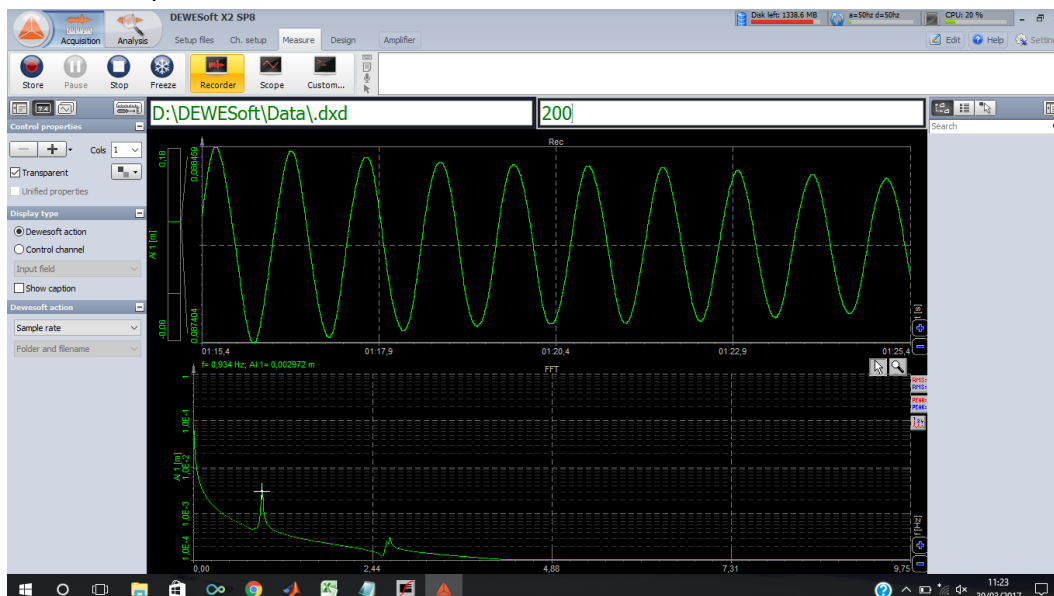


Figura 75. Datos experimentales de la chimenea más el sistema TMD

El procedimiento es ir fijando la masa en el extremo del sistema TMD y sacar ligeramente la chimenea de su posición de equilibrio y registrar los datos de la amplitud en función del tiempo. Una vez que se hayan registrado los datos para ese valor de la masa puntual, modificarlo hasta el siguiente valor y repetir el procedimiento.

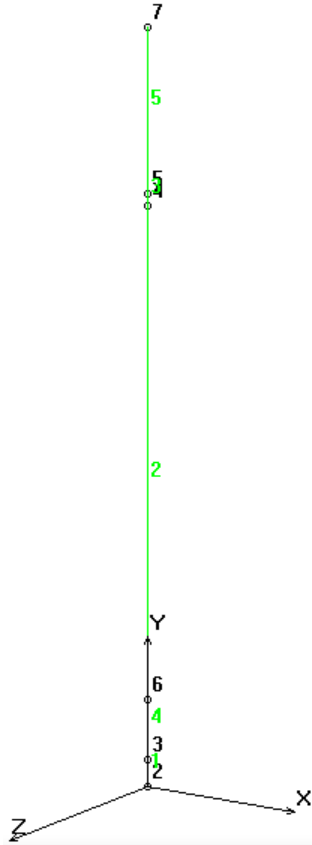
Para sacar de la posición de equilibrio a la chimenea se da un pequeño golpe en la dirección del láser. Una vez que la chimenea esta fuera de su posición de equilibrio esta comienza a oscilar y el láser comienza a registrar los datos de amplitud, que son tratados por el dispositivo de procesamiento de señal y son mostrados en la interface del software como puede verse en la Figura 75.

Como en los casos anteriores de los dos modelos experimentales en la interface del software se muestran dos pantallas, ya se sabe que la primera corresponde con la señal de la amplitud en función del tiempo y la segunda con la señal de la Transformada rápida de Fourier (FFT). En este caso los valores de las dos frecuencias naturales de vibración del sistema de 2 grados de libertad se van a obtener directamente de esta segunda pantalla sin tener que hacer ningún tipo de cálculo. En la Figura 75 pueden verse los dos picos correspondientes a estas dos frecuencias en un determinado caso de masa puntual de la caracterización, para obtener esos dos valores basta simplemente con situar el cursor en dichos picos.

En los casos anteriores la determinación del valor de la frecuencia natural se hace a través de la señal de la amplitud porque en la mayoría de las situaciones el movimiento se detenía o el movimiento oscilatorio no era el correcto al tener que esperar mucho tiempo para que el pico de frecuencia natural apareciera en la señal FFT. En este caso el tiempo de espera no es suficiente como para que el movimiento se detenga o se tenga un movimiento oscilante defectuoso.

### **10.3 Modelo simulado. Cosmos**

Anteriormente se han explicado las dos partes que conforman el script del anexo E, la parte correspondiente a la chimenea y la parte referente al sistema TMD. Para realizar la caracterización a través del modelo simulado de los dos sistemas anteriores se ha explicado también que es necesario dejar solo activa la parte correspondiente al sistema que se vaya a caracterizar. En esta ocasión para la caracterización del sistema conjunto, chimenea más sistema TMD, no es necesario desactivar ninguna de las dos partes del script del anexo E.

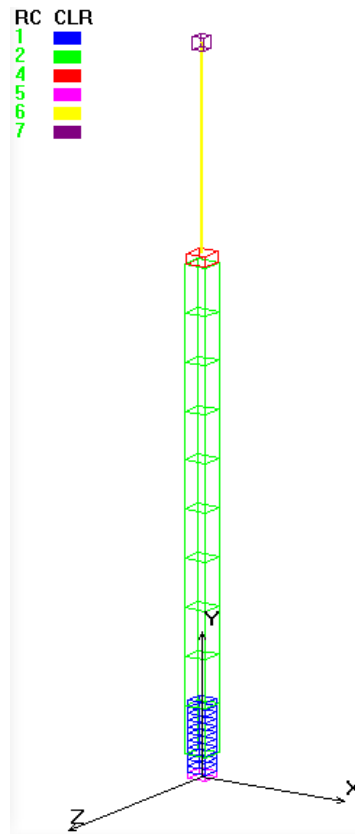


**Figura 76. Postprocesado geométrico de la chimenea más el sistema TMD**

La Figura 76 presenta el postprocesado geométrico del sistema conjunto, chimenea más sistema TMD. En color verde se muestran las curvas que van desde la número 1 a la número 5 y en color negro los puntos del 2 al 7.

La explicación del modelo simulado del sistema conjunto, chimenea mas sistema TMD, ya se ha realizado en el modelo simulado de la chimenea y en el modelo simulado del sistema TMD. Para este sistema conjunto no cambia nada con respecto a la explicación de los otros dos modelos, la única diferencia es que aquí se tiene activado al mismo tiempo la parte del script del anexo E referente a la chimenea y la parte referente al sistema TMD, de este modo el resultado del mallado del sistema conjunto puede verse en la Figura 77.

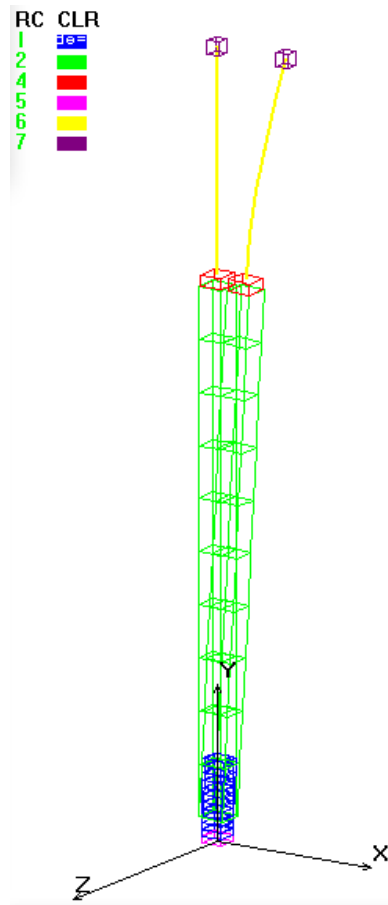




**Figura 77. Mallado de la chimenea más el sistema TMD**

Como se sabe este sistema tiene dos grados de libertad y debido a ello posee dos frecuencias naturales, que corresponden cada una con dos modos de vibración, en cada una de las dos direcciones principales. En el modelo simulado de la chimenea se presentaba en la Figura 66 la deformada correspondiente al modo de vibración 1 en una de las dos direcciones principales.

En este caso del sistema conjunto además de tener esa deformada de la chimenea correspondiente al modo 1 de vibración se tiene dos posibles deformadas del sistema TMD, que también corresponden al modo 1 de vibración, estas dos posibles deformadas del sistema conjunto se van a llamar modo 1 de vibración por la derecha y modo 1 de vibración por la izquierda.

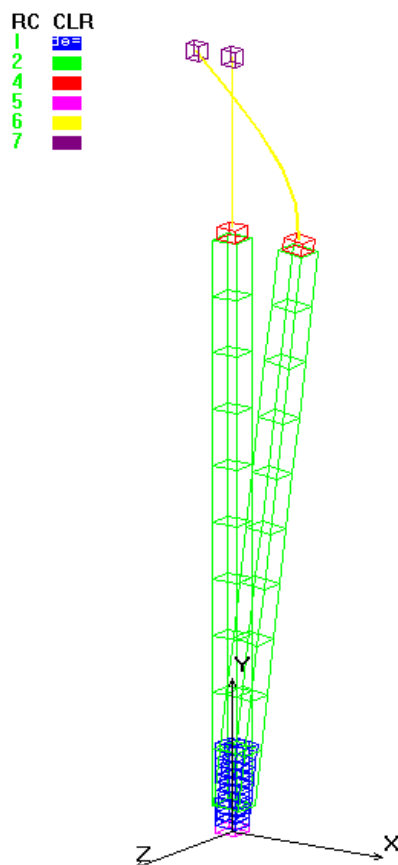


**Figura 78. Deformada del sistema conjunto (modo 1 de vibración derecha)**

La Figura 78 muestra la deformada del sistema conjunto en una de las dos direcciones principales y que corresponde con el modo de vibración 1 por la derecha, asociado a este modo de vibración se tiene la primera frecuencia natural de vibración, que en la tabla de resultados que presenta el software para el modelo de este sistema (Figura 79) se encuentra dentro del primer recuadro amarillo.

Frequency#	Frequency (Rad/sec)	Frequency (cycles/sec)	Period (seconds)
1	5.41698e+000	8.62139e-001	1.15991e+000
2	5.48630e+000	8.73172e-001	1.14525e+000
3	1.55432e+001	2.47377e+000	4.04241e-001
4	1.56542e+001	2.49144e+000	4.01375e-001
5	2.43207e+002	3.87076e+001	2.58347e-002
6	2.47831e+002	3.94435e+001	2.53527e-002
7	2.87648e+002	4.57805e+001	2.18433e-002
8	3.96892e+002	6.31674e+001	1.58310e-002
9	3.97312e+002	6.32341e+001	1.58143e-002
10	6.24410e+002	9.93779e+001	1.00626e-002

**Figura 79. Tabla de resultados del Cosmos (sistema conjunto)**



**Figura 80. Deformada del sistema conjunto (modo 1 de vibración izquierda)**

La Figura 80 presenta el otro modo de vibración, es decir, el modo 1 de vibración por la izquierda y al igual que en la anterior situación este modo de vibración tiene asociada una frecuencia natural de vibración que corresponde con la que se encuentra en el segundo recuadro de la Figura 79.

Por tanto la caracterización de este sistema como ya se ha explicado consiste en determinar las dos frecuencias naturales de vibración asociadas a cada modo de vibración para un caso concreto de número de espiras activas del resorte y diferentes valores de masa en el extremo del sistema TMD, y siempre en el caso de no tener ninguna tuerca en el extremo de la chimenea. Los valores de masa en el extremo del sistema TMD son los mismos para los que se realiza su caracterización.

Por tanto para llevar esto a cabo con el modelo simulado basta con fijar en el número correspondiente el parámetro del script del anexo E referente a las espiras activas del resorte 'ne' y el parámetro correspondiente con el número de tuercas en el extremo de la chimenea 'nm' e ir modificando el valor de masa en el extremo del sistema TMD, en el script este parámetro está definido por la variable 'mTMD'.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## Capítulo 11. Resultados

---

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos con cada uno de los tres modelos, analítico, experimental y simulado en la caracterización de cada uno de los tres sistemas, sistema TMD, chimenea y conjunto chimenea más sistema TMD. La estructura que se va a seguir es, comenzar con uno de los sistemas y presentar los resultados de su caracterización a través de los diferentes modelos y así poderlos comparar.

### 11.1 Caracterización del sistema TMD

Como ya se explicó anteriormente la caracterización de este sistema consiste en determinar la frecuencia natural de vibración en función de la masa puntual que se coloque en el extremo de dicho sistema. La caracterización se va a realizar para cuatro valores de masa. Estos valores de masa se han escogido porque los valores de la frecuencia natural de vibración que se obtienen están próximos al valor de frecuencia natural de la chimenea en el caso del número de espiras activas del resorte que se va a caracterizar en el sistema conjunto.

A continuación se presenta además del resultado de la caracterización del sistema para los diferentes modelos, los valores de los distintos parámetros que intervienen en las expresiones analíticas y como determinarlos.

#### 11.1.1 Modelo analítico

Dentro del modelo analítico para la caracterización del sistema TMD se tienen tres expresiones diferentes para determinar el valor de la frecuencia natural en función de la masa en el extremo.

Se comienza por la que se ha denotado en el Capítulo 8 como 'expresión exacta', donde la ecuación que se tiene para determinar el valor de la frecuencia natural de vibración es la expresión:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{3EI}{L^3(M_i + 0.2357m_b)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1)$$

En el Capítulo 8 está indicado el significado de cada uno de los parámetros que aparecen en la ecuación (8.1). En la Tabla 1 se muestran los valores de estos parámetros en referencia al sistema TMD.

<b>Parámetros sistema TMD</b>	
Longitud varilla (m)	0,3
Masa varilla (kg)	0,0085
Diámetro varilla (m)	0,0017
Inercia sección (m <sup>4</sup> )	4,09775E-13
E (N/m <sup>2</sup> )	2,1E+11

**Tabla 1. Parámetros del sistema TMD**

De los parámetros que aparecen en la Tabla 1 decir que tanto la longitud de la varilla, masa y su diámetro se obtienen directamente a través de equipos de medida disponibles en el laboratorio, la báscula de la Figura 50 y un metro. El término correspondiente a la inercia de la sección se hace uso de la siguiente ecuación:

$$I = \frac{\pi}{4} r^4 [m^4]$$

Donde r corresponde con el radio de la sección de la varilla, y el término correspondiente al módulo de elasticidad del material tiene ese valor debido a que es acero.

En la Tabla 2 se recogen los valores de la masa puntual en el extremo para los diferentes casos en la caracterización del sistema. Los valores se han determinado mediante la báscula mencionada anteriormente.

<b>Masa puntual (Kg)</b>
0,0836
0,1073
0,127
0,1567

**Tabla 2. Valores de la masa puntual en el sistema TMD**

Hay que destacar que ha sido necesario ajustar el modelo analítico, debido a que los resultados obtenidos mediante la ‘aproximación de sólido rígido con efecto de la gravedad’ estaban lejos de los obtenidos mediante el modelo experimental, y esta expresión del modelo analítico es la que más cerca de los resultados experimentales debe de estar porque es la única que tiene en cuenta el efecto

de la gravedad. El ajuste que se ha introducido es sobre uno de los parámetros del sistema TMD que interviene en todas las expresiones del modelo analítico, dicho ajuste se ha realizado a la longitud de la varilla del TMD y el factor del ajuste es 0,85. De este modo se realiza un ajuste coherente ya que dicho factor interviene en todas las expresiones del modelo analítico.

Una vez que ya se tienen todos los parámetros definidos se pasa a determinar la frecuencia natural de vibración del sistema en función de la masa puntual en el extremo. En la Tabla 3 se recogen los resultados obtenidos en la caracterización del sistema TMD a través de la ‘expresión exacta’ del modelo analítico.

Masa puntual (Kg)	$f_n$ (Hz)
0,0836	2,15
0,1073	1,90
0,127	1,75
0,1567	1,58

**Tabla 3. Resultados caracterización TMD (‘expresión exacta’)**

Tener en cuenta como ya se dijo en el Capítulo 8 que esta expresión no contempla la influencia del efecto de la gravedad, lo cual se verá más adelante cuanto de importante es su influencia y si es asumible despreciarlo.

Las dos expresiones restantes dentro del modelo analítico del sistema TMD como ya se explicó dentro del Capítulo 8 corresponden con aproximaciones a esta primera expresión.

A continuación se presentan los resultados obtenidos con la ‘aproximación matricial’, en esta aproximación como se vio dentro del capítulo de caracterización del sistema TMD no se consiguió llegar a una expresión debido a que los cálculos se complican de manera excesiva, por lo que no se puede presentar una ecuación como en el caso de la expresión exacta. No obstante omitiendo ese inconveniente la resolución del método se ha realizado a través del programa Matlab mediante el script que se encuentra en el anexo C, esto ya se comentó dentro del Capítulo 8. De esta manera los resultados obtenidos para la caracterización del sistema TMD en función de la masa puntual se recogen en la Tabla 4.

Masa puntual (Kg)	$f_n$ (Hz)
0,0836	2,18
0,1073	1,92
0,127	1,77
0,1567	1,59

**Tabla 4. Resultados caracterización TMD ('aproximación matricial')**

También tener en cuenta que en esta aproximación matricial tampoco se tiene en cuenta el efecto de la gravedad

La última expresión dentro del modelo analítico se corresponde con la 'aproximación por sólido rígido'. En este caso se van a diferenciar dos situaciones una es cuando se tiene en cuenta el efecto péndulo, es decir, el efecto de la gravedad y la otra situación es cuando no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad. Este último caso será el que más se aproxime a la 'expresión exacta' como ya se ha comentado anteriormente.

Por tanto en primer lugar se presenta la expresión correspondiente al caso en el que se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, la expresión se corresponde con la ecuación (8.14):

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{3EI}{L_v^3} - \frac{M_p g}{L_v} - \frac{M_v g}{2L_v}}{\frac{1}{3}M_v + M_p}} \quad (8.14)$$

Donde en esta ecuación todos los parámetros son conocidos (Tabla 1 y Tabla 2). En la Tabla 5 se recogen los resultados de la frecuencia natural de vibración en función del valor de la masa puntual obtenidos con la 'aproximación de sólido rígido' teniendo en cuenta la gravedad.

Masa puntual (Kg)	$f_n$ (Hz)
0,0836	1,89
0,1073	1,61
0,127	1,43
0,1567	1,22

**Tabla 5. Resultados caracterización TMD ('aprox. Sólido rígido con efecto de g')**

La segunda situación correspondiente a la 'aproximación por sólido rígido' es cuando no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, de este modo la ecuación que se tiene es la expresión (8.15):



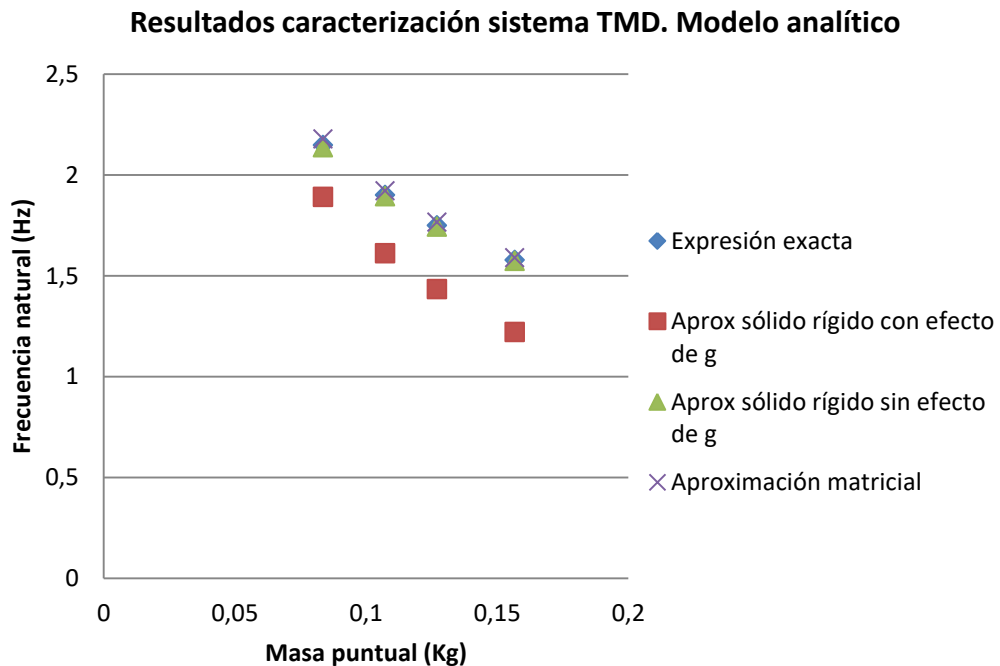
$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{L_v^3 \left(\frac{1}{3}M_v + M_p\right)}} \quad (8.15)$$

En la Tabla 6 se presentan los resultados obtenidos en la caracterización del sistema TMD con la ‘aproximación de sólido rígido’ sin tener en cuenta el efecto de la gravedad.

Masa puntual (Kg)	$f_n$ (Hz)
0,0836	2,14
0,1073	1,89
0,127	1,74
0,1567	1,57

**Tabla 6. Resultados caracterización TMD (‘aprox. Sólido rígido sin efecto de g’)**

En el Gráfico 1 se representan los resultados obtenidos en la caracterización del sistema TMD a través de la ‘expresión exacta’ y de las diferentes aproximaciones ya presentadas dentro del modelo analítico. Como primera conclusión se debe esperar que la mejor aproximación a la ‘expresión exacta’ ha de ser la ‘aproximación por sólido rígido’ en la situación donde no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, ya que las dos expresiones analíticas respectivas son prácticamente iguales.



**Gráfico 1. Resultados caracterización TMD (modelo analítico)**

También hay que esperar que la ‘aproximación matricial’ tenga unos resultados cercanos a la ‘aproximación exacta’ ya que tampoco tiene en cuenta el efecto de la gravedad, pero a priori como no se ha conseguido llegar a una ecuación similar no se sabe si es buena aproximación o no. Y en relación a la ‘aproximación por sólido rígido’ en donde se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, hay que esperar que sea la que más lejos se sitúe de la ‘expresión exacta’.

Se esperaba que la mejor aproximación de las tres a la ‘expresión exacta’ fuese la ‘aproximación por sólido rígido’ en la situación donde no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, pero como puede verse en el Gráfico 1 tanto la aproximación correspondiente a los puntos verdes (‘aproximación por sólido rígido sin efecto de  $g$ ’) como la correspondiente a los puntos con forma de aspas (‘aproximación matricial’) son prácticamente igual de buenas, ya que los puntos de las dos aproximaciones están prácticamente en la misma posición respecto a los puntos de la ‘expresión exacta’.

Por último, como era de esperar, los resultados obtenidos en la caracterización del sistema TMD mediante la ‘aproximación por sólido rígido’ en la situación donde se tiene en cuenta el efecto de la gravedad tienen una cierta diferencia respecto a los resultados obtenidos a través de las otras tres expresiones del modelo analítico, lo cual puede verse en el Gráfico 1.

Puede notarse a partir de este gráfico que esta diferencia tiene una tendencia creciente según aumenta el valor de la masa puntual, lo cual es una evidencia, porque atendiendo a la expresión (8.14) en el numerador hay un término restando donde aparece la masa puntual, por lo que si esta aumenta el valor de la frecuencia natural disminuye, mientras que en la ecuación (8.15) no está dicho término, ya que es la expresión de la ‘aproximación por sólido rígido’ en la que no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, por lo que aquí el valor de la frecuencia no se ve afectado de la misma forma.

La diferencia que existe entre tener en cuenta el efecto péndulo, es decir, la gravedad es demasiado importante como para poder despreciarla. Que la gravedad tenga tanta influencia en el sistema TMD se explica de la siguiente forma. El término que corresponde con la rigidez de la ecuación de la ‘aproximación por sólido rígido’ es el siguiente:

$$\frac{3EI}{L_v^3} - \frac{M_p g}{L_v} - \frac{M_v g}{2L_v}$$

De este término hay una parte donde tiene influencia la gravedad y otra parte que depende exclusivamente del material y de su geometría. Separando estas dos partes, por un lado los términos donde influye la gravedad y por otro lado el término donde no tiene influencia la gravedad, en la Tabla 7 se recogen los valores que toman estas dos partes para los valores de masa puntual de la Tabla 2.

Masa puntual (Kg)	$\frac{3EI}{L_v^3}$	$\left  -\frac{M_p g}{L_v} - \frac{M_v g}{2L_v} \right $	% influencia
0,0836	15,57	3,38	21,71
0,1073	15,57	4,29	27,56
0,127	15,57	5,05	32,43
0,1567	15,57	6,19	39,77

**Tabla 7. Influencia de la gravedad en la rigidez (sistema TMD)**

En la última columna se recoge en porcentaje el error que se comete en el término de rigidez, es decir, en el numerador de la expresión (8.14) si se desprecia la parte donde influye la gravedad. Y como se ha comentado anteriormente aquí puede comprobarse la tendencia creciente al aumentar el valor de la masa puntual, basta con fijarse en que el porcentaje de error es también creciente con el valor de masa puntual.

Antes se ha comentado que la diferencia entre tener en cuenta el efecto péndulo o no, es demasiado grande como para poder despreciarlo, en la Tabla 8, se presenta el error entre las dos situaciones de la ‘aproximación por sólido rígido’, el error prácticamente es el mismo con la ‘expresión exacta’ y con la ‘aproximación matricial’ ya que los resultados obtenidos son prácticamente iguales a los obtenidos con la ‘aproximación por sólido rígido’ sin el efecto de g.

Aproximación sólido rígido con efecto de g $f_n$ (Hz)	Aproximación sólido rígido sin efecto de (g) $f_n$ (Hz)	Error (%)
1,89	2,14	11,52
1,61	1,89	14,89
1,43	1,74	17,80
1,22	1,57	22,39

**Tabla 8. Error en la frecuencia natural por efecto de la gravedad (sistema TMD)**

Por tanto en la Tabla 8 se puede ver que el error más pequeño que se comete en la caracterización del sistema TMD asumiendo despreciable el efecto de la gravedad es de un 11%. Es un error demasiado elevado como para poder

despreciar el efecto péndulo, asique se puede concluir con que no es asumible despreciar el efecto de la gravedad en la caracterización del sistema TMD.

### 11.1.2 Modelo experimental

Siguiendo la metodología que se explicó en el Capítulo 8 para la caracterización del sistema TMD mediante el modelo experimental se obtienen los resultados que se presentan en la Tabla 9.

Masa puntual (Kg)	$t_2$ (s)	$t_1$ (s)	Periodos	$f_n$ (Hz)
0,0836	10,53	4,01	12	1,84
0,1073	9,34	2,75	11	1,67
0,127	9,81	3,14	10	1,50
0,1567	8,97	1,09	10	1,27

**Tabla 9. Resultados caracterización sistema TMD (modelo experimental)**

Como se explicó también en el Capítulo 8, para determinar el valor de la frecuencia natural de vibración del sistema TMD se hace uso de la expresión (8.16):

$$f_n = \left( \frac{t_2 - t_1}{N^{\circ} \text{ periodos}} \right)^{-1}$$

Donde los parámetros que intervienen en dicha ecuación se encuentran en la Tabla 9, por tanto solamente basta con sustituirlos. Como ya se ha explicado, los datos de la tabla se toman de la señal de la amplitud en función del tiempo que proporciona el software Dewesoft.

Es obvio, al tratarse de un modelo experimental la gravedad siempre está presente, por tanto en los resultados obtenidos de la caracterización del sistema TMD a través del modelo experimental se tiene el efecto péndulo, es decir, el efecto de la gravedad.

De las expresiones correspondientes al modelo analítico, la ‘aproximación de solido rígido’ en el caso donde se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, debe de ser la expresión que tenga los resultados más parejos a los de la Tabla 9. Por esto como se ha comentado anteriormente ha sido necesario realizar un ajuste en uno de los parámetros del sistema TMD para que los resultados fueran similares. El parámetro que ha sido ajustado interviene en todas las expresiones del modelo analítico, de esta manera todas las expresiones quedan modificadas

de la misma forma y por tanto las diferencias entre los resultados de las diferentes expresiones no se alteran.

### 11.1.3 Modelo simulado

Atendiendo a la forma de proceder para la caracterización del sistema TMD a través del modelo simulado, la cual se expone en el Capítulo 8, los resultados que se obtienen se presentan en la Tabla 10.

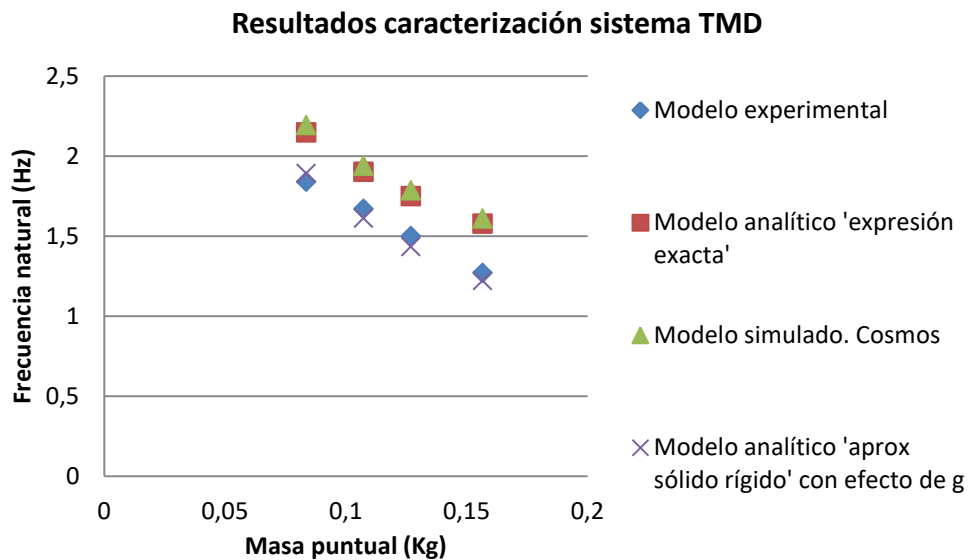
Masa puntual (Kg)	$f_n$ (Hz)
0,0836	2,19
0,1073	1,94
0,127	1,79
0,1567	1,61

**Tabla 10. Resultados caracterización sistema TMD (modelo simulado)**

Como ya se sabe, el modelo simulado no tiene en cuenta el efecto de la gravedad, por tanto hay que esperar que estos resultados no se encuentren próximos a los obtenidos a través del modelo experimental y los obtenidos mediante la ‘aproximación de sólido rígido’ en el caso que tiene en cuenta la gravedad, sino que estén cercanos a los valores obtenidos con las expresiones que no tienen en cuenta la gravedad.

Para poder comparar los resultados obtenidos de la caracterización del sistema TMD a través de los diferentes modelos se presenta el Gráfico 2, en donde se ha representado los valores de la frecuencia natural de vibración del sistema en función del valor de la masa puntual en el extremo.

Destacar que del modelo analítico se ha representado los valores determinados con una de las expresiones donde no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, ‘expresión exacta’ y los obtenidos con una expresión donde si se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, ‘aproximación de sólido rígido’. Se podía haber escogido alguna de las otras dos expresiones del modelo analítico donde no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, pero debido a que los resultados son prácticamente los mismos, da igual cual escoger.



**Gráfico 2. Resultados caracterización sistema TMD**

Como era de esperar los resultados obtenidos con el modelo simulado son prácticamente iguales que los determinados con las expresiones del modelo analítico que no tienen en cuenta la gravedad, puede verse en el Gráfico 2, donde los puntos de color verde y de color rojo prácticamente quedan en las mismas posiciones.

Ocurre lo mismo con los resultados obtenidos con el modelo experimental y la 'aproximación de sólido rígido' del modelo analítico, en el caso donde se considera la gravedad. Como ya se ha comentado anteriormente esta situación se ha conseguido introduciendo un ajuste sobre el parámetro de la longitud del sistema TMD, porque sin dicho ajuste los resultados obtenidos con la expresión del modelo analítico no se encuentran tan cerca de los resultados obtenidos con el modelo experimental, esta diferencia se debe a que en el modelo experimental se tienen situaciones que en la expresión del modelo analítico no se pueden recoger, como que la unión entre la varilla y el casquillo no es perfecta y además es una unión semirrígida.

Al igual que en el Gráfico 1, en este segundo gráfico también se puede ver la influencia de la gravedad, y al ser los resultados prácticamente iguales entre el modelo experimental y la 'aproximación de sólido rígido' con el efecto de la gravedad, los errores que se calcularon y se presentaron en la Tabla 8 son prácticamente iguales entre los modelos experimental y simulado.

Anteriormente ya se concluyó que no asumible despreciar la gravedad, por tanto, el modelo simulado no es adecuado para caracterizar el sistema TMD.

Para conseguir que el modelo simulado sea apto para la caracterización del sistema se plantea introducir un factor de ajuste para salvar la influencia del efecto de la gravedad.

El planteamiento para conseguir salvar dicho efecto es el siguiente; con los modelos en los que se tiene en cuenta la gravedad los resultados de la caracterización, es decir, los valores de las frecuencias naturales de vibración toman valores menores que los modelos que no tienen en cuenta el efecto de la gravedad, por tanto para salvar dicho efecto en el modelo simulado hay que introducir un factor de ajuste que reduzca la rigidez del sistema.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{3EI}{L^3(M_i + 0.2357m_b)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1)$$

Poniendo atención en la expresión exacta (8.1) se puede ver que hay diversas formas para reducir la rigidez del sistema

$$K = \frac{3EI}{L^3}$$

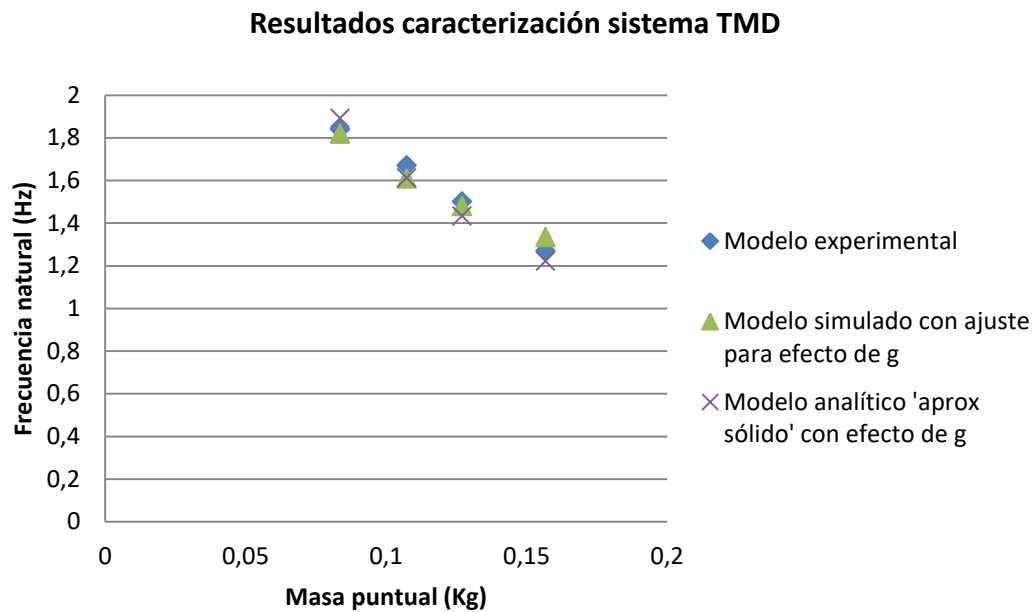
El ajuste para salvar el efecto de la gravedad en el modelo simulado se realiza en el término de inercia, reduciendo el valor del diámetro de la varilla. Para ello se introduce un factor de ajuste en el script del anexo E sobre el parámetro 'dv' que es el que define dicho valor, y el valor del coeficiente de ajuste es 0,91. Como el efecto de la gravedad no es despreciable, este ajuste sobre el modelo simulado se mantendrá para la caracterización del sistema conjunto.

Con el nuevo factor de ajuste los resultados que se obtienen en la caracterización del sistema TMD son los que se recogen en la Tabla 11.

Masa puntual (Kg)	$f_n$ (Hz)
0,0836	1,82
0,1073	1,61
0,127	1,48
0,1567	1,33

**Tabla 11. Resultados caracterización sistema TMD (modelo simulado ajustado)**

Por ultimo en el Gráfico 3, se presentan los resultados obtenidos en la caracterización del sistema TMD mediante los tres modelos teniendo en cuenta la gravedad, debido a que es la situación que refleja la realidad, es decir, el modelo experimental y como ya se ha detallado no es asumible despreciarla.



**Gráfico 3. Resultados caracterización sistema TMD (modelos con efecto de g)**

Como puede verse en este gráfico, con el ajuste introducido en el modelo simulado se ha conseguido solventar la diferencia entre los resultados de la caracterización, respecto a los otros dos modelos, debida al efecto de la gravedad.

Por último destacar que se ha conseguido realizar la caracterización del sistema TMD mediante tres modelos diferentes consiguiendo unos resultados prácticamente iguales y además se ha determinado que no es asumible desprestigiar la gravedad para la caracterización de este sistema.

## 11.2 Caracterización de la chimenea

Como ya se sabe la caracterización de la chimenea consiste en determinar su frecuencia natural de vibración en función de dos parámetros, el número de espiras activas del resorte y el valor de la masa puntual en el extremo. Anteriormente se ha explicado también que los valores extremos de estos dos parámetros son para las espiras del resorte, desde 1 hasta 9, y para el valor de la masa en el extremo, desde 1 tuerca a 3 tuercas.

A continuación además de presentar los resultados obtenidos en la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos, se detallan los valores



que tienen los diferentes parámetros que intervienen en las distintas expresiones y la forma de determinar su valor.

### 11.2.1 Modelo experimental

Siguiendo con la metodología que se explicó en el Capítulo 9 para la caracterización de la chimenea a través del modelo experimental se obtienen los siguientes resultados en función del número de espiras activas del resorte y del número de tuercas en el extremo de la chimenea.

<b>NINGUNA TUERCA EN EL EXTREMO</b>				
<b>Espiras activas</b>	<b><math>t_2</math> (s)</b>	<b><math>t_1</math> (s)</b>	<b>Periodos</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	7,64	3,22	14	3,17
2	9,76	2,68	17	2,40
3	7,01	2,74	8	1,87
4	11,58	3,07	14	1,64
5	10,84	2,85	12	1,50
6	11,10	2,95	11	1,35
7	9,79	1,54	10	1,21
8	9,65	0,70	10	1,12
9	9,94	2,18	8	1,03

**Tabla 12. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental)**

<b>1 TUERCA EN EL EXTREMO</b>				
<b>Espiras activas</b>	<b><math>t_2</math> (s)</b>	<b><math>t_1</math> (s)</b>	<b>Periodos</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	6,01	2,55	7	2,02
2	8,66	2,21	10	1,55
3	9,09	1,48	9	1,18
4	11,52	3,72	8	1,03
5	9,65	1,14	8	0,94
6	9,78	2,54	6	0,83
7	11,27	3,13	6	0,74
8	9,20	1,66	5	0,66
9	11,39	3,05	5	0,60

**Tabla 13. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental)**

<b>2 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>				
<b>Espiras activas</b>	<b>t<sub>2</sub> (s)</b>	<b>t<sub>1</sub> (s)</b>	<b>Periodos</b>	<b>f<sub>n</sub> (Hz)</b>
1	7,32	1,29	10	1,66
2	8,26	0,92	9	1,23
3	10,07	2,47	7	0,92
4	9,49	1,95	6	0,80
5	10,56	2,13	6	0,71
6	10,10	2,00	5	0,62
7	9,58	1,86	4	0,52
8	11,22	4,86	3	0,47
9	9,59	2,26	3	0,41

**Tabla 14. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental)**

<b>3 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>				
<b>Espiras activas</b>	<b>t<sub>2</sub> (s)</b>	<b>t<sub>1</sub> (s)</b>	<b>Periodos</b>	<b>f<sub>n</sub> (Hz)</b>
1	6,8	0,98	8	1,37
2	9,375	2,66	7	1,04
3	9,5	2,96	5	0,76
4	10,32	2,61	5	0,65
5	8,9	1,635	4	0,55
6	9,055	2,61	3	0,47
7	10,2	2,625	3	0,40
8	Pierde la verticalidad			
9				

**Tabla 15. Resultados caracterización chimenea (modelo experimental)**

Como ya se explicó dentro del Capítulo 9 y al igual que en el modelo experimental del sistema TMD, para la determinación del valor de la frecuencia natural de vibración se hace uso de la ecuación (9.11):

$$f_n = \left( \frac{t_2 - t_1}{N^{\circ} \text{ periodos}} \right)^{-1}$$

En las tablas desde la 11 a la 15 se encuentran los valores de los parámetros necesarios para la determinación del valor de la frecuencia natural de vibración de la chimenea en función del número de tuercas en el extremo. Los datos

presentados en las tablas se obtienen de la señal de la amplitud del movimiento en función del tiempo que proporciona el software Dewesoft.

Es evidente, que al tratarse de un modelo experimental el efecto de la gravedad está presente en los resultados obtenidos de la caracterización de la chimenea. Más adelante una vez presentados los resultados obtenidos a través de los diferentes modelos se evaluará si es asumible desprestigiar o no el efecto de la gravedad en la caracterización de este sistema.

### 11.2.2 Modelo analítico

Dentro del Capítulo 9 se explica el planteamiento seguido para llegar a la ecuación (9.9), mediante la que se realiza la caracterización de la chimenea en el modelo analítico.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K_\theta - M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2}}{\frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2}} \quad (9.9)$$

También dentro del mismo capítulo se detalla a que se refiere cada uno de los parámetros que aparecen en dicha ecuación, en la Tabla 12 se presentan los valores que toman estos parámetros referidos al sistema de la chimenea.

Parámetros sistema chimenea	
Masa chimenea (Kg)	0,5376
Longitud chimenea (m)	1
Masa puntual (1 tuerca) (Kg)	0.22
Masa puntual (2 tuercas) (Kg)	0,41
Masa puntual (3 tuercas) (Kg)	0,6

Tabla 16. Parámetros del sistema chimenea

Los valores de todos los parámetros que aparecen en la Tabla 16 se han determinado mediante la báscula de la Figura 51, excepto la longitud de la chimenea que se determina a través de una cinta métrica.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

CALCULO RIGIDEZ DEL RESORTE				
Espiras activas	Mp (Kg)	Wn (rad/s)	$K_{\theta}$ (Nm)	$K_{\theta}$ promedio (Nm)
1	0	19,91	73,70	69,98
1	0,22	12,69	69,05	
1	0,41	10,41	70,57	
1	0,6	8,63	66,59	
2	0	15,09	43,44	42,41
2	0,22	9,74	42,70	
2	0,41	7,70	41,60	
2	0,6	6,55	41,92	
3	0	11,77	27,44	26,79
3	0,22	7,43	26,84	
3	0,41	5,79	26,40	
3	0,6	4,80	26,48	
4	0	10,33	21,74	21,47
4	0,22	6,44	21,36	
4	0,41	4,99	21,35	
4	0,6	4,07	21,45	
5	0	9,43	18,58	18,38
5	0,22	5,90	18,69	
5	0,41	4,47	18,42	
5	0,6	3,46	17,84	
6	0	8,48	15,51	15,45
6	0,22	5,20	15,61	
6	0,41	3,88	15,51	
6	0,6	2,92	15,18	
7	0	7,61	13,02	13,15
7	0,22	4,63	13,34	
7	0,41	3,25	12,89	
7	0,6	2,49	13,34	
8	0	7,01	11,45	11,67
8	0,22	4,16	11,72	
8	0,41	2,96	11,83	
9	0	6,47	10,15	10,38
9	0,22	3,77	10,45	
9	0,41	2,57	10,55	

Tabla 17. Resultados de  $K_{\theta}$  (promedio)

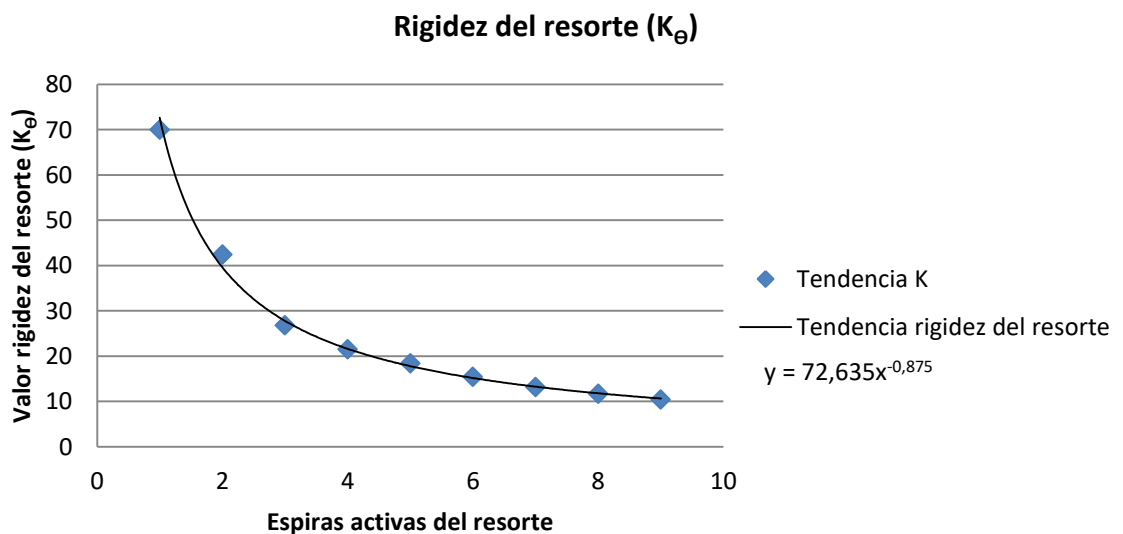
En la Tabla 16 no se ha presentado el valor que toma el parámetro que hace referencia al valor de la rigidez del resorte del sistema de la chimenea ( $K_{\theta}$ ). Este parámetro es uno de los dos que hay que modificar durante la caracterización de

la chimenea, por lo que no tiene un valor fijo, sino que su valor es función del número de espiras activas del resorte.

En el Capítulo 9 ya se explicó el procedimiento para calcular la rigidez del resorte en función del número de espiras y también se presentó la ecuación (9.8) a través de la que se determina su valor.

$$K_{\theta} = \left( \frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2 \right) \cdot \omega_n^2 + M_p g L_c + M_{Chim} g \frac{L_c}{2} \quad (9.8)$$

Donde el valor de  $\omega_n$  se toma de los resultados de la caracterización de la chimenea determinados a través del modelo experimental, sabiendo que hay que introducirlo en la expresión con unidades de [rad/s]. De este modo en la Tabla 17 se presentan los resultados obtenidos, aquí puede verse que el valor de la rigidez del resorte prácticamente es el mismo para un determinado número de espiras activas del resorte en las diferentes situaciones de masa en el extremo de la chimenea, como era de esperar. En la última columna se recoge el valor promedio de  $K_{\theta}$ , debido a que existe alguna pequeña discrepancia entre los valores de la rigidez del resorte en las distintas situaciones de masa puntual, las cuales pueden verse en la Tabla 17.



**Gráfico 4. Rigidez del resorte en función de las espiras activas**

En el Gráfico 4 se lleva a cabo la representación de los valores promedios de  $K_{\theta}$  en función de las espiras activas para determinar la expresión analítica que rige dicho parámetro, para ello se muestra la línea de tendencia que mejor se aproxima a los valores calculados de este parámetro y la expresión analítica

correspondiente a dicha línea de tendencia, la cual si se presenta en referencia a los términos representados en el Grafico 4, toma la siguiente forma:

$$K_{\theta} = 72,635 \cdot (\text{espiras activas})^{-0.875}$$

Por tanto una vez que ya se tienen determinados todos los parámetros que intervienen en la ecuación (9.9), se puede determinar los valores de la frecuencia natural de vibración de la chimenea en función del número de tuercas y del número de espiras activas del resorte.

Como ya se dijo en el Capítulo 9, a pesar de tener solo una expresión en el modelo analítico de la chimenea, se realizan tres casos diferentes. En un primer caso la caracterización de la chimenea se realiza teniendo en cuenta la gravedad y el valor de la rigidez del resorte se toma de los valores promedios de la Tabla 17, el segundo caso también se tiene en cuenta el efecto de la gravedad pero con la diferencia de que el valor de la rigidez del resorte se determina a través de la ecuación obtenida a partir del Grafico 4, con estos dos primeros casos se quiere ver si la ecuación que rige el comportamiento del resorte es adecuada, y por último, el caso donde no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad y la rigidez del resorte se determina a través de la ecuación analítica que rige el comportamiento del resorte, porque como se verá más adelante esta expresión sí que es aceptable para determinar el valor de rigidez del resorte en función del número de espiras activas.

NINGUNA TUERCA EN EL EXTREMO	
Espiras activas	$f_n$ (Hz)
1	3,09
2	2,37
3	1,85
4	1,63
5	1,49
6	1,35
7	1,22
8	1,13
9	1,05

Tabla 18. Resultados caracterización chimenea (1<sup>er</sup> caso modelo analítico)

<b>1 TUERCA EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	2,03
2	1,55
3	1,18
4	1,03
5	0,93
6	0,82
7	0,73
8	0,66
9	0,60

Tabla 19. Resultados caracterización chimenea (1<sup>er</sup> caso modelo analítico)

<b>2 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	1,65
2	1,24
3	0,93
4	0,80
5	0,71
6	0,62
7	0,53
8	0,46
9	0,40

Tabla 20. Resultados caracterización chimenea (1<sup>er</sup> caso modelo analítico)

<b>3 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	1,41
2	1,05
3	0,77
4	0,65
5	0,57
6	0,47
7	0,39

Tabla 21. Resultados caracterización chimenea (1<sup>er</sup> caso modelo analítico)

De la Tabla 18 a la Tabla 21 se presentan los resultados de la caracterización de la chimenea obtenidos mediante la expresión (9.9) referentes al primer caso del modelo analítico, es decir, teniendo en cuenta la gravedad y tomando los valores promedios de la rigidez del resorte. Al igual que en el modelo experimental, en los otros dos modelos para la caracterización de la chimenea, el caso de 3 tuercas en el extremo se realiza hasta 7 espiras activas porque para más espiras activas se pierde la verticalidad.

A continuación en las Tablas que van desde la 22 a la 25 se muestran también los resultados de la caracterización de la chimenea obtenidos a través de la misma expresión analítica pero con la diferencia de que el valor del parámetro referente a la rigidez del resorte ( $K_{\theta}$ ) se determina a través de la expresión que rige el comportamiento del resorte en función del número de espiras activas, esta expresión se presentó en el Grafico 4.

<b>NINGUNA TUERCA EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	3,15
2	2,29
3	1,89
4	1,64
5	1,46
6	1,33
7	1,22
8	1,14
9	1,06

**Tabla 22. Resultados caracterización chimenea (2<sup>o</sup> caso modelo analítico)**

<b>1 TUERCA EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	2,08
2	1,49
3	1,20
4	1,03
5	0,91
6	0,81
7	0,73
8	0,67
9	0,61

**Tabla 23. Resultados caracterización chimenea (2<sup>o</sup> caso modelo analítico)**



<b>2 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	1,69
2	1,19
3	0,95
4	0,80
5	0,69
6	0,60
7	0,53
8	0,47
9	0,41

**Tabla 24. Resultados caracterización chimenea (2º caso modelo analítico)**

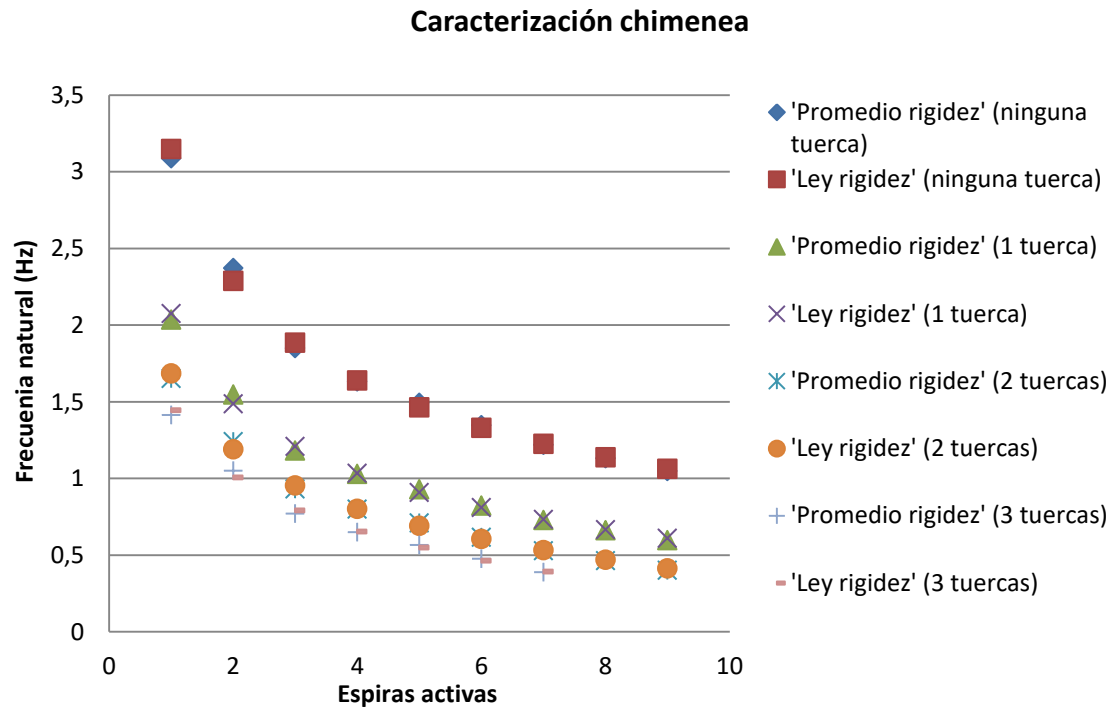
<b>3 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	1,44
2	1,01
3	0,79
4	0,65
5	0,55
6	0,46
7	0,39

**Tabla 25. Resultados caracterización chimenea (2º caso modelo analítico)**

En el Gráfico 5 se representa los resultados obtenidos en la caracterización de la chimenea mediante la expresión del modelo analítico en el primer y segundo caso que se han mencionado anteriormente. En dicho gráfico se representan los cuatro casos de masa puntual que se realizan en la caracterización de dicho sistema, y en cada caso se presentan los resultados obtenidos a través de los dos primeros casos del modelo analítico.

Con este gráfico lo que se quiere poner de manifiesto es, que la ecuación determinada para describir el comportamiento de la rigidez del resorte en función del número de espiras activas, es decir la ley de rigidez del resorte, sí que es aceptable. Se llega a esta conclusión porque si se presta atención al Gráfico 5 en cada caso de numero de tuercas en el extremo los valores obtenidos en la caracterización de la chimenea a través de los dos casos del modelo analítico,

tomando el valor promedio de  $K_\theta$  y determinando su valor a través de la expresión de la ley de rigidez del resorte, los resultados obtenidos son prácticamente iguales. Por lo tanto de ahora en adelante siempre que sea necesario determinar la rigidez del resorte en función del número de espiras activas se procederá mediante la expresión de la ley de rigidez del resorte.



**Gráfico 5. Caracterización chimenea modelo analítico (1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> caso)**

El tercer y último caso del modelo analítico corresponde con la caracterización de la chimenea sin tener en cuenta el efecto de la gravedad, y como se ha mencionado anteriormente  $K_\theta$  se determina mediante la expresión que rige su comportamiento en función del número de espiras activas. Con este último caso se pretende llegar a la conclusión de si es asumible o no, despreciar el efecto de la gravedad en la caracterización de la chimenea. Partiendo de la expresión analítica y despreciando los términos en los que la gravedad interviene, la ecuación toma la siguiente forma (9.10):

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K_\theta}{\frac{1}{3}M_{chim}L_c^2 + M_p \cdot L_c^2}} \quad (9.10)$$

Haciendo uso de esta expresión, en las Tablas de la 26 a la 29, se presentan los resultados obtenidos en la caracterización de la chimenea.

<b>NINGUNA TUERCA EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	3,21
2	2,37
3	1,98
4	1,75
5	1,59
6	1,46
7	1,37
8	1,29
9	1,23

Tabla 26. Resultados caracterización chimenea (3<sup>er</sup> caso modelo analítico)

<b>1 TUERCA EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	2,15
2	1,59
3	1,33
4	1,17
5	1,06
6	0,98
7	0,92
8	0,86
9	0,82

Tabla 27. Resultados caracterización chimenea (3<sup>er</sup> caso modelo analítico)

<b>2 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	1,77
2	1,30
3	1,09
4	0,96
5	0,87
6	0,81
7	0,75
8	0,71
9	0,68

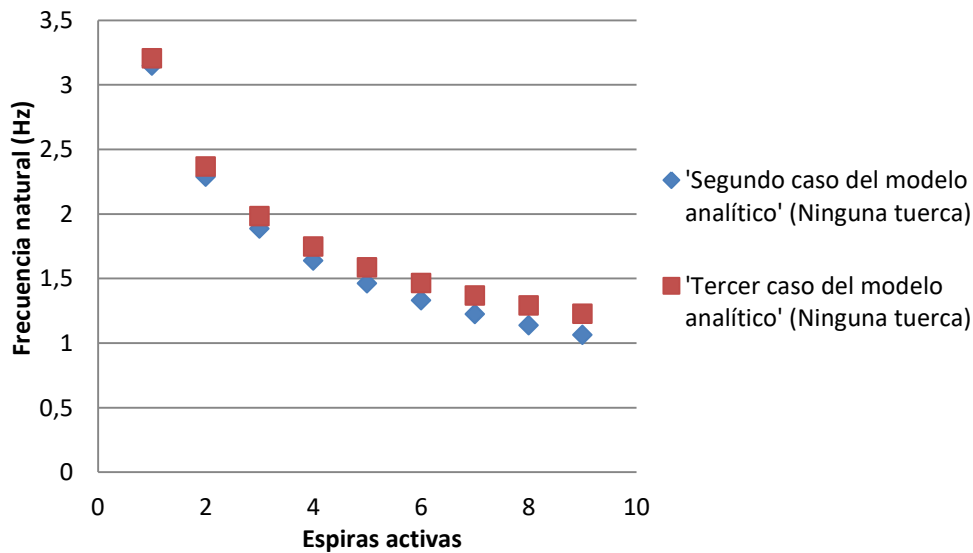
Tabla 28. Resultados caracterización chimenea (3<sup>er</sup> caso modelo analítico)

3 TUERCAS EN EL EXTREMO	
Espiras activas	$f_n$ (Hz)
1	1,54
2	1,14
3	0,95
4	0,84
5	0,76
6	0,70
7	0,66

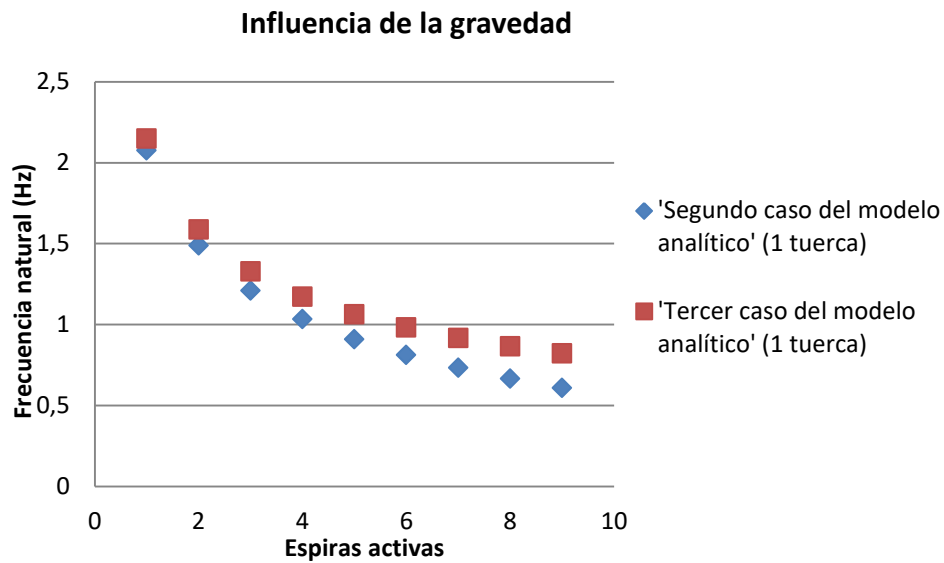
**Tabla 29. Resultados caracterización chimenea (3<sup>er</sup> caso modelo analítico)**

Para ver cuánto de importante es la influencia de la gravedad en los resultados de la caracterización de la chimenea se presentan los gráficos del 6 al 9, correspondientes a los cuatro casos de masa puntual en el extremo. De esta forma se presenta de forma visual una primera idea de cuánto influye dicho efecto y como es su tendencia en función del número de espiras activas y del valor de la masa en el extremo.

#### Influencia de la gravedad

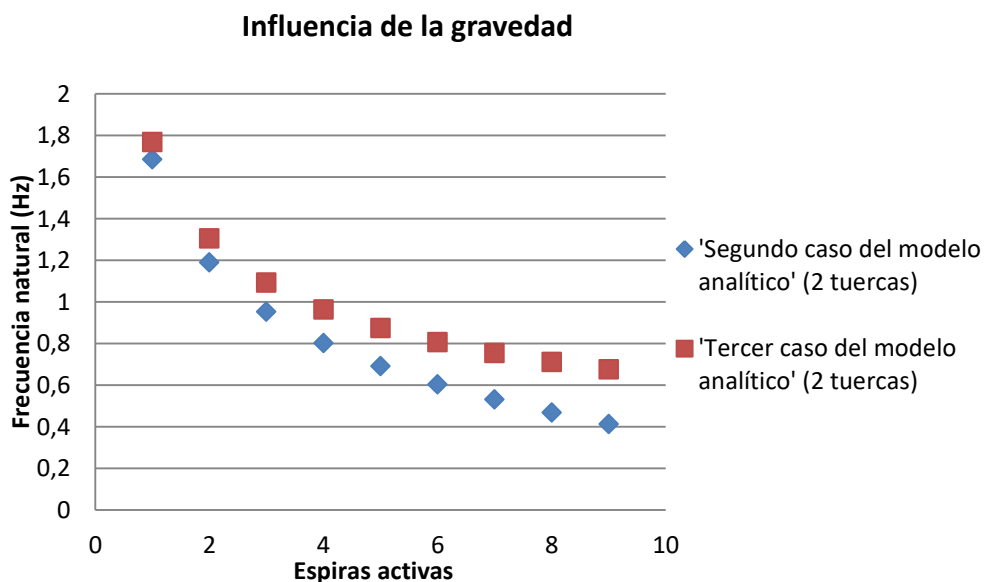


**Gráfico 6. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (Ninguna tuerca)**

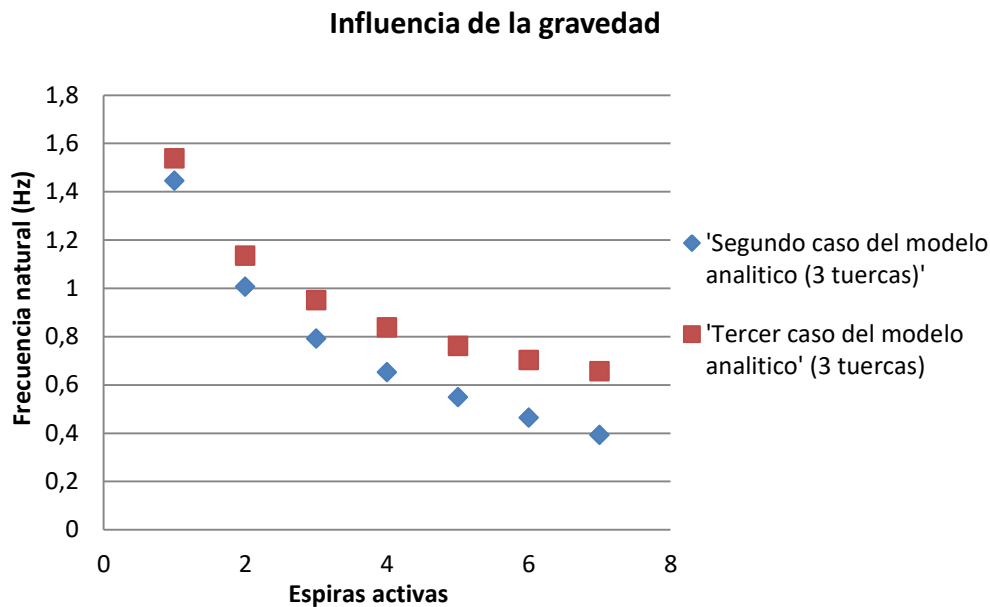


**Gráfico 7. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (1 tuerca)**

En estos dos primeros gráficos ya se puede notar la influencia de la gravedad al comprobar que existe cierta distancia entre los resultados obtenidos con el segundo y tercer caso del modelo analítico, también puede verse que la influencia no es constante sino que tiene un comportamiento creciente, directamente proporcional al número de espiras activas del resorte y al número de tuercas en el extremo, o lo que es lo mismo al valor de la masa puntual en el extremo



**Gráfico 8. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (2 tuercas)**



**Gráfico 9. Influencia de la gravedad en la caracterización de la chimenea (3 tuercas)**

Como era de esperar la influencia del efecto de la gravedad es todavía mayor en los dos últimos casos, por lo que se ha comentado anteriormente, que dicha influencia es creciente con el número de espiras activas y con la masa en el extremo de la chimenea.

Al igual que en el sistema TMD, a continuación se va a presentar la influencia que tiene desprestigiar la gravedad dentro del término de rigidez de la expresión del modelo analítico del sistema de la chimenea. De la ecuación (9.9) si se toma el parámetro que hace referencia a la rigidez del sistema se tiene la siguiente expresión:

$$K_{\theta} - M_p g L_c - M_{chim} g \frac{L_c}{2} = K_{sistema\ chimenea}$$

Esta expresión corresponde con el numerador de la ecuación (9.9) y puede verse cuales son los términos en los que influye la gravedad y en cual no. Separando estos términos, en las tablas de la 30 a la 33 se presentan los valores que toman estos dos términos en función del número de espiras activas del resorte y en función del valor de la masa en el extremo de la chimenea.

Como ya se ha comentado el valor del parámetro que hace referencia a la rigidez del resorte ( $K_{\theta}$ ) se determina por medio de la ley del resorte.

NINGUNA TUERCA EN EL EXTREMO			
Espiras activas	$K_{\theta}$ [Nm]	$ -M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2} $	% influencia
1	69,98	2,64	3,77
2	42,41	2,64	6,22
3	26,79	2,64	9,84
4	21,47	2,64	12,28
5	18,38	2,64	14,35
6	15,45	2,64	17,06
7	13,15	2,64	20,06
8	11,67	2,64	22,60
9	10,38	2,64	25,39

Tabla 30. Influencia de la gravedad en la rigidez (Sistema chimenea)

1 TUERCA EN EL EXTREMO			
Espiras activas	$K_{\theta}$ [Nm]	$ -M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2} $	% influencia
1	69,98	4,80	6,85
2	42,41	4,80	11,31
3	26,79	4,80	17,90
4	21,47	4,80	22,33
5	18,38	4,80	26,09
6	15,45	4,80	31,03
7	13,15	4,80	36,47
8	11,67	4,80	41,10
9	10,38	4,80	46,18

Tabla 31. Influencia de la gravedad en la rigidez (Sistema chimenea)

Puede apreciarse en estas dos primeras tablas que la columna que corresponde con los términos en los que interviene la gravedad tiene el mismo valor para todas las espiras en cada caso de masa en el extremo, se debe a que es función solamente de la masa de la chimenea y las tuercas, parámetros que para cada caso son constantes. Lo que sí que se cumple como ya se anunció anteriormente con la presentación de los gráficos 6, 7, 8 y 9 es que la influencia de la gravedad es creciente y directamente proporcional al número de espiras activas y a la masa en el extremo de la chimenea, por lo que en las dos últimas tablas el porcentaje de influencia se espera que sea mayor.

Para el sistema TMD se vio que la influencia de la gravedad también era creciente con la masa en el extremo, lo mismo ocurre en este caso pero con una diferencia importante, que se presenta a continuación, y la cual justifica que la influencia de la gravedad también sea creciente con el número de espiras activas del resorte.

En el caso del sistema TMD el término que se encuentra dentro de la rigidez del sistema y en el cual no interviene la gravedad es constante, porque solo depende del material y de su geometría, parámetros que no se modifican durante la caracterización.

Mientras que en el caso de la chimenea el término que se encuentra dentro de la rigidez del sistema y en el que no interviene la gravedad no es constante porque depende del número de espiras activas del resorte, que sí que es una variable dentro de la caracterización de la chimenea que no se mantiene constante.

Por esto la influencia de la gravedad en este caso para un mismo valor de masa en el extremo es creciente con el número de espiras activas, porque el parámetro que hace referencia a la rigidez del resorte disminuye como se vio en el Gráfico 4, donde se muestra la tendencia del mismo. Así los términos donde interviene la gravedad ganan importancia en la  $K_{sistema\ chimenea}$  con el número de espiras activas del resorte.

2 TUERCAS EN EL EXTREMO			
Espiras activas	$K_{\theta}$ [Nm]	$ -M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2} $	% influencia
1	69,98	6,66	9,52
2	42,41	6,66	15,70
3	26,79	6,66	24,85
4	21,47	6,66	31,01
5	18,38	6,66	36,23
6	15,45	6,66	43,09
7	13,15	6,66	50,65
8	11,67	6,66	57,08
9	10,38	6,66	64,12

**Tabla 32. Influencia de la gravedad en la rigidez (Sistema chimenea)**



3 TUERCAS EN EL EXTREMO			
Espiras activas	$K_{\theta}$ [Nm]	$ -M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2} $	% influencia
1	69,98	8,52	12,18
2	42,41	8,52	20,10
3	26,79	8,52	31,81
4	21,47	8,52	39,69
5	18,38	8,52	46,37
6	15,45	8,52	55,15
7	13,15	8,52	64,82

**Tabla 33. Influencia de la gravedad en la rigidez (Sistema chimenea)**

Como era de esperar en estas dos últimas tablas la influencia de los términos donde interviene la gravedad sobre el término en donde no interviene es mayor. Lo siguiente es presentar el error que se comete en la caracterización de la chimenea, es decir, en el valor de la frecuencia natural de vibración al despreciar el efecto de la gravedad, y según el error cometido se concluirá si es asumible o no despreciar la gravedad.

NINGUNA TUERCA EN EL EXTREMO			
Espiras activas	3 <sup>er</sup> caso del modelo analítico $f_n$ (Hz)	2 <sup>o</sup> caso del modelo analítico $f_n$ (Hz)	% error
1	3,21	3,15	1,83
2	2,37	2,29	3,39
3	1,98	1,89	4,87
4	1,75	1,64	6,30
5	1,59	1,46	7,72
6	1,46	1,33	9,12
7	1,37	1,22	10,52
8	1,29	1,14	11,91
9	1,23	1,06	13,30

**Tabla 34. Error cometido al despreciar la gravedad (Sistema chimenea)**

<b>1 TUERCA EN EL EXTREMO</b>			
<b>Espiras Activas</b>	<b>3<sup>er</sup> caso del modelo analítico <math>f_n</math> (Hz)</b>	<b>2<sup>o</sup> caso del modelo analítico <math>f_n</math> (Hz)</b>	<b>% error</b>
1	2,15	2,08	3,36
2	1,59	1,49	6,25
3	1,33	1,21	9,04
4	1,17	1,03	11,80
5	1,06	0,91	14,56
6	0,98	0,81	17,33
7	0,92	0,73	20,15
8	0,86	0,67	23,01
9	0,82	0,61	25,94

**Tabla 35. Error cometido al despreciar la gravedad (Sistema chimenea)**

<b>2 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>			
<b>Espiras Activas</b>	<b>3<sup>er</sup> caso del modelo analítico <math>f_n</math> (Hz)</b>	<b>2<sup>o</sup> caso del modelo analítico <math>f_n</math> (Hz)</b>	<b>% error</b>
1	1,77	1,69	4,69
2	1,31	1,19	8,79
3	1,09	0,95	12,81
4	0,96	0,80	16,84
5	0,87	0,69	20,93
6	0,81	0,60	25,15
7	0,75	0,53	29,51
8	0,71	0,47	34,09
9	0,68	0,41	38,92

**Tabla 36. Error cometido al despreciar la gravedad (Sistema chimenea)**

Como era de esperar el error cometido en el valor de la frecuencia natural de vibración de la chimenea al despreciar el efecto de la gravedad tiene el mismo comportamiento que la influencia en el término de la rigidez al despreciar los términos donde interviene la gravedad, es decir, creciente con la masa en el

extremo y con el número de espiras activas, esto puede verse en los datos presentados en las tablas 33, 34, 35 y 36.

<b>3 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>			
<b>Espiras Activas</b>	<b>3<sup>er</sup> caso del modelo analítico <math>f_n</math> (Hz)</b>	<b>2<sup>o</sup> caso del modelo analítico <math>f_n</math> (Hz)</b>	<b>% error</b>
1	1,54	1,44	6,05
2	1,14	1,01	11,41
3	0,95	0,79	16,74
4	0,84	0,65	22,20
5	0,76	0,55	27,87
6	0,70	0,46	33,88
7	0,66	0,39	40,34

**Tabla 37. Error cometido al despreciar la gravedad (Sistema chimenea)**

En algunos de los casos el error no llega al 10%, pero en la mayoría este valor es superado, en las únicas situaciones donde se podría despreciar el efecto de la gravedad y el resultado no difiere en demasía, es en las primeras espiras del caso donde no se tiene ninguna tuerca en el extremo. En el resto de las situaciones el error que se comete al despreciar el efecto de la gravedad es demasiado grande como para decir que es asumible no tenerlo en cuenta.

### 11.2.3 Modelo simulado

Siguiendo las directrices que se presentaron en el Capítulo 9 para proceder a la caracterización de la chimenea mediante el modelo simulado, se obtienen los resultados que se presentan en las tablas que van desde la 37 a la 40 en función del número de espiras activas del resorte y en función de la masa puntual en el extremo de la chimenea.

Ya se sabe que el modelo simulado no contempla el efecto de la gravedad, por lo que hay que esperar que los resultados obtenidos en la caracterización de la chimenea a través de este modelo se sitúen próximos a los determinados mediante el tercer caso del modelo analítico, donde no se tiene en cuenta el efecto de la gravedad.

<b>NINGUNA TUERCA EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras Activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	3,17
2	2,21
3	1,83
4	1,60
5	1,44
6	1,31
7	1,21
8	1,13
9	1,06

**Tabla 38. Resultados caracterización de la chimenea (Modelo simulado)**

<b>1 TUERCA EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras Activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	2,21
2	1,54
3	1,28
4	1,12
5	1,01
6	0,92
7	0,85
8	0,80
9	0,75

**Tabla 39. Resultados caracterización de la chimenea (Modelo simulado)**

<b>2 TUERCAS EN EL EXTREMO</b>	
<b>Espiras Activas</b>	<b><math>f_n</math> (Hz)</b>
1	1,78
2	1,24
3	1,03
4	0,91
5	0,82
6	0,75
7	0,69
8	0,64
9	0,61

**Tabla 40. Resultados caracterización de la chimenea (Modelo simulado)**

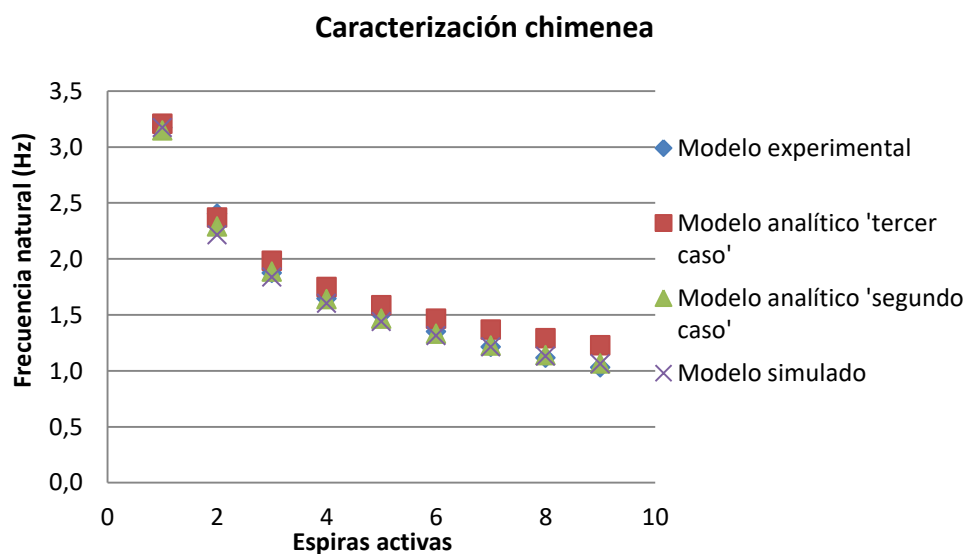
3 TUERCAS EN EL EXTREMO	
Espiras Activas	$f_n$ (Hz)
1	1,52
2	1,07
3	0,89
4	0,78
5	0,70
6	0,64
7	0,59

**Tabla 41. Resultados caracterización de la chimenea (Modelo simulado)**

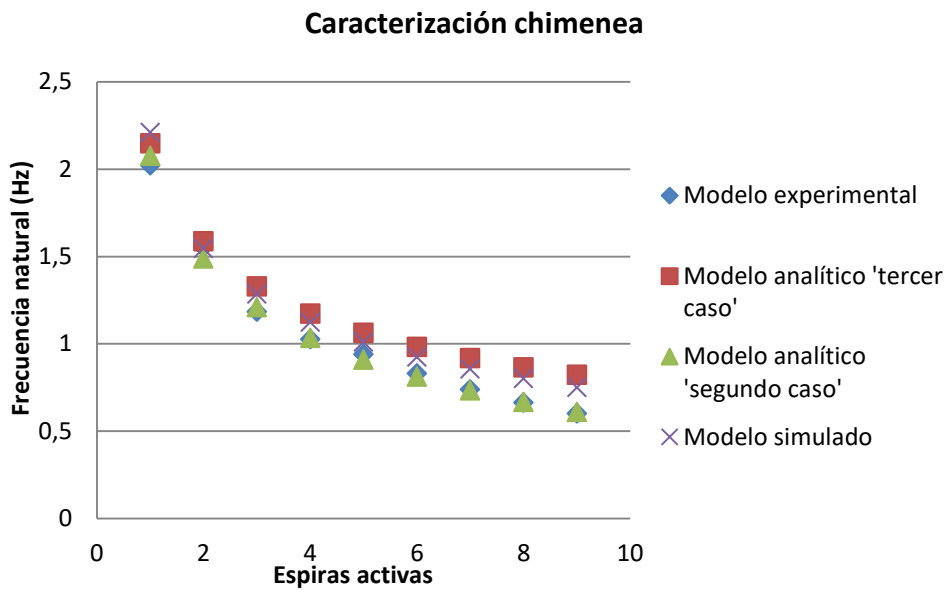
Por ultimo para poder comparar los diferentes modelos entre sí, se procede a representar mediante los siguientes gráficos, los resultados obtenidos en la caracterización de la chimenea en función del número de espiras activas y en función de la masa en el extremo a través de los tres modelos.

Antes de presentar dichos gráficos hay que esperar que de los diferentes modelos, el que mejor ajuste a los resultados experimentales sea el modelo analítico en el caso donde se tiene en cuenta el efecto de la gravedad, concretamente el que se mencionó como segundo caso del modelo analítico.

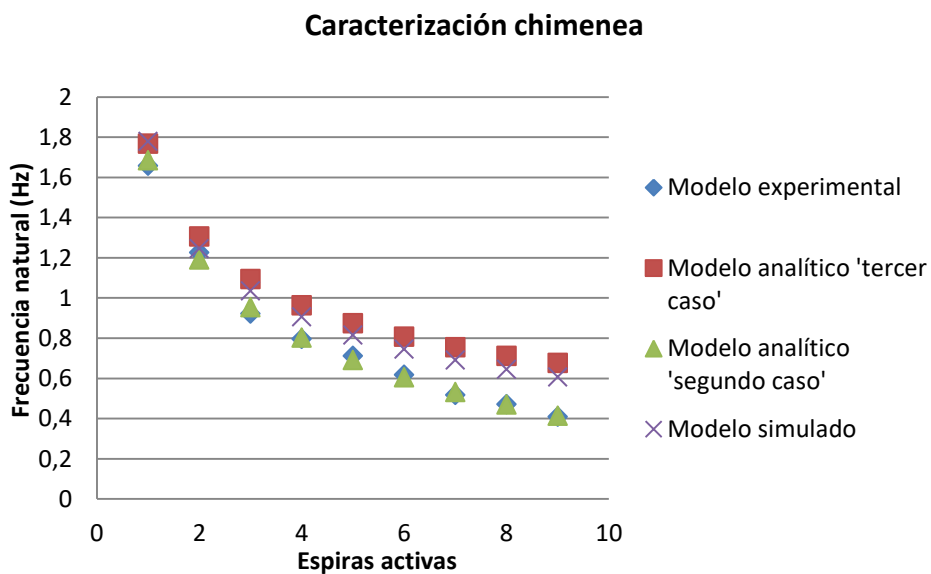
También hay que esperar que los resultados de la caracterización de la chimenea obtenidos mediante el modelo simulado y el modelo analítico en el caso que no tiene en cuenta la gravedad, sean muy parecidos.



**Gráfico 10. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (Ninguna tuerca)**

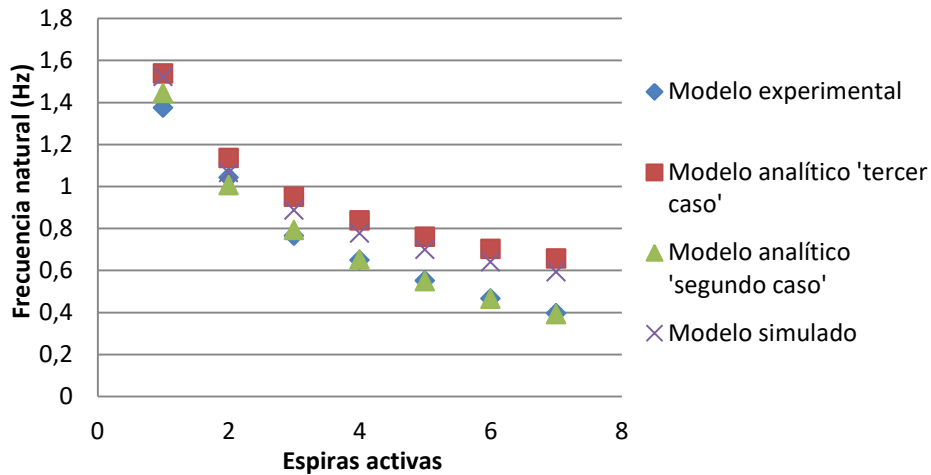


**Gráfico 11. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (1 tuerca)**



**Gráfico 12. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (2 tuercas)**

### Caracterización chimenea



**Gráfico 13. Resultado de la caracterización de la chimenea mediante los tres modelos (3 tuercas)**

A pesar de tener tres modelos para la caracterización de la chimenea, en los gráficos que van del 10 al 13, se han representado el segundo y el tercer caso del modelo analítico, por lo que en cada gráfico se pueden ver cuatro series de resultados de la caracterización de la chimenea.

Como era de esperar el modelo que mejor se ajusta a los resultados obtenidos mediante el modelo experimental es el segundo caso del modelo analítico, a través del cual los resultados de la caracterización de la chimenea son prácticamente iguales a los del modelo experimental, como se puede comprobar en dichos gráficos ya que los puntos que representan ambos resultados se encuentran en la misma posición.

También era de esperar que los resultados obtenidos mediante el modelo simulado y mediante el tercer caso del modelo analítico fueran muy parecidos. Observando los gráficos se puede comprobar que los resultados obtenidos en la caracterización de la chimenea a través de estos dos modelos se encuentran muy próximos, aunque se puede apreciar que los resultados obtenidos a través del modelo simulado se quedan un poco por debajo sobre todo en el primer caso donde no se tiene ninguna tuerca en el extremo.

Por tanto los resultados obtenidos en la caracterización de la chimenea a través de los diferentes modelos cumplen con lo que se esperaba a priori. Debido a ello el error calculado al despreciar el efecto de la gravedad en las diferentes situaciones de la caracterización de la chimenea, mediante la expresión del modelo analítico, es prácticamente el mismo error que se comete al determinar

el valor de la frecuencia natural de vibración de la chimenea mediante el modelo simulado.

### 11.3 Caracterización de la chimenea más el sistema TMD

Como ya se detalló en el Capítulo 10, la caracterización de este sistema consiste en determinar las dos frecuencias naturales de vibración del sistema, donde cada una se corresponde con un grado de libertad de los dos, para el caso concreto de 4 espiras activas del resorte sin ninguna tuerca en el extremo de la chimenea y variando la masa del sistema TMD. Por tanto en la caracterización de este sistema se tienen cuatro casos diferentes que corresponden con los distintos valores de masa en el sistema TMD, estos valores son los mismos para los que se caracterizó dicho sistema.

En el modelo analítico y simulado se presentarán los modos de vibración correspondientes a cada una de las dos frecuencias naturales de vibración del sistema.

#### 11.3.1 Modelo analítico

Para llevar a cabo la caracterización de la chimenea más el sistema TMD mediante el modelo analítico, se detalla dentro del Capítulo 10 el procedimiento para llegar a la expresión analítica (10.5) la cual permite realizar dicha caracterización.

$$\begin{bmatrix} \frac{I}{L} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_L \\ \ddot{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_1}{L} + K_2L & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

También dentro del Capítulo 10 se explica el procedimiento utilizado para resolver dicha ecuación y obtener los valores de la frecuencia natural de vibración y los modos de vibración asociados.

En la Tabla 41 se presentan los valores que toman los parámetros de la ecuación (10.5) para la caracterización del sistema conjunto chimenea más sistema TMD.



Parámetros sistema conjunto	
$I$ (Kgm <sup>2</sup> )	0,1792
$L$ (m)	1
$K_1$ (Nm)	21,5945
$K_2$ (Nm)	11,0504

**Tabla 42. Parámetros chimenea mas sistema TMD (Modelo analítico)**

El primer parámetro ( $I$ ), corresponde con el momento de inercia de la chimenea respecto al eje de giro, como se ya se ha explicado se calcula como el momento de inercia de una varilla respecto de un eje que pase por uno de los dos extremos. La expresión que se utiliza para determinar su valor ya se ha visto y aparece en el denominador de la expresión (9.9) correspondiente al modelo analítico de la chimenea:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K_\theta - M_p g L_c - M_{Chim} g \frac{L_c}{2}}{\frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2 + M_p \cdot L_c^2}} \quad (9.9)$$

Como en este caso la caracterización se hace sin tener ninguna tuerca en el extremo de la chimenea, la expresión se queda de la siguiente forma:

$$I = \frac{1}{3} M_{Chim} L_c^2$$

Donde los valores de estos parámetros y a que se refieren se han presentado en la Tabla 16. Sustituyendo dichos valores se obtiene el valor que aparece en la Tabla 41.

El segundo parámetro hace referencia a la longitud de la chimenea que como ya se sabe y se ha detallado anteriormente el valor que toma es el que aparece en la Tabla 16.

El parámetro denotado por  $K_1$  hace referencia a la rigidez del resorte, que en este caso de caracterización se corresponde con la rigidez del resorte en el caso de tener 4 espiras activas.

Como se ha visto en la caracterización de la chimenea despreciar el efecto de la gravedad solo es asumible en los primeros casos de espiras activas y en la situación de no tener ninguna tuerca en el extremo, ya que el error cometido no es muy grande. Para este caso en concreto, es decir, 4 espiras activas y ninguna tuerca en el extremo el error que se comete es de un 6%. No es un error muy grande pero aun así para el modelo analítico del sistema conjunto, se va a tener

en cuenta el efecto de la gravedad esperando que los resultados obtenidos con el modelo analítico sean lo más parecido a los del modelo experimental.

La gravedad se tiene en cuenta para la chimenea en el sistema conjunto desde el momento en que la rigidez del resorte se calcula con la ley del mismo:

$$K_{resorte} = 72,635 \cdot (\text{espiras activas})^{-0.875}$$

Porque esta expresión como ya se ha explicado se ha determinado a partir de los valores de la frecuencia natural de vibración de la chimenea obtenidos con el modelo experimental y con la expresión del modelo analítico de la chimenea en el caso que tiene en cuenta la gravedad.

De este modo sustituyendo en la ley del resorte por el número de espiras que corresponde, es decir, 4 espiras se obtiene el valor que se presenta en la Tabla 41.

Y el último parámetro ( $K_2$ ) hace referencia a la rigidez del resorte que sustituye a la varilla del sistema TMD, lo cual se explica dentro del Capítulo 10. Al igual que para la chimenea en el caso del sistema TMD se concluyó que no es asumible despreciar el efecto de la gravedad, por lo que en este sistema conjunto se tiene en cuenta.

La forma de tener en cuenta el efecto de la gravedad en el sistema TMD es determinando dicho parámetro de la manera que se explica dentro del Capítulo 10, a continuación en la Tabla 42 se presentan los valores de la rigidez del resorte para cada caso de masa puntual en el extremo.

$f_n$ sistema TMD modelo experimental(rad/s)	Masa puntual (Kg)	$K_2$ (Nm)
11,56	0,0836	11,16
10,49	0,1073	11,80
9,42	0,127	11,27
7,98	0,1567	9,97

**Tabla 43. Rigidez del resorte que sustituye al sistema TMD**

Como se explicó también dentro del Capítulo 10, los valores de la última columna de la Tabla 42 teóricamente tienen que ser iguales pero existe alguna diferencia. Por ello se toma el valor promedio de los cuatro como valor de  $K_2$ , siendo el valor que aparece en la Tabla 41.

El único parámetro que falta por indicar el valor que toma es ( $m$ ) que corresponde con el valor de la masa puntual en el extremo del sistema TMD. Como se ha indicado anteriormente los valores de la masa puntual que se van a utilizar para la caracterización del sistema conjunto son los mismos que se utilizaron para la caracterización del sistema TMD, estos valores se han presentado anteriormente en la Tabla 2.

$m$ (Kg)	1ª $f_n$ (Hz)	2ª $f_n$ (Hz)	modo vibración 1 derecha		Modo vibración 1 izquierda	
0,0836	1,27	2,52	-1,43	-2,75	-1,88	2,09
0,1073	1,17	2,42	-1,24	-2,59	-2,01	1,61
0,127	1,09	2,37	-1,13	-2,47	-2,08	1,34
0,1567	1,01	2,32	-0,99	-2,29	-2,14	1,06

**Tabla 44. Resultados caracterización sistema conjunto (Modelo analítico)**

En la Tabla 43 se presentan los resultados obtenidos en la caracterización del sistema conjunto, chimenea más sistema TMD, mediante el modelo analítico.

Hay que destacar en este caso que además de determinar las dos frecuencias naturales de vibración asociadas a los dos grados de libertad del sistema se presenta el modo de vibración asociado a cada frecuencia natural de vibración.

De esta forma el modo de vibración 1 denotado como derecha corresponde con el modo de vibración de la 1ª frecuencia natural y el denotado como izquierda corresponde con la 2ª frecuencia natural. Que dentro del modo 1 de vibración se tenga dos posibles modos de vibración tiene que ver con que el sistema TMD puede oscilar en dos sentidos, esto se ha explicado anteriormente dentro del Capítulo 10 apoyándose en las figuras 76 y 78.

Cada modo de vibración esta denotado mediante dos números, como puede verse en la Tabla 43. Lo que representan estos números es la relación entre el desplazamiento de los 2 gdl del sistema conjunto. El primer número corresponde con el grado de libertad de la chimenea y el segundo con el grado de libertad del sistema TMD. Los signos indican el sentido del desplazamiento, por tanto si los dos números tienen el mismo signo el desplazamiento es en el mismo sentido y si alguno de los dos tiene el signo diferente el desplazamiento de ese grado de libertad es en el sentido contrario, y el numero indica como de grande es el desplazamiento de cada grado de libertad.

De esta forma puede notarse que el modo vibración 1 derecha los dos números tienen el mismo signo para todos los casos de masa puntual, lo que quiere decir que los 2 gdl tienen el desplazamiento en el mismo sentido, como se mostró en la Figura 77, mientras que el modo vibración 1 izquierda el segundo número tiene diferente signo en todos los casos, lo que quiere decir que el grado de libertad correspondiente al sistema TMD tiene el desplazamiento en sentido contrario al de la chimenea, como se ilustró en la Figura 79.

### 11.3.2 Modelo experimental

Siguiendo las directrices que se indicaron en el Capítulo 10 para la caracterización del sistema conjunto, chimenea más sistema TMD, mediante el modelo experimental se obtienen los resultados que se presentan a continuación.

$m$ (Kg)	1ª $f_n$ (Hz)	2ª $f_n$ (Hz)
0,0836	1,02	2,75
0,1073	0,94	2,60
0,127	0,88	2,56
0,1567	0,78	2,41

**Tabla 45. Resultados caracterización sistema conjunto (Modelo experimental)**

En la Tabla 44 se recogen los valores de la 1ª y 2ª frecuencia natural de vibración asociadas a los 2 gdl del sistema para cada caso de masa puntual en el sistema TMD.

En dicha tabla no aparecen los valores de los dos modos de vibración correspondientes al modo 1, se debe a que mediante el modelo experimental no se obtienen dichos valores, pero a la hora de la toma de datos se visualiza en la maqueta como el sistema TMD oscila en dos sentidos mientras la chimenea lo hace solo en uno.

Por tanto quiere decir que el sistema conjunto tiene dos modos de vibración dentro del modo 1, como se ha visto anteriormente en el modelo analítico, lo cual es de esperar porque se está trabajando con un sistema de 2 gdl.

### 11.3.3 Modelo simulado

Siguiendo las pautas que se marcaron dentro del Capítulo 10 para proceder a la caracterización del sistema conjunto mediante el modelo simulado se obtienen los resultados que se presentan en la Tabla 45.

<b><math>m</math> (Kg)</b>	<b>1ª <math>f_n</math>(Hz)</b>	<b>2ª <math>f_n</math>(Hz)</b>
0,0836	1,08	2,69
0,1073	0,99	2,59
0,127	0,94	2,53
0,1567	0,86	2,47

**Tabla 46. Resultados caracterización sistema conjunto (Modelo simulado)**

Al igual que en el modelo experimental en esta tabla tampoco se recogen los valores correspondientes de los modos de vibración, pero como se vio en el Capítulo 10 a partir del software Cosmos se puede ver la deformada del sistema correspondiente a cada uno de los dos modos de vibración que se presentan en el modelo analítico, figuras 76 y 78.

A partir de la caracterización de la chimenea y del sistema TMD se determinó que no es asumible despreciar el efecto de la gravedad.

En el modelo analítico del sistema conjunto se explicó como debe ser el procedimiento para obtener el valor de determinados parámetros, para así tener en cuenta el efecto de la gravedad en la caracterización del sistema conjunto mediante dicho modelo analítico.

Hay que recordar que para el modelo simulado del sistema TMD se introdujo un factor para corregir el efecto de la gravedad, ya que el modelo simulado como se sabe no contempla dicho efecto y como se ha dicho antes no es asumible despreciarlo. Para el modelo simulado del sistema conjunto este factor de corrección del sistema TMD se sigue manteniendo porque hace que se tenga en cuenta el efecto de la gravedad en este modelo.

En cuanto al modelo simulado de la chimenea no se ha introducido ningún factor para corregir el efecto de la gravedad a pesar de que se determinó que no es asumible despreciar dicho efecto, el motivo por el que no se ha introducido este factor es porque la situación que se va a caracterizar en el sistema conjunto, es decir, la situación de 4 espiras activas y ninguna tuerca en el extremo en la caracterización de la chimenea mediante el modelo simulado tiene el resultado

cercano a los resultados experimentales, cometiendo un error algo menor del 6% que este es el que se presenta en la Tabla 33. El error es algo menor porque en el Gráfico 10 los resultados en la caracterización de la chimenea mediante el modelo simulado quedan un poco por debajo de los obtenidos con el tercer caso del modelo analítico, lo cual ya se detalló. Si se calcula el error que se comete para esta situación de la caracterización de la chimenea, entre el modelo experimental y el modelo simulado se tiene un valor de error del 2,5%, error suficientemente pequeño como para poder asumirlo.

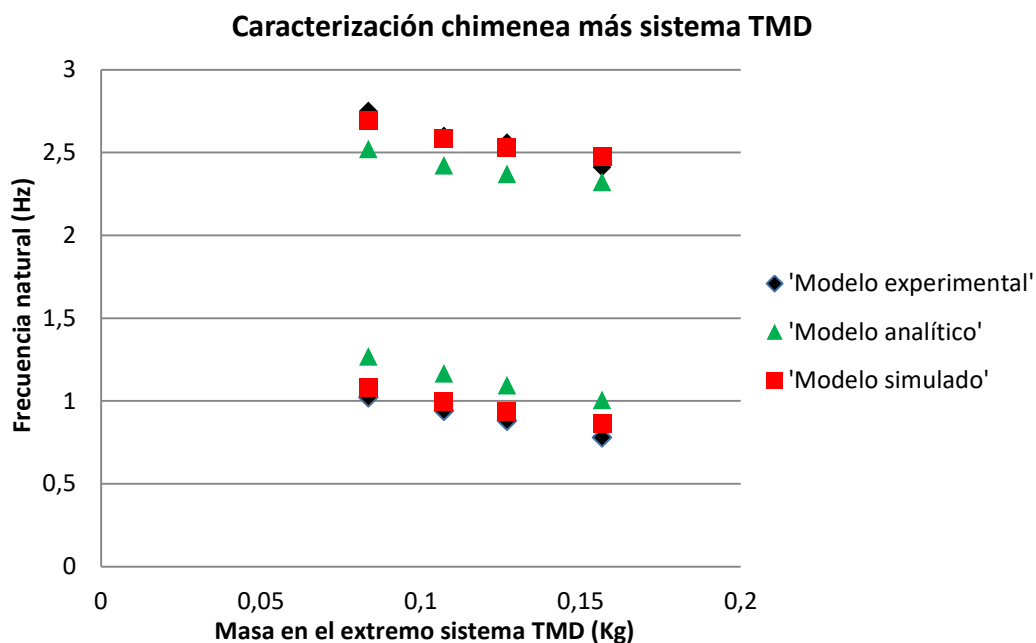


Gráfico 14. Resultado caracterización chimenea mas sistema TMD

Hay que esperar que los resultados de la caracterización del sistema conjunto obtenidos con los tres modelos sean muy parecidos, ya que en los tres se tiene en cuenta el efecto de la gravedad y hasta el momento ha sido el factor que provocaba las diferencias entre ellos. Así que como ahora se tiene en cuenta en los tres modelos hay que esperar que dichas diferencias no sean tan grandes como en los casos anteriores.

En el Gráfico 14 se representan los resultados obtenidos en la caracterización del sistema conjunto en función de la masa en el extremo del sistema TMD y en el caso de tener 4 espiras activas del resorte. Destacar que se representan a la vez los valores de la 1ª y 2ª frecuencia natural, siendo los puntos que se sitúan en la parte inferior del grafico los valores correspondientes a la 1ª frecuencia natural y los puntos de la parte superior los valores correspondientes a la 2ª frecuencia natural.

Los resultados obtenidos a través del modelo analítico no son todo lo buenos que se esperaban, ya que como se puede apreciar en dicho gráfico los puntos se encuentran a cierta distancia de los resultados del modelo experimental, que son la referencia, tanto para la 1ª frecuencia como para la 2ª.

En cuanto al modelo simulado los resultados obtenidos se aproximan más a lo que se esperaba, ya que como se puede ver en el gráfico los puntos correspondientes a este modelo se encuentran muy próximos a los puntos del modelo experimental.

La diferencia entre los resultados del modelo experimental y del modelo analítico puede estar en que este último modelo no reproduzca adecuadamente la realidad de la maqueta.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables



## Capítulo 12. Conclusiones, trabajo futuro

---

Desde el punto de vista del estudio realizado:

- Se consigue completar el objetivo principal de la construcción y caracterización de las tres estructuras mediante los modelos experimental, analítico y simulado.
- Se encuentran pequeñas diferencias entre sí, al comparar los resultados obtenidos analíticamente y simuladamente. Una de las principales causas de estas diferencias se debe a la discretización del modelo, ya que en el modelo teórico se simplifica mediante barras y masas puntuales, mientras que en el modelo simulado se simplifica por barras de menor tamaño creadas por el mallado.
- En cuanto a los resultados obtenidos experimentalmente también se comprueba que no son totalmente semejantes a los obtenidos tanto de la forma analítica como a los simulados. Sobre todo esta diferencia es más abultada en el caso del sistema conjunto, una de las principales causas es la aproximación del sistema TMD a un sistema resorte-masa puntual.
- En el estudio de vibraciones sobre estructuras esbeltas se considera como asumible despreciar el efecto péndulo a la hora calcular sus frecuencias naturales de vibración. En este TFG se determina que no es asumible despreciar el efecto péndulo en la caracterización de las tres estructuras, donde para ello se determina el error cometido si en la caracterización de estas estructuras se desprecia dicho efecto.

Desde el punto de vista de las competencias adquiridas o mejoradas durante la realización:

- Se realiza trabajo de taller en el que se fabrica la maqueta.
- Se emplea una metodología en la medición de los ensayos.
- Se postprocesan señales mediante software profesional (Dewesoft).
- Se utilizan programas de diseño (CATIA), programas de elementos finitos (COSMOS) y programas de cálculo numérico y tratamiento de datos (MATLAB) por ordenador.

En cuanto a posibles líneas futuras de trabajo

Desde el punto de vista de la formulación teórica:

- Desarrollar fórmulas generales para estimar las vibraciones en sistemas reales en los que el efecto de la gravedad puede ser significativo.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Desde el punto de vista experimental:

- Identificar los distintos fenómenos físicos que dificultan o imposibilitan reducir a escala de laboratorio el problema de vibraciones en chimeneas industriales por acción del viento.
- Diseñar un TMD omnidireccional (a escala) en el que se pueda incorporar un sistema de amortiguamiento controlable.
- Diseñar un TLD (a escala) y comparar su eficiencia con respecto a la del TMD equivalente, pudiendo aparecer aquí también problemas de escala. Para evaluar la eficiencia lo ideal sería reproducir en el laboratorio de forma realista el fenómeno de desprendimiento de torbellinos sin tener que recurrir a grandes instalaciones, como pueden ser túneles de viento.

Desde el punto de vista de la simulación:

- Usar las modernas capacidades de los entornos informáticos de multifísica computacional para simular el problema de interacción entre la chimenea y el viento, incluyendo los sistemas de control tipo TMD y TLD.

## Capítulo 13. Bibliografía

---

[1] Antolín Lorenzana Iban. Ecuación de la frecuencia natural de vibración de una viga empotrada en un extremo con masa puntual en el extremo libre.

[2] William T. Thompson (1983) “Teoría de vibraciones”

[3] Apuntes teoría asignatura: “Elementos de Máquinas y Vibraciones”. Departamento de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales Universidad de Navarra. Curso 3º de Ingeniería Industrial

[4] Apuntes teoría asignatura: “Física I” Departamento de Física Aplicada. Universidad de Salamanca. Curso 2010/11.

Rafael García Molina. Departamento de Física – CIOyN. Universidad de Murcia

Tesis Doctoral. Ali Vasallo Belver. “Análisis de vibraciones aeroelásticas en estructuras esbeltas sometidas a carga de viento”. Escuela Técnica Superior de ingenieros industriales Universidad de Valladolid.

TFG. García García, Juan Luis. “Diseño, construcción y caracterización de una maqueta de edificio multiplanta para prácticas de vibraciones”, Escuela de ingenierías industriales Universidad de Valladolid. Curso 2015/2016.

TFG. Rodríguez Celador, Jesús. “Incorporación de dispositivos TMD en una maqueta de edificio de 2 plantas. Diseño, construcción y sintonizado”. Escuela de ingenierías industriales Universidad de Valladolid. Curso 2015/2016

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables



## HL-G112-A-C5 | Compact Laser Displacement Sensor HL-G1



※Photo may vary from actual product.



Product Number	HL-G112-A-C5
Part Number	HL-G112-A-C5
Product	Compact Laser Displacement Sensor
Details	Sensor head (Standard type)
Product name	Compact Laser Displacement Sensor HL-G1
Features	High performance CMOS Laser Displacement Sensors

As of July 04, 2016

### Spec Detail

Item	Specifications
Product Number	HL-G112-A-C5
Part Number	HL-G112-A-C5
Features	High performance CMOS Laser Displacement Sensors
Type	Standard type
Measurement center distance	120 mm 4.724 in
Measuring range	± 60 mm ± 2.362 in
Resolution	8 μm 0.315 mil
Linearity	± 0.1 % F.S.
Temperature characteristics	± 0.08 % F.S. / °C
Light source	Red semiconductor laser, Class 2 (IEC / JIS / FDA, Laser Notice No. 50) Max. output: 1 mW (Peak emission wavelength: 655 nm 0.026 mil)
Beam diameter	1.0 x 1.5 mm 0.039 x 0.059 in (Note) This beam diameter is the size at the measurement center distance. These values were defined by using 1/e <sup>2</sup> (13.5 %) of the center light intensity. If there is a slight leakage of light outside the normal spot diameter and if the periphery surrounding the sensing point has a higher reflectivity than the sensing point itself, then the results may be affected.
Receiving element	CMOS image sensor
Supply voltage	24 V DC ± 10 % including ripple 0.5 V (P-P)
Current consumption	100 mA or less
Sampling rate	200 μs, 500 μs, 1 ms, 2 ms

## Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Analog output : Voltage	Output range: 0 to +10.5 V (normal), 11 V (alarm) Output impedance: 100 Ohm
Analog output : Current	Output range: 3.2 to 20.8 mA (normal), 21.6 mA (alarm) Load impedance: 300 Ohm or less
Output (OUT 1, OUT 2, OUT 3)	Judgment output or alarm output (Setting can be selected.) Selectable NPN transistor open-collector or PNP transistor open-collector <In case of using NPN output> -Maximum sink current: 50 mA -Applied voltage: 3 to 24 V DC (between output and 0 V) -Residual voltage: 2 V or less (at 50 mA of sink current) <In case of using PNP output> -Maximum source current: 50 mA -Residual voltage: 2.8 V or less (at 50 mA of source current)
Output (OUT 1, OUT 2, OUT 3) : Output operation	Opened when the amount of light is insufficient.
Output (OUT 1, OUT 2, OUT 3) : Short circuit protection	Incorporated (automatic restoration)
Output polarity setting input	NPN open collector output operates when 0 V is connected. PNP open collector output operates when 24 V DC is connected.
Timing input	NPN output operates when 0V is connected and NPN is set. (It depends on the setting.) PNP output operates when external power + is connected and PNP is set. (It depends on the setting.)
Multi input	Zero set, zero set off, reset, memory switching, teaching, saving, and laser control according to the input time. In case NPN output is selected, Function varies according to the time 0 V is connected NPN. In case PNP output is selected, Function varies according to the time external power + is connected.
Indicator : Laser emission	Green LED (lights up during laser emission)
Indicator : Alarm	Orange LED lights up when this product cannot measure because of insufficient or excessive light intensity.
Indicator : Measurement range	Three yellow LED
Digital display	Red LED 5 digit display

Degree of pollution	2
Operating altitude	2,000 m 6561 ft or less
Environmental resistance : Protection	IP67
Environmental resistance : Ambient temperature	-10 to +45 °C +14 to +113 °F (No dew condensation), Storage: -20 to +60 °C -4 to +140 °F
Environmental resistance : Ambient humidity	35 to 85 % RH, Storage: 35 to 85 % RH
Environmental resistance : Ambient illuminance	Incandescent light: 3,000 lux or less at the light-receiving face (Note) The fluctuation by ambient illuminance is ± 0.1 % F.S. or less.
Environmental resistance : Insulation resistance	20 MOhm , or more, with 250 V DC between all supply terminals connected together and enclosure
Environmental resistance : Voltage withstandability	1,000 V AC one min. between all supply terminals connected together and enclosure
Environmental resistance : Vibration resistance	10 to 55 Hz (period: 1 min.) frequency, 1.5 mm 0.059 in amplitude in X,Y and Z directions for two hours each
Environmental resistance : Shock resistance	500 m/s <sup>2</sup> acceleration (50 G approx.) in X,Y and Z directions for three times each
Material	Enclosure: PBT Front cover: Acrylic Cable: PVC

## Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Cable	0.1mm <sup>2</sup> 10-core cabtyre cable, 5 m <a href="#">16.404 ft</a> long
Weight	Net weight: 70 g approx. (not including cable), 320 g approx. (including cable) Gross weight: 380 g approx.
Accessory	Warning label: 1 set
Remark	Where measurement conditions have not been specified precisely, the conditions used were as follows: supply voltage 24 V DC, ambient temperature +20 °C <a href="#">+68 °F</a> , sampling rate 500 µs, average number of samples: 1024, measurement center distance, object measured is made of white ceramic and analog measurement values.

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables



### SIRIUS HD-STG



Los módulos para extensimetría SIRIUS STG permiten la adquisición de señales procedentes de bandas extensiométricas en cuarto de puente, medio puente y puente completo.

También acondicionan señales analógicas estándar desde +/- 100 mV hasta +/-50 V, así como las procedentes de potenciómetros, RTD y termopares. El ancho de banda, como en toda la serie SIRIUS es de 200 kHz por canal, con una resolución de 24 bits.

Sus características son:

ADC type	24 bit sigma delta dual core with anti-aliasing filter
Data rate	Simultaneous 200kS/s
Isolation voltage [V]	1000 V (non-isolated version available)
Power consumption	max 4 W
Connectors	DB9
Direct inputs	Voltage, full/half/quarter bridge strain, potentiometer, RTD, resistance, IEPE (with MSI), thermocouple (with MSI), charge (with MSI)

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Dual core ranges	+/-50 V, +/-10 V, +/-1 V, +/- 100 mV
Bridge ranges	+/-500 mV/V, +/-200 mV/V, +/- 20 mV/V, +/-2 mV/V
Dynamic range @ 10 kS	152dB (dual core)
Input coupling	DC
Excitation voltage	SW programmable 0 to 20V (100mW)
Excitation current	SW programmable 0 to 45mA (100mW)
Bridge connection type	3,4,5,6 wire connection
Internal bridge completion	half bridge 1kOhm, quarter bridge 120 and 350 Ohm, SW selectable
Short	SW selectable
Shunt	SW selectable (59.88kOhm, 175kOhm)
TEDS support	yes
TEDS chip	DS2406, DS2430A, DS2432, DS2433
Overvoltage protection	In+ to In-: 50 V continuous, 200 V peak (10 msec)
Input impedance	10 MOhm for 50 V range, all other ranges 1 GOhm

## ANEXO C

Resolución 'aproximación matricial' del modelo analítico del sistema TMD en Matlab.

```
%***** PARAMETROS *****

M=0.0085;      %Masa varilla del sistema TMD (Kg)
L=0.30*0.85;  %Longitud sistema TMD con factor de ajuste (m)
Mp=0.0836;    %Masa puntual en el sistema TMD (Kg)
E=2.1e11;     %Modulo de elasticidad de la varilla del sistema TMD (N/m2)
I=4.09775e-13; %Momento de inercia sección varilla TMD (m4)

%***** DEFINIR MATRICES PROBLEMA VALORES PROPIOS*****

Ke= [(12*E*I)/(L^3) (-6*E*I)/(L^2);(-6*E*I)/(L^2) (4*E*I)/(L)]; %Matriz de rigidez

Me=[(((156/420)*M*L)+Mp) ((-22/420)*M*L);((-22/420)*M*L)
((4/420)*M*L^3)]; %Matriz de inercia

%*****1ª OPCION DE RESOLUCION (De forma simbólica para tratar de obtener
expresión similar a la 'expresión exacta')*****

%syms M Mp w E I L %Resolución simbólica en función de estos parámetros
ec=(((-(w^2))*Me)+Ke); %Planteamiento de la ecuación a resolver
eq = det(ec); %Determinante de la ecuación igual a 0
W = solve(eq,(w)); %4 soluciones de la ecuación bicuadrática
Fn=W/(2*pi); %4 soluciones en [Hz], interesa la primera solución

%*****2ª OPCION DE RESOLUCION (Problema de autovalores)*****

[V,D]=eig(Me\Ke); %Solución problema autovalores
D=sqrt(D)/(2*pi); %Frecuencia natural (Hz), primer elemento de la matriz
```

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## ANEXO D

---

Resolución modelo analítico chimenea más sistema TMD en Matlab

```
%***** PARAMETROS *****  
Mi=0.1567;           %Masa puntual TMD (kg)  
%E=2.1e11;          %Modulo de elasticidad varilla TMD (N/m2)  
I1=0.1792;          %Inercia chimenea respecto eje de giro (Kgm2)  
L1=1;               %Longitud chimenea (m)  
k1=72.635*(4)^-0.875; %Rigidez resorte chimenea (Nm)  
k2=11.0504;         %Rigidez varilla sistema TMD  
  
%***** DEFINIR MATRICES (Problema de valores propios)*****  
  
M=[I1/L1 0; 0 Mi];           %Matriz de inercia  
K=[(k1/L1)+(k2*L1) -k2; -k2 k2]; %Matriz de rigidez  
[V,D]=eig(K,M);             %Frecuencia natural y modos de vibración  
D=sqrt(D)/(2*pi);           %Frecuencia (Hz)
```

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## ANEXO E

Script del modelo simulado de la chimenea más el sistema TMD

c\* modelo paramétrico para chimenea + TMD

c\* chimenea = ne espiras + tubo de aluminio + tapa con nm tuercas

c\* TMD = varilla + masa\_movil

new,q;

c\* CHIMENEA

parassign,lt,real,1 c\* longitud del tubo (m)

parassign,le,real,0.01375 c\* longitud de cada espira (m)

parassign,lm,real,0.0216 c\* longitud de las masas (casquillo superior + tuercas)

parassign,ne,int,4 c\* número de espiras activas

parassign,nte,int,12 c\* número de espiras totales

parassign,nm,int,0 c\* número de tuercas

parassign,diat,real,0.050 c\* diámetro del tubo (m)

parassign,espt,real,0.0012 c\* espesor del tubo (m)

parassign,dAl,real,2922.189 c\* densidad del aluminio (Kg/m<sup>3</sup>)

parassign,diam,real,0.03825 c\* diámetro ficticio de la tuerca (m)

parassign,espm,real,0.016 c\* espesor de la tuerca (m)

parassign,dAc,real,7850 c\* densidad del acero (Kg/m<sup>3</sup>)

parassign,dFe,real,11380 c\* densidad ficticia de las espiras (Kg/m<sup>3</sup>)

parassign,ExFe,real,6.13e7\*0.55 c\* módulo de elasticidad ficticio de la zona  
de las espiras (N/m<sup>2</sup>)

c\* espiras

parassign,lad1,real,0.040 c\* lado1 estimado

parassign,lad2,real,0.041 c\* lado2 estimado

parassign,espe,real,0.001 c\* espesor ... ficticio

c\* TMD

parassign,TMD,int,1 c\* =0(sin\_TMD), =1(con TMD)

parassign,lv,real,0.3 c\* longitud de la varilla material 1

parassign,dv,real,0.0017\*0.91 c\* diámetro de la varilla con ajuste para  
efecto de la gravedad

parassign,mTMD,real,0.1567 c\* masa en el extremo de la varilla

C\* PREPROCESADO GEOMETRICO

VIEW,0,0,1,0

PT,1,.2,0,0

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta  
de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

PT,2,0,0,0

CREXTR,2,2,1,Y,ne\*le-le/2.2

CREXTR,3,3,1,Y,lt

CREXTR,4,4,1,Y,(nm+1)\*lm c\* siempre hay por lo menos el casquillo, de  
la misma longitud que las masas

CREXTR,3,3,1,Y,(nte-ne)\*le

C\* MALLADO

EGROUP,1,BEAM3D,0,0,0,0,0,0,0 c\*todos van a ser elementos finitos tipo viga

c\* 3 materiales: 1\_acero y 2\_aluminio y otro ficticio para las espiras

MPROP,1,DENS,dAc;

MPROP,1,EX,2.1e11;

MPROP,2,DENS,dAl;

MPROP,2,EX,7.0e10;

MPROP,3,DENS,dFe;

MPROP,3,EX,ExFe;

c\* 3 secciones: 1\_virtual para la zona de espiras, 2\_tubo, 3\_masas

BMSECDEF,1,1,4,1,10,lad1,lad2,espe,espe,0,0,0,0,0,0

BMSECDEF,1,2,3,1,10,diat,espt,0,0,0,0,0,0,1

BMSECDEF,1,3,3,1,10,diam,espm,0,0,0,0,0,0,1

BMSECDEF,1,4,3,1,10,diam,espm/100,0,0,0,0,0,0,1

BMSECDEF,1,5,4,1,10,lad1,lad2,espe\*.4,espe\*.4,0,0,0,0,0,0

c\* mallado de la zona de las espiras

actset,mp,3;

actset,rc,1;

M\_CR,1,1,3,3,ne,1,1

M\_CR,4,4,1,3,nte-ne,1,1

EPROPCHANGE,1,1,1,RC,5,6

c\* mallado del tubo

actset,mp,2;

actset,rc,2;

M\_CR,2,2,1,3,10,1,1

c\* mallado de la tapa + masas

actset,mp,1;

actset,rc,3;

M\_CR,3,3,1,3,nm+1,1,1

c\* cambiar el primer elemento de MASA a TAPA

EPROPCHANGE,11+nte,11+nte,1,RC,4,5

c\* empotramiento inferior



Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta  
de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

DPT,2,AL,0,2,1

#IF TMD==1

CREXTR,5,5,1,Y,lv

BMSECDEF,1,6,1,1,10,dv,dv\*0.999,0,0,0,0,0,0,1

actset,mp,1;

actset,rc,6;

M\_CR,5,5,1,3,5,1,1

EGROUP,2,MASS,0,0,0,0,0,0,0

RCONST,2,7,1,7,mTMD,mTMD,mTMD,0,0,0,0

M\_PT,7,7,1

#ENDIF

NMERGE;

ACTECLR,1,RC,1

SETEPLOT,0,0,1,0,1,0

view;

scale;

eplot;

c\* ANALISIS

A\_FREQUENCY,10,S;

r\_freq;

C\* POSTPROCESADOS

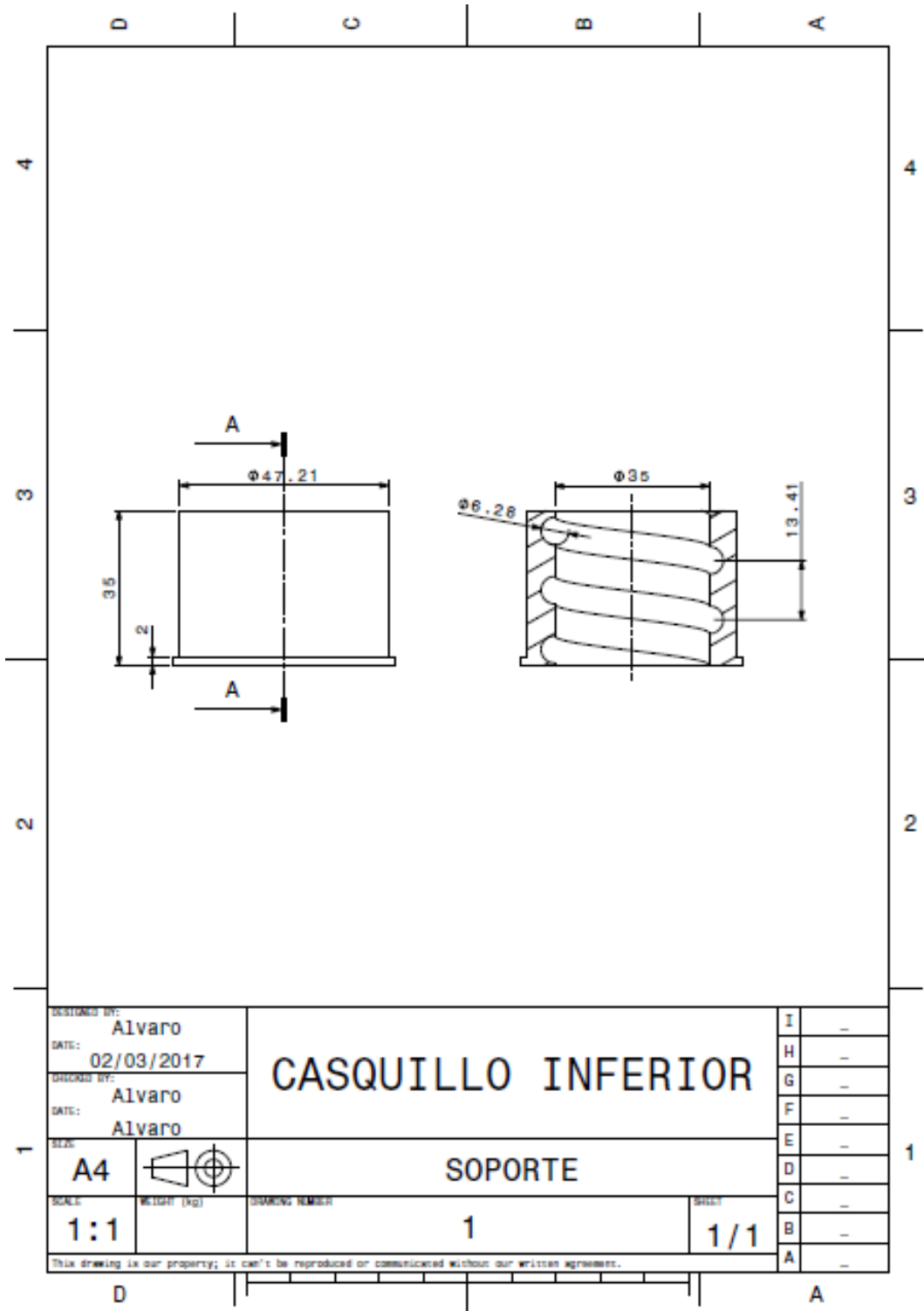
freqlit;

defplot;

c\*FPT,5,FX,1,5,1;

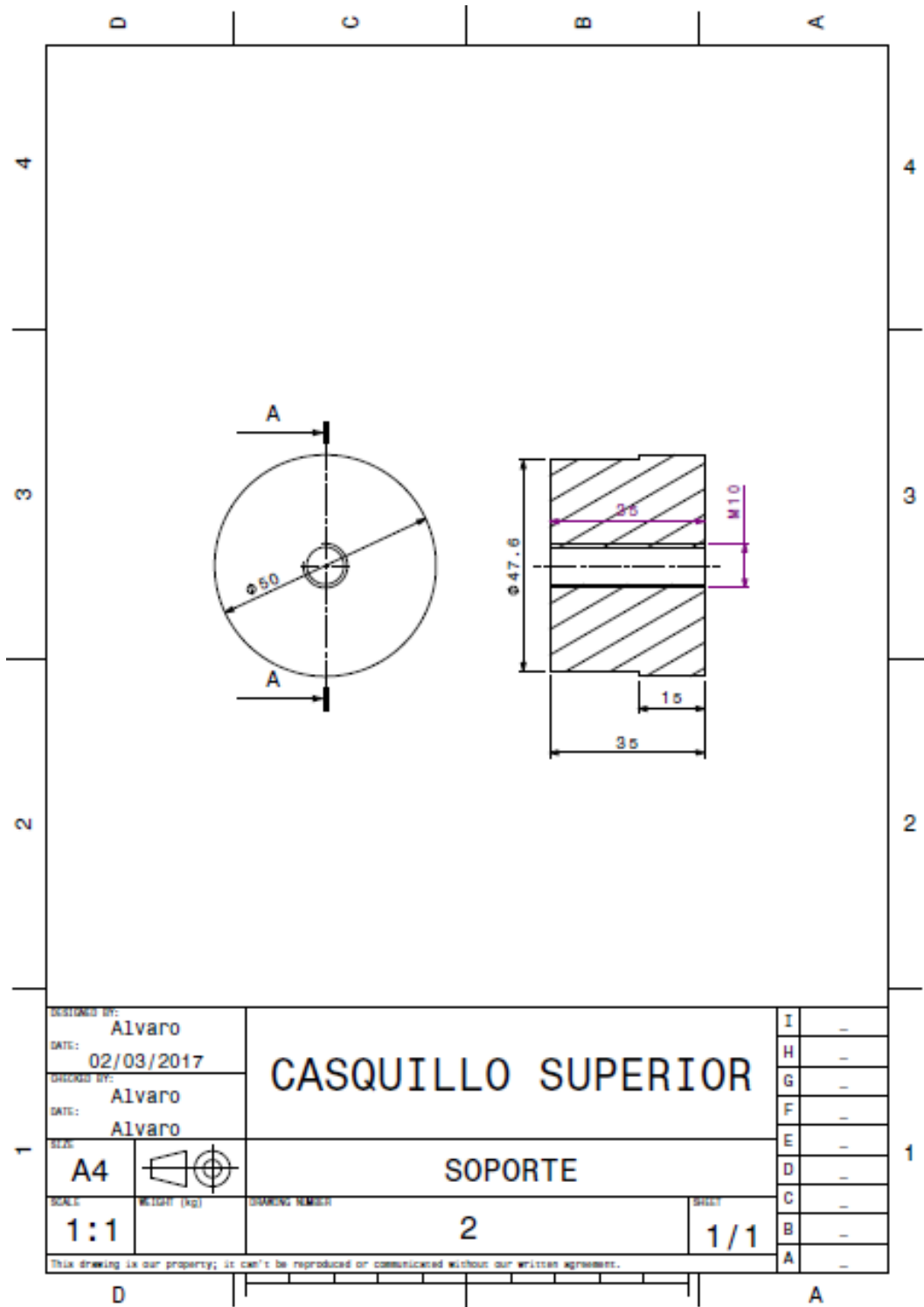
Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

ANEXO F



Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## ANEXO G



Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta  
de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

## ANEXO H

A continuación se presenta el procedimiento que se ha seguido en el laboratorio S10 de la Escuela de Ingenieros Industriales para sintonizar el TMD pendular a la frecuencia de vibración de la maqueta de la chimenea en el caso de 4 espiras activas y ninguna masa puntual.

Como se explicó en el Capítulo 4 la frecuencia de vibración de un péndulo simple se determina mediante la siguiente ecuación:

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.2)$$

Por tanto para saber la longitud que hay que fijar en el TMD pendular se sustituye en la ecuación (4.2) la frecuencia de la chimenea en el caso ya comentado. Este valor se puede ver en la Tabla 12, por tanto sustituyendo se obtiene el siguiente valor para la longitud:

$$l_{\text{sistema TMD pendular}} = 0,092m$$

Los instrumentos de medida que se utilizan en este modelo experimental están explicados detalladamente dentro del Capítulo 5. Una vez que se tienen conectados los dispositivos de medida y configurado adecuadamente el software y el láser, se coloca el sistema TMD pendular como se muestra en la Figura 81.



**Figura 81. Modelo experimental del sistema TMD pendular**

Modelado, prototipaje y caracterización de una maqueta de una chimenea con propiedades mecánicas configurables

Puede verse en la Figura 81 que la maqueta de la chimenea se encuentra fijada a la mesa mediante cinta adhesiva para así solo tener movimiento del TMD pendular. Por tanto una vez con todo colocado se saca de su posición de equilibrio al sistema TMD con cuidado de que no choque con la chimenea en su movimiento de oscilación.

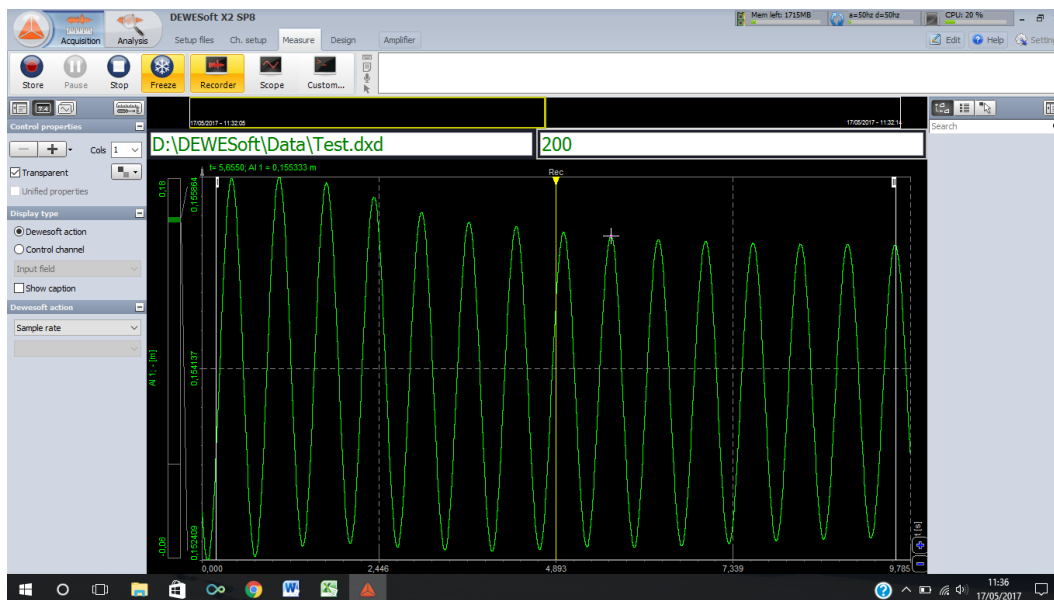


Figura 82. Datos experimentales del sistema TMD pendular

En la Figura 82 se muestra el registro de la amplitud en función del tiempo, a partir de esta señal se determina la frecuencia de vibración del TMD pendular con la misma metodología que en el caso del sistema TMD a flexión y que en el caso de la chimenea. Por tanto haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$f_n = \left( \frac{t_2 - t_1}{N^{\circ} \text{ periodos}} \right)^{-1} \quad (8.16)$$

Y sustituyendo los parámetros de la expresión (8.16) con los siguientes valores, obtenidos de la señal de la Figura 82.

$t_2$ (s)	$t_1$ (s)	Periodos
8,91	2,38	10

Se obtiene la siguiente frecuencia natural de vibración para el sistema TMD pendular asociada a los parámetros que a continuación se indican:

$$\{f_n = 1,53 \text{ Hz}\} \leftrightarrow \begin{cases} l_{\text{sistema TMD pendular}} = 0.092 \text{ m} \\ m_{\text{anillo metalico}} = 0.438 \text{ Kg} \end{cases}$$

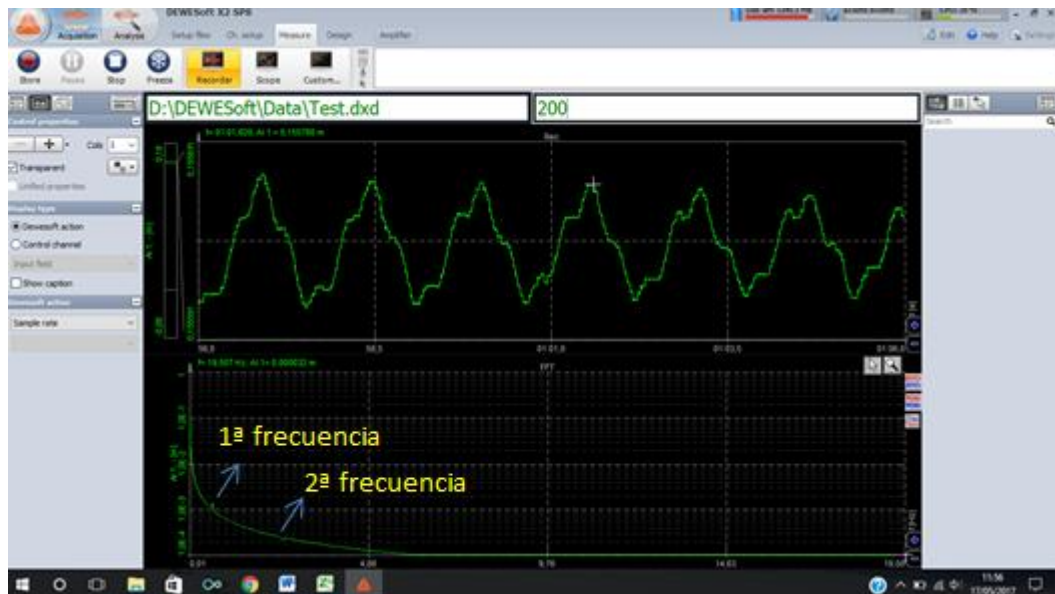


Una vez que ya se ha conseguido sintonizar el TMD pendular se acopla a la maqueta de la chimenea, sin modificar la masa puntual ni la longitud de los hilos.



**Figura 83. Modelo experimental de la chimenea más el sistema TMD pendular**

En la Figura 83 se muestra la disposición de los equipos de medida y la chimenea con el sistema TMD pendular acoplado. Una vez que se tiene ya todo configurado y listo para el registro de datos, se procede a sacar de la posición de equilibrio a la chimenea procurando que no golpee el sistema TMD durante el movimiento oscilatorio.



**Figura 84. Datos experimentales chimenea mas sistema TMD pendular**

En este caso la determinación de las dos frecuencias correspondientes al sistema de la Figura 83, se realiza con la señal FFT. En la Figura 84 se indican los dos picos que se forman en la señal y que corresponden con las dos frecuencias buscadas. Los valores que toman son los siguientes:

$$\begin{cases} f_1 = 0.65 \text{ Hz} \\ f_2 = 2.62 \text{ Hz} \end{cases}$$

De esta forma se puede ver que el sistema TMD pendular cumple con el objetivo principal que se fijó en este trabajo para el sistema TMD, que es conseguir desdoblamiento del pico de frecuencia natural de la chimenea.

En el caso del sistema conjunto, donde el TMD a flexión tiene una masa puntual de 0,127 Kg. y su frecuencia natural es de 1.5 Hz, se tienen los siguientes valores de frecuencias:

$$\begin{cases} f_1 = 0.88 \text{ Hz} \\ f_2 = 2.56 \text{ Hz} \end{cases}$$

Comparando los resultados existen diferencias en los valores de las dos frecuencias, esta diferencia se debe a la masa puntual que tiene cada sistema TMD, que en un caso es mucho más grande que en el otro.