UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Problemas de Planificación de la Producción e Inventarios. Estudio y resolución de diferentes modelos de Programación Entera Mixta para el cálculo del tamaño de lotes (Lot Sizing).

Autora:

Jiménez Escarda, Irene

Tutor:

Sáez Aguado, Jesús

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Valladolid, septiembre 2017.

ÍNDICE:

RESUMEN

El presente trabajo consiste en el estudio de modelos de Programación Entera Mixta dirigidos a solucionar diferentes problemas de planificación de la producción e inventarios y obtener el tamaño de lotes óptimo, con el fin de satisfacer ciertos requerimientos de demanda, respetando los límites de capacidad. La solución que proporcionan estos modelos puede suponer un ahorro económico en los sistemas de manufactura.

Lo que se pretende con este proyecto es ser capaces de comprender el sistema de producción y reconocer la gran importancia que tiene en el contexto económico actual.

A lo largo del trabajo nos encontraremos con variantes que van modificando los problemas básicos, construiremos modelos matemáticos que se adapten a dichas características y analizaremos cada uno de ellos.

PALABRAS CLAVE

Planificación de producción, inventarios, tamaño de lotes, planificación de requerimientos de materiales, programación entera mixta.

CAPÍTULO 1
PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN E INVENTARIOS.

1.1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo consiste en el estudio de sistemas que optimizan la utilización de inventarios en los sistemas productivos, entendiendo por inventario como un conjunto de ítems almacenados temporalmente hasta su uso.

El fin de la gestión de inventarios es reducir en lo posible, los niveles de existencias, ya que conllevan un coste, pero asegurar a su vez la disponibilidad de estos en el momento necesario.

En la actualidad, el estudio de la planificación de la producción está cobrando mayor importancia que en el pasado, ya que ha quedado demostrado que las empresas dedicadas al estudio sobre los métodos empleados en la gestión de la producción logran un mayor beneficio económico y una ventaja competitiva con el resto.

Desde un enfoque clásico, la planificación de la producción se plantea de manera jerárquica y vertical, dependiendo de los objetivos, pudiendo ser estratégicos, tácticos u operativos, existiendo entre ellos una relación entre las diferentes áreas.

Existen infinidad de modelos de planificación en función del enfoque o de la orientación que se quiera llevar en el estudio.

En este capítulo definiremos conceptos que trataremos de forma más detallada a lo largo de todo el trabajo.

1.2 OBJETIVOS

El principal objetivo de la planificación de la producción es la optimización del uso de los recursos productivos, determinando de manera anticipada las actividades involucradas en el proceso y los recursos disponibles de la empresa a medio plazo.

El enfoque del plan agregado es la determinación de la cantidad de producción, de los recursos necesarios y los niveles de inventario, con el fin de satisfacer la demanda. Éste debe tener coherencia con el plan estratégico a largo plazo.

1.3 DIRECCIÓN DE OPERACIONES

La planificación en las empresas de la obtención y el almacenamiento de los materiales y productos para los sistemas productivos es un proceso cuyo objetivo se basa en satisfacer las necesidades de la demanda, de la manera más eficaz y con el mínimo coste posible.

Las actividades necesarias para la producción tratan de determinar qué es lo que hay que producir, cuándo y qué cantidad, además de las acciones posteriores de control.

Existen varios niveles de planificación en función del horizonte temporal en la toma de decisiones, en los que se emplean herramientas y metodologías acordes a la política de la empresa.

Largo plazo

Planificación estratégica

Planificación agregada

Planificación maestra (PMP) y producción nivelada

Planificación de necesidades (MRP y CRP)

Planificación detallada

Corto plazo

En este trabajo nos centraremos en la planificación de necesidades, aunque previamente haremos una breve descripción de cada uno de los diferentes niveles.

La **planificación estratégica:**

Determina la metodología en la generación de bienes y servicios, centrándose en la optimización de recursos.

La estrategia de operaciones debe ofrecer una ventaja competitiva para la empresa, debe abarcar todos los recurso y actividades involucradas en el proceso productivo para el estudio de los objetivos.

Está proyectado a largo plazo, el horizonte temporal de este nivel está entre 1 y 3 años, variando según los diferentes casos.

La **planificación agregada**:

El principal objetivo de esta planificación consiste en fijar los niveles de producción, de inventario y la mano de obra necesaria, teniendo en cuenta las variables de decisión y las restricciones, con el objetivo de satisfacer los requerimientos.

Se le asigna el término “agregada” ya que no desglosa de una forma exacta la cantidad de producción, ni los recursos del sistema, trabajando con familias de productos y familias de recursos más generales. En el plan maestro de producción se desagregará la planificación estudiada en este apartado.

El horizonte de planificación es de medio plazo, comprendido entre 1 y 12 meses.

La **planificación maestra de producción (PMP):**

Como acabamos de decir, el plan maestro de producción se centra en la desagregación del plan agregado de producción.

Establece decisiones operativas con un horizonte temporal entre 1 semana y 1 mes, dependiendo del tipo de producto, del volumen de producción y del tiempo de entrega de los componentes.

Formaliza el plan de producción y estudia para cada trabajo la necesidad de mano de obra, de materias primas y la capacidad, asegurando la disponibilidad estimada de los recursos.

El plan maestro de producción determina qué debe hacerse y cuándo, considerando términos de productos y recursos específicos y no en familias.

La **planificación de necesidades (MRP):**

La planificación de necesidades de materiales no es sólo una técnica de gestión de inventarios. Se basa en la planificación de componentes de fabricación, con el fin de gestionar los inventarios de demanda dependiente, estudiando también la programación de la producción, del aprovisionamiento, los retrasos de producción y sus repercusiones…

La programación de la producción refleja las órdenes de fabricación, las cantidades que deben iniciarse en el proceso de producción, su emisión, y las fechas en las que deben ser lanzadas.

El horizonte temporal de este nivel es el mismo que el de la programación maestra de producción.

La **planificación detallada:**

Se realiza, normalmente, una vez a la semana, y determina la planificación del trabajo de cada operario y cada máquina, con el objetivo de minimizar los tiempos de preparación, para el cumplimiento de los plazos de la planificación de la producción.

El horizonte temporal tan pequeño permite una continua actualización de la producción dando la posibilidad de una rápida reacción en los ajustes necesarios.

1.4 SISTEMAS DE PRODUCCIÓN

Desde un punto de vista técnico, un sistema de producción es un proceso físico con el que se produce la transformación de materias primas en productos terminados. Si lo enfocamos a una definición económica, lo describiríamos como un proceso que transforma factores en bienes o servicios, con el fin de obtener un beneficio por dicha transformación.

Su meta es la obtención de los mejores resultados cumpliendo con los objetivos fijados de calidad, costo, y flexibilidad para poder responder de forma rápida a cualquier cambio del sistema de producción, intentando aprovechar todos los recursos disponibles.

Los sistemas de producción se pueden clasificar en diferentes tipos, pero nos vamos a centrar en los tres modelos más habituales en la industria:

Por pedidos:

Este sistema de producción se centra en la fabricación de un solo producto a la vez, obteniendo como resultado artículos diferentes en cada ocasión.

Para su producción se emplea un uso intensivo de mano de obra pudiendo realizarse únicamente con procesos manuales o combinándose con algunos mecánicos.

Por lotes:

En este modelo de fabricación se obtienen conjuntos de productos idénticos. Como en el sistema de producción por pedidos, este también puede requerir de la mano de obra, aunque no de manera tan intensiva.

Es habitual el uso de plantillas para facilitar y agilizar la producción reduciéndose así la exclusividad de los productos como en el caso de sistemas por pedidos.

Continua:

Se denomina producción continua a la fabricación de miles de artículos idénticos sin interrupciones en el proceso productivo, manteniéndose activo durante toda la jornada de trabajo para maximizar la producción.

En este modelo no se emplea la mano de obra ya que el proceso es altamente automatizado.

1.5 LOT-SIZING. MODELOS DE LOTES DETERMINÍSTICOS.

El objetivo del estudio de este apartado es realizar un análisis de los modelos determinísticos de inventarios para demanda independiente, en donde se busca obtener los tamaños de lote óptimos a través de los modelos: lote por lote, cantidad económica de pedido (EOQ), costo unitario mínimo, algoritmos como el de Silver Meal o el de Wagner Whitin…

Antes de pasar al estudio de los métodos y a su formulación matemática, vamos a plantear ciertos términos que se ven involucrados, como es el costo del inventario y el aprovisionamiento.

Costo de inventario:

Como hemos dicho al comenzar el trabajo los inventarios son un conjunto de ítems almacenados temporalmente hasta su uso, requeridas por las empresas para satisfacer la demanda de los clientes, con el fin de lograr economías de escalas, adelantarse a los cambios de demanda inesperados…

No solo podemos hablar de inventarios en empresas comerciales, o industrias dedicadas a la compra para producir y finalmente vender, también podemos encontrarnos stock en empresas dedicadas a la prestación de servicios, y muchas veces no lo tenemos en cuenta.

Antes hemos definido un sistema de producción desde el punto de vista económico, de igual manera, podemos definir los inventarios como activos circulantes de gran importancia para la rentabilidad de las empresas, representando un 40% del capital total invertido.

Tenemos que encontrar el equilibrio en la inversión de los inventarios, para que estos no resulten ni escasos ni excesivos, ya que la escasez de inventarios puede producir una interrupción en el sistema de producción o una falta de artículos ante una demanda excesiva repentina, y un exceso de artículos supone un aumento en el costo de almacenaje y la posibilidad de mermas, robos o deterioro de los productos.

Aprovisionamiento:

Solemos referirnos al aprovisionamiento como la adquisición de bienes o servicios y compras, pero podemos emplearlo para referirnos a la gestión de inventarios.

Su función consiste en ofrecer a las empresas los costos más reducidos y el momento óptimo para la adquisición de los materiales necesarios para la producción o la prestación de servicios.

El almacenamiento de los ítems supone el trabajo de clasificación y mantenimiento, así como el uso de un espacio apto para todos los artículos.

La función del aprovisionamiento consiste en mantener las mayores existencias posibles para asegurar a la empresa de inesperados fallos de producción o tener disposición absoluta de los productos para la venta, minimizando, al mismo tiempo, todos los costes que supone dicho almacenamiento. Para ello se emplean los modelos de gestión de inventarios.

Aunque en este apartado nos vamos a centrar en los modelos determinísticos para demanda independiente, tenemos que decir que existe la posibilidad de encontrarnos con una demanda dependiente. Dos modelos de gestión de inventario para una demanda dependiente son los sistemas Kanban o JIT y el sistema MRP del que trataremos en el capítulo 5.

Para el estudio de alguno de los diferentes métodos vamos a definir las siguientes abreviaturas:

- RPPLi: Recepción de pedidos planificados.
- NNi: Necesidades netas.
- Q: Tamaño de lote óptimo.
- D: Demanda.
- Ce: Costes de emisión.
- Cp: Costes de posesión.
- Θ: Período de gestión.
- f: Frecuencia de pedido.
- T: Período óptimo de pedido.

1.5.1 MÉTODOS DE LOTES

Método lote a lote:

Es la técnica más sencilla de todas, consiste en obtener los pedidos iguales a las necesidades netas de cada período. Satisfacer la demanda, produciendo solo cuando se necesita, evitando así inventarios de seguridad, reduciendo los costos de mantenimiento, siempre que los costos de emisión de la orden de compra o de configuración para la fabricación sean bajos y los costos de transporte altos.

Uno de los fallos de este método es que no se tiene en cuenta las limitaciones de capacidad y tampoco los costos de preparación, además, el modelo supone un tamaño de lote óptimo igual a la cantidad necesaria en un período determinado para facilitar el modelo, impidiendo alcanzar una solución óptima del problema.

$$RPPL_i = NN_i$$

Método del período constante:

Los intervalos de tiempo entre las emisiones de lotes se fijan de manera arbitraria, permitiendo un ajuste en cada período de la cantidad económica de la producción. La unidad de tiempo son las semanas.

El tamaño de lote se calcula agrupando las necesidades netas de ese período de tiempo. Esto implica que los lotes son iguales a la suma de las necesidades netas en cada intervalo.

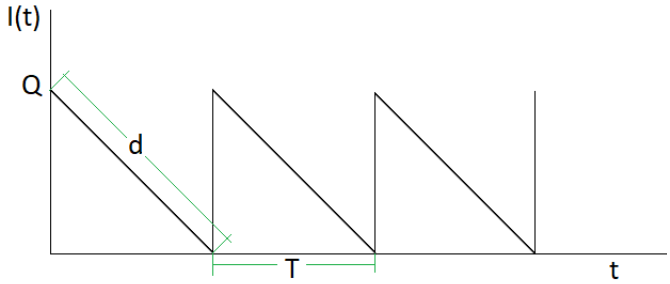
Método EOQ:

El método EOQ (Economic Order Quality) es un modelo matemático que emplea la fórmula de Wilson para calcular la cantidad económica de pedido en el momento oportuno, buscando el equilibrio entre los diferentes costos de configuración y mantenimiento.

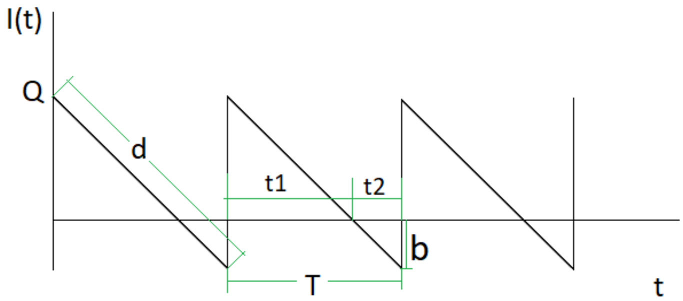
Para la formulación de dicho método suponemos un modelo determinista en donde todos los parámetros son conocidos, un inventario formado por un único producto y una demanda continua y constante sin posibilidad de retrasos.

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{2.Ce.D}{Cp.\Theta}}$$

Podemos representar de forma gráfica el comportamiento del nivel de inventario a lo largo de todo el horizonte temporal, sin compras ni ruptura.



Podemos suponer la posibilidad de retrasos por falta de existencias, por lo que tendremos períodos en donde la demanda no puede cubrirse. Esta escasez supone un coste a la empresa y la gráfica se representaría de la siguiente manera:



En donde t1 es el tiempo en donde el inventario es positivo y la demanda es satisfecha y t2 el tiempo de desabastecimiento. b representa la cantidad de demanda no satisfecha en cada período (T).

Método POQ:

El POQ (Period Order Quality) es un método empleado para el cálculo del período de pedido y de las cantidades necesarias de compra.

$$\mathrm{f} = \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}$$

$$\mathrm{T} = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{f}}$$

La Q empleada para el cálculo de la frecuencia de pedido (f), la obtenemos a través del método EOQ que acabamos de ver, y para el cálculo de período óptimo (T), empleamos el número de períodos estimados dividido entre la frecuencia del pedido.

Método Silver Meal:

Es un método heurístico en el que se van agrupando las necesidades hasta conseguir lotes que generen el mínimo coste por período.

En el primer paso del método se calcula el tamaño de lote con el que se cubran todos los períodos siguientes y se calcula el costo que supone cubrir cada demanda emitiendo en el primer período y el coste por período, que será el costo total por unidad de tiempo, y así sucesivamente, cada vez abarcando menos períodos a la hora de calcular el tamaño de lote necesario.

$$\text{Coste por período: } CT/T$$

$$T = Alm + 1$$

Mínimo coste unitario:

Consiste en la comparación de los costos tanto de emisión de los pedidos como del almacenamiento de los artículos de manera iterativa.

Mínimo coste total:

Método basado en el funcionamiento del modelo EOQ en donde se van agrupando lotes hasta conseguir que los costes de posesión y de emisión sean iguales o lo más parecidos posibles, obteniendo así el mínimo coste total.

Para llegar a la situación de que los dos costes sean iguales, primero se tiene que calcular los costes que suponen todos los diferentes tamaños de lotes y después se selecciona el que suponga un coste más similar entre los dos.

1.6 INVENTARIOS, COSTES Y MODELOS

La planificación de los inventarios no significa reducirlos al máximo para obtener un ahorro de almacenamiento y tampoco es tener todos los productos almacenados a la vez para poder cubrir la demanda. Un exceso de inventario implica una reducción de la rentabilidad, y un inventario escaso implica dañar la confianza del cliente.

El fin del estudio de inventarios es obtener la cantidad exacta de tal manera que se consigan los objetivos estratégicos de la empresa de forma eficiente.

Para ello, necesitamos conocer la cantidad exacta de los artículos que se fabrican o que se compran a un proveedor, lo que se conoce como “tamaño de lote”.

Este tamaño afecta a la imagen de la empresa ya que evitará retrasos en los pedidos e interrupciones en la producción ante la aparición de problemas inesperados.

1.6.1 DEFINICIÓN

Según la RAE la definición de inventario es la siguiente:

> *Asiento de los bienes y demás cosas pertenecientes a una persona o comunidad, hecho con orden y precisión.*

El inventario se emplea para la satisfacción de la demanda del cliente y para el apoyo de la producción de bienes y servicios.

Los inventarios se pueden clasificar en tres categorías:

Materias primas:

Inventario necesario para la producción, compuesto por todos los materiales necesarios para la elaboración de un producto que aún no han sido procesados.

Trabajo en proceso:

Inventario necesario para la elaboración de un producto final, compuesto por un conjunto de bienes adquiridos por las empresas. Este tipo de inventario se evalúa en función de la mano de obra necesaria, la cantidad de material utilizada y en los gastos que supone su fabricación.

Productos terminados:

Al igual que el inventario de los productos en procesos, el inventario de productos terminados es considerado como un bien de la empresa, pero éstos están destinados a la venta del cliente.

Esta clasificación se crea mediante el punto de vista de la contabilidad, pero también se puede clasificar en cuatro tipos dependiendo de su creación:

Inventario de ciclo:

El inventario que determina la frecuencia y la cantidad del pedido, constituido por todos los materiales fabricados o comprados para aumentar la eficiencia de la producción o para reducir los costos de compra.

Inventario de seguridad:

También se llama stock de seguridad. Es aquel que se emplea para salvaguardar a la empresa frente a imprevistos de demandas, retrasos en las entregas o fallos en la producción.

Inventario de tránsito:

También se conoce como punto de pedido. Es la cantidad de inventario que queda cuando se emite el pedido, son los materiales que forman parte de la cadena de valor.

Se pueden dar diferentes enfoques a los inventarios y por ello existen muchas clasificaciones, pero con estos dos puntos de vista nos podemos hacer una idea bastante buena de la función que tiene el inventario en un proceso de fabricación.

1.6.2 VALUACIÓN DE INVENTARIOS

La gestión y el control de los inventarios es muy importante no solo para asegurar la continuidad en los procesos de producción, sino para mantener un control en los pedidos y poder evitar retrasos o falta de productos para su venta.

Se necesita tener un conocimiento sobre los costes que suponen los inventarios, tanto los de su compra como los de mantener los artículos en la empresa almacenados, en el siguiente apartado desarrollaremos de forma detallada todos los costes involucrados.

La selección y la valoración en términos monetarios de los inventarios es lo que se conoce como la valuación de inventarios. Es una decisión importante para las empresas, ya que es una decisión que deberá mantenerse a largo plazo.

Los métodos más utilizados en las empresas son los siguientes:

Método FIFO (First In, First Out):

La selección de los artículos mediante el método FIFO consiste en elegir los primeros artículos que entraron en el inventario para su venta o su consumición, por lo que tendremos siempre un inventario formado por los últimos artículos que entraron.

Este método se acerca más al estado actual del mercado, ya que su valoración económica se basará en los costos de ese momento.

Está diseñado con el fin de evitar problemas de obsolescencia de los productos, ya que los primeros que se compraron son los primeros que salen del inventario, evitando almacenamientos prolongados.

Método LIFO (Last In, First Out):

A diferencia del anterior método, éste selecciona los últimos artículos que entraron en el inventario para su venta o consumo, por lo que para calcular el coste de dicho artículo se hará de forma opuesta al método FIFO, quedando en el almacén las existencias más antiguas.

Este método tiene la ventaja de que mantiene la estabilidad del valor del inventario ante cambios inesperados en los precios y refleja el coste real de los productos vendidos, ya que relaciona los ingresos con los costes actuales.

Método PMP (Precio Medio Ponderado):

El cálculo del método consiste en la ponderación de los precios con las unidades adquiridas, la fórmula empleada es la siguiente:

$$PMP = \frac{p_1 . q_1 + \cdots + p_n . q_n}{q_1 + \cdots + q_n}$$

Siendo p el precio de cada cantidad y q las cantidades adquiridas.

El método PMP es el más empleado en las empresas.

1.6.3 COSTES QUE SUPONE EL INVENTARIO

Los inventarios suponen una inversión de capital, impidiendo su uso para otros conceptos.

La medición del coste resulta un problema complicado y no siempre es posible mantener un control de todos los costes, no solo podemos fijarnos en los costes asociados a la adquisición de las materias primas, tenemos que tener en cuenta muchos otros elementos, como los gastos de gestión, de mantenimiento…

Algunos de los costes de mantener el inventario son:

Coste de capital:

Es el coste de oportunidad necesario para llevar a cabo una inversión. Según la actividad comercial, la determinación de los costes de capital puede ser más o menos complicado.

A la hora de invertir en inventario, se tiene que tener en cuenta el riesgo de este, ya que en ocasiones puede resultar bastante alto (productos con riesgo de deterioro, obsolescencia…)

Coste de almacén y manipulación:

No solo se requiere de un espacio para el almacenaje del inventario en donde tenemos que añadir los costes del alquiler, los impuestos, la luz, etc, sino que se necesita mantener un orden y un control adecuando en su almacenaje, suponiendo un coste.

En algunas ocasiones se necesita utilizar equipos especiales, como grúas para su traslado y su colocación…

Seguros e impuestos:

Se necesita asegurar las existencias, protegiéndolas de daños que puedan sufrir a lo largo del período de almacenamiento, como deterioro del producto, robos, obsolescencia, incendios…

Los impuestos aumentan si al finalizar el año existe una alta cantidad de inventarios almacenados.

Coste de lanzamiento el pedido:

La compra o la orden de producción de un artículo supone un coste, que se obtiene multiplicando la cantidad de artículos comprados por su precio unitario.

Si el producto se fabrica en su totalidad en la empresa, el cálculo de los costes resulta más complicado y se necesita emplear métodos para su determinación.

Coste de preparación:

Tanto la preparación del lugar de trabajo, como la preparación de las maquinas necesarias para la producción o la mano de obra y el tiempo empleado, supone un coste.

Coste de transporte:

A mayor cantidad de artículos, más lleno irá el camión que los transporte y menos será la frecuencia de los envíos, suponiendo una disminución en el coste de transporte.

1.7 PLANIFICACIÓN, PROGRAMACIÓN Y CONTROL DE LA PRODUCCIÓN EN SISTEMAS CONTRA INVENTARIO

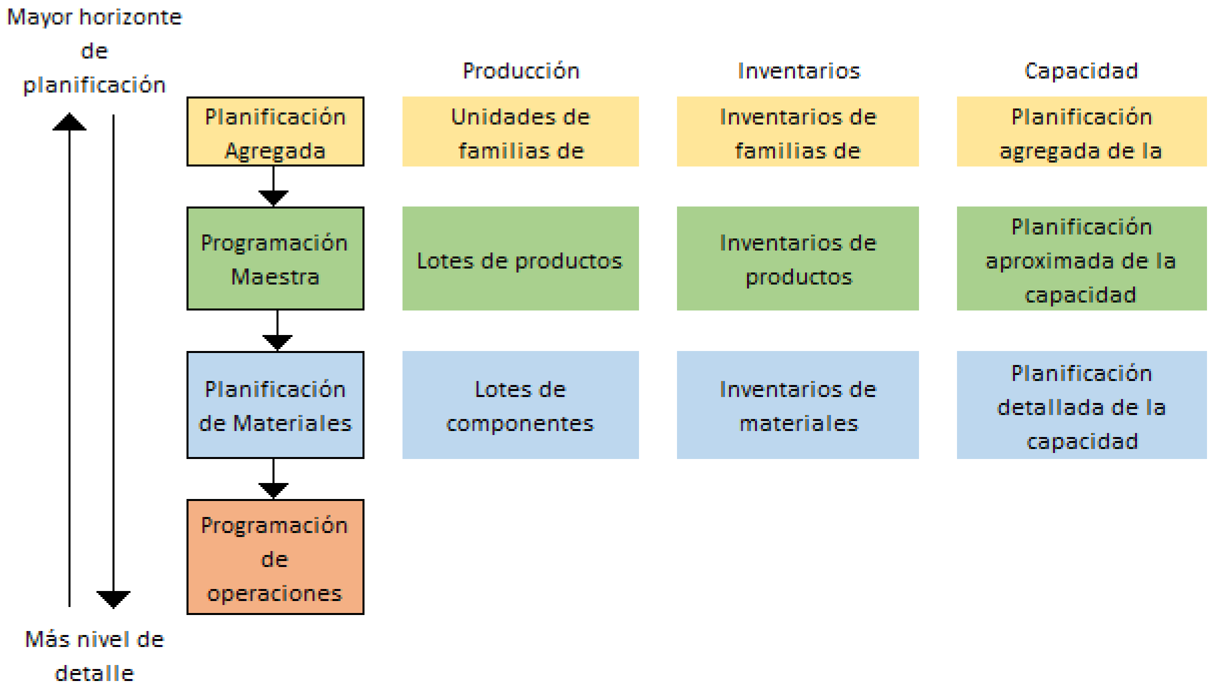
1.7.1 OBJETIVOS

El principal objetivo de la planificación, programación y control de la producción es la obtención de un plan estratégico de producción en donde se especifica qué productos y qué componentes se deben producir, cuándo y qué tamaño de lote es el adecuado.

También se estudia la programación de las compras, cuándo se necesitan las materias primas y cuándo se tiene que hacer la emisión del pedido, de la misma manera se tiene que realizar el estudio de los inventarios, para llevar un control correcto de estos.

Se tiene que tener en cuenta la capacidad en cada centro de trabajo a la hora de realizar la programación, y así poder adaptar la producción a dicha capacidad.

Vamos a resumir en una tabla el enfoque jerárquico en la planificación, la programación y el control de la producción, en función del horizonte de planificación.



1.7.2 PLANIFICACIÓN AGREGADA

Para el cumplimiento del plan estratégico de la empresa, la planificación agregada se encarga de determinar el plan de producción a medio plazo, de la manera más eficaz posible.

Establece las cantidades de artículos que se tienen que producir en cada período, la capacidad de la que dispone el sistema, los inventarios...

El horizonte de planificación varía entre los 6 y los 18 meses.

Las fases de la planificación agregada son las siguientes:

- Cálculo de necesidades de producción.
- Determinación de ajustes de la capacidad.
- Elaboración de planes de producción.
- Evaluación de los planes en función de los objetivos planteados.
- Aprobación del plan agregado.

Existen varios métodos para su cálculo, analíticos, de simulación... Y métodos de prueba y error en donde podemos diferenciar varias estrategias:

Estrategia pura:

- De caza: Ajuste de capacidad mediante contrataciones y despidos, con horas extras y subcontratación, pero sin retrasos o sin horas extras ni subcontratación, pero con posibilidad de retrasos.
- De nivelación: Ajuste de las necesidades de producción mediante inventarios y retrasos, pero manteniendo una capacidad fija.

Estrategias mixtas: Combinación y mejora de las estrategias putas con horas extras y subcontrataciones.

1.7.3 PLANIFICACIÓN MAESTRA

La planificación maestra se obtiene de la desagregación del plan agregado, en donde se deben definir los lotes de producción, programar los pedidos de subcontrataciones, planificar los inventarios de los productos finales y se tiene que realizar el plan aproximado de la capacidad para comprobar si es factible el plan de producción definido-

El horizonte de la planificación maestra se encuentra alrededor de semanas y los 12 meses.

La programación maestra se descompone en dos partes. La primera es el Programa Maestro de Producción (PMP) INICIAL, que consiste en la desagregación del plan agregado y los pedidos en curso, y la segunda, el Programa Maestro de Producción (PMP) PROPUESTO, en donde se estudia em PMP Inicial, los pedidos en curso, el inventario inicial y los pedidos pendientes, los pedidos comprometidos y por último las previsiones de ventas a corto plazo.

Una vez estudiado el PMP Propuesto se realiza la Planificación Aproximada de la Capacidad.

1.8 MRP. PLANIFICACIÓN DE NECESIDADES

1.8.1 DEFINICIÓN

La Planeación de Requerimientos de Materiales es un sistema de planificación que transforma el Plan Maestro de Producción en las necesidades reales, programando los pedidos y gestionando los inventarios de demanda dependiente.

Cuando decimos que la demanda es independiente, nos estamos refiriendo a una demanda que no está relacionada con otros artículos, dependiendo únicamente de las condiciones del mercado. Por el contrario, una demanda dependiente refleja una relación con otros ítems.

Por lo que la demanda podrá ser calculada previamente a partir del PMP, en donde se conocen los componentes necesarios para la obtención del producto final.

El principal objetivo del MRP es asegurar que los niveles de stock proporcionen la cantidad deseada en el momento preciso.

Resolver el problema del MRP consiste en el estudio de cuatro temas: el PMP, la Lista de materiales (BOM), el estado de los inventarios y la selección del lote.

1.8.2 HISTORIA DEL MRP

La Lista de Materiales, conocida como "exposición de necesidades" surge en las empresas de los años 60, con la finalidad de obtener un correcto funcionamiento del suministro de las piezas, para productos con demanda dependiente.

El MRP se desarrolló debido a las limitaciones que tenía la Lista de Materiales, ya que en ellas no figuraban, por ejemplo, las fechas en las que debían realizarse los pedidos.

1.8.3 EVOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS MRP

La ventaja principal que ofrecía el uso del MRP era el beneficio económico que suponía, ya que se implementaba de forma considerable el ahorro del inmovilizado, reduciéndose el inventario.

Con el paso de los años se empezó a exigir al sistema que realizara la planificación de la capacidad de la planta para fabricar o montar los componentes necesarios. Así surgió el programa CRP (Capacity Requirement Planning), que determinaba si la planificación era o no posible en función de la capacidad.

CAPÍTULO 2
LOT-SIZING. UN ÚNICO PRODUCTO.

2.1 INTRODUCCIÓN.

La planificación de la producción organiza los recursos disponibles para la transformación de las materias primas en productos finales, minimizando en la medida de lo posible los costos y asegurando la disponibilidad de la demanda en todo momento.

Es necesario especificar el tamaño de los lotes de producción, el momento en que dichos lotes deben producirse y su secuencia. Los problemas suelen estar enfocados a horizontes temporales de medio o corto plazo.

Los sistemas de planificación de fabricación tienen como objetivo el aumento de la productividad y la flexibilidad de las operaciones de producción.

La necesidad de responder de manera casi inmediata a los cambios de la demanda del mercado o la de los clientes, requieren modelos de planificación flexibles para no perder la productividad.

Debido a las características de los problemas que surgen en la producción, los modelos de planificación suelen ser, por lo general, modelos mixtos de programación entera (MIP).

El inicio de una nueva secuencia de lotes de producción requiere una puesta en marcha. Esto supone un costo adicional, y un tiempo para preparar las máquinas, independientes del tamaño de lote. Por ello es necesaria la utilización de variables binarias para modelarlas.

Tales modelos de planificación pueden resultar complicados de resolver de forma óptima, sin embargo, se pueden utilizar técnicas heurísticas con las que obtendremos soluciones casi óptimas de los modelos matemáticos formulados.

2.1.1 MODELADO Y OPTIMIZACIÓN.

Muchas empresas, tratan de desarrollar sistemas de planificación que sean capaces de optimizar su productividad.

Para poder hacer frente a la complejidad de su negocio, utilizan sistemas que estandarizan los procesos. Esto supone la planificación y optimización a corto plazo del flujo de mercancías, lo que conlleva un ahorro de costos anuales.

Los programas matemáticos lineales no tienen en cuenta los tiempos de preparación entre los lotes de diferentes productos, alejándose de los costes reales de la producción. Empleando la programación entera mixta estaríamos erradicando ese problema.

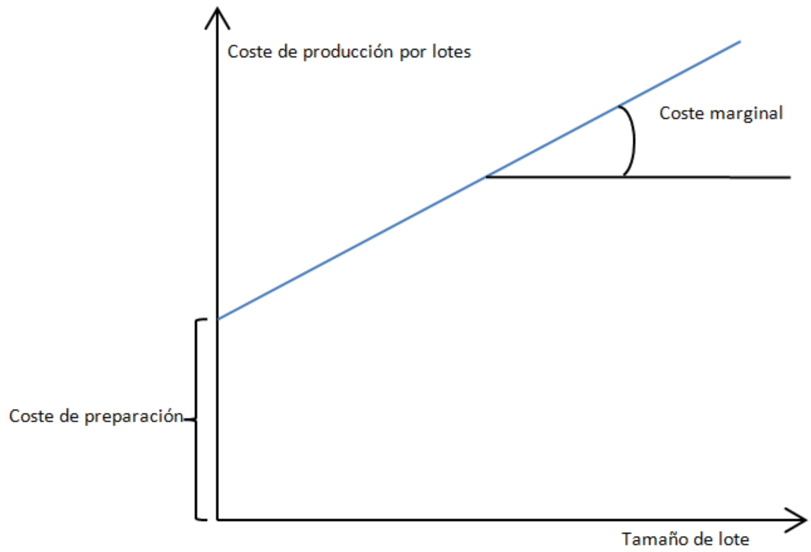
La transformación de la descripción de un problema en un modelo matemático debe ser precisa, ya que es necesario que éste represente la realidad con cierta exactitud, para poder obtener el resultado óptimo.

2.1.2 EJEMPLO MODELO DE PLANIFICACIÓN. (Pochet – Wolsey p.9)

Vamos a estudiar la producción de un tipo de bicicleta que produce una fábrica, cuya producción requiere materiales y equipos de producción especiales.

La fábrica produce un lote al mes, debido a la baja demanda y a los elevados costos que supone la instalación de los equipos, por lo que no tiene sentido una alta producción.

El costo de fabricación del lote se representa en la siguiente gráfica:



El costo de preparación representa el consto de la instalación y de la preparación de los equipos. El coste marginal constante, corresponde al tiempo requerido para la fabricación de la bicicleta.

El coste de la instalación es de 5.000 euros, y el coste marginal de 100.

Producir una bicicleta supone 5.100 euros mientras que el coste de un lote de 10 bicicletas supone 6.000 euros.

Existe una restricción de la capacidad, ya que el centro de trabajo, al igual que los trabajadores, es compartido con la producción de otros tipos de bicicletas. Es posible un aumento de la capacidad con la contratación de trabajadores temporales si fuese necesario.

Las demandas aumentan en verano y primavera. Las previsiones de venta para el próximo año vienen representadas en la tabla siguiente:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
400	400	800	800	1200	1200	1200	1200	800	800	400	400

Al final del año habrá un stock de 200 bicicletas.

Mantener una bicicleta en inventario cuesta 5 euros mensuales, incluyendo el coste de capital y gastos de almacenamiento. No existe restricción de capacidad en el almacén.

El fabricante desea planificar los niveles de producción e inventario, con el fin de satisfacer la demanda, minimizando los costos totales, tanto de fabricación como de inventario. Quiere planificar la producción para el próximo año hasta el mes de mayor demanda, agosto.

Algunas soluciones posibles:

Los costos de producción se minimizan produciendo lotes grandes debido a las economías de escala. Por eso una de las posibles soluciones sería producir en el primer mes, de tal manera que se satisfagan las demandas de los meses siguientes.

Teniendo en cuenta las 200 bicicletas en stock, habría que producir 7000 unidades en enero. Esto supondrá grandes costos de inventario hasta finales de agosto.

Otra opción posible, es minimizar el costo de inventario, produciendo únicamente para satisfacer la demanda de cada mes. Esto supondrá un costo alto de fabricación, porque requiere la configuración de las máquinas cada mes.

Los costos con las dos opciones de resolución están representados en las siguientes tablas, respectivamente:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Total
Demanda	400	400	800	800	1200	1200	1200	1200	7200
Producción	7000	0	0	0	0	0	0	0	7000
C.unitario	700000	0	0	0	0	0	0	0	700000
C.preparación	5000	0	0	0	0	0	0	0	5000
Inventario	6800	6400	5600	4800	3600	2400	1200	0	
C.inventario	34000	32000	28000	24000	18000	12000	6000	0	154000

El coste total con la primera opción es de 859.000 euros.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Total
Demanda	400	400	800	800	1200	1200	1200	1200	7200
Producción	200	400	800	800	1200	1200	1200	1200	7000
C.unitario	20000	40000	80000	80000	120000	120000	120000	120000	700000
C.preparación	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	40000
Inventario	0	0	0	0	0	0	0	0	
C.inventario	0	0	0	0	0	0	0	0	0

El coste total minimizando el costo de inventario es de 740.000 euros, significativamente inferior al de la primera opción, aunque esta no es la solución óptima del problema.

Vamos a resolver el problema con el programa Xpress- MP y nos dará la solución óptima.

El código es el siguiente:

```
model ModelName
uses "mmxprs";

!BLOQUE DE DECLARACIONES
declarations

    t = 8
    mes = 1..t

    !VARIABLES:
    x:array(mes) of mpvar     !PRODUCCIÓN EN EL MES t
    I:array(mes) of mpvar     !INVENTARIO EN EL MES t
    d:array(mes) of mpvar     !PREPARACIÓN EN EL MES t
    dem:array(mes) of integer !DEMANDA EN EL MES t

    !COSTES
    coste_p = 100 !PRODUCCIÓN
    coste_i = 5   !INVENTARIO
    coste_f=5000  !PREPARACIÓN

    inv_ini = 200 !INVENTARIO INICIAL

end-declarations

dem::[400,400,800,800,1200,1200,1200,1200] !VALORES DE LA DEMANDA

M:=sum(i in mes)dem(i) !CAPACIDAD MAXIMA DE PRODUCCIÓN

setparam("REALFMT","%.2f")
!FUNCIÓN OBJETIVO: MINIMIZAR COSTES
coste := sum(i in mes)(coste_p*x(i) + coste_i*I(i) +coste_f*d(i))

!RESTRICCIONES:
forall(i in mes)d(i)is_binary
!RESTRICCION DE DEMANDA
balance_1 := inv_ini + x(1)-I(1) = dem(1)
forall(i in mes|i > 1)balance1(i):= I(i - 1) + x(i) - I(i)  = dem(i)
!RESTRICCION DE CAPACIDAD
forall(i in mes) x(i)<=M*d(i)
I(t)=0

!EXPORTAR PROBLEMA
exportprob(EP_MIN,"",coste)

!MINIMIZAR EL COSTE
minimize(coste)

writeln("\n\nRESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN:")
writeln("--------------------------------\n")
writeln("Coste optimizado: ",coste.sol," €\n")

writeln("Mes\tdem\tx\t\tI1")
forall(i in mes)do
  writeln
  write(i,"\t",dem(i),"\t",x(i).sol,"\t","\t",I(i).sol,"\t")
end-do



end-model
```

La solución que nos da Xpress-MP es la siguiente:

```
RESULTADOS DE LA OPTIMIZACION:
------------------------------

Coste optimizado: 736000.00 ·

Mes      dem      x              I1

1        400      600.00         400.00
2        400      0.00           0.00
3        800      1600.00        800.00
4        800      0.00           0.00
5        1200     1200.00        0.00
6        1200     1200.00        0.00
7        1200     1200.00        0.00
8        1200     1200.00        0.00
```

La tabla con los costos obtenidos es la siguiente:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Total
Demanda	400	400	800	800	1200	1200	1200	1200	7200
Producción	600	0	1600	0	1200	1200	1200	1200	7000
C.unitario	60000	0	160000	0	120000	120000	120000	120000	700000
C.preparación	5000	0	5000	0	5000	5000	5000	5000	30000
Inventario	400	0	800	0	0	0	0	0	1200
C.inventario	2000	0	4000	0	0	0	0	0	6000

Como podemos observar el coste total de producción es de 736.000 euros, algo menor a la solución de inventario mínimo.

2.2 FUNCIONES DE COSTO GENERALES.

2.2.1 MODELO BÁSICO ECONÓMICO LOT SIZING.

En este modelo trabajaremos con problemas con las siguientes características:

- T períodos.
- Un único producto.

- Una fuente de producción sin escasez.

Variables de decisión:

- X_t: Cantidad producida en el período t.
- I_t: Cantidad almacenada durante el período t.

Normalmente el costo conjunto de producción e inventario es una función de la forma $C_t(X_t,I_t) = C_t(X_t) + h_t(I_t)$, siendo:

- C_t: Coste de producción en el período t.
- h_t: Coste de almacenar en el período t.

Quedando el modelo de la forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^{T}\{C_t(X_t) + h_t(I_t)\}$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a} & X_1 + I_1 = D_1 & t=1,\ldots,T \\ & X_t + I_{t-1} - I_t = D_t & t=2,\ldots,T \\ & X_t \geq 0,\ It \geq 0 & \end{array}$$

Siendo D_t la demanda en el período t.

$I_t \geq 0$ refleja la condición de que no hay escasez.

El problema puede ser formulado como uno de redes con costes en los arcos no lineales, como veremos en los siguientes apartados.

Si las funciones de coste $C_t()$ y $h_t()$ son arbitrarias, el problema es difícil de resolver, de hecho es NP-hard. Con ciertas condiciones sobre las funciones de coste el problema se resuelve mejor.

2.2.2 CASOS ESPECIALES:

$C_t(X_t) + h_t(I_t)$. Funciones lineales:

- $C_t(X_t) = C_tX_t \quad$ para $X_t \geq 0$
- $h_t(I_t) = h_tI_t \quad$ para $I_t \geq 0$

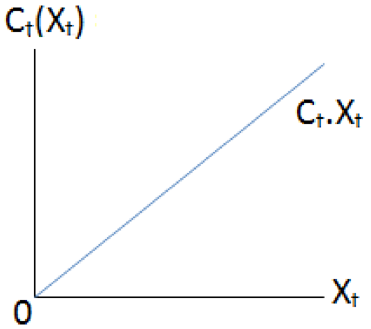
El problema resultante es de programación lineal (P.L).

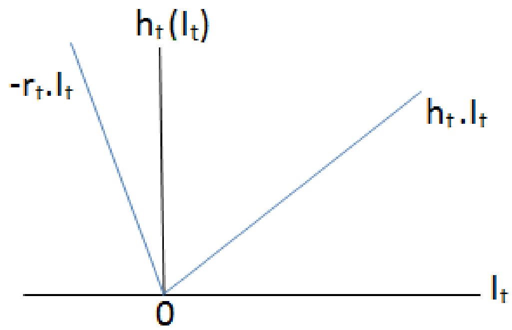
Backlogging permitido:

Si permitimos escasez, retrasando la demanda acumulada, equivale a considerar I_t sin restricción de signo, por lo que:

$$h_t(I_t) \begin{cases} h_t I_t & \text{si } I_t \geq 0 \\ -r_t I_t & \text{si } I_t \leq 0 \end{cases}$$

Donde r_t es el coste de retrasar una unidad en el período t.



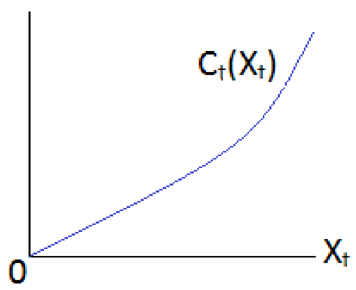


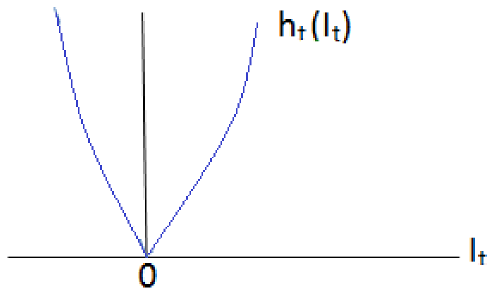
Resultando un problema de P.L que veremos más adelante, en donde I_t se desdobla en $I_t = I_t^+ + I_t^-$.

$C_t(X_t) + h_t(I_t)$. Costos convexos:

Hay dos tipos de funciones de costo que aparecen frecuentemente en la práctica de producción/inventario: son las funciones cóncavas y convexas.

El costo de producción es convexo si el costo unitario va aumentando con la cantidad producida, por ejemplo, los costos de materiales y de mano de obra pueden ser lineales hasta que se llega al tope de horas, en cuyo caso hay que recurrir a horas extras más caras. Con el almacenamiento puede suceder algo parecido: ser lineal hasta un cierto nivel, y luego aumentar el coste unitario.

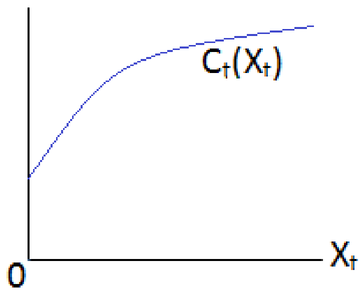


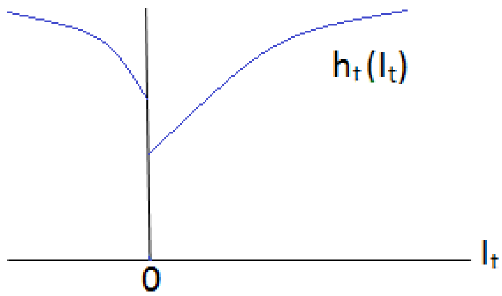


$C_t(X_t)$ + $h_t(I_t)$. Costos cóncavos o costos cóncavos a trozos:

$$C_t(X_t) \geq 0 \quad \text{cóncava para } X_t \geq 0$$

$$h_t(I_t) \geq 0 \begin{cases} \text{cóncava para } I_t \geq 0 \\ \text{cóncava para } I_t \geq 0 \end{cases}$$



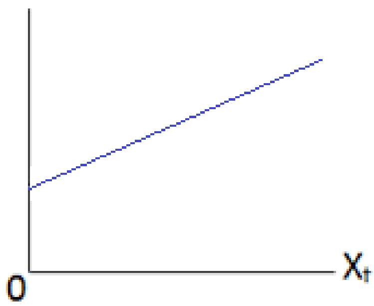


Las funciones de producción cóncavas se dan en presencia de economías de escala, y equivale a coste marginal decreciente. El fenómeno suele ocurrir cuando hay descuentos para compras de materiales.

Costos fijos:

Un caso habitual es el de producción con costos fijos.

$$C_t(X_t) = \begin{cases} 0 \text{ si } X_t = 0 \\ K_t + C_t X_t > 0 \end{cases}$$



En donde K_t representa el costo fijo de producción.

2.3 MODELO GENERAL. LOT SIZING DINÁMICO

Cuando la demanda varia en el tiempo, el problema se convierte en un problema dinámico o multi-período.

Consideramos una demanda variable en el tiempo, pero conocida con antelación.

Parámetros:

- T períodos.
- D_t: Demanda en el período t (conocida) (entero≥0).
- C_t: Coste de producción en el período t.

Variables:

- X_t: Cantidad producida en el período t.
- I_t: Inventario al finalizar el período t.

Suponemos que el coste incurrido en el período t depende solo de la producción X_t y del inventario final I_t, y posiblemente del período t. Así lo denotamos por C_t (X_t, I_t).

Función objetivo y las restricciones son las siguientes:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^{T} C_t(X_t, I_t)$$

$$\text{s.a} \quad X_t + I_{t-1} - I_t = D_t \qquad t=1, 2, \ldots, T$$

$$X_t \geq 0,\ It \geq 0$$

Vamos a explicar de forma detallada cada una de las restricciones:

- De balance:

$$X_t + I_{t-1} - I_t = D_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

  Donde I_0 es el nivel del inventario inicial que se supone conocido.

- Sobre las variables:

$$X_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$I_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T$$

La primera restricción obliga a la variable X_t a ser un entero, y la segunda a satisfacer la demanda en cada período.

A veces se puede imponer la restricción adicional de que el nivel del inventario sea cero al finalizar el período T ($I_T = 0$), o de que sobrepase cierta cantidad específica ($I_t \geq S$) conocida como el inventario de seguridad. Esto viene de que, si no se impone ninguna restricción, el inventario final tiende a ser cero, lo cual puede no ser deseable si el sistema debe seguir funcionando después del período T.

Otra posibilidad es asignar un valor $g(I_t)$ al inventario final y restarlo de la función objetivo:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{C_t(X_t, I_t) - g(I_t)}$$

Además, puede haber restricciones de cotas ($X_t \leq U_t$), ($I_t \leq L_t$), indicando las cantidades máximas que pueden producirse y almacenarse, en cada período.

Incluso cotas inferiores ($I_t \geq S_t$) dando el inventario de seguridad.

Hay que notar que, en principio, las variables I_t podrían eliminarse (o bien las X_t). Por ejemplo, quedaría:

I_0 conocido

$$I_1 = I_0 + X_1 - D_1$$

$$I_2 = I_1 + X_2 - D_2 = (I_0 + X_1 - D_1) + X_2 - D_2 = I_0 + (X_1 + X_2) - (D_1 + D_2)$$

...

$$I_t = I_0 + \sum_{k=1}^{t} X_k - \sum_{k=1}^{t} D_k = I_0 + \sum_{k=1}^{t} (X_k - D_k)$$

De aquí podemos deducir que exigir $I_t \geq 0$, t=1…T, equivale a que las demandas sean satisfechas a tiempo.

Backloggin o retrasos. Equivale a permitir que $I_t < 0$. Entonces, cuando $I_t > 0$, I_t es el inventario disponible, con costo asociado $h_t(I_t)$.

Cuando $I_t < 0$. $-I_t$ es la cantidad retrasada (demanda no cubierta en el período t). Los retrasos tienen un coste asociado $r_t(-I_t)$ si $I_t < 0$. Una forma de modelar esto bien, es poner: $I_t = I_t^+ - I_t^-$, $I_t^+ \geq 0$, $I_t^- \geq 0$.

Modelo con backloggin:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{t=1}^{T} \{\boldsymbol{C_t(X_t) + h_t(I_t^+) + r_t(I_t^-)}\}$$

$$\text{s.a} \qquad X_t + I_{t-1} - I_t = D_t \qquad t=1,\dots,T$$

$$I_t = I_t^+ - I_t^-$$

$$X_t \geq 0,\ I_t^+ \geq 0,\ I_t^- \geq 0$$

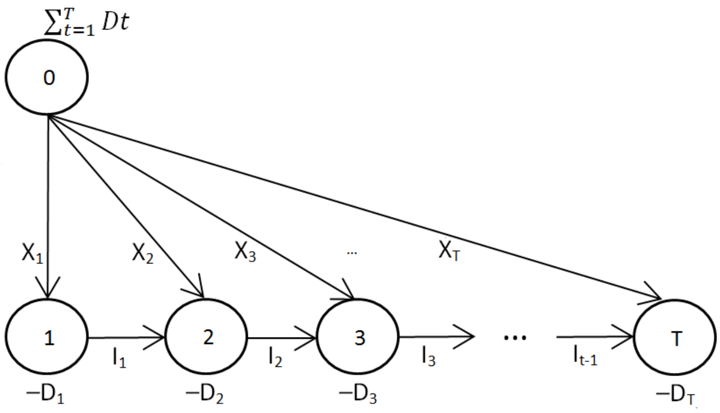
2.4 MODELOS DE REDES

En ciertos casos, problemas de producción-inventario se pueden modelar como problemas de redes, del tipo: camino más corto, transporte, flujo en redes y redes no lineales.

2.4.1 MODELO DE FLUJO EN REDES. SIN ESCASEZ

Costes $C_t(X_t)$ y $h_t(I_t)$ sobre cada arco.

Modelo:



$$\textbf{Minimizar } \sum_{t=1}^{T} C_t(X_t) + \sum_{t=1}^{T} h_t(I_t)$$

s.a $\quad X_1 + I_1 = D_1 \qquad t=1,\ldots,T$

$\quad X_t + I_{t-1} - I_t = D_t \qquad t=2, \ldots, T$

$\quad X_t \geq 0,\ I_t \geq 0.$

2.4.2 MODELO DE FLUJO EN REDES. CON ESCASEZ PERMITIDA

Sean:

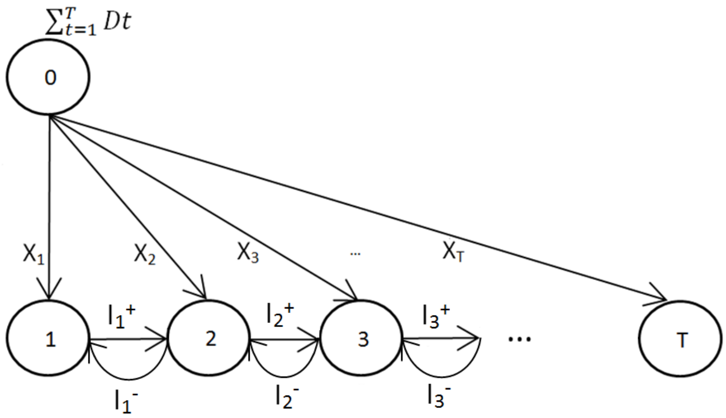
- I_t^+: Inventario disponible en el período t.
- I_t^-: Cantidad atrasada en el período t.

Entonces $I_t = I_t^+ - I_t^-$ es el inventario neto.

Funciones de coste:

- $C_t(X_t)$: Production.
- $h_t(I_t^+)$: Almacén.
- $r_t(I_t^-)$: Retraso.

Modelo:



$$\textbf{Minimizar} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{C_t(X_t)} + \sum_{t=1}^{T-1} \boldsymbol{h_t(I_t^+)} + \sum_{t=1}^{T-1} \boldsymbol{r_t(I_t^-)}$$

s.a $\quad X_1 + I_1^- - I_1^+ = D_1$

$X_t + I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- + I_t^- - I_t^+ = D_t \quad t=2, \ldots, T-1$

$X_t + I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- = D_t$

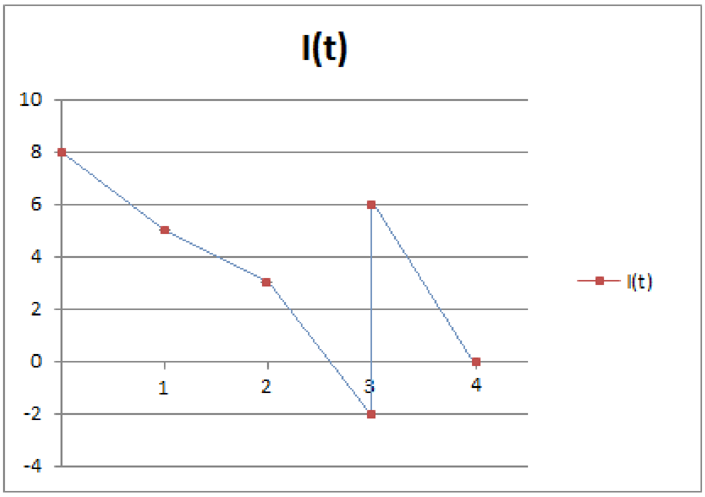
$X_t \geq 0, It^+ \geq 0, It^- \geq 0$

2.5 DISTINTAS REPRESENTACIONES

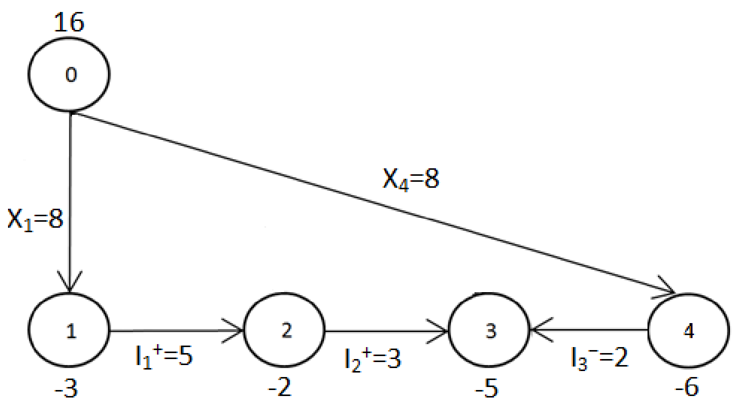
Suponemos un problema con 4 períodos, demandas: 3, 2, 5 y 6 y la solución dada en la tabla.

t	1	2	3	4
D_t	3	2	5	6
X_t	8	0	0	8
I_t^+	5	3	0	0
I_t^-	0	0	2	0

Una forma equivalente es dibujar I(t) en función de t.



Y otra forma sería representar la solución en la red asociada a este problema. (Los arcos que no aparecen tienen flujo X=0).



Cuando los costes marginales de producción son constantes a lo largo de los períodos, es decir, C_t=C, t= 1, ..., T, aunque haya costes fijos, K_t, la cantidad que se produce puede quitarse de la función objetivo, pues los costes totales de producción, excluyendo costes fijos son independientes de las X:

$$\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{C_t X_t} = \mathbf{C} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{C}\left(\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{D_t} - \boldsymbol{I_0}\right)$$

2.6 MODELO DE WAGNER-WHITIN

El Modelo de Wagner y Whitin es un método matemático para dimensionar lotes utilizando programación dinámica, para minimizar costos, garantizando soluciones óptimas.

Es el primer modelo que busca el equilibrio entre los costes de producción e inventario, permitiendo una demanda variable en el tiempo y aceptando ciertos retrasos. Para ello se crea una función en donde aparezcan todos los costes asociados a sus variables, con el fin de encontrar una solución a esas variables de tal manera que minimice dicha función.

Para la resolución de este método, se dispone de T períodos con demanda conocida y se aplica para un solo ítem, permitiendo inventarios al inicio y final del período, acarreando un costo positivo.

De forma matemática, el algoritmo se escribe de la siguiente manera:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{t=1}^{T}\{\boldsymbol{C_t(X_t)} + \boldsymbol{h_t(I_t)}\}$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a} & X_t + I_{t-1} - I_t = D_t & t=1,\ldots,T \\ & X_t \geq 0 & t=1,\ldots,T \\ & I_0 = I_T = 0 & \end{array}$$

Siendo T el número total de períodos, D_t la demanda en el período t, $C_t(X_t)$ es el coste de producir X unidades en el período t y, por último, $h_t(I_t)$ el coste de mantener i unidades de inventario hasta el final del período t, siempre y cuando $I \geq 0$.

Las variables de decisión en el modelo son la cantidad de producción en el período t (X_t), y el inventario al final del período (I_t).

Para resolver el modelo Wagner-Whitin, se ha desarrollado diferentes procedimientos, dando soluciones óptimas y aproximadas (heurísticas).

El procedimiento de solución óptima no permite retrasos, por lo que el inventario tiene que ser siempre positivo. El costo de producción se escribe como:

$$C_t(X) = S_t + c_t X$$

Siendo siempre $X>0$ y el costo asociado a producir cero unidades será $C_t(0) = 0$.

S_t es el coste de preparación y c_t el coste de producción.

El algoritmo puede dar como resultado que en cada período o bien no se produce, o se produce la cantidad de demanda acumulada de varios períodos.

2.6.1 EJEMPLO. (Nahmias 1993 p.322)

Las demandas para un componente electrónico para las 4 semanas siguientes son: 52, 87, 23, y 56. Suponemos costes fijos semanales, no se permite escasez y que no hay capacidad sobre el número de componentes que pueden fabricarse a la semana.

Sean X_1, X_2, X_3, X_4 las cantidades ordenadas. Vamos a examinar el número de soluciones factibles.

Como no se permiten retrasos sabemos que $X_1 \geq 52$. Suponiendo que $I_4 = 0$, obtenemos que $X_1 \leq D_T$, siendo D_T la suma de las demandas de las 4 semanas. $D_T = 52 + 87 + 23 + 56 = 218$, por lo que $52 \leq X_1 \leq 218$, es decir, puede tomar 167 valores.

El número de valores posibles para X_2 depende del valor tomado por X_1, pero tiene que ser $X_1 + X_2 \geq 52 + 87 = 139$.

Vemos que aún para problemas muy pequeños el número de soluciones factibles es enorme. Sin embargo, el número de soluciones con requerimientos exactos es muchísimo menor:

$$X_1=D_1 \text{ o } X_1=D_1+D_2 \text{ o } \ldots X_1=D_1+D_2+ \ldots +D_T$$
$$X_2=0 \text{ o } X_2=D_2 \text{ o } X_2=D_2+D_3 \text{ o } \ldots X_2=D_2+D_3+ \ldots +D_T$$
$$\ldots$$
$$X_T=0 \text{ o } X_T=D_T$$

X_1 como máximo puede tomar 4 valores con estas nuevas restricciones (52, 139, 162, 218), X_2 puede tomar otros 4 (0, 87, 110, 166), y así sucesivamente.

Queda determinada por los períodos donde hay producción, bastaría con especificar un vector de ceros y unos ($i_1, i_2, \ldots, i_T$) tal que si $i_t=1$ hay producción en t y si $i_t=0$, no la hay. Además, $i_1=1$ siempre, ya que $I_0=0$.

Teniendo en cuenta esto, una posible solución sería (1, 0, 1, 0) en donde se produce solo en los periodos 1 y 3, luego X= (139, 0, 79, 0). En este ejemplo habrá 2^3 soluciones con requerimientos exactos, en general, puede haber 2^{T-1} soluciones.

2.7 PROGRAMACIÓN DINÁMICA (BACKWARD)

El número de políticas de requerimientos exactos para un problema de T períodos es 2^{T-1}. Para T grande sería ineficiente enumerar todas estas soluciones. Podemos encontrar el óptimo por recurrencias backward de programación dinámica (P.D.).

Sean:

- f_t: El costo mínimo de satisfacer las demandas durante los periodos t, t+1, …, T, suponiendo inventario inicial cero ($I_{t-1} = 0$).

Si una política de requerimientos exactos produce en t y luego en j, con t < j, debe producto exactamente en t: $D_t + D_{t+1} + \ldots + D_{j-1}$. Sea:

- $C_{t,j}$: El coste de producir en t para satisfacer la demanda de t, t+1, …, j-1

$$\boldsymbol{C_{t,j} = C_t\left(\sum_{k=1}^{j-1} D_k\right) + \sum_{k=t}^{j-2} h_k \left(\sum_{k+1}^{j-1} D_t\right)} \text{ Para t< j}$$

Donde, además, si j=t+1 es solo $C_{t,t+1} = C_t(D_t)$.

$C_{t,j}$ está definido para $1 \leq i < j \leq T+1$.

Entonces:

$$C_{t,j} = \begin{cases} C_t(D_t) \text{ para } j = t+1 \\ C_{t,i}(D_t + D_{t+1} + \ldots + D_{j-1}) + h_t(D_{t+1} + \ldots + D_{j-1}) + h_{t+1}(D_{t+2} + \ldots + D_{j-1}) + \ldots \\ + h_{j-2}(D_{j-1}) \text{ para } j \geq t+2 \end{cases}$$

Por ejemplo, para t=2, j=5

$$C_{2,5} = C_2(D_2+D_3+D_4) + h_2(D_3 + D_4) + h_3(D_4)$$

Para $j = t+1$, si el inventario al empezar el periodo t es $I = I_{t-1}$ y la decisión de producción es X_t, el coste resultante es $C_t(X_t, I_t)$.

Además, el inventario final, I_t, está determinado y es $I + X_t - D_t$, y será el inventario al empezar la siguiente etapa.

Suponiendo que seguimos una política optima desde el periodo t+1 hasta el T, entonces el costo asociado a la elección X_t del período t, con estado de inventario I, (suponiendo política optima en $t+1, \ldots, T$), es $C_t(X_t, I_t) + f_{t+1}(I + X_t - D_t)$

El valor mínimo de este costo es $f_t(I)$, y estará definido por la ecuación final:

$$f_t(I) = \min \{C_t(X_t, I + X_t - D_t) + f_{t+1}(I + X_t - D_t)\}$$

Para t=1, 2, ..., T, con $f_{t+1}(I)=0$.

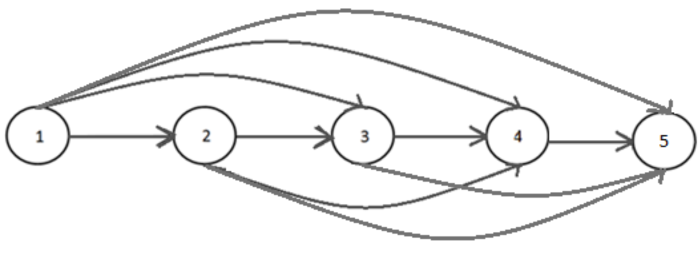
Se puede usar Programación Dinámica Backward para encontrar la producción óptima $\{X_t\}$. Además, restricciones como $X_t \leq U_t$; $I_t \leq L_t$, o X_t, I_t enteros ≥ 0, sirven para reducir el rango de valores en las variables de decisión y estado, y hacen el problema más fácil,

Para ciertos tipos de funciones de costo, hay algoritmos mucho más eficientes que el de P.D.General.

También, Wagner da el algoritmo de P.D.Forward para este problema.

El problema es equivalente a uno de camino más corto, que consiste en los nodos $\{1, 2, \ldots, T, T+1\}$, los arcos (t, j) $\forall t<j$.

Por ejemplo, para $T=4$:



Hay correspondencia entre políticas de requerimientos exactos y caminos en el grafo del nodo 1 al nodo T+1.

2.7.1 EJEMPLO (Winston p-955)

$T=4$

$D_1=1, D_2=3, D_3=2, D_4=4$

$K_j = k = 3€$

$C_j = C = 1 €$

$h_j = h = 0.5€$

$$C_j(X)=\begin{cases} 0 \text{ si } X=0 \\ 3+X \text{ si } X>0 \end{cases}$$

$h_j(I)=0.5I$

Vamos calculado los $C_{t,j}$:

$C_{12}=4$

$C_{13}= C\ (1+3) + h\ (3) = 7 + 0.5*3 =8.5$

$C_{14}= C\ (1 + 3 + 2) + h\ (5) + h\ (2) = 9 + 0.5*7 = 12.5$

$C_{15}= C\ (1 + 3 + 2 + 4) + h\ (9) + h\ (6) + h\ (4) = 13 + 0.5*19 = 22.5$

$C_{23}= 6$

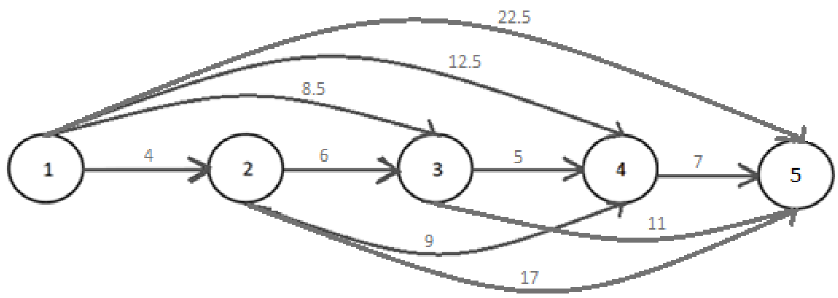
$C_{24}= C\ (5) + h\ (2) = 8 + 1 = 9$

$C_{25}= C\ (9) + h\ (6) + h\ (4) = 12 + 5 = 17$

$C_{34}=5$

$C_{35}= C\ (6) + h(4) = 9 + 2 = 11$

$C_{45}=7$



Caminos:

$U_1=0$

$U_2=4$; pred (2)=1

$U_3=\min \{4+6, 8, 5\} = 8,5$; pred (3) = 1

$U_4=\min \{8.5+5, 12.5, 4+9\} = 12.5$; pred (4) = 1

$U_5=\min \{22.5, 4+17, 8.5+11, 12.5+7\} = 19.5$; pred (5)=3 ó 4

Camino más corto: **1-3-5** ó **1-4-5**

Esto corresponde a producir en t=1, para cubrir D_1 y D_2 y producir en t=3 para cubrir D_3 y D_4. Con coste total 19.5 para el primer caso. Y para el segundo corresponde a producir en t=1 para cubrir D1, D2 y D3, producir en t=4, con el mismo coste total.

t	1	2	3	4
Dt	1	3	2	4
Xt	4	0	6	0
It	3	0	4	0

t	1	2	3	4
Dt	1	3	2	4
Xt	6	0	0	4
It	5	2	0	0

2.8 MODELOS CON COSTOS CÓNCAVOS SIN ESCASEZ.

2.8.1 $C_t(X_t, I_t)$ FUNCIÓN CÓNCAVA Y NO SE PERMITE ESCASEZ.

También suponemos que $I_0=I_T=0$

El modelo es:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{t=1}^{T} C_t(X_t, I_t)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & X_1 - I_1 = D_1 & \\ & X_t + I_{t-1} - I_t = D_t & t=2, \ldots, T\text{-}1 \\ & X_t + I_{t-1} = D_t & \\ & X_t \geq 0, I_t \geq 0 & \end{aligned}$$

Aplicaremos el resultado de que el mínimo de la función cóncava sujeto a restricciones lineales ocurre siempre al menos en un punto extremo de la región.

En este caso hay T restricciones lineales y entonces un punto extremo tiene como mucho T variables no nulas (resultado clásico de Programación Lineal).

Distinguimos dos casos:

· **CASO 1.** $Dt > 0 \ \forall t=1, \ldots, T$.

Por lo que X_t e I_{t-1} no pueden ser ambos cero.

Como sólo T variables pueden ser positivas, una de las variables X_t e I_{t-1} debe serlo.

Entonces todos los puntos extremos de la región, incluyendo el óptimo, cumplen la propiedad:

$$\mathbf{X_t\, I_{t-1} = 0} \qquad t=1, 2, \ldots T \quad \text{(Wagner-Whitin)}$$

· **CASO 2.** Existe período k tal que $D_k = 0$.

En este caso puede suceder que $I_{k-1} = 0$ y $X_k = 0$, por lo que puede haber un punto extremo con $I_{t-1} > 0$ y $X_t > 0$ para algún $t \neq k$.

Vamos a demostrar que una solución así no puede ser óptima:

Si $I_{k-1} = 0$, $X_k = 0$ podemos descomponer el problema original en dos problemas independientes: uno del período 1 al k-1 y otro del $k+1$ al T.

El primer problema tiene k-1 repeticiones, y entonces k-1 variables no nulas en la solución óptima; y en el segundo problema T-k restricciones y variables no nulas en el óptimo. Entonces en el problema original tenemos una solución óptima con T-1 variables no nulas, lo que implica que se cumple la propiedad mencionada anteriormente, $X_t\, I_{t-1} = 0$

Hemos demostrado que si $C_t(X_t, I_t)$ es una función cóncava para el problema lot sizing, existe una solución óptima cumpliendo que X_t toma solo uno de los valores: $0, Dt, D_{t+1}, \ldots, D_t$ ya que solo puede producirse $(X_t > 0)$ si $I_{t-1} = 0$.

La siguiente vez que se produzca debe volver a ser $I_{k-1} = 0$, por lo que necesariamente en t se produjo $D_t + D_{t+1} + \ldots + D_k$.

Un período t donde se produce se llama punto de regeneración. Esto supone mejoras muy significativas en el algoritmo.

Todo esto suponiendo que C_t es cóncava y que no hay capacidades sobre las variables X_t e I_t.

2.8.2 CASO ESPECIAL $C_t\,(X_t, I_t) = C_t(X_t) + h_t(I_t)$

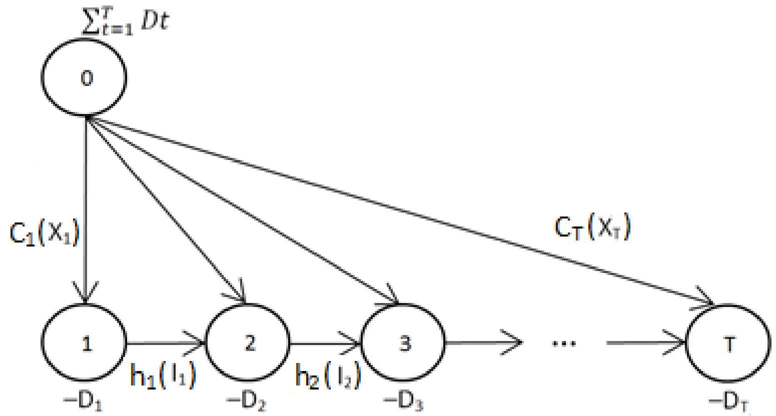
La formulación matemática de este caso es:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{t=1}^{T}\{\boldsymbol{C_t(X_t) + h_t(I_t)}\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & X_t + I_{t-1} - I_t = D_t \qquad t=1,\ldots,T \\ & X_t \geq 0,\ I_t \geq 0 \\ & I_0 = I_T = 0. \end{aligned}$$

Suponemos $C_t(X_t)$ y $h_t(I_t)$ dos funciones cóncavas.

Consideramos el modelo de redes asociado (no lineal).



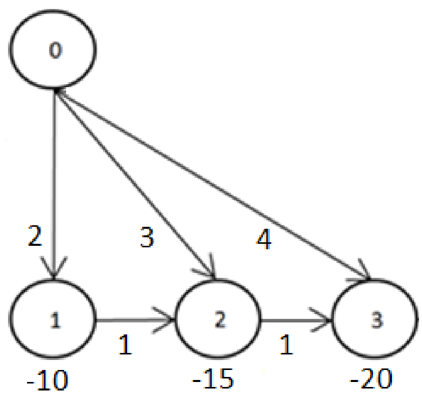
Aplicando el resultado anterior, existe solución óptima que es un punto extremo de la región, en este caso sería la solución básica factible del problema de redes, es decir, un árbol expandido.

Puede haber soluciones óptimas que no cumplan la condición: $X_t I_{t-1} = 0$.

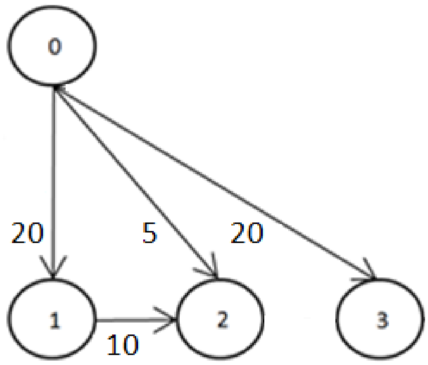
2.8.3 EJEMPLO

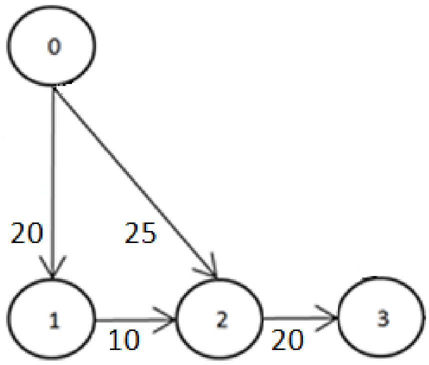
- T=3
- Sin costes fijos
- $C_t(X_t)$ lineal sin cotas

t	1	2	3
C_t	2	3	4
h_t	1	1	
D_t	10	15	20

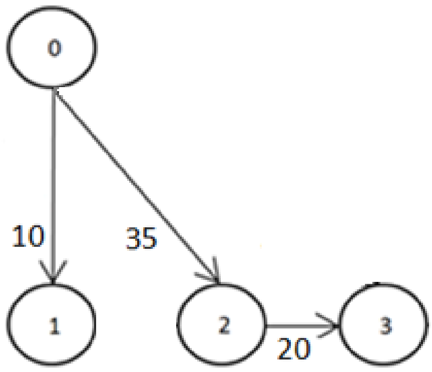


Soluciones óptimas: **C_t=145** coste total, no cumpliendo $X_t \,.\, I_{t-1} = 0$





Como C_t son cóncavas (lineales y sin cotas) existe una solución óptima cumpliendo esta condición, por ejemplo:



Por lo que queda demostrado que basta buscar una solución óptima que cumpla: $X_t I_{t-1} = 0$, pero que existen soluciones óptimas que no lo cumplen.

CAPÍTULO 3

LOT SIZING. MULTIPRODUCTO

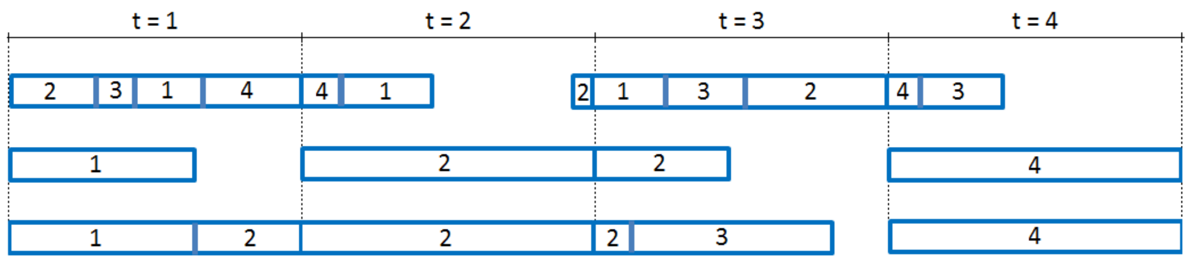
3.1 INTRODUCCIÓN.

En el capítulo anterior hemos formulado modelos de un único producto. En este capítulo estudiaremos modelos con varios artículos.

Podemos diferenciar dos modelos, de un único nivel, en donde los productos son independientes, pero interactúan entre ellos, ya que requieren de los mismos recursos para su formulación, y modelos multi-nivel, en donde los ítems interactúan también entre ellos debido a la estructura de producción.

La planificación de la producción buscar el mejor uso de los recursos disponibles (máquinas, mano de obra, espacio…), de manera que satisfaga la demanda del cliente acarreando el menor costo posible.

Las restricciones surgen de la capacidad de los recursos. En la figura (Pochet – Wolsey), se muestra de forma gráfica 3 planes diferentes de producción. La longitud de cada rectángulo representa el tiempo empleado en la producción del ítem.



Como se puede apreciar en la primera secuencia se producen muchos ítems en cada período, mientras que en la segunda y en la tercera se producen uno y dos respectivamente.

3.1.1 CLASIFICACIÓN DE LOS RECURSOS.

Como hemos dicho antes, los productos pueden requerir de los mismos recursos, ya sea una máquina, una instalación, mano de obra… Esto supone una restricción en el modo de producción (PM) y en la cantidad de producción (PQ), limitando la cantidad de ítems a producir.

3.1.2 EJEMPLO (Pochet – Wolsey p.384)

Sea m=3 el número de productos; para la producción de cada producto tenemos capacidades constantes $C_1=5$, $C_2=4$, $C_3=3$. Las tasas de consumo de los recursos son: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, respectivamente. Los tiempos de configuración son $b_i=0$, para i=1, 2, 3, y la disponibilidad total de la máquina L=20.

La restricción de la máquina en cada período es entonces:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 20$$
$$X_1 \leq 5Y_1$$
$$X_2 \leq 4Y_2$$
$$X_3 \leq 3Y_3$$
$$X \in \mathbb{R}^3$$
$$Y \in \{0,1\}^3$$

3.2 PROBLEMAS DE PRODUCCIÓN/INVENTARIO MULTIPRODUCTO.

En estos modelos se considerarán únicamente, los costos provenientes de la producción e inventario de varios artículos o familias de artículos con uno o varios recursos o métodos de producción.

Los modelos de producción/inventario multiproducto son la extensión natural a varios productos de los modelos vistos en el capítulo 2.

En estos casos se supone un horizonte de T períodos, y se consideran P productos. Estos productos comparten una serie de recursos de producción como hemos explicado en el punto anterior.

Estos modelos generalizan los de product-mix y selección del proceso al caso de varios productos. En todos los casos supondremos que cualquier cantidad de un recurso no utilizada en un período no puede ser usada en el período siguiente. Esto sucede, por ejemplo, con las horas de trabajo, las horas de las máquinas, la capacidad del almacén, de transporte, … Hay otros recursos como la cantidad de materiales o el capital, que sí pueden dejarse para períodos posteriores, necesitando un cambio previo del modelo.

3.2.1 MODELOS MULTIPRODUCTO CON VARIOS RECURSOS Y COSTOS LINEALES

Generalizan los modelos de product-mix al caso multiperíodo. El modelo básico con:

- T: períodos (índices t=1, ..., T).
- P: productos (índices i=1, ..., P).
- M: Recursos (índices m=1, ..., M).

Variables:

- $X_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t.
- $I_{i,t}$: Cantidad del producto i en el almacén al finalizar el período t.

Datos:

- $D_{i.t}$: Demanda del producto i en el período t.
- $C_{i.t}$: Coste unitario de producción del producto i en el período t.
- $h_{i.t}$: Coste unitario de inventario del producto i en el período t.
- $b_{m,t}$: Cantidad del recurso K disponible en el período t.
- $a_{i.m}$: Cantidad del recurso k usada para producir una unidad del producto i.

El modelo completo es:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} \{C_{i,t} X_{i,t} + h_{i,t} I_{i,t}\}$$

$$\text{s.a} \qquad X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} \qquad i=1, \ldots, P;\ t=1,\ldots,T$$

$$\sum_{i=1}^{P} a_{i,m} X_{i,t} \leq b_{m,t} \qquad m=1,\ldots,M;\ t=1,\ldots,T$$

$$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0$$

A este modelo se le pueden añadir cotas sobre las variables, y otras políticas de inventario como retrasos o pérdidas de ventas.

3.2.1.1 EJEMPLO DE FORMULACIÓN DE UN PROBLEMA DE PRODUCCIÓN E INVENTARIO

Problema de producción e inventario de 4 productos, con un horizonte de planificación de 5 períodos y 3 máquinas disponibles en el proceso. El inventario inicial es cero para todos los productos y el costo por unidad almacenada es de 20, 30, 35 y 25 Euros para los productos 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Cada máquina puede trabajar un máximo de 1300 horas por periodo. A continuación, se detalla el número de unidades de cada producto producidas por hora de cada máquina.

Máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
1	2	3	4	5
2	2	4	2	4
3	2	4	5	3

La demanda en unidades de cada producto y en cada periodo y los costes de inventario se detallan en la siguiente tabla.

Período	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
1	0	50	0	100
2	120	0	0	0
3	0	200	300	0
4	200	20	0	200
5	150	130	200	50
Coste inventario	20	30	35	25

Los costes de producción son constantes, por lo que no será necesario meterlos dentro de nuestra función objetivo.

Vamos a formular el problema.

Las variables de decisión serán:

$$X_{11}, \ldots, X_{15}, \ldots, X_{41}, \ldots, X_{45} \geq 0$$
$$I_{11}, \ldots, I_{15}, \ldots, I_{41}, \ldots, I_{45} \geq 0$$

La función objetivo:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} h_{i,t} I_{i,t} = 20\,(I_{11} + \ldots + I_{15}) + 30\,(I_{21} + \ldots + I_{25}) + 35\,(I_{31} + \ldots + I_{35}) + 25\,(I_{41} + \ldots + I_{45})$$

Restricciones:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{1}{2} X_{1t} + \frac{1}{3} X_{2t} + \frac{1}{4} X_{4t} + \frac{1}{5} X_{5t} \leq 1300$$

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{1}{2} X_{1t} + \frac{1}{4} X_{2t} + \frac{1}{2} X_{4t} + \frac{1}{4} X_{5t} \leq 1300$$

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{1}{2} X_{1t} + \frac{1}{4} X_{2t} + \frac{1}{5} X_{4t} + \frac{1}{3} X_{5t} \leq 1300$$

$0 + X_{11} + I_{11} = 0$	$0 + X_{31} + I_{31} = 0$
$\ldots \quad \ldots$	$\ldots \quad \ldots$
$I_{14} + X_{15} + I_{15} = 150$	$I_{34} + X_{35} + I_{35} = 200$
$0 + X_{21} + I_{21} = 50$	$0 + X_{41} + I_{41} = 100$
$\ldots \quad \ldots$	$\ldots \quad \ldots$
$I_{24} + X_{25} + I_{25} = 130$	$I_{44} + X_{45} + I_{45} = 50$

3.2.2 MODELOS MULTIPRODUCTO CON VARIOS MÉTODOS Y COSTOS LINEALES

En este caso supondremos que hay diferentes métodos de producción, como producción en horas normales, horas extras y producción subcontratada, que harían el papel de los recursos de la sección anterior. Este tipo de modelos generaliza los de selección del proceso del caso estático.

Las características de este modelo son:

- T: Períodos.
- J: Métodos.
- P: Productos.

Variables:

- $X_{i,j,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t, con el método j.
- $I_{i,t}$: Cantidad del producto i en el almacén al finalizar el período t.

Parámetros:

- $D_{i.t}$: Demanda del producto i en el período t.
- $C_{i,j.t}$: Coste unitario de producción del producto i en el período t, con el método j.
- $h_{i.t}$: Coste unitario de inventario del producto i en el período t.
- $b_{j,t}$: Tiempo disponible para el método j en el período t.
- $a_{i.j}$: Tiempo requerido para producir una unidad del producto i, con el método j.

El modelo es:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \{C_{i,j,t} X_{i,j,t} + h_{i,t} I_{i,t}\}$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{j=1}^{J} X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} \qquad i=1, \ldots, P;\ t=1, \ldots, T$$

$$\sum_{i=1}^{P} a_{i,k} X_{i,j,t} \leq b_{j,t} \qquad j=1, \ldots, J;\ t=1, \ldots, T$$

$$X_{i,j,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0$$

Igual que en el caso anterior, el modelo puede ser extendido para incluir órdenes atrasadas, inventarios de seguridad…

3.3 MODELO LOT-SIZING MULTIPRODUCTO CON LIMITACIÓN DE CAPACIDAD

En este apartado estudiaremos la planificación en un sistema de fabricación con limitaciones de la capacidad en la producción. En la práctica se presenta frecuentemente este problema.

Suponemos que hay capacidades de producción $X_t \leq U_t$, $t = 1, \ldots, T$.

El problema con capacidades es mucho más complejo, pues ya no se cumple la propiedad de Wagner y Whitin $I_{t-1} X_t = 0$.

Incluso encontrar una solución factible puede ser complicado. Hay una condición de factibilidad obvia, (Nahmias) que es:

$$\sum_{t=1}^{T} U_t \ \geq \ \sum_{t=1}^{T} D_t \qquad T=1, \ldots, T$$

Esto indica que la capacidad de producción a lo largo de T períodos debe superar a la demanda acumulada de esos períodos.

3.3.1 EJEMPLO

T = 7

D = (20, 40, 100, 35, 80, 75, 25)

U = (60, 60, 60, 60, 60, 60, 60)

Vemos si se cumple la condición: $\sum_{t=1}^{K} U_t \;\geq\; \sum_{t=1}^{K} d_t$

t=1: U_1=60, d_1=20 $\longrightarrow$ 60 > 20

t=2: $U_1 + U_2$ = 120, $d_1 + d_2$ =60 $\longrightarrow$ 120 > 60

...

t=7: $U_1 + U_2 + \ldots + U_7$ = 420, $d_1 + d_2 + \ldots + d_7$ = 375 $\longrightarrow$ 420 > 375

Esto supone que existe una solución factible, aunque no sea obvia.

Uno de los métodos que Nahmias emplea para la resolución de este problema es el método de ajuste para encontrar una solución factible inicial. Este método consiste en atrasar la demanda de los períodos en los que esta excede la capacidad. Esto se repite hasta conseguir que el método lote a lote sea factible.

En este ejemplo, el primer período en donde la demanda excede la capacidad es el período 3 (100 > 60), por lo que las 40 unidades de diferencia se distribuyen entre los períodos 1 y 2.

Para que en el período 2 la demanda no sea mayor que la capacidad, como mucho podrá admitir 20 unidades del período 3, quedando otras 20 unidades que serán asignadas al período 1. Por lo que:

D' = (**40, 60, 60**, 35, 80, 75, 25)

U'= (60, 60, 60, 60, 60, 60, 60)

El período 5 es el siguiente que la demanda supera la capacidad en 20 unidades, que retrocede al período 4. Por último, el período 6 sobrepasa en 15 unidades la capacidad de dicho período, por lo que se repartirán 5 unidades al período 4 y 10 al período que aún tiene capacidad suficiente, quedando:

D' = (**50,** 60, 60, **60, 60, 60**, 25)

U'= (60, 60, 60, 60, 60, 60, 60)

Garantizando una solución factible al problema original.

3.4 MODELO LOT SIZING MULTIPRODUCTO CON COSTO FIJO

En los modelos en donde no existen limitaciones de la capacidad es posible realizar una planificación de cada uno de los productos de forma individual, por lo que los costes fijos no suponen un incremento de la dificultad en su resolución.

Pero si el modelo requiere de limitaciones de la capacidad el problema resultante será NP-hard, por lo que solo se podrá optimizar si hay pocos artículos.

Este modelo es la generalización del modelo lot sizing para un producto, donde la producción es de tipo batch o intermitente, con costos fijos (setup o preparación), costos de producción y de almacenamiento.

El modelo debe tener en cuenta capacidades de producción, en forma de recursos utilizados a la vez que, por los diferentes productos, y de los tamaños de lotes y los tiempos en que hay que producirlos para cada producto.

Características:

- T: Períodos.
- M: Recursos.
- P: Productos.

Variables:

- $X_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t.
- $I_{i,t}$: inventario del producto i al finalizar el período t.
- $Y_{i,t} \begin{cases} 1 \text{ si } X_{i,t} > 0 \\ 0 \text{ otro caso} \end{cases}$

Parámetros:

- $C_{i.t}$: Coste de producir i en el período t.
- $h_{i.t}$: Coste de almacenar el producto i en el período t.
- $K_{i.t}$: Coste fijo.
- $U_{i.t}$: Máximo número de cantidades del ítem que pueden producirse en el período t.
- $D_{i.t}$: Demanda del producto i en el período t.
- $q_{i.m}$: Tiempo fijo o cantidad fija del recurso m para iniciar la producción del ítem i.
- $a_{i,m}$: Cantidad del recurso m requerida para producir una unidad del ítem i.
- $b_{m,t}$: Cantidad disponible del recurso m en el período t.

El modelo es:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} \{C_{i,t}X_{i,t} + K_{i,t}Y_{i,t} + h_{i,t}I_{i,t}\}$$

$$\text{s.a} \qquad X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} \qquad i=1,\ldots,P;\ t=1,\ldots,T$$

$$\sum_{i=1}^{P} \left(q_{i,m}Y_{i,t} + a_{i,m}X_{i,t}\right) \leq b_{m,t} \qquad m=1,\ldots,M;\ t=1,\ldots,T$$

$$X_{i,t} \leq U_{i,t}.Y_{i,t}$$

$$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \in \{0,1\}$$

Notas al modelo:

- Si los costes $C_{i,t}$ son constantes en t, pueden ser eliminados del modelo.
- Las cotas $0 \leq X_{i,t} \leq U_{i,t}$, pueden ser conocidas explícitamente, o bien deducidas del modelo.
- Puede añadirse explícitamente la posibilidad de retrasar órdenes o pérdidas de ventas. Lo mismo podría decirse para penalización por cambios en la tasa de producción.
- Todas las consideraciones dichas en los modelos de costos lineales siguen valiendo aquí.
- Si hay "tiempos fijos" ($q_{i,m} > 0$), el problema es no lineal entero, muy difícil de resolver.
  Si no consideramos tiempos fijos, el problema es de P.L. con costes fijos.
- Aunque en teoría todos los programas pueden resolver este MIP, si el problema es de grandes dimensiones el tiempo de cálculo puede ser excesivo. Este tiempo puede mejorarse con:
  - Métodos de reformulación y redefinición de variables
  - Métodos de descomposición.

3.5 PROBLEMA CON SETUP CONTINUO O START-UP

(Karmarkar-Schrage 1985). Suponemos un modelo con setup-continuo, de forma que los costes fijos o setup sólo son cargados cuando se inicializa la producción. Por ejemplo, si $X_3 > 0$ y $X_4 > 0$, en el modelo habitual es $Y_3 = Y_4 = 1$ y se incurre en los costes fijos K_3 y K_4. Pero si los períodos son cortos y las producciones grandes, podría ser lógico suponer que se incurre en un solo coste fijo, por ejemplo, en K_3.

Karmarkar schrage considera este modelo en el caso multiproducto y una máquina. Para un producto sería:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{t=1}^{T}\{C_t X_t + h_t I_t + K_t(Y_t - Y_{t-1}\}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a} & X_t + I_{t-1} - I_t = D_t & t=1,\ldots,T \\
& X_t \leq U_t Y_t & \\
& X_t \geq 0,\ I_t \geq 0 & \\
& Y_t \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

En la función objetivo solo se incurre en el costo fijo K_t si $Y_{t-1} = 0$, $Y_t = 1$.

Esto puede también modelarse introduciendo la variable $Z_t \in (0,1)$ con

$$
\cdot \quad Z_t \begin{cases} 1 \text{ si se inicia la producción en el período t.} \\ 0 \text{ si no se inicia.} \end{cases}
$$

Quedando el modelo de la forma:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{t=1}^{T}(C_t X_t + h_t I_t + K_t Z_t)$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a} & X_t + I_{t-1} - I_t = D_t & t=1,\ldots,T \\
& Y_t - Y_{t-1} \leq Z_t & \\
& X_t \leq u_t Y_t & \\
& X_t \geq 0,\ I_t \geq 0 & \\
& Y_t \in \{0,1\},\ Z_t \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

Por lo que si $Y_{t-1} = 0$ y $Y_t = 1 \longrightarrow Z_t = 1$

3.6 MODELO DE PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y MANO DE OBRA

En los problemas estudiados anteriormente se han considerado como métodos o recursos de producción los distintos niveles de mano de obra con los que cuenta la empresa. Sin embargo, en algunos casos es conveniente indicar expresamente el número de trabajadores contratados y el número de días laborales al mes.

3.6.1 MODELOS CON FUERZA DE TRABAJO FIJA

Se toman como variables, además de $X_{i,t}$, $I_{i,t}$ y $Y_{i,t}$:

- W_t: Número de horas de trabajo regulares.
- E_t: Número de horas extras.

Los costes son los siguientes:

- $C_{i,t}$: Coste unitario excluyendo los costes laborales.
- w_t: Coste de una hora de tiempo regular.
- e_t: coste de una hora extra.

Quedando el modelo:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{P}} \sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{T}} \{C_{i,t}X_{i,t} + K_{i,t}Y_{i,t} + h_{i,t}I_{i,t}\} + (w_t W_t + e_t E_t)$$

$$\begin{array}{lll}
\text{s.a} & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
 & \sum_{i=1}^{P}\left(q_i Y_{i,t} + a_i X_{i,t}\right) = W_t + E_t & t=1,\dots,T \\
 & X_{i,t} \leq U_{i,t} Y_{i,t} & \\
 & W_t \geq 0 & \\
 & E_t \geq 0 & \\
 & X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0 & \\
 & Y_{i,t} \in \{0,1\} &
\end{array}$$

q_i es el número de “horas fijas” requeridas para iniciar la producción del ítem i, y a_i es el número de horas para producir una unidad del producto i.

Si eliminamos los tiempos fijos q_i, i=1, …, P, el problema es uno de P.L con costes fijos.

Puede entenderse fácilmente el caso de permitir escasez (órdenes atrasadas o pérdidas de ventas).

Aquí solo hemos considerado la capacidad laboral, pero podría extenderse a otras restricciones.

3.6.2 MODELO CON FUERZA LABORAL VARIABLE

En este modelo se penalizan los cambios en el nivel de las horas de trabajo.

La función matemática es la siguiente:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} \{C_{i,t}X_{i,t} + K_{i,t}Y_{i,t} + h_{i,t}I_{i,t}\} + (w_tW_t + e_tE_t + g_tG_t + f_tF_t)$$

$$\text{s.a} \qquad X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} \qquad i=1,\ldots,P;\ t=1,\ldots,T$$

$$\sum_{i=1}^{P} \left(q_iY_{i,t} + a_iX_{i,t}\right) = W_t + E_t \qquad t=1, \ldots, T$$

$$W_t + W_{t-1} = G_t - F_t$$

$$W_t \geq 0,\ E_t \geq 0,\ G_t \geq 0,\ F_t \geq 0 \qquad t=1, \ldots, T$$

$$X_{i,t} \leq U_{i,t}Y_{i,t}$$

$$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0$$

$$Y_{i,t} \in \{0,1\}$$

Siendo g_t el coste de contratos nuevos y f_t el coste de despidos.

3.7 RESTRICCIONES DE PRODUCCIÓN

A veces hay que añadir a estos modelos restricciones sobre la forma concreta de producción.

Un tipo de ítem por período (Ahuja- Orlin – Magnanti p.633):

Supongamos que producimos los P ítems en la misma máquina, y que en cada período solo podemos producir un tipo de ítem. Entonces habría que añadir:

$$\sum_{i=1}^{P} Y_{i,t} \leq 1 \qquad t=1, \ldots, T$$

Setup continuo:

Puede haber también "setup continuo" para cada producto, es decir, solo incurrimos en el costo fijo $K_{i,t}$ si $Y_{i,t-1} = 0$, $Y_{i,t} = 1$.

Entonces habría que añadir variables $Z_{it} \in (0,1)$ y las restricciones:

$Y_{i,t} - Y_{i,t-1} \leq Z_{i,t} \qquad i=1,\ldots,P;\ t=1,\ldots,T$

La función objetivo quedaría:

$$\textbf{Minimizar} \ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{P}} \sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{T}} \left(C_{i,t}X_{i,t} + K_{i,t}Z_{i,t} + h_{i,t}I_{i,t}\right) + (w_t W_t + e_t E_t + g_t G_t + f_t F_t)$$

Inicialización por producto. (Karwakar-Scharge 1985):

Supongamos una planta que produce P productos de la forma que para producir el producto i se prepara toda la planta y se produce el lote en una línea continua; luego se para la planta y se inicializa para otro producto, etz.

Aquí las restricciones serían los de 3.1 y 3.2 a la vez:

$Y_{i,t} - Y_{i,t-1} \leq Z_{i,t} \qquad i=1,\ldots,P;\ t=1,\ldots,T$

$\sum_{i=1}^{P} Y_{i,t} \leq 1 \qquad t=1, \ldots, T$

Las variables $Z_{i,t}$ є (0,1) indican que si $Z_{i,t} = 1$ es que la planta se dedica al producto i.

3.8 MODELO MULTIPRODUCTO CON COSTE DE TRANSPORTE

La mejora en las decisiones de inventario y transporte pueden suponer ganancias significativas.

El problema que aquí tratamos es la búsqueda de la decisión óptima para los pedidos de varios artículos a un único proveedor, con un horizonte temporal finito para la toma de decisiones de pedido de los artículos, conocida la demanda y los costos, tanto el costo de inventario como el fijo.

En este modelo contamos con un coste adicional, el coste de transportar el producto. Este suele reflejar las economías de escalas, ya que emplea tarifas de descuento por las unidades transportadas.

Por lo que la función será lineal en cada trozo o segmento.

Este problema suele clasificarse como un problema multi-ítem de una sola etapa, sin capacidad, cuyo objetivo es encontrar el tamaño de lote que minimice el costo (MILSP), considerándose como un problema NP-hard.

La notación empleada en el modelo es:

- T: Períodos (índices t=1, ..., T)
- P: Productos (índices i=1, ..., P)
- S: Puntos de descuento (índices s=1, ..., S)

Variables de decisión:

- $X_{i,t}$: Cantidad de artículo i ordenado en el período t.
- $I_{i,t}$: Nivel de inventario del producto i al finalizar el período t.
- IN_i: Nivel de inventario del producto i al inicio de la planificación.
- L_t: Cantidad total de artículos transportados en el período t.

- $\beta_{s,t}: \begin{cases} 1 \text{ si } m_s \leq L_t < m_{s+1} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$
- Z_s: Variable auxiliar empleada para relacionar la cantidad transportada con el costo.
- $Y_{i,t}: \begin{cases} 1 \text{ si } X_{i,t} > 0 \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$

Parámetros:

- D_{it}: Demanda del producto i en el período t.
- K_i: Costo fijo de emisión del ítem i en el período t.
- h_i: Costo de almacenar el producto i en el período t.
- v_i: Variable asociada al peso del artículo i.
- τ_s: Coste de transportar la carga s.
- m_s: Punto de descuento de carga s.

El modelo siguiente se emplea para el problema integrado de transporte (ITP) minimizando el inventario y los costes relacionados con el transporte de los pedidos por artículo.

$$\textbf{Minimizar } \sum_{t=1}^{T} \{ \sum_{i=1}^{P} \left(h_i I_{i,t} + K_i Y_{i,t} \right) + \sum_{s=1}^{S} \tau_s Z_{s,t} \}$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a} & X_{i,1} + IN_i - I_{i,1} = D_{i,1} & i=1, \ldots, P \\ & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} & i=1,\ldots,P;\ t=2,\ldots,T \\ & X_{i,t} \leq MY_{i,t} & i=1,\ldots,P;\ t=2,\ldots,T \end{array}$$

$$L_t = \sum_{i=1}^{P} v_i X_{i,t} \qquad t=1, \ldots, T$$

$$L_t = \sum_{s=1}^{S} m_s Z_{s,t} \qquad t=1, \ldots, T$$

$$Z_{1,t} \leq \beta_{1,t} \qquad t=1,\ldots,T$$

$$Z_{s,t} \leq \beta_{s-1,t} + \beta_{s,t} \qquad t=1,\ldots,T;\ s=1,\ldots,S\text{-}1$$

$$Z_{S,t} \leq \beta_{S-1,t} \qquad t=1,\ldots,T$$

$$\sum_{s=1}^{S} Z_{st} \leq 1 \qquad t=1, \ldots, T$$

$$\sum_{s=1}^{S} \beta_{st} \leq 1 \qquad t=1, \ldots, T$$

$$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ L_t \geq 0,\ Z_{s,t} \geq 0$$

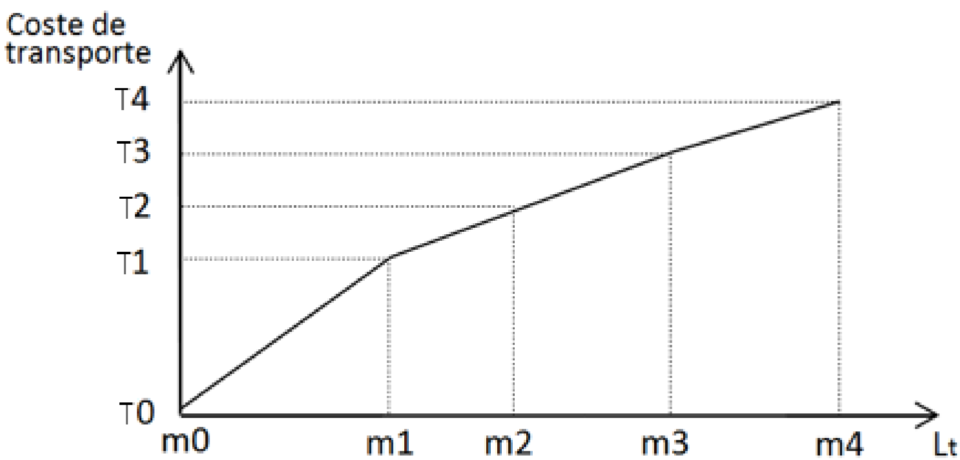
$$\beta_{s,t} \in \{0,1\},\ Y_{i,t} \in \{0,1\}$$

Utilizamos M como un valor numérico muy grande.

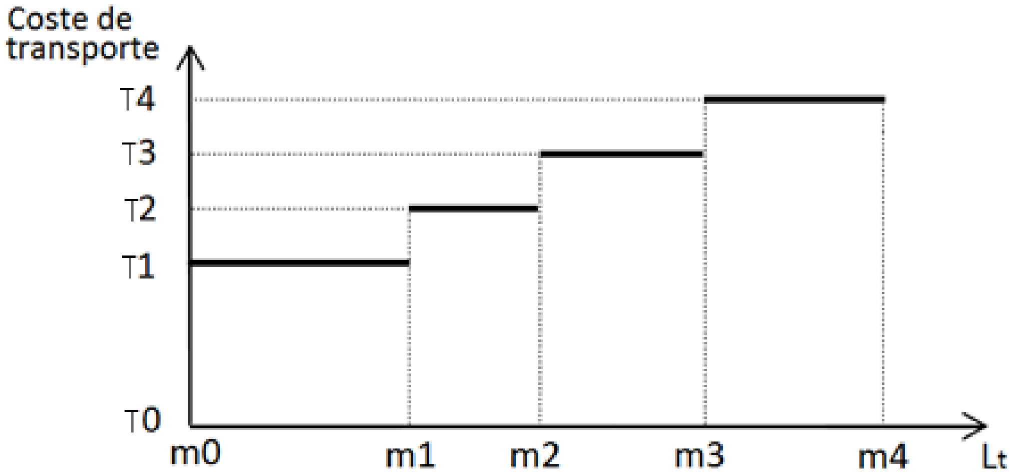
Las 4 primeras restricciones están relacionadas con el inventario, las 5 siguientes modelan el costo función de la cantidad total de artículos transportados.

Las funciones de coste lineal por tramos se indica con la variable L_t y la binaria β_s, siendo t=1 si $m_s \leq L_t < m_{s+1}$. Por lo que el coste del transporte se obtiene como una función cóncava con economías de escala.

La siguiente figura representa la estructura de costes lineal a trozos del transporte con 4 tramos de descuento en función de la carga. (descuentos incrementales)



La segunda gráfica representa la función lineal por pieza.



3.9 SOLUCIONES APROXIMADAS

Existen numerosos enfoques para obtener la resolución del modelo multiproducto. Uno de ellos consiste en buscar soluciones heurísticas simples, pero esto no siempre es factible. Si existen limitaciones de la capacidad no se pueden aplicar ciertos métodos, como hemos visto a lo largo de este capítulo.

Existen procedimientos que someten al problema a un conjunto de heurísticas simples y seleccionan aquellas con las que se obtienen mejores soluciones. Para modelos en donde las limitaciones de capacidad no son muy rigurosas, es decir, los costes fijos y la capacidad de los recursos son reducidas, se pueden llegar a obtener soluciones tolerables.

Otros procedimientos empleados para su resolución han sido la programación lineal continua de Manne y la relajación Lagrangiana, siendo la última la más reciente.

Existe otro método, conocido como el método primal dual, que se emplea sobre todo en situaciones multinivel con cuello de botella. Entendiendo como cuello de botella a la fase de la producción más lenta, ralentizando el proceso de producción total.

Este análisis, al igual que los otros, no obtiene una solución óptima, pero tiene varias ventajas sobre los otros procedimientos. Este método indica la holgura de la capacidad en cada período y el coste asociado a cada recurso.

Todos estos métodos empleados para problemas con limitación de capacidad y costos fijos requieren de otros procedimientos adicionales que modifiquen la solución aproximada.

CAPÍTULO 4

LOT SIZING AND SCHEDULING. UN ÚNICO NIVEL.

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a estudiar el dimensionamiento y la programación de lotes, tratando de asignar los recursos de la manera más eficiente, de forma que se satisfagan las necesidades del cliente y la demanda del mercado.

El tamaño de lote y la programación es un proceso de gran importancia y dificultad dentro de una empresa. Lot sizing determina el nivel de producción y el momento adecuado para satisfacer la demanda, dentro de un horizonte temporal finito.

Se establecen tiempos de preparación que dependen del orden de ejecución de las piezas y del costo. Tanto los tiempos de preparación como su coste caracterizan las líneas de flujo automáticas, por lo que será necesario no sólo establecer la secuencia si no un tamaño de lote.

Gracias al desarrollo de programas computacionales se ha podido incrementar la dificultad de las formulaciones matemáticas, siendo más realistas.

En este capítulo daremos una visión general de modelos que hacen frente a los distintos requisitos que aparecen en las aplicaciones industriales.

4.1.1 OBJETIVOS

Normalmente, se suele seleccionar una máquina para el estudio, en donde se pueden producir varios artículos diferentes. Se necesita que la máquina esté configurada para la producción de cada elemento, por lo que será necesario tener en cuenta la actividad de dicha configuración, mientras que para elementos iguales no se necesita un cambio de configuración ya que se producen todos seguidos sin un cambio de lote.

Para que la producción resulte factible y los costes sean los mínimos posibles, se necesita una programación de la actividad en donde se especifique el período de producción, el tamaño de lote y la secuencia que deben seguir los productos en el proceso.

Como ya dijimos en la introducción, los costes variables son los costes de emisión y los costes de producción. Cuanto mayor sea el tamaño de lote, menor será la cantidad de diferentes lotes y eso supondrá un menor coste de producción. Sin embargo, esto implica un aumento de los costos de almacenamiento del inventario. De aquí deducimos, que el tamaño de lote está relacionado con el costo de configuración y con el de almacenamiento, por lo que habrá que encontrar el equilibrio de manera que los costos totales se minimicen.

Existen diferentes tipos de problemas de asignación de lotes y programación con diferentes métodos de solución que veremos a continuación.

4.1.2 CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS (Hasse 1994)

Vamos a dar los criterios más importantes según Knut Haase para un modelo de lotes y programación.

Grado de información:

Cada parámetro de los modelos determinísticos tiene un valor conocido fijo, sin embargo, los modelos estocásticos contienen parámetros variables aleatorios, siendo estos últimos típicos de la demanda externa, del tiempo de entrega y de los defectos, tanto de los elementos como de las máquinas de producción.

Desarrollo de los parámetros:

Existen parámetros que no varían con el tiempo, pero en modelos dinámicos, los parámetros sí que se modifican con el transcurso del tiempo, como son los tiempos de configuración, la cantidad de demanda, la capacidad de producción y de almacenamiento, los costos de producción…

Horizonte de planificación:

A la hora de plantear un problema, se pueden suponer varios tipos de horizonte de planificación, infinito, finito o variable.

Escala de tiempo:

Podemos establecer períodos de tiempos pequeños o grandes y también se puede suponer una escala de tiempo continuo.

Número de artículos:

Podemos clasificar el problema dependiendo del número de artículos y la dependencia que existe entre ellos, debida a la capacidad o a la lista de materiales, de la que hablaremos en el capítulo siguiente.

Niveles:

Los problemas de un único nivel surgen cuando los diferentes productos son independientes entre ellos, no existe ninguna relación de componentes. Cuando si que existe una relación entre los productos estamos hablando de problemas multinivel.

Las relaciones de los componentes se definen por la estructura del elemento, que estudiaremos en el capítulo 5.

Costes:

Los problemas se pueden clasificar dependiendo de los costes, como los costos de configuración, los de inventario o los de capacidad.

Recursos limitados:

Si no tenemos en cuenta esta característica estaremos hablando de problemas sin capacidad, de lo contrario hablaremos de problemas capacitados.

Política de servicio:

Dependiendo de la política de servicio de cada empresa, se podrá admitir escasez o no. Para ello se estudia la cantidad de inventario óptima de tal manera que no suponga un coste muy elevado, pero pueda mantener la imagen de la empresa ante períodos de demanda muy variables.

Tiempo de las actividades:

Se necesita una programación de los tiempos, el tiempo de transporte, de entrega, de preparación, de producción por unidad… En la mayoría de los casos este tiempo es casi instantáneo, pero en otras situaciones no lo es, y depende de la secuencia de producción.

Objetivo:

El principal objetivo de los problemas, y así lo hemos planteado en el trabajo, es minimizar los costes totales, pero también se puede enfocar el problema a maximizar el nivel de servicio o alisar la carga de producción.

4.2 DIMENSIONAMIENTO Y PROGRAMACIÓN DE LOTES DE UN ÚNICO NIVEL

4.2.1 MODELO DE TAMAÑO DE LOTE CON CAPACIDAD

En esta sección vamos a estudiar el dimensionamiento de los lotes con limitaciones de la capacidad (CLSP), considerado como una extensión del modelo de Wagner Whitin.

La resolución de estos problemas resulta compleja en el área de planificación de producción, mientras que los problemas de lotes sin capacidad pueden ser resueltos de forma eficiente y sin demasiada dificultad.

Características:

- T: períodos (índices t=1, ..., T).
- P: productos (índices i=1, ..., P).

Las variables de decisión son:

- $X_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t.
- $I_{i,t}$: Cantidad del producto i en el almacén al finalizar el período t.
- $Y_{i,t} \begin{cases} 1 \text{ si } X_{i,t} > 0 \\ 0 \text{ si } X_{i,t} \leq 0 \end{cases}$

La variable binaria indica si la producción de i ocurre en el período t.

Parámetros:

- U_t: Capacidad disponible de la máquina en el período t.
- $D_{i,t}$: Demanda del producto i en el período t.
- h_i: Coste de almacenar el producto i en el período t.
- IN_i: Nivel de inventario del producto i al inicio de la planificación.
- a_i: Cantidad del recurso requerida para producir una unidad del ítem i.
- K_i: Coste de preparación del producto i.

Con la notación descrita podemos formular el modelo como uno de programación entera mixta:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} \{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$$

s.a	$X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t}$	$i=1,\ldots,P;\ t=1,\ldots,T$
	$a_i X_{i,t} \leq U_t Y_{i,t}$	$i=1,\ldots,P;\ t=1,\ldots,T$
	$\sum_{i=1}^{P} a_i X_{i,t} \leq U_t$	$t=1, \ldots, T$
	$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0$	
	$Y_{i,t} \in \{0,1\}$	

La función objetivo trata de minimizar los costes totales de instalación y de almacenamiento.

La primera restricción se ha visto en muchos de los modelos anteriores y representa la cantidad de inventario en cada período.

La segunda restricción refleja la posibilidad de producción de un producto, únicamente si la máquina está configurada para dicha producción. Y la tercera indica la restricción de capacidad.

El horizonte temporal de este modelo suele ser inferior a seis meses, pudiéndose producir varios ítems por período.

Al ser un problema NP-hard no podemos obtener de forma sencilla una solución óptima, por lo que muchos autores han empleado heurísticas para su resolución.

4.2.1.1 EXTENSION AL CASO MULTI-NIVEL, MULTI-MÁQUINA

Existen diferentes problemas a la hora de extender CLSP al caso multinivel, ya que se tiene que tener en cuenta las limitaciones de capacidad de los diferentes niveles.

Únicamente es posible la producción de un producto si existen suficientes predecesores disponibles y esto es un requisito que se debe incluir en el modelo.

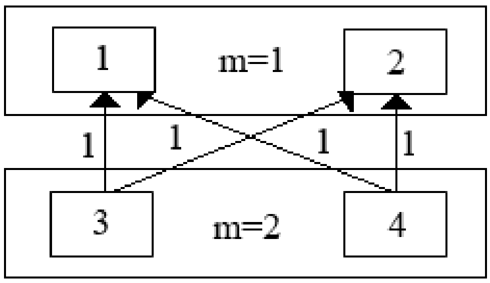
Vamos a ver un ejemplo (Haase 1994):

- P = 4
- T = 2
- Número de máquinas M = 2

- Conjunto de elementos producibles en las máquinas 1 y 2: P_1= {1,2}, P_2= {3,4}
- Conjunto de máquinas capaces de producir el producto j: M_1= M_2= {1}, M_3= M_4= {2},
- Número de unidades del ítem j necesario para producir una unidad del ítem i:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \end{bmatrix}$$

La cantidad del elemento j que se producirá en la máquina m en el período t se designa como X_{jmt}.



Esta figura muestra las relaciones entre los componentes y las máquinas empleadas en cada elemento.

Se establece la demanda para los productos finales. El tiempo de producir una unidad del ítem j en la máquina m, se expresa con a_{jm} y la demanda del elemento j en el período t con D_{jt}. U_{mt} es la capacidad de la máquina m en el período t.

El tiempo del ítem en cada máquina se refleja en la siguiente tabla.

t	1	2
d_{1t}		1
d_{2t}		1
C_{1t}	2	2
C_{2t}	2	2

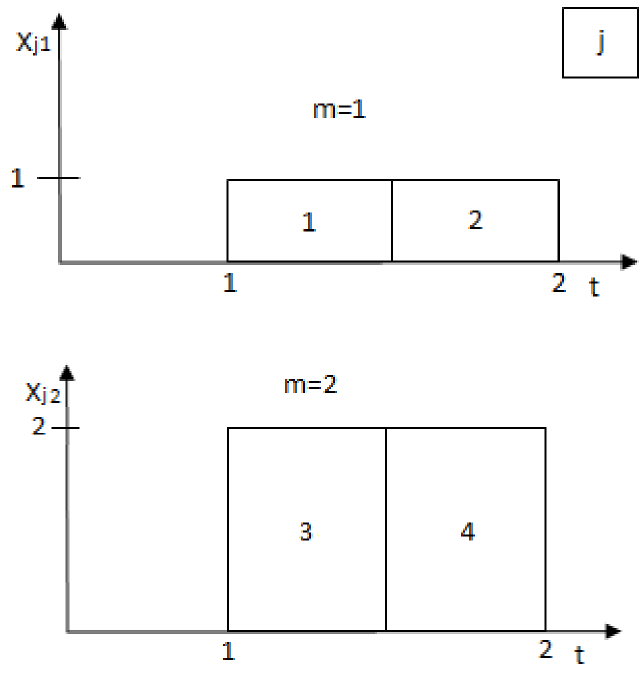
j	p_{i1}	p_{i2}
1	1	-
2	1	-
3	-	5
4	-	5

Si consideramos únicamente la restricción de capacidad:

$$a_{jm}.X_{j,m,t} \leq U_{mt}.Y_{i,t}$$

Con t=1, 2 y m=1, 2.

Vamos a representar una posible solución de forma gráfica.



Esta solución no es factible, el producto j=1 no puede producirse al comenzar el segundo período, ya que el producto j=4 aún no está disponible.

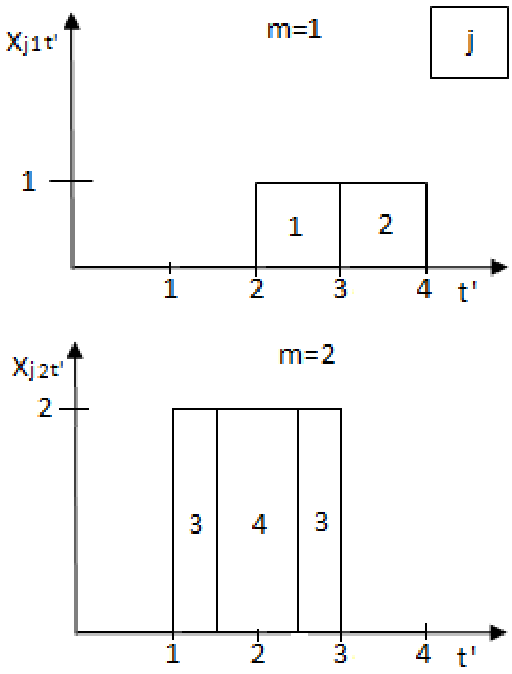
Se necesita tener en cuenta el tiempo de transporte del producto para obtener una solución factible, esto se consigue con la siguiente restricción, en donde se tiene en cuenta el tiempo de entrega de cada ítem:

$$\sum_{m\epsilon M_j} X_{j,m,t} + I_{j,t-1} - \sum_{i\epsilon N_j} \sum_{m\epsilon M_j} a_{j,i} X_{j,m,t+1} - I_{j,t} = D_{j,t}$$

Siendo N_j el conjunto de productos sucesores inmediatos del producto j, de manera que $\sum_{i\epsilon N_j} \sum_{m\epsilon M_j} a_{j,i} X_{j,m,t+1}$ representa la demanda dependiente del producto j en el período t.

Para modelos en donde se da la producción multinivel, son preferibles períodos de tiempo pequeños, ya que obtendremos conjuntos más grandes de soluciones factibles.

Vamos a cambiar la escala de tiempo de la figura anterior, y en vez de utilizar dos períodos grandes, vamos a duplicarlo con cuatro pequeños.



En el primer caso de dos períodos grandes, tenemos que comenzar la producción con el producto j=3 en t=1.

Con los cuatros períodos se produce una superposición con el ítem j=4, ya que pasa a la máquina m=1 antes de que se termine la producción completa de dicho producto.

4.2.2 MODELO DE SCHEDULING Y PROGRAMACION DE LOTES DISCRETOS.

Este modelo se basa en el supuesto de que la producción se ejecuta de forma completa en un mismo período de tiempo, sin posibilidad de cambios de un período a otro.

A este supuesto se le conoce con el nombre de “Todo o nada”, ya que, como acabamos de decir, como mucho se puede producir un producto en un período fijo en donde se emplea toda la capacidad disponible. Suponiendo dicha capacidad constante en el tiempo.

Este modelo consiste en la subdivisión de los períodos del CLSP en varios períodos, para así discretizar el problema (DLSP). Por lo que los períodos de este modelo serán intervalos pequeños de tiempo.

Las variables de decisión son las mismas que para el modelo CLSP:

- $X_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t.
- $I_{i,t}$: Cantidad del producto i en el almacén al finalizar el período t.
- $Y_{i,t} \begin{cases} 1 \text{ si } X_{i,t} > 0 \\ 0 \text{ si } X_{i,t} \leq 0 \end{cases}$

Como los períodos de producción son cortos, no será necesario aumentar, en los períodos en donde se produzcan los artículos, los costos de producción, por lo que únicamente existirá un costo de instalación cada vez que comience la producción de un nuevo lote, teniendo en cuenta que la producción de un único lote puede durar varios períodos.

Por lo tanto, los lotes serán múltiplos de una producción de períodos completos.

Es por eso por lo que se añade una nueva variable de decisión, indicando si la máquina está configurada para el elemento i en el período t, y un nuevo parámetro.

Variables de decisión:

- $X_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t.
- $I_{i,t}$: Cantidad del producto i en el almacén al finalizar el período t.
- $Y_{i,t} \begin{cases} 1 \text{ si } X_{i,t} > 0 \\ 0 \text{ si } X_{i,t} \leq 0 \end{cases}$
- $W_{i,t}$: Nueva variable binaria

Parámetros:

- U_t: Capacidad disponible de la máquina en el período t.
- $D_{i.t}$: Demanda del producto i en el período t.
- h_i: Coste de almacenar el producto i en el período t.
- IN_i: Nivel de inventario del producto i al inicio de la planificación.
- a_i: Cantidad del recurso requerida para producir una unidad del ítem i.
- K_i: Coste de preparación del producto i.

- $W_{i,t}$: Valor binario que indica si al inicio del período la máquina está configurada para el producto i.

El modelo será el mismo que para el modelo CLSP con distintas restricciones:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}\{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a} & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\ & a_i X_{i,t} = U_t W_{i,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\ & \sum_{i=1}^{P} W_{i,t} \le 1 & t=1,\ \dots,\ T \\ & Y_{i,t} \ge W_{i,t} - W_{i,t-1} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\ & X_{i,t} \ge 0,\ I_{i,t} \ge 0,\ Y_{i,t} \ge 0 & \\ & W_{i,t} \in \{0,1\} & \end{array}$$

La segunda restricción indica la posibilidad de producir toda la capacidad en un período o no producir nada, considerando que la capacidad no varía con el tiempo. La siguiente restricción indica la imposibilidad de producir más de un producto por período.

La cuarta restricción refleja el inicio de un nuevo lote.

En este modelo la variable $Y_{i,t}$ basta con que no sea negativa, debido a las restricciones $\sum_{i=1}^{P} W_{i,t} \le 1$ y $Y_{i,t} \ge W_{i,t} - W_{i,t-1}$.

En este problema podemos considerar la configuración de máquinas paralelas y al igual que el modelo anterior es un problema NP-hard.

Es posible que existan períodos de tiempo en donde no haya ninguna actividad entre dos lotes del mismo producto, pero también puede suceder que se realicen actividades adicionales innecesarias, esto ocurrirá siempre que resulte menos costoso que los períodos de tiempo inactivos.

4.2.3 MODELO DE SCHEDULING Y PROGRAMACION DE LOTES CONTINUOS.

Este modelo se acerca más a situaciones reales de la industria, en donde la configuración de dimensionamiento de los lotes es continua (CSLP).

En supuesto en el que se basa el CSLP es en el que como mucho se puede producir un producto por período, implicando que puede no ser necesaria la configuración al principio de un período.

Además, los lotes son cantidades continuas entre cero y la capacidad máxima de producción en un período t.

Por lo que es un modelo muy parecido al anterior, con la diferencia de que ya no se tiene que producir hasta alcanzar la capacidad total, aunque sigue teniendo la característica que sólo se puede producir un artículo por período.

Tanto las variables de decisión como los parámetros son los mismos que los de DLSP.

Y el modelo es el siguiente:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} \{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a} & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
 & a_i X_{i,t} \leq U_t W_{i,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
 & \sum_{i=1}^{P} W_{i,t} \leq 1 & t=1,\ \dots,\ T \\
 & Y_{i,t} \geq W_{i,t} - W_{i,t-1} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
 & X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \geq 0 & \\
 & W_{i,t} \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

La diferencia entre este modelo y el anterior se encuentra en la segunda restricción, en donde la cantidad de producción en este modelo puede ser de cualquier tamaño, siempre que se encuentre dentro del límite de la capacidad.

Aparentemente los dos modelos tienen diferencias insignificantes, pero estas diferencias en DLSP, suponen un coste de instalación cada vez que empieza la producción de un nuevo lote.

4.2.4 MODELO DE SCHEDULING Y PROGRAMACION DE LOTES PROPORCIONAL

En los períodos de inactividad, el modelo DLSP no realiza ningún seguimiento del estado de instalación. El problema que encontramos con el modelo CSLP es que se desaprovecha la capacidad sobrante del período en donde no se utiliza la capacidad en su totalidad.

Con el fin de evitar esto, se crea el problema de dimensionamiento y programación de lotes proporcional (PLSP), que produce lotes continuos en uno o varios períodos, no necesariamente adyacentes, en donde se aprovecha la capacidad sobrante para la producción de otro ítem, por lo que, si el primer producto no utiliza la capacidad total de un período, puede ser utilizado por el siguiente producto y, además, se lleva un control de la configuración durante los períodos de inactividad.

Se debe establecer la secuencia clara de producción si en un mismo período se producen dos artículos. Para ello se establece la variable de decisión $W_{j,t}$ como el estado de configuración de la máquina al finalizar el período.

Añadiendo la restricción de que sólo se pueda cambiar una vez por período el estado de la configuración de dicha máquina.

La función objetivo de este modelo es:

$$\textbf{Minimizar} \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} \{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{s.a} & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& a_i X_{i,t} \leq U_t(W_{i,t-1} + W_{i,t}) & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& \sum_{i=1}^{P} a_i . X_{i,t} \leq U_t & t=1, \dots, T \\
& \sum_{i=1}^{P} W_{i,t} \leq 1 & t=1, \dots, T \\
& Y_{i,t} \geq W_{i,t} - W_{i,t-1} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \geq 0 & \\
& W_{i,t} \in \{0,1\} &
\end{array}$$

Las diferencias que existen en este modelo respecto a los anteriores se encuentran en la segunda restricción, especificando que únicamente se puede realizar la producción de un producto si la máquina está configurada al comenzar el período.

La siguiente restricción especifica el límite de la capacidad de producción ya que se puede producir más de un artículo por período.

Se pueden dar cuatro casos diferentes en función de la configuración, el primero es que no se configure en un período, la segunda es que se realice la configuración al iniciar el período, otra es que se configure durante el transcurso del período o finalmente que se haga el terminar el período.

4.2.5 AMPLIACIÓN DEL MODELO PLSP

En esta sección estudiaremos una ampliación del modelo PLSP, considerando el tiempo de configuración y su coste, dependiendo de la secuencia de producción.

Normalmente se emplean más de una máquina para la producción de numerosos artículos, por lo que vamos a modelar el caso de multi-máquina.

Para conseguir una mayor eficiencia de la capacidad de producción y superar la escasez de esta, se puede considerar la opción de comprar.

El modelo PLSP multinivel se ocupa de las relaciones de los componentes de los padres entre los elementos, modelando la producción con cuello de botella.

4.2.5.1 PLSP CON TIEMPOS DE CONFIGURACIÓN

Los tiempos de configuración suponen un costo, y obtener una estimación correcta de ellos no es fácil.

Los tiempos de configuración suponen un consumo de la capacidad y no se tienen en cuenta en los modelos de lotes genéricos, siendo crucial en la práctica.

Tanto la programación de tiempos escasos de las máquinas, como una consideración excesiva del tiempo, puede dar lugar a horarios imposibles de la producción.

Por lo que introducimos el modelo PLSP con tiempos de instalación, PLSPST.

La expresión matemática de este modelo es:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}\{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$$

s.a

$$X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} \qquad i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T$$

$$\sum_{i=1}^{P} W_{i,t} \leq 1 \qquad t=1,\dots,T$$

$$MZ_{i,t} - st_i(W_{i,t} - W_{i,t-\beta}) + \sum_{\tau=t-\beta+1}^{t} Q_{i,\tau} \geq 0 \qquad i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T, \beta=1,\dots,sp_i$$

$$Q_{i,t} + a_i X_{i,t} \geq MW_{i,t} - MW_{i,t-1} \qquad i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T$$

$$M(1 - Z_{i,t}) - X_{i,t} \geq 0 \qquad i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T$$

$$Y_{i,t} \leq W_{i,t} - W_{i,t-1} \qquad i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T$$

$$\sum_{i=1}^{P} [a_i . X_{i,t} + Qi,t\ ] \leq U_t \qquad t=1,\dots,T$$

$$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \geq 0,\ Q_{i,t} \geq 0$$

$$W_{i,t},\ Z_{i,t} \in \{0,1\}$$

En donde las variables de decisión y los parámetros son:

- $X_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t.
- $I_{i,t}$: Cantidad del producto i en el almacén al finalizar el período t.

- $Y_{i,t} \begin{cases} 1 \text{ si } X_{i,t} > 0 \\ 0 \text{ si } X_{i,t} \leq 0 \end{cases}$
- $W_{i,t}$: Nueva variable binaria que representa el estado de configuración de la máquina al finalizar el período t.
- M: Valor numérico grande.
- $Z_{i,t}$: Variable binaria que indica si la configuración para el elemento i, ha concluido en el período t o no.
- st_i: Tiempo de configuración de la máquina para el elemento i, en horas.
- sp_i: Número máximo de períodos necesarios de configuración para el elemento i.
- Q_i: Tiempo de preparación para el elemento i requerido en el período t.
- U_t: Capacidad disponible de horas, de la máquina en el período t.
- h_i: Coste de almacenar el producto i en el período t.
- a_i: Número de horas requeridas para producir una unidad del ítem i.
- K_i: Coste de configuración del artículo i.

Hay que tener especial atención a las unidades, ya que la capacidad se mide en horas por período, por lo que las demás variables tendrán que evaluarse en horas.

4.2.5.2 EJEMPLO (Hasse 1994)

Con P=3, T=8 y U_t=10 (t=1, …, T) y el tiempo de proceso a_i, el coste de configuración K_i, el coste de inventario h_i y el tiempo de configuración st_i, se muestran en la siguiente tabla:

	a_i	K_i	h_i	st_i
i=1	1	50	1	4
i=2	1	50	1	4
i=3	1	50	1	4

Las demandas en cada período son las siguientes:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
d_{1t}	0	0	0	6	0	0	0	12
d_{1t}	0	0	0	8	0	0	0	14
d_{1t}	0	0	0	4	0	0	0	10

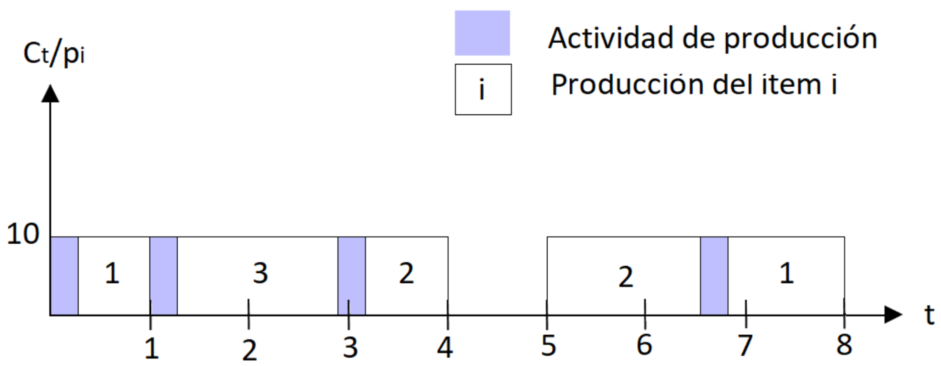
El valor óptimo de la función objetivo es $Z^*_{PLSPST} = 304$.

Las siguientes tablas muestran los tamaños de lotes X_{it}, y los tiempos de configuración Q_{it}, que suponen la solución óptima:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
X_{1t}	6	0	0	0	0	0	2	10
X_{2t}	0	0	0	8	0	10	4	0
X_{3t}	0	6	8	0	0	0	0	0

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Q_{1t}	4	0	0	0	0	0	4	0
Q_{2t}	0	0	2	2	0	0	0	0
Q_{3t}	0	4	0	0	0	0	0	0

De forma gráfica la solución es la siguiente:



Como podemos observar, el tiempo de configuración para el elemento 2, se distribuye durante dos períodos de tiempo, t=3 y t=4.

En comparación a otros modelos con tiempos de configuración, el modelo PLSPST destaca por no tener restringida la duración de los tiempos de configuración y porque la actividad de configuración puede comenzar en cualquier momento dentro de un período.

4.2.6 COMPARACIÓN DE LOS MODELOS

Knut Hasse ha realizado una tabla comparativa entre los tres modelos que acabamos de estudiar.

Modelo	Número máximo de elementos diferentes por período	Mantener el estado de configuración durante el período de inactividad	Configuración	Tamaño de lote	Capacidad
DLSP	1	No	Al comienzo del período	Múltiplos de una produccion de período completo	Constante
CSLP	1	Sí	Al comienzo del período	Cantidades continuas	Variable
PLSP	2	Sí	En cualquier momento	Cantidades continuas	Variable

4.2.7 EJEMPLO (Hasse 1994)

Con P=3, T=10, U_t = 50, y el resto de datos expresados en la siguiente tabla:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	a_i	h_i	k_i
d_{1t}		30				80				40	1	2	400
d_{2t}						30				70	1	1,5	150
d_{3t}						40				60	1	1	100

La solución óptima de cada modelo es:

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Z*
	X_{1t}		50	50	50							
DLSP	X_{2t}						50				50	2140
	X_{3t}					50				50		

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Z*
	X_{1t}		30	30	50						40	
CSLP	X_{2t}						30	20	50			1910
	X_{3t}					50				50		

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Z*
	X_{1t}		30		50	50	20					
PSLP	X_{2t}						30		30	40		1710
	X_{3t}	20	20							10	50	

Vamos a explicar un poco el porqué de cada una de las soluciones.

Los resultados del modelo DLSP no son buenos, y esto es debido a que no se realiza un seguimiento en la configuración en los períodos de inactividad, además de que los lotes son demasiado grandes en algunos períodos lo que aumenta el coste de almacenamiento de inventario.

La restricción de este modelo de "todo o nada" y la viabilidad de lotes continuos del modelo CSLP, implica que las soluciones factibles de este pertenecen a un subconjunto de todas las soluciones factibles de DLSP.

Con el modelo CSLP tampoco se obtienen buenos resultados, esto ocurre por no hacer un uso pleno de la capacidad de los recursos para producir los artículos.

De la misma manera, el conjunto de las soluciones factibles del modelo CSLP es un subconjunto de las del modelo PLSP.

Definitivamente, el modelo que obtiene mejores resultados en de PLSP.

Debido a la relación de las soluciones factibles de los tres modelos, podemos afirmar la siguiente ecuación:

$$Z_{DLSP}^{*} \geq Z_{CSLP}^{*} \geq Z_{PLSP}^{*}$$

4.3 DIMENSIONAMIENTO Y PROGRAMACIÓN DE LOTES. TIEMPO CONTINUO

En esta sección estudiaremos los modelos de demanda dinámica con horizonte temporal continuo.

Existe una estrecha relación entre la programación y el tamaño de lotes a la hora de estudiar la demanda, ya que estas se caracterizan por su tamaño y su plazo.

Suponemos la capacidad y la velocidad de las máquinas constantes, por lo que el tiempo de producción no dependerá de la programación.

Con el fin de ahorrar costes de preparación, los diferentes trabajos para un mismo artículo podrán agruparse, formando un único lote. Es por ello por lo que se conoce como un problema de procesamiento por lotes y programación (BSP).

Para formalizar el modelo BSP, se asignan números a cada trabajo con el fin de identificarlos, por lo que, si existen N demandas, se asignaran N+1 trabajos, ya que se programan los números desde el 0 hasta N+1.

El objetivo de este modelo consiste en obtener la secuencia y el tiempo de la programación de los trabajos, que optimice el proceso productivo.

Las variables de decisión de este modelo son las siguientes:

- a_n : Tiempo requerido para el trabajo n
- $X_{n,k}$: Variable binaria que indica si el trabajo n está programado justo antes del trabajo k.

Parámetros:

- M: Valor numérico alto.
- f_n: Plazo para el trabajo n.
- h_i: Coste de almacenar el producto i.
- i(n): Producto i asociado al trabajo n.
- N: Cantidad de trabajos.
- p_n: Tiempo empleado en el trabajo n.
- $S_{i,j}$: Coste de la configuración de la secuencia.

La función objetivo es:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{N}} \sum_{\substack{\boldsymbol{k=1}\\ \boldsymbol{k\neq n}}}^{\boldsymbol{N}} S_{i(n),j(k)} X_{n,k} + \sum_{j=n}^{N} h_{j(n)} p_n \left(f_n - a_n\right)$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{\substack{k=1\\ k\neq n}}^{N+1} X_{k,n} = 1 \qquad n=0,\ldots,N$$

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq n}}^{N} X_{k,n} = 1 \qquad n=1,\ldots,N+1$$

$$a_n + p_k \leq a_k + M\,(1 - X_{n,k}) \qquad n=0,\ldots,N;\ k=1,\ldots,N+1$$

$$a_n \leq f_n \qquad n=1,\ldots,N$$

$$X_{n,k} \in \{0,1\} \qquad n=0,\ldots,N;\ k=1,\ldots,N+1$$

$$a_n \geq 0 \qquad n=1,\ldots,N+1$$

$$a_0 = 0$$

La función de este modelo consiste en minimizar los costes totales que suponen la instalación y el almacenamiento de los artículos.

La primera restricción asegura la existencia de un sucesor en cada tarea, únicamente el trabajo N+1 no tiene ninguno. La segunda, garantiza un predecesor en cada trabajo, y únicamente en trabajo 0 no tiene ningún predecesor.

La tercera restricción establece un orden entre los diferentes trabajos.

Debido a la desigualdad en $a_n \leq f_n$, no se puede aplicar backlogging en este modelo.

De la misma forma que en modelos vistos anteriores, la inactividad entre los trabajos de un mismo elemento no requiere de una configuración adicional, por lo que no supondrá un coste.

El modelo DLSP y una variante del BSP, son equivalentes, por lo que los procedimientos de resolución del BSP pueden utilizarse para la resolución de instancias del otro modelo.

BSP empleado para problemas multinivel puede suponer soluciones factibles, pero para problemas de un único nivel no garantiza una solución óptima.

4.4 DIMENSIONAMIENTO DE LOTES Y PROGRAMACIÓN DE UNA MÁQUINA PARA MÚLTIPLES PRODUCTOS CON SETUP Y ESCASEZ.

En esta sección estudiamos una extensión del problema clásico del lote económico y programación (ELSP), con múltiples productos, tiempos de configuración y retrasos de la demanda.

Para la generación de las secuencias de los lotes de producción, se utilizan heurísticas y mediante un modelo de optimización no lineal se estudia la demanda no satisfecha a tiempo (backlogging), buscando minimizar todos los costos implicados, costos de configuración, de inventario, así los costos que suponen los retrasos.

El modelo de programación de lote económico ELSP (Economic lotsizing scheduling problem), se emplea para la resolución de problemas de programación y dimensionamiento de los lotes.

Se considera un problema NP-hard, y puede dividirse en dos partes para su resolución, la primera parte consiste en calcular el número de lotes de cada producto y la secuencia de su producción. La segunda trata de encontrar el tamaño de lotes de forma exacta, teniendo en cuenta los tiempos de configuración, de producción y los tiempos de disponibilidad de la máquina, de manera que se minimicen los costes totales.

4.4.1 PROBLEMA ELSP CON SETUP Y ESCASEZ DE INVENTARIO

En los problemas de una máquina con varios productos, se tienen que tener en cuenta varios aspectos, como la cantidad de unidades, el orden y el momento en que deben producirse cada lote.

Para modelar el problema se tiene que suponer una única máquina en donde sólo puede producirse un lote a la vez, los tiempos y los costos de configuración dependen de la secuencia de producción y se permite escasez de inventario y retrasos.

CAPÍTULO 5.

LOT SIZING AND SCHEDULING. MULTINIVEL.

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos sistemas de producción de varios productos relacionados entre sí, ya que muchos de los artículos que estudiamos son componentes, subcomponentes o partes de otros. A este sistema se le conoce como MLLS (Multi-Level Lot Sizing).

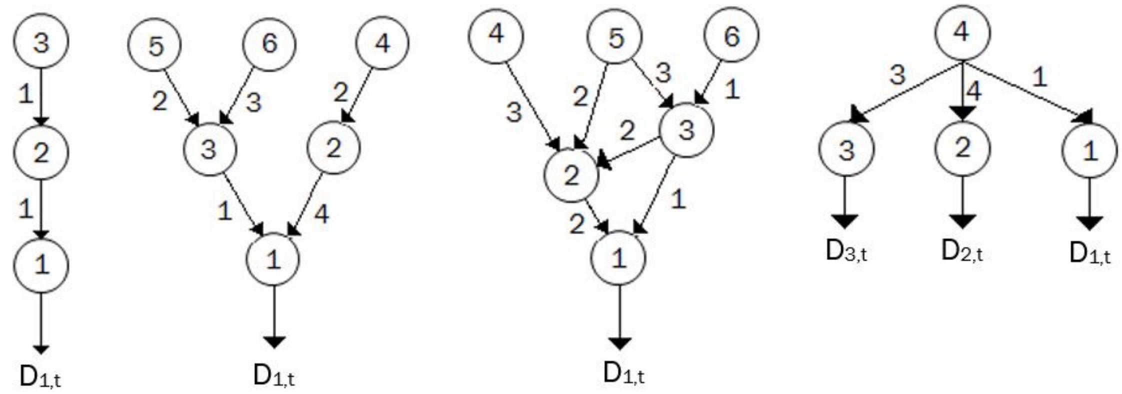
Estos modelos forman parte de los problemas de planeación de requerimientos de los materiales (MRP), con el fin de planificar los recursos para poder producir, teniendo en cuenta variables como el artículo, la cantidad y el momento adecuado.

Se trabaja con datos de inventario y con la estructura de los productos, tratando de determinar el tamaño óptimo de lote, de manera que minimice los costos de producción.

La estructura del producto se conoce como lista de materiales (BOM), y se puede representar como un grafo dirigido no cíclico, G = (V, A). Siendo los nodos V, la representación de los ítems y los arcos (i, j) є A, con $r^{ij} > 0$, en donde r^{ij} representan las unidades de i necesarias para la producción de j.

D(i) = {j : (i,j) є A} representa el conjunto de sucesores de i є V, Su(i) es el conjunto de todos los sucesores y Pr(i) de los predecesores.

Existen diferentes formas de representar el grafo: (Pochet – Wolsey)



La primera figura representa una producción en serie, la segunda es una estructura de montaje, la siguiente se le denomina estructura de producto general y la última es un grafo en forma de árbol.

Pochet - Wolsey da la siguiente definición:

> *Cuando los plazos de producción son iguales a cero, el stock escalonado del ítem i en el período t es el stock total del ítem i dentro del sistema en el momento t, ya sea manteniendo directamente como stock, o como el stock de los otros artículos que contienen una o más unidades del ítem i.*

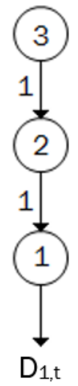
El predecesor del nodo i se representa con $R^{-1}(i)$, el sucesor con R(i) y $R'^{-1}(i)$ representa todos los predecesores del nodo i.

5.2 PRODUCCIÓN EN SERIE ML-S

En esta sección vamos a estudiar la producción en serie con p productos y el grafo G= (V, A) que representa la estructura, en donde:

V= {1, ..., p}

A= {(2,1), (3,2), ..., (p, p-1)}



Las características de los sucesores inmediatos, de las del conjunto de todos los sucesores y las de los predecesores son las siguientes:

D (i) = i-1 para i ≥ 2.

Su (i) = {1, ..., i-1} para i ≥ 2.

D (1) = S (1) = ϕ

Pr (i) = {i+1, ..., p} para i < p

Tomando r^{ij} = 1 en todos los arcos.

Vamos a desarrollar la formula básica, sin retrasos y con T períodos de tiempo:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} C_{i,t}X_{i,t} + \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=0}^{T} h_{i,t}I_{i,t} + \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} K_{i,t}Y_{i,t}$$

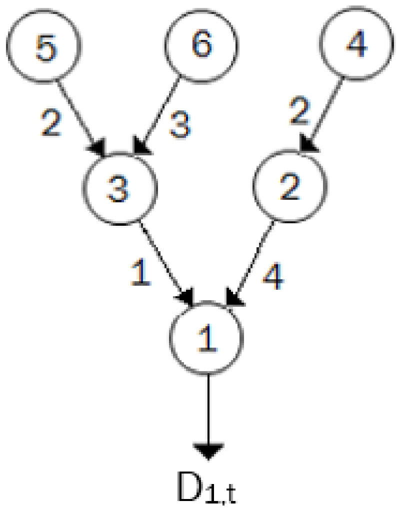
$$\begin{array}{lll} \text{s.a} & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = X_{i-1,t} & i=2, \ldots, p;\ t=1, \ldots, T \\ & X_{1,t} + I_{1,t-1} - I_{1,t} = D_{1,t} & t=1, \ldots, T \\ & X_{i,t} \leq U_{i,t}Y_{i,t} & i=1, \ldots, p;\ t=1, \ldots, T \\ & X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \in \{0,1\} & \end{array}$$

La primera restricción representa la conservación de flujo, siendo $X_{i-1,t}$ la demanda dependiente del ítem i en el período t.

El modelo ML-S/LS-C puede estudiarse como un problema de flujo de red, que se resuelven con algoritmos. En este trabajo no nos centramos en la resolución de problemas mediante algoritmos ya que estos ofrecen soluciones próximas a las óptimas, pero muy rara vez encuentra la mejor solución.

5.3 SISTEMAS DE MONTAJE

Vamos a estudiar los sistemas de montaje en donde |D(i)|=1 para todos los productos intermedios. Los arcos del grafo de la estructura de producción son (i, D(i)).



S(i) es el conjunto de elementos de la trayectoria de D(i) al producto final, por lo que en esta figura (Pochet – Wolsey), D (5) = 3, ya que el nodo 3 es sucesor directo del nodo 5 y S (5) = {1,3}, porque los productos 1 y 3 contienen el artículo 5.

La formulación de programación entera mixta de este modelo es la siguiente:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} C_{i,t}X_{i,t} + \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=0}^{T} h_{i,t}I_{i,t} + \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} K_{i,t}Y_{i,t}$$

s.a

$$X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = X_{D(i),t} \qquad i=2, \dots, p;\ t=1, \dots, T$$

$$X_{1,t} + I_{1,t-1} - I_{1,t} = D_{1,t} \qquad t=1, \dots, T$$

$$X_{i,t} \leq U_{i,t}Y_{i,t} \qquad i=1, \dots, p;\ t=1, \dots, T$$

$$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \in \{0,1\}$$

El modelo de la producción en serie y este modelo tienen una estructura muy parecida, únicamente se diferencian en la restricción $X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = X_{D(i),t}$, por lo que se suelen tratar de una manera similar.

Los modelos de sistema de montaje se pueden aplicar para problemas multiproducto, añadiendo los correspondientes índices.

5.4 SISTEMAS GENERALES

En los sistemas generales de producción no podemos fijar en todos los arcos $r^{ij} = 1$, por lo que tendremos que tenerlo en cuenta a la hora de modelar el problema.

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} C_{i,t}X_{i,t} + \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=0}^{T} h_{i,t}I_{i,t} + \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} K_{i,t}Y_{i,t}$$

s.a

$$X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = \sum_{j \in D(i)} r^{ij} X_{j,t} \qquad i=2, \dots, p;\ t=1, \dots, T$$

$$X_{1,t} + I_{1,t-1} - I_{1,t} = D_{1,t} \qquad t=1, \dots, T$$

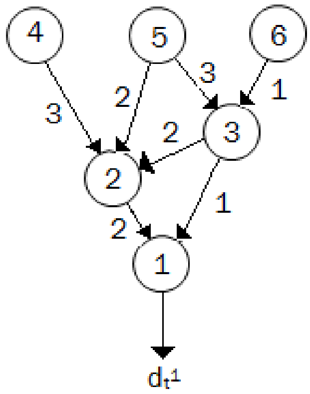
$$X_{i,t} \leq U_{i,t}Y_{i,t} \qquad i=1, \dots, p;\ t=1, \dots, T$$

$$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0$$

$$Y_{i,t} \in \{0,1\}$$

5.4.1 EJEMPLO

Elegimos la figura que representamos al inicio del capítulo para mostrar la estructura del producto general.



En donde:

R (1,1) = 1

R (2,1) = 2

R (3,2) = 2

R (3,1) = 5

R (4,1) = 6

R (5,1) = 19

R (6,1) = 5

Vamos a realizar las ecuaciones de flujo para el producto 5 y sus productos sucesores.

$$X_{5,t} + I_{5,t-1} - I_{5,t} = 3X_{3,t} + 2X_{2,t}$$

$$3X_{3,t} + 3I_{3,t-1} - 3I_{3,t} = 6X_{2,t} + 3X_{1,t}$$

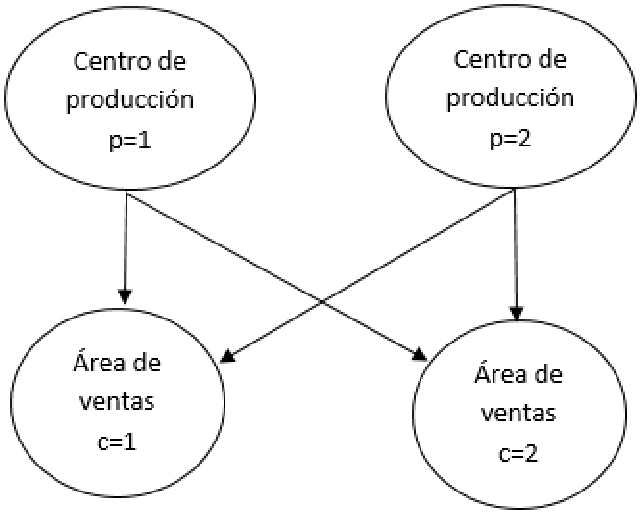
$$8X_{2,t} + 8I_{2,t-1} - 8I_{2,t} = 16X_{1,t}$$

$$19X_{1,t} + 19I_{1,t-1} - 19I_{1,t} = 19D_{1,t}$$

5.5 PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN

En esta sección vamos a estudiar modelos que nos permitan formular problemas de producción y de distribución, tanto de problemas de un único nivel como problemas multinivel.

Vamos a considerar dos nodos de origen para el suministro de un solo producto, representado en la siguiente figura de red de producción-ubicación (Pochet – Wolsey)



Las características de este modelo son:

- $D_{c,t}$: Demanda del destino c en el período t.
- $h_{p,t}$: Coste de almacenamiento en el centro p, durante el período t.
- $h_{c,t}$: Coste de almacenamiento en el área de ventas c, durante el período t.
- $C_{p,c,t}$: Coste de transportar una unidad desde el origen p hasta el destino c, en el período t.

Variables:

- $I_{p,t}$: Stock almacenado en p ϵ {1, 2} al finalizar el período t.
- $I_{c,t}$: Stock almacenado en c ϵ {1', 2} al finalizar el período t.
- $V_{p,c,t}$: Cantidad transportada desde el origen p hasta el destino c, en el período t.

A la hora de formular el problema, vamos a suponer que no existen transportes entre los diferentes centros de origen, ni entre los diferentes centros de destino y no hay retrasos.

El modelo es el siguiente:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{\boldsymbol{p,t}}\{h_{p,t}I_{p,t} + K_{p,t}Y_{p,t}\} + \sum_{\boldsymbol{c,t}} h_{c,t}I_{c,t} + \sum_{\boldsymbol{p,c,t}} C_{p,c,t}V_{p,c,t}$$

$$\text{s.a} \qquad X_{p,t} + I_{p,t-1} - I_{p,t} = \sum_c V_{p,c,t} \qquad \text{para todo p, t.}$$

$$X_{p,t} \leq U_p Y_{p,t} \qquad \text{para todo p, t.}$$

$$\sum_p V_{p,c,t} + I_{c,t-1} - I_{c,t} = D_{c,t} \qquad \text{para todo c, t.}$$

$$X_{p,t} \geq 0,\ I_{p,t} \geq 0,\ I_{c,t} \geq 0,\ V_{p,c,t} \geq 0$$

$$Y_{p,t} \in \{0,1\}$$

5.6 COMPARACIÓN DE ENFOQUES DE MODELADO PARA PROBLEMAS DE DIMENSIONAMIENTO Y TAMAÑO DE LOTE MULTINIVEL

En esta sección vamos a comparar diferentes enfoques que podemos dar a la hora de integrar en los sistemas con múltiples etapas el dimensionamiento y el cálculo del tamaño de lote.

Aunque todos los modelos describan el mismo problema de planificación, veremos diferencias significativas si damos distintos enfoques de modelado. Con los resultados obtenidos podremos seleccionar, dependiendo de las diferentes planificaciones, el enfoque adecuado.

Tenemos que tener en cuenta que estamos ante una planificación con múltiples niveles, es por eso por lo que tenemos que realizar la planificación en función de las necesidades de material, creando modelos que respeten las relaciones entre los productos (materias primas, artículos intermedios, productos finales…) y sus restricciones de capacidad.

Vamos a diferenciar diferentes clases de modelos para este tipo de problemas en función de su estructura de tiempo. Los modelos small-bucket (cubo pequeño), utilizan períodos de tiempo bastante cortos (micro-períodos) durante el cual se permite únicamente una operación de la configuración de la máquina, resolviendo de forma simultánea el problema de programación y el tamaño de lote. Por el contrario, los modelos big-bucket (cubo grande), se caracterizan por un horizonte de planificación con períodos de tiempo bastante largos (macro-períodos), en donde se pueden procesar varios lotes de producción en una sola máquina, pero cada producto sólo una vez.

5.6.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de los modelos que vamos a comparar es el mismo, minimizar la suma de los costes de la configuración y del almacenamiento de inventario.

Las características de todos los problemas que vamos a estudiar son las siguientes:

- Problemas con capacidad.
- Determinísticos.
- Demanda dinámica.
- Horizonte de planificación finito.
- Estructura general del producto.

Primero realizaremos el estudio del modelo small-bucket, analizando el problema de dimensionamiento de lotes de configuración continua (MLCSLP) y el problema de tamaño de lotes proporcional (MLPLSP), siempre en el caso de múltiples niveles.

En operaciones donde se necesitan grandes períodos de tiempo para la configuración de las máquinas no son adecuados estos tipos de modelos, ya que la característica principal de estos es la utilización de micro-períodos, por eso se ha creado un nuevo modelo que se basa en el modelo MLPLSP, en donde se permiten solapamientos de períodos, aumentando así la flexibilidad en la producción (MLPLSPSS),

Después, analizaremos el modelo big-bucket. El problema multinivel de dimensionamiento de lote con capacidad (MLCLSP), tiene la limitación de que no se permite mantener la configuración de una máquina de un período a otro, por lo que se necesita iniciar la configuración cada vez que empieza un período nuevo. El modelo MLCLSPL permite lotes enlazados entre diferentes períodos.

5.6.2 MODELO SMALL-BUCKET

Hasta ahora solo hemos estudiado modelos para un único nivel. En la realidad, nos solemos encontrar con situaciones que requieren planteamientos de problemas multinivel, y necesitamos procedimientos de solución que sean capaces de resolverlos.

Muchos autores han empleado una heurística mejorada para el problema de Wagner- Whitin de un solo nivel, extendida a problemas sin limitación de capacidad multinivel, describiendo enfoques más sofisticados.

Se puede considerar el tamaño de lote con capacidad y multinivel, añadiendo ciertas restricciones, como tener en cuenta únicamente la máquina de cuello de botella.

Vamos a estudiar el modelo MLPLSP en donde existen ciertas diferencias con los parámetros del PLSP de nivel único, y el modelo CSLP extendido a un modelo multinivel MLCSLP.

Variables de decisión:

- $X_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en el período t.
- $I_{i,t}$: Cantidad del producto i en el almacén al finalizar el período t.
- $Y_{i,t} \begin{cases} 1 \text{ si } X_{i,t} > 0 \\ 0 \text{ si } X_{i,t} \leq 0 \end{cases}$
- $W_{i,t}$: Nueva variable binaria

Parámetros:

- $a_{i,j}$: Factor con valor 0 si el artículo j no es el sucesor del artículo i. En caso de serlo, será la cantidad que se necesita del ítem i para producir j.
- $U_{m,t}$: Capacidad disponible de la máquina m en el período t.
- $D_{i.t}$: Demanda del producto i en el período t.
- h_i: Coste de almacenar el producto i en el período t.
- $I_{i,0}$: Nivel de inventario del producto i al inicio de la planificación.
- ζ_m: Conjunto de los elementos que comparten la misma máquina m.

$$\zeta_m = \{i \in \{1, \ldots, P\} \mid m_j = m\}.$$

- P: Número de ítems.
- M: Número de máquinas.
- M_i: Máquina en donde se produce en artículo i.
- b_i: Cantidad del recurso requerida para producir una unidad del ítem i.
- K_i: Coste de preparación del producto i.
- S_i: Conjunto de sucesores del producto i.

$$S = \{j \in \{1, \ldots, P\} \mid a_{i,j} > 0\}.$$

- T: Número de períodos.
- v_i: Tiempo de entrega del producto i.
- W_{i0}: Estado inicial de la configuración.
- $s_{m,i}$: Tiempo requerido para la configuración de la máquina m en donde se produce el ítem i.

El modelo MPLSP se formula de la siguiente manera:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}\{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a} & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} + \sum_{j \epsilon S_i} a_{i,j} X_{j,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& I_{i,t} \geq \sum_{j \epsilon S_i} \sum_{t+1}^{\min\{t+v_i,T\}} a_{i,j} X_{j,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& b_i X_{i,t} \leq U_{m,j,t} (W_{i,t-1} + W_{i,t}) & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& \sum_{i \epsilon \zeta_m} (b_i X_{i,t} + s_{m,i} Y_{i,t}) \leq U_{m,t} & m=1,\dots,M;\ t=1,\dots,T \\
& \sum_{i \epsilon \zeta_m} W_{i,t} \leq 1 & m=1,\dots,M;\ t=1,\dots,T \\
& Y_{i,t} \geq W_{i,t} - W_{i,t-1} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \geq 0 & \\
& W_{i,t} \epsilon \{0,1\} &
\end{array}
$$

Las modificaciones respecto el modelo PLSP son las siguientes:

La primera restricción nos indica que al finalizar un período t, mantenemos el inventario que estaba al finalizar el periodo t-1, añadiendo lo que se ha producido y restando la demanda en dicho período t.

La siguiente restricción garantiza los plazos de entrega de la demanda.

La formulación matemática del modelo MLCSLP es:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}\{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a} & X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} + \sum_{j \epsilon S_i} a_{i,j} X_{j,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& I_{i,t} \geq \sum_{j \epsilon S_i} \sum_{t+1}^{\min\{t+v_i,T\}} a_{i,j} X_{j,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& b_i X_{i,t} + s_{m,i} Y_{i,t} \leq U_{m,j,t} W_{i,t} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& \sum_{i \epsilon \zeta_m} W_{i,t} \leq 1 & m=1,\dots,M;\ t=1,\dots,T \\
& Y_{i,t} \geq W_{i,t} - W_{i,t-1} & i=1,\dots,P;\ t=1,\dots,T \\
& X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ Y_{i,t} \geq 0 & \\
& W_{i,t} \epsilon \{0,1\} &
\end{array}
$$

Como ya dijimos la función objetivo minimiza el coste de la instalación y el de mantenimientos.

Las ecuaciones de balance indican la obligación del cumplimiento de la demanda en cada período sin posibilidad de retrasos.

La segunda restricción indica los plazos de entrega entre los predecesores y los sucesores. La tercera es la restricción de capacidad, la siguiente impone la condición de una única configuración y la última restricción refleja la decisión de configuración.

Como podemos apreciar los dos modelos son casi idénticos diferenciándose en dos restricciones, las terceras restricciones de ambos modelos son diferentes y MLPSLP tiene a mayores ésta: $\sum_{i\epsilon\zeta_m}(b_i X_{i,t} + s_{m,i} Y_{i,t}) \leq U_{m,t}$.

5.6.3 MODELO BIG-BUCKET

Vamos a modelar el problema CLSP para varios niveles, MLCLSP:

$$\textbf{Minimizar } \sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}\{K_i(W_{i,t} - Y_{i,t}) + h_i I_{i,t}\}$$

s.a

$X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{i,t} + \sum_{j\epsilon S_i} a_{i,j} X_{j,t+1}$	i=1,...,P; t=2,...,T-1
$X_{i,T} + I_{i,T-1} - I_{i,T} = D_{i,T}$	i=1,...,P
$\hat{y}_i - \sum_{j\epsilon S_i} a_{i,j} X_{j,1} - I_{i,0} = 0$	i=1, ...,P
$X_{i,1} + I_{i,0} - I_{i,1} = D_{i,1} + \sum_{j\epsilon S_i} a_{i,j} X_{j,2}$	i=1, ...,P
$\sum_{i\epsilon\zeta_m}(b_i X_{i,t} + s_{m,i}(W_{i,t} - Y_{i,t})) \leq U_{m,t}$	m=1, ...,M; t=1,...,T
$X_{i,t} \leq MW_{i,t}$	i=1,...,P; t=1,...,T
$\sum_{i\epsilon\zeta_m} Y_{i,t} \leq 1$	m=1, ...,M; t=1,...,T
$Y_{i,t} \leq W_{i,t-1}$	i=1,...,P; t=1,...,T
$Y_{i,t} \leq W_{i,t}$	i=1,...,P; t=1,...,T
$Y_{i,t} - Y_{i,t-1} \leq 1 + v_{m,t}$	m=1, ...,M; i=1,...,P
$(W_{i,t} - Y_{i,t}) + v_{m,t} \leq 1$	i=1,...,P
$Y_{i,1} = 0$	m=1, ...,M; i=1,...,P
$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0,\ I_{i,0} \geq 0,\ v_{m,t} \geq 0$	
$W_{i,t}\ \epsilon\ \{0,1\},\ Y_{i,t}\ \epsilon\ \{0,1\}$	

Se ha utilizado la misma notación que para los modelos anteriores, añadiendo $\hat{y}_i$ para indicar el nivel de inventario inicial y $v_{m,t}$ como una variable auxiliar.

Las 4 primeras restricciones son las ecuaciones de inventario, que mantienen la coordinación entre los diferentes niveles de fabricación. La siguiente restricción indica el límite de capacidad.

En este modelo, el valor $Y_{i,t}$ vuelve a estar comprendido entre 0 y 1, indicando si existe o no configuración en el período t para la producción de i.

La quinta restricción refleja que un producto sólo puede producirse si la máquina se encuentra configurada y las siguientes tres restricciones muestran que la máquina puede funcionar si se ha configurado en el mismo período o como máximo en el anterior.

Por último, las dos restricciones finales muestran la continuidad de la configuración de la que hablamos.

5.7 MRP. OPTIMIZACIÓN MULTINIVEL

En el siguiente capítulo veremos técnicas de dimensionamiento de lote para el sistema MRP de forma aislada en cada nivel, pero la decisión del tamaño de lote tomadas para un nivel puede afectar en la demanda de niveles inferiores, por lo que la obtención de una solución óptima en un nivel no significa la solución óptima para todo el conjunto.

La búsqueda de lotes óptimos en todos los niveles resulta una tarea difícil. La formulación matemática del problema es un programa entero y no línea, esto es debido a los costos de configuración, resultando demasiado grandes para su resolución.

Antes de desarrollar el modelo matemático, vamos a recordar la definición de sistema multinivel, visto al comienzo de este capítulo. Entendemos como sistema multinivel un conjunto de actividades o etapas conectadas entre ellas. Podemos encontrarnos con el más sencillo, el sistema en serie, o el más habitual como es el sistema de montaje, en donde existe un único sucesor y varios predecesores.

En la práctica, no estudiamos árboles de fabricación, ya que existen ítems comunes que forman parte de más un de componente, por lo que nos encontramos con estructuras con varios sucesores y predecesores.

Vamos a formular el modelo de programación entera:

Minimizar $\sum_{i=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}\{K_i Y_{i,t} + h_i I_{i,t}\}$

s.a

$X_{1,t} + I_{1,t-1} - I_{1,t} = D_t \qquad t=1,\dots,T$

$X_{1,t} + I_{1,t-1} - I_{1t} = m_{i,s(i)}X_{s(i),t.} \qquad t=1,\dots,T,\ 2\leq i \leq P$

$X_{i,t} \leq MY_{i,t} \qquad t=1,\dots,T,\ 2\leq i \leq P$

$X_{i,t} \geq 0,\ I_{i,t} \geq 0$

$Y_{i,t} = 0 \text{ ó } 1$

La función objetivo de este modelo matemático representa el costo total de la instalación y del almacenamiento de todos los productos durante todo el horizonte temporal de planificación.

La primera restricción es la del balance de inventario para el artículo 1, siendo este el producto final.

La segunda restricción es la misma que la primera, una restricción de balance de inventario, pero para los subconjuntos debajo del nivel de elemento 1. La única diferencia es que se ha sustituido la demanda D_t por el producto $m_{i,s(i)}X_{s(i),t}$. Siendo m el número de unidades del componente i, necesarios para producir una unidad del subconjunto s en el siguiente nivel superior. Y entendiendo el conjunto $m_{i,s(i)}X_{s(i),t}$ como la demanda del producto i en el período t.

Se supone un producto en donde su estructura es única.

La tercera restricción asegura que el coste de configuración k_i sea positivo siempre que $X_{i,t} > 0$. La constante M equivale a un valor muy grande. Si $X_{i,t} > 0$, entonces $Y_{i,t}$ tiene que ser igual a 1, ya que $Y_{i,t}$ solo puede tomar los valores 0 ó 1. Si $X_{i,t} = 0$ la restricción no estará activa y la minimización de la función objetivo buscará automáticamente el valor de $Y_{i,t} = 0$.

Existen diferentes formulaciones matemáticas para la resolución del problema de dimensionamiento de lotes multinivel, por ejemplo, se puede plantear la formulación involucrando el uso de stock de escalones, pero la planteada en este capítulo es más sencilla y resulta eficiente para estos problemas.

Esta formulación corresponde a un problema de programación lineal mixta. Si nos enfrentamos a un problema real, con miles de componentes y periodos, nos encontramos con un problema NP-hard, haciendo impensable su resolución. Es por ello por lo que se usan métodos aproximados de resolución, poniendo limitaciones en las capacidades y recursos.

CAPÍTULO 6.
MRP. PLANIFICACIÓN DE NECESIDADES DE MATERIALES

6.1 INTRODUCCIÓN

Los modelos de MRP se utilizan para el cálculo del tamaño de lote y los tiempos de emisión y de recepción de estos, tanto para su producción como para la compra a proveedores externos.

Consideramos la demanda como una variable constante y exógena, es decir, es independiente de cualquier parte del sistema bajo control de la empresa, pero en muchos entornos industriales la demanda no es así, por lo que no siempre es apropiado este método de cálculo de lote.

Nahmias muestra un problema de planificación de producción simple para entender mejor esta situación.

Una planta fabrica palas que constan de dos piezas, una de metal para la excavación y otra es la manija de madera, conectadas ambas partes por dos tornillos. El objetivo de la planta es producir 100 palas por semana, produciéndose las piezas de metal en lotes de 400 los dos primeros días de cada mes y pidiendo a un proveedor externo las manijas.

Son necesarios 800 tornillos durante la primera semana de cada mes. Suponiendo 4 semanas por mes la demanda semanal de tornillos será:

800, 0, 0, 0, 800, 0, 0, 0, 800, 0, 0… así sucesivamente. Calculando el lote óptimo con el modelo EOQ resulta ser 1400 tornillos. Almacenar 600 tornillos desde la primera semana para el resto del mes supondrá un coste significativo de almacenamiento, por lo que el resultado no tiene sentido. Además, sería necesario un nuevo pedido al mes siguiente ya que no serían suficientes tornillos para satisfacer la demanda de 800.

Por lo que el resultado no es apropiado para este problema, esto es debido a que la demanda no es uniforme. Habría que suponer una demanda variable pero no aleatoria, ya que depende de la producción de las palas, resultando ser una demanda predecible.

Este tipo de problemas es típico de muchos problemas de fabricación, en donde los modelos clásicos de inventario no resultan apropiados. Por ello, necesitamos modelos que especifiquen las relaciones de los diferentes niveles de producción.

En este capítulo vamos a estudiar la planificación de los requisitos de los materiales como un medio para la programación de la demanda del producto final teniendo en cuenta los diferentes artículos que lo componen, determinando un plan de producción completo para un cierto horizonte temporal.

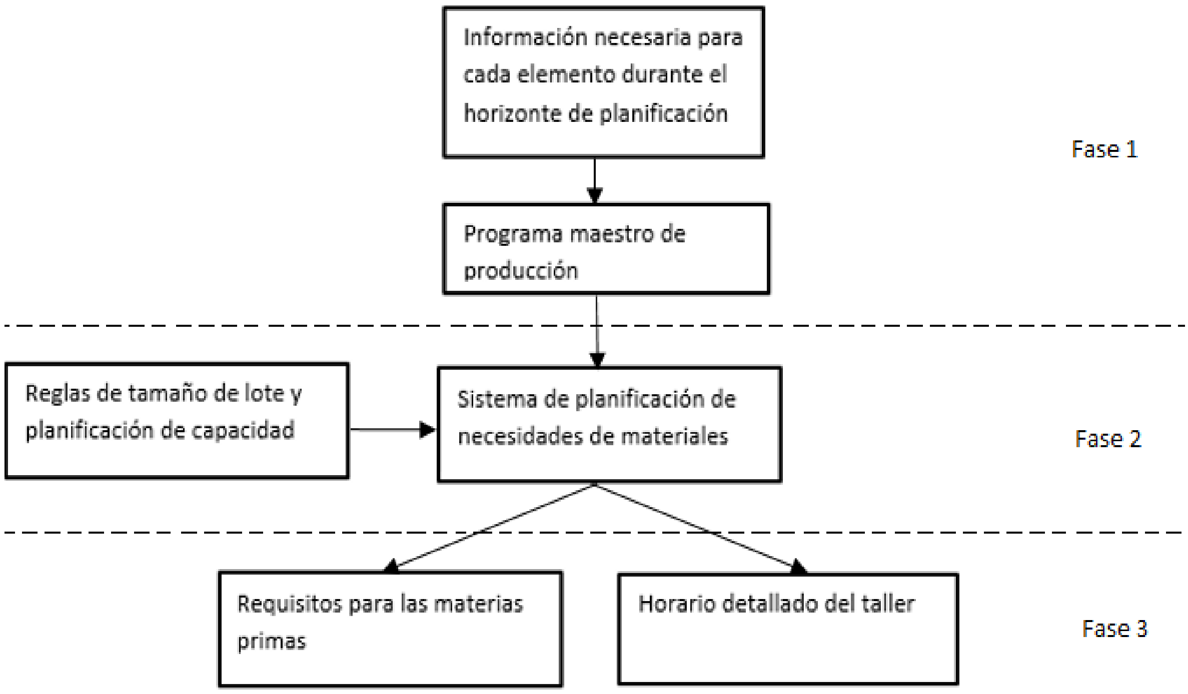
Dicho plan de producción se descompone en varias partes, la primera consiste en el programa maestro de producción, MPS, la segunda etapa es el sistema MRP de planificación de necesidades de materiales y el último, consiste en un plan detallado de la producción.

La programación de la producción se puede entender como un sistema en donde las entradas son las materias primas y los recursos necesarios para el proceso y las salidas los productos finales, pudiendo considerar, en algunas ocasiones, las materias primas como salidas.

La planificación de la producción trabaja con datos no solo de producción, sino del mercado y de finanzas, y es por ello por lo que resulta un buen sistema de control.

Podemos diferenciar 3 etapas en el control de sistema de producción. La primera fase consiste en la reunión y coordinación de la información necesaria para poder llevar a cabo el MRP, la segunda es la determinación de los lanzamientos de ordenes de planificación y la última se encarga del desarrollo de planificación detallada de los talleres y los recursos necesarios.

Estas fases pueden mostrarse de manera esquemática (Nahmias 1993):

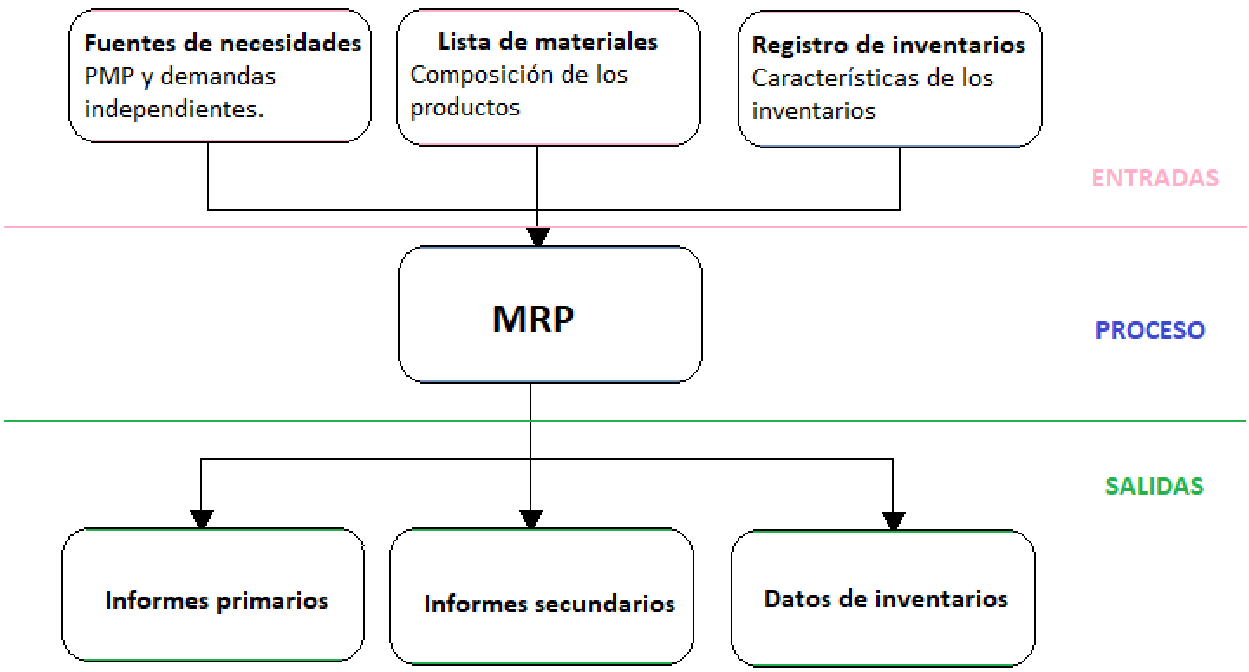


Existen métodos de programación de la producción diferentes al MRP, como el Just in time (JIT), que es un método japonés muy utilizado en la actualidad. Estos métodos no son contradictorios, es decir, pueden ser utilizados ambos al mismo tiempo.

A diferencia de los métodos japoneses más recientes, el MRP destaca por utilizar las previsiones de la demanda futura en el horizonte de planificación, además de tener en cuenta la relación entre los diferentes componentes y elementos finales.

6.2 ESQUEMA ENTRADAS-SALIDAS

Acabamos de estudiar el esquema de las diferentes fases del control de sistema de producción, pero ahora vamos a analizar un esquema de las entradas, el proceso y las salidas del MRP, donde analizaremos de forma detallada cada sección.



- ENTRADAS:

Fuentes de necesidades:

Este apartado consta de dos partes, la primera consiste en el Plan Maestro de Producción (PMP), que se trata de un sistema dinámico que depende de la programación de los componentes, de la del personal, los equipos, la compra de los materiales... Y la segunda parte estudia la demanda independiente de los componentes ya que el PMP no lo tiene en cuenta, analizando los productos en donde la demanda es directa, como sucede con los artículos de repuesto.

Lista de Materiales (Bill Of Materials, BOM):

Descripción de los componentes, de las cantidades necesarias de cada uno de ellos y la secuencia para la obtención del producto final.

Los componentes se organizan en diferentes niveles y no puede aparecer un mismo componente en niveles distintos.

Ejemplo gráfico:

http://www.webandmacros.com/MRPconceptos.htm

Registro de inventario:

Se divide en dos partes, en el segmento maestro de datos, que posee información del stock de seguridad, el cálculo del tamaño de lote… y el segmento del estado del inventario, en donde se informa de las existencias, tanto de material en curso como el producto final.

- PROCESO:

Tiempo de suministro (TS):

Es el tiempo que pasa desde que se emite la orden del pedido hasta que finalmente se recibe el producto.

Stock de seguridad:

El Stock de seguridad indica el nivel de inventario mínimo que debemos tener, para poder asegurar la continuidad del proceso de producción y anteponernos a situaciones de demanda inestable, para así, salvaguardar la imagen de la empresa.

- SALIDAS:

Informes primarios:

Son los informes básicos de los pedidos a realizar. Se conoce con el nombre de Informe de Pedidos Planificados a la planificación de las compras y la producción, en donde se estudia las necesidades, las emisiones y recepciones de los pedidos.

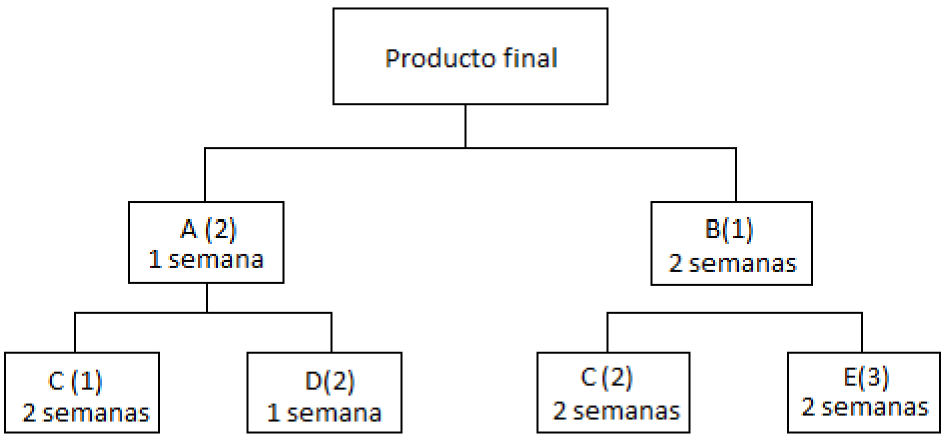
Informes secundarios:

Los más empleados son los informes de las fuentes de necesidades, el análisis ABC, informe de material en exceso…

6.3 EXPLOSIÓN DE NECESIDADES

Nos referimos al cálculo de explosión como al conjunto de reglas necesarias para establecer la producción de un nivel y los requisitos de niveles inferiores.

Se emplea el diagrama de la estructura del producto para detallar la relación entre los diferentes componentes y los elementos finales de cada nivel, también se especifica el número de componentes necesarios para producir una unidad y el número de períodos empleados para su producción.



(Nahmias 1993)

La figura mostrada refleja la estructura típica para producir una unidad del producto final, que requiere dos unidades de A, que necesita una semana para su montaje y una de B que tarda dos semanas.

Se les denomina a A y B como los “hijos” del producto final. Para la producción de A se requiere una unidad de C y dos de D, y para B se necesitan dos unidades de C y tres de E.

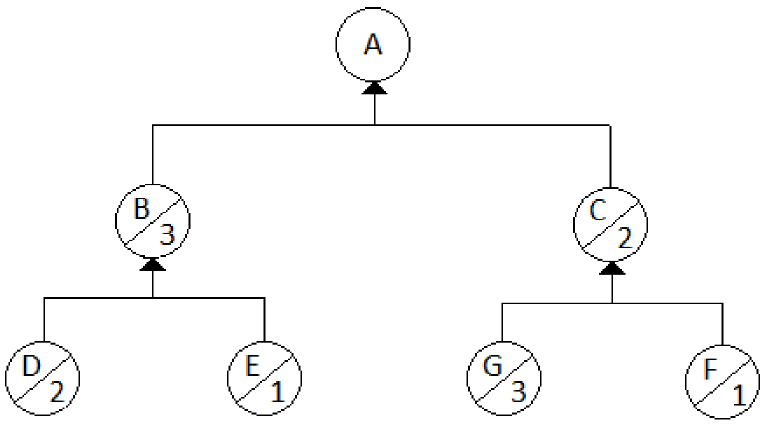
Este ejemplo de estructura es bastante simple, pero en la realidad podemos encontrarnos con diagramas bastantes complejos, con hasta 15 o más niveles.

El cálculo de explosión sigue unas reglas para las ordenes de los lanzamientos de pedido de los productos finales y la planificación de los componentes de los niveles inferiores. Se trata de emplear los tiempos adecuados y los números de componentes necesarios en los niveles secundarios para la producción total.

6.3.1 EJEMPLO (Machuca 1995)

Vamos a mostrar un ejemplo sencillo del MRP para tener una idea básica antes de desarrollarlo con más profundidad.

Con la siguiente estructura de fabricación y montaje de un producto A, mostramos las cantidades necesarias de los componentes de este (B y C) y de las materias primas necesarias para la producción de estos subconjuntos (D, E, F y G).



Se necesitan 100 unidades de A, por lo que necesitaremos:

- 3 x 100 unidades de A; B = 300 unidades.
- 2 x 100 unidades de A; C = 200 unidades.
- 2 x 300 unidades de B; D = 600 unidades.
- 1 x 300 unidades de B; E = 300 unidades.
- 1 x 200 unidades de C; F = 200 unidades.

- 3 x 200 unidades de C; G = 600 unidades.

Al proceso del cálculo de los componentes a partir del plan de fabricación es lo que se conoce como explosión de las necesidades.

Se necesita tener en cuenta el tiempo requerido para la obtención de cada uno de los elementos, ya sea para su producción o para su compra si se trata de un producto externo. Vamos a suponer para todos los elementos un tiempo de una semana, menos para el producto G que necesitará dos semanas.

Conocido el momento en el que se necesitan las 100 unidades de A (período 6), podemos obtener la programación de los pedidos de cada uno de los componentes.

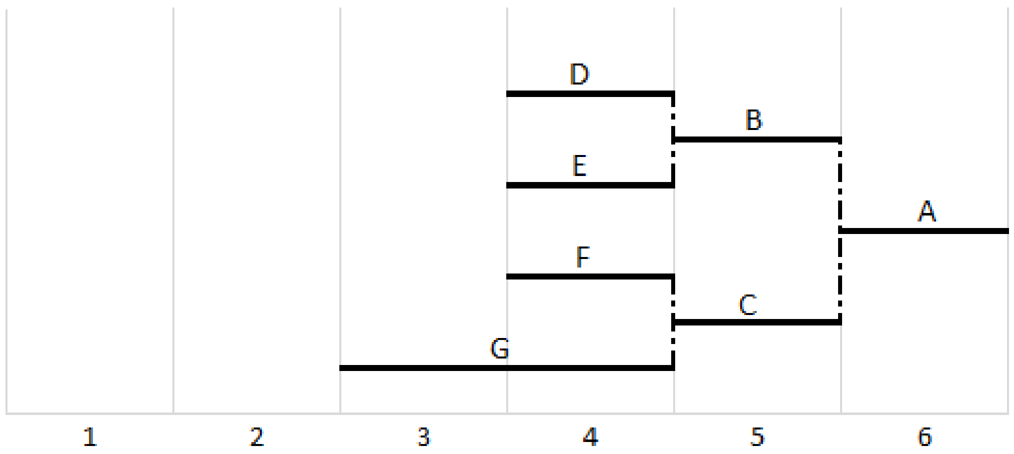
		1	2	3	4	5	6
A	Cantidad requerida						100
	Emisión del pedido					100	
B	Cantidad requerida					300	
	Emisión del pedido				300		
C	Cantidad requerida					200	
	Emisión del pedido				200		
D	Cantidad requerida				600		
	Emisión del pedido			600			
E	Cantidad requerida				300		
	Emisión del pedido			300			
F	Cantidad requerida				200		
	Emisión del pedido			200			
G	Cantidad requerida				600		
	Emisión del pedido		600				

En este problema hemos supuesto que el aprovechamiento de las operaciones es del 100%, en el caso de que este fuera menor, debemos tenerlo en cuenta y aumentar la cantidad en la emisión del pedido para poder recibir la cantidad deseada.

También, debemos que tener en cuenta el tiempo disponible entre el momento actual y el tiempo en el que necesitamos que el producto A esté finalizado.

A partir de la tabla creada, podremos obtener el gráfico de tiempos de fabricación, en donde cada línea horizontal representa un producto en concreto y su longitud el tiempo correspondiente.

El inicio de las líneas representa el momento en el que se debe emitir el pedido, tanto de su producción como el de su compra, y el final muestra el momento de entrega de los mismos.



6.4 PROBLEMA

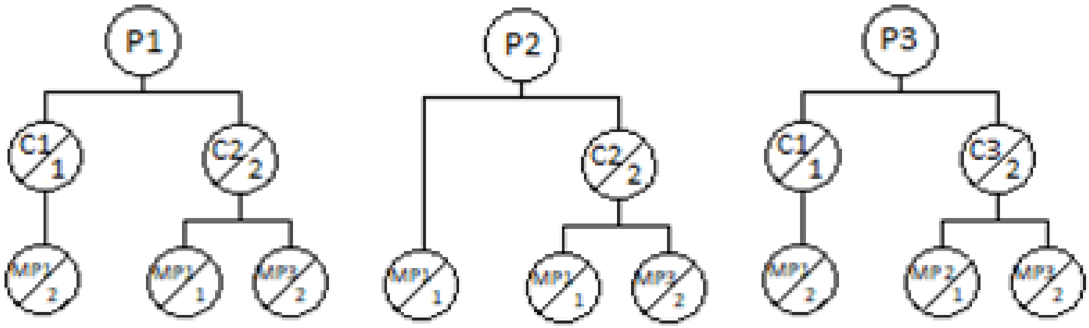
Vamos a plantear un problema un poco más complejo que el ejemplo anterior en el que, partiendo de un PMP Propuesto y con la siguiente información adicional, elaboramos el Plan de Materiales para las 8 primeras semanas:

Semanas	1	2	3	4	5	6	7	8
PMPP (P1)		1600	1600		100		1600	1600
PMPP (P2)				1200			1200	
PMPP (P3)		1100						1100

Demanda independiente de componentes

Semanas	1	2	3	4	5	6	7	8
C1			100	150		150		

Lista de materiales



ítem	Nivel	SS	Lote	TS	Aprov
P1	0	250	1600	1	0,95
P2	0	150	1200	2	0,93
P3	0	100	1100	1	0,92
C1	1	200	LaL	2	0,93
C2	1	100	Mul 100	2	0,96
C3	1	0	LaL	2	0,97
MP1	2	0	Min 4000	1	1
MP2	2	0	Mul 3000	1	1
MP3	2	0	Min 5000	1	1

Existencias	Recepciones prog.		
	Sem 1	Sem 2	Sem 3
0	1600		
0	1200	1200	
0	1100		
3100		1766	
210	3300	6000	500
100	2300		
1000	4000		
500			
1450	5000		

Sabiendo que los lanzamientos de pedidos (LPPL) de los productos P1, P2 y P3 son los siguientes, podemos calcular las necesidades brutas de C1:

LPPL P1	1685	1685		1685		1685	1685		x1
LPPL P2		1291			1291				x0
LPPL P3	1196			1196			1196		x1
Dem indep C1			100	150		150			
Neces. Brut. C1	2881	1685	100	3031	0	1835	2881	0	

Vamos a realizar una tabla para la programación, en donde calcularemos:

Necesidades Brutas (NB):

Cantidades necesarias del ítem en cada período de tiempo. Estas necesidades dependen de las cantidades pedidas por el plan maestro y de otras fuentes, tanto de dependa dependiente como independiente.

Disponibilidades:

Suma de las cantidades disponibles en el periodo anterior, las recepciones programadas en dicho periodo y las recepciones planificadas, menos las necesidades brutas consumidas en el periodo anterior.

Recepciones programadas (RP):

Cantidades esperadas en cada período dependiendo del tiempo de suministro.

Necesidades netas (NN):

Necesidades de componentes en cada período.

Recepción de pedidos planificados (RPPL):

Siempre que se tengan necesidades netas se planificará la recepción de pedidos, y la cantidad dependerá del método del cálculo de lote.

Lanzamiento de pedidos planificados (LPPL):

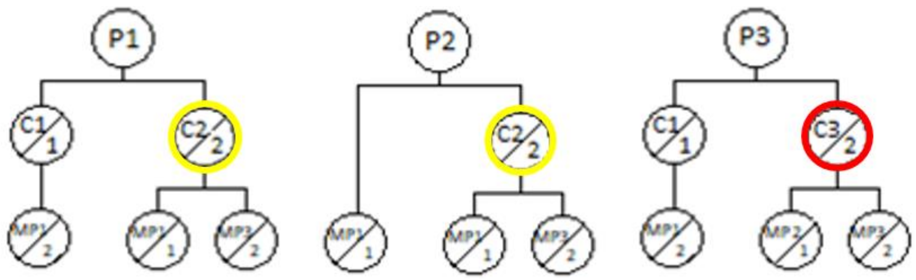
Se adelanta el momento de la recepción y se aumentará dicho pedido en función del aprovechamiento.

Programación C1 (aprovechamiento 0.93):

		1	2	3	4	5	6	7	8
NB		2881	1685	100	3031		1835	2881	
Disp. (SS=200)	3100	3100	219	300	200	200	200	200	200
RP			1766						
NN					3031		1835	2881	
RPPL					3031		1835	2881	
LPPL			3260		1974	3098			

Para poder realizar la programación de C2 y C3 necesitamos calcular primero las necesidades brutas.

De C2 se necesita 2 x P1 más 2 x P2 y de C3 se necesita 2 x P3.



Necesidades brutas de C2	3370	5952		3370	2582	3370	3370	
Necesidades brutas de C3	2392			2392			2392	

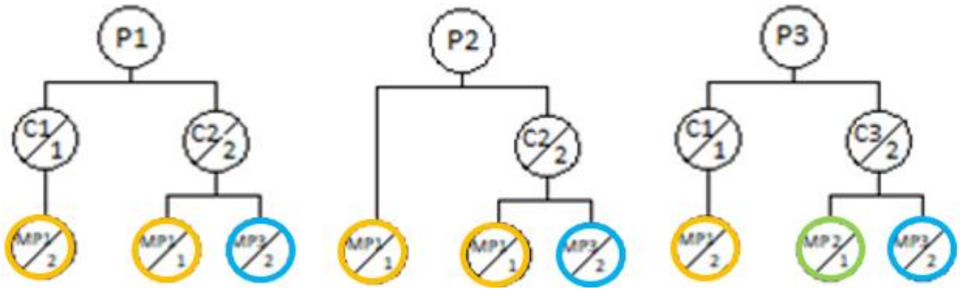
Programación de C2 (aprovechamiento 0.96):

		1	2	3	4	5	6	7	8
NB		3370	5952	0	3370	2582	3370	3370	
Disp. (SS=100)	210	210	140	188	688	188	136	166	196
RP		3300	6000	500					
NN					2782	2564	3334	3304	
RPPL					2800	2600	3400	3400	
LPPL		2917	2709	3542	3542				

Programación de C3 (aprovechamiento 0.97):

		1	2	3	4	5	6	7	8
NB		2392			2392			2392	
Disp. (SS=0)	100	100	8	8	8	0	0	0	0
RP		2300							
NN					2384			2392	
RPPL					2384			2392	
LPPL			2458			2466			

De la misma manera calculamos las materias primas MP1, MP2, MP3:



Necesidades brutas de MP1	2917	10520	3542	7490	7487			
Necesidades brutas de MP2		2458			2466			
Necesidades brutas de MP3	5834	10334	7084	7084	4932			

Programación de MP1:

		1	2	3	4	5	6	7	8
NB		2917	10520	3542	7490	7487			
Disp. (SS=0)	1000	1000	2083	0	458	0	0	0	0
RP		4000							
NN			8437	3542	7032	7487			
RPPL			8437	4000	7032	7487			
LPPL		8437	4000	7032	7487				

Programación de MP2:

		1	2	3	4	5	6	7	8
NB			2458			2466			
Disp. (SS=0)	500	500	500	1042	1042	1042	1576	1576	1576
RP									
NN			1958			1424			
RPPL			3000			3000			
LPPL		3000			3000				

Programación de MP3:

		1	2	3	4	5	6	7	8
NB		5834	10334	7084	7084	4932			
Disp. (SS=0)	1450	1450	616	0	0	0	68	68	68
RP		5000							
NN			9718	7084	7084	4932			
RPPL			9718	7084	7084	5000			
LPPL		9718	7084	7084	5000				

6.5 JIT y MRP

El sistema justo a tiempo (JIT) fue impulsado por el sistema Kanban de Toyota, y en los últimos años ha cobrado mucha importancia.

JIT es más que un método de planificación de la producción, tiene una forma diferente de pensar a la del MRP. No solo se centra en la función de la fabricación, sino que también se ven afectadas otras partes como es el diseño del producto, de la planta, la estructura organizativa, la gestión de calidad y las relaciones con los proveedores.

Podríamos hablar del sistema MRP como un sistema de empuje y JIT un sistema de tracción. Los sistemas MRP están diseñados para obtener de forma simultánea la producción en cada nivel del sistema productivo, avanzando a otro nivel cuando el anterior esté completo. Para el sistema JIT únicamente se solicita lo necesario para la producción en ese momento, por lo que los tamaños de lote son más pequeños.

De esta forma, a diferencia del MRP, el sistema JIT no tiene en cuenta los costos de mantenimiento ni de almacenaje, centrándose en las ventajas que ofrecen los tamaños de lote pequeños, como la reducción de despilfarros y desperdicios de los productos, reducción de los inventarios WIP (Work In Process) … teniendo la ventaja de poder tener un mayor control de la calidad.

La reducción de los costos del almacenaje de inventario y la producción de alta calidad con altas tasas de rendimiento de producción, ha supuesto para Toyota un enorme éxito, y esto en gran parte, es debido a JIT, aunque no todo el mérito es de dicho sistema, ya que el principal beneficio en la producción se obtiene de una evolución cuidadosa de la fabricación y de la rectificación de los problemas clave que afectan a la producción.

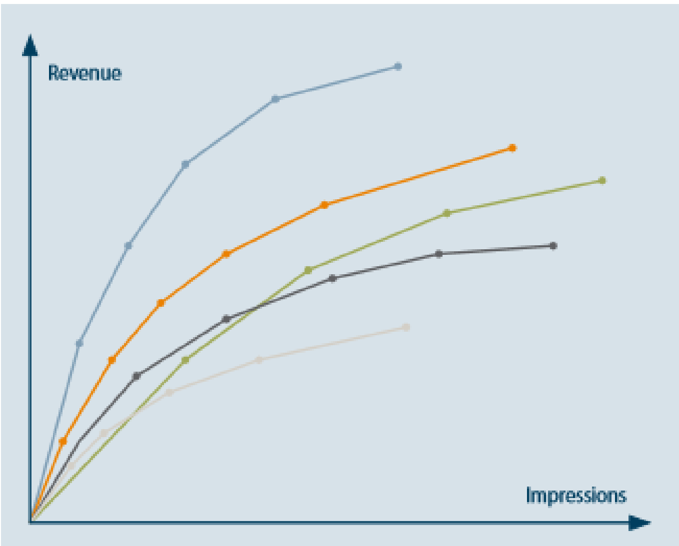
CONCLUSIONES

Como se dijo al comenzar este proyecto la planificación de la producción y de los inventarios es de gran importancia en la actualidad ya que supone un ahorro económico a las empresas que se encargan de dicha gestión, ofreciendo una mayor competitividad con el resto. Es por ello por lo que el estudio de la producción, el MRP, lot sizing… se ha convertido en el problema central de las empresas manufactureras.

Según se va incrementando la complejidad de los problemas de optimización se necesitan métodos avanzados que los resuelvan. Existen diversos métodos como son los sistemas comerciales que emplean reglas heurísticas que simplifican la complejidad de los modelos gracias a las reglas empíricas utilizadas, o como los modelos de Programación Entera Mixta vistos en este trabajo, dando como resultado soluciones óptimas.

Debido al rápido crecimiento de la complejidad y del tamaño de los problemas los métodos de solver tradiciones se quedan escasos y han dejado de ser válidos. Una de las herramientas más empleadas para la resolución de los problemas complejos de optimización es el programa Xpress Mosel, ya que obtiene resultados óptimos y de forma rápida. Empresas líderes de software como es FICO, considera dicha herramienta como uno de sus productos principales

Uno de los ejemplos que FICO nos ofrece para demostrar la importancia del uso de Xpress es el estudio de los grandes volúmenes de publicidad online y la necesidad de procesarlos en períodos de tiempo muy cortos.



La gráfica muestra el gran impacto de la publicidad online.

Se necesita modelar el problema como uno de Programacion Entera Mixta ya que contiene funciones no lineales de coste y de inventario con varias restricciones, resultando un modelo bastante grande.

Gracias a la función avanzada de la biblioteca Xpress Mosel, es capaz de aproximar las funciones no lineales y resolver el modelo dentro del horizonte temporal planificado.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Edward A. Silver, David F. Pyke, Rein Peterson. Inventory management and Production Planning and Scheduling. 1998.

[2] Arnoldo C. Hax Dan Candea. Production And Inventory Management. 1984.

[3] Juan C. LArrañeta, Luis Onieva. Métodos modernos de gestión de la producción. 1988.

[4] José Antonio Domínguez Machuca, M.ª José Álvarez Gil, M. Ángel Domínguez Machuca, Santiago García González, Antonio Ruíz Jiménez. Dirección de operaciones. Aspectos estratégicos en la producción y los servicios. 1995.

[5] José Antonio Domínguez Machuca, M.ª José Álvarez Gil, M. Ángel Domínguez Machuca, Santiago García González, Antonio Ruíz Jiménez. Dirección de operaciones. Aspectos tácticos y operativos en la producción y los servicios. 1995.

[6] Lynwood A. Johnson Douglas C. Mongomery. Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control. 1974.

[7] Yves Pochet Laurence A. Wolsey. Production Planning by Mixed Integrer Programming. 2006.

[8] Knut Haase. Lotsizing and Scheduling for Production Planning,1994.

[9] Alf Kimms. Multi-Level Lot Sizing and Scheduling. 1997.

[10] Steven Nahmias. Production and operations analysis. 1993.

[11] A survey of lot-sizing and scheduling models. https://pdfs.semanticscholar.org/6964/6612a78f842b2b4043e24d4df032949a70ce.pdf

[12] Capacitated Lot Sizing models: a literature review. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00255830/document

[13] Ayse Akbalik · Bernard Penz · Christophe Rapine. Capacitated lot sizing problems with inventory bounds. https://www.researchgate.net/profile/Christophe_Rapine/publication/273529131_Capacitated_lot_sizing_problems_with_inventory_bounds/links/55116a410cf21209d52889a6/Capacitated-lot-sizing-problems-with-inventory-bounds.pdf

[14] Herbert Dawid, Karl F. Doerner, Gustav Feichtinger, Peter M. Kort, Andrea Seidl. Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making. Comparing Modeling Approaches for the Multi-Level Capacitated Lot-Sizing and Scheduling Problem.

[15] Diego Jacinto Fiorotto, Silvio Alexandre de Araujo. Reformulation and a Lagrangian heuristic for lot sizing problem on parallel machines. 2014.

[16] Lot sizing and scheduling - Survey and extensions. http://prolog.univie.ac.at/teaching/LVAs/Production_Analysis/SS_09/DK97.pdf

[17] Meta-heuristics for dynamic lot sizing A review and comparison of solution approaches 2007.

[18] Kadir Ertogral. Multi-item single source ordering problem with transportation cost, A Lagrangian decomposition approach 2008.

[19] On the Polyhedral Structure of a Multi–Item Production Planning Model with Setup Times 1. http://www2.isye.gatech.edu/~ms79/publications/tli-00-07.pdf.

[20] Nadjib Brahimi, StéphaneDauzere-Peres, Najib M.Najid, AtleNordli. Single item lot sizing problems 2006.

[21] B.Karimi, S.M.T.Fatemi Ghomi, J.M.Wilson. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms.

[22] Modelo de planificación de la producción. http://www.dii.uchile.cl/~ris/RISXXIV/Viveros89.pdf

[23] Modelos determinísticos de inventarios para demanda independiente. http://www.cya.unam.mx/index.php/cya/article/viewFile/405/403

[24] Sistemas de loteo. https://www.ingenieriaindustrialonline.com/herramientas-para-el-ingeniero-industrial/producci%C3%B3n/sistemas-de-loteo/

[25] Christian Almeder Comparing Modeling Approaches for the Multi-Level Capacitated Lot-Sizing and Scheduling Problem. 2016

[26] https://www.msi-jp.com/xpress/doc/Xpress-Optimization-Showcase-2011.pdf