

# El principio de trabajos virtuales en celosías isostáticas

Leandro Morillas – Imorillas@arq.uva.es – Departamento de CA-IT-MMCTE – ETSA Universidad de Valladolid

## Los principios

El trabajo  $W$  que realiza la fuerza  $\vec{F}$  al desplazar un cuerpo a lo largo del vector  $\vec{d}$  es  $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ . Este producto escalar puede calcularse como  $W = F \cdot d$ , siendo  $F$  el módulo del vector fuerza, y  $d$  la longitud de la proyección de  $\vec{d}$  sobre  $\vec{F}$ . En el caso de la Fig. 1, el trabajo  $W$  es positivo.

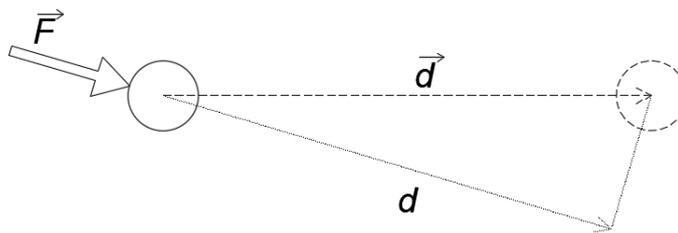


Fig. 1 El trabajo de una fuerza

Si el cuerpo está en equilibrio, la resultante de las fuerzas que actúan sobre él será nula, de forma que  $\sum \vec{F}_i = 0$ . El trabajo que realiza este conjunto de fuerzas al desplazarse el cuerpo a lo largo de  $\vec{d}$  es  $W = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{d} = 0$ . Conclusión: el trabajo que se produce al desplazar un cuerpo en equilibrio es nulo.

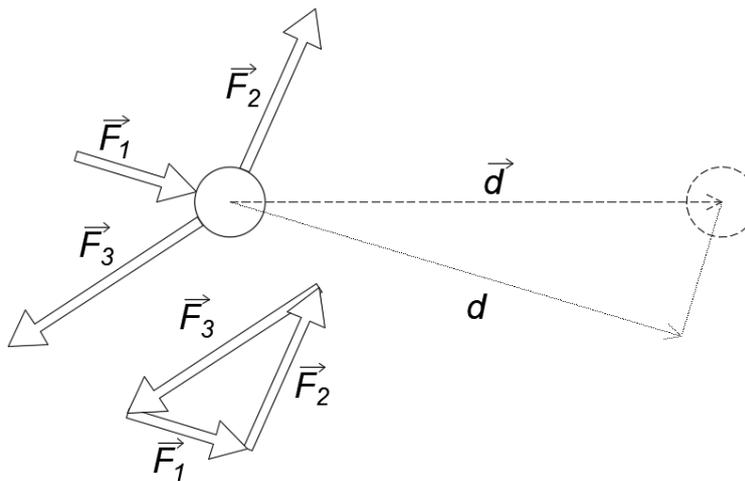


Fig. 2 El trabajo en un cuerpo en equilibrio

En la Fig. 3, una barra se alarga debido a un par de fuerzas  $\vec{F}$ . El trabajo que realizan estas fuerzas es  $W = F \cdot d$ . Si la barra es elástica y se cumple el principio de conservación de la energía, este trabajo se debe almacenar en forma de energía potencial elástica  $U$ , de modo que  $W - U = 0$ . La energía potencial elástica será  $U = N \cdot d$ , siendo  $N$  el esfuerzo axial dentro de la barra.

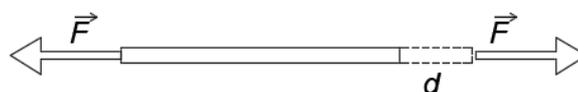


Fig. 3 Una barra que se alarga

## Aplicación a la resolución de celosías

La celosía de la Fig. 4 tiene aplicada una fuerza  $F$  de 30 kN. Para resolver la reacción vertical en el apoyo izquierdo, damos un desplazamiento virtual (conocido, o unitario) en el apoyo izquierdo. Si la celosía está en equilibrio, el trabajo realizado debe ser nulo  $W = 0$ . Si calculamos el trabajo que realizan las fuerzas tenemos  $W = F \frac{4}{3} - R \cdot 1 = 0$ , de forma que  $R = 40\text{kN}$ .

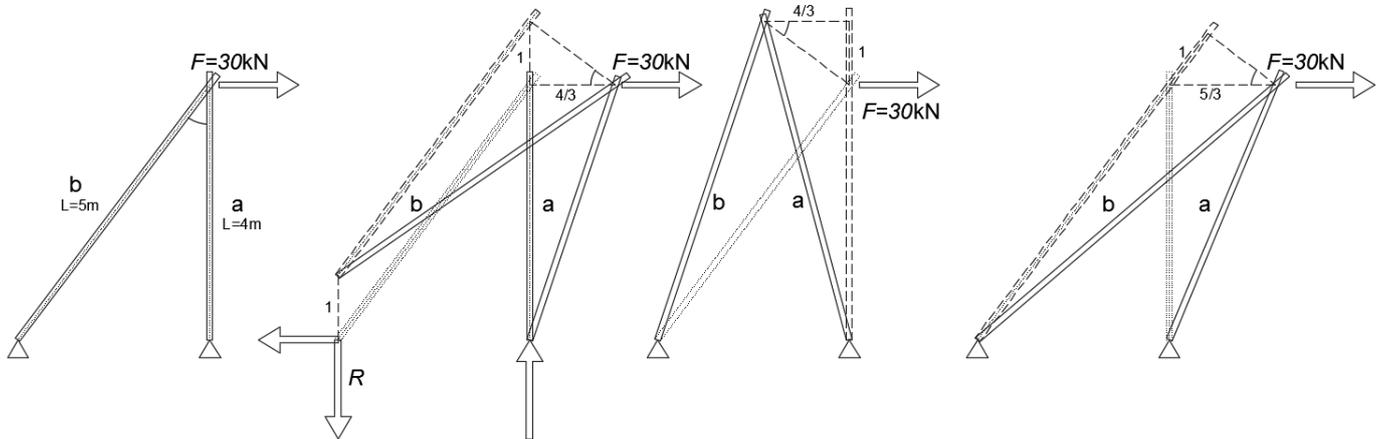


Fig. 4 Trabajos virtuales en una celosía sencilla

Para obtener los axiles en las barras, realizamos un procedimiento basado en dar un alargamiento conocido a cada barra consecutivamente. El trabajo que realizan las fuerzas externas  $W$  debe transformarse en energía de deformación elástica en la barra alargada  $W - U = 0$ . En la barra "a":  $-\frac{4}{3} F - 1 N_a = 0$ . En la barra "b":  $\frac{5}{3} F - 1 N_b = 0$ . Los resultados son un esfuerzo axial de compresión  $N_a = -40\text{kN}$ , y un esfuerzo de tracción  $N_b = 50\text{kN}$ .

Un ejemplo: Hallar el axil en las barras 3 y 5 de la siguiente figura

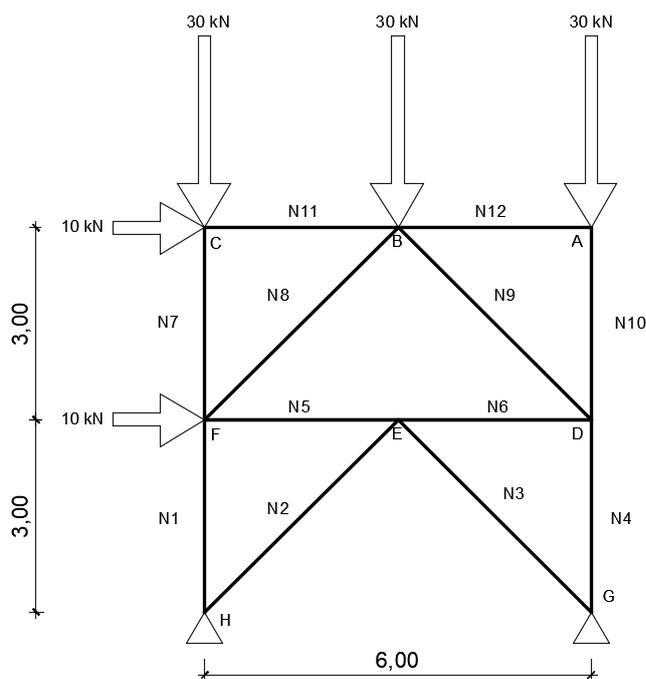


Fig. 5 Celosía de arriostramiento

Si la celosía está en equilibrio debe cumplirse que  $W - U = 0$ . Para la barra 5 debe cumplirse que  $0 = -10\text{kN} * 1 - 10\text{kN} * 0.50 + 30\text{kN} * 0.50 - N_5 * 1 \rightarrow N_5 = 0$ . Para la barra 3,  $0 = -10\text{kN} * 0.71 - 10\text{kN} * 0.71 - N_3 * 1 \rightarrow N_3 = -14.2\text{kN}$ .

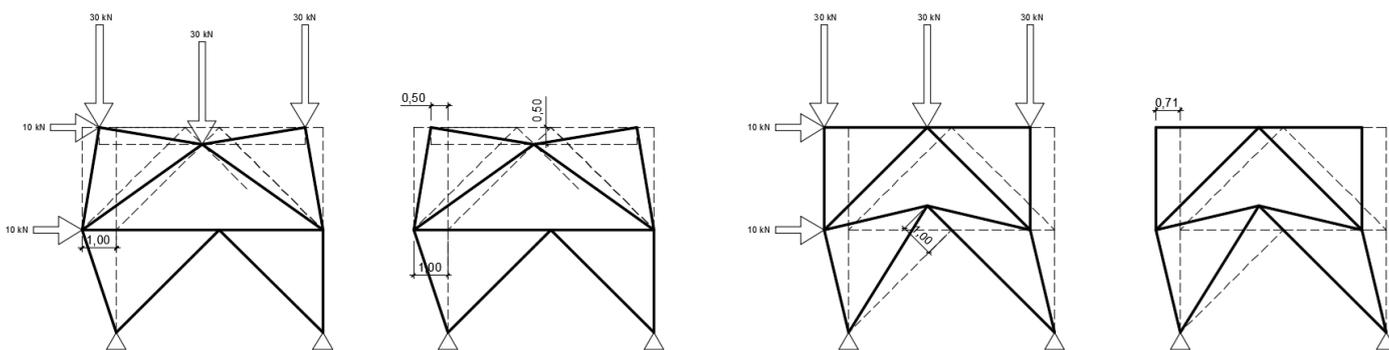


Fig. 6 Resolución de celosía de arriostramiento

Otro ejemplo, resolver la celosía de la Fig. 7

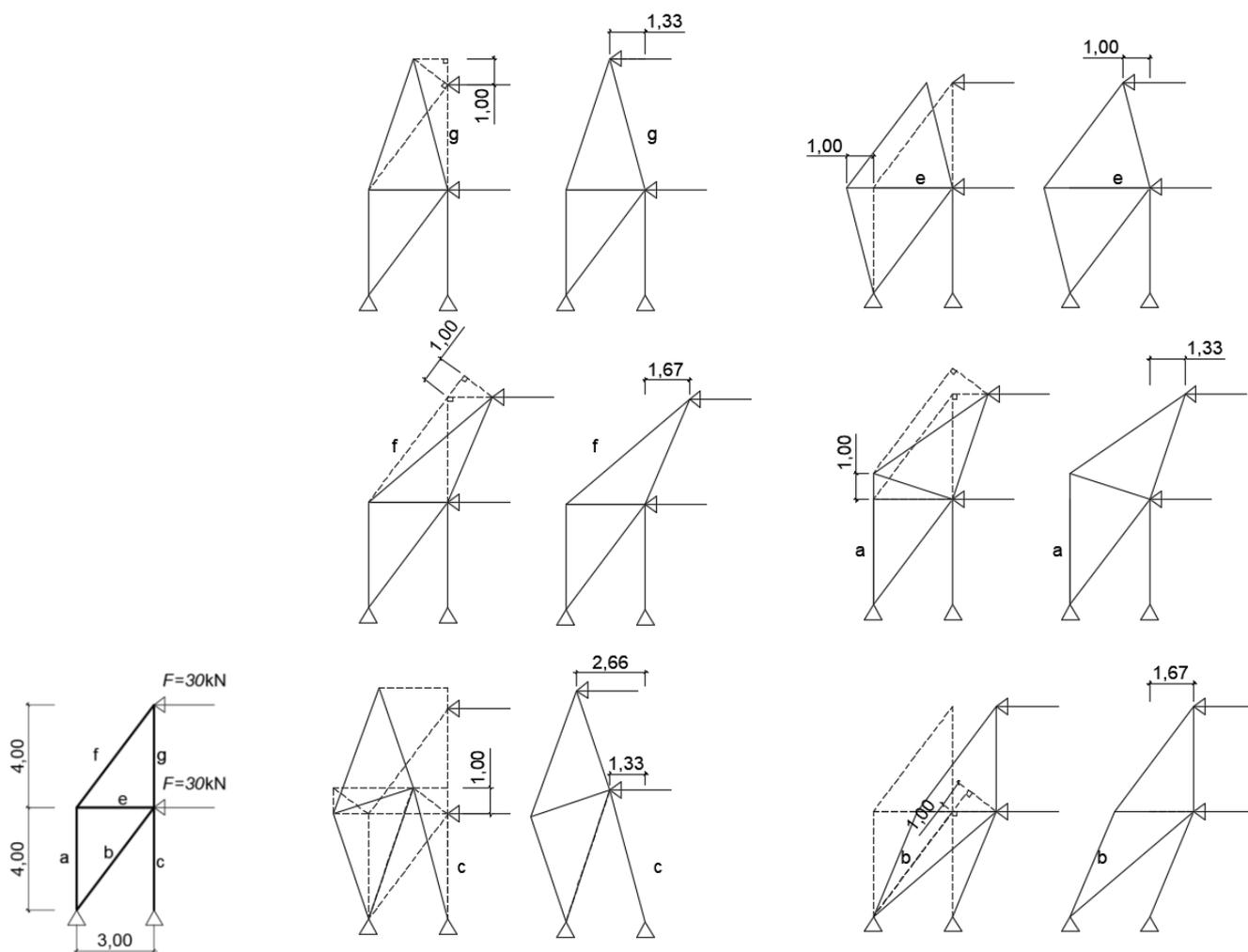


Fig. 7 Ejercicio resuelto de celosía

## Aplicación al cálculo de deformaciones

Al aplicar una fuerza  $P$  a la barra elástica de la Fig. 8, el nudo inferior se desplazará hacia la derecha una distancia  $\delta$  hasta llegar a una posición de equilibrio. Para que esto suceda, la fuerza  $P$  debe equilibrarse con la componente horizontal del axil de la barra,  $N$ , y la barra debe acortar su longitud en  $\Delta L$ . El acortamiento  $\Delta L$  de la barra está directamente relacionado con el esfuerzo axil por la ley de Hooke  $\Delta L = \frac{N \cdot L}{A \cdot E}$ .

La fuerza  $P$  realiza un trabajo  $W = P \cdot \delta$  y este trabajo debe acumularse como energía potencial elástica en la barra,  $U = N \cdot \Delta L$ , de forma que  $W - U = 0$ . Estas relaciones existen también para otra fuerza  $P'$ .

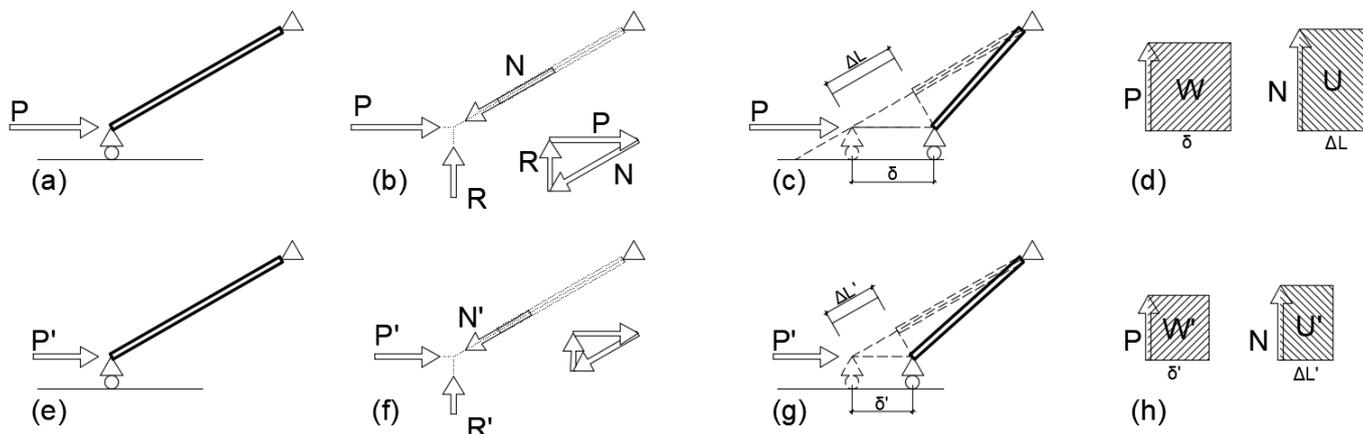


Fig. 8 El trabajo en la deformación de una barra

Si superponemos la acción de fuerza  $P$  y otra fuerza  $P'$ , el movimiento del nudo será  $\delta + \delta'$ , y el trabajo realizado por las fuerzas  $(P + P')(\delta + \delta')$ . Si igualamos las áreas ralladas en la Fig. 9, tendremos que  $P' \cdot \delta = N' \cdot \Delta L$ .

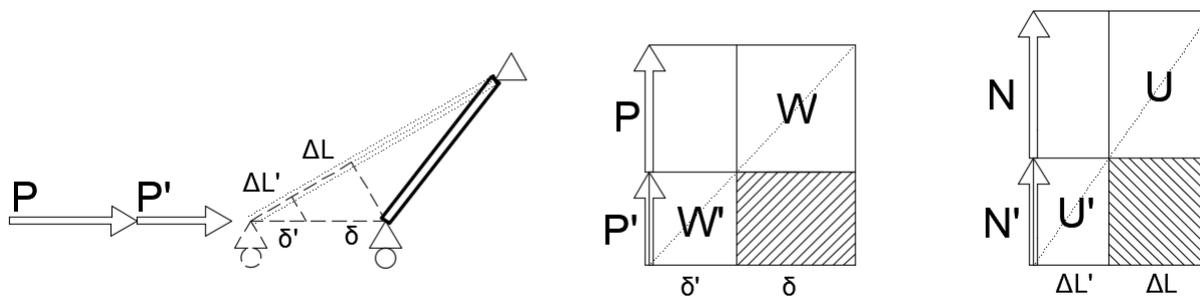


Fig. 9 El trabajo en la deformación de una barra (ii)

Si la fuerza  $P'$  es convencionalmente unitaria, y el acortamiento  $\Delta L = \frac{N \cdot L}{A \cdot E}$ :

$$\delta = \frac{N'NL}{AE}$$

Y para un conjunto de barras en celosía

$$\delta = \sum \frac{N'NL}{AE}$$

Un ejemplo: en la celosía de la Fig. 4 con ambas barras de  $E \cdot A = 20 \text{ MN}$

El movimiento vertical del nudo de la celosía será

$$\delta_y = \sum \frac{N'NL}{AE} = \frac{N'_a N_a L_a}{E_a A_a} + \frac{N'_b N_b L_b}{E_b A_b} = \frac{-40 \text{ kN} \cdot 1 \cdot 4 \text{ m}}{E_a A_a} = -8 \text{ mm}$$

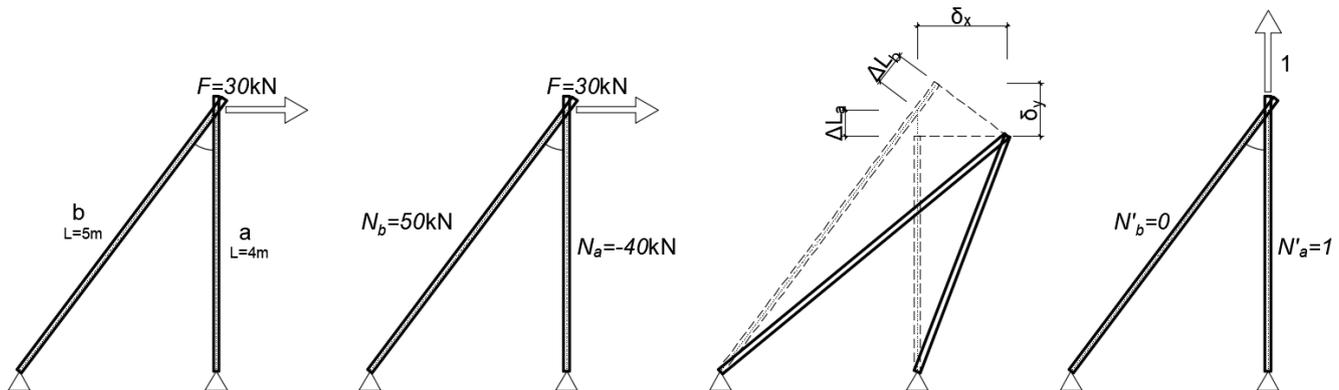


Fig. 10 Movimiento de una celosía sencilla

Otro ejemplo: hallar el movimiento horizontal del nudo A de la celosía de la Fig. 5, con las barras de sección  $A=2000 \text{ mm}^2$  y módulo de elasticidad  $E=210 \text{ kN/mm}^2$ .

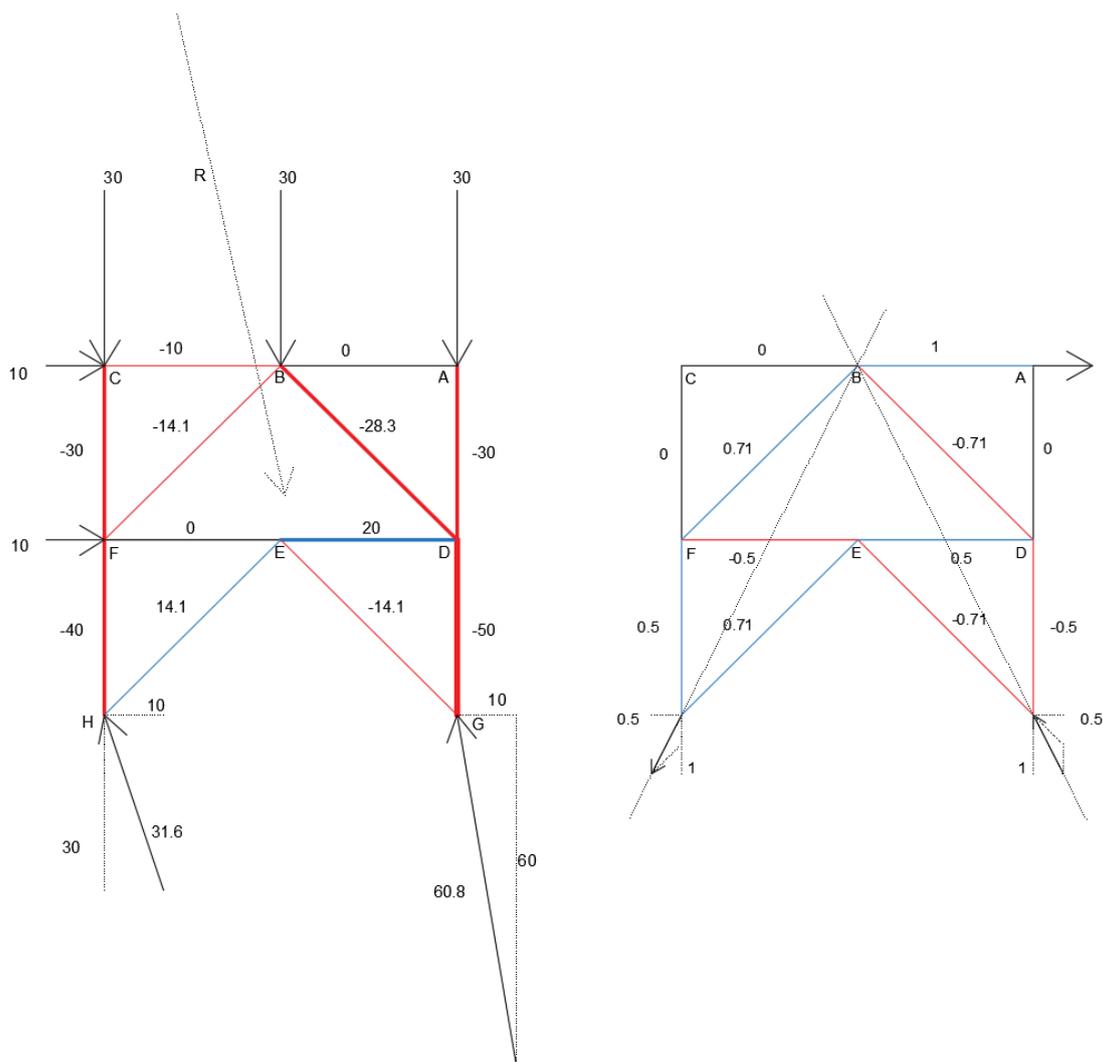
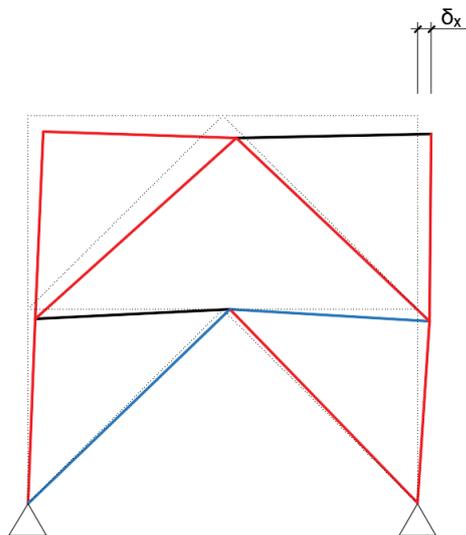


Fig. 11 Resolución de la celosía (carga real y carga virtual)

Aplicando la expresión anterior:

$$\delta_x = \sum \frac{N'NL}{AE}$$



#	N(kN)	N'	L(mm)	N.N'.L/EA(mm)
1	-40	0.5	3000	-0.14
2	14.1	0.71	4243	0.10
3	-14.1	-0.71	4243	0.10
4	-50	-0.5	3000	0.18
5	0	-0.5	3000	0
6	20	0.5	3000	0.07
7	-30	0	3000	0
8	-14.1	0.71	4243	-0.10
9	-28.3	-0.71	4243	0.20
10	-30	0	3000	0
11	-10	0	3000	0
12	0	1	3000	0
$\delta_x$				0.41mm

Fig. 12 Resolución de la celosía

## Bibliografía

Antuña Bernardo, J., Fernandez Cabo, J. L., & Majano Majano, M. A. (2014). Estructuras I: Ejercicios sobre estructuras trianguladas. <http://oa.upm.es/32399/13/pr-et-01.pdf>

Aroca Hernández-Ros, R. (2001). Vigas trianguladas y cerchas. Instituto Juan de Herrera. ETS de Arquitectura. [http://oa.upm.es/1501/1/MONO\\_AROCA\\_2001\\_01.pdf](http://oa.upm.es/1501/1/MONO_AROCA_2001_01.pdf)

Celigüeta-Lizarza, J. T. (2011). Teoremas Energéticos del Análisis Estructural. <http://dadun.unav.edu/bitstream/10171/19065/1/Teoremas%20energeticos.pdf>

Caprani, C. Virtual Work 3rd Year Structural Engineering. <http://www.colincaprani.com/files/notes/SAIII/Virtual%20Work%202008.pdf>

Krenk, S., & Høgsberg, J. (2013). *Truss structures. Statics and mechanics of structures*. Springer Science & Business Media. DOI:10.1007/978-94-007-6113-1. [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-6113-1\\_2](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-6113-1_2)

Vazquez Espí (2008). Trabajos virtuales en cerchas. <http://www.aq.upm.es/Departamentos/Estructuras/e96-290/doc/haet2.pdf>