



Universidad de Valladolid



PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

**Estabilidad exponencial en
ecuaciones diferenciales
funcionales no autónomas con
retardo dependiente del estado**

Presentada por **Ismael Maroto Camarena** para optar
al grado de doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por Carmen Núñez y Rafael Obaya

Certificamos que la presente memoria ha sido realizada por Ismael Maroto Camarena bajo nuestra dirección en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Valladolid.

Valladolid, a 14 de Julio de 2017.

Fdo.: Dra. Carmen Núñez Jiménez

Dr. Rafael Obaya García

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todos los que, de una manera u otra, me han ayudado a realizar esta memoria.

Gracias a mi familia, en especial a mis padres, Juan Antonio y Ana, y a mi hermana Noelia, por estar ahí siempre, a pesar de la distancia, y apoyarme en todo lo que hago. Desde pequeño me han ayudado a ser feliz y han dado lo máximo por hacerme progresar. Me han enseñado valores y me he sentido querido y seguro.

Gracias a Arantza, por arroparme y acompañarme en este camino. Ha sido la luz que necesitaba. Gracias a su familia, por tratarme como a un miembro más. Me han ayudado mucho y me han hecho sentir como en casa.

Gracias a mis amigos, que han estado ahí siempre para compartir alegrías, penas y sueños. Tengo la suerte de tener unos amigos maravillosos.

Gracias a todos los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Ingenierías Industriales, con los que día a día he pasado buenos momentos. Me han dado consejos, hemos hablado de la vida y de nuestras vidas. Geniales compañeros en esta aventura.

Y, especialmente, gracias a Carmen Núñez y Rafael Obaya, por apostar por mí para este trabajo. Sin su ayuda y conocimientos esto no hubiera sido posible. En la calidad de esta memoria queda reflejado el trabajo de todos.

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	11
1.1. Ecuaciones funcionales no autónomas con retardo dependiente del estado	11
1.1.1. Modelos con retardo dependiente del estado	15
1.2. Nociones básicas de dinámica topológica	17
1.2.1. Primeras definiciones	18
1.2.2. Extensiones hacia atrás en el caso de semiflujos	21
1.2.3. Semiflujos <i>skew-product</i>	22
1.2.4. Flujos casi periódicos	23
1.3. Funciones casi periódicas	23
2. Propiedades dinámicas	29
2.1. Existencia y unicidad de solución maximal	32
2.2. Construcción de un semiflujo <i>skew-product pseudo-continuo</i>	39
2.3. Diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales	55
2.4. Construcción de la envolvente	78
2.4.1. El caso casi periódico	86
3. Estabilidad exponencial uniforme	93
3.1. Definiciones de estabilidad y exponentes de Lyapunov	96
3.2. El exponente de Lyapunov superior de un compacto positivamente invariante	100
3.3. Estabilidad exponencial uniforme en compactos positivamente invariantes	110
3.4. Estabilidad exponencial uniforme bajo hipótesis menos restrictivas	124
3.5. El caso de flujo base minimal	130
3.6. El caso casi periódico	136
Bibliografía	141

Introducción

El interés en el estudio de ecuaciones diferenciales con retardo dependiente del estado (en adelante ERDEs) ha crecido de forma importante durante las últimas décadas. Esto es debido en parte a su interés teórico pero, sobre todo, a la gran cantidad de modelos en los que aparecen, en áreas muy distintas entre sí: electrodinámica, control de posición, mecánica, redes neuronales, transmisión de enfermedades, dinámica de poblaciones, economía, y biología celular, entre otras. En el trabajo [19] de Hartung *et al.* se describen con precisión modelos de todas estas áreas, y se presenta una lista exhaustiva de trabajos relacionados.

Entre los artículos con un enfoque similar al que presentamos en esta memoria, podemos señalar los de Hartung [15, 16, 17, 18], Wu [53], Walther [49, 50], Hartung *et al.* [19], Chen *et al.* [6], Hu y Wu [23], Mallet-Paret y Nussbaum [36], Hu *et al.* [24], Barbarossa y Walther [3], He y de la Llave [20, 21], y Krisztin [30], entre muchos otros.

Nuestro objeto de estudio son ERDEs del tipo

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tilde{\tau}(t, y_t))), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde el campo vectorial está dado por $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y el retardo por $\tilde{\tau}: \mathbb{R} \times C \rightarrow [0, r]$, siendo C el espacio de funciones continuas $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, y donde y_t representa el elemento de C dado por la traslación de la restricción de la función y al intervalo $[t-r, t]$: $y_t(s) := y(t+s)$ para $s \in [-r, 0]$. Se observa que tanto la ley de evolución como el retardo dependen explícitamente del tiempo y que, además, el retardo depende explícitamente de los valores que toma la solución (el “estado”) en un intervalo anterior de tiempo. Por lo tanto, son ERDEs no autónomas.

Se observa también en la ecuación que la derivada de una solución en tiempo t depende de los valores de la propia solución en el intervalo $[t-r, t]$. Este hecho es la causa de que (tal y como es habitual en el estudio de ecuaciones funcionales) se entienda que el estado del problema analizado es la función y_t , en lugar del vector $y(t)$. Como buscamos soluciones al menos continuas, este estado varía dentro del espacio C , que es infinito dimensional.

Además, la dependencia respecto al estado del retardo hace que se exijan condiciones de regularidad para asegurar la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones de problemas de Cauchy mucho más fuertes que en los casos de ecuacio-

nes diferenciales con retardo constante o, incluso, dependiente del tiempo. Estas condiciones de regularidad afectan no sólo al campo vectorial y al retardo, sino también al propio dato inicial: las condiciones clásicas de continuidad y comportamiento lipschitziano y los resultados clásicos de Hale [12] garantizan la existencia y unicidad de solución de cada problema de Cauchy asociado a una ecuación funcional $\dot{y}(t) = g(t, y_t)$ con dato inicial $x \in C$. Pero las condiciones lipschitzianas que se pueden imponer de forma natural sobre los coeficientes f y $\tilde{\tau}$ de (1) no garantizan que su composición g (dada por $g(t, x) := f(t, x(0), x(-\tilde{\tau}(0, x)))$) las cumpla. De hecho, con tales condiciones, no se puede garantizar la unicidad de soluciones si se toma como dato inicial un elemento del conjunto C , tal y como prueba un ejemplo de Winston [52] que describiremos en el siguiente capítulo. Este problema de falta de unicidad lo resuelve Hartung en [15]: demuestra que el espacio de estados adecuado no es C , sino el espacio de funciones Lipschitz-continuas definidas en $[-r, 0]$ y con llegada en \mathbb{R}^n , que denotaremos por $W^{1,\infty}$.

Por otro lado, el carácter no autónomo del problema añade complejidad al estudio de las soluciones. Debido a la dependencia temporal de la ley de evolución f y del retardo, la trasladada en tiempo de una solución no es solución del problema original, lo cual impide definir directamente un semiflujo en el espacio de estados. Sin embargo es solución del problema trasladado, y este hecho es la base de un método que permite poder analizar la dinámica de las soluciones usando técnicas de dinámica topológica: la construcción de la envolvente, en la línea del proceso descrito por Hale y Verdyun Lunel [14] e Hino, Murakami y Naito [22]. Hale [13] y Sell y You [47], entre otros autores, describen detalladamente las técnicas de dinámica topológica a las que nos referimos. Tendremos que adaptarlas a nuestra formulación ya que no sólo la ley de evolución depende del tiempo, sino también el retardo.

De este modo, y una vez llevado a cabo el proceso de construcción de la envolvente, obtenemos la familia de ecuaciones

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

para $\omega \in \Omega$. El conjunto Ω es un espacio métrico compacto, y $\{\omega \cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es la órbita del elemento ω con respecto a un flujo continuo. Ahora la ley de evolución es $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y el retardo es $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$. Cada una de las ecuaciones de esta familia es del mismo tipo que la ecuación (1): una ecuación de retardo, con retardo dependiente explícitamente del estado, y no autónoma porque tanto la ley de evolución como el retardo dependen explícitamente del tiempo a través de la órbita del elemento ω que determina la ecuación. De hecho, cualquier característica dinámica de las soluciones de esta familia se traduce en una propiedad de la solución de nuestro problema inicial, ya que si tomamos $\omega = (f, \tilde{\tau})$ obtenemos (1). La ventaja de esta formulación es que a partir de ella sí que se puede definir un semiflujo, y por lo tanto usar los métodos y resultados de

dinámica topológica para el estudio de las soluciones de los problemas de Cauchy.

Después de realizar la construcción de la familia de ecuaciones (2), y basándonos en el trabajo de Hartung en [15, 17], describiremos las condiciones que deben cumplir la ley de evolución F , el retardo τ , y la condición inicial para garantizar la existencia y unicidad de solución maximal para cada ecuación, dada por $\omega \in \Omega$, y cada dato inicial, dado por $x \in W^{1,\infty}$. Denotaremos esta solución por $y(t, \omega, x)$, y su intervalo de definición por $[-r, \beta_{\omega,x})$, con $0 < \beta_{\omega,x} \leq \infty$. Esto es el punto de partida en la definición del semiflujo que utilizaremos en nuestro estudio dinámico: está dado por

$$\begin{aligned} \Pi: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{(t, \omega, x) \mid \omega \in \Omega, x \in W^{1,\infty}, t \in [0, \beta_{\omega,x})\}, \\ u(t, \omega, x)(s) &:= y(t + s, \omega, x). \end{aligned}$$

Es un semiflujo local, ya que está definido en el conjunto \mathcal{U} , y es de tipo skew-product con base Ω y fibra $W^{1,\infty}$. La primera componente del semiflujo reproduce la dinámica de la base Ω ; es decir, representa la variación en el tiempo del par (F, τ) que define la ecuación. La segunda componente representa la dinámica de las soluciones: el espacio $W^{1,\infty}$ es el espacio en el que el “verdadero” movimiento del sistema dinámico tiene lugar. Las propiedades de recurrencia respecto a t del par $(f, \tilde{\tau})$ (como periodicidad o casi periodicidad) se traducen en características del conjunto envolvente Ω .

Tener un semiflujo es el punto de partida para la aplicación de técnicas de dinámica topológica. Pero nos encontramos con un gran problema inicial: las condiciones impuestas no permiten asegurar la continuidad de Π . No obstante, demostraremos que Π satisface varias condiciones de continuidad, las cuales bastan en cada punto del estudio posterior para la aplicación de las técnicas deseadas (si bien debemos ser extremadamente cuidadosos en cada paso que damos). Diremos que el semiflujo Π es pseudo-continuo. Estudiaremos también sus propiedades de diferenciabilidad, y observaremos que el semiflujo linealizado es también pseudo-continuo.

Después nos centraremos en el análisis de la estabilidad exponencial de compactos $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$. Para caracterizar tal propiedad, supondremos que tanto F como τ cumplen determinadas condiciones adicionales de tipo Lipschitz. La caracterización de estabilidad exponencial de \mathcal{K} se basará en el signo del exponente de Lyapunov superior de \mathcal{K} , que denotaremos por $\lambda_{\mathcal{K}}$, y en cuya definición entra en juego el semiflujo linealizado que hemos mencionado en el párrafo anterior.

Los resultados que exponemos han sido aplicados al estudio de un modelo 2-dimensional de redes neuronales en el trabajo [39].

Completamos la introducción con una descripción breve de la estructura de la memoria.

El cuerpo principal consta de tres capítulos. El Capítulo 1 contiene los conceptos y resultados preliminares. En la Sección 1.1 fijamos notación y presentamos la ecuación funcional con retardo dependiente del estado y no autónoma del tipo (1) que será el objeto de nuestro estudio. También describiremos brevemente ejemplos de modelos en los que aparecen sistemas de ERDEs. En la Sección 1.2 describiremos las nociones básicas de dinámica topológica que utilizaremos a lo largo de la memoria. Y en la Sección 1.3 introduciremos el concepto de función casi periódica real con variable real y describiremos sus propiedades más importantes.

Ya hemos mencionado que el proceso de construcción de la envolvente proporciona una familia del tipo (2) que contiene a la ecuación inicial (1). Pero nuestro estudio es más general: tomaremos como punto de partida una familia (2) definida sobre las órbitas de un flujo continuo en un espacio métrico compacto Ω , sin suponer que Ω sea la envolvente de ninguna de las ecuaciones. De hecho, y en general, no supondremos en Ω ninguna propiedad de recurrencia. En la primera sección del Capítulo 2, Sección 2.1, estudiaremos condiciones que garantizan la existencia y unicidad de solución de los problemas de Cauchy. En la Sección 2.2 construiremos el semiflujo Π y estudiaremos sus propiedades de (pseudo) continuidad. En la Sección 2.3 estudiaremos, usando técnicas de dinámica topológica, la diferenciabilidad de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales, estrechamente relacionada con las propiedades del semiflujo linealizado construido a partir de Π . Este semiflujo se construye a partir de las soluciones de las ecuaciones variacionales calculadas a lo largo de las órbitas del flujo inicial que corresponden a soluciones de clase C^1 en todo su dominio. El proceso de la construcción de la envolvente se describe en detalle en la Sección 2.4, en la que prestaremos especial atención a justificar que las condiciones iniciales de regularidad en $(f, \tilde{\tau})$ se traducen en condiciones similares para (F, τ) . También estudiaremos con detalle el caso en que los coeficientes iniciales son de tipo casi periódico, comprobando que en este caso el flujo sobre la envolvente también es casi periódico, y minimal.

El Capítulo 3 contiene el análisis de la estabilidad exponencial uniforme de los subconjuntos compactos e invariantes para el semiflujo. En la Sección 3.1 daremos las definiciones de estabilidad y de exponente de Lyapunov superior de un compacto. Esta última definición requiere considerar el semiflujo linealizado. En la Sección 3.2 veremos que la falta de continuidad global de este semiflujo no supone un problema para la definición del exponente de Lyapunov, y que de hecho podemos definirlo considerando como espacio de estados el conjunto C en lugar de $W^{1,\infty}$. En las Secciones 3.3 y 3.4 caracterizaremos la estabilidad exponencial uniforme de un compacto mediante el signo negativo de su exponente de Lyapunov: las hipótesis serán en la Sección 3.4 menos exigentes que las de la Sección 3.3. El análisis se completará en la Sección 3.5 para el caso en el que el flujo base es minimal. Y concluiremos en la Sección 3.6 con el resultado que justifica el

esfuerzo previo dedicado a flujos y funciones casi periódicas: la existencia de una solución uniformemente exponencialmente estable de una ERDE del tipo (1) casi periódica garantiza la existencia de una solución que también es uniformemente exponencialmente estable y que además es casi periódica.

Cada uno de los capítulos comienza con una descripción mucho más precisa de los resultados que contiene.

Capítulo 1

Preliminares

En la primera sección de este capítulo presentaremos el objeto básico de estudio de esta memoria: un tipo determinado de ecuación funcional no autónoma con retardo dependiente del estado. Incluiremos varios ejemplos de aplicación que aparecen en la literatura.

Tal y como hemos comentado en la Introducción, nuestras herramientas básicas para el análisis son los conceptos y métodos de dinámica topológica. En la Sección 1.2 recordamos estos conceptos básicos. Prestamos atención especial al concepto de “extensión hacia atrás” en el caso de semiflujo, incluyendo los resultados que garantizan la existencia de tales extensiones y la posibilidad de que exista una extensión a flujo. Y dedicaremos las últimas páginas de la sección al concepto y propiedades de flujo casi periódico.

El concepto de casi periodicidad para flujo está relacionado con el mismo concepto para funciones. Dedicamos la última sección de este capítulo a explicar las diferentes definiciones de función casi periódica real de variable real. Los resultados que se incluyen son bien conocidos, pero incluimos las demostraciones: en la Sección 2.4.1 extenderemos el concepto de función casi periódica a dominios y codominios más generales, y los resultados que enunciaremos allí se prueban repitiendo paso por paso las demostraciones del caso real.

1.1. Ecuaciones funcionales no autónomas con retardo dependiente del estado

Empezamos esta sección fijando parte de la notación que utilizaremos a lo largo de la memoria.

- El símbolo \mathbb{R} representa la recta real, y la norma euclídea en el espacio vectorial \mathbb{R}^d se representa por $|\cdot|$ para todo $d \in \mathbb{N}$.
- Fijamos dos constantes: $r > 0$, que representará el valor máximo que puede alcanzar el retardo; y $n \in \mathbb{N}$, que representará la dimensión de las ecuaciones

diferenciales con las que trabajaremos.

- El conjunto $C := C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ representa el espacio de Banach de funciones continuas $x: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ equipado con

$$\|x\|_C := \sup_{s \in [-r, 0]} |x(s)|.$$

- El subconjunto $C^1 \subset C$ está formado por las funciones que tienen derivada continua en $[-r, 0]$, considerando las derivadas laterales en $-r$ y 0 .
- El conjunto $L^\infty := L^\infty([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ representa el espacio de funciones medibles Lebesgue $x: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que están esencialmente acotadas. Recordemos que una función medible $x: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ está *esencialmente acotada* si existe $k \geq 0$ tal que se cumple la siguiente propiedad:

$$l(\{s \in [-r, 0] \mid |x(s)| > k\}) = 0, \quad (1.1)$$

donde l representa la medida de Lebesgue de \mathbb{R} . La norma en L^∞ está dada por

$$\|x\|_{L^\infty} := \inf\{k \geq 0 \mid k \text{ cumple (1.1)}\}.$$

- El conjunto $W^{1,\infty} := W^{1,\infty}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de Banach formado por las funciones Lipschitz-continuas $x: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ equipado con la norma Lipschitz

$$\|x\|_{W^{1,\infty}} := \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_{L^\infty}\}.$$

- Dada una función continua $x: [-r, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $\gamma > 0$ y un tiempo $t \in [0, \gamma]$, denotamos por $x_t \in C$ la función definida por

$$x_t(s) := x(t + s) \quad \text{para } s \in [-r, 0].$$

- Dados dos espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, representamos por $\text{Lin}(X, Y)$ el espacio de aplicaciones lineales acotadas $\phi: X \rightarrow Y$ equipado con la norma $\|\phi\|_{\text{Lin}(X, Y)} := \sup_{\|x\|_X=1} \|\phi(x)\|_Y$.

Esta memoria se centra en el estudio de una ecuación funcional del tipo

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tilde{\tau}(t, y_t))), \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Se trata de una ecuación no autónoma y con retardo, en la que además el retardo no es constante: depende del tiempo y también del estado. El retardo es acotado: su valor máximo está dado por una constante real $r > 0$. Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones (funcionales y no autónomas) con retardo dependiente del estado*.

El hecho de que aparezca el término y_t en la ecuación significa que para determinar el valor de la derivada de la solución en un tiempo $t \geq 0$ necesitamos conocer los valores de la solución en el intervalo $[t - r, t]$. De modo que el dato inicial de una solución que queremos conocer desde 0 requiere sus valores en $[-r, 0]$. Por lo tanto, si buscamos una solución al menos continua, el dato inicial debe ser (al menos) un elemento del conjunto C definido anteriormente: un espacio infinito-dimensional. Sin embargo, la elección de un dato inicial de este tipo no basta para garantizar la unicidad, tal y como veremos a continuación.

Hale aborda en [12] el problema de existencia y unicidad de soluciones de los problemas de Cauchy asociados a una ecuación funcional general, del tipo

$$\dot{y}(t) = g(t, y_t),$$

para una función continua $g: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un abierto \mathcal{D} . Toma un punto $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ y busca una función $\tilde{y}(t) := y(t, t_0, x_0)$ definida y continua en un intervalo $[t_0 - r, t_0 + \alpha)$ que sea solución del correspondiente problema. Es decir, tal que $\tilde{y}_{t_0} = x_0$, y además $(t, \tilde{y}_t) \in \mathcal{D}$ e $\dot{\tilde{y}}(t) = g(t, \tilde{y}_t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$. Basándose en el teorema del punto fijo de Schauder, Hale prueba que la continuidad de la función g en \mathcal{D} garantiza la existencia de una solución local del problema de Cauchy considerado. También prueba que esta solución es única si $g(t, x)$ es lipschitziana con respecto a x en cada compacto de \mathcal{D} .

Cuando la ecuación funcional toma la forma (1.2), y el par $(f, \tilde{\tau})$ es continuo en su dominio, la función $g: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x(t), x(t - \tilde{\tau}(t, x)))$ es también continua, y por tanto existe solución de cada problema de Cauchy. Sin embargo no es verdad que al imponer en f y en $\tilde{\tau}$ condiciones de tipo Lipschitz, éstas sean heredadas por la función g . De hecho, la unicidad de una solución con dato inicial en C no se puede asegurar imponiendo tales condiciones de continuidad y de carácter Lipschitz en f y en $\tilde{\tau}$. El siguiente ejemplo es una adaptación inmediata al caso de retardo acotado de uno que aparece en Winston [52] y se describe en la Sección 3.1 de Hartung *et al.* [19]. Se trata del problema de Cauchy dado por la ecuación escalar

$$\dot{y}(t) = -y(t - \min(|y(t)|, 2)), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

para el que $r = 2$, y por la condición inicial $x_0 \in C := C([-2, 0], \mathbb{R})$ definida por

$$x_0(s) := \begin{cases} -1 & \text{si } -2 \leq s \leq -1, \\ (3/2)(s+1)^{1/3} - 1 & \text{si } -1 < s \leq -7/8, \\ (10/7)s + 1 & \text{si } -7/8 < s \leq 0. \end{cases}$$

Las correspondientes funciones f y $\tilde{\tau}$ cumplen las condiciones bajo las que trabajaremos en esta memoria, tal y como comentaremos al final de la Sección 2.4. Sin embargo, este problema tiene dos soluciones distintas para $t > 0$ suficientemente

pequeño, que son:

$$y_1(t) := \begin{cases} x_0(t) & \text{si } t \in [-2, 0], \\ t + 1 & \text{si } t \in [0, 1/4], \end{cases}$$

$$y_2(t) := \begin{cases} x_0(t) & \text{si } t \in [-2, 0], \\ t + 1 - t^{3/2} & \text{si } t \in [0, 1/4]. \end{cases}$$

Nótese que la función $x_0(s)$ definida arriba no pertenece al conjunto $W^{1,\infty} := W^{1,\infty}([-2, 0], \mathbb{R})$, ya que su derivada (que existe salvo en dos puntos del intervalo) tiene una asíntota vertical en $s = -1$. Hartung establece en [15] condiciones de continuidad y carácter Lipschitz en f y $\tilde{\tau}$ que garantizan la unicidad de solución local de cada problema de Cauchy para la ecuación (1.2) siempre y cuando el dato inicial pertenezca a $W^{1,\infty}$. En particular, los coeficientes de (1.3) satisfacen estas condiciones. La idea básica es que estas condiciones hacen que la función g que resulta de la composición sí que es Lipschitz en los conjuntos acotados de $\mathbb{R} \times W^{1,\infty}$. Éste es el motivo por el que el conjunto $W^{1,\infty}$ entra en juego. Analizaremos la cuestión con detalle en la Sección 2.1.

El siguiente resultado básico jugará un papel importante en muchas de las demostraciones:

Proposición 1.1. *Sea $\mathcal{B} \subset W^{1,\infty}$ un conjunto acotado. Entonces \mathcal{B} es un subconjunto relativamente compacto en C . Y para cada $c > 0$, el conjunto $\mathcal{B}_c = \{x \in W^{1,\infty} \mid \|x\|_{W^{1,\infty}} \leq c\}$ es compacto en C .*

Demostración. Sea $c := \sup_{x \in \mathcal{B}} \|x\|_{W^{1,\infty}}$. Entonces $|\dot{x}(s)| \leq c$ para casi todo $s \in [-r, 0]$. El teorema fundamental del cálculo nos permite afirmar que

$$|x(t) - x(s)| = \left| \int_s^t \dot{x}(l) dl \right| \leq c |t - s| \quad (1.4)$$

para todos $s, t \in [-r, 0]$, lo que garantiza que la familia de funciones \mathcal{B} es equicontinua en $[-r, 0]$. Por lo tanto la compacidad relativa de \mathcal{B} en C es consecuencia del teorema de Arzelá-Ascoli.

Veamos que los conjuntos de la forma \mathcal{B}_c son además cerrados (y por tanto compactos). Tomamos una sucesión (x_m) en \mathcal{B}_c que converge a un punto $x \in C$. La acotación (1.4) asegura que

$$|x_m(t) - x_m(s)| \leq c |t - s|$$

para todos $s, t \in [-r, 0]$. Por lo tanto

$$|x(t) - x(s)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m(t) - x_m(s)| \leq c |t - s|$$

para todos $s, t \in [-r, 0]$ y $m \in \mathbb{N}$, lo cual asegura que x es absolutamente continua. En consecuencia, $x \in W^{1,\infty}$ y $\|\dot{x}\|_{L^\infty} < c$ (véase el Teorema 7.18 de [42]). Como

evidentemente $\|x\|_C \leq c$, concluimos que $\|x\|_{W^{1,\infty}} \leq c$, lo que prueba que $x \in \mathcal{B}_c$ y completa la demostración. \square

1.1.1. Modelos con retardo dependiente del estado

Las ecuaciones diferenciales con retardo dependiente del estado han sido objeto de estudio en los últimos años no sólo por el interés teórico, sino también por la gran cantidad de problemas y aplicaciones en muy distintas áreas de interés en las que aparecen. En el trabajo [19] de Hartung *et al.* se describen con precisión modelos de: electrodinámica, control de posición, mecánica, redes neuronales, transmisión de enfermedades, dinámica de poblaciones, economía, y biología celular, y se presenta una lista exhaustiva de trabajos relacionados. Comentamos en esta sección algunos de estos modelos.

Modelo mecánico: proceso de torneado regenerativo.

En los artículos

T. INSPERGER, F. HARTUNG, G. STÉPÁN, J. TURI [25],
State dependent regenerative delay milling processes,
ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers (2005), 955–964;

T. INSPERGER, G. STÉPÁN, J. TURI [27],
State-dependent delay model for regenerative cutting processes,
Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, 2005, Eindhoven, Netherlands,

T. INSPERGER, G. STÉPÁN, J. TURI [28],
State-dependent delay in regenerative turning processes,
Nonlinear Dynamics **47** (2007), 275–283,

se estudian modelos de procesos de torneado. Un proceso de torneado es un proceso mecanizado de modelado de elementos giratorios por arranque de viruta: parte del material inicial de la pieza se elimina mientras la pieza gira, hasta darle la forma deseada al producto. La máquina de corte se llama torno. El torno corta la superficie formada en el corte anterior. Normalmente en estos modelos se asume que el torno, la pieza de corte, o ambos, son flexibles, y que el grosor de la viruta cortada varía dependiendo de las vibraciones del torno y de la pieza. De hecho este grosor está determinado por la posición actual y una posición previa del par torno-pieza.

El retardo en estos modelos corresponde al tiempo entre cortes consecutivos. En los modelos tradicionales se asume que este periodo es una constante determinada por la velocidad del huso, lo que da lugar a ecuaciones funcionales con

retardo constante. Modelos más realistas incluyen retardos que varían de forma periódica con respecto al tiempo, consecuencia del movimiento de avance y retroceso del plato fijador. Finalmente, un análisis más preciso muestra la influencia en el proceso de las vibraciones del torno con respecto a la pieza, que es el motivo por el que surgen modelos que responden a ecuaciones con retardo dependiente del estado.

Dinámica de poblaciones: población estructurada.

Los autores de los trabajos

W. G. AIELLO, H. I. FREEDMAN, J. WU [1],
 Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay,
SIAM Journal of Applied Mathematics **52** (3) (1992), 855–869.

Y. CAO, J. FAN, T. C. GARD [5],
 The effects of state-dependent time delay on a stage-structured population growth model,
Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **19** (2) (1992), 95–10,.

estudian la densidad de una población estructurada en individuos inmaduros (que no se reproducen) e individuos maduros (con capacidad reproductiva). El retardo responde al tiempo que le lleva a un individuo alcanzar la madurez. Varias observaciones en poblaciones diversas constatan el hecho de que este tiempo de maduración depende de la cantidad de recursos, la cual a su vez depende de la densidad de población. Ésta es la causa de que aparezca el retardo dependiente del estado.

Modelo económico: el precio de un producto en el mercado.

En el trabajo

M. MACKEY [35],
 Commodity price fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors,
Journal of Economic Theory **48** (2) (1989), 497–509

se propone y analiza un modelo de evolución del precio de un producto (indeterminado). Este tipo de modelos intentan explicar las fluctuaciones en el precio y los ciclos de mercado. El autor explica que un modelo realista tiene que tener en cuenta el retardo en la producción: el tiempo que transcurre entre un cambio en el proceso de producción y el efecto que este cambio produce en la oferta final del producto. Este tiempo tiene por supuesto un mínimo (el tiempo de producción) pero depende de más factores; fundamentalmente de la posibilidad de almacenar el producto, bien hasta que la demanda haga subir el precio, o bien hasta que el

precio del producto haya caído tanto que los productores decidan ofertar la cantidad almacenada para minimizar las pérdidas. La conclusión es que el retardo depende del precio del producto; es decir, del estado del modelo considerado.

Transmisión de enfermedad.

Basándose en el trabajo

P. WALTMAN [51],
 Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics,
Lecture Notes in Biomathematics **1**, Springer, New York, 1974,

se describe en [19] un modelo de transmisión de enfermedad en una población aislada. Los individuos se dividen en cuatro grupos: susceptibles (no infectados pero que pueden llegar a estarlo), expuestos (que ya están afectados pero todavía no pueden transmitir la enfermedad), los infecciosos (que sí pueden transmitirla) y los eliminados (que han muerto o se han recuperado y son permanentemente inmunes). El retardo se debe al tiempo que transcurre entre el momento de la exposición a la enfermedad de un determinado individuo y el momento en el que es capaz de transmitirla. Se formulan varias premisas de trabajo: la tasa de exposición a la infección de individuos susceptibles es proporcional al número de contactos entre susceptibles e infecciosos; existe una función monótona creciente $\sigma(t)$ tal que un individuo expuesto en tiempo $\sigma(t)$ se vuelve infeccioso en tiempo t ; existe una función decreciente y no negativa $p(\delta)$ que representa la proporción de individuos que se vuelven infecciosos en tiempo t que seguirán siéndolo en tiempo $t + \delta$; y la población total es constante. Estas premisas (fundamentalmente la segunda y la tercera) llevan una vez más a la formulación de un modelo dado por una ecuación funcional con retardo dependiente del estado.

1.2. Nociones básicas de dinámica topológica

Dedicamos esta sección a las nociones básicas de dinámica topológica que utilizaremos a lo largo de la memoria. Pueden ser encontradas en Ellis [10], Sacker y Sell [43, 44], de Vries [9], Chow y Leiva [7, 8], y Shen y Yi [45], entre otros muchos libros y artículos.

A lo largo de toda la sección, Ω será un espacio métrico completo. En algunos puntos impondremos también compacidad en Ω . El símbolo d_Ω denotará la distancia en Ω . Tal y como es habitual, $\mathbb{R}^\pm := \{t \in \mathbb{R} \mid \pm t \geq 0\}$.

1.2.1. Primeras definiciones

Definición 1.2. Un *flujo real, continuo y global* sobre Ω está definido por una aplicación continua

$$\begin{aligned}\sigma: \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, \omega) &\mapsto \sigma(t, \omega) =: \sigma_t(\omega)\end{aligned}$$

que satisface

$$(f1) \quad \sigma_0 = Id_\Omega,$$

$$(f2) \quad \sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s \text{ para todos } t, s \in \mathbb{R}.$$

El flujo se representa por $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$. Los términos real, continuo y global se omiten a menudo cuando esto no da lugar a confusión.

Las siguientes definiciones se refieren a un flujo continuo y global $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$. Al igual que en el resto de las definiciones, el prefijo σ se suele omitir cuando esto no da lugar a confusión.

Definiciones 1.3. La σ -*órbita* de un punto $\omega \in \Omega$ es el conjunto

$$\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \Omega.$$

Los conjuntos $\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ y $\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathbb{R}^-\}$ son las σ -*semiórbitas positiva y negativa* de ω .

Un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es σ -*invariante* si $\sigma_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es *positivamente σ -invariante* o *negativamente σ -invariante* si $\sigma_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ o $t \in \mathbb{R}^-$, respectivamente.

Un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es σ -*minimal* si es compacto, σ -invariante y el único conjunto compacto y σ -invariante que contiene es él mismo.

El flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es *minimal* o *recurrente* si Ω es minimal.

Notas 1.4. 1. Nótese que las condiciones (f1) y (f2) de la Definición 1.2 aseguran que σ_t es un homeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$, siendo σ_{-t} la aplicación inversa. Además σ_t y σ_s conmutan para todo par de puntos $t, s \in \mathbb{R}$.

2. Es fácil deducir de lo anterior que un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es invariante si y sólo si $\sigma_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. La órbita de un elemento $\omega \in \Omega$ es invariante. Las semiórbitas positiva y negativa son positivamente y negativamente invariantes, respectivamente.

4. El lema de Zorn asegura que todo compacto σ -invariante contiene un minimal.

5. Es fácil probar que un compacto σ -invariante \mathcal{M} es minimal si y sólo si la órbita de cada uno de sus elementos es densa en \mathcal{M} .

Definición 1.5. Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \Omega$ un conjunto abierto tal que la sección $\mathcal{U}_\omega := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, \omega) \in \mathcal{U}\}$ es un intervalo abierto de \mathbb{R} (acotado o no) que contiene a 0 para todo $\omega \in \Omega$. Un *flujo real, continuo y local* sobre Ω está definido por una aplicación continua

$$\begin{aligned} \sigma: \mathcal{U} &\rightarrow \Omega \\ (t, \omega) &\mapsto \sigma(t, \omega) =: \sigma_t(\omega) \end{aligned}$$

que satisface (f1) para todo $\omega \in \Omega$, y tal que si $\omega \in \Omega$ y $t, s \in \mathbb{R}$ cumplen $t, t+s \in \mathcal{U}_\omega$ entonces $t \in \mathcal{U}_{\omega.s}$ y se cumple (f2). Los términos real y continuo se omiten a menudo cuando esto no da lugar a confusión.

Las siguientes definiciones se refieren a un flujo local $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$.

Definiciones 1.6. La σ -órbita de un punto $\omega \in \Omega$ es el conjunto

$$\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathcal{U}_\omega\} \subseteq \Omega;$$

y es *global* si $\mathcal{U}_\omega = \mathbb{R}$.

Los conjuntos $\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathcal{U}_\omega \cap \mathbb{R}^+\}$ y $\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathcal{U}_\omega \cap \mathbb{R}^-\}$ son las σ -*semiórbitas positiva* y *negativa* de ω ; y son *globales* si $\mathcal{U}_\omega \supset \mathbb{R}^+$ y $\mathcal{U}_\omega \supset \mathbb{R}^-$, respectivamente.

Un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es σ -*invariante* si $\sigma_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un subconjunto $\mathcal{M} \subset \Omega$ es *positivamente σ -invariante* o *negativamente σ -invariante* si $\sigma_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ o $t \in \mathbb{R}^-$, respectivamente.

Un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es σ -*minimal* si es compacto, σ -invariante y el único conjunto compacto y σ -invariante que contiene es él mismo.

Nota 1.7. Conviene señalar que la definición de conjunto invariante \mathcal{M} para un flujo local impone que $\mathcal{U}_\omega = \mathbb{R}$ para todo $\omega \in \mathcal{M}$. En particular, σ está globalmente definido en $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$. En el caso de positivamente (o negativamente) invariante, es preciso que $\mathcal{U}_\omega \supset \mathbb{R}^+$ (o $\mathcal{U}_\omega \supset \mathbb{R}^-$) para todo $\omega \in \mathcal{M}$.

Definición 1.8. Un *semiflujo real, continuo y global* sobre Ω está definido por una aplicación continua

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R}^+ \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, \omega) &\mapsto \sigma(t, \omega) =: \sigma_t(\omega) \end{aligned}$$

que satisface (f1) para todo $\omega \in \Omega$, y (f2) para todos $\omega \in \Omega$ y $t, s \in \mathbb{R}^+$. El semiflujo se representa por $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$. Los términos real, continuo y global se omiten a menudo cuando esto no da lugar a confusión.

Las siguientes definiciones se refieren a un semiflujo global $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$.

Definiciones 1.9. La σ -*semiórbita (positiva)* de un punto $\omega \in \Omega$ es el conjunto

$$\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathbb{R}^+\} \subseteq \Omega.$$

Un subconjunto $\mathcal{M} \subset \Omega$ es *positivamente σ -invariante* si $\sigma_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es *σ -minimal* si es compacto, positivamente σ -invariante y el único conjunto compacto y positivamente σ -invariante que contiene es él mismo.

El semiflujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ es *minimal* o *recurrente* si Ω es minimal.

Nota 1.10. 1. El lema de Zorn asegura que todo compacto positivamente σ -invariante contiene un minimal.

2. En el caso de semiflujo, es fácil probar que un compacto positivamente σ -invariante \mathcal{M} es σ -minimal si y sólo si la semiórbita de cada uno de sus elementos es densa en \mathcal{M} .

Definición 1.11. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ tal que la sección $\mathcal{U}_\omega := \{t \in \mathbb{R}^+ \mid (t, \omega) \in \mathcal{U}\}$ es de la forma $[0, \beta_\omega)$ con $\beta_\omega \leq \infty$. Un *semiflujo real, continuo y local* sobre Ω está definido por una aplicación continua

$$\begin{aligned} \sigma: \mathcal{U} &\rightarrow \Omega \\ (t, \omega) &\mapsto \sigma(t, \omega) =: \sigma_t(\omega) \end{aligned}$$

que satisface (f1) para todo $\omega \in \Omega$, y tal que si $\omega \in \Omega$ y $t, s \in \mathbb{R}^+$ cumplen $t, t+s \in \mathcal{U}_\omega$ entonces $t \in \mathcal{U}_{\omega.s}$ y se cumple (f2).

Las siguientes definiciones se refieren a un semiflujo local $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$.

Definiciones 1.12. La *σ -semiórbita (positiva)* de un punto $\omega \in \Omega$ es el conjunto

$$\{\sigma_t(\omega) \mid t \in \mathcal{U}_\omega\} \subseteq \Omega;$$

y es *global* si $\mathcal{U}_\omega = \mathbb{R}^+$.

Un subconjunto $\mathcal{M} \subset \Omega$ es *positivamente σ -invariante* si $\sigma_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es *σ -minimal* si es compacto, positivamente σ -invariante y el único conjunto compacto y positivamente σ -invariante que contiene es él mismo.

Nota 1.13. Para que \mathcal{M} sea positivamente invariante es preciso que $\mathcal{U}_\omega = \mathbb{R}^+$ para todo $\omega \in \mathcal{M}$. En particular, σ está globalmente definido en $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}$.

La siguiente definición se refiere a cualquiera de los casos anteriores.

Definición 1.14. Sea $\omega \in \Omega$. Supongamos que la semiórbita positiva de ω es global, y que es relativamente compacta en Ω . El *conjunto omega-límite* $\mathcal{O}(\omega)$ del punto $\omega \in \Omega$ (o de su semiórbita) es el conjunto de límites de sucesiones de la forma $(\sigma_{t_m}(\omega))$ con $(t_m) \uparrow \infty$.

El siguiente resultado es bien conocido. Véase por ejemplo [46].

Proposición 1.15. *Todo conjunto omega-límite es compacto y σ -invariante (en el caso de un flujo) o positivamente σ -invariante (en el caso de un semiflujo).*

Corolario 1.16. *Si $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es minimal, entonces \mathcal{M} coincide con el omega-límite de cada uno de sus puntos.*

1.2.2. Extensiones hacia atrás en el caso de semiflujos

Los siguientes conceptos y resultados jugarán un papel fundamental en el Capítulo 3.

Definición 1.17. Sean $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ un semiflujo continuo y $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ un conjunto compacto y positivamente σ -invariante. Un punto $\omega \in \mathcal{M}$ admite una extensión hacia atrás en \mathcal{M} si existe una aplicación continua $\theta_\omega: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathcal{M}$ tal que

1. $\theta_\omega(0) = \omega$,
2. $\sigma(t, \theta_\omega(s)) = \theta_\omega(t + s)$ siempre que $s \leq -t \leq 0$.

Nota 1.18. Utilizaremos a menudo la expresión “admite *al menos* una extensión hacia atrás en \mathcal{M} ” para enfatizar el hecho de que tal extensión puede no ser única.

El siguiente resultado está demostrado en la Proposición II.2.1 de [45]. La segunda afirmación es una consecuencia inmediata de la primera y del Corolario 1.16.

Proposición 1.19. *Sean $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ un semiflujo continuo y $\omega \in \Omega$ un punto con semiórbita global y relativamente compacta. Entonces cualquier elemento del conjunto omega-límite $\mathcal{O}(\omega)$ admite al menos una extensión hacia atrás en $\mathcal{O}(\omega)$.*

En particular, si $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ es σ -minimal, entonces cualquier $\omega \in \mathcal{M}$ admite al menos una extensión hacia atrás en \mathcal{M} .

Definición 1.20. Un semiflujo continuo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ admite una extensión continua a flujo si existe un flujo continuo $(\Omega, \tilde{\sigma}, \mathbb{R})$ tal que $\tilde{\sigma}|_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} = \sigma$.

Definición 1.21. Sean $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ un semiflujo continuo y $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ un conjunto compacto y positivamente σ -invariante. El conjunto \mathcal{M} admite una extensión continua a flujo si lo hace la restricción del semiflujo a $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}$.

El Teorema II.2.3 de [45] prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.22. *Sean $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ un semiflujo continuo y $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ un conjunto compacto y positivamente σ -invariante. Entonces \mathcal{M} admite una extensión continua a flujo si y sólo si todo $\omega \in \mathcal{M}$ admite una única extensión hacia atrás en \mathcal{M} .*

1.2.3. Semiflujos *skew-product*

Sea $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo continuo global sobre un espacio métrico compacto Ω , y sea X un espacio de Banach. Representamos por $\omega \cdot t := \sigma_t(\omega) = \sigma(t, \omega)$.

Definición 1.23. Un flujo continuo (local o global) $(\Omega \times X, \Pi, \mathbb{R})$ es un *flujo skew-product con base* $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ y *fibra* X si la aplicación Π que lo define es de la forma

$$\begin{aligned} \Pi: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times \Omega \times X &\rightarrow \Omega \times X \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)). \end{aligned}$$

Nota 1.24. Es fácil comprobar que la aplicación Π determina un flujo si y sólo si la aplicación

$$\begin{aligned} u: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X &\rightarrow X \\ (t, \omega, x) &\mapsto u(t, \omega, x) \end{aligned}$$

cumple las siguientes propiedades:

- (u1) $u(0, \omega, x) = (\omega, x)$ para todo $(\omega, x) \in \Omega \times X$,
- (u2) si $(\omega, x) \in \Omega \times X$ y $t, s \in \mathbb{R}^+$ cumplen $t, t+s \in \mathcal{U}_{\omega, x}$ entonces $t \in \mathcal{U}_{\omega \cdot s, u(s, \omega, x)}$ y $u(t+s, \omega, x) = u(t, \omega \cdot s, u(s, \omega, x))$.

La segunda de estas propiedades se llama *propiedad de cociclo*. También se dice que la aplicación u *determina un cociclo en* $\Omega \times X$.

Supongamos ahora que $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ es un semiflujo global sobre un espacio métrico compacto Ω .

Definición 1.25. Un semiflujo continuo (local o global) $(\Omega \times X, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es un *semiflujo skew-product con base* $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ y *fibra* X si la aplicación Π que lo define es de la forma

$$\begin{aligned} \Pi: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X &\rightarrow \Omega \times X \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)). \end{aligned}$$

Nota 1.26. 1. En este caso, Π determina un semiflujo si y sólo si la aplicación u cumple (u1) para todo $(\omega, x) \in \Omega \times X$, y si $(\omega, x) \in \Omega \times X$ y $t, s \in \mathbb{R}^+$ cumplen $t, t+s \in \mathcal{U}_{\omega, x}$ entonces $t \in \mathcal{U}_{\omega \cdot s, u(s, \omega, x)}$ y $u(t+s, \omega, x) = u(t, \omega \cdot s, u(s, \omega, x))$.

2. Es habitual suponer que la base de un semiflujo skew-product es de hecho un flujo.

Completamos la sección con la definición de un tipo especial de semiflujos skew-product.

Definición 1.27. Un semiflujo skew-product global $(\Omega \times X, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es *lineal* si la aplicación $X \rightarrow X$, $x \mapsto u(t, \omega, x)$ es lineal para $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$.

1.2.4. Flujos casi periódicos

Completamos esta parte con la definición de flujo casi periódico, y dos caracterizaciones que utilizaremos en la Sección 2.4.1.

Definición 1.28. Sea Ω un espacio métrico compacto. Un flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ global es *casi periódico* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si los puntos $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ cumplen $d_\Omega(\omega_1, \omega_2) < \delta$, entonces $d_\Omega(\sigma_t(\omega_1), \sigma_t(\omega_2)) < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Las caracterizaciones que vamos a explicar requieren los conceptos siguientes:

Definición 1.29. Un conjunto $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ es *relativamente denso* en \mathbb{R} si existe $L > 0$ tal que $[a, a + L] \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definiciones 1.30. Sean X e Y dos espacios métricos con distancias d_X y d_Y , y sea $C(X, Y)$ el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y .

Una familia \mathcal{F} de $C(X, Y)$ es *equicontinua en un punto* $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $x \in X$ y $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

La familia \mathcal{F} es *equicontinua en X* si es equicontinua en todo punto $x_0 \in X$.

El siguiente resultado, que utilizaremos varias veces, es una consecuencia de los Teoremas I.2.9 de [45] y IV.2.9 de [9]. (De hecho la equivalencia entre las afirmaciones (1) y (3) es trivial).

Teorema 1.31. Sea $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo global y continuo en un espacio métrico compacto, y sea $\sigma_t(\omega) := \sigma(t, \omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) El flujo es casi periódico.
- (2) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto \mathcal{Q}_ε relativamente denso en \mathbb{R} tal que $d_\Omega(\sigma(T, \omega), \omega) \leq \varepsilon$ para todos $T \in \mathcal{Q}_\varepsilon$ y $\omega \in \Omega$.
- (3) La familia $\{\sigma_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua.

1.3. Funciones casi periódicas

En esta sección introduciremos el concepto de función casi periódica. Presentaremos dos definiciones, veremos que son equivalentes, y analizaremos varias de sus propiedades. Todas son propiedades bien conocidas que pueden encontrarse en el Capítulo 1 de Fink [11]. Incluimos de todos modos las pruebas, ya que en la Sección 2.4.1 enunciaremos resultados más generales cuyas demostraciones reproducen las de esta sección.

La primera definición de casi periodicidad utiliza la noción de conjunto relativamente denso: véase la Definición 1.29.

Definición 1.32. Una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *Bohr casi periódica* si es continua y para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\mathcal{P}_\varepsilon := \{T \in \mathbb{R} \mid |g(t+T) - g(t)| < \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\} \quad (1.5)$$

es relativamente denso en \mathbb{R} .

Es inmediato comprobar que las funciones periódicas cumplen la Definición 1.32. En este sentido puede entenderse que el concepto de función casi periódica es una generalización del concepto de función periódica.

Teorema 1.33. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Bohr casi periódica. Entonces,

- (i) g es uniformemente continua en \mathbb{R} .
- (ii) El conjunto imagen $\{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en \mathbb{R} .

Demostración. (i) Fijamos $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{P}_{\varepsilon/3}$ el conjunto definido por la expresión (1.5) correspondiente a $\varepsilon/3$, y $L = L(\mathcal{P}_{\varepsilon/3}) > 0$ una constante tal que $[a, a+L] \cap \mathcal{P}_{\varepsilon/3} \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (véase la Definición 1.29). Tomamos $t, s \in \mathbb{R}$, y suponemos sin pérdida de generalidad que $t < s \leq t+1$. Sea $T \in \mathcal{P}_{\varepsilon/3} \cap [-t, -t+L]$. Entonces,

$$|g(t) - g(s)| \leq |g(t) - g(t+T)| + |g(t+T) - g(s+T)| + |g(s+T) - g(s)|.$$

Sabemos que $|g(t) - g(t+T)| \leq \varepsilon/3$ y $|g(s+T) - g(s)| \leq \varepsilon/3$. Como $t+T \in [0, L]$ y $s+T \in [0, L+1]$, tenemos que $t+T, s+T \in [0, L+1]$. La continuidad uniforme de g en $[0, L+1]$ proporciona $\delta = \delta(\varepsilon/3)$ tal que si $a, b \in [0, L+1]$ cumplen $|a - b| < \delta$ entonces $|g(a) - g(b)| \leq \varepsilon/3$. Por lo tanto, si $|t - s| < \delta$, entonces $|g(t+T) - g(s+T)| \leq \varepsilon/3$. Así, para el ε que hemos fijado, hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$, entonces $|g(t) - g(s)| \leq \varepsilon$. Esto demuestra la continuidad uniforme.

(ii) Fijamos $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto \mathcal{P}_ε por (1.5), y buscamos una constante $L = L(\varepsilon) > 0$ tal que $[a, a+L] \cap \mathcal{P}_\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Tomamos $t \in \mathbb{R}$ y $T \in \mathcal{P}_\varepsilon \cap [-t, -t+L]$. Sea $\mathcal{K} := g([0, L])$. Como \mathcal{K} es compacto en \mathbb{R} , existen $a_1, \dots, a_m \in [0, L]$ tales que

$$\mathcal{K} \subset (g(a_1) - \varepsilon, g(a_1) + \varepsilon) \cup \dots \cup (g(a_m) - \varepsilon, g(a_m) + \varepsilon).$$

Escribimos $g(t) = g(t) - g(t+T) + g(t+T)$. Como $t+T \in [0, L]$, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $|g(t+T) - g(a_j)| \leq \varepsilon$. Además $|g(t) - g(t+T)| \leq \varepsilon$, y por tanto $|g(t) - g(a_j)| \leq 2\varepsilon$. En otras palabras, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe un $j_t \in \{1, \dots, m\}$ tal que $|g(t) - g(a_{j_t})| \leq 2\varepsilon$, lo que quiere decir que

$$\{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq (g(a_1) - 2\varepsilon, g(a_1) + 2\varepsilon) \cup \dots \cup (g(a_m) - 2\varepsilon, g(a_m) + 2\varepsilon).$$

Esto demuestra que la imagen de g es un precompacto de \mathbb{R} . Como \mathbb{R} es un espacio métrico completo, la adherencia de $\{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es precompacta y completa, luego es compacta. Es decir, la imagen de g es relativamente compacta en \mathbb{R} . \square

Definición 1.34. Una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *Bochner casi periódica* si es continua y para toda sucesión (t_m) de \mathbb{R} existen una subsucesión (t_k) y una función $g^* \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tales que (g_{t_k}) converge a g^* uniformemente en \mathbb{R} .

Proposición 1.35. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Bochner casi periódica. Entonces,

- (i) g está acotada.
- (ii) Si g^* es el límite uniforme en \mathbb{R} de una sucesión (g_{t_m}) , entonces g^* es continua y acotada, y g es el límite uniforme en \mathbb{R} de la sucesión $(g_{-t_m}^*)$.

Demostración. (i) Razonemos por reducción al absurdo. Si g no está acotada entonces existe una sucesión (t_m) en \mathbb{R} tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} |g(t_m)| = \infty$. Entonces, para cualquier subsucesión (t_k) , la sucesión $(g_{t_k}(0)) = (g(t_k))$ no puede converger a un punto real, y esto contradice la Definición 1.34.

- (ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces

$$|g(t + t_m) - g^*(t)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$|g(s) - g^*(s - t_m)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R},$$

lo cual asegura que la sucesión $(g_{-t_m}^*)$ converge a g uniformemente en \mathbb{R} . \square

Denotamos por $C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de las aplicaciones continuas y acotadas de \mathbb{R} en \mathbb{R} dotado con la norma del supremo, $\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Recordemos que una sucesión (f_m) converge a f en $C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si y sólo si converge uniformemente en \mathbb{R} .

Definición 1.36. Sea $g \in C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Su *envolvente* es el conjunto

$$\Omega = \Omega(g) := \text{clausura}_{C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \{g_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Proposición 1.37. La aplicación $g \in C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es Bochner casi periódica si y sólo si su envolvente $\Omega = \Omega(g)$ es un espacio métrico compacto para la distancia $d_\Omega(f_1, f_2) := \|f_1 - f_2\|_\infty$.

Demostración. Supongamos que g es Bochner casi periódica. Sea (f_m) una sucesión en Ω . La definición de envolvente proporciona, para cada $m \in \mathbb{N}$, $t_m \in \mathbb{R}$ tal que $|g_{t_m}(t) - f_m(t)| < 1/m$ para todo $t \in \mathbb{R}$. La Definición 1.34 proporciona una subsucesión (t_k) de (t_m) y una función g^* tales que g_{t_k} converge a g^* uniformemente en \mathbb{R} . Tomamos la subsucesión (f_k) de (f_m) dada por los mismos

índices que (t_k) , y concluimos que (f_k) converge a g^* uniformemente en \mathbb{R} . Esto demuestra que Ω es un compacto.

El recíproco es inmediato. \square

Veamos ahora que las definiciones de aplicación Bochner casi periódica y Bohr casi periódica son equivalentes. El resultado, enunciado en el Teorema 1.39, se basa en el siguiente lema técnico de caracterización de aplicación Bochner casi periódica.

Lema 1.38. *Sea $g \in C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Son equivalentes:*

- (1) g es Bochner casi periódica.
- (2) Para todo $\varepsilon > 0$ existen una cantidad finita de puntos $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ y una aplicación $n: \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tales que $|g(t+s) - g(t+a_{n(s)})| \leq \varepsilon$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Fijamos $\varepsilon > 0$ y usamos la compacidad de la envolvente Ω de g garantizada por la Proposición 1.37 para encontrar f_1, \dots, f_m en Ω tales que para toda función $f \in \Omega$ existe $i \in \{1, \dots, m\}$ con $\|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/2$. La definición de envolvente nos permite también buscar para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ un punto $a_i \in \mathbb{R}$ con $\|f_i - g_{a_i}\|_\infty < \varepsilon/2$. De modo que dada $f \in \Omega$ existe $i \in \{1, \dots, m\}$ con $\|f - g_{a_i}\|_\infty < \varepsilon$. Dado $s \in \mathbb{R}$, utilizamos el hecho de que $g_s \in \Omega$ para encontrar $n(s) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\|g_s - g_{a_{n(s)}}\|_\infty < \varepsilon$. Esto prueba (2).

(2) \Rightarrow (1) Es inmediato deducir de (2) que el conjunto $\{g_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es un precompacto en $C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Por tanto su clausura Ω es compacta, y la Proposición 1.37 demuestra que g es Bochner casi periódica. \square

Teorema 1.39. *Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

- (1) g es Bohr casi periódica.
- (2) g es Bochner casi periódica.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Fijamos $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{P}_{\varepsilon/2}$ el conjunto definido por la expresión (1.5) correspondiente a $\varepsilon/2$. El Teorema 1.33(i) asegura que g es uniformemente continua. Por lo tanto existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|g(t) - g(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } |t - s| < \delta. \quad (1.6)$$

Y como $\mathcal{P}_{\varepsilon/2}$ es relativamente denso, existe $L = L(\varepsilon) > 0$ tal que $[a, a+L] \cap \mathcal{P}_{\varepsilon/2} \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (véase la Definición 1.29).

Buscamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $L \leq m\delta$, y definimos $a_j := j\delta$ para $j = 1, \dots, m$, de modo que

$$[0, L] \subseteq [0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{m-1}, a_m]. \quad (1.7)$$

Para cada $s \in \mathbb{R}$ existe $T = T(s) \in [-s, -s + L] \cap \mathcal{P}_{\varepsilon/2}$, de modo que

$$|g(t + s) - g(t + s + T)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como $s + T = s + T(s) \in [0, L]$, existe $n(s) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $|s + T - a_{n(s)}| < \delta$, lo que junto con (1.6) asegura que

$$|g(t + s + T) - g(t + a_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que $n(s)$ sólo depende de s y de ε , y que

$$|g(t + s) - g(t + a_{n(s)})| \leq \varepsilon \quad \text{para todos } t, s \in \mathbb{R}.$$

El Lema 1.38 asegura que g es Bochner casi periódica.

(2) \Rightarrow (1) Fijamos $\varepsilon > 0$. El Lema 1.38 proporciona una cantidad finita de puntos $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ y una aplicación $n: \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tales que

$$|g(t + s) - g(t + a_{n(s)})| \leq \varepsilon \quad \text{para todos } t, s \in \mathbb{R}.$$

Es consecuencia, sustituyendo t por $t - a_{n(s)}$, tenemos que

$$|g(t + s - a_{n(s)}) - g(t)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esto garantiza que $s - a_{n(s)}$ pertenece al conjunto \mathcal{P}_ε definido por (1.5) para todo $s \in \mathbb{R}$. Tomamos $L := \max\{|a_1|, \dots, |a_m|\}$. Entonces, $[s - L, s + L] \cap \mathcal{P}_\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Esta propiedad significa que \mathcal{P}_ε es relativamente denso en \mathbb{R} , lo que demuestra que g es Bohr casi periódica. \square

El resultado anterior nos permite hablar simplemente de función *casi periódica*: una de tales funciones cumple simultáneamente las condiciones de las Definiciones 1.32 y 1.34.

Completamos la sección y el capítulo con un resultado que relaciona flujos y funciones casi periódicas.

Proposición 1.40. *Sean Ω un espacio métrico compacto y $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo casi periódico. Sea $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\begin{aligned} g_\omega: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(\sigma(t, \omega)) \end{aligned}$$

es una función casi periódica para todo $\omega \in \Omega$.

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. La continuidad uniforme de g en el compacto Ω

proporciona $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|g(\omega_1) - g(\omega_2)| < \varepsilon \quad \text{si } d_\Omega(\omega_1, \omega_2) < \delta.$$

Sea \mathcal{Q}_δ el conjunto proporcionado por el Teorema 1.31(2). Entonces, si $T \in \mathcal{Q}_\delta$, tenemos

$$d_\Omega(\sigma(t+T, \omega), \sigma(t, \omega)) = d_\Omega(\sigma(T, \sigma(t, \omega)), \sigma(t, \omega)) < \delta$$

para todos $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$, y por tanto

$$|g_\omega(t+T) - g_\omega(t)| = |g(\sigma(t+T, \omega)) - g(\sigma(t, \omega))| < \varepsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto el conjunto relativamente denso \mathcal{Q}_δ está contenido en el conjunto \mathcal{P}_ε de la Definición 1.32, lo cual asegura que g_ω es una función casi periódica. \square

Capítulo 2

Propiedades dinámicas

El objetivo global de este capítulo es establecer un escenario que nos permita aplicar las técnicas habituales de dinámica topológica en el estudio del comportamiento a largo plazo de las soluciones de una ecuación con retardo dependiente del estado (en adelante ERDE) n -dimensional y no autónoma del tipo

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tilde{\tau}(t, y_t))), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

En concreto, estudiaremos soluciones con dato inicial $y_0 = x$ con $x \in W^{1,\infty}$, donde $y_t(s) = y(t+s)$ para $s \in [-r, 0]$. Recordemos que los conjuntos $W^{1,\infty}$ y C , que están definidos en la Sección 1.1, dependen de la constante $r > 0$ que acota el retardo de la ecuación.

Hay que tener en cuenta que, en el contexto de ERDEs, las propiedades de regularidad que tiene que cumplir el campo vectorial para garantizar existencia, unicidad y continuidad de soluciones de los problemas de Cauchy son mucho más exigentes que en el caso de retardo constante o de retardo dependiente del tiempo.

Además, en el caso no autónomo, las trasladadas en tiempo de las soluciones no son soluciones del problema original. De modo que las soluciones no generan un semiflujo en el espacio de estados. Sin embargo, las trasladadas en tiempo de las soluciones sí que son soluciones de las ecuaciones trasladadas en tiempo. Esto nos permite aplicar la idea de Bebutov [4] de la construcción de la envolvente para definir un semiflujo, tal y como explican Hale y Verdyun Lunel [14] e Hino, Murakami y Naito [22]. Pero en el caso de ERDEs este semiflujo no será, en general, una aplicación globalmente continua. Comprobaremos sin embargo que sí que satisface propiedades suficientes de continuidad como para posibilitar la aplicación de los métodos de dinámica topológica en el análisis.

El proceso de construcción de la envolvente proporciona un espacio métrico compacto Ω , un flujo continuo σ definido por traslación en el tiempo sobre Ω , y una familia de ERDEs

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

para $\omega \in \Omega$, donde $\omega \cdot t = \sigma(t, \omega)$. Aquí vamos a trabajar con familias de este tipo sin suponer que procedan de una inicial como (2.1). Es decir, $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ será simplemente un flujo continuo en un espacio métrico compacto, y estudiaremos la familia (2.2). De este modo el análisis será más general.

Nuestro primer objetivo, que abordaremos en la Sección 2.1, será establecer una versión global del resultado fundamental de Hartung [15], quien estableció condiciones sobre la ecuación (2.1) y sobre el dato inicial que garantizan la existencia y unicidad de solución local. Nosotros describiremos propiedades de regularidad de F y τ que nos permitan establecer la existencia y unicidad de una solución *maximal* $y(t, \omega, x)$, correspondiente a $\omega \in \Omega$ y al dato inicial $y(s, \omega, x) = x(s)$ para todo $s \in [-r, 0]$, de la ecuación (2.2). Veremos que esta solución está definida en un intervalo de la forma $[-r, \beta_{\omega, x})$ con $0 < \beta_{\omega, x} \leq \infty$. También probaremos que $\beta_{\omega, x} = \infty$ si $y(t, \omega, x)$ está acotada, y que la función $u(t, \omega, x)$ definida por $u(t, \omega, x)(s) := y(t + s, \omega, x)$ para $s \in [-r, 0]$ pertenece a $W^{1, \infty}$.

En la Sección 2.2 veremos que la aplicación

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1, \infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1, \infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)), \end{aligned}$$

que está localmente definida, determina un semiflujo skew-product al que nos referiremos como *pseudo-continuo*: un semiflujo cuya continuidad global no se puede garantizar, pero que satisface fuertes propiedades de continuidad. Estas propiedades incluyen la continuidad de

$$\Pi: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1, \infty} \rightarrow \Omega \times C;$$

de la restricción

$$\tilde{\Pi}: [r, \infty) \times \Omega \times W^{1, \infty} \rightarrow \Omega \times W^{1, \infty};$$

de la sección

$$\Pi_t: \Omega \times W^{1, \infty} \rightarrow \Omega \times W^{1, \infty}$$

para un tiempo fijo t ; y de la sección

$$\Pi_{\omega, x}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \times W^{1, \infty}$$

para cualquier (ω, x) que cumpla la *condición de compatibilidad* de pertenecer al conjunto

$$\mathcal{C}_0 := \{(\omega, x) \in \Omega \times C^1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \mid \dot{x}(0^-) = F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\};$$

es decir, para cualquier (ω, x) que determine una solución de clase C^1 en todo su intervalo de definición. Estos resultados se pueden extender fácilmente al análisis de propiedades de dependencia continua respecto de parámetros. Una consecuen-

cia de las propiedades anteriores es que la restricción de Π a cualquier compacto positivamente Π -invariante $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ define un semiflujo global continuo. Al final de la Sección 2.2 describiremos la variación Lipschitz de las soluciones de una ecuación particular con respecto del dato inicial.

El siguiente objetivo, estudiado en la Sección 2.3, se refiere a la existencia y propiedades de regularidad de la diferencial (en el sentido de Fréchet) de las soluciones con respecto a la condición inicial x . Empezaremos analizando la familia de *ecuaciones variacionales* (lineales)

$$\dot{z}(t) = L(\Pi(t, \omega, x)) z_t, \quad t \in [0, \beta_{\omega, x}) \quad (2.3)$$

para $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, donde

$$\begin{aligned} L(\omega, x)v := & D_2F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))v(0) \\ & + D_3F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))v(-\tau(\omega, x)) \\ & - D_3F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\dot{x}(-\tau(\omega, x)) \cdot D_2\tau(\omega, x)v \end{aligned}$$

para $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$ y $v \in C$. Esta ecuación es no autónoma, lineal y dependiente del tiempo: una vez fijado $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, el retardo actúa sobre $\Pi(t, \omega, x)$. El primer paso será estudiar las propiedades de continuidad de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 & \rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n) \\ (\omega, x) & \mapsto L(\omega, x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 \times C & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\omega, x, v) & \mapsto L(\omega, x)v. \end{aligned}$$

Estas propiedades son uno de los puntos clave para probar que, si $z(t, \omega, x, v)$ representa la solución de la ecuación (2.3) que coincide con $v \in W^{1,\infty}$ en $[-r, 0]$, si definimos $w(t, \omega, x, v)(s) := z(t + s, \omega, x, v)$ para $s \in [-r, 0]$, y si \mathcal{K} es un subconjunto compacto Π -invariante de $\Omega \times W^{1,\infty}$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty} & \rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) & \mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)) \end{aligned}$$

define un nuevo semiflujo skew-product (lineal en este caso) pseudo-continuo sobre $\mathcal{K} \times W^{1,\infty}$. La importancia de este resultado reside en el hecho de que $w(t, \omega, x, v) = u_x(t, \omega, x)v$; es decir, que $w(t, \omega, x, \cdot)$ representa la diferencial (en el sentido de Fréchet) con respecto a la variable de estado de la Π -semiórbita correspondiente a un punto de \mathcal{C}_0 . Esta última propiedad relativa a la aplicación $u_x(t, \omega, x): W^{1,\infty} \rightarrow W^{1,\infty}$ está probada para una solución local en Hartung [15], pero consideramos conveniente completar el estudio que realizamos aquí incluyendo en la Sección 2.3 algunos de los pasos de la demostración adaptados a

nuestra formulación: estos detalles son relevantes para entender las propiedades de regularidad del semiflujo pseudo-continuo generado por u_x . Tales propiedades hacen que $u_x(t, \omega, x)$ tenga un sentido dinámico completo, como explicamos en el siguiente párrafo. Un análisis más a fondo de algunas propiedades de regularidad de $u_x(t, \omega, x)$ completa la Sección 2.3.

Para ver que realmente estos resultados dan forma a un escenario donde se pueden aplicar métodos de dinámica topológica en el estudio de ERDEs, mostraremos algunas de sus consecuencias. Ya hemos comentado que la restricción del semiflujo pseudo-continuo Π a cualquier compacto positivamente invariante $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ determina un semiflujo continuo en \mathcal{K} . Si, además, los puntos de \mathcal{K} satisfacen la condición de compatibilidad de pertenencia al conjunto \mathcal{C}_0 , las soluciones de la familia de las *ecuaciones variacionales* (lineales) determinan el semiflujo *linealizado* de Π a lo largo de las semiórbitas de \mathcal{K} , que denotamos por

$$\begin{aligned} \Pi^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), u_x(t, \omega, x) v). \end{aligned}$$

Estos resultados serán el punto de partida para el análisis de la dinámica a largo plazo de las órbitas de \mathcal{K} , para el que podemos utilizar las propiedades del semiflujo pseudo-continuo lineal Π^L y las propiedades de continuidad de semiflujos discretos continuos dados por la iteración de la aplicación continua Π_t^L para cualquier $t > 0$. Ésta y otras cuestiones serán estudiadas en el Capítulo 3. De hecho, todos estos resultados, combinados con técnicas de sistemas monótonos (algo nuevo en ERDEs), pueden aplicarse en la descripción de modelos, como el modelo biológico de redes neuronales. Este estudio se ha llevado a cabo en el trabajo [39] de Maroto *et al.*.

En la Sección 2.4, que completa este capítulo, describiremos en detalle el proceso de construcción de la envolvente, que incluye una ecuación del tipo (2.1) en una familia (2.2). En particular, estableceremos qué propiedades de las funciones iniciales f y $\tilde{\tau}$ garantizan las condiciones de regularidad requeridas a F y τ para la obtención de los resultados de las Secciones 2.1, 2.2 y 2.3. Y prestaremos especial atención al caso casi periódico en la Subsección 2.4.1.

2.1. Existencia y unicidad de solución maximal

Sean $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo continuo sobre un espacio métrico compacto Ω y $r > 0$ un tiempo finito, que será el valor máximo del retardo. Representamos $\omega \cdot t := \sigma(t, \omega)$. Dadas dos aplicaciones

$$F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r],$$

estudiamos la siguiente familia de ERDEs no autónomas

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

para $\omega \in \Omega$. Recordemos que y_t es la función vectorial definida en $[-r, 0]$ por $y_t(s) := y(t + s)$, y que \dot{g} es la derivada con respecto a su única variable de una función g definida en un intervalo de \mathbb{R} . Representaremos por $\dot{g}(a^+)$ y $\dot{g}(a^-)$ las derivadas laterales de g en el punto a .

Hablaremos de (2.4) para referirnos a la familia y de $(2.4)_\omega$ para la ecuación correspondiente al elemento $\omega \in \Omega$.

Es frecuente que la familia (2.4) proceda de una ecuación del tipo (2.1), por el proceso de construcción de la envolvente: véase la Sección 2.4. Sin embargo, no nos restringiremos a este caso, de modo que nuestro planteamiento es más general.

Definiciones 2.1. Sean $a \geq 0$ y $b > a$.

Una función continua $y: [a - r, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *solución de $(2.4)_\omega$ en (a, b)* si para todo $t \in (a, b)$ existe $\dot{y}(t)$ y satisface

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))).$$

Una función continua $y: [a - r, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *solución de $(2.4)_\omega$ en $[a, b)$* si es solución en (a, b) y además existe $\dot{y}(a^+)$, con

$$\dot{y}(a^+) = F(\omega \cdot a, y(a), y(a - \tau(\omega \cdot a, y_a))).$$

Una función continua $y: [a - r, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *solución de $(2.4)_\omega$ en $(a, b]$* si es solución en (a, b) y además existe $\dot{y}(b^-)$, con

$$\dot{y}(b^-) = F(\omega \cdot b, y(b), y(b - \tau(\omega \cdot b, y_b))).$$

Una función continua $y: [a - r, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *solución de $(2.4)_\omega$ en $[a, b]$* si es solución en $[a, b)$ y en $(a, b]$.

Sea también la familia de problemas de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), & t \geq 0, \\ y(t) = x(t), & t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (2.5)$$

para cada $\omega \in \Omega$ y $x \in W^{1,\infty}$. Utilizaremos la notación $(2.5)_{\omega,x}$ para referirnos a un problema concreto de la familia.

Definiciones 2.2. Sea $b > 0$.

Una función continua $y: [-r, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *solución de $(2.5)_{\omega,x}$ en $[0, b]$* si es

solución de $(2.4)_\omega$ en $[0, b)$ y además

$$y(s) = x(s) \text{ para todo } s \in [-r, 0]. \quad (2.6)$$

Una función continua $y: [-r, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *solución de $(2.5)_{\omega, x}$ en $[0, b]$* si es solución de $(2.4)_\omega$ en $[0, b]$ y además se cumple (2.6).

El objetivo fundamental de esta sección es establecer la existencia y unicidad de solución maximal de cada problema de Cauchy, lo que haremos bajo las siguientes propiedades de F y τ :

- H1 (1) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.
 (2) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz-continua en sus segundo y tercer argumentos en el siguiente sentido: para cualquier par de compactos \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 de \mathbb{R}^n , existe una constante $L = L(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) > 0$ tal que

$$|F(\omega, y_1, y_2) - F(\omega, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| \leq L (|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2|)$$

para todos $\omega \in \Omega$, $y_1, \tilde{y}_1 \in \mathcal{K}_1$ e $y_2, \tilde{y}_2 \in \mathcal{K}_2$.

- H2 (1) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es continua.
 (2) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para cada compacto $\mathcal{M} \subset C$ existe una constante $L_2 = L_2(\mathcal{M}) > 0$ tal que

$$|\tau(\omega, x) - \tau(\omega, \tilde{x})| \leq L_2 \|x - \tilde{x}\|_C$$

para todos $\omega \in \Omega$ y $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$.

Más adelante necesitaremos propiedades de diferenciabilidad sobre F y τ , que introduciremos en su debido momento.

En adelante utilizaremos \dot{y} para representar $(d/dt)y$ también en los casos en los que la función y tenga más argumentos.

El primer teorema de esta sección está fuertemente basado en el siguiente resultado:

Teorema 2.3. (Hartung [15], Teorema 1) *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(2) y H2(1)&(2). Entonces existe $\alpha = \alpha(\omega, x) > 0$ tal que el problema de Cauchy $(2.5)_{\omega, x}$ tiene una solución local en $[0, \alpha]$ dada por $[-r, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto y(t, \omega, x)$. Es decir, si denotamos $\dot{y}(t, \omega, x) := (d/dt)y(t, \omega, x)$, entonces*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t, \omega, x) &= F(\omega \cdot t, y(t, \omega, x), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t(\omega, x))), \omega, x) \text{ si } t \in (0, \alpha), \\ \dot{y}(0^+, \omega, x) &= F(\omega, y(0, \omega, x), x(-\tau(\omega, x))), \\ \dot{y}(\alpha^-, \omega, x) &= F(\omega \cdot \alpha, y(\alpha, \omega, x), y(\alpha - \tau(\omega \cdot \alpha, y_\alpha(\omega, x))), \omega, x), \\ y(s, \omega, x) &= x(s) \text{ si } s \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Además esta solución local es única: si $\tilde{y}(t)$ cumple $(2.5)_{\omega,x}$ en $[0, \beta]$ con $\beta \leq \alpha$, entonces $\tilde{y}(t) = y(t, \omega, x)$ para todo $t \in [-r, \beta]$.

Demostración. Sean (A1)(i), (A1)(ii), (A2)(i) y (A2)(ii) las condiciones impuestas por Hartung en la página 2 de [15]. Es sencillo comprobar que si se cumple H1(1), entonces se cumple la condición (A1)(i); si se cumple H1(2), entonces se cumple la condición (A1)(ii); si se cumple H2(1), entonces se cumple la condición (A2)(i); y si se cumple H2(2), entonces se cumple la condición (A2)(ii). Por lo tanto se cumple el Teorema 1 de [15], y este resultado prueba nuestra afirmación. \square

Corolario 2.4. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(2) y H2(1)&(2). Con la notación del Teorema 2.3,*

- (i) *sea $u(t, \omega, x)$ la función definida en $[-r, 0]$ por $u(t, \omega, x)(s) := y(t + s, \omega, x)$ para $t \in [0, \alpha]$. Entonces $u(t, \omega, x) \in W^{1,\infty}$ para todo $t \in [0, \alpha]$.*
- (ii) *Supongamos que $y_1(t)$ cumple $(2.5)_{\omega,x}$ en $[-r, \alpha_1]$ e $y_2(t)$ cumple $(2.5)_{\omega,x}$ en $[-r, \alpha_2]$, con $\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$. Entonces $y_1(t) = y_2(t)$ para todo $t \in [-r, \alpha_1]$.*

Demostración. (i) Fijamos $t \in [0, \alpha]$. La continuidad de $y(t, \omega, x)$ respecto a t en $[-r, \alpha]$ asegura que $u(t, \omega, x)(s)$ es continua respecto a s en $[-r, 0]$. Si $t \geq r$, entonces

$$\frac{d}{ds} u(t, \omega, x)(s) = \dot{y}(t + s, \omega, x) \quad \text{para } s \in [-r, 0],$$

y si $t \in [0, r]$, entonces

$$\frac{d}{ds} u(t, \omega, x)(s) = \begin{cases} \dot{x}(t + s) & \text{para } -r \leq s \leq -t, \\ \dot{y}(t + s, \omega, x) & \text{para } -t \leq s \leq 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $x \in W^{1,\infty}$ y que se cumple la propiedad H1(1), observamos que

$$\left\| \frac{d}{ds} u(t, \omega, x)(s) \right\|_{L^\infty} < \infty.$$

Por tanto, $u(t, \omega, x) \in W^{1,\infty}$.

(ii) La prueba de este punto es estándar en la teoría de ecuaciones diferenciales, pero la incluimos por completitud. La unicidad garantizada por el Teorema 2.3 proporciona $\alpha > 0$ tal que $y_1(t) = y_2(t)$ en $[-r, \alpha]$. Sea

$$\tilde{\alpha} := \sup\{\alpha \leq \alpha_1 \mid y_1(t) = y_2(t) \text{ en } [-r, \tilde{\alpha}]\}.$$

Por continuidad, $y_1(t) = y_2(t)$ en $[-r, \tilde{\alpha}]$. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que $\tilde{\alpha} < \alpha_1$. En tal caso, y_1 e y_2 proporcionan dos soluciones locales distintas del problema $(2.5)_{\omega, \tilde{\alpha}, (y_1)_{\tilde{\alpha}}}$, lo que contradice el Teorema 2.3. \square

Nuestro objetivo ahora es extender este resultado local a un resultado de existencia y unicidad de solución maximal de cada problema de Cauchy $(2.5)_{\omega,x}$.

Por *maximalidad* entendemos que la solución no puede prolongarse a la derecha del intervalo de definición. Comprobaremos también que el intervalo maximal es una semirrecta en caso de soluciones acotadas.

La noción de familia equicontinua, que se empleará a menudo en el resto de este capítulo se recuerda en la Definición 1.30.

Teorema 2.5. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(2) y H2(1)&(2). Entonces,*

- (i) *dados $\omega \in \Omega$ y $x \in W^{1,\infty}$, existe una única solución maximal $y(t, \omega, x)$ del problema de Cauchy (2.5) $_{\omega, x}$, que está definida para $t \in [-r, \beta_{\omega, x}]$ con $0 < \beta_{\omega, x} \leq \infty$ y es solución de (2.5) $_{\omega, x}$ en $[0, \beta_{\omega, x}]$.*

Definimos ahora

$$u(t, \omega, x)(s) := y(t + s, \omega, x) \quad (2.7)$$

para $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$, $t \in [0, \beta_{\omega, x}]$, y $s \in [-r, 0]$. Entonces,

- (ii) *$u(t, \omega, x) \in W^{1,\infty}$ para $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ y $t \in [0, \beta_{\omega, x}]$.*
 (iii) *Si $\sup_{t \in [0, \beta_{\omega, x}]} \|u(t, \omega, x)\|_C < \infty$, entonces $\beta_{\omega, x} = \infty$.*

Demostración. (i) Fijamos $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ y tomamos $\alpha > 0$ y una solución $y^\alpha(t, \omega, x)$ de (2.5) $_{\omega, x}$ en $[0, \alpha]$. La existencia de un valor así de α está asegurada por el Teorema 2.3.

Veamos que $y^\alpha(t, \omega, x)$ puede prolongarse a la derecha de α . Para ello, definimos $u^\alpha(t, \omega, x)$ para $t \in [0, \alpha]$ por

$$u^\alpha(t, \omega, x)(s) := y^\alpha(t + s, \omega, x) \quad \text{para } s \in [-r, 0].$$

El Corolario 2.4(i) asegura que $u^\alpha(t, \omega, x) \in W^{1,\infty}$ para todo $t \in [0, \alpha]$. Definimos

$$\omega_1 := \omega \cdot \alpha \quad \text{y} \quad x_1 := u^\alpha(\alpha, \omega, x).$$

El Teorema 2.3 aplicado ahora a (2.5) $_{\omega_1, x_1}$ asegura la existencia de $\tilde{\alpha} > 0$ y de una función $y^{\tilde{\alpha}}(t, \omega_1, x_1)$ que resuelve el problema de Cauchy (2.5) $_{\omega_1, x_1}$ en $[0, \tilde{\alpha}]$. De este modo,

$$y^{\tilde{\alpha}}(s, \omega_1, x_1) = x_1(s) = u^\alpha(\alpha, \omega, x)(s) = y^\alpha(\alpha + s, \omega, x)$$

para todo $s \in [-r, 0]$, y por tanto

$$y^{\tilde{\alpha}}(t - \alpha, \omega_1, x_1) = y^\alpha(t, \omega, x)$$

para todo $t \in [\alpha - r, \alpha]$. Así vemos que la función

$$y^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t, \omega, x) := \begin{cases} y^\alpha(t, \omega, x) & \text{para } t \in [-r, \alpha], \\ y^{\tilde{\alpha}}(t - \alpha, \omega_1, x_1) & \text{para } t \in [\alpha, \alpha + \tilde{\alpha}] \end{cases}$$

es continua en $[-r, \alpha + \tilde{\alpha}]$. Definimos también

$$\begin{aligned} u^{\tilde{\alpha}}(t, \omega_1, x_1)(s) &:= y^{\tilde{\alpha}}(t + s, \omega_1, x_1) \quad \text{para } t \in [0, \tilde{\alpha}] \text{ y } s \in [-r, 0], \\ u^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t, \omega, x)(s) &:= y^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t + s, \omega, x) \quad \text{para } t \in [0, \alpha + \tilde{\alpha}] \text{ y } s \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Veamos que $y^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t, \omega, x)$ cumple la ecuación (2.4) $_{\omega}$ en los intervalos cerrados $[0, \alpha]$ y $[\alpha, \alpha + \tilde{\alpha}]$. Esta afirmación es inmediata en $[0, \alpha]$, donde $y^{\alpha + \tilde{\alpha}}$ coincide con y^{α} . Para probarla en $[\alpha, \alpha + \tilde{\alpha}]$, definimos $\tilde{t} := t - \alpha$ para $t \in [\alpha, \alpha + \tilde{\alpha}]$, de modo que $\tilde{t} \in [0, \tilde{\alpha}]$. Observamos que

$$\begin{aligned} \omega_1 \cdot \tilde{t} &= \omega \cdot \alpha \cdot (t - \alpha) = \omega \cdot t, \\ y^{\tilde{\alpha}}(\tilde{t} - s, \omega_1, x_1) &= y^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t - s, \omega, x) \quad \text{para } s \in [-r, 0], \\ u^{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}, \omega_1, x_1) &= u^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t, \omega, x), \end{aligned}$$

y deducimos que

$$\begin{aligned} \dot{y}^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t, \omega, x) &= \dot{y}^{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}, \omega_1, x_1) \\ &= F(\omega_1 \cdot \tilde{t}, y^{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}, \omega_1, x_1), y^{\tilde{\alpha}}(\tilde{t} - \tau(\omega_1 \cdot \tilde{t}), u^{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}, \omega_1, x_1)), \omega_1, x_1) \\ &= F(\omega \cdot t, y^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t, \omega, x), y^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t - \tau(\omega \cdot t), u^{\alpha + \tilde{\alpha}}(t, \omega, x)), \omega, x) \end{aligned}$$

para todo $t \in (\alpha, \alpha + \tilde{\alpha})$. Lo mismo sucede con las derivadas laterales en los puntos α y $\alpha + \tilde{\alpha}$.

Ahora es fácil concluir que $y^{\alpha + \tilde{\alpha}}$ cumple el problema de Cauchy (2.5) $_{\omega, x}$ en $[0, \alpha + \tilde{\alpha}]$, ya que

$$\begin{aligned} \dot{y}^{\alpha + \tilde{\alpha}}(\alpha^-, \omega, x) &= F(\omega \cdot \alpha, y^{\alpha}(\alpha, \omega, x), y^{\alpha}(\alpha - \tau(\omega \cdot \alpha), x_1), \omega, x) \\ &= F(\omega_1, y^{\tilde{\alpha}}(0, \omega_1, x_1), y^{\tilde{\alpha}}(-\tau(\omega_1, x_1), \omega_1, x_1)) \\ &= \dot{y}^{\tilde{\alpha}}(0^+, \omega_1, x_1) = \dot{y}^{\alpha + \tilde{\alpha}}(\alpha^+, \omega, x). \end{aligned}$$

Esto demuestra la afirmación sobre prolongabilidad a la derecha de un intervalo cerrado.

Definimos ahora

$$\mathcal{A} := \{\alpha > 0 \mid \text{existe } y^{\alpha}(t, \omega, x) \text{ cumpliendo (2.5)}_{\omega, x} \text{ en } [0, \alpha]\}.$$

Es evidente que si $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $[0, \alpha] \subset \mathcal{A}$. El Corolario 2.4(ii) asegura además la unicidad de $y^{\alpha}(t, \omega, x)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea $\beta := \sup \mathcal{A}$. Entonces $\beta \notin \mathcal{A}$, tal y como se deduce de la propiedad de prolongación que acabamos de probar. De modo que la función $y(t, \omega, x)$ definida para todo $t \in [-r, \beta)$ como

$$y(t, \omega, x) := \begin{cases} x(t) & \text{para } t \in [-r, 0], \\ y^t(t, \omega, x) & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

es la solución maximal de (2.5) $_{\omega,x}$.

(ii) Esta afirmación es consecuencia inmediata del Corolario 2.4(i).

(iii) Fijamos $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ y utilizamos la notación de (i). Denotamos también $\beta := \beta_{\omega,x}$, $y(t) := y(t, \omega, x)$ para $t \in [-r, \beta)$, y $u(t) := u(t, \omega, x)$ para $t \in [0, \beta)$. Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que

$$c_0 := \sup_{t \in [0, \beta)} \|u(t)\|_C < \infty \quad \text{y} \quad \beta < \infty. \quad (2.8)$$

Probaremos que, en este caso, $y(t)$ es solución de (2.5) $_{\omega,x}$ en $[0, \beta]$. De este modo podemos prolongar la solución $y(t)$ a la derecha de β , tal y como hemos visto en la demostración de (i). Esto contradice la definición de β y demuestra (iii).

Como $x \in W^{1,\infty}$ y se cumplen (2.8) y H1(1), podemos asegurar que existe $c_1 > 0$ tal que

$$|\dot{y}(t)| \leq c_1 \quad \text{para casi todo } t \in [-r, 0] \quad \text{y para todo } t \in [0, \beta),$$

lo que garantiza que

$$\left\| \frac{d}{ds} u(t)(s) \right\| \leq c_1 \quad \text{para todo } t \in [0, \beta) \quad \text{y para casi todo } s \in [-r, 0]. \quad (2.9)$$

Tomamos una sucesión $(t_m) \uparrow \beta$ con $0 \leq t_1$. Deducimos de (2.8) que la sucesión $(u(t_m))$ de elementos de C está uniformemente acotada, y de (2.9) que es equicontinua. Por lo tanto, el teorema de Arzelá-Ascoli proporciona una subsucesión (t_k) y un elemento v de C tales que

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k) \quad \text{en } C.$$

En particular,

$$v(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k)(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(t_k + s) = y(\beta + s) \quad (2.10)$$

para todo $s \in [-r, 0)$. Deducimos de aquí y de la continuidad de v que existe

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} y(\beta + s) = v(0), \quad (2.11)$$

lo que nos permite definir

$$y(\beta) := v(0) = \lim_{s \rightarrow 0^-} y(\beta + s)$$

y obtener así una función continua $y: [-r, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple (2.5) $_{\omega,x}$ en $[0, \beta)$.

Las igualdades (2.10) y (2.11) aseguran que el valor del límite v no depende

de la sucesión (t_m) elegida inicialmente. La conclusión es que existe

$$u(\beta) := \lim_{s \rightarrow 0^-} u(\beta + s) \quad \text{en } C. \quad (2.12)$$

Notemos ahora que si $s \in (-\beta, 0) \cap [-r, 0]$ entonces $\beta + s > 0$, y además

$$\dot{y}(\beta + s) = F(\omega \cdot (\beta + s), y(\beta + s), y(\beta + s - \tau(\omega \cdot (\beta + s), u(\beta + s)))) .$$

Tomando límite cuando $s \rightarrow 0^-$ encontramos

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{y}(\beta + s) = F(\omega \cdot \beta, y(\beta), y(\beta - \tau(\omega \cdot \beta, u(\beta)))) .$$

Estamos utilizando aquí la continuidad del flujo en Ω , la propiedad (2.12), la propiedad H2(1), la continuidad de y en $[-r, \beta]$ y la propiedad H1(1). El teorema del valor medio nos permite deducir de la existencia de este último límite que también existe

$$\dot{y}(\beta^-) = F(\omega \cdot \beta, y(\beta), y(\beta - \tau(\omega \cdot \beta, u(\beta)))) .$$

Por tanto, y es solución de (2.5) $_{\omega, x}$ en $[0, \beta]$, como queríamos demostrar. \square

2.2. Construcción de un semiflujo skew-product *pseudo-continuo*

Recordemos que nuestro objetivo es poder utilizar métodos de dinámica topológica en nuestro estudio. Los resultados de la sección anterior nos permiten definir un semiflujo skew-product local en el espacio producto $\Omega \times W^{1, \infty}$. Más concretamente, utilizando la notación establecida en el Teorema 2.5, definimos

$$\begin{aligned} \Pi: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1, \infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1, \infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde

$$\mathcal{U} := \{(t, \omega, x) \mid (\omega, x) \in \Omega \times W^{1, \infty}, t \in [0, \beta_{\omega, x}]\}. \quad (2.14)$$

El Teorema 2.5 asegura que la aplicación Π está bien definida. Vamos a ver algunas de sus propiedades en el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(2) y H2(1)&(2). Para cada $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1, \infty}$, sea $y(t, \omega, x)$ la solución maximal de (2.5) $_{\omega, x}$, definida en $[-r, \beta_{\omega, x})$, y sea $u(t, \omega, x)$ la función definida por (2.7) para todo $t \in [0, \beta_{\omega, x})$. Definimos también \mathcal{U} por (2.14) y Π por (2.13). Entonces:*

- (i) *el conjunto \mathcal{U} es abierto en $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1, \infty}$, y $\{0\} \times \Omega \times W^{1, \infty} \subset \mathcal{U}$.*

(ii) Π verifica las condiciones (f1) y (f2) de la Definición 1.2.

(iii) La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \Omega \times C \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \end{aligned}$$

es continua.

Definimos ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &:= \{(\omega, x) \in \Omega \times C^1 \mid \dot{x}(0^-) = F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\} \subset \Omega \times C^1, \\ \mathcal{U}^0 &:= \{(t, \omega, x) \in \mathcal{U} \mid (\omega, x) \in \mathcal{C}_0\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty}, \\ \tilde{\mathcal{U}} &:= \{(t, \omega, x) \in \mathcal{U} \mid t \geq r\} \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

y los dotamos con las correspondientes topologías de subespacio. Entonces,

(iv) la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \end{aligned}$$

es continua.

(v) Sea $\tilde{t} \geq 0$ tal que $\mathcal{U}_{\tilde{t}} := \{(\omega, x) \mid (\tilde{t}, \omega, x) \in \mathcal{U}\}$ es no vacío. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\tilde{t}} \subseteq \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1,\infty} \\ (\omega, x) &\mapsto (\omega \cdot \tilde{t}, u(\tilde{t}, \omega, x)) \end{aligned}$$

es continua.

(vi) El conjunto \mathcal{C}_0 es positivamente invariante para Π , y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^0 \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{C}_0 \subset \Omega \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \end{aligned}$$

es continua.

(vii) Si $\sup_{t \in [0, \beta_{\omega, x}]} \|u(t, \omega, x)\|_C < \infty$, entonces $\beta_{\omega, x} = \infty$ y el conjunto

$$\{(\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \mid t \in [r, \infty)\} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$$

es relativamente compacto.

Demostración. Es evidente que $\{0\} \times \Omega \times W^{1,\infty} \subseteq \mathcal{U}$. Probaremos el resto de propiedades de los puntos (i), (ii) y (iii) suponiendo primero que F está acotada, para después pasar al caso general.

(i), (ii) y (iii), **F acotada**. Tomamos $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$. Deducimos del hecho de que $x \in W^{1,\infty}$ y del carácter acotado de F que existe $c > 0$ con $\dot{y}(t, \omega, x) \leq c$ para casi todo $t \in [-r, \beta_{\omega, x}]$. El teorema fundamental del cálculo nos permite afirmar que

$$|y(t, \omega, x)| \leq ct + |y(0)|$$

para todo $t \in [0, \beta_{\omega, x}]$. Si fuera $\beta_{\omega, x} < \infty$ deduciríamos que $\|u(t, \omega, x)\|_C$ está acotada en $[0, \beta_{\omega, x}]$, lo que contradiría el Teorema 2.5(iii). En consecuencia $\beta_{\omega, x} = \infty$ para todo (ω, x) , y por tanto $\mathcal{U} = \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty}$, que es abierto.

Además Π satisface (f1): $\Pi(0, \omega, x) = (\omega, x)$ porque

$$u(0, \omega, x) = y(s, \omega, x) = x(s) \quad \text{para todo } s \in [-r, 0].$$

La unicidad de solución asegurada por el Teorema 2.5(i) implica que

$$y(t+l, \omega, x) = y(t, \omega \cdot l, u(l, \omega, x))$$

y, por lo tanto,

$$u(t+l, \omega, x) = u(t, \omega \cdot l, u(l, \omega, x)) \quad \text{para } t \geq 0 \text{ y } l \geq 0,$$

que es la propiedad (f2). Con esto ya tenemos probados los puntos (i) y (ii) para F acotada.

Para la demostración de (iii), tomamos una sucesión $((\omega_m, x_m))$ en $\Omega \times W^{1,\infty}$ con $\lim_{m \rightarrow \infty} (\omega_m, x_m) = (\tilde{\omega}, \tilde{x})$ en $\Omega \times W^{1,\infty}$. Lo primero que haremos será fijar $T > 0$ y comprobar que

$$y(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} y(t, \omega_m, x_m) \quad \text{uniformemente en } [-r, T]. \quad (2.16)$$

Sea $y_m(t) := y(t, \omega_m, x_m)$ para $t \in [-r, T]$ y $m \in \mathbb{N}$. El carácter acotado de F asegura que $\{\dot{y}_m(t) \mid t \in [0, T], m \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, lo que junto con la acotación de la sucesión $(\|x_m\|_C)$ asegura que $\{y_m(t) \mid t \in [-r, T], m \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Así que la sucesión (y_m) de funciones continuas en $[-r, T]$ está uniformemente acotada. De la acotación previa de las derivadas y de la acotación de $(\|\dot{x}_m\|_{L^\infty})$ se deduce que la sucesión (y_m) también es equicontinua. El teorema de Arzelá-Ascoli muestra que la sucesión (y_m) tiene una subsucesión (y_k) que converge uniformemente en $[-r, T]$ a una función continua \tilde{y} . En particular $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k)_l = \tilde{y}_l$ en C para todo $l \in [0, T]$. De modo que nuestro objetivo es probar que $\tilde{y}(t) = y(t, \tilde{\omega}, \tilde{x})$ para todo $t \in [-r, T]$, lo que garantiza (2.16). Si $t \in [-r, 0]$, tenemos que

$$\tilde{y}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \tilde{x}(t) = y(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}).$$

Y si $t \in (0, T]$ podemos combinar las propiedades anteriores con la continuidad del

flujo en Ω , las propiedades H2(1) y H1(1) y el teorema de convergencia uniforme para concluir que

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_k(0) + \int_0^t F(\omega_k \cdot l, y_k(l), y_k(l - \tau(\omega_k \cdot l, (y_k)_l))) dl \right) \\ &= \tilde{x}(0) + \int_0^t F(\tilde{\omega} \cdot l, \tilde{y}(l), \tilde{y}(l - \tau(\tilde{\omega} \cdot l, \tilde{y}_l))) dl.\end{aligned}$$

En consecuencia $\tilde{y}: [-r, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución del problema (2.5) $_{\omega, x}$ en $[0, T]$. Por la unicidad establecida en el Corolario 2.4(ii), deducimos que $\tilde{y}(t) = y(t, \tilde{\omega}, \tilde{x})$ en $[-r, T]$.

Para terminar la demostración en el caso de F acotada, tomamos una sucesión $((t_m, \omega_m, x_m))$ en \mathcal{U} con $\lim_{m \rightarrow \infty} (t_m, \omega_m, x_m) = (\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x})$ en \mathcal{U} , tomamos $T \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} t_m$, y fijamos $\varepsilon > 0$. La continuidad uniforme de $\tilde{y}(\cdot, \tilde{\omega}, \tilde{x})$ en $[-r, T]$ asegura que

$$\|u(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - u(t_m, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_C \leq \varepsilon/2$$

si m es suficientemente grande. La convergencia uniforme de $(y(\cdot, \omega_m, x_m))$ a $y(\cdot, \tilde{\omega}, \tilde{x})$ en $[-r, T]$ (véase (2.16)) garantiza que

$$\|u(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - u(t, \omega_m, x_m)\|_C \leq \varepsilon/2 \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

si m es suficientemente grande. Por tanto, para m suficientemente grande,

$$\begin{aligned}\|u(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - u(t_m, \omega_m, x_m)\|_C &\leq \|u(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - u(t_m, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_C + \|u(t_m, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - u(t_m, \omega_m, x_m)\|_C \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$u(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} u(t_m, \omega_m, x_m)$$

en C . Esto completa la demostración de (iii) y el caso de F acotada.

(i), (ii) y (iii), **F general**. Fijamos $(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{U}$, tomamos $T \in (\tilde{t}, \beta_{\tilde{\omega}, \tilde{x}})$, definimos

$$c := \max_{t \in [-r, T]} |y(t, \tilde{\omega}, \tilde{x})| + 1, \quad (2.17)$$

y escogemos una función $h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de clase C^1 que cumpla

$$\begin{cases} h(x) = 1 & \text{para } |x| \leq 2c, \\ h(x) = 0 & \text{para } |x| \geq 3c \end{cases}$$

para definir

$$\begin{aligned} G: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\omega, y_1, y_2) &\mapsto F(\omega, y_1, y_2) h(y_1) h(y_2). \end{aligned}$$

La función G está acotada y cumple H1(1)&(2). Consideramos el problema de Cauchy dado por (2.5) $_{\omega, x}$ con G sustituyendo a F , llamamos $y_G(t, \omega, x)$ a su única solución maximal, que está definida en $[-r, \infty)$, y definimos $u_G(t, \omega, x)(s) := y_G(t + s, \omega, x)$ para $t \in [0, \infty)$ y $s \in [-r, 0]$. Ahora podemos aplicar el punto (iii) para el problema de Cauchy con G (acotada) para obtener $\delta > 0$ tal que

$$\|u_G(t, \omega, x) - u_G(t, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_C \leq c$$

para todo $t \in [0, T]$ siempre que $d_\Omega(\omega, \tilde{\omega}) \leq \delta$ y que $\|x - \tilde{x}\|_{W^{1, \infty}} \leq \delta$. (Recordemos que d_Ω representa la distancia en el espacio métrico Ω). En particular, para estos valores de (t, ω, x) se cumple que

$$\|u_G(t, \omega, x)\|_C \leq \|u_G(t, \omega, x) - u_G(t, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_C + \|u_G(t, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_C \leq 2c.$$

Como F y G coinciden en los puntos (ω, y_1, y_2) para los que $|y_1| \leq 2c$ y $|y_2| \leq 2c$, deducimos que $y_G(t, \omega, x)$ cumple (2.5) $_{\omega, x}$ en $[0, T]$. Esto garantiza la existencia de $y(t, \omega, x)$ para $t \in [0, T]$, ω a distancia de $\tilde{\omega}$ menor que δ , y $x \in W^{1, \infty}$ a distancia de \tilde{x} menor que δ . En particular, \mathcal{U} es abierto.

La demostración de (ii) es idéntica a la del caso de F acotada.

Para demostrar (iii), tomamos una sucesión $((t_m, \omega_m, x_m))$ en \mathcal{U} con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (t_m, \omega_m, x_m) = (\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{en } \mathcal{U}.$$

Tomamos $T > \max\{t_m, m \geq 0\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $T < \beta_{\omega_m, x_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Y definimos c a partir de este valor de T , como en (2.17). Para m suficientemente grande, tenemos que

$$\|u(t_m, \omega_m, x_m)\|_C \leq \|u(t_m, \omega_m, x_m) - u(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_C + \|u(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_C \leq 2c.$$

Por tanto $y_G(t_m, \omega_m, x_m) = y(t_m, \omega_m, x_m)$ e $y_G(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) = y(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x})$. Deducimos de la continuidad en el caso acotado que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u(t_m, \omega_m, x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_G(t_m, \omega_m, x_m) = u_G(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) = u(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}),$$

lo que demuestra la continuidad en el caso general y completa la demostración de (i), (ii) y (iii).

(iv) Tomamos una sucesión $((t_m, \omega_m, x_m))$ en $\tilde{\mathcal{U}}$ con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (t_m, \omega_m, x_m) = (\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{en } \mathcal{U}. \quad (2.18)$$

Como \mathcal{U} es abierto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $t_0 \in (\tilde{t}, \beta_{\tilde{\omega}, \tilde{x}})$ tal que $t_m \leq t_0 \leq \beta_{\omega_m, x_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para simplificar la notación, definimos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$y_m(t) := y(t, \omega_m, x_m) \quad \text{e} \quad \tilde{y}(t) := y(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{para } t \in [-r, t_0],$$

así como

$$u_m(t) := u(t, \omega_m, x_m) \quad \text{y} \quad \tilde{u}(t) := u(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{para } t \in [0, t_0].$$

Sabemos por (iii) que $\|\tilde{u}(\tilde{t}) - u_m(t_m)\|_C$ es tan pequeño como queramos para m suficientemente grande. Por lo tanto el objetivo es comprobar lo mismo para $\|\dot{\tilde{u}}(\tilde{t}) - \dot{u}_m(t_m)\|_{L^\infty}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}(s_1) - \dot{y}_m(s_2) &= F(\tilde{\omega} \cdot s_1, \tilde{y}(s_1), \tilde{y}(s_1 - \tau(\tilde{\omega} \cdot s_1, \tilde{u}(s_1)))) \\ &\quad - F(\omega_m \cdot s_2, y_m(s_2), y_m(s_2 - \tau(\omega_m \cdot s_2, u_m(s_2))))). \end{aligned}$$

para $s_1, s_2 \in [0, t_0]$.

Definimos el conjunto

$$\mathcal{S} := \{(\omega_m, x_m) \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{(\tilde{\omega}, \tilde{x})\}, \quad (2.19)$$

que es compacto en $\Omega \times W^{1,\infty}$. Fijamos $\varepsilon > 0$, y utilizamos el punto (iii), para asegurar que la aplicación $u: [0, t_0] \times \mathcal{S} \rightarrow \Omega \times C$ es uniformemente continua. Esto nos permite afirmar que las familias

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &:= \{u_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{u}\} \subset C([0, t_0], C), \\ \mathcal{F}_2 &:= \{y_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{y}\} \subset C([-r, t_0], \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

son equicontinuas. Definimos también $\mathcal{K} := \{u(t, \omega, x) \mid t \in [0, t_0] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{S}\}$ y notamos que (iii) asegura que \mathcal{K} es compacto en C . Por lo tanto,

$$k := \sup\{\|u(t, \omega, x)\|_C \mid t \in [0, t_0] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{S}\}$$

es finito. Definimos ahora

$$\bar{\mathcal{B}} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq k\}$$

y consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} [0, t_0] \times \Omega \times \bar{\mathcal{B}} \times \bar{\mathcal{B}} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, \omega, y_1, y_2) &\mapsto F(\omega \cdot s, y_1, y_2), \end{aligned}$$

que es uniformemente continua. Es decir, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|s_1 - s_2| \leq \delta_1$,

$|y_1^1 - y_1^2| \leq \delta_1$ y $|y_2^1 - y_2^2| \leq \delta_1$, entonces

$$|F(\omega \cdot s_1, y_1^1, y_2^1) - F(\omega \cdot s_2, y_1^2, y_2^2)| < \varepsilon \quad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Además, dado que \mathcal{F}_2 es equicontinua en $[-r, t_0]$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(t_m) = \tilde{u}(\tilde{t})$ en C (véase (2.18)), existen $\delta_2 > 0$ y $m_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $|s_1 - s_2| \leq \delta_2$ y $m \geq m_2$ entonces

$$|\tilde{y}(s_1) - y_m(s_2)| \leq \delta_1 \quad \text{para todo } m \geq m_2.$$

Y como \mathcal{F}_1 es equicontinua en $[0, t_0]$ y la aplicación

$$\begin{aligned} [0, t_0] \times \Omega \times \mathcal{K} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega, x) &\mapsto \tau(\omega \cdot t, x) \end{aligned}$$

es uniformemente continua, existen $\delta_3 > 0$ y $m_3 \in \mathbb{N}$ tales que si $|s_1 - s_2| \leq \delta_3$ y $m \geq m_3$ entonces

$$|s_1 - s_2| + |\tau(\tilde{\omega} \cdot s_1, \tilde{u}(s_1)) - \tau(\omega_m \cdot s_2, u_m(s_2))| \leq \delta_1 \quad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Con todo esto, tomando $\delta_0 := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ y $m_0 := \max(m_2, m_3)$, tenemos que

$$\text{si } |s_1 - s_2| \leq \delta \text{ y } m \geq m_0, \text{ entonces } |\tilde{y}(s_1) - y_m(s_2)| \leq \varepsilon. \quad (2.20)$$

Recordemos que la definición de $\tilde{\mathcal{U}}$ asegura que $t_m \geq r$ y $\tilde{t} \geq r$. Sea $m_1 \geq m_0$ tal que $|\tilde{t} - t_m| \leq \delta$ para todo $m \geq m_1$. Deducimos de (2.20) que

$$\|\dot{\tilde{u}}(\tilde{t}) - \dot{u}_m(t_m)\|_{L^\infty} = \sup_{s \in [-r, 0]} |\dot{\tilde{y}}(\tilde{t} + s) - \dot{y}_m(t_m + s)| \leq \varepsilon$$

para cualquier $m \geq m_1$. Este era el objetivo, tal y como hemos explicado al principio de la prueba del punto (iv): concluimos que $\|\tilde{u}(\tilde{t}) - u_m(t_m)\|_{W^{1,\infty}} < \varepsilon$ para m suficientemente grande, lo cual demuestra (iv).

(v) Sea $\tilde{t} \geq 0$ tal que $\mathcal{U}_{\tilde{t}} := \{(\omega, x) \mid (\tilde{t}, \omega, x) \in \mathcal{U}\}$ es no vacío. En el caso en el que $\tilde{t} \geq r$, la afirmación de (v) se deduce de (iv); y es trivial si $\tilde{t} = 0$. Así que suponemos que $\tilde{t} \in (0, r)$. Tomamos una sucesión $((\omega_m, x_m))$ en $\mathcal{U}_{\tilde{t}}$ con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\omega_m, x_m) = (\tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{en } \mathcal{U}_{\tilde{t}},$$

y fijamos $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0, \varepsilon]$. Para simplificar la notación, definimos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$y_m(t) := y(t, \omega_m, x_m) \quad \text{e} \quad \tilde{y}(t) := y(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{para } t \in [-r, \tilde{t}],$$

así como

$$u_m(t) := u(t, \omega_m, x_m) \quad \text{y} \quad \tilde{u}(t) := u(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{para } t \in [0, \tilde{t}].$$

Sabemos por (iii) que $\|\tilde{u}(\tilde{t}) - u_m(\tilde{t})\|_C$ es tan pequeño como queramos si m es suficientemente grande. Por lo tanto, existe m_0 tal que, si $m \geq m_0$, entonces

$$\|\tilde{u}(t) - u_m(t)\|_C \leq \|\tilde{u}(\tilde{t}) - u_m(\tilde{t})\|_C + \|\tilde{x} - x_m\|_C \leq \delta \leq \varepsilon \quad \text{para } t \in [0, \tilde{t}]. \quad (2.21)$$

Por otro lado,

$$\|\dot{\tilde{u}}(\tilde{t}) - \dot{u}_m(\tilde{t})\|_{L^\infty} \leq \|\dot{\tilde{x}} - \dot{x}_m\|_{L^\infty} + \sup_{t \in [0, \tilde{t}]} |\dot{y}(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - \dot{y}(t, \omega_m, x_m)|,$$

y

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{y}}(t) - \dot{y}_m(t)| &= |F(\tilde{\omega} \cdot t, \tilde{y}(t), \tilde{y}(t - \tau(\tilde{\omega} \cdot t, \tilde{u}(t)))) \\ &\quad - F(\omega_m \cdot t, y_m(t), y_m(t - \tau(\omega_m \cdot t, u_m(t))))| \end{aligned}$$

para $t \in [0, \tilde{t}]$. Se deduce fácilmente de la continuidad de F y τ garantizada por H1(1) y H2(1), y de (2.21) (que es válido para un δ que puede ser prefijado a partir de las propiedades de F y τ) que $|\dot{\tilde{y}}(t) - \dot{y}_m(t)| \leq \varepsilon/2$ para todo $t \in [0, \tilde{t}]$ si m es suficientemente grande. Claramente sucede lo mismo con $\|\dot{\tilde{x}} - \dot{x}_m\|_{L^\infty}$. Esto asegura que existe \tilde{m}_0 tal que si $m \geq \tilde{m}_0$ entonces

$$\|\dot{\tilde{u}}(t) - \dot{u}_m(t)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \quad \text{para } t \in [0, \tilde{t}]. \quad (2.22)$$

Las propiedades (2.21) y (2.22) completan la demostración de (v).

(vi) Es obvio que \mathcal{C}_0 es positivamente invariante para Π . Tomamos una sucesión $((t_m, \omega_m, x_m))$ en \mathcal{U}^0 con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (t_m, \omega_m, x_m) = (\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{en } \mathcal{U}^0,$$

y definimos t_0, y_m, \tilde{y}, u_m y \tilde{u} como al principio de la demostración del punto (iv). Nótese que la definición de \mathcal{C}_0 asegura que y_m e \tilde{y} son funciones C^1 en la variable t en el intervalo $[-r, t_0]$. Tenemos que

$$\|\tilde{u}(\tilde{t}) - u_m(t_m)\|_{W^{1,\infty}} \leq \|\tilde{u}(\tilde{t}) - \tilde{u}(t_m)\|_{W^{1,\infty}} + \|\tilde{u}(t_m) - u_m(t_m)\|_{W^{1,\infty}},$$

El carácter C^1 de \tilde{y} en $[-r, t_0]$ asegura que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(\tilde{t}) - \tilde{u}(t_m)\|_{W^{1,\infty}} = 0.$$

De modo que el objetivo es probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t_m) - u_m(t_m)\|_{W^{1,\infty}} = 0,$$

lo que a su vez, teniendo en cuenta (iii), es equivalente a probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\dot{\tilde{u}}(t_m) - \dot{u}_m(t_m)\|_{L^\infty} = 0.$$

Y para demostrar esta afirmación basta con repasar la prueba del apartado (iv) y observar que (2.20) y el hecho de que $\lim_{m \rightarrow \infty} \dot{x}_m = \dot{\tilde{x}}$ en C garantizan esta propiedad.

(vii) Fijamos $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ con $c_0 := \sup_{t \in [0, \beta_{\omega, x})} \|u(t, \omega, x)\|_C < \infty$, por lo que, por el punto (iii), $\beta_{\omega, x} = \infty$. Además, por (iv),

$$\{(\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \mid t \in [r, 2r]\}$$

es compacto, por lo que es suficiente probar que

$$\{(\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \mid t \in [2r, \infty)\}$$

es relativamente compacto. Para probarlo, tomamos una sucesión (t_m) en $[0, \infty)$ y buscamos una subsucesión convergente en $\Omega \times W^{1,\infty}$ de la sucesión

$$((\omega \cdot (t_m + 2r), u(t_m + 2r, \omega, x))).$$

Como Ω es compacto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, la existencia de $\omega^* := \lim_{m \rightarrow \infty} \omega \cdot t_m$ y, por lo tanto, la de $\omega^* \cdot (2r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega \cdot (t_m + 2r)$. Definimos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$y_m(t) := y(t_m + t, \omega, x) \quad \text{para } t \in [-r, 2r],$$

de modo que obtenemos la sucesión (y_m) en $C([-r, 2r], \mathbb{R}^n)$. El conjunto

$$\{y_m(t) \mid t \in [-r, 2r], m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$$

está acotado por c_0 . Este hecho y la continuidad de F nos permite deducir que

$$\{\dot{y}_m(t) \mid t \in [0, 2r], m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$$

está acotado. De modo que el teorema de Arzelá-Ascoli proporciona una subsucesión (y_k) que converge uniformemente en $[0, 2r]$ a $y^* \in C([0, 2r], \mathbb{R}^n)$. En particular, $(y_k)_t$ converge a $(y^*)_t$ en C para todo $t \in [r, 2r]$. Por la condición H2(1), tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(\omega \cdot (t_k + t), (y_k)_t) = \tau(\omega^* \cdot t, (y^*)_t)$ uniformemente en

$[r, 2r]$. Todo esto unido a H1(1) garantiza que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F(\omega \cdot (t_k + t), y_k(t), y(t_k + t - \tau(\omega \cdot (t_k + t), (y_k)_t), \omega, x)) \\ = F(\omega^* \cdot t, y^*(t), y^*(t - \tau(\omega^* \cdot t, (y^*)_t))) \end{aligned} \quad (2.23)$$

uniformemente en $[r, 2r]$. Por otro lado, la sucesión (y_k) verifica

$$y_k(t) = y_k(r) + \int_r^t F(\omega \cdot (t_k + s), y_k(s), y(t_k + s - \tau(\omega \cdot (t_k + s), (y_k)_s), \omega, x)) ds \quad (2.24)$$

para $t \geq r$. Así, por un lado tenemos que

$$y^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t)$$

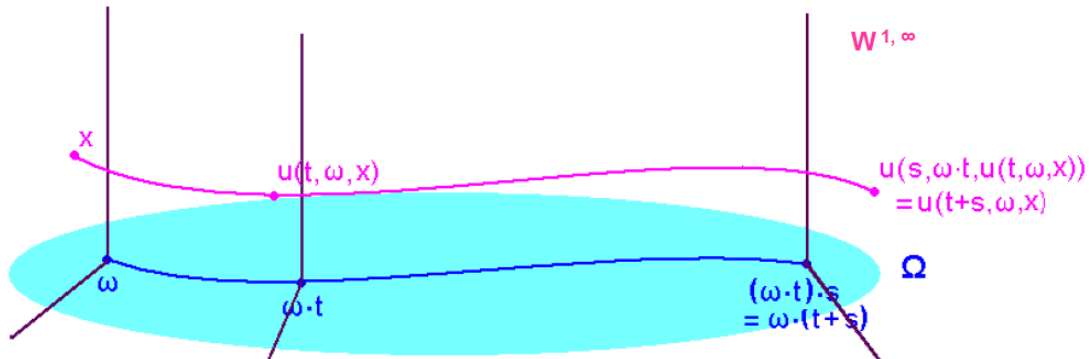
para $t \in [r, 2r]$; y por otro lado, por (2.23), el término de la derecha de (2.24) converge a

$$y^*(r) + \int_r^t F(\omega^* \cdot s, y^*(s), y^*(s - \tau(\omega^* \cdot s, (y^*)_s))) ds.$$

Por lo tanto, y^* resuelve $(2.4)_{\omega^*}$ en $[r, 2r]$, lo que junto con (2.23) implica que (\dot{y}_k) converge a \dot{y}^* uniformemente en $[r, 2r]$. Así que como (y_k) e (\dot{y}_k) convergen a y^* e \dot{y}^* en $[r, 2r]$, concluimos que la sucesión $(u(t_k + 2r, \omega, x))$ converge a y_{2r}^* en $W^{1,\infty}$. Esto completa la prueba de (vii) y, por tanto, la del teorema. \square

Nota 2.7. Como ya hemos comentado varias veces, y sin ánimo de ser muy precisos, diremos que el semiflujo Π definido por (2.13) a partir de la familia de ecuaciones (2.4) es *pseudo-continuo*. Con tal expresión queremos enfatizar el hecho de que a pesar de la posible falta de continuidad global en su dominio, las propiedades “parciales” de continuidad de Π permitirán el empleo de las técnicas clásicas de la dinámica topológica en el análisis del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones de la familia (2.4).

Nota 2.8. Antes de continuar, vamos a explicar con un esquema simplificado el comportamiento de Π :



La base representa el espacio métrico compacto Ω , sobre el que actúa el flujo $(\omega, t) \rightarrow \omega \cdot t$. La fibra representa el espacio infinito dimensional $W^{1,\infty}$. El semiflujo Π actúa llevando el par (ω, x) en tiempo t al par $(\omega \cdot t, u(t, \omega, x))$. Las igualdades de la derecha son consecuencia de las propiedades del flujo en Ω y de la unicidad de soluciones.

Ejemplo 2.9. Los resultados de continuidad del Teorema 2.6 son óptimos, en el sentido de que la aplicación $\Pi: \mathcal{U} \rightarrow \Omega \times W^{1,\infty}$ no es, en general, continua. Vamos a comprobar esta afirmación con un ejemplo muy simple. Consideramos la ecuación escalar autónoma

$$\dot{y}(t) = 1, \quad t \geq 0. \quad (2.25)$$

En este caso la envolvente se reduce a un único punto, y por lo tanto la familia de ecuaciones tiene un único elemento, (2.25).

Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 1 & \text{para } t \geq 0, \\ y(t) = 0 & \text{para } t \in [-r, 0], \end{cases}$$

cuya solución (global) es

$$y(t, 0) = \begin{cases} t & \text{para } t \geq 0, \\ 0 & \text{para } t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Definimos $u(t, 0)$ por

$$u(t, 0)(s) := y(t + s, 0) = \begin{cases} t + s & \text{para } t + s \geq 0 \\ 0 & \text{para } t + s \in [-r, 0] \end{cases}$$

y observamos que

$$\|u(0, 0)\|_{W^{1,\infty}} = 0,$$

mientras que, si $t > 0$,

$$\|u(t, 0)\|_{W^{1,\infty}} \geq \|\dot{u}(t, 0)\|_{L^\infty} = 1.$$

Por tanto, $u(t, 0)$ no converge a $u(0, 0)$ cuando $t \rightarrow 0^+$ en la topología de $W^{1,\infty}$ lo que demuestra que en este caso la aplicación $\Pi: \mathcal{U} \rightarrow \Omega \times W^{1,\infty}$ no es continua.

Nota 2.10. Sea $(\Omega \times W^{1,\infty}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ el semiflujo pseudo-continuo definido por (2.13). Nótese que a pesar de la posible falta de continuidad global del semiflujo Π , podemos definir Π -semiórbita y conjunto *positivamente* Π -invariante exactamente igual que en la Sección 1.2. Estos conceptos aparecerán a menudo en lo que sigue.

El semiflujo pseudo-continuo $(\Omega \times W^{1,\infty}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es local si no imponemos más

condiciones en F y τ (como el carácter acotado de F). El siguiente resultado demuestra que la restricción de Π a un compacto positivamente Π -invariante determina un semiflujo global y continuo.

Corolario 2.11. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(2) y H2(1)&(2). Sea Π la aplicación definida por (2.13), y sea $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ un compacto positivamente Π -invariante. Entonces la restricción de Π a \mathcal{K} define un semiflujo global continuo en \mathcal{K} .*

Demostración. Notemos que si \mathcal{K} es un compacto positivamente Π -invariante, entonces $\Pi(t, \omega, x) \in \mathcal{K}$ para todo $(t, \omega, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K}$, por lo que $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$. Por lo tanto, la restricción $\Pi: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ está bien definida y es global. Además, si una sucesión (ω_m, x_m) de elementos de \mathcal{K} converge a un punto $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ de \mathcal{K} en $\Omega \times C$ también converge en $\Omega \times W^{1,\infty}$: la compacidad de \mathcal{K} asegura que cada subsucesión tiene a su vez una subsucesión convergente, y el límite tiene que ser necesariamente $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ (ya que lo es en $\Omega \times C$). Por lo tanto el resultado es consecuencia del Teorema 2.6(iii). \square

Nota 2.12. Consideramos la familia de ecuaciones

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t, \lambda)), \lambda) \quad (2.26)$$

para $\omega \in \Omega$ y $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Supongamos que F y τ cumplen las condiciones siguientes:

- $\tilde{\text{H1}}$ (1) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.
 (2) Para cada par de compactos \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 de \mathbb{R}^n y cada compacto \mathcal{K} de \mathbb{R}^d , existe $\tilde{L} = \tilde{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K})$ tal que

$$|F(\omega, y_1, y_2, \lambda) - F(\omega, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{\lambda})| \leq \tilde{L} (|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2| + |\lambda - \tilde{\lambda}|)$$

para todos $\omega \in \Omega$; $y_1, \tilde{y}_1 \in \mathcal{K}_1$; $y_2, \tilde{y}_2 \in \mathcal{K}_2$; y $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathcal{K}$.

- $\tilde{\text{H2}}$ (1) $\tau: \Omega \times C \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, r]$ es continua.
 (2) Para cada compacto \mathcal{M} de C y cada compacto \mathcal{K} de \mathbb{R}^d existe una constante $\tilde{L}_2 = \tilde{L}_2(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ tal que

$$|\tau(\omega, x, \lambda) - \tau(\omega, \tilde{x}, \tilde{\lambda})| \leq \tilde{L}_2 (\|x - \tilde{x}\|_C + |\lambda - \tilde{\lambda}|)$$

para todos $\omega \in \Omega$; $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$; y $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathcal{K}$.

En estas condiciones podemos enunciar resultados de continuidad respecto a (t, ω, x, λ) análogos a las de los puntos (iii) y (iv) del Teorema 2.6 para las soluciones $y(t, \omega, x, \lambda)$ de las ecuaciones (2.26) $_\omega$ con $y(s, \omega, x, \lambda) = x(s)$ para $s \in [-r, 0]$. Para demostrar esta afirmación basta con considerar las componentes de λ como nuevas variables dependientes con derivada 0, reescribir (2.26) como una ERDE

$n + d$ -dimensional, y aplicar el Teorema 2.6. Hartung realiza en [15] un análisis exhaustivo de condiciones de regularidad respecto de parámetros de las soluciones de ERDEs.

Terminamos la sección con el análisis del comportamiento Lipschitz con respecto a las condiciones iniciales de la aplicación $u(t, \omega, x)$, definida por (2.7). Este resultado es una versión global, adaptada a nuestro contexto, de la propiedad local que Hartung prueba en el Teorema 1(iv) de [15]. Para ello necesitamos más propiedades de regularidad de F , que describimos a continuación:

H1 (3) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable respecto a sus segundo y tercer argumentos, y las funciones $D_i F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ son continuas para $i = 2, 3$.

Proposición 2.13. *Supongamos que F cumple H1(3). Entonces también cumple H1(2).*

Demostración. Podemos escribir

$$\begin{aligned} F(\omega, y_1, y_2) - F(\omega, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \\ \int_0^1 (D_2 F(\omega, s y_1 + (1-s)\tilde{y}_1, s y_2 + (1-s)\tilde{y}_2) (y_1 - \tilde{y}_1) \\ + D_3 F(\omega, s y_1 + (1-s)\tilde{y}_1, s y_2 + (1-s)\tilde{y}_2) (y_2 - \tilde{y}_2)) ds. \end{aligned}$$

La proposición es una consecuencia sencilla de este hecho. \square

Teorema 2.14. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(2), y definamos $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty}$ y $u: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} \rightarrow W^{1,\infty}$ como en (2.14) y (2.7). Tomemos $\tilde{t} > 0$ con $\mathcal{U}_{\tilde{t}} := \{(t, \omega, x) \mid (t, \omega, x) \in \mathcal{U}\}$ no vacío, y fijemos $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{U}_{\tilde{t}}$. Entonces*

(i) *existe $\rho > 0$ tal que*

1. *$u(t, \omega, x)$ está definida (es decir, $(t, \omega, x) \in \mathcal{U}$) para cualquier $t \in [0, \tilde{t}]$ y para cualquier $(\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho$, donde*

$$\mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho := \{(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty} \mid d_\Omega(\omega, \tilde{\omega}) < \rho \text{ y } \|x - \tilde{x}\|_{W^{1,\infty}} < \rho\};$$

2. *$\tilde{c} := \sup\{\|u(t, \omega, x)\|_C \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho\} < \infty$.*

(ii) *Sea $\rho > 0$ una constante para la que se cumplan los puntos 1 y 2 anteriores. Entonces existe $L = L(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \rho) > 0$ tal que si (ω, x_1) y (ω, x_2) pertenecen a $\mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho$, se cumple que*

$$\|u(t, \omega, x_1) - u(t, \omega, x_2)\|_{W^{1,\infty}} \leq L \|x_1 - x_2\|_{W^{1,\infty}}$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$.

Demostración. (i) Fijamos \tilde{t} , $\tilde{\omega}$ y \tilde{x} como los del enunciado. La existencia de $\tilde{\rho} > 0$ tal que 1 se verifica es consecuencia de que \mathcal{U} es abierto, tal y como se prueba en el Teorema 2.6(i). Para probar la existencia de $\rho \in (0, \tilde{\rho}]$ tal que 2 se verifica suponemos, por contradicción, que para todo $m \in \mathbb{N}$ existen $t_m \in [0, \tilde{t}]$ y $(\omega_m, x_m) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ tales que $d_\Omega(\omega_m, \tilde{\omega}) < 1/m$, $\|x_m - \tilde{x}\|_{W^{1,\infty}} < 1/m$ y $|y(t_m, \omega_m, x_m)| \geq m$. Tomamos una subsucesión (t_k) con límite t^* . Así, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, \omega_k, x_k) = (t^*, \tilde{\omega}, \tilde{x})$ en $[0, \tilde{t}] \times \Omega \times W^{1,\infty}$ y podemos concluir, por el Teorema 2.5(iii), que $|y(t^*, \tilde{\omega}, \tilde{x})| = \lim_{m \rightarrow \infty} |y(t_m, \omega_m, x_m)| = \infty$, lo que es imposible.

(ii) Fijamos $(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x})$, así como una constante $\rho > 0$ para la que se cumplan 1 y 2. Necesitamos probar las propiedades (2.27), (2.28) y (2.32), que usaremos después. Sea \tilde{c} la constante que aparece en la condición 2 de (i). Entonces, por 2, tenemos que

$$|s y(t_1, \omega, x_1) + (1-s) y(t_2, \omega, x_2)| \leq \tilde{c} \quad (2.27)$$

para todos $t_1, t_2 \in [-r, \tilde{t}]$, (ω, x_1) y $(\omega, x_2) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho$, y $s \in [0, 1]$. Por otro lado, la continuidad de $D_i F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para $i = 2, 3$ garantizada por H1(3) hace que estas aplicaciones lleven compactos en compactos, por lo que existe $L_3^* < \infty$ tal que

$$\|D_i F(\omega, y_1, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq L_3^* \quad (2.28)$$

para todo $\omega \in \Omega$ si $|y_1| \leq \tilde{c}$ y $|y_2| \leq \tilde{c}$, para $i = 2, 3$. Además, dado que $y(t, \omega, x)$ cumple (2.4) $_\omega$ en $[0, \tilde{t}]$, la continuidad de $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por H1(1), combinada con la condición 2 asegura que el conjunto

$$\{\dot{y}(t, \omega, x) \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho\} \subset \mathbb{R}^n$$

está acotado. Y también se tiene que, para cualquier $(\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho$,

$$|\dot{y}(s, \omega, x)| \leq \|x\|_{W^{1,\infty}} < \rho + \|\tilde{x}\|_{W^{1,\infty}}$$

para casi todo $s \in [-r, 0]$. Estas dos últimas propiedades y el punto 2 aseguran que

$$\sup\{\|u(t, \omega, x)\|_{W^{1,\infty}} \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho\} =: c^* < \infty. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, la familia de funciones

$$\{u(t, \omega, x) \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho\} \subset C$$

es uniformemente acotada y equicontinua y podemos aplicar el teorema de Arzelá-

Ascoli para garantizar que el conjunto

$$\mathcal{K} := \Omega \times \text{clausura}_C \{ u(t, \omega, x) \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho \} \subset \Omega \times C \quad (2.30)$$

es compacto. Además, **H2(2)** asegura que existe $L_2 > 0$ tal que

$$|\tau(\omega, x_1) - \tau(\omega, x_2)| \leq L_2 \|x_1 - x_2\|_C \quad (2.31)$$

para todos (ω, x_1) y $(\omega, x_2) \in \mathcal{K}$. Tomamos (ω, x_1) y (ω, x_2) en $\mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^\rho$ y denotamos

$$y_1(t) := y(t, \omega, x_1) \quad \text{e} \quad y_2(t) := y(t, \omega, x_2)$$

para $t \in [-r, \tilde{t}]$, así como

$$u_1(t) := u(t, \omega, x_1) \quad \text{y} \quad u_2(t) := u(t, \omega, x_2)$$

para $t \in [0, \tilde{t}]$. Observamos que $(\omega \cdot t, u_1(t))$ y $(\omega \cdot t, u_2(t))$ pertenecen al conjunto \mathcal{K} definido por (2.30) para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Sean c^* y L_2 las constantes de (2.29) y (2.31), respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} & |y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t))) - y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t)))| \\ & \leq |y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t))) - y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t)))| \\ & \quad + |y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t))) - y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t)))| \\ & \leq \|u_1(t) - u_2(t)\|_C + \|u_2(t)\|_{W^{1, \infty}} |\tau(\omega \cdot t, u_1(t)) - \tau(\omega \cdot t, u_2(t))| \\ & \leq \|u_1(t) - u_2(t)\|_C + c^* L_2 \|u_1(t) - u_2(t)\|_C, \end{aligned}$$

por lo que

$$|y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t))) - y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t)))| \leq L_3 \|u_1(t) - u_2(t)\|_C \quad (2.32)$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$, donde $L_3 := 1 + c^* L_2$.

Ahora podemos proceder con la demostración. Con la notación anterior, si $t \in [0, \tilde{t}]$, se tiene que

$$\begin{aligned} & F(\omega \cdot t, y_1(t), y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t)))) - F(\omega \cdot t, y_2(t), y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t)))) \\ & = \int_0^1 D_2 F \left(\omega \cdot t, s y_1(t) + (1-s) y_2(t), s y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t))) \right. \\ & \quad \left. + (1-s) y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t))) \right) (y_1(t) - y_2(t)) ds \\ & + \int_0^1 D_3 F \left(\omega \cdot t, s y_1(t) + (1-s) y_2(t), s y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t))) \right. \\ & \quad \left. + (1-s) y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t))) \right) \\ & \quad (y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t))) - y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t)))) ds. \end{aligned}$$

Esta igualdad combinada con (2.27), (2.28) y (2.32) nos conduce a

$$\begin{aligned} & \left| F(\omega \cdot t, y_1(t), y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t)))) \right. \\ & \quad \left. - F(\omega \cdot t, y_2(t), y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t)))) \right| \leq L_4 \|u_1(t) - u_2(t)\|_C \end{aligned} \quad (2.33)$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$, donde $L_4 := L_3^*(1 + L_3)$. Utilizando la forma integral de la ecuación (2.4) $_\omega$, obtenemos que la función $y_1(t) - y_2(t)$ cumple

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) = x_1(0) - x_2(0) + \int_0^t & \left(F(\omega \cdot l, y_1(l), y_1(l - \tau(\omega \cdot l, u_1(l)))) \right. \\ & \quad \left. - F(\omega \cdot l, y_2(l), y_2(l - \tau(\omega \cdot l, u_2(l)))) \right) dl \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Con esto y (2.33), vemos que

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \|x_1 - x_2\|_C + \int_0^t L_4 \|u_1(l) - u_2(l)\|_C dl$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Además tenemos que

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \|x_1 - x_2\|_C$$

si $t \in [-r, 0]$. Por lo tanto,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_C \leq \|x_1 - x_2\|_C + \int_0^t L_4 \|u_1(l) - u_2(l)\|_C dl$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. En estas condiciones podemos aplicar el lema de Gronwall para obtener

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_C \leq L_5 \|x_1 - x_2\|_C \quad (2.34)$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$, donde $L_5 := \exp(L_4 \tilde{t}) \geq 1$. Combinando ahora (2.4), (2.33) y (2.34), obtenemos

$$\begin{aligned} & |\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)| \\ & = \left| F(\omega \cdot t, y_1(t), y_1(t - \tau(\omega \cdot t, u_1(t)))) - F(\omega \cdot t, y_2(t), y_2(t - \tau(\omega \cdot t, u_2(t)))) \right| \\ & \leq L_4 \|u_1(t) - u_2(t)\|_C \leq L_4 L_5 \|x_1 - x_2\|_C \leq L_4 L_5 \|x_1 - x_2\|_{W^{1,\infty}} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Por otro lado, como

$$|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)| \leq \|x_1 - x_2\|_{W^{1,\infty}} \leq L_5 \|x_1 - x_2\|_{W^{1,\infty}}$$

para casi todo $t \in [-r, 0]$, obtenemos que

$$\|u(t, \omega, x_1) - u(t, \omega, x_2)\|_{W^{1,\infty}} \leq L \|x_1 - x_2\|_{W^{1,\infty}}$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$, donde $L := \max(L_5, L_4 L_5)$. Con esto queda demostrado (ii) y, por lo tanto, el teorema. \square

2.3. Diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales

En esta sección estudiaremos, usando métodos de dinámica topológica, la diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales de las soluciones de los problemas de Cauchy asociados a la familia de ERDEs no autónomas (2.4) con condiciones iniciales Lipschitz-continuas. Para ello, vamos a suponer que se cumplen H1(1)&(3), H2(1) y la siguiente condición de regularidad en τ :

H2 (3) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es diferenciable respecto a su segundo argumento, y $D_2\tau: \Omega \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ es continua.

Recordemos que $\text{Lin}(X, Y)$ es el espacio de los operadores lineales continuos entre los espacios de Banach X e Y . Antes de continuar, es importante darse cuenta de lo siguiente:

Proposición 2.15. *Supongamos que τ cumple H2(3). Entonces también cumple H2(2).*

Demostración. Sea $\mathcal{M} \subset C$ un compacto. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{M}_0 := \{s x_1 + (1 - s) x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathcal{M} \text{ y } s \in [0, 1]\},$$

que también es un conjunto compacto de C . Definimos

$$L_2 = L_2(\mathcal{M}) := \sup\{\|D_2\tau(\omega, x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \mid (\omega, x) \in \Omega \times \mathcal{M}_0\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\tau(\omega, x) - \tau(\omega, \tilde{x})| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} \tau(\omega, s x + (1 - s) \tilde{x}) ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 D_2\tau(\omega, s x + (1 - s) \tilde{x})(x - \tilde{x}) ds \right| \leq L_2 \|x - \tilde{x}\|_C \end{aligned}$$

para todos $\omega \in \Omega$ y $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$. Es decir, se cumple H2(2). \square

Estudiaremos la diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales de las soluciones $y(t, \omega, x)$ de los problemas de Cauchy asociados a la familia (2.4) con datos cumpliendo la condición de compatibilidad necesaria para obtener solucio-

nes maximales de clase C^1 . Recordemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &:= \{(t, \omega, x) \mid (\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}, t \in [0, \beta_{\omega,x}]\}, \\ \mathcal{C}_0 &:= \{(\omega, x) \in \Omega \times C^1 \mid \dot{x}(0^-) = F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\},\end{aligned}\quad (2.35)$$

$$\mathcal{U}^0 := \{(t, \omega, x) \in \mathcal{U} \mid (\omega, x) \in \mathcal{C}_0\}, \quad (2.36)$$

donde $\beta_{\omega,x} \leq \infty$ es el extremo superior del intervalo maximal de definición de la solución $y(t, \omega, x)$ del problema de Cauchy (2.5) $_{\omega,x}$. Estos conjuntos están equipados con las topologías como subespacios de $\mathbb{R} \times \Omega \times W^{1,\infty}$ y $\Omega \times W^{1,\infty}$. Recordemos también que

$$\begin{aligned}\Pi: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)),\end{aligned}$$

donde $u(t, \omega, x) := y(t + s, \omega, x)$ para $s \in [-r, 0]$.

Nota 2.16. Notemos que $\Pi(\mathcal{U}^0) = \mathcal{C}_0$: claramente, si $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, entonces $(\omega, x) = \Pi(0, \omega, x) \in \Pi(\mathcal{U}^0)$; y recíprocamente, si $(t, \omega, x) \in \mathcal{U}_0$, entonces la solución $y(t, \omega, x)$ de (2.5) $_{\omega,x}$ es C^1 con respecto a t en $[-r, \beta_{\omega,x}]$, lo que asegura que $\Pi(t, \omega, x) \in \mathcal{C}_0$.

Este hecho nos permite definir una familia de ecuaciones lineales (que jugarán el papel de ecuaciones variacionales asociadas a (2.4), como veremos más adelante):

$$\dot{z}(t) = L(\Pi(t, \omega, x)) z_t, \quad t \in [0, \beta_{\omega,x}] \quad (2.37)$$

para $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, donde la aplicación $L: \mathcal{C}_0 \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dada por

$$\begin{aligned}L(\omega, x) v &:= D_2 F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x))) v(0) \\ &\quad + D_3 F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x))) v(-\tau(\omega, x)) \\ &\quad - D_3 F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x))) \dot{x}(-\tau(\omega, x)) \cdot D_2 \tau(\omega, x) v.\end{aligned}$$

Cada ecuación de la familia (2.37) está evaluada a lo largo de una Π -semiórbita de elementos de \mathcal{C}_0 . Es importante notar que el retardo es independiente del estado: una vez fijado $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, L actúa sobre $\Pi(t, \omega, x)$. De modo que se trata de una ecuación de retardo dependiente del tiempo, y no de una ERDE.

En esta sección vamos a realizar un análisis de las soluciones de esta familia de ecuaciones con retardo en la línea del estudio que hemos realizado en la Sección 2.1 para la familia (2.4). También estudiaremos la relación de esta familia de ecuaciones con la derivada respecto al dato inicial de las soluciones de la familia (2.4).

Todos los resultados de esta sección dependen de las propiedades de continuidad de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &\rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n) \\ (\omega, x) &\mapsto L(\omega, x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 \times C &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\omega, x, v) &\mapsto L(\omega, x) v, \end{aligned}$$

que analizaremos en la siguiente proposición. Recordemos que las condiciones H1(3) y H2(3) garantizan H1(2) y H2(2) respectivamente. En particular las condiciones que imponemos en los enunciados de los resultados de esta sección garantizan todas las propiedades de Π descritas en la sección anterior.

Proposición 2.17. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3). Entonces,*

(i) *la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &\rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n) \\ (\omega, x) &\mapsto L(\omega, x) \end{aligned}$$

es continua.

(ii) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^0 &\rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n) \\ (t, \omega, x) &\mapsto L(\Pi(t, \omega, x)) \end{aligned}$$

es continua.

(iii) *Si fijamos $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto L(\omega, x) v \end{aligned}$$

es un operador lineal acotado. Además, para cada $k > 0$,

$$\sup \{ \|L(\omega, x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \mid (\omega, x) \in \mathcal{C}_0 \text{ y } \|x\|_{W^{1,\infty}} \leq k \} < \infty.$$

(iv) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 \times C &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\omega, x, v) &\mapsto L(\omega, x) v \end{aligned}$$

es continua.

(v) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^0 \times C &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto L(\Pi(t, \omega, x)) v \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Antes de comenzar con la demostración, recordemos que la continuidad de $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ y la existencia y continuidad de $D_i F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para $i = 2, 3$ y de $D_2 \tau: \Omega \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ están aseguradas gracias a las propiedades **H1(1)&(3)** y **H2(1)&(3)**.

(i) Sea $((\omega_m, x_m))$ una sucesión en \mathcal{C}_0 con $\lim_{m \rightarrow \infty} (\omega_m, x_m) = (\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{C}_0$ en $\Omega \times W^{1, \infty}$. Vamos a comprobar que

$$|L(\tilde{\omega}, \tilde{x})v - L(\omega_m, x_m)v|$$

es tan pequeño como queramos para un m suficientemente grande común para todos los $v \in W^{1, \infty}$ con $\|v\|_{W^{1, \infty}} = 1$. Escribimos

$$L(\omega, x)v = L_1(\omega, x)v + L_2(\omega, x)v + L_3(\omega, x)v$$

con

$$L_1(\omega, x)v := D_2 F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))v(0),$$

$$L_2(\omega, x)v := D_3 F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))v(-\tau(\omega, x)),$$

$$L_3(\omega, x)v := D_3 F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\dot{x}(-\tau(\omega, x)) \cdot D_2 \tau(\omega, x)v,$$

y estudiamos por separado el límite de cada sumando $|L_i(\tilde{\omega}, \tilde{x})v - L_i(\omega_m, x_m)v|$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y definimos $\tilde{\tau} := \tau(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ y $\tau_m := \tau(\omega_m, x_m)$ para simplificar la notación. Para el primer término, como $|v(0)| \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} & |L_1(\tilde{\omega}, \tilde{x})v - L_1(\omega_m, x_m)v| \\ &= |(D_2 F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_2 F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m)))v(0)| \\ &\leq \|D_2 F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_2 F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

y por continuidad de τ y $D_2 F$, se tiene que

$$\sup_{\|v\|_{W^{1, \infty}}=1} |L_1(\tilde{\omega}, \tilde{x})v - L_1(\omega_m, x_m)v| \leq \varepsilon \quad (2.38)$$

para m suficientemente grande.

Para el segundo término, tenemos que

$$\begin{aligned} & |L_2(\tilde{\omega}, \tilde{x})v - L_2(\omega_m, x_m)v| \\ &= |D_3 F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))v(-\tilde{\tau}) - D_3 F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))v(-\tau_m)| \\ &\leq |D_3 F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) (v(-\tilde{\tau}) - v(-\tau_m))| \\ &\quad + |(D_3 F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3 F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m)))v(-\tau_m)|. \end{aligned}$$

Acotamos por separado los dos sumandos. Para el segundo, como $\|v\|_{W^{1,\infty}} = 1$,

$$\begin{aligned} & \left| (D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m)))v(-\tau_m) \right| \\ & \leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

y el último término es, gracias a la continuidad de τ y D_3F , más pequeño que $\varepsilon/2$ si m es suficientemente grande. Para el sumando restante,

$$\begin{aligned} & \left| D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))(v(-\tilde{\tau}) - v(-\tau_m)) \right| \\ & \leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|\dot{v}\|_{L^\infty} |\tilde{\tau} - \tau_m| \quad (2.39) \\ & \leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |\tilde{\tau} - \tau_m|, \end{aligned}$$

que es más pequeño que $\varepsilon/2$ si m es suficientemente grande gracias a la continuidad de τ en $\mathcal{C}_0 \subset \Omega \times C$. Hemos usado aquí el hecho de que

$$v(-\tilde{\tau}) - v(-\tau_m) = \int_0^1 \dot{v}(s\tilde{\tau} + (1-s)\tau_m)(\tilde{\tau} - \tau_m) ds$$

combinado con $\|\dot{v}\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{W^{1,\infty}} = 1$. (Esta prueba falla si $\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)$ es reemplazado por $\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)$ como codominio de L , porque necesitamos que $\|\dot{v}\|_{L^\infty} < \infty$). De este modo queda probado que

$$\sup_{\|v\|_{W^{1,\infty}}=1} |L_2(\tilde{\omega}, \tilde{x})v - L_2(\omega_m, x_m)v| \leq \varepsilon \quad (2.40)$$

para m suficientemente grande.

Para el término de L_3 , escribimos $L_3(\omega, x)v = L_{31}(\omega, x) \cdot L_{32}(\omega, x)v$ con

$$\begin{aligned} L_{31}(\omega, x) & := D_3F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x))) \dot{x}(-\tau(\omega, x)) \\ L_{32}(\omega, x)v & := D_2\tau(\omega, x)v. \end{aligned}$$

Para $L_{32}(\omega, x)v$ tenemos, ya que $\|v\|_{W^{1,\infty}} = 1$,

$$\begin{aligned} |L_{32}(\tilde{\omega}, \tilde{x})v - L_{32}(\omega_m, x_m)v| & = |(D_2\tau(\tilde{\omega}, \tilde{x}) - D_2\tau(\omega_m, x_m))v| \\ & \leq \|D_2\tau(\tilde{\omega}, \tilde{x}) - D_2\tau(\omega_m, x_m)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})}, \end{aligned}$$

que es menor que ε_1 para m suficientemente grande debido a la continuidad de $D_2\tau$. (Más adelante aclararemos cuál es el valor de ε_1). Finalmente,

$$\begin{aligned} & |L_{31}(\tilde{\omega}, \tilde{x}) - L_{31}(\omega_m, x_m)| \\ & \leq |(D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))) \dot{x}_m(-\tau_m)| \\ & \quad + |D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))(\tilde{x}(-\tilde{\tau}) - \dot{x}_m(-\tau_m))|. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & |(D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))) \dot{x}_m(-\tau_m)| \\ & \leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|x_m\|_{W^{1,\infty}}, \end{aligned}$$

que podemos acotar por $\varepsilon_2/2$ para m suficientemente grande usando la acotación de la sucesión convergente ($\|x_m\|_{W^{1,\infty}}$) y la continuidad de D_3F . (Más adelante aclararemos cuál es el valor de ε_2). Además,

$$\begin{aligned} & |D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) (\dot{\tilde{x}}(-\tilde{\tau}) - \dot{x}_m(-\tau_m))| \\ & \leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} (|\dot{\tilde{x}}(-\tilde{\tau}) - \dot{x}_m(-\tau_m)| + \|\tilde{x} - x_m\|_{W^{1,\infty}}), \end{aligned}$$

que claramente podemos también acotar por $\varepsilon_2/2$, ya que $\dot{\tilde{x}}$ es continua. Así que

$$\begin{aligned} & |L_{31}(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \cdot L_{32}(\tilde{\omega}, \tilde{x}) v - L_{31}(\omega_m, x_m) \cdot L_{32}(\omega_m, x_m) v| \\ & \leq |L_{31}(\tilde{\omega}, \tilde{x})| |L_{32}(\tilde{\omega}, \tilde{x}) v - L_{32}(\omega_m, x_m) v| \\ & \quad + |L_{31}(\tilde{\omega}, \tilde{x}) - L_{31}(\omega_m, x_m)| |L_{32}(\omega_m, x_m) v| \\ & \leq \varepsilon_1 |L_{31}(\tilde{\omega}, \tilde{x})| + \varepsilon_2 |L_{32}(\omega_m, x_m) v| \\ & \leq \varepsilon_1 \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} + \varepsilon_2 \max_{m \in \mathbb{N}} \|D_2\tau(\omega_m, x_m)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Definimos por lo tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 & := \varepsilon / (2 \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}), \\ \varepsilon_2 & := \varepsilon / (2 \max_{m \in \mathbb{N}} \|D_2\tau(\omega_m, x_m)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})}) \end{aligned}$$

suponiendo que los denominadores no sean nulos (lo que haría más sencilla la acotación), y utilizamos las propiedades H1(3) y H2(3) así como la convergencia de $((\omega_m, x_m))$ a $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$, para concluir que

$$\sup_{\|v\|_{W^{1,\infty}}=1} |L_3(\tilde{\omega}, \tilde{x}) v - L_3(\omega_m, x_m) v| \leq \varepsilon \quad (2.41)$$

para m suficientemente grande.

Las expresiones (2.38), (2.40) y (2.41) demuestran que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|L(\omega_m, x_m) - L(\tilde{\omega}, \tilde{x})\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)} = 0,$$

por lo que (i) está probado.

(ii) Hemos visto en la Nota 2.16 que $\Pi(t, \omega, x) \in \mathcal{C}_0$ para todo $(t, \omega, x) \in \mathcal{U}^0$, por lo que $L(\Pi(t, \omega, x))$ está bien definido. La continuidad de la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^0 & \rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n) \\ (t, \omega, x) & \mapsto L(\Pi(t, \omega, x)) \end{aligned}$$

es consecuencia de (i) y del Teorema 2.6(vi).

(iii) Escribimos $L(\omega, x)v = L_1(\omega, x)v + L_2(\omega, x)v + L_3(\omega, x)v$ como en la demostración de (i).

Fijamos $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$. Las aplicaciones lineales $C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto L_i(\omega, x)v$ son continuas para $i = 1, 2$ por serlo $C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto D_i F(\omega, y_1, y_2)v(l)$ para todo punto $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y cada $l \in [-r, 0]$ fijo, tal y como garantiza H1(3). Y la aplicación lineal $C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto L_3(\omega, x)v$ es continua por serlo $D_2\tau(\omega, x)$. Esto demuestra la primera afirmación de (iii).

Sean ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k &:= \{(\omega, x) \in \mathcal{C}_0 \mid \|x\|_{W^{1,\infty}} \leq k\}, \\ \mathcal{D}_k &:= \{(\omega, y_1, y_2) \mid \omega \in \Omega, |y_1| \leq k, |y_2| \leq k\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Entonces, para $i = 1, 2$,

$$\sup_{(\omega, x) \in \mathcal{B}_k} \|L_i(\omega, x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \leq \sup_{(\omega, y_1, y_2) \in \mathcal{D}_k} \|D_i F(\omega, y_1, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)},$$

que es finito porque, por continuidad, $D_i F$ transforma el conjunto compacto \mathcal{D}_k de $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en un acotado de $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Por otra parte, \mathcal{B}_k es un conjunto compacto de $\Omega \times C$ (véase la Proposición 1.1), de modo que

$$\sup_{(\omega, x) \in \mathcal{B}_k} \|D_2\tau(\omega, x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} < \infty,$$

ya que $D_2\tau$ lleva el compacto \mathcal{B}_k en un acotado. Deducimos de aquí que

$$\begin{aligned} &\sup_{(\omega, x) \in \mathcal{B}_k} \|L_3(\omega, x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sup_{(\omega, y_1, y_2) \in \mathcal{D}_k} k \|D_3 F(\omega, y_1, y_2)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \sup_{(\omega, x) \in \mathcal{B}_k} \|D_2\tau(\omega, x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} < \infty, \end{aligned}$$

lo que completa la demostración de (iii).

(iv) Vamos a repetir paso por paso la demostración del punto (i). Tomamos una sucesión $((\omega_m, x_m, v_m)) \subset \mathcal{C}_0 \times C$ con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\omega_m, x_m, v_m) = (\tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v}) \quad \text{en } \mathcal{C}_0 \times C.$$

Tenemos que comprobar que

$$L(\tilde{\omega}, \tilde{x})\tilde{v} = \lim_{m \rightarrow \infty} L(\omega_m, x_m)v_m$$

en \mathbb{R}^n . Para ello, de nuevo, escribimos $L(\omega, x)v = L_1(\omega, x)v + L_2(\omega, x)v + L_3(\omega, x)v$ con $L_1(\omega, x)v$, $L_2(\omega, x)v$ y $L_3(\omega, x)v$ definidas como en (i). Tenemos

que probar la convergencia para cada uno de los tres sumandos. Denotamos

$$\tilde{\tau} := \tau(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \quad \text{y} \quad \tau_m := \tau(\omega_m, x_m).$$

Para el primer término, tenemos que

$$\begin{aligned} & |L_1(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} - L_1(\omega_m, x_m) v_m| \\ &= |D_2F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) \tilde{v}(0) - D_2F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m)) v_m(0)| \\ &= |D_2F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) (\tilde{v}(0) - v_m(0))| \\ &\quad + |(D_2F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_2F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))) v_m(0)| \\ &\leq \|D_2F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|\tilde{v} - v_m\|_C \\ &\quad + \|D_2F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_2F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|v_m\|_C. \end{aligned}$$

La continuidad de τ y D_2F , y la acotación de la sucesión (v_m) en C (que es una sucesión convergente), aseguran que

$$L_1(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} = \lim_{m \rightarrow \infty} L_1(\omega_m, x_m) v_m$$

en \mathbb{R}^n .

El segundo término cumple

$$\begin{aligned} & |L_2(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} - L_2(\omega_m, x_m) v_m| \\ &= |D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) \tilde{v}(-\tilde{\tau}) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m)) v_m(-\tau_m)| \\ &= |D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) (\tilde{v}(-\tilde{\tau}) - v_m(-\tau_m))| \\ &\quad + |(D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))) v_m(-\tau_m)| \\ &\leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |\tilde{v}(-\tilde{\tau}) - v_m(-\tau_m)| \\ &\quad + \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|v_m\|_C. \end{aligned}$$

Tenemos dos sumandos. El segundo se encuentra en el mismo caso que el último sumando del caso de L_1 . El primero cumple

$$\begin{aligned} & \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |\tilde{v}(-\tilde{\tau}) - v_m(-\tau_m)| \\ &\leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} (|\tilde{v}(-\tilde{\tau}) - \tilde{v}(-\tau_m)| + |\tilde{v}(-\tau_m) - v_m(-\tau_m)|) \\ &\leq \|D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau}))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} (|\tilde{v}(-\tilde{\tau}) - \tilde{v}(-\tau_m)| + \|\tilde{v} - v_m\|_C). \end{aligned}$$

La convergencia de (ω_m, x_m, v_m) a (ω, x, v) y la continuidad de \tilde{v} y de τ permiten

pues asegurar que

$$L_2(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} = \lim_{m \rightarrow \infty} L_2(\omega_m, x_m) v_m$$

en \mathbb{R}^n .

Por último,

$$\begin{aligned} & |L_3(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} - L_3(\omega_m, x_m) v_m| \\ &= |D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) \dot{\tilde{x}}(-\tilde{\tau}) \cdot D_2\tau(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} \\ &\quad - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m)) \dot{x}_m(-\tau_m) \cdot D_2\tau(\omega_m, x_m) v_m| \\ &\leq |D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) \dot{\tilde{x}}(-\tilde{\tau})| \cdot |D_2\tau(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} - D_2\tau(\omega_m, x_m) v_m| \\ &\quad + |D_3F(\tilde{\omega}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tilde{\tau})) \dot{\tilde{x}}(-\tilde{\tau}) \\ &\quad - D_3F(\omega_m, x_m(0), x_m(-\tau_m)) \dot{x}_m(-\tau_m)| \cdot |D_2\tau(\omega_m, x_m) v_m|. \end{aligned}$$

La convergencia de (ω_m, x_m, v_m) a $(\tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v})$ en $\Omega \times C$ y la propiedad H2(3) garantiza la convergencia a 0 de $|D_2\tau(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} - D_2\tau(\omega_m, x_m) v_m|$, y por lo tanto del primer sumando. En particular, $|D_2\tau(\omega_m, x_m) v_m|$ está acotado, lo que junto con la propiedad H1(3) prueba que también el segundo sumando tiende a 0. Por lo tanto

$$L_3(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \tilde{v} = \lim_{m \rightarrow \infty} L_3(\omega_m, x_m) v_m$$

en \mathbb{R}^n , lo que completa la demostración de (iv).

(v) Como hemos visto en (ii), $L(\Pi(t, \omega, x))$ está bien definido para todo $(t, \omega, x) \in \mathcal{U}^0$. La continuidad de la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^0 \times C &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto L(\Pi(t, \omega, x)) v \end{aligned}$$

se deduce del punto (iv) y del Teorema 2.6(vi). □

Los resultados que vamos a demostrar a continuación (Teorema 2.18 y Corolario 2.19) son los análogos a los Teoremas 2.5, 2.6 y 2.14 para la familia de ecuaciones variacionales lineales (2.37). En particular, probaremos que esta familia induce un semiflujo pseudo-continuo (véase la Nota 2.7) en $\mathcal{K} \times W^{1,\infty}$, donde \mathcal{K} es cualquier compacto positivamente Π -invariante de \mathcal{C}_0 . También probaremos en el Teorema 2.20 que este semiflujo es el normalmente denominado semiflujo *linealizado* de Π sobre las semiórbitas de \mathcal{K} .

Recordemos que la Π -semiórbita $\Pi(t, \omega, x)$ de $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ está definida en un intervalo maximal de la forma $[0, \beta_{\omega, x})$.

Teorema 2.18. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3). Entonces*

- (i) dados $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$ y $v \in C$, existe una única solución maximal $z(t, \omega, x, v)$ de la ecuación (2.37) correspondiente a (ω, x) verificando $z(s, \omega, x, v) = v(s)$ para $s \in [-r, 0]$. Esta solución está definida y es continua en el intervalo $[-r, \beta_{\omega, x}]$. Además, la aplicación $C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto z(t, \omega, x, v)$ es lineal y continua para todo $t \in [-r, \beta_{\omega, x}]$.

Definimos ahora

$$w(t, \omega, x, v)(s) := z(t + s, \omega, x, v) \quad (2.42)$$

para todos $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, $t \in [0, \beta_{\omega, x}]$, $v \in C$, y $s \in [-r, 0]$. Entonces,

- (ii) $w(t+l, \omega, x, v) = w(t, w(\Pi(l, \omega, x), v))$ siempre que el término de la derecha tenga sentido.

- (iii) La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^0 \times C &\rightarrow C \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto w(t, \omega, x, v) \end{aligned}$$

está bien definida y es continua.

- (iv) Si $v \in W^{1, \infty}$, entonces $w(t, \omega, x, v) \in W^{1, \infty}$ para todo $t \in [0, \beta_{\omega, x}]$.

- (v) Sea

$$\tilde{\mathcal{U}}^0 := \{(t, \omega, x) \in \mathcal{U}^0 \mid t \geq r\}. \quad (2.43)$$

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}^0 \times W^{1, \infty} &\rightarrow W^{1, \infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto w(t, \omega, x, v) \end{aligned}$$

es continua.

- (vi) Fijamos $\tilde{t} \geq 0$, con

$$\mathcal{U}_{\tilde{t}}^0 := \{(\omega, x) \mid (\tilde{t}, \omega, x) \in \mathcal{U}^0\} = \{(\omega, x) \in \mathcal{C}_0 \mid \tilde{t} < \beta_{\omega, x}\} \quad (2.44)$$

no vacío. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\tilde{t}}^0 \times W^{1, \infty} &\rightarrow W^{1, \infty} \\ (\omega, x, v) &\mapsto w(\tilde{t}, \omega, x, v) \end{aligned}$$

es continua.

- (vii) Sea

$$\mathcal{V}^0 := \{(t, \omega, x, v) \mid (t, \omega, x) \in \mathcal{U}^0 \text{ y } v \in C^1 \text{ con } \dot{v}(0^-) = L(\omega, x)v\}.$$

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^0 &\rightarrow W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto w(t, \omega, x, v) \end{aligned}$$

es continua.

(viii) Sea $\mathcal{U}_{\tilde{t}}^0$ el conjunto definido por (2.44). Fijamos $\tilde{t} > 0$ con $\mathcal{U}_{\tilde{t}}^0$ no vacío, y $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{U}_{\tilde{t}}^0$. Tomamos también $\rho > 0$ suficientemente pequeño para que se cumplan:

1. $u(t, \omega, x)$ está definido (es decir, $(t, \omega, x) \in \mathcal{U}$) para todos $t \in [0, \tilde{t}]$ y $(\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}$, con

$$\mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0} := \{(\omega, x) \in \mathcal{C}_0 \mid d_{\Omega}(\omega, \tilde{\omega}) < \rho \text{ y } \|x - \tilde{x}\|_{W^{1,\infty}} < \rho\};$$

2. $\sup\{\|u(t, \omega, x)\|_C \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}\} < \infty$.

Entonces existe $M = M(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \rho)$ tal que si $(\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}$ se cumple que

$$\|w(t, \omega, x, v)\|_{W^{1,\infty}} \leq M \|v\|_{W^{1,\infty}}$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$.

Demostración. (i) Las propiedades (iii), (iv) y (v) de la Proposición 2.17 nos permiten aplicar la teoría general de ecuaciones diferenciales con retardo finito que establecen Hale y Verdyun Lunel en [14], Sección 2.2. Esto nos permite asegurar la existencia y unicidad local de $z(t, \omega, x, v)$, su continuidad respecto a $t \in [-r, \alpha]$ para $\alpha > 0$, y su continuidad con respecto a $v \in C$. El método clásico de continuación de soluciones para ecuaciones diferenciales lineales nos permite garantizar que la solución $z(t, \omega, x, v)$ está definida y es continua en $[-r, \beta_{\omega, x})$. Y, como la ecuación es lineal, también lo es la aplicación $v \mapsto z(t, \omega, x, v)$.

(ii) Esta propiedad de cociclo se deduce de la unicidad demostrada en el punto anterior.

(iii) La continuidad de $[-r, \beta_{\omega, x}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto z(t, \omega, x, v)$ establecida en (i) asegura que $w(t, \omega, x, v) \in C$ si $(t, \omega, x, v) \in \mathcal{U}^0 \times C$. Por tanto la aplicación está bien definida. Elegimos ahora una sucesión $((t_m, \omega_m, x_m, v_m))$ en $\mathcal{U}^0 \times C$ con límite $(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v}) \in \mathcal{U}^0 \times C$. Como \mathcal{U} es abierto podemos suponer la existencia de $t_0 \in (\tilde{t}, \beta_{\tilde{\omega}, \tilde{x}})$ tal que $t_m \leq t_0 < \beta_{\omega_m, x_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para simplificar la notación, representamos

$$z_m(t) := z(t, \omega_m, x_m, v_m) \text{ para todo } t \in [-r, t_0]$$

y

$$w_m(t) := w(t, \omega_m, x_m, v_m) \text{ para todo } t \in [0, t_0]$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. La forma integral de (2.37) asegura que

$$z_m(t) = v_m(0) + \int_0^t L(\Pi(l, \omega_m, x_m)) w_m(l) dl \quad (2.45)$$

para todo $t \in [0, t_0]$. Por otro lado, el conjunto \mathcal{S} , definido por (2.19), está contenido en \mathcal{C}_0 y es compacto en $\Omega \times W^{1,\infty}$. Por consiguiente, $\Pi([0, t_0] \times \mathcal{S})$ es un subconjunto compacto de \mathcal{C}_0 . La Proposición 2.17(iii) asegura que

$$k_0 := \sup\{\|L(\Pi(t, \omega_m, x_m))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \mid t \in [0, t_0], m \in \mathbb{N}\} < \infty. \quad (2.46)$$

Definimos ahora $\alpha := \sup_{m \in \mathbb{N}} \|v_m\|_C$, y deducimos de (2.45) que

$$\|w_m(t)\|_C \leq \alpha + \int_0^t k_0 \|w_m(l)\|_C dl$$

para todo $t \in [0, t_0]$. Aplicando el lema de Gronwall, obtenemos

$$\|w_m(t)\|_C \leq \alpha e^{k_0 t_0}$$

para todos $t \in [0, t_0]$ y $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\sup\{\|w_m(t)\|_C \mid t \in [0, t_0], m \in \mathbb{N}\} < \infty. \quad (2.47)$$

Deducimos de (2.37), (2.46) y (2.47) que el conjunto $\{\dot{z}_m(t) \mid t \in [0, t_0], m \in \mathbb{N}\}$ está uniformemente acotado.

Seguimos ahora el esquema de la prueba del punto (v) del Teorema 2.6(iii). Primero utilizamos el teorema de Arzelá-Ascoli para probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z(t, \omega_m, x_m, v_m) = z(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v})$$

uniformemente en $[-r, t_0]$. Y después, tenemos en cuenta la desigualdad

$$\begin{aligned} & \|w(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v}) - w(t_m, \omega_m, x_m, v_m)\|_C \\ & \leq \|w(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v}) - w(t_m, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v})\|_C \\ & \quad + \|w(t_m, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v}) - w(t_m, \omega_m, x_m, v_m)\|_C, \end{aligned}$$

y nos fijamos en que el término $\|w(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v}) - w(t_m, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v})\|_C$ es tan pequeño como queramos para m suficientemente grande, debido a que la aplicación $t \mapsto z(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v})$ es uniformemente continua en $[-r, t_0]$; y el término $\|w(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v}) - w(t, \omega_m, x_m, v_m)\|_C$ también es tan pequeño como queramos simultáneamente para todo $t \in [0, t_0]$ si m es suficientemente grande debido a la convergencia uniforme mencionada anteriormente.

(iv) Sea $v \in W^{1,\infty}$. Sabemos que para todo $t \geq 0$ se cumple $\dot{z}(t, \omega, x, v) =$

$L(\Pi(t, \omega, x)) w(t, \omega, x, v)$. Es sencillo demostrar que, si $t \geq r$, $\|\dot{w}(t, \omega, x, v)\|_{L^\infty}$ es finito, y por lo tanto $w(t, \omega, x, v) \in W^{1, \infty}$. Y si $t \in [0, r]$, entonces utilizamos la desigualdad $\|w(t, \omega, x, v)\|_{W^{1, \infty}} \leq \|v\|_{W^{1, \infty}} + \|w(r, \omega, x, v)\|_{W^{1, \infty}}$.

(v)&(vi) Estas propiedades se pueden demostrar con los argumentos usados para probar los puntos (iv) y (v) del Teorema 2.6.

(vii) La prueba de este punto se puede hacer con las ideas de la demostración del punto (vi) del Teorema 2.6; de hecho este caso es más simple. Si el límite en \mathcal{V}^0 de $((t_m, \omega_m, x_m, v_m))$ es $(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v})$, si $t_m \leq t_0 < \beta_{\omega_m, x_m}$, y si definimos $z_m(t) := z(t, \omega_m, x_m, v_m)$ para todos $t \in [-r, t_0]$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces la equicontinuidad de la familia $\{z_m(t) \mid m \in \mathbb{N}\}$ en $[0, t_0]$ se deduce de (2.37), el punto (i) de la Proposición 2.17, y la continuidad uniforme de Π en $[0, t_0] \times \mathcal{S}$, donde el conjunto \mathcal{S} está definido por (2.19). Además, $z(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{v})$ es una función de clase $C^1([-r, t_0], \mathbb{R}^n)$, lo que nos permite completar la prueba de este punto.

(viii) Fijamos $(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x})$. La existencia de una constante $\rho > 0$ para la cual se cumplen 1 y 2 está probada en el punto (i) del Teorema 2.14, donde también probamos que (véase (2.29))

$$c^* := \sup\{\|u(t, \omega, x)\|_{W^{1, \infty}} \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}\} < \infty.$$

Entonces, teniendo en cuenta el punto (iii) de la Proposición (2.17), tenemos que

$$\hat{c} := \sup\{\|L(\Pi(t, \omega, x))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \mid t \in [0, \tilde{t}] \text{ y } (\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}\} < \infty.$$

Tomamos $t \in [0, \tilde{t}]$, $(\omega, x) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}$ y $v \in W^{1, \infty}$. Teniendo en cuenta (2.37), obtenemos

$$\begin{aligned} |z(t, \omega, x, v)| &\leq |v(0)| + \int_0^t \|L(\Pi(l, \omega, x))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \|w(l, \omega, x, v)\|_C dl \\ &\leq \|v\|_{W^{1, \infty}} + \int_0^t \hat{c} \|w(l, \omega, x, v)\|_C. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|w(t, \omega, x, v)\|_C \leq \|v\|_{W^{1, \infty}} + \int_0^t \hat{c} \|w(l, \omega, x, v)\|_C$$

y el lema de Gronwall permite asegurar que

$$\|w(t, \omega, x, v)\|_C \leq e^{\hat{c}t} \|v\|_{W^{1, \infty}}.$$

Ahora podemos terminar la prueba de (viii) fácilmente: véase por ejemplo el final de la demostración del punto (ii) del Teorema 2.14. \square

Corolario 2.19. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3). Sea*

$\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0$ un compacto positivamente Π -invariante. Definimos $w(t, \omega, x, v)$ por (2.42) para todos $t \in \mathbb{R}^+$, $(\omega, x) \in \mathcal{K}$ y $v \in C$. Entonces

(i) la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times C &\rightarrow \mathcal{K} \times C \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)) \end{aligned}$$

es un semiflujo skew-product lineal con base $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$.

(ii) La aplicación

$$\begin{aligned} \Pi^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)) \end{aligned}$$

verifica las propiedades (f1) y (f2) de la Definición 1.2, con Ω reemplazado por $\mathcal{K} \times W^{1,\infty}$ (para todo $t \geq 0$ y todo $l \geq 0$ en el caso de (f2)). Además,

- la aplicación

$$\begin{aligned} [r, \infty) \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)) \end{aligned}$$

es continua.

- Para cada $\tilde{t} \geq 0$, la aplicación

$$\begin{aligned} \Pi_{\tilde{t}}^L: \mathcal{K} \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (\omega, x, v) &\mapsto (\Pi(\tilde{t}, \omega, x), w(\tilde{t}, \omega, x, v)) \end{aligned}$$

es continua.

- Si definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^0 &:= \{(t, \omega, x, v) \in \mathcal{V}^0 \mid (\omega, x) \in \mathcal{K}\} \\ &= \{(t, \omega, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times C^1 \mid \dot{v}(0^-) = L(\omega, x)v\}, \end{aligned}$$

entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^0 &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)) \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Por el Corolario 2.11 sabemos que $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es un semiflujo global continuo. Teniendo esto en cuenta, todas las afirmaciones de este corolario se deducen fácilmente del Teorema 2.18. \square

El teorema anterior demuestra que

$$\begin{aligned} \Pi^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)) \end{aligned}$$

es un nuevo semiflujo pseudo-continuo (véase la Nota 2.7). Como ya hemos comentado, en el siguiente resultado (Teorema 2.20) demostraremos que Π^L es el semiflujo linealizado de Π , en el sentido de que cada una de sus semiórbitas determina la derivada con respecto a la condición inicial de las semiórbitas de Π ; en otras palabras, $w(t, \omega, x, v) = u_x(t, \omega, x) v$. El primer punto del teorema está probado por Hartung en [15], Teorema 4. Sin embargo, detallaremos parte de la prueba para que nos ayude a comprender el significado dinámico de $u_x(t, \omega, x)$.

Los conjuntos \mathcal{C}_0 y \mathcal{U}^0 que aparecen en el siguiente teorema están definidos por (2.35) y (2.36) respectivamente.

Teorema 2.20. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3), y fijemos $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$.*

(i) *Sea $t \in [0, \beta_{\omega, x})$, entonces existe*

$$u_x(t, \omega, x) v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t, \omega, x + \varepsilon v) - u(t, \omega, x)}{\varepsilon} \quad \text{en } W^{1,\infty} \quad (2.48)$$

uniformemente en $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$, donde

$$\overline{\mathcal{B}}_1 := \{v \in W^{1,\infty} \mid \|v\|_{W^{1,\infty}} = 1\}.$$

(ii) *Sea $w(t, \omega, x, v)$ la función definida en (2.42). Entonces*

$$u_x(t, \omega, x) v = w(t, \omega, x, v).$$

(iii) *Sea $t \in [0, \beta_{\omega, x})$. Entonces*

$$\lim_{\|v\|_{W^{1,\infty}} \rightarrow 0} \frac{\|u(t, \omega, x + v) - u(t, \omega, x) - u_x(t, \omega, x) v\|_{W^{1,\infty}}}{\|v\|_{W^{1,\infty}}} = 0.$$

Es decir, la aplicación $x \mapsto u_x(t, \omega, x)$ es la derivada en el sentido de Fréchet.

Demostración. (i) y (ii) Fijamos para toda la demostración un punto $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$. Además, suponemos que cualquier v que aparezca pertenece a $\overline{\mathcal{B}}_1$. También fijamos un tiempo cualquiera $T \in (0, \beta_{\omega, x})$. Por el Teorema 2.6(i), existe $\delta > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in [-\delta, \delta]$ existe $y_v^\varepsilon(t) := y(t, \omega, x + \varepsilon v)$ para todos $t \in [-r, T]$

y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Para simplificar la notación, definimos

$$\begin{aligned} u_v^\varepsilon(t) &:= u(t, \omega, x + \varepsilon v), & \tau_v^\varepsilon(t) &:= \tau(\omega \cdot t, u_v^\varepsilon(t)), \\ z_v(t) &:= z(t, \omega, x, v), & w_v(t) &:= w(t, \omega, x, v), \end{aligned}$$

para todos ε con $|\varepsilon| \leq \delta$, $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Recordemos que $z(t, \omega, x, v)$ es la solución de (2.37) $_{\omega, x}$, con $z(s, \omega, x, v) = v(s)$ si $s \in [-r, 0]$, y $w(t, \omega, x, v)(s) = z(t + s, \omega, x, v)$. Notemos que $y_v^0(t)$, $u_v^0(t)$, y $\tau_v^0(t)$ son independientes de v . Por esto vamos a omitir el subíndice v cuando $\varepsilon = 0$.

Hartung prueba en el Teorema 2 y el Corolario 1 de [15] que si $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$ y $t \in [0, \beta_{\omega, x})$, entonces

$$u_x(t, \omega, x)v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t, \omega, x + \varepsilon v) - u(t, \omega, x)}{\varepsilon} \quad \text{en } C \quad (2.49)$$

uniformemente en $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$.

También prueba que

$$u_x(t, \omega, x)v = w(t, \omega, x, v). \quad (2.50)$$

En particular, la aplicación $u_x(t, \omega, x): W^{1, \infty} \rightarrow C$ es lineal. Además, el Teorema 2.18(iv) asegura que $w(t, \omega, x, v) \in W^{1, \infty}$ si $v \in W^{1, \infty}$, por lo que (2.50) garantiza que la aplicación $u_x(t, \omega, x): W^{1, \infty} \rightarrow W^{1, \infty}$ está bien definida. Nuestro objetivo es probar que (2.49) se cumple para la topología de $W^{1, \infty}$.

Dado que T es arbitrario, un argumento estándar de compacidad y la igualdad (2.50) nos permiten escribir (2.49) como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{u_v^\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon} - w_v(t) \right\|_C = 0 \quad (2.51)$$

para todo $t \in [0, T]$ uniformemente en $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$.

Por la misma razón, podemos escribir (2.48) como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{u_v^\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon} - w_v(t) \right\|_{W^{1, \infty}} = 0$$

para todo $t \in [0, T]$ uniformemente en $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$.

Sabemos que $(\dot{y}_v^\varepsilon(s) - \dot{y}^0(s))/\varepsilon = \dot{v}(s) = \dot{z}_v(s)$ para casi todo $s \in [-r, 0]$. Este hecho junto con (2.51) y la definición de $\|\cdot\|_{W^{1, \infty}}$ nos permiten reformular nuestro objetivo: nos basta con probar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\dot{y}_v^\varepsilon(t) - \dot{y}^0(t)}{\varepsilon} = \dot{z}_v(t) \quad (2.52)$$

uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$.

Como F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3), y además $y_v^\varepsilon(t)$ verifica (2.4) $_{\omega, x + \varepsilon v}$,

podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{y}_v^\varepsilon(t) - \dot{y}^0(t)}{\varepsilon} &= \frac{F(\omega \cdot t, y_v^\varepsilon(t), y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t))) - F(\omega \cdot t, y^0(t), y^0(t - \tau^0(t)))}{\varepsilon} \\
&= \int_0^1 \left(D_2 F(\omega \cdot t, s y_v^\varepsilon(t) + (1-s)y^0(t), s y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) \right. \\
&\quad \left. + (1-s)y^0(t - \tau^0(t))) \left(\frac{y_v^\varepsilon(t) - y^0(t)}{\varepsilon} \right) \right) ds \\
&\quad + \int_0^1 \left(D_3 F(\omega \cdot t, s y_v^\varepsilon(t) + (1-s)y^0(t), s y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) \right. \\
&\quad \left. + (1-s)y^0(t - \tau^0(t))) \left(\frac{y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau^0(t))}{\varepsilon} \right) \right) ds.
\end{aligned}$$

Veamos que la propiedad (2.52) es consecuencia de las siguientes afirmaciones: el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ del primer integrando de la anterior igualdad es

$$\begin{aligned}
l_1 &:= D_2 F(\omega \cdot t, y^0(t), y^0(t - \tau^0(t))) z_v(t), \\
&\text{uniformemente en } t \in [0, T], s \in [0, 1], \text{ y } v \in \bar{\mathcal{B}}_1,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

y del segundo sumando es

$$\begin{aligned}
l_2 &:= D_3 F(\omega \cdot t, y^0(t), y^0(t - \tau^0(t))) z_v(t - \tau^0(t)) \\
&\quad - D_3 F(\omega \cdot t, y^0(t), y^0(t - \tau^0(t))) \dot{y}^0(t - \tau^0(t)) \cdot D_2 \tau^0(t) w_v(t) \\
&\text{uniformemente en } t \in [0, T], s \in [0, 1], \text{ y } v \in \bar{\mathcal{B}}_1.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Supongamos para ello que (2.53) y (2.54) son ciertos. Entonces la continuidad de $D_2 F$ y $D_3 F$ que asegura H1(3) y la ecuación (2.37) nos permiten afirmar que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\dot{y}_v^\varepsilon(t) - \dot{y}^0(t)}{\varepsilon} &= D_2 F(\omega \cdot t, y^0(t), y^0(t - \tau^0(t))) z_v(t) \\
&\quad + D_3 F(\omega \cdot t, y^0(t), y^0(t - \tau^0(t))) z_v(t - \tau^0(t)) \\
&\quad - D_3 F(\omega \cdot t, y^0(t), y^0(t - \tau^0(t))) \dot{y}^0(t - \tau^0(t)) \cdot D_2 \tau^0(t) w_v(t) \\
&= L(\Pi(t, \omega, x)) w_v(t) = \dot{z}_v(t)
\end{aligned}$$

uniformemente en $t \in [0, T]$, $s \in [0, 1]$, y $v \in \bar{\mathcal{B}}_1$, que es lo que dice (2.52).

Falta demostrar que se verifican (2.53) y (2.54). El punto (iii) del Teorema 2.6 asegura que $\Pi: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} \rightarrow \Omega \times C$ es continua, lo que nos permite afirmar que dado $\rho > 0$ existe $\delta = \delta(\rho) > 0$ tal que si $\varepsilon \leq \delta$ entonces $\|u_v^\varepsilon(t) - u^0(t)\|_C \leq \rho$ para todos $t \in [0, T]$ y $v \in \bar{\mathcal{B}}_1$. Es decir, que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_v^\varepsilon(t) = u^0(t)$ en C uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \bar{\mathcal{B}}_1$. Esta propiedad garantiza que los siguientes límites existen

y son uniformes en $[0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$:

$$\begin{aligned} y^0(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_v^\varepsilon(t), \\ \tau^0(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_v^\varepsilon(t), \\ y^0(t - \tau^0(t)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)). \end{aligned} \quad (2.55)$$

El último de estos límites se deduce de los otros dos y de la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \|y^0(t - \tau^0(t)) - y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t))\| &\leq \|y^0(t - \tau^0(t)) - y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t))\| \\ &\quad + \|y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t))\|. \end{aligned}$$

Además, (2.51) garantiza que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y_v^\varepsilon(t) - y^0(t)}{\varepsilon} &= z_v(t) \\ &\text{uniformemente en } t \in [-r, T] \text{ y } v \in \overline{\mathcal{B}}_1. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Uniendo a todo lo anterior la continuidad de D_2F asegurada por H1(3), tenemos demostrada la afirmación (2.53).

Para probar (2.54) necesitamos ver que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau^0(t))}{\varepsilon} = z_v(t - \tau^0(t)) - \dot{y}^0(t - \tau^0(t)) \cdot D_2\tau^0(t) w_v(t) \quad (2.57)$$

uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Escribimos

$$\begin{aligned} &\frac{y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau^0(t))}{\varepsilon} \\ &= \frac{y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t))}{\varepsilon} + \frac{y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau^0(t))}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

y reformulamos (2.57) como

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t))}{\varepsilon} &= z_v(t - \tau^0(t)) \\ &\text{uniformemente en } t \in [0, T] \text{ y } v \in \overline{\mathcal{B}}_1 \end{aligned} \quad (2.58)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau^0(t))}{\varepsilon} &= -\dot{y}^0(t - \tau^0(t)) \cdot D_2\tau^0(t) w_v(t) \\ &\text{uniformemente en } t \in [0, T] \text{ y } v \in \overline{\mathcal{B}}_1. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Para probar (2.58), escribimos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau^0(t))}{\varepsilon} - z_v(t - \tau^0(t)) \right| \\ & \leq \left| \frac{y_v^\varepsilon(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t))}{\varepsilon} - z_v(t - \tau_v^\varepsilon(t)) \right| \\ & \quad + \left| z_v(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - z_v(t - \tau^0(t)) \right|. \end{aligned}$$

El límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ del primero de estos dos últimos sumandos es 0 uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$, tal y como se deduce de (2.56). Por lo tanto, (2.58) es consecuencia de

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| z_v(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - z_v(t - \tau^0(t)) \right| &= 0 \\ & \text{uniformemente en } t \in [0, T] \text{ y } v \in \overline{\mathcal{B}}_1. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esta propiedad se deduce de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_v^\varepsilon(t) = \tau^0(t)$ uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$ (véase (2.55)), junto con la equicontinuidad de la familia $\{z_v \mid v \in \overline{\mathcal{B}}_1\}$ en $[-r, T]$, ya que si s_1 y s_2 pertenecen a $[-r, 0]$ entonces $|z_v(s_1) - z_v(s_2)| \leq \varepsilon \|\dot{v}\|_{L^\infty} |s_1 - s_2| \leq |s_1 - s_2|$, de modo que la familia es equicontinua en $[-r, 0]$; y si $t > 0$, $|\dot{z}_v(t)| \leq \|L(\Pi(t, \omega, x))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)} \|w_v(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq k$ para todos $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$, lo que garantiza la equicontinuidad en $[0, T]$. La existencia de k es consecuencia de la continuidad uniforme de la aplicación $[0, T] \rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)$, $t \mapsto L(\Pi(t, \omega, x))$ (véase la Proposición 2.17(ii)) y del Teorema 2.18(viii). De modo que (2.60), y por tanto (2.58), están probados.

Ya sólo falta probar (2.59). Escribimos

$$\begin{aligned} & \frac{y^0(t - \tau_v^\varepsilon(t)) - y^0(t - \tau^0(t))}{\varepsilon} \\ & = \int_0^1 \dot{y}^0(t - s \tau_v^\varepsilon(t) - (1 - s) \tau^0(t)) ds \cdot \frac{\tau^0(t) - \tau_v^\varepsilon(t)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Como $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$, por el punto (vi) del Teorema 2.6 sabemos que \dot{y}^0 es uniformemente continua en $[-r, T]$ y de esto deducimos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{y}^0(t - s \tau_v^\varepsilon(t) - (1 - s) \tau^0(t)) &= \dot{y}^0(t - \tau^0(t)) \\ & \text{uniformemente en } t \in [0, T], s \in [0, 1], \text{ y } v \in \overline{\mathcal{B}}_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \dot{y}^0(t - s \tau_v^\varepsilon(t) - (1 - s) \tau^0(t)) ds &= \dot{y}^0(t - \tau^0(t)) \\ & \text{uniformemente en } t \in [0, T], s \in [0, 1], \text{ y } v \in \overline{\mathcal{B}}_1. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por último, escribimos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau^0(t) - \tau_v^\varepsilon(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 D_2\tau(\omega \cdot t, s u^0(t) + (1-s) u_v^\varepsilon(t)) \frac{u^0(t) - u_v^\varepsilon(t)}{\varepsilon} ds.$$

Deducimos de H2(1)&(3) y de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_v^\varepsilon(t) = u^0(t)$ uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$ (véase (2.55)), que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_2\tau(\omega \cdot t, s u_v^\varepsilon(t) + (1-s) u^0(t)) = D_2\tau(\omega \cdot t, u^0(t))$$

en $\text{Lin}(C, \mathbb{R})$, uniformemente en $t \in [0, T]$, $s \in [0, 1]$, y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Además, sabemos por (2.51) que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_v^\varepsilon(t) - u^0(t))/\varepsilon = w_v(t)$ en C uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Así, podemos concluir que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau^0(t) - \tau_\varepsilon(t)}{\varepsilon} = -D_2\tau(\omega \cdot t, u^0(t)) w_v(t) \quad (2.62)$$

uniformemente en $t \in [0, T]$ y $v \in \overline{\mathcal{B}}_1$.

Las igualdades (2.61) y (2.62) prueban (2.59). Con esto, tenemos probado (2.57). Las igualdades de (2.55), la continuidad de D_3F asegurada por H1(3), y (2.57) nos permiten probar (2.54), lo que completa la demostración de (i) y (ii).

(iii) Esta propiedad es una consecuencia fácil de la uniformidad establecida en (i). Llamamos $\varepsilon = \|v\|_{W^{1,\infty}}$, de modo que $\varepsilon \rightarrow 0$ si y sólo si $\|v\|_{W^{1,\infty}} \rightarrow 0$. También llamamos $\tilde{v} = (1/\varepsilon)v$ y observamos que $\tilde{v} \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Utilizando (i), tenemos que

$$\begin{aligned} & \lim_{\|v\|_{W^{1,\infty}} \rightarrow 0} \frac{\|u(t, \omega, x+v) - u(t, \omega, x) - u_x(t, \omega, x)v\|_{W^{1,\infty}}}{\|v\|_{W^{1,\infty}}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|u(t, \omega, x + \varepsilon \tilde{v}) - u(t, \omega, x) - \varepsilon u_x(t, \omega, x)\tilde{v}\|_{W^{1,\infty}}}{\varepsilon} = 0, \end{aligned}$$

lo que prueba (iii). Esto completa la demostración del teorema. \square

Nótese que el Teorema 2.20(ii) asegura que la aplicación $(t, \omega, x, v) \mapsto u_x(t, \omega, x)v$ cumple todas las propiedades de continuidad descritas en el Teorema 2.18.

Completamos esta sección con un análisis más profundo de las propiedades de regularidad de $u_x(t, \omega, x)v$.

Teorema 2.21. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3), y consideremos los conjuntos \mathcal{U}_t^0 y $\tilde{\mathcal{U}}^0$ definidos por (2.44) y (2.43), respectivamente. Entonces,*

(i) *si fijamos $\tilde{t} \geq 0$ tal que $\mathcal{U}_{\tilde{t}}^0$ no es vacío, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\tilde{t}}^0 &\rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, W^{1,\infty}) \\ (\omega, x) &\mapsto u_x(\tilde{t}, \omega, x) \end{aligned}$$

es continua.

(ii) La aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}^0 &\rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, W^{1,\infty}) \\ (t, \omega, x) &\mapsto u_x(t, \omega, x) \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. En toda la prueba vamos a tener en cuenta que $u_x(t, \omega, x)v = w(t, \omega, x, v)$ (véase el Teorema 2.20) y que la función $t \mapsto w(t, \omega, x, v)(0) = z(t, \omega, x, v)$ resuelve (2.37) _{ω} .

(i) Tomamos una sucesión $((\omega_m, x_m))$ en \mathcal{U}_t^0 con límite $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{U}_t^0$. También una constante ρ que verifique las condiciones 1 y 2 del punto (viii) del Teorema 2.18. Además, suponemos, sin restricciones, que $(\omega_m, x_m) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para todo $v \in W^{1,\infty}$ representamos, para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} z_m(t, v) &:= z(t, \omega_m, x_m, v) \quad \text{y} \quad \tilde{z}(t, v) := z(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, v) \quad \text{para } t \in [-r, \tilde{t}]; \\ w_m(t, v) &:= w(t, \omega_m, x_m, v) \quad \text{y} \quad \tilde{w}(t, v) := w(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, v) \quad \text{para } t \in [0, \tilde{t}]. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la ecuación (2.37), obtenemos

$$\begin{aligned} |\tilde{z}(t, v) - z_m(t, v)| &\leq \left| \int_0^t (L(\Pi(l, \omega_m, x_m)) - L(\Pi(l, \tilde{\omega}, \tilde{x}))) w_m(l, v) dl \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t L(\Pi(l, \tilde{\omega}, \tilde{x})) (\tilde{w}(l, v) - w_m(l, v)) dl \right| \end{aligned} \quad (2.63)$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Fijamos $\varepsilon > 0$, definimos \mathcal{S} por (2.19), recordamos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_0$, y usamos la propiedad (ii) de la Proposición 2.17 y la compacidad de $[0, T] \times \mathcal{S}$ para encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|L(\Pi(t, \omega_m, x_m)) - L(\Pi(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$$

para todos $t \in [0, \tilde{t}]$ y $m \geq m_0$. De acuerdo con el punto (viii) del Teorema 2.18, existe $M > 0$ tal que

$$\|w_m(t, v)\|_{W^{1,\infty}} \leq M \|v\|_{W^{1,\infty}}$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Y además el punto (iii) de la Proposición 2.17 asegura que

$$k := \sup_{t \in [0, \tilde{t}]} \|L(\Pi(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Por lo tanto, considerando todo lo anterior y aplicándolo a (2.63) tenemos que

$$|\tilde{z}(t, v) - z_m(t, v)| \leq \varepsilon \tilde{t} M \|v\|_{W^{1,\infty}} + \int_0^t k \|\tilde{w}(l, v) - w_m(l, v)\|_C dl$$

para todos $t \in [0, \tilde{t}]$ y $m \geq m_0$. Como $|\tilde{z}(t, v) - z_m(t, v)| = 0$ si $t \in [-r, 0]$, podemos concluir que

$$\|\tilde{w}(t, v) - w_m(t, v)\|_C \leq \varepsilon \tilde{t} M \|v\|_{W^{1,\infty}} + \int_0^t k \|\tilde{w}(l, v) - w_m(l, v)\|_C dl$$

para todos $t \in [0, \tilde{t}]$ y $m \geq m_0$. El lema de Gronwall nos permite afirmar que

$$\|\tilde{w}(t, v) - w_m(t, v)\|_C \leq \varepsilon \tilde{t} M \|v\|_{W^{1,\infty}} e^{k\tilde{t}} = \varepsilon \tilde{M} \|v\|_{W^{1,\infty}}$$

para todos $t \in [0, \tilde{t}]$ y $m \geq m_0$, donde $\tilde{M} = \tilde{t} M e^{k\tilde{t}}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{z}}(t, v) - \dot{z}_m(t, v)| &\leq \|L(\Pi(t, \tilde{\omega}, \tilde{x})) - L(\Pi(t, \omega_m, x_m))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)} \|w_m(t, v)\|_{W^{1,\infty}} \\ &\quad + \|L(\Pi(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \|\tilde{w}(t, v) - w_m(t, v)\|_C \\ &\leq \varepsilon M \|v\|_{W^{1,\infty}} + \varepsilon k \tilde{M} \|v\|_{W^{1,\infty}} = \varepsilon M^* \|v\|_{W^{1,\infty}} \end{aligned}$$

para todos $t \in [0, \tilde{t}]$ y $m \geq m_0$, donde $M^* := M + k \tilde{M}$. También sabemos que $|\dot{\tilde{z}}(t, v) - \dot{z}_m(t, v)| = 0$ si $t \in [-r, 0]$. Por lo tanto, si $m \geq m_0$, tenemos que

$$\|\tilde{w}(\tilde{t}, v) - w_m(\tilde{t}, v)\|_{W^{1,\infty}} \leq \varepsilon (\tilde{M} + M^*) \|v\|_{W^{1,\infty}}.$$

Como las constantes M y M^* pueden ser definidas desde el comienzo, (i) queda probado.

(ii) Sea $((t_m, \omega_m, x_m))$ la sucesión en $\tilde{\mathcal{U}}^0$ con límite $(t_0, \tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{U}}^0$ y supongamos, sin restricciones, la existencia de $\tilde{t} \in (t_0, \beta_{\tilde{\omega}, \tilde{x}})$ con $2r \leq t_m \leq \tilde{t} \leq \beta_{\omega_m, x_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. También elegimos una constante ρ que cumple las condiciones 1 y 2 del punto (viii) del Teorema 2.18 para $(\tilde{t}, \tilde{\omega}, \tilde{x})$ y suponemos, de nuevo sin restricciones, que $(\omega_m, x_m) \in \mathcal{B}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}^{\rho, 0}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para simplificar la notación, para cada $v \in W^{1,\infty}$ representamos

$$\begin{aligned} z_m(t, v) &:= z(t, \omega_m, x_m, v) \quad \text{y} \quad \tilde{z}(t, v) := z(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, v) \quad \text{para } t \in [-r, \tilde{t}]; \\ w_m(t, v) &:= w(t, \omega_m, x_m, v) \quad \text{y} \quad \tilde{w}(t, v) := w(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, v) \quad \text{para } t \in [0, \tilde{t}]. \end{aligned}$$

Fijamos $\varepsilon > 0$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}(t_0, v) - w_m(t_m, v)\|_{W^{1,\infty}} \\ \leq \|\tilde{w}(t_0, v) - w_m(t_0, v)\|_{W^{1,\infty}} + \|w_m(t_0, v) - w_m(t_m, v)\|_{W^{1,\infty}}. \end{aligned}$$

Por (i) sabemos que el primer sumando tiende a 0 cuando m tiende a infinito, por lo que nos centraremos en el segundo sumando. Por la ecuación (2.37) sabemos que

$$|z_m(t, v) - z_m(t^*, v)| = \left| \int_{t^*}^t L(\Pi(l, \omega_m, x_m)) w_m(l, v) dl \right|$$

para todos t y $t^* \in [r, \tilde{t}]$ y $m \in \mathbb{N}$. Definimos \mathcal{S} por (2.19), de modo que $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_0$. La propiedad de continuidad del punto (ii) de la Proposición 2.17 y la compacidad de $[0, \tilde{t}] \times \mathcal{S}$ nos permiten asegurar que

$$k^* := \sup\{\|L(\Pi(t, \omega_m, x_m))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)} \mid t \in [r, \tilde{t}] \text{ y } m \in \mathbb{N}\} < \infty$$

y que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|L(\Pi(t_0 + s, \omega_m, x_m)) - L(\Pi(t_m + s, \omega_m, x_m))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$$

para todos $m \geq m_0$ y $s \in [-r, 0]$. Por lo tanto, de acuerdo con el punto (viii) del Teorema 2.18, existe $M > 0$ tal que

$$\|w_m(t, v)\|_{W^{1,\infty}} \leq M \|v\|_{W^{1,\infty}}$$

para todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Por razones que quedarán claras más adelante, suponemos que $k^* M > 1$. Tenemos

$$|z_m(t, v) - z_m(t^*, v)| \leq k^* M |t - t^*| \|v\|_{W^{1,\infty}}$$

para todos t y $t^* \in [0, \tilde{t}]$. Por otro lado, si t y $t^* \in [-r, 0]$ entonces

$$|z_m(t, v) - z_m(t^*, v)| = |v(t) - v(t^*)| \leq |t - t^*| \|\dot{v}\|_{L^\infty} \leq k^* M |t - t^*| \|v\|_{W^{1,\infty}}$$

y, si $-r \leq t \leq 0 \leq t^* \leq \tilde{t}$, se cumple

$$\begin{aligned} |z_m(t, v) - z_m(t^*, v)| &\leq |z_m(t, v) - z_m(0, v)| + |z_m(0, v) - z_m(t^*, v)| \\ &\leq -t k^* M \|v\|_{W^{1,\infty}} + t^* k^* M \|v\|_{W^{1,\infty}} = |t^* - t| k^* M \|v\|_{W^{1,\infty}}. \end{aligned}$$

En consecuencia, si t y $t^* \in [0, \tilde{t}]$ y $m \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\|w_m(t, v) - w_m(t^*, v)\|_C \leq k^* M |t - t^*| \|v\|_{W^{1,\infty}}.$$

Ahora elegimos $m_1 \geq m_0$ tal que $|t_m - t_0| \leq \varepsilon$ si $m \geq m_1$ y tenemos en cuenta que $t_0 \geq r$ y $t_m \geq r$, para concluir que si $m \geq m_1$ y $s \in [-r, 0]$ se cumple que

$$\begin{aligned} &|\dot{z}_m(t_0 + s, v) - \dot{z}_m(t_m + s, v)| \\ &\leq \|L(\Pi(t_0 + s, \omega_m, x_m)) - L(\Pi(t_m + s, \omega_m, x_m))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)} \|w_m(t_0 + s, v)\|_{W^{1,\infty}} \\ &\quad + \|L(\Pi(t_m + s, \omega_m, x_m))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \|w_m(t_0 + s, v) - w_m(t_m + s, v)\|_C \\ &\leq \varepsilon M \|v\|_{W^{1,\infty}} + \varepsilon (k^*)^2 M \|v\|_{W^{1,\infty}} = \varepsilon M^* \|v\|_{W^{1,\infty}}, \end{aligned}$$

donde $M^* := (1 + (k^*)^2) M$. Por lo tanto, si $m \geq m_1$ obtenemos que

$$\|w_m(t_0, v) - w_m(t_m, v)\|_{W^{1,\infty}} \leq \varepsilon (k^* M + M^*) \|v\|_{W^{1,\infty}}$$

y como k^* , M y M^* pueden definirse desde el principio, tenemos probado (ii) y, por tanto, el teorema. \square

2.4. Construcción de la envolvente

El objetivo de esta sección es describir el proceso que nos permite incluir una ERDE n -dimensional no autónoma del tipo

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tilde{\tau}(t, y_t))), \quad t \geq 0 \quad (2.64)$$

dentro de una familia de ERDEs n -dimensionales no autónomas de la forma

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), \quad t \geq 0 \quad (2.65)$$

para $\omega \in \Omega$. El conjunto Ω será un espacio métrico compacto, y $\omega \cdot t := \sigma(t, \omega)$, siendo $\sigma: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ un flujo continuo. Estableceremos también condiciones sobre el campo vectorial f y sobre el retardo $\tilde{\tau}$ que garanticen que F y τ verifiquen [H1\(1\),\(2\)&\(3\)](#) y [H2\(1\),\(2\)&\(3\)](#), las cuales hemos impuesto en distintos puntos de las secciones anteriores.

El proceso de inclusión de (2.64) en la familia (2.65) se basa en la idea de Bebutov [4] de la construcción de la envolvente: este será nuestro espacio Ω . En el contexto de ecuaciones funcionales el proceso aparece explicado en Hale y Verdyun Lunel [14] e Hino, Murakami y Naito [22]. La idea fundamental ya se ha explicado en la introducción a este capítulo: las trasladadas en tiempo de las soluciones de (2.64) no son soluciones de la ecuación. Sin embargo, las trasladadas en tiempo de las soluciones sí que son soluciones de las ecuaciones trasladadas en tiempo.

Supongamos para empezar que la aplicación

$$\begin{aligned} (f, \tilde{\tau}): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C &\rightarrow \mathbb{R}^n \times [0, r] \\ (t, y_1, y_2, x) &\mapsto (f(t, y_1, y_2), \tilde{\tau}(t, x)) \end{aligned}$$

(donde f y $\tilde{\tau}$ son el campo vectorial y el retardo de (2.64)), es continua. Más adelante impondremos más condiciones. Recordemos que el conjunto C es el espacio vectorial $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ de las aplicaciones continuas de $[-r, 0]$ en \mathbb{R}^n dotado con la norma $\|x\|_C = \sup_{s \in [-r, 0]} |x(s)|$, y que la correspondiente distancia dota a C de estructura de espacio métrico.

Sea $\tilde{C} := C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C, \mathbb{R}^n \times [0, r])$ el espacio vectorial de aplicaciones continuas definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$ con llegada en $\mathbb{R}^n \times [0, r]$, y sea $\tilde{C}_c := C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C, \mathbb{R}^n \times [0, r])$ el espacio topológico determinado por la topología compacto-abierta sobre este conjunto.

Definimos ahora, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f_t, \tilde{\tau}_t): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C &\rightarrow \mathbb{R}^n \times [0, r] \\ (s, y_1, y_2, x) &\mapsto (f(t+s, y_1, y_2), \tilde{\tau}(t+s, x)). \end{aligned}$$

Claramente $(f_t, \tilde{\tau}_t) \in \tilde{C}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Definimos también

$$\mathcal{F} := \{(f_t, \tilde{\tau}_t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

En adelante trabajaremos bajo las siguientes condiciones (una o las dos):

- (e) \mathcal{F} es una familia equicontinua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$.
- (a) El conjunto $\{(f(t, a, b), \tilde{\tau}(t, u)) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, r]$ está acotado para todo $(a, b, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$. (Y por lo tanto es relativamente compacto en $\mathbb{R}^n \times [0, r]$).

Definición 2.22. Sea $(f, \tilde{\tau}) \in \tilde{C}$. El conjunto

$$\Omega := \text{clausura}_{\tilde{C}_c} \{(f_t, \tilde{\tau}_t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \tilde{C}_c$$

es la *envolvente* de $(f, \tilde{\tau})$.

La Proposición 8.1.2. de [22] prueba el siguiente resultado:

Proposición 2.23. *Supongamos que se cumple (e). Entonces el conjunto Ω es también una familia equicontinua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$.*

Por otra parte, los espacios $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$ y $\mathbb{R}^n \times [0, r]$ son espacios métricos. Denotamos por d_1 la distancia del primer espacio y por d_2 la distancia del segundo. Dado que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$ es separable, el conjunto $\tilde{C} = C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C, \mathbb{R}^n \times [0, r])$ puede equiparse con una métrica d , definida de la siguiente forma: fijado un subconjunto denso y numerable $\{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$, definimos

$$d(g_1, g_2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_2(g_1(a_k), g_2(a_k))}{1 + d_2(g_1(a_k), g_2(a_k))}, \quad (2.66)$$

para $g_1, g_2 \in \tilde{C}$. Es fácil comprobar que d define una distancia en \tilde{C} . Denotamos por \tilde{C}_d el correspondiente espacio métrico.

La Proposición 8.1.3 de [22] demuestra:

Proposición 2.24. *Supongamos que se cumple (e). Entonces la topología inducida por \tilde{C}_d sobre \mathcal{F} y sobre Ω coincide con la topología inducida por \tilde{C}_c .*

A su vez, y dado que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$ es separable y $\mathbb{R}^n \times [0, r]$ es completo, el Teorema 8.1.4 de [22] demuestra:

Proposición 2.25. *Supongamos que se cumplen (e) y (a). Entonces \mathcal{F} es un conjunto relativamente compacto en \tilde{C}_c .*

Estos resultados nos permiten concluir:

Corolario 2.26. *Supongamos que se cumplen (e) y (a). Entonces Ω es un espacio métrico compacto. Además la distancia en Ω está dada por $d_\Omega(g_1, g_2) := d(g_1, g_2)$, con d definida por (2.66).*

Definición 2.27. El espacio métrico compacto Ω es la *envolvente* del par inicial $(f, \tilde{\tau})$.

Notas 2.28. 1. Es fácil comprobar que la equicontinuidad en el espacio métrico $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$ equivale a equicontinuidad uniforme en cada subconjunto compacto.

2. La topología compacto-abierta coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Es decir, $\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m$ en Ω si y solo si (ω_m) converge a ω uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$.

3. Como Ω puede también definirse como la clausura de \mathcal{F} para la métrica, cada elemento ω de Ω es o bien $(f_t, \tilde{\tau}_t)$ o bien el límite de una sucesión $((f_{t_m}, \tilde{\tau}_{t_m}))$. En particular todo elemento ω puede escribirse como un par (ω_1, ω_2) , donde $\omega_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (como f) y $\omega_2: \mathbb{R} \times C \rightarrow [0, r]$ (como $\tilde{\tau}$).

La construcción anterior nos permite, bajo las condiciones (e) y (a), considerar la familia de ERDEs

$$\dot{y}(t) = \omega_1(t, y(t), y(t - \omega_2(t, y_t))), \quad t \geq 0 \quad (2.67)$$

para $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$. Notemos que la ecuación inicial (2.64) es parte de esta familia: está dada por el elemento $(f, \tilde{\tau})$ de Ω . De hecho esta familia coincide con la familia (2.65) que queremos construir. Pero para probar esta relación necesitamos definir tres aplicaciones más.

Definimos primero

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, \omega) &\mapsto \omega \cdot t \end{aligned} \quad (2.68)$$

por traslación en el tiempo. Es decir,

$$\begin{aligned} \omega \cdot t = (\omega_1 \cdot t, \omega_2 \cdot t): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C &\rightarrow \mathbb{R}^n \times [0, r] \\ (s, y_1, y_2, x) &\mapsto \omega(t + s, y_1, y_2, x) \\ &= (\omega_1(t + s, y_1, y_2), \omega_2(t + s, x)). \end{aligned}$$

Y definimos también

$$\begin{aligned} F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((\omega_1, \omega_2), y_1, y_2) &\mapsto \omega_1(0, y_1, y_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau: \Omega \times C &\rightarrow [0, r] \\ ((\omega_1, \omega_2), x) &\mapsto \omega_2(0, x).\end{aligned}$$

Proposición 2.29. *Supongamos que se cumplen las condiciones (e) y (a). Entonces*

- (i) σ define un flujo continuo en Ω .
- (ii) Las aplicaciones F y τ son continuas en sus dominios.
- (iii) Las familias (2.65) y (2.67) coinciden.

Demostración. (i) Es inmediato comprobar que σ cumple las condiciones (f1) y (f2) de la Definición 1.2. Por lo tanto falta pues probar su continuidad.

Sean $\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m$ en Ω y $t = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m$ en \mathbb{R} . Sea \mathcal{K} un compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C$. Y denotemos por $\|\cdot\|$ la norma en $\mathbb{R}^n \times [0, r]$. Entonces, si $(s, y_1, y_2, x) \in \mathcal{K}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|\omega \cdot t(s, y_1, y_2, x) - \omega_m \cdot t_m(s, y_1, y_2, x)\| \\ &= \|\omega(t + s, y_1, y_2, x) - \omega_m(t_m + s, y_1, y_2, x)\| \\ &\leq \|\omega(t + s, y_1, y_2, x) - \omega_m(t + s, y_1, y_2, x)\| \\ &\quad + \|\omega_m(t + s, y_1, y_2, x) - \omega_m(t_m + s, y_1, y_2, x)\|\end{aligned}$$

El conjunto $\mathcal{K}_t := \{(t + s, y_1, y_2, x) \mid (s, y_1, y_2, x) \in \mathcal{K}\}$ es compacto. Por lo tanto (ω_m) converge a ω uniformemente sobre \mathcal{K}_t (véase la Nota 2.28.2), lo que asegura que el primer sumando es tan pequeño como se quiera si m es suficientemente grande, simultáneamente para todos los puntos de \mathcal{K} . La equicontinuidad de Ω garantizada por la Proposición 2.23 asegura lo mismo para el segundo sumando (véase la Nota 2.28.1). Esto prueba (i).

(ii) Detallamos la demostración de la continuidad de τ , y omitimos la de F , que es análoga. Sean $\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m$ en Ω y $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ en C . Entonces

$$\begin{aligned}|\tau(\omega, x) - \tau(\omega_m, x_m)| &= |\omega_2(0, x) - (\omega_m)_2(0, x_m)| \\ &\leq |\omega_2(0, x) - (\omega_m)_2(0, x)| + |(\omega_m)_2(0, x) - (\omega_m)_2(0, x_m)|\end{aligned}$$

Como en (i), la convergencia de (ω_m) a ω y la equicontinuidad de Ω demuestran que la expresión anterior es tan pequeña como queramos para m suficientemente grande.

(iii) Notemos finalmente que si y es una aplicación definida en un intervalo $[-r, \beta]$, y si $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, tenemos

$$\begin{aligned}F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))) &= \omega_1 \cdot t(0, y(t), y(t - \omega_2 \cdot t(0, y_t))) \\ &= \omega_1(t, y(t), y(t - \omega_2(t, y_t))),\end{aligned}$$

lo que demuestra (iii). \square

La ventaja de la formulación (2.65) frente a (2.67) es que pone de manifiesto la conexión entre todas las ecuaciones de la familia, que son o bien trasladadas en tiempo de la ecuación inicial o bien límites de dichas trasladadas. Hemos visto a lo largo de este capítulo que esta formulación permite definir un flujo (pseudo-continuo) en $\Omega \times W^{1,\infty}$, pese a la dependencia en el tiempo de la ecuación inicial.

Nuestro siguiente objetivo es establecer condiciones sobre f y $\tilde{\tau}$ que garanticen que F y τ verifiquen H1(1),(2)&(3) y H2(1),(2)&(3). Enunciamos ahora esa lista de propiedades:

- h1 (1) La familia $\{f_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, y el conjunto $\{f(t, a, b) \mid t \in \mathbb{R}\}$ está acotado para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- (2) $f(t, a, b)$ es localmente Lipschitz-continua en sus segundo y tercer argumentos en el siguiente sentido: para cualquier par de compactos \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 de \mathbb{R}^n , existe una constante $L = L(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) > 0$ tal que

$$|f(t, y_1, y_2) - f(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| \leq L (|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2|)$$

para todos $t \in \mathbb{R}$, $y_1, \tilde{y}_1 \in \mathcal{K}_1$ e $y_2, \tilde{y}_2 \in \mathcal{K}_2$.

- (3) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable respecto a sus segundo y tercer argumentos; las funciones $D_i f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ son continuas para $i = 2, 3$; las familias $\{(D_i f)_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ son equicontinuas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para $i = 2, 3$; y los conjuntos $\{D_i f(t, y_1, y_2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ están acotados en $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para todo $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y para $i = 2, 3$.
- h2 (1) La familia $\{\tilde{\tau}_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times C$, y además el conjunto $\{\tilde{\tau}(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ está acotado para todo $x \in C$.
- (2) $\tilde{\tau}(t, u)$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para cada compacto $\mathcal{M} \subset C$ existe una constante $L_2 = L_2(\mathcal{M}) > 0$ tal que

$$|\tilde{\tau}(t, x) - \tilde{\tau}(t, \tilde{x})| \leq L_2 \|x - \tilde{x}\|_C$$

para todos $t \in \mathbb{R}$ y $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$.

- (3) $\tilde{\tau}: \mathbb{R} \times C \rightarrow [0, r]$ es diferenciable respecto a su segundo argumento; $D_2 \tilde{\tau}: \mathbb{R} \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ es continua; la familia $\{D_2 \tilde{\tau}_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times C$; y el conjunto $\{D_2 \tilde{\tau}(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en $\text{Lin}(C, \mathbb{R})$ para todo $x \in C$.

Teorema 2.30. *Supongamos que f y $\tilde{\tau}$ satisfacen h1(1) y h2(1), respectivamente. Entonces,*

- (i) *se cumplen (e) y (a), y además F y τ satisfacen H1(1) y H2(1), respectivamente.*

- (ii) Si f satisface también **h1(2)**, entonces F satisface **H1(2)**.
- (iii) Si $\tilde{\tau}$ satisface también **h2(2)**, entonces τ satisface **H2(2)**.
- (iv) Si f satisface también **h1(3)**, entonces F satisface **H1(3)**.
- (v) Si $\tilde{\tau}$ satisface también **h2(3)**, entonces τ satisface **H2(3)**.

Demostración. (i) Es inmediato observar que las condiciones **h1(1)** y **h2(1)**, juntas, suponen una reformulación de (e) y (a). En estas condiciones, la Proposición 2.29 asegura que se cumplen **H1(1)** y **H2(1)**.

(ii) Fijamos un punto $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ de Ω . La definición de Ω garantiza que $(\omega_1, \omega_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} ((f_{t_m}, \tilde{\tau}_{t_m}))$ en \tilde{C} para una sucesión (t_m) : véase la Nota 2.28.3. Tomemos dos compactos \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 de \mathbb{R}^n , y la constante $L = L(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ proporcionada por **h1(2)**. Entonces, si $y_1, \tilde{y}_1 \in \mathcal{K}_1$ e $y_2, \tilde{y}_2 \in \mathcal{K}_2$,

$$\begin{aligned} |F(\omega, y_1, y_2) - F(\omega, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| &= |\omega_1(0, y_1, y_2) - \omega_1(0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| \\ &= \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (f_{t_m}(0, y_1, y_2) - f_{t_m}(0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)) \right| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (f(t_m, y_1, y_2) - f(t_m, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)) \right| \\ &\leq L(|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2|), \end{aligned}$$

lo que demuestra **H1(2)**.

(iii) El argumento utilizado en (ii) para f y F prueba el resultado correspondiente a $\tilde{\tau}$ y τ .

(iv) Vamos a probar la existencia y continuidad de $D_2F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: la demostración es idéntica en el caso de D_3F . Al igual que en el caso de las Proposiciones 2.23 y 2.25, la Proposición 8.1.2. y el Teorema 8.1.4 de [22] demuestran que el conjunto

$$\Xi := \text{clausura}_{C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))} \{(D_2f)_t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es una familia equicontinua de $C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ y un conjunto compacto metrizable.

Sean ahora $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, y $h \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $(\omega_1, \omega_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} ((f_{t_m}, \tilde{\tau}_{t_m}))$, como en (ii). Entonces,

$$\begin{aligned} F(\omega, y_1 + h, y_2) - F(\omega, y_1, y_2) &= \omega_1(0, y_1 + h, y_2) - \omega_1(0, y_1, y_2) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (f(t_m, y_1 + h, y_2) - f(t_m, y_1, y_2)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 D_2f(t_m, y_1 + s h, y_2) h ds \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 (D_2f)_{t_m}(0, y_1 + s h, y_2) h ds. \end{aligned}$$

La sucesión $((D_2f)_{t_m})$ está contenida en el compacto Ξ , por lo que existe una sub-sucesión $((D_2f)_{t_j})$ convergente a un elemento $\xi \in \Xi$. Recordemos que la topología de Ξ es la de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. En particular,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|(D_2f)_{t_j}(0, y_1 + s h, y_2) - \xi(0, y_1 + s h, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = 0$$

uniformemente en $s \in [0, 1]$. El teorema de convergencia uniforme asegura que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 D_2f_{t_j}(0, y_1 + s h, y_2) h ds &= \int_0^1 \lim_{j \rightarrow \infty} D_2f_{t_j}(0, y_1 + s h, y_2) h ds \\ &= \int_0^1 \xi(0, y_1 + s h, y_2) h ds, \end{aligned}$$

es decir,

$$F(\omega, y_1 + h, y_2) - F(\omega, y_1, y_2) = \int_0^1 \xi(0, y_1 + s h, y_2) h ds. \quad (2.69)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} &|F(\omega, y_1 + h, y_2) - F(\omega, y_1, y_2) - \xi(0, y_1, y_2) h| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 (\xi(0, y_1 + s h, y_2) - \xi(0, y_1, y_2)) h ds \right| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \|\xi(0, y_1 + s h, y_2) - \xi(0, y_1, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} ds = 0. \end{aligned}$$

La última igualdad es también consecuencia del teorema de convergencia uniforme, ya que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\xi(0, y_1 + s h, y_2) - \xi(0, y_1, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = 0$$

uniformemente en $s \in [0, 1]$. Esto demuestra que $D_2F(\omega, y_1, y_2)$ existe y coincide con $\xi(0, y_1, y_2)$. Es importante señalar que la función ξ está determinada por la igualdad (2.69).

Falta comprobar la continuidad de $D_2F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Tomamos una sucesión (ω_m) en Ω con límite ω en Ω , y sucesiones (y_1^m) e (y_2^m) en \mathbb{R}^n con límites y_1 e y_2 . El objetivo es comprobar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D_2F(\omega_m, y_1^m, y_2^m) - D_2F(\omega, y_1, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = 0.$$

Hemos visto que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $\xi_m \in \Xi$ con $D_2F(\omega_m, y_1^m, y_2^m) = \xi_m(0, y_1^m, y_2^m)$. Más precisamente, hemos comprobado que ξ_m está determinado

por la igualdad

$$F(\omega_m, y_1^m + h, y_2^m) - F(\omega_m, y_1^m, y_2^m) = \int_0^1 \xi_m(0, y_1^m + s h, y_2^m) h ds \quad (2.70)$$

(véase (2.69)).

La sucesión (ξ_m) de elementos del compacto Ξ de $C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ tiene por tanto una subsucesión (ξ_j) que converge a un elemento $\tilde{\xi} \in \Xi$ en la topología compacto-abierto. Este hecho y la equicontinuidad de la familia Ξ permiten demostrar que, para un $h \in \mathbb{R}^n$ fijo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\xi_j(0, y_1^j + s h, y_2^j) - \tilde{\xi}(0, y_1 + s h, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = 0 \quad (2.71)$$

uniformemente en $s \in [0, 1]$. En particular,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\xi_j(0, y_1^j, y_2^j) - \tilde{\xi}(0, y_1, y_2)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = 0,$$

de modo que basta con probar que $\tilde{\xi}(0, y_1, y_2) = D_2 F(\omega, y_1, y_2)$. Tomamos límites en (2.70) (para la subsucesión escogida): la continuidad de F , (2.71) y el teorema de convergencia uniforme nos permiten afirmar que

$$F(\omega, y_1 + h, y_2) - F(\omega, y_1, y_2) = \int_0^1 \tilde{\xi}(0, y_1 + s h, y_2) h ds.$$

Es decir, que (2.69) se cumple con $\tilde{\xi}$ en el lugar de ξ . Por lo tanto $\tilde{\xi}(0, y_1, y_2) = D_2 F(\omega, y_1, y_2)$, lo que completa la demostración de la continuidad de $D_2 F$.

(v) No hay ideas nuevas en la demostración de este punto. Como la familia $\{D_2 \tilde{\tau}_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times C$ y el conjunto $\{D_2 \tilde{\tau}(t, u) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en $\text{Lin}(C, \mathbb{R})$ para todo $u \in C$, podemos asegurar que el conjunto

$$\Upsilon := \text{clausura}_{C_c(\mathbb{R} \times C, \text{Lin}(C, \mathbb{R}))} \{D_2 \tilde{\tau}_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset C_c(\mathbb{R} \times C, \text{Lin}(C, \mathbb{R}))$$

es un compacto metrizable y una familia equicontinua. A partir de aquí, podemos razonar de forma análoga al punto anterior para demostrar que $D_2 \tau: \Omega \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ existe y es continua. \square

Nota 2.31. Nótese que la ecuación

$$\dot{y}(t) = -y(t - \min(|y(t)|, 2)), \quad t > 0,$$

comentada en la Sección 1.1 como ejemplo de falta de unicidad, tiene por coeficientes $f(t, y_1, y_2) := -y_2$ y $\tilde{\tau}(t, x) = \bar{\tau}(x) = \min(|x(0)|, 2)$. Es obvio que f cumple h1(1),(2)&(3) y que $\tilde{\tau}$ cumple h2(1), y no es complicado comprobar que

$\tilde{\tau}$ también cumple **h2(2)**: de hecho $|\tilde{\tau}(x) - \tilde{\tau}(\tilde{x})| \leq |x(0) - \tilde{x}(0)|$ para todo par de funciones $x, \tilde{x} \in C := C([-2, 0], \mathbb{R})$.

2.4.1. El caso casi periódico

Completamos esta sección estableciendo propiedades sobre f y $\tilde{\tau}$ que garantizan que el flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ sobre la envolvente es casi periódico. Necesitamos cierta cantidad de trabajo previo, que consiste básicamente en definir aplicaciones casi periódicas con dominios y codominios más generales que en la Sección 1.3 y estudiar sus propiedades.

A partir de ahora, Y será un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_Y$ y distancia asociada d_Y ; $C(\mathbb{R}, Y)$ es el espacio vectorial de las aplicaciones continuas de \mathbb{R} en Y ; $C_c(\mathbb{R}, Y)$ será este espacio vectorial dotado de la topología compacto-abierta; y $C_\infty(\mathbb{R}, Y)$ será el conjunto de las aplicaciones continuas y acotadas de \mathbb{R} en Y dotado con la norma del supremo, $\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_Y$. Recordemos también que, dada $g: \mathbb{R} \rightarrow Y$, la aplicación $g_t: \mathbb{R} \rightarrow Y$ está definida por $g_t(s) := g(t + s)$. La noción de equicontinuidad se recuerda en la Definición 1.30.

Empezamos enunciando las dos definiciones de aplicación casi periódica. Veremos en el Teorema 2.38 que ambas son equivalentes, después de varios resultados previos. (La equivalencia de ambas definiciones es un resultado bien conocido cuando el codominio de la aplicación es \mathbb{R} : véase el Teorema 1.39).

La noción de conjunto relativamente denso se recuerda en la Definición 1.29.

Definición 2.32. Una aplicación $g: \mathbb{R} \rightarrow Y$ es *Bohr casi periódica* si es continua y para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\mathcal{P}_\varepsilon := \{T \in \mathbb{R} \mid d_Y(g(t+T), g(t)) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

es relativamente denso en \mathbb{R} .

La demostración del siguiente resultado es análoga a la del Teorema 1.33: basta con sustituir la distancia en \mathbb{R} por la distancia en Y , y recordar que todo espacio de Banach (como Y) es un espacio métrico completo.

Teorema 2.33. *Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow Y$ una aplicación Bohr casi periódica. Entonces,*

- (i) *g es uniformemente continua en \mathbb{R} .*
- (ii) *El conjunto imagen $\{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en Y .*

Definición 2.34. Una aplicación $g: \mathbb{R} \rightarrow Y$ es *Bochner casi periódica* si es continua y para toda sucesión (t_m) en \mathbb{R} existen una subsucesión (t_k) y una aplicación $g^* \in C(\mathbb{R}, Y)$ tales que (g_{t_k}) converge a g^* uniformemente en \mathbb{R} .

Definición 2.35. Sea $g \in C_\infty(\mathbb{R}, Y)$. Su *envolvente* es el conjunto

$$\Omega = \Omega(g) := \text{clausura}_{C_\infty(\mathbb{R}, Y)} \{g_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset C_\infty(\mathbb{R}, Y).$$

La prueba del siguiente resultado reproduce la de la Proposición 1.37.

Proposición 2.36. *La aplicación $g \in C_\infty(\mathbb{R}, Y)$ es Bochner casi periódica si y sólo si su envolvente $\Omega = \Omega(g)$ es un espacio métrico compacto para la distancia $d_\Omega(f_1, f_2) := \|f_1 - f_2\|_\infty$.*

Para probar que las definiciones de aplicación Bochner casi periódica y de Bohr casi periódica son equivalentes necesitamos el siguiente lema técnico. Su demostración reproduce la del Lema 1.38.

Lema 2.37. *Sea $g \in C_\infty(\mathbb{R}, Y)$. Son equivalentes:*

- (1) *g es Bochner casi periódica.*
- (2) *Para todo $\varepsilon > 0$ existen una cantidad finita de puntos $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ y una aplicación $n: \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tales que $d_Y(g(t+s), g(t+a_{n(s)})) \leq \varepsilon$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$.*

Los dos resultados anteriores hacen que el siguiente resultado pueda probarse repitiendo paso por paso la prueba del Teorema 1.39: basta con sustituir la distancia en \mathbb{R} por la distancia en Y .

Teorema 2.38. *Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow Y$. Son equivalentes:*

- (1) *g es Bohr casi periódica.*
- (2) *g es Bochner casi periódica.*

Como en el caso de función real, el resultado anterior nos permite hablar de aplicación *casi periódica*: una de tales aplicaciones cumple simultáneamente las condiciones de las Definiciones 2.32 y 2.34.

El último resultado relativo a funciones $g: \mathbb{R} \rightarrow Y$ casi periódicas reproduce la Proposición 1.40. De hecho los mismos argumentos sirven para demostrarlo. Este resultado jugará un papel fundamental al final de la memoria, en el Teorema 3.36.

Proposición 2.39. *Sean Ω un espacio métrico compacto y $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo casi periódico. Sea $g: \Omega \rightarrow Y$ una función continua. Entonces*

$$\begin{aligned} g_\omega: \mathbb{R} &\rightarrow Y \\ t &\mapsto g(\sigma(t, \omega)) \end{aligned}$$

es una función casi periódica para todo $\omega \in \Omega$.

Nuestro siguiente objetivo es extender la noción de casi periodicidad a funciones definidas en un espacio producto $\mathbb{R} \times X$, donde X es un espacio de Banach separable. Denotamos por d_X la correspondiente distancia. Dada una aplicación $h: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$, denotamos por $h_t: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ la aplicación dada por $h_t(s, x) := h(t + s, x)$.

Definición 2.40. La aplicación $h: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ es *casi periódica* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La familia $\{h_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times X$.
2. Para todo $x \in X$ la aplicación $h^x: \mathbb{R} \rightarrow Y$ definida por $h^x(t) := h(t, x)$ es casi periódica.

Utilizaremos los siguientes resultados en la prueba del Teorema 2.44, cuyo Corolario 2.45 constituye el principal resultado de esta sección.

Proposición 2.41. Sea $h: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ una aplicación casi periódica. Entonces, para todo $x \in X$, el conjunto $\{h(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en Y .

Demostración. Para cada $x \in X$, la aplicación $h^x: \mathbb{R} \rightarrow Y$ es casi periódica. Por lo tanto el resultado es consecuencia del Teorema 2.33. \square

Proposición 2.42. Sea $h: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ una aplicación casi periódica. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo conjunto finito de puntos $\{x_1, \dots, x_l\} \subset X$, el conjunto

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(\varepsilon, \{x_1, \dots, x_l\}) \\ & := \{T \in \mathbb{R} \mid d_Y(h(t+T, x_j), h(t, x_j)) \leq \varepsilon \text{ para todos } t \in \mathbb{R} \text{ y } j \in \{1, \dots, l\}\} \end{aligned}$$

es relativamente denso en \mathbb{R} .

Demostración. Comenzamos fijando $\{x_1, \dots, x_l\} \subset X$. Dotamos el espacio $Y^l := Y \times \dots \times Y$ con la norma

$$\|(y_1, \dots, y_l)\|_{Y^l} := \max\{\|y_1\|_Y, \dots, \|y_l\|_Y\},$$

y la correspondiente distancia d_{Y^l} , para la cual es un espacio métrico separable.

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} H: \mathbb{R} & \rightarrow Y^l \\ t & \mapsto (h^{x_1}(t), \dots, h^{x_l}(t)). \end{aligned}$$

Veamos que H es casi periódica. Para ello tomamos una sucesión (t_m) en \mathbb{R} . El carácter casi periódico de h^{x_1} proporciona una subsucesión (t_k) y una aplicación $(h^*)^1 \in C(\mathbb{R}, Y)$ tales que $(h_{t_k}^{x_1})$ converge a $(h^*)^1$ uniformemente en \mathbb{R} . El carácter casi periódico de h^{x_2} proporciona una subsucesión (t_j) de (t_k) y una aplicación $(h^*)^2 \in C(\mathbb{R}, Y)$ tales que $(h_{t_j}^{x_2})$ converge a $(h^*)^2$ uniformemente en \mathbb{R} . Claramente, $(h_{t_j}^{x_1})$ también converge a $(h^*)^1$ uniformemente en \mathbb{R} . Iterando el proceso encontramos una subsucesión (t_m) en \mathbb{R} de la sucesión inicial (a la que llamamos igual) y una aplicación $H^* = ((h^*)^1, \dots, (h^*)^l) \in C(\mathbb{R}, Y^l)$ tales que (H_{t_m}) converge a H^* uniformemente en \mathbb{R} . Esto demuestra que H es casi periódica.

Fijamos ahora $\varepsilon > 0$. La Definición 2.32 asegura que el conjunto

$$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon := \{T \in \mathbb{R} \mid d_{Y^l}(H(t+T), H(t)) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

es relativamente denso en \mathbb{R} . Es inmediato comprobar que este conjunto coincide con el conjunto $\mathcal{P}(\varepsilon, \{x_1, \dots, x_l\})$ del enunciado de la proposición. Esto completa la demostración. \square

Antes de enunciar y probar el Teorema 2.44, incluimos por completitud el siguiente resultado, que prueba que la Definición 2.40 de casi periodicidad coincide con la que aparece en el Capítulo 2 de [11].

Teorema 2.43. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *La aplicación $h: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ es casi periódica.*
- (2) *Para todo conjunto compacto $\mathcal{K} \subset X$ y todo $\varepsilon > 0$, el conjunto*

$$\mathcal{P}(\varepsilon, \mathcal{K}) := \{T \in \mathbb{R} \mid d_Y(h(t+T, x), h(t, x)) \leq \varepsilon \text{ para todos } t \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathcal{K}\}$$

es relativamente denso en \mathbb{R} .

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Supongamos que h es casi periódica. Fijamos $\varepsilon > 0$ y un compacto $\mathcal{K} \subset X$. La equicontinuidad de la familia $\{h_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ proporciona $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, \bar{x} \in \mathcal{K}$ cumplen $d_X(x, \bar{x}) < \delta$ entonces

$$d_Y(h(t, x), h(t, \bar{x})) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Buscamos $x_1, \dots, x_l \in \mathcal{K}$ tales que $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}_X(x_1, \delta) \cup \dots \cup \mathcal{B}_X(x_l, \delta)$, siendo $\mathcal{B}_X(x, \delta)$ la bola de X centrada en x y de radio δ . Para demostrar que se cumple (2) basta con probar que

$$\mathcal{P}(\varepsilon/3, \{x_1, \dots, x_l\}) = \mathcal{P}(\varepsilon, \mathcal{K}),$$

siendo $\mathcal{P}(\varepsilon/3, \{x_1, \dots, x_l\})$ el conjunto definido en la Proposición 2.42 (del cual sabemos que es relativamente denso). Sea $T \in \mathcal{P}(\varepsilon/3, \{x_1, \dots, x_l\})$, y sean $x \in \mathcal{K}$ y $t \in \mathbb{R}$. Buscamos $j \in \{1, \dots, l\}$ tal que $x \in \mathcal{B}_X(x_j, \delta)$. Entonces

$$\begin{aligned} d_Y(h(t+T, x), h(t, x)) &\leq d_Y(h(t+T, x), h(t+T, x_j)) \\ &\quad + d_Y(h(t+T, x_j), h(t, x_j)) + d_Y(h(t, x_j), h(t, x)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación.

(2) \Rightarrow (1) Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que la familia $\{h_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ no es equicontinua en un punto $x_0 \in X$ (véase la Definición 1.30). Este hecho proporciona una constante $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones (t_m) en \mathbb{R} y (x_m) en X tales que $d_X(x_m, x_0) < 1/m$ y $d_Y(h(t_m, x_0), h(t_m, x_m)) > \varepsilon$. Aplicamos la propiedad (2) al conjunto $\mathcal{K} := \{x_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$, que es un compacto de X : el conjunto $\mathcal{P}(\varepsilon/3, \mathcal{K})$ es relativamente denso. Por lo tanto existe $L > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $T_m \in \mathcal{P}(\varepsilon/3, \mathcal{K})$ que cumple $t_m + T_m \in [0, L]$. En

consecuencia, si $1/m_0 < \varepsilon$ y $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon &< d_Y(h(t_m, x_0), h(t_m, x_m)) \\ &\leq d_Y(h(t_m, x_0), h(t_m + T_m, x_0)) + d_Y(h(t_m + T_m, x_0), h(t_m + T_m, x_m)) \\ &\quad + d_Y(h(t_m + T_m, x_m), h(t_m, x_m)) \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + d_Y(h(t_m + T_m, x_0), h(t_m + T_m, x_m)), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\frac{\varepsilon}{3} < d_Y(h(t_m + T_m, x_0), h(t_m + T_m, x_m)) \quad \text{para todo } m \geq m_0.$$

Buscamos una subsucesión $(t_j + T_j)$ que converja a $t_0 \in [0, L]$. Esto, el hecho de que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_0$, y la continuidad de h aseguran que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (h(t_j + T_j, x_0) - h(t_j + T_j, x_j)) = h(t_0, x_0) - h(t_0, x_0) = 0,$$

lo que contradice la anterior desigualdad y completa la prueba. \square

Recordemos que, dado que $\mathbb{R} \times X$ es separable, podemos definir una métrica en $C(\mathbb{R} \times X, Y)$: fijamos $\{(r_1, x_1), \dots, (r_k, x_k), \dots\}$ un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{R} \times X$, y definimos

$$d(h_1, h_2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_Y(h_1(r_k, x_k), h_2(r_k, x_k))}{1 + d_Y(h_1(r_k, x_k), h_2(r_k, x_k))} \quad (2.72)$$

para $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R} \times X, Y)$. A este espacio métrico lo denotamos por $C_d(\mathbb{R} \times X, Y)$. Y, como de costumbre, $C_c(\mathbb{R} \times X, Y)$ representa el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R} \times X$ en Y dotado de la topología compacto-abierta.

Teorema 2.44. *Sea $\tilde{h}: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ una aplicación casi periódica. Entonces la envolvente de \tilde{h} , definida por*

$$\Omega = \Omega(\tilde{h}) := \text{clausura}_{C_c(\mathbb{R} \times X, Y)} \{\tilde{h}_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset C_c(\mathbb{R} \times X, Y) \quad (2.73)$$

es un espacio métrico compacto, siendo su distancia $d_\Omega(h_1, h_2) := d(h_1, h_2)$ con d definida por (2.72).

Además la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, h) &\mapsto h_t \end{aligned}$$

determina un flujo casi periódico en Ω y minimal.

Demostración. Sabemos que la familia $\{\tilde{h}_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times X$ (véase la Definición 2.40) y que el conjunto $\{\tilde{h}(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en Y para todo $x \in X$ (véase la Proposición 2.41). Además $\mathbb{R} \times X$

es separable e Y es completo. Al igual que en el caso del Corolario 2.26, las Proposiciones 8.1.2 y 8.1.3 y el Teorema 8.1.4 de [22] demuestran que Ω es un espacio métrico compacto, y que las topologías inducidas sobre Ω por $C_c(\mathbb{R} \times X, Y)$ y $C_d(\mathbb{R} \times X, Y)$ son equivalentes.

La demostración de que σ determina un flujo continuo es estándar: véase por ejemplo la prueba de la Proposición 2.29(i).

Veamos ahora que el flujo es casi periódico. Recordemos que el carácter casi periódico del flujo es equivalente a la siguiente propiedad (véase el Teorema 1.31): para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ relativamente denso en \mathbb{R} tal que $d_\Omega(h_T, h) \leq \varepsilon$ para todos $T \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$ y $h \in \Omega$.

Fijamos $\varepsilon > 0$. El primer paso será probar que existe un conjunto $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ relativamente denso en \mathbb{R} tal que si $T \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces

$$d(\tilde{h}_t, \tilde{h}_{t+T}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_Y(\tilde{h}(t+r_k, x_k), \tilde{h}(t+T+r_k, x_k))}{1 + d_Y(\tilde{h}(t+r_k, x_k), \tilde{h}(t+T+r_k, x_k))} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Buscamos $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (1/2^k) \leq \varepsilon/6$. Esto asegura que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_Y(\tilde{h}(t+r_k, x_k), \tilde{h}(t+T+r_k, x_k))}{1 + d_Y(\tilde{h}(t+r_k, x_k), \tilde{h}(t+T+r_k, x_k))} < \varepsilon/6.$$

Por otro lado la Proposición 2.42 asegura que el conjunto

$$\mathcal{P}(\varepsilon/(6k_0), \{x_1, \dots, x_{k_0}\}) := \{T \in \mathbb{R} \mid d_Y(\tilde{h}(t+T, x_j), \tilde{h}(t, x_j)) \leq \varepsilon/(6k_0) \text{ para todos } t \in \mathbb{R} \text{ y } j \in \{1, \dots, k_0\}\}$$

es relativamente denso en \mathbb{R} . Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \frac{d_Y(\tilde{h}(t+r_k, x_k), \tilde{h}(t+T+r_k, x_k))}{1 + d_Y(\tilde{h}(t+r_k, x_k), \tilde{h}(t+T+r_k, x_k))} \\ \leq \sum_{k=1}^{k_0} d_Y(\tilde{h}(t+r_k, x_k), \tilde{h}(t+T+r_k, x_k)) < \varepsilon/6 \end{aligned}$$

para todo $T \in \mathcal{P}(\varepsilon/(6k_0), \{x_1, \dots, x_{k_0}\})$. Por lo tanto, $d_\Omega(\tilde{h}_t, \tilde{h}_{t+T}) \leq \varepsilon/3$ para todo $t \in \mathbb{R}$ si $T \in \mathcal{Q}(\varepsilon) := \mathcal{P}(\varepsilon/(6k_0), \{x_1, \dots, x_{k_0}\})$, que es lo que queríamos probar.

Para cada elemento $h \in \Omega$ podemos tomar una sucesión (t_m) en \mathbb{R} con $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\Omega(\tilde{h}_{t_m}, h) = 0$. Como σ es continua, $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\Omega(\tilde{h}_{t_m+T}, h_T) = 0$ para cada $T \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$. Fijamos uno de estos valores de T y buscamos $m_1 = m_1(\varepsilon, T) \in \mathbb{N}$ tal que $d_\Omega(h, \tilde{h}_{t_{m_1}}) \leq \varepsilon/3$ y $d_\Omega(h_T, \tilde{h}_{t_{m_1}+T}) \leq \varepsilon/3$. Por lo tanto

$$d_\Omega(h, h_T) \leq d_\Omega(h, \tilde{h}_{t_{m_1}}) + d_\Omega(\tilde{h}_{t_{m_1}}, \tilde{h}_{t_{m_1}+T}) + d_\Omega(\tilde{h}_{t_{m_1}+T}, h_T) < \varepsilon,$$

y esto completa la demostración del carácter casi-periódico del flujo.

Falta comprobar que el flujo es minimal. La Proposición IV.2.3 de [9] y el Teorema 1.31 aseguran que Ω puede escribirse como la unión (disjunta) de sus subconjuntos minimales. Sea $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ el minimal al que pertenece el punto $\tilde{h} \in \Omega$. Entonces tanto Ω como \mathcal{M} coinciden con la clausura de la σ -órbita de \tilde{h} , lo que demuestra que $\Omega = \mathcal{M}$ y completa la demostración. \square

Ya hemos comentado que el siguiente resultado, que es una consecuencia inmediata del anterior, constituye el objetivo principal de esta sección. La condición de casi periodicidad requerida en f y $\tilde{\tau}$ corresponde a la Definición 2.40, y el concepto de flujo casi periódico se da en la Definición 1.28. Notemos también que las condiciones que se requieren sobre f y $\tilde{\tau}$ garantizan las propiedades (e) y (a), y que estas condiciones garantizan que si Ω es la envolvente de $(f, \tilde{\tau})$, definida por la Definición 2.22, y σ es el flujo definido sobre Ω por (2.68), entonces $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es un flujo continuo en un espacio métrico compacto: véanse el Corolario 2.26 y la Proposición 2.29(i).

Corolario 2.45. *Sea $(f, \tilde{\tau})$ el par de funciones que determina la ecuación (2.64). Supongamos que f y $\tilde{\tau}$ son casi periódicas. Sea $\Omega \subset \tilde{C}_c$ la envolvente de $(f, \tilde{\tau})$, definida por (2.73), y sea σ el flujo definido sobre Ω por (2.68). Entonces el flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es casi periódico y minimal.*

Capítulo 3

Estabilidad exponencial uniforme

En este capítulo analizaremos propiedades de estabilidad exponencial de las soluciones de una familia de ecuaciones con retardo dependiente del estado (ERDEs) n -dimensional y no autónoma. Los resultados del capítulo anterior y la formulación skew-product nos permitirán utilizar técnicas de dinámica topológica.

Para facilitar la lectura, escribimos de nuevo la familia de ecuaciones con la que trabajaremos. Sea $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo continuo en un espacio métrico compacto. Denotamos $\omega \cdot t := \sigma(t, \omega)$, y consideramos la familia de ERDEs con retardo acotado por $r > 0$ dada por

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), \quad t > 0 \quad (3.1)$$

para $\omega \in \Omega$, donde $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es continua y admite derivadas parciales continuas con respecto a sus componentes vectoriales, y donde el retardo, dependiente del estado, está dado por una función continua $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ de la que suponemos que es continuamente diferenciable con respecto a su segundo argumento y que satisface condiciones Lipschitz estándar. Recordemos que en la Sección 2.4 explicamos el modo en que una de estas familias procede de una sola ERDE, pero que nuestra formulación es más general. Recordemos también que en el Capítulo 2 hemos definido el semiflujo local

$$\begin{aligned} \Pi: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)), \end{aligned}$$

donde $u(t, \omega, x)(s) = y(t + s, \omega, x)$ para $s \in [-r, 0]$, siendo $y(t, \omega, x)$ la solución maximal de la ecuación (3.1) $_{\omega}$ con condición inicial $x \in W^{1,\infty}$, cuyo intervalo de definición hemos denotado por $[-r, \beta_{\omega, x})$. Hemos estudiado también sus propiedades de continuidad bajo ciertas condiciones en F y τ , que recordaremos más adelante. En particular, bajo dichas condiciones, la restricción de Π a subconjuntos compactos positivamente Π -invariantes, que está globalmente definida, es continua.

Sea $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ un compacto positivamente Π -invariante. Supongamos que su proyección sobre la base Ω es sobreyectiva, y que contiene las extensiones hacia atrás de todos sus puntos: véase la Definición 1.17. Nuestro objetivo principal en este capítulo es caracterizar la estabilidad exponencial uniforme de \mathcal{K} en términos de su exponente de Lyapunov superior con respecto al semiflujo linealizado. Recordamos ahora brevemente a qué nos referimos con semiflujo linealizado. Hemos definido en el capítulo anterior el conjunto de pares “(ecuación, dato inicial)” que satisfacen la condición de compatibilidad dada por el campo vectorial,

$$\mathcal{C}_0 := \{(\omega, x) \in \Omega \times C^1 \mid \dot{x}(0^-) = F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\}. \quad (3.2)$$

Recordemos que sus elementos son exactamente los pares que dan lugar a soluciones $y(t, \omega, x)$ que son globalmente C^1 en su dominio de definición $[-r, \beta_{\omega, x})$. También hemos definido en el capítulo anterior el operador lineal

$$L: \mathcal{C}_0 \rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n),$$

dado por

$$\begin{aligned} L(\omega, x)\phi &:= D_2F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\phi(0) \\ &\quad + D_3F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\phi(-\tau(\omega, x)) \\ &\quad - D_3F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x)))\dot{x}(-\tau(\omega, x)) \cdot D_2\tau(\omega, x)\phi. \end{aligned}$$

El Teorema 2 de [15] y el Teorema 4.1 de [37], juntos, prueban que, si $(\omega, x) \in \mathcal{C}_0$ y $t \in [0, \beta_{\omega, x})$, entonces: existe una aplicación lineal $u_x(t, \omega, x): W^{1,\infty} \rightarrow W^{1,\infty}$, continua, que determina la derivada Fréchet de $u(t, \omega, x)$ respecto a x ; y $(u_x(t, \omega, x)v)(s) = z(t+s, \omega, x, v)$, donde $z(t, \omega, x, v)$ es la solución de la ecuación variacional

$$\dot{z}(t) = L(\Pi(t, \omega, x))z_t \quad (3.3)$$

con $z(s) = v(s)$ para $s \in [-r, 0]$. Además, la existencia de extensiones hacia atrás de sus elementos garantiza que $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0$, lo que nos permite definir el semiflujo skew-product lineal

$$\begin{aligned} \Pi^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

con $w(t, \omega, x, v)(s) = z(t+s, \omega, x, v)$ (que es un nuevo semiflujo pseudo-continuo, tal y como prueban los resultados de la Sección 2.3). Éste es el semiflujo linealizado al que nos referíamos: nos permitirá definir el exponente de Lyapunov superior de \mathcal{K} , y determinar las propiedades de estabilidad de este conjunto a partir de las características de este exponente. El problema no es trivial: \mathcal{C}_0 tiene interior vacío, y hay casos en los que la aplicación $u_x(t, \omega, x)$ no está definida para todo $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$; es decir, casos en los cuales $u(t, \omega, x)$ no admite derivadas

direccionales en $W^{1,\infty}$ (véase [18]).

Explicamos ahora brevemente la estructura del capítulo. En la Sección 3.1 introduciremos las definiciones de estabilidad uniforme, así como la noción y propiedades básicas del exponente de Lyapunov superior de un compacto positivamente invariante (en términos de Sacker y Sell [44], Chow y Leiva [7, 8], y Shen y Yi [45]).

Comenzaremos la Sección 3.2 describiendo las propiedades que supondremos en la familia de ERDEs. Probaremos, en primer lugar, que todo conjunto acotado positivamente Π -invariante contiene un compacto positivamente Π -invariante que es maximal para la propiedad de existencia de extensión hacia atrás de sus semiórbitas. Fijamos para el resto de esta introducción un compacto positivamente Π -invariante \mathcal{K} tal que sus elementos admiten extensión hacia atrás en él, y consideramos el semiflujo Π^L dado por (3.4). Las condiciones impuestas sobre el campo vectorial y la teoría clásica de ecuaciones diferenciales funcionales aseguran que las soluciones de la ecuación variacional (3.3) también definen el semiflujo skew-product

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times C &\rightarrow \mathcal{K} \times C \\ (t, \omega, x, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, x), w(t, \omega, x, v)), \end{aligned}$$

que es continuo. Veremos que dados $(\omega, x) \in \mathcal{K}$ y $T \geq r$, la aplicación $C \rightarrow W^{1,\infty}$, $v \mapsto w(T, \omega, x, v)$ es continua, y también que es compacta si $T \geq 2r$. Estas propiedades son las herramientas básicas en la prueba de un resultado que será fundamental en este capítulo: si seguimos el camino habitual para definir el exponente de Lyapunov superior de \mathcal{K} en términos del semiflujo pseudo-continuo Π^L , éste coincide con el exponente de Lyapunov superior con respecto a $\tilde{\Pi}^L$ (que es un exponente de Lyapunov “estándar”, ya que $\tilde{\Pi}^L$ es continuo).

En la Sección 3.3 supondremos para τ y $D_2\tau$ condiciones de Lipschitz más fuertes, y supondremos en el compacto \mathcal{K} la propiedad adicional de que proyecta sobre toda la base. Sea $\lambda_{\mathcal{K}}$ su exponente de Lyapunov superior. Probaremos que la condición $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$ es equivalente a la estabilidad exponencial uniforme de \mathcal{K} en la norma Lipschitz usual, y también a la estabilidad exponencial uniforme de \mathcal{K} en términos de la norma del supremo. Esto extiende a la formulación no autónoma resultados probados previamente por Hartung en [16] para el caso de ERDEs periódicas.

En la Sección 3.4 consideraremos condiciones menos restrictivas sobre τ y $D_2\tau$, y adaptaremos a estas condiciones la caracterización de estabilidad exponencial uniforme. Los resultados son muy similares a los de la Sección 3.3: la única diferencia reside en la expresión de la estabilidad exponencial uniforme en función de la norma en C .

A las hipótesis consideradas en la Sección 3.4 añadiremos en la Sección 3.5 la minimalidad del flujo base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$. Probaremos que si $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$, entonces \mathcal{K} es una m -copia del flujo base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ que admite extensión a flujo. También

estableceremos varias propiedades de su dominio de atracción. También probaremos que si \mathcal{P} es un compacto positivamente Π -invariante tal que $\lambda_{\mathcal{M}} < 0$ para todo conjunto minimal $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$, entonces \mathcal{P} sólo contiene un número finito de minimales y, además, los subconjuntos de \mathcal{P} determinados por su intersección con los dominios de atracción de sus subconjuntos minimales coinciden con las componentes conexas de \mathcal{P} .

La última sección del capítulo presenta una consecuencia de los resultados precedentes: la existencia de una solución uniformemente exponencialmente estable de una ERDE uniformemente casi periódica asegura la existencia de soluciones casi periódicas uniformemente exponencialmente estables.

Completamos esta introducción señalando que las conclusiones de este capítulo nos proporcionan las herramientas para desarrollar versiones apropiadas en el contexto de ERDEs no autónomas de algunos modelos aplicados descritos por Arino *et al.* [2], Smith [48], Wu [53], Hartung *et al.* [19], Novo *et al.* [40], Insperger y Stépán [26], entre otros. En particular, los resultados que vamos a detallar son la clave para extender al caso de ERDEs no autónomas varios resultados de estabilidad exponencial uniforme para redes neuronales biológicas que desarrollamos en el trabajo [39].

3.1. Definiciones de estabilidad y exponentes de Lyapunov

Empezamos este capítulo con la definición de estabilidad exponencial uniforme, objeto de nuestro estudio, y también con las de estabilidad uniforme y estabilidad asintótica uniforme, que utilizaremos en la Sección 3.6. Sea $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo continuo sobre un espacio métrico compacto, y sea $\omega \cdot t := \sigma(t, \omega)$. Consideramos un semiflujo de tipo skew-product

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X &\rightarrow \Omega \times X \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \end{aligned}$$

donde X es un espacio de Banach. Representamos por $\|\cdot\|_X$ y d_X la norma en el espacio X y la correspondiente distancia. Los conceptos de estabilidad tienen sentido para los conjuntos del tipo que definimos ahora.

Definición 3.1. Un compacto $\mathcal{K} \subset \Omega \times X$ proyecta sobre toda la base si para cualquier $\omega \in \Omega$ existe $x \in X$ tal que $(\omega, x) \in \mathcal{K}$.

Nota 3.2. Si $\mathcal{K} \subset \Omega \times X$ es un compacto positivamente Π -invariante y Ω es minimal, entonces \mathcal{K} proyecta sobre toda la base. Probamos esta afirmación. Tomamos $\tilde{\omega} \in \Omega$ y cualquier punto $(\omega, x) \in \mathcal{K}$. Buscamos una sucesión (t_m) con $\tilde{\omega} = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega \cdot t_m$, y usamos la compacidad de \mathcal{K} para encontrar una subsucesión

(t_j) tal que la sucesión $((\omega \cdot t_j, u(t_j, \omega, x)))$ converge. Entonces el límite es un punto de \mathcal{K} de la forma $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$, cuya proyección en Ω es evidentemente $\tilde{\omega}$.

Definiciones 3.3. Un compacto positivamente Π -invariante $\mathcal{K} \subset \Omega \times X$ que proyecta sobre toda la base es *uniformemente estable* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si los puntos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times X$ cumplen que $d_X(x, \bar{x}) < \delta(\varepsilon)$, entonces $u(t, \omega, x)$ está definido para $t \in [0, \infty)$ y $d_X(u(t, \omega, x), u(t, \omega, \bar{x})) \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. En este caso el semiflujo restringido $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es *uniformemente estable*.

Definiciones 3.4. Un compacto positivamente Π -invariante $\mathcal{K} \subset \Omega \times X$ que proyecta sobre toda la base es *uniformemente asintóticamente estable* si es uniformemente estable y, además, existe $\delta > 0$ tal que, si los puntos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times X$ cumplen que $d_X(x, \bar{x}) < \delta$, entonces $u(t, \omega, x)$ está definido para $t \in [0, \infty)$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} d_X(u(t, \omega, x), u(t, \omega, \bar{x})) = 0$ uniformemente en $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$. En este caso el semiflujo restringido $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es *uniformemente asintóticamente estable*.

Definiciones 3.5. Un compacto positivamente Π -invariante $\mathcal{K} \subset \Omega \times X$ que proyecta sobre toda la base es *uniformemente exponencialmente estable* si existen $\delta_0 > 0$, $C > 0$ y $\alpha > 0$ tales que, si los puntos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times X$ cumplen que $d_X(x, \bar{x}) < \delta_0$, entonces $u(t, \omega, x)$ está definido para $t \in [0, \infty)$ y $d_X(u(t, \omega, x), u(t, \omega, \bar{x})) \leq C e^{-\alpha t} d_X(x, \bar{x})$ para todo $t \geq 0$. En este caso el semiflujo restringido $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es *uniformemente exponencialmente estable*.

Nota 3.6. Es evidente que la estabilidad exponencial uniforme de \mathcal{K} asegura su estabilidad asintótica uniforme.

Las siguientes definiciones y propiedades se refieren al caso especial de un semiflujo skew-product continuo *lineal*; es decir, que toma la forma

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X &\rightarrow \Omega \times X \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, \phi(t, \omega) x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $\phi(t, \omega)$ es un operador lineal acotado sobre X ; en otras palabras, $u(t, \omega, x)$ es lineal en x para cada $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$. Recordemos que estamos suponiendo que la base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es un flujo (no sólo un semiflujo) sobre un espacio métrico compacto. Debilitaremos esta hipótesis más adelante: véase la Proposición 3.9.

Definiciones 3.7. El *exponente de Lyapunov superior* $\lambda_s^+(\omega)$ de $\omega \in \Omega$ para el semiflujo $(\Omega \times X, \Pi, \mathbb{R}^+)$ definido por (3.5) es

$$\lambda_s^+(\omega) := \sup_{x \in X, x \neq 0} \lambda_s^+(\omega, x), \quad (3.6)$$

donde

$$\lambda_s^+(\omega, x) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\phi(t, \omega) x\|_X;$$

y el exponente de Lyapunov superior del conjunto Ω para el semiflujo $(\Omega \times X, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es

$$\lambda_\Omega := \sup_{\omega \in \Omega} \lambda_s^+(\omega). \quad (3.7)$$

La Proposición 2.1 de [8] prueba que

$$\lambda_\Omega < \infty, \quad (3.8)$$

y el Teorema 4.2 de [7] demuestra que

$$\lambda_s^+(\omega) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\phi(t, \omega)\|_{\text{Lin}(X, X)}. \quad (3.9)$$

Además, la Proposición II.4.1 y el Corolario II.4.2 de [45] demuestran que

$$\forall \mu > \lambda_\Omega \quad \exists k_\mu \geq 1 \quad \text{tal que} \quad \|\phi(t, \omega)\|_{\text{Lin}(X, X)} \leq k_\mu e^{\mu t} \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (3.10)$$

Nota 3.8. Utilizaremos el siguiente resultado para extender la definición de exponentes de Lyapunov al caso en el que la base del skew-product es un semiflujo en lugar de un flujo: las definiciones (3.6) y (3.7) no cambian, y las propiedades (3.8), (3.9) y (3.10) siguen siendo válidas. Pero requerimos sobre el semiflujo base una propiedad fundamental: que todos los elementos del conjunto admitan al menos una extensión hacia atrás en él. Nótese que no imponemos la condición de que la base admita extensión a flujo, que es mucho más restrictiva. Recordemos a este respecto que un semiflujo continuo en un compacto minimal siempre cumple la propiedad de existencia de extensiones hacia atrás (véase la Proposición 1.19), pero que puede no admitir extensión a flujo (véase el Teorema 1.22).

Proposición 3.9. *Sea $(\Omega \times X, \Pi, \mathbb{R}^+)$ un semiflujo skew-product lineal, del tipo (3.5), cuya base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ es un semiflujo global sobre un espacio métrico compacto. Supongamos que cada uno de los elementos de Ω admite al menos una extensión hacia atrás (con respecto a σ) en Ω . Definamos el conjunto*

$$\Omega^* := \{\xi \in C(\mathbb{R}, \Omega) \mid \sigma(t, \xi(s)) = \xi(t+s) \quad \text{para} \quad t \geq 0 \quad \text{y} \quad s \in \mathbb{R}\}$$

y la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma^*: \mathbb{R} \times \Omega^* &\rightarrow \Omega^* \\ (t, \xi) &\mapsto \xi \cdot t, \end{aligned} \quad (3.11)$$

con $(\xi \cdot t)(s) = \xi(t+s)$. Entonces,

- (i) $(\Omega^*, \sigma^*, \mathbb{R})$ es un flujo continuo en un espacio métrico compacto.
- (ii) Si Ω es minimal, entonces Ω^* es minimal.
- (iii) Las expresiones (3.6) y (3.7) tienen perfecto sentido, y las propiedades (3.8), (3.9) y (3.10) son válidas.

Demostración. (i) Parte del argumento de la prueba está tomado de la Sección II.2.2 de [45] y del Teorema 10 del Capítulo 4 de [43]. Consideramos el conjunto Ω^* , formado por las órbitas globales proporcionadas por todas las extensiones hacia atrás de todos los elementos de Ω . Entonces Ω^* es un subconjunto compacto de $C(\mathbb{R}, \Omega)$ para la topología compacto-abierta de $C(\mathbb{R}, \Omega)$, que coincide con la topología dada por la distancia

$$d_{C(\mathbb{R}, \Omega)}(\xi_1, \xi_2) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \max_{s \in [-m, m]} d_{\Omega}(\xi_1(s), \xi_2(s));$$

es decir, Ω^* es un espacio métrico compacto. Recordemos que hemos supuesto que para todo $\omega \in \Omega$ existe al menos un punto $\xi \in \Omega^*$ con $\xi(0) = \omega$. El Teorema II.2.3 de [45] prueba que esta correspondencia es uno a uno si y sólo si el semiflujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R}^+)$ admite una extensión a flujo continua. En este contexto más general, la aplicación σ^* dada por (3.11) determina un flujo continuo sobre Ω^* , llamado el *flujo de elevación*, que proyecta sobre Ω . Esto demuestra (i).

(ii) Para probar esta afirmación debemos tomar ξ_0 y ξ en Ω^* y $k > 0$, y encontrar una sucesión (t_m) en \mathbb{R} tal que $(\xi_0 \cdot t_m)$ converja a ξ uniformemente en $[-k, k]$. Sean $\omega := \xi(-k)$ y $\omega_0 := \xi_0(-k)$. Como Ω es minimal, podemos tomar una sucesión (t_m) en \mathbb{R}^+ tal que $\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_0 \cdot t_m$. Deducimos de la continuidad uniforme de σ sobre $\Omega \times [0, 2k]$ que $\omega \cdot t = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_0 \cdot (t_m + t)$ uniformemente para $t \in [0, 2k]$; es decir, $\xi(t - k) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\xi_0 \cdot t_m)(t - k)$ uniformemente en $t \in [0, 2k]$. Con esto queda demostrado (ii).

(iii) Notemos que si $\omega = \xi(0)$ y $t \geq 0$,

$$\omega \cdot t = \sigma(t, \omega) = \sigma(t, \xi(0)) = \xi(t) = \sigma^*(t, \omega)(0) = (\xi \cdot t)(0).$$

Ahora podemos definir

$$\begin{aligned} \Pi^*: \mathbb{R}^+ \times \Omega^* \times X &\rightarrow \Omega^* \times X \\ (t, \xi, x) &\mapsto (\xi \cdot t, \phi^*(t, \xi) x) := (\xi \cdot t, \phi(t, \xi(0)) x), \end{aligned}$$

que es un semiflujo skew-product lineal con flujo base $(\Omega^*, \sigma^*, \mathbb{R})$, y podemos definir su exponente de Lyapunov superior $(\lambda^*)_s^+(\xi)$ para $\xi \in \Omega^*$ y $\lambda_{\Omega^*}^* := \sup_{\xi \in \Omega^*} (\lambda^*)_s^+(\xi)$. Está claro que $(\lambda^*)_s^+(\xi)$ sólo depende de $\xi(0)$, que pertenece a Ω . En otras palabras, podemos definir $\lambda_s^+(\omega)$ y λ_{Ω} partiendo directamente de Π , como en la Definición 3.7, y entonces tenemos $(\lambda^*)_s^+(\xi) = \lambda_s^+(\omega)$ para $\omega = \xi(0)$, y $\lambda_{\Omega} = \lambda_{\Omega^*}^*$. Es evidente que (3.8) es válido, e inmediato deducir de $\phi^*(t, \xi) x = \phi(t, \omega) x$ para $\omega = \xi(0)$ que lo mismo sucede con (3.9) y (3.10). \square

3.2. El exponente de Lyapunov superior de un compacto positivamente invariante

Comenzamos esta sección describiendo las propiedades de regularidad que impondremos a F y τ para el análisis a realizar.

- H1 (1) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.
- (2) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz-continua en sus segundo y tercer argumentos en el siguiente sentido: para cualquier par de compactos \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 de \mathbb{R}^n , existe una constante $L = L(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) > 0$ tal que
- $$|F(\omega, y_1, y_2) - F(\omega, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| \leq L (|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2|)$$
- para todos $\omega \in \Omega$, $y_1, \tilde{y}_1 \in \mathcal{K}_1$ e $y_2, \tilde{y}_2 \in \mathcal{K}_2$.
- (3) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable respecto a sus segundo y tercer argumentos, y las funciones $D_i F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ son continuas para $i = 2, 3$.

- H2 (1) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es continua.
- (2) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para todo conjunto compacto $\mathcal{M} \subset C$ existe una constante $L_2 = L_2(\mathcal{M}) > 0$ tal que

$$|\tau(\omega, x) - \tau(\omega, \tilde{x})| \leq L_2 \|x - \tilde{x}\|_C$$

para todos $\omega \in \Omega$ y $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$.

- (3) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es diferenciable respecto a su segundo argumento, y $D_2 \tau: \Omega \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ es continua.

Nótese que estas condiciones ya han aparecido en el capítulo anterior. Además, la Proposición 2.13 asegura que H1(3) implica la propiedad H1(2), y la Proposición 2.15 asegura que H2(3) implica la propiedad H2(2).

Bajo estas condiciones el Teorema 2.6 describe las propiedades de continuidad de Π , al que nos referimos como semiflujo pseudo-continuo. Este semiflujo Π , que es local, está definido por

$$\begin{aligned} \Pi: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega \times W^{1,\infty} &\rightarrow \Omega \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, x) &\mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, x)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde: $y(t, \omega, x)$ es la solución maximal del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), & t \geq 0, \\ y(t) = x(t), & t \in [-r, 0], \end{cases}$$

definida en un intervalo maximal $[-r, \beta_{\omega, x})$; $u(t, \omega, x)(s) := y(t + s, \omega, x)$ para $t \in [0, \beta_{\omega, x})$ y $s \in [-r, 0]$; y

$$\mathcal{U} := \{(t, \omega, x) \mid (\omega, x) \in \Omega \times W^{1, \infty}, t \in [0, \beta_{\omega, x})\}.$$

Nota 3.10. Las definiciones de Π -semiórbita, conjunto positivamente invariante y conjunto minimal son las mismas que las definidas para un semiflujo continuo (véanse la Sección 1.2 y la Nota 2.10). Nótese que si \mathcal{K} es un compacto positivamente Π -invariante, entonces $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$. Además, la definición de existencia de extensión hacia atrás para un elemento $(\omega, x) \in \mathcal{K}$ es la misma que para semiflujos continuos (véase la Definición 1.17). Así mismo, si un punto (ω, x) tiene semiórbita acotada (lo que, de acuerdo con el Teorema 2.6(vii), asegura que $\beta_{\omega, x} = \infty$ y que $\{(\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \mid t \in [r, \infty)\}$ es relativamente compacto), podemos definir su omega-límite como en la Definición 1.14: el Teorema 3.13(ii) mostrará que esto no causa confusión. Finalmente, también las Definiciones 3.3, 3.4 y 3.5 sobre estabilidad pueden adaptarse sin cambios a Π .

El objetivo de esta sección es analizar el exponente de Lyapunov de un conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1, \infty}$ bajo las siguientes condiciones:

Hipótesis 3.11. $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1, \infty}$ es un compacto positivamente Π -invariante tal que cada uno de sus elementos admite al menos una extensión hacia atrás en él.

Nota 3.12. Supongamos que se cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3) (y por lo tanto las propiedades H1(2) y H2(2)), y la Hipótesis 3.11. Entonces el semiflujo global $(\mathcal{K}, \Pi|_{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^+)$ es continuo, como se prueba en el Corolario 2.11. Este hecho será fundamental a lo largo de todo el capítulo. Por simplificar la notación escribiremos $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$. Es inmediato deducir de la existencia de extensión hacia atrás en \mathcal{K} de todos sus elementos que $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0$, siendo \mathcal{C}_0 el conjunto de compatibilidad definido por (3.2).

Antes de fijar un compacto \mathcal{K} cumpliendo la Hipótesis 3.11, vamos a probar en el siguiente teorema que cualquier conjunto acotado positivamente Π -invariante determina un compacto positivamente Π -invariante y que cualquier compacto positivamente Π -invariante contiene un subconjunto maximal \mathcal{K} cumpliendo dicha hipótesis.

Teorema 3.13. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3), y definamos la aplicación Π por (3.12).*

- (i) *Si $\mathcal{K}_0 \subset \Omega \times W^{1, \infty}$ es un conjunto acotado positivamente Π -invariante, entonces el conjunto*

$$\mathcal{K}_1 := \text{clausura}_{\Omega \times W^{1, \infty}} \{\Pi(2r, \omega, x) \mid (\omega, x) \in \mathcal{K}_0\}$$

es un compacto positivamente Π -invariante.

(ii) Sea $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ un punto con Π -semiórbita acotada. Entonces su omega-límite $\mathcal{O}(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ está bien definido, es positivamente Π -invariante, y es compacto. Además, cualquier elemento $(\omega, x) \in \mathcal{O}(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ admite al menos una extensión hacia atrás en $\mathcal{O}(\tilde{\omega}, \tilde{x})$.

(iii) Si \mathcal{K}_2 es un compacto positivamente Π -invariante, entonces el conjunto

$$\mathcal{K}_3 := \{(\omega, x) \in \mathcal{K}_2 \mid \text{admite una extensión hacia atrás en } \mathcal{K}_2\}$$

es un compacto positivamente Π -invariante no vacío, y es el subconjunto maximal de \mathcal{K}_2 con esas propiedades.

Demostración. (i) Dado que \mathcal{K}_0 es positivamente Π -invariante, también lo es $\{\Pi(2r, \omega, x) \mid (\omega, x) \in \mathcal{K}_0\}$. La continuidad de Π_t para $t > 0$ fijo, demostrada en el Teorema 2.6(v), garantiza que la clausura de un conjunto positivamente Π -invariante también es positivamente Π -invariante, lo que demuestra que \mathcal{K}_1 lo es.

Falta ver que \mathcal{K}_1 es compacto. Para ello es suficiente probar que dada una sucesión $((\omega_m, x_m))$ en \mathcal{K}_0 , la sucesión $(\Pi(2r, \omega_m, x_m)) = ((\omega_m \cdot (2r), u(2r, \omega_m, x_m)))$ admite una subsucesión convergente a un punto de $\Omega \times W^{1,\infty}$, que denotaremos por (ω^*, x^*) . Suponemos sin restricciones que existe $\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m$, por lo que $\omega^* = \omega \cdot (2r)$. Representamos por $y_m: [-r, 2r] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto y(t, \omega_m, x_m)$. Entonces, como \mathcal{K}_0 es positivamente Π -invariante, sabemos que $(\omega_m \cdot t, (y_m)_t) \in \mathcal{K}_0$ para todo $t \in [0, 2r]$. Por tanto, dado que \mathcal{K}_0 es un conjunto acotado de $\Omega \times W^{1,\infty}$, la sucesión (y_m) está uniformemente acotada en $C([-r, 2r], \mathbb{R}^n)$. Además,

$$\dot{y}_m(t) = F(\omega_m \cdot t, y_m(t), y_m(t - \tau(\omega_m \cdot t, (y_m)_t))) \quad (3.13)$$

para $t \in [0, 2r]$. El Teorema 2.6(iii) asegura que la aplicación $[0, 2r] \rightarrow \Omega \times C$, $t \mapsto (\omega_m \cdot t, (y_m)_t)$ es continua para todo m . Por lo tanto H2(1) asegura que también lo es $[0, 2r] \rightarrow [0, r]$, $t \mapsto \tau(\omega_m \cdot t, (y_m)_t)$, y H1(1) asegura que lo mismo sucede con $[0, 2r] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \dot{y}_m(t)$. De modo que la sucesión (\dot{y}_m) está contenida también en $C([0, 2r], \mathbb{R}^n)$. Además está uniformemente acotada en $[0, 2r]$, tal y como deducimos de la acotación uniforme de (y_m) en $[-r, 2r]$ y la continuidad de F . Por lo tanto, el teorema de Arzelá-Ascoli proporciona una subsucesión (y_k) que converge uniformemente en $[0, 2r]$ a una función $y^* \in C([0, 2r], \mathbb{R}^n)$. Deducimos de la condición H2(1) que la sucesión $(t \mapsto \tau(\omega_k \cdot t, (y_k)_t))$ converge a la función $t \mapsto \tau(\omega \cdot t, (y^*)_t)$ uniformemente en $[r, 2r]$. Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(\omega_k \cdot t, y_k(t), y_k(t - \tau(\omega_k \cdot t, (y_k)_t))) = F(\omega \cdot t, y^*(t), y^*(t - \tau(\omega \cdot t, (y^*)_t))) \quad (3.14)$$

uniformemente en $[r, 2r]$. A su vez, esta propiedad asegura que la sucesión

$$\left(y_k(r) + \int_r^t F(\omega_k \cdot s, y_k(s), y_k(s - \tau(\omega_k \cdot s, (y_k)_s))) ds \right),$$

que sabemos por (3.13) que coincide con la sucesión $(y_k(t))$, converge al punto

$$y^*(r) + \int_r^t F(\omega \cdot s, y^*(s), y^*(s - \tau(\omega \cdot s, (y^*)_s))) ds$$

para cada $t \in [r, 2r]$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y^*(t)$ para $t \in [0, 2r]$, deducimos que

$$y^*(t) = y^*(r) + \int_r^t F(\omega \cdot s, y^*(s), y^*(s - \tau(\omega \cdot s, (y^*)_s))) ds.$$

De modo que existe $\dot{y}^*(t)$ y cumple

$$\dot{y}^*(t) = F(\omega \cdot t, y^*(t), y^*(t - \tau(\omega \cdot t, (y^*)_t)))$$

para $t \in [r, 2r]$. Esta igualdad, junto con los puntos (3.13) y (3.14), asegura que (\dot{y}_k) converge a (\dot{y}^*) uniformemente en $[r, 2r]$. Esta propiedad y la convergencia uniforme de (y_k) ya probada garantizan que la sucesión $u(2r, \omega_k, x_k)$ converge a $x^* := y_{2r}^*$ en $W^{1,\infty}$. Esto completa la demostración del punto (i).

(ii) El Teorema 2.6(vii) asegura que la definición clásica de omega-límite $\mathcal{O}(\omega, x)$ de un punto (ω, x) con semiórbita acotada (véase la Definición 1.14) tiene sentido. Está claro que este conjunto es igual que el omega-límite del punto $\Pi(2r, \omega, x)$, que es un subconjunto cerrado del conjunto compacto \mathcal{K}_1 . Por lo tanto $\mathcal{O}(\omega, x)$ es compacto. El Teorema 2.6(v) garantiza que es positivamente Π -invariante. El Corolario 2.11 asegura que el semiflujo restringido $(\mathcal{O}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es continuo. Y la Proposición II.2.1 de [45] prueba la última afirmación de (ii): véase la Proposición 1.19.

(iii) Está claro que el conjunto \mathcal{K}_3 es un subconjunto de \mathcal{K}_2 positivamente Π -invariante. Como \mathcal{K}_2 contiene el omega-límite de uno cualquiera de sus propios puntos, la última afirmación de (ii) garantiza que \mathcal{K}_3 es no vacío. Por lo tanto, como \mathcal{K}_2 es compacto y $\mathcal{K}_3 \subseteq \mathcal{K}_2$, el objetivo es ver que \mathcal{K}_3 es cerrado. Fijamos $(\omega, x) \in \text{clausura}_{\Omega \times W^{1,\infty}} \mathcal{K}_3$. Seguiremos un proceso iterativo. El primer paso es encontrar un punto $(\omega \cdot (-1), x_{-1}) \in \text{clausura}_{\Omega \times W^{1,\infty}} \mathcal{K}_3$ y una aplicación continua $\theta_{\omega, x}^{-1}: [-1, 0] \rightarrow \mathcal{K}_2$ tales que:

- $\theta_{\omega, x}^{-1}(-1) = x_{-1}$;
- $\theta_{\omega, x}^{-1}(0) = x$;
- $\Pi(t, \omega \cdot s, \theta_{\omega, x}^{-1}(s)) = (\omega \cdot (t + s), \theta_{\omega, x}^{-1}(t + s))$ siempre que $-1 \leq s \leq -t \leq 0$.

Para ello, tomamos una sucesión $((\omega_m, x_m))$ en \mathcal{K}_3 con límite (ω, x) . Para cada $m \in \mathbb{N}$ elegimos una extensión hacia atrás de (ω_m, x_m) en \mathcal{K}_2 , que escribimos como $\{(\omega_m \cdot s, \theta_{\omega_m, x_m}(s)) \mid s \leq 0\}$. Está claro que $(\omega \cdot s, \theta_{\omega_m, x_m}(s)) \in \mathcal{K}_3$ para todo $s \leq 0$: su extensión hacia atrás está, de hecho, proporcionada por la misma aplicación.

Además, $\theta_{\omega_m, x_m}(0) = x_m$ y

$$\Pi(t, \omega_m \cdot s, \theta_{\omega_m, x_m}(s)) = (\omega_m \cdot (t + s), \theta_{\omega_m, x_m}(t + s))$$

siempre que $s \leq -t \leq 0$. La compacidad de \mathcal{K}_2 proporciona una subsucesión $((\omega_k, x_k))$ de $((\omega_m, x_m))$ para la que existe $\lim_{k \rightarrow \infty} (\omega_k \cdot (-1), \theta_{\omega_k, x_k}(-1))$. Llamamos $(\omega \cdot (-1), x_{-1})$ a este límite, que pertenece a clausura ${}_{\Omega \times W^{1, \infty}} \mathcal{K}_3$. Definimos

$$\begin{aligned} \theta_{\omega, x}^{-1}: [-1, 0] &\rightarrow \mathcal{K}_2 \\ s &\mapsto u(1 + s, \omega \cdot (-1), x_{-1}). \end{aligned}$$

Veamos que satisface las condiciones requeridas. Como \mathcal{K}_2 es positivamente Π -invariante, la aplicación $\theta_{\omega, x}^{-1}$ está bien definida. Es obvio que $\theta_{\omega, x}^{-1}(-1) = x_{-1}$. Además,

$$\begin{aligned} \theta_{\omega, x}^{-1}(0) &= u(1, \omega \cdot (-1), x_{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(1, \omega_k \cdot (-1), \theta_{\omega_k, x_k}(-1)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{\omega_k, x_k}(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, \end{aligned}$$

(aquí usamos el Teorema 2.6(v) o el Corolario 2.11). Y finalmente, si $-1 \leq s \leq -t \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \Pi(t, \omega \cdot s, \theta_{\omega, x}^{-1}(s)) &= (\omega \cdot (t + s), u(t, \omega \cdot s, u(1 + s, \omega \cdot (-1), x_{-1}))) \\ &= (\omega \cdot (t + s), u(1 + t + s, \omega \cdot (-1), x_{-1})) \\ &= (\omega \cdot (t + s), \theta_{\omega, x}^{-1}(t + s)). \end{aligned}$$

Esto completa el primer paso.

Ahora iteramos el proceso para obtener una sucesión de puntos $((\omega \cdot (-j), x_{-j}))$ en clausura ${}_{\Omega \times W^{1, \infty}} \mathcal{K}_3$ y una sucesión de funciones continuas $(\theta_{\omega, x}^{-j}: [-j, -j + 1] \rightarrow \mathcal{K}_2)$ con $\theta_{\omega, x}^{-j}(-j + 1) = \theta_{\omega, x}^{-j+1}(-j + 1) = x_{-j+1}$, tal que, si $-j \leq s \leq -t - j + 1 \leq -j + 1$, entonces

$$\Pi(t, (\omega \cdot (-j)) \cdot s, \theta_{\omega, x}^{-j}(s)) = ((\omega \cdot (-j)) \cdot (t + s), \theta_{\omega, x}^{-j}(t + s)).$$

No es muy complicado comprobar que la aplicación continua $\theta_{\omega, x}: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathcal{K}_2$, obtenida concatenando las anteriores aplicaciones, es una extensión hacia atrás de (ω, x) en \mathcal{K}_2 . Esto completa la prueba de la compacidad de \mathcal{K}_3 .

La última afirmación de (iii) es obvia, por lo que la prueba del teorema está completa. \square

A partir de ahora suponemos que se cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3) y fijamos \mathcal{K} cumpliendo la Hipótesis 3.11 (véase también la Nota 3.12). Definimos

$$\begin{aligned} L: \mathcal{K} &\rightarrow \text{Lin}(W^{1, \infty}, \mathbb{R}^n) \\ (\omega, \bar{x}) &\mapsto L(\omega, \bar{x}) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} L(\omega, \bar{x})\phi &:= D_2F(\omega, \bar{x}(0), \bar{x}(-\tau(\omega, \bar{x})))\phi(0) \\ &\quad + D_3F(\omega, \bar{x}(0), \bar{x}(-\tau(\omega, \bar{x})))\phi(-\tau(\omega, \bar{x})) \\ &\quad - D_3F(\omega, \bar{x}(0), \bar{x}(-\tau(\omega, \bar{x})))\dot{\bar{x}}(-\tau(\omega, \bar{x}))\cdot D_2\tau(\omega, \bar{x})\phi, \end{aligned} \quad (3.15)$$

y consideramos la familia de ecuaciones variaciones lineales asociada a (3.1), dada por

$$\dot{z}(t) = L(\Pi(t, \omega, \bar{x}))z_t, \quad t \geq 0 \quad (3.16)$$

para $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$. Vamos a resumir la estrategia que seguiremos en el resto de esta sección. Las soluciones de esta familia de ecuaciones diferenciales con retardo dependiente del tiempo permiten definir dos semiflujos en dos espacios diferentes con base $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$. Estos espacios son $\mathcal{K} \times W^{1,\infty}$ y $\mathcal{K} \times C$. El Corolario 2.19 muestra que el primer semiflujo es pseudo-continuo y el segundo es continuo. Las condiciones que imponemos en \mathcal{K} aseguran que la construcción realizada en la Proposición 3.9 es válida para ambos semiflujos a pesar de la falta de continuidad del primero. En particular, tiene sentido hablar de los exponentes de Lyapunov superiores de los dos semiflujos lineales (véase la Nota 3.8). También está probado en el Teorema 2.20 que el primer semiflujo es el que usualmente se denomina semiflujo linealizado de Π . Esto quiere decir que el exponente de Lyapunov superior de este semiflujo encaja con la idea clásica de “exponente de Lyapunov superior de \mathcal{K} ”. Pero el exponente de Lyapunov superior del segundo semiflujo es más fácil de manejar. En el Teorema 3.17 demostraremos que ambos son iguales.

Recordemos ahora la definición de los dos semiflujos. Para cada $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $v \in W^{1,\infty}$, denotamos por $z(t, \omega, \bar{x}, v)$ la solución de (3.16) con condición inicial v (es decir, $z(s, \omega, \bar{x}, v) = v(s)$ para todo $s \in [-r, 0]$). Está definida para todo $t \geq -r$ y es lineal respecto de v . Además, la aplicación $\mathcal{K} \rightarrow \text{Lin}(W^{1,\infty}, \mathbb{R}^n)$, $(\omega, \bar{x}) \mapsto L(\omega, \bar{x})$ es continua. Estas propiedades permiten definir un semiflujo skew-product global en $\mathcal{K} \times W^{1,\infty}$ dado por

$$\begin{aligned} \Pi^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty} &\rightarrow \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \\ (t, \omega, \bar{x}, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, \bar{x}), w(t, \omega, \bar{x}, v)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde $w(t, \omega, \bar{x}, v)(s) := z(t+s, \omega, \bar{x}, v)$ para todos $s \in [-r, 0]$ y $t \geq 0$. Como hemos dicho antes, el Corolario 2.19 prueba que es un semiflujo pseudo-continuo. En particular, para todo $(t, \omega, \bar{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K}$, la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \pi^L(t, \omega, \bar{x}): W^{1,\infty} &\rightarrow W^{1,\infty} \\ v &\mapsto w(t, \omega, \bar{x}, v) \end{aligned} \quad (3.18)$$

es continua.

Ahora recordamos la definición del segundo semiflujo. Para cada $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $v \in C$, denotamos por $\tilde{z}(t, \omega, \bar{x}, v)$ la solución de (3.16) con condición inicial v . El Corolario 2.19 prueba que las soluciones de (3.16) inducen un semiflujo skew-product global y continuo en el conjunto $\mathcal{K} \times C$, definido por

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^L: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K} \times C &\rightarrow \mathcal{K} \times C \\ (t, \omega, \bar{x}, v) &\mapsto (\Pi(t, \omega, \bar{x}), \tilde{w}(t, \omega, \bar{x}, v)), \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $\tilde{w}(t, \omega, \bar{x}, v)(s) = \tilde{z}(t + s, \omega, \bar{x}, v)$ para todos $s \in [-r, 0]$ y $t \geq 0$. Representamos por

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x}): C &\rightarrow C \\ v &\mapsto \tilde{w}(t, \omega, \bar{x}, v), \end{aligned} \quad (3.20)$$

que es una aplicación lineal continua para todo $(t, \omega, \bar{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K}$. Nótese que

$$\tilde{\Pi}^L(t, \omega, \bar{x}, v) = (\Pi(t, \omega, \bar{x}), \tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x})v). \quad (3.21)$$

El siguiente resultado demuestra que, si $t \geq r$, entonces $\tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x})v$ pertenece a $W^{1,\infty}$ si $v \in C$, y que la aplicación así definida de C sobre $W^{1,\infty}$ es continua. Esta propiedad se usará en la prueba del Teorema 3.17.

Proposición 3.14. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.11. Dados $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $T \geq r$, definamos*

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}): C &\rightarrow W^{1,\infty} \\ v &\mapsto \tilde{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})v \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $\tilde{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})$ está dado por (3.20). Entonces,

- (i) la aplicación $\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})$ está bien definida y es continua.
- (ii) Si $T \geq 2r$, entonces la aplicación $\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})$ es compacta.
- (iii) Si $T \geq 2r$, la aplicación $\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}): W^{1,\infty} \rightarrow W^{1,\infty}$ dada por (3.18) es compacta.
- (iv) Sea $\hat{C}_r := \sup_{(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}} \|\hat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, W^{1,\infty})}$. Entonces $\hat{C}_r < \infty$.

Demostración. (i) Dado $v \in C$, definimos

$$\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})v := \tilde{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})v = \tilde{w}(T, \omega, \bar{x}, v).$$

Recordemos que $\tilde{w}(T, \omega, \bar{x}, v)(s) = \tilde{z}(T + s, \omega, \bar{x}, v)$, donde $\tilde{z}(t, \omega, \bar{x}, v)$ es la solución de (3.16) con $\tilde{z}(s, \omega, \bar{x}, v) = v(s)$ para todo $s \in [-r, 0]$. El Teorema 2.18(iii) asegura que $\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})v$ pertenece a C . Vamos a comprobar que de hecho pertenece a $C^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, lo que demuestra que $\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})v$ pertenece a $W^{1,\infty}$ y

por lo tanto que la aplicación (3.22) está bien definida. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \widehat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}) v(s) &= \dot{\tilde{z}}(T + s, \omega, \bar{x}, v) \\ &= L(\Pi(T + s, \omega, \bar{x})) \tilde{w}(T + s, \omega, \bar{x}, v). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0$ y es positivamente Π -invariante, tenemos que $\Pi(t, \omega, \bar{x}) \in \mathcal{C}_0$ para todo $t > 0$. El Teorema 2.6(vi) asegura que

$$\begin{aligned} [-r, 0] &\rightarrow \mathcal{C}_0 \\ s &\mapsto \Pi(T + s, \omega, \bar{x}) \end{aligned}$$

es continua. El Teorema 2.18(iii) asegura que

$$\begin{aligned} [-r, 0] &\rightarrow C \\ s &\mapsto \tilde{w}(T + s, \omega, \bar{x}, v) \end{aligned}$$

también es continua. Por lo tanto, la Proposición 2.17(v) asegura que

$$\begin{aligned} [-r, 0] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\mapsto L(\Pi(T + s, \omega, \bar{x})) \tilde{w}(T + s, \omega, \bar{x}, v) \end{aligned}$$

es continua. Esta propiedad y (3.23) prueban que $\widehat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}) v \in C^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, como habíamos afirmado.

El hecho de que $\widehat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}) v \in W^{1, \infty}$ y (3.21) aseguran que

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}) &= \tilde{\pi}^L(T - r, \Pi(r, \omega, \bar{x})) \circ \widehat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) \\ &= \pi^L(T - r, \Pi(r, \omega, \bar{x})) \circ \widehat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}), \end{aligned}$$

donde π^L está definida por (3.18). Como $\pi^L(T - r, \Pi(r, \omega, \bar{x})) : W^{1, \infty} \rightarrow W^{1, \infty}$ es continua (véase (3.18)), para probar que $\widehat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}) : C \rightarrow W^{1, \infty}$ es continua es suficiente probar que $\widehat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) : C \rightarrow W^{1, \infty}$ es continua.

Sea $v \in C$. Tenemos que $\widehat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v = \tilde{w}(r, \omega, \bar{x}, v) = \tilde{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v$ y

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(r + s, \omega, \bar{x}, v) &= L(\Pi(r + s, \omega, \bar{x})) \tilde{w}(r + s, \omega, \bar{x}, v) \\ &= L(\Pi(r + s, \omega, \bar{x})) (\tilde{\pi}^L(r + s, \omega, \bar{x}) v) \end{aligned} \quad (3.24)$$

para todo $s \in [-r, 0]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v\|_{W^{1, \infty}} &\leq \|\tilde{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v\|_C + \|\dot{\tilde{z}}(r, \omega, \bar{x}, v)\|_{L^\infty} \\ &\leq \tilde{C}_r \|v\|_C + C_0 \tilde{C}_r \|v\|_C = \tilde{C}_r (1 + C_0) \|v\|_C, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde

$$\begin{aligned} C_0 &:= \sup_{(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}} \|L(\omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)}, \\ \tilde{C}_r &:= \sup_{s \in [-r, 0], (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}} \|\tilde{\pi}(r + s, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, C)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Esto prueba la continuidad.

(ii) Tomamos $T \geq 2r$ y escribimos, como antes,

$$\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x}) = \pi^L(T - 2r, \Pi(2r, \omega, \bar{x})) \circ \hat{\pi}^L(2r, \omega, \bar{x}).$$

Como la aplicación $\pi^L(T - 2r, \Pi(2r, \omega, \bar{x})) : W^{1, \infty} \rightarrow W^{1, \infty}$ es continua, es suficiente con probar que $\hat{\pi}^L(2r, \omega, \bar{x}) : C \rightarrow W^{1, \infty}$ es compacta.

Tomamos una sucesión acotada (v_m) en C . Se deduce de (3.25) que la sucesión $(\|\hat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v_m\|_{W^{1, \infty}})$ está acotada. El teorema de Arzelá-Ascoli proporciona una subsucesión (v_k) de (v_m) tal que $(\tilde{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v_k)$ converge a una función $\tilde{v} \in C$. Por lo tanto, la sucesión $(\hat{\pi}^L(2r, \omega, \bar{x}) v_k) = ((\hat{\pi}^L(r, \Pi(r, \omega, \bar{x})) \circ \tilde{\pi}^L(r, \omega, \bar{x})) v_k)$ converge a $\hat{\pi}^L(r, \Pi(r, \omega, \bar{x})) \tilde{v}$ en $W^{1, \infty}$. Esto demuestra la compacidad de $\hat{\pi}^L(2r, \omega, \bar{x})$ y, por tanto, la compacidad de $\hat{\pi}^L(T, \omega, \bar{x})$.

(iii) Esta afirmación es consecuencia inmediata de (ii) y del hecho de que cualquier sucesión acotada de $W^{1, \infty}$ determina una sucesión acotada en C .

(iv) Se deduce de (3.25) que la constante \hat{C}_r definida en (iv) satisface $\hat{C}_r \leq \tilde{C}_r (1 + C_0)$, con C_0 y \tilde{C}_r dados por (3.26). Esto completa la demostración de la proposición. \square

Nota 3.15. A pesar de la posible falta de continuidad global del semiflujo Π^L definido por (3.17), la Definición 3.7 de exponente de Lyapunov superior proporciona dos valores bien definidos, que denotamos por *exponente de Lyapunov superior* $\lambda_s^+(\omega, \bar{x})$ de $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ para $(\mathcal{K}, \Pi^L, \mathbb{R}^+)$ y *exponente de Lyapunov superior* $\lambda_{\mathcal{K}}$ del semiflujo $(\mathcal{K}, \Pi^L, \mathbb{R}^+)$. También vamos a denotar por $\tilde{\lambda}_s^+(\omega, \bar{x})$ el exponente de Lyapunov superior de $\tilde{\Pi}^L$ (definido por (3.19)) para $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$; y por $\tilde{\lambda}_{\mathcal{K}}$ el exponente de Lyapunov superior de $(\mathcal{K}, \tilde{\Pi}^L, \mathbb{R}^+)$.

Nota 3.16. Las propiedades de continuidad del semiflujo pseudo-continuo Π^L , establecidas en el Corolario 2.19 nos permiten repetir los argumentos del Teorema 4.2 de [7] para comprobar que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, entonces

$$\lambda_s^+(\omega, \bar{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\pi^L(t, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(W^{1, \infty}, W^{1, \infty})}. \quad (3.27)$$

El siguiente teorema muestra que los exponentes de Lyapunov superiores de los dos semiflujos coinciden.

Teorema 3.17. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.11. Sean $\pi^L(t, \omega, \bar{x})$ y $\tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x})$ las aplicaciones definidas por (3.17) y (3.19) para $t \in \mathbb{R}$ y $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$. Sean también C_0 y \widehat{C}_r las constantes definidas por (3.26) y la Proposición 3.14(iv). Y definamos $\lambda_s^+(\omega, \bar{x})$, $\lambda_{\mathcal{K}}$, $\tilde{\lambda}_s^+(\omega, \bar{x})$ y $\tilde{\lambda}_{\mathcal{K}}$ como en la Nota 3.15. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $t \geq r$, entonces*

$$\|\pi^L(t, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, W^{1,\infty})} \leq (1 + C_0) \sup_{s \in [-r, 0]} \|\tilde{\pi}^L(t + s, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, C)}$$

para todo $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$.

(ii) $\lambda_s^+(\omega, \bar{x}) \leq \tilde{\lambda}_s^+(\omega, \bar{x})$ *para todo $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$.*

(iii) *Si $t \geq r$, entonces*

$$\|\tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, C)} \leq \widehat{C}_r \|\pi^L(t - r, \Pi(r, \omega, \bar{x}))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, W^{1,\infty})}$$

para todo $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$.

(iv) $\tilde{\lambda}_s^+(\omega, \bar{x}) \leq \lambda_s^+(\Pi(t, \omega, \bar{x}))$ *para todos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $t \geq r$.*

(v) $\lambda_{\mathcal{K}} = \tilde{\lambda}_{\mathcal{K}}$.

Demostración. Tomamos $t \geq r$, $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $v \in W^{1,\infty} \subset C$. Tenemos que

$$\|\pi^L(t, \omega, \bar{x})v\|_C = \|\tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x})v\|_C \leq \|\tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, C)} \|v\|_C.$$

Además, si $s \in [-r, 0]$,

$$\dot{z}(t + s, \omega, \bar{x}, v) = L(\Pi(t + s, \omega, \bar{x})) (\tilde{\pi}^L(t + s, \omega, \bar{x})v).$$

Esto se deduce de la relación (3.24) que es válida para t en vez de r . Recordemos que $w(t, \omega, \bar{x}, v)(s) = z(t + s, \omega, \bar{x}, v)$ para $v \in W^{1,\infty}$ y $s \in [-r, 0]$. Por lo tanto

$$\left| \frac{d}{ds} w(t, \omega, \bar{x}, v)(s) \right| \leq C_0 \|\tilde{\pi}^L(t + s, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, C)} \|v\|_C$$

para $s \in [-r, 0]$. Como $\|v\|_C \leq \|v\|_{W^{1,\infty}}$,

$$\|\pi^L(t, \omega, \bar{x})v\|_{W^{1,\infty}} \leq (1 + C_0) \sup_{s \in [-r, 0]} \|\tilde{\pi}^L(t + s, \omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, C)} \|v\|_{W^{1,\infty}},$$

por lo que (i) está probado. Ahora, (ii) es consecuencia de (i) y de las igualdades (3.9) y (3.27) para $\tilde{\lambda}_s^+(\omega, \bar{x})$ y $\lambda_s^+(\omega, \bar{x})$.

Tomamos ahora $t \geq r$, $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $v \in C$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\pi}^L(t, \omega, \bar{x}) v\|_C &\leq \|\hat{\pi}^L(t, \omega, \bar{x}) v\|_{W^{1,\infty}} \\ &= \|\pi^L(t-r, \Pi(t, \omega, \bar{x})) (\hat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v)\|_{W^{1,\infty}} \\ &\leq \|\pi^L(t-r, \Pi(t, \omega, \bar{x}))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, W^{1,\infty})} \|\hat{\pi}^L(r, \omega, \bar{x}) v\|_{W^{1,\infty}} \\ &\leq \|\pi^L(t-r, \Pi(t, \omega, \bar{x}))\|_{\text{Lin}(W^{1,\infty}, W^{1,\infty})} \hat{C}_r \|v\|_C. \end{aligned}$$

Esto prueba (iii). La afirmación (iv) es una consecuencia inmediata, y (v) se deduce de las propiedades (ii) y (iv). \square

El punto (v) del teorema anterior justifica la siguiente definición, que completa esta sección.

Definición 3.18. Supongamos que se cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3), y la Hipótesis 3.11. El *exponente de Lyapunov superior del conjunto \mathcal{K} para el semiflujo* $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es $\lambda_{\mathcal{K}} = \tilde{\lambda}_{\mathcal{K}}$.

3.3. Estabilidad exponencial uniforme en compactos positivamente invariantes

La estructura de las Secciones 3.3 y 3.4 es similar. Estableceremos condiciones para caracterizar la estabilidad exponencial uniforme de ciertos compactos positivamente invariantes para el semiflujo pseudo-continuo $(\Omega \times W^{1,\infty}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ en términos de sus correspondientes exponentes de Lyapunov superiores. Recordemos que Π es la aplicación definida por (3.12) a partir de la familia (3.1) de ERDEs no autónomas. En concreto, trabajaremos con compactos cumpliendo las siguientes condiciones:

Hipótesis 3.19. $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ es un compacto positivamente Π -invariante que proyecta sobre toda la base y tal que cada uno de sus elementos admite al menos una extensión hacia atrás en \mathcal{K} .

Nótese que esta hipótesis es más restrictiva que la Hipótesis 3.11 impuesta en la sección anterior. Lo mismo sucede con las condiciones que supondremos en esta sección sobre la familia (3.1): son más restrictivas que las que hemos impuesto en la Sección 3.2 y en el Capítulo 2. Esto nos permitirá utilizar todos los resultados vistos hasta el momento. Las condiciones sobre F y τ con las que trabajaremos ahora son también más restrictivas que las que impondremos en la siguiente sección, por lo que obtendremos conclusiones más fuertes: basta con comparar los Teoremas 3.21 y 3.25.

Para facilitar la tarea del lector escribimos ahora la lista completa de condiciones, incluyendo las repetidas y las nuevas: H2(4),(5) y (6). La hipótesis H2(6) no entrará en juego hasta la siguiente sección.

- H1 (1) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.
- (2) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz-continua en sus segundo y tercer argumentos en el siguiente sentido: para cualquier par de compactos \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 de \mathbb{R}^n , existe una constante $L = L(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) > 0$ tal que

$$|F(\omega, y_1, y_2) - F(\omega, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| \leq L (|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2|)$$

para todos $\omega \in \Omega$, $y_1, \tilde{y}_1 \in \mathcal{K}_1$ e $y_2, \tilde{y}_2 \in \mathcal{K}_2$.

- (3) $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable respecto a sus segundo y tercer argumentos, y las funciones $D_i F: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ son continuas para $i = 2, 3$.

- H2 (1) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es continua.
- (2) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para todo conjunto compacto $\mathcal{M} \subset C$ existe una constante $L_2 = L_2(\mathcal{M}) > 0$ tal que

$$|\tau(\omega, x) - \tau(\omega, \tilde{x})| \leq L_2 \|x - \tilde{x}\|_C$$

para todos $\omega \in \Omega$ y $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$.

- (3) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es diferenciable respecto a su segundo argumento, y $D_2 \tau: \Omega \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ es continua.
- (4) $\tau: \Omega \times C \rightarrow [0, r]$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para todo conjunto cerrado y acotado $\mathcal{B} \subset C$ existe una constante $L_4 = L_4(\mathcal{B}) > 0$ tal que

$$|\tau(\omega, x_1) - \tau(\omega, x_2)| \leq L_4 \|x_1 - x_2\|_C$$

para todo $\omega \in \Omega$ y para todos x_1 y $x_2 \in \mathcal{B}$.

- (5) $D_2 \tau: \Omega \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para todo conjunto cerrado y acotado $\mathcal{B} \subset C$ existe una constante $L_5 = L_5(\mathcal{B}) > 0$ tal que

$$\|D_2 \tau(\omega, x_1) - D_2 \tau(\omega, x_2)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \leq L_5 \|x_1 - x_2\|_C$$

para todo $\omega \in \Omega$ y para todos x_1 y $x_2 \in \mathcal{B}$.

- (6) $D_2 \tau: \Omega \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para todo conjunto compacto $\mathcal{M} \subset \Omega \times C$ existe una constante $L_6 = L_6(\mathcal{M}) > 0$ tal que

$$\|D_2 \tau(\omega, x_1) - D_2 \tau(\omega, x_2)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \leq L_6 \|x_1 - x_2\|_C$$

para todos (ω, x_1) y (ω, x_2) en \mathcal{M} .

Recordemos que H1(3) garantiza H1(2) (véase la Proposición 2.13), y que H2(3) garantiza H2(2) (véase la Proposición 2.15). Notemos además que H2(4) es más exigente que H2(2) y no está garantizada por H2(3); y que H2(5) es más exigente que H2(6). Vamos a comprobar ahora que H2(3)&(5) implican H2(4).

Proposición 3.20. *Supongamos que τ cumple H2(3)&(5). Entonces también cumple H2(4).*

Demostración. Sea $\mathcal{B} \subset C$ un conjunto cerrado y acotado. Sea $c = c(\mathcal{B}) > 0$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_c$, donde

$$\mathcal{B}_c := \text{clausura}_C \{x \in C \mid \|x\|_C \leq c\}.$$

El conjunto \mathcal{B}_c es cerrado y acotado en C . Sea $L_5 = L_5(\mathcal{B}_c)$ la constante asociada a \mathcal{B}_c por H2(5), y sea $m := \max\{\|D_2\tau(\omega, 0)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \mid \omega \in \Omega\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|D_2\tau(\omega, x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} &\leq \|D_2\tau(\omega, x) - D_2\tau(\omega, 0)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} + \|D_2\tau(\omega, 0)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \\ &\leq L_5c + m := L_4(\mathcal{B}_c) = L_4 \end{aligned}$$

para todo $\omega \in \Omega$ y todo $x \in \mathcal{B}_c$. Este hecho, la convexidad de \mathcal{B}_c , y la propiedad H2(3) garantizan que

$$\begin{aligned} |\tau(\omega, x) - \tau(\omega, \tilde{x})| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} \tau(\omega, sx + (1-s)\tilde{x}) ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 D_2\tau(\omega, sx + (1-s)\tilde{x})(x - \tilde{x}) ds \right| \\ &\leq L_4\|x - \tilde{x}\|_C \end{aligned}$$

para todo $\omega \in \Omega$ y para todos $x, \tilde{x} \in \mathcal{B}_c$, lo que completa la demostración. \square

Trabajaremos en esta sección suponiendo H2(1),(3)&(5), y en la siguiente debilitaremos estas condiciones imponiendo H2(1),(3)&(6).

Recordemos que el semiflujo $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ es global y continuo, y que $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0$: véase la Nota 3.12. El objetivo de esta sección es probar que la estabilidad exponencial uniforme de \mathcal{K} se puede caracterizar en términos de su exponente de Lyapunov superior por la condición $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$. Veremos que esta propiedad puede ser formulada en términos de la norma en $W^{1, \infty}$ y de la norma en C . Estos son los contenidos del Teorema 3.21, cuya prueba requiere de tres lemas preliminares muy técnicos. Recordemos la Definición 3.18 de $\lambda_{\mathcal{K}}$, y que el Teorema 3.17 demuestra que coincide con el exponente de Lyapunov superior para el semiflujo linealizado definido por (3.17) sobre $\mathcal{K} \times W^{1, \infty}$ y con el del semiflujo linealizado definido por (3.19) sobre $\mathcal{K} \times C$. De hecho, ambas definiciones de $\lambda_{\mathcal{K}}$ se usarán en la prueba del siguiente teorema. Es importante remarcar que parte del siguiente resultado y de su prueba sería estándar si el semiflujo Π es C^1 en un entorno abierto de \mathcal{K} . Pero nuestras hipótesis no garantizan esa condición.

Teorema 3.21. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(5), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Sea $\lambda_{\mathcal{K}}$ el exponente de Lyapunov superior de \mathcal{K} dado por la Definición 3.18. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$.

(2) *Existen $\beta > 0$, $k_1 \geq 1$ y $\delta_1 > 0$ tales que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ cumplen $\|x - \bar{x}\|_C \leq \delta_1$, entonces la función $y(t, \omega, x)$ está definida para todo $t \in [-r, \infty)$ y satisface*

$$|y(t, \omega, x) - y(t, \omega, \bar{x})| \leq k_1 e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C \text{ para todo } t \geq -r, \quad (3.28)$$

por lo que

$$\|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_C \leq k_1 e^{\beta r} e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C \text{ para todo } t \geq 0. \quad (3.29)$$

(3) *El conjunto \mathcal{K} es uniformemente exponencialmente estable; es decir, existen $\beta > 0$, $k_2 \geq 1$ y $\delta_2 > 0$ tales que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ cumplen $\|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} < \delta_2$, entonces la función $u(t, \omega, x)$ está definida en $[0, \infty)$ y satisface*

$$\|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq k_2 e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Además, si se cumple (1), podemos tomar cualquier $\beta \in (0, -\lambda_{\mathcal{K}})$ en (2) y (3) (cambiando las constantes δ_1 , k_1 , δ_2 y k_2 si es necesario).

Las siguientes páginas contienen los enunciados y las demostraciones de los tres lemas técnicos necesarios para la demostración del Teorema 3.21. Antes de empezar con ellos, fijamos varias constantes que tendrán un papel fundamental y establecemos notación. Definimos

$$r_0 := 1 + \sup\{\|\bar{x}\|_C \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}\},$$

$$\mathcal{B}_0 := \{x \in C \mid \|x\|_C \leq r_0\} \subset C.$$

Representamos por L_4^0 y L_5^0 las constantes de Lipschitz de τ y $D_2\tau$ en $\Omega \times \mathcal{B}_0$, dadas respectivamente por las condiciones H2(4) y H2(5) (véase la Proposición 3.20). También denotamos

$$\begin{aligned} |F|_0 &:= \sup\{|F(\omega, h, k)| \mid \omega \in \Omega, |h| \leq r_0, |k| \leq r_0\}, \\ \|D_2F\|_0 &:= \sup\{\|D_2F(\omega, h, k)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \mid \omega \in \Omega, |h| \leq r_0, |k| \leq r_0\}, \\ \|D_3F\|_0 &:= \sup\{\|D_3F(\omega, h, k)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \mid \omega \in \Omega, |h| \leq r_0, |k| \leq r_0\}, \\ \|D_2\tau\|_0 &:= \sup\{\|D_2\tau(\omega, x + \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}, \|x\|_C \leq 1\}. \end{aligned}$$

Deducimos de H2(5), de la compacidad de \mathcal{K} , y de H2(3), que

$$\|D_2\tau\|_0 \leq L_5^0 + \sup\{\|D_2\tau(\omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}\} < \infty.$$

Por su parte, H1(1)&(3) aseguran que $|F|_0$, $\|D_2F\|_0$ y $\|D_3F\|_0$ son finitos. Suponemos, sin restricciones, que las seis constantes L_4^0 , L_5^0 , $|F|_0$, $\|D_2F\|_0$, $\|D_3F\|_0$ y $\|D_2\tau\|_0$ son estrictamente positivas.

Recordemos una vez más que las funciones $y(t, \omega, x)$ y $u(t, \omega, x)$ están definidas para $t \in [-r, \beta_{\omega, x})$ y $t \in [0, \beta_{\omega, x})$, respectivamente. Y recordemos que si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ entonces $\beta_{\omega, \bar{x}} = \infty$. En las pruebas de los siguientes tres lemas y del Teorema 3.21 fijaremos los puntos $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1, \infty}$ y $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, las funciones $y(t, \omega, x)$ e $y(t, \omega, \bar{x})$ están ambas definidas en $[-r, \beta_{\omega, x})$ y las funciones $u(t, \omega, x)$ y $u(t, \omega, \bar{x})$ están ambas definidas en $[0, \beta_{\omega, x})$. Para simplificar la notación, representamos por

$$\begin{aligned} y(t) &:= y(t, \omega, x) & \text{e} & \quad \bar{y}(t) := y(t, \omega, \bar{x}) & \text{para } t \in [-r, \beta_{\omega, x}), \\ \tilde{y}(t) &:= y(t) - \bar{y}(t) & & & \text{para } t \in [-r, \beta_{\omega, x}), \\ u(t) &:= u(t, \omega, x) & \text{y} & \quad \bar{u}(t) := u(t, \omega, \bar{x}) & \text{para } t \in [0, \beta_{\omega, x}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

También trabajaremos siempre bajo la condición

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq 1 \quad \text{para todo } t \in [0, T], \quad (3.31)$$

donde T es un tiempo que fijamos en $[0, \beta_{\omega, x})$. Esta cota, junto con el hecho de que $(\omega \cdot t, \bar{u}(t))$ pertenece a \mathcal{K} , asegura que

$$\begin{aligned} |y(t+s)| &\leq |y(t+s) - \bar{y}(t+s)| + |\bar{y}(t+s)| \\ &\leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C + \|\bar{u}(t)\|_C \leq r_0, \\ |\bar{y}(t+s)| &\leq \|\bar{u}(t)\|_C \leq r_0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

para todos $t \in [0, T]$ y $s \in [-r, 0]$.

Lema 3.22. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(5), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0, 1]$ tal que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1, \infty}$, $T \in [0, \beta_{\omega, x})$, y $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_3$ para todo $t \in [0, T]$, entonces*

$$\begin{aligned} &|\bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\ &+ |\dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t))| \leq \varepsilon \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$. La notación (3.30) se utiliza en el enunciado de este lema.

Demostración. Fijamos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1, \infty}$, y $T \in [0, \beta_{\omega, x})$, y usamos la notación (3.30). Suponemos, sin pérdida de generalidad, que se cumple (3.31) y, por tanto, que se verifican las acotaciones de (3.32).

Como $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0$ (véase la Nota 3.12), tenemos que $\bar{y} \in C^1([-r, T], \mathbb{R}^n)$. Para cada $t \in [0, T]$, definimos $p_t: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$p_t(s) := \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))) + s \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))(u(t) - \bar{u}(t)). \quad (3.33)$$

Así,

$$p_t(1) - p_t(0) = \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) + \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))(u(t) - \bar{u}(t)),$$

por lo que la cota del lema es equivalente a la propiedad

$$\frac{|p_t(1) - p_t(0)|}{\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C} \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \in [0, T] \text{ con } u(t) \neq \bar{u}(t). \quad (3.34)$$

La regla de la cadena asegura que p_t es continuamente diferenciable, y que

$$\dot{p}_t(s) = \{-\dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))) \cdot D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t))) + \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))\} (u(t) - \bar{u}(t)).$$

Como $p_t(1) - p_t(0) = \int_0^1 \dot{p}_t(s) ds$, podemos tomar $s \in [0, 1]$ con $|p_t(1) - p_t(0)| \leq |\dot{p}_t(s)|$. Teniendo en cuenta la ecuación que satisface $\bar{y}(t)$, las definiciones de $\|D_2\tau\|_0$, de $|F|_0$, y la segunda cota de (3.32), tenemos, si $u(t) \neq \bar{u}(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{|p_t(1) - p_t(0)|}{\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C} &\leq \frac{|\dot{p}_t(s)|}{\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C} \\ &\leq |\dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) - \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t))))| \cdot \\ &\quad \cdot \|D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \\ &\quad + |\dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \|D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) - D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \\ &\leq \|D_2\tau\|_0 |\dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) - \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t))))| \\ &\quad + |F|_0 \|D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) - D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

La aplicación restringida $\Pi: [0, 1] \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, $(t, \omega, \bar{x}) \mapsto (\omega \cdot t, u(t, \omega, \bar{x}))$ es uniformemente continua. Por lo tanto, dado nuestro $\varepsilon > 0$, existe $\rho_\varepsilon \in (0, 1]$ tal que, si $0 \leq s \leq \rho_\varepsilon$, entonces

$$\|u(s, \omega_0, \bar{x}_0) - \bar{x}_0\|_{W^{1, \infty}} = \|u(s, \omega_0, \bar{x}_0) - u(0, \omega_0, \bar{x}_0)\|_{W^{1, \infty}} \leq \frac{\varepsilon}{2 \|D_2\tau\|_0}$$

para todo $(\omega_0, \bar{x}_0) \in \mathcal{K}$. Ahora tomamos un punto $(\omega^*, \bar{x}^*) \in \mathcal{K}$ tal que $(\omega, \bar{x}) = \Pi(r, \omega^*, \bar{x}^*)$: la Hipótesis 3.19 garantiza su existencia. Entonces, si $-r \leq t_1 < t_2 \leq$

$t_1 + \rho_\varepsilon$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\dot{y}(t_2) - \dot{y}(t_1)| &\leq \|u(t_2 + r, \omega^*, \bar{x}^*) - u(t_1 + r, \omega^*, \bar{x}^*)\|_{W^{1,\infty}} \\ &= \|u(t_2 - t_1, \omega^* \cdot (t_1 + r), u(t_1 + r, \omega^*, \bar{x}^*)) - u(t_1 + r, \omega^*, \bar{x}^*)\|_{W^{1,\infty}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2 \|D_2\tau\|_0}. \end{aligned}$$

Además de (3.31), suponemos también que

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \frac{\rho_\varepsilon}{L_4^0} \quad \text{para todo } t \in [0, T], \quad (3.35)$$

por lo que

$$|\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))| \leq L_4^0 s \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \rho_\varepsilon,$$

y en consecuencia, para todo $t \in [0, T]$,

$$|\dot{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) - \dot{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t))))| \leq \frac{\varepsilon}{2 \|D_2\tau\|_0}.$$

Por último, junto con (3.31) y (3.35), suponemos que

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \frac{\varepsilon}{2 L_5^0 |F|_0} \quad \text{para todo } t \in [0, T], \quad (3.36)$$

por lo que, para todo $t \in [0, T]$ tenemos

$$\begin{aligned} &\|D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) - D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \\ &\leq L_5^0 s \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \frac{\varepsilon}{2 |F|_0}. \end{aligned}$$

Todas estas propiedades demuestran que (3.34) se cumple si suponemos (3.31), (3.35) y (3.36). Y para que estas propiedades se cumplan basta con tomar $\delta_3 := \min(1, \rho_\varepsilon/L_4^0, \varepsilon/(2 L_5^0 |F|_0))$ e imponer $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_3$ para todo $t \in [0, T]$. Este es el valor de δ_3 que aparece en el enunciado. \square

Lema 3.23. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(5), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_4 = \delta_4(\varepsilon) \in (0, 1]$ tal que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$, $T \in [0, \beta_{\omega,x})$ y $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_4$ para todo $t \in [0, T]$, entonces*

$$|\tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \leq \begin{cases} 2 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [0, r], \\ \varepsilon \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [r, T]. \end{cases}$$

La notación (3.30) se utiliza en el enunciado de este lema.

Demostración. Fijamos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ y $T \in [0, \beta_{\omega,x})$. Usaremos

la notación (3.30). Y suponemos que se cumple (3.31), por lo que (3.32) también se verifica.

La cota es prácticamente inmediata si $t \in [0, r]$, por lo que consideramos el caso $T > r$ y $t \in [r, T]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} & |\tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\ & \leq \left(\max_{s \in [t-r, t]} |\dot{\tilde{y}}(s)| \right) |\tau(\omega \cdot t, u(t)) - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tomamos $s \in [t - r, t] \subset [0, T]$ y usamos la ecuación (3.1) para calcular $\dot{\tilde{y}}(s) = \dot{y}(s) - \dot{\bar{y}}(s)$. Como

$$F(\omega, y_1, y_2) - F(\omega, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \int_0^1 \frac{d}{d\nu} F(\omega, \nu y_1 + (1-\nu)\bar{y}_1, \nu y_2 + (1-\nu)\bar{y}_2) d\nu \quad (3.38)$$

y $|\nu z_1 + (1-\nu)z_2| \leq r_0$ cuando $|z_1| \leq r_0$ y $|z_2| \leq r_0$, aplicamos la segunda cota de (3.32) y las definiciones de $\|D_2F\|_0$ y de $\|D_3F\|_0$ para obtener

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{y}}(s)| &= |\dot{y}(s) - \dot{\bar{y}}(s)| \\ &= |F(\omega \cdot s, y(s), y(s - \tau(\omega \cdot s, u(s)))) - F(\omega \cdot s, \bar{y}(s), \bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s))))| \\ &\leq \|D_2F\|_0 |y(s) - \bar{y}(s)| + \|D_3F\|_0 |y(s - \tau(\omega \cdot s, u(s))) - \bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s)))| \\ &\leq \|D_2F\|_0 |y(s) - \bar{y}(s)| + \|D_3F\|_0 \left(|y(s - \tau(\omega \cdot s, u(s))) - \bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, u(s)))| \right. \\ &\quad \left. + |\bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, u(s))) - \bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s)))| \right). \end{aligned}$$

Observemos que $u(t)$ y $\bar{u}(t)$ pertenecen a \mathcal{B}_0 : véase (3.32). Por tanto la definición de L_4^0 asegura que

$$|\tau(\omega \cdot t, u(t)) - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))| \leq L_4^0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C. \quad (3.39)$$

Empleando de nuevo la ecuación (3.1) y (3.32), obtenemos

$$\begin{aligned} & |\bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, u(s))) - \bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s)))| \\ &= \left| \int_0^1 \dot{\bar{y}}(s + l \tau(\omega \cdot s, u(s)) + (1-l)\tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s))) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\tau(\omega \cdot s, u(s)) - \tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s))) dl \right| \\ &\leq |F|_0 L_4^0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Considerando todo lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{y}}(s)| &\leq \|D_2F\|_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \\ &\quad + \|D_3F\|_0 (\|u(s) - \bar{u}(s)\|_C + |F|_0 L_4^0 \|u(s) - \bar{u}(s)\|_C) \\ &= (\|D_2F\|_0 + \|D_3F\|_0 (1 + |F|_0 L_4^0)) \|u(s) - \bar{u}(s)\|_C. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sea

$$\delta_4 := \min \left(1, \frac{\varepsilon}{L_4^0 (\|D_2 F\|_0 + \|D_3 F\|_0 (1 + |F|_0 L_4^0))} \right).$$

Las cotas (3.41), (3.39), y (3.37) prueban el lema. \square

Lema 3.24. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(5), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Definamos la aplicación $g: \mathcal{K} \times W^{1,\infty} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por*

$$g(\omega, \bar{x}, x) := F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x))) - F(\omega, \bar{x}(0), \bar{x}(-\tau(\omega, \bar{x}))) - L(\omega, \bar{x})(x - \bar{x}),$$

donde $L(\omega, \bar{x})$ está definido por (3.15). Entonces, para todo $\varepsilon \in (0, (4/3) \|D_3 F\|_0]$ existe $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon) \in (0, 1]$ tal que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$, $T \in [0, \beta_{\omega,x})$, y $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_5$ para todo $t \in [0, T]$, entonces

$$|g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t))| \leq \begin{cases} 3 \|D_3 F\|_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [0, r] \\ \varepsilon \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [r, T]. \end{cases}$$

La notación (3.30) se utiliza en el enunciado de este lema.

Demostración. Fijamos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$, y $T \in [0, \beta_{\omega,x})$. Usaremos la notación (3.30). Suponemos que se cumple (3.31), por lo que (3.32) también se verifica.

Denotamos

$$w(t) := y(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) \quad \text{y} \quad \bar{w}(t) := \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))$$

para $t \in [0, T]$. Las definiciones de $g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t))$ y de $L(\omega \cdot t, \bar{u}(t))$ (véase (3.15)) junto con (3.38) proporcionan

$$\begin{aligned} & |g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t))| \\ &= \left| F(\omega \cdot t, y(t), w(t)) - F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t)) - D_2 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t)) (y(t) - \bar{y}(t)) \right. \\ &\quad \left. - D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t)) (y(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))) \right. \\ &\quad \left. + D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2 \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t)) \right| \\ &\leq \sup_{\nu \in [0,1]} \left\| D_2 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t) + \nu (y(t) - \bar{y}(t)), \bar{w}(t) + \nu (w(t) - \bar{w}(t))) \right. \\ &\quad \left. - D_2 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t)) \right\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |y(t) - \bar{y}(t)| \\ &\quad + \sup_{\nu \in [0,1]} \left\| D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t) + \nu (y(t) - \bar{y}(t)), \bar{w}(t) + \nu (w(t) - \bar{w}(t))) \right. \\ &\quad \left. - D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t)) \right\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |w(t) - \bar{w}(t)| \\ &\quad + \|D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |y(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - y(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\ &\quad \left. + \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2 \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t)) \right|. \end{aligned}$$

Fijamos $\varepsilon \in (0, (4/3) \|D_3 F\|_0]$. La última suma tiene tres términos. Los dos pri-

meros se pueden acotar por $(\varepsilon/4) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C$ para $t \in [0, T]$. Esta última afirmación es consecuencia de dos hechos. El primero es que se cumple

$$\begin{aligned} |y(t) - \bar{y}(t)| &\leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \quad \text{para } t \geq 0, \\ |w(t) - \bar{w}(t)| &\leq (1 + |F|_0 L_4^0) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \quad \text{para } t \geq 0. \end{aligned}$$

La primera de estas dos acotaciones es obvia. Para probar la segunda, usamos (3.40) para ver que

$$\begin{aligned} |w(t) - \bar{w}(t)| &\leq |y(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t)))| \\ &\quad + |\bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\ &\leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C + |F|_0 L_4^0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C. \end{aligned}$$

El segundo hecho es que H1(3) garantiza que existe $\rho \in (0, 1]$ tal que

- si $|\bar{h}| \leq r_0$ y $|\bar{k}| \leq r_0$ (como es el caso de $|\bar{y}(t)|$ y de $|\bar{w}(t)|$, de acuerdo con (3.32)),
- si $|h - \bar{h}| < \rho$ (como sucede con $|\nu(y(t) - \bar{y}(t))|$ para todo $\nu \in [0, 1]$ si $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \rho$),
- y si $|k - \bar{k}| < \rho(1 + |F|_0 L_4^0)$ (como sucede con $|\nu(w(t) - \bar{w}(t))|$ para todo $\nu \in [0, 1]$ si $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \rho$),

entonces, para todo $\omega \in \Omega$, se cumple

$$\begin{aligned} \|D_2 F(\omega, h, k) - D_2 F(\omega, \bar{h}, \bar{k})\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} &\leq \varepsilon/4, \\ \|D_3 F(\omega, h, k) - D_3 F(\omega, \bar{h}, \bar{k})\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} &\leq \varepsilon/(4 + 4|F|_0 L_4^0). \end{aligned}$$

Es fácil deducir de estos dos hechos que la afirmación con respecto a la acotación de los dos primeros sumandos se cumple si $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C < \rho$ para todo $t \in [0, T]$.

Para acotar el último término, teniendo en cuenta (3.32) y la definición de $\|D_3 F\|_0$, obtenemos que $\|D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \|D_3 F\|_0$. Además,

$$\begin{aligned} &|y(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - y(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\ &\quad + |\dot{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2 \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t))| \\ &\leq |\bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\ &\quad + |\dot{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2 \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t))| \\ &\quad + |\tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))|. \end{aligned}$$

El Lema 3.22 proporciona $\delta_3 \in (0, 1]$ (independiente de ω , x , \bar{x} y T) tal que, si $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_3$ para todo $t \in [0, T]$, entonces el primer término de la última suma está acotado por $(\varepsilon/(4\|D_3 F\|_0)) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C$ para todo $t \in [0, T]$. Además, el Lema 3.23 asegura la existencia de $\delta_4 \in (0, 1]$ (que es también independiente de ω , x , \bar{x} y T) tal que, si $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_4$ para todo $t \in [0, T]$,

entonces

$$|\tilde{y}(t-\tau(\omega \cdot t, u(t))) - \tilde{y}(t-\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \leq \begin{cases} 2\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [0, r], \\ \frac{\varepsilon}{4\|D_3F\|_0}\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [r, T]. \end{cases}$$

Por tanto, si definimos $\delta_5 := \min(\rho, \delta_3, \delta_4) \leq 1$ y suponemos que $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_5$ para todo $t \in [0, T]$, obtenemos

$$|g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t))| \leq \begin{cases} \left(\frac{3\varepsilon}{4} + 2\|D_3F\|_0 \right) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [0, r], \\ \varepsilon \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [r, T]. \end{cases}$$

Esto y $3\varepsilon/4 \leq \|D_3F\|_0$ completan la demostración del lema. \square

Ahora podemos demostrar el teorema principal de esta sección. En realidad la prueba sólo utiliza el Lema 3.24: los otros dos se han usado en la demostración de este último.

Demostración del Teorema 3.21. (1) \Rightarrow (2) Consideramos el sistema lineal

$$\dot{y}(t) = L(\Pi(t, \omega, \bar{x})) y_t, \quad t \geq 0, \quad (3.42)$$

con L definida por (3.15). Sea $U(t, \omega, \bar{x})$ la solución fundamental de (3.42) en términos del Capítulo 1 de [14]; es decir, para cada $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ la aplicación matricial, de orden $n \times n$, $t \mapsto U(t, \omega, \bar{x})$ es una solución de $\dot{U}(t) = L(\Pi(t, \omega, \bar{x})) U_t$ para $t \geq 0$, y satisface

$$U(t, \omega, \bar{x}) = \begin{cases} I_n & \text{si } t = 0, \\ 0_n & \text{si } t \in [-r, 0) \end{cases}$$

para todo $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$. Usamos la notación habitual de I_n y 0_n para las matrices identidad y cero de tamaño $n \times n$.

Suponemos que $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$, fijamos $\beta \in (0, -\lambda_{\mathcal{K}})$, y elegimos α con $\beta < \alpha < -\lambda_{\mathcal{K}}$. El Teorema 3.17 junto con la expresión (3.20) del flujo sobre $\mathcal{K} \times C$, la Proposición II.4.1 y el Corolario II.4.2 de [45] aseguran la existencia de una constante $k_0 \geq 1$ tal que

$$\|\tilde{w}(t, \omega, \bar{x}, v)\|_C = \|\tilde{\pi}_L(t, \omega, \bar{x}) v\|_C \leq k_0 e^{-\alpha t} \|v\|_C \quad \text{y} \quad |U(t, \omega, \bar{x}) c| \leq k_0 e^{-\alpha t} |c|$$

para todos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $v \in C$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$.

Fijamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para aplicar el Lema 3.24 (es decir, $\varepsilon \in (0, (4/3)\|D_3F\|_0)$) y para que se cumpla $0 < \varepsilon k_0 e^{\beta r} / (\alpha - \beta) < 1/2$. Sea $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon) > 0$ la constante que proporciona el Lema 3.24. Recordemos que las funciones $y(t)$ e $\bar{y}(t)$ están definidas en $[-r, \beta_{\omega, \bar{x}})$. Tomamos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y

$(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$, y usamos la notación (3.30) de ahora en adelante. Es fácil ver que la función $\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ (que satisface $\tilde{y}_t = u(t) - \bar{u}(t)$) es una solución de la ecuación diferencial funcional

$$\dot{\tilde{y}}(t) = L(\Pi(t, \omega, \bar{x})) \tilde{y}_t + g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t)) \quad (3.43)$$

para todo $t \in [0, \beta_{\omega, x})$, donde g está definida en el enunciado del Lema 3.24. Aplicamos una versión adaptada de la fórmula de variación de las constantes (véase la Sección 2 del Capítulo 6 de [14]) para representar $\tilde{y}(t)$ como

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} x(t) - \bar{x}(t) & \text{si } t \in [-r, 0), \\ \tilde{z}(t, \omega, \bar{x}, x - \bar{x}) + \int_0^t U(t-s, \omega \cdot s, \bar{u}(s)) g(\omega \cdot s, \bar{u}(s), u(s)) ds & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

donde $\tilde{z}(t, \omega, \bar{x}, v)$ es la solución de (3.16) con condición inicial $v \in C$.

Empezamos considerando el caso $t \in [0, r]$. Suponemos que $\|x - \bar{x}\|_C < \delta_5$ (más tarde supondremos una condición más restrictiva), y definimos $t_1 := \sup\{t \in [0, r] \mid \|u(s) - \bar{u}(s)\|_C < \delta_5 \text{ para todo } s \in [0, t]\}$. Así definido, $0 < t_1 \leq \min(\beta_{\omega, x}, r)$. Aplicando el Lema 3.24 obtenemos

$$|\tilde{y}(t)| \leq k_0 e^{-\alpha t} \|x - \bar{x}\|_C + 3k_0 \|D_3F\|_0 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|\tilde{y}_s\|_C ds \quad \text{para } t \in [0, t_1],$$

y por tanto

$$e^{\alpha t} |\tilde{y}(t)| \leq k_0 \|x - \bar{x}\|_C + 3k_0 \|D_3F\|_0 \int_0^t e^{\alpha s} \|\tilde{y}_s\|_C ds \quad \text{para } t \in [0, t_1].$$

Definimos $r_1(t) := \sup\{e^{\alpha s} \|\tilde{y}(s)\|_C \mid 0 \leq s \leq t\}$. Es fácil ver que

$$r_1(t) \leq e^{\alpha r} k_0 \|x - \bar{x}\|_C + 3e^{\alpha r} k_0 \|D_3F\|_0 \int_0^t r_1(s) ds \quad \text{para } t \in [0, t_1].$$

Usando el lema de Gronwall, obtenemos

$$r_1(t) \leq e^{\alpha r} k_0 e^{3e^{\alpha r} k_0 \|D_3F\|_0 r} \|x - \bar{x}\|_C \quad \text{para } t \in [0, t_1].$$

En consecuencia,

$$e^{\alpha t} |\tilde{y}(t)| = e^{\alpha t} |\tilde{y}_t(0)| \leq e^{\alpha t} \|\tilde{y}_t\|_C \leq r_1(t) \leq k_1^1 \|x - \bar{x}\|_C \quad \text{para } t \in [0, t_1],$$

donde $k_1^1 := e^{\alpha r} k_0 e^{3e^{\alpha r} k_0 \|D_3F\|_0 r} > k_0 \geq 1$. Por tanto

$$|\tilde{y}(t)| \leq k_1^1 e^{-\alpha t} \|x - \bar{x}\|_C \quad \text{para } t \in [0, t_1].$$

Ahora suponemos que $\|x - \bar{x}\|_C \leq \delta_5/k_1^1 < \delta_5$. Entonces $|\tilde{y}(t)| < \delta_5$ para todo

$t \in [-r, t_1]$, por lo que $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C < \delta_5$ para todo $t \in [0, t_1]$. Con un sencillo argumento de contradicción obtenemos que $t_1 = r$ (en particular $\beta_{\omega, x} \geq r$) y por lo tanto

$$|y(t, \omega, x) - y(t, \omega, \bar{x})| = |\tilde{y}(t)| \leq k_1^1 e^{-\alpha t} \|x - \bar{x}\|_C \quad \text{para } t \in [0, r]. \quad (3.44)$$

En particular,

$$\|\tilde{y}_t\|_C \leq e^{\alpha t} \|\tilde{y}_t\|_C \leq k_1^1 \|x - \bar{x}\|_C < \delta_5 \quad \text{para } t \in [0, r]. \quad (3.45)$$

Consideramos ahora el caso $t \geq r$. Suponemos que $\|x - \bar{x}\|_C \leq \delta_5/k_1^1$ (más tarde usaremos una condición más fuerte), y definimos $t_2 := \sup\{t \geq r \mid \|u(s) - \bar{u}(s)\|_C < \delta_5 \text{ para todo } s \in [0, t]\}$, que satisface $r < t_2 < \beta_{\omega, x}$ (véase (3.45)). Aplicando el Lema 3.24, ahora para $r \leq t \leq t_2$, y usando (3.45),

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(t)| &\leq k_0 e^{-\alpha t} \|x - \bar{x}\|_C + 3k_0 \|D_3 F\|_0 \int_0^r e^{-\alpha(t-s)} \|\tilde{y}_s\|_C ds \\ &\quad + k_0 \varepsilon \int_r^t e^{-\alpha(t-s)} \|\tilde{y}_s\|_C ds \\ &\leq (k_0 + 3k_0 k_1^1 r e^{\alpha r} \|D_3 F\|_0) e^{-\alpha t} \|x - \bar{x}\|_C + k_0 \varepsilon e^{-\alpha t} \int_r^t e^{(\alpha-\beta)s} e^{\beta s} \|\tilde{y}_s\|_C ds. \end{aligned}$$

Definimos $k_1^2 := k_0 + 3k_0 k_1^1 r e^{\alpha r} \|D_3 F\|_0$. Multiplicamos la anterior desigualdad por $e^{\beta t}$. Como $e^{(\beta-\alpha)t} < 1$, tenemos

$$e^{\beta t} |\tilde{y}(t)| \leq k_1^2 \|x - \bar{x}\|_C + k_0 \varepsilon e^{-(\alpha-\beta)t} \int_r^t e^{(\alpha-\beta)s} e^{\beta s} \|\tilde{y}_s\|_C ds. \quad (3.46)$$

Ahora definimos $r_2(t) := \sup\{e^{\beta s} \|\tilde{y}_s\|_C \mid r \leq s \leq t\}$ para $t \in [r, t_2]$ y distinguimos dos casos.

En el primer caso suponemos que $r_2(t) = e^{\beta s^*} \|\tilde{y}_{s^*}\|_C$ para $s^* \in [r, 2r]$, y que existe $\theta^* \in [-r, 0]$ con $s^* + \theta^* \in [0, r]$ tal que $r_2(t) = e^{\beta s^*} |\tilde{y}(s^* + \theta^*)|$. Como $s^* + \theta^* \in [0, r]$, aplicamos (3.45) y concluimos que

$$r_2(t) = e^{\beta s^*} |\tilde{y}(s^* + \theta^*)| \leq e^{2r\beta} k_1^1 \|x - \bar{x}\|_C.$$

Por lo tanto,

$$|\tilde{y}(t)| \leq e^{-\beta t} r_2(t) \leq e^{2r\beta} k_1^1 e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C. \quad (3.47)$$

En el segundo caso, con el que cubrimos todas las posibilidades, $r_2(t) = e^{\beta s^*} \|\tilde{y}_{s^*}\|_C$ para $s^* \in [r, t]$, y existe $\theta^* \in [-r, 0]$ con $s^* + \theta^* > r$ y $r_2(t) = e^{\beta s^*} |\tilde{y}(s^* + \theta^*)|$. Denotamos por $\theta = s^* + \theta^*$, por lo tanto $s^* < \theta + r$. Entonces,

usando (3.46),

$$\begin{aligned}
r_2(t) &= e^{\beta s^*} |\tilde{y}(\theta)| \leq e^{\beta r} e^{\beta \theta} |\tilde{y}(\theta)| \\
&\leq k_1^2 e^{\beta r} \|x - \bar{x}\|_C + k_0 \varepsilon e^{\beta r} e^{-(\alpha-\beta)\theta} \int_r^\theta e^{(\alpha-\beta)s} e^{\beta s} \|\tilde{y}_s\|_C ds \\
&\leq k_1^2 e^{\beta r} \|x - \bar{x}\|_C + k_0 \varepsilon e^{\beta r} e^{-(\alpha-\beta)\theta} r_2(t) \int_r^\theta e^{(\alpha-\beta)s} ds \\
&\leq k_1^2 e^{\beta r} \|x - \bar{x}\|_C + \frac{k_0 \varepsilon e^{\beta r}}{\alpha - \beta} r_2(t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, debido a la elección de ε ,

$$\frac{1}{2} r_2(t) \leq \left(1 - \frac{k_0 \varepsilon e^{\beta r}}{\alpha - \beta}\right) r_2(t) \leq k_1^2 e^{\beta r} \|x - \bar{x}\|_C.$$

En consecuencia obtenemos

$$|\tilde{y}(t)| \leq e^{-\beta t} r_2(t) \leq 2 k_1^2 e^{\beta r} e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C. \quad (3.48)$$

Definimos $k_1 := \max\{e^{2r\beta} k_1^1, 2 k_1^2 e^{\beta r}\} > k_1^1$ y suponemos $\|x - \bar{x}\|_C \leq \delta_5/k_1 < \delta_5/k_1^1 < \delta_5$. Entonces, usando (3.44), (3.47) y (3.48), tenemos

$$|y(t, \omega, x) - y(t, \omega, \bar{x})| = |\tilde{y}(t)| \leq k_1 e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C < \delta_5 \quad \text{para } t \in [0, t_2]. \quad (3.49)$$

Como antes, un sencillo argumento de contradicción muestra que $t_2 = \infty$, y por lo tanto $\beta_{\omega, x} = \infty$. Definimos $\delta_1 := \delta_5/k_1$. El punto (3.28) se deduce de este hecho y de (3.49) para $t \geq 0$, y es trivial para $t \in [-r, 0]$ (como $k_1 \geq 1$).

Por último, sabemos que $u(t, \omega, x)$ está definido para $t \in [0, \infty)$. El punto (3.29) se deduce casi inmediatamente de la cota (3.28) y de la definición de $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C$.

(2) \Rightarrow (3) Suponemos que se cumple (2), tomamos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $x \neq \bar{x}$ con $\|x - \bar{x}\|_C \leq \delta_1$, y usamos de nuevo la notación (3.30).

Fijamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para aplicar el Lema 3.24 (es decir, $\varepsilon \leq (4/3) \|D_3 F\|_0$), y denotamos por $\delta_5 > 0$ la constante que nos proporciona este lema. Definimos por $\delta_2 := \min(\delta_1, \delta_5/(k_1 e^{\beta r}))$ (donde k_1 es la constante que aparece en (2)) y suponemos que $\|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_2$. Entonces, de acuerdo con (3.29),

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq k_1 e^{\beta r} \|x - \bar{x}\|_C \leq k_1 e^{\beta r} \|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_5 \quad \text{para } t \geq 0,$$

y por tanto el Lema 3.24 asegura que

$$|g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t))| \leq 3 \|D_3 F\|_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \quad \text{para } t \geq 0.$$

Definimos $k_3 := \max\{\|L(\omega, \bar{x})\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R}^n)} \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}\}$. Recordemos que se cumple (3.43). Usamos (3.29) y obtenemos que

$$\begin{aligned} |\dot{y}(t, \omega, x) - \dot{y}(t, \omega, \bar{x})| &\leq (k_3 + 3 \|D_3 F\|_0) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \\ &\leq (k_3 + 3 \|D_3 F\|_0) k_1 e^{\beta r} e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C \\ &\leq (k_3 + 3 \|D_3 F\|_0) k_1 e^{\beta r} e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

para todo $t \geq 0$. Definimos ahora $k_4 := (k_3 + 3 \|D_3 F\|_0 + 1) k_1 e^{\beta r}$ y combinamos (3.29), (3.50), y la definición de $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W^{1,\infty}}$ para concluir que

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq k_4 e^{\beta r} e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Por lo tanto, la afirmación de (3) se cumple para $k_2 := k_4 e^{\beta r}$.

(3) \Rightarrow (1) Tomamos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $v \in W^{1,\infty}$ y $t \geq 0$. El Teorema 2.20 asegura que

$$\|u_x(t, \omega, \bar{x}) v\|_{W^{1,\infty}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|u(t, \omega, \bar{x} + h v) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}}}{|h|}.$$

Tomamos $|h|$ suficientemente pequeño para garantizar que $\|h v\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_2$, siendo δ_2 la constante que nos proporciona (3). Entonces,

$$\|u(t, \omega, \bar{x} + h v) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq k_2 e^{-\beta t} \|h v\|_{W^{1,\infty}} = k_2 e^{-\beta t} |h| \|v\|_{W^{1,\infty}}.$$

Usando de nuevo el Teorema 2.20, obtenemos

$$\|w(t, \omega, \bar{x}, v)\|_{W^{1,\infty}} = \|u_x(t, \omega, \bar{x}) v\|_{W^{1,\infty}} \leq k_2 e^{-\beta t} \|v\|_{W^{1,\infty}},$$

lo cual, junto con (3.27) (para el semiflujo linealizado (3.17)), asegura que $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$ y completa la prueba de esta implicación.

Para comprobar la última afirmación del teorema es suficiente prestar atención a la elección de β en la prueba (1) \Rightarrow (2), y observar que el valor de β en (3) es el mismo que en (2). \square

3.4. Estabilidad exponencial uniforme bajo hipótesis menos restrictivas

Sea Π el semiflujo definido sobre $\Omega \times W^{1,\infty}$ por (3.12) a partir de la familia (3.1) de ERDEs no autónomas. En esta sección trabajaremos, al igual que en la anterior, con un conjunto \mathcal{K} que cumpla la Hipótesis 3.19.

Nuestro primer objetivo es adaptar la caracterización de estabilidad exponencial uniforme para \mathcal{K} en términos de su exponente de Lyapunov superior sustituyendo H2(5) por la condición H2(6), menos restrictiva. La diferencia respecto al Teorema 3.21 reside en la segunda condición, que caracteriza la estabilidad

exponencial uniforme en términos de $\|\cdot\|_C$ en vez de en términos de $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}}$. Antes de formular el nuevo teorema de caracterización, definimos

$$\rho_0 := \sup\{\|\bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}\}. \quad (3.51)$$

Teorema 3.25. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(6), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Sean $\lambda_{\mathcal{K}}$ el exponente de Lyapunov superior de \mathcal{K} , dado por la Definición 3.18, y ρ_0 la constante dada por (3.51). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$.
- (2) *Existe una constante $\beta > 0$ que satisface la siguiente propiedad: si fijamos $\rho > \rho_0$, existen constantes $k_1 = k_1(\rho) > 0$ y $\delta_1 = \delta_1(\rho) > 0$ tales que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ cumplen $\|x\|_{W^{1,\infty}} \leq \rho$ y $\|x - \bar{x}\|_C \leq \delta_1$, entonces la función $y(t, \omega, x)$ está definida para todo $t \in [-r, \infty)$ y satisface*

$$|y(t, \omega, x) - y(t, \omega, \bar{x})| \leq k_1 e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C \text{ para todo } t \geq -r,$$

por lo que

$$\|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_C \leq k_1 e^{\beta r} e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_C \text{ para todo } t \geq 0.$$

- (3) *El conjunto \mathcal{K} es uniformemente exponencialmente estable, es decir, existen $\beta > 0$, $k_2 \geq 1$ y $\delta_2 > 0$ tales que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ cumplen $\|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} < \delta_2$, entonces la función $u(t, \omega, x)$ está definida en $[0, \infty)$ y satisface*

$$\|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq k_2 e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Además, si se cumple (1), podemos tomar cualquier $\beta \in (0, -\lambda_{\mathcal{K}})$ en (2) y (3) (cambiando las constantes δ_1 , k_1 , δ_2 y k_2 si es necesario).

La prueba de este teorema reproduce básicamente la prueba del Teorema 3.21. Está basada también en tres lemas (Lemas 3.27, 3.28 y 3.29), cuyos enunciados y demostraciones son muy parecidos a los de los lemas de la Sección 3.3. Necesitamos cierto trabajo previo para adaptar todo a las hipótesis menos restrictivas que imponemos ahora. Dado cualquier $\gamma > 0$, denotamos

$$\mathcal{B}_\gamma := \{x \in W^{1,\infty} \mid \|x\|_{W^{1,\infty}} \leq \gamma\},$$

que es un subconjunto compacto de C (véase la Proposición 1.1), y representamos por L_2^γ y L_6^γ las constantes de Lipschitz de las funciones τ y $D_2\tau$ en $\Omega \times \mathcal{B}_\gamma$, pro-

porcionadas por las condiciones **H2(2)** y **H2(6)**. Como en la Sección 3.3, tomamos

$$r_0 := 1 + \sup\{\|\bar{x}\|_C \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}\},$$

y definimos

$$\begin{aligned} |F|_0 &:= \sup\{|F(\omega, h, k)| \mid \omega \in \Omega, \quad |h| \leq r_0, \quad |k| \leq r_0\}, \\ \|D_2F\|_0 &:= \sup\{\|D_2F(\omega, h, k)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \mid \omega \in \Omega, \quad |h| \leq r_0, \quad |k| \leq r_0\}, \\ \|D_3F\|_0 &:= \sup\{\|D_3F(\omega, h, k)\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \mid \omega \in \Omega, \quad |h| \leq r_0, \quad |k| \leq r_0\}, \end{aligned}$$

que son constantes finitas por **H1(1)&(3)**. Fijamos $\rho > \rho_0$, con ρ_0 definido por (3.51), y definimos

$$\rho^* := r_0 + |F|_0 + \rho_0 + \rho, \quad (3.52)$$

$$\|D_2\tau\|_0 := \sup\{\|D_2\tau(\omega, \bar{x} + x)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}, \quad \|x\|_{W^{1,\infty}} \leq \rho^*\}.$$

Para comprobar que $\|D_2\tau\|_0 < \infty$, observamos que coincide con el supremo de $D_2\tau$ en un subconjunto compacto de $\Omega \times C$ (véase de nuevo la Proposición 1.1), y por lo tanto **H2(3)** garantiza que es finito. Finalmente suponemos, sin restricciones, que las seis constantes $L_2^{\rho^*}$, $L_6^{\rho^*}$, $|F|_0$, $\|D_2F\|_0$, $\|D_3F\|_0$ y $\|D_2\tau\|_0$ son estrictamente positivas.

Lema 3.26. *Supongamos que F y τ cumplen **H1(1)&(3)** y **H2(1),(3)&(6)**, y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Fijemos $\rho > \rho_0$, con ρ_0 definido por (3.51), y definamos ρ^* por (3.52). Fijemos también $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times \mathcal{B}_\rho$. Entonces,*

$$\|\bar{u}(t)\|_C \leq r_0 - 1 \quad \text{para } t \in [0, \infty), \quad (3.53)$$

$$\|\bar{u}(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq \rho_0 \leq \rho^* \quad \text{para } t \in [0, \infty). \quad (3.54)$$

Si además se cumple

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq 1 \quad \text{para todo } t \in [0, T] \quad (3.55)$$

para un tiempo $T \in (0, \beta_{\omega,x})$, entonces

$$\|u(t)\|_C \leq r_0 \quad \text{para } t \in [0, T], \quad (3.56)$$

$$\|u(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq r_0 + |F|_0 + \rho \leq \rho^* \quad \text{para } t \in [0, T], \quad (3.57)$$

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq \rho^* \quad \text{para } t \in [0, T]. \quad (3.58)$$

La notación (3.30) se utiliza en el enunciado de este lema.

Demostración. Sabemos que $(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) \in \mathcal{K}$ para todo $t \geq 0$. Las cotas (3.53) y (3.54) se deducen de este hecho y de las definiciones de r_0 y de ρ_0 . Suponemos que (3.55) es cierto, lo cual, junto con (3.53), asegura que (3.56) se cumple. Antes

de probar (3.57), observamos también que (3.58) se deduce inmediatamente de (3.54), (3.57), y de la definición de ρ^* .

Para probar (3.57), tomamos $t \in [0, T]$ y $s \in [-r, 0]$ y recordamos que

$$\dot{u}(t)(s) = \begin{cases} \dot{y}(t+s) & \text{si } t+s \geq 0, \\ \dot{x}(t+s) & \text{si } t+s \leq 0. \end{cases}$$

Si $t+s \leq 0$, entonces $|\dot{u}(t)(s)| = |\dot{x}(t+s)| \leq \|x\|_{W^{1,\infty}} \leq \rho$. Suponemos ahora que $t+s \geq 0$, por lo que $\dot{y}(t+s) = F(\omega \cdot (t+s), y(t+s), y(t+s - \tau(\omega \cdot (t+s), y_{t+s})))$. Por (3.56) tenemos que $|y(t+s)| \leq r_0$ y $|y(t+s - \tau(\omega \cdot (t+s), y_{t+s}))| \leq r_0$. Por lo que, por la definición de $|F|_0$, tenemos que $|\dot{y}(t+s)| \leq |F|_0$. Así, $\|\dot{u}(t)\|_C \leq |F|_0 + \rho$. Finalmente, (3.56) proporciona

$$\|u(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq \|u(t)\|_C + \|\dot{u}(t)\|_C \leq r_0 + \|\dot{u}(t)\|_C \leq r_0 + |F|_0 + \rho,$$

como queríamos demostrar. \square

Ahora presentamos los lemas que harán el papel, para la prueba del Teorema 3.25, de los Lemas 3.22, 3.23 y 3.24 en la prueba del Teorema 3.21.

Lema 3.27. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(6), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Fijemos $\rho > \rho_0$, con ρ_0 definido por (3.51). Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon, \rho) \in (0, 1]$ tal que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times \mathcal{B}_\rho$, $T \in [0, \beta_{\omega, x})$, y $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_3$ para todo $t \in [0, T]$, entonces*

$$\begin{aligned} & |\bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \\ & + \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t))| \leq \varepsilon \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$. La notación (3.30) se utiliza en el enunciado de este lema.

Demostración. Repetimos paso por paso la demostración del Lema 3.22, suponiendo desde el principio que se cumple (3.55), lo que garantiza que también se cumplen (3.56) y (3.58). A la hora de comenzar a acotar

$$\frac{p_t(1) - p_t(0)}{\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C}$$

para $u(t) \neq \bar{u}(t)$, aplicamos (3.56) para afirmar que

$$|\dot{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \leq |F|_0,$$

y (3.58) para afirmar que

$$\|D_2\tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t) + s(u(t) - \bar{u}(t)))\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \leq \|D_2\tau\|_0.$$

El resto de la demostración es idéntica, sustituyendo L_4^0 y L_5^0 por L_2^* y L_6^* (con

ρ^* dado por (3.52)), y teniendo siempre en cuenta que se cumple (3.58). \square

Lema 3.28. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(6), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Fijemos $\rho > \rho_0$, con ρ_0 definido por (3.51). Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_4 = \delta_4(\varepsilon, \rho) \in (0, 1]$ tal que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times \mathcal{B}_\rho$, $T \in [0, \beta_{\omega, x})$, y $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_4$ para todo $t \in [0, T]$, entonces*

$$|\tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \tilde{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \leq \begin{cases} 2 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [0, r], \\ \varepsilon \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [r, T]. \end{cases}$$

La notación (3.30) se utiliza en el enunciado de este lema.

Demostración. Definimos ρ^* por (3.52). Suponemos para empezar que se cumple (3.55), y por lo tanto también (3.53), (3.56), (3.54), (3.57) y (3.58).

Repetimos paso por paso la demostración del Lema 3.23. Utilizamos (3.53) y (3.54) para acotar

$$|\tilde{y}(s)| \leq \|D_2 F\|_0 |y(s) - \bar{y}(s)| + \|D_3 F\|_0 |y(s - \tau(\omega \cdot s, u(s))) - \bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s)))|.$$

Utilizamos ahora (3.54) y (3.57), y la definición de $L_2^{\rho^*}$, para obtener

$$|\tau(\omega \cdot t, u(t)) - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))| \leq L_2^{\rho^*} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C;$$

y esta cota junto con (3.53) para obtener

$$|\bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, u(s))) - \bar{y}(s - \tau(\omega \cdot s, \bar{u}(s)))| \leq |F|_0 L_2^{\rho^*} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C.$$

A partir de aquí, no hay diferencias con la demostración del Lema 3.23. \square

Lema 3.29. *Supongamos que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(6), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.19. Fijemos $\rho > \rho_0$, con ρ_0 definido por (3.51), y definamos $g: \mathcal{K} \times W^{1, \infty} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por*

$$g(\omega, \bar{x}, x) := F(\omega, x(0), x(-\tau(\omega, x))) - F(\omega, \bar{x}(0), \bar{x}(-\tau(\omega, \bar{x}))) - L(\omega, \bar{x})(x - \bar{x}),$$

donde $L(\omega, \bar{x})$ está definido por (3.15). Entonces, para todo $\varepsilon \in (0, (4/3) \|D_3 F\|_0]$ existe $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon, \rho) \in (0, 1]$ tal que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}$, $(\omega, x) \in \Omega \times \mathcal{B}_\rho$, $T \in [0, \beta_{\omega, x})$, y $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \delta_5$ para todo $t \in [0, T]$, entonces

$$|g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t))| \leq \begin{cases} 3 \|D_3 F\|_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [0, r], \\ \varepsilon \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C & \text{si } t \in [r, T]. \end{cases}$$

La notación (3.30) se utiliza en el enunciado de este lema.

Demostración. Definimos ρ^* por (3.52), y suponemos de partida que se cumple (3.55), y por lo tanto también (3.53), (3.56), (3.54), (3.57) y (3.58).

Repetimos paso por paso la demostración del Lema 3.24. Como allí, tenemos

$$\begin{aligned}
& |g(\omega \cdot t, \bar{u}(t), u(t))| \\
& \leq \sup_{\nu \in [0,1]} \left\| D_2 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t) + \nu(y(t) - \bar{y}(t)), \bar{w}(t) + \nu(w(t) - \bar{w}(t))) \right. \\
& \quad \left. - D_2 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t)) \right\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |y(t) - \bar{y}(t)| \\
& + \sup_{\nu \in [0,1]} \left\| D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t) + \nu(y(t) - \bar{y}(t)), \bar{w}(t) + \nu(w(t) - \bar{w}(t))) \right. \\
& \quad \left. - D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t)) \right\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |w(t) - \bar{w}(t)| \\
& + \|D_3 F(\omega \cdot t, \bar{y}(t), \bar{w}(t))\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |y(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - y(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\
& \quad + \dot{\bar{y}}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t))) \cdot D_2 \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t))|.
\end{aligned}$$

Fijamos $\varepsilon \in (0, (4/3) \|D_3 F\|_0]$. Los dos primeros sumandos se pueden acotar por $(\varepsilon/4) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C$ para $t \in [0, T]$. Esto es consecuencia de dos hechos. El primero es que se cumple

$$\begin{aligned}
|y(t) - \bar{y}(t)| & \leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \quad \text{para } t \geq 0, \\
|w(t) - \bar{w}(t)| & \leq (1 + |F|_0 L_2^{\rho^*}) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \quad \text{para } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Para probar la segunda desigualdad, usamos (3.40), (3.54), y (3.57) para ver que

$$\begin{aligned}
|w(t) - \bar{w}(t)| & \leq |y(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t)))| \\
& \quad + |\bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, u(t))) - \bar{y}(t - \tau(\omega \cdot t, \bar{u}(t)))| \\
& \leq \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C + |F|_0 L_2^{\rho^*} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_C.
\end{aligned}$$

El segundo hecho es que H1(3) garantiza que existe $\theta \in (0, 1]$ tal que

- si $|\bar{h}| \leq r_0$ y $|\bar{k}| \leq r_0$ (como es el caso de $|\bar{y}(t)|$ y de $|\bar{w}(t)|$, de acuerdo con (3.53)),
- si $|h - \bar{h}| < \theta$ (como sucede con $|\nu(y(t) - \bar{y}(t))|$ para todo $\nu \in [0, 1]$ si $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \theta$),
- y si $|k - \bar{k}| < \theta (1 + |F|_0 L_4^0)$ (como sucede con $|\nu(w(t) - \bar{w}(t))|$ para todo $\nu \in [0, 1]$ si $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C \leq \theta$),

entonces, para todo $\omega \in \Omega$, se cumple

$$\begin{aligned}
& \|D_2 F(\omega, h, k) - D_2 F(\omega, \bar{h}, \bar{k})\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/4, \\
& \|D_3 F(\omega, h, k) - D_3 F(\omega, \bar{h}, \bar{k})\|_{\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/(4 + 4|F|_0 L_2^{\rho^*}).
\end{aligned}$$

Estos dos hechos aseguran la acotación de los dos primeros sumandos cuando $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_C < \theta$ para todo $t \in [0, T]$. Desde aquí no hay diferencias significativas con la prueba del Lema 3.24. \square

Demostración del Teorema 3.25. La prueba reproduce paso por paso la del Teorema 3.21. El único cambio significativo consiste en que hay que fijar $\rho > \rho_0$, con ρ_0 definido por (3.51), en los pasos (1) \Rightarrow (2) y (2) \Rightarrow (3) para aplicar el Lema 3.29 (que sustituye al Lema 3.24 a lo largo de la demostración). Una vez hecho esto, todo lo demás es totalmente análogo. \square

3.5. El caso de flujo base minimal

Continuamos este capítulo con varios resultados que se refieren al caso en el que $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es un flujo minimal. Nótese que en estas condiciones la Hipótesis 3.11 sobre \mathcal{K} coincide con la Hipótesis 3.19 (véase la Nota 3.2).

El primer resultado es una consecuencia del Teorema 3.25 que tendrá un papel muy importante en lo que sigue. Recordemos que $\lambda_{\mathcal{K}}$ representa el exponente de Lyapunov superior para el semiflujo $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$, siendo \mathcal{K} un compacto positivamente Π -invariante $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ (véase la Definición 3.18).

Definición 3.30. Un compacto $\mathcal{K} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ es una k -copia de $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ si cada fibra $\mathcal{K}_\omega := \{x \in W^{1,\infty} \mid (\omega, x) \in \mathcal{K}\}$ contiene exactamente k elementos.

Teorema 3.31. *Supongamos que el flujo base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es minimal. Supongamos también que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(6), y que \mathcal{K} cumple la Hipótesis 3.11. Y supongamos que $\lambda_{\mathcal{K}} < 0$. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que \mathcal{K} es una k -copia de $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ y el semiflujo $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ admite una extensión a flujo. Además,*

- (i) *para cada $\tilde{\omega} \in \Omega$ existen un entorno $\mathcal{U}_{\tilde{\omega}} \subset \Omega$ de $\tilde{\omega}$ y k aplicaciones continuas $x_1, \dots, x_k: \mathcal{U}_{\tilde{\omega}} \rightarrow W^{1,\infty}$ tales que*

$$\mathcal{K}_\omega = \{\bar{x} \in W^{1,\infty} \mid (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{K}\} = \{x_1(\omega), \dots, x_k(\omega)\} \quad (3.59)$$

para todo $\omega \in \mathcal{U}_{\tilde{\omega}}$.

- (ii) *El conjunto \mathcal{K} es una unión disjunta de un número finito de conjuntos minimales $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l$, donde \mathcal{M}_j es una m_j -copia uniformemente exponencialmente estable de la base para $j = 1, \dots, l$.*

Demostración. La Nota 3.2 y el Teorema 3.25 aseguran que \mathcal{K} es uniformemente exponencialmente estable, por lo que es uniformemente asintóticamente estable (véanse las Definiciones 3.5 y 3.4). Recordemos una vez más que el semiflujo restringido $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R})$ es continuo (véase el Corolario 2.11). El Teorema 3.5 de [41], basado en resultados previos de [43], prueba que \mathcal{K} es una k -copia de la base para $k \in \mathbb{N}$. El hecho de que $(\mathcal{K}, \Pi, \mathbb{R}^+)$ admite una extensión a flujo se deduce, por ejemplo, del Teorema 3.4 de [41].

(i) Esta afirmación se prueba fácilmente combinando dos hechos. El primero, es que como \mathcal{K} es compacto, la aplicación $\omega \mapsto \mathcal{K}_\omega$ es continua en la topología

Hausdorff del conjunto formado por los conjuntos compactos de $W^{1,\infty}$ (véase el Teorema 3.3 de [41]). El segundo, que \mathcal{K}_ω siempre contiene k elementos.

(ii) Sea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ un conjunto minimal. Es obvio que $\lambda_{\mathcal{M}} < 0$ y por tanto, como ya hemos probado, \mathcal{M} es uniformemente exponencialmente estable y es una m -copia de la base con $m \leq k$. Un sencillo razonamiento por reducción al absurdo nos permite deducir de la existencia de extensiones a flujo en \mathcal{K} y \mathcal{M} que $\mathcal{K} - \mathcal{M}$ es también positivamente Π -invariante. Tomamos ahora una sucesión (ω_k) con límite ω . El Teorema 3.4 de [41] asegura que (\mathcal{K}_{ω_k}) y (\mathcal{M}_{ω_k}) convergen a \mathcal{K}_ω y \mathcal{M}_ω en la topología Hausdorff del conjunto formado por los conjuntos compactos de $W^{1,\infty}$. No es difícil deducir de este hecho que $((\mathcal{K} - \mathcal{M})_{\omega_k})$ converge a $(\mathcal{K} - \mathcal{M})_\omega$ y, por tanto, $\mathcal{K} - \mathcal{M}$ es un compacto. Obviamente, $\lambda_{\mathcal{K} - \mathcal{M}} < 0$. Con todo esto, $\mathcal{K} - \mathcal{M}$ cumple las mismas condiciones que \mathcal{K} , por lo que es una $(k - m)$ -copia de la base. Repitiendo este proceso un número finito de veces (como mucho $k - 1$) probamos el punto (ii). \square

Necesitamos un concepto nuevo, que aparecerá en la formulación de los siguientes resultados:

Definición 3.32. Sea $\mathcal{M} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ un conjunto minimal con $\lambda_{\mathcal{M}} < 0$. Su dominio de atracción es

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) := \{(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty} \mid \beta_{\omega, x} = \infty \text{ y existe } (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{M} \\ \text{con } \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} = 0\}.$$

El Teorema 3.34, extiende la información del Teorema 3.25: prueba que si cada subconjunto minimal de un compacto positivamente Π -invariante \mathcal{P} tiene exponente de Lyapunov superior negativo, entonces \mathcal{P} contiene un número finito l de conjuntos minimales, y sus componentes conexas son los subconjuntos positivamente Π -invariantes determinados por los dominios de atracción de sus subconjuntos minimales. No suponemos la existencia de extensiones hacia atrás de los elementos de \mathcal{P} . La prueba del Teorema 3.25 se basa en la Proposición 3.33, que muestra algunas propiedades del conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Proposición 3.33. Supongamos que el flujo base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es minimal, que F y τ cumplen las condiciones H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(6), y que $\mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ es un conjunto minimal con $\lambda_{\mathcal{M}} < 0$. Entonces,

- (i) el dominio de atracción de \mathcal{M} , $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, es un conjunto abierto, conexo, y positivamente Π -invariante.
- (ii) Sean $\beta \in (0, -\lambda_{\mathcal{M}})$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}(\mathcal{M})$ un conjunto compacto. Existe una constante $k = k(\beta, \mathcal{P})$ tal que, para todo $(\omega, x) \in \mathcal{P}$, existe $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{M}$ con

$$\|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq k e^{-\beta t} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Demostración. (i) Es obvio que $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ es positivamente Π -invariante. Fijamos $\beta \in (0, -\lambda_{\mathcal{M}})$ y aplicamos el Teorema 3.25 para obtener $k_2 \geq 1$ y $\delta_2 > 0$ tales que, si $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{M}$ y $(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty}$ cumplen $\|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_2$, entonces $\beta_{\omega,x} = \infty$ y $\|u(t, \omega, x) - \bar{u}(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq k_2 e^{-\beta t} \|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}}$ para todo $t \geq 0$. Fijamos $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ y buscamos $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{M}$ y $t_0 > 0$ tales que $\|u(t_0, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - u(t_0, \tilde{\omega}, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_2/3$. También buscamos $\delta_0 > 0$ tal que, si $d_{\Omega}(\omega, \tilde{\omega}) < \delta_0$ y $\|x - \tilde{x}\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_0$, entonces $\|u(t_0, \omega, x) - u(t_0, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_2/3$. Por último, buscamos $\delta^0 \leq \delta_0$ tal que, si $d_{\Omega}(\omega, \tilde{\omega}) < \delta^0$, entonces $\omega \in \mathcal{U}_{\tilde{\omega}}$ y además, si $\bar{x} = x_i(\tilde{\omega})$, entonces $\|x_i(\omega) - x_i(\tilde{\omega})\|_{W^{1,\infty}} < \delta_0$ (véase el Teorema 3.31). Tomamos ahora (ω, x) cumpliendo $d_{\Omega}(\omega, \tilde{\omega}) < \delta^0$ y $\|x - \tilde{x}\|_{W^{1,\infty}} < \delta_0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} & \|u(t_0, \omega, x) - u(t_0, \omega, x_i(\omega))\|_{W^{1,\infty}} \\ & \leq \|u(t_0, \omega, x) - u(t_0, \tilde{\omega}, \tilde{x})\|_{W^{1,\infty}} \\ & \quad + \|u(t_0, \tilde{\omega}, \tilde{x}) - u(t_0, \tilde{\omega}, x_i(\tilde{\omega}))\|_{W^{1,\infty}} \\ & \quad + \|u(t_0, \tilde{\omega}, x_i(\tilde{\omega})) - u(t_0, \omega, x_i(\omega))\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, x_i(\omega))\|_{W^{1,\infty}} \\ & = \|u(t - t_0, \omega \cdot t_0, u(t_0, \omega, x)) - u(t - t_0, \omega \cdot t_0, u(t_0, \omega, x_i(\omega)))\|_{W^{1,\infty}} \\ & \leq \delta_2 k_2 e^{-\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$. Esta cota asegura que $(\omega, x) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ y por tanto que $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ es abierto en $\Omega \times W^{1,\infty}$, como queríamos probar.

Para probar que $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ es conexo, suponemos que $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, siendo \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 dos abiertos disjuntos de $\Omega \times W^{1,\infty}$. Como \mathcal{M} es conexo (como cualquier conjunto minimal), entonces está contenido en uno de estos conjuntos. Suponemos sin restricción que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}_1$. Vamos a probar que $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{V}_1$. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que existe $(\omega, x) \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{V}_2$. Como $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ es positivamente Π -invariante, el conjunto (conexo) $\{(\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \mid t \geq 0\}$ está contenido en $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, por lo que $\{(\omega \cdot t, u(t, \omega, x))\} \subset \mathcal{V}_2$. La definición de dominio de atracción y la compacidad de \mathcal{M} proporcionan una sucesión $(t_m) \uparrow \infty$ y $(\bar{\omega}, \bar{x}) \in \mathcal{M}$ tales que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\omega \cdot t_m, u(t_m, \omega, x)) = (\bar{\omega}, \bar{x}) \quad \text{en } \Omega \times W^{1,\infty}.$$

Por tanto $(\bar{\omega}, \bar{x})$ está en \mathcal{M} y en la adherencia de \mathcal{V}_2 , lo cual es imposible. Concluimos que $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{V}_2$ es vacío. Esto demuestra que $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ es conexo, lo que completa la demostración de (i)

(ii) Volvemos a fijar $\beta \in (0, -\lambda_{\mathcal{M}})$ y tomamos constantes $k_2 \geq 1$ y $\delta_2 > 0$ con

las mismas propiedades que en la prueba de (i). Definimos

$$\mathcal{D}_0(\mathcal{M}) := \{(\omega, x) \in \Omega \times W^{1,\infty} \mid \text{existe } (\omega, \bar{x}) \in \mathcal{M} \text{ con } \|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} < \delta_2\}.$$

El Teorema 3.25 y la definición de δ_2 garantizan que $\mathcal{D}_0(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M})$ y que existe t_0 tal que $\Pi(t, \mathcal{D}_0(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ para todo $t \geq t_0$. Veamos que $\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ es abierto en $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Tomamos $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ y $(\tilde{\omega}, \bar{x}) \in \mathcal{M}$ con $\delta_3 := \|\tilde{x} - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} < \delta_2$. Sea $\delta = (\delta_2 - \delta_3)/2$. El Teorema 3.31 asegura la existencia de un entorno abierto $\mathcal{U}_{\tilde{\omega}} \subseteq \Omega$ de $\tilde{\omega}$ y de una función continua $\bar{x}: \mathcal{U}_{\tilde{\omega}} \rightarrow W^{1,\infty}$ tales que $\bar{x} = \bar{x}(\tilde{\omega})$ y $(\omega, \bar{x}(\omega)) \in \mathcal{M}$ para todo $\omega \in \mathcal{U}_{\tilde{\omega}}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $d_\Omega(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$, entonces $\omega \in \mathcal{U}_{\tilde{\omega}}$ y $\|\bar{x}(\omega) - \bar{x}(\tilde{\omega})\|_{W^{1,\infty}} < \delta$. Entonces si $d_\Omega(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$ y $\|x - \tilde{x}\|_{W^{1,\infty}} < \delta$ tenemos que $(\omega, \bar{x}(\omega)) \in \mathcal{M}$ y que

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}(\omega)\|_{W^{1,\infty}} &\leq \|x - \tilde{x}\|_{W^{1,\infty}} + \|\tilde{x} - \bar{x}(\tilde{\omega})\|_{W^{1,\infty}} + \|\bar{x}(\tilde{\omega}) - \bar{x}(\omega)\|_{W^{1,\infty}} \\ &< \delta + \delta_3 + \delta = \delta_2, \end{aligned}$$

lo que asegura que $(\omega, x) \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$, y prueba la afirmación.

Tomamos ahora un conjunto compacto $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Nuestro siguiente objetivo es demostrar que existe $t_1 = t_1(\mathcal{P}) > 0$ tal que $\Pi(t_1, \mathcal{P}) \subset \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$. La definición de $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ asegura que, para cualquier $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{P}$, existe $t_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}$ tal que $(\tilde{\omega} \cdot t_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}, u(t_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}, \tilde{\omega}, \tilde{x})) \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$. Además, como $\mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ es abierto, lo mismo pasa para todos los puntos (ω, x) en un entorno $\mathcal{V}_{\tilde{\omega}, \tilde{x}} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ de $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$. Por lo tanto, $(\omega \cdot t, u(t, \omega, x)) \in \mathcal{D}_0(\mathcal{M})$ para todo $t \geq t_0 + t_{\tilde{\omega}, \tilde{x}}$ (véase la definición de t_0 en el párrafo anterior). La compacidad de \mathcal{P} prueba la existencia de t_1 .

Así, si $(\omega, x) \in \mathcal{P}$, entonces existe $(\omega \cdot t_1, \bar{y}) \in \mathcal{M}$ tal que $\|u(t_1, \omega, x) - \bar{y}\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta_2$. Como \mathcal{M} admite una extensión a flujo, existe $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{M}$ tal que $\bar{y} = u(t_1, \omega, \bar{x})$. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} &\|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \\ &= \|u(t - t_1, \omega \cdot t_1, u(t_1, \omega, x)) - u(t - t_1, \omega \cdot t_1, u(t_1, \omega, \bar{x}))\|_{W^{1,\infty}} \\ &= \|u(t - t_1, \omega \cdot t_1, u(t_1, \omega, x)) - u(t - t_1, \omega \cdot t_1, \bar{y})\|_{W^{1,\infty}} \\ &\leq k_2 \delta_2 e^{-\beta(t-t_1)} = k_2 \delta_2 e^{\beta t_1} e^{-\beta t} \end{aligned} \tag{3.60}$$

para $t \geq t_1$. Por otra parte, la continuidad uniforme de $\Pi: [0, t_1] \times \mathcal{M} \rightarrow \Omega \times C$ garantizada por el Teorema 2.6(iii) proporciona k_3 tal que

$$\|u(t, \omega, \bar{x}) - u(t_1, \omega, \bar{x})\|_C \leq k_3$$

si $t \in [0, t_1]$. Y la acotación de F sobre los compactos de $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, asegurada por H1(1), garantiza que existe k_4 con

$$\|\dot{u}(t, \omega, \bar{x}) - \dot{u}(t_1, \omega, \bar{x})\|_{L^\infty} \leq k_4$$

si $t \in [0, t_1]$. Por lo tanto

$$\|u(t, \omega, \bar{x}) - u(t_1, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq k_5$$

para todo $t \in [0, t_1]$, siendo $k_5 := \max\{k_3, k_4\}$. El mismo argumento aplicado a $[0, t_1] \times \mathcal{P}$ proporciona k_6 tal que

$$\|u(t, \omega, x) - u(t_1, \omega, x)\|_{W^{1,\infty}} \leq k_6$$

para todo $t \in [0, t_1]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \\ & \leq \|u(t, \omega, x) - u(t_1, \omega, x)\|_{W^{1,\infty}} \\ & \quad + \|u(t_1, \omega, x) - u(t_1, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \\ & \quad + \|u(t_1, \omega, \bar{x}) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \\ & \leq k_6 + k_2 \delta_2 + k_5 =: k_7 e^{-\beta t_1} \leq k_7 e^{-\beta t} \end{aligned} \tag{3.61}$$

para todo $t \in [0, t_1]$. Sea $k_* := \max\{k_7, k_2 \delta_2 e^{-\beta t_1}\}$. Las acotaciones (3.60) y (3.61) garantizan que

$$\|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}} \leq k_* e^{-\beta t}$$

para todo $t \geq 0$, lo que completa la demostración. \square

Teorema 3.34. *Supongamos que el flujo base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es minimal y que F y τ cumplen H1(1)&(3) y H2(1),(3)&(6). Sea $\mathcal{P} \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ un compacto positivamente Π -invariante tal que, para cualquier minimal $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$, se tiene que $\lambda_{\mathcal{M}} < 0$. Entonces,*

- (i) *El omega-límite $\mathcal{O}(\omega, x)$ es un subconjunto minimal de \mathcal{P} para cualquier $(\omega, x) \in \mathcal{P}$.*
- (ii) *\mathcal{P} contiene una cantidad finita de minimales: $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l$.*
- (iii) *Si $\mathcal{D}(\mathcal{M}_1), \dots, \mathcal{D}(\mathcal{M}_l)$ son los correspondientes dominios de atracción, entonces los conjuntos $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$ son no vacíos, compactos, conexos, positivamente Π -invariantes para $j = 1, \dots, l$, son disjuntos dos a dos, y*

$$\mathcal{P} = \bigcup_{j=1}^l (\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)).$$

En particular, si \mathcal{P} es conexo entonces contiene sólo un minimal.

Demostración. (i) Tomamos $(\omega, x) \in \mathcal{P}$, un conjunto minimal $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}(\omega, x) \subset \mathcal{P}$, y un punto $(\omega, y) \in \mathcal{M}$. Por hipótesis, $\lambda_{\mathcal{M}} < 0$. Buscamos una sucesión $(t_m) \uparrow \infty$ tal que $(\omega, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\omega \cdot t_m, u(t_m, \omega, x))$. Como (ω, y) pertenece al

conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, que es abierto (lo cual se ha probado en la Proposición 3.33(i)), existe m_0 tal que $(\omega \cdot t_{m_0}, u(t_{m_0}, \omega, x)) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Por definición de $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ existe $(\omega \cdot t_{m_0}, x_{m_0}) \in \mathcal{M}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \omega \cdot t_{m_0}, u(t_{m_0}, \omega, x)) - u(t, \omega \cdot t_{m_0}, x_{m_0})\|_{W^{1,\infty}} = 0.$$

Escribimos $(\omega \cdot t_{m_0}, x_{m_0}) = \Pi(t_{m_0}, \omega, \bar{x})$ para un punto $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{M}$ (véase la Proposición 1.19) y concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \omega \cdot t_{m_0}, u(t_{m_0}, \omega, x)) - u(t, \omega \cdot t_{m_0}, u(t_{m_0}, \omega, \bar{x}))\|_{W^{1,\infty}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \omega, x) - u(t, \omega, \bar{x})\|_{W^{1,\infty}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Por tanto $\mathcal{O}(\omega, x) = \mathcal{O}(\omega, \bar{x}) = \mathcal{M}$, lo que prueba (i).

(ii) Hemos visto en la demostración de (i) que para cada $(\omega, x) \in \mathcal{P}$ existe un minimal $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$ y un punto $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{M}$ que cumple (3.62). En particular, $(\omega, x) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. De modo que \mathcal{P} está contenido en la unión de los dominios de atracción de sus subconjuntos minimales, que son abiertos (por la Proposición 3.33(i)).

La compacidad de \mathcal{P} asegura que existe una cantidad finita de subconjuntos minimales $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l$ de \mathcal{P} con

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M}_1) \cup \dots \cup \mathcal{D}(\mathcal{M}_l).$$

Sea \mathcal{M} un subconjunto minimal de \mathcal{P} . Si $(\omega, x) \in \mathcal{M}$ buscamos $j \in \{1, \dots, l\}$ con $(\omega, x) \in \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$. Pero $(\omega, x) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ y, evidentemente, los dominios de atracción de dos minimales disjuntos son disjuntos. Concluimos que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_j$, lo que demuestra (ii).

(iii) Por (i) y (ii), tenemos que $\mathcal{P} = \cup_{j=1}^l (\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j))$ y hemos visto que $\mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$. Nuestro primer objetivo es probar que el conjunto positivamente Π -invariante $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$ es cerrado (y por tanto compacto) para $j = 1, \dots, l$. Fijamos $j \in \{1, \dots, l\}$ y tomamos una sucesión $((\omega_m, x_m)) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$ con límite $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{P}$. Existe $k \in \{1, \dots, l\}$ tal que $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_k)$. Como este conjunto es abierto en \mathcal{P} , existe m_0 tal que $(\omega_{m_0}, x_{m_0}) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_k)$; y como $\mathcal{D}(\mathcal{M}_j) \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_k)$ es vacío si $k \neq j$, entonces $k = j$. Por lo tanto, $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$ es cerrado, como queríamos ver.

Para probar que cada conjunto $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$ es conexo suponemos que para un índice $j \in \{1, \dots, l\}$ tenemos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j) \subset \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, con \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 dos abiertos disjuntos de $\Omega \times W^{1,\infty}$. Como \mathcal{M}_j es un subconjunto conexo de $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$, podemos suponer sin restricciones que $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{V}_1$. Y como $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$ es un subconjunto positivamente Π -invariante de $\mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$, concluimos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j) \cap \mathcal{V}_2$ es vacío: si $(\omega, x) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j) \cap \mathcal{V}_2$ entonces el conjunto conexo $\{\Pi(t, \omega, x) \mid t \geq$

$0\}$ está contenido en $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}_j) \subseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, luego está contenido en \mathcal{V}_2 , pero sin embargo su adherencia contiene puntos de $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}_1$, lo cual es imposible. Esto completa la prueba de (iii).

La última afirmación del teorema es trivial teniendo en cuenta (iii) y que $\mathcal{D}(\mathcal{M}_j)$ es abierto, que está asegurado por la Proposición 3.33(i). \square

3.6. El caso casi periódico

Supondremos en esta sección que hemos obtenido la familia (3.1) por el procedimiento de construcción de la envolvente descrito en la Sección 2.4 a partir de una ERDE de la forma

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tilde{\tau}(t, y_t))), \quad t > 0. \quad (3.63)$$

Supondremos también que el par $(f, \tilde{\tau})$ cumple las condiciones que garantizan que el flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ definido por traslación en su envolvente es casi periódico y minimal. Es decir, que f y $\tilde{\tau}$ cumplen la Definición 2.40 de casi periodicidad de funciones definidas en $\mathbb{R} \times X$ para un espacio de Banach separable X y con llegada en un espacio de Banach Y : véase el Corolario 2.45.

Por otra parte, hemos visto en el Teorema 2.30 que si f y $\tilde{\tau}$ cumplen

- h1 (1) La familia $\{f_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, y el conjunto $\{f(t, a, b) \mid t \in \mathbb{R}\}$ está acotado para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- (3) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable respecto a sus segundo y tercer argumentos; las funciones $D_i f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ son continuas para $i = 2, 3$; las familias $\{(D_i f)_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ son equicontinuas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para $i = 2, 3$; y los conjuntos $\{D_i f(t, y_1, y_2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ están acotados en $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para todo $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y para $i = 2, 3$.
- h2 (1) La familia $\{\tilde{\tau}_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times C$, y además el conjunto $\{\tilde{\tau}(t, u) \mid t \in \mathbb{R}\}$ está acotado para todo $u \in C$.
- (3) $\tilde{\tau}: \mathbb{R} \times C \rightarrow [0, r]$ es diferenciable respecto a su segundo argumento; $D_2 \tilde{\tau}: \mathbb{R} \times C \rightarrow \text{Lin}(C, \mathbb{R})$ es continua; la familia $\{D_2 \tilde{\tau}_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ es equicontinua en $\mathbb{R} \times C$; y el conjunto $\{D_2 \tilde{\tau}(t, u) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en $\text{Lin}(C, \mathbb{R})$ para todo $u \in C$.

entonces los coeficientes F y τ de la familia

$$\dot{y}(t) = F(\omega \cdot t, y(t), y(t - \tau(\omega \cdot t, y_t))), \quad t > 0 \quad (3.64)$$

para $\omega \in \Omega$ (cuya construcción se explica en la Sección 2.4), cumplen H1(1)&(3) y H2(1)&(3). Supongamos además que $\tilde{\tau}$ cumple

- h2 (6) $D_2\tilde{\tau}$ es localmente Lipschitz-continua en su segundo argumento en el siguiente sentido: para todo conjunto compacto $\mathcal{M} \subset C$ existe una constante $L_6 = L_6(\mathcal{M}) > 0$ tal que

$$\|D_2\tau(t, x_1) - D_2\tau(t, x_2)\|_{\text{Lin}(C, \mathbb{R})} \leq L_6 \|x_1 - x_2\|_C$$

para todos $t \in \mathbb{R}$ y $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$.

Entonces es sencillo demostrar que τ también cumple H2(6): basta con repetir los argumentos del Teorema 2.30(ii). Recordemos que la ecuación (3.63) es un elemento de la familia de ecuaciones (3.64): corresponde al elemento $(f, \tilde{\tau}) \in \Omega$.

El Teorema 3.36 establece condiciones que garantizan la existencia de soluciones uniformemente exponencialmente estables y casi periódicas de (3.63). Las definiciones (equivalentes) y las propiedades sobre funciones casi periódicas con dominio \mathbb{R} y codominio dado por un espacio de Banach se pueden consultar en la Sección 2.4.1.

Introducimos la notación que utilizaremos en la definición de solución uniformemente exponencialmente estable de (3.63). Supongamos que f y $\tilde{\tau}$ cumplen las condiciones h1(1)&(3) y h2(1)&(3). Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in W^{1, \infty}$, denotamos por

$$\tilde{y}(\cdot, t_0, x_0): [t_0 - r, \tilde{\beta}_{t_0, x_0}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

la solución maximal de (3.63) que cumple $\tilde{y}(t_0 + s, t_0, x_0) = x_0(s)$ para todo $s \in [-r, 0]$. Su existencia y unicidad están garantizadas por el Teorema 2.5 (gracias al Teorema 2.30, como acabamos de mencionar). Definimos también

$$\tilde{u}(\cdot, t_0, x_0): [t_0, \tilde{\beta}_{t_0, x_0}) \rightarrow W^{1, \infty}$$

como $\tilde{u}(t, t_0, x_0)(s) := \tilde{y}(t + s, t_0, x_0)$. Con nuestra notación habitual asociada a las soluciones y las semiórbitas de (3.64), es sencillo comprobar que $\tilde{\beta}_{t_0, x_0} = t_0 + \beta_{\omega_0 \cdot t_0, x_0}$ y que

$$\tilde{u}(t + t_0, t_0, x_0) = u(t, \omega_0 \cdot t_0, x_0) \quad (3.65)$$

para todo $t \in [0, \beta_{\omega_0 \cdot t_0, x_0})$.

Definición 3.35. La solución $\tilde{y}(t, 0, x_0)$ es *uniformemente exponencialmente estable* si está definida en $[-r, \infty)$ y además existen $\delta > 0$, $C > 0$ y $\alpha > 0$ tales que, si $x \in W^{1, \infty}$ satisface $\|\tilde{u}(t_*, 0, x_0) - x\|_{W^{1, \infty}} < \delta$ para un $t_* \geq 0$, entonces $y(t, t_*, x)$ está definido para $t \in [t_* - r, \infty)$ y

$$\|\tilde{u}(t + t_*, 0, x_0) - \tilde{u}(t + t_*, t_*, x)\|_{W^{1, \infty}} \leq C e^{-\alpha t} \|\tilde{u}(t_*, 0, x_0) - x\|_{W^{1, \infty}}$$

para todo $t \geq 0$.

Teorema 3.36. Supongamos que $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\tilde{\tau}: \mathbb{R} \times C \rightarrow [0, r]$ son funciones casi periódicas en el sentido de la Definición 2.40. Supongamos además

que cumplen las condiciones h1(1)\&(3) y h2(1),(3)\&(6) . Supongamos también que existe una solución de (3.63) definida en $[-r, \infty)$ uniformemente exponencialmente estable y acotada. Entonces la ecuación (3.63) admite al menos una solución uniformemente exponencialmente estable y casi periódica.

Demostración. El Corolario 2.45 asegura que el flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es minimal. Sea Π el semiflujo pseudo-continuo definido por (3.12) a partir de la familia (3.64). Hemos comentado antes de enunciar el teorema que las condiciones requeridas en f y $\tilde{\tau}$ garantizan que la familia (3.64) cumple las condiciones H1(1)\&(3) y H2(1),(3)\&(6) . Recordemos que las nociones de semiórbita, conjunto minimal, conjunto omega-límite y estabilidad exponencial uniforme de un compacto positivamente Π -invariante que proyecta sobre toda la base son las mismas que en el caso de flujo continuo: véase la Nota 3.10.

Sabemos que la ecuación inicial (3.63) coincide con la ecuación de la familia (3.64) correspondiente al punto $\omega_0 := (f, \tilde{\tau}) \in \Omega$. Sea $x_0 \in W^{1,\infty}$ el dato inicial que proporciona una solución uniformemente exponencialmente estable y acotada $y(t, \omega_0, x_0)$ de $(3.64)_{\omega_0}$, cuya existencia está garantizada por las hipótesis del teorema. Sea $\mathcal{O}(\omega_0, x_0) \subset \Omega \times W^{1,\infty}$ el conjunto omega-límite de la semiórbita $\{\Pi(t, \omega_0, x_0) \mid t \geq 0\}$, que es un compacto positivamente Π -invariante: véase el Teorema 3.13(ii). Además $\mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ proyecta sobre toda la base, ya que el flujo base es minimal (véase la Nota 3.2). Vamos a comprobar que $\mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ es uniformemente exponencialmente estable, y a deducir que es una m -copia de la base.

Recordemos que (véase la Nota 1.24)

$$u(t + t_*, \omega_0, x_0) = u(t, \omega_0 \cdot t_*, u(t_*, \omega_0, x_0)).$$

Por lo tanto, la Definición 3.35 y la igualdad (3.65) aseguran que existen $\delta > 0$, $C > 0$ y $\alpha > 0$ tales que, si $x \in W^{1,\infty}$ satisface $\|u(t_*, \omega_0, x_0) - x\|_{W^{1,\infty}} < \delta$ para un $t_* \geq 0$, entonces $y(t, \omega_0 \cdot t_*, x)$ está definida para $t \in [-r, \infty)$ y

$$\|u(t, \omega_0 \cdot t_*, u(t_*, \omega_0, x_0)) - u(t, \omega_0 \cdot t_*, x)\|_{W^{1,\infty}} \leq C e^{-\alpha t} \|u(t_*, \omega_0, x_0) - x\|_{W^{1,\infty}}.$$

Tomamos $(\omega, \bar{x}) \in \mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ y $x \in W^{1,\infty}$ tal que $\|x - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} < \delta$. Escribimos $(\omega, \bar{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\omega_0 \cdot t_m, u(t_m, \omega_0, x_0))$ para una sucesión $(t_m) \uparrow \infty$ adecuada, y buscamos m_0 tal que

$$\|u(t_m, \omega_0, x_0) - x\|_{W^{1,\infty}} \leq \|u(t_m, \omega_0, x_0) - \bar{x}\|_{W^{1,\infty}} + \|\bar{x} - x\|_{W^{1,\infty}} < \delta$$

para todo $m \geq m_0$. En consecuencia, para cada $t > 0$ fijo y cada $m \geq m_0$

$$\|u(t, \omega_0 \cdot t_m, u(t_m, \omega_0, x_0)) - u(t, \omega_0 \cdot t_m, x)\|_{W^{1,\infty}} \leq C e^{-\alpha t} \|u(t_m, \omega_0, x_0) - x\|_{W^{1,\infty}}.$$

La continuidad del flujo Π para t fijo asegurada por el Teorema 2.6(v) nos permite

deducir que

$$\|u(t, \omega, \bar{x}) - u(t, \omega, x)\|_{W^{1,\infty}} \leq C e^{-\alpha t} \|\bar{x} - x\|_{W^{1,\infty}}. \quad (3.66)$$

En particular, existe c_0 tal que $\|u(t, \omega, x)\|_{W^{1,\infty}} \leq c_0$ para todo $t \geq 0$. El Teorema 2.6(vii) asegura la existencia de $y(t, \omega, x)$ para todo $t \in [-r, \infty)$, y este hecho y (3.66) prueban que $\mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ es uniformemente asintóticamente estable.

En estas condiciones, el Teorema 3.31 asegura que $\mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ es una m -copia de la base para un $m \in \mathbb{N}$ que admite una extensión a flujo. Además este flujo es continuo, tal y como asegura el Corolario 2.11.

Por otra parte, el Corolario 2.45 asegura también que el flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es casi periódico. En estas condiciones, y dado que $\mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ es una m -copia de la base, el Teorema 2 del Capítulo I de [43] garantiza que el flujo $(\mathcal{O}(\omega_0, x_0), \Pi, \mathbb{R})$ es también casi periódico.

Recordemos de nuevo que $\mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ proyecta sobre todo Ω . Por lo tanto podemos tomar \tilde{x}_0 tal que $(\omega_0, \tilde{x}_0) \in \mathcal{O}(\omega_0, x_0)$. La función

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto y(t, \omega_0, \tilde{x}_0) \end{aligned} \quad (3.67)$$

es una solución de la ecuación inicial (3.63). La Proposición 2.39 aplicada a la función $\mathcal{O}(\omega_0, x_0) \rightarrow W^{1,\infty}$, $(\omega, x) \mapsto x$ asegura que la función $\mathbb{R} \rightarrow W^{1,\infty}$, $t \mapsto u(t, \omega_0, \tilde{x}_0)$ es casi periódica. Utilizando la Definición 2.32 se deduce de forma casi inmediata que (3.67) es también casi periódica. Y es muy fácil comprobar que la estabilidad exponencial uniforme de $\mathcal{O}(\omega_0, x_0)$ garantiza que la solución es uniformemente exponencialmente estable. Esto completa la demostración. \square

Bibliografía

- [1] W. G. AIELLO, H. I. FREEDMAN, J. WU, Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **52** (3) (1992), 855–869.
- [2] O. ARINO, E. SÁNCHEZ, A. FATHALLAH, State-dependent delay differential equations in populations dynamics: modeling and analysis, *Fields Institute Communications* **29** (2001), 19–36.
- [3] M.V. BARBAROSSA, H. O. WALTHER, Linearized stability for a new class of neutral equations with state-dependent delay, *Differential Equations and Dynamical Systems* **24** (1) (2016), 63–79.
- [4] M. BEBUTOV, On dynamical systems in the space of continuous functions, *Moscow University Mathematics Bulletin* (1941), 1–52.
- [5] Y. CAO, J. FAN, T. C. GARD, The effects of state-dependent time delay on a stage-structured population growth model, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* **19** (2) (1992), 95–105.
- [6] Y. CHEN, Q. HU, J. WU, Second-order differentiability with respect to parameters for differential equations with adaptative delays, *Frontiers of Mathematics in China* **5** (2) (2010), 221–286.
- [7] S.-N. CHOW, H. LEIVA, Dynamical spectrum for time dependent linear systems in Banach spaces, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* **11** (1994), 379–415.
- [8] S.-N. CHOW, H. LEIVA, Existence and roughness of the exponential dichotomy for skew-product semiflow in Banach spaces, *Journal of Differential Equations* **120** (1995), 429–477.
- [9] J. DE VRIES, *Elements of Topological Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [10] R. ELLIS, *Lectures on Topological Dynamics*, Benjamin, New York, 1969.
- [11] A.M. FINK, Almost Periodic Differential Equations, *Lecture Notes in Mathematics* **377**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

-
- [12] J.K. HALE, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [13] J.K. HALE, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, *Mathematical Surveys and Monographs* **25**, Amer. Math. Soc., 1988.
- [14] J.K. HALE, S.M. VERDYUN LUNEL, Introduction to Functional Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences* **99**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [15] F. HARTUNG, On differentiability of solutions with respect to parameters in a class of functional differential equations, *Functional Differential Equations* **4** (1)-(2) (1997), 65–79.
- [16] F. HARTUNG, Linearized stability in periodic functional differential equations with state-dependent delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **174** (2005), 201–211.
- [17] F. HARTUNG, Differentiability of solutions with respect to the initial data in differential equations with state-dependent delays, *Journal of Dynamics and Differential Equations* **23** (2011), 843–884.
- [18] F. HARTUNG On second-order differentiability with respect to parameters for differential equations with state-dependent delays, *Journal of Dynamics and Differential Equations* **25** (2013), 1089–1138.
- [19] F. HARTUNG, T. KRISZTIN, H.O. WALTHER, J. WU, Functional Differential Equations with State-Dependent Delays: Theory and Applications, *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations vol. 3*, Elsevier, North-Holland, 2006, 435–545.
- [20] X. HE, R. DE LA LLAVE, Construction of quasi-periodic solutions of state-dependent delay differential equations by the parameterization method I: finitely differentiable, hyperbolic case, *Journal of Dynamics and Differential Equations* (online), DOI: 10.1007/s10884-016-9522-x, 2016.
- [21] X. HE, R. DE LA LLAVE, Construction of quasi-periodic solutions of state-dependent delay differential equations by the parameterization method II: analytic case, *Journal of Differential Equations* **261** (3) (2016), 2068–2108.
- [22] Y. HINO, S. MURAKAMI, T. NAITO, Functional Differential Equations with Infinite Delay, *Lecture Notes in Mathematics* **1473**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.
- [23] Q. HU, J. WU, Global Hopf bifurcation for differential equations with state-dependent delay, *Journal of Differential Equations* **248** (2010), 2801–2840.

-
- [24] Q. HU, J. WU, X. ZOU, Estimates of periods and global continua of periodic solutions for state-dependent delay equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **44** (4) (2012), 2401–2427.
- [25] T. INSPERGER, F. HARTUNG, G. STÉPÁN, J. TURI, State dependent regenerative delay milling processes, *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, American Society of Mechanical Engineers (2005), 955–964.
- [26] T. INSPERGER, G. STÉPÁN, Semi-discretation for Time-Delay Systems. Stability and Engineering Applications, *Applied Mathematical Sciences* **178**, Springer, New York, 2011.
- [27] T. INSPERGER, G. STÉPÁN, J. TURI, State-dependent delay model for regenerative cutting processes, *Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, 2005, Eindhoven, Netherlands*.
- [28] T. INSPERGER, G. STÉPÁN, J. TURI, State-dependent delay in regenerative turning processes, *Nonlinear Dynamics* **47** (2007), 275–283.
- [29] R. JOHNSON, J. MOSER, The rotation number for almost periodic potentials, *Communications in Mathematical Physics* **84** (1982), 403–438.
- [30] T. KRISZTIN, Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: Classical solutions and solution manifold, *Journal of Differential Equations* **260** (2016), 4454–4472.
- [31] T. KRISZTIN, A. REZOUNENKO, Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: Classical solutions and solution manifold, *Journal of Differential Equations* **260** (2016), 4454–4472.
- [32] Y. LI, Periodic solutions for delay Lotka-Volterra competition systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **246** (2000), 230–244.
- [33] Y. LI, Y. KUANG, Periodic solutions in periodic state-dependent delay equations and population models, *Proceedings of the American Mathematical Society* **130** (5) (2001), 1345–1353.
- [34] Y. LI, Y. KUANG, Periodic solutions of periodic delay Lotka-Volterra equations and systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **255** (2001), 260–280.
- [35] M. MACKEY, Commodity price fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors, *Journal of Economic Theory* **48** (2) (1989), 497–509.

- [36] J. MALLET-PARET, R.D. NUSSBAUM, Stability of periodic solutions of state-dependent delay-differential equations, *Journal of Differential Equations* **250** (2011), 4085–4103.
- [37] I. MAROTO, C. NÚÑEZ, R. OBAYA, Dynamical properties of nonautonomous functional differential equations with state-dependent delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A* **37** (7) (2017), 3939–3961.
- [38] I. MAROTO, C. NÚÑEZ, R. OBAYA, Exponential stability for nonautonomous functional differential equations with state-dependent delay, to appear in *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* **22** (8) (2017), 3167–3197.
- [39] I. MAROTO, C. NÚÑEZ, R. OBAYA, Existence of global attractor for a biological neural network modeled by a nonautonomous state-dependent delay differential equation, *sometido a publicación*.
- [40] S. NOVO, R. OBAYA, A.M. SANZ, Exponential stability in nonautonomous delayed equations with applications to neural networks, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **18** (2007), 517–536.
- [41] S. NOVO, R. OBAYA, A.M. SANZ, Stability and extensibility results for abstract skew-product semiflows, *Journal of Differential Equations* **235** (2007), 623–646.
- [42] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Singapore, 1987.
- [43] R.J. SACKER, G.R. SELL, Lifting Properties in Skew-Products Flows with Applications to Differential Equations, *Memoirs of the American Mathematical Society* **190**, American Mathematical Society, Providence, 1977.
- [44] R.J. SACKER, G.R. SELL, Dichotomies for linear evolutionary equations in Banach spaces, *Journal of Differential Equations* **113** (1994), 17–67.
- [45] W. SHEN, Y. YI, Almost Automorphic and Almost Periodic Dynamics in Skew-Product Semiflows, *Memoirs of the American Mathematical Society* **647**, American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [46] G.R. SELL, *Topological Dynamics and Differential Equations*, Van Nostrand Reinhold, London, 1971.
- [47] G.R. SELL, Y. YOU, Dynamics of Evolutionary Equations, *Applied Mathematical Sciences* **143**, Springer-Verlag, 2002.
- [48] H. SMITH, An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, *Applied Mathematics* **57**, Springer, New York, 2001.

-
- [49] H.O. WALTHER, The solution manifold and C^1 -smoothness for differential equations with state-dependent delay, *Journal of Differential Equations* **195** (2003), 46–65.
- [50] H.O. WALTHER, Smoothness properties of semiflows for differential equations with state-dependent delays, *Journal of Mathematical Sciences* **124** (4) (2014).
- [51] P. WALTMAN, Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics, *Lecture Notes in Biomathematics* **1**, Springer, New York, 1974.
- [52] E. WINSTON, Uniqueness of the zero solution for differential equations with state-dependence, *Journal of Differential Equations* **7** (1970), 395–405.
- [53] J. WU, Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay, *Nonlinear Analysis and Applications* **6**, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001.