



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**Métodos en diferencias finitas
para opciones barrera.**

Autor : Sergio Álvarez Álvarez

Tutor/es : Francisco Javier de Frutos Baraja

Índice general

1. Introducción	4
2. Opciones Europeas	11
2.1. Conceptos Básicos	11
2.1.1. Acotación del valor de una opción	13
2.1.2. Relación de Paridad	14
2.2. Modelo de Black-Scholes	15
2.2.1. Obtención de la ecuación de Black-Scholes	15
2.2.2. Solución de la Ecuación de Black-Scholes	17
3. Opciones Americanas	21
3.1. Comparación con las Opciones Europeas	21
3.1.1. Considerando el pago de dividendos	23
3.2. Curva de Ejercicio Óptimo	24
3.2.1. Propiedades	26
3.3. Relación de Simetría Put - Call	28
3.4. Problema de Frontera Libre	29
3.5. Problema de Complementariedad Lineal	32

4. Métodos de Diferencias Finitas	35
4.0.1. Aproximaciones con diferencias finitas	35
4.1. Método Explícito	37
4.2. Método Implícito	39
4.3. Método de Crank-Nicolson	40
4.4. Algoritmos Opciones Europeas	41
4.4.1. Algoritmo LU	42
4.4.2. Algoritmo SOR	43
4.5. Algoritmos Opciones Americanas	45
4.5.1. Algoritmo PSOR	46
5. Opciones Barrera	47
5.1. Descripción y Tipos	47
5.2. Opciones Barrera Más Complejas	50
5.2.1. Ejemplo uso de Opciones Barrera Rainbow	50
5.3. Valoración	52
5.3.1. Relación de Paridad	56
6. Experimentos Numéricos	59
6.1. Utilizando Matlab	59
6.2. Análisis de los Experimentos	64

Capítulo 1

Introducción

Una opción es el derecho (no la obligación) a comprar o vender una unidad de un activo a un determinado precio (llamado strike o precio de ejercicio) y en un periodo de tiempo establecido. En este tipo de contratos se distinguen dos partes :

Por un lado, el titular, que es el que vende la opción (posición a corto). Y por el otro, el poseedor, que compra la opción (posición a largo).

La fecha de vencimiento de la opción determina el instante en el cual el poseedor de la opción pierde sus derechos sobre ella.

El objetivo que nos proponemos es desarrollar la teoría necesaria para calcular el precio de un tipo particular de opciones : las opciones de tipo barrera. Para ello, es necesario introducir previamente algunos términos y conceptos fundamentales:

- **Activo** : Un activo financiero es un título que puede comprarse y venderse en los mercados (por lo tanto es negociable) y que da derecho a recibir un ingreso futuro de la parte vendedora.
En estas condiciones, se dice que el comprador adquiere un activo y el vendedor un pasivo u obligación.
- **Acción** : Participación en el capital social de una empresa y que permite percibir parte de los beneficios de la misma, en función del grado

de participación.

- **Posición larga o corta** : Se dice que un inversor ocupa una posición *a largo* si se decide a la compra de un activo esperando que incremente su precio para posteriormente venderlo más caro.
Por su parte y si se espera que el activo se deprecie, se ocupa una posición *a corto* cuando el inversor vende con anterioridad el activo (aunque no lo tenga) con la finalidad de recomprarlo más barato.
- **Cartera** : Una cartera es una combinación de distintos tipos de acciones, con posiciones cortas y/o largas sobre activos en los que se invierte. En su composición es común diferenciar una parte destinada a la renta fija (que asegure un retorno de lo invertido) y otra parte destinada a la renta variable y que asume mayores riesgos a cambio de mayor rentabilidad.
- **Principio de no-arbitraje**: El arbitraje consiste en la posibilidad de conseguir un beneficio sin realizar ninguna inversión y garantizando la ausencia de pérdidas. Un correcto funcionamiento de los mercados evita que la situación de una ganancia instantánea y sin riesgo se prolongue en el tiempo, por lo que una de las hipótesis de la modelización matemática será la ausencia de arbitraje.
- **Opción de Compra o Call** : A su comprador se le concede el derecho (no la obligación) a comprar un activo a un precio predeterminado y en una fecha concreta (fecha de vencimiento).
Por otra parte, el vendedor de una *Call* sí que tiene la obligación de responder vendiendo el activo por el precio pactado en el caso de que el comprador quiera ejercer su derecho de compra.
Evidentemente, comprador y vendedor tienen posiciones contrapuestas.
- **Opción de Venta o Put** : El poseedor adquiere el derecho a vender un activo a un precio fijado y en una fecha concreta. El vendedor de una *Put* se compromete a comprar el activo subyacente si el comprador de la *Put* así lo desea.
- **Payoff** : Es el valor que tiene la opción en la fecha de vencimiento.

Dentro de las opciones, vamos a distinguir dos tipos de ellas sobre las que haremos referencia constantemente a lo largo del texto :

- **Opción Europea:** Aquella que solo se puede ejercer al final de la vida de la opción, es decir, aunque su compra-venta se negocie en cualquier momento en los mercados, solo se ejerce en la fecha de vencimiento.
- **Opción Americana:** Aquella que puede ejercerse en cualquier instante, desde su adquisición y hasta la fecha en que su compromiso finaliza.

Puesto que estas opciones pueden considerarse elementales (ya que son más sencillas y generan un gran volumen de negociaciones), es posible que a lo largo del texto nos refiramos a ellas como opciones *vainilla*, nombre con el que son conocidas.

A partir de ellas y con ciertas particularidades, podemos encontrar otro tipo de opciones más complejas, que reciben el nombre de *exóticas*.

- **Parámetros:** Finalmente, introducimos los parámetros que influyen en la valoración de las opciones :
 1. $S(t)$ = Precio del activo subyacente en tiempo t .
 2. T = Fecha de vencimiento; cuando acaba la vida de la opción.
 3. K = Strike o Precio de ejercicio.
 4. r = Tasa o tipo de interés.
 5. σ = Volatilidad del precio del activo.
 6. D = Dividendos (en caso de que el activo los genere).

Antes de entrar en profundidad, nos puede asaltar la duda acerca del tipo de perfil al que están dirigidas las opciones. En el mercado nos podemos encontrar con dos tendencias claramente identificables :

- **Especulación** : Consiste en la compra (o venta) de bienes con la intención de su posterior reventa (o recompra) buscando un beneficio, a corto o medio plazo, a costa de las fluctuaciones de los precios y no de la gestión o disfrute del bien invertido.
Su objetivo es la predicción de las tendencias de los mercados (alcista, bajista, alta volatilidad...) asumiendo que las pérdidas son posibles si las previsiones fallan.

- **Cobertura** : Su objetivo es mantener una posición en las opciones que permita anular o reducir el riesgo independientemente de la evolución del precio del activo.

Los fondos creados para tal fin se llaman fondos de cobertura y su trabajo es combinar posiciones cortas y largas (generalmente buscan posiciones opuestas en dos activos que muestran alta correlación negativa) con el fin de mantener la cartera a salvo de los riesgos (movimientos) del mercado.

Ahora vamos a desarrollar un estudio más minucioso.

A partir de ahora definiremos por $V(S, t)$ al valor de la opción, que depende tanto del precio del activo subyacente, $S(t)$, como del tiempo, t .

Centrándonos en el activo subyacente, este es una parte importante en el proceso del cálculo del valor de una opción, pues en función de la evolución del precio del activo también lo hará el valor de la opción.

El precio del activo sigue un proceso estocástico pues toma un valor aleatorio que evoluciona en función de la variable tiempo, y más aún, sigue un proceso de Markov ya que se supone que toda la información del pasado está recogida en el precio actual del activo, sin importar la trayectoria seguida hasta el presente. En el modelo más común, se supone que el precio del activo sigue un proceso estocástico browniano geométrico.

Un indicador de la variación del precio del activo, que llamaremos *retorno*, se puede obtener dividiendo el cambio en el precio entre su valor original.

Si S es el precio del activo en t y que evoluciona al valor $S + dS$ en el instante $t + dt$, vamos a modelar el retorno instantáneo dS/S .

Lo descomponemos en dos partes:

1. Una determinista, que contribuye de la forma μdt , siendo μ una medida del promedio de la evolución del precio del activo.
(Generalmente será una constante).
2. Una segunda parte que recoja la aleatoriedad existente en el cambio del precio del activo. El término encargado de representar esta aleatoriedad es σdZ , donde σ mide la desviación típica del *retorno* y Z es un proceso de Wiener.

Antes de continuar, hagamos un paréntesis para ofrecer una caracterización de un proceso de Wiener :

- i** : $\forall t \geq 0$, Z_t es un proceso Gaussiano; es decir, Z_t es una variable aleatoria tal que $p(a \leq Z_t \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$.
- ii** : $E(Z_t) = 0$, $\forall t \geq 0$.
- iii** : $E(Z_t Z_s) = \min(t, s)$.
- iv** : La aplicación $t \mapsto Z_t(\omega)$ es continua casi siempre.
- v** : $E((B_t - B_s)^2) = |t - s|$; $E(B_t - B_s) = 0$.
- vi** : Si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, entonces $Z_{t_4} - Z_{t_3}$ y $Z_{t_2} - Z_{t_1}$ son independientes.

(Las condiciones anteriores no son todas independientes, ver [11]).

Definido un proceso de Wiener, la evolución del precio de un activo S_t se modela mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ \quad (1.1)$$

donde el “drift” μ y la “volatilidad” σ se suponen constantes conocidas. Veamos que S_t sigue un proceso logaritmo-normal :

La idea parte de considerar $f = f(S)$ una función regular de S que evoluciona suavemente, en el sentido de que pequeños cambios en S den lugar a pequeños cambios en la función, que es la idea principal del Lema de Itô.

Su desarrollo en serie de Taylor será:

$$df = \frac{df}{dS} dS + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} dS^2 + \dots \quad (1.2)$$

Y utilizando la expresión (1.1),

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dZ \\ (dS)^2 &= \mu^2 S^2 dt^2 + 2\sigma \mu S^2 dt dZ + \sigma^2 S^2 dZ^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabiendo que $dZ^2 \rightarrow dt$ si $dt \rightarrow 0$ (por ser dZ un proceso de Wiener) y despreciando los términos dt^2 y $dt dZ$ frente a dt , (como $dZ^2 = \mathcal{O}(dt)$, dZ domina sobre ambos cuando se toma $dt \rightarrow 0$), reducimos la expresión a $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$, por lo que sustituyendo estas expresiones en (1.2) llegamos a :

$$\begin{aligned} df(S) &= (\mu S dt + \sigma S dZ) \frac{df(S)}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f(S)}{dS^2} dt \\ &= \left(\mu S \frac{df(S)}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f(S)}{dS^2} \right) dt + \sigma S \frac{df(S)}{dS} dZ \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si escribimos esta misma expresión para el caso general $f(S, t)$ y añadimos el correspondiente término de la variable tiempo, $(df/dt) dt$, nos queda :

$$df(S, t) = \left(\mu S \frac{\partial f(S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f(S, t)}{\partial S^2} + \frac{\partial f(S, t)}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial f(S, t)}{\partial S} dZ \quad (1.4)$$

El resultado anterior es una versión del Lema de Itô.

Ahora si lo aplicamos centrándonos en el caso particular $f(S) = \log(S)$, (tras sustituir en (1.3)) obtenemos la ecuación diferencial estocástica

$$df = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ,$$

donde por ser dZ un proceso de Wiener tiene una distribución normal. Por tanto,

$$f(S) \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0), \sigma^2 (t - t_0) \right),$$

cuya función de densidad es

$$\rho(f) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp \left(- \frac{((f - f_0) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0))^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right),$$

con $f_0 = f(S_{t_0})$. Sustituyendo $f(S) = \log(S)$ se obtiene que :

$$\tilde{\rho}(S) = \frac{1}{\sigma S \sqrt{2\pi t}} \exp \left(- \frac{(\log(\frac{S}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0))^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right). \quad (1.5)$$

Es decir, S sigue una distribución logaritmo-normal, y la fórmula (1.5) describe la probabilidad de transición de (S_0, t_0) a (S, t) .

Más aún, como $f(S) = \log(S)$ es un movimiento browniano con tasa de retorno $\mu - (\sigma^2/2)$ y coeficiente de variación σ^2 , podemos afirmar que $S = e^{\log(S)} = e^{f(S)}$ es un movimiento browniano geométrico.

En resumen, S sigue un movimiento browniano geométrico cuya ecuación, (1.1), solo depende del precio actual (propiedad de Markov). A continuación vamos a realizar un estudio de algunas características de las opciones.

Capítulo 2

Opciones Europeas

Para comenzar vamos a trabajar con opciones de tipo europeo. Puesto que el poseedor de la opción ejercerá o no su derecho en función de la ganancia final (que está fijada en el contrato y es, por lo tanto, un dato del problema), nos interesa conocer el valor de la opción en dos momentos importantes: en la fecha de vencimiento, y cuyo valor viene dado por la función payoff; y en el momento presente, instante en el que se toma la decisión de adquirir la opción.

Este último valor debe ser calculado a partir de los datos del problema y depende de la evolución futura, y por tanto desconocida, del activo subyacente.

2.1. Conceptos Básicos

En esta sección vamos a tener una primera toma de contacto con los valores de las opciones europeas; a partir de ahora, representaremos por c y p a las opciones europeas de compra y venta respectivamente.

Comenzaremos primero describiendo las funciones payoff.

En principio y puesto que las opciones no son una obligación, su valor no puede ser nunca negativo. Por tanto, si tuviéramos una opción de compra, en la fecha de vencimiento, (con $t = T$ y $S(T) = S_T$), existen dos alternativas:

Si $S_T > K$, la opción de compra se ejerce e inmediatamente el activo se vende al precio de mercado, obteniéndose un beneficio de $c = S_T - K$.

Si $S_T < K$, la opción de compra no se ejerce y se desecha, ya que el activo se puede conseguir a un mejor precio en el mercado. En este caso, la opción no tiene valor, es decir, $c = 0$.

Por tanto, siguiendo la estrategia más favorable, el valor de la opción de compra es :

$$c(S_T, T) = \text{máx}(S_T - K, 0) .$$

De la misma forma, si se tratase de una opción de venta europea, su valor sería

$$p(S_T, T) = \text{máx}(K - S_T, 0) ,$$

pues la opción únicamente se ejercería en el caso $S_T < K$, donde el activo se vende a cambio de una cantidad K , mayor que su precio de mercado S_T .

Las funciones anteriores se conocen con el nombre de payoff.

Supongamos ahora que nos preguntamos por el valor que tiene una opción en el momento de su adquisición. Aunque todavía no estamos en disposición de conocerlo, sí que podemos comparar dos opciones del mismo tipo que solo se diferencian en un parámetro.

Sean dos opciones de compra con distinto precio de ejercicio :

La correspondiente con el mayor precio de ejercicio es la que tiene menos probabilidades de ejercer la opción, por lo que tendrá menor valor.

Así, para $K_1 < K_2$, debe satisfacerse que

$$c(S, K_1) > c(S, K_2).$$

Puesto que el titular y el poseedor de la opción tienen posiciones opuestas, intercambiando los papeles también ha de cumplirse

$$p(S, K_1) < p(S, K_2).$$

Sin embargo, si es en el precio del activo en lo que difieren dos opciones de compra, se tienen mayores oportunidades de ejercer la opción en aquella cuyo

precio del activo es superior, pues tiene un mayor beneficio.
Por ello, para $S_1 < S_2$ se tiene :

$$c(S_1, K) < c(S_2, K)$$

e intercambiando los papeles :

$$p(S_1, K) > p(S_2, K).$$

A continuación vamos a establecer unos primeros límites para los valores de las opciones de compra y de venta, junto a una fórmula que las relaciona.

2.1.1. Acotación del valor de una opción

Cota Superior :

Las opciones de compra alcanzan su mayor valor cuando $K = 0$, es decir, cuando la opción se ejerce seguro, ya que en caso contrario el vendedor tendría una oportunidad de arbitraje.

Por otra parte :

$$c(S, K) \leq S.$$

Las opciones de venta alcanzan su mayor valor cuando $S = 0$, cumpliéndose siempre :

$$p(S, K) \leq K.$$

Cota inferior :

En este punto vamos a definir una nueva variable, $\tau = T - t$, que nos será de utilidad en adelante. Consideremos también $B(\tau) = e^{-r\tau}$, un bono con valor nominal 1 en la fecha de vencimiento. Aquí r representa la tasa de interés sin riesgo utilizada por el mercado y que suponemos constante a lo largo de la vida de la opción.

Para encontrar una cota inferior de una opción de compra europea, vamos a proceder considerando la existencia de dos carteras :

$$\begin{aligned} \text{Cartera } A &= c(S, K) + KB(\tau), & \text{y sea } V_A & \text{ su valor.} \\ \text{Cartera } B &= S, & \text{con valor } V_B. \end{aligned}$$

Tanto si $S_T < K$ (en cuyo caso $V_A = K$ y $V_B = S_T$) como si $S_T \geq K$, (donde $V_A = (S_T - K) + K = S_T$ y $V_B = S_T$) se cumple $V_A \geq V_B$, por lo que se deduce :

$$c(S, K) \geq \text{máx}(S - KB(\tau), 0) . \quad (2.1)$$

Razonando de la misma forma, también se puede establecer una cota inferior para la opción de venta :

$$p(S, K) \geq \text{máx}(KB(\tau) - S, 0) . \quad (2.2)$$

2.1.2. Relación de Paridad

Vamos a demostrar que la relación existente entre los valores de una opción de compra y de venta europeas sobre el mismo activo, y con la misma fecha de vencimiento y precio de ejercicio, es :

$$p = c + K - S \quad (2.3)$$

Para demostrarlo, consideremos de nuevo dos carteras de la forma :

$$\text{Cartera } \tilde{A} = c + K - S.$$

$$\text{Cartera } \tilde{B} = p.$$

y veamos sus valores en la fecha de vencimiento :

$$\text{Si } S_T > K \rightarrow V_B = 0 \quad \text{y} \quad V_A = S_T - K + K - S_T = 0 .$$

$$\text{Si } S_T < K \rightarrow V_B = K - S_T \quad \text{y} \quad V_A = K - S_T .$$

Por tanto, como $V_A = V_B$ en la fecha de vencimiento, y puesto que son opciones europeas y no pueden ejercerse por anticipado, ambas carteras tienen el mismo valor en todo momento y por tanto :

$$p = c + K - S.$$

ya que, en caso contrario, habría una oportunidad de arbitraje comprando una más barata y vendiendo la otra más cara.

Vamos a introducir ahora una parte fundamental para determinar el valor de una opción europea en el momento de su compra y que será la piedra angular a partir de la cual calcular el valor de opciones más complicadas en el momento de su adquisición.

2.2. Modelo de Black-Scholes

Establecemos un marco dentro del cual tendrá sentido el modelo :

1. No hay oportunidades de arbitraje
2. No hay costes de transacción y la tasa de interés es siempre r .
3. El precio del activo sigue un movimiento browniano geométrico.
4. La opción es europea.
5. r y σ son constantes y no se considera pago de dividendos.
6. Se pueden vender activos que no se posean (venta en corto) y en cualquier cantidad.

Bajo estas condiciones, introducimos la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, que será la que utilizemos para estimar el valor de las opciones :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.4)$$

2.2.1. Obtención de la ecuación de Black-Scholes

Usando el Lema de Itô (sustituyendo $f(S, t) = V(S, t)$ en (1.4)) se obtiene la expresión :

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ \quad (2.5)$$

Por un lado, contruimos una cartera Π que incluya una opción (cuyo valor sea V), y $-\Delta$ unidades del activo S , siendo Δ un número fijo a determinar :

$$\Pi = V - \Delta S.$$

Derivando la expresión anterior :

$$d\Pi = dV - \Delta dS.$$

A continuación, si en la última expresión sustituimos (2.5) junto con la expresión (1.1) para dS :

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS \\ &= \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt - \Delta (\mu S dt + \sigma S dZ) \\ &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dZ \end{aligned}$$

De la última expresión deducimos que $\sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right)$ es el término encargado de la aleatoriedad, que desaparece con la elección de $\Delta = \partial V / \partial S$.

Como ahora $d\Pi$ es únicamente determinista, hemos construido una cartera libre de riesgo :

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt.$$

Por otro lado, si se hace una inversión de una cantidad Π durante un intervalo de tiempo dt , por ejemplo un depósito bancario, debe ganarse $r\Pi dt$, por lo que también ha de verificarse $d\Pi = r\Pi dt$, pues de otro modo se obtendría un beneficio sin riesgo, pero esto va en contra de la política de no arbitraje.

Igualando las dos expresiones de $d\Pi$, se llega a la ecuación :

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt,$$

en la cual sustituyendo la expresión $\Pi = V - \Delta S$ y tomando $\Delta = \partial V / \partial S$, se consigue la ecuación de Black-Scholes a la que se hace referencia en (2.4).

Ahora buscamos ser capaces de resolver la ecuación para encontrar una expresión para el valor de la opción, teniendo en cuenta que este valor ha de ser único para evitar oportunidades de arbitraje. A esto le dedicaremos la siguiente sección.

2.2.2. Solución de la Ecuación de Black-Scholes

Recordemos que la ecuación de Black-Scholes para una opción de compra europea tiene la forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 \quad (2.6)$$

con condiciones final

$$c(S, T) = \text{máx}(S - K, 0).$$

y frontera

$$c(0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

Nuestra intención es resolver la ecuación del mismo modo que la ecuación de difusión del calor (cuya solución es conocida), por lo que la transformaremos deshaciéndonos de los términos S y S^2 y rebajando la dimensión de la ecuación. Para conseguirlo, a lo largo de esta sección vamos a seguir el desarrollo del libro de Wilmott, [2].

Comenzamos con el primer cambio de variable :

$$S = Ke^x \quad ; \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad ; \quad c(S, t) = K\omega(x, \tau) \quad ; \quad E = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \quad (2.7)$$

Si desarrollamos $\frac{dc}{dt}$, $\frac{dc}{dS}$ y $\frac{d^2c}{dS^2}$ y sustituimos en (2.6), se llega a la ecuación:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + (E - 1) \frac{\partial \omega}{\partial x} - E\omega \quad (2.8)$$

y cuya condición inicial, en $\tau = 0$, debe cumplir (antes final en $t = T$) :

$$\omega(x, 0) = \frac{1}{K}c(S, T) = \frac{1}{K} \text{máx}(S - K, 0) = \text{máx}(e^x - 1, 0).$$

En este paso nos damos cuenta de que aunque el problema original consta de 4 parámetros (K, T, σ^2 y r), hemos conseguido reducirlo a uno solo, E , que es una constante.

Para acercarnos más a la forma de la ecuación del calor, realizamos el cambio:

$$\omega(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

con α y β constantes a determinar.

Sustituyendo en (2.8) las expresiones de $\frac{d\omega}{d\tau}$, $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, se llega a la igualdad :

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (E - 1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - Eu.$$

Aquí podemos eliminar el término u de la expresión anterior eligiendo β de la forma $\beta = \alpha^2 + (E - 1)\alpha - E$, resultando :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (E - 1) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nuevamente puede prescindirse del término $\partial u / \partial x$ al imponer la condición $2\alpha + (E - 1) = 0$, consiguiendo la mencionada ecuación de difusión :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Resolviendo el sistema para α y β obtenemos los valores :

$$\alpha = -\frac{1}{2}(E - 1) \quad ; \quad \beta = -\frac{1}{4}(E + 1)^2$$

y sustituyendo en el valor de ω se tiene :

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(E-1)x + \frac{1}{4}(E+1)^2\tau} \omega(x, \tau)$$

y donde u verifica el problema de difusión, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

para $-\infty < x < \infty$ y $\tau > 0$, con condición inicial $u_0(x)$:

$$u_0(x) = u(x, 0) = e^{\frac{1}{2}(E-1)x} \omega(x, 0) = \text{máx} \left(e^{\frac{1}{2}(E+1)x} - e^{\frac{1}{2}(E-1)x}, 0 \right) \quad (2.9)$$

La solución $u(x, \tau)$ al problema anterior es bien conocida :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds.$$

Finalmente, y si aplicamos el cambio de variable $y = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}$ a la solución de la ecuación de difusión, se llega a :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(E+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(E-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Simplificando las expresiones I_1 e I_2 , damos la siguiente expresión de $u(x, \tau)$:

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(E+1)x + \frac{1}{2}(E+1)^2\tau} N(\bar{d}_1) - e^{\frac{1}{2}(E-1)x + \frac{1}{4}(E-1)^2\tau} N(\bar{d}_2),$$

con los valores :

$$\bar{d}_1 = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(E+1)\sqrt{2\tau} \quad ; \quad \bar{d}_2 = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(E-1)\sqrt{2\tau}$$

y donde $N(x)$ se corresponde con la función de distribución de una normal,

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Llegados a este punto, solo falta deshacer los cambios de variable :

$$\begin{aligned} \omega(x, \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(E-1)x - \frac{1}{4}(e+1)^2\tau} u(x, \tau) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(E-1)x + \frac{1}{2}(E+1)x} N(\bar{d}_1) - e^{\frac{1}{4}(E-1)^2\tau - \frac{1}{4}(E+1)^2\tau} N(\bar{d}_2) \quad (2.11) \\ &= e^x N(\bar{d}_1) - e^{-E\tau} N(\bar{d}_2). \end{aligned}$$

Y finalmente deshaciendo las transformaciones indicadas en (2.7), obtenemos el valor de una opción de compra europea :

$$c(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

donde se definen d_1 y d_2 de la forma siguiente :

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad y \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Para el caso de la opción de venta europea, de manera sencilla podemos despejar su valor en la relación (2.3) y calcularlo a partir del valor de la opción de compra. Veamos como hacerlo :

Conocido c y sabiendo la relación $N(x) + N(-x) = 1$, su valor será :

$$\begin{aligned} p &= c + ke^{-r(T-t)} - S \\ &= -S(1 - N(d_1)) + e^{-r(T-t)}K(1 - N(d_2)) \quad (2.12) \\ &= -SN(d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \end{aligned}$$

En resumen, el modelo de Black-Scholes, bajo las condiciones ya explicadas, nos ha permitido valorar una opción de compra o de venta europea.

Capítulo 3

Opciones Americanas

Una opción de venta americana concede el derecho adicional de ejercer dicha opción antes de la fecha de vencimiento, privilegio que le aporta un mayor valor que su homóloga europea.

Una vez presentadas, vamos a exponer en la siguiente sección una serie de semejanzas y diferencias entre ambos tipos de opciones.

3.1. Comparación con las Opciones Europeas

Si denotamos por C y P a las correspondientes opciones de compra y venta americanas, la ventaja de ejercer por anticipado se traduce en que las opciones americanas tiene un valor superior que las europeas. Esto es:

$$C(S, K) \geq c(S, K) \quad y \quad P(S, K) \geq p(S, K).$$

De la misma forma que sucedía con las opciones europeas, la que tiene el precio de ejercicio mayor tiene menos posibilidades de ejercer la opción, así que para $K_1 < K_2$ se verifica :

$$C(S, K_1) > C(S, K_2) \quad y \quad P(S, K_1) < P(S, K_2).$$

Además, si consideramos dos opciones americanas con distintas fechas de vencimiento, $\tau_1 < \tau_2$, aquella con mayor período de vida tiene una ventaja sobre la otra para ejercer la opción, lo que se traduce en un mayor valor :

$$C(S, K; \tau_1) < C(S, K; \tau_2) \quad y \quad P(S, K; \tau_1) < P(S, K; \tau_2).$$

Ahora vamos a comprobar un resultado interesante, que dice que en ausencia de pago de dividendos y compartiendo el valor de los parámetros, una opción de compra americana y una opción de compra europea tienen el mismo valor :

Supongamos que tenemos dos opciones de compra, una europea y otra americana, con los mismos parámetros (comparten, entre otros, el valor de K).

Por una parte, en la fecha de vencimiento su valor es el mismo, su payoff:

$$C(S_T, K) = c(S_T, K) = \max(S - K, 0)$$

Sin embargo, en el caso de la opción americana, la ganancia al ejercerse antes de tiempo es la misma cantidad, $\max(S - K, 0)$.

Por otra parte y por definición, $B(\tau)$ es un bono de valor 1 en la fecha de vencimiento, por lo que durante la vida de la opción ha de verificar $B(\tau) < 1$, para $\tau > 0$. Por tanto, recordando la expresión (2.1), se cumplirá entonces:

$$C(S, K; \tau) \geq \max(S - KB(\tau), 0) \geq \max(S - K, 0) \geq c_\tau(S, K; \tau)$$

La desigualdad anterior sugiere que, bajo las condiciones expuestas y a lo largo de la vida de la opción, la de tipo americano tendrá mayor valor si se mantiene que si se ejecuta, por lo que la solución óptima será siempre esperar al vencimiento, comportándose como una de tipo europeo y demostrando el resultado anunciado.

(Por esta razón y cuando no se considere el pago de dividendos, será más ilustrativo obtener los resultados para una opción de venta americana).

En la siguiente sección comprobaremos como el resultado anterior no es correcto si se considera el pago de dividendos a lo largo de la vida de la opción.

3.1.1. Considerando el pago de dividendos

En este caso, y para cumplir con la política de no arbitraje, el precio del activo caerá en la misma cantidad que se ha generado como dividendos. Vamos a demostrar que en esta situación sí que puede ser mejor ejercer la opción de compra de forma anticipada :

Si denotamos por D a la cantidad total de dividendos que ha de pagar el activo hasta la fecha de vencimiento, y siguiendo un razonamiento similar al de anteriores ocasiones, consideramos ahora las siguientes carteras :

$$\text{Cartera } A = C(S, K; D) + KB(\tau).$$

$$\text{Cartera } B = S - D.$$

con valores V_A y V_B respectivamente y donde consideraremos D un préstamo de dinero que será devuelto con los dividendos que genera el activo que se posee, por lo que se verifica siempre $V_B = S_T$.

De la última desigualdad de la sección anterior se deduce que $V_A \geq V_B$. Por tanto, se tiene una nueva cota inferior para la opción de compra americana con dividendos :

$$C(S, K; D) \geq \max(S - KB(\tau) - D, 0)$$

de forma que para ejercer la opción es necesario (aunque no suficiente) que se cumpla $S - K > S - KB(\tau) - D$, pues el beneficio de ejercerla debe ser positivo.

En el caso de la opción de venta y siguiendo el mismo razonamiento, se verifica:

$$P(S, K; D) \geq \max(KB(\tau) + D - S, 0),$$

donde únicamente podremos asegurar que, si no se cumple la condición $D \leq K(1 - B(\tau))$, la opción de venta americana nunca se ejercerá.

La siguiente sección la dedicaremos a conocer algo más acerca de qué influye en la decisión de ejercer la opción americana.

3.2. Curva de Ejercicio Óptimo

Valorar una opción de compra americana se vuelve más complicado que lo expuesto hasta ahora, ya que no solo hay que calcular el valor de la opción, sino que también en cada instante de tiempo hay que elegir entre mantener la opción o ejecutarla.

Este problema de toma de decisiones se conoce como el problema de libre frontera, pues a lo largo del tiempo existe una frontera definida por valores de S , que separa en dos regiones la decisión de mantener la opción o ejercerla.

Para acercarnos a este concepto, primero vamos a comenzar con el ejemplo de una opción europea en un activo que paga dividendos a una tasa constante q :

Como hemos visto en la sección 2.2.2, y haciendo unas ligeras modificaciones a la ecuación de Black-Scholes para añadir el pago de dividendos, el valor de una opción de compra europea de este tipo viene dado por la ecuación :

$$c = Se^{-q\tau} N(\hat{d}_1) - Xe^{-r\tau} N(\hat{d}_2)$$

$$\text{siendo} \quad \hat{d}_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad y \quad \hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Ahora si suponemos que el valor de S es muy alto, ($S \rightarrow \infty$ con $S \gg K$), entonces se puede comprobar que $N(\hat{d}_1)$ y $N(\hat{d}_2)$ son aproximadamente 1, por lo que podemos hacer útil la siguiente aproximación :

$$c(S, \tau) \sim Se^{-q\tau} - Ke^{-r\tau}.$$

A diferencia de una opción de compra europea sin pago de dividendos, en la que su valor nunca está por debajo de su payoff, $\text{máx}(S - K, 0)$, en este caso el precio de la opción de compra europea con pago de dividendos sí que puede estar por debajo, ya que para valores grandes de S , con $S \gg K$, y a consecuencia del factor $e^{-q\tau}$ puede ocurrir :

$$S - K > Se^{-q\tau} - Ke^{-r\tau}.$$

En esta situación, si se espera que el valor de S siga aumentando y el poseedor de la opción tuviese la oportunidad, elegiría ejercerla antes de la fecha de vencimiento; y precisamente este es el privilegio del que goza el poseedor de la opción de compra americana.

Por tanto, ha de existir un valor para el que, cuando el precio del activo lo supere, se tome la decisión de ejecutar la opción. Este valor será $S_\tau^* = S^*(\tau)$, que definiremos como el valor crítico o precio de ejercicio óptimo, a fecha τ .

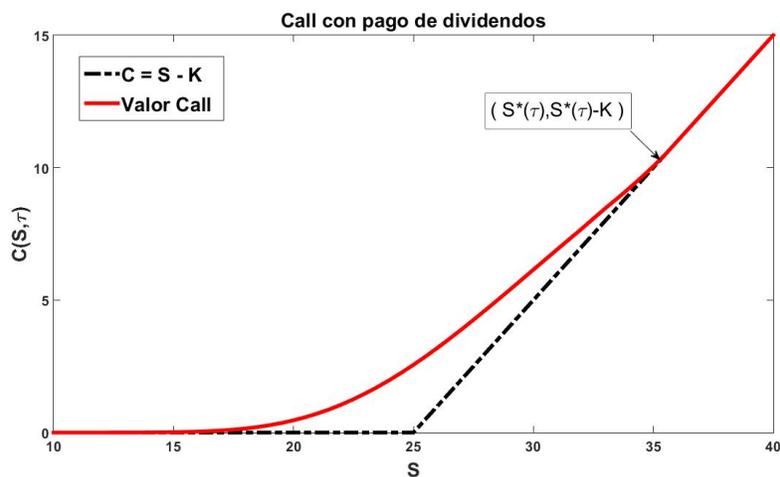


Figura 3.1: La curva representa una opción americana con pago de dividendos que toca tangencialmente a la función payoff en el valor crítico S_τ^* .

El precio de ejercicio nos permitirá decidir cuándo la opción de compra americana se ejercerá ; es decir, en el caso $S_\tau \geq S^*(\tau)$, se ejerce y pasa a tener el mismo valor que la función payoff, $(S_\tau - K)$.

Si para cada instante de tiempo τ calculamos el valor S_τ^* , entonces podemos formar una curva, $\{(S_\tau^*, \tau) \forall \tau \in (0, T]\}$, que denominaremos la curva de ejercicio óptimo, que nos será de gran utilidad para saber si la opción ha de ejecutarse.

La opción de compra americana en un activo que paga dividendos continuos se mantiene activa en el dominio $\{(S_\tau, \tau) / S_\tau \in [0, S_\tau^*], \tau \in (0, T]\}$, que coincide con la región sombreada en la figura 3.2.

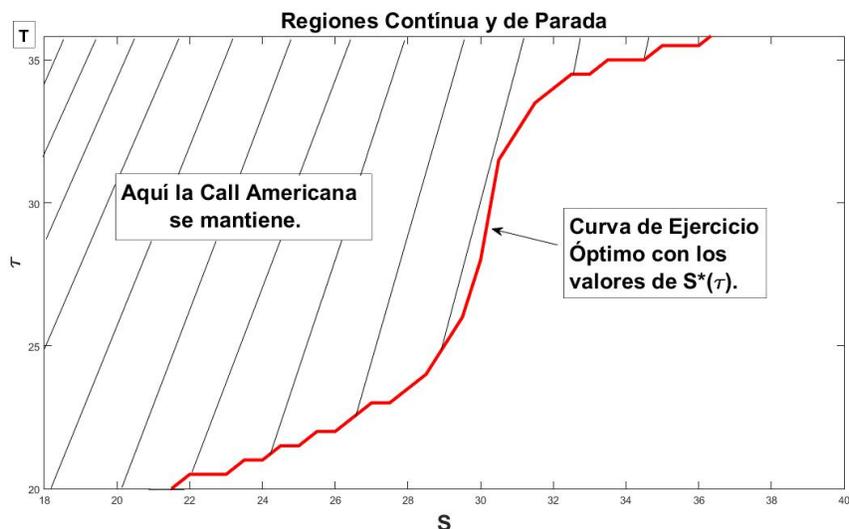


Figura 3.2: Curva de ejercicio óptimo de una Call Americana con pago de dividendos y que divide el plano en dos regiones: continua y de parada.

En el caso de una opción de venta americana, será ejercida si $S_\tau < S_\tau^*$ o mantenida en caso contrario.

En resumen, tanto para una opción de venta como de compra americana, la curva de ejercicio óptimo determina el momento en el cual ha de ejercerse. En las siguientes secciones vamos a dar algunas de sus características.

3.2.1. Propiedades

La primera propiedad que presentamos se llama la condición de alto contacto, y dice que la pendiente de la opción en el punto $S_\tau = S_\tau^*$ es -1 . En primer lugar, sabemos que el valor de la opción $P(S_\tau, \tau)$ en S_τ^* coincide con su payoff = $\max(K - S_\tau, 0)$, y que la pendiente del payoff es -1 .

Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $\partial P / \partial S_\tau < -1$: Entonces para valores de $S_\tau > S_\tau^*$, se tiene que el valor de $P(S_\tau, \tau)$ es inferior que la función payoff, por lo que se llega a contradicción, ya que no se cumpliría la restricción $P(S_\tau, \tau) \geq \max(K - S_\tau, 0)$.

Razonando de la misma forma, supongamos que se verifica $\partial P/\partial S_\tau > -1$: Puesto que la opción verifica $P(S_\tau^*, \tau) = K - S_\tau^*$, el valor de $P(S_\tau, \tau)$ depende de la elección de S_τ^* para valores mayores de S .

Como $\partial P/\partial S_\tau > -1$ en el punto S_τ^* , el valor de la opción cerca de S_τ^* puede incrementarse tomando un valor más pequeño de S_τ^* , con lo que la curva de payoff se mueve hacia arriba y $\partial P/\partial S_\tau$ decrece, por lo que se devalúa el valor de la opción y llegamos de nuevo a una contradicción.

Así, la condición de alto contacto de $P(S_\tau, \tau)$ es :
$$\left. \frac{\partial P}{\partial S_\tau} \right|_{S_\tau=S_\tau^*} = -1.$$

Esta condición también se denomina de libre frontera.

Y siguiendo un razonamiento similar para una opción de compra :

La condición de alto contacto de $C(S_\tau, \tau)$ es :
$$\left. \frac{\partial C}{\partial S_\tau} \right|_{S_\tau=S_\tau^*} = 1.$$

La segunda propiedad que vamos a ver se refiere al carácter creciente de la curva de ejercicio óptimo.

Partimos sabiendo que $C(S_\tau, \tau)$ es creciente en función de τ .

Supongamos ahora que tenemos dos opciones, $C(S_\tau, \tau_1) < C(S_\tau, \tau_2)$, con el mismo payoff (solo difieren en τ , con $\tau_1 < \tau_2$), y fijémonos en la curva que representa a $C(S_\tau, \tau_2)$:

En primer lugar, estará por encima de la otra, por tener un mayor valor.

Además, esta curva se cortará en algún momento con la función payoff, resultando el punto de corte $S_{2\tau}^*$; es evidente que este punto tendrá mayor altura que el punto de corte de $C(S_\tau, \tau_1)$ con el payoff, sea $S_{1\tau}^*$.

De lo anterior podemos deducir que la curva que recoge los distintos valores S_τ^* , para cada τ , es una función creciente en función de τ .

Finalmente, observamos que siempre ha de verificarse $S_\tau^* > K$, ya que por reducción al absurdo, si fuese $S_\tau^* \leq K$, entonces la ganancia obtenida por ejercer por anticipado sería $S_\tau^* - K < 0$, lo que es absurdo.

3.3. Relación de Simetría Put - Call

Entre las opciones europeas, la relación de paridad (sección 2.1.2) hace que el problema de valorar los dos tipos de opciones se simplifique a solo uno de ellos. Sin embargo, esta relación no es extensible a las opciones americanas.

Aún así, si hubiesemos llevado a cabo el trabajo de calcular la curva de ejercicio óptimo para una opción de compra americana y ahora nos propusiésemos realizar lo mismo para la opción de venta, podemos ahorrarnos la tarea utilizando la relación de simetría *Put - Call*.

Veamos cómo se deriva su expresión :

Por un lado, consideremos una opción de compra americana que concede el derecho a cambiar K euros en efectivo por una unidad del activo valorada en S euros, siendo q y r (constantes) la rentabilidad fruto del pago de dividendos del activo y del dinero en efectivo respectivamente.

Por otro lado, consideremos una opción de venta americana que da derecho a intercambiar una unidad del activo valorada en S euros por K euros en efectivo.

En ambos casos, nos fijamos en que el papel que juegan el dinero en efectivo y el activo pueden intercambiarse, por lo que dicha simetría asegura que han de tener el mismo valor. Por ello, deducimos la siguiente relación, en la que se intercambian los papeles de S y X , r y q :

$$C(S, K; r, q) = P(K, S; q, r), \quad (3.1)$$

Ahora nos gustaría encontrar una fórmula que establezca una relación entre las curvas de ejercicio óptimo de una opción de compra y de venta americanas.

Si $S_\tau = S_c^*(\tau)$, entonces el poseedor de la opción de compra intercambia un euro en efectivo por $S_c^*(\tau)/K$ euros en activos.

Si $S_\tau = S_p^*(\tau)$, entonces el poseedor de la opción de venta intercambia un euro en activos por $K/S_p^*(\tau)$ euros en efectivo.

Puesto que también puede intercambiarse el papel del euro en *efectivo* y en *activos*, presentamos una relación de simetría entre la opción de compra y venta para la curva de ejercicio óptimo :

$$S_c^*(\tau; r, q) = \frac{K^2}{S_p^*(\tau; q, r)}. \quad (3.2)$$

3.4. Problema de Frontera Libre

En las secciones anteriores hemos visto que el problema del cálculo del valor de la opción americana, sin entrar en materia, involucra la existencia de dos regiones, (región continua y de parada, correspondientes a la decisión de mantener la opción o ejecutarla respectivamente), separadas por una frontera (la curva de ejercicio óptimo) que de primeras desconocemos.

En esta sección trataremos de describir el problema de una forma adecuada.

Primero establecemos un conjunto de restricciones que han de respetarse:

- 1^a. El valor de la opción ha de ser mayor o igual que la función payoff.
- 2^a. La ecuación de Black-Scholes se reemplaza por una desigualdad.
- 3^a. El valor de la opción debe ser una función continua (de S).
- 4^a. Además, su pendiente debe ser continua.

La primera restricción hace referencia a la ausencia de oportunidades de arbitraje. Por tanto, si el valor de la opción es el mismo que la función payoff, la opción se ejerce; y sino, el valor de la opción es mayor y satisface la ecuación de Black-Scholes. Ambas situaciones dan sentido a la segunda restricción.

La tercera restricción responde de nuevo a la ausencia de arbitrajes. Hay que exigir que el valor de la opción sea continuo para evitar discontinuidades que prolongadas en el tiempo permitan oportunidades de arbitraje.

Por último, para determinar el valor de la opción hay que imponer una condición adicional a S^* , pues su posición es desconocida. Esta se completa con la cuarta restricción.

Centrémonos ahora en la segunda restricción que hace referencia a la ecuación de Black-Scholes y con la intención de definir el problema que nos ocupa, razonaremos como hemos hecho a lo largo de este trabajo:

Establecemos una cartera Π que se compone de una opción de venta junto con $-\Delta$ unidades del activo, escogiendo Δ adecuadamente ($\Delta = \partial P / \partial S$) para llegar a la ecuación de Black-Scholes, tal y como vimos en la sección 2.2.1.

Junto con la condición siguiente que evita oportunidades de arbitraje,

$$P \geq K - S \quad (3.3)$$

la única condición adicional necesaria es que la cartera no puede generar más ingresos que un depósito bancario, (también visto en la sección 2.2.1).

Así, para la opción de venta americana se tiene la siguiente desigualdad :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0. \quad (3.4)$$

Cuando la situación óptima es mantener la opción, se cumple la igualdad en (3.4) y por consiguiente la desigualdad en (3.3).

Mientras que por el contrario, si la situación óptima es ejercer la opción, entonces en (3.4) se satisface la desigualdad y donde se cumple la igualdad es en (3.3), siendo el valor de la opción su payoff.

Como anunciamos, el problema de calcular el valor de una opción de venta americana se trata de un problema de libre frontera.

Por tanto, para cada instante de tiempo t , la representación del eje S se divide en dos regiones distintas :

La primera, $0 \leq S \leq S_t^*$, se corresponde con la decisión de ejercer la opción y se caracteriza por :

$$\begin{cases} P = K - S \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

En la segunda región, $S_t^* < S < \infty$, se mantiene la opción, por lo que se cumple :

$$\begin{cases} P > K - S \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Además, las condiciones frontera en $S_t = S_t^*$ son las de ocasiones anteriores:

$$\begin{cases} P(S_t^*, t) = \max(K - S_t^*, 0) \\ \frac{\partial P}{\partial S}(S_t^*, t) = -1 \end{cases}$$

Resumiendo lo anterior, llegamos a la conclusión de que hay dos restricciones que se han de verificar para todo valor positivo de S :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0. \quad (3.7)$$

$$P \geq K - S \quad (3.8)$$

Si combinamos las ecuaciones (3.5) y (3.6), junto con (3.7) y (3.8), obtenemos la siguiente :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \right] [P - (K - S)] = 0 \quad , \quad \text{para } S > 0.$$

Esta última ecuación ya nos da una idea de la posibilidad de plantear el problema de libre frontera como uno de complementariedad lineal.

3.5. Problema de Complementariedad Lineal

Puesto que necesitamos una vía útil para resolver el problema, tenemos que encontrar una alternativa a lo visto hasta ahora y que nos permita acercarnos a una solución.

Una alternativa será formular el problema de libre frontera (del que no podemos obtener una solución explícita útil) como uno de complementariedad lineal, que nos permita construir métodos numéricos eficientes para acercarnos lo suficiente a la solución.

Nuestro punto de partida se sitúa en la dificultad de tratar con una frontera libre. Por ello, buscamos abordar el problema desde un punto de vista en el que se elimine cualquier dependencia explícita de la libre frontera, de forma que “no moleste” para calcular la solución, pero se pueda recuperar a partir de esta última.

Con este objetivo, nos apoyamos en el conocido problema del obstáculo y en la fórmula de Black-Scholes, con el fin de aplicarlo al caso de una opción de venta americana y finalmente demostrando que se puede reducir a un problema de complementariedad lineal. Veámoslo :

Recordando las transformaciones vistas en (2.7), el problema de la opción de venta americana en las variables (S_t, t) se transforma a las variables (x_τ, τ) :

Así, el valor $S_t = S_t^*$ será ahora en las nuevas variables $x_\tau = x_\tau^*$, (que cumplirá $x_\tau^* < 0$ cuando $S_\tau^* < K$), y también la función payoff $g(S, t) = \max(K - S_\tau, 0)$ pasa a ser la siguiente función $g(x_\tau, \tau)$:

$$g(x_\tau, \tau) = e^{\frac{1}{2}(E+1)^2\tau} \max\left(e^{\frac{1}{2}(E-1)x_\tau} - e^{\frac{1}{2}(E+1)x_\tau}, 0\right) \quad (3.9)$$

Así el problema es resolver $u(x_\tau, \tau)$ que cumpla :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\tau^2} & \text{si } x_\tau > x_\tau^* \\ u(x_\tau, \tau) = g(x_\tau, \tau) & \text{si } x_\tau \leq x_\tau^* \end{cases} \quad (3.10)$$

con la condición inicial :

$$u(x_\tau, 0) = g(x_\tau, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(E-1)x_\tau} - e^{\frac{1}{2}(E+1)x_\tau}, 0\right) \quad (3.11)$$

y verificando :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x_\tau, \tau) = 0 \quad (3.12)$$

Hasta aquí hemos impuesto las condiciones de la ecuación (2.6) de la sección 2.2.2. Además, el problema se completa con las restricciones con las que se comenzaba la sección anterior (3.4) :

$$u(x_\tau, \tau) \geq g(x_\tau, \tau) \quad (3.13)$$

y la continuidad de u y $\frac{\partial u}{\partial x_\tau}$ en el punto $x_\tau = x_\tau^*$.

Como nuestra intención es resolver el problema mediante algún algoritmo numérico, hay que discretizar el intervalo, con la intención de generar una rejilla de valores para restringir el problema a un intervalo finito.

Para ello elegimos dos positivos suficientemente grandes, sean x_+ y x_- .

Por tanto, consideraremos el problema (3.10) a (3.13) restringido al intervalo $x_- < x < x_+$, e impondremos las condiciones siguientes :

$$u(x_+, \tau) = 0 \quad y \quad u(x_-, \tau) = g(x_-, \tau) \quad (3.14)$$

que se corresponden con el valor $P = 0$ para valores grandes de S y $P = K - S$ para valores pequeños.

Ahora, para plantear la opción de venta americana como un problema de complementariedad lineal, nos apoyamos en el conocido problema del obstáculo, con la única diferencia de la presencia de $g(x_\tau, \tau)$.

Así, el sistema (3.10) a (3.13) se reformula de la siguiente forma :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x_\tau, \tau) - g(x_\tau, \tau)) = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \geq 0 \\ u(x_\tau, \tau) - g(x_\tau, \tau) \geq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

junto con las condiciones inicial (3.11) y frontera (3.14), y sin olvidar imponer la continuidad de las funciones $u(x_\tau, \tau)$ y $\frac{\partial u}{\partial x_\tau}(x_\tau, \tau)$.

De nuevo, la ventaja de este planteamiento es la ausencia explícita de la libre frontera, (curva de ejercicio óptimo), y como ya hemos avanzado, a partir de ahora podremos introducir métodos numéricos que nos permitan obtener una buena aproximación a la solución del sistema anterior. Entre ellos, introduciremos los métodos de diferencias finitas.

Además, con cierta frecuencia también se utiliza el método de Montecarlo, que tan solo enunciamos.

Una ventaja de este método es que su coste computacional aumenta linealmente con el número de variables correspondientes a los activos, por lo que está indicado para ser competitivo con modelos de opciones sobre un gran número de activos. En su contra, necesita un gran número de simulaciones para alcanzar la precisión deseada.

En los siguientes capítulos, y puesto que ya disponemos de herramientas suficientes, avanzaremos al concepto de opciones barrera, que es el objetivo final de este trabajo.

Capítulo 4

Métodos de Diferencias Finitas

En el capítulo 3 llegamos a la conclusión de que, tratándose de opciones americanas, el camino a seguir es encontrar soluciones numéricas a la ecuación de difusión y que, tras un cambio de variables, serán soluciones de la ecuación de Black-Scholes.

En este capítulo nos disponemos a desarrollar algunos métodos de diferencias finitas, que nos permitirán calcular de manera numérica las soluciones de las ecuaciones diferenciales propuestas.

4.0.1. Aproximaciones con diferencias finitas

La clave de estos métodos se basa en reducir el plano (x, τ) a un conjunto de puntos equidistantes, obtenidos de dividir en intervalos δx y $\delta \tau$ los ejes correspondientes, creando una malla cuyos nodos son de la forma $u_n^m = u(n\delta x, m\delta \tau)$, y que serán nuestros puntos de interés.

Tras el cambio de variable efectuado en (2.7), la idea es sustituir las derivadas parciales en las ecuaciones por aproximaciones en diferencias finitas, obtenidas a partir del desarrollo en serie de Taylor de funciones evaluadas en los nodos u_n^m de la malla. En este apartado vamos a ver las aproximaciones más frecuentes para sustituir las derivadas parciales en la ecuación de difusión.

Veamos las que se suelen utilizar para las derivadas respecto del tiempo.

Partimos expresando la derivada como un límite :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{u(x, \tau + \delta\tau) - u(x, \tau)}{\delta\tau},$$

A partir de esta expresión, si en lugar de tomar el límite $\delta\tau \rightarrow 0$ tomamos $\delta\tau$ pequeño y siempre que u sea dos veces derivable, se consigue la aproximación

$$\frac{\delta u}{\delta \tau}(x, \tau) \approx \frac{u(x, \tau + \delta\tau) - u(x, \tau)}{\delta\tau} + \mathcal{O}(\delta\tau) \quad (4.1)$$

Esta aproximación por diferencias finitas se denomina *progresiva* puesto que la diferencia se toma hacia delante.

Evidentemente, al tratarse de una aproximación, admitimos la existencia de un error en ella; en este caso, el encargado de representarlo es el término $\mathcal{O}(\delta\tau)$, que nos indica que el error es proporcional a la cantidad $\delta\tau$.

Siguiendo el razonamiento, otras diferencias finitas son la tipo *regresiva* :

$$\frac{\delta u}{\delta \tau}(x, \tau) \approx \frac{u(x, \tau) - u(x, \tau - \delta\tau)}{\delta\tau} + \mathcal{O}(\delta\tau) \quad (4.2)$$

De la misma forma, se obtienen aproximaciones a las derivadas parciales, primera y segunda, respecto del espacio :

Por ejemplo, la diferencia central, que aproxima la derivada parcial primera, es una aproximación de segundo orden :

$$\frac{\delta u}{\delta x}(x, \tau) \approx \frac{u(x + \delta x, \tau) - u(x - \delta x, \tau)}{2\delta x} + \mathcal{O}((\delta x)^2) \quad (4.3)$$

Para la derivada parcial segunda se utiliza la aproximación simétrica por diferencias centrales :

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, \tau) \approx \frac{u(x + \delta x, \tau) - 2u(x, \tau) + u(x - \delta x, \tau)}{(\delta x)^2} + \mathcal{O}((\delta x)^2) \quad (4.4)$$

que es resultado de combinar una *progresiva* sobre una aproximación del tipo *regresiva* o viceversa, y que se trata también de una aproximación de segundo orden; en ellas, el término $\mathcal{O}((\delta x)^2)$ sugiere que cada vez que se produzca una mejora en la precisión hasta δx , el error cometido se reducirá a $(\delta x)^2$, por lo que generalmente la exactitud lograda será mayor que con las de tipo *progresiva* o *regresiva*.

En este punto, ya estamos en disposición de desarrollar, en las siguientes secciones, los diferentes métodos de diferencias finitas más utilizados.

Antes de empezar, recordemos el sistema al que se aplicarán :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condiciones iniciales y frontera :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ u(x, \tau) &\sim u_{-\infty}(x, \tau) && \text{si } x \rightarrow -\infty \\ u(x, \tau) &\sim u_{\infty}(x, \tau) && \text{si } x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $u_{-\infty}$ y u_{∞} son funciones conocidas.

4.1. Método Explícito

Se conocen como métodos explícitos aquellos en los que se utiliza la aproximación *progresiva*, (4.1), para aproximar $\partial u / \partial \tau$.

Como también es necesario aproximar $\partial^2 u / \partial x^2$, para esta aproximación se utiliza la diferencia central simétrica, (4.4).

Aplicando lo anterior, la ecuación de (4.5) pasa a ser la siguiente expresión:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta \tau} + \mathcal{O}(\delta \tau) = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\delta x)^2} + \mathcal{O}((\delta x)^2). \quad (4.6)$$

Despreciándose los términos $\mathcal{O}(\delta \tau)$ y $\mathcal{O}((\delta x)^2)$ y reorganizando, nos queda una ecuación en diferencias de la forma :

$$u_n^{m+1} = \alpha u_{n+1}^m + (1 - 2\alpha)u_n^m + \alpha u_{n-1}^m \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\delta \tau}{(\delta x)^2} \quad (4.7)$$

Este método se denomina explícito porque a partir de conocer los términos u_n^m para todo valor de n , es posible calcular los u_n^{m+1} .

La ecuación (4.7) también puede entenderse como un camino aleatorio sobre la malla, donde α (suponiendo $\alpha \leq 1/2$) denota la probabilidad de moverse a derecha o izquierda y $1 - 2\alpha$ la probabilidad de mantenerse en el mismo nivel. (Notemos que la condición $\alpha \leq 1/2$ es necesaria para la estabilidad de la recurrencia (4.7)).

Para resolverla, debemos restringir el intervalo $-\infty < x < \infty$ a uno finito aunque lo suficientemente grande, $N^-\delta x \leq x \leq N^+\delta x$, con N^+ y $-N^-$ positivos grandes y siendo δx un pequeño intervalo en el espacio, cuya longitud dependerá de la precisión escogida.

Determinada δx , el tamaño de los intervalos de tiempo se elegirán de la forma $\delta\tau = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{M}$, siendo M el número de intervalos que se quiera establecer.

Por tanto, hay que resolver la ecuación en diferencias (4.7) para $N^- < n < N^+$ y $0 < m \leq M$, con condiciones inicial y frontera :

$$\begin{aligned} u_n^0 &= u_0(n\delta x) && \text{para } N^- \leq n \leq N^+. \\ u_{N^-}^m &= u_{-\infty}(N^-\delta x, m\delta\tau) && \text{para } 0 < m \leq M. \\ u_{N^+}^m &= u_{\infty}(N^+\delta x, m\delta\tau) && \text{para } 0 < m \leq M. \end{aligned}$$

Como ya hemos dicho anteriormente, el método explícito tiene un problema de estabilidad; dado que al aproximar se introducen errores de redondeo, un sistema se dice que es inestable si en cada iteración el error se hace más grande, provocando que no sea aplicable en la práctica. (Puede comprobarse que esto es lo que ocurre para los valores de $\alpha > \frac{1}{2}$).

Dicho esto, la estabilidad del método solo se consigue para $0 < \frac{\delta\tau}{(\delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$.

Ahora, atendiendo al orden de las aproximaciones, si el número de puntos de la malla se duplica con la intención de mejorar la precisión, entonces deberemos dividir entre 4 el intervalo de tiempo, ocasionando que el proceso de encontrar la solución se vuelve 8 veces más lento.

Resumiendo, el método solo tiene validez, convergiendo a la solución exacta, cuando el método es estable y verificando $\delta x \rightarrow 0$ y $\delta\tau \rightarrow 0$.

4.2. Método Implícito

Se conocen como métodos implícitos aquellos en los que se utiliza la aproximación *regresiva*, (4.2), para aproximar $\partial u/\partial \tau$.

Por su parte, se utiliza la aproximación central simétrica, (4.4), para aproximar la expresión $\partial^2 u/\partial x^2$.

Este método se presenta como respuesta a la limitación que presenta el método explícito en cuanto a la estabilidad, y nos permite aumentar la precisión en el eje x sin tomar intervalos de tiempo más pequeños de lo deseado, por lo que es más eficiente.

Con este método, la ecuación (4.5) se convierte en :

$$\frac{u_n^m - u_n^{m-1}}{\delta\tau} + \mathcal{O}(\delta\tau) = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\delta x)^2} + \mathcal{O}((\delta x)^2) \quad (4.8)$$

De nuevo, despreciando los términos $\delta\tau$ y $(\delta x)^2$, su expresión es :

$$-\alpha u_{n-1}^m + (1 + 2\alpha)u_n^m - \alpha u_{n+1}^m = u_n^{m-1} \quad (4.9)$$

En este método, vemos que los términos u_n^m , u_{n-1}^m y u_{n+1}^m dependen de u_n^{m-1} de manera implícita, de aquí su nombre.

Como (4.9) no puede resolverse de forma explícita, el problema de encontrar u_n^m para $m \geq 1$ y $N^- < n < N^+$ se puede escribir de forma matricial, buscando la solución al siguiente sistema lineal :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{N^--1}^m \\ \vdots \\ u_0^m \\ \vdots \\ u_{N^+-1}^m \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^m} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{N^--1}^m \\ \vdots \\ b_0^m \\ \vdots \\ b_{N^+-1}^m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^m} \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{bmatrix} b_{N^-+1}^m \\ \vdots \\ b_0^m \\ \vdots \\ b_{N^+-1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{N^-+1}^{m-1} \\ \vdots \\ u_0^{m-1} \\ \vdots \\ u_{N^+-1}^{m-1} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} u_{N^-}^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N^+}^m \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Simplificando, la ecuación matricial (4.10) se escribe :

$$\mathbf{M}\mathbf{u}^m = \mathbf{b}^m. \quad (4.12)$$

Como \mathbf{M} es una matriz invertible y conocido \mathbf{b}^m , podríamos pensar en obtener la solución al sistema despejando directamente : $\mathbf{u}^m = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^m$.

Sin embargo, en la práctica proceder de esta forma no es nada eficiente, pues \mathbf{M} es una matriz tridiagonal de tamaño $N^+ - 1 - N^-$ mientras que su inversa \mathbf{M}^{-1} ya no tiene carácter tridiagonal, y debido a esto los cálculos aumentarían enormemente si se utilizase.

El carácter tridiagonal de \mathbf{M} permite desarrollar algoritmos para resolver (4.12) de forma eficiente.

4.3. Método de Crank-Nicolson

El método de Crank-Nicolson se utiliza para salvar las limitaciones, que impuestas por la estabilidad, afectan a los métodos anteriores, buscando además mejorar el error cometido hasta el orden $\mathcal{O}((\delta\tau)^2 + (\delta x)^2)$, en contraposición de los métodos explícitos e implícitos que se quedaban en el orden $\mathcal{O}(\delta\tau + (\delta x)^2)$.

En esencia, este método es un promedio de los métodos explícito e implícito. Recordando sus ecuaciones, (4.7) y (4.8) respectivamente, la expresión del método de Crank-Nicolson resulta una media de ambas :

$$\begin{aligned}
& \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} + \mathcal{O}(\delta\tau) = \\
& = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\delta x)^2} + \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2} \right] + \mathcal{O}((\delta x)^2)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Siendo $\alpha = \delta\tau/(\delta x)^2$ y de igual forma que antes, despreciando los términos que hacen referencia al error cometido, se tiene:

$$u_n^{m+1} - \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}) = u_n^m + \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m)$$

y reorganizando adecuadamente se llega a la ecuación del método de Crank-Nicolson :

$$(1 + \alpha)u_n^{m+1} - \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}) = \underbrace{(1 - \alpha)u_n^m + \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^m + u_{n+1}^m)}_{z_n^m} \tag{4.14}$$

En esta ocasión, u_{n+1}^{m+1} , u_n^{m+1} y u_{n-1}^{m+1} se definen implícitamente en términos de u_{n+1}^m , u_n^m y u_{n-1}^m .

Trabajar con la expresión (4.14) no es muy diferente de hacerlo con la del método implícito, (4.8), ya que suponiendo que los u_n^m son conocidos para todo valor de n , entonces se pueden calcular de forma explícita los valores z_n^m . (lado derecho de (4.14)). Esto se traduce en resolver la ecuación

$$(1 + \alpha)u_n^{m+1} - \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}) = z_n^m$$

Finalmente, la forma de proceder será similar al método implícito, ya que únicamente varían las matrices.

4.4. Algoritmos Opciones Europeas

Los métodos implícitos y de Crank-Nicolson basan su eficacia en gran medida en la eficiencia de los algoritmos utilizados para resolver los sistemas lineales.

Por tanto, como la resolución de los métodos implícitos es más compleja que para el método explícito (pues deben resolverse sistemas de ecuaciones lineales a menudo de tamaños grandes), hay que recurrir a procedimientos que demuestren ser eficaces para que los tiempos de computación sean proporcionados.

A continuación presentamos dos de ellos, conocidos como LU y SOR , y describiremos el camino a seguir para el caso particular del método implícito (para implementarlo al método Crank-Nicolson tan solo tendríamos que emplear las matrices correspondientes, pues los pasos a seguir son los mismos).

4.4.1. Algoritmo LU

El método LU es un método directo que busca descomponer \mathbf{M} en dos matrices, expresándola como un producto de una matriz \mathbf{L} triangular inferior y otra matriz \mathbf{U} triangular superior, tal que se pueda escribir $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$, o de la forma matricial :

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & : \\ : & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ : & : & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} = \\
 & = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_{N+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & : \\ : & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_{N+2} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{N+1} & z_{N+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{N+2} & \ddots & & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & : \\ : & & \ddots & \ddots & z_{N+2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & y_{N+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

donde se tienen que determinar las cantidades y_n , z_n y ρ_n .

Tras algunos cálculos que aquí omitiremos, se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned}
 y_{N^-+1} &= (1 + 2\alpha). \\
 y_n &= (1 + 2\alpha) - \frac{\alpha^2}{y_{n-1}}, & n = N^- + 2, \dots, N^+ + 1. \\
 z_n = -\alpha, \quad \rho_n &= \frac{-\alpha}{y_n}, & n = N^- + 1, \dots, N^+ - 2.
 \end{aligned}$$

Durante el proceso, las únicas cantidades que se necesitan guardar son las y_n correspondientes.

Así, hemos transformado el problema original, (4.12), en otro de la forma:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}\mathbf{u}^m) = \mathbf{b}^m.$$

que se resolverá en dos etapas,

$$\mathbf{U}\mathbf{u}^m = \mathbf{q}^m \quad y \quad \mathbf{L}\mathbf{q}^m = \mathbf{b}^m.$$

4.4.2. Algoritmo SOR

Una alternativa a los métodos directos como el método LU son los métodos iterativos, que a partir de una aproximación sobre la solución, y tras varias iteraciones, convergen a la solución. La ventaja de estos métodos está en su mayor sencillez a la hora de programarlos. El método SOR es un método iterativo que deriva del método de Gauss-Seidel.

Recordemos que el método de Gauss-Seidel se basa en tomar una buena estimación de u_n^m para $N^- \leq n \leq N^+$, y sustituirlo en la ecuación, repitiendo el proceso hasta llegar a la solución.

El método comienza con una estimación $u_n^{m,0}$ para buscar la convergencia $u_n^{m,k} \rightarrow u_n^m$ (siendo $u_n^{m,k}$ la k -ésima iteración de u_n^m).

Dado $u_n^{m,k}$, la siguiente iteración se calcula con la fórmula siguiente :

$$u_n^{m,k+1} = \frac{1}{1 + 2\alpha} \left(b_n^m + \alpha(u_{n-1}^{m,k+1} + u_{n+1}^{m,k}) \right)$$

El proceso se repite hasta que las diferencias entre una iteración y la siguiente sean lo suficientemente pequeñas, según el error deseado. (También es importante recordar que el método solo es estable para $\alpha > 0$).

Tras la breve explicación del método de Gauss-Seidel, el método *SOR* se desarrolla de la siguiente forma :

Puesto que las iteraciones $u_n^{m,k}$ convergen hacia el verdadero valor u_n^m , entonces podemos entender la diferencia $u_n^{m,k+1} - u_n^{m,k}$ como una corrección que se añade al término $u_n^{m,k}$ para que se acerque al valor exacto, y que definiremos de la forma

$$u_n^{m,k+1} = u_n^{m,k} + (u_n^{m,k+1} - u_n^{m,k}).$$

La clave del método se basa en introducir una mejora que, siendo capaces de controlar las correcciones, nos acerque cada vez más en la dirección de u_n^m en lugar de aproximarnos oscilando alrededor de él.

Así, si renombramos por $y_n^{m,k+1}$ a la $k+1$ -ésima iteración de Gauss-Seidel para el valor u_n^m , tal que se define :

$$y_n^{m,k+1} = \frac{1}{1 + 2\alpha} \left(b_n^m + \alpha(u_{n-1}^{m,k+1} + u_{n+1}^{m,k}) \right) \quad (4.16)$$

entonces el método de *SOR* se sirve de ella para hacer su propia aproximación $u_n^{m,k+1}$:

$$u_n^{m,k+1} = u_n^{m,k} + \omega(y_n^{m,k+1} - u_n^{m,k}) \quad (4.17)$$

tomando $\omega > 1$ y en particular converge con mayor celeridad tomando ω en el intervalo $1 < \omega < 2$. (El parámetro ω se denomina parámetro de relajación).

4.5. Algoritmos Opciones Americanas

En el capítulo 3 quedó claro que en el caso de las opciones americanas nos encontramos con el problema de complementariedad lineal (3.15), que matricialmente se puede escribir :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{b}^m) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{g}^{m+1}) &= 0 \\ \mathbf{M}\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{b}^m &\geq 0 \\ \mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{g}^{m+1} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $\mathbf{g}^m = (g_{N-+1}^m, \dots, g_{N+1}^m)$ representa el payoff, y siendo $g_n^m = g(n\delta x, m\delta\tau)$ el resultado de discretizar la función payoff.

En esta situación los algoritmos de opciones europeas ya no son aplicables.

Si nos damos cuenta, para el caso de la opción americana no es válido simplemente con resolver $\mathbf{M}\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{b}^{m+1}$ y después imponer, para cada componente, la condición $u_n^{m+1} = \max(u_n^{m+1}, g_n^{m+1})$. (Aunque este planteamiento sí que puede ser útil en el caso del método explícito).

La razón de que este planteamiento no sea válido para resolver métodos implícitos de diferencias finitas es que las componentes u_n^{m+1} , u_{n-1}^{m+1} y u_{n+1}^{m+1} están implícitamente relacionadas entre sí, por lo que no pueden producirse cambios en una de ellas de forma aislada sin repercutir en el resto de componentes ; es decir, si modificáramos u_n^{m+1} de la forma sugerida, no habría garantías de que se cumpliesen $\mathbf{C}\mathbf{u}^{m+1} \geq \mathbf{b}^m$ o bien $(\mathbf{M}\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{b}^m) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{g}^{m+1}) = 0$.

El resultado serían soluciones adulteradas que o bien fallan en la verificación de las condiciones frontera (generando valores de la opción que no serán los óptimos) o bien fallan al intentar satisfacer la desigualdad de Black-Scholes (generando valores para los cuales pueden existir oportunidades de arbitraje). Para salvar este inconveniente, se presenta a continuación el algoritmo *PSOR*.

4.5.1. Algoritmo PSOR

El algoritmo *PSOR* está construido de tal forma que se garantice internamente la consistencia de la solución del sistema (4.18), que es única y satisface simultáneamente todas las restricciones.

También se conoce con el nombre de *SOR Projectado* porque tomando como base el algoritmo de *SOR*, únicamente se modifica el paso de relajación para imponer la restricción $\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{g}^{m+1} \geq 0$.

Así, el método *PSOR* sigue el mismo procedimiento hasta llegar al último paso, donde se sustituye (4.17) para calcular en su lugar la siguiente expresión de $u_n^{m,k+1}$:

$$u_n^{m,k+1} = \max\left(\underbrace{u_n^{m,k} + \omega(y_n^{m,k+1} - u_n^{m,k})}_{\mathbf{u}_n^{m,k+1}}, g_n^{m+1}\right) \quad (4.19)$$

De nuevo, el proceso se repite para cada uno de los valores de n , y las iteraciones $u^{m,k}$ se detienen cuando se consigue la precisión deseada, es decir, $\|u^{m,k+1} - u^{m,k}\| < \textit{tolerancia}$.

Llegados a este punto, se toma la última aproximación : $\mathbf{u}^m = u^{m,k+1}$.

Nota : La modificación introducida por el método *PSOR* equivale a que en los nodos nos aseguremos de que el valor de la opción nunca puede ser inferior al payoff (evitando así oportunidades de arbitraje).

Aunque resulte simple, la comprobación $u_n^{m,k+1} = \max(u_n^{m,k+1}, g_n^{m+1})$ que realiza el método *PSOR*, en cada iteración y para cada componente, logra una solución al sistema (4.18) solventando la dificultad añadida por la libre frontera.

En el siguiente capítulo, y puesto que ya disponemos de herramientas suficientes, avanzaremos al concepto de opciones barrera y su valoración, que es el objetivo final de este trabajo.

Capítulo 5

Opciones Barrera

En este capítulo, ya estamos en condiciones de presentar el objetivo último de nuestro trabajo: las opciones barrera.

Mientras que las opciones barrera de tipo europeo sí que admiten solución explícita (véase la sección 5.3), las opciones barrera de tipo americano se valorarán de forma similar a sus homólogas sin barrera, haciendo ligeras modificaciones para ajustarse a la existencia de la barrera y sus implicaciones.

5.1. Descripción y Tipos

Este tipo de opciones surgen para suplir las necesidades del mercado actual y cuyo uso se ha generalizado en los últimos años, pues añade mayor flexibilidad en la elección de la opción por parte de su poseedor.

Su valor dependerá de la trayectoria seguida por el precio del activo. Es decir, la ganancia final no solo depende del precio final del activo, sino también de que alcance (o no) una determinada barrera, que llamaremos B , durante la vida de la opción.

Por sus características, encontramos diferentes tipos :

- * De tipo IN : Nacen sin ningún valor (inactivas) y solo se activan si el precio del activo alcanza la barrera llamada *Knock-In*.

- * De tipo **OUT** : Permanecen activas mientras el precio del activo no alcance la barrera *Knock-Out*, momento en que la opción se anula perdiendo su valor.

En algunos casos, como compensación por la pérdida de la opción anulada, se ofrece un reembolso proporcional al precio de adquisición de la opción.

De esta forma, distinguimos fundamentalmente 4 configuraciones principales para las opciones barrera, cada una de ellas con su variante *Call* o *Put* :

- **Up and Out** : Son opciones en las que el precio actual del activo se sitúa por debajo de la barrera *Knock-Out*. En el caso de que el precio suba y alcance la barrera, la opción se anula perdiendo todo su valor.
- **Down and Out** : Aquellas en las que el precio actual del activo se mantiene por encima de la barrera, anulándose la opción únicamente cuando el precio del activo baja hasta tocar la barrera.
- **Up and In** : Son aquellas opciones que, estando el precio del activo por debajo de la barrera, necesitan que el precio aumente y alcance la barrera para comenzar a existir.
- **Down and In** : Si el precio del activo está por encima de la barrera, estas opciones solo se activarán si el precio desciende hasta alcanzar la barrera *Knock-In*.

Debido a la particularidad de activarse o anularse cuando el activo subyacente alcanza un determinado valor, las opciones barrera son siempre más baratas que las opciones estándar sin barrera (denominadas vainilla).

De ahí que se crearan para ofrecer el mismo valor que una opción vainilla, pero a un coste inferior, pues se asume el riesgo de la pérdida total de la opción en caso de alcanzar la barrera.

Generalmente, su interés radica en adquirir una opción para un activo que creemos que no va a tener grandes variaciones en su cotización, por lo que podemos incorporar una opción con barrera a un precio menor que su homóloga sin barrera. Es obvio que su coste deberá ser menor que el de una opción de compra estándar, pues se añade un riesgo adicional que nos puede hacer perder el valor de la opción.

Veamos con un ejemplo concreto que su aplicación real es evidente :

Pongamos el caso de una compañía que necesita comprar una gran cantidad de cobre dentro de tres meses.

Por una parte, el precio actual les parece atractivo; sin embargo no pueden permitirse pagarlo en el caso de que aumente demasiado.

Por otra parte, no muestran interés en una posible bajada de precios (o bien no tienen previsto que esta se produzca).

En este supuesto, se plantean cubrir la compra de varias formas :

- En primer lugar, con un contrato a futuro. Pero como estarían obligados a comprar por el precio establecido a día de hoy, no obtendrían ningún beneficio de una futura bajada de precio.
- En segundo lugar, una opción de compra vainilla. Aunque esta solución a la pérdida de beneficio, puede resultar demasiado cara.
- Como alternativa se presenta la opción *Down-and-Out Call*, que tiene un coste inferior que la de tipo vainilla pero incluye un período de protección para el caso en el que el precio aumenta demasiado, aunque no protege a su poseedor frente a bajadas repentinas del precio (por debajo de la barrera) aunque a continuación recupere su valor anterior a la bajada. Este riesgo se asume a consecuencia de su coste inferior.

Una vez presentadas, nuestro propósito ahora se centrará en calcular el valor de cualquiera de las opciones barrera definidas anteriormente, ya sea de tipo europea o americana.

Antes de entrar en materia, vamos a dedicar la siguiente sección a nombrar una serie de opciones que, tomando como base las opciones barrera, permiten hacernos una idea de la gran variedad de opciones existentes en el mercado. Sin dar más detalles, ofreceremos también un ejemplo práctico de su aplicación.

5.2. Opciones Barrera Más Complejas

- * *Opciones Barrera Parciales* : Aquellas en las que la barrera se encuentra activa solo durante un periodo inicial de tiempo, tras el cual desaparece.
- * *Opciones Barrera con Protección* : Incluyen, al inicio de la vida de la opción, un periodo de tiempo durante el cual la opción no se puede anular, es decir, la barrera se activa pasado un tiempo.
- * *Opciones con Doble Barrera* : Poseen tanto una barrera superior como una barrera inferior que activará o anulará la opción.
- * *Opciones de Balanceo* : Se trata de opciones con varias barreras, o bien por encima o bien por debajo del precio inicial del activo, y que provocan que el precio de ejercicio de la opción aumente (para las opciones de compra) o disminuya (para las opciones de venta) cada vez que se alcanza una de ellas, siendo la última barrera la que da lugar a la cancelación de la opción.
- * *Opciones Ratchet* : En este caso y a diferencia de las opciones de balanceo, cada vez que se alcanza una barrera el precio de ejercicio toma el valor de esta, y además la opción nunca se anula (tampoco en la última barrera).
- * *Opciones Rainbow* : En este tipo de opciones coexisten dos activos. La opción se cancela si el precio de un segundo activo toca la barrera; en caso contrario, su valor se corresponde con el payoff del primer activo.

5.2.1. Ejemplo uso de Opciones Barrera Rainbow

La variedad de opciones surgen para cubrir una demanda del mercado. En ocasiones nos encontraremos en una situación en la que tenemos una dependencia de dos activos; en este supuesto, pueden tener cabida las opciones barrera del tipo *Rainbow*, que recordemos se basan en la cancelación de la opción si el precio de un segundo activo subyacente tocara la barrera.

Veamos un ejemplo concreto que nos aporte una visión de su uso cotidiano :

Consideramos un productor de oro de origen estadounidense que contempla la posibilidad de expandirse al país vecino de Canadá.

Como en la minería la inversión inicial es tan generosa que puede convertirse en un impedimento para la expansión, el productor queda expuesto a la fluctuación en la tasa de cambio dólar estadounidense - dólar canadiense.

Para protegerse ante una importante subida del dólar canadiense, el productor estadounidense puede comprar una opción de compra sobre dólares canadienses, es decir, adquirir el derecho a comprar, en un futuro, una cantidad acordada de dólares canadienses a cambio de una cantidad predeterminada de dólares estadounidenses.

Aunque el productor no está completamente decidido a llevar a cabo su expansión a Canadá, ve con buenos ojos adquirir la opción de compra a pesar de que tenga que pagar su precio de adquisición.

Sin embargo, para que dicho precio no sea muy alto, en este contexto el productor estadounidense estará interesado en comprar una opción barrera del tipo *Rainbow*, que le permita cancelar la opción de compra de dólares canadienses si el precio del oro (nuestro segundo activo) aumenta demasiado (lo que se traduciría en que alcanza la barrera).

En el supuesto de que el oro aumente considerablemente su precio, al productor estadounidense no le importa que se anule la opción, pues la pérdida de valor de esta se compensa con los ingresos futuros en la venta de oro, cuyo margen de beneficio ahora ha aumentado.

5.3. Valoración

En esta sección vamos a elegir una opción de compra europea del tipo *down-and-out* con barrera B , y nos disponemos a valorarla.

En este caso, la opción se anula cuando el precio del activo, S , decrece hasta tocar la barrera B , lo que se traduce en $V(B, t) = 0$, (para $V(S, t)$ el valor de la opción); mientras tanto, la opción se mantiene activa siempre que $S > B$.

Nos centraremos en el caso $S > B$ (imprescindible para que tenga valor positivo) y con $K > B$.

En principio, por ser una opción de compra europea, su valor $V(S, t)$ satisface la ecuación de Black-Scholes (2.4), con la condición inicial $V(S, T) = \max(S - K, 0)$.

Llegados a este punto, vamos a tratar de dar una solución explícita, utilizando el mismo cambio de variables ya visto en (2.7) :

Con estas variables, la barrera será un punto de la forma $x_b = \log(\frac{B}{K})$, por lo que la condición frontera se transforma en $u(x_b, \tau) = 0$.

De nuevo, el problema se convierte en resolver el sistema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } x > x_b,$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(E+1)x} - e^{\frac{1}{2}(E-1)x}, 0\right)$$

y frontera

$$u(x_b, \tau) = 0.$$

En anteriores capítulos ya habíamos calculado la solución de la ecuación de difusión del calor. Sin embargo, en este caso nos encontramos con una ligera modificación: Aquí no tenemos el intervalo infinito $-\infty < x < \infty$, sino que se restringe al intervalo $x > x_b$.

Esta ligera modificación se resuelve en un primer paso trasladando el punto x_b al origen de coordenadas. Para tal fin, definimos una nueva función ν de la forma

$$\nu(x, \tau) = u(x + x_b, \tau)$$

y que satisfaga

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{d^2\nu}{dx^2} \quad \text{para } 0 < x < \infty,$$

con condiciones inicial

$$\nu(x, 0) = u(x + x_b, 0) = u_0(x + x_b) \quad \text{para } 0 < x < \infty$$

y frontera

$$\nu(0, \tau) = u(x_b, \tau) = 0.$$

Ahora se trata de resolver el problema en un intervalo semi-infinito, por lo que estamos en condiciones de aplicar el método de las imágenes :

Con este método, primero resolveremos el problema en el intervalo infinito, que se construye con dos problemas semi-infinitos de igual temperatura inicial pero signos contrarios.

Dada una función $\omega(x, \tau)$ definida en toda la recta real, se define ν por:

$$\nu(x, \tau) = \omega(x, \tau) - \omega(-x, \tau),$$

$$\text{Si tomamos } \omega \text{ tal que : } \omega_0(x) = \omega(x, 0) = \begin{cases} u_0(x + x_b) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces puede comprobarse que ν sigue cumpliendo las condiciones

$$\text{inicial : } \nu(x, 0) = \omega(x, 0) - \omega(-x, 0) = u_0(x + x_b).$$

$$\text{y frontera : } \nu(0, \tau) = \omega(0, \tau) - \omega(0, \tau) = 0.$$

De nuevo, ahora el procedimiento a seguir es resolver el sistema

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty$$

con la condición inicial para $\omega_0(x)$ ya indicada.

Sabemos resolver el sistema, cuya solución es

$$\omega(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds,$$

con la correspondiente condición inicial $\omega_0(x)$.

Si restringimos al intervalo $(0, \infty)$, obtenemos nuestra solución $\nu(x, \tau)$:

$$\nu(x, \tau) = \omega(x, \tau)I|_{(0, \infty)} - \omega(-x, \tau)I|_{(0, \infty)} = \begin{cases} \omega(x, \tau) & \text{si } x > 0 \\ -\omega(-x, \tau) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(donde $I|_{(0, \infty)}$ representa la función característica de $(0, \infty)$), y con la condición inicial:

$$\nu_0(x) = \nu(x, 0) = \begin{cases} \omega_0(x) = u_0(x + x_b) & \text{si } x > 0 \\ -\omega_0(-x) = -u_0(-x + x_b) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ahora la solución u buscada resulta de deshacer la primera transformación:

$$u(x, \tau) = \nu(x - x_b, \tau) = \begin{cases} \omega(x - x_b, \tau) & \text{si } x > x_b \\ -\omega(-x + x_b, \tau) & \text{si } x < x_b \end{cases}$$

con la condición inicial:

$$u_0(x) = u(x, 0) = \nu(x - x_b, 0) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x > x_b \\ -u_0(2x_b - x) & \text{si } x < x_b \end{cases} \quad (4.0)$$

Una vez encontrada la solución $u(x, \tau)$, finalmente el valor de la opción se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$V(x, \tau) = Ke^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau).$$

Sin embargo, todo este proceso se puede sintetizar, culminando en una expresión más sencilla e intuitiva; veámoslo :

Supongamos que $u_1(x, \tau)$ es una solución de la ecuación de difusión, y que $C(S, t) = Ke^{\alpha x + \beta \tau} u_1(x, \tau)$ es el valor de una opción vainilla, con la misma fecha de vencimiento y precio de ejercicio que en el caso anterior pero sin barrera, y que ha sido obtenido con la fórmula de Black-Scholes.

En este caso, se tiene $u_1(x, \tau) = e^{-\alpha x - \beta \tau} \left(\frac{C(S, t)}{K} \right)$.

Con la intención de separar la condición inicial en dos partes, como en (4.0), podemos buscar escribir la solución al problema de la opción barrera *Knock-out* de la forma:

$$V(S, t) = Ke^{\alpha x + \beta \tau} (u_1(x, \tau) + u_2(x, \tau)) \quad (5.1)$$

donde $u_2(x, \tau)$ es la solución de la ecuación de difusión pero con las condiciones iniciales antisimétricas, (es decir, $u_2(0) = -u_2(2x_b - 0)$), y que puede escribirse en función de u_1 , debido a que la ecuación de difusión es invariante bajo traslaciones y cambios de signo.

Así, y puesto que el cambio de variables $x \rightarrow 2x_b - x$ implica $S \rightarrow \frac{B^2}{S}$, podemos calcular el valor de $u_2(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} u_2(x, \tau) &= -e^{-\alpha(2x_b - x) - \beta \tau} \left(\frac{C\left(\frac{B^2}{S}, t\right)}{K} \right) \\ &= -e^{-\alpha\left(2\log\left(\frac{B}{K}\right) - \log\left(\frac{S}{K}\right)\right) - \beta \tau} \left(\frac{C\left(\frac{B^2}{S}, t\right)}{K} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, el valor de la opción barrera se obtiene sustituyendo en (5.1).

Como anunciábamos, lo interesante de la expresión ofrecida a continuación, es que hemos obtenido el valor de una opción barrera en función de la misma

opción sin barrera (de la que ya hemos dado su expresión para calcularla) y de la variable B (la barrera).

$$\begin{aligned}
V(S, t) &= K e^{\alpha x + \beta \tau} \left(u_1(x, \tau) + \left(-e^{-\alpha(2x_0 - x) - \beta \tau} \frac{C\left(\frac{B^2}{S}, t\right)}{K} \right) \right) \\
&= K e^{\alpha x + \beta \tau} u_1(x, \tau) - e^{2\alpha(x - x_0)} C\left(\frac{B^2}{S}, t\right) \\
&\quad (\text{y para } x - x_0 = \log(S/B)) \\
&= C(S, t) - \left(\frac{S}{B}\right)^{2\alpha} C\left(\frac{B^2}{S}, t\right) \\
&= C(S, t) - \left(\frac{S}{B}\right)^{-(E-1)} C\left(\frac{B^2}{S}, t\right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Además y como es obvio, puede comprobarse que verifican las condiciones impuestas, es decir:

- * $V(B, t) = 0$ (se anula al tocar la barrera).
- * $V(S, T) = \max(S - K, 0)$ (satisface la condición final).

5.3.1. Relación de Paridad

En la sección anterior calculamos el valor de una opción en particular, la *Call Down - and - Out* europea, que representaremos por c_{d_o} . Supongamos que ahora nos preguntamos cómo calcular el valor de una *Call Down - and - In* europea, que abreviaremos como c_{d_i} .

Suponiendo que ambas comparten los valores para la barrera, fecha de vencimiento y precio de ejercicio, nos damos cuenta de que solo una de ellas puede permanecer activa en la fecha de vencimiento, puesto que al alcanzarse la barrera, la activación de una opción supone la anulación de la otra y viceversa, sin importar cuál.

Teniendo esto en cuenta, una combinación de ambas da siempre como resultado una opción vainilla, con la mismos parámetros. Lo anterior se resume en la siguiente relación, de donde conocidos los valores de c_{do} y c se despejaría el correspondiente a c_{di} .

$$c_{do} + c_{di} = c \quad (5.3)$$

Para el caso general, si tomamos dos opciones barrera europeas, una del tipo *Knock-In* y otra del tipo *Knock-Out*, con la misma barrera, fecha de vencimiento y precio de ejercicio, entonces el valor de su suma es el valor de la correspondiente opción vainilla.

En estas condiciones, el valor de la opción *Knock-In* se puede obtener sencillamente despejándolo en dicha suma.

Viendo la relación anterior (5.3) para las opciones europeas, es fácil preguntarnos si ocurrirá lo mismo para las opciones americanas. Sin embargo, en esta sección demostraremos que dicha relación es inexistente:

Para comenzar, introducimos la notación que utilizaremos en adelante :

- * $C_{do} \equiv$ opción barrera americana de tipo *Call Down-and-Out*.
- * $C_{di} \equiv$ su homóloga *Call Down-and-In*.

Construimos la función $U(S, K; B) = C_{di}(S, K; B) + C_{do}(S, K; B)$ que satisface el siguiente problema de complementariedad lineal :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - (r - q) S \frac{\partial U}{\partial S} + rU \geq 0$$

$$U \geq C_{di}(S, \tau) + (S - K)^+$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - (r - q) S \frac{\partial U}{\partial S} + rU \right] [U - \{C_{di}(S, \tau) + (S - K)^+\}] = 0$$

para $S > B$, y con condiciones inicial y frontera :

$$\begin{aligned}U(S, 0) &= (S - K)^+ \quad \text{para } S < B. \\U(B, \tau) &= C(B, \tau).\end{aligned}$$

Si existiese una relación de paridad, los valores de $U(S, \tau)$ y $C(S, \tau)$ deberían ser iguales.

Pero esto no es así, ya que como $U(S, \tau)$ y $C(S, \tau)$ comparten las mismas condiciones iniciales y frontera, y puesto que la expresión $C_{di}(S, \tau) + (S - K)^+$ (correspondiente a la función obstáculo de $U(S, \tau)$) es mayor que $(S - K)^+$ (correspondiente a $C(S, \tau)$), entonces se garantiza que $U(S, \tau)$ es siempre mayor que $C(S, \tau)$, por lo que en el caso de las opciones americanas no existe la relación de paridad.

Intuitivamente es fácil de entender :

Si formamos una cartera con dos opciones, una C_{di} y una C_{do} , y en un momento determinado decidiésemos ejercer la opción C_{do} , obtendríamos el mismo payoff que una vainilla americana, C , y sin embargo la cartera tiene un mayor valor gracias al extra aportado por la opción C_{di} .

Por su parte, la igualdad solo existirá en los casos en los que se alcanza la barrera o se mantiene hasta el vencimiento.

En la práctica, el desafío de calcular el valor de una opción barrera europea o americana no difiere en exceso de sus correspondientes sin barrera : consiste en obedecer la ecuación de Black-Scholes y hacer uso de los métodos de diferencias finitas vistos en el capítulo anterior, con la salvedad de que sobre ellos haremos ligeras modificaciones para ajustarnos a la existencia de la barrera.

El capítulo final le dedicamos a recapitular las ideas vistas a lo largo del trabajo, acompañando con figuras que nos ayuden a visualizarlas.

Capítulo 6

Experimentos Numéricos

Este capítulo lo vamos a dedicar a presentar algunas gráficas en las que representamos los valores de las opciones con las que hemos trabajado, para visualizar varias de sus propiedades.

Antes de hacerlo, vamos a incluir la base de los algoritmos que hemos hecho uso para generar dichas gráficas con Matlab.

6.1. Utilizando Matlab

Como hemos visto en capítulos anteriores, abordamos nuestro problema de valoración de una opción primero discretizando el problema para crear un entorno finito con el que Matlab pueda trabajar y más tarde aplicando los métodos de diferencias finitas para calcular el valor.

En primer lugar, elegiremos un valor S_R suficientemente grande para localizar el problema en el intervalo $0 \leq S \leq S_R$, y $0 \leq \tau \leq T$.

Seguidamente, escogeremos el tamaño de cada intervalo, tratando de conseguir un cierto equilibrio entre la precisión deseada y el coste computacional. Para ello, elegiremos un valor N que determinará el número de puntos en el eje de S , y M que se corresponderá con el número de intervalos de tiempo.

Elegidos N y M , la longitud de los intervalos es $k = T/M$ para el tiempo y $h = S_R/N$ para el activo. Así, hemos construido una malla con nodos equidistantes de la forma $(S_n, \tau_m) = (nh, mk)$ para $n = 0, \dots, N$ y $m = 0, \dots, M$.

Discretizado el problema, el siguiente paso consiste en calcular el valor de la opción en cada uno de los nodos.

Ya sabemos que el valor de la opción viene determinado por la ecuación (2.4) de Black-Scholes. Haciendo el cambio de variable $\tau = T - t$, nos queda:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} - rU. \quad (6.1)$$

con la condición inicial $U(S, 0) = V(S, T) = \text{Payoff}$.

Por tanto, nos disponemos a resolver (6.1) :

Considerando las incógnitas $U_n^m = U(S_n, \tau_m) = V(S_n, T - \tau_m)$, vamos a aplicar el procedimiento visto en el capítulo anterior.

Utilizaremos el método de Crank-Nicolson, que recordemos es un promedio de los métodos explícito e implícito, para aproximar las derivadas, por lo que nos queda un sistema que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{U_n^{m+1} - U_n^m}{k} &= \frac{1}{2} \sigma^2 S_n^2 \frac{\frac{U_{n+1}^{m+1} + U_{n+1}^m}{2} - 2 \frac{U_n^{m+1} + U_n^m}{2} + \frac{U_{n-1}^{m+1} + U_{n-1}^m}{2}}{h^2} \\ &+ rS_n \frac{\frac{U_{n+1}^{m+1} + U_{n+1}^m}{2} - \frac{U_{n-1}^{m+1} + U_{n-1}^m}{2}}{2h} - r \frac{U_n^{m+1} + U_n^m}{2}. \end{aligned}$$

Si reorganizamos los términos anteriores, podemos simplificar a:

$$A_n^l U_{n-1}^{m+1} + B_n^l U_n^{m+1} + C_n^l U_{n+1}^{m+1} = A_n^r U_{n-1}^m + B_n^r U_n^m + C_n^r U_{n+1}^m, \quad (6.2)$$

con los valores:

$$\begin{aligned} A_n^l &= -\frac{1}{4} \sigma^2 S_n^2 \frac{k}{h^2} + \frac{r}{4} S_n \frac{k}{h} & ; & \quad A_n^r = \frac{1}{4} \sigma^2 S_n^2 \frac{k}{h^2} - \frac{r}{4} S_n \frac{k}{h}, \\ B_n^l &= 1 + \frac{1}{2} \sigma^2 S_n^2 \frac{k}{h^2} + \frac{r}{2} k & ; & \quad B_n^r = 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 S_n^2 \frac{k}{h^2} - \frac{r}{2} k, \\ C_n^l &= -\frac{1}{4} \sigma^2 S_n^2 \frac{k}{h^2} - \frac{r}{4} S_n \frac{k}{h} & ; & \quad C_n^r = \frac{1}{4} \sigma^2 S_n^2 \frac{k}{h^2} + \frac{r}{4} S_n \frac{k}{h}. \end{aligned}$$

Puesto que (6.2) es una expresión implícita, a cada paso de tiempo hay que resolver un sistema de ecuaciones.

Debido a ello, lo planteamos de forma matricial :

Por un lado definimos los vectores $\mathbf{U}^m = [U_1^m, \dots, U_{N-1}^m]^T$, $m = 0, 1, \dots, M$.
 Por otro las matrices \mathbf{M}^l y \mathbf{M}^r de la forma:

$$\mathbf{M}^l = \begin{bmatrix} B_1^l & C_1^l & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ A_2^l & B_2^l & C_2^l & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_3^l & B_3^l & C_3^l & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & A_{N-2}^l & B_{N-2}^l & C_{N-2}^l \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & A_{N-1}^l & B_{N-1}^l \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{M}^r = \begin{bmatrix} B_1^r & C_1^r & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ A_2^r & B_2^r & C_2^r & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_3^r & B_3^r & C_3^r & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & A_{N-2}^r & B_{N-2}^r & C_{N-2}^r \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & A_{N-1}^r & B_{N-1}^r \end{bmatrix}.$$

Una vez formalizada la entrada de datos, ya solo nos falta plantear el sistema matricial para realizar los cálculos con Matlab. Con este fin, debemos darnos cuenta de que el modo de proceder es “hacia atrás”; veamos a que nos referimos con ello :

Partimos de que en $\tau = 0$ ($t=T$) los valores $\{U_n^0\}_{n=0}^N$ son conocidos (payoff). En el siguiente paso, $\tau = k$, disponemos de $N-1$ ecuaciones, de la forma (6.2), pero $N+1$ incógnitas, $\{U_n^1\}_{n=0}^N$. Por este motivo, se deben añadir 2 ecuaciones, en este caso las condiciones frontera.

El proceso se repite de forma recursiva hasta llegar a $\tau = T$ ($t=0$), donde se finaliza dando el valor de la opción en el momento de su adquisición.

Atendiendo a lo anterior, hay que resolver recursivamente

$$\underbrace{\mathbf{M}^l}_{\mathbf{LU}} \mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{M}^r \mathbf{U}^m + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{B}^{m+1} + \mathbf{B}^m)}_{\mathbf{R}}, \quad (6.3)$$

donde \mathbf{B}^m es la contribución de los términos frontera

$$\mathbf{B}^m = \begin{bmatrix} 2A_1^r U_0^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2C_{N-1}^r U_N^m \end{bmatrix}.$$

Obviamente, los valores de U_0^m y U_N^m dependen del tipo de contrato, es decir: Si se trata de una opción de compra o *Call*, entonces :

$$U_0^m = 0 \quad y \quad U_N^m = S_N - Ke^{-r\tau}.$$

Y en caso de una opción de venta o *Put* :

$$U_0^m = Ke^{-r\tau} \quad y \quad U_N^m = 0.$$

Por tanto, el trabajo computacional con Matlab consiste en calcular primero el valor \mathbf{R} (ver (6.3)) y después, tras aplicar el método \mathbf{LU} a la matriz \mathbf{M}^l y conocida \mathbf{U}^m , se calcula \mathbf{U}^{m+1} , que es la aproximación $m+1$ -ésima:

$$\mathbf{U}^{m+1} = \underline{\mathbf{U}} \setminus (\underline{\mathbf{L}} \setminus \mathbf{R}). \quad (6.4)$$

Hasta aquí, los cálculos anteriores son los necesarios para calcular el valor de una opción europea, donde tan solo nos sirve el valor de la opción en el momento de su adquisición y debemos esperar hasta el vencimiento.

Sin embargo, al tratar con opciones americanas, ahora tenemos que prestar atención a todos los valores de la opción calculados en instantes intermedios, pues se tiene el privilegio de ejercer por anticipado.

Esto quiere decir que en cada iteración necesitamos comprobar cuál es la situación óptima, si ejercer o mantener la opción.

A diferencia del caso europeo, ahora nos encontramos con el problema de complementariedad lineal que vimos en la sección 3.5, por lo que tenemos que aplicar el método de *PSOR*.

Así, a partir de los cálculos anteriores, en cada iteración nos quedaremos con el valor máximo entre el \mathbf{U}^m calculado y el payoff, y lo tomaremos como aproximación inicial para arrancar el método *PSOR* tal cual se explicó en la sección 4.5.1. El resultado, es el valor de la opción americana en la fecha $t = T - \tau_m$, para $\tau_m = mk$.

Finarizaremos con el caso de las opciones barrera :

Si se trata de una opción barrera europea, veremos a continuación que su valor coincidirá con el valor de la vainilla europea hasta que empieza a decaer en un entorno de la barrera, anulándose completamente al tocarla.

Sin embargo, en el caso de la opción barrera americana, esta disrupción es mucho más evidente. Posteriormente comprobaremos como el valor de la opción barrera americana se sobreescribe sobre la vainilla americana hasta el instante en que la barrera se toca y súbitamente se anula.

Su explicación se encuentra en el privilegio de ejercer por anticipado:

Al contrario que en el caso de la barrera europea, si en la barrera americana (por muy cerca que estemos) aún no hemos tocado la barrera, estamos en disposición de ejercer la opción y recibir la ganancia del payoff, al igual que sucede con una opción vainilla americana; tan pronto se alcance, el valor se pierde por completo.

6.2. Análisis de los Experimentos

De ahora en adelante y salvo que se especifique lo contrario, los valores utilizados para las figuras serán: $r = 0.05$ para la tasa de interés, $\sigma = 0.2$ para la volatilidad y $T = 1$ para el vencimiento.

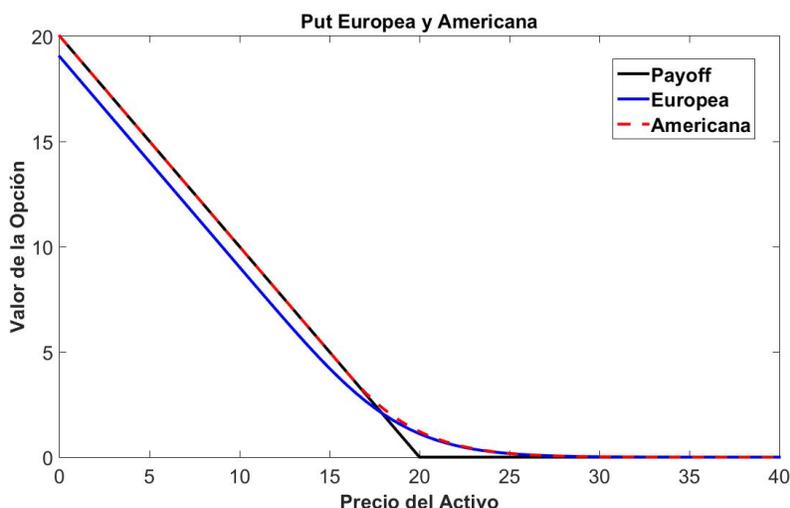


Figura 6.1: Ejemplo de la representación del valor de una opción de venta europea y otra americana con precio de ejercicio $K = 20$.

En la figura 6.1 representamos los valores de una opción europea y otra americana con los mismos parámetros. Evidentemente, la americana está siempre por encima de la europea y del payoff.

Una particularidad de las opciones americanas es que si tomamos dos opciones del mismo tipo con los mismos parámetros y que solo difieran en la fecha de vencimiento, por el hecho de ser americanas pueden llegar a tener el mismo valor si ambas se encuentran a la misma distancia del final de la vida de la opción. Esto lo podemos entender comparando la *Put* americana de la figura 6.1 con la figura 6.2.

En este caso concreto, si en la figura 6.2 dejamos pasar el tiempo hasta situarnos en $t_0 = 3$ como nuevo tiempo inicial (que se corresponde con la función

representada por $3T/4$), esta coincide con la representada en la figura 6.1, y esto es debido a que técnicamente ambas tienen el mismo vencimiento, $T = 1$. (En ese instante tienen idéntico valor).

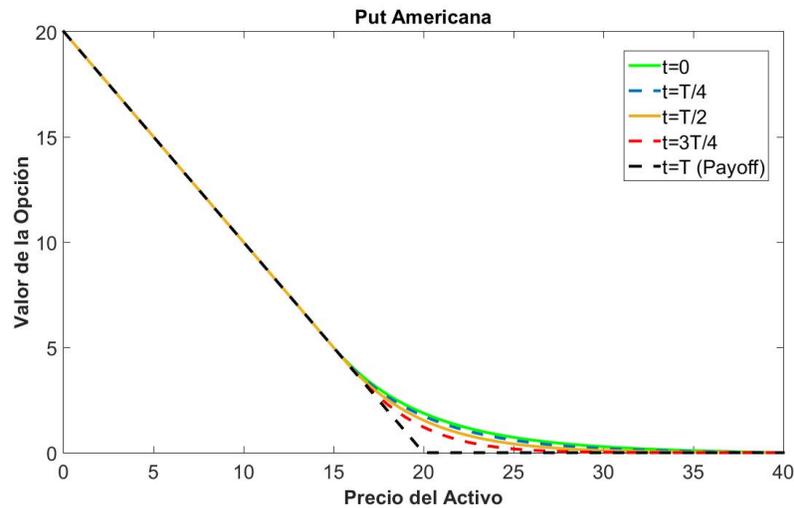


Figura 6.2: Comparativa del valor de una Put americana en tiempos intermedios durante la vida de la opción ; $K = 20$, $T = 4$.

Concluimos el estudio representando varias opciones barrera, tanto europeas como americanas, en distintas condiciones.

Por ejemplo, si alteramos el valor de la volatilidad en las opciones barrera europeas del tipo *Up-and-In* y *Down-and-In* puede comprobarse que aumentando la volatilidad, aumenta también el valor de la opción. Esto se visualiza en la figura 6.3, y es debido a que una mayor variabilidad en el mercado favorecerá que se alcance la barrera y la opción comience a existir.

Sin embargo, en las opciones del tipo *Up-and-Out* y *Down-and-Out* ocurre justo lo contrario: una mayor volatilidad implicará mayor posibilidad de alcanzar la barrera y perjudicando al poseedor de la opción, por lo que su valor será menor; esto mismo es lo que ocurre con la figura 6.4.

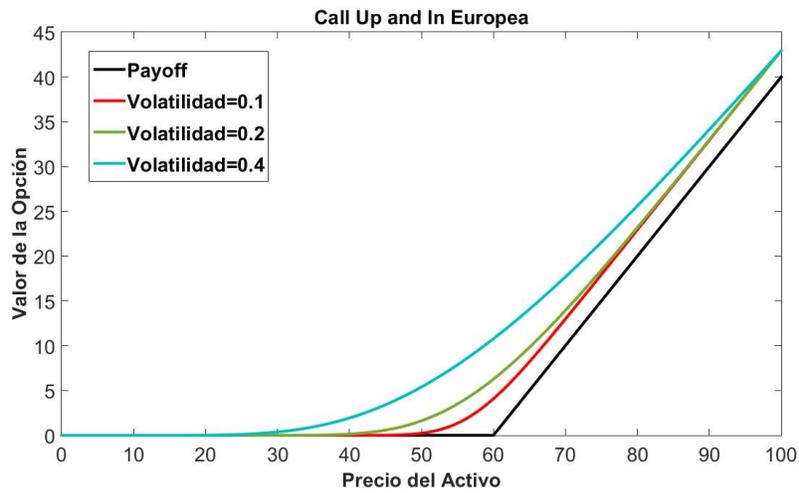


Figura 6.3: Opción barrera europea con distinta volatilidad; $K=60$, $B=55$.

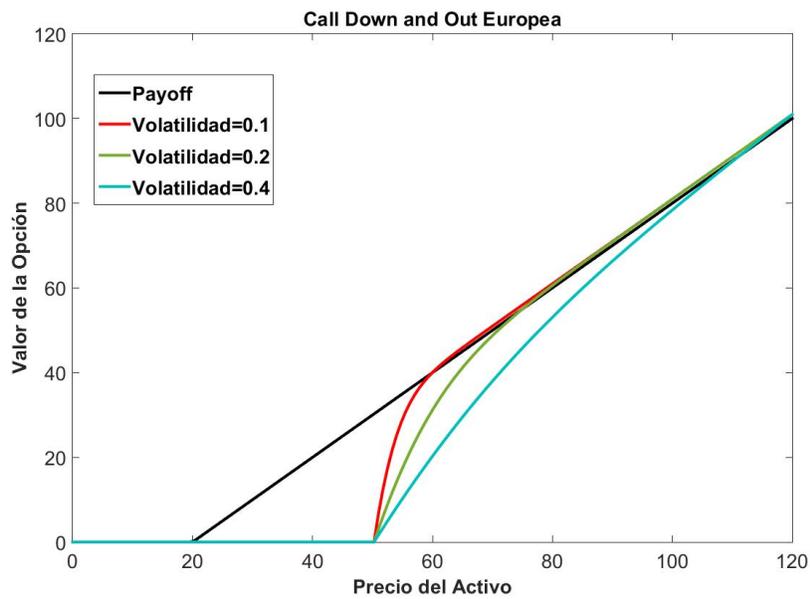


Figura 6.4: Opción barrera europea con distinta volatilidad; $K=20$, $B=50$.

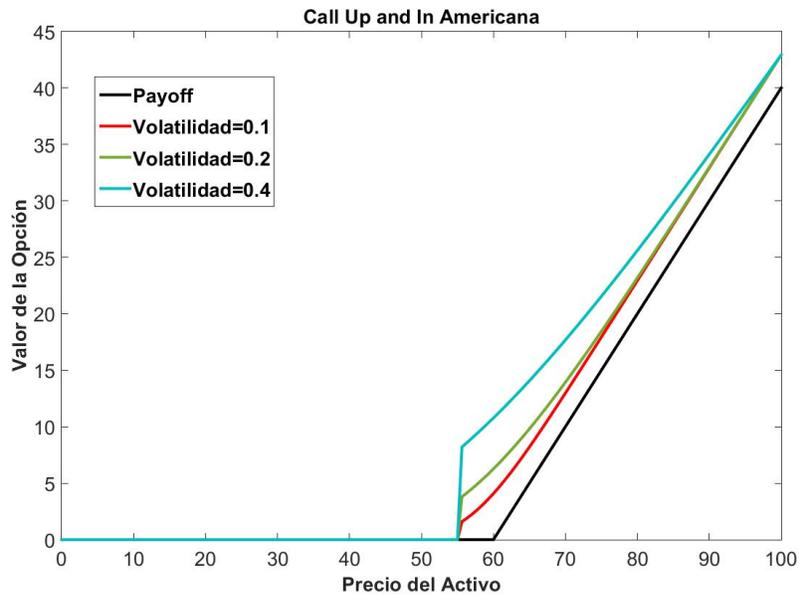


Figura 6.5: Opción barrera americana con distinta volatilidad; $K=60$, $B=55$.

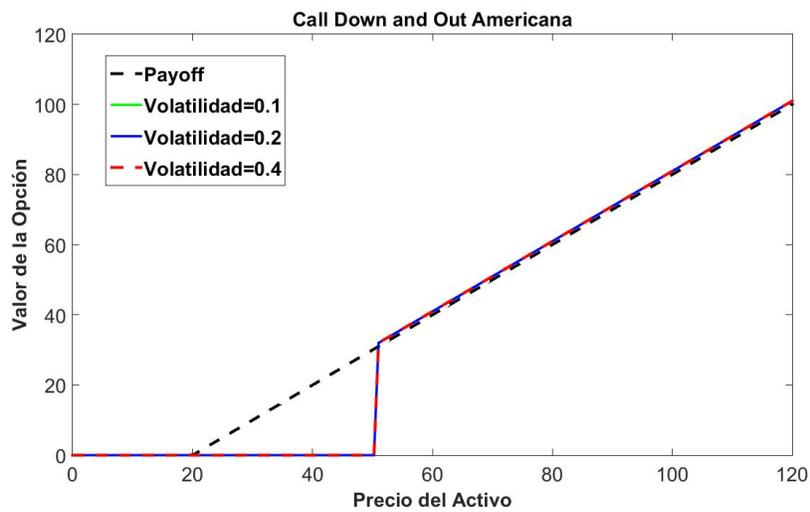


Figura 6.6: Opción barrera americana con distinta volatilidad; $K=20$, $B=50$.

Fijémonos ahora en el comportamiento al aumentar el precio del activo :

Para el caso de las opciones barrera americanas, en cualquiera de los casos la opción con mayor volatilidad es la que tiene mayor valor, pues le beneficia a la hora de activar la opción y no le perjudica ya que puede deshacerse de ella en cualquier momento. La comparativa entre las figuras 6.5 y 6.6 es un ejemplo de ello.

En las opciones vainilla (considerando su payoff) el valor de la *Call* aumenta junto con el valor de S , mientras que en la *Put* ocurre el fenómeno contrario (esto entra dentro de la lógica).

Sin embargo, en el caso de las opciones barrera, por su definición, tenemos comportamientos propios de ellas :

Por ejemplo, si tomamos una *Call Up-and-Out* con el precio de ejercicio mayor que el valor de la barrera, por definición la opción no tiene valor. Esto es lo que vemos en la figura 6.7.

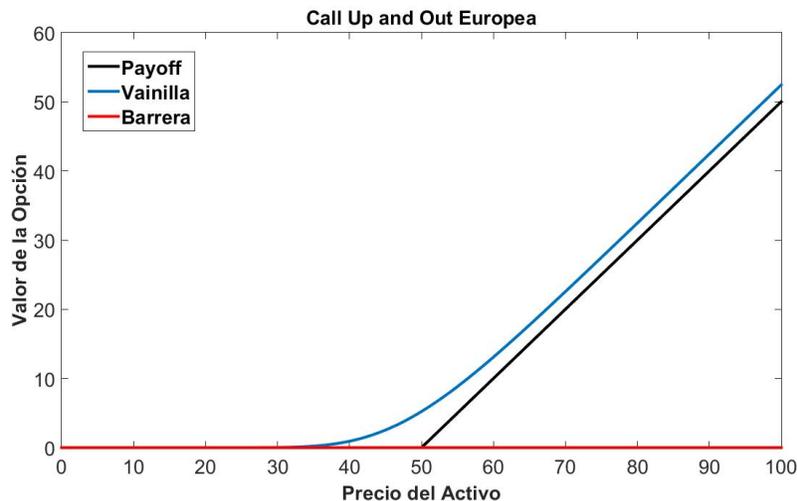


Figura 6.7: *Call Up-and-Out* europea con valores : $K = 50$, $B = 30$.

Pero además, si el precio de ejercicio es menor que la barrera, el valor de la opción tampoco es siempre creciente junto con el valor de S , pues tiene que decrecer hasta anularse en $S = B$, como se ve en la figura 6.8.

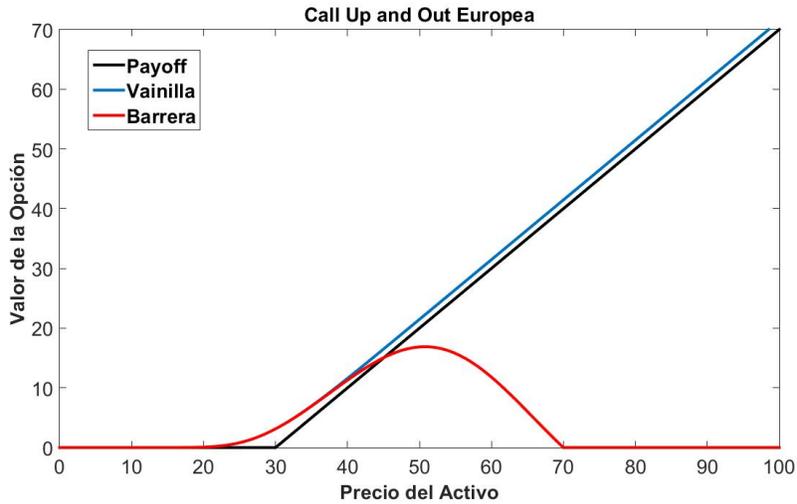


Figura 6.8: *Call Up-and-Out europea con valores : $K = 30$, $B = 70$.*

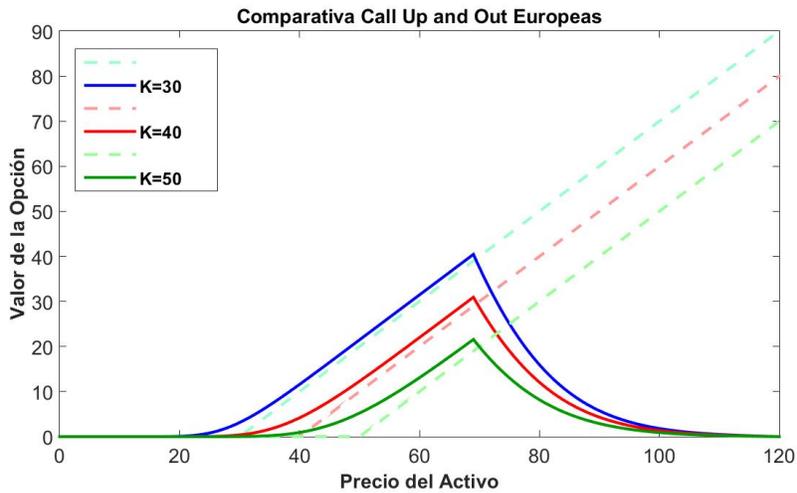


Figura 6.9: *Comparativa Call Up-and-Out con barrera : $B = 70$. Cada recta se corresponde con el payoff de la opción barrera de su mismo color.*

Veamos también los efectos que tiene el parámetro correspondiente al precio de ejercicio sobre el valor de la opción :

Para las opciones vainilla y atendiendo a su payoff, a estas alturas es evidente que al aumentar el precio de ejercicio se consigue aumentar el valor de la opción en el caso de una *Put* y lo contrario para la *Call*.

Esta característica se conserva para todas las opciones barrera y un ejemplo de ello es la figura 6.9.

Una vez que estamos familiarizados con la representación de las opciones barrera europeas, vamos a ver la gran diferencia con sus homólogas americanas, centrándonos en las figuras 6.10 y 6.11, que representan las de tipo europeo y americano respectivamente.

Centremos nuestra atención en el valor de S para el que coinciden todas las funciones con el payoff.

La parte de la derecha es similar en las dos figuras y sigue la norma general que dice que el valor de la opción disminuye a medida que nos acercamos al vencimiento. Sin embargo, su parte izquierda muestra la gran diferencia entre ambas :

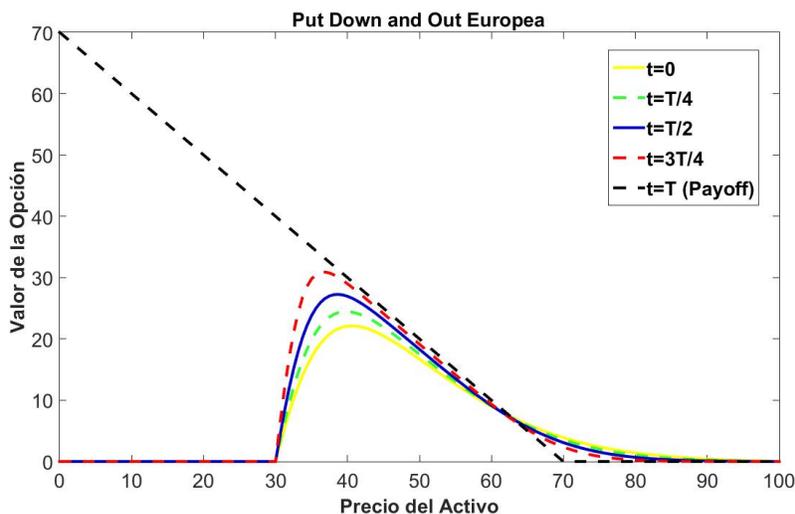


Figura 6.10: *Opción Barrera Europea con valores : $K = 70$, $B = 30$.*

Por un lado, la opción barrera europea (6.10) empieza a decrecer de forma suave hasta que en un entorno (en este caso por la derecha) cercano a la barrera pierde su valor con mayor celeridad, como consecuencia de que al momento de adquirirla y sin posibilidad de ejercerla, el riesgo de que S alcance B es mayor cuanto más tiempo falte para el vencimiento. De ahí que un mayor riesgo implique un menor valor de la opción, por lo que no sigue la norma general mencionada en el párrafo anterior.

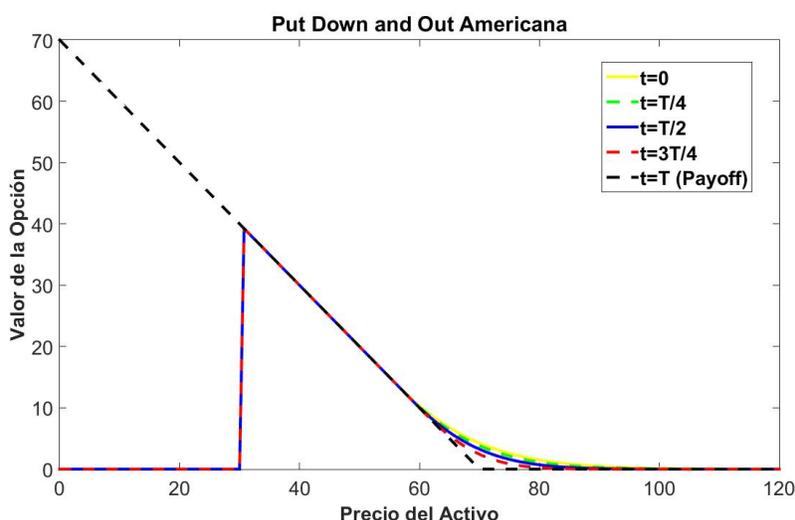


Figura 6.11: *Opción Barrera Americana con valores : $K = 70$, $B = 30$.*

Por otro lado, la parte izquierda en la figura 6.11 es bien diferente y obedece a sus características ya descritas. La opción americana nunca puede tener valor inferior al payoff (recordemos que es una de las restricciones) y en la opción barrera americana esto solo ocurrirá cuando $S = B$, donde ya no se puede ejercer porque la opción se ha anulado, perdiendo enteramente su valor.

Otra diferencia existente también entre las opciones vainilla y barrera, es que aunque la *Call* europea y la *Call* americana tiene la misma gráfica (ya hemos visto que en ausencia de dividendos tienen el mismo valor), esto no es aplicable a las opciones barrera. Evidentemente la barrera americana tendrá mayor valor al poder ejercer por anticipado antes de tocar la barrera.

Finalmente, veamos una última propiedad de las opciones americanas que también afecta a las opciones barrera americanas :

Cuando el par (B, K) varía proporcionalmente, la teoría nos dice que la curva de ejercicio óptimo conserva la forma.

Esta propiedad de la curva de ejercicio óptimo puede observarse en las figuras 6.12 y 6.13, donde a pesar de que se han duplicado los valores de la barrera y el precio de ejercicio, las figuras tienen el mismo aspecto (siempre que el resto de parámetros se conserven).

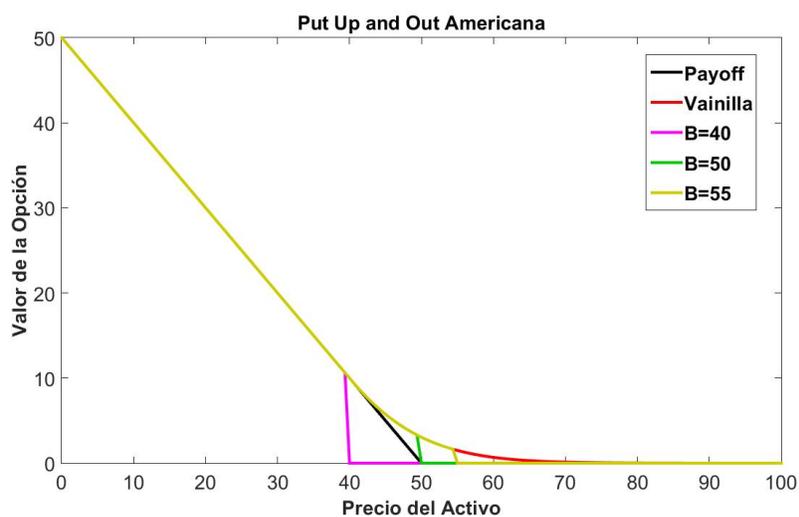


Figura 6.12: Comparativa del valor de una opción Barrera Americana en función de su barrera y con $K = 50$.

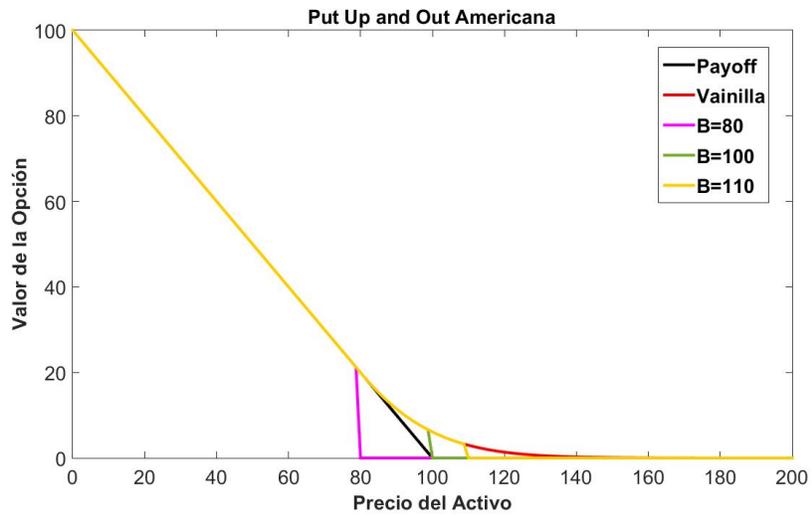


Figura 6.13: Comparativa del valor de una opción Barrera Americana en función de su barrera y con $K = 100$.

Bibliografía

- [1] Y.K.Kwok, “Mathematical Models of Financial Derivatives”, Springer-Verlag Singapore, 1998.
- [2] P.Wilmott, S.Howison, J.Dewynne, “The Mathematics of Financial Derivatives. A student introduction”, Cambridge University Press, 1995.
- [3] P.Wilmott, “Introduces Quantitative Finance”, John Wiley And Sons Second Edition.
- [4] Rüdiger U.Seydel, “Tools for Computational Finance”, Springer-Verlag London Limited, 2012.
- [5] D.Tavella, C.Randall, “Pricing Financial Instruments. The Finite Difference Method”, John Wiley and Sons, Inc, 2000.
- [6] J.de Frutos, “Numerical Methods for the solution of Partial Differential Equations Arising in the Valuation of Financial Derivatives”, Universidad de Valladolid, 2004.
- [7] L.Al-Fagih, “The American Knock-Out Put Option”, Research Report No. 3, University of Manchester, 2014.
- [8] M.Dai, Y.K.Kwok, “Knock-In American Options”, Wiley Periodicals, Inc. Jrl Fut Mark 24: 179-192, 2004.
- [9] A.Camaño, “Opciones Americanas, Valoración Numérica y Cálculo de la Frontera de Valores Críticos ”, Artículo del CIFF: 44-89.
- [10] D.P.Fernández, “Aplicación del Modelo Browniano Geométrico para la predicción del activo subyacente”, Universitat Politècnica de Valencia, 2015.

- [11] E.M.Cabaña, “El Proceso de Wiener y el Teorema del Límite Central”, Boletín Asociación Matemática Venezolana, Vol. IX, No. 2, 181-191, 2002.
- [12] <http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/ecuaciones-diferenciales/contenidos/desarrollo-tema/tema8.pdf>.
- [13] <https://people.maths.ox.ac.uk/howison/barriers.pdf>.
- [14] <https://es.wikipedia.org>