Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

Valoraciones y curvas

Autor: Antonio Flórez Gutiérrez

Tutora: Ana José Reguera López

Índice

1. Introducción

El objeto de este trabajo es plantear un problema original sobre el espacio de arcos de una curva algebraica. Se trata de una temática muy reciente en la investigaciópn en Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica. Para realizar este objetivo me ha sido necesario ampliar mis conocimientos de Álgebra Conmutativa en temas concretos: teoría de valoraciones, curvas algebraicas y espacio de arcos. He accedido a estos coceptos a través de libros avanzados en Álgebra Conmutativa ([Ma] Matsumura, [Z-S] Zariski-Samuel) y de artículos de investigación ([Va] y algún resultado en [Re]).

El concepto de lugar de un cuerpo, que es equivalente al de valoración, fue introducido por Dedekind y Weber en 1882 con el fin de generalizar las construcciones de Riemann a las curvas algebraicas planas. El primero en enunciar la definición de valoración tal y como se dará en este trabajo fue Krull, en 1931. Los primeros avances en la teoría de valoraciones estuvieron ligados a la Teoría Algebraica de Números, pero éstas también acabarían jugando un importante papel en el desarrollo de la Geometría Algebraica, y serían de particular interés para los trabajos de Zariski sobre la resolución de singularidades.
Los ejemplos fundamentales de valoraciones son la valoración p-ádica en $\mathbb{Q}$ y el orden en el cuerpo de fracciones del anillo de series en una variable. Estos dos son ejemplos de valoración discreta, pero el concepto de valoración es mucho más general: asocia valores en un grupo abeliano totalmente ordenado. El conjunto de anillos de valoración de un cuerpo dado tiene una estructura de espacio topológico, que ha sido estudiada con detención por O. Zariski.
El ejemplo de valoración discreta sobre el cuerpo de fracciones del anillo de series formales nos acerca al espacio de arcos. En efecto, un arco formal con soporte en una variedad algebraica define una valoración discreta del cuerpo de funciones de dicha variedad. Recopilando todos los arcos formales trazados dentro de una variedad algebraica se define también un espacio geométrico, esta vez con estructura de esquema.
El espacio de arcos X_∞ de una variedad algebraica X fue introducido por J. Nash en los años 60 con el objeto de comprender mejor las singularidades de X. El espacio de arcos es un tema de gran desarrollo en los últimos años, y todavía existen numerosas cuestiones, incluso para la curva plana singular más sencilla, la cúspide, cuya respuesta se desconoce.

Los capítulos dos a cinco de este trabajo desarrollan los conceptos y resultados clave de la teoría de valoraciones, tal y como se pueden encontrar en libros de Álgebra Conmutativa como [Z-S] o [Ma].
El capítulo dos presenta la definición de anillo de valoración de un cuerpo K, algunos

ejemplos sencillos, y algunas de las propiedades y caracterizaciones más conocidas de estos anillos, siendo de especial interés el hecho de que los anillos de valoración de un cuerpo K son precisamente los subanillos locales maximales para la relación de dominación. También se demostrará que la clausura íntegra de un dominio es la intersección de los anillos de valoración que lo contienen. También se definirá la superficie de Zariski-Riemann, un objeto de gran interés para la Geometría Algebraica, y se mostrará que se trata de un espacio topológico compacto.

En el tercer capítulo, se define el concepto de valoración en un cuerpo K, y se muestra que toda valoración en un cuerpo define un anillo de valoración del mismo, y viceversa, y que por lo tanto los dos son conceptos más o menos equivalentes. También veremos la relación que hay entre la valoración asociada a un anillo de valoración y algunos aspectos de su estructura algebraica.

El capítulo cuatro tiene como objetivo introducir dos invariantes combinatorios de una valoración en K: el rango y el rango racional. En la primera sección se detalla el caso particular de los anillos de valoración de rango 1, y se muestran varias caracterizaciones equivalentes. En la segunda sección se dan las definiciones generales de rango (de un grupo totalmente ordenado) y rango racional (de un grupo abeliano), cómo se extienden las definiciones a una valoración, así como algunos de los resultados que relacionan el rango y el rango racional entre sí y con la estructura algebraica del anillo de valoración asociado.

Por último, el capítulo cinco se concentra en el caso de los anillos de valoración cuyo grupo de valores es isomorfo al anillo de los números enteros, $\mathbb{Z}$, que se corresponde con lo que se conoce como anillos de valoración discreta. En la primera sección se demuestran dos resultados conocidos del Álgebra Conmutativa, el lema de Artin-Rees y el teorema de la intersección de Krull, que serán utilizados en la segunda sección para demostrar varios criterios de caracterización de los anillos de valoración discreta.

En el capítulo seis se presenta una introducción al espacio de arcos, mostrando tanto la definición como desarrollando el ejemplo del espacio de arcos de la cúspide y cómo se puede manipular con el fin de realizar cálculos. También se demuestra que la resolución de singularidades define una biyección entre los espacios de arcos correspondientes en el caso de curvas analíticamente irreducibles. A continuación, se formulan algunas preguntas cuya solución es desconocida, y se proponen algunos enunciados más débiles que podrían resultar más sencillas de probar o rechazar.

Agradezco al Consejo Social de la Universidad la beca de colaboración en proyectos de investigación que me ha otorgado durante la realización de este trabajo.

2. Anillos de valoración

2.1. Definición y ejemplos básicos

Definición 2.1. *Sean A un dominio de integridad, y K su cuerpo de fracciones. Se dice que A es un anillo de valoración de K si se verifica que para cada elemento x no nulo de K, si $x \notin A$ entonces necesariamente $x^{-1} \in A$.*

En otras palabras, si definimos el conjunto

$$A^{-1} = \left\{x^{-1} : x \in A \setminus \{0\}\right\} \subseteq K$$

de los inversos de elementos de A, A es un anillo de valoración de K si y sólamente si $K = A \cup A^{-1}$.

Ejemplo 2.2. *Anillo de series $k[[t]]$.*
Consideramos k un cuerpo, y $k[[t]]$ el anillo de series formales en una variable con coeficientes en k, cuyo cuerpo de fracciones es $k((t))$, el cuerpo de series de Laurent con coeficientes en k.
Si escribimos una serie no nula cualquiera de $k[[t]]$ como

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + ... + a_i t^i + ... \in k[[t]], \quad a_i \in k$$

podemos definir el orden de $a(t)$, $\mathrm{ord}(a(t))$, como el menor número natural n tal que $a_n \neq 0$. Se conviene en que $\mathrm{ord}(0) = \infty$.
Sean $a(t), b(t) \in k[[t]], a(t) \neq 0, b(t) \neq 0$ dos series formales. Sean $n = \mathrm{ord}(a(t)), m = \mathrm{ord}(b(t))$, y supongamos que $n \geq m$. Consideramos el cociente

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} t^{n+2} + ...}{b_m t^m + b_{m+1} t^{m+1} + b_{m+2} t^{m+2} + ...} =$$

$$= \frac{t^m (a_n t^{n-m} + a_{n+1} t^{n-m+1} + ...)}{t^m (b_m + b_{m+1} t + ...)} = \frac{a_n t^{n-m} + a_{n+1} t^{n-m+1} + ...}{b_m + b_{m+1} t + ...} =$$

$$= (a_n t^{n-m} + a_{n+1} t^{n-m+1} + ...) b_m^{-1} \left(1 + \frac{b_{m+1}}{b_m} t + \frac{b_{m+2}}{b_m} t^2 + ...\right)^{-1} =$$

$$= (a_n t^{n-m} + a_{n+1} t^{n-m+1} + ...) b_m^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{b_{m+1}}{b_m} t - \frac{b_{m+2}}{b_m} t^2 - ...\right)^i$$

Es una serie de $k[[t]]$ porque la suma puede reescribirse como

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{b_{m+1}}{b_m} t - \frac{b_{m+2}}{b_m} t^2 - ...\right)^i = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \in k[[t]]$$

teniendo en cuenta que

$$\left(-\frac{b_{m+1}}{b_m}t-\frac{b_{m+2}}{b_m}t^2-...\right)^i\in(t^i)$$

de modo que c_n puede obtenerse considerando tan sólo un número finito de sumandos (en concreto todos hasta el n-ésimo).
En el caso en el que $\text{ord}(a(t))\leq\text{ord}(b(t))$, con un razonamiento análogo se obtiene que $\frac{b(t)}{a(t)}\in k[[t]]$.
Es decir, dados $a(t),b(t)\in k[[t]],a(t)\neq 0,b(t)\neq 0$, siempre se tiene que o bien $\frac{a(t)}{b(t)}\in k[[t]]$, o bien $\frac{b(t)}{a(t)}\in k[[t]]$, o bien ambas (si $\text{ord}(a(t))=\text{ord}(b(t))$). Por lo tanto $k[[t]]$ es un anillo de valoración de $k((t))$.

Cabría preguntarse si en otros anillos de valoración existe un concepto análogo al de orden en el anillo de series formales con coeficientes en un cuerpo. Como veremos más adelante, el orden de una serie es un ejemplo particular de valoración, y las valoraciones en un cuerpo están íntimamente ligadas a los anillos de valoración del mismo.

Ejemplo 2.3. *Localizaciones $\mathbb{Z}_{(p)}$.*
Consideramos el anillo de los enteros, $\mathbb{Z}$, y sean $p\in\mathbb{Z}$ un primo y (p) el ideal primo generado por éste. Trabajaremos con la localización de $\mathbb{Z}$ en (p), el anillo de fracciones

$$\mathbb{Z}_{(p)}=\left\{\frac{r}{s}:r,s\in\mathbb{Z},s\notin(p)\right\}$$

$\mathbb{Z}_{(p)}$ es un dominio, y su cuerpo de fracciones es $\mathbb{Q}$. Para comprobar esto, consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \text{Fr}\left(\mathbb{Z}_{(p)}\right) & \longrightarrow & \mathbb{Q}\\ & \frac{r}{s}/\frac{t}{u} & \longmapsto & \frac{ru}{ts}\end{array}$$

En primer lugar debemos comprobar que φ es una aplicación bien definida. Supongamos que $\frac{r}{s}/\frac{t}{u}=\frac{r'}{s'}/\frac{t'}{u'}$, es decir, $\frac{r}{s}\cdot\frac{t'}{u'}=\frac{r'}{s'}\cdot\frac{t}{u}$, de modo que $rus't'=str'u'$. Pero entonces queda claro que $\frac{ru}{st}=\frac{r'u'}{s't'}$.
La aplicación φ es un morfismo de anillos porque

$$\varphi\left(\frac{r}{s}/\frac{t}{u}+\frac{r'}{s'}/\frac{t'}{u'}\right)=\varphi\left(\frac{rt's'u+r'tsu'}{su's'u}/\frac{tt'}{uu'}\right)=\frac{(rt's'u+r'tsu')uu'}{tt'su's'u}=$$

$$=\frac{(rt's'u+r'tsu')}{tt'ss'}=\frac{rt's'u}{tt'ss'}+\frac{r'tsu'}{tt'ss'}=\frac{ru}{ts}+\frac{r'u'}{t's'}=\varphi\left(\frac{r}{s}/\frac{t}{u}\right)+\varphi\left(\frac{r'}{s'}/\frac{t'}{u'}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{r}{s}/\frac{t}{u}\cdot\frac{r'}{s'}/\frac{t'}{u'}\right)=\varphi\left(\frac{rr'}{ss'}/\frac{tt'}{uu'}\right)=\frac{rr'uu'}{tt'ss'}=\frac{ru}{ts}\cdot\frac{r'u'}{t's'}=\varphi\left(\frac{r}{s}/\frac{t}{u}\right)\cdot\varphi\left(\frac{r'}{s'}/\frac{t'}{u'}\right)$$

Es claro que $\text{Ker}(\varphi)=\{0\}$, luego φ es inyectivo. También es claro que φ es suprayectivo. Por lo tanto $\text{Fr}\left(\mathbb{Z}_{(p)}\right)\cong\mathbb{Q}$.

Ahora comprobemos que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es anillo de valoración de $\mathbb{Q}$. Tomemos $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ no nulo. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\gcd(m, n) = 1$. Si $n \notin (p)$, entonces $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Supongamos, por el contrario, que $n \in (p)$. Entonces $m \notin (p)$ al ser m y n primos entre sí, y se tiene que $\frac{n}{m} = \left(\frac{m}{n}\right)^{-1} \in \mathbb{Z}_{(p)}$. De esto se deduce que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es anillo de valoración.
Observamos que los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_{(p)}$ son aquellos en cuya forma simplificada tanto el numerador como el denominador no son divisibles por p. En $\mathbb{Q}$, los elementos de $\mathbb{Z}_{(p)}$ son las fracciones en cuya forma simplificada el denominador no es divisible por p (aunque el numerador pueda serlo). Existe un concepto de naturaleza similar al orden en el anillo de series, que se corresponde con la máxima potencia de p que puede extraerse del numerador en la forma simplificada.

Ejemplo 2.4. *Funciones meromorfas definidas en 0.*
En el cuerpo K de las funciones meromorfas en el plano complejo, se puede considerar el subanillo A formado por las funciones que no presentan un polo en el origen (es decir, aquellas que admiten un desarrollo de Taylor en el origen). Dada una función meromorfa $f \in K \setminus A$ que presenta un polo de orden k en el origen, entonces $\frac{1}{f}$ presenta un cero del mismo orden en el origen, de modo que $\frac{1}{f} \in A$. Por lo tanto A es un anillo de valoración de K. Obsérvese que aquí el orden de un cero en el origen (donde entendemos que un cero de orden $-k$, con $k > 0$, es un polo de orden k) juega un papel similar al del orden en las series de $k[[t]]$: las funciones de A son precisamente aquellas que presentan un cero de orden no negativo en el origen, y las unidades de A son las funciones con un cero de orden cero en el origen (es decir, las que toman un valor finito y no nulo en el origen).

2.2. Propiedades generales

A continuación se desarrollan algunas de las propiedades fundamentales de los anillos de valoración, que se utilizarán a lo largo de todo el texto.

Proposición 2.5. *Si A es un anillo de valoración de K, los ideales de A están ordenados totalmente por inclusión.*
Es decir, dados $I \subseteq A, J \subseteq A$ ideales de A, o bien $I \subseteq J$ o bien $J \subseteq I$.

Demostración. Sean $I, J \subseteq A$ ideales de A. Supongamos que $I \nsubseteq J$, y tomemos $x \in I \setminus J$. Para cualquier $y \in J$ no nulo, necesariamente $\frac{x}{y} \notin A$ (pues si $\frac{x}{y}$ fuese un elemento de A, se tendría que $x = \frac{x}{y} y \in J$, lo que contradice la hipótesis de que $x \notin J$). Al ser A anillo de valoración $\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} \in A$, de modo que $y = \frac{y}{x} x \in I$. Como esto es cierto para todo elemento y no nulo de J, se deduce que $J \subseteq I$. $\square$

En esta última demostración se puede sustituir los ideales de A por los A-módulos que son subconjuntos de K sin que aparezca ningún problema. Por lo tanto

Corolario 2.6. *Si A es un anillo de valoración de K, los A-módulos que sean subconjuntos de K (entre ellos los ideales de A) están ordenados totalmente por inclusión.*

Corolario 2.7. *Si A es un anillo de valoración de K, todo ideal finitamente generado I de A es un ideal principal, es decir, $I = (x)$ para algún $x \in A$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre el número n de generadores de I. El caso $n = 1$ es evidente. Supongamos ahora que todo ideal de A generado por $n-1$ elementos es un ideal principal, y veamos que esto también es cierto para ideales generados por n elementos. Dado $I = (x_1, ..., x_n)$, consideramos los ideales $(x_n) \subseteq I$ y $(x_1, ..., x_{n-1}) \subseteq I$. Este último se puede reescribir como (y) por la hipótesis de inducción. Por el resultado anterior, o bien $(x) \subseteq (y)$ o bien $(y) \subseteq (x)$, y como $I = (y) + (x)$, I está generado o bien por y o bien por x. □

Corolario 2.8. *Si A es un anillo de valoración de K, entonces A es un anillo local. Si $\mathfrak{m}$ es su ideal maximal, entonces*

$$K \setminus A = \left\{x \in K^* : x^{-1} \in \mathfrak{m}\right\}$$

Por lo tanto A queda determinado por $\mathfrak{m}$.

Demostración. Si $\mathfrak{m}_1$ y $\mathfrak{m}_2$ son dos ideales maximales de A, se tiene que $\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}_2$ o $\mathfrak{m}_2 \subseteq \mathfrak{m}_1$. En cualquier caso, al tratarse de dos ideales maximales necesariamente $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. A tiene un único ideal maximal, y por lo tanto es local.
Si $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de A, las unidades de A son precisamente los elementos de $A \setminus \mathfrak{m}$, al ser A un anillo local. Como A es anillo de valoración de K, $K \setminus A$ está formado por los inversos de los elementos de A que no son invertibles en el propio A, es decir, por los inversos en K de todos los elementos de $\mathfrak{m}$. □

Ejemplo 2.9. *Anillo de series $k[[t]]$.*
De nuevo, consideraremos $k[[t]]$ como anillo de valoración de $k((t))$. Es claro que $k[[t]]$ es un anillo local, puesto que se tiene el ideal maximal (t) (es maximal porque el cociente $\frac{k[[t]]}{(t)}$ es isomorfo a k), y todos los elementos de $k[[t]] \setminus (t)$, es decir, las series con término independiente no nulo, pueden invertirse en $k[[t]]$ de la misma forma que se invirtió $\frac{b(t)}{t^m}$ en el ejemplo 2.2.
Además, todos los elementos de $k((t))$ que no pueden escribirse como una serie en $k[[t]]$ son inversos de algún elemento de (t), es decir, inversos de una serie de orden estrictamente mayor que cero. Esto se deduce del corolario anterior, pero también está implícito en la demostración que dimos de que $k[[t]]$ es un anillo de valoración (si $\frac{a(t)}{b(t)} \notin k[[t]]$, entonces $\operatorname{ord}(b(t)) > \operatorname{ord}(a(t))$, y se deduce que $\frac{b(t)}{a(t)} \in k[[t]]$).

Proposición 2.10. *Sea A un anillo de valoración de un cuerpo K con ideal maximal $\mathfrak{m}$. Entonces:*

1. *Si B es otro subanillo de K de modo que $A \subseteq B \subseteq K$, entonces B es otro anillo de valoración de K.*

2. *Si $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ es un ideal primo de A, entonces $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo de valoración de K que contiene a A.*

Demostración. 1. De la definición de anillo de valoración se deduce inmediatamente que B es anillo de valoración de K.

2. Al ser A un dominio, se tiene que $A \subseteq A_{\mathfrak{p}}$ (pues $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$ si y sólo si $a = b$). $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo de valoración por el apartado anterior.

□

Proposición 2.11. *Sean $A \subseteq B$ dos anillos de valoración de un cuerpo K. Denotemos por $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{p}$ los ideales maximales de A y B, respectivamente. En esta situación, se tiene:*

1. $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq A \subseteq B$

2. *$\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, y $B = A_{\mathfrak{p}}$.*

3. *$\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es un anillo de valoración del cuerpo $\frac{B}{\mathfrak{p}}$.*

Demostración. 1. Veamos que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Si $x \in \mathfrak{p}, x \neq 0$, entonces $x^{-1} \notin B$ por ser $\mathfrak{p}$ el ideal maximal de B. Por lo tanto $x^{-1} \notin A$, y $x \in A$ por ser A anillo de valoración. Ahora bien, x no puede ser unidad en A (pues entonces lo sería también en B y se concluiría que $\mathfrak{p} = B$), de modo que $x \in \mathfrak{m}$.

2. Como $\mathfrak{p} \subseteq A$ por el apartado 1, se tiene que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap A$ es la contracción de un ideal primo de B por la aplicación inclusión, y por lo tanto es primo en A.
   También se tiene que $A \setminus \mathfrak{p} \subseteq B \setminus \mathfrak{p} = \{\text{unidades de } B\}$. Si $s \in A \setminus \mathfrak{p}$, s es una unidad de B, y $\frac{1}{s} \in B$, por lo que $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B$.
   Por otro lado, el ideal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, está formado por los elementos de la forma $\frac{a}{s}$, donde $a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p}$. Ahora bien, $\frac{a}{s} = a\frac{1}{s} \in \mathfrak{p}B = \mathfrak{p}$, de modo que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}$.
   Finalmente, $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo de valoración de K que contiene a A. Tenemos que $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B$ son anillos de valoración de K, y sus ideales maximales verifican $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}$. Por el apartado anterior, también se deduce que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, luego $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, y se concluye que $A_{\mathfrak{p}} = B$.

3. Teniendo en cuenta que $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de B y que $B = A_{\mathfrak{p}}$, se deduce que $\frac{B}{\mathfrak{p}}$ es el cuerpo de fracciones de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$. Veamos que $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es anillo de valoración de $\frac{B}{\mathfrak{p}}$. Consideramos $\varphi : B \to \frac{B}{\mathfrak{p}}$ la aplicación suprayectiva de paso al cociente. Si tomamos $x \in B \setminus \mathfrak{p}$ (es decir, $x \in B, \varphi(x) \neq 0$), entonces:

   - Si $x \in A$, entonces $\varphi(x) \in \frac{A}{\mathfrak{p}}$.
   - Si $x \notin A$, entonces $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}) \in \frac{A}{\mathfrak{p}}$.

   Con esto se concluye que $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es anillo de valoración de $\frac{B}{\mathfrak{p}}$.

$\square$

Definición 2.12. *Sean K un cuerpo, y B un anillo de valoración de K con ideal maximal $\mathfrak{p}$. Sea $\overline{C}$ es un anillo de valoración de $\frac{B}{\mathfrak{p}}$, y sea C su contraimagen en B por la aplicación de paso al cociente. Entonces C es un anillo de valoración de K, que se denomina compuesto de B y $\overline{C}$.*

Demostración. Se tiene que $\mathfrak{p} \subseteq C$, $\frac{C}{\mathfrak{p}} = \overline{C}$, luego si $x \in B \setminus C$ entonces x es unidad en B, y $\varphi(x) \notin \overline{C}$. Luego $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \in \overline{C}$, de modo que $x^{-1} \in C$. Si $x \in K \setminus B$ entonces $x^{-1} \in \mathfrak{p} \subset C$. Hemos probado que C es anillo de valoración de K. $\square$

Corolario 2.13. *Sean K un cuerpo, y B un anillo de valoración de K. Entonces todo anillo de valoración de K contenido en B es compuesto de B y algún anillo de valoración de $\frac{B}{\mathfrak{p}}$.*

Demostración. Es consecuencia directa del apartado 3 de la proposición 2.11, que nos indica que si A es anillo de valoración de K, $A \subseteq B \subseteq K$, entonces A es el compuesto de B y $\frac{A}{\mathfrak{p}}$. $\square$

Definición 2.14. *Sea A un anillo local. Salvo que se indique lo contrario, $\mathfrak{m}_A$ denotará su ideal maximal.*
Si A y B son anillos locales tales que $A \subseteq B$ y $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$, decimos que B domina A, y escribimos $B \succeq A$. Si $B \succeq A$, y $B \neq A$, escribimos $B \succ A$.

De este modo se define una relación de orden parcial en el conjunto de los subanillos locales de un cuerpo K. En los siguientes resultados se comprobará que los anillos de valoración de un cuerpo son precisamente los anillos locales maximales para la relación de dominación, y de hecho algunos textos utilizan esta caracterización como definición de anillo de valoración (por ejemplo [Va]).
En primer logar, comprobaremos que fijado cualquier subanillo local de un cuerpo K, éste se puede extender a un anillo de valoración de K que lo domina. De hecho se tiene el siguiente resultado más general:

Teorema 2.15. *(Teorema 10.2 en [Ma])*
Sea K un cuerpo, y $A \subseteq K$ un subanillo del mismo. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Entonces existe un anillo de valoración B de K que satisface que

$$A \subseteq B \text{ y } \mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{p}$$

Demostración. Si sustituimos A por $A_\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}$ por $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ en las hipótesis, el anillo B obtenido para $A_\mathfrak{p}$ también satisface las condiciones pedidas para A. En efecto, sea B un anillo de valoración de K que satisface que $A_\mathfrak{p} \subseteq B$ y $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_B \cap A_\mathfrak{p}$. Entonces $A \subseteq A_\mathfrak{p} \subseteq B$, y $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}_B \cap A_\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}_B \cap A$.
En otras plabras, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A es un anillo local y que $\mathfrak{p}$ es su ideal maximal, y queremos encontrar un anillo de valoración B que domine A.
Definamos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{C \text{ subanillo de } K : A \subseteq C \text{ y } 1 \notin \mathfrak{p}C\}.$$

Es claro que $A \in \mathcal{F}$, y que si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{F}$ totalmente ordenado por inclusión, entonces $\bigcup_{C \in \mathcal{L}} C \in \mathcal{F}$ es una cota superior de $\mathcal{L}$. El lema de Zorn nos garantiza que existe un elemento maximal de $\mathcal{F}$, al que llamaremos B.
Vamos a probar que B satisface las condiciones que se piden en el teorema. En primer lugar, como $\mathfrak{p}B \neq B$, hay un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de B que contiene a $\mathfrak{p}B$. Veamos ahora que $B_\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$. Si fuese $1 \in \mathfrak{p}B_\mathfrak{m}$, entonces

$$1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{b_i}{s_i}, \text{ donde } a_i \in \mathfrak{p}, b_i \in B, s_i \in B \setminus \mathfrak{m}, \text{ luego}$$

$$\prod_{i=1}^{r} s_i = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i \left(\prod_{j \neq i} s_j \right) \in \mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{m}$$

Como $s_i \in B \setminus \mathfrak{m}$ para todo i, su producto tampoco es un elemento del ideal maximal (y por tanto primo) $\mathfrak{m}$. Hemos llegado a una contradicción, por lo que necesariamente $1 \notin \mathfrak{p}B_\mathfrak{m}$, y $B_\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$.
Como $B \subseteq B_\mathfrak{m}$, $B_\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$ y B es maximal en $\mathcal{F}$, necesariamente $B = B_\mathfrak{m}$, y B es un anillo local. Tenemos que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \cap A$, y además $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A. Se deduce que $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$.
Sólo falta probar que B es un anillo de valoración de K.
Si $x \in K$ y $x \notin B$, entonces $B[x] \notin \mathcal{F}$ por ser B un elemento maximal de $\mathcal{F}$. Se tiene por tanto que $1 \in \mathfrak{p}B[x]$, y existe una relación de la forma

$$1 = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \quad a_i \in \mathfrak{p}B$$

La diferencia $1 - a_0$ es necesariamente una unidad de B porque $a_0 \in \mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{m}$, y $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal del anillo local B. Por lo tanto podemos dividir la expresión por $1 - a_0$, obteniendo

$$1 = b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n, \quad b_i \in \mathfrak{m} \tag{1}$$

Consideramos n el mínimo para que exista una relación de este tipo.
Si además de $x \notin B$ se tuviese $x^{-1} \notin B$, de modo análogo se deduce que existe al menos una relación del tipo

$$1 = c_1 x^{-1} + ... + c_m x^{-m}, \quad c_i \in \mathfrak{m} \tag{2}$$

y de nuevo podemos suponer m es el mínimo posible.
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n \geq m$. Multiplicando (2) por $b_n x^n$ y sumándole (1), se obtiene

$$1 = c_1 b_n x^{n-1} + ... + c_m b_n x^{n-m} + b_1 x + ... b_{n-1} x^{n-1}$$

que es una relación como la de (1) pero de grado $n-1$. Esto contradice nuestra suposición de que n es el mínimo posible. En el caso $m > n$ se llega a una contradicción análoga. Por lo tanto, es imposible que $x \notin B$, $x^{-1} \notin B$ simultáneamente. También debemos comprobar que $K = \mathrm{Fr}(B)$, pero esto es cierto porque cualquier elemento de K es o bien de la forma $b \in B$ o de la forma $\frac{1}{b}, b \in B$. Por lo tanto B es un anillo de valoración de K que satisface las propiedades deseadas. $\square$

Con las propiedades que hemos descrito hasta ahora, podemos dar varias condiciones equivalentes a ser anillo de valoración de un cuerpo K:

Corolario 2.16. *(Teorema 1.1 en [Va])*
Sea K un cuerpo, $A \subseteq K$ un subanillo. Son equivalentes:

1. *A es anillo de valoración de K.*

2. *A es un anillo local, y es maximal para la relación de dominación.*

3. *K es el cuerpo de fracciones de A, y los ideales de A están ordenados totalmente por inclusión.*

4. *K es el cuerpo de fracciones de A, y los ideales principales de A están ordenados totalmente por inclusión.*

Demostración. Demostraremos que (1) $\Leftrightarrow$ (2) y que (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

- (1) $\Rightarrow$ (2): Supongamos que A es un anillo de valoración de K (entonces A es un anillo local), y sea $A' \supsetneq A$ otro subanillo de K que lo contiene estrictamente.

Entonces A' es también un anillo de valoración de K, y en particular es un anillo local. Ahora bien, el primer apartado de la proposición 2.11 nos garantiza que $\mathfrak{m}_{A'} \subsetneq \mathfrak{m}_A$, y entonces A' no puede dominar A. Es decir, si A es anillo de valoración no existe ningún otro anillo local que lo domine.

- (2) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que A es un anillo local maximal para la relación de dominación. Por el teorema 2.15 existe un anillo de valoración B de K que domina A. Al ser A maximal para la relación de dominación, necesariamente $B = A$, y A es anillo de valoración de K.

- (1) $\Rightarrow$ (3): Es la proposición 2.5, ya demostrada.

- (3) $\Rightarrow$ (4): Es evidente.

- (4) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que K es el cuerpo de fracciones de A, y que los ideales principales de A están ordenados totalmente por inclusión. Sea $x \in K$, $x \neq 0$. Queremos ver que $x \in A$ o $x^{-1} \in A$. Como K es el cuerpo de fracciones de A, podemos reescribir x como $x = \frac{a}{b}, a \in A, b \in A, a \neq 0, b \neq 0$. Ahora bien, al estar los ideales principales de A totalmente ordenados por inclusión, necesariamente es cierta al menos una de las siguientes afirmaciones:

  - $(a) \subseteq (b)$: En este caso $a = bc, c \in A$, y $x = \frac{a}{b} = \frac{bc}{b} = c \in A$.
  - $(b) \subseteq (a)$: En este caso $b = ad, d \in A$, y $x^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{ad}{a} = d \in A$.

  Se concluye que necesariamente $x \in A$ o $x^{-1} \in A$, por lo que A es un anillo de valoración de K.

□

Ahora se mostrará la relación que existe entre los anillos de valoración de un cuerpo K y las relaciones de dependencia entera para los subanillos de K.

Proposición 2.17. *Todo anillo de valoración de un cuerpo K es íntegramente cerrado en K.*

Demostración. Sean K un cuerpo, B un anillo de valoración de K, y sea $x \in K$ entero sobre B, con la relación de dependencia entera

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0, \quad a_i \in B$$

Razonemos por reducción al absurdo. Si $x \notin B$ entonces $x^{-1} \in B$, y no es una unidad de B, luego $x^{-1} \in \mathfrak{m}_B$. Multiplicando la relación de dependencia entera por x^{-n} se obtiene

$$1 + a_1 x^{-1} + ... + a_n x^{-n} = 0$$

y se concluye que $1 \in \mathfrak{m}_B$, lo que contradice que $\mathfrak{m}_B$ sea ideal maximal. Por lo tanto $x \in B$. $\square$

Teorema 2.18. *(Teorema 10.4 en [Ma])*
Sea K un cuerpo, $A \subseteq K$ un subanillo del mismo. Sea $\overline{A}$ la clausura entera de A. Entonces $\overline{A}$ es la intersección de todos los anillos de valoración de K que contienen a A:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq B \text{ de} \\ \text{valoración}}} B$$

Demostración. Sea C la intersección de todos los anillos de valoración de K que contienen A. Puesto que todos los anillos de valoración son íntegramente cerrados en K, es claro que $\overline{A} \subseteq C$. Nos falta ver que $\overline{A} \supseteq C$. Para ello, nos basta comprobar que si $x \in K$ no es entero sobre A, entonces existe un anillo de valoración de K que contiene A pero al que no pertenece x.
Sean $x \in K$, $x \notin \overline{A}$, $y = x^{-1}$. El ideal $yA[y] = (y)$ de $A[y]$ no puede contener a 1, pues de lo contrario se tendría una relación del tipo

$$1 = a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_n y^n, \quad a_i \in A$$

y multiplicando por x^n se deduciría que

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n, \quad a_i \in A$$

contradiciendo la suposición de que x no es entero sobre A. Por lo tanto $yA[y] \neq A[y]$, y existe un ideal maximal de $A[y]$, $\mathfrak{p}$, que contiene a $yA[y]$.
Por el teorema 2.15, existe un anillo de valoración C de K que contiene a $A[y]$ y de modo que $\mathfrak{m}_C \cap A[y] = \mathfrak{p}$. Como $y = x^{-1} \in \mathfrak{m}_C$ y los elementos de $\mathfrak{m}_C$ no son invertibles en C, necesariamente $x \notin C$, que es lo que buscábamos. $\square$

2.3. Superficie de Zariski-Riemann

Definición 2.19. *Sean K un cuerpo, y $A \subseteq K$ un subanillo. Si B es un anillo de valoración de K y contiene a A, se dice que B tiene un centro en A, y el ideal primo $\mathfrak{m}_B \cap A$ de A se denomina centro de B en A.*
El conjunto de anillos de valoración de K con centro en A se denomina espacio de Zariski o superficie de Zariski-Riemann de K sobre A, y se denota por $\mathrm{Zar}(K, A)$.

En $\mathrm{Zar}(K, A)$ se puede definir una topología:
Tomando $x_1, ..., x_n \in K$ cualesquiera, sea

$$\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \mathrm{Zar}(K, A[x_1, ..., x_n]) \subseteq \mathrm{Zar}(K, A)$$

Es claro que

$$\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) \cap \mathcal{U}(y_1, ..., y_m) = \mathcal{U}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$$

y que $\mathrm{Zar}(K, A) = \mathcal{U}(\varnothing)$, de modo que $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}(x_1, ..., x_n), n \geq 0, x_i \in K\}$ es una base de abiertos en $\mathrm{Zar}(K, A)$. Esta base de abiertos define una topología en $\mathrm{Zar}(K, A)$, que se denomina topología de Zariski.
El espacio de Zariski cuenta con muchas propiedades notables. Aquí demostraremos que se trata de un espacio topológico casi-compacto.

Teorema 2.20. *(Teorema 10.5 en [Ma])*
$\mathrm{Zar}(K, A)$ *es un espacio topológico casi-compacto.*

Demostración. Recurriremos a la caracterización de los espacios casi-compactos dada por la propiedad de las intersecciones finitas. Consideraremos familias de cerrados $\mathcal{A}$ tales que cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{A}$ sea no vacía (de ahora en adelante, las denominaremos familias que verifican la propiedad de las intersecciones finitas, para mayor brevedad). Para demostrar que $\mathrm{Zar}(K, A)$ es casi-compacto basta con probar que la intersección de todos los cerrados de cualquiera de estas familias es no vacía.
En el conjunto de familias de cerrados que verifican la propiedad de las intersecciones finitas se puede dar la relación de orden parcial

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{A}' \Longleftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$$

El lema de Zorn nos garantiza que cualquier familia de este tipo está contenida en una familia maximal $\mathcal{A}'$ que verifica las mismas características. Por lo tanto podemos suponer que las familias $\mathcal{A}$ consideradas son maximales. Para estas familias maximales se verifica que:

1. *Si $F_1, ..., F_r \in \mathcal{A}$ son cerrados de la familia maximal, entonces su intersección también lo es, $F_1 \cap ... \cap F_r \in \mathcal{A}$.*
   Basta comprobar que $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{F_1 \cap ... \cap F_r\}$ también verifica la propiedad de las intersecciones finitas, y al ser $\mathcal{A}$ maximal se deducirá que $\mathcal{A} \cup \{F_1 \cap ... \cap F_r\} = \mathcal{A}$. Las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ son o bien intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$, que son no vacías; o bien la intersección de $F_1 \cap ... \cap F_r$ con una intersección finita de elementos de A, que también son intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$, y por tanto no vacías.

2. *Si un cerrado F de* $\mathrm{Zar}(K, A)$ *contiene a un elemento de $\mathcal{A}$, entonces F es un elemento de $\mathcal{A}$.*
   De forma análoga al caso anterior, se comprueba que $\mathcal{A} \cup \{F\}$ verifica la propiedad de las intersecciones finitas (pues si $F \supseteq F'$ con $F' \in \mathcal{A}$, se tiene que, si $F_i \in \mathcal{A}, i = 1, ...r$, entonces $F \cap F_1 \cap ... \cap F_r \supseteq F' \cap F_1 \cap ... \cap F_r \neq \varnothing$), y se deduce que $\mathcal{A} \cup \{F\} = \mathcal{A}$.

3. *Si* $Z_1, ..., Z_n \subseteq \mathrm{Zar}(K, A)$ *son cerrados cualesquiera de* $\mathrm{Zar}(K, A)$ *tales que* $Z_1 \cup ... \cup Z_n \in \mathcal{A}$*, entonces* $Z_i \in \mathcal{A}$ *para algún* i.
   Razonaremos por inducción sobre n. El caso en el que $n = 1$ es claramente cierto. Ahora supongamos que la propiedad se da para uniones de $n - 1$ cerrados, y veamos que también es cierta para uniones de n cerrados.
   Sean $Z_1, ..., Z_n \subseteq \mathrm{Zar}(K, A)$ cerrados tales que $Z_1 \cup ... \cup Z_n \in \mathcal{A}$. Si $Z_1 \in \mathcal{A}$, hemos terminado. Nos basta ver que si $Z_1 \notin \mathcal{A}$, entonces $Z_2 \cup ... \cup Z_n \in \mathcal{A}$, pues entonces por la hipótesis de inducción existiría un i entre 2 y n tal que $Z_i \in \mathcal{A}$.
   Si $Z_1 \notin \mathcal{A}$, existen $F_1, ..., F_r \in \mathcal{A}$ tales que $Z_1 \cap F_1 \cap ... \cap F_r = \varnothing$, ya que $\mathcal{A}$ es maximal, y por lo tanto $\mathcal{A} \cup \{Z_1\}$ no verifica la propiedad de las intersecciones finitas. Ahora bien, dados $F_1', ..., F_s' \in \mathcal{A}$, se tiene que

   $$(Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_n) \cap F_1 \cap ... \cap F_r \cap F_1' \cap ... \cap F_s' \neq \varnothing$$

   Como $Z_1 \cap F_1 \cap ... \cap F_r = \varnothing$, sabemos que

   $$Z_1 \cap F_1 \cap ... \cap F_r \cap F_1' \cap ... \cap F_s' = \varnothing$$

   Y entonces necesariamente

   $$(Z_2 \cup ... \cup Z_n) \cap F_1' \cap ... \cap F_s' \supseteq$$

   $$\supseteq (Z_2 \cup ... \cup Z_n) \cap F_1 \cap ... \cap F_r \cap F_1' \cap ... \cap F_s' \neq \varnothing$$

   Esto es cierto para cualquier elección de $F_1', ..., F_s' \in \mathcal{A}$, y como $\mathcal{A}$ es maximal, se deduce que $Z_2 \cup ... \cup Z_n \in \mathcal{A}$. La hipótesis de inducción nos garantiza que existe $i \in \{2, ..., n\}$ para el que $Z_i \in \mathcal{A}$.

Dado $Y \subseteq \mathrm{Zar}(K, A)$, denotaremos por Y^c a su complementario, $\mathrm{Zar}(K, A) \setminus Y$, para abreviar la notación.
Sea $F \in \mathcal{A}$. Su complementario es un abierto, y puede escribirse como $F^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_F} \mathcal{U}_\lambda$, donde $\mathcal{U}_\lambda$ son abiertos de la base antes descrita. Entonces $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_F} \mathcal{U}_\lambda^c$.
Como $\mathcal{A}$ es maximal, $F \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{U}_\lambda^c \supseteq F$, de la propiedad 2 se deduce que $\mathcal{U}_\lambda^c \in \mathcal{A}$ para todo $\lambda \in \Lambda_F$. Por tanto

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \bigcap_{\mathcal{U}_\lambda^c \in \mathcal{A}} \mathcal{U}_\lambda^c$$

Ahora bien, dado un abierto de la base $\mathcal{U}_\lambda$ con $\mathcal{U}_\lambda^c \in \mathcal{A}$, existen $x_1^\lambda, ..., x_{n_\lambda}^\lambda$ tales que

$$\mathcal{U}_\lambda^c = \mathcal{U}(x_1^\lambda, ..., x_{n_\lambda}^\lambda)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n_\lambda} \mathcal{U}(x_i^\lambda) \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n_\lambda} \mathcal{U}(x_i^\lambda)^c \in \mathcal{A}$$

Entonces, puesto que $\mathcal{U}_\lambda^c \in \mathcal{A}$, de la propiedad 3 se deduce que $\mathcal{U}(x_i^\lambda)^c \in \mathcal{A}$ para algún $i \in \{1, ..., n_\lambda\}$. Esto implica que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \bigcap_{\mathcal{U}_\lambda^c \in \mathcal{A}} \mathcal{U}_\lambda^c \supseteq \bigcap_{\substack{x \in K \\ \mathcal{U}(x)^c \in \mathcal{A}}} \mathcal{U}(x)^c$$

Por lo tanto nos bastaría con probar que la intersección de la derecha es no vacía. Obsérvese que dados $B \in \mathrm{Zar}(K, A)$ e $y \in K$, la condición necesaria y suficiente para que $B \in \mathcal{U}(y^{-1})^c$ es que $y \in \mathfrak{m}_B$, pues

$$B \in \mathcal{U}(y^{-1})^c \Leftrightarrow A[y^{-1}] \not\subseteq B \Leftrightarrow y^{-1} \notin B \Leftrightarrow y \in \mathfrak{m}_B$$

Sea $\Gamma = \{y \in K \setminus \{0\} : \mathcal{U}(y^{-1})^c \in \mathcal{A}\}$. Teniendo en cuenta la caracterización anterior, es claro que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \bigcap_{\substack{x \in K \\ \mathcal{U}(x)^c \in \mathcal{A}}} \mathcal{U}(x)^c = \{B \in \mathrm{Zar}(K, A) : \mathfrak{m}_B \supseteq \Gamma\}$$

Sea $I = (\Gamma)$ el ideal de $A[\Gamma]$ generado por Γ. Si $1 \in I$, entonces existe un subconjunto finito de Γ, $\{y_1, ..., y_r\} \subseteq \Gamma$ tal que $1 \in \sum_{i=1}^r y_i A[y_1, ..., y_r]$. De ser así entonces $\mathcal{U}(y_1^{-1})^c \cap ... \cap \mathcal{U}(y_r^{-1})^c = \varnothing$ (pues 1 sería un elemento del ideal maximal $\mathfrak{m}_B$ de cualquier B de esta intersección, ya que se tendría $y_1 \in \mathfrak{m}_B, ..., y_r \in \mathfrak{m}_B$), lo que contradice la hipótesis sobre $\mathcal{A}$. Se deduce que $1 \notin I$, de modo que I puede extenderse a un ideal maximal $\mathfrak{m}(I)$ de $A[\Gamma]$, y por el teorema 2.15 existe un anillo de valoración B que contiene a $A[\Gamma]$ y tal que $\mathfrak{m}_B \cap A[\Gamma] = \mathfrak{m}(I) \supseteq \Gamma$. Por lo tanto el conjunto $\{B \in \mathrm{Zar}(K, A) : \mathfrak{m}_B \supseteq \Gamma\}$ es no vacío, que es lo que queríamos demostrar.
Se concluye que dada cualquier familia $\mathcal{A}$ que verifique la propiedad de las intersecciones finitas y sea maximal, su intersección es no vacía. Por lo tanto $\mathrm{Zar}(K, A)$ es casi-compacto. $\square$

Observación. La demostración de este resultado aquí recogida procede de [Ma] (teorema 10.5). Otra demostración diferente fue publicada en [Z-S], una versión de la cual puede encontrarse en [Va] (teorema 7.2).

3. Valoraciones

3.1. Definición

En el ejemplo del anillo de series formales $k[[t]]$, observamos que el concepto de orden de las series juega un papel muy importante en su estructura como anillo de valoración de $k((t))$. En esta sección se desarrollará el concepto de valoración en un cuerpo, que es una generalización de esta noción de orden. También veremos que dar una valoración en un cuerpo es equivalente a dar un anillo de valoración del mismo.

Definición 3.1. *Un grupo abeliano H, que escribiremos con notación aditiva, se dice un grupo ordenado si en él se da una relación de orden total $\leq$ que verifica la siguiente propiedad:*

$$x \leq y, z \leq t, \quad x, y, z, t \in H \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + t$$

Un morfismo de grupos entre dos grupos ordenados $\varphi : G \longrightarrow H$ se dice morfismo de grupos ordenados si respeta el orden, es decir, si

$$x \leq y, x, y \in G \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$$

Consecuencias inmediatas de esta definición son:

- $x > 0, y \geq 0, \quad x, y \in H \quad \Longrightarrow \quad x + y > 0$
- $x \geq y, \quad x, y \in H \quad \Longrightarrow \quad -y \geq -x$
- Se tienen los subconjuntos de elementos “positivos” y “negativos” de G,

  $$G^+ = \{x \in G : x \geq 0\} \quad \text{y} \quad G^- = \{x \in G : x \leq 0\}$$

  Se cumple que

  $$G = G^+ \cup G^-, \quad G^+ \cap G^- = \{0\}, \quad \text{y} \quad x \geq y \Longleftrightarrow x - y \in G^+$$

- G es un grupo sin torsión.

Observación. Entenderemos por grupo ordenado a un grupo abeliano con una relación de orden total compatible con la estructura de grupo. En otros textos la noción de grupo ordenado es más general, ya que se permiten relaciones de orden parciales (de modo que habría que distinguir grupos parcialmente ordenados de grupos totalmente ordenados). También se puede extender la noción a grupos no necesariamente conmutativos, en cuyo caso hay que distinguir grupos “ordenados por la izquierda” y grupos “ordenados por la derecha” además de grupos biordenados. Todas estas consideraciones son innecesarias para lo que se va a desarrollar aquí, de modo que nos reduciremos a la definición más estricta.

A partir de H un grupo ordenado se puede construir un conjunto totalmente ordenado $H \cup \{\infty\}$, donde $\infty > x$ para cualquier $x \in H$. Se conviene en que $\infty + x = \infty$ para cualquier $x \in H$, y en que $\infty + \infty = \infty$.

Ejemplo 3.2. *Algunos ejemplos de grupos ordenados:*

- $(\mathbb{R}, +, \leq)$ *con el orden habitual de la recta real es un grupo ordenado, y es isomorfo a* $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, \leq)$ *a través de la aplicación exponencial, que respeta el orden.*
- $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ *es un grupo ordenado.*
- $(\mathbb{Z}^n, +, \leq_{lex})$*, donde* $+$ *representa la suma componente a componente y* $\leq_{lex}$ *es el orden lexicográfico, es un grupo ordenado.*

Definición 3.3. *Sean* K *un cuerpo,* H *un grupo ordenado. Una valoración en* K *es una aplicación* $v : K \longrightarrow H \cup \{\infty\}$ *que satisface:*

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$*, para cualquier* $x, y \in K$
2. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$*, para cualquier* $x, y \in K$
3. $v(x) = \infty \iff x = 0$

Proposición 3.4. *Si* $v : K \longrightarrow H \cup \{\infty\}$ *es una valoración,* v *induce un morfismo de grupos* $\overline{v} : K^* \longrightarrow H$ *por restricción.*

Definición 3.5. *Si* $v : K \longrightarrow H \cup \{0\}$ *es una valoración en un cuerpo* K*, la imagen de* $\overline{v} : K^* \longrightarrow H$ *es un subgrupo de* H *que se denomina grupo de valores de* v*.*

Para dar una valoración v en un cuerpo K, es habitual dar la aplicación $\overline{v}$, pues se entiende que la imagen del cero es ∞. Además, para dar una valoración en un cuerpo basta con dar una aplicación de propiedades similares a una valoración en un dominio cuyo cuerpo de fracciones sea K, y esta aplicación se extiende de manera natural a una valoración en K:

Lema 3.6. *Sean* A *un dominio de integridad, y* K *su cuerpo de fracciones, y sea* H *un grupo ordenado. Supongamos que tenemos una aplicación* $\nu : A \setminus \{0\} \longrightarrow H$ *que verifica las siguientes propiedades:*

1^* $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$*, para cualquier* $a, b \in A \setminus \{0\}$

2^* $\nu(a + b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$*, para cualquier* $a, b \in A \setminus \{0\}, a + b \neq 0$

Entonces existe una única valoración en K, v, de modo que la restricción de v a A sea ν. La valoración v está dada por

$$\begin{array}{rccl} v: & K & \longrightarrow & H \cup \{\infty\} \\ a, b \in A \setminus \{0\}, & \frac{a}{b} & \longmapsto & \nu(a) - \nu(b) \\ & 0 & \longmapsto & \infty \end{array}$$

Demostración. Si v es una valoración en K entonces $v(x^{-1}) = -v(x)$. Esto demuestra la unicidad una vez que hayamos probado que v es una valoración. En efecto, la aplicación v está bien definida ya que si tomamos $a, b, c, d \in A$ con $a, b, c, d \neq 0$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, es decir, $ad = bc$, entonces se verifica

$$v\left(\frac{a}{b}\right) = \nu(a) - \nu(b) = \nu(ad) - \nu(d) - \nu(bc) + \nu(c) = \nu(c) - \nu(d) = v\left(\frac{c}{d}\right)$$

La restricción a A de v así definida es ν, puesto que la propiedad (1^*) nos garantiza que $\nu(1) = 0$. Por otro lado, es claro que la definición dada de v verifica la propiedad (3) que se exigía a las valoraciones, y que las propiedades (1) y (2) se satisfacen si al menos uno de los sumandos o factores es cero. Por lo tanto nos basta con comprobar las propiedades (1) y (2) para elementos no nulos de K.
Las propiedades (1) y (2) son ciertas para los elementos de A como consecuencia directa de (1^*) y (2^*). Veamos que se pueden extender a las fracciones de elementos de A. Sean $a, b, c, d \in A \setminus \{0\}$.

$$v\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = v\left(\frac{ac}{bd}\right) = \nu(a) + \nu(c) - \nu(b) - \nu(d) = v\left(\frac{a}{b}\right) + v\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$\begin{aligned} v\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = v\left(\frac{ad + cb}{bd}\right) &= \nu(ad + cb) - \nu(bd) \geq \\ \geq \min\{\nu(a) + \nu(d), \nu(c) + \nu(b)\} &- \nu(b) - \nu(d) = \\ = \min\{\nu(a) - \nu(b), \nu(c) - \nu(d)\} &= \min\left\{v\left(\frac{a}{b}\right), v\left(\frac{c}{d}\right)\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto v verifica (1), (2) y (3), y es una valoración en K. □

3.2. Relación entre anillos de valoración y valoraciones

El siguiente teorema muestra que existe una correspondencia biyectiva entre los anillos de valoración de un cuerpo K y las valoraciones de K módulo isomorfismo de los grupos de valores.

Teorema 3.7. *Sea K un cuerpo. Entonces:*

1. *Sea $v : K \longrightarrow H \cup \{\infty\}$ es una valoración. Se definen*

$$R_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}, \qquad \mathfrak{m}_v = \{x \in K : v(x) > 0\}$$

   Entonces R_v es un anillo de valoración de K, y $\mathfrak{m}_v$ es su ideal maximal.

2. *Sea A un anillo de valoración de K. Definimos*

$$G = \{xA : x \in K, x \neq 0\}$$

   Consideramos en G la relación de orden total

$$xA \leq yA \iff yA \subseteq xA, \qquad xA, yA \in G$$

   Por otro lado, G tiene estructura de grupo abeliano con el producto

$$(xA) \cdot (yA) = xyA, \quad xA, yA \in G$$

   $(G, \cdot, \leq)$ es entonces un grupo ordenado.
   Además, A induce una valoración en K dada por

$$\begin{array}{rccl} v: & K & \longrightarrow & G \cup \{\infty\} \\ & 0 & \longmapsto & \infty \\ & x \neq 0 & \longmapsto & xA \end{array}$$

   Por último, el anillo de valoración asociado a v es A, $R_v = A$.

3. *Sean v y v' valoraciones en K con grupos de valores H y H', y tales que $R_v = R_{v'}$. Entonces existe un isomorfismo de grupos ordenados $\varphi : H \longrightarrow H'$ tal que $v' = \varphi \circ v$.*

Demostración. Se probará cada una de las afirmaciones por separado.

1. Comprobemos primero que R_v es un subanillo de K. Supongamos que x, y son elementos de R_v, es decir, que $x, y \in K$ y $v(x) \geq 0$, $v(y) \geq 0$.

   - $v(xy) = v(x) + v(y) \geq 0$, luego $xy \in R_v$.
   - $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\} \geq 0$, luego $x + y \in R_v$.
   - $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$, por lo que $v(1) = 0$, y $1 \in R_v$.

   Por lo tanto R_v es un subanillo de K.
   Ahora comprobemos que R_v es un anillo de valoración de K. Si $x \in K$, y $x \notin R_v$, se tiene $v(x) < 0$. Ahora bien, $0 = v(1) = v(xx^{-1}) = v(x) + v(x^{-1})$, de lo que se deduce que $v(x^{-1}) = -v(x) > 0$ para todo $x \in K \setminus \{0\}$. Por lo tanto $x^{-1} \in R_v$ si

$x \notin R_v$, y K es el cuerpo de fracciones de R_v.
Finalmente, comprobemos que $\mathfrak{m}_v$ es el ideal maximal de R_v. Esto se deduce de las definiciones:

$$\mathfrak{m}_{R_v} = \left\{x^{-1} : x \in K, x \notin R_v\right\} = \left\{x^{-1} : x \in K, v(x) < 0\right\} =$$
$$= \left\{y \in K^* : v(y^{-1}) < 0\right\} = \{y \in K : v(y) > 0\} = \mathfrak{m}_v$$

Concluimos que R_v es un anillo de valoración de K cuyo ideal maximal es $\mathfrak{m}_v$. Nótese que las unidades de R_v son precisamente los elementos de K de valor cero.

2. La definición dada de $\cdot$ es válida, pues si $x, y, z, t \in K$ tales que $xA = yA$ y $zA = tA$, entonces $(xA)\cdot(zA) = xzA = xtA = txA = tyA = ytA = (yA)\cdot(tA)$. Además es claro que es una operación asociativa y conmutativa. $1A$ es el elemento neutro de G y $x^{-1}A$ es el opuesto de xA para cualquier $xA \in G$. Entonces $(G, \cdot)$ tiene estructura de grupo abeliano.
Veamos que G es efectivamente un grupo ordenado. Los elementos de G están totalmente ordenados por inclusión como consecuencia del corolario 2.6. Suponemos $xA, yA, zA, tA \in G$ tales que $xA \leq yA$ y $zA \leq tA$. Por definición esto significa que $yA \subseteq xA$ y $tA \subseteq zA$. Queremos comprobar que $(xA)\cdot(zA) \leq (yA)\cdot(tA)$, es decir, que $ytA \subseteq xzA$. Sea $a \in A$, y comprobemos que $yta \in xzA$. Como $tA \subseteq zA$, necesariamente $ta = zb \in zA$, para algún $b \in A$. Por lo tanto $yta = yzb \in yzA$. Pero $yzb = zyb \in zyA$, y como $yA \subseteq xA$, se deduce que $yb = xc \in xA$, para algún $c \in A$. De este modo $yta = zxc = xzc \in xzA$. Concluimos que $ytA \subseteq xzA$, es decir, que $(xA)\cdot(zA) \leq (yA)\cdot(tA)$. Concluimos que $(G, \cdot, \leq)$ satisface la definición de grupo ordenado.
Comprobemos ahora que la aplicación v que hemos definido es realmente una valoración.

   a) Si $x, y \neq 0$, entonces se tiene que $v(x) + v(y) = (xA)\cdot(yA) = xyA = v(xy)$. Por otro lado, si $x = 0$, entonces $v(0y) = v(0) = \infty = \infty + v(y) = v(0) + v(y)$. En resumen, $v(xy) = v(x) + v(y)$ para todo $x, y \in K$.

   b) Queremos comprobar que $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ para cualquier $x, y \in A$, es decir, que $(x+y)A \subseteq xA + yA$, lo que es claramente cierto.

   c) $v(x) = \infty \Longleftrightarrow x = 0$ es claro en la definición de v.

Finalmente, debemos comprobar que $R_v = A$.

$$R_v = \{x \in K : v(x) \geq 1A\} = \{x \in K : xA \subseteq A\}$$

Si $x \in A$, es claro que $xA \subseteq A$, y por lo tanto $A \subseteq R_v$. Análogamente, si $x \notin A$, entonces $xA \nsubseteq A$ pues $x = x \cdot 1 \in xA$, $x \notin A$. Entonces $R_v \subseteq A$, y en conclusión $R_v = A$.

3. Partimos de que

$$\{x \in K : v(x) \geq 0\} = \{x \in K : v'(x) \geq 0\}$$

porque $R_v = R_{v'}$, y que

$$\{x \in K : v(x) > 0\} = \{x \in K : v'(x) > 0\}$$

porque $\mathfrak{m}_v = \mathfrak{m}_{v'}$ al ser ambos el ideal maximal de un mismo anillo local. Por lo tanto, podemos definir

$$K_0 = \{x \in K : v(x) = 0\} = \{x \in K : v'(x) = 0\}$$

Si $x, y \in K_0$, $v(x) = v(y) = 0$, y $v(xy) = v(x) + v(y) = 0$, por lo que $x \cdot y \in K_0$. En otras palabras, K_0 es un subgrupo de K^*, $K_0 \leq K^*$. Como K^* es abeliano, K_0 es de hecho un subgrupo normal, $K_0 \lhd K^*$.

Sabemos que tanto v como v' inducen los morfismos de grupos $\overline{v} : K^* \longrightarrow H$, $\overline{v}' : K^* \longrightarrow H'$, que son suprayectivos porque hemos supuesto que H, H' son los grupos de valores de v,v'. K_0 es el núcleo de estos morfismos, y por lo tanto v y v' inducen isomorfismos al pasar al cociente:

$$\psi : \frac{K^*}{K_0} \xrightarrow{\sim} H, \quad \chi : \frac{K^*}{K_0} \xrightarrow{\sim} H'$$

De modo que $\varphi = \psi^{-1} \circ \chi : H \xrightarrow{\sim} H'$ es un isomorfismo. Tan sólo nos falta comprobar que φ verifica $v' = \varphi \circ v$. Sea $x \in K^*$, su imagen por $\varphi \circ v$ es

$$\begin{array}{ccccccc} K^* & \xrightarrow{v} & H & \xrightarrow{\psi^{-1}} & \frac{K^*}{K_0} & \xrightarrow{\chi} & H' \\ x \in K^* & \longmapsto & v(x) & \longmapsto & x \cdot K_0 & \longmapsto & v'(x) \end{array}$$

Por lo tanto $v' = \varphi \circ v$.

□

Corolario 3.8. *Sea K un cuerpo. Si v, v' son valoraciones de K, y H, H' son sus correspondientes grupos de valores, entonces diremos que v y v' están relacionadas si*

$$v \sim v' \text{ si y sólamente si } H \cong H' \text{ por el isomorfismo } \varphi, \text{ que satisface } v' = \varphi \circ v$$

Entonces existe una correspondencia biyectiva entre los anillos de valoración de K y las clases de equivalencia de valoraciones de K módulo $\sim$.

Definición 3.9. *Sea K un cuerpo, y sea v una valoración en K. El cuerpo residual de la valoración v es el cociente $K_v = \frac{R_v}{\mathfrak{m}_v}$.*

Ejemplo 3.10. *Anillo de series $k[[t]]$.*
Ya sabemos que si k es un cuerpo, entonces $k[[t]]$ es un anillo de valoración de $k((t))$, y tenemos una definición de orden de una serie de $k[[t]]$. Dicha definición verifica las propiedades (1^*) y (2^*) del lema 3.6, luego se puede extender a una valoración en su cuerpo de fracciones $k((t))$ con grupo de valores $\mathbb{Z}$, a la que también se llama orden. El orden de un cociente de series es la diferencia entre el orden del numerador y el orden del denominador. Además, por lo que hemos visto antes, queda claro que el anillo de valoración $k[[t]]$ está formado por las fracciones de orden mayor o igual que cero, y su ideal maximal (t) tiene por elementos las fracciones de orden mayor o igual que uno. En otras palabras, ord es la valoración asociada al anillo de valoración $k[[t]]$ de $k((t))$. El cuerpo residual de ord es k.

Ejemplo 3.11. *Localizaciones $\mathbb{Z}_{(p)}$.*
Dado $p \in \mathbb{Z}$ primo, consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \nu : & \mathbb{Z} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & \nu(n) = \max\left\{k \in \mathbb{N} : p^k | n\right\} \end{array}$$

Se verifican las hipótesis del lema 3.6, y ν se extiende a una valoración en $\mathbb{Q}$ con grupo de valores $\mathbb{Z}$. Su anillo de valoración asociado es $\mathbb{Z}_{(p)}$, y su cuerpo residual es $\mathbb{F}_p$.

Sea v una valoración en un cuerpo K. Para cada elemento x del grupo de valores G, se pueden definir los subconjuntos $P_x(R_v)$ y $P_x^+(R_v)$ del anillo de valoración asociado R_v de la siguiente manera:

$$P_x(R_v) = \{a \in R_v : v(a) \geq x\}, \qquad P_x^+(R_v) = \{a \in R_v : v(a) > x\}$$

Estos subconjuntos son ideales de R_v por ser v una valoración. Se puede considerar el R_v-módulo

$$gr_v(R_v) = \bigoplus_{x \in G} \frac{P_x(R_v)}{P_x^+(R_v)} v^{-x}$$

El v^{-x} es simplemente una etiqueta para distinguir los diferentes módulos que se están sumando, de forma análoga a cómo podemos escribir $K[x] = \bigoplus_{n \geq 0} Kx^n$. Este módulo tiene además una estructura de álgebra graduada, pues si $x, y \in G$, el producto de un elemento de $\frac{P_x(R_v)}{P_x^+(R_v)}$ y un elemento de $\frac{P_y(R_v)}{P_y^+(R_v)}$ es un elemento de $\frac{P_{x+y}(R_v)}{P_{x+y}^+(R_v)}$.
Estos ideales y estas álgebras graduadas tienen gran importancia en el estudio de las valoraciones y de sus anillos de valoración asociados.

4. Rango de una valoración

4.1. Anillos de valoración de rango 1

En primer lugar se estudiará el caso en el que el grupo de valores de una valoración v en K es (isomorfo a) un subgrupo de $\mathbb{R}$, que posteriormente veremos se corresponde con las valoraciones de rango 1.

Definición 4.1. *Un grupo ordenado G se dice arquimediano si es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{R}$, y el isomorfismo respeta el orden.*

El siguiente resultado nos muestra que los grupos arquimedianos son los grupos ordenados que verifican la propiedad arquimediana.

Lema 4.2. *Sea G un grupo ordenado. Son equivalentes:*

1. *G es arquimediano.*
2. *G verifica la propiedad arquimediana; es decir, dados $a, b \in G, a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.*

Demostración. $\mathbb{R}$ verifica la propiedad arquimediana, de modo que todos sus subgrupos también la verifican. Por lo tanto sólo tenemos que comprobar que todo grupo ordenado que verifique la propiedad arquimediana es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{R}$, y el isomorfismo respeta el orden.
Sea G un grupo ordenado que verifica la propiedad arquimediana. Si G es el grupo trivial, $G = \{0\}$, es un subgrupo de $\mathbb{R}$. Supondremos $G \neq \{0\}$. Fijamos $x \in G$, $x > 0$. Para todo $y \in G$, existe un entero máximo n_0^y entre todos los $n \in \mathbb{Z}$ para los que $nx \leq y$. En efecto,

- Si $y \geq 0$, sabemos que para $n = 0$ se tiene la desigualdad, y el conjunto no vacío de n válidos está acotado superiormente porque G verifica la propiedad arquimediana.
- Si $y < 0$, podemos considerar el menor entero m tal que $-y \leq mx$, que existe de nuevo por la propiedad arquimediana, y elegir $n_0^y = -m$.

Sea ahora $y_1 = y - n_0^y x \geq 0$. Mediante un razonamiento análogo, se deduce que existe un entero máximo n_1^y de entre todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $nx \leq 10y_1$. Además, es claro que $0 \leq n_1^y < 10$, puesto que si n_1^y fuese mayor o igual que 10 el n_0^y escogido previamente no sería óptimo. Iteramos el proceso, definiendo:

$$y_i = 10y_{i-1} - n_{i-1}^y x, \quad n_i^y = \max\{n \in \mathbb{Z} : nx \leq 10y_i\}, \quad i = 2, 3, ...$$

De este modo se construye una sucesión de enteros $\{n_i^y\}_{i=0}^{\infty}$ que verifican que $0 \leq n_i^y < 10$ siempre que $i \geq 1$. Esta sucesión se corresponde a la expresión decimal de un número real, y podemos definir la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \alpha = n_0^y + \sum_{i=1}^{\infty} n_i^y \cdot 10^{-i} \end{array}$$

Debemos comprobar que φ es un morfismo inyectivo de grupos que respeta el orden.

- φ respeta el orden, en el sentido de que si $y < y'$, entonces $\varphi(y) \leq \varphi(y')$: Se toman $y, y' \in G$ tales que $y < y'$. Entonces existe un número natural r mínimo de modo que en el intervalo $\left[\frac{10^r y}{x}, \frac{10^r y'}{x}\right]$ hay algún número entero. Entonces, de la definición se deduce que $n_0^y = n_0^{y'}, n_1^y = n_1^{y'}, ..., n_{r-1}^y = n_{r-1}^{y'}$, y $n_r^y < n_r^{y'}$. Entonces, puesto que
$$\sum_{i \geq r+1} n_i^y \frac{1}{10^i} \leq \frac{9}{10^{r+1}} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{10^i} \leq \frac{1}{10^r}$$
concluimos que $\varphi(y) \leq \varphi(y')$.

- φ es homomorfismo de grupos: Sea $y \in G$, y tomemos $r \in \mathbb{N}$ arbitrario. Consideramos $N_r^y = n_r^y + 10 n_{r-1}^y + ... + 10^r n_0^y$ el entero dado por las r primeras cifras decimales de $\varphi(y)$. Entonces N_r^y está determinado por la propiedad
$$N_r^y x \leq 10^r y < (N_r^y + 1)x$$
Si $y' \in G$, podemos definir también $N_r^{y'} \in \mathbb{Z}$ con la misma propiedad. Sumando ambas expresiones, tenemos:
$$(N_r^y + N_r^{y'})x \leq 10^r(y + y') < (N_r^y + N_r^{y'} + 2)x$$
Tomando φ y teniendo en cuenta que φ conserva el orden y que $\varphi(x) = 1$, se obtienen las desigualdades
$$N_r^y + N_r^{y'} \leq 10^r \varphi(y + y') \leq N_r^y + N_r^{y'} + 2$$
$$0 \leq \varphi(y + y') - 10^{-r}(N_r^y + N_r^{y'}) \leq 2 \cdot 10^{-r} \tag{3}$$
Tomando φ en las desigualdades que caracterizan N_r^y y $N_r^{y'}$ tenemos
$$0 \leq \varphi(y) - 10^{-r} N_r^y \leq 10^{-r}, \quad 0 \leq \varphi(y') - 10^{-r} N_r^{y'} \leq 10^{-r} \tag{4}$$
Restando las ecuaciones de (4) a (3), se obtiene
$$|\varphi(y + y') - \varphi(y) - \varphi(y')| \leq 4 \cdot 10^{-r}$$
Como el r elegido es arbitrariamente grande, se concluye que $\varphi(y + y') = \varphi(y) + \varphi(y')$.

- φ es inyectivo: Sean $y, y' \in G$ tales que $y < y'$. Entonces $y' - y > 0$, y existe $r > 0$ tal que $x < 10^r(y' - y)$. Tomando φ se deduce que $1 \leq 10^r\varphi(y' - y)$, y como φ es morfismo de grupos $\varphi(y') - \varphi(y) \geq 10^{-r}$.

En conclusión, G es isomorfo a $\varphi(G)$, que es un subgrupo de $\mathbb{R}$. □

Teorema 4.3. *Sea A un anillo de valoración de un cuerpo K con grupo de valores G. Son equivalentes:*

1. *G es arquimediano y no trivial.*

2. $\dim(A) = 1$*, donde* dim *es la dimensión de Krull.*

Demostración. Nótese que un dominio local A es de dimensión uno si y sólamente si tiene únicamente dos ideales primos, (0) y $\mathfrak{m}_A$.

- $(1) \Rightarrow (2)$: Supongamos que G es arquimediano. Como $G \neq \{0\}$, A no es cuerpo (los elementos invertibles de A son precisamente los de valor 0). Sea $v : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ la valoración asociada a A. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A, y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo distinto de $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Veamos que necesariamente $\mathfrak{p} = (0)$. Razonaremos por reducción al absurdo. Sea $\xi \in \mathfrak{m}$, $\xi \notin \mathfrak{p}$, y llamemos $v(\xi) = x > 0$. Sea también $\eta \in \mathfrak{p}$, $\eta \neq 0$, $v(\eta) = y > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Por lo tanto $v(\frac{\xi^n}{\eta}) > 0$, de modo que $\frac{\xi^n}{\eta} \in A$ y $\xi^n \in (\eta) \subseteq \mathfrak{p}$. Al ser $\mathfrak{p}$ primo necesariamente $\xi \in \mathfrak{p}$, lo que contradice la suposición de que $\xi \notin \mathfrak{p}$. Por lo tanto $\mathfrak{p} = (0)$, los únicos ideales primos de A son (0) y $\mathfrak{m}$, y la dimensión de Krull de A es 1.

- $(2) \Rightarrow (1)$: Supongamos que la dimensión de Krull de A es 1, es decir, que los únicos ideales primos de A son (0) y el ideal maximal $\mathfrak{m}$. Sea $\eta \in \mathfrak{m}$, $\eta \neq 0$. El único ideal primo que contiene a (η) es $\mathfrak{m}$, por lo que

$$\sqrt{(\eta)} = \bigcap_{\substack{(\eta)\subseteq\mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}\text{ primo}}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$$

  Para todo $\xi \in \mathfrak{m}$ existe un número natural n tal que $\xi^n \in (\eta)$, por lo que $nv(\xi) \geq v(\eta)$, y G verifica la propiedad arquimediana, puesto que podemos elegir η, ξ para obtener cualquier par de valores estrictamente positivos de $v(\eta) = y, v(\xi) = x$, y el caso en el que $x \leq 0$ es trivial. Por lo tanto G es arquimediano.

□

4.2. Rango y rango racional

Los anillos de valoración cuyo grupo de valores es un subgrupo de $\mathbb{R}$, que se han descrito en la sección anterior, se pueden caracterizar también por tener valoraciones de rango 1. En esta sección se definirá el rango de una valoración v en K.

Definición 4.4. *Sea G un grupo ordenado. Un segmento centrado (que llamaremos simplemente segmento) de G es un subconjunto $\Delta \subseteq G$ no vacío que cumple que para todo elemento x de Δ, todos los elementos $y \in G$ que están entre $-x$ y x (es decir, que verifican o bien $-x \leq y \leq x$ o bien $x \leq y \leq -x$) son también elementos de Δ. Un subgrupo de G es un subgrupo aislado si es un segmento de G.*

Proposición 4.5. *El conjunto de los segmentos de un grupo ordenado G está ordenado totalmente por inclusión.*

Demostración. Sean Δ, Γ dos segmentos no triviales de G, y supongamos que $\Delta \nsubseteq \Gamma$. Sea $x \in \Delta \setminus \Gamma, x > 0$. Tomemos $y \in \Gamma, y > 0$. Si se tuviese $x \leq y$, entonces se deduciría que $x \in \Gamma$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto $y < x$, luego $y \in \Delta$. Se concluye que $\Gamma \subseteq \Delta$. □

Proposición 4.6. *Sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un morfismo de grupos ordenados. Entonces el núcleo de φ es un subgrupo aislado de G.*
Recíprocamente, si G' es un subgrupo aislado de G, entonces el grupo cociente $\frac{G}{G'}$ hereda una estructura de grupo ordenado que es compatible con el morfismo de paso al cociente.

Demostración. Sea $G' = \ker\varphi$ el núcleo del morfismo φ, y tomemos $x \in G'$ un elemento cualquiera, que verifica $\varphi(x) = 0$. Si tomamos $y \in G$ para el que $-x \leq y \leq x$, entonces $0 = -\varphi(x) \leq \varphi(y) \leq \varphi(x) = 0$, de modo que $\varphi(y) = 0$ e $y \in G'$. Lo mismo sucede si $x \leq y \leq -x$. Por lo tanto $G' = \ker\varphi$ es un subgrupo aislado de G.
Por otro lado, si consideramos G' un subgrupo aislado de G, podemos definir en $\frac{G}{G'}$ la relación de orden dada por

$$y + G' \leq z + G' \Longleftrightarrow \begin{cases} y + G' = z + G' \\ \text{ó} \\ y + G' \neq z + G' \text{ e } y \leq z \end{cases}$$

En primer lugar, debemos comprobar que esta definición es independiente de los representantes que se tomen para los elementos de $\frac{G}{G'}$. Si tomamos $y, z, y', z' \in G$ de modo que $y + G' = y' + G' \neq z + G' = z' + G'$, entonces $y - y' \in G'$, y $z - z' \in G'$. Supongamos que $y \leq z$. Si fuese $y' > z'$, entonces $0 \leq y' - z' \leq y' - z' + z - y \in G'$, por lo que $y' - z' \in G$ e $y' + G = z' + G$, lo que contradice la hipótesis de que $y' + G' \neq z + G'$.
Esta relación da a $\frac{G}{G'}$ estructura de grupo ordenado pues las propiedades de la relación

de orden se heredan de G. Por la definición es claro que el morfismo de paso al cociente respeta el orden. $\square$

Proposición 4.7. *(Teorema VI.15 en [Z-S]) Consideramos una valoración v en un cuerpo K con grupo de valores G y anillo de valoración asociado A.*
Para cada ideal I propio de A podemos definir el subconjunto de G

$$\Delta_I = G \setminus (\{v(a) : a \in I \setminus \{0\}\} \cup \{-v(a) : a \in I \setminus \{0\}\})$$

El subconjunto Δ_I es un segmento de G.
La aplicación $I \longmapsto \Delta_I$ es una biyección entre el conjunto de ideales propios de A y el conjunto de segmentos de G. Dicha biyección invierte inclusiones, es decir,

$$I \subseteq J \Longleftrightarrow \Delta_J \subseteq \Delta_I$$

El segmento Δ_I es un subgrupo aislado de G si y sólamente si I es un ideal primo de A.

Demostración. Supongamos que I es un ideal de A. Sea $y \geq 0$ un elemento de G que no pertenezca al subconjunto Δ_I. Para demostrar que Δ_I es un segmento de G, basta probar que para todo $x \in G$ se cumple que $x \geq y \Longrightarrow x \notin \Delta_I$. Como $y \notin \Delta_I$, existe un elemento $a \in I$ del ideal para el que $y = v(a)$. Como $x - y \geq 0$, existe un elemento $b \in A$ del anillo tal que $v(b) = x - y$. Entonces ab es un elemento de I, de modo que $x = v(ab)$ no es un elemento de Δ_I.
Recíprocamente, si Δ es un segmento de G, queremos demostrar que el subconjunto $I = \{a \in A : v(a) \notin \Delta\}$ es un ideal de A:

- Si $a \in I$ y $b \in A$, entonces $v(a) \notin \Delta$, y se tiene que $v(a), v(b) \geq 0$. Como Δ es un segmento, se deduce que $v(ab) = v(a) + v(b) \notin \Delta$, por lo que $ab \in I$.
- Si $a, b \in I$, entonces $v(a) \notin \Delta$ y $v(b) \notin \Delta$. Teniendo en cuenta que $v(a+b) \geq \inf\{v(a), v(b)\}$, y que Δ es un segmento, deducimos que $v(x+y) \notin \Delta$. Por lo tanto $x + y \in I$.

Concluimos que el subconjunto I así definido es un ideal, y como $\Delta_I = \Delta$ se tiene la suprayectividad.
Ahora tomemos I un ideal de A. Sea A^* el conjunto de las unidades de A, que además es el núcleo de $\overline{v} : K^* \longrightarrow G$. Para todo $a \in I$, se tiene $A^* \subseteq I$. Por lo tanto $I \setminus \{0\}$ es unión de clases laterales de $\ker(\overline{v}) = A^*$ de modo que $I \setminus \{0\}$ es la imagen inversa por v de $\{v(a) : a \in I \setminus \{0\}\}$. Es decir, fijado un segmento Δ, existe un único ideal I tal que $\Delta_I = \Delta$, y se tiene la inyectividad.
Es claro que la correspondencia invierte las inclusiones por la definición de Δ_I.

Por último, un ideal I de A es primo si y sólamente si su complementario $A \setminus I$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado. Esto equivale a que $\{v(a) : a \in A \setminus I\}$ sea cerrado para la suma en G, que a su vez equivale a que Δ_I sea un subgrupo de G. $\square$

Definición 4.8. *Dado un grupo ordenado G que tiene un número finito de subgrupos aislados, digamos*

$$\{0\} = H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq ... \subsetneq H_r = G$$

se define el rango de G, $\operatorname{rank}(G)$, como r.
Si G tiene infinitos subgrupos aislados, entonces el rango de G es infinito.
La altura o rango de una valoración v en un cuerpo K se define como el rango de su grupo de valores, y se denota por $\operatorname{rank}(v)$ o $\operatorname{ht}(v)$.

Corolario 4.9. *El rango de una valoración v es igual a la dimensión de Krull del anillo de valoración R_v asociado a v.*

Demostración. El rango de la valoración v es igual al número de subgrupos aislados de su grupo de valores G, que se identifican de forma biyectiva con los ideales primos del anillo R_v. Como los ideales de R_v están ordenados totalmente por inclusión, se concluye que la dimensión de Krull de R_v es precisamente $\operatorname{rank}(v)$. $\square$

Observación. En la sección anterior se ha estudiado el caso en el que la dimensión de Krull de R_v es 1, y se ha probado que esto sucede si y sólamente si el grupo de valores es un subgrupo de $\mathbb{R}$. En efecto, los grupos ordenados de rango 1 son precisamente los grupos arquimedianos.
La única valoración de rango cero es la valoración nula.

Sea A el anillo de valoración asociado a una valoración v en el cuerpo K con grupo de valores G. Supongamos que v tiene rango finito, r. En la proposición 2.11, se mostró que existe una correspondencia biyectiva entre los ideales primos de A y los anillos de valoración de K que contienen a A, que asigna a cada ideal primo $\mathfrak{p}$ la localización de A en $\mathfrak{p}$, y a cada subanillo B de K que contiene a A (B tiene que ser un anillo de valoración y por lo tanto un anillo local) le asigna su ideal maximal $\mathfrak{m}_B$ (que es un ideal primo de A).
En otras palabras, es equivalente estudiar los ideales primos $\mathfrak{p}$ de R_v, los subgrupos aislados del grupo de valores G, o los subanillos A de K que verifican $R_v \subseteq A \subseteq K$.
Sean $\mathfrak{p}_i$ los ideales primos de A, A_i los subanillos de K que contienen a A, y Δ_i los subgrupos aislados de G, de modo que se verifican las relaciones $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_{A_i}$, $A_i = A_{\mathfrak{p}_i}$ y $\Delta_i = \Delta_{\mathfrak{p}_i} = G \setminus ((v(\mathfrak{p}_i)) \cup (-v(\mathfrak{p}_i)))$. Sea G_i el grupo cociente $\frac{G}{\Delta_i}$, que es un grupo ordenado.

Se tienen las inclusiones

$$\begin{array}{ccccccccccccc} K & = & A_0 & \supset & A_1 & \supset & ... & \supset & A_{r-1} & \supset & A_r & = & A \\ (0) & = & \mathfrak{p}_o & \subset & \mathfrak{p}_1 & \subset & ... & \subset & \mathfrak{p}_{r-1} & \subset & \mathfrak{p}_r & = & \mathfrak{m}_A \\ G & = & \Delta_0 & \supset & \Delta_1 & \supset & ... & \supset & \Delta_{r-1} & \supset & \Delta_r & = & (0) \end{array}$$

El grupo de valores de la valoración v_i asociada a A_i es el grupo cociente G_i, y la aplicación $\overline{v_i} : K^* \longrightarrow G_i$ es la composición de $\overline{v} : K^* \longrightarrow G$ y el morfismo de paso al cociente $G \longrightarrow G_i$.

Definición 4.10. *Sea G un grupo abeliano. El rango racional de G es la dimensión de $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ (recordemos que la estructura de $\mathbb{Z}$-módulo es equivalente a la estructura de grupo conmutativo). El rango racional de una valoración v en un cuerpo K es el rango racional de su grupo de valores G, y se denota*

$$\text{rat.rank}(v) = \text{rat.rank}(G) = \dim_{\mathbb{Q}}(G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

Proposición 4.11. *Sean G un grupo abeliano y G' un subgrupo de G. Se satisface la igualdad*

$$\text{rat.rank}(G) = \text{rat.rank}(G') + \text{rat.rank}\left(\frac{G}{G'}\right)$$

Si además G es un grupo ordenado entonces también es cierta la desigualdad

$$\text{rank}(G) \leq \text{rank}(G') + \text{rat.rank}\left(\frac{G}{G'}\right)$$

En particular se tiene la desigualdad $\text{rank}(G) \leq \text{rat.rank}(G)$*, de la que se deduce que para toda valoración v en un cuerpo K*

$$\text{rank}(v) \leq \text{rat.rank}(v)$$

Demostración. Para demostrar la primera igualdad, consideramos la sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos (es decir, de grupos abelianos) asociada al cociente

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow \frac{G}{G'} \longrightarrow 0$$

Al ser $\mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$-módulo plano (en general todos los anillos de fracciones $S^{-1}A$ de un anillo A son A-módulos planos), podemos tensorizar la sucesión preservando la exactitud, y tenemos la sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos exacta

$$0 \longrightarrow G' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \frac{G}{G'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

Ahora bien, esta sucesión también puede verse como una sucesión exacta de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales. La dimensión es una función aditiva para las sucesiones exactas de espacios vectoriales (en general, la longitud es una función aditiva para sucesiones de módulos), de lo que se deduce que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(G' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) - \dim_{\mathbb{Q}}(G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) + \dim_{\mathbb{Q}} \left(\frac{G}{G'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \right) = 0$$

Que es claramente equivalente a la igualdad que se quiere demostrar.

Para probar la desigualdad, demostraremos por inducción sobre n que si se tiene una sucesión estrictamente creciente de subgrupos aislados de G de longitud n, $G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \ldots \subsetneq G_n$, entonces se satisface la desigualdad

$$n \leq \operatorname{rank}(G') + \operatorname{rat.rank}\left(\frac{G}{G'}\right)$$

La desigualdad es evidente para $n = 0$. Supongamos que es cierta para $n-1$, y aplicando la hipotesis de inducción a G_{n-1} se tiene

$$n - 1 \leq \operatorname{rank}(G' \cap G_{n-1}) + \operatorname{rat.rank}\left(\frac{G_{n-1}}{G' \cap G_{n-1}}\right) \tag{5}$$

Si $G' \cap G_{n-1}$ es igual a G', es decir, si $G' \subseteq G_{n-1}$, se tiene

$$n - 1 \leq \operatorname{rank}(G') + \operatorname{rat.rank}\left(\frac{G_{n-1}}{G'}\right)$$

Como el grupo $\frac{G}{G_{n-1}}$ es un grupo ordenado, carece de torsión, de lo que se deduce que $\operatorname{rat.rank}\left(\frac{G}{G_{n-1}}\right) \geq 1$. Mediante la igualdad que ya hemos demostrado, se deduce que

$$\operatorname{rat.rank}\left(\frac{G_{n-1}}{G'}\right) \leq \operatorname{rat.rank}\left(\frac{G}{G'}\right) - 1$$

Se obtiene rápidamente la desigualdad buscada sustituyendo en (5).
En el caso en el que $G' \cap G_{n-1} \neq G'$, se tiene que $G' \cap G_{n-1}$ es un subgrupo aislado propio de G', por lo que

$$\operatorname{rank}(G') \geq \operatorname{rank}(G' \cap G_{n-1}) + 1$$

Ahora bien, como $\frac{G_{n-1}}{G' \cap G_{n-1}}$ es un subgrupo de $\frac{G}{G'}$ y $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo plano, $\frac{G_{n-1}}{G' \cap G_{n-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es un subespacio vectorial de $\frac{G}{G'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, por lo que

$$\operatorname{rat.rank}\left(\frac{G}{G'}\right) \geq \operatorname{rat.rank}\left(\frac{G_{n-1}}{G' \cap G_{n-1}}\right)$$

Sustituyendo estas dos últimas desigualdades en (5) se obtiene la desigualdad deseada.

$\square$

5. Anillos de valoración discreta

5.1. Preliminares: Lema de Artin-Rees y teorema de la intersección de Krull

A continuación se recogen las demostraciones de dos resultados fundamentales que se utilizarán en este capítulo, y que se deducen del teorema de la base de Hilbert.

Teorema 5.1. *(Lema de Artin-Rees)*
Sean A un anillo noetheriano, y M un A-módulo finitamente generado. Sean $N \subseteq M$ un submódulo de M, e I un ideal de A.
Entonces existe un entero positivo c de modo que, para cada $n > c$, se cumple

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N)$$

Demostración. La contención $\supseteq$ es evidente, luego sólo debemos probar la inclusión $\subseteq$. Supongamos que I está generado por los elementos $a_1, ..., a_r$, y que M está generado por los elementos $\omega_1, ..., \omega_s$. Cualquier elemento de $I^n M$ puede escribirse como $\sum_{i=1}^{s} f_i(\underline{a})\omega_i$, donde $f_i(\underline{X}) = f(X_1, ..., X_r) \in A[X_1, ..., X_r]$ es un polinomio homogéneo de grado n con coeficientes en A, y $\underline{a} = (a_1, ..., a_r)$. Sea $B = A[X_1, ..., X_r]$, y para cada $n > 0$, definamos

$$J_n = \left\{ (f_1, ..., f_s) \in B^s : f_i \text{ homogéneos de grado } n \text{ y } \sum_{i=1}^{s} f_i(\underline{a})\omega_i \in N \right\}$$

Sea $C \subseteq B^s$ el B-submódulo generado por $\bigcup_{n>0} J_n$. Como B es noetheriano por el teorema de la base de Hilbert, C es un B-módulo finitamente generado, y $C = \sum_{j=1}^{t} Bu_j$, donde cada uno de los u_j es una combinación lineal de elementos de $\bigcup J_n$. Tomando cada uno de los sumandos de estas combinaciones lineales, podemos suponer que los u_j son elementos de $\bigcup J_n$. Más concretamente, podemos escribir

$$C = \sum_{j=1}^{t} Bu_j, \text{ donde } u_j = (u_{j1}, ..., u_{js}) \in J_{d_j}$$

Sea $c = \max\{d_1, ..., d_t\}$. Si $\eta \in I^n M \cap N$, se puede escribir como $\eta = \sum_{i=1}^{s} f_i(\underline{a})\omega_i$, donde $(f_1, ..., f_s) \in J_n$, y por lo tanto

$$(f_1, ..., f_s) = \sum_{j=1}^{t} p_j(\underline{X})u_j, \text{ donde } p_j \in B = A[X_1, ..., X_r]$$

El miembro izquierdo de la igualdad es un vector de polinomios homogéneos de grado n, de modo que los sumandos de grado distinto de n del miembro derecho deben cancelarse entre sí para sumar 0. Por lo tanto podemos suponer que $p_j(\underline{X})$ es homogéneo de grado $n - d_j$, para todo j. Entonces

$$\eta = \sum_{i=1}^{s} f_i(\underline{a})\omega_i = \sum_{j=1}^{t} p_j(\underline{a}) \sum_{i=1}^{s} u_{ji}(\underline{a})\omega_i$$

Supongamos que $n > c$. Como $\sum_{i=1}^{s} u_{ji}(\underline{a})\omega_i \in I^{d_j}M \cap N$ para todo j y $p_j(\underline{a}) \in I^{n-d_j} = I^{n-c}I^{c-d_j}$, se deduce que $\eta \in I^{n-c}(I^cM \cap N)$. □

Teorema 5.2. *(Teorema de la intersección de Krull)*
Sean A un anillo noetheriano, $I \subseteq A$ un ideal de A, y M un A-módulo finitamente generado. Sea $N = \bigcap_{n>0} I^nM$.

1. *Existe $a \in A$ tal que $a \equiv 1 \mod I$ y $aN = 0$.*
2. *Si A es un dominio de integridad noetheriano e $I \subseteq A$ es un ideal propio, entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$$

Demostración. Ambos resultados se deducen rápidamente del lema de Artin-Rees.

1. Por el lema de Artin-Rees, existe un natural n lo suficientemente grande para el que $I^nM \cap N \subseteq IN$. Por la forma en la que se ha definido N, el miembro de la izquierda en la igualdad coincide con N. Por lo tanto $N = IN$, y del lema de Nakayama (tal y como se enuncia en el teorema 2.2 de **??**) se deduce que existe $a \equiv 1 \mod I$ tal que $aN = 0$.
2. Basta con sustituir M por A en el apartado anterior. Como $1 \notin I$ se tiene que $a \neq 0$, y como A es dominio de integridad, a no puede ser un divisor de cero, y entonces necesariamente $N = (0)$.

□

5.2. Caracterizaciones de los anillos de valoración discreta

Los anillos de valoración discreta constituyen un caso de anillo de valoración de especial interés para el álgebra conmutativa y la geometría algebraica, cuyo prototipo es el anillo de series formales con coeficientes en un cuerpo que se ha estudiado en los ejemplos de los capítulos anteriores.

Definición 5.3. *Un anillo de valoración discreta es un anillo de valoración A cuyo grupo de valores es (isomorfo a) $\mathbb{Z}$.*

Teorema 5.4. *(Teorema 11.1 en [Ma])*
Sean K un cuerpo y A un anillo de valoración de K. Son equivalentes:

1. *A es un anillo de valoración discreta.*

2. *A es un dominio de ideales principales.*

3. *A es noetheriano.*

Demostración. Sean $K = \mathrm{Fr}(A)$, y $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A.

- (1) $\Rightarrow$ (2): Sea v la valoración en K con valores en $\mathbb{Z}$ que induce el anillo de valoración A. Tomamos $t \in \mathfrak{m}$ tal que $v(t) = 1$. Para cualquier $x \in \mathfrak{m}, x \neq 0$, el valor $v(x)$ es un entero positivo n. Entonces $v\left(\frac{x}{t^n}\right) = 0$, y por tanto $\frac{x}{t^n}$ es una unidad de A, de modo que x se escribe como $x = t^n u$, donde $u \in A^*$ es una unidad. Se deduce que $\mathfrak{m} = (t) = tA$. Sea ahora $I \neq (0)$ un ideal no nulo cualquiera de A. Podemos definir $v(I) = \min\{v(a) : a \in I, a \neq 0\}$ (podemos tomar el mínimo de cualquier conjunto de enteros positivos por estar $\mathbb{N}$ bien ordenado). Si $v(I) = 0$, entonces I contiene una unidad y por lo tanto es el ideal total, $I = (1)$. Si $v(I) > 0$, existe $x \in I$ tal que $v(x) = v(I)$, y sea n dicho valor. Entonces se tiene que $I = (x) = (t^n)$ pues todo elemento de A de valor n difiere de t^n en el producto por una unidad. Por lo tanto el ideal I es principal. Todos los ideales de A son principales, y por tanto A es un dominio de ideales principales.

- (2) $\Rightarrow$ (3): Todo dominio de ideales principales es noetheriano.

- (3) $\Rightarrow$ (2): Es consecuencia directa del lema 2.7.

- (2) $\Rightarrow$ (1): Si A es un dominio de ideales principales, en particular tenemos que $\mathfrak{m}$ es principal, $\mathfrak{m} = (t)$. Definimos el ideal $I = \bigcap_{i=1}^{\infty}(t^i)$, que debe ser principal, $I = (y)$. Se tiene $y \in \mathfrak{m}$, de modo que $y = tz$ para algún $z \in A$. Como $y \in (t^i) = t^i A$, necesariamente $z \in t^{i-1}A = (t^{i-1})$ para cualquier i, de lo que se deduce que $z \in I$. Existe $u \in A$ tal que $z = yu$, y entonces $y = tz = tyu$, por lo que $y(1 - tu) = 0$. Al ser t un elemento de $\mathfrak{m}$, no puede ser una unidad de A, luego $1 - tu \neq 0$. Se deduce que $y = 0$, de modo que $I = (0)$.
  Para cualquier elemento no nulo a de A, podemos definir

$$\nu(a) = \max\left\{i \geq 0 : a \in t^i A = (t^i)\right\}$$

Esta aplicación satisface las propiedades (1*) y (2*) del lema 3.6, luego se extiende a una valoración v en K que toma valores en $\mathbb{Z}$. El anillo A es el anillo de valoración asociado a v.

$\square$

Observación. Nótese que en la demostración de (2) $\Rightarrow$ (1) sólo hemos utilizado el hecho de que A es un anillo local, y no hemos recurrido a la hipótesis de que A es un anillo de valoración.

Si A es un anillo de valoración discreta con ideal maximal $\mathfrak{m} = (t)$, se dice que t es un elemento uniformizador de A. Todos los ideales de A son de la forma (t^n), es decir, son potencias del ideal maximal.

Un anillo de valoración A cuyo ideal maximal $\mathfrak{m}_A$ es principal no tiene por qué ser un anillo de valoración discreta. A continuación se recoge un contraejemplo.

Ejemplo 5.5. Consideremos $\nu : k[x,y] \setminus \{0\} \longrightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_{lex}$ dada de la forma siguiente. Dado un polinomio $f \in k[x,y]$, $f \neq 0$ de la forma $f = \sum_{n,m} a_{n,m} x^n y^m$, se define

$$\nu(f) = \inf\{(n,m) : a_{n,m} \neq 0\}$$

En otras palabras, dado $f \in k[x,y]$, $\nu(f)$ es la imagen de su término inicial según el orden monomial lexicográfico con $x > y$.
Se comprueba que la aplicación ν verifica las hipótesis del lema 3.6, y por lo tanto se extiende a una valoración en K, a la que llamaremos v. Ahora describiremos cuál es el anillo de valoración asociado a v, R_v.

$$R_v = \left\{ \frac{ax^n y^m + ...}{a' x^{n'} y^{m'} + ...} \in k(x,y) : a, a' \neq 0, n \geq n', \text{ y si } n = n' \text{ entonces } m \geq m' \right\}$$

En la expresión anterior $ax^n y^m + ...$ denota un polinomio cuyos términos están ordenados según el orden monomial lexicográfico, y por tanto $ax^n y^m$ es su término inicial.
Dado un elemento $\frac{ax^n y^m + ...}{a' x^{n'} y^{m'} + ...}$ de R_v, se puede dividir el numerador y el denominador por $x^{n'}$ (puesto que todos los monomios no escritos en la expresión tienen al menos grado n' en las x), y renombrando $n - n'$ como n se obtiene un elemento de la forma $\frac{a}{a'} \frac{x^n y^m + ...}{y^{m'} + ...}$, luego podemos expresar R_v como:

$$R_v = \left\{ a \frac{x^n y^m + ...}{y^{m'} + ...} \in k(x,y) : \text{ si } n = 0 \text{ entonces } m \geq m' \right\}$$

El ideal maximal

$$\mathfrak{m}_v = \left\{ a \frac{x^n y^m + ...}{y^{m'} + ...} \in k(x,y) : \text{ si } n = 0 \text{ entonces } m > m' \right\}$$

está generado por el elemento y (simplemente se comprueba que tanto los elementos con $n = 0$ como los elementos con $n > 0$ se pueden dividir por y).
Sin embargo, R_v no es noetheriano, pues se tiene la cadena ascendente de ideales

$$\left(\frac{x}{y}\right) \subsetneq \left(\frac{x}{y^2}\right) \subsetneq \left(\frac{x}{y^3}\right) \subsetneq \ldots \subsetneq \left(\frac{x}{y^m}\right) \subsetneq \ldots$$

Esta cadena es estrictamente creciente, de modo que no puede ser estable.
Tenemos un ejemplo de anillo de valoración cuyo ideal maximal es principal, pero que no es noetheriano, luego no puede ser un anillo de valoración discreta.

Teorema 5.6. *(Teorema 11.2 en [Ma])*
Sea A un anillo. Son equivalentes:

1. *A es un anillo de valoración discreta.*

2. *A es un dominio de ideales principales local, y no es un cuerpo.*

3. *A es un anillo local noetheriano,* $\dim(A) > 0$ *y su ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *es principal.*

4. *A es un anillo local noetheriano normal de dimensión 1.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) es consecuencia del teorema 5.4 (de hecho en la demostración también está implícita (2) $\Rightarrow$ (1)), mientras que (2) $\Rightarrow$ (3) es evidente.

- (3) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que A es un anillo local noetheriano de dimensión mayor que cero cuyo ideal maximal es $\mathfrak{m}$, y que existe $t \in A$ tal que $\mathfrak{m} = (t)$, es decir, $\mathfrak{m}$ es un ideal principal. Si t fuese un elemento nilpotente, entonces todos los elementos de $\mathfrak{m}$ serían también nilpotentes, de modo que $\mathfrak{m}$ sería el nilradical de A. En ese caso $\mathfrak{m}$ sería el único ideal primo de A, de modo que $\dim(A) = 0$. Por lo tanto podemos suponer que $t^\nu \neq 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$.
  Por el teorema de la intersección de Krull (ver teorema 5.2 en la sección 5.1), podemos afirmar que $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} t^\nu A = (0)$. Por tanto, para todo $y \in A$ no nulo existe un ν mínimo para el que $y \in t^\nu A$ pero $y \notin t^{\nu+1}A$. Si $y = t^\nu u$, necesariamente u es una unidad de A porque $u \notin tA = \mathfrak{m}$. Análogamente, si $z \in A$ no nulo, se tiene $z = t^\mu v$, donde v es una unidad. Por lo tanto $yz = t^{\nu+\mu}uv \neq 0$ para cualesquiera y, z no nulos, y A es un dominio de integridad.
  Si $K = \mathrm{Fr}(A)$ es el cuerpo de fracciones de A, y $x = \frac{y}{z} \in K$ es un elemento no nulo cualquiera del mismo (donde podemos escribir $y = t^\nu u$ y $z = x^\mu v$, con u, v unidades), es claro que $x = \frac{y}{z} = \frac{t^\nu u}{t^\mu v} = t^{\nu-\mu}uv^{-1}$, de modo que x puede escribirse como $x = t^\nu u$, donde $\nu \in \mathbb{Z}$ y u es una unidad de A. El valor de ν está unívocamente definido para cualquier x, y $v(x) = \nu \in \mathbb{Z}$ define una valoración

discreta en K (esto es consecuencia del lema 3.6). Además, los elementos de A son precisamente los elementos de K con valor no negativo, de modo que A es el anillo de valoración asociado a v.

- (1) $\Rightarrow$ (4): Sea A un anillo de valoración discreta. En la demostración del teorema 5.4, se mostró que un anillo de valoración discreta los únicos ideales son (0) y las potencias del ideal maximal, $\mathfrak{m}$. Por lo tanto los únicos ideales primos de A son (0) y $\mathfrak{m}$, por lo que $\dim A = 1$. A es noetheriano por el teorema 5.4, y es normal por ser un anillo de valoración.

- (4) $\Rightarrow$ (3): Supongamos que A es un anillo local noetheriano normal de dimensión 1. Tenemos que probar que su ideal maximal, $\mathfrak{m}$, es principal. Al ser A normal, para cualquier ideal primo $\mathfrak{p}$ de A la localización $A_\mathfrak{p}$ es un dominio íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones. Como A es local, podemos tomar el ideal maximal de A, $\mathfrak{m}$, y se tiene que $A = A_\mathfrak{m}$ es un dominio íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones. Al ser A de dimensión 1, $\mathfrak{m} \neq (0)$. Por el teorema de intersección de Krull, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k = (0)$. Si fuese $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^k$ para cualquier k natural, lo que lleva a la contradicción $(0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k = \mathfrak{m} \neq (0)$. Por lo tanto podemos tomar $t \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, y consideramos el ideal (t).
  Sea $\mathcal{F} = \{((t) : x) : x \in A, x \notin (t)\}$. Sea $I = ((t) : x)$ un elemento maximal de $\mathcal{F}$, que podemos tomar porque A es noetheriano. Veamos que I es primo. En efecto, si $a, b \in A$ verifican que $abx \in (t)$ pero $bx \notin (t)$, como I es maximal en $\mathcal{F}$ podemos afirmar que $((t) : bx) \subseteq ((t) : x) = I$, de modo que $ax \in (t)$. Por lo tanto, existe $x \in A$ no nulo tal que $((t) : x)$ es un ideal primo (hemos demostrado que todo ideal de un anillo noetheriano tiene al menos un ideal primo asociado según la notación utilizada en la sección 6 de [Ma]).
  Ahora bien, los únicos ideales primos de A son (0) y $\mathfrak{m}$ al ser $\dim A = 1$. Puesto que $(t) \in \mathcal{F}$, el ideal (0) no es maximal en $\mathcal{F}$. Por lo tanto existe $x \in A$ tal que $\mathfrak{m} = ((t) : x)$.
  Sea $a = xt^{-1}$. Se tiene que $a \notin A$ porque x no es múltiplo de t, pero $a\mathfrak{m} = t^{-1}x\mathfrak{m} \subseteq t^{-1}(t) = A$. Definimos $\mathfrak{m}^{-1} = \{b \in K : b\mathfrak{m} \subseteq A\}$, es claro que $A \subseteq \mathfrak{m}^{-1}$ pero $A \neq \mathfrak{m}^{-1}$ porque $a \in \mathfrak{m}^{-1}$. Consideremos el conjunto $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}$, que es un ideal de A. Como $A \subseteq \mathfrak{m}^{-1}$, es claro que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}$.
  Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}$, en particular se tendría que $a\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, y por el lema de Nakayama (considerando el morfismo de A-módulos $\varphi : \mathfrak{m} \to A$, $\varphi(c) = ac$, con la notación utilizada en el teorema 2.1 de [Ma]) se cumple una relación del tipo

$$a^n + a_1 a^{n-1} + ... + a_{n-1} a + a_n = 0, \quad a_i \in \mathfrak{m}$$

  Por lo tanto a es entero sobre A, y como A es íntegramente cerrado $a \in A$, pero ya hemos visto que $a \notin A$. Hemos llegado a una contradicción.

Por lo tanto la única posibilidad es que $A = \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}$. Tenemos el ideal de A dado por $t\mathfrak{m}^{-1} \subseteq A$. Si $t\mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$, entonces se tendría $(t) = tA = t\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{m}^2$, lo que contradiría que $t \notin \mathfrak{m}^2$. Por lo tanto $t\mathfrak{m}^{-1} = A$, de modo que $(t) = tA = t\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = A\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, y $\mathfrak{m}$ es principal, que es lo que queríamos probar.

□

Ejemplo 5.7. *Anillo local de una curva plana en un punto regular.*
Consideramos una curva algebraica irreducible X en el plano afín dada por el polinomio irreducible $f \in k[x,y]$. Podemos construir el anillo coordenado $\mathcal{O}_X = \frac{k[x,y]}{(f)}$, que representa las funciones polinómicas sobre la curva X. Fijamos un punto $P = (x_0, y_0)$ de la curva, es decir, un punto del plano afín en el que se anula el polinomio f. Entonces las clases de los polinomios de $k[x,y]$ que se anulan en P forman un ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_X$. Por lo tanto podemos construir el anillo local en el punto P dado por

$$\mathcal{O}_{X,P} = \left(\frac{k[x,y]}{(f)}\right)_{\mathfrak{p}} = \left\{\frac{p(x,y)}{q(x,y)} :\ p,q \in \frac{k[x,y]}{(f)},\ q(x_0,y_0) \neq 0\right\}$$

El anillo $\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo local noetheriano y su ideal maximal es

$$\mathfrak{m}_{X,P} = \left\{\frac{p(x,y)}{q(x,y)} :\ p,q \in \frac{k[x,y]}{(f)},\ p(x_0,y_0) = 0,\ q(x_0,y_0) \neq 0\right\}$$

Es claro que $\mathfrak{m}_{X,P} = (x - x_0, y - y_0)$.
Decimos que P es un punto regular de la curva si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Vamos a comprobar que el anillo local de cualquier curva plana en cualquier punto regular es un anillo de valoración discreta.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que P es el origen, y de este modo aligeraremos la notación (basta considerar un cambio de variables que induzca una traslación para llevar el punto que nos interese al origen). Entonces el desarrollo de Taylor de f en $P = (0,0)$ es de la forma $f(x,y) = ax + by + ...$ con $a \neq 0$ o $b \neq 0$, donde el resto de términos son de grado 2 o más. $ax + by$ es la ecuación de la recta tangente a X en el origen. Sea $cx + dy$ la ecuación de otra recta que corta a X en el origen distinta de la tangente, es decir, c y d deben verificar $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Existe una transformación afín que lleva la recta tangente $ax + by$ en la recta y, y la recta $cx + dy$ en la recta x, luego podemos suponer que se da esta situación. Veamos que para la curva transformada, se tiene que x es un parámetro de uniformización de $\mathfrak{m}_{X,0}$.
En la situación descrita en el anterior párrafo, f es de la forma $y + ...$, donde todos los términos de la derecha son de grado mayor o igual que dos. Por lo tanto, podemos escribir $f(x,y) = yg(x,y) - x^2h(x)$, donde el término independiente de g es 1 y $h \in k[x]$.

Entonces $yg = x^2h$ en $\mathcal{O}_X$, de modo que $y = x^2hg^{-1} \in (x)$ en $\mathcal{O}_{X,0}$, ya que $g(0,0) \neq 0$. Por lo tanto $\mathfrak{m}_{X,0} = (x, y) = (x)$, y en particular es principal.
Deshaciendo las transformaciones afines consideradas, se deduce que, si $P = (x_0, y_0)$ es un punto regular de la curva plana X, entonces $\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo de valoración discreta, y cualquier recta distinta de la recta tangente es un parámetro de uniformización.
Si k es algebraicamente cerrado, también es cierto el recíproco, es decir, si el anillo local de la curva en un punto del plano es un anillo de valoración discreta, entonces el punto es necesariamente regular.

6. Una introducción al espacio de arcos

6.1. Definición y propiedades

Definición 6.1. *Sean k un cuerpo de característica cero, y $(f_1, f_2, ..., f_s)$ un ideal primo de $k[x_1, ..., x_m]$, que define una variedad algebraica afín en $\mathbb{A}_k^m$, a la que denotaremos por X. Sea $K \supseteq k$ una extensión del cuerpo k. Un K-arco de X es un morfismo de esquemas*

$$\mathrm{Spec}(K[[t]]) \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(\frac{k[x_1, ...x_m]}{(f_1, ..., f_s)}\right) = X$$

donde $\mathrm{Spec}(K[[t]])$ *es el espectro primo del anillo de series en una variable con coeficientes en K.*

Equivalentemente, un K-arco de X es un morfismo de anillos

$$\mathcal{O}_X = \frac{k[x_1, ...x_m]}{(f_1, ..., f_s)} \longrightarrow K[[t]]$$

Es decir, un K-arco de X es un $K[[t]]$-punto de X.
Un K-arco de X está determinado por las imágenes de $x_1, ...x_m$, es decir, por series $x_1(t), ..., x_m(t)$, del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl} \frac{k[x_1,...x_m]}{(f_1,...,f_s)} & \longrightarrow & K[[t]] \\ x_1 & \longmapsto & x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{1,n} t^n \\ & \cdots & \\ x_m & \longmapsto & x_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{m,n} t^n \end{array}$$

Ahora bien, debemos garantizar que esta aplicación se anula en $(f_1, ..., f_s)$, por lo que es necesario imponer una serie de condiciones sobre los $x_{i,n}$. En particular, debemos exigir que

$$f_j(x_1(t), ..., x_m(t)) = f_j\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_{1,n} t^n, ..., \sum_{n=0}^{\infty} x_{m,n} t^n\right) = 0, \text{ para cada } j = 1, ..., s \quad (6)$$

Sean $\underline{X}_n = (X_{1,n}, ..., X_{m,n})$, $n \geq 0$ variables, y para $f \in k[x_1, ..., x_m]$ sea

$$f\left(\sum_{n=0}^{\infty} \underline{X}_n t^n\right) = F_0(\underline{X}_0) + F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_1)t + ... + F_n(\underline{X}_0, ..., \underline{X}_n)t^n + ...$$

la expresión proveniente del desarrollo de Taylor. Entonces la igualdad 6 es equivalente a

$$F_{j,0}(\underline{x}_0) = F_{j,1}(\underline{x}_0, \underline{x}_1) = ... = F_{j,n}(\underline{x}_0, ..., \underline{x}_n) = ... = 0, \text{ para cada } j = 1, ..., s$$

Proposición 6.2. *En las condiciones anteriores, existe un k-esquema, X_∞, que verifica*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), X_\infty) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K[[t]]), X)$$

Dicho esquema es

$$X_\infty = \mathrm{Spec}\left(\frac{K[\underline{X}_0, ..., \underline{X}_n, ...]}{(\{F_{j,n} : j = 1, ..., s; n = 0, ..., \infty\})}\right)$$

Definición 6.3. *El esquema X_∞ se denomina espacio de arcos de X. Denotaremos al anillo coordenado de este esquema por*

$$\mathcal{O}_{X_\infty} = \frac{K[\underline{X}_0, ..., \underline{X}_n, ...]}{(\{F_{j,n} : j = 1, ..., s; n = 0, ..., \infty\})}$$

Definición 6.4. *Sean X una variedad algebraica en el espacio afín $\mathbb{A}_k^m$ dada por los polinomios $f_1, ..., f_s \in k[x_1, ..., x_m]$, y sea $K \supseteq k$ una extensión de k. Definimos los K-arcos de orden n de la variedad X como los morfismos de esquemas*

$$\mathrm{Spec}\left(\frac{K[t]}{(t)^{n+1}}\right) \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(\frac{k[x_1, ...x_m]}{(f_1, ..., f_s)}\right) = X$$

Es decir, un arco de orden n es un morfismo de k-álgebras

$$\mathcal{O}_X = \frac{k[x_1, ...x_m]}{(f_1, ..., f_s)} \longrightarrow \frac{K[t]}{(t)^{n+1}}$$

Proposición 6.5. *En las condiciones anteriores, dado $n \in \mathbb{N}$, existe un k-esquema X_n que verifica*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), X_n) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\left(\frac{K[t]}{(t)^{n+1}}\right), X)$$

Dicho esquema es

$$X_n = \mathrm{Spec}\left(\frac{K[\underline{X}_0, ..., \underline{X}_n]}{(\{F_{j,k} : j = 1, ..., s; k = 0, ..., n\})}\right)$$

Definición 6.6. *El esquema X_n se denomina espacio de arcos de orden n de X.*

Proposición 6.7. *El espacio de arcos de X es el límite inverso de los espacios de arcos de orden n,*

$$X_\infty = \varprojlim X_n$$

Demostración. Basta observar que $\mathcal{O}_{X_\infty} = \varinjlim \mathcal{O}_{X_n}$, donde $\varinjlim \mathcal{O}_{X_n}$ está definido por las inclusiones

$$\mathcal{O}_{X_n} = \frac{K[\underline{X}_0, ..., \underline{X}_n]}{(\{F_{j,k} : j = 1, ..., s; k = 0, ..., n\})} \hookrightarrow \frac{K[\underline{X}_0, ..., \underline{X}_n, \underline{X}_{n+1}]}{(\{F_{j,k} : j = 1, ..., s; k = 0, ..., n+1\})} = \mathcal{O}_{X_{n+1}}$$

□

Para fijar ideas, vamos a considerar el ejemplo de la cúspide, es decir, tomaremos $f = y^2 - x^3$. Se trata de una curva plana analíticamente irreducible con una singularidad en el origen. Los primeros polinomios F_n son

$$F_0(X_0, Y_0) = Y_0^2 - X_0^3, \quad F_1(X_0, Y_0, X_1, Y_1) = 2Y_0Y_1 - 3X_0^2X_1,$$

$$F_2(X_0, Y_0, X_1, Y_1, X_2, Y_2) = 2Y_0Y_2 + Y_1^2 - 3X_0^2X_2 - 3X_0X_1^2, ...$$

Utilizaremos este ejemplo para mostrar algunas de las técnicas habituales para manipular el espacio de arcos, así como una propiedad que después generalizaremos a cualquier curva irreducible.

Proposición 6.8. *(Ejemplo 3.16 en [Re])*
En general, $\mathcal{O}_{X_\infty}$ no es reducido.

Demostración. Sea para X la cúspide. Si consideramos el elemento $L = 2X_0Y_1 - 3X_1Y_0 \in \mathcal{O}_{X_\infty} \setminus \{0\}$. En efecto, L es no nulo en $\mathcal{O}_{X_\infty}$, es decir,

$$L = 2X_0Y_1 - 3X_1Y_0 \notin (F_0, F_1, F_2, ...)$$

Esto se puede ver de la forma siguiente: si damos pesos $\mu(X_n) = 2, \mu(Y_n) = 3$, para $n \geq 0$, entonces los F_i son homogéneos de peso 6, pero $\mu(L) = 5$.
Se tiene que

$$L \cdot Y_0 = (2X_0Y_1 - 3X_1Y_0)Y_0 = 2X_0Y_0Y_1 - 3X_1Y_0^2$$

Teniendo en cuenta que $2Y_0Y_1 \equiv 3X_0^2X_1$ y que $Y_0^2 \equiv X_0^3 \mod (F_0, F_1, ...)$, se deduce que

$$L \cdot Y_0 = 3X_0^3X_1 - 3X_0^3X_1 = 0 \text{ en } \mathcal{O}_{X_\infty}$$

Por lo tanto $\mathcal{O}_{X_\infty}$ no es un dominio. Veamos que no es reducido. En particular, el elemento L que ya hemos definido es nilpotente, pues verifica que:

$$L \cdot X_0^2 = 2X_0^3Y_1 - 3X_0^2X_1Y_0 = 2X_0^3Y_1 - 2Y_0^2Y_1 = 0 \text{ en } \mathcal{O}_{X_\infty}$$

y por lo tanto

$$L^3 = L[4X_0^2Y_1^2 + Y_0(-12X_0X_1Y_1 + 9X_1^2Y_0)] = 0 \text{ en } \mathcal{O}_{X_\infty}$$

□

Lema 6.9. *Sea X la cúspide, es decir, la curva afín plana dada por $f = y^2 - x^3$. La clausura íntegra de $\mathcal{O}_X = \frac{k[x,y]}{(y^2-x^3)}$ es isomorfa al anillo de polinomios en una variable con coeficientes en k, $k[u]$.*

Demostración. Veamos que $\overline{\mathcal{O}_X} = k\left[\frac{y}{x}\right]$. En primer lugar, $\frac{y}{x} \in \mathrm{Fr}\left(\frac{k(x,y)}{(y^2-x^3)}\right)$ es entero sobre $\mathcal{O}_X$, ya que se verifica la identidad

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - y = \frac{y^3}{x^3} - y = \frac{y^3}{y^2} - y = y - y = 0$$

Por otro lado, existe una inyección natural de $\frac{k[x,y]}{(y^2-x^3)}$ en $k\left[\frac{y}{x}\right]$, pues $y = \left(\frac{y}{x}\right)^3$, y $x = \frac{x^3}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$. Sólo nos falta demostrar que $k\left[\frac{y}{x}\right] \cong k[u]$ es íntegramente cerrado en $k(u)$, lo que se realizará de forma análoga a la prueba de que $\mathbb{Z}$ es íntegramente cerrado en $\mathbb{Q}$ (y en general, que cualquier dominio de factorización única es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones). Sea $\frac{a(u)}{b(u)}$ un elemento de $k\left(u\right)$, y supongamos que $a\left(u\right)$ y $b\left(u\right)$ no tienen factores comunes. Supongamos que $\frac{a(u)}{b(u)}$ verifica la relación de dependencia entera

$$\left(\frac{a(u)}{b(u)}\right)^n + c_{n-1}\left(u\right)\left(\frac{a(u)}{b(u)}\right)^{n-1} + ... + c_1\left(u\right)\left(\frac{a(u)}{b(u)}\right) + c_0\left(u\right) = 0$$

donde $c_0, c_1, ..., c_{n-1} \in k\left[u\right]$. Multiplicando por $b\left(u\right)^n$ obtenemos

$$c_{n-1}\left(u\right) a\left(u\right)^{n-1} b\left(u\right) + ... + c_1\left(u\right) a\left(u\right) b\left(u\right)^{n-1} + c_0\left(u\right) b\left(u\right)^n = -a\left(u\right)^n$$

Se deduce que $b\left(u\right)$ divide a $a\left(u\right)$, lo que contradice la hipótesis de que a y b son primos entre sí. $\square$

Ejemplo 6.10. Consideremos X la cúspide, y tomemos el esquema $\overline{X}$, la normalización de X. Por definición, se tiene que $\mathcal{O}_{\overline{X}} = \overline{\mathcal{O}_X} \cong k[u]$, de modo que $\overline{X} = \mathrm{Spec}(k[u])$ (en otras palabras, la normalización de X es la recta afín). A partir de las relaciones $u^2 = x, u^3 = y$, se construye el morfismo de esquemas (que de hecho es una resolución de singularidades) siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \| & & \| \\ \mathrm{Spec}(k[u]) & & \mathrm{Spec}\left(\frac{k[x,y]}{(f)}\right) \end{array} \qquad \text{dado por} \qquad \begin{array}{ccc} k[u] & \longleftarrow & \frac{k[x,y]}{(f)} \\ u^2 & \longleftarrow\!\shortmid & x \\ u^3 & \longleftarrow\!\shortmid & y \end{array}$$

Este morfismo induce a un morfismo entre los espacios de arcos $\overline{X}_\infty$ y X_∞:

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_\infty & \xrightarrow{\pi_\infty} & X_\infty \\ \| & & \| \\ \mathrm{Spec}(K[U_0, U_1, U_2, ...]) & & \mathrm{Spec}\left(\frac{K[X_0,X_1,...,Y_0,Y_1,...]}{(F_0,F_1,F_2,...)}\right) \end{array}$$

Este morfismo de esquemas está dado por el siguiente morfismo entre sus anillos coordenados:

$$\begin{array}{ccc}
K[U_0,U_1,U_2,...] & \longleftarrow & \frac{K[X_0,X_1,...,Y_0,Y_1,...]}{(F_0,F_1,F_2,...)} \\
U_0^2 & \longleftarrow\!\shortmid & X_0 \\
2U_0U_1 & \longleftarrow\!\shortmid & X_1 \\
2U_0U_2+U_1^2 & \longleftarrow\!\shortmid & X_2 \\
 & ... & \\
U_0^3 & \longleftarrow\!\shortmid & Y_0 \\
3U_0^2U_1 & \longleftarrow\!\shortmid & Y_1 \\
3U_0^2U_2+3U_0U_1^2 & \longleftarrow\!\shortmid & Y_2 \\
3U_0^2U_3+6U_0U_1U_2+U_1^3 & \longleftarrow\!\shortmid & Y_3 \\
 & ... &
\end{array}$$

Es decir, los coeficientes n-ésimos de las series $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_nt^n$ e $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_nt^n$ se envían a los coeficientes n-ésimos de las series $u(t)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}U_nt^n\right)^2$ y $u(t)^3=\left(\sum_{n=0}^{\infty}U_nt^n\right)^3$, respectivamente. Nótese que $(u(t)^2)^3=(u(t)^3)^2$, de modo que este morfismo, que en un principio está definido en $K[X_0,X_1,...,Y_0,Y_1,...]$, efectivamente se anula en $(F_0,F_1,F_2,...)$, por lo que pasa al cociente.
El morfismo que hemos definido cumple la siguiente propiedad:

El morfismo $\pi_\infty:\overline{X}_\infty\longrightarrow X_\infty$ *es una aplicación biyectiva.*

Demostración. Sea K una extensión de k. El morfismo π_∞ lleva el K-arco de $\overline{X}$ dado por $u\mapsto u(t)$ en el K-arco de X dado por $x\mapsto x(t)=u(t)^2$, $y\mapsto y(t)=u(t)^3$. Es claro que se trata efectivamente de un arco en la cúspide, pues $x(t)^3=y(t)^2$.
Comprobemos ahora la suprayectividad. Dado un K-arco de X $h:\mathrm{Spec}(k[[t]])\longrightarrow X$ determinado por las series $x(t)$ e $y(t)$, como éstas deben verificar que $x(t)^3=y(t)^2$, necesariamente

$$3\cdot\mathrm{ord}_t(x(t))=2\cdot\mathrm{ord}_t(y(t))$$

Por lo que $\mathrm{ord}_t(x(t))\leq\mathrm{ord}_t(y(t))$, y $u(t)=\frac{y(t)}{x(t)}$ es un elemento de $k[[t]]$. Entonces $u(t)$ define un K-arco en $\overline{X}$ cuya imagen por π_∞ es h, pues $u(t)^2=x(t)$, y $u(t)^3=y(t)$.
Sólo falta comprobar la inyectividad, es decir, que fijados $x(t)$ e $y(t)$ con $y(t)^2=x(t)^3$, se tiene que $\frac{y(t)}{x(t)}$ es el único $u(t)\in K[[t]]$ tal que $u(t)^2=x(t),u(t)^3=y(t)$.
Sea $u(t)$ tal que $x(t)=u(t)^2$ e $y(t)=u(t)^3$. Veamos que $u(t)$ es única.

- Si $x(t)=0$, entonces $y(t)=0$ y ha de ser $u(t)=0$.
- Si $x(t)\neq 0$, entonces $u(t)\neq 0$, e $\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{u(t)^3}{u(t)^2}=u(t)$.

Por lo tanto la aplicación π_∞ es biyectiva. $\square$

En este último ejemplo hemos visto que existe una correspondencia biyectiva entre los K-arcos de la cúspide y los K-arcos de su normalización. Este resultado puede generalizarse a cualquier curva analíticamente irreducible, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 6.11. *Sea X una curva algebraica analíticamente irreducible en el espacio afín $\mathbb{A}_k^m$ con anillo coordenado $\mathcal{O}_X = \frac{k[x_1,\ldots,x_m]}{(f_1,\ldots,f_s)}$, y sea $\overline{X}$ su normalización, es decir, $\mathcal{O}_{\overline{X}} = \overline{\mathcal{O}_X}$. Se tiene la inclusión de anillos $\mathcal{O}_X \overset{\pi^\#}{\hookrightarrow} \overline{\mathcal{O}_X}$, que induce el morfismo de esquemas $\overline{X} \xrightarrow{\pi} X$ (que constituye una resolución de singularidades). A su vez, este morfismo induce un morfismo de esquemas entre los respectivos espacios de arcos, $\overline{X}_\infty \xrightarrow{\pi_\infty} X_\infty$. El morfismo π_∞ es biyectivo.*

Demostración. El morfismo π_∞ se construye de modo análogo a como se hizo en el caso de la cúspide a partir de la inclusión $\mathcal{O}_X \overset{\pi^\#}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{\overline{X}}$. Un K-arco de $\overline{X}_\infty$ es un $K[[t]]$-punto de $\overline{X}$, es decir, un morfismo $\mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow K[[t]]$. Este morfismo desciende por composición con $\pi^\#$ a un K-arco de X. De nuevo, este morfismo induce un morfismo de anillos $\mathcal{O}_{X_\infty} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty}$.

Queremos ver que esta aplicación entre los K-arcos de $\overline{X}$ y los K-arcos de X es biyectiva, es decir, que dado h un K-arco de X, éste se levanta a un único K-arco de $\overline{X}$. Esto equivale a que dado un morfismo de anillos $h^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow K[[t]]$, éste admita un único levantamiento $\tilde{h}^\# : \overline{\mathcal{O}_X} \longrightarrow K[[t]]$ tal que $h^\# = \tilde{h}^\# \circ \pi^\#$, tal como muestran los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} & \overline{X}_\infty \arrow[d, "\pi_\infty"] \\ \mathrm{Spec} K \arrow[ur, "\exists ! \tilde{h}"] \arrow[r, "h"'] & X_\infty \end{tikzcd} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{O}_X} \arrow[dl, "\exists ! \tilde{h}^\#"'] \\ K[[t]] & \mathcal{O}_X \arrow[l, "h^\#"] \arrow[u, "\pi^\#"'] \end{tikzcd}$$

Dado un elemento $z \in \overline{\mathcal{O}_X}$, y teniendo en cuenta que $\overline{\mathcal{O}_X} \subseteq \mathrm{Fr}\,(\mathcal{O}_X)$, podemos escribir $z = \frac{f}{g}$, donde $f, g \in \mathcal{O}_X$. Si $ker(h^\#) = (0)$ entonces la imagen $g(t)$ de g por $h^\#$ es distinta de cero y la única asignación posible es $\tilde{h}^\#(z) = z(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{h^\#(f)}{h^\#(g)} \in k((t))$. Nótese que $z(t)$ no depende de la representación elegida de z, y que la aplicación constituye un morfismo de anillos (cuya imagen es un subconjunto de $k((t))$). Sólo nos falta comprobar que $z(t) \in k[[t]]$. El elemento z de $\overline{\mathcal{O}_X}$ es entero sobre $\mathcal{O}_X$, luego existen $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathcal{O}_X$ para los que se satisface la relación

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \text{ en } \overline{\mathcal{O}_X}$$

Entonces $z(t)$ también debe satisfacer esta relación, de modo que

$$z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + ... + a_1(t)z(t) + a_0(t) = 0 \text{ en } K((t))$$

Por lo que $z(t)$ es entero sobre $K[[t]]$, que es íntegramente cerrado pues es un dominio de factorización única, de lo que se deduce que $z(t) \in K[[t]]$. La aplicación $z \mapsto z(t)$ es un levantamiento de $h^{\#}$.
Si $\ker(h^{\#}) \neq (0)$ entonces h es el arco constante, es decir, $g(t) = 0$ para todo $g \in \mathcal{O}_X$ (recuérdese que $\dim(\mathcal{O}_X) = 1$). En este caso, el levantamiento a $\overline{\mathcal{O}_X}$ es único por ser X analíticamente irreducible. □

6.2. Algunos problemas sin resolver

A pesar de que el anillo del espacio de arcos, $\mathcal{O}_{X_\infty}$, no es noetheriano, resultan de interés las propiedades de finitud de los anillos que se obtienen por localización en ciertos ideales primos llamados puntos estables del espacio de arcos (ver [Re]). Es decir, la estrategia consiste en localizar $\mathcal{O}_{X_\infty}$ en un ideal primo adecuado para centrarnos únicamente en la estructura "local" de X_∞ en torno a dicho punto.
Veamos cómo se pueden construir ideales de este tipo para la cúspide, curva plana dada por $f = y^2 - x^3$. En este caso nos interesa conocer la estructura de los arcos centrados en la singularidad que presenta en el origen, es decir, miraremos el cerrado $(X_0 = Y_0 = 0)$. Ahora bien, un K-arco $(x(t), y(t))$ de este cerrado verifica que $\mathrm{ord}_t(x(t)) \geq 1$, y que $\mathrm{ord}_t(y(t)) \geq 1$. Además, $x(t)$ e $y(t)$ satisfacen la ecuación $x(t)^3 = y(t)^2$, por lo que $3 \cdot \mathrm{ord}_t(x(t)) = 2 \cdot \mathrm{ord}_t(y(t))$. Se deduce que $\mathrm{ord}_t(x(t)) \geq 2$, y que $\mathrm{ord}_t(x(t)) \geq 3$. De modo que el ideal primo que queremos tomar debería contener a $(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2)$. El ideal $(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2)$ no es un ideal primo de $\mathcal{O}_{X_\infty}$, de hecho el cociente por este ideal es isomorfo al propio anillo $\mathcal{O}_{X_\infty}$, que no es un dominio. Por lo tanto, buscamos un ideal primo $\mathfrak{p} \supsetneq (X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2)$. Vamos a describir varias formas de definir ideales $\mathfrak{p}$ de estas características.

Lema 6.12. *Sea X la cúspide, dada por $f = y^2 - x^3$. Para todo r natural, el ideal $(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1})\,(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$ del anillo $(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$ es un ideal primo.*

Demostración. Consideraremos el cociente de $(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$ por el ideal, y demostraremos que es un dominio.

$$\frac{(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}}{(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1})} = \left(\frac{K[X_{2r}, X_{2r+1}, ..., Y_{3r}, Y_{3r+1}, ...]}{\left(\begin{array}{c} Y_{3r}^2 - X_{2r}^3, \quad 2Y_{3r}Y_{3r+1} - 3X_{2r}^2 X_{2r+1}, \\ 2Y_{3r}Y_{3r+2} + Y_{3r+1}^2 - 3X_{2r}^2 X_{2r+2} - 3X_{2r}X_{2r+1}^3, ... \end{array} \right)} \right)_{Y_3}$$

Ahora bien, nótese que en las expresiones del cociente, Y_{3r+1} se puede despejar en función de las X_n y de Y_{3r} (tenemos que dividir por Y_{3r}, pero eso es posible precisamente porque estamos trabajando en $(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$). Análogamente, Y_{3r+2} se puede despejar en función de las X_n y de Y_{3r}, Y_{3r+1}. De forma recurrente (lo que siempre es posible ya que Y_{3r+n} siempre tiene que aparecer en un monomio de la forma $Y_{3r}Y_{3r+n}$ en F_{6r+n}), se van eliminando las variables Y_{3r+n}, y se concluye que

$$\frac{(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}}{(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1})} = \frac{K[X_{2r}, X_{2r+1}, X_{2r+2}, ...](Y_{3r})}{(Y_{3r}^2 - X_{2r}^3)}$$

que efectivamente es un dominio. □

Es decir, nuestra primera posible definición de los ideales primos serán la contracciones de los ideales primos $(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1})$ de $(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$ por la aplicación natural asociada a la localización de $\mathcal{O}_{X_\infty}$ en Y_{3r}. A estas contracciones las denotaremos por $\mathfrak{p}_r$. Es claro que $\mathfrak{p}_r$ contiene a $(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1})$.

A continuación describiremos otra forma de construir un ideal de estas características, esta vez utilizando la clausura íntegra de $\mathcal{O}_X$ y el morfismo π_∞ descrito en la sección anterior.

Sea X la cúspide. En $\mathcal{O}_{\overline{X}_\infty} = K[U_0, U_1, U_2, ...]$ consideramos los ideales $\mathfrak{q}_r = (U_0, ..., U_{r-1})$, que son claramente primos pues el cociente del anillo por $\mathfrak{q}_r$ es isomorfo al propio anillo, que es un dominio. Sean $\mathfrak{p}'_r$ sus contracciones en $\mathcal{O}_{X_\infty}$ por el morfismo $\pi_\infty^\#$, que son ideales primos que contienen a $(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1})$, lo que se comprueba mediante un razonamiento simple a partir de la forma en que se ha definido el morfismo.

Proposición 6.13. *Los ideales $\mathfrak{p}_r\,(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$ y $\mathfrak{p}'_r\,(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$ coinciden en $(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}'_r$ en $\mathcal{O}_{X_\infty}$.*

Demostración. Ya sabemos que $(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1}) \subseteq \mathfrak{p}'_r$, luego se tiene la inclusión $\mathfrak{p}_r\,(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}} \subseteq \mathfrak{p}'_r\,(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$. Nos falta ver la inclusión opuesta, es decir, que $\mathfrak{p}_r\,(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}} \supseteq \mathfrak{p}'_r\,(\mathcal{O}_{X_\infty})_{Y_{3r}}$. Puesto que los dos ideales son primos, esto equivale a que

$$V(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1}) \cap (Y_{3r} \neq 0) \subseteq V(\mathfrak{p}'_r) \cap (Y_{3r} \neq 0)$$

Tomemos un K-arco de $V(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1}) \cap (Y_{3r} \neq 0)$, dado por

$$\begin{cases} x(t) = x_{2r}t^{2r} + x_{2r+1}t^{2r+1} + ... \\ y(t) = y_{3r}t^{3r} + y_{3r+1}t^{3r+1} + ... \end{cases} \quad \text{donde } x(t)^2 = y(t)^3, \text{ y además } y_{3r} \neq 0$$

Queremos ver que existe una serie $u(t) = u_r t^r + u_{r+1}t^{r+1} + ...$ tal que $u(t)^2 = x(t)$ y $u(t)^3 = y(t)$. A tal efecto sirve la serie $u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$. Efectivamente, se trata de una serie porque el orden de $y(t)$ es mayor que el orden de $x(t)$. Además, por un lado se tiene

que $u(t)^2 = \frac{y(t)^2}{x(t)^2} = \frac{x(t)^3}{x(t)^2} = x(t)$, y por el otro que $u(t)^3 = \frac{y(t)^3}{x(t)^3} = \frac{y(t)^3}{y(t)^2} = y(t)$.
Para deducir que $\mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}'_r$, basta tener en cuenta que se trata de dos ideales primos (que por tanto definen subvariedades irreducibles de X_∞) cuyas subvariedades asociadas coinciden en el abierto de Zariski denso ($Y_3 \neq 0$), luego ambos deben definir la misma subvariedad irreducible y por lo tanto deben ser el mismo ideal primo. □

En el caso en el que X es la cúspide, sabemos que el ideal $\mathfrak{p}_r \left(\mathcal{O}_{X_\infty}\right)_{Y_{3r}}$ es finitamente generado, pues lo generan $(X_0, ..., X_{2r-1}, Y_0, ..., Y_{3r-1})$. Ahora bien, se tiene también que $Y_{3r} \notin \mathfrak{p}_r$, de modo que el ideal $\mathfrak{p}_r\mathcal{O}_{X_\infty,\mathfrak{p}_r}$ es también finitamente generado.
Sin embargo, $\mathcal{O}_{X_\infty,\mathfrak{p}_r}$ no es en general noetheriano. Para la cúspide, esto se puede ver en el ejemplo 3.16 de [Re], donde se deduce que no es noeheriano a partir de la condición ya conocida de que $\mathcal{O}_{X_\infty}$ no es reducido.
Por lo tanto se considera el anillo reducido

$$\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red}} = \frac{K[\underline{X}_0, ..., \underline{X}_n, ...]}{\sqrt{(\{F_{j,n} : j = 1, ..., s; n = 0, ..., \infty\})}}$$

y nos preguntamos:

Pregunta 1. *(Pregunta 3.17 en [Re])*
¿Es $\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}$ un anillo noetheriano?

Aunque en algunos casos se conoce la respuesta a esta pregunta, aún no se conoce la solución en el caso general. Por este motivo, vamos a plantear otras cuestiones relacionadas más débiles que la condición de noetherianidad de este anillo.

Hemos definido los ideales primos $\mathfrak{q}_r = (U_0, ..., U_{r-1})$ de $\mathcal{O}_{\overline{X}_\infty}$. Entonces el anillo

$$\mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r} = K[U_0, U_1, U_2, ...]_{(U_0,...,U_{r-1})} = K(U_r, U_{r+1}, ...)[U_0, ..., U_{r-1}]_{(U_0,...,U_{r-1})}$$

es un anillo local regular y por tanto normal (en el caso $r = 1$ de hecho es un anillo local noetheriano cuyo ideal maximal es principal, y por lo tanto es un anillo de valoración discreta). Además, como se muestra en la proposición 4.5 de [Re], se tiene una inclusión $\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r}$. Esto motiva la siguiente cuestión:

Pregunta 2. *¿Es cierto que $\overline{\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}} = \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r}$?*

Y la última pregunta que nos plantearemos es:

Pregunta 3. *¿Es el morfismo $\left(\overline{X}_\infty, \mathfrak{q}_r\right) \xrightarrow{\pi_\infty} \left((X_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_r\right)$ un morfismo cerrado?*

Observación. *Todas estas cuestiones pueden generalizarse de la cúspide, que es donde se han mostrado aquí, a cualquier curva X analíticamente irreducible, de modo que el* *ideal primo en el que se localiza representa arcos centrados en un punto singular. La condición de irreducibilidad analítica sirve para que no exista ambigüedad en la elección de los ideales $\mathfrak{q}$ de la normalización, pues cada punto singular de la curva se levanta a un único punto de la normalización (ver proposición 6.11).*

Nuestras tres preguntas están relacionadas de la siguiente manera:

Proposición 6.14. *Si la respuesta a la pregunta 1 es afirmativa, entonces la respuesta a la pregunta 2 también lo es. Si la respuesta a la pregunta 2 es afirmativa, entonces la respuesta a la pregunta 3 también lo es.*

Demostración. Veamos primero que si la pregunta 1 tiene respuesta afirmativa, entonces la pregunta 2 también tiene respuesta afirmativa. Supongamos que $\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}$ es un anillo noetheriano.
Procedamos a reinterpretar la pregunta 2. Recordemos que la clausura entera de un dominio es la intersección de los anillos de valoración de su cuerpo de fracciones que lo contienen. Por lo tanto, nos bastaría ver que para cada inclusión $i_v : \mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r} \hookrightarrow R_v$, donde R_v es un anillo de valoración del cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r}$, ésta se levanta a una inclusión $\tilde{i}_v : \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r} \hookrightarrow R_v$. Teniendo en cuenta que $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}R_v, X_\infty) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(R_v[[t]]), X)$ (esto sucede por la misma razón que los K-arcos de X son los K-puntos de X_∞), las inclusiones i_v inducen morfismos $\mathcal{O}_X \longrightarrow R_v[[t]]$, y queremos ver si se levantan adecuadamente a morfismos $\mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow R_v[[t]]$, como muestran los siguientes diagramas (no todos los morfismos del diagrama de la derecha proceden de una inclusión en el diagrama de la izquierda, pero sí al revés):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r} \arrow[dl, "\tilde{i}_v"'] & \Longleftarrow & & \mathcal{O}_{\overline{X}} = \overline{\mathcal{O}_X} \arrow[dl, "\tilde{j}"'] \\
R_v & \mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r} \arrow[l, "i_v"] \arrow[u] & & R_v[[t]] & \mathcal{O}_X \arrow[l, "j"] \arrow[u, "\pi^\#"']
\end{tikzcd}$$

Nótese que la inyectividad de $\tilde{i}_v$ está garantizada siempre que exista, ya que si $z \in \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r}$, éste puede escribirse como $z = \frac{a}{b}, a, b \in \mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}$. Si $\tilde{i}_v(z) = 0$, entonces $i_v(a) = 0$, y como i_v es inyectiva se deduce que $a = 0$ por lo que $z = 0$.
En resumen, la pregunta 2 es equivalente a:
(2') - *Para toda inclusión $i_v : \mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r} \hookrightarrow R_v$ donde R_v es un anillo de valoración del cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r}$, existe un levantamiento $\tilde{i}_v : \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r} \hookrightarrow R_v$.*
Y esta propiedad será cierta si probamos:

(2") - *Para todo morfismo* $j : \mathcal{O}_X \longrightarrow R_v[[t]]$ *existe* $\tilde{j} : \mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow R_v[[t]]$ *tal que* $j = \tilde{j} \circ \pi^\#$.
Si R_v es un anillo de valoración discreta, entonces $R_v[[t]]$ es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones. De hecho, si A es un anillo noetheriano íntegramente cerrado, entonces $A[[t]]$ es íntegramente cerrado, como se puede ver en los ejercicios 9.4 y 9.5 de [Ma]. Otra forma de razonar que $R_v[[t]]$ es íntegramente cerrado es notar que R_v es un anillo regular, por lo que $R_v[[t]]$ es también regular y por lo tanto íntegramente cerrado.
Por un razonamiento análogo al realizado en la demostración de la proposición 6.11 se concluye que si R_v es un anillo de valoración discreta entonces efectivamente existe el levantamiento (2') que buscamos. Por lo tanto, si $\overline{\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}}$ fuese intersección de anillos de valoración discreta, tendríamos que la pregunta 2 tiene respuesta afirmativa.
Ahora bien, $\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}$ es un dominio pues es un subanillo de $\mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r}$. Supongamos que $\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}$ es noetheriano. Entonces su cierre entero $\overline{\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}}$ en su cuerpo de fracciones es un anillo de Krull (ver 33.10 en [N]).
Recordemos que un anillo A es de Krull si existe una familia $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de anillos de valoración discreta del cuerpo de fracciones K de A (denotaremos por v_λ a la valoración asociada a A_λ) que cumple las dos propiedades siguientes:

1. $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$
2. Para cada $x \in K^*$ hay una cantidad a lo sumo finita de $\lambda \in \Lambda$ tales que $v_\lambda(x) \neq 0$.

Por lo tanto, $\overline{\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r}}$ es intersección de anillos de valoración discreta, que es lo que queríamos demostrar.

Para probar que la condición 2 es más fuerte que la condición 3, basta con probar un resultado más general, que afirma que si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo íntegro de anillos (es decir, B es entero sobre $f(A)$), entonces $f^* : \mathit{Spec}(B) \longrightarrow \mathit{Spec}(A)$ es una aplicación cerrada para la topología de Zariski. Se aplicará este resultado al morfismo de anillos $\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_r} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}_\infty,\mathfrak{q}_r}$, que es íntegro si la pregunta 2 tiene respuesta afirmativa.
Este resultado es consecuencia del teorema del ascenso (ver [At], teorema 5.10). Sea I un ideal de B, de modo que $V(I)$, el conjunto de los ideales primos de B que contienen a I, es un cerrado para la topología de Zariski. Queremos ver que las contracciones de dichos ideales primos por f, que denotaremos por $f^{-1}(V(I)) = \{f^{-1}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}$, forman un cerrado de $\mathrm{Spec}(A)$. Veamos que dicho cerrado es precisamente $V(f^{-1}(I))$. En efecto, si $\mathfrak{p} \in V(I)$, eso significa que $I \subseteq \mathfrak{p}$, por lo que $f^{-1}(I) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{p})$, y $f^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(f^{-1}(I))$.
Es decir, se cumple que $f^{-1}(V(I)) \subseteq V(f^{-1}(I))$.
Veamos que también es cierta la otra contención. Aquí es donde utilizaremos que f es un morfismo íntegro, y por tanto $\overline{f} : \frac{A}{f^{-1}(I)} \to \frac{B}{I}$ es íntegro.
Sea $\mathfrak{q} \in V(f^{-1}(I))$, es decir, $\mathfrak{q}$ es un ideal primo de A que cumple $f^{-1}(I) \subseteq \mathfrak{q}$. Por el teorema del ascenso , existe un ideal primo de $\frac{B}{I}$ cuya contracción a $\frac{A}{f^{-1}(I)}$ es $\frac{\mathfrak{q}}{f^{-1}(I)}$.

Es decir, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de B con $\mathfrak{p} \supseteq I$ y tal que $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathfrak{p})$. Por lo tanto $\mathfrak{q} \in f^{-1}(V(I))$, y se tiene la contención $V(f^{-1}(I)) \subseteq f^{-1}(V(I))$.
Se concluye que para todo ideal I de B es cierto que $V(f^{-1}(I)) = f^{-1}(V(I))$, y por lo tanto el morfismo f^* es cerrado. $\square$

En el caso $r = 1$, se ha demostrado que $\dim\left(\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_1}\right) = 1$ (corolario 5.12 en [Re]). Además, es un anillo local y reducido, por lo que sus únicos ideales primos son (0) y $\mathfrak{p}_1$, y ambos son finitamente generados. Se deduce que $\mathcal{O}_{(X_\infty)_{red},\mathfrak{p}_1}$ es un anillo noetheriano (teorema 3.4 en [Ma]), luego la respuesta a la pregunta 1 es afirmativa para $r = 1$.

Sin embargo, se desconocen las respuestas a estas preguntas en el caso en que $r \geq 2$. A modo de ejemplo, podemos intentar averiguar si, para X la cúspide, la imagen de un cerrado concreto por $\left(\overline{X}_\infty, \mathfrak{q}_2\right) \xrightarrow{\pi_\infty} ((X_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_2)$ es un cerrado.
Tomemos en $\left(\overline{X}_\infty, \mathfrak{q}_2\right) = \operatorname{Spec}\left(K(U_2, U_3, ...)[U_0, U_1]_{(U_0,U_1)}\right)$ el cerrado dado por $(U_1 = \lambda U_0)$, y queremos saber si su imagen es un cerrado en $((X_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_2)$. Los arcos de este cerrado están dados por series de la forma $u(t) = u_0 + \lambda u_0 t + u_2 t^2 + ...$ Estos arcos tienen por imagen arcos de X dados por las series

$$x(t) = u(t)^2 = u_0^2 + 2\lambda u_0^2 t + (2u_0u_2 + \lambda^2 u_0^2) + ...$$

$$y(t) = u(t)^3 = u_0^3 + 3\lambda u_0^3 t + (3u_0^2u_2 + 3\lambda^2 u_0^3)t^2 + (3u_0^2u_3 + 6\lambda u_0u_1u_2 + \lambda^3 u_0^3)t^3 + ...$$

Si en estas series identificamos los coeficientes x_n e y_n, vemos que debemos imponer $x_1 = 2\lambda x_0$, $y_1 = 3\lambda y_0^3$. Supongamos que tomamos un arco de $(X_1 = 2\lambda X_0, Y_1 = 3\lambda Y_0) \subseteq X_\infty$. ¿Debemos imponer condiciones adicionales para que éste proceda de un arco de $(U_1 = \lambda U_0) \subseteq \overline{X}_\infty$? Sabemos que la aplicación π_∞ es biyectiva, de modo que nos basta estudiar para qué arcos de este cerrado la contraimagen por π_∞ es un arco de $(U_1 = \lambda U_0)$. La condición de que $x_1 = 2\lambda x_0$ se traduce a $2u_0u_1 = 2\lambda u_0^2$, y la condición de que $y_1 = 3\lambda y_0$ se traduce a que $3u_0^2u_1 = 3\lambda u_0^3$. Entonces si $x_0 \neq 0$ hemos concluido que $u_1 = \lambda u_0$. Ahora bien, en el caso $x_0 = 0$, debemos imponer que $x_2 = 0$ para que se tenga $u_0 = u_1 = 0$.
En conclusión, la imagen del cerrado $(U_1 = \lambda U_0)$ de $\left(\overline{X}_\infty, \mathfrak{q}_2\right)$ por π_∞ es

$$[V(X_1 - 2\lambda X_0, Y_1 - 2\lambda Y_0) \cap (X_0 \neq 0)] \cup [V(X_0, X_1, X_2, X_3, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)]$$

Queremos averiguar si este conjunto es cerrado. Por ahora lo desconocemos.

Referencias

[At] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Editorial Reverté, 2010.

[Ei] D. Eisenbud: *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2004.

[Fu] W. Fulton: *Curvas Algebraicas*, Editorial Reverté, 2009.

[Ha] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.

[Ma] H. Matsumura: *Algebraic Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

[N] M.Nagata: *Local rings*, Interscience, 1962.

[Rd] M. Reid: *Undergraduate Commutative Algebra*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.

[Re] A. J. Reguera López: *Towards the singular locus of the space of arcs*, publicado en *American Journal of Mathematics*, Vol. 131, Nº 2, pp. 313-350, 2009.

[Va] M. Vaquié: *Valuations*, publicado en *Resolution of Singularities: A research textbook in tribute to Oscar Zarsiki*, Progress in Mathematics, Springer Basel AG, 2000.

[Z-S] O. Zariski, P. Samuel: *Commutative Algebra II*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1975.