Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Introducción a la teoría asintótica de sistemas de EDOs lineales en puntos singulares de segunda clase.

Autor: Elena Sobrini García

Tutor: Javier Sanz Gil

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, "Introducción a la teoría asintótica de sistemas de EDOs lineales en puntos singulares de segunda clase", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por Doña Elena Sobrini García, y constituye su Trabajo Fin de Grado para optar al título de Grado en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a dieciséis de julio de dos mil dieciocho.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Índice general

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es probar, con la mayor generalidad posible, el Teorema fundamental de existencia de la teoría asintótica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en el dominio complejo en torno a una singularidad de segunda clase, que afirma que a toda solución en serie de potencias formal del sistema se le puede asignar, en sectores adecuados con vértice en el punto singular, una solución analítica representada asintóticamente por aquella en dicho sector.

Usaremos conceptos y resultados estudiados principalmente en las asignaturas de "Cálculo Infinitesimal", "Análisis Matemático", "Ampliación de Análisis Matemático", "Variable Compleja" y "Ecuaciones Diferenciales", aunque también aplicaremos resultados de la asignatura "Álgebra y Geometría Lineales I".

El guión seguido para la prueba es el mismo que sigue Wolfgang Wasow en [4], pero intentaremos detallar los pasos que él deja en numerosas ocasiones indicados y que no son inmediatos.

Consideraremos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas en un disco punteado, es decir, del tipo $y' = A(x)y + f(x)$, donde y es la función vectorial incógnita y A y f son una función matricial y una función vectorial respectivamente, y ambas son holomorfas en dicho disco punteado, digamos $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$. Podemos encontrarnos diferentes posibilidades. El caso más sencillo es cuando a es una singularidad evitable de A y f y ahí sabemos que, si añadimos al problema unas condiciones iniciales, entonces tenemos una solución única y esta es holomorfa en el disco en el que eran holomorfas las ecuaciones. Si la singularidad es de primera especie, concepto que explicaremos más adelante, entonces hay un resultado clásico que dice que, si el sistema tiene una solución formal en forma de serie de potencias centrada en a, entonces esta convergerá en un entorno de la singularidad y, por tanto, será solución analítica local del sistema.

En este trabajo, probaremos un resultado para el caso de sistemas de EDOs lineales en torno a singularidades de segunda especie, definición que también daremos más adelante. Veremos que, si tenemos una solución formal de un sistema de este tipo, aunque esta no converja, podremos darle un sentido, gracias al concepto de desarrollo asintótico de una función en un sector.

En el primer capítulo, mencionaremos algunos conceptos para ecuaciones y funciones en $\mathbb{C}^n$ con los que estamos familiarizados para $n = 1$, pero que conviene puntualizar para evitar confusiones. También precisaremos los teoremas clásicos disponibles para el caso de singularidades evitables o de primera clase. La sección segunda del capítulo recoge la definición de desarrollo asíntótico de una función y varios resultados que nos permitirán trabajar con facilidad con este concepto.

A continuación plantearemos un sistema del tipo que queremos estudiar en el punto del infinito, y para el caso particular de una ecuación escalar, encontraremos el desarrollo asintótico de una solución.

En el segundo capítulo, analizaremos la posibilidad de aplicar una transformación formal o analítica al sistema con el objeto de simplificar su estudio, dotando a la matriz de coeficientes de una estructura diagonal por bloques que permita la escisión del sistema en otros de menor dimensión que el proporcionado originalmente. El resultado clave para garantizar la existencia de la transformación analítica buscada es el Teorema 2.2, que se probará en el capítulo 3, y que, bajo hipótesis adecuadas asegura que, de la existencia de una solución formal de una ecuación diferencial vectorial del tipo

$$x^{-q}y' = f(x, y),$$

donde $q \geq 0$, podemos garantizar la existencia de una solución analítica representada asintóticamente por dicha serie formal.

En el capítulo 3, probaremos el Teorema 2.2. La aplicación del Teorema de Borel-Ritt permite reducir el problema a la existencia de soluciones analíticas asintóticamente nulas para una ecuación modificada. A continuación, esta ecuación diferencial que hemos obtenido la podremos convertir en una ecuación integral mediante la fórmula de variación de parámetros, y la existencia de solución para esta última se basará en el método de aproximaciones sucesivas, definidas mediante un operador no lineal $\mathscr{P}$ obtenido a partir de la ecuación integral. En la definición de dicho operador integral $\mathscr{P}$ es fundamental la elección adecuada de caminos de integración, que será expuesta en la sección 3.3. Dichos caminos se elegirán de manera que la exponencial que aparece bajo el signo integral dentro del operador $\mathscr{P}$ esté acotada a lo largo de ellos. Gracias a esto, podremos deducir que las aproximaciones sucesivas u_j definidas mediante $\mathscr{P}$ convergen hacia una función u asintóticamente nula que es además solución de la ecuación, como queríamos probar.

Finalmente, veremos cómo podemos aplicar el Teorema 2.2 a ecuaciones diferenciales no lineales.

Cabe mencionar que sólo se ha tratado la demostración del Teorema 2.2 bajo una condición adicional, la de que los autovalores de cierta matriz sean todos distintos. Incluso en esta situación especial, la prueba es suficientemente laboriosa y extensa. El caso general, que se puede encontrar en el libro de W. Wasow [4], requiere del manejo de la forma canónica de Jordan y, en algunos casos, del uso de nuevas transformaciones analíticas, de tipo "shearing" (de cizalla), cuyo estudio no hemos considerado necesario incluir en este tratamiento introductorio.

Termino la introducción dando gracias a Javier Sanz por ser mi tutor del Trabajo de Fin de Grado y por la paciencia con la que me ha guiado durante su realización y ha resuelto todas las dudas que me han surgido.

Resumen

El objetivo es probar, con la mayor generalidad posible, el Teorema fundamental de existencia de la teoría asintótica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en el dominio complejo en torno a una singularidad de segunda clase, que afirma que a toda solución en serie de potencias formal del sistema se le puede asignar, en sectores adecuados con vértice en el punto singular, una solución analítica representada asintóticamente por aquella en dicho sector. Se incluirán los prerrequisitos necesarios, consistentes en una introducción a la teoría de desarrollos asintóticos y a la solución formal de sistemas de EDOs lineales en torno a puntos singulares.

Abstract

The aim of this report is to prove, with as much generality as possible, the fundamental theorem of existence for the asymptotic theory of ordinary differential equations on the complex plane around a second-class singularity, which states that every formal series that is formal solution of the system has an asymptotic representation in adequate sectors whose vertex is the singularity and this representation is an analytic solution of the system. The necessary prerequisites, which consist of an introduction to the theory asymptotic expansions and to formal solutions of lineal ODEs around singular points, are also included.

Notación y terminología

Indicaremos ahora notaciones y terminología que se van a usar a lo largo del trabajo.

A^T	Matriz traspuesta de una matriz A.
$\overline{C}$	Adherencia de un subconjunto C de $\mathbb{C}$.
$\mathring{C}$	Interior de un subconjunto C de $\mathbb{C}$.
$\mathrm{Fr}(C)$	Frontera de un subconjunto C de $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}$	Recta real.
$\mathbb{C}$	Plano complejo.
$\mathrm{Re}(z)$	Parte real del número complejo z.
$\Vert f\Vert$	Norma del supremo de una función f acotada en su dominio.
$\mathbb{C}[y]$	Espacio de polinomios en y con coeficientes en $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}[[x]]$	Espacio de series $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ con coeficientes a_r complejos.
$\mathbb{C}[y][[x]]$	Espacio de series en potencias de x con coeficientes en $\mathbb{C}[y]$.

Un *disco punteado* en $\mathbb{C}$ es un disco desprovisto de su centro, es decir, es un conjunto del tipo

$$\{x \in \mathbb{C} : 0 < |x - a| < r\},$$

para algún $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$.

Diremos que S es un *sector abierto* del plano complejo $\mathbb{C}$ si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ con $\alpha < \beta$ tales que S toma una de las dos siguientes formas

$$\begin{gathered}\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg(z) < \beta, \quad 0 < |z| < r\} \\ \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg(z) < \beta, \quad |z| > r\}.\end{gathered}$$

En el primer caso, diremos que el vértice del sector es 0 y lo denotaremos $S_0(\alpha, \beta, r)$, mientras que, en el segundo, diremos que es infinito y lo denotaremos $S_\infty(\alpha, \beta, r)$.

Diremos que S es un *sector cerrado* del plano complejo $\mathbb{C}$ si es la adherencia de un sector abierto desprovista del origen.

Observación 0.1. Si no se indica lo contrario, por “sector” nos referiremos a un sector abierto. Tendremos que añadir necesariamente el término “cerrado” cuando ese sea el caso.

Con la notación de la definición de sector abierto, diremos que los *rayos de la frontera* de un sector S son los conjuntos

$$\begin{array}{lcl} \{x \in \mathrm{Fr}(S) & : & \arg(x) = \alpha\} \\ \{x \in \mathrm{Fr}(S) & : & \arg(x) = \beta\} \end{array}$$

Sea S un sector de $\mathbb{C}$. Diremos que $T \subset \mathbb{C}$ es un *subsector propio de* S si T es un sector en $\mathbb{C}$ y $\overline{T} \setminus \{0\} \subset S$. Lo denotaremos por $T \ll S$.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos los conceptos de holomorfía y singularidades para funciones en $\mathbb{C}^n$, así como los teoremas clásicos para sistemas de EDOs lineales con singularidades evitables y de primera especie. También definiremos desarrollo asintótico de una función en un sector y veremos algunos resultados fundamentales relacionados con este concepto. Terminaremos el capítulo planteando un sistema como los que queremos estudiar, en el caso particular escalar, y encontraremos el desarrollo asintótico de una solución suya.

1.1. Primeros conceptos y resultados

Definición 1.1. Sea U un abierto en $\mathbb{C}$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y sea f una función vectorial

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}^n.$$

Se dice que f *es analítica en* $z_0 \in U$ si existe una serie de potencias centrada en z_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n,$$

donde $f_n \in \mathbb{C}^n$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$, tal que converge en un entorno de z_0 y coincide con la función en dicho entorno:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n,$$

para cada z en ese entorno de z_0.

Teniendo en cuenta que f tiene n componentes y la definición de función escalar analítica, es inmediato comprobar que una función como la de la definición será analítica si y solo si cada una de sus componentes lo es.

Observación 1.2. Es conveniente tener en cuenta que $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{C}^{n\times n}$ pueden ser considerados como álgebras de Banach sin más que dotarles del producto escalar, respectivamente del producto de matrices, y de una norma vectorial o matricial arbitraria (por ser espacios de dimensión finita, la elección concreta de norma no es relevante). Así, la teoría de las funciones vectoriales o matriciales que consideraremos en nuestro estudio se puede enmarcar en la teoría de funciones holomorfas o analíticas definidas en abiertos de $\mathbb{C}$ y a valores en un álgebra de Banach compleja general. Sin embargo, aquí preferiremos reducir el estudio de estas propiedades a las correspondientes para cada una de las componentes de la función vectorial o matricial considerada, que son funciones complejas.

Definición 1.3. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, $x_0 \in U$ y $A : U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ una función matricial. Si A es holomorfa en $U \setminus \{x_0\}$ (equivalentemente, si lo son todas sus componentes), se dice que A presenta una singularidad aislada. En tal caso, podemos distinguir los siguientes tipos

(a) La singularidad será *esencial* si al menos una de las componentes de $A(x)$ tiene singularidad esencial en ese punto.

(b) La singularidad será *polar* si ninguna de las componentes tiene singularidad esencial en x_0 y al menos una de ellas tiene un polo en ese punto. En este caso, el polo de x_0 como singularidad de $A(x)$ tiene como orden el mayor de los órdenes de x_0 como polo de las componentes $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

(c) La singularidad será *evitable* si, en aquellas componentes que tengan singularidad en x_0, esta es evitable.

Notación 1.4. De aquí en adelante, $A(x)$ será una matriz de dimensión $n\times n$ y holomorfa en un disco punteado $\{x \in \mathbb{C} : 0 < |x| < r\}$ para cierto $r > 0$. Denotaremos sus componentes por $a_{ij}(x)$, donde i indica el número de fila y j, el de columna de dicha componente.

Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$Y' = A(x)Y, \tag{1.1}$$

donde Y es una matriz $n \times n$ y denotamos por Y' a la matriz resultante de derivar una vez cada entrada de Y. Se entiende por solución del sistema una función matricial $Y(x)$ holomorfa en un subconjunto abierto del disco punteado y que verifica en dicho abierto la ecuación (1.1). Se llama matriz fundamental del sistema a una matriz solución de (1.1) con determinante no nulo en cada punto del abierto en el que está definida. Las columnas de una matriz fundamental forman una base del espacio vectorial de soluciones de la ecuación

$$y' = A(x)y$$

en dicho abierto. Es inmediato comprobar que, si Y_1 e Y_2 son matrices fundamentales del sistema en el mismo abierto, existe una matriz constante e invertible C tal que $Y_1(x) = Y_2(x)C$.

Definición 1.5. Si $A(x)$ en (1.1) tiene un polo de orden uno en 0, se dice que $x = 0$ es un *punto singular de primera clase* o *primera especie* para el sistema de ecuaciones diferenciales.

En este caso, cada una de sus componentes se puede escribir como

$$a_{ij}(x) = \frac{1}{x} b_{ij}(x),$$

donde $b_{ij}(x)$ es holomorfa en el disco de centro 0 y radio r. Si B es la matriz de componentes $b_{ij}(x)$, donde i es el número de fila y j es el número de columna, entonces podemos escribir

$$A(x) = \frac{1}{x} B(x),$$

donde $B(x)$ es una matriz $n \times n$ holomorfa en 0 y la ecuación (1.1) puede escribirse en la forma

$$xY' = B(x)Y.$$

Definición 1.6. Si la matriz $A(x)$ en (1.1) tiene una singularidad polar en $x = 0$, pero esta no es un polo de orden uno, diremos que $x = 0$ es una *singularidad de segunda clase* o *de segunda especie*.

Definición 1.7. Se dice que una ecuación diferencial escalar de orden n tiene una *singularidad de primera clase* o *primera especie* en $x = 0$ si tiene un punto singular en $x = 0$ y es de la forma

$$u^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} x^{-j} p_j(x) u^{(n-j)} = 0 \tag{1.2}$$

con coeficientes $p_j(x)$ holomorfos en $x = 0$.

Observación 1.8. Observamos que, en la definición anterior, el que $p_j(x)$ sea holomorfo en $x = 0$ significa que tiene un cero de orden $k \geq 0$, por lo que $x^{-j}p_j(x)$ tendría un polo de orden $j - k$. Es decir, el coeficiente que acompaña a la derivada $(n - j)$-ésima tiene en $x = 0$ un polo de orden a lo sumo j. En particular, si $k \geq j$, el coeficiente presentaría en 0 una singularidad evitable, y se le puede considerar a todos efectos holomorfo en 0; de hecho, si $k > j$, tendría un cero en $x = 0$.

Definición 1.9. Se dice que una ecuación diferencial escalar de orden n tiene una *singularidad de segunda clase* o *segunda especie* en $x = 0$ si tiene un punto singular en $x = 0$ y este no es de primera clase.

Observación 1.10. Hay dos definiciones de singularidad de primera clase: Una para sistemas de orden uno como (1.1) y otra para ecuaciones escalares de orden n. Ahora veremos que es posible escribir una ecuación escalar de orden n con singularidad de primera clase en $x = 0$ como sistema de orden uno con singularidad de primera especie en $x = 0$, lo que da sentido a esta terminología.

Partiendo de una ecuación con singularidad de primera clase en 0 como en (1.2), hacemos el siguiente cambio de variable (ver, por ejemplo, P. Henrici [1]):

$$v_k = x^{k-1}u^{(k-1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

y obtenemos que, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$v_k' = (k-1)x^{k-2}u^{(k-1)} + x^{k-1}u^{(k)} = (k-1)\frac{1}{x}v_k + \frac{1}{x}v_{k+1}.$$

y

$$\begin{aligned}
v_n' &= (n-1)x^{n-2}u^{(n-1)} + x^{n-1}u^{(n)} \\
&= \frac{n-1}{x}v_n + x^{n-1}\left[-\sum_{j=1}^{n} x^{-j}p_j(x)u^{(n-j)}\right] \\
&= \frac{n-1}{x}v_n - \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n} x^{n-j}p_j(x)u^{n-j} \\
&= \frac{n-1}{x}v_n - \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n} p_j(x)v_{n-j+1} \\
&= \frac{1}{x}\left[(n-1)v_n - \sum_{j=1}^{n} p_j(x)v_{n-j+1}\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema resultante para la función vectorial $(v_1, \ldots, v_n)$ es

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix} = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & & \cdots & & -p_2(x) & n-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Efectivamente, hemos obtenido un sistema que tiene en $x = 0$ una singularidad de primera clase, de acuerdo con la definición 1.5.

Definición 1.11. Diremos que una serie de potencias es *solución formal de una ecuación diferencial* (o *de un problema de valores iniciales*) si, tras hacer las operaciones formales indicadas por la ecuación sobre los términos de dicha serie, la ecuación se satisface (junto con las condiciones iniciales si las hubiera).

Enunciamos a continuación, sin demostración, el Teorema clásico de existencia y unicidad de la solución para el problema de valores iniciales en un dominio simplemente conexo. Como es habitual, se entiende por dominio un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

Teorema 1.12. *Sean $A(x)$ una matriz cuadrada de orden n y $f(x)$ una función vectorial, ambas holomorfas en un dominio D simplemente conexo en el plano complejo. Entonces, la ecuación diferencial vectorial*

$$y' = A(x)y + f(x) \tag{1.3}$$

tiene exactamente una solución tal que se cumple

$$y(a) = \alpha, \tag{1.4}$$

donde a es un punto arbitrario de D y α es un vector constante arbitrario. La solución es holomorfa en D.

Veamos que, en el Teorema 1.12, es importante el hecho de que la ecuación sea lineal. Consideramos el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 1.13. Consideramos la ecuación diferencial escalar

$$y' = y^2,$$

cuyas soluciones son de la forma

$$y = -\frac{1}{x+c},$$

donde c es una constante cualquiera. Esta solución sin embargo no es holomorfa en $x = -c$, aunque el segundo miembro de la ecuación es holomorfo en x y en y para todo x y todo y. Es decir, no se cumple la última línea del teorema.

Teorema 1.14. *La ecuación diferencial escalar*

$$u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)u = g(x), \tag{1.5}$$

cuyos coeficientes son holomorfos en el dominio simplemente conexo D, tiene exactamente una solución $u(x)$ tal que

$$u^{(j)}(a) = \alpha_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.6}$$

donde a es un punto arbitrario de D y los α_j son números complejos arbitrarios. La solución es holomorfa en D.

Observación 1.15. Las pruebas de los Teoremas 1.12 y 1.14 se basan en las mismas técnicas y, de hecho, se podría deducir una directamente de la otra teniendo en cuenta que un sistema de la forma (1.3) se puede transformar fácilmente en una ecuación como en (1.5), y viceversa. Para demostrarlos, se comienza suponiendo que el sistema (1.3) con condiciones iniciales (1.4) o la ecuación (1.5) con las condiciones iniciales (1.6) tienen una solución en serie de potencias centrada en a, es decir, de la siguiente forma:

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r (x-a)^r,$$

donde los a_r son vectores constantes de tamaño n en el primer caso y constantes escalares en el segundo. Evaluando las condiciones iniciales, obtenemos el valor de a_0 en el caso matricial, o el de los n primeros coeficientes a_r en el caso escalar. A continuación se inserta la serie formal en la ecuación (1.3) o en la (1.5), respectivamente, y se obtiene una familia de ecuaciones que pueden ser resueltas recursivamente. Es decir, que de esta manera se pueden obtener todos los coeficientes a_r en ambos casos. Por el Criterio de Mayoración de Cauchy, se demuestra que la serie es convergente, por lo que ya tendríamos una solución local que converge en un disco en torno a a. Gracias al Teorema de Monodromía, esta solución local se puede extender a abiertos simplemente conexos, pues el germen que define resulta ser arbitrariamente prolongable en el simplemente conexo D.

Observación 1.16. El Teorema 1.12 nos dice que, en puntos regulares, los problemas de Cauchy, que son aquellos problemas formados por una ecuación diferencial y unos valores iniciales, tienen siempre solución global en el dominio simplemente conexo de holomorfía de la matriz $A(x)$ en (1.3), y la solución local es precisamente la solución formal, que siempre existe y es única. ¿Qué ocurre si el punto es singular? En este caso, no podemos asegurar que haya solución formal y, en caso de que la haya, esta no será necesariamente convergente. A continuación veremos dos ejemplos de estas dos últimas situaciones.

Ejemplo 1.17. Consideramos la siguiente ecuación diferencial:

$$(1+z)y(z) - zy'(z) = z,$$

que presenta en $z = 0$ una singularidad de primera especie. Supongamos que tiene una solución formal de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Insertamos y obtenemos:

$$\begin{aligned}
(1+z)y - zy' &= (1+z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1} - n a_n)\, z^n.
\end{aligned}$$

Y entonces podemos deducir que

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \\
a_1 + a_0 - a_1 = a_0 &= 1,
\end{aligned}$$

lo cual es imposible. Entonces, la ecuación diferencial no tiene solución formal.

Ejemplo 1.18. Consideramos la ecuación de Euler

$$z^2 y'(z) + y(z) = z,$$

que presenta en $z = 0$ una singularidad de segunda especie. Supongamos que tiene una solución formal de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Insertamos en la ecuación, obteniendo:

$$\begin{aligned}
z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= z \\
\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= z \\
\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} z^n + a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n &= z \\
a_0 + (a_1 - 1)z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1)a_{n-1} + a_n\right] z^n &= 0.
\end{aligned}$$

Es decir, los coeficientes de la solución formal satisfacen

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= 1, \\ a_n &= -(n-1)a_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Es sencillo probar, razonando por inducción, que

$$a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad \text{para } n \geq 2,$$

y podemos escribir la solución como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!z^n.$$

Usando la fórmula del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n-1)!|}{|n!|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

es decir, el radio de convergencia de la solución formal es 0.

Sin embargo, para el caso de singularidades de primera especie, podemos enunciar el siguiente teorema que asegura que, si encontramos una solución formal en serie de potencias para la ecuación, entonces esa solución convergerá localmente.

Teorema 1.19. *Sea*

$$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r$$

una función matricial holomorfa para $|x| < x_0$*, y sea*

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

una serie formal vectorial que satisface formalmente la ecuación diferencial

$$xz' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r \right) z \tag{1.7}$$

para el vector z*. Entonces*

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

converge para $|x| < x_0$ *y representa una solución analítica de la ecuación* (1.7)*.*

La prueba es similar a la de los Teoremas 1.12 y 1.14 y consiste en estimar el tamaño de los coeficientes a_r a partir de las ecuaciones de recurrencia que satisfacen por ser la serie $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ solución formal de la ecuación (1.7).

Observación 1.20. Nótese que, si tenemos en un abierto del plano complejo un conjunto de n soluciones del sistema $y' = A(x)y$ linealmente independientes, podemos disponerlas como columnas de una matriz W cuyo determinante será no nulo en todo punto del abierto, y que será entonces una matriz fundamental del sistema. Es inmediato que W satisface la ecuación diferencial matricial

$$W' = A(x)W.$$

Entonces, es bien conocido que, mediante la fórmula de variación de parámetros podemos obtener fácilmente una solución particular de

$$W' = A(x)W + F(x),$$

donde $F(x)$ es una matriz holomorfa de tamaño $n \times n$. Por lo tanto, en el estudio que sigue nos centraremos en la consideración de problemas homogéneos, ya que las conclusiones para los no homogéneos serán inmediatas a partir de esta observación.

1.2. Desarrollos asíntóticos. Propiedades elementales.

Como se ha visto en el ejemplo 1.18, una serie de potencias solución formal de una ecuación en una singularidad de segunda especie (como el punto 0 para la ecuación de Euler) puede ser divergente, es decir, tener radio de convergencia nulo. Con el objeto de dar un significado analítico a dicha solución, introducimos a continuación el concepto de desarrollo analítico y detallamos sus principales propiedades.

Definición 1.21. Sea S un sector en $\mathbb{C}$ con vértice en 0 y f una función

$$f : S \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorfa. Consideramos la serie formal

$$\hat{f} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \in \mathbb{C}[[x]].$$

Se dice que $\hat{f}$ *representa* $f(x)$ *asintóticamente* o es *desarrollo asintótico de* $f(x)$, *cuando* $x \to 0$ *en* S, si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}} x^{-m}\left[f(x) - \sum_{r=0}^{m} a_r x^r\right] = 0$$

para todo $m \geq 0$ y todo $T \ll S$ acotado.

Denotaremos esta relación por:

$$f(x) \sim \widehat{f} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \qquad x \in S, \qquad x \to 0.$$

Observación 1.22. Si f es holomorfa en el origen, es inmediato comprobar que la serie de Taylor de f en 0 es un desarrollo asintótico cuando x tiende a 0 en cualquier sector S con vértice en el origen (la prueba se basa en la forma integral del resto de Taylor).

Teorema 1.23. *Sea S un sector en $\mathbb{C}$ con vértice en 0 y f una función*

$$f : S \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorfa. La serie formal

$$\hat{f} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \in \mathbb{C}[[x]].$$

será desarrollo asintótico de f cuando $x \to 0$ en S si y solo si, para todo T subsector propio y acotado de S y para todo $m \geq 0$, existe una constante $C_{T,m} > 0$ tal que

$$\left|f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r\right| \leq C_{T,m} \cdot |x|^m$$

para todo $x \in T$.

Demostración. (a) Empezamos probando la necesidad. Si $\hat{f}$ representa f asintóticamente en S y tomamos un subsector propio cualquiera T de S y un $m \geq 0$, sabemos que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}} x^{-m}\left[f(x) - \sum_{r=0}^{m} a_r x^r\right] = 0,$$

lo que equivale a decir que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}} x^{-m}\left[f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r\right] = a_m,$$

Tomamos un $\epsilon > 0$ y, por definición de límite, existe un $\delta > 0$ tal que, si $|x| \leq \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r}{x^m} - a_m \right| < \epsilon.$$

y, usando la desigualdad triangular inversa,

$$\left| \frac{f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r}{x^m} \right| < |a_m| + \epsilon.$$

Sea $T^* = \{x \in T : |x| > \delta\}$. Como es acotado, su adherencia es un compacto y además, estaría totalmente contenida en S. Por lo tanto, f es una función holomorfa en toda la adherencia de T^* y, por ser esta compacta, f está acotada en T^*. Podemos escribir

$$|f(x)| < M_1$$

para algún $M_1 > 0$ y todo $x \in T^*$.

Como $m - 1$ es finito, también podemos acotar

$$\left| \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r \right| < M_2$$

para algún $M_2 > 0$ y todo $x \in T^*$. Es decir, para $x \in T^*$

$$\frac{\left| f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r \right|}{|x|^m} \leq \frac{|f(x)| + \left| \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r \right|}{\delta^m} < \frac{M_1 + M_2}{\delta^m}.$$

Tomamos

$$C_{T,m} = \text{máx} \left\{ |a_m| + \epsilon, \frac{M_1 + M_2}{\delta^m} \right\}$$

y entonces, si $x \in T$, tanto si $|x| \leq \delta$, como si $|x| > \delta$, se cumplirá

$$\left| f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r \right| < C_{T,m} \cdot |x|^m.$$

(b) A continuación probamos la suficiencia. Ahora tomamos T un subsector propio y acotado cualquiera de S y un $m \geq 0$ y sabemos que existe una constante $C_{T,m+1} > 0$ tal que

$$\left| f(x) - \sum_{r=0}^{m} a_r x^r \right| \leq C_{T,m+1} \cdot |x|^{m+1}.$$

Ahora vemos fácilmente que

$$\left| x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^{m} a_r x^r \right] \right| \leq C_{T,m+1} |x|,$$

luego es claro que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^{m} a_r x^r \right] = 0.$$

Es decir, que $\hat{f}$ representa f asintóticamente cuando $x \to 0$ en S y hemos terminado la prueba. □

Observación 1.24. Lo que probaremos en este trabajo es que las soluciones formales de sistemas en torno a singularidades de segunda especie tienen un significado analítico: son desarrollo asintótico en 0 de verdaderas soluciones holomorfas de la ecuación definidas en sectores del plano complejo con vértice en 0.

Veamos ahora cómo se pueden obtener recursivamente los coeficientes del desarrollo asintótico de una función.

Lema 1.25. *Se cumple que*

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

es el desarrollo asintótico de $f(x)$ cuando $x \to 0$ en un sector S con vértice en 0 si y solo si, para todo subsector propio T de S,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} f(x) = a_0 \tag{1.8}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r \right] = a_m, \quad m > 0. \tag{1.9}$$

Demostración. (a) Empezamos probando la necesidad. Tomamos un subsector propio T de S. Aplicando la definición para $m = 0$, obtenemos directamente (1.8). Para $m = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} x^{-1} \left[f(x) - a_0 - a_1 x \right] = 0,$$

por lo que claramente

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} x^{-1} \left[f(x) - a_0 \right] = a_1.$$

Para $m > 1$ tenemos que

$$x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m}a_r x^r\right]=x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m-1}a_r x^r\right]-a_m,$$

por lo que

$$\begin{aligned}0&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}}x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m}a_r x^r\right]\\ &=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}}x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m-1}a_r x^r\right]-a_m\end{aligned}$$

y se cumple (1.9).

(b) A continuación, probamos la suficiencia. Si, para cualquier subsector propio T de S, se cumplen (1.8) y (1.9), entonces para $m = 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}}f(x)-a_0=0$$

y, para $m \geq 1$, se cumple

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}}x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m}a_r x^r\right]&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}}x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m-1}a_r x^r\right]-a_m\\ &=a_m-a_m=0,\end{aligned}$$

por lo que la serie será desarrollo asintótico de $f(x)$. □

Teorema 1.26. *Una función $f(x)$ admite a lo más una serie de desarrollo asintótico*

$$\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r,$$

cuando $x \to 0$ en un sector S dado.

Demostración. Las relaciones (1.8) y (1.9) en el lema anterior determinan los coeficientes a_r de manera única. □

El siguiente resultado, inmediato a partir de la definición 1.21, permitirá razonar con comodidad en la prueba de las propiedades algebraicas y analíticas de los desarrollos asintóticos.

Lema 1.27. *La serie*

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

es desarrollo asintótico de $f(x)$ cuando $x \to 0$ en un sector S si y solo si para todo $m \geq 0$ se puede escribir

$$f(x) = \sum_{r=0}^{m} a_r x^r + E(x,m)x^m \tag{1.10}$$

donde $E(x,m)$ tiende, para m fija, a cero cuando $x \to 0$ en cualquier subsector propio T de S.

Comenzamos con las propiedades algebraicas del concepto de desarrollo asintótico.

Teorema 1.28. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones definidas en un sector S con vértice en 0 y $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son constantes, entonces*

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \qquad g(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r, \quad \text{cuando } x \to 0 \text{ en } S,$$

implica

$$h(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha a_r + \beta b_r)\, x^r \quad \text{cuando } x \to 0 \text{ en } S.$$

Demostración. Para $m \geq 0$, podemos usar el Lema 1.27 para escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{r=0}^{m} a_r x^r + E_1(x,m), \\ g(x) &= \sum_{r=0}^{m} b_r x^r + E_2(x,m), \end{aligned}$$

donde $E_1(x,m)$ y $E_2(x,m)$ tienden, para m fija, a 0 cuando $x \to 0$ en cualquier subsector propio T de S. Por lo tanto, también se puede escribir

$$\begin{aligned} h(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &= \alpha \left(\sum_{r=0}^{m} a_r x^r + E_1(x,m) \right) + \beta \left(\sum_{r=0}^{m} b_r x^r + E_2(x,m) \right) \\ &= \alpha \sum_{r=0}^{m} a_r x^r + \beta \sum_{r=0}^{m} b_r x^r + \alpha E_1(x,m) + \beta E_2(x,m). \end{aligned}$$

Denotando $E(x,m) = \alpha E_1(x,m) + \beta E_2(x,m)$, podemos escribir

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha a_r + \beta b_r)\, x^r + E(x,m),$$

donde, para m fija, $E(x,m)$ tiende a 0 cuando $x \to 0$ en cualquier subsector propio T de S. Usando de nuevo el Lema 1.27, concluimos que

$$h(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha a_r + \beta b_r)\, x^r \quad \text{cuando } x \to 0 \text{ en } S. \qquad \square$$

Teorema 1.29. *Sea S un sector en el plano complejo. Si*

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \qquad g(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r, \quad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S,$$

entonces $f(x)g(x)$ está representado asintóticamente en S por la serie formal obtenida tras la multiplicación formal término a término de los dos desarrollos asintóticos y su reordenación.

Demostración. Haciendo la multiplicación formal de los dos desarrollos, obtenemos la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r,$$

donde, para $r \geq 0$,

$$c_r = \sum_{j=0}^{r} a_j b_{r-j}.$$

Por el Lema 1.27, sabemos que para $m \geq 0$ fijo,

$$f(x) = \sum_{r=0}^{m} a_r x^r + E_1(x,m)x^m,$$
$$g(x) = \sum_{r=0}^{m} b_r x^r + E_2(x,m)x^m,$$

donde $E_1(x,m), E_2(x,m)$ tienden a 0 cuando $x \to 0$ en cualquier subsector propio T de S. Multiplicando estas dos fórmulas,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = & \left(\sum_{r=0}^{m} a_r x^r\right)\left(\sum_{r=0}^{m} b_r x^r\right) + x^m E_2(x,m)\left(\sum_{r=0}^{m} a_r x^r\right) \\ & + x^m E_1(x,m)\left(\sum_{r=0}^{m} b_r x^r\right) + x^{2m} E_1(x,m) E_2(x,m) \\ & = \sum_{r=0}^{m} c_r x^r + x^m s(x) + x^m \Bigg(E_2(x,m)\left(\sum_{r=0}^{m} a_r x^r\right) \\ & + E_1(x,m)\left(\sum_{r=0}^{m} b_r x^r\right) + x^m E_1(x,m) E_2(x,m) \Bigg), \end{aligned}$$

donde $x^m s(x)$ proviene de la suma de un número finito de términos, todos ellos de grado mayor que m, que resultaban al multiplicar $\sum_{r=0}^{m} a_r x^r$ y $\sum_{r=0}^{m} b_r x^r$ y que no están incluidos en $\sum_{r=0}^{m} c_r x^r$. Denotando

$$\begin{aligned} E(x,m) = & s(x) + E_2(x,m)\left(\sum_{r=0}^{m} a_r x^r\right) \\ & + E_1(x,m)\left(\sum_{r=0}^{m} b_r x^r\right) + x^m E_1(x,m) E_2(x,m), \end{aligned}$$

se ve claramente que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} E(x,m) = 0,$$

por lo que, usando el Lema 1.27, hemos probado el teorema. □

El siguiente resultado se ocupa de la composición de funciones con desarrollo asintótico. Para que tenga sentido, es necesario que la primera función a componer tienda a 0 cuando x tienda a 0 en S, en otras palabras, que su serie de desarrollo asintótico tenga término independiente nulo, pues solo en este caso el comportamiento de la compuesta puede ser deducido a partir de las funciones componentes.

Teorema 1.30. *Sean S y R sectores en el plano complejo con vértice en 0. Si*

$$f(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r \quad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S,$$

y

$$g(u) \sim \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s \quad \textit{cuando } u \to 0 \textit{ en } R,$$

y si $f(x) \in R$ para todo $x \in S$, entonces

$$g[f(x)] \sim \sum_{t=0}^{\infty} c_t x^t, \quad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S,$$

donde los coeficientes c_t se obtienen mediante inserción formal de la serie de $f(x)$ en la serie de $g(u)$, seguida de la reordenación de potencias de x.

Demostración. Se puede construir una serie

$$\sum_{t=0}^{\infty} c_t x^t$$

mediante la sustitución formal

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_s \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r \right)^s .$$

Estos coeficientes c_t son polinomios en $a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t$. Sabemos que

$$f(x) = \sum_{r=1}^{m} a_r x^r + E_1(x,m) x^m,$$

$$g(x) = \sum_{r=0}^{m} b_r x^r + E_2(x,m) x^m,$$

donde $E_1(x,m)$, $E_2(x,m)$ tienden, para m fijo, a cero cuando $x \to 0$ en cualquier subsector propio T de S. Haciendo la sustitución,

$$\begin{aligned} g[f(x)] = {} & \sum_{r=0}^{m} b_r \left(\sum_{l=1}^{m} a_l x^l + E_1(x,m) x^m \right)^r \\ & + E_2 \left(\sum_{r=0}^{m} a_r x^r + E_1(x,m) x^m, m \right) \left(\sum_{r=0}^{m} a_r x^r + E_1(x,m) x^m \right)^m . \end{aligned}$$

Del primer sumando, tras elevar la cantidad entre paréntesis a r y hacer el producto, obtenemos los términos de $\sum_{r=0}^{m} c_r x^r$ y un número finito de sumandos que tienen x^m como factor común y que, al dividirlos por x^m, también tienden a cero cuando $x \to 0$ en cualquier subsector propio T. Del segundo sumando, obtenemos también una cantidad que tiende a cero cuando $x \to 0$ en cualquier subsector T multiplicada por x^m. Por lo tanto, podemos escribir

$$\sum_{t=0}^{m} c_t x^t + E(x,m) x^m$$

para alguna función $E(x,m)$ que tiende a cero cuando $x \to 0$ en cualquier subsector propio T de S. Esto prueba el teorema. □

Pasamos a ocuparnos de las propiedades analíticas, en particular el comportamiento del desarrollo asintótico bajo integración o derivación.

Teorema 1.31. *Si $f(x)$ es holomorfa en un sector S, entonces*

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S,$$

implica

$$\int_0^x f(t)dt \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1}, \quad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S,$$

siempre que el camino de integración se escoja de modo que, fijado un subsector T propio de S, exista otro subsector T' de S (con $T \subset T'$) de modo que para todo $z \in T$ el camino que une 0 y z se mantenga dentro de T'.

Demostración. Tomamos un subsector propio T de S y sea T' como en el enunciado. Por el Lema 1.27, sabemos que

$$f(x) = \sum_{r=0}^{m} a_r x^r + E(x,m)x^m, \quad x \in T',$$

donde

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T'}} E(x,m) = 0.$$

Como

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T'}} f(x)$$

existe, la integral de cero a x de la función f existe y es independiente del camino, como aplicación inmediata del Teorema de los residuos de Cauchy. Tomamos como camino un segmento recto. La función $E(x,m)$ es holomorfa en S, por (1.10) y, por tanto, también lo será en T. Como tiende a cero cuando $x \to 0$ en T, es uniformemente continua en la adherencia de T, si se le asigna el valor cero en el origen. Esto implica que el integrando en el segundo miembro de

$$\int_0^x E(t,m)t^m dt = x^{m+1} \int_0^1 E(\tau x, m)\tau^m d\tau, \qquad t = \tau x, \qquad 0 \leq \tau \leq 1,$$

tiende a cero uniformemente en T, cuando $x \to 0$. Entonces, integrando la fórmula (1.10), obtenemos:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1} + x^{m+1} \int_0^1 E(\tau x, m)\tau^m d\tau$$

y, por tanto, hemos probado el teorema. □

Teorema 1.32. *Si $f(x)$ es holomorfa en un sector S del plano complejo y si*

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S,$$

entonces

$$f'(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_{r+1}(r+1)x^r, \quad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S.$$

Demostración. Tomamos un subsector propio T de S. Derivando la fórmula (1.10), obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{r=1}^{m} a_r r x^{r-1} + m x^{m-1} E(x,m) + x^m \frac{dE(x,m)}{dx} \\ &= \sum_{r=1}^{m-1} a_{r+1}(r+1)x^r + m x^{m-1} E(x,m) + x^m \frac{\partial E(x,m)}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde claramente $m \geq 1$. Sea T' un subsector propio de S tal que $T \ll T'$, y elijamos α un número positivo suficientemente pequeño tal que la circunferencia C_x de centro x y radio $|x|\alpha$ esté contenida en T' para todo $x \in T$. Sea $M(x,m)$ el máximo de $|E(x,m)|$ en C_x. La fórmula de Cauchy en este caso nos dice que

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|y-x|=\alpha|x|} \frac{E(y,m)}{(y-x)^2} dy,$$

por lo que podemos acotar:

$$\left| \frac{\partial E}{\partial x}(x,m) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\alpha|x| \cdot \max_{y \in C_x} \frac{|E(y,m)|}{|y-x|^2} = \frac{M(x,m)}{\alpha^2|x|^2}\alpha|x| = \frac{M(x,m)}{\alpha|x|}.$$

Por lo tanto,

$$\left| f'(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_{r+1}(r+1)x^r \right| \leq |x|^{m-1} \left(m\,|E(x,m)| + \frac{M(x,m)}{\alpha} \right).$$

La expresión entre paréntesis tiende a cero cuando $x \to 0$ en T, ya que $E(x,m)$ tiende a 0 cuando $x \to 0$ en T y, como C_x está contenido en T' para todo $x \in T$, $M(x,m)$ también tenderá a cero cuando $x \to 0$. Por tanto, hemos probado el teorema. $\square$

La razón de haber adaptado la definición de desarrollo asintótico imponiendo acotaciones sobre cada subsector propio del sector original, y no de modo uniforme en todo el sector, es precisamente la posibilidad de garantizar la estabilidad del concepto respecto de la derivación.

El siguiente resultado muestra que cualquier serie de potencias puede ser vista en un sector arbitrario como desarrollo asintótico en 0 de una función holomorfa en dicho sector

Teorema 1.33 (de Borel-Ritt)**.** *Para cada serie de potencias*

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

y sector S existe una función $f(x)$ holomorfa en S para $|x| < x_0$ (x_0 es una constante positiva arbitraria) tal que

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad \text{cuando } x \to 0 \text{ en } S.$$

Probamos el teorema con el procedimiento que sigue J. F. Ritt en [2].

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el sector S está bisecado por el semieje real positivo, ya que, si θ es un ángulo cualquiera y la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

es desarrollo asintótico de la función $f(x)$ es un sector S, entonces la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-i\theta r} x^r$$

será desarrollo asintótico de la función $\phi(x) = f\left(xe^{-i\theta}\right)$ en el sector obtenido al rotar S el ángulo θ. Por lo tanto, podemos asumir que $S = S_0(-\gamma, \gamma, x_0)$ para algún $\gamma \in (0, \pi)$ y $x_0 > 0$.

Sustituiremos la serie dada por una modificada de la forma

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \alpha_r(x) x^r,$$

donde los "factores de convergencia" α_r se eligen de manera que la nueva serie sea uniformemente convergente pero comparta las propiedades asintóticas de la serie original cuando $x \to 0$. Por lo tanto, buscaremos que $\alpha_r(x)$ sea pequeña para $x \neq 0$, cuando a_r es grande (y de esta manera la serie modificada convergerá en S) y, por otra parte, buscaremos que $\alpha_r(x)$ tienda rápidamente a uno cuando $x \to 0$. Podemos tomar factores de la siguiente manera:

$$\alpha_r(x) = 1 - \exp\left(-\frac{b_r}{x^\beta}\right), \quad b_r > 0. \tag{1.11}$$

El exponente β está en el intervalo $(0,1)$ y, si se toma suficientemente pequeño, el exponente $-b_r/x^\beta$ tendrá parte real negativa en un sector S prefijado. La desigualdad

$$|1 - e^z| < |z|, \quad \text{para } \mathrm{Re}(z) < 0, \tag{1.12}$$

se deduce a partir de

$$1 - e^z = -\int_{[0,z]} e^w dw$$

y del hecho de que $\mathrm{Re}(w) < 0$ sobre el segmento abierto de extremos 0 y z. Aplicamos (1.12) a (1.11) y obtenemos que, para $x \in S$,

$$|\alpha_r(x)| = \left|1 - \exp\left(-\frac{b_r}{x^\beta}\right)\right| < \left|-\frac{b_r}{x^\beta}\right|,$$

y, multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $|a_r x^r|$, obtenemos

$$|a_r \alpha_r(x) x^r| \leq |a_r||b_r||x|^{r-\beta}, \quad x \in S.$$

Por lo tanto, si los b_r están definidos por

$$b_r = \begin{cases} |a_r 2^r {x_0}^r|^{-1} & \text{si } a_r \neq 0, \\ 0 & \text{si } a_r = 0 \end{cases},$$

entonces

$$\left|\sum_{r=1}^{\infty} a_r \alpha_r(x) x^r\right| \leq \sum_{r=1}^{\infty} |a_r \alpha_r(x) x^r| \leq \sum_{r=1}^{\infty} |a_r||b_r||x|^{r-\beta} \leq \frac{1}{|x_0|^\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r}\left|\frac{x}{x_0}\right|^{r-\beta},$$

que converge uniformemente para $|x| \leq x_0$. Es decir, la serie anterior converge uniformemente en cualquier subconjunto cerrado de $x \in S$, $|x| \leq x_0$ y por lo tanto, representa un función holomorfa $f(x)$ en cualquier subconjunto de $x \in S$, $|x| \leq x_0$.

Ahora probaremos que

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \alpha_r(x) x^r \tag{1.13}$$

cumple

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad x \to 0 \quad x \in S.$$

Usando (1.11) y (1.13),

$$x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m}a_r x^r\right]=-\sum_{r=0}^{m}a_r\exp\left(-\frac{b_r}{x^{\beta}}\right)x^{-(m-r)}+\sum_{r=m+1}^{\infty}a_r\alpha_r(x)x^{r-m}.$$

El primer sumando tiende a cero cuando $x\to 0$. Usando la desigualdad probada anteriormente sabemos que, en S, para $|x|\le x_0$,

$$\left|\sum_{r=m+1}^{\infty}a_r\alpha_r(x)x^{r-m}\right|\le\frac{1}{|2x_0|^{m+\beta}}\sum_{r=m+1}^{\infty}\left|\frac{x}{2x_0}\right|^{r-m-\beta}<\frac{1}{|2x_0|^{m+\beta}}\frac{\left|\frac{x}{2x_0}\right|^{1-\beta}}{1-\left|\frac{x}{2x_0}\right|},$$

y este sumando también tiende a cero cuando $x\to 0$. $\square$

Observación 1.34. En el Teorema 1.33, $f(x)$ no está determinada de manera única, ya que basta con sumar a $f(x)$ una función h no nula pero con desarrollo asintótico nulo, de tal manera que obtenemos una función diferente pero cuyo desarrollo asintótico es el mismo que el de $f(x)$. Tales funciones h se denominan planas, y pueden obtenerse, como sugiere la demostración anterior, en la forma $\exp\left(-1/x^{\beta}\right)$, donde $\beta>0$ es adecuado y depende del sector bisecado por el semieje real positivo en el que se quiera trabajar.

A partir de ahora, trataremos con funciones de dos variables que tienen desarrollo asintótico respecto a una de ellas.

Definición 1.35. Sea S un sector en $\mathbb{C}$ con vértice en 0, U la adherencia de un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa

$$f: S\times U\longrightarrow\mathbb{C}.$$

Consideramos la serie formal

$$\hat{f}=\sum_{r=0}^{\infty}a_r(y)x^r\in\mathbb{C}[y][[x]].$$

Se dice que $\hat{f}$ *representa* $f(x,y)$ *asintóticamente* o es *desarrollo asintótico de* $f(x,y)$*, cuando* $x\to 0$ *en* S, si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in T}}x^{-m}\left[f(x,y)-\sum_{r=0}^{m}a_r(y)x^r\right]=0 \tag{1.14}$$

para todo $m\ge 0$, todo $y\in U$ y todo $T\ll S$ acotado. Lo denotaremos por

$$f(x,y)\sim\sum_{r=0}^{\infty}a_r(y)x^r,\quad \text{cuando } x\to 0 \text{ en } S, \tag{1.15}$$

para todo $y\in U$.

Definición 1.36. Con la misma notación de la definición anterior, si $\hat{f}$ representa asintóticamente $f(x, y)$ y la convergencia en (1.14) es uniforme respecto a y, para $y \in U$, diremos que el desarrollo asintótico es *uniformemente válido* para $y \in U$.

Lema 1.37. *Sea S un sector acotado en el plano complejo con vértice en 0 y sea U la adherencia de un dominio acotado en el plano complejo. Sea $f(x, y)$ acotada en $S \times U$ y asumimos que $f(x, y)$ tiene un desarrollo asintótico de la forma* (1.15) *con coeficientes $a_r(y)$, cada uno de los cuales está acotado en U. Entonces, el desarrollo asintótico es uniforme en U si y solo si la función $G_m(x, y)$ definida en la relación*

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{m} a_r(y)x^r + G_m(x, y)x^{m+1} \tag{1.16}$$

es, para cada m y para cada subsector propio T de S, acotada en $T \times U$.

Demostración. (a) Probamos primero la necesidad. Si el desarrollo asintótico (1.15) es uniformemente válido para $y \in U$ entonces existe, para todo $\epsilon > 0$ y todo subsector propio T de S, un $\delta_{m,T}(\epsilon) > 0$, independiente de y, tal que en $T \times U$

$$\left| x^{-m} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^{m} a_r(y)x^r \right] \right| < \epsilon,$$

siempre que $|x| \leq \delta_{m,T}(\epsilon)$. Aplicando esta desigualdad con $m + 1$ en vez de con m y usando la desigualdad triangular, obtenemos inmediatamente que

$$\left| x^{-m-1} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^{m} a_r(y)x^r \right] \right| < \epsilon + |a_{m+1}(y)|, \quad |x| \leq \delta_{m+1,T}(\epsilon),$$

lo cual implica la acotación de $G_m(x, y)$ para la parte de $T \times U$ en la cual $|x| \leq \delta_{m+1,T}(\epsilon)$. Para $|x| > \delta_{m+1,T}(\epsilon)$, $(x, y) \in T \times U$, la acotación de

$$G_m(x, y) = \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^{m} a_r(y)x^r \right] x^{-m-1} \tag{1.17}$$

es consecuencia de la acotación de $f(x, y)$ y de la de los $a_r(y)$ en ese sector.

(b) Ahora probamos la suficiencia. Dado un subsector propio T de S, $G_m(x, y)$, definida como en (1.17), está acotada en $T \times U$. Tenemos entonces

$$x^{-m} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^{m} a_r(y)x^r \right] = G_m(x, y)x,$$

que tiende uniformemente en U a cero, cuando $x \to 0$ en T, ya que $G_m(x, y)$ está acotada en $T \times U$ para cada $m > 0$. $\square$

Definición 1.38. Sea U un subconjunto de $\mathbb{C}$. Diremos que $V \subset U$ es un *subconjunto propio de U* si la distancia de V a la frontera de U es positiva.

Teorema 1.39. *Sean S un sector acotado con vértice en 0 y U la adherencia de un dominio acotado en el plano complejo. Si $f(x, y)$ es holomorfa en ambas variables en $S \times U$ y tiene un desarrollo asintótico uniformemente válido de la forma* (1.15)*, entonces todas las $a_r(y)$ son holomorfas en U y*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r'(y) x^r,$$

uniformemente en todo subconjunto propio compacto U_1 de U.

Demostración. Por la definición de desarrollo asintótico uniforme, si T es un subsector propio de S,

$$a_0(y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} f(x, y),$$

uniformemente para $y \in U$. Como esto es cierto para cualquier subsector propio de S, podemos decir que $a_0(y)$ es límite uniforme de una función holomorfa en un dominio cerrado y acotado (simplemente tomamos un subsector propio T^* de S que contenga a la adherencia de T), por lo que es holomorfa en U. Por inducción: Asumimos que $a_0(y), \ldots, a_{m-1}(y)$ son holomorfas en U. Como

$$a_m(y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} x^{-m} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r(y) x^r \right],$$

por la fórmula (1.9), y como la convergencia es uniforme en la adherencia de T (hacemos lo mismo: tomamos un subsector propio T^* de S que contenga a la adherencia de T), $a_m(y)$ es holomorfa en U.

Tomamos un subconjunto propio y compacto U_1 de U. Las funciones $a_r(y)$ son holomorfas en U y, por lo tanto acotadas en U, porque U es compacto. Además, $f(x, y)$ es acotada en $S \times U$, ya que es holomorfa en esta región y tiene límite uniforme $a_0(y)$ en $x = 0$. Por lo tanto, el Lema 1.37 es válido, i.e., para todo subsector propio T de S, $G_m(x, y)$ en la fórmula (1.17) es acotada en $T \times U$, es decir

$$|G_m(x, y)| \leq M_{m,T} \qquad \text{en } T \times U$$

para todo sector $T \ll S$. Ahora denotamos por r a un número positivo no mayor que la distancia de U_1 a la frontera de U. Como $G_m(x, y)$ es holomorfa con respecto a y en $T \times U$, podemos aplicar la fórmula de Cauchy:

$$\frac{\partial G_m(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-y|=r} \frac{G_m(x,w)}{(w-y)^2} dw,$$

y, por tanto, acotar:

$$\left| \frac{\partial G_m(x,y)}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|w-y|=r} \frac{|G_m(x,w)|}{|w-y|^2} = \frac{M_{m,T}}{r} \qquad \text{en } T \times U_1.$$

Derivamos (1.16) con respecto a y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{r=0}^{m} a_r'(y) x^r + \frac{\partial G_m(x,y)}{\partial y} x^{m+1}$$

y tenemos que, para $m \geq 0$,

$$\left| x^{-m-1} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \sum_{r=0}^{m} a_r'(y) x^r \right] \right| = \left| \frac{\partial G_m(x,y)}{\partial y} \right| \leq \frac{M_{m,T}}{r}$$

en $T \times U_1$. El Lema 1.37 nos dice que, por ser este último término acotado en $T \times U_1$, el desarrollo asintótico es uniforme en U_1. □

Teorema 1.40. *Asumimos que $f(x,y)$ satisface las hipótesis del Teorema 1.39 y que U contiene al disco $|y| \leq y_0$. Si $c_s(x)$ y a_{rs} están definidas como*

$$f(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(x) y^s, \qquad |y| \leq y_0, \quad x \in S \tag{1.18}$$

$$a_r(y) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{rs} y^s, \qquad |y| \leq y_0,$$

entonces

$$c_s(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_{rs} x^r, \qquad \textit{cuando } x \to 0 \textit{ en } S.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{r=0}^{m} a_r(y) x^r + G_m(x,y) x^{m+1} \\ &= \sum_{r=0}^{m} \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_{rs} y^s \right) x^r + G_m(x,y) x^{m+1} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{m} a_{rs} x^r \right) y^s + G_m(x,y) x^{m+1}, \end{aligned}$$

donde, por el Lema 1.37, $G_m(x,y)$ es, para cada $m \leq 0$ y para cada subsector propio T de S, acotada en $T \times U$. Restando la fórmula (1.18) de esta igualdad, obtenemos

$$0 = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{m} a_{rs} x^r - c_s(x) \right) y^s + G_m(x,y) x^{m+1}.$$

Tomando un subsector propio T, sabemos que $G_m(x,y)$ está acotada en $T \times U$, por lo que

$$0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} G_m(x,y) x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{m} a_{rs} x^r - c_s(x) \right] x^{-m} \right\} y^s. \tag{1.19}$$

Para abreviar escribimos

$$g_s(x) = \left[\sum_{r=0}^{m} a_{rs} x^r - c_s(x) \right] x^{-m}$$

y

$$g(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(x) y^s, \quad x \in S, \quad |y| \leq y_0.$$

La prueba estará completa si probamos que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} g_s(x) = 0.$$

Este hecho es una consecuencia inmediata de (1.19), i.e., de la relación

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in T}} g(x,y) = 0, \quad \text{uniformemente para } |y| \leq y_0,$$

ya que podemos escribir, por la fórmula de Cauchy,

$$g_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g(x,y)}{y^{s+1}} dy,$$

donde Γ es el círculo $|y| = y_0$ y hacemos que x dentro de la integral tienda a cero. $\square$

Observación 1.41. Las definiciones y resultados dados para desarrollos asintóticos en un sector con vértice en 0 cuando $x \to 0$ se trasladan de manera inmediata al caso de sectores con vértice en el infinito cuando $x \to \infty$ simplemente haciendo el cambio de variable $z = 1/x$, siendo todas las propiedades deducidas directamente de esta transformación.

1.3. Planteamiento del problema

En la mayoría de los casos tratados en las aplicaciones, las singularidades de una ecuación ocurren en $x = \infty$. El comportamiento de una ecuación diferencial analítica en el infinito se define como el comportamiento en $z = 0$ de la ecuación diferencial obtenida tras el cambio $z = 1/x$. Por lo tanto, es usual en la teoría situar las singularidades de segunda clase en $x = \infty$.

Nos limitaremos a estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales en el entorno de un punto donde la matriz coeficiente tiene un polo o un desarrollo asintótico en series de potencias. Consideramos un sistema lineal

$$\frac{dY}{dz} = C(z)Y,$$

donde Y, la incógnita, y $C(z)$ son matrices $n \times n$ y denotamos por dY/dz la matriz resultante de derivar respecto a z todos los elementos de Y. Si el sistema tiene un polo en el origen, al menos uno de los elementos de $C(z)$ tendrá un polo en el origen. Sea h el mayor orden de los polos de estos elementos y sean $c_{ij}(z)$ las componentes de $C(z)$, donde i y j indican respectivamente su número de fila y de columna. Entonces todos estos elementos se podrán escribir como $c_{ij}(z) = z^{-h} d_{ij}(z)$, donde los $d_{ij}(z)$ son holomorfos para todo i y j. Por lo tanto, el sistema lo podemos escribir de la siguiente manera

$$z^h \frac{dY}{dz} = D(z)Y, \tag{1.20}$$

donde h es un entero positivo y la matriz $D(z)$ es holomorfa en $z = 0$, es decir, todos sus elementos $d_{ij}(z)$ son holomorfos en $z = 0$. La mayoría de los resultados son también ciertos si solo se pide a $D(z)$ que tenga un desarrollo asintótico válido en algún sector cuando $z \to 0$ en ese sector. Si $h > 1$, el punto singular es de segunda clase, ya que esto significa que al menos uno de los elementos $c_{ij}(z)$ de la matriz $C(z)$ tenía un polo de orden 2 o mayor. Hacemos la transformación $x = 1/z$:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dz}\frac{dz}{dx} = z^{-h} D(z) Y \frac{-1}{x^2} = -x^{h-2} D\left(\frac{1}{x}\right) Y = x^q A(x) Y$$

con $q = h - 2$ y $A(x) = -D\,(1/x)$. Por tanto, hemos obtenido que (1.20) es equivalente, con el cambio de notación y de variable mencionado, a

$$x^{-q} \frac{dY}{dx} = A(x)Y \tag{1.21}$$

y además, $A(x)$, o bien es holomorfa en $x = \infty$, i.e., admite para $|x|$ suficientemente grande, digamos para $|x| \geq x_0$, un desarrollo convergente de la forma

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \qquad |x| > x_0,$$

o una serie de esta forma es asintótica a $A(x)$ en algún sector S.

Definición 1.42. El número $q+1$ se llama *rango* del punto singular

Como $q = h-2$, el rango es igual a $h-1$ y, por tanto, a la vista de (1.20), está claro que es -1 si el infinito es punto regular, 0 si infinito es punto singular de primera clase y positivo si infinito es punto singular de segunda clase.

1.4. Ecuaciones escalares de primer orden

Esta sección se dedica al estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de las ecuaciones escalares de primer orden, y servirá como ilustración de lo que aparecerá más tarde al tratar las soluciones de sistemas cuya matriz de coeficientes tiene en infinito todos sus autovalores distintos y no nulos, ver el Teorema 2.5.

Sea $A(x)$ una función holomorfa escalar en la región $x_0 < |x| < \infty$ de un sector S y que admite ahí el desarrollo asintótico

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \qquad x \in S.$$

Si a es algún punto de S con $|a| > x_0$, la solución general de la ecuación diferencial (1.21) es

$$Y = c^* \exp\left[\int_a^x t^q A(t)dt\right],$$

donde c^* es una constante arbitraria. Podemos expresar el integrando:

$$t^q A(t) = \sum_{r=0}^{q} A_r t^{q-r} + A_{q+1} t^{-1} + B(t),$$

con

$$B(t) \sim \sum_{r=q+2}^{\infty} A_r t^{q-r}, \qquad t \to \infty, \qquad t \in S.$$

Primero vemos que la integral

$$\int_a^{\infty} B(t)dt$$

convergerá, ya que el primer sumando del desarrollo asintótico de $B(t)$ cuando $x \to \infty$ es $A_{q+2}x^{-2}$. Por tanto, si denotamos

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j}{q-j+1} x^{q-j+1}, \qquad \rho = A_{q+1},$$

tenemos

$$\begin{aligned}
Y &= c^* \exp\left[\int_a^x t^q A(t)dt\right] \sim c^* \exp\left[\int_a^x \sum_{r=0}^{q} A_r t^{q-r} + A_{q+1}t^{-1} + B(t)dt\right] \\
&= c^* \exp\left[\int_a^x \sum_{r=0}^{q} A_r t^{q-r} dt\right] \exp\left[\int_a^x A_{q+1}t^{-1}dt\right] \exp\left[\int_a^x B(t)dt\right] \\
&= c^* \exp[Q(x) - Q(a)] \exp[\rho(\log x - \log a)] \exp\left[\int_a^x B(t)dt\right] \\
&= c^* e^{-Q(a)} a^{-\rho} \exp\left[\int_a^\infty B(t)dt\right] e^{Q(x)} x^\rho \exp\left[\int_\infty^x B(t)dt\right] \\
&= c e^{Q(x)} x^\rho \exp\left[\int_\infty^x B(t)dt\right]
\end{aligned}$$

donde

$$c = c^* \exp\left[-Q(a) - \rho \log a + \int_a^\infty B(t)dt\right].$$

Obsérvese que podemos adaptar el Teorema 1.31 a series alrededor de $x = \infty$. Usando esta modificación y el Teorema 1.30, sabemos que

$$\exp\left[\int_\infty^x B(t)dt\right]$$

tiene un desarrollo asintótico cuando $x \to \infty$ en S, que se puede obtener mediante integración y usando la serie formal.

$$\exp\left[\int_\infty^x B(t)dt\right] \sim \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \qquad x \in S.$$

Entonces, existe una solución $V(x)$ de la ecuación escalar (1.21) que cumple

$$V(x) \sim e^{Q(x)} x^\rho \left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r}\right), \qquad x \to \infty, \qquad x \in S.$$

Capítulo 2

Simplificación formal y analítica. Resultados principales

En este capítulo se estudiará la posibilidad de simplificar el sistema lineal de orden uno original (1.21), tanto desde un punto de vista formal como analítico, para facilitar el análisis de la estructura de sus soluciones y su comportamiento asintótico.

2.1. Simplificación formal

Ahora consideramos sistemas diferenciales lineales como en (1.21), con singularidades de segunda clase en $x = \infty$, es decir, con $q \geq 0$. Mediante una transformación

$$Y = P(x)Z,$$

pretendemos reescribir el sistema en términos de la nueva incógnita Z. Supongamos que podemos escribir

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}, \tag{2.1}$$

con $P(x)$ inversible en un entorno de infinito. Entonces, obtenemos:

$$Y' = P'(x)Z + P(x)Z'$$

y, por consiguiente:

$$Z' = P^{-1}(x) \left(Y' - P'(x)Z \right),$$

de donde

$$\begin{aligned} x^{-q}Z' &= P^{-1}(x)\left(x^{-q}Y' - x^{-q}P'(x)Z\right) \\ &= P^{-1}(x)A(x)Y - x^{-q}P^{-1}(x)P'(x)Z \\ &= P^{-1}(x)A(x)P(x)Z - x^{-q}P^{-1}(x)P'(x)Z \end{aligned}$$

Lo denotaremos

$$z^{-q}Z' = B(x)Z, \qquad q \geq 0, \tag{2.2}$$

donde

$$B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - x^{-q}P^{-1}(x)P'(x) \tag{2.3}$$

y, reordenando la ecuación,

$$x^{-q}P'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x). \tag{2.4}$$

Podemos escribir

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r}, \tag{2.5}$$

en un entorno de ∞. Claramente, en dicho entorno

$$P'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} -rP_r x^{-r-1}$$

y, usando el desarrollo

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \qquad x \in S, \tag{2.6}$$

insertamos en (2.4)

$$\begin{aligned} -\sum_{r=1}^{\infty} rP_r x^{-q-r-1} &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}\right) - \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r}\right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{r}(A_{r-s}P_s)\right)x^{-r} - \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{r}(P_sB_{r-s})\right)x^{-r} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{r}(A_{r-s}P_s - P_sB_{r-s})\right)x^{-r}. \end{aligned}$$

En el primer miembro, como $q \geq 0$ (por ser una singularidad de segunda clase) y $r \geq 1$, x siempre está elevada a un exponente menor o igual que -2, por lo que, igualando a cero el término independiente y los coeficientes de las potencias x^{-1} y x^{-2} del miembro de la derecha, obtenemos:

$$A_0P_0 - P_0B_0 = 0, \tag{2.7}$$

$$A_1P_0 - P_0B_1 + A_0P_1 - P_1B_0 = 0 \tag{2.8}$$

Ahora igualamos los coeficientes de potencias con exponente $-t$, donde $t \geq 2$. En el primer miembro, tenemos entonces $-t = -q - r - 1$ y, por lo tanto, $r = t - q - 1$. Además, sabemos que $r \geq 1$, por lo que, si $t - q - 1 < 1$, el coeficiente de x^{-t} será cero. Por tanto, para $t \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
-(t-q-1)P_{t-q-1} &= \sum_{s=0}^{t} \left(A_{t-s}P_s - P_s B_{t-s}\right) \qquad (2.9)\\
&= A_0 P_t - P_t B_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \left(A_{t-s}P_s - P_s B_{t-s}\right),
\end{aligned}
$$

donde el primer miembro es nulo si $t - q - 1 < 1$.

Podemos escribir las igualdades (2.8) y (2.9) en una sola para $t \geq 1$:

$$
A_0 P_t - P_t B_0 = \sum_{s=0}^{t-1} \left(P_s B_{t-s} - A_{t-s} P_s\right) - (t-q-1)P_{t-q-1}, \tag{2.10}
$$

estando el último término ausente si $t - q - 1 < 0$.

Si se pueden encontrar matrices P_r, B_r para $r = 0, 1, \ldots$ tales que satisfacen las ecuaciones (2.7) y (2.10), entonces se dice que las series (2.1) y (2.5) satisfacen (2.4) *formalmente*.

A la vista de (2.3), se comprueba que elegir que la matriz $P(x)$ sea una matriz constante $P(x) = P$ resulta en una transformación de semejanza de $A(x)$: $A(x)$ pasa a $P^{-1}A(x)P$. Usaremos este hecho para cambiar $A(0) = A_0$ a una forma conveniente para cálculos posteriores. Es un resultado de álgebra lineal que, si los autovectores de A_0 se pueden repartir en dos grupos, digamos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ y $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$, tales que $\lambda_j \neq \lambda_k$ para $j \leq p$, $k > p$, entonces A_0 es semejante a una matriz diagonal por bloques

$$
\begin{bmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{bmatrix} \tag{2.11}
$$

donde A_0^{11} es una matriz $p \times p$ cuyos autovalores son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ y A_0^{22} es una matriz $(n-p) \times (n-p)$ cuyos autovalores son $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$. No perdemos generalidad si asumimos que A_0 ya tiene esta forma.

Eligiendo $P_0 = I$, por (2.7), está claro que $B_0 = A_0$. Las fórmulas (2.10) se convierten entonces en

$$
A_0 P_r - P_r A_0 = B_r + H_r, \tag{2.12}
$$

donde H_r depende solo de los P_j, B_j con $j < r$.

Por el Teorema A.1 del apéndice, la ecuación homogénea asociada a (2.12) tiene soluciones no triviales.

Puesto que se trata de transformar el sistema (1.21) en otro (2.2) más sencillo de analizar, para $r > 0$, nos interesa elegir matrices P_r de manera que las matrices B_r sean diagonales por bloques, i.e.,

$$B_r = \begin{bmatrix} B_r^{11} & 0 \\ 0 & B_r^{22} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

y las ecuaciones (2.12) se puedan resolver sucesivamente. El método indicado es el usado por Sibuya en [3]. Elegimos, para $r > 0$, matrices de la forma

$$P_r = \begin{bmatrix} 0 & P_r^{12} \\ P_r^{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

y escribimos

$$H_r = \begin{bmatrix} H_r^{11} & H_r^{12} \\ H_r^{21} & H_r^{22} \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Insertamos las expresiones (2.11), (2.13), (2.14) y (2.15) en (2.12):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_r^{12} \\ P_r^{21} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & P_r^{12} \\ P_r^{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} B_r^{11} & 0 \\ 0 & B_r^{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_r^{11} & H_r^{12} \\ H_r^{21} & H_r^{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} 0 &= B_r^{11} + H_r^{11}, \\ A_0^{11} P_r^{12} - P_r^{12} A_0^{22} &= H_r^{12}, \\ A_0^{22} P_r^{21} - P_r^{21} A_0^{11} &= H_r^{21}, \\ 0 &= B_r^{22} + H_r^{22}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Como hemos dicho antes que H_r depende solo de los P_j, B_j con $j < r$, si H_r es conocida podemos satisfacer dos de las ecuaciones:

$$B_r^{11} = -H_r^{11}, \qquad B_r^{22} = -H_r^{22}.$$

Si consideramos las ecuaciones homogéneas correspondientes a las otras dos igualdades en (2.16), por el Teorema A.1, como A_0^{11} y A_0^{22} no tienen autovalores comunes, tienen solo la solución trivial, i.e. $X = 0$. Por tanto, las ecuaciones no homogéneas tienen una única solución y, si empezamos con $r = 1$, podemos ir resolviendo las ecuaciones (2.16) sucesivamente. En definitiva, hemos probado el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Asumimos que* (2.6) *es cierto, donde los coeficientes* A_r *y* $A(x)$ *tienen dimensión* $n \times n$*, y que los autovalores de* A_0 *están repartidos en dos grupos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *y* $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ *con* $\lambda_j \neq \lambda_k$ *para* $j \leq p$, $k > p$. *Entonces, existe una serie formal de potencias*

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r},$$

donde los coeficientes P_r *son matrices* $n \times n$ *y* $\det P_0 \neq 0$*, tal que la sustitución formal*

$$Y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r} \right) Z$$

transforma la ecuación diferencial matricial (1.21) *con* $q \geq 0$ *en la ecuación diferencial matricial formal*

$$x^{-q} Z' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r} \right) Z,$$

donde las matrices B_r *son diagonales por bloques, como en* (2.13).

Si la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$$

es convergente, entonces esta simplificación formal es una simplificación analítica convergente siempre que $A_0(x)$ tenga al menos dos autovalores diferentes. Si todos los autovalores de $A_0(x)$ son diferentes, entonces se puede hacer la transformación sucesivas veces, cambiando la ecuación diferencial (1.21) en una matriz diagonal. Un sistema así sería equivalente a n ecuaciones escalares de primer orden, algo que podría ser resuelto inmediatamente siguiendo el proceso que hemos visto en la sección 1.4.

Sin embargo, la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$$

es, en general, divergente.

2.2. Simplificación analítica y solución asintótica

El objetivo de esta sección es el estudio de condiciones que garanticen que la transformación formal expuesta anteriormente pueda ser de hecho analítica. Como veremos, esto permitirá el análisis asintótico del problema , y dependerá de un resultado clave, el Teorema 2.2, cuya prueba será pospuesta al próximo capítulo por su longitud y dificultad.

2.2.1. Una ecuación diferencial no lineal auxiliar

Queremos satisfacer la ecuación diferencial (2.4) con matrices $P(x)$ y $B(x)$ de la forma (2.1) y (2.5) respectivamente, con los B_r y los P_r satisfaciendo (2.13) y (2.14) respectivamente. Además, continuando con el trabajo hecho en la sección previa, imponemos $P_0 = I$ y $B_0 = A_0$. Introducimos dos matrices desconocidas $\hat{P}(x)$ y $\hat{B}(x)$

$$P(x) = I + \hat{P}(x), \tag{2.17}$$

$$B(x) = A_0 + \hat{B}(x), \tag{2.18}$$

e imponemos

$$\hat{P}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \hat{P}^{12}(x) \\ \hat{P}^{21}(x) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}(x) = \begin{bmatrix} \hat{B}^{11}(x) & 0 \\ 0 & \hat{B}^{22}(x) \end{bmatrix}.$$

Denotamos

$$A(x) = \begin{bmatrix} A^{11}(x) & A^{12}(x) \\ A^{21}(x) & A^{22}(x) \end{bmatrix}$$

Insertamos estas fórmulas en la ecuación (2.4) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & x^{-q}\frac{d}{dx}\hat{P}^{12}(x) \\ x^{-q}\frac{d}{dx}\hat{P}^{21}(x) & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^{11}(x) & A^{12}(x) \\ A^{21}(x) & A^{22}(x) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} A^{12}(x)\hat{P}^{21}(x) & A^{11}(x)\hat{P}^{12}(x) \\ A^{22}(x)\hat{P}^{21}(x) & A^{21}(x)\hat{P}^{12}(x) \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{B}^{11}(x) & 0 \\ 0 & \hat{B}^{22}(x) \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 0 & \hat{P}^{12}(x)A_0^{22} \\ \hat{P}^{21}(x)A_0^{11} & 0 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 0 & \hat{P}^{12}(x)\hat{B}^{22}(x) \\ \hat{P}^{21}(x)\hat{B}^{11}(x) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por tanto, tendríamos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
0 &= A^{11}(x) - A_0^{11} + A^{12}(x)\hat{P}^{21}(x) - A_0^{11} - \hat{B}^{11}(x),\\
x^{-q}\frac{d}{dx}\hat{P}^{12}(x) &= A^{12}(x) + A^{11}(x)\hat{P}^{12}(x) - \hat{P}^{12}(x)A_0^{22} - \hat{P}^{12}(x)\hat{B}^{22}(x),\\
x^{-q}\frac{d}{dx}\hat{P}^{21}(x) &= A^{21}(x) + A^{22}(x)\hat{P}^{21}(x) - \hat{P}^{21}(x)A_0^{11} - \hat{P}^{21}(x)\hat{B}^{11}(x),\\
0 &= A^{22}(x) + A^{21}(x)\hat{P}^{12}(x) - A_0^{22} - \hat{B}^{22}(x).
\end{aligned}$$

Omitiendo la dependencia en x para hacer la notación más breve, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= A^{11} - A_0^{11} + A^{12}\hat{P}^{21} - A_0^{11} - \hat{B}^{11}, \qquad (2.19)\\
x^{-q}\frac{d}{dx}\hat{P}^{12} &= A^{12} + A^{11}\hat{P}^{12} - \hat{P}^{12}A_0^{22} - \hat{P}^{12}\hat{B}^{22},\\
x^{-q}\frac{d}{dx}\hat{P}^{21} &= A^{21} + A^{22}\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A_0^{11} - \hat{P}^{21}\hat{B}^{11},\\
0 &= A^{22} + A^{21}\hat{P}^{12} - A_0^{22} - \hat{B}^{22}.
\end{aligned}$$

A la inversa, si $\hat{P}^{jk}$ y $\hat{B}^{jk}$ son matrices que satisfacen (2.19), entonces las matrices correspondientes $P(x)$ y $B(x)$ en (2.17) y (2.18) satisfacen la ecuación diferencial (2.4).

Podemos despejar $\hat{B}^{11}$ en la primera ecuación y sustituir en la tercera, obteniendo la siguiente ecuación diferencial para $\hat{P}^{21}$,

$$x^{-q}\frac{d}{dx}\hat{P}^{21} = A^{21}(x) + A^{22}(x)\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A^{11}(x) - \hat{P}^{21}A^{12}(x)\hat{P}^{21}. \qquad (2.20)$$

Se puede deducir una ecuación similar para $\hat{P}^{12}$. Veamos cómo reinterpretar dichas ecuaciones para $\hat{P}^{21}$ y $\hat{P}^{12}$.

Sea w el vector de dimensión $p(n-p)$ cuyas componentes son los elementos de $\hat{P}^{21}$ en algún orden. Entonces podemos escribir la ecuación (2.20) como

$$x^{-q}w' = f(x,w), \qquad (2.21)$$

donde $f(x,w)$ es una función vectorial cuadrática en las componentes de w con coeficientes que admiten desarrollos asintóticos en potencias de x^{-1} cuando $x \to \infty$ en S. Por los cálculos hechos en la sección 2.1, sabemos que (2.19) tiene solución formal y, por tanto, (2.20) y (2.21) también la tendrán. Haciendo la sustitución formal de

$$\sum_{r=1}^{\infty} P_r x^{-r} \quad y \quad \sum_{r=1}^{\infty} B_r x^{-r}$$

en lugar de $\hat{P}(x)$ y $\hat{B}(x)$, obtenemos que (2.21) se puede satisfacer formalmente con una serie de potencias

$$\sum_{r=1}^{\infty} w_r x^{-r}. \tag{2.22}$$

Nótese que la suma anterior empieza en $r = 1$ y no en $r = 0$.

Es importante tener en cuenta que no estamos interesados en resolver completamente (2.21), sino que queremos demostrar que tiene una solución representada asintóticamente por la serie (2.22).

Notemos que la ecuación (2.21) tiene una característica muy importante: Si separamos la parte constante y la parte lineal de $f(x, w)$ respecto a w, obtenemos

$$f(x, w) = f_0(x) + F(x)w + f_2(x, w),$$

donde $f_2(w, x)$ es un vector cuyas componentes son formas cuadráticas en las componentes de w. Con la notación de (2.20), $F(x)w$ es la función lineal $A^{22}(x)\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A^{11}(x)$. Para $x = \infty$, esta expresión se convierte en $A_0^{22}\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A_0^{11}$ y, como habíamos supuesto que A_0^{11} y A_0^{22} no tienen autovalores en común y por el Teorema A.1, la ecuación $A_0^{22}\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A_0^{11} = 0$ para P^{21} solo tendrá la matriz nula como solución. Es decir, que $F(\infty)w = 0$ es un sistema lineal homogéneo cuya única solución es la trivial, lo cual sabemos que se cumple si y solo si $\det(F(\infty)) \neq 0$. Por lo tanto, podemos concluir que los autovalores de $F(x)$ en infinito son todos no nulos.

Observamos también que, por ser la parte lineal de $f(x, w)$ respecto a w, $\det F(x)$ es el jacobiano de $f(x, w)$ con respecto a w para $w = 0$. Por lo tanto, la prueba de que la ecuación (2.21) admite una solución analítica representada por la solución formal (2.22) será consecuencia del siguiente resultado general para ecuaciones no lineales, cuya prueba se pospondrá al capítulo 3.

Teorema 2.2 (Teorema fundamental de existencia de la teoría asintótica). *Sea S un sector abierto no acotado en el plano complejo con vértice en el infinito y un ángulo positivo no mayor que $\pi/(q+1)$, donde q es un entero no negativo. Sea $f(x, z)$ una función vectorial N-dimensional de x y z con las siguientes propiedades:*

(a) $f(x, z)$ es un polinomio en las componentes z_j de z, $j = 1, \dots, N$, con coeficientes holomorfos en x en la región

$$0 < x_0 \leq |x| < \infty, \qquad x \in S \qquad (x_0 \textit{ es una constante}).$$

(b) Los coeficientes del polinomio $f(x,z)$ respecto a z tienen series asintóticas en potencias de x^{-1} cuando $x \to \infty$ en S.

(c) Si $f_j(x,z)$ denota las componentes de $f(x,z)$, entonces los autovalores λ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ de la matriz jacobiana

$$\left\{ \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in S}} \left.\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right|_{z=0} \right\}_{j,k=1,\ldots,N}$$

son no nulos.

(d) La ecuación diferencial

$$x^{-q}y' = f(x,y), \tag{2.23}$$

para y un vector de dimensión N admite una solución formal de la forma

$$\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r},$$

donde los coeficientes y_r son vectores N-dimensionales para $r \geq 1$.

Entonces existe, para x suficientemente grande en S, una solución $y = \phi(x)$ de (2.23) *tal que, en S,*

$$\phi(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}, \qquad x \to \infty$$

Observación 2.3. El Teorema 2.2 básicamente establece unas hipótesis suficientes para que, si una ecuación diferencial vectorial de la forma (2.23) tiene solución formal en serie de potencias, entonces esta sea desarrollo asintótico cuando $x \to \infty$ de una solución analítica verdadera.

2.2.2. Consecuencias del Teorema fundamental

Podemos aplicar el Teorema 2.2 a la ecuación (2.20), usando la forma en (2.21) y obtenemos el siguiente resultado, que garantiza, bajo ciertas condiciones, la posibilidad de transformar, analíticamente y no solo en sentido formal, el sistema inicial en otro diagonal por bloques. Este proceso se conoce como simplificación analítica del sistema.

Teorema 2.4. *Sea S un sector abierto en el plano complejo con vértice en el origen y un ángulo positivo no mayor que $\pi/(q+1)$, donde q es un entero* *no negativo. Sea $A(x)$ una matriz $n \times n$ holomorfa en S para $x_0 \leq |x| < \infty$ y que admite un desarrollo asintótico uniforme*

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \quad x \in S.$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A_0 y suponemos que se pueden separar en dos grupos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ y $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ tales que $\lambda_j \neq \lambda_k$ si $j \leq p$, $k > p$. Entonces existe una función matricial $P(x)$ holomorfa de dimensión $n \times n$ en $\{x \in S, x_1 \leq |x| < \infty\}$ y que admite en S un desarrollo asintótico

$$P(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \qquad \det P_0 \neq 0,$$

tal que la transformación

$$Y = P(x)Z$$

transforma la ecuación diferencial matricial

$$x^{-q} Y' = A(x) Y \tag{2.24}$$

en

$$x^{-q} Z' = B(x) Z, \tag{2.25}$$

donde $B(x)$ es una matriz diagonal por bloques

$$B(x) = \begin{bmatrix} B^{11}(x) & 0 \\ 0 & B^{22}(x) \end{bmatrix}.$$

Las matrices $B^{jj}(x)$ tienen desarrollo asintótico

$$B^{jj}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r^{jj} x^{-r}$$

cuando $x \to \infty$, y los autovalores de B_0^{jj} son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ para $j = 1$ y $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ para $j = 2$.

Este teorema reduce la tarea de resolver la ecuación diferencial (2.24) asintóticamente para x grande al mismo problema pero para dos ecuaciones diferenciales de menor orden. Repitiendo estas reducciones se obtiene un conjunto de ecuaciones de la forma (2.24) en la que A_0 solo tiene un autovalor distinto.

Nos centraremos en el caso en el que todos los autovalores de A_0 son distintos. Entonces el problema se reduce a una ecuación de la forma (2.25) en la que $B(x)$ es diagonal. Como $B(x)$ es diagonal, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[e^{B(x)}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B(x)^k}{k!}\right] = B'(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kB(x)^{k-1}}{k!} = B'(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)B(x)^k}{(k+1)!} \\ &= B'(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B(x)^k}{k!} = B'(x)e^{B(x)}\end{aligned}$$

y entonces las matrices fundamentales de (2.25) tienen la forma

$$Z(x) = \exp\left[\int_a^x t^q B(t)dt\right] C_1,$$

donde C_1 es una matriz cuadrada constante e invertible. Podemos continuar entonces casi exactamente igual que para la ecuación escalar en la sección 1.4, de manera que

$$\begin{aligned}\int_a^x t^q B(t)dt &= \sum_{r=0}^{q} B_r \int_a^x t^{q-r}dt + B_{q+1}\int_a^x t^{-1}dt + \Psi(x) - \Psi(a) \\ &= Q(x) - Q(a) + B_{q+1}(\log x - \log a) + \Psi(x) - \Psi(a),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Q(x) &= \sum_{r=0}^{q} B_r \frac{x^{q-r+1}}{q-r+1} \\ \Psi(x) &\sim \sum_{r=q+2}^{\infty} B_r \frac{x^{q-r+1}}{q-r+1}, \quad x \to \infty \quad x \in S.\end{aligned}$$

Por tanto:

$$Z(x) = \exp\left[Q(x) + B_{q+1}\log x + \Psi(x) - \Gamma(a)\right] C_1,$$

donde

$$\Gamma(a) = Q(a) + B_{q+1}\log a + \Psi(a).$$

Por el Teorema 1.30, la función $\exp[\Psi(x)]$ tiene un desarrollo asintótico en series de potencias y, como las matrices en el exponente son diagonales, conmutan entre ellas y podemos escribir

$$Z(x) = e^{Q(x)}e^{B_{q+1}\log x}e^{\Psi(x)-\Gamma(a)}C_1 = \hat{Z}(x)x^{B_{q+1}}e^{Q(x)}C,$$

donde C es una matriz cuadrada constante de manera que $\hat{Z}(x)$ tenga un desarrollo asintótico en series de potencias cuyo primer elemento sea I.

Volviendo a la ecuación (2.24), podemos encontrar una matriz fundamental suya multiplicando $Z(x)$ por la izquierda por una matriz que tiene un desarrollo asintótico cuyo primer sumando es no singular.

Si unimos el Teorema 2.4 a esta última explicación, obtenemos de manera directa el siguiente teorema:

Teorema 2.5. *Sea S un sector abierto en el plano complejo con vértice en el infinito y ángulo positivo no mayor que $\pi/(q+1)$. Sea $A(x)$ una matriz $n\times n$ holomorfa en S para $x_0 \leq |x| < \infty$ y que admite un desarrollo asintótico uniforme*

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \quad x \in S.$$

Suponemos que todos los autovalores λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ de A_0 son distintos. Entonces la ecuación diferencial (2.24) *tiene una matriz fundamental de la forma*

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^D e^{Q(x)},$$

donde

1) $Q(x)$ es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son polinomios de grado $q+1$. El primer sumando de $Q(x)$ es

$$\frac{x^{q+1}}{q+1} diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

2) D es una matriz diagonal constante

3) La matriz $\hat{Y}(x)$ tiene un desarrollo asintótico en S

$$\hat{Y}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \quad \det \hat{Y}_0 \neq 0$$

Si $A(x)$ es holomorfa en $x = \infty$, entonces tiene desarrollo de Taylor en $x = \infty$ y, por lo tanto, cualquier sector de ángulo $\pi/(q+1)$ se puede tomar como sector S en el Teorema 2.5, a la vista de la Observación 1.22. Por tanto, podemos afirmar que

Corolario 2.6. *Si la matriz $A(x)$ en la ecuación diferencial* (2.24) *es holomorfa en $x = \infty$, entonces existe una solución como la descrita en el Teorema 2.5.*

La solución a la que se refiere este corolario puede variar de sector a sector. Sin embargo, los coeficientes $\hat{Y}_r$, así como las matrices D y $Q(x)$ se han ido determinando de manera única y por tanto se puede afirmar que hay unicidad en la matriz fundamental.

Capítulo 3

Demostración del Teorema fundamental de existencia cuando todos los autovalores son diferentes

En este capítulo probaremos el Teorema 2.2 asumiendo que los autovalores λ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ son distintos. Para ello, transformaremos primero la ecuación diferencial (2.23) y, gracias al Teorema de Borel-Ritt, bastará con demostrar que la ecuación modificada tiene alguna solución asintóticamente nula. Dicha ecuación diferencial puede ser transformada en una ecuación integral mediante la fórmula de variación de constantes y, a partir de la expresión obtenida, definimos un operador integral $\mathscr{P}$. Definiremos unos caminos de integración apropiados, de manera que la exponencial bajo el signo integral del operador esté acotada a lo largo de dichos caminos. Entonces, las aproximaciones sucesivas definidas u_j a partir del operador $\mathscr{P}$ convergerán a una función u asintóticamente nula que es solución de la ecuación. Al final, aplicaremos el teorema a ecuaciones diferenciales no lineales.

3.1. Transformaciones iniciales

Partimos por tanto de las hipótesis del Teorema 2.2, que fueran denotadas (a), (b), (c) y (d). Sean

$$\bar{a}(x) = f(x, 0), \qquad \bar{A}(x) = \left\{ \left. \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \right|_{z=0} \right\}_{j,k=1,\ldots,N},$$

$$\bar{g}(x,z) = f(x,z) - \bar{a}(x) - \bar{A}(x)z.$$

Por lo tanto, $\bar{g}$ es el resultado de restar a $f(x,z)$ su parte constante y su parte lineal respecto a z. Entonces la ecuación diferencial (2.23) se convierte en

$$x^{-q}y' = \bar{a}(x) + \bar{A}(x)y + \bar{g}(x,y), \tag{3.1}$$

donde el polinomio $\bar{g}(x,y)$ no tiene términos constantes ni lineales respecto a y.

Sabemos, por la hipótesis (b), que $\bar{A}(x)$ tiene un desarrollo asintótico.

$$\bar{A}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \qquad x \in S$$

y los autovalores del primer sumando $\bar{A}_0$, λ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, son todos distintos por la hipótesis (c). Como todos los autovalores son distintos, $\bar{A}_0$ es diagonalizable y, por tanto, existe una matriz constante no singular y cuadrada P, de dimensión N, tal que

$$\bar{A}_0 = PA_0P^{-1}$$

donde

$$A_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$

Entonces, si ponemos

$$\bar{A}(x) = PA(x)P^{-1}$$

y, para $r \geq 0$,

$$\bar{A}_r = PA_rP^{-1}$$

podemos escribir

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \qquad x \to \infty, \qquad x \in S$$

y, en este caso, el primer término del desarrollo asintótico será la matriz diagonal A_0, que por simplicidad llamaremos Λ de ahora en adelante.

Ahora podemos escribir la ecuación (3.1) como

$$x^{-q}y' = \bar{a}(x) + PA(x)P^{-1}y + \bar{g}(x,y)$$

y, por lo tanto

$$P^{-1}x^{-q}y' = P^{-1}\bar{a}(x) + A(x)P^{-1}y + P^{-1}\bar{g}(x,y).$$

Denotamos

$$a(x) = P^{-1}\bar{a}(x) \qquad g(x,y) = P^{-1}\bar{g}(x,Py)$$

y tomamos como variable $y^* = P^{-1}y$, que seguiremos llamando y para facilitar la notación, sabiendo que basta con multiplicar la nueva variable por P por la izquierda para obtener la original. Tenemos por lo tanto la siguiente ecuación:

$$x^{-q}y' = a(x) + A(x)y + g(x,y). \tag{3.2}$$

Haciendo un cambio de variable $z = 1/x$ en el Teorema 1.33 y aplicando aquí el resultado, obtenemos que existe una función vectorial $\phi(x)$ holomorfa para $|x| \geq x_0$ en S tal que

$$\phi(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}, \qquad \text{cuando } x \to \infty \text{ en } S. \tag{3.3}$$

Recordamos que $\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$ es la solución formal de (2.23), cuya existencia habíamos supuesto.

Construyendo esta función para un sector más grande y aplicando el Teorema 1.32, nos aseguramos que la relación (3.3) es diferenciable término a término en S. Haciendo el cambio

$$u = y - \phi(x)$$

transformamos directamente la ecuación (3.2) en

$$x^{-q}u' = a(x) + A(x)\phi(x) - x^{-q}\phi'(x) + A(x)u + g(x, u + \phi(x)) \tag{3.4}$$

y lo que queremos probar es que tiene solución asintóticamente nula, pues en ese caso tendríamos que $\phi(x)$ es desarrollo asintótico cuando $x \to \infty$ en S de una solución analítica verdadera de (3.2). Como la serie

$$\hat{y} = \sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$$

es una solución formal de (3.2), y por las propiedades de las operaciones con desarrollos asintóticos, vistas en los Teoremas 1.28, 1.29, 1.30 y 1.32, podemos escribir

$$\begin{aligned} b(x) &\coloneqq a(x) + A(x)\phi(x) - x^{-q}\phi'(x) + g(x,\phi(x)) \\ &\sim a(x) + A(x)\hat{y} - x^{-q}\hat{y}' + g(x,\hat{y}) = \hat{0}. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$a(x) + A(x)\phi(x) - x^{-q}\phi'(x) = -g(x, \phi(x)) + b(x),$$

donde

$$b(x) \sim \hat{0}, \quad \text{para } x \to \infty, \quad x \in S. \tag{3.5}$$

Por tanto, (3.4) se puede escribir como

$$x^{-q}u' = b(x) + A(x)u + g(x, u + \phi(x)) - g(x, \phi(x)).$$

Por la fórmula de Taylor, sabemos que

$$g(x, u + \phi(x)) - g(x, \phi(x)) = A^\star(x)u + h(x, u),$$

donde

$$A^\star(x) = \left\{ \left. \frac{\partial g_j(x, u + \phi(x))}{\partial u_k} \right|_{u=0} \right\}_{j,k=1,\ldots,N}.$$

Como, por la relación (3.3),

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = 0$$

en S y los $\partial g(x,z)/\partial z_k$ se anulan para $z = 0$ (por no tener términos lineales respecto a z), tenemos que todas las componentes de $A^*(x)$ tienden a 0 cuando x tiende a ∞ en S, es decir

$$\lim_{x \to \infty} A^\star(x) = 0, \qquad x \in S.$$

La función $h(x, u)$, el resto de Taylor, es un polinomio en las componentes u_j de u con coeficientes que admiten series asintóticas de potencias en x^{-1}, cuando $x \to \infty$ en S. Este polinomio no tiene parte constante o lineal respecto a los u_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, porque $g(x, u)$ tampoco la tiene.

Sea $B(x) = A(x) + A^\star(x)$. Podemos entonces escribir la ecuación como

$$x^{-q}u' = b(x) + B(x)u + h(x, u), \tag{3.6}$$

y además sabemos que

$$\lim_{x \to \infty} B(x) = \lim_{x \to \infty} A(x) + \lim_{x \to \infty} A^\star(x) = A_0 + 0 = \Lambda, \quad x \in S. \tag{3.7}$$

El Teorema 2.2 quedará demostrado si probamos que la ecuación diferencial (3.6) admite una solución asintóticamente nula cuando $x \to \infty$ en S.

3.2. Una ecuación integral para la solución

Podemos escribir (3.6) de la siguiente forma

$$x^{-q}u' = \Lambda u + p(x,u), \tag{3.8}$$

donde

$$p(x,u) = b(x) + (B(x) - \Lambda)u + h(x,u). \tag{3.9}$$

Cuando $x \to \infty$, $b(x) \sim \hat{0}$ y, por (3.7), $B(x) - \Lambda$ tiende a cero. Además, $h(x,u)$ no tiene términos constantes ni lineales respecto a u. Por ello, para x suficientemente grande y $|u| < 1$, la función $p(x,u)$ es mucho más pequeña que u. Si $p(x,u)$ fuese idénticamente igual a cero, $u \equiv 0$ sería una solución de (3.8). Es de esperar que, si $p(x,u)$ es pequeña, u en (3.8) sea pequeña.

Sustituiremos la ecuación diferencial (3.8) por una ecuación integral equivalente. Si $u(x)$ es solución de (3.8), $p(x,u(x))$ se convierte en una función conocida de x y, por una adaptación a ecuaciones vectoriales de la fórmula de variación de parámetros del Teorema A.2, tendríamos que

$$u(x) = V(x)k + \int_a^x V(x)V^{-1}(t)t^q p(t,u(t))dt, \tag{3.10}$$

donde k es un vector constante, a es un punto fijo y V es una matriz fundamental solución de la ecuación diferencial

$$x^{-q}V'(x) = \Lambda V(x). \tag{3.11}$$

Recíprocamente, si $u(x)$ es solución de la ecuación integral (3.10), entonces, mediante diferenciación se prueba que $u(x)$ también satisface (3.8).

El segundo miembro de (3.10) contiene N integrales escalares. En vez de escoger para todas el mismo camino de integración, cada una de ellas tendrá un camino $\gamma_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, que termine en x. Estos caminos se describirán en la siguiente sección. Para simplificar la escritura, llamaremos $\Gamma(x)$ al conjunto de los N caminos $\gamma_j(x)$.

La ecuación diferencial (3.11) tiene como matriz fundamental de soluciones en particular a

$$V(x) = \exp\left[\frac{x^{q+1}}{q+1}\Lambda\right].$$

Si elegimos $k = 0$, la ecuación integral modificada se convierte entonces en

$$u(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp\left[\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1}\Lambda\right] t^q p(t,u(t))dt. \tag{3.12}$$

El segundo miembro define un operador no lineal $\mathscr{P}$ en la función $u(x)$, de manera que (3.12) se puede escribir

$$u = \mathscr{P}u. \tag{3.13}$$

Ahora probaremos, mediante el método de aproximaciones sucesivas, que (3.13) tiene solución y que esta solución es asintótica a cero: Definimos una sucesión de funciones vectoriales $u_r(x)$, $r = 0, 1, \ldots$ por

$$u_0 \equiv 0, \qquad u_{r+1} = \mathscr{P}u_r, \qquad r \geq 0. \tag{3.14}$$

La convergencia de esta sucesión se puede establecer estimando las diferencias

$$u_{r+1} - u_r = \mathscr{P}u_r - \mathscr{P}u_{r-1}. \tag{3.15}$$

Para ello, tendremos que definir un conjunto adecuado de caminos $\Gamma(x)$ y probaremos algunas desigualdades en las que interviene el operador $\mathscr{P}$. Esto lo haremos en las siguientes dos secciones.

3.3. Caminos de integración

Los caminos $\gamma_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, cuyo conjunto ha sido denotado por $\Gamma(x)$ y que han sido utilizados en la definición de la integral (3.12), los construiremos de manera que, a lo largo de ellos, la exponencial de la ecuación (3.12) esté acotada. Para ello, usaremos la variable auxiliar

$$\tau = t^{q+1}. \tag{3.16}$$

Sea

$$\xi = x^{q+1} \tag{3.17}$$

la imagen de x bajo esta correspondencia.

A la imagen de S bajo esta correspondencia la llamaremos Σ.

Lema 3.1. *Sea $S = S_0(\alpha, \beta, r)$ con $0 < \alpha < \beta$ y $r > 0$ y sea $h(x) = x^{q+1}$ para $x \in \mathbb{C}$. Entonces $h(S) = S_0(\alpha(q+1), \beta(q+1), r^{q+1})$.*

Demostración. 1. Probamos la primera inclusión. Sea $t \in S$,

$$t = \rho e^{i\gamma}, \quad \text{con } 0 < \rho < r \quad y \quad \alpha < \gamma < \beta.$$

Entonces

$$h(t) = \rho^{q+1} e^{i\gamma(q+1)}$$

y se cumple

$$|h(t)| < r^{q+1} \text{ y } \alpha(q+1) < \arg(h(t)) < \beta(q+1),$$

es decir, $h(t) \in S_0(\alpha(q+1), \beta(q+1), r^{q+1})$.

2. Sea $\tau \in S_0(\alpha(q+1), \beta(q+1), r^{q+1})$. Podemos escribir

$$\tau = \eta e^{i\theta} \text{ con } 0 < \eta < r^{q+1} \text{ y } \alpha(q+1) < \theta < \beta(q+1).$$

Defino

$$t = \tau^{1/(q+1)} = \eta^{1/(q+1)} e^{i\theta/(q+1)}$$

y claramente $h(t) = \tau$. Además, es inmediato comprobar que $t \in S_0(\alpha, \beta, r) = S$. □

Corolario 3.2. *Si $S_0(\alpha, \beta, r)$ es un sector de amplitud γ, es decir, si $\beta - \alpha = \gamma$, y $h(x) = x^{q+1}$ para todo $x \in \mathbb{C}$, entonces $h(S)$ es un sector con vértice en 0 y de amplitud $\gamma(q+1)$.*

Demostración. Por el Lema 3.1, sabemos que

$$h(S) = S_0(\alpha(q+1), \beta(q+1), r^{q+1}).$$

Entonces, la amplitud de $h(S)$ es

$$\beta(q+1) - \alpha(q+1) = (\beta - \alpha)(q+1) = \gamma(q+1). \qquad \square$$

Si tomamos un $\lambda_j = |\lambda_j| e^{ib_j}$, donde b_j es un argumento de λ_j, y consideramos para $k = 0, 1$ los rayos $r_k = \left\{\rho e^{i((1/2+k)\pi - b_j)}, \quad 0 \leq \rho < \infty\right\}$ (r_0 y r_1 forman entre sí un ángulo π), entonces si $\tau \in r_k$, tenemos que

$$\lambda_j \tau = |\lambda_j| \rho e^{i(b_j + (1/2+k)\pi - b_j)} = |\lambda_j| \rho e^{i(1/2+k)\pi},$$

con lo que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) = 0$, es decir, r_0 y r_1 son los dos rayos tales que si τ pertenece a alguno de ellos, entonces $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) = 0$.

Por lo tanto, para cada λ_j el plano τ queda dividido en dos semiplanos: uno en el que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) < 0$ y otro en el que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) > 0$. Por lo tanto, si tomamos un sector de amplitud menor que π y un autovalor λ_j, hay tres posibilidades: Que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) < 0$ en todo el sector, que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) > 0$ en todo el sector o que haya un rayo en el cual $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) = 0$ y que divide al sector en dos sectores, uno en el cual $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) < 0$ y otro en el cual $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) > 0$. Consideramos los $2N$ rayos en el plano en τ a lo largo de los cuales $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Observación 3.3. Puesto que hemos de concluir la existencia de una solución asintóticamente nula, se realizarán acotaciones en cada subsector propio de S. Para no recargar la notación, en las secciones 3.3 y 3.4 denotaremos por la misma letra S a un subsector propio del sector original, y análogamente para Σ. Puesto que S tiene amplitud menor que $\pi/(q+1)$, Σ será un subsector propio de un semiplano y no es restricción suponer que ninguno de los rayos está en la frontera de Σ.

Dividimos los autovalores en dos grupos. El primero contiene a aquellos λ_j tales que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) < 0$ en todo Σ. En el segundo grupo están los autovalores tales que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) > 0$ en todo Σ o hay exactamente un rayo en Σ a lo largo del cual $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) = 0$. Reordenamos los λ_j de manera que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j_1}$ $(0 \leq j_1 \leq N)$ estén en el primer grupo y los demás, si los hay, sean del segundo grupo.

Sea ξ_1 un punto en la bisectriz de Σ tal que $|\xi_1| > x_0^{q+1}$, y denotamos Σ^* al sector cerrado con vértice en ξ_1 y los rayos de la frontera paralelos a los de Σ. Llamaremos x_1 a $\xi_1^{1/(q+1)}$. Entonces, $\Sigma^* \subset \Sigma$ y $|\tau| > {x_0}^{q+1}$ para todo $\tau \in \Sigma^*$.

Para $j \leq j_1$ y $\xi \in \Sigma^\star$ sea $\delta_j(\xi)$ el segmento que va desde ξ_1 a ξ. Todos estos caminos coinciden. La imagen inversa de $\delta_j(\xi)$ por $t \to \tau = t^{q+1}$ deberá ser el camino de integración $\gamma_j(x)$ para $j \leq j_1$.

Podemos parametrizar los caminos $\delta_j(\xi)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta_j(\xi): \quad [0,1] &\longrightarrow \Sigma^* \\ s &\longmapsto (1-s)\xi_1 + s\xi \end{aligned} \tag{3.18}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\tau\lambda_j)\Big|_{\tau=\delta_j(\xi)(s)} &= \mathrm{Re}(((1-s)\xi_1 + s\xi)\cdot\lambda_j) \\ &= \mathrm{Re}(\xi_1\lambda_j) + s\mathrm{Re}(\lambda_j\cdot(\xi-\xi_1)). \end{aligned}$$

Como $\xi - \xi_1 \in \Sigma$, y, para $j \leq j_1$ y $\tau \in \Sigma$ sabemos que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) < 0$, entonces $\mathrm{Re}(\lambda_j \cdot (\xi - \xi_1)) < 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j)$ disminuye con s y, por lo tanto, disminuye a lo largo de $\delta_j(\xi)$.

Para cada $j > j_1$, elegimos algún rayo en Σ, l_j, que vaya desde el origen y a lo largo del cual $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) > 0$. Como l_j pasa por el origen, todos sus puntos tienen el mismo argumento; lo llamamos γ.

De nuevo, para $j > j_1$, tomaremos como camino de integración $\gamma_j(x)$ la imagen inversa por $t \to \tau = t^{q+1}$ de un camino $\delta_j(\xi)$ que definimos como sigue.

Sea m_j la semirrecta que va desde ξ hasta el infinito paralela a l_j. Definimos $\delta_j(\xi)$ como el camino que va desde el infinito hasta ξ por la recta m_j y que se puede parametrizar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta_j(\xi): \quad (0,\infty) &\longrightarrow \Sigma^* \\ s &\longmapsto \xi + \frac{1}{s}e^{i\gamma} \end{aligned}$$

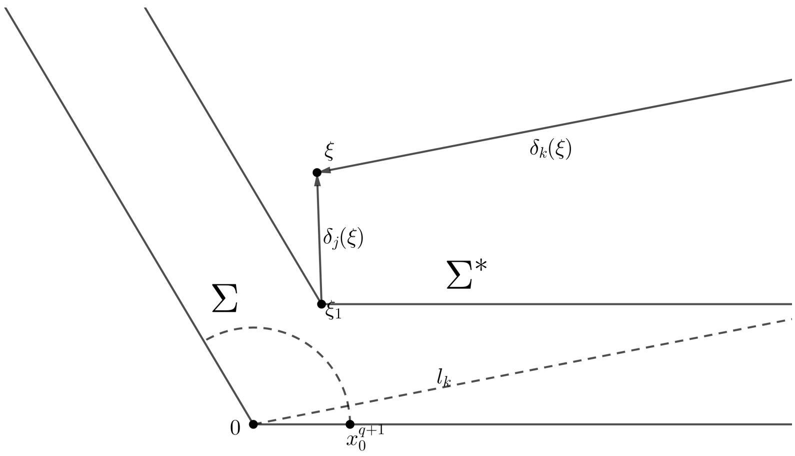

Figura 3.1: Construcción de caminos $\delta_j(\xi)$ y $\delta_k(\xi)$ en Σ para $j \leq j_1$ y $k > j_1$.

y tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\tau\lambda_j)\Big|_{\tau=\delta_j(\xi)(s)} &= \operatorname{Re}\left(\left(\xi + \frac{1}{s}e^{i\gamma}\right)\lambda_j\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\xi\lambda_j\right) + \frac{1}{s}\operatorname{Re}\left(e^{i\gamma}\lambda_j\right).\end{aligned}$$

Como $e^{i\gamma} \in l_j$, sabemos que $\operatorname{Re}(e^{ij}\lambda_j) > 0$, por lo que $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j)$ disminuye con s, es decir, a lo largo de $\delta_j(\xi)$.

Entonces hemos probado que, tanto si $j \leq j_1$ como si $j > j_1$, $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j)$ disminuye a lo largo de $\delta_j(\xi)$.

Llamamos $S^* \subset S$ a la imagen inversa de Σ^* y ahora estudiaremos la forma que tiene.

Sabemos que $S = S_0(\alpha, \beta, \infty)$ para $0 < \alpha < \beta$ y que $\beta - \alpha < \pi/(q+1)$. Por el Lema 3.1, $\Sigma = S_0(\alpha(q+1), \beta(q+1), \infty)$ y, por el Corolario 3.2, sabemos que la amplitud de Σ es $(\beta - \alpha)(q+1) < \pi$.

Ahora podemos escribir una expresión para Σ^*, teniendo en cuenta que, en este caso, el sector es cerrado:

$$\Sigma^* = \left\{\tau = \xi_1 + \rho e^{i\nu} : \quad \rho > 0, \quad \nu \in [\alpha(q+1), \beta(q+1)]\right\}.$$

Los rayos de la frontera son

$$\begin{aligned}s_1 &= \left\{\xi_1 + \rho e^{i\alpha(q+1)} : \quad \rho \geq 0\right\}, \\ s_2 &= \left\{\xi_1 + \rho e^{i\beta(q+1)} : \quad \rho \geq 0\right\}\end{aligned}$$

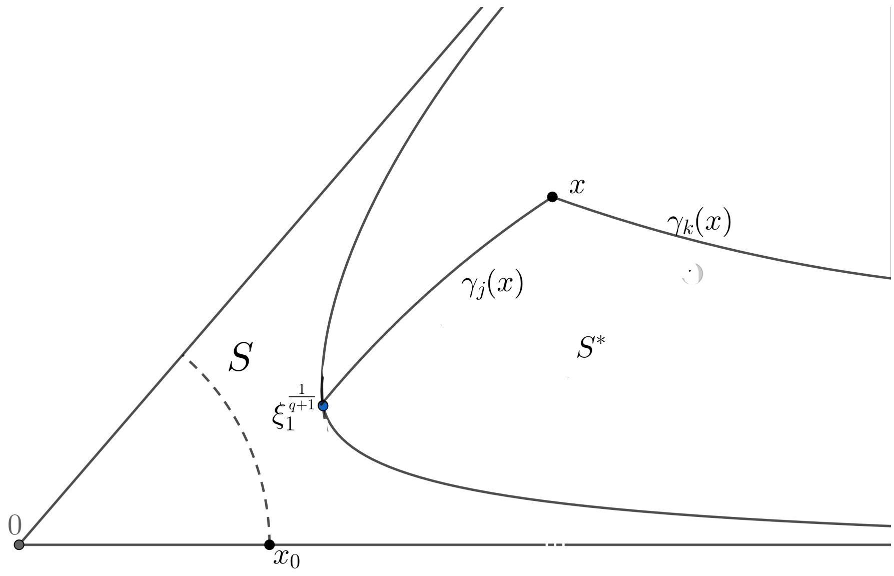

Figura 3.2: Sectores S y S^* y los caminos $\gamma_j(x)$ y $\gamma_k(\xi)$ para $j \leq j_1$ y $k > j_1$.

y la imagen inversa de un punto de s_1 diferente a ξ_1 es

$$\left(\xi_1 + \rho e^{i\alpha(q+1)}\right)^{1/(q+1)} = \left(\rho e^{i\alpha(q+1)}\right)^{1/(q+1)} \left(\frac{\xi_1}{\rho e^{i\alpha(q+1)}} + 1\right)^{1/(q+1)}.$$

El primer factor

$$\rho^{1/(q+1)} e^{i\alpha}$$

pertenece a un rayo de la frontera de S para todo $\rho > 0$, mientras que el segundo factor

$$\left(\frac{\xi_1}{\rho e^{i\alpha(q+1)}} + 1\right)^{1/(q+1)}$$

tiende a 1 cuando $\rho \to \infty$.

Es decir, que la imagen inversa de s_1 es una curva que empieza en $\xi_1^{1/(q+1)} = x_1$ y que tiene como asíntotas uno de los rayos de la frontera de S. Repitiendo exactamente el mismo procedimiento, llegamos a la misma conclusión para la imagen inversa de s_2

Por lo tanto, la imagen inversa S^* de Σ^* es un dominio en $\mathbb{C}$ que está acotado por dos curvas que se cortan en $x_1 = \xi_1^{1/(q+1)}$ y que tienen como asíntotas los dos rayos de la frontera de S. Esto implica que S^* contiene todos los puntos a distancia suficiente del origen de cualquier subsector cerrado de S. Podemos visualizar las regiones S y S^* en la Figura 3.2

Lema 3.4. *Sea*

$$\lambda_0 = \min_j |\lambda_j|.$$

Existe una constante positiva μ, independiente de λ_0, j y ξ_1 tal que

$$Re\left[\frac{(x^{q+1} - t^{q+1})\,\lambda_j}{q+1}\right] \leq -\frac{|x^{q+1} - t^{q+1}|\lambda_0\mu}{q+1}$$

para $t \in \gamma_j(x)$, $x \in S^*$.

Demostración. Cuando hemos construido los caminos, hemos visto que, si τ y ξ son imágenes de los puntos t y x del Lema, tanto si $j \leq j_1$ como si $j > j_1$, se tiene que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j)$ disminuye a lo largo de $\delta_j(\xi)$, teniendo en cuenta que ambos caminos terminan en ξ. Entonces si $j = 1, \ldots, N$,

$$\mathrm{Re}\left(\left(\xi - \tau\right)\lambda_j\right) = \mathrm{Re}\left(\xi\lambda_j\right) - \mathrm{Re}\left(\tau\lambda_j\right) < 0.$$

No solo esto, sino que, por la construcción de los vectores y la Observación 3.3, los números $(\xi-\tau)\lambda_j$ están en un subsector propio cerrado del semiplano de la izquierda. Por lo tanto, existe un $\epsilon \in (0, \pi/2)$ tal que el argumento de $(\xi - \tau)\lambda_j$ está en $(\pi/2 + \epsilon, 3\pi/2 - \epsilon)$ y, por lo tanto, existe una constante positiva μ tal que

$$\cos[\arg(\xi - \tau)\lambda_j] \leq -\mu.$$

Sabemos que

$$(\xi - \tau)\lambda_j = |\xi - \tau||\lambda_j|\left(\cos[\arg(\xi - \tau)\lambda_j] + i\sin[\arg(\xi - \tau)\lambda_j]\right),$$

es decir,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[(\xi - \tau)\lambda_j\right] = |\xi - \tau||\lambda_j|\cos[\arg(\xi - \tau)\lambda_j] &\leq -|\xi - \tau||\lambda_j|\mu \\ &\leq -|\xi - \tau|\lambda_0\mu.\end{aligned}$$

Usando directamente las igualdades (3.16) y (3.17) y dividiendo cada miembro entre $q + 1$, obtenemos la desigualdad que queríamos probar. $\square$

3.4. Una desigualdad fundamental

La siguiente estimación será crucial en la prueba de la convergencia del método de aproximaciones sucesivas, que permitirá encontrar la solución de la ecuación integral (3.12).

Lema 3.5. *Sea $\chi(x)$ una función vectorial holomorfa para $x \in S^*$ y que satisface en esta región una desigualdad de la forma*

$$\|\chi(x)\| \leq c|x|^{-m}, \tag{3.19}$$

donde m es un entero no negativo y $c \geq 0$ es una constante. Entonces

$$\psi(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp\left[\frac{\left(x^{q+1} - t^{q+1}\right)\Lambda}{q+1}\right] t^q \chi(t) dt \tag{3.20}$$

es holomorfa en S^* y satisface en esta región una desigualdad de la forma

$$\|\psi(x)\| \leq Kc|x|^{-m}, \tag{3.21}$$

donde K es una constante independiente de $\chi(t)$ pero dependiente de m.

Demostración. Si ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, son las componentes de ψ, tenemos que probar que

$$|\psi_j(x)| \leq Kc|x|^{-m}, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, N.$$

Usando las transformaciones (3.16) y (3.17), escribimos cada componente de (3.20) como

$$\psi_j(x) = \frac{1}{q+1} \int_{\delta_j(\xi)} \exp\left[\frac{(\xi - \tau)\lambda_j}{q+1}\right] \chi_j(\tau^{1/(q+1)}) d\tau.$$

(a) Para $j \leq j_1$, parametrizaremos primero $\delta_j(\xi)$ de una manera diferente a como lo hemos hecho antes. Como estamos buscando acotar $|\psi(x)|$ y el sentido que tomemos de la parametrización no es relevante, tomaremos en este caso el camino en sentido opuesto:

$$\begin{aligned} -\delta_j(\xi): \quad [0, |\xi - \xi_1|] &\longrightarrow \Sigma^* \\ \rho &\longmapsto \xi - \rho e^{i\theta}, \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo orientado del segmento que va desde ξ_1 hasta ξ. Entonces podemos expresar la integral en los siguientes términos:

$$\psi_j(x) = -\frac{\left(-e^{i\theta}\right)}{q+1} \int_0^{|\xi - \xi_1|} \exp\left[\frac{\rho e^{i\theta}\lambda_j}{q+1}\right] \chi_j\left(\left(\xi - \rho e^{i\theta}\right)^{1/(q+1)}\right) d\rho.$$

Por la hipótesis (3.19), sabemos que

$$\left|\chi_j\left(\left(\xi - \rho e^{i\theta}\right)^{1/(q+1)}\right)\right| \leq c\left|\xi - \rho e^{i\theta}\right|^{-m/(q+1)}$$

y, teniendo en cuenta que, si $z \in \mathbb{C}$, entonces $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$, tenemos que

$$\left|\exp\left[\frac{\rho e^{i\theta}\lambda_j}{q+1}\right]\right| = \exp\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta}\lambda_j}{q+1}\right)\right].$$

Por la forma en la que hemos parametrizado,

$$\xi - \tau = \rho e^{i\theta},$$

donde τ es un punto del camino que va desde ξ_1 hasta ξ. Entonces, podemos escribir, aplicando el Lema 3.4,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta}\lambda_j}{q+1}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{(\xi-\tau)\,\lambda_j}{q+1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(x^{q+1}-t^{q+1})\,\lambda_j}{q+1}\right) \\
&\leq -\frac{|x^{q+1}-t^{q+1}|\lambda_0\mu}{q+1} = -\frac{|\xi-\tau|\lambda_0\mu}{q+1} \\
&= -\frac{|\rho e^{i\theta}|\lambda_0\mu}{q+1} = -\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $\lambda_0 = \min_j |\lambda_j|$ y $\mu > 0$ es una constante adecuada.

Por lo tanto, ya podemos acotar:

$$\begin{aligned}
|\psi_j(x)| &\leq \frac{c}{q+1}\int_0^{|\xi-\xi_1|} \exp\left[-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right]\left|\xi-\rho e^{i\theta}\right|^{-m/(q+1)} d\rho \\
&= \frac{c}{q+1}\int_0^{|\xi-\xi_1|} \exp\left[-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right]|\tau|^{-m/(q+1)} d\rho,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde τ es un punto del segmento que va desde ξ_1 hasta ξ.

Dividimos el camino de integración en la desigualdad (3.23) en dos segmentos de igual longitud.

1) Si $\rho \leq |\xi-\xi_1|/2$, entonces el punto está en la mitad del segmento entre ξ y ξ_1 más cercana a ξ. Como el segmento $\xi - \xi_1$ es más corto que el que va desde 0 hasta ξ, entonces claramente se cumple la desigualdad $|\tau| \geq |\xi|/2$. La idea geométrica se representa en la Figura 3.3. En ella, el segmento de extremos ξ y Q_1 siempre tendrá mayor longitud que el de extremos ξ y Q_2. Por lo tanto, esta parte contribuye con menos de

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{q+1}2^{m/(q+1)}|\xi|^{-m/(q+1)}\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right] d\rho \\
&\qquad = 2^{m/(q+1)}\frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi|^{-m/(q+1)}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

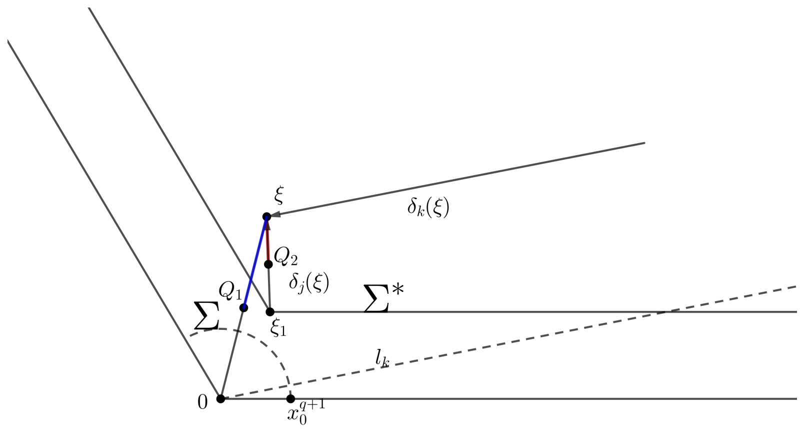

Figura 3.3: Idea geométrica para la desigualdad $|\tau| \geq |\xi|/2$ cuando $\rho \leq |\xi - \xi_1|/2$

.

a la parte de la derecha de (3.23). Esta expresión es claramente $O(|\xi|^{-m/(q+1)})$.

2) Si $\rho > |\xi - \xi_1|/2$, sustituimos $|\tau|$ por su cota inferior ξ_1 en (3.23) y nos damos cuenta de que no contribuye con más de

$$\begin{aligned} &\frac{c}{q+1}|\xi_1|^{-m/(q+1)} \int_{|\xi-\xi_1|/2}^{\infty} \exp\left[-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right] d\rho \\ &= \frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi_1|^{-m/(q+1)} \exp\left[-\frac{|\xi-\xi_1|\lambda_0\mu}{2(q+1)}\right]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para probar que la última expresión es siempre $O(|\xi|^{-m/(q+1)})$, separamos los casos $|\xi - \xi_1| \leq |\xi|/2$ y $|\xi - \xi_1| > |\xi|/2$.

(I) En el primer caso, tenemos $|\xi_1| \geq |\xi|/2$ y, por lo tanto, (3.25) no es mayor que

$$2^{m/(q+1)} \frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi|^{-m/(q+1)}. \tag{3.26}$$

(II) En el segundo caso, cuando $|\xi - \xi_1| > |\xi|/2$, (3.25) es menor que

$$\begin{aligned} &\frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi_1|^{-m/(q+1)} \exp\left[-\frac{|\xi|\lambda_0\mu}{4(q+1)}\right] \\ &= \frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi_1|^{-m/(q+1)} \exp\left[-\frac{|\xi|\lambda_0\mu}{4(q+1)}\right] |\xi|^{m/(q+1)}|\xi|^{-m/(q+1)}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Calculamos el máximo de

$$\exp\left[-\frac{|\xi|\lambda_0\mu}{4(q+1)}\right]|\xi|^{m/(q+1)} \tag{3.28}$$

respecto a $|\xi|$. La derivada respecto a $|\xi|$ es

$$\exp\left[-\frac{|\xi|\lambda_0\mu}{4(q+1)}\right]|\xi|^{m/(q+1)}\left(-\frac{\lambda_0\mu}{4(q+1)}+\frac{m}{(q+1)|\xi|}\right), \tag{3.29}$$

por lo que el único extremo está en

$$|\xi| = \frac{4m}{\lambda_0\mu}.$$

Además, a la vista del signo de (3.29), se ve claramente que el único extremo de (3.28) será un máximo. Este máximo es

$$\left(\frac{4m}{\lambda_0\mu}\right)^{m/(q+1)} e^{-m/(q+1)}.$$

Por lo tanto, (3.27) es menor o igual que

$$\frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi_1|^{-m/(q+1)}\left(\frac{4m}{\lambda_0\mu}\right)^{m/(q+1)} e^{-m/(q+1)}|\xi|^{-m/(q+1)}.$$

Sumando la más grande de las cantidades de las fórmulas (3.26) y (3.27) al segundo miembro de (3.24), obtenemos, o bien:

$$2\cdot 2^{m/(q+1)}\frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi|^{-m/(q+1)} = \frac{2\cdot 2^{m/(q+1)}}{\lambda_0\mu}c|x|^{-m}$$

o bien

$$\begin{aligned}&\frac{c}{\lambda_0\mu}|\xi|^{-m/(q+1)}\left(\left(\frac{4m}{\lambda_0\mu}\right)^{m/(q+1)}|\xi_1|^{-m/(q+1)}e^{-m/(q+1)}+2^{m/(q+1)}\right)\\ &=\frac{1}{\lambda_0\mu}\left(\left(\frac{4m}{\lambda_0\mu}\right)^{m/(q+1)}|\xi_1|^{-m/(q+1)}e^{-m/(q+1)}+2^{m/(q+1)}\right)c|x|^{-m},\end{aligned}$$

y en ambos casos hemos llegado a la estimación de la integral (3.23) que queríamos, siempre que $j \le j_1$, siendo las posibles constantes K:

$$\begin{aligned}K &= \frac{2\cdot 2^{m/(q+1)}}{\lambda_0\mu},\\ K &= \frac{1}{\lambda_0\mu}\left(\left(\frac{4m}{\lambda_0\mu}\right)^{m/(q+1)}|\xi_1|^{-m/(q+1)}e^{-m/(q+1)}+2^{m/(q+1)}\right).\end{aligned}$$

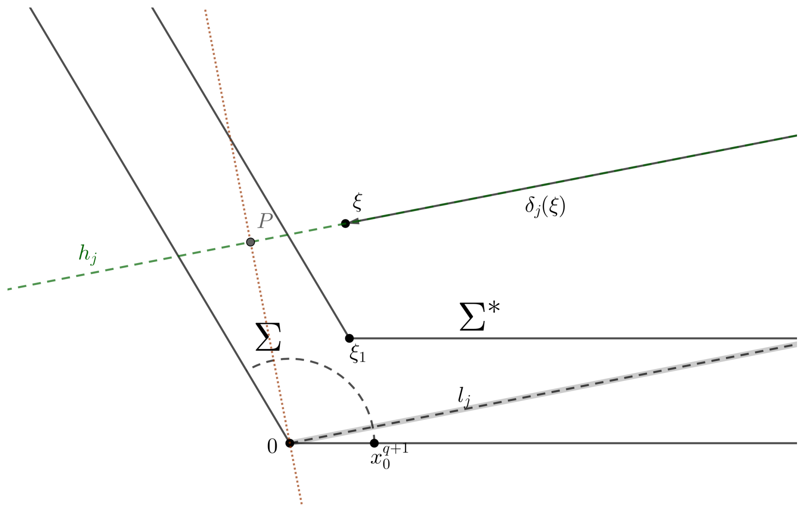

Figura 3.4: Caso en el que P no está en $\delta_j(\xi)$.

(b) Si $j > j_1$, primero probaremos la existencia de un número positivo p independiente de j, tal que en $\delta_j(\xi)$ se tiene que

$$|\tau| \geq p|\xi|, \quad \tau \in \delta_j(\xi). \tag{3.30}$$

Sea P el punto donde se cruzan $\delta_j(\xi)$ y su perpendicular desde el origen. Si h_j es la recta resultante de prolongar infinitamente $\delta_j(\xi)$, y cuyo punto más cercano al origen es P, puede ocurrir:

(I) Que P no esté en $\delta_j(\xi)$. En este caso, el punto más cercano de $\delta_j(\xi)$ al origen es el propio ξ, por lo que se cumplirá $|\tau| > |\xi|$ para todo $\tau \in \delta_j(\xi)$. Se puede ver la idea geométrica en la Figura 3.4.

(II) Si P está en $\delta_j(\xi)$, entonces significa que el sector Σ tiene una amplitud mayor que $\pi/2$, ya que tiene un ángulo recto contenido en él. Primero llamamos α y β a los ángulos que forma l_j con los rayos de la frontera de Σ. Si tanto α como β fueran menores o iguales que $\pi/2$, entonces una perpendicular a l_j trazada desde el origen estaría completamente fuera del sector Σ. Sin embargo, hemos visto que no es así, ya que esta perpendicular corta a $\delta_j(\xi)$, que está en Σ, en el punto P. Por lo tanto, uno de los dos ángulos α o β es mayor que $\pi/2$. Veamos un contraejemplo de lo anterior en la Figura 3.5, donde, por ser α y β ángulos agudos, la perpendicular a l_j y, por tanto, P están fuera de Σ.

Sabiendo esto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\beta > \pi/2$ y entonces tenemos $\alpha < \pi/2$, ya que la amplitud de Σ es

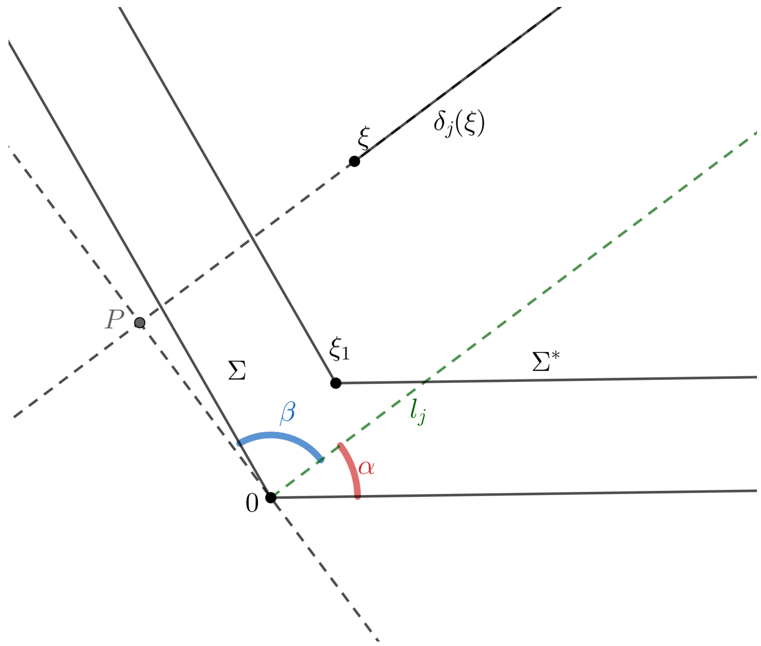

Figura 3.5: Ejemplo en el que se ve que, o bien α, o bien β, tiene que ser mayor que $\pi/2$.

$\alpha+\beta < \pi$. Trazamos el triángulo de vértices ξ, O y P y llamamos λ y μ a los ángulos $PO\xi$ y $O\xi P$, respectivamente. Queremos probar que μ es numéricamente mayor o igual que el menor de los ángulos α y β, es decir, queremos probar que $\mu \geq \alpha$. Lo haremos por reducción al absurdo: suponemos que $\mu < \alpha$. Observando el triángulo en la Figura 3.6, vemos que $\lambda = \pi - \pi/2 - \mu = \pi/2 - \mu > \pi/2 - \alpha$. Entonces tenemos que

$$\alpha + \beta > \alpha + \frac{\pi}{2} + \lambda > \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi,$$

lo cual contradice la hipótesis de $\alpha + \beta < \pi$. Por lo tanto, sabemos que el ángulo $O\xi P = \mu$ es mayor o igual que el menor de los ángulos que forma l_j con los rayos de la frontera de Σ.

Si ν es el mínimo de estos ángulos para $j > j_1$, entonces, si $\tau \in \delta_j(\xi)$ para algún $j > j_1$, tenemos que

$$|\tau| \geq \overline{OP} = |\xi| \sin(\mu) \geq |\xi| \sin(\nu),$$

donde $\sin(\nu) > 0$ porque $\nu \in (0, \pi/2]$

Por tanto, la desigualdad (3.30) es siempre cierta. Parametrizamos $-\delta_j(\xi)$

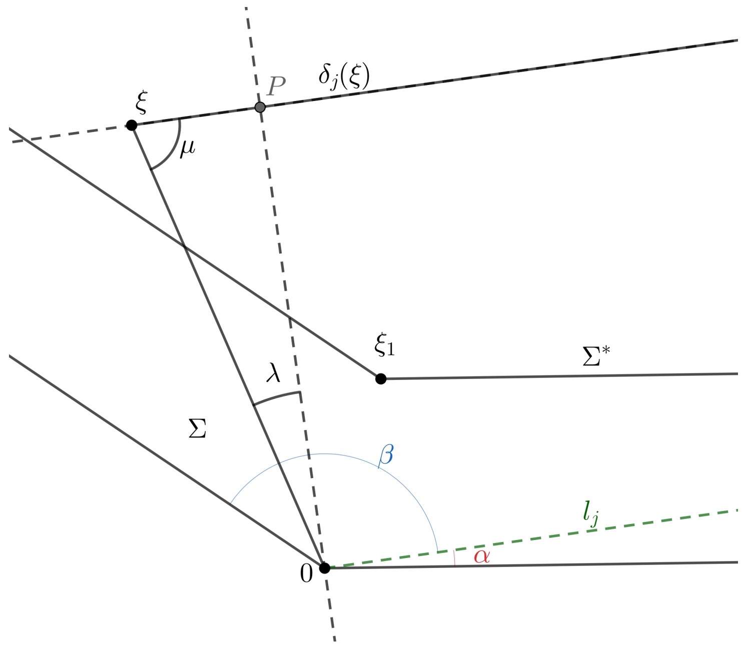

Figura 3.6: Triángulo de vértices ξ, O y P representado sobre el sector Σ.

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\delta_j(\xi): \quad (0,\infty) &\longrightarrow \Sigma^* \\ \rho &\longmapsto \xi + \rho e^{i\gamma}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde, como hemos visto antes, γ es el ángulo orientado del camino $-\delta_j(\xi)$ para $j > j_1$. Entonces tenemos

$$\psi_j(x) = -\frac{1}{q+1}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\rho e^{i\gamma}\lambda_j}{q+1}\right]\chi_j\left(\left(\xi+\rho e^{i\gamma}\right)^{1/(q+1)}\right)e^{i\gamma}d\rho.$$

Por la hipótesis (3.19), sabemos que

$$\left|\chi_j\left(\left(\xi+\rho e^{i\theta}\right)^{1/(q+1)}\right)\right| \le c\left|\xi+\rho e^{i\theta}\right|^{-m/(q+1)}$$

y, por cómo hemos parametrizado, tenemos que

$$-\xi+\tau = \rho e^{i\gamma},$$

donde τ es un punto del camino que va desde ξ hasta infinito con ángulo γ y, por lo tanto,

$$\left|\chi_j\left(\left(\xi+\rho e^{i\gamma}\right)^{1/(q+1)}\right)\right| \le c|\tau|^{-m/(q+1)}.$$

Siguiendo prácticamente el mismo razonamiento que en (3.22) y por el Lema 3.4:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(-\frac{\rho e^{i\gamma}\lambda_j}{q+1}\right) &= \operatorname{Re}\left(-\frac{(\tau-\xi)\,\lambda_j}{q+1}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(x^{q+1}-t^{q+1})\,\lambda_j}{q+1}\right) \\
&\leq -\frac{|x^{q+1}-t^{q+1}|\lambda_0\mu}{q+1} = -\frac{|\xi-\tau|\lambda_0\mu}{q+1} \\
&= -\frac{|\rho e^{i\theta}|\lambda_0\mu}{q+1} = -\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}.
\end{aligned}
$$

Insertando (3.30) en (3.23) y llamando $|\xi-\tau|=\rho$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
|\psi_j(x)| &\leq \frac{c}{q+1}p^{-m/(q+1)}|\xi|^{-m/(q+1)}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right]d\rho \\
&= \frac{c}{\lambda_0\mu}p^{-m/(q+1)}|\xi|^{-m/(q+1)} = \frac{p^{-m/(q+1)}}{\lambda_0\mu}c|x|^{-m}.
\end{aligned}
$$

Esto completa la prueba de (3.21), con

$$
K = \frac{p^{-m/(q+1)}}{\lambda_0\mu}.
$$

Para probar que $\psi(x)$ es holomorfa en S^*, basta con probar que las integrales

$$
\int_{\delta_j(\xi)} \exp\left[-\frac{\tau\lambda_j}{q+1}\right]\chi_j(\tau^{1/(q+1)})d\tau
$$

son funciones holomorfas de ξ en Σ^*.

(a) Para $j \leq j_1$, parametrizamos $\delta_j(\xi)$ como en (3.18) y obtenemos

$$
\int_0^1 \exp\left[-\frac{(\rho\xi+(1-\rho)\xi_1)\lambda_j}{q+1}\right]\chi_j\left((\rho\xi+(1-\rho)\xi_1)^{1/(q+1)}\right)(\xi-\xi_1)d\rho,
$$

que es una integral en el segmento $[0,1]$ de una función holomorfa en él, por lo que es inmediato que la integral es holomorfa.

(b) Para $j > j_1$, parametrizamos $-\delta_j(\xi)$ como en (3.31) y obtenemos

$$
-\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi+\rho e^{i\gamma})\,\lambda_j}{q+1}\right]\chi_j\left(\left(\xi+\rho e^{i\gamma}\right)^{1/(q+1)}\right)e^{i\gamma}d\rho.
$$

Aplicamos directamente el Teorema A.3 de holomorfía bajo el signo integral a la función

$$f: \quad \mathring{\Sigma}^* \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$f(\xi, \rho) = \exp\left[-\frac{(\xi + \rho e^{i\gamma})\,\lambda_j}{q+1}\right] \chi_j\left(\left(\xi + \rho e^{i\gamma}\right)^{1/(q+1)}\right) e^{i\gamma}.$$

(I) Claramente, la función $f_\xi : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_\xi(\rho) = f(\xi, \rho)$ es medible Lebesgue, ya que $(\xi + \rho e^{i\gamma})^{1/(q+1)} \in S^*$ y $\chi(x)$ es holomorfa en S^*.

(II) También es cierto que, para $\rho > 0$, la función $f_\rho : \mathring{\Sigma}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_\rho(\xi) = f(\xi, \rho)$ es holomorfa en $\mathring{\Sigma}^*$.

(III) Si $\xi_0 \in \mathring{\Sigma}^*$, podemos tomar un entorno V de ξ_0 y que esté contenido en $\mathring{\Sigma}^*$. Además, si $\xi \in V$, los puntos $\tau = \xi + \rho e^{i\gamma}$ para $\rho \geq 0$ están en Σ^*. También sabemos que, si $\tau \in \Sigma^*$, entonces $|\tau| > |\xi_1|$. Entonces podemos acotar

$$\begin{aligned}\left\|\chi_j\left(\left(\xi + \rho e^{i\gamma}\right)^{1/(q+1)}\right) e^{i\gamma}\right\| &\leq c\left|\xi + \rho e^{i\gamma}\right|^{-m/(q+1)} = c|\tau|^{-m/(q+1)} \\ &\leq c|\xi_1|^{-m/(q+1)}.\end{aligned}$$

También podemos acotar

$$\begin{aligned}\left|\exp\left[-\frac{(\xi + \rho e^{i\gamma})\,\lambda_j}{q+1}\right]\right| &= \exp\left[-\mathrm{Re}\left(\frac{(\xi + \rho e^{i\gamma})\,\lambda_j}{q+1}\right)\right] \\ &= \exp\left[-\mathrm{Re}\left(\frac{\xi\lambda_j}{q+1}\right)\right] \cdot \exp\left[-\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\gamma}\lambda_j}{q+1}\right)\right].\end{aligned}$$

Es decir, que existe una constante $M > 0$ tal que podemos acotar

$$|f(\xi, \rho)| \leq M \exp\left[-\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\gamma}\lambda_j}{q+1}\right)\right] = h(\rho).$$

Como $\rho e^{i\gamma} \in l_j$, sabemos que $\mathrm{Re}\,(\rho e^{i\gamma}\lambda_j) > 0$, ya que elegimos l_j con esta propiedad. Si llamamos $c_j = e^{i\gamma}\lambda_j/(q+1)$, sabemos que es una constante con parte real positiva. Sea $c_j^{(r)} = \mathrm{Re}(c_j)$, entonces

$$h(\rho) = M \exp\left[-c_j^{(r)}\rho\right],$$

que es integrable en $(0, \infty)$.

Se cumplen las hipótesis del Teorema A.3 y, por lo tanto, la función

$$F: \quad \overset{\circ}{\Sigma}{}^{*} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$F(\xi) = \int_0^\infty f(\xi, \rho) d\rho$$

es holomorfa y podemos deducir que $\psi(x)$ es holomorfa para $x \in S^*$. $\square$

La siguiente observación sobre la constante K en (3.21) se deduce directamente de la prueba del Lema 3.5.

Observación 3.6. Aunque la constante K depende de ξ_1, no crecerá si $|\xi_1|$ aumenta su valor.

3.5. Solución de la ecuación integral

Sea S' un subsector cerrado del sector S del Teorema 2.2 y repetimos la construcción del sector S^* como en la sección 3.3 con S' en lugar de S, obteniendo una región $S^{*\prime}$.

Tomamos un entero positivo m. Por (3.5) y por el Teorema 1.23 adaptado a desarrollos cuando $x \to \infty$, sabemos que existe una constante c que depende de m tal que

$$\|b(x)\| \leq c|x|^{-m}, \quad x \in S^{\star\prime},$$

ya que esta constante existe para cualquier subsector propio de S y $S^{*\prime}$ está contenido en el subsector propio S'. Por tanto, por el Lema 3.5 y la fórmula (3.14), junto con el hecho de que $p(x, 0) = b(x)$, existe una constante K tal que

$$\|u_1(x)\| \leq Kc|x|^{-m}, \quad x \in S^{\star\prime}. \tag{3.32}$$

Ahora estimaremos las diferencias (3.15) por inducción. A la vista de la definición del operador $\mathscr{P}$ y de la función $p(x, u)$ en (3.9), tenemos que acotar, para $x \in S^{\star\prime}$, la cantidad

$$\left\|(B(x) - \Lambda)\left(z^{(2)} - z^{(1)}\right) + h\left(x, z^{(2)}\right) - h\left(x, z^{(1)}\right)\right\|,$$

donde $z^{(1)}$ y $z^{(2)}$ son vectores con

$$\left\|z^{(i)}\right\| \leq z_0, \qquad i = 1, 2, \quad z_0 \text{ constante.}$$

Como $\lim_{x\to\infty} B(x) = \Lambda$, podemos acotar $\|B(x) - \Lambda\|$ por una constante γ_1 tan pequeña como queramos, eligiendo x suficientemente grande.

Sabemos que $h(x,z)$ es un polinomio en las componentes de z sin términos constantes ni lineales. Por lo tanto, $h\left(x, z^{(2)}\right) - h\left(x, z^{(1)}\right)$ es un polinomio en las componentes de $z^{(2)}$ y $z^{(1)}$ sin términos constantes ni lineales, y su módulo se puede acotar:

$$\left\|h\left(x, z^{(2)}\right) - h\left(x, z^{(1)}\right)\right\| \leq \left\|z^{(2)} - z^{(1)}\right\| \cdot \gamma_2,$$

siendo $\gamma_2 > 0$ tan pequeña como necesitemos, con tal de elegir z_0 suficientemente pequeña.

En resumen, se cumple que

$$\begin{aligned} &\left\|(B(x)-\Lambda)\left(z^{(2)} - z^{(1)}\right) + h\left(x, z^{(2)}\right) - h\left(x, z^{(1)}\right)\right\| \\ &\leq \gamma_1 \left\|z^{(2)} - z^{(1)}\right\| + \gamma_2 \left\|z^{(2)} - z^{(1)}\right\| = \gamma \left\|z^{(2)} - z^{(1)}\right\|, \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde la constante γ se puede tomar tan pequeña como queramos eligiendo $|\xi_1|$ suficientemente grande y z_0 suficientemente pequeña. Recordamos por la Observación 3.6 en la sección 3.4 que incrementar $|\xi_1|$ no afecta a la constante K. Por lo tanto, asumimos que

$$\gamma < K^{-1}. \tag{3.34}$$

Incrementando x_0 si es necesario, pero manteniendo γ y K fijas, podemos conseguir

$$\frac{cK}{1-\gamma K}|x|^{-m} \leq z_0, \qquad \text{para } x \in S^{*\prime}. \tag{3.35}$$

Entonces, vamos a probar que

$$\|u_{r+1} - u_r\| \leq \gamma^r K^{r+1} c|x|^{-m}, \quad r = 0, 1, \ldots \quad x \in S^{\star\prime} \tag{3.36}$$

y

$$\|u_{r+1}\| \leq \frac{cK}{1-\gamma K}|x|^{-m}, \quad r = 0, 1, \ldots, \quad x \in S^{*\prime}. \tag{3.37}$$

Razonaremos por inducción. Para $r = 0$, la desigualdad (3.36) es inmediata a la vista de (3.32) y de $u_0 \equiv 0$. Para $r = 0$, la desigualdad (3.37) es menos restrictiva, así que también se cumple. Asumimos que son ciertas para todo $r \leq j-1$, para cualquier $j > 1$. Podemos escribir

$$\mathscr{P}u_j - \mathscr{P}u_{j-1} = \int_{\Gamma(x)} \exp\left[\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1}\Lambda\right] t^q \left(p(t, u_j) - (p(t, u_{j-1})\right) dt.$$

Definimos la función

$$\begin{aligned} \chi(x) :=& p(x, u_j) - p(x, u_{j-1}) \\ =& (B(x) - \Lambda)\left(u_j - u_{j-1}\right) + h\left(x, u_j\right) - h\left(x, u_{j-1}\right). \end{aligned}$$

Gracias a (3.35) y a (3.37), tenemos que, para $r \leq j-1$, se cumple

$$\|u_{r+1}\| \leq \frac{cK}{1-\gamma K}|x|^{-m} \leq z_0.$$

Entonces, podemos aplicar la desigualdad (3.33) para $z^{(1)} = u_{j-1}$, $z^{(2)} = u_j$ y tenemos, usando también (3.36),

$$\|\chi(x)\| \leq \gamma \|u_j(x) - u_{j-1}(x)\| \leq \gamma \cdot \gamma^{j-1} K^j c|x|^{-m} = \gamma^j K^j c|x|^{-m}.$$

Es decir, que $\mathscr{P}u_j - \mathscr{P}u_{j-1}$ es una integral de la forma (3.20) con $\chi(x)$ satisfaciendo la desigualdad

$$\|\chi(x)\| \leq \gamma^j K^j c|x|^{-m}.$$

Podemos aplicar entonces el Lema 3.5 y deducir que

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1} - u_j\| &= \|\mathscr{P}u_j - \mathscr{P}u_{j-1}\| \\
&= \left\| \int_{\Gamma(x)} \exp\left[\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1}\Lambda\right] t^q \chi(t) dt \right\| \\
&\leq K\gamma^j K^j c|x|^{-m} = \gamma^j K^{j+1} c|x|^{-m},
\end{aligned}$$

por lo que ya hemos probado (3.36) para $r = j$.

La validez de (3.37) para $r = j$ se deriva de la de (3.36) para $r \leq j$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{j} (u_{k+1} - u_k) \right\| &\leq \sum_{k=0}^{j} \|u_{k+1} - u_k\| \\
&\leq cK|x|^{-m} \sum_{k=0}^{j} \gamma^k K^k < cK|x|^{-m}(1-\gamma K)^{-1}.
\end{aligned}$$

La prueba de que

$$u(x) = \lim_{r\to\infty} u_r(x)$$

existe se completa ahora de la manera usual: Las fórmulas (3.34) y (3.36) implican que la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} \|u_{r+1} - u_r\|$$

está, para $x \in S^{*\prime}$, dominada por una serie geométrica convergente. Por lo tanto, la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} (u_{r+1} - u_r)$$

converge uniformemente para $x \in S^{\star\prime}$.

Para probar que $u(x)$ es solución de la ecuación integral $u = \mathscr{P}u$, tenemos que probar que

$$\lim_{r\to\infty} \mathscr{P}u_r = \mathscr{P} \lim_{r\to\infty} u_r.$$

Para ello, usaremos el Teorema A.4.

Tenemos la sucesión de funciones $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ definidas por

$$u_0 \equiv 0 \text{ en } \mathbb{C}, \qquad u_{k+1} = \mathscr{P}u_k \text{ para } k \geq 0,$$

donde

$$\mathscr{P}u = \int_{\Gamma(x)} \exp\left[\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1}\Lambda\right] t^q p(t, u(t))dt.$$

Sabemos que cada una de las componentes de esta última integral se puede escribir como

$$\frac{1}{q+1}\int_{\delta_j(\xi)} \exp\left[\frac{(\xi-\tau)\lambda_j}{q+1}\right] p\left(\tau^{1/(q+1)}, u\left(\tau^{1/(q+1)}\right)\right) d\tau, \tag{3.38}$$

donde, como hemos razonado al principio de la sección 3.2, $|p(t, u(t))|$ es mucho menor que $|u|$ cuando $|u| < 1$.

Para $j \leq j_1$, podemos parametrizar como en (3.18) y acotamos superiormente el valor absoluto de (3.38) por

$$\frac{1}{q+1}\int_0^1 \left|\exp\left[\frac{(1-s)(\xi-\xi_1)\lambda_j}{q+1}\right]\right| \cdot |u| \cdot |\xi - \xi_1| ds.$$

El integrando se puede acotar superiormente por

$$\left|\exp\left[\frac{(1-s)(\xi-\xi_1)\lambda_j}{q+1}\right]\right| \cdot |\xi - \xi_1|,$$

que es claramente integrable respecto a s en $(0, 1)$, por lo que podemos aplicar el Teorema A.4 y hemos conseguido lo que buscábamos para las componentes $j-$ésimas con $j \leq j_1$.

Para $j > j_1$, parametrizamos $\delta_j(\xi)$ en sentido opuesto, como en (3.31) y podemos acotar superiomente el valor absoluto de (3.38) por

$$\frac{1}{q+1}\int_0^\infty \left|\exp\left[\frac{-se^{i\gamma}\lambda_j}{q+1}\right]\right| \cdot |u| \cdot |e^{i\gamma}| ds \leq \frac{1}{q+1}\int_0^\infty \left|\exp\left[\frac{-se^{i\gamma}\lambda_j}{q+1}\right]\right| ds.$$

Siguiendo el mismo razonamiento que cuando aplicamos el Teorema A.3 al final de la prueba del Lema 3.5, vemos que el integrando se puede acotar por una función integrable en $(0, \infty)$ y, entonces, podemos aplicar el Teorema A.4 para $j > j_1$.

Podemos concluir entonces que

$$\lim_{r \to \infty} \mathscr{P} u_r = \mathscr{P} \lim_{r \to \infty} u_r.$$

Finalmente, vemos por (3.37) y mediante un paso al límite cuando $r \to \infty$ que, aplicando el Teorema 1.23, se tiene que $u(x) \sim \hat{0}$, cuando $x \to \infty$, ya que m es arbitrario. La región S^* depende de la elección de x_1, que a su vez depende de la elección de m. Sin embargo, esto es irrelevante, ya que $u(x)$ es independiente de m y, por lo tanto, existe en una región que no depende de m. Entonces, hemos probado el Teorema 2.2 bajo la hipótesis de que todos los λ_j son diferentes.

El Teorema 2.2 es de interés, no solo por su importancia en ecuaciones diferenciales lineales, sino también como resultado de mayor alcance para ecuaciones diferenciales no lineales. En ese caso, deberíamos eliminar la hipótesis (a) que impone que $f(x, z)$ debe ser un polinomio en las componentes de z y sustituirla por una que obligue a $f(x, z)$ a ser holomorfa en las componentes de z para $z = 0$. Si recorremos la prueba del Teorema 2.2, nos damos cuenta de que el único lugar en que usábamos que $f(x, z)$, y por tanto $h(x, z)$, era un polinomio, era en la fórmula (3.33). Esta fórmula sigue siendo válida bajo hipótesis menos restrictivas en $f(x, z)$, como veremos ahora.

Teorema 3.7. *Las conclusiones del Teorema 2.2 siguen siendo válidas si las hipótesis (a) y (b) se sustituyen por*

(a)* $f(x, z)$ *es holomorfa en las componentes* z_j *de* z*,* $j = 1, 2, \dots, N$ *y en* x *en la región*

$$\|z\| \leq z_0, \quad 0 < x_0 \leq |x| < \infty, \quad x \in S \ (x_0 \text{ y } z_0 \text{ son constantes}).$$

(b)* $f(x, z)$ *admite un desarrollo asintótico*

$$f(x, z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} f_r(z) x^{-r}, \quad x \to \infty, \quad x \in S$$

uniformemente válido para $\|z\| \leq z_0$*.*

Para probarlo, veremos primero un lema.

Lema 3.8. *Sea* $v(z)$ *una función vectorial del vector complejo* z *holomorfa en* $z = 0$*. Sean* $v_j(z)$ *las componentes de dicha función. Si la matriz jacobiana*

$M(z) = \{\partial v_j/\partial z_k\}_{j,k}$ se anula en $z=0$, entonces existe para todo $\beta > 0$ un número real $z_0(\beta)$ tal que

$$\left\| v\left(z^{(2)}\right) - v\left(z^{(1)}\right) \right\| \leq \beta \left\| z^{(2)} - z^{(1)} \right\|$$

siempre que

$$\left\| z^{(j)} \right\| \leq z_0(\beta), \quad j = 1, 2.$$

Demostración. Sea $0 \leq \alpha \leq 1$ y $w(\alpha) = v\left(\alpha z^{(2)} + (1-\alpha) z^{(1)}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\| v\left(z^{(2)}\right) - v\left(z^{(1)}\right) \right\| &= \|w(1) - w(0)\| = \left\| \int_0^1 w'(\alpha) d\alpha \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 M\left(\alpha z^{(2)} + (1-\alpha) z^{(1)}\right) \left(z^{(2)} - z^{(1)}\right) d\alpha \right\| \\ &\leq \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\| M\left(\alpha z^{(2)} + (1-\alpha) z^{(1)}\right) \right\| \cdot \left\| z^{(2)} - z^{(1)} \right\|. \end{aligned}$$

Como v es holomorfa en $z=0$, M es continua en $z=0$, y, como además $M(0)=0$,

$$\lim_{z^{(1)}, z^{(2)} \to 0} M\left(\alpha z^{(2)} + (1-\alpha) z^{(1)}\right) = M(0) = 0,$$

y este límite es uniforme para $0 \leq \alpha \leq 1$, por lo que ya hemos completado la prueba. □

La prueba del siguiente corolario es inmediata.

Corolario 3.9. *Suponemos ciertas las hipótesis del Lema 3.8. Si $v(z)$ depende además de una variable compleja x, i.e., $v = v(x,z)$, y si*

$$\lim_{z \to 0} M(z) = 0,$$

uniformemente para x en alguna región R, entonces la constante $z_0(\beta)$ puede tomarse independiente de x, para $x \in R$.

Demostración del Teorema 3.7. Como se ha indicado antes, lo único que tenemos que probar es que la fórmula (3.33) también es cierta bajo las hipótesis del Teorema 3.7.

Recordamos que, con las anteriores hipótesis, $g(x,z)$ era la función que obteníamos obtenido al restar a $f(x,z)$ su parte lineal y su parte constante. En ese caso, $h(x,z)$ era el resto de Taylor de $h(x,z)$ respecto a z de $g(x,\phi(x)+u)$ en torno a $g(x,\phi(x))$. Por las características de $g(x,z)$, $h(x,z)$ era también un polinomio en las componentes de z sin términos constante ni lineales.

Sin embargo, en el caso que estamos estudiando ahora, $f(x,z)$ no tiene que ser un polinomio en las componentes de z, pero sí que es holomorfa en ellas, por la hipótesis (a*). Es decir, que $g(x, z)$ será el resultado de restar a $f(x, z)$ los términos constantes y lineales de su desarrollo de Taylor.

Por la hipótesis (b*) y el Teorema 1.39, sabemos que las funciones $f(x, 0)$ y $\left\{ \partial f_j / \partial z_j \Big|_{z=0} \right\}_j$ tienen series asintóticas, cuando $x \to \infty$ en S. Entonces, $h(x, z)$ tiene un desarrollo asintótico en potencias de x^{-1},

$$h(x, z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} h_r(z) x^{-r}, \qquad x \to \infty,$$

en la cual todas las $h_r(x)$ y sus derivadas parciales se anulan en $z = 0$, ya que hemos dicho que el desarrollo de Taylor de $h(x, z)$ en las componentes de z no tiene términos constantes ni lineales respecto a z.

La función satisface entonces las hipótesis del Corolario 3.9 y tenemos que podemos acotar de manera uniforme, para $0 < x_0 \leq |x| < \infty$,

$$\left\| h\left(x, z^{(2)}\right) - h\left(x, z^{(1)}\right) \right\| \leq \beta \left\| z^{(2)} - z^{(1)} \right\|,$$

siempre que

$$\left\| z^{(j)} \right\| \leq z_0(\beta), \quad j = 1, 2.$$

Y hemos probado que la función $h(x, z)$ satisface la condición de Lipschitz

$$\left\| h\left(x, z^{(2)}\right) - h\left(x, z^{(1)}\right) \right\| \leq \gamma^*(z_0) \left\| z^{(2)} - z^{(1)} \right\|, \tag{3.39}$$

para $\left\| z^{(1)} \right\| \leq z_0$, $\left\| z^{(2)} \right\| \leq z_0$, donde $\gamma^*(z_0)$ puede hacerse tan pequeña como queramos tomando z_0 suficientemente pequeña.

Por lo tanto es directo que la desigualdad (3.33) es cierta:

$$\begin{aligned}
&\left\| (B(x) - \Lambda)\left(z^{(2)} - z^{(1)}\right) + h\left(x, z^{(2)}\right) - h\left(x, z^{(1)}\right) \right\| \\
&\leq \| B(x) - \Lambda \| \cdot \left\| z^{(2)} - z^{(1)} \right\| + \gamma^*(z_0) \left\| z^{(2)} - z^{(1)} \right\| \\
&\leq \gamma \left\| z^{(2)} - z^{(1)} \right\|
\end{aligned}$$

para $0 < x_0 \leq |x| < \infty$ y $\|z\| \leq z_0$, ya que $\lim_{x \to \infty} B(x) = \Lambda$. □

Puede parecer que podemos cambiar la condición (b*) del Teorema 3.7 por la hipótesis de que los coeficientes del desarrollo de Taylor para $f(x, z)$ en potencias de las componentes de z tengan series asintóticas en potencias de x^{-1}. Si $f(x, z)$ es un polinomio en las componentes de z, está última hipótesis es equivalente a (b*). Sin embargo, en general (b*) es más restrictiva, como se puntualizó en el Teorema 1.40. La hipótesis más débil es claramente insuficiente para garantizar la desigualdad (3.39).

Apéndice A

Resultados auxiliares

En este apéndice se recogen los resultados auxiliares fundamentales que han sido utilizados en diferentes ocasiones en el trabajo. Salvo para el Teorema A.1, que puede no haberse encontrado en las asignaturas del Grado en Matemáticas, se ha omitido la correspondiente demostración, pues estos resultados u otros muy similares han sido utilizados en las asignaturas de la titulación.

Teorema A.1. *La ecuación*

$$AX - XB = 0, \tag{A.1}$$

donde A y B son matrices cuadradas de dimensión n y m respectivamente y X es una matriz rectangular de dimensión $n \times m$, tiene soluciones diferentes a $X = 0$ si y solo si A y B tienen algún autovalor común.

Demostración. (a) Probamos primero la necesidad. Asumimos que A y B tienen el autovalor λ en común. Sabemos que

$$0 = \det(B - \lambda I) = \det\left((B - \lambda I)^T\right) = \det\left(B^T - \lambda I\right),$$

por lo que λ también será autovalor de B^T. Es decir, existen autovectores v y w de tamaño n y m respectivamente tales que

$$Av = \lambda v, \qquad B^T w = \lambda w.$$

Esto implica

$$w^T B = \lambda w^T,$$

por lo que, si

$$X = vw^T,$$

tenemos que

$$AX - XB = Avw^T - vw^T B = \lambda vw^T - v\lambda w^T = 0,$$

y, por tanto, X es no nula y es solución de (A.1).

(b) Probamos a continuación la suficiencia. Si A y B no tienen autovalores comunes, tenemos que probar que cualquier X que satisfaga (A.1) es necesariamente nula. Sea w el autovector de B correspondiente al autovalor λ. Multiplicando (A.1) por w por la derecha obtenemos

$$AXw - XBw = AXw - \lambda Xw = (A - \lambda I)Xw = 0.$$

Como λ no es autovalor de A, el único vector que está en el núcleo de $A - \lambda I$ es el nulo y, por tanto, Xw es el vector nulo. Esto será cierto para cualquier autovector w de B. Si B tiene m autovectores linealmente independientes, entonces $X = 0$.

Si B no tiene m autovectores independientes, consideraremos los m autovectores "generalizados" de B. Estos se caracterizan por la propiedad de que si λ es un autovalor de B y w es su autovector generalizado correspondiente, entonces $(B - \lambda I)^p w = 0$ para algún entero positivo p.

Por la relación (A.1) y restando λX para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$AX - \lambda X = XB - \lambda X,$$

o, lo que es lo mismo,

$$(A - \lambda I_n)X = X(B - \lambda I_m),$$

donde I_k denota la matriz identidad de dimensión k. Si asumimos que es cierto

$$(A - \lambda I_n)^{p-1}X = X(B - \lambda I_m)^{p-1},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}(A - \lambda I_n)^p X &= (A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^{p-1}X \\ &= (A - \lambda I_n)X(B - \lambda I_m)^{p-1} \\ &= X(B - \lambda I_m)(B - \lambda I_m)^{p-1} \\ &= X(B - \lambda I_m)^p.\end{aligned}$$

Es decir, hemos probado por inducción la siguiente igualdad para cualquier

$$(A - \lambda I_n)^p X = X(B - \lambda I_m)^p$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p > 0$. Si λ es un autovalor de B, entonces para un $p > 0$ adecuado y un autovector generalizado de B correspondiente, tenemos que

$$(A - \lambda I)^p X w = 0.$$

Como λ no es autovalor de A, la matriz $(A - \lambda I)^p$ es no singular, por lo que Xw tiene que ser nulo. Es decir, la ecuación $Xz = 0$ para z se satisface para m autovectores generalizados de B independientes, lo cual es posible solo si $X = 0$. □

Teorema A.2 (Fórmula de variación de parámetros). *Sean $A(x)$ y $F(x)$ matrices de dimensión $n \times n$ holomorfas en un disco centrado en $a \in \mathbb{C}$ y suponemos que conocemos una matriz $V(x)$, de dimensión $n \times n$ y que satisface la ecuación*

$$W' = A(x)W$$

para W. Entonces existe una única solución para

$$W' = A(x)W + F(x)$$

con la condición inicial $W(a) = K$, donde K es una matriz constante de dimensión $n \times n$, y dicha solución está dada por

$$V(x)V^{-1}(a)K + V(x)\int_a^x V^{-1}(t)F(t)dt.$$

Teorema A.3 (Teorema de holomorfía bajo el signo integral). *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, sea A un subespacio medible de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \times A \longrightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que:*

(i) Para todo $z \in U$ la función $f_z : A \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_z(x) = f(z, x)$ es medible Lebesgue.

(ii) Para todo $x \in A$ la función $f_x : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_x(z) = f(z, x)$ es holomorfa en U.

(iii) Para todo $z_0 \in U$ existe un entorno V de z_0 contenido en U y una función $h : A \longrightarrow [0, \infty)$ integrable Lebesgue en A tal que

$$|f(z, x)| \le h(x) \quad \text{para todo } (z, x) \in V \times A.$$

Entonces, la función $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_A f(z, x)dx, \qquad z \in U,$$

es holomorfa en U, y además

$$F'(z) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z, x)dx, \qquad z \in U.$$

Teorema A.4 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones integrables en* $\mathbb{R}^d$ *que converge en casi todo punto hacia una función* f. *Supongamos que además existe una función* g *integrable en* $\mathbb{R}^d$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R}^d \textit{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces:

I) f *es integrable.*

II) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f| = 0$*; en particular,* $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f$.

Bibliografía

[1] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, Wiley, New York, 1977.

[2] J.F. Ritt, On the derivatives of a function at a point, Ann. Math, **18** (1916), 18–23.

[3] Y. Sibuya, Second order lineal ordinary differential equations containing a large parameter, Proc. Japan. Acad,. **34** (1958), 229–234.

[4] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1987.