CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

ACCEDUNT EIUSDEM

Problematum quorundam illustrium Constructiones.

LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JOHANNEM & DANIELEM ELZEVIER.
Academ. Typograph.

cIↄ Iↄc LIV.

lere, falsis vera miscentes. Verum à peritioribus omnia vel eversa fuisse vel contempta scimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimensio niteretur, præter unum illud, majorem esse eum inscripto sibi polygono, circumscripto minorem. Nos autem propiorem *determinationem nunc exhibemus ostendimusque, quod* duobus sumptis polygonis proportione mediis inter inscriptum circumscriptumque ipsis simile, minoris eorum perimeter circumferentiâ circuli major existit, reliquum vero polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat. *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonstraturi sumus & difficillimum & contemplatione præcipuè dignum videatur, alia tamen sunt non accuratiora modò, sed quæ & usu magis probentur; quæ sanè hic in antecessum non recensebimus, quippe in sequen-*

quentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid studiis Geometriæ conferant exposuisse proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propositi tractationem instituerimus, primùm ea tradendo quorum demonstratio consuetis Geometriæ elementis contenta est, deinde centrorum gravitatis quoque considerationem adhibendo: in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti, sed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda sit; expeditâ ratione ad Mechanicas constructiones, quæque vel subtilissimas earum minimè frustretur. Quomodo item numeros exercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum 96 eruit, per dodecagona sola comprobari queat. Ex polygonis autem laterum 10800, cum iis qui veterem insistunt viam vix hi peripheriæ termini exi-

stāt 62831852 & 62831855, ad diametrū partium 20000000, nostrâ Methodo isti prodiisse cernētur, 62831853071795 84, 62831853071795 89; semperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere perspeximus sicuti & quadratum cujusque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque constituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas subministrat, & propius quodammodo ad perfectionem insuperabilis problematis per hæc accessisse videmur. Certè ad Archimedeos peripheriæ limites constituendos, solo nunc inscripti trigoni cognito latere indigemus. E sexagintāgulo autem inter hosce eam contineri probamus 3141592653 8 & 3141592653 3, *positâ diametro partium* 1000000000 0, *cum solitâ methodo vix isti producantur* 3145, 3140.

3140. *Adeo ut triplus jam & ultra sit verarum hîc notarum numerus, sicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidẽ successu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum sui lateris triplum esse animadvertitur. Ergo posthac si qui falsò circumferentiæ magnitudinẽ definient, per numerosa polygona non refutabuntur, sed calculo brevi miniméque intricato, quemque erroris insimulare, quod hactenus ferè soliti sunt, haud facile possint. Ad hæc si quid in subtensarum Canone, quẽ emendatum haberi quantum referat omnes sciunt, in eo contexendo si quid erit admissum aut aliunde perversum irrepserit, non difficile erit horum ope restituere, cum aliâ nunc ratione ex inscriptis in circulo longitudinẽ arcuum quibus subtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio destitutis ostendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum investigare queant, ut nunquam duorum secundorum scrupulorum sit à vero dissensus, sæpe ne unius quidem tertii. Et*

hæc

hæc quidem non levia commoda visum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum Cartesium, cujus viri inventis cum Philosophia universa tum Mathesis plurimum illustrata est, nonnulla quæ huc spectent scriptis mandasse. Ea verò defuncto ipso in commentariis reperta feruntur, neque adhuc rescire potuimus quâ industriâ aut eventu hisce manum admoverit. VVillebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus extat, multo labore conscriptus, quique omnis in his est. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, si præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis superstructum est, demonstrare potuisset. Sed quas ibi pro demonstrationibus haberi postulat, propositum minimè comprobant: ipsa verò theoremata, sicut in utroque evidenti ratione nos ostendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem sequentibus meritò inserenda putavimus, quod causæ eorum à nostris pendeant inventis.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

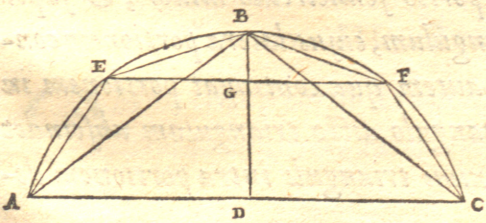
DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

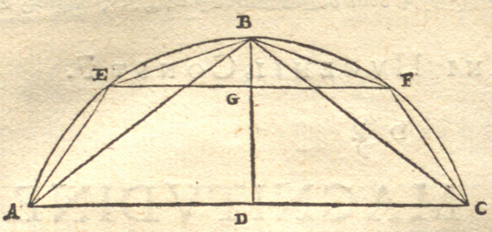
SI Circuli portioni triangulum maximum inſcribatur, & portionibus reliquis triangula ſimiliter inſcribantur, erit triangulum primo deſcriptum duorum ſimul quæ in portionibus reliquis deſcripta ſunt minus quam quadruplum.

ESto circuli portio A B C, cujus diameter B D; maximum autem inſcriptum ſit triangulum A B C, hoc eſt, quod baſin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inſcribantur triangula item maxima A E B, B F C.



Dico triangulum A B C minus eſſe quam quadruplum trian-

triangulorum A E B, B F C ſimul ſumptorum. Jungatur enim E F, quæ ſecet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus A B bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum E A, E B, major dimidiâ A B.



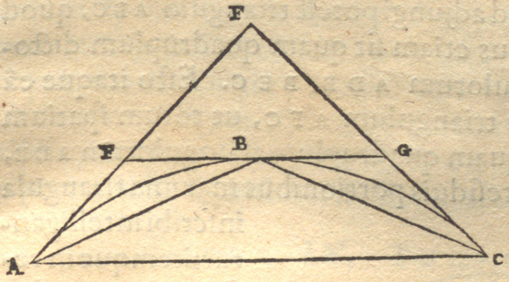
Quamobrem quadratum A B minus erit quam quadruplum quadrati E B vel E A. Sicut autem quadratum A B ad quadr. E B, ita eſt D B ad B G longitudine; quia quadratum quidem A B æquale eſt rectangulo quod à D B & circuli totius diametro continetur, quadratum verò E B æquale rectangulo ſub eadem diametro & recta B G. Minor igitur eſt B D quam quadrupla B G. Sed & A C minor eſt quam dupla E F, quoniam hæc ipſi A B æquatur. Ergo patet triangulum A B C minus eſſe quam octuplum trianguli E B F. Huic autem triangulo æquantur ſingula A E B, B F C. Ergo utriuſque ſimul triangulum A B C minus erit quam quadruplum. Quod erat oſtendendum.

THEOR. II. PROP. II.

SI fuerit circuli portio ſemicirculo minor, & ſuper eadem baſi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abſcindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem deſcripti.

Eſto

ESto circuli portio semicirculo minor A B C, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos basis rectæ A E, C E, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio semicirculo minor est. Porro ducatur F G, quæ contingat ipsam in vertice B; & jungantur A B, B C. Ostendendum est itaque, triangulum F E G majus esse dimidio trianguli A B C. Constat triangula A E C, F E G, item A F B, B G C æquicruria esse, dividique F G ad B bifariam. Utraque autem simul F E, E G, major est quam F G; ergo E F major quam F B, vel quam F A. Tota igitur A E minor quam dupla F E. Quare triangulum F E G majus erit quarta parte trianguli A E C. Sicut autem F A ad A E, ita est altitudo trianguli A B C ad altitudinem trianguli A E C, & basis utrique eadem A C. Ergo, quum F A sit minor quam subdupla totius A E, erit triangulum A B C minus dimidio triangulo A E C. Hujus verò quarta parte majus erat triangulum F E G. Ergo triangulum F E G majus dimidio trianguli A B C. Quod ostendendum fuit.

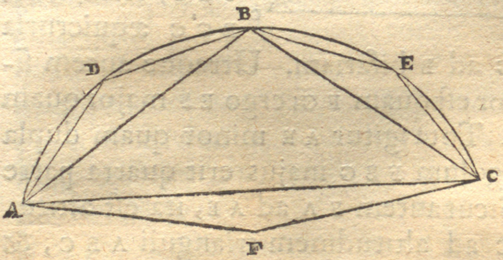


THEOR. III. PROP. III.

OMnis circuli portio ad maximum triangulum inscriptum majorem rationem habet quam sesquitertiam.

ESto Circuli portio cui maximum ſit inſcriptum triangulum A B C. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inſcribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula A D B, B E C. Itaque minus eſt triangulum A B C quam illorum ſimul quadruplum *: ac proinde ſpatium aliquod adjungi poteſt triangulo A B C, quod una cum ipſo minus etiam ſit quam quadruplum dictorum ſimul triangulorum A D B, B E C. Eſto itaque eâ ratione adjectum triangulum A F C, ut totum ſpatium A B C F minus ſit quam quadruplum triangulorum A D B, B E C. Et porro in reſiduis portionibus maxima triangula inſcribi intelligantur; itemque in reſiduis ſemper, donec portiones quibus poſtremùm inſcribentur ſimul minores ſint triangulo A C F, hoc enim fieri poteſt.

* *p 1. huj.*



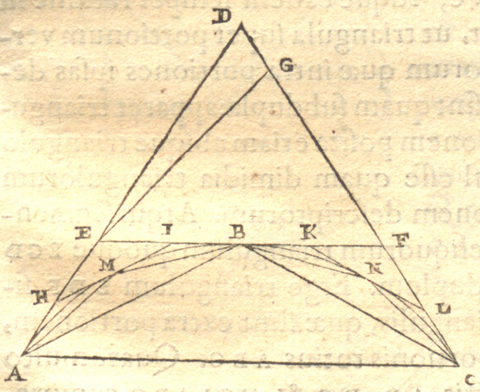
Itaque & triangula poſtremùm inſcripta ſimul triangulo A C F minora erunt. Quia autem ſpatii A B C F quarta parte majora ſunt duo ſimul triangula A D B, B E C. Rurſuſque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inſcribuntur. Et horum quartâ majora ſimiliter, quæ deinceps: atque ita continuè, ſi plura fuerint deſcripta. Erit propterea ſpatium ex quadrilatero A B C F & cæteris inſcriptis triangulis, & triente eorum, quæ poſtremo inſcripta erunt, compoſitum, majus quam ſeſquitertium ipſius quadrilateri A B C F. Hoc enim ab Archimede demonſtratum eſt, quod ſi fuerint ſpatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia ſimul

ſimul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt ſeſquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones A D B, B E C deſcripta cum triente poſtremo deſcriptorum majora erunt tertia parte ſpatii A B C F. Sed triens dictus minor eſt triente trianguli A C F. Igitur dempto illinc triente poſtremò inſcriptorum; à ſpatio autem A B C F ablato triangulo A F C, erunt triangula omnia intra portiones A D B, B E C deſcripta, majora triente trianguli A B C *. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni A B C inſcripta major quam ſeſquitertia trianguli A B C, multoque magis portio ipſa. Quod erat demonſtrandum. *33.5.Elem.

THEOR. IV. PROP. IV.

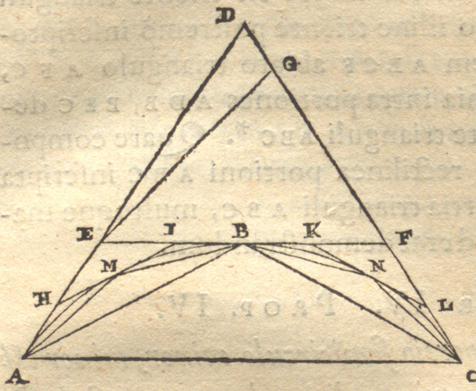
Omnis circuli portio ſemicirculo minor, minor eſt duabus tertiis trianguli eandem cum ipſa baſin habentis, & latera portionem contingentia.

Esto circuli portio ſemicirculo minor A B C, & contingant ipſam ad terminos baſis rectæ A D, C D, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem A B C minorem eſſe duabus tertiis trianguli A D C. Ducatur enim E F quę portionem contingat in vertice B, & inſcribatur ipſi triangulum maximũ A B C.



Quum igitur triangulum E D F majus ſit dimidio trianguli A B C *, manifeſtum *p 2.huj.

festum est ab illo partem abscindi posse, ita ut reliquum tamen majus sit dimidio dicti A B C trianguli. Sit igitur hoc pacto abscissum triangulum E D G. Et ducantur porro rectæ H I, K L, quæ portiones reliquas A M B, B N C in verticibus suis contingant, ipsisque portionibus triangula maxima inscribantur. Idemque prorsus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones residuæ simul minores sint quam duplum trianguli E D G. Erit igitur inscripta portioni figura quędam rectilinea, atque alia circumscripta. Et quoniam triangulum E G F majus est dimidio trianguli A B C; & rursus triangula H E I, K F L, majora quam dimidia triangulorum A M B, B N C; idque eadem semper ratione in reliquis locum habet, ut triangula super portionum verticibus constituta, eorum quæ intra portiones ipsas descripta sunt, majora sint quam subdupla: apparet triangula omnia extra portionem posita etiam absque triangulo E G D majora simul esse quam dimidia triangulorum omnium intra portionem descriptorum. Atqui segmentorum in portione reliquorum triangulum quoque E G D majus est quam subduplum. Ergo triangulum E D F simul cum reliquis triangulis, quæ sunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius A B C. Quare multo magis spatium à rectis A D, D C & arcu A B C comprehensum majus erit portionis A B C dimidio. Ac proinde



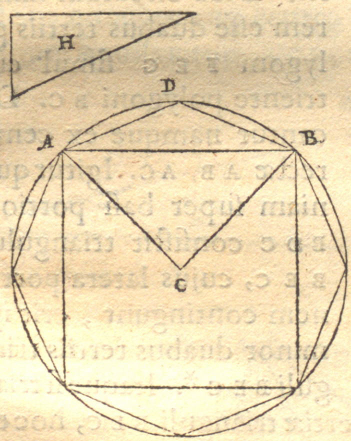
trian-

triangulum A D C majus quam portionis A B C sesquialterum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. V. PROP. V.

Omnis circulus major est polygono æqualium laterum sibi inscripto & triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero.

Esto circulus centro C; sitque ipsi inscriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum sit A B. Atque alterũ item polygonum sit inscriptum, cujus bina latera A D, D B, subtendat A B. Hoc igitur priore polygono majus est. Sit autem excessus trienti æquale H spatium. Dico circulum majorem esse polygono A D B una cum spatio H. Ducantur enim ex centro rectæ C A, C B. Quoniam igitur portio circuli A D B major est quam sesquitertia trianguli A D B sibi inscripti *; erunt portiones A D, D B, simul majores triente trianguli A D B. Quamobrem & sector C A B major erit utrisque simul quadrilatero C A D B & triente trianguli A D B. Sicut autem sector C A B ad circulum totum, ita est quadrilaterum C D B A ad polygonum A D B, & ita quoque triens trianguli A D B ad trientem excessus polygoni A D B supra polygonum A B.



* p 3. huj.

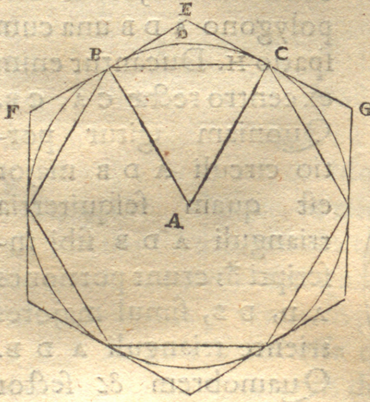
Ergo

Ergo manifestum est circulum quoque totum majorem fore polygono A D B unà cum triente excessus quo polygonum A D B superat polygonum A B, hoc est, unà cum spatio H. Quod erat demonstrandum.

THEOR. VI. PROP. VI.

Omnis circulus minor est duabus tertiis polygoni æqualium laterum sibi circumscripti & triente polygoni similis inscripti.

Esto circulus cujus centrum A, & inscribatur ipsi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum sit B C; & aliud simile circumscribatur F E G, cujus latera circulum contingant ad occursum angulorum polygoni prioris.



Dico circulum minorem esse duabus tertiis polygoni F E G simul cum triente polygoni B C. Ducantur namque ex centro rectæ A B, A C. Igitur quoniam super basi portionis B D C consistit triangulum B E C, cujus latera portionem contingunt, erit ipsa minor duabus tertiis trianguli B E C*. Itaque si triangulo A B C addantur duæ tertiæ trianguli B E C, hoc est, duæ tertiæ excessus quadrilateri A B E C supra triangulum A B C, ex utrisque compositum spatium majus erit sectore circuli A B C. Idem est autem, sive triangulo A B C addantur duæ tertiæ excessus dicti, sive addantur duæ tertiæ quadrilateri A B E C, contraque auferantur duæ tertiæ

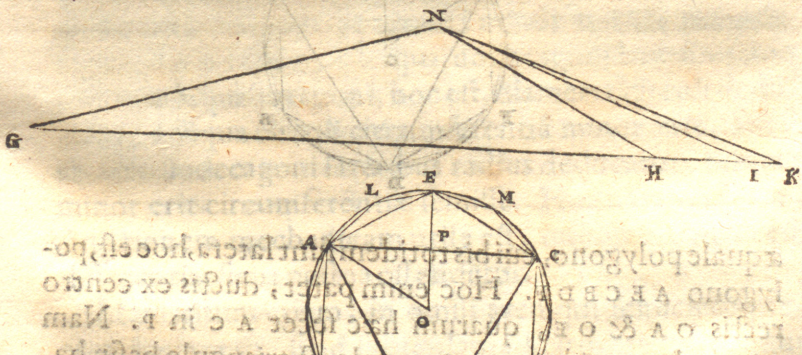
* p 4. huj.

tertiæ trianguli A B C: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri A B E C cum triente trianguli A B C. Ergo apparet sectorem A B C minorem esse duabus tertiis quadrilateri A B E C & triente trianguli A B C. Quare sumptis omnibus quoties sector A B C circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumscripti F E G & triente inscripti B C. Quod erat ostendendum.

THEOR. VII. PROP. VII.

Omnis circuli circumferentia major est perimetro polygoni æqualium laterum sibi inscripti, & triente excessus quo perimeter eadem superat perimetrum alterius polygoni inscripti subduplo laterum numero.

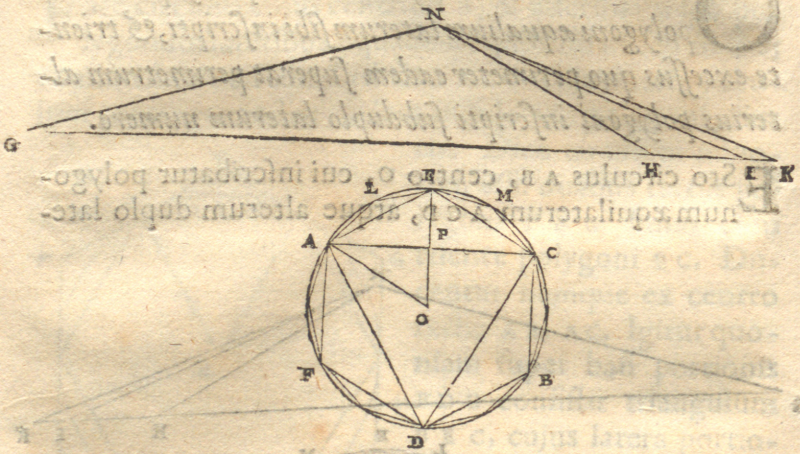
Esto circulus A B, centro O, cui inscribatur polygonum æquilaterum A C D, atque alterum duplo late-



rum numero A E C B D F. Sitque recta G I æqualis peri-

 metro

metro polygoni AECBDF, GH vero æqualis perimetro polygoni ACD. Excessus igitur perimetrorum est HI; cujus triens IK adjiciatur ipsi GI. Dico totâ GK majorem esse circuli AB circumferentiam. Inscribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum ALEMC, quod sit duplo numero laterum polygoni AECBDF. Et super lineis GH, HI, IK, triangula constituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis semidiametro circuli AB. Igitur quoniam GH basis æqualis est perimetro polygoni ACD, erit triangulum GNH



æquale polygono, cui bis totidem sunt latera, hoc est, polygono AECBDF. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis OA & OE, quarum hæc secet AC in P. Nam triangulum quidem AEO æquale est triangulo basin habenti AP & altitudinem radii OE. Quanta autem pars est triangulum AEO polygoni AECBDF, eadem est recta AP perimetri ACD. Itaque polygonum AECBDF æquabitur triangulo cujus basis æqualis perimetro ACD, altitudo

titudo autem radio E O: hoc est, triangulo G N H. Eâdem ratione, quoniam basis G I est æqualis polygoni A E C B D F perimetro, & altitudo trianguli G N I æqualis radio circuli, erit triangulum G N I æquale polygono A L E M C. Itaque triangulum H N I æquale excessui polygoni A L E M C supra polygonum A E C B D F. Trianguli autem H N I subtriplum est ex constr. triangulum I N K. Ergo hoc æquale erit dicti excessus trienti. Quare totum triangulum G N K minus erit circulo A B *. Altitudo autem trianguli æqualis est circuli semidiametro. Ergo evidens est rectam G K totâ circuli circumferentiâ minorem esse. Quod erat ostendendum. * 5. huj.

Hinc manifestum est, si à sesquitertio laterum polygoni circulo inscripti auferatur triens laterum polygoni alterius inscripti subduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus esse. Idem enim est, sive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ excessus quo ipsa superat perimetrum minorem, sive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit sesquitertium majoris perimetri minùs triente minoris. Quare si à sexdecim inscripti dodecagoni lateribus duo latera inscripti hexagoni, hoc est, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit, aut si ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ semisse. Hoc autem ad constructionem mechanicam utile est, quoniam exigua est differentia, sicut postea ostendetur.

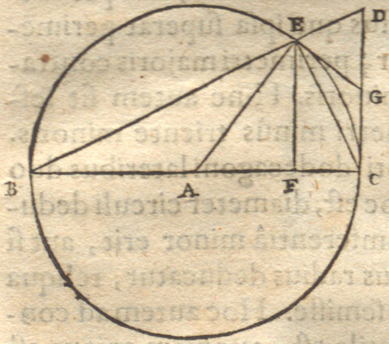
Manifestum etiam, in omni arcu qui semicircumferentiâ minor sit, si ad subtensam addatur triens excessus quo subtensa sinum superat, compositam arcu minorem esse.

 THEOR.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Circulo dato, si ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab opposito diametri termino quæ circumferentiam secet occurratq; tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab intersectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, simul arcu abscisso adjacente majores.

Esto circulus centro A, diametro B C; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat C D: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta B D, quæ circumferentiam secet in E: sitque E F diametro B C ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ C D duas tertias simul cum triente ipsius E F, arcu E C majores esse. Jungantur enim enim A E, E C; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti C D occurrat in G. Erit igitur G E ipsi G C æqualis, itemque D G; nam si centro G circumferentia describatur quæ transeat per puncta C, E, eadem transibit quoque per D punctum, quoniam angulus C E D rectus est. Ostensum autem fuit suprà, duas tertias quadrilateri A E G C unà cum triente trianguli A E C simul majores esse sectore A E C*.



* § 6. huj.

Estque quadrilaterum A E G C æquale triangulo basin habenti duplam C G, hoc est, C D: & altitudinem C A,

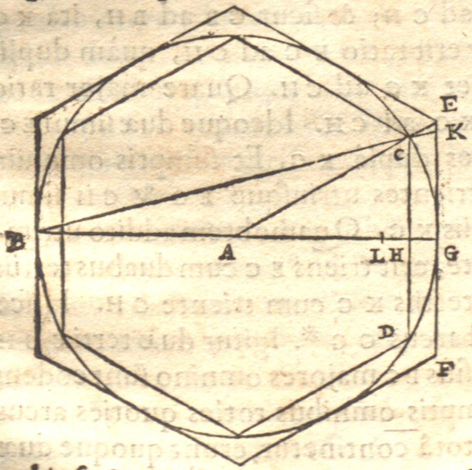
trian-

triangulum verò A E C æquale triangulo basin ipsi E F æqualem habenti & altitudinem dictam A C. Itaque apparet duas tertias quadrilateri A E G C simul cum triente trianguli A E C æquari triangulo qui basin habeat compositam ex duabus tertiis C D & triente E F, altitudinem verò radii A C. Quare ejusmodi quoque triangulum majus erit sectore A E C. Unde liquet basin ipsius, hoc est, compositam ex duabus tertiis ipsius C D & triente ipsius E F, majorem esse arcu C E. Quod erat demonstrandum.

THEOR. IX. PROP. IX.

Omnis circuli circumferentia minor est duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum sibi inscripti & triente perimetri polygoni similis circumscripti.

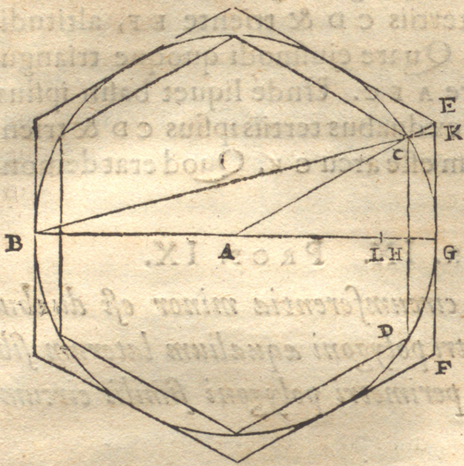
ESto Circulus cujus A centrum; & inscribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus C D: simileque aliud



circumscribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum sit E F. Dico circuli totius circumferentiam minorem esse duabus tertiis ambitus polygoni C D & triente ambitus polygoni E F. Ducatur namque diameter circuli B G, quæ simul inscripti polygoni latus C D medium dividat in H, &

 cir-

circumscripti latus E F in G, (constat autem G fore punctum contactus lateris E F,) Et ponatur H L æqualis ipsi H G, & jungantur A C, B C & producantur, occurratque B C lateri E F in K, producta autem A C incidet in E



angulum polygoni circũscripti. Quoniam igitur H L æqualis H G, erit B L dupla ipsius A H: Ideoque ut G A ad A H, ita G B ad B L. Major autem est ratio H B ad B L, quam G B ad B H; quoniam hæ tres sese æqualiter excedunt G B, H B, L B. Itaque major erit ratio G B ad B L, hoc est, G A ad A H, quam duplicata rationis G B ad B H. Sicut autem G A ad A H, ita est E G ad C H; & sicut G B ad B H, ita K G ad C H. Ergo major erit ratio E G ad C H, quàm duplicata ejus, quam habet K G ad C H. Quare major ratio E G ad K G, quam K G ad C H. Ideoque duæ simul E G, C H omnino majores duplâ K G. Et sumptis omnium trientibus, erunt trientes utriusque E G & C H simul majores duabus tertiis K G. Quamobrem addito utrimque ipsius C H triente, erit triens E G cum duabus tertiis C H, major duabus tertiis K G cum triente C H. Hisce

*Per præced. verò minor etiam est arcus C G *. Igitur duæ tertiæ C H simul cum triente ipsius E G majores omnino sunt eodem arcu C G. Unde sumptis omnibus toties quoties arcus C G circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni C D, cum triente perimetri polygoni

polygoni E F, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat ostendendum.

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor est sinus sui besse & tangentis triente.

PROBLEMA I. PROP. X.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.

MInorem esse peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam sesquiseptimam: majorem verò quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes ostendit inscripto circumscriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonstrabimus.

Quia enim latus inscripti circulo dodecagoni majus est partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc est, perimeter inscripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inscripti est radii sextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit ampliùs quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens excessus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente excessus, quo perimetrum hexagoni superat, major erit aggregato partium $62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc est, partibus 62822. Atque hisce proinde omninò major erit circuli peripheria *. Est autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit. *p 7. huj.

Rursus quoniam latus dodecagoni inscripti minus est partibus $5176\frac{2}{5}$. Erunt octo latera, hoc est, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{5}$. Item quia latus dodecagoni circum-

cumſcripti minus eſt quam 5359, erunt quatuor latera, hoc eſt, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inſcripti cum triente perimetri circumſcripti minores erunt quam $62847\frac{1}{7}$. Sed
* 9. huj. iſtis ſimul minor etiam eſt circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{7}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc eſt, quam triplam ſeſquiſeptimam. Demonſtrati itaque ſunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes ſtatuit. Eoſdem verò poſtmodum ſolius inſcripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus. Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona conſideranda ſunt. Intelligatur igitur circumſcriptum circulo polygonum aliudque inſcriptum laterum 60. Et præter hæc ſubduplo numero laterum inſcriptum, nempe trigintangulum.

Et invenitur quidem latus inſcripti ſexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 10000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693: cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ eſt ſinus arcus ęquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtenſa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ: & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad ſubtenſam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major eſt arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ ſexagies fiunt 628318350. Hiſce igitur partibus omnino major eſt circumferentia tota.

Rurſus quoniam latus inſcripti 60 anguli minus eſt quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipſius minores quam 6978128. Circumſcripti autem 60 anguli latus cum ſit minus quam 10481556, erit triens ipſius minor quam 3493852. Quibus additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{60}$ circumferentiæ, & ſexa-

gecu-

gecuplum ipsarum, hoc est 628318800 majus erit circumferentiâ totâ. Quod si verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inscripti quidem latus calculo Ludolphi Coloniensis Arithmetici nobilis inventum est partium 58177640912684919 non unâ amplius, subtenditurque duobus scrup. primis; circumscripti autem latus 58177643374063182 non unâ minus. Præterea que latus polygoni subduplo laterum numero inscripti, quod est 116355276902613523 non unâ minus. Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium 6283185307179584; minor autē quam 6283185307179589, qualium radius 1000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inscripti circumscriptiq; polygoni istius lateribus, invenietur tantùm majorem esse peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum ampliùs quam duplum numerum esse à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita se habet, semperque evenire necesse est quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quæ postea trademus, triplum numerum notarum facilè obtineri apparebit.

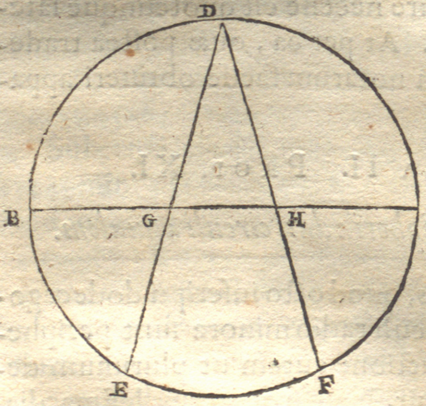
PROBLEMA II. PROP. XI.

Rectam sumere peripheriæ dati circuli æqualem.

OStensum est superius, quod octo inscripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora sunt peripheriâ dimidiâ. In constructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam si quatermillesima diametri pars accedat longitudini sic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod sic fiet manifestum. Quarum partium radius est 10000, earum latus dodecagoni inscripti circulo est amplius quam $5176\frac{3}{8}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui si addantur partes 5, hoc est, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem esse circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem dodecagoni inscripti facilè invenitur, quia radius peripheriæ sextantem subtendit. Estque hæc ratio accuratior quam si triplâ sesquiseptimâ utamur. Nam secundùm eam excedetur peripheriæ longitudo ampliùs quam $\frac{1}{3000}$ diametri.

ALITER.

ESto datus circulus cujus BC diameter. Dividatur semicircumferentia BC bifariam in D. reliqua verò trifariam in E & F. Et jungantur DE, DF, quæ secent diametrum in G & H. Erit trianguli GDH latus alterum unà cum basi GH quadrante BD exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{3000}$ diametri BC. Sciendum est enim fieri DG vel DH duobus inscripti dodecagoni lateribus æquales. GH autem lateri dodecagoni circumscripti. Unde quidem junctas DG & GH majores esse constat quadrante BD. Nam quia per 8. huj. octo latera dodecagoni circulo inscripti cum quatuor lateribus circumscripti majora sunt peripheriâ totâ, ideo sumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inscripti cum latere uno circumscripti majora peripheriæ qua-

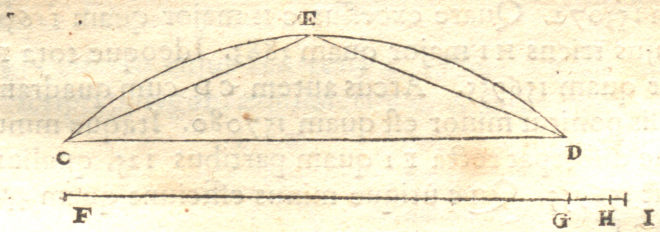


quadrante. Porro quoniam latus inscripti dodecagoni minus est quam partium 51764 qualium B C 200000: erunt latera duo, hoc est, G D, minor quam 103528. Circumscripti autem dodecagoni latus minus est partibus 53590, ipsa nimirum G H. Itaque junctæ unà D G, G H efficiunt minus quam 157118. At quadrantem B D constat ex præcedentibus majorem esse quam 157079. Ergo differentia minor est quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri B C.

PROBLEMA III. PROP. XII.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem sumere.

ESto datus circumferentiæ arcus C D, primùm quadrante minor, cui rectam æqualem sumere oporteat. Dividatur arcus C D bifariam in E, sitque subtensæ C D æqualis recta F G. Duabus verò C E, E D, quæ subten-

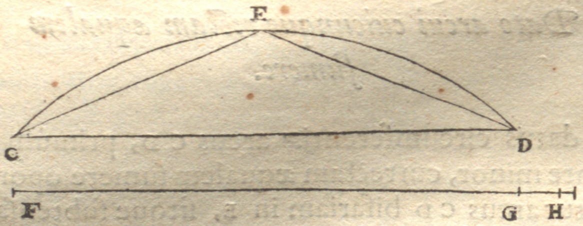


dunt arcus dimidios, æqualis F H. Et ipsi F H jungatur H I triens excessus G H. Erit tota F I arcui C D çqualis ferè: adeò ut unâ sui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura sit, etiamsi arcus C D quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam si

 fuerit

fuerit datus non major peripheriæ ſextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{6000}$ ſui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem eſſe arcubus rectas eo modo inventas conſtat ex Theoremate 7. huj. De quantitate autem differentiæ eſt oſtendendum.

Primùm itaque ponendo arcum C D quadranti peripheriæ æqualem, erit C D recta, hoc eſt, F G, latus quadrati circulo inſcripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. C E autem vel E D latus inſcripti octogoni, ideoque major quam 76536.



Eſt autem duplæ E D æqualis F H. Ergo hæc major quam 153072. Quare exceſſus G H major quam 11650: Et hujus triens H I major quam 3883. Ideoque tota F I major quam 156955. Arcus autem C D cum quadranti æqualis ponitur minor eſt quam 157080. Itaque minus ab hoc diſcrepat recta F I quam partibus 125, qualium ipſa eſt 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1290}$ ipſius F I.

Si verò ſextans peripheriæ ſit arcus C D, erit recta C D, hoc eſt, F G, latus hexagoni inſcripti, ideoque partium 10000, & C E vel E D latus dodecagoni, ac proinde major quam $5176\frac{3}{8}$. cujus dupla F H major quam $10352\frac{3}{4}$. unde G H major quam $352\frac{3}{4}$; & H I major quam $117\frac{7}{12}$. Tota igitur F I major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem C D, ſextans

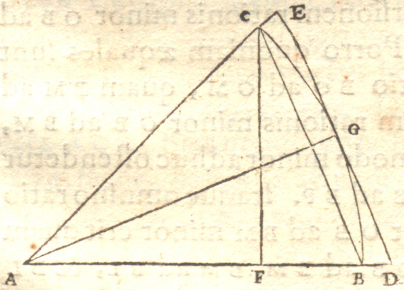
peri-

peripheriæ, minor est quam 10472. Ergo deficiunt lineæ FI partium earundẽ pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quę non æquant $\frac{1}{6000}$ FI. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus est in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimensione uti voluerimus; sed numero pares: Earumque partium subtensis simul sumptis adjungendus est triens excessus quo ipsæ superant aggregatum earum quæ arcubus duplis subtenduntur. Ita namque componetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, si arcus reliqui ad semicircumferentiam longitudo inveniatur aut supra eandem excessus, aut reliqui ad circumferentiam totam, si dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

THEOR. X. PROP. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inscripti, proportione medium est inter latus polygoni similis circumscripti, & dimidium latus polygoni inscripti subduplo laterum numero.

IN circulo cujus centrum A, radius AB, sit latus inscripti polygoni æquilateri BC; & latus circumscripti similis polygoni DE ipsi BC parallelum. Ergo producta AB transibit per D, & AC per E. Et si ducatur CF ipsi AB ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inscripti subduplo numero



laterum. Itaque ostendendum est, BC mediam esse proportione inter E D & C F. Ducatur A G, quæ dividat E D bifariam, itaque erit ipsa quoque circuli semidiameter, & æqualis A B. Et quoniam est ut E D ad C B, sic D A ad A B, hoc est, D A ad A G; sicut autem D A ad A G, ita B C ad C F, propter triangulos similes D A G, B C F. Erit proinde ut E D ad C B, ita quoque C B ad C F. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Esto linea B C divisa æqualiter in R; & inæqualiter in F, sitque segmentum majus F C; & fiat B O æqualis utrique simul B C, C F; B M verò utrique B C, C R. Dico majorem esse rationem R B ad B F, quam triplicatam ejus, quam habet O B ad B M. Sumatur enim ipsi O M æqualis utraque harum M L, L P. Quoniam igitur

M O ipsi R F æqualis est, (nam hoc ex constructione intelligitur) erit P O tripla ipsius F R. Sed & B M tripla est B R. Ergo ut B R ad B M, ita F R ad P O. Et permutando ut B R ad F R, sic B M ad P O. Major autem est B O quam B M. Ergo major erit ratio B O ad O P, quam B R ad R F: & per conversionem rationis minor O B ad B P, quam R B ad B F. Porro quoniam æquales sunt O M, M L, major erit ratio B O ad O M, quam B M ad M L: & per conversionem rationis minor O B ad B M, quam M B ad B L. Eodem modo minor adhuc ostendetur ratio M B ad B L, quam L B ad B P. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet O B ad B M minor erit quam composita ex rationibus O B ad B M, B M ad B L, & B L ad B P, hoc est, quam ratio O B ad B P. Major autem erat

erat R B ad B F, quam O B ad B P. Ergo omnino major erit ratio R B ad B F, quam triplicata rationis O B ad B M. Quod erat propositum.

THEOR. XI. PROP. XIV.

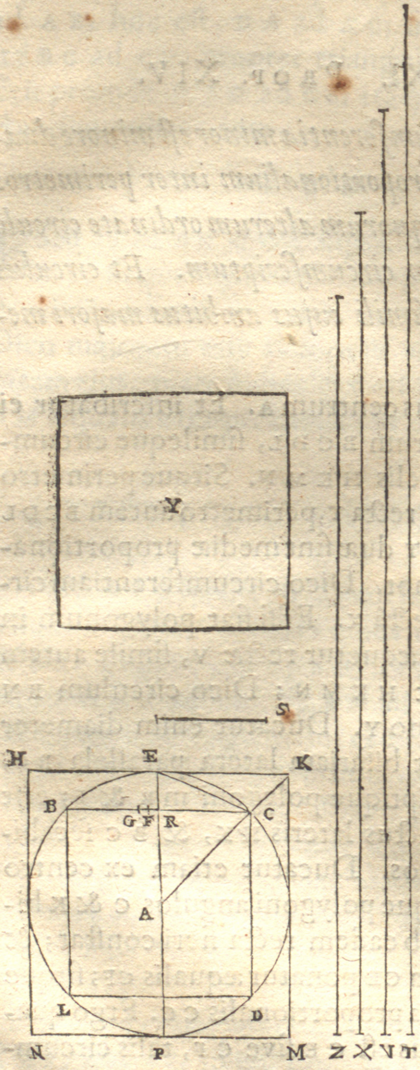
Omnis circuli circumferentia minor est minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum similium, quorum alterum ordinate circulo inscriptum sit, alterum circumscriptum. Et circulus minor est polygono istis simili cujus ambitus majori mediarum æquetur.

Esto circulus B D, cujus centrum A. Et inscribatur ei polygonum æquilaterum B C D L, simileque circumscribatur lateribus parallelis H K M N. Sitque perimetro polygoni H K M N æqualis recta T, perimetro autem B C D L æqualis Z. Et inter Z & T duæ sint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli B D minorem esse rectâ X. Et si fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, simile autem sit polygono B C D L aut H K M N; Dico circulum B N minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli F E, quæ dividat bifariam latera parallela B C, H K, inscripti circumscriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris H K, & B C secabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta A C K, quæ utriusque polygoni angulos C & K bifariam secet, nam hoc ab eadem recta fieri constat; & jungatur C E. Ipsi autem C E ponatur æqualis C F; sitque duabus his C R, C F tertia proportionalis C G. Ergo qualis polygoni inscripti latus est C E sive C F, talis circumscripti latus erit C G*. Ideoque duæ tertiæ C F cum *p 13. huj.
triente

*p 9. huj. triente C G simul majores erunt arcu E C *. Sit autem duabus tertiis C F cum triente C G æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu E C.

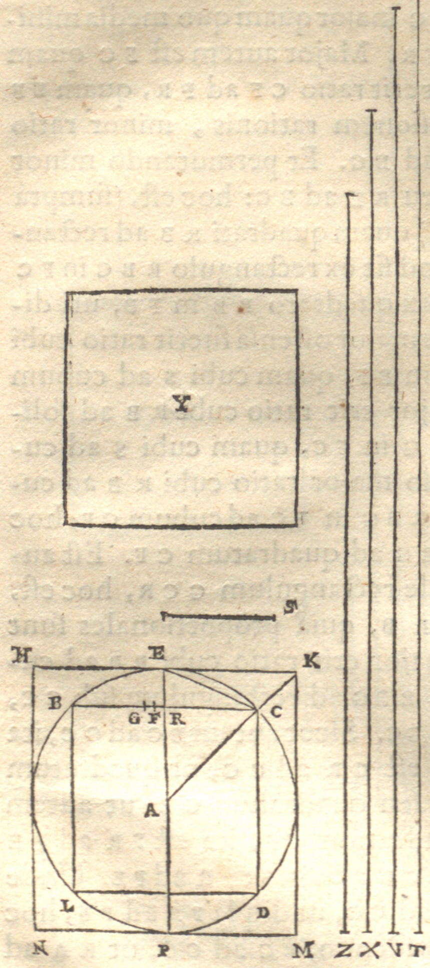
Et quoniam se habet C R ad C F, ut C F ad C G; erit quoque dupla C R una cum C F ad triplam C R, hoc est, utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R, ut dupla C F una cum C G ad triplam C F: vel sumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ C F unà cum $\frac{1}{3}$ C G ad C F, hoc est, ut S ad C F. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R eadem erit triplicatæ rationi S ad C F. Major autem est ratio R B ad B F quàm triplicata ejus, quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R *. Ergo major eadem ratio R B ad B F quam triplicata ejus quam habet S ad C F, hoc est, quam cubi S ad cubum C F. Sicut autem R B ad B F, ita est cubus R B ad id quod fit ex quadrato

*p lemma præc.



drato R B in B F. Ergo major quoque ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F. Quadrato autem R B in B F minus est rectangulum sub R B, B G, in F C; quod sic ostenditur. Quia enim proportionales sunt R C, C F, C G, Erit id quo major mediam excedit, hoc est, F G major quam quo media minimam, hoc est, quam F R. Major autem est F C quam F B. Ergo omnino major erit ratio C F ad F R, quam B F ad F G. Et per conversionem rationis, minor ratio F C ad C R, quam F B ad B G. Et permutando minor F C ad F B quam C R seu R B ad B G: hoc est, (sumptâ communi altitudine B R) quam quadrati R B ad rectangulum R B G. Unde quod fit ex rectangulo R B G in F C minus erit quam quod ex quadrato R B in F B, uti dictum fuit. Quum itaque major ostensa fuerit ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F; omnino quoque major erit ratio cubi R B ad solidum sub rectangulo R B G in F C, quam cubi S ad cubum C F. Et permutando major ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G in F C ad cubum C F; hoc est, quam rectanguli R B G ad quadratum C F. Est autem quadrato C F æquale rectangulum G C R, hoc est, rectangulum sub G C, R B, quia proportionales sunt C R, C F, C G. Itaque major erit ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G ad rectangulum sub G C, R B, hoc est, quam B G ad G C. Sicut autem B G ad G C, ita R C ad E K. Quia enim est C R ad C G, ut quadratum C R ad quadratum C F seu quadratum C E: ut autem quadratum C R ad quadratum C E, ita est P R ad P E diametrum: Erit idcirco C R ad C G, ut P R ad P E. Unde dupla C R, hoc est, C B ad C G, ut dupla P R ad P E, hoc est, ut P R ad P A. Et dividendo, B G ad G C, ut R A ad A P, seu A E, hoc est, ut R C ad E K, quod dicebamus.

Itaque major quoque ratio cubi RB ad cubum S, hoc est, ratio triplicata RB ad S, quam RC ad EK. Est autem S major ostensa arcu EC. Ergo omnino major erit ratio triplicata RB seu RC ad æqualem arcui EC, quam RC ad EK. Sicut autem RC ad arcum EC, ita est perimeter polygoni BCDL, hoc est, linea Z ad circumferentiam circuli BD; Et sicut RC ad EK, ita perimeter polygoni BCDL ad perimetrum polygoni HKMN, hoc est, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam BD, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem est rationi Z ad T. Itaque major est ratio ipsius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonstrandum.



Sciendum est autem ipsam X minorem esse duabus tertiis Z & triente T: hoc est, duabus tertiis peri-

metri

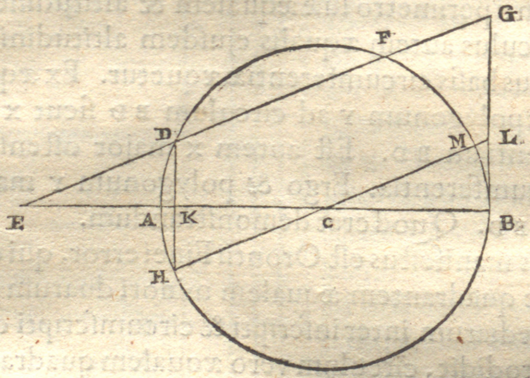
metri polygoni inſcripti & triente circumſcripti, quibus alioqui minorem eſſe circuli circumferentiam conſtat ex præcedentibus. Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum ſecundùm Arithmeticam proportionem, quæ major eſt minore mediarum ſecundum proportionem Geometricam. Jam verò & de polygono Y demonſtrabimus, ipſum videlicet circulo B D majus eſſe. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum ſimile H K M N rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. H K M N ipſi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. H K M N rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc eſt, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum H K M N ad circulum B D, ita eſt perimeter ipſius polygoni, hoc eſt, linea T ad circuli B D circumferentiam; quoniam polygonum æquale eſt triangulo baſin habenti perimetro ſuæ æqualem & altitudinem radii A E, circulus autem æqualis ejuſdem altitudinis triangulo cujus baſis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum B D ſicut X ad circumferentiam B D. Eſt autem X major oſtenſa quam B D circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo B D. Quod erat demonſtrandum.

Ex his manifeſtus eſt Orontii Finei error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inſcripti & circumſcripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

SI inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum secet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abscisso majorem.

ESto descriptus circulus centro C, cujus diameter A B. Hæc autem producatur versus A, interque ipsam & circumferentiam ponatur E D recta radio A C æqualis. Quæ producta secet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem B G majorem



esse arcu B F. Ducatur enim per centrum recta H L parallela E G, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti verò B G in L. Et jungatur D H, quæ diametrum secet in K. Similes itaque sunt trianguli E D K, C H K, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqua-

æqualem angulo C. Sed & latus ED æquale est lateri HC, suntque hæc latera æqualibus angulis subtensa. Ergo æquale etiam latus DK lateri KH. Itaque CA secat bifariam ipsam DH, itemque arcum DAH. Arcus igitur DH sive huic æqualis FM duplus est ad arcum AH. Ipsi autem AH æqualis est arcus MB. Igitur arcus FB triplus erit ad arcum AH. Porrò quoniam HK sinus est arcus HA, ejusdemque tangenti æquatur LB, Erunt duæ tertiæ HK & triens LB simul majores arcu AH*. *9. huj.
Quare sumptis omnium triplis erit dupla HK, hoc est, HD sive GL unà cum LB major arcu AH triplo, hoc est, arcu FB. Apparet igitur totam GB arcu FB majorem esse.

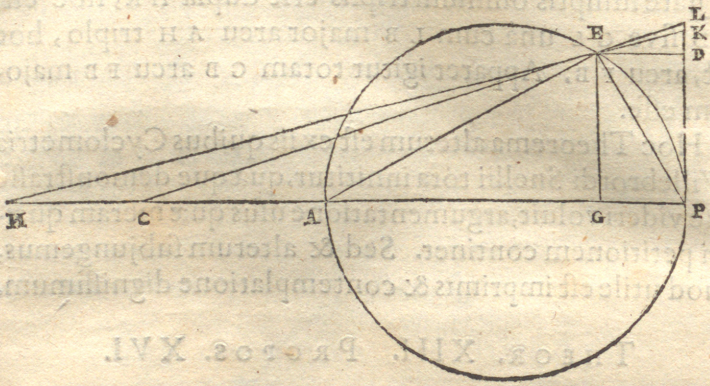
Hoc Theorema alterum est ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonstrasse ipse videri voluit, argumentatione usus quæ meram quæsiti petitionem continet. Sed & alterum subjungemus, quod utile est imprimis & contemplatione dignissimum.

THEOR. XIII. PROPOS. XVI.

SI diametro circuli semidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum secet, occurratque tangenti circulum ad terminum diametri oppositum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abscisso minorem.

ESto circulus, cujus diameter AB; quæ producatur, & sit AC semidiametro æqualis. Et ducatur recta CL, quæ circumferentiam secundò secet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam BL arcu BE minorem esse. Jungantur enim AE, EB, positâque AH ipsi

ipsi A E æquali ducatur H E & producatur, occurratque tangenti in K. Denique sit E G diametro A B ad angulos rectos, E D verò tangenti B L. Quoniam igitur isosceles est triangulus H A E, erunt anguli inter se æquales H & H E A. Quia autem angulus A E B rectus est, etiam recto æquales erunt duo simul H E A, K E B. Verùm duo quoque isti H & H K B uni recto æquantur, quoniam in triangulo H K B rectus est angulus B. Ergo demptis utrimque



æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo H E A, relinquentur inter se æquales anguli K E B, H K B. Triangulus igitur isosceles est K B E, ejusque latera æqualia E B, B K. Est autem B D æqualis E G. Ergo D K differentia est quâ B E excedit E G. Porrò quoniam est A G ad A E, ut A E ad A B, erunt duæ simul A G, A B majores duplâ A E*. Ideoque A E, hoc est, A H minor quam dimidia utriusque simul A G, A B; hoc est, minor quam C A cum dimidia A G. Quare ablatâ utrimque C A, erit C H minor dimidiâ A G. C A verò dimidiâ A G major est. Ergo si addatur A C ad A G, erit tota C G major

*25.5.Elem.

major quam tripla ipsius C H. Quia autem ut H G ad G E, ita est E D ad D K; ut autem G E ad G C, ita L D ad D E: Erit ex æquo in proportione turbata ut H G ad G C, ita L D ad D K. Et per conversionem rationis & dividendo, ut G C ad C H, ita D K ad K L. Ergo etiam D K major quam tripla K L. Erat autem D K excessus ipsius E B supra E G. Ergo K L minor est triente dicti excessus. K B autem æqualis est ipsi E B subtensæ. Ergo K B unà cum K L, hoc est, tota L B omnino minor erit arcu B E *. Quod erat demonstrandum. *$\frac{}{}$ 7. huj.

Perpenso autem Theoremate præcedenti, liquet non posse sumi punctum aliud in producta B A diametro, quod minus à circulo distet quam punctum C, eandemque servet proprietatem, ut nimirum ductâ C L fiat tangens intercepta B L semper minor arcu abscisso B E.

Porrò usus hujus Theorematis multiplex est, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita sint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui subtensa assignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata sunt.

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major sit, minor autem quam ejusdem sesquialtera.

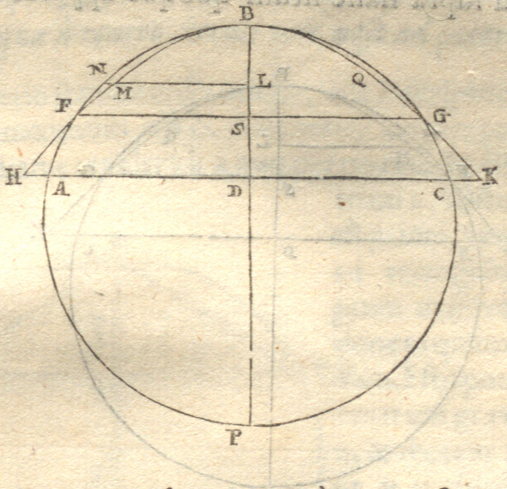
Esto circuli portio A B C, (ponatur autem semicirculo minor, quoniam cæteræ ad propositum non faciunt) & diameter portionis sit B D, quæ bifariam secetur in E. Itaque ostendendum est primò centrum gravitatis

tatis portionis A B distare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro situm sit, alibi ostendimus. Ducatur per E recta basi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur K I, H L basi A C ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, constituant rectangulum K L. Quoniam igitur portio semicirculo minor est, constat rectanguli dicti dimidium F L contineri intra segmentum A F G C, atque insuper spatia quædam A F I, L G C Alterum verò rectanguli K L semissem K G complecti segmentum F B G unà cum spatiis F B K, B G H. Quæ spatia quum sint tota supra rectam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum supra eandem situm erit. Est autem E punctum in ipsa F G centrum grav. totius rectanguli K L. Igitur spatii reliqui B F I L G B centrum grav. erit infra rectam F G. Sed & spatiorum A F I, L G C commune gravitatis centrum est infra eandem F G. Ergo magnitudinis ex spatiis hisce & dicto spatio B F I L G B compositæ, quæ est portio ipsa A B C, centrum gravitatis infra lineam F G reperiri necesse est, ideoque infra E punctum.

Idem verò diameter B D secetur nunc in S, ita ut B S sit sesquialtera reliquæ S D. Dico centrum grav. portionis A B C minus distare à vertice B quam punctum S. Sit enim B D P totius circuli diameter. & ducatur per S recta basi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis B D, rectum verò latus æquale S P. Et occurrat basi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum F S æquale est rectangulo

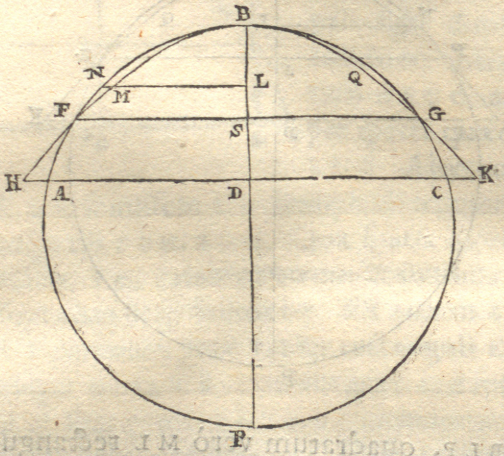
B S P,

B S P, hoc est, ei quod sub B S & latere recto parabolæ continetur, transibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ B F, B G intra circumferentiam cadent, sed reliquæ F H, G K erunt exteriores. Hoc enim ostenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ N L, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum N L æquale est re-



ctangulo B L P, quadratum verò M L rectangulo contento lineis B L, S P: rectangulum autem B L P majus eo quod sub B L, S P continetur: erit quadratum N L majus quadrato M L, & N L linea major quam M L. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ B F totam extra parabolam ferri necesse est, eâdemque ratione partem B G. Rursus quia rectangulum B D P æquale est quadrato D A; rectangulum verò sub B D, S P contentum quadrato D H; erit H D major quam A D potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumcumferentiæ F A, itemque G C intra parabolam cadent. Fiunt igitur ſpatia quædam F N B M, & B Q G, itemque alia H F A, G C K. Quorum hæc cum tota ſint infra lineam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis H B K centrum grav. eſt in ipſa F G, nimirum S punctum*. Ergo partis reliquæ A F M B Q G C centrum grav. erit ſupra rectam F G. Sed ſupra hanc ſitum quoque apparet centrum

*8. lib. 2. Archim. de Æquipond.



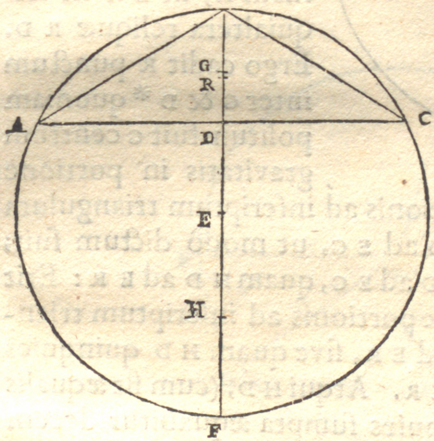
grav. ſpatiorum F M B N, B Q G, quum tota ſint ſupra ipſam F G. Ergo & ſpatii ex hiſce duobus & A F M B Q G C compoſiti, hoc eſt, portionis circuli A B C centrum grav. ſupra lineam F G reperietur: quumque ſit in B D diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat oſtendendum.

THEOR.

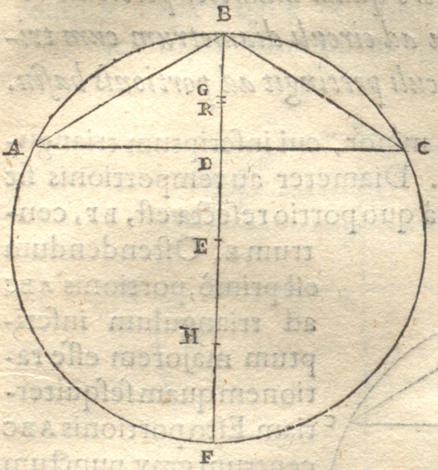
THEOR. XV. PROPOS. XVIII.

Circuli portio semicirculo minor ad inscriptũ triangulum maximum majorẽ rationem habet quam sesquitertiam, minorem verò quam diameter portionis reliquæ tripla sesquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis basin.

Sit portio semicirculo minor, cui inscriptum triangulum maximum A B C. Diameter au temportionis sit B D; & diameter circuli à quo portio resecta est, B F, centrum E. Ostendendum est primò, portionis A B C ad triangulum inscriptum majorem esse rationem quam sesquitertiam. Esto portionis A B C centrum grav. punctum G, & secetur D F in H, ut sit H D dupla reliquæ H F.



Quoniam igitur F B est dupla E B; D B autem minor quam dupla G B. Erit major ratio F B ad B D, quam E B ad B G. Et per conversionem rationis, minor B F ad F D, quam B E ad E G. Et permutando minor B F ad B E, (quæ proportio dupla est) quam F D ad E G. Igitur F D major est quam dupla E G. Ipsius autem F D duas tertias continet H D. Ergo H D major est quam sesquitertia E G. Sicut autem H D ad E G, ita eſt portio A B C ad inſcriptum ſibi triangulum: hoc enim antehac demonſtravimus in Theorematis de Hyperboles Ellipſis & Circuli quadratura. Itaque major eſt ratio portionis ad inſcriptum triangulum A B C quam ſeſquitertia.



Quod autē ad triangulum A B C portio minorem habeat rationem quam tripla ſeſquitertia ipſius D F ad diametrum circuli B F unà cum tripla E D, id nunc oſtendemus. Secetur diameter portionis in R, ut B R ſit ſeſquialtera reliquæ R D. Ergo cadit R punctum inter G & D * quoniam poſitum fuit G centrum gravitatis in portione A B C. Quumque portionis ad inſcriptum triangulum eadem ſit ratio, quæ H D ad E G, ut modò dictum fuit; minor autem ſit ratio H D ad E G, quam H D ad E R: Erit propterea minor quoque portionis ad inſcriptum triangulum ratio quam H D ad E R, ſive quam H D quinquies ſumpta ad quintuplam E R. Atqui H D, (cum ſit æqualis duabus tertiis D F) quinquies ſumpta æquabitur decem tertiis, hoc eſt, triplæ ſeſquitertiæ D F. E R verò quæ continet E D & duas quintas ipſius D B, ſi quinquies ſumatur, æquabitur duplæ B D & quintuplæ E D; hoc eſt, duplæ totius E B atque inſuper triplæ E D. Igitur apparet portionem A B C ad inſcriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam ſeſquitertiam D F ad duplam E B,

* 5 præced.

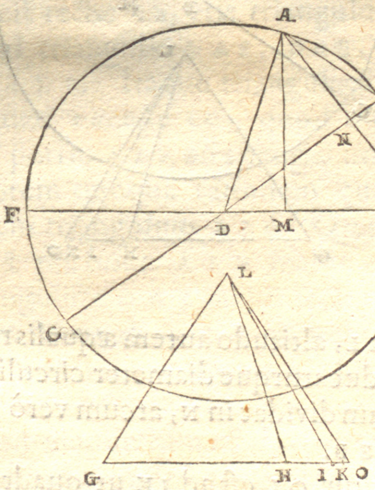
hoc

hoc est, diametrum B F, unà cum tripla E D. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XVI. PROPOS. XIX.

ARcus quilibet semicircumferentiâ minor, major est suâ subtensâ simul & triente differentiæ quâ subtensa sinum excedit. Idem verò minor quam subtensa simul cum ea quæ ad dictum trientem sese habeat, ut quadrupla subtensa juncta sinui ad subtensam duplam cum sinu triplo.

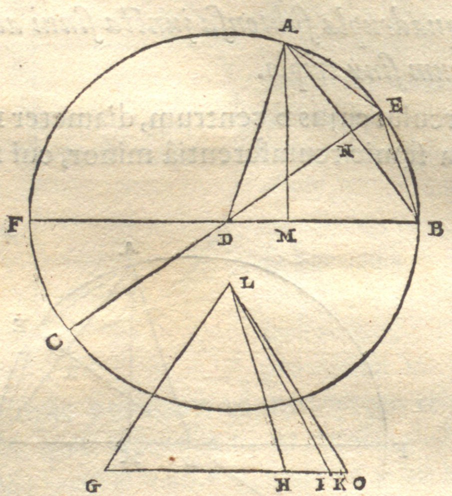
ESto circulus cujus D centrum, diameter F B. Et sit arcus B A semicircumferentiâ minor, cui subtensa du-



catur B A, sinus autem A M: quæ nimirum diametro F B sit ad angulos rectos. Porro ipsi A M sit æqualis recta G H,

 & G I

& G I æqualis subtensæ A B. Excessus igitur est H I; cujus triens I K ipsi G I adjiciatur. Ostendendum est primò, arcum A B totâ G K majorem esse. Hoc autem ex Theoremate 7. est manifestum. At cum ipsi G I additur I O quæ ad I K trientem ipsius H I rationem habeat, quam quadrupla G I unà cum G H ad duplam G I cum tripla G H. Dico totam G O arcu A B majorem esse. Constituantur enim super lineis G H, H I, I O, triangula quorum com-



munis vertex sit L, altitudo autem æqualis radio D B. Et jungatur D A, ducaturque diameter circuli C E quæ rectam A B bifariam dividat in N, arcum verò A B in E. Et jungantur A E, E B.

Quoniam igitur O I est ad I K ut quadrupla G I unà cum G H ad duplam G I cum tripla G H; sumptis consequentium triplis erit O I ad I H (hæc enim tripla est I K,) ut quadrupla G I unà cum G H ad sexcuplam G I cum noncupla

cupla G H. Et componendo, O H ad H I, ut decupla utriusque I G, G H ad sexcuplam I G cum noncupla G H: vel sumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum simul G I, G H ad duplam G I cum tripla G H. Est autem eadem ratio linearum G I ad G H, hoc est, B A ad A M, quæ B D ad D N, propter similes triangulos B A M, B D N. Ergo etiam O H ad H I, ut $\frac{10}{3}$ utriusque simul B D, D N ad duplam B D cum tripla D N; hoc est, ut $\frac{10}{3}$ N C ad diametrum E C cum tripla D N. Hac autem ratione minor est ratio portionis A E B ad A E B triangulum *. Ergo dictæ portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam O H ad H I, hoc est, quam trianguli O H L ad triangulum I H L. Triangulum autem I H L æquale est triangulo A E B. Quod sic ostenditur. Triangulum enim G H L æquale est triangulo D A B, quoniam bases & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam G I æqualis est rectæ A B, erit triangulum G I L æquale duobus simul triangulis D A E, D B E, hoc est, quadrilatero D A E B. Itaque triangulum H I L triangulo A E B æquari necesse est, quod dicebamus. Habebit itaque portio A E B ad triangulum sibi inscriptum A E B minorem quoque rationem quam triangulum O H L ad idem triangulum A E B. Quamobrem triangulum O H L portione A E B majus erit. Et totum proinde triangulum O G L majus sectore D A E B. Altitudo autem trianguli G L O æqualis est radio D B. Ergo basis G O major erit arcu A B. Quod erat ostendendum.

*8 *præced.*

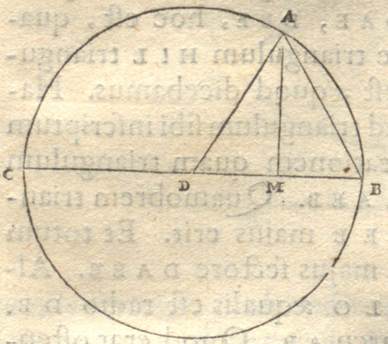
Ex his autem manifestum est de tota quoque circumferentia pronunciari posse, quod, *Si circulo inscribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius sit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, composita ex his circuli circum-*

cumferentiâ minor erit. Eidem verò majori perimetro si linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem sese habeat, sicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, composita circumferentiam circuli excedet.

PROBLEMA IV. PROPOS. XX.

Circumferentiæ ad diametrum rationem investigare; & ex datis inscriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illæ subtenduntur.

Esto circulus centro D, cujus diameter C B, & sit arcus B A sextans circumferentiæ, cui subtensa ducatur A B, itemque sinus A M. Positâ igitur D B semidiametro partium 100000, totidem quoque erit subtensa B A. A M verò partium 86603 non unâ minùs, quippe semissis lateris trianguli æquilateri circulo inscripti.



Hinc excessus A B supra A M fit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipsi A B 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu A B. Et hic primus est minor terminus, quo postea alium vero propiorem inveniemus. Priùs autem major quoque terminus secundùm Theorema præcedens inquirendus est.

Tres nimirum sunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus est partium duplæ A B & triplæ A M qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque

quoque observandum ut minor sit, idemque in cæteris prout dicetur) secundus quadruplæ A B & simplæ A M qui 486603 vero maj. Et tertius triens excessus A B supra A M, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad A B 100000 fit 104727, major numero partium, quas continet arcus A B, peripheriæ sextans.* Jam igitur invenimus longitudinem arcus A B secundùm minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longè propior vero est, cum vero proximus sit 104719. *8 præced.

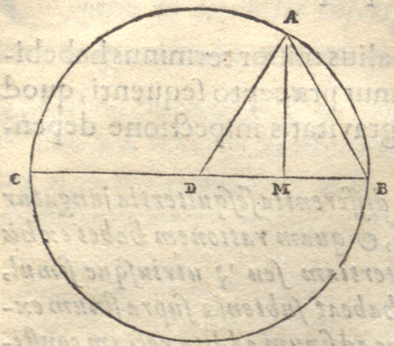
Sed ex utroque istorum alius minor terminus habebitur priore accuratior si utamur præcepto sequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inspectione dependet.

Inventorum terminorum differentia sesquitertia jungatur duplæ subtensæ & sinui triplo, & quam rationem habet ex his composita ad triplam sesquitertiam seu $\frac{10}{3}$ utriusque simul, sinus, subtensæque, eandem habeat subtensæ supra sinum excessus ad aliam quandam; Hæc ad sinum addita rectam constituet arcu minorem.

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum est $261\frac{1}{3}$. Estque rursus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus est partium duplæ A B & triplæ A M & sesquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriusque simul A B, A M, 622008 vero minor. Tertius denique excessus A B supra A M, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis est 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium A M $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu A B. Quare sexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ sunt arcu A B, earum sexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque

 cir-

circumferentiæ ad diametrum ratio minor est quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde constat minorem utique esse quam triplam sesquiseptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani error per hæc refutatur, qui scripsit peripheriam majorem esse partibus 314182 qualium rad. 100000.



Esto nunc arcus A B $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit A M, semissis lateris quadrati circulo inscripti, partium 7071068, non unâ minùs, qualium radius D B 10000000. A B verò latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad similitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus A B 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rursus terminus minor accuratior 7853885. Unde constat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus A B longitudine minus distet quam partibus 85; (Est enim arcus A B, per ea quæ supra ostendimus, major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos scrupulos secundos, hoc est, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifestum est, si trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem istum terminum paulò antè, nunquam duobus scrupulis secundis

ſecundis aberraturos; etiamſi æqualia inter ſe fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo D A M.

Si verò ea ſit ratio lateris D M ad M A, ut angulus A D M non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii ſcrupuli error erit. Poſito enim arcu A B $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit A M ſemiſſis lateris octanguli æquilateri circulo inſcripti partium 38268343, non unâ minùs. A B verò latus ſexdecanguli 39018064 non unâ ampliùs, qualium radius D B 100000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus A B invenitur partium 39267914. Terminus autem major 39269914 8. Et ex his minor rurſus 39269901 0. Conſtat autem ex ſupra demonſtratis arcum A B $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem eſſe quam 392699081, quas terminus major ſuperat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno ſcrupulo tertio, hoc eſt, $\frac{1}{7776000000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major eſt utique quam 6000000000.

Porrò ex noviſſimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam 3141593$\frac{1}{5}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod ſi $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus A B, ſeu partium 6 qualium tota 360: Erit A M ſemiſſis lateris trigintanguli partium 1045284632676 6, non unâ minùs, qualium radius 10000000000000 0. Et A B latus ſexagintanguli 1046719124858 8 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus A B ſecundùm primum minorem terminum 1047197288919 5. Secundùm majorem 1047197551258 4. Et ex his minor alter terminus 1047197551130 2. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam 31415926538, major autem quam 31459265 33 ad 10000000000.

Quos terminos ſi ex additis inſcriptorum & circumſcriptorum polygonorum lateribus inquirendum eſſet ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum. Nam ex ſexagintangulo inſcripto circumſcriptoque hoc tantùm probatur, minorem eſſe rationem peripheriæ ad diametrum quam 3144 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & ampliùs verarum notarum numerum noſtro ratiocinio productum appareat. Idem verò in ulterioribus polygonis ſi quis experiatur ſemper evenire cernet: non ignota nobis ratione, ſed quæ longiori explicatione indigeret.

Porrò autem quomodo datis quibuſcunque aliis inſcriptis arcuum quibus ſubtenduntur longitudo per hæc inveniri queat ſatis puto manifeſtum. Si enim quadrati inſcripti latere majores ſunt, longitudo arcus ad ſemicircumferentiam reliqui inquirenda eſt, cujus tum quoque ſubtenſa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum ſubtenſas inveniri cum totius arcus ſubtenſa data eſt. Atque hâc ratione ſi biſectionibus uti placebit, poterimus ad omnem ſubtenſam, arcus ipſius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoſcere. Utile hoc ad ſinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognitâ arcus alicujus ſubtenſâ, etiam ejus qui paulò major minorve ſit ſatis accuratè definiri poteſt.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII C. F.

ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.

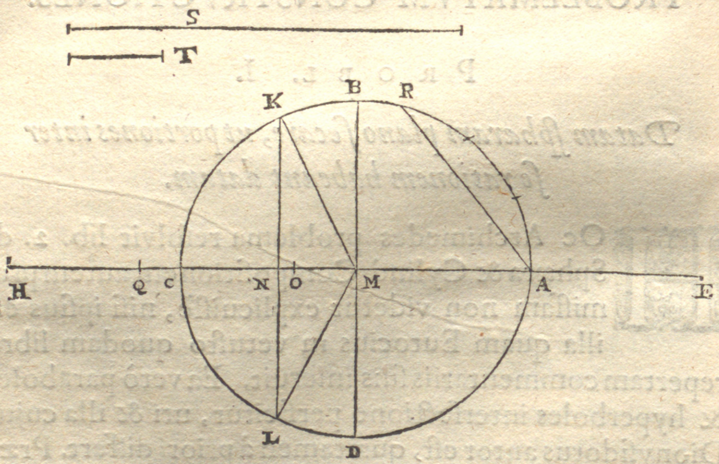
PROBL. I.

Datam sphæram plano secare, ut portiones inter se rationem habeant datam.

HOc Archimedes problema resolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. Compositionem autem promissam non videtur explicuisse, nisi ipsius est illa quam Eutocius in vetusto quodam libro repertam commentariis suis inseruit. Ea verò paraboles & hyperboles intersectione perficitur, uti & illa cujus Dionysidorus autor est, quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipsis descriptionem requirit. Nostra autem quam hic conscribemus anguli trisectionem postulat; Et hæc construendi ratio in solidis problematibus quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maximè accommodata.

Esto igitur data sphæra cujus centrum M, diameter C A. Et data sit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur secari sphæra plano secundum A C diametrum, sitque maximus in ea circulus C B A D. Et producatur utrimque diameter C A, & ponatur semidiametro

tro æqualis utraque harum CH, AE. Et dividatur tota HE in Q, ut sit EQ ad QH sicut S ad T. Ipsi autem MQ æqualis ponatur ad circumferentiam recta AR. Et ei quæ tertiam partem subtendit arcus AR, æqualis sumatur MN. Et per N punctum ducatur planum KL quod diametro CA sit ad angulos rectos. Dico hoc sphæram sic secare, ut portio cujus A vertex est ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T.



Secetur enim sphæra per centrum M plano BD ipsi KL parallelo, & jungantur KM, ML; & intelligatur conus basin habens circulum factum sectione KL, verticem vero M. Et sicut quadratum CM ad quadratum MN, ita sit MN ad NO longitudine. Erit igitur per conversionem rationis ut quadratum CM sive quadr. KM ad quadratum KN (est enim quadr. KN excessus quadrati KM supra quadr. MN) ita linea NM ad MO. Sicut autem quadr. KM, hoc est, quadr. BM ad quadr. KN, ita est circulus circa diametrum BD ad eum qui circa diametrum

trum K L. Ergo quoque ille circulus ad hunc sese habebit ut N M ad M O. Ac proinde conus K M L æqualis erit cono cujus basis circulus circa diametrum B D, altitudo M O *. Hic autem conus ad hemisphæram B C D, hoc est, ad conum qui basin habeat eundem circulum circa B D diametrum, & altitudinem M H *, eam habet rationem quam M O ad M H. Itaque & conus K M L erit ad hemisphæram B C D sicut M O ad M H. Et invertendo.

*15.12. Elem.

*32.1. Archim. de Sphær. & Cylin.

Porro autem quoniam hemisphæra B C D est ad sectorem solidum M K C L sicut superficies illius sphærica ad sphæricam hujus superficiem *, hoc est, ut M C ad C N †. Erit per conversionem rationis hemisphæra B C D ad partem sui quæ remanet dempto sectore M K C L, sicut C M ad M N: vel sumptis horum duplis ut H M ad O Q. Quod enim O Q dupla sit ipsius M N postea ostendemus. Fuit autem ostensum, quod hemisphæra B C D ad conum K M L sicut H M ad M O. Ergo jam hemisphæra B C D ad totam portionem inter plana B D, K L contentam erit ut H M ad utramque simul Q O, O M *, hoc est, ad M Q. Quare & per conversionem rationis, erit hemisphæra B C D ad portionem K C L, ut M H ad H Q. Et sumptis antecedentium duplis, sphæra tota ad portionem K C L ut E H ad H Q. Et dividendo, portio K A L ad portionem K C L ut E Q ad Q H, hoc est ut S ad T. Quod erat faciendum. Quod autem dictum fuit O Q duplam esse ipsius M N, sic fiet manifestum. Quia enim ut quadratum C M ad quadr. M N ita est M N ad N O longitudine: Est autem Q M æqualis subtensæ arcus A R cujus trienti subtenditur M N. Erunt propterea duæ simul Q M & N O æquales triplæ M N, uti sequenti lemmate demonstratur. Quamobrem ablata communi O N, erit sola Q M æqualis duplæ N M & ipsi M O. Sed eadem Q M æqualis est duabus simul his Q O, O M, ergo apparet duplã M N æquari ipsi O Q.

*42.1. Archim. de Sphær. & Cyl.

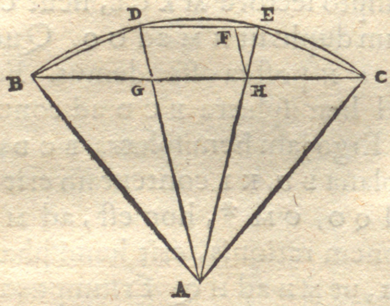
†3.2. Archim. de Sphær. & Cyl.

*24.5. Elem.

LEM-

LEMMA.

SI Circumferentiæ arcus in tria æqualia ſecetur, tres ſimul rectæ quæ æqualibus partibus ſubtenduntur, æquantur ſubtenſæ arcus totius & ei quæ ad ſubtenſam trientis ſeſe habeat, ſicut hujus quadratum ad quadratum ſemidiametri. Arcus ſectoris A B C in tria æqualia diviſus ſit punctis D, E. Et ſubtendantur partibus rectæ B D, D E, E C; & toti arcui linea B C. Porro jungantur D A, E A, atque interſecent ſubtenſam B C in punctis G & H. Sitque H F parallela G D.



Quoniam igitur circumferentia B D E dupla eſt circumferentiæ E C, angulus autem huic inſiſtens E A C ad centrum conſtitutus, qui verò illi inſiſtit angulus B C E ad circumferentiam. Erit propterea angulus B C E, hoc eſt, angulus H C E in triangulo H C E æqualis angulo C A E in triangulo C A E. Sed angulus ad E utrique eſt communis; itaque ſimiles inter ſe ſunt dicti trianguli: Eritque ut A E ad E C ita E C ad E H. Ratio igitur A E ad E H hoc eſt D E ad E F, duplicata eſt rationis A E ad E C, ac proinde eadem quæ quadrati A E ad quadr. E C ſeu quadr. E D. Erit igitur invertendo F E ad E D ſicut quadr. E D ad quadr. E A. Quamobrem oſtendendum eſt, tres ſimul B D, D E, E C æquari ſubtenſæ B C atque ipſi E F. quod ſane manifeſtum eſt; nam C E eſt æqualis C H; B D æqualis B G; D E vero utriſque ſimul G H, & F E. Ergo conſtat propoſitum.

Sumpſi-

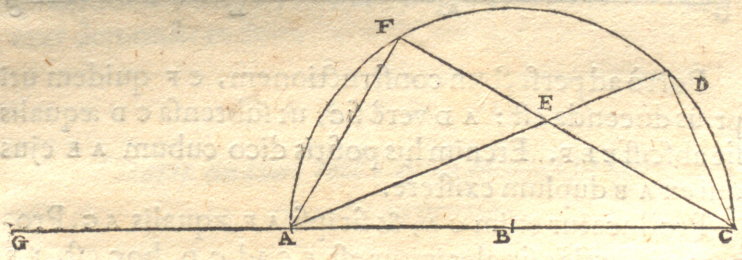
Sumpsimus autem arcum B C semicircumferentiâ minorem quoniam in constructione problematis ejusmodi semper invenitur. Nam lemma ad quosvis arcus pertinet, estque in semicircumferentiâ majoribus demonstratio parum diversa.

PROBL. II.

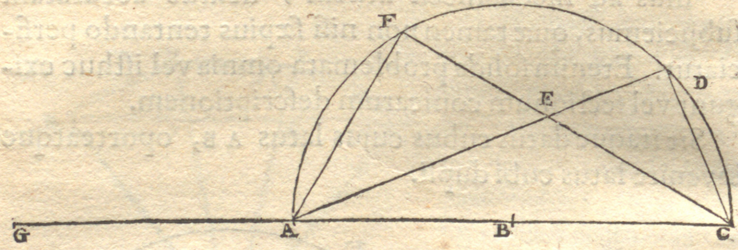
Cubum invenire dati cubi duplum.

AD hoc imperfectam primò constructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam subjiciemus, quæ tamen non nisi sæpius tentando perficiatur. Etenim solida problemata omnia vel isthuc exigunt vel sectionum conicarum descriptionem.

Sit itaque datus cubus cujus latus A B, oporteatque invenire latus cubi dupli.



Radio B A semicirculus describatur A F C. Sitque arcus A F semicircumferentiæ triens, CD vero quadrans; & ducantur C F, A D, quarum intersectio ad E punctum. Erit A E latus cubi quęsiti; exiguo tamen excedens, quodque minus sit $\frac{1}{2000}$ sui parte, ut facile numeris explorari potest. Fit enim A E secans anguli p. 37. scr. 30. quæ proinde major est partibus 12600 qualium A F vel A B 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 sit major quam duplus ejus qui ex A B 10000, erit & cubus A E major duplo cubo ex A B. Rursus quia A E major est partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ A E major part. 6. Tota verò A E minor est quam 12605. Ergo auferendo ab A E partem bismillesimam suiipsius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim supersunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor est duplò cubo ex 10000. Ergo omnino quoque A E diminuta parte sui bismillesima cubum minorem producet quam sit duplus cubus à latere A B.



Porrò ad perfectam constructionem, C F quidem uti priùs ducenda est: A D verò sic, ut subtensa C D æqualis sit abscissæ E F. Etenim his positis dico cubum A E ejus qui ex A B duplum existere.

Producatur enim C A, & sit ipsi A E æqualis A G. Propter triangulos similes igitur est E C ad C D, hoc est, E F ut E A ad A F, hoc est, ut G A ad A B. Et componendo C F ad F E ut G B ad B A sive A F. Et permutando C F ad G B ut E F ad F A. Quare ut C F quadratum ad quadr. G B, ita quadr. E F ad quadr. F A. Et componendo ut quadr. CF & G B ad quadr. G B, ita quadr. E F & F A simul, hoc est, quadr. E A ad quadr. A F. Quadr. autem C F & G B simul æquantur rectangulo G C A cum quadr. A G, quod sic ostenditur. Quadratum enim G B æquale est rectangulo

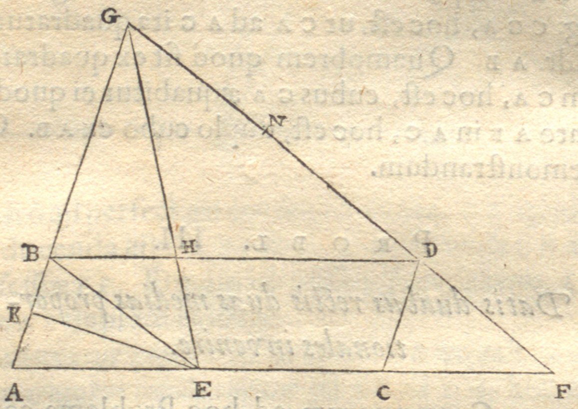
gulo C G A & quadrato A B ſeu A F*. Quare addito *6. 2. Elem.
utrimque quadrato F C, erunt quadrata G B, F C ſimul æqualia rectangulo C G A & quadrato A C. Rectangulum autem C G A cum quadrato A C æquatur rectangulo G C A cum quadrato G A. Itaque & quadrata C F, G B ſimul æqualia ſunt rectangulo G C A cum quadrato A G, ſicut diximus. Sicut igitur rectangulum G C A cum quadrato A G ad quadr. G B, ita eſt quadr. E A ad quadr. A F, hoc eſt, ita quadratum G A ad quadr. A B. Et permutando, ut rectangulum G C A cum quadrato G A ad quadratum G A ita quadr. G B ad quadr. A B. Dividendo igitur, erit ut rectang. G C A ad quadr. G A, ita quadr. G B dempto quadrato A B, hoc eſt, rectangulum C G A ad quadr. A B. Et permutando rurſus, ut rectang. G C A ad rectang. C G A, hoc eſt, ut C A ad A G ita quadratum G A ad quadr. A B. Quamobrem quod fit ex quadrato G A in ipſam G A, hoc eſt, cubus G A æquabitur ei quod fit ex quadrato A B in A C, hoc eſt, duplo cubo ex A B. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.

VEterum Geometrarum ad hoc Problema conſtructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro, at non omnes inventione diverſas, uti rectè quoque ipſe animadvertit. Heronis enim inventionem ſecuti videntur Apollonius & Philo Byzantius: quanquam Heronem Apollonio ætate poſteriorem nonnulli exiſtiment. Dioclis modum Pappus & Sporus. Nicomedea autem conſtructio præ cæteris ſubtilis ibidem extat, quam. Fr. Viëta paulo aliter concinnatam ſuo Geometriæ ſupplemento inſeruit. R. Carteſii egregia eſt & nova per paraboles & circumferentiæ interſectionem, cujus demonſtratio legitur in libris Harmonicôn M. Merſenni. Noſtræ autem ſequentes.

Sit datarum linearum major A C, quæ bifariam ſecetur in E. Minor autem ſit A B, quæ ſic conſtituatur ut triangulus E A B habeat crura æqualia A E, E B. Et perficiatur parallelogrammum C A B D. Et producantur A C, A B. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quouſque poſitionem habeat G F, abſcindens nimirum E F æqualem rectæ E G; (Hoc autem vel ſæpius



tentando aſſequemur, vel deſcriptâ hyperbole, uti poſtea oſtendetur) Dico inter A C, A B medias duas inventas eſſe B G, C F.

Sit enim E K ipſi A B ad angulos rectos. Quia igitur B E æqualis E A, dividetur A B in K bifariam: adjecta autem eſt linea B G. Ergo rectangulum A G B cum quadrato ex K B, æquabitur quadrato K G. Et addito utrimque qua-

quadrato K E, erit rectangulum A G B unà cum quadratis B K, K E, hoc est unà cum quadrato B E, æquale quadrato E G. Similiter quia A C bifariam dividitur in E, & adjecta est linea C F, erit rectangulum A F C cum quadrato E C æquale quadrato E F. Quadratum autem E F æquale est quadrato E G. Erit igitur rectangulum A F C cum quadrato C E, æquale rectangulo A G B cum quadrato B E. Atqui quadratum C E seu E A æquale est quadrato E B. Ergo & reliquum rectangulum A F C æquale rectangulo A G B. Quare sicut F A ad A G ita B G ad C F. Ut autem F A ad A G ita est D B ad B G, & ita quoque F C ad C D. Igitur ut D B, hoc est, A C ad B G ita B G ad F C, & F C ad C D, hoc est, A B. Quod erat dem. Quod autem dictum est, etiam descriptâ hyperbole inveniri quomodo linea F D G ducenda sit, hinc constabit: Factum enim sit, ut E F, E G sint æquales, & sumatur G N æqualis D F. Itaque punctum N est ad hyperbolem quæ describetur per D punctum circa asymptotos F A, A G *. Sed idem *8.2.Conic. punctum N est quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius E D: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus F E G est æquicruris, & N G æqualis D F) Itaque datum est punctum N ad intersectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum est. Datur igitur positione linea F G ducenda per puncta N, D. Et compositio manifesta est.

ALITER.

Circa diametrum A C majori datarum linearum æqualem circulus describatur & ponatur A B minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum A D: productâque A B, ducatur ex centro E recta E H G eâ ratione ut H D, H G sint inter se æquales. Secet autem cir-

 cumcorporis extensio, neque plus realitatis in extensione hac quam in illa reperitur, quia, quod præter qualitates ac formas superest in corporibus, nil nisi indefinita quædam extensionis moles est, quæ etsi exempli gratia in ligno, frigida, dura, & gravis, in igne vero vel aëre calida, fluida & levis sit, seorsim tamen ac præcise consideratæ corporum illorum moles seu extensiones, nihil habent quo vel ab invicem, vel ab ea, quæ in vacuo spatiisque imaginariis consideratur, differant: Quo argumento Philosophus IV. Phys. cap. 8. demonstrat, *corporibus opus non esse loco seu spacio* παρὰ τὸν ἑκάστου ὄγκον *præter uniuscujusque molem: cubumque* e. g. *ligneum nec occupare nec penetrare spacium à mole sua corporea diversum eique æquale: quia cubi moles seu corpus ab æquali vacuo non differt; ideoque si duæ tales moles spacii nempe & cubi, innumeræ adhuc aliæ, puta aquæ, aëris, lapidis, se invicem hoc pacto penetrare ac in eodem loco esse possunt.* Unde manifestum est, nudam & solam in longum, latum ac profundum extensionem, totam materiæ substantiam, quæ Aristoteli ὁ ὄγκος καὶ τὸ σῶμα *moles* seu *corpus* dicitur, constituere.

IX. Atque ab hac verissima Aristotelis doctrina varie aberrarunt ejus sectatores. Aliqui eo fuere delapsi, ut non aliam in materia cogitare voluerint essentiam, quam negativam illam ac respectivam, quam suis definitionibus expressit Aristoteles. Hi igitur contenti materiam vocare non ens & puram potentiam, non tantum calorem, frigus, figuras, &c. sed ipsam etiam extensionem seu quantitatem interminatam illi abstulerunt, & incredibili cum absurditate omnem rerum corporearum subsistentiam (quæ soli materiæ competit) à materia in formas & accidentia transtulerunt; similes in hoc negotio cani Æsopico, qui cum frusto carnis quam ore tenebat flumen

men transiret, respiceretque ad umbram quæ major ipsa carne in aqua apparebat, avidè hanc umbram appetiit relicta carne. Obsecro enim, an non sola materia extensa vera rerum corporearum caro est & substantia quam ore puri intellectus firmiter apprehendimus? ejus autem formæ & accidentia, quid quæso aliud sunt quam umbræ quædam loco veræ substantiæ in sensuum & imaginationis perceptionibus apparentes? Duæque notari possunt hujus erroris causæ: prima consistit in communi illo omnium hominum præjudicio, quo corporum subsistentiam ac realitatem sic pendere putant à formis atque in sensum incurrentibus qualitatibus, ut iis sepositis nihil substantiale sit reliquum, ut notatum est articulo VII. Altera eos speciatim spectat, qui hanc absurdam opinionem præ aliis tuentur inter philosophos, Thomam nempe ejusque sectatores, qui in rerum spiritualium ac mentium etiam angelicarum contemplatione (hinc enim Thomas Angelicus Doctor dicitur) nimium defixi, materiam instar rei incorporeæ seu spiritualis conceperunt: quid enim aliud est materia non extensa, si non nihil est? Cui adde doctrinam Romanæ ecclesiæ, quam autores hujus opinionis sequuntur, qua statuitur integrum corpus Christi, sub forma & speciebus exigui panis, præsens esse in sacramento Eucharistiæ, quod intelligi non potest, nisi præter accidentia & formas ipsa etiam quantitas seu extensio, qua pars una materiæ extra aliam est, separabilis fingatur à corpore Christi. Quo posito, illud, vel annihilari, vel extensam seu materialem suam naturam cum indivisibili & spirituali commutare necessum est. Et quia talia commenta non multum distant ab erroribus illis infantiæ articulo VII. propositis, ex Theologia in philosophiam transferri facile potuerunt.

X. Avi-

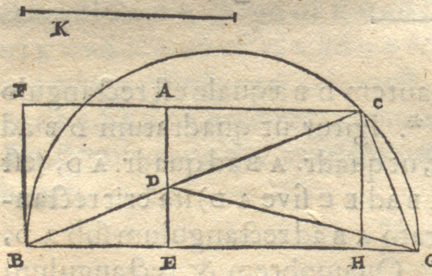
& Q mediæ proportionales ſunt C E, E D. Quod erat oſtendendum.

PROBL. IV.

QVadrato dato & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppoſitum pertineat.

ESto quadratum B A cujus productum ſit latus F A. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C ſit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & E B ſit æquale quadratum E G; & ſuper B G diametro deſcribatur ſemicirculus B C G ſecans rectam F A productam in C, & ducatur B D C. Dico D C æqualem eſſe ipſi K. Jungantur enim C G, G D; ſitque C H ipſi B G ad angulos rectos.



Quia igitur ſimiles ſunt trianguli B E D, C H G, & latera B E, C H circa angulos rectos inter ſe æqualia, erit & latus D B æquale lateri G C, & D E ipſi G H. Sunt autem quadrata D C, C G, hoc eſt, quadrata D C, C H & H G æqualia quadrato D G *, hoc eſt, quadratis G E, E D. Ergo dempto hinc quadrato E D, inde verò quadrato H G; erunt duo quadrata D C & C H æqualia quadrato E G, hoc eſt quadratis ex K & E B *. Quadratum autem E B æquale eſt quadrato C H. Ergo & reliquum quadratum D C æquabitur K quadrato; & recta D C ipſi K. Quod erat oſtendendum.

*47. 1. Elem.

*Ex conſtruct.

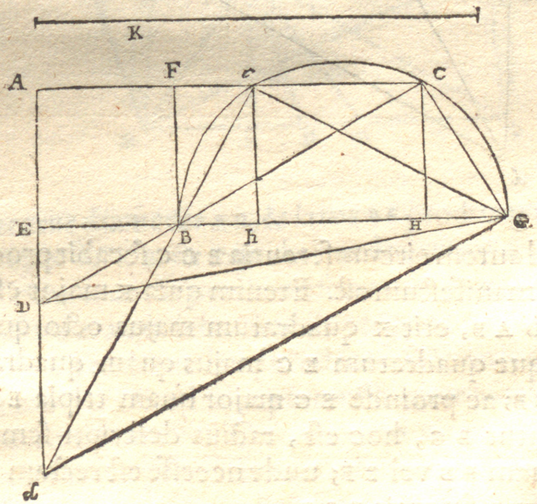
Demon-

Demonſtratio hæc ab ea diverſa eſt quæ apud Pappum Alex. legitur lib. 7. prop. 72. Conſtructio verò non differt. Cæterum eandem ad caſum quoque ſequentem pertinere invenimus.

PROBL. V.

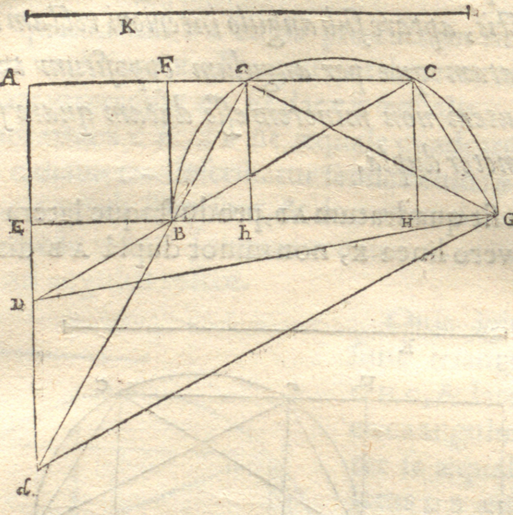
Dato quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla.

Datum ſit quadratum A B, productaque latera A F, A E. Data vero linea K, non minor duplâ A B diametro.



Et oporteat per angulum B ponere rectam D C ipſi K æqualem.

Si K æqualis fuerit duplæ A B, constructio manifesta est; tunc enim per B. ducenda est quæ sit ipsi A B ad angulos rectos, eaque propositum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla A B, constructio iisdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonstratio quoque est eadem.



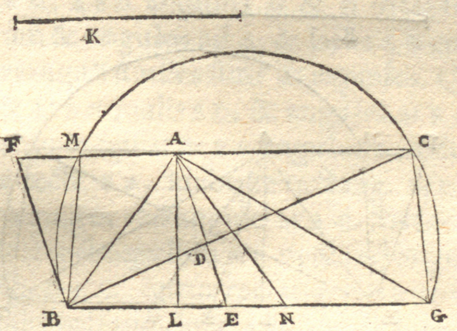
Quod autem circumferentia B C G secabit productam A F hinc manifestum est. Etenim quia K major est duplâ diametro A B, erit K quadratum majus octo quadratis E B. Itaque quadratum E G majus quam quadrata novem ex E B; ac proinde E G major quam tripla E B. Dimidia igitur B G, hoc est, radius descripti semicirculi major quam E B vel B F; unde necesse est rectam A C secari à circumferentia B C G.

PRO-

PROBL. VI.

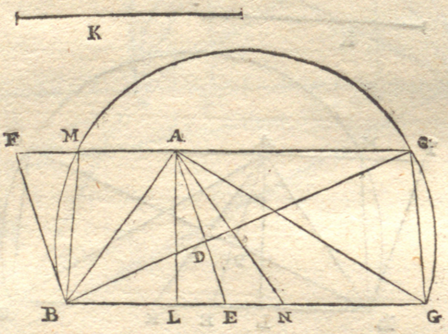
Rhombo dato, & uno latere producto, aptare sub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppositum angulum pertineat.

SIt datus rhombus A B, cujus productum latus F A. Data autem linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C sit ipsi K æqualis.



Ducatur diameter A B, & latus B E producatur; & quadratis ex K & A B sit æquale quadratum A G. Et super B G circumferentiæ portio describatur quæ capiat angulum ipsi B F A æqualem. Secabit ea productum latus F A, ut modo ostendetur. Itaque ad intersectionis punctum C ducatur B C. Dico hujus partem interceptam D C lineæ datæ K æqualem esse. Quod autem circumferentia descripta latus F A productum secabit, sic primùm ostenditur. Ducatur A N ita ut sit angulus B A N angulo B F A vel B E A æqualis. Itaque triangulus B A N triangulo B E A similis est, ac proinde isosceles quoque. Quare si super

BN circumferentia describatur quæ capiat angulum BFA, ea continget latus FA in A puncto. Sed BG major est quam BN: nam quadratum AG majus est quadrato AN vel AB, cum sit æquale quadratis ex K & AB. Quare AG cadet extra triangulum isoscelem BAN. Itaque manifestum est circumferentiam super super BG descriptam capientemque angulum ipsi BFA vel BAN æqualem secare lineam FAC. Esto alterum intersectionis punctum M & jungantur BM, GC, & cadat in BE ex A perpendicularis AL.

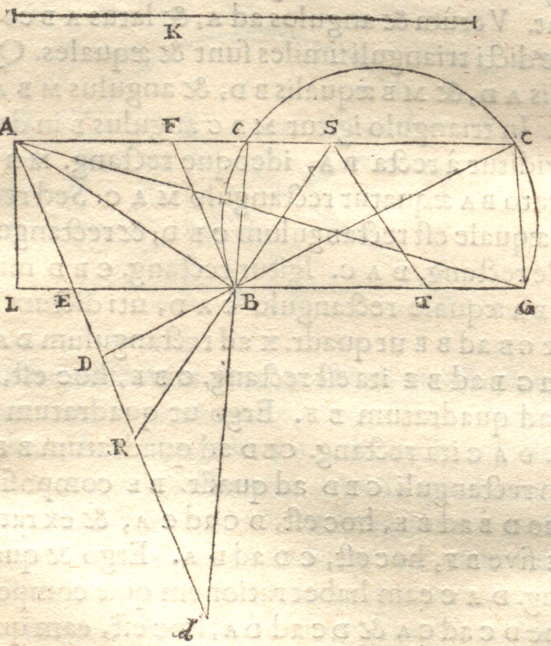


Quia igitur quadratum AG æquale est quadratis ex K & AB: atque idem quadratum AG æquale quadratis AB & BG minùs duplo rectangulo GBL, hoc est, minùs rectangulo GBN; erit K quadratum æquale quadrato BG minùs rectangulo GBN, hoc est, rectangulo BGN. Est autem ut rectangulum BGN ad rectang. BE, GN ita BG ad BE. Ergo ut BG ad BE ita quoque quadratum K ad rectangulum GN, BE, hoc est, rectangulum GBE minùs rectangulo NBE. Est autem rectangulo GBE æquale rectang. CBD, quoniam GB ad BC ut DB ad BE propter triangulos similes GBC, DBE; habent enim angulum ad ad B communem, & angulus B C G ipsi B E D est æqualis. Item rectangulo N B E æquale est quadratum A B quia propter triangulos similes est N B ad B A ut A B ad B E. Ergo erit G B ad B E ut quadratum K ad rectangulum C B D minùs quadrato A B. Est autem rectangulo C B D minùs quadr. A B æquale rectangulum D A, A C; quod sic ostenditur. Etenim quia quadrilaterum C G B M est in circulo, sunt anguli C G B & B M C simul duobus rectis æquales. Sed & anguli E D B, A D B. Quorum E D B æqualis angulo C G B propter similitudinem triangulorum G B C, D B E. Ergo & angulus B M C æqualis erit angulo A D B. Trianguli igitur A B M, A B D angulos M & D inter se æquales habent. Verùm & angulos ad A, & latus A B commune. Itaque dicti trianguli similes sunt & æquales. Quare A M æqualis A D, & M B æqualis B D, & angulus M B A æqualis A B D. In triangulo igitur M B C angulus B in duo æqualia dividitur à recta B A, ideoque rectang. M B C minùs quadrato B A æquatur rectangulo M A C. Sed rectangulo C B M æquale est rectangulum C B D; & rectangulo M A C æquale rectang. D A C. Igitur rectang. C B D minùs quadrato B A æquale rectangulo C A D, uti dictum fuit. Est itaque G B ad B E ut quadr. K ad rectangulum D A C. Sicut autem G B ad B E ita est rectang. G B E, hoc est, rectang. C B D ad quadratum B E. Ergo ut quadratum K ad rectang. D A C ita rectang. C B D ad quadratum B E. Ratio autem rectanguli C B D ad quadr. B E composita est ex ratione D B ad B E, hoc est, D C ad C A, & ex ratione C B ad B E sive B F, hoc est, C D ad D A. Ergo & quadr. K ad rectang. D A C eam habet rationem quæ componitur ex ratione D C ad C A & D C ad D A, hoc est, eam quam quadratum D C ad rectang. D A C. Quamobrem quadr. K. quadrato D C æquale est: Et D C ipsi K longitudine. Quod erat demonstrandum.

PROBL. VII.

Rombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit.

Sit datus rhombus A B cujus producantur latera A F, A E; data autem sit recta K cui æqualem ponere opor-

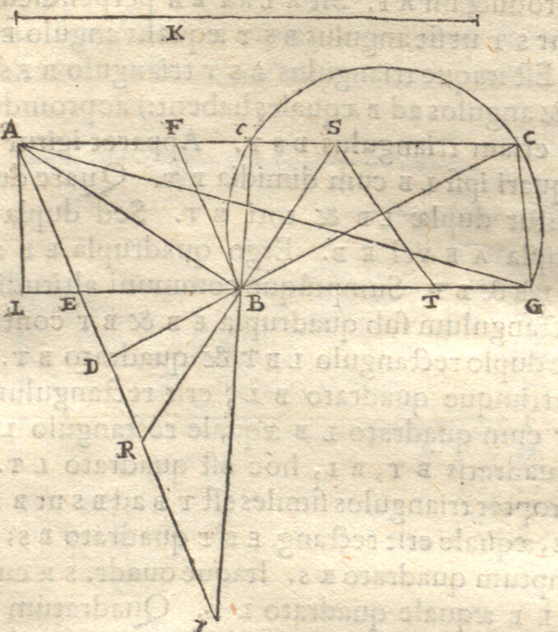


teat C D, per angulum B transeuntem. Ducatur diameter A B, eique ad angulos rectos linea S B R, quæ quidem æqualis

æqualis erit duplæ diametro F E. Igitur K non minor debet esse quam S R. Si vero æqualis, factum est quod proponebatur. Sed ponatur K major data esse quam S R. Erit jam in schemate hoc prout propositum est constructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonstratio autem nonnihil diversa. Etenim hoc primò aliter ostenditur quod circumferentia super B G descripta secat productam A F. Sit A L ad E B perpendicularis & ducatur S T ut sit angulus B S T æqualis angulo E A F vel B F S. Est itaque triangulus B S T triangulo B F S similis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus B S T. Apparet igitur lineam A S æquari ipsi L B cum dimidia B T. Quare dupla A S æquabitur duplæ L B & toti B T. Sed dupla A S est quadrupla A F vel E B. Ergo quadrupla E B æqualis duplæ L B & B T. Sumptâque communi altitudine B T, erit rectangulum sub quadrupla E B & B T contentum, æquale duplo rectangulo L B T & quadrato B T. Et addito utrimque quadrato B L, erit rectangulum E B T quater cum quadrato L B æquale rectangulo L B T bis cum quadratis B T, B L, hoc est quadrato L T. Quia verò propter triangulos similes est T B ad B S ut B S ad B F sive B E, æquale erit rectang. E B T quadrato B S; & quater sumptum quadrato R S. Itaque quadr. S R cum quadrato L B æquale quadrato L T. Quadratum vero K (quod majus est quam R S quadr.) una cum eodem quadrato L B æquale est quadrato L G, uti ex constructione manifestum est, quia scilicet quadr. A G æquale positum fuit quadratis ex K & A B. Itaque majus est quadr. L G quam L T, & L G major quam L T, & B G quam B T. Quamobrem circumferentia super B G descripta capax anguli E A F secabit rectam A S; nam similis circumferentia si super B T describatur ea continget ipsam in S puncto,

puncto, quoniam angulus B S T ipsi E A F æqualis est triangulusque B S T æquicruris.

Porro quod C D ipsi K æqualis est, sic demonstrabitur. Quia quadratum A G æquale est quadratis ex K & A B: idemque quadratum A G æquale quadratis A B, B G cum duplo rectangulo G B L. Erit propterea quadratum K



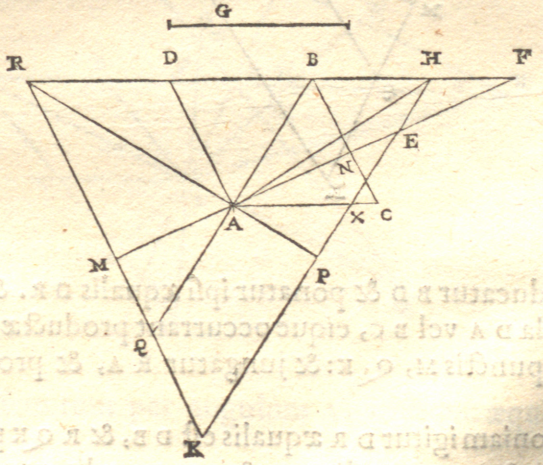
æquale quadrato B G cum duplo rectangulo G B L. Sicut autem B G ad B E ita est quadratum B G cum duplo rectangulo G B L ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L; singula enim ad singula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L ut B G ad B E. Est autem rectangulo G B E

æquale

æquale rectangulum C B D, quoniam C B ad B G ut E B ad B D, propter triangulos similes C B G, E B D; habent enim angulos ad B æquales & angulum B C G angulo B E D. Item duplo rectangulo E B L æquale est quadratum A B, quia propter triangulos similes ut S A, hoc est, dupla B E ad A B ita A B ad B L. Igitur ut B G ad B E ita erit quadratum K ad rectangulum C B D cum quadrato A B. Sed hisce duobus æquale est rectangulum C A D; quoniam in triangulo C A D angulus A bifariam dividitur à linea A B. Ergo ut B G ad B E ita est quadr. K ad rectangulum C A D. Atque hinc porro eodem modo ut in casu præcedenti concludemus lineam D C ipsi K æqualem esse, repetendo ista: Sicut autem G B ad B E, &c.

Vtrumque præcedentium Aliter.

Sit datus rhombus A D B C cujus productum latus D B. Et data sit linea G. Oportet ducere rectam A N F, ut pars intercepta N F sit datæ G æqualis.

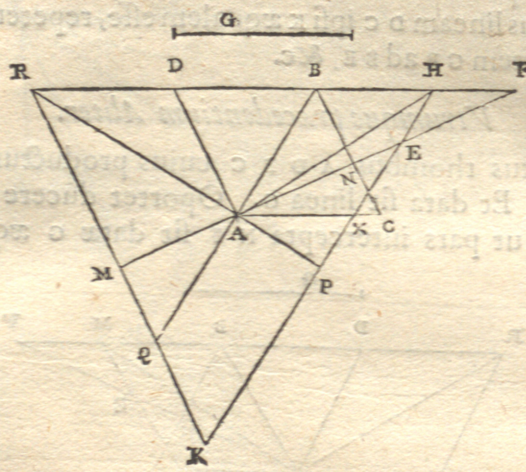


Ducatur diameter A B, & quadratis ex G & A B sit

 æquale

æquale quadratum A H, & ducatur H E ipsi B A parallela. Et A E ipsi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico N F ipsi G æqualem esse.

Quod autem ad H E poni potest A E ipsi G æqualis, hinc manifestum est. Etenim quadratum A H majus est quadratis A X & X H, quum sit angulus A X H obtusus. Sed idem quadratum A H æquale ponitur quadratis A B seu H X & G. Itaque quadratum G seu A E majus est quadrato A X. Unde apparet intersectionem E accidere inter puncta H & X.



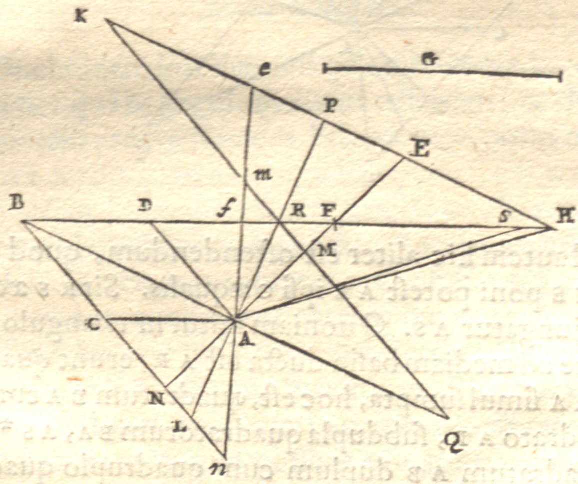
Producatur B D & ponatur ipsi æqualis D R. & sit R K parallela D A vel B C, eique occurrant productæ F A, B A, H E, in punctis M, Q, K: & jungatur R A, & producatur ad P.

Quoniam igitur D R æqualis est D B, & R Q K parallela D A, erit & M A æqualis A N, & Q A æqualis A B; angulus autem B A R rectus quum sit in semicirculo, nam tres hæ æqua-

æquales sunt DB, DA, DR. Parallelæ autem sunt BQ, HEK, ergo & anguli ad P recti, & erit HP æqualis PK. Est itaque quadratum AH æquale quadrato AE unà cum rectangulo HEK*. Sed idem quadratum AH æquale est etiam quadratis ex G seu AE, & ex AB. Itaque quadr. AB æquale erit rectangulo KEH. Ac propterea KE ad AB ut AB ad EH. Verùm ut KE ad AB seu QA ita est EM ad MA: & ut AB ad EH ita AF ad FE. Igitur EM ad MA ut AF ad FE: Et proinde EA ad AM ut EA ad EF. Æqualis est igitur EF ipsi AM; quare & ipsi AN. Ideoque & FN ipsi AE, hoc est, datæ G. Quod erat demonstrandum.

*12. 2. Elem.

Sit denuo datus rhombus ADBC. cujus producta latera BD, BC; & data sit linea G. Oportet ducere rectam

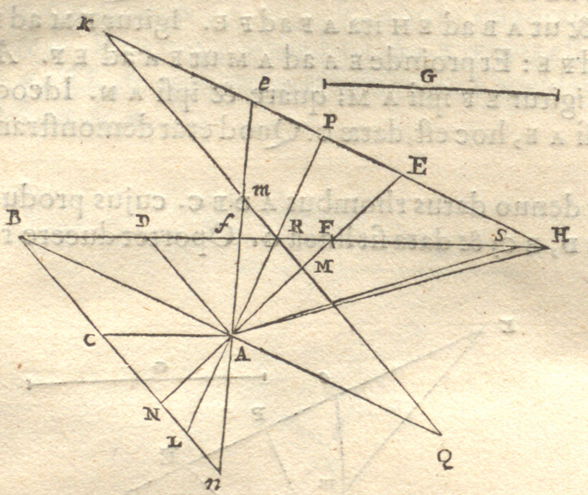


NF transeuntem per angulum A, quæque æqualis sit ipsi G.

Ducatur diameter BA, eique ad angulos rectos RAL.

 Si

Si igitur G minor detur quam R L, problema construi nequit, uti supra quoque dictum fuit. Si verò æqualis, jam factum est quod quærebatur. Sit igitur G major quam R L. Erit in schemate adjecto, sicut propositum est, constructio & demonstratio eadem quæ in casu præcedenti.



Illud autem hic aliter est ostendendum, quod ad lineam H E poni potest A E ipsi G æqualis. Sit R S æqualis R B, & jungatur A S. Quoniam igitur in triangulo B A S à vertice ad mediam basin ducta est A R, erunt quadrata BR & R A simul sumpta, hoc est, quadratum B A cum duplo quadrato A R, subdupla quadratorum B A, A S *. Itaque quadratum A B duplum cum quadruplo quadrato A R, hoc est, cum quadrato R L, æquabitur quadratis B A, A S. Quare ablato utrimque quadrato B A, erit quadratum A S æquale quadratis B A & R L, ac proinde minus quam quadr. A H; nam hoc æquale est quadratis A B & G.

*p 122. lib. 7. Pappi.

Est

Est igitur A S minor quam A H. Sed major est quam A R. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim A R H obtusus est. Major itaque est R H quam R S vel R B. Et quum propter triangulos similes sit R H ad H P ut R B ad B A, erit quoque H P major quam B A; & quadratum H P majus quadrato A B. At quadratum H P cum quadrato P A æquatur quadrato A H, hoc est, quadratis B A & G. Ergo cum quadratum H P sit majus quadrato A B, erit invicem quadr. P A minus quam quadr. G. Patet igitur quod si centro A circumferentia describatur radio A E ipsi G æquali, ea lineam H E secabit.

PROBL. VIII.

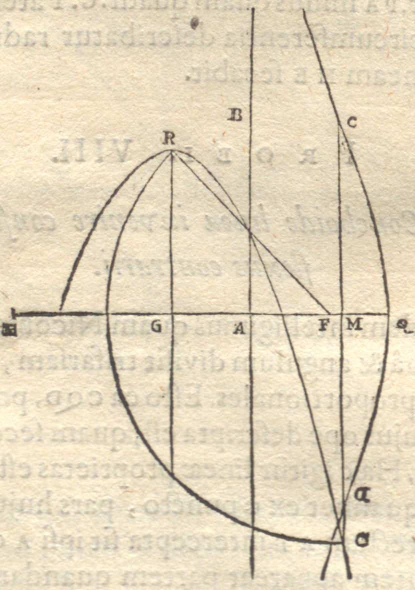
In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii.

Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum divisit trifariam, & duas medias invenit proportionales. Esto ea C Q D, polus G, regula autem A B cujus ope descripta est; quam secet G Q ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas est, ut ductâ ad ipsam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam A B intercepta sit ipsi A Q æqualis.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in schemate subjecto C Q D versus polum G cavam esse, lineam verò reliquam in infinitum licet utrimq; productam in diversum curvari; quæsitum est qua ratione puncta ea determinari possent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc sequentem invenimus constructionem.

Sit duabus A G, A Q tertia proportionalis A E, sumenda versus G. Et ponatur G F æqualis G E. Porro sit G R ipsi

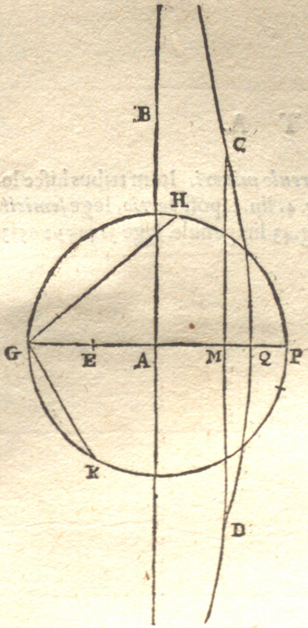
ipsi G Q ad angulos rectos, & æqualis duplæ G A. Et describatur parabole R O, cujus vertex sit R axis R G, latus rectum ipsi A G æquale. Centro autem F radio F R circumferentia describatur, quæ parabolen secet in O; & ducatur O C parallela A B occurratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæsita in confinio flexionis contrariæ.

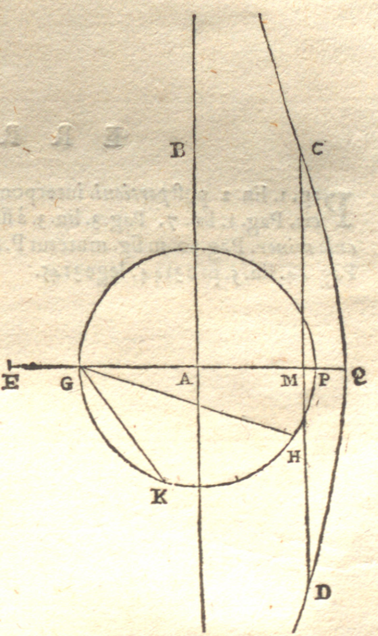


Ista autem Universalis est constructio. At quando quadratum ex A Q non majus est quam duplum quadrati A G, arcus trisectione propositum quoque efficiemus. Et diversè quidem prout A Q major vel minor erit quam A G. Etenim si minor, describenda est circumferentia centro A radio A G, in eaque ponenda G K æqualis duplæ G E, inventæ ut priùs. Et rectæ G H quæ subtendit trien-

tem

tem circumferentiæ K H G æqualis ſumenda G M, & per M ducenda ut ante D C ipſi A B parallela. Cum vero A Q major eſt quam A G, cæteris ad eundem modum compoſitis, hæc tantum differentia erit quod arcum K P, qui unà cum arcu G K ſemicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam conſtituere P H, & ſubtenſæ G H æqualem ſumere G M.





Porro planum eſt Problema cum A G æqualis A Q. Tunc enim G M fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inſcripti. Item cum quadratum A Q duplum eſt quadrati A G: fit enim G M dupla ipſius G A.

Sed & aliis caſibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè diſcerni poterunt, qui ad anguli triſectionem reducuntur.

FINIS.

ERRATA.

Pag. 1. lin. 2. post *portioni*, interpone *ſemicirculo minori*. Item tribus hiſce locis, Pag. 1. lin. 7. Pag. 3. lin. 3. à fine. Pag. 4. lin. 1. post *portio*, lege *ſemicirculo minor*. Pag. 30. in fig. mutetur P. in B. Pag. 43. lin. penult. lege 314159265533. Pag. 44. lin. 5. pro 3144. lege 3145.