Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Introducción a la teoría de desarrollos asintóticos

Autor: Rubén Galván Galván

Tutor/es: Javier Sanz Gil

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, "Introducción a la teoría de desarrollos asintóticos", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por D. Rubén Galván Galván, y constituye su Trabajo Fin de Grado para optar al título de Graduado/a en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a veinticinco de junio de dos mil diecinueve.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Índice general

Introducción

La presente memoria tiene como objetivo desarrollar la teoría elemental de los desarrollos asintóticos para funciones holomorfas en regiones sectoriales de la superficie de Riemann del logaritmo. Se presentarán las propiedades fundamentales, tanto algebraicas como analíticas, de los desarrollos asintóticos en el sentido clásico de H. Poincaré, y también de los denominados desarrollos asintóticos de Gevrey. Finalmente, se analizará a modo de ejemplo la ecuación diferencial de Euler, con el objetivo de poner de manifiesto la forma en que esta teoría proporciona un significado analítico a la solución formal de la ecuación, aparentemente desprovista del mismo.

Los prerrequisitos para el desarrollo de esta materia son esencialmente los contenidos en la asignatura de Variable Compleja, que se imparte en el tercer curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Valladolid. También se hará uso de resultados básicos de la teoría de espacios de normados cubiertos en la asignatura de Introducción a los Espacios de Funciones de cuarto curso, como el teorema de Hahn-Banach.

Además de incluir unos breves preliminares en los cuales se explicará como se construye la superficie de Riemann del logaritmo, qué es un álgebra y un álgebra de Banach y las principales propiedades de ellos, qué es el orden y tipo de una función holomorfa y demostraremos la fórmula de Stirling en el plano complejo en sectores de la forma $|\arg(z)| < \pi$.

El primer capítulo se dedica al estudio de propiedades de regularidad o crecimiento de funciones holomorfas, definidas en regiones sectoriales de la superficie de Riemann del logaritmo y a valores en un espacio de Banach complejo. Puesto que algunas de las herramientas que necesitamos no se contemplan habitualmente en las materias del Grado en Matemáticas, se han incluido en la memoria varios apéndices. El primero de ellos recoge unas breves nociones que permiten definir y manejar la superficie de Riemann del logaritmo. También se ha considerado necesario introducir, en un segundo apéndice, una somera introducción a las álgebras de Banach, y en el tercero un estudio de las funciones holomorfas a valores en un espacio de Banach complejo, que es básicamente idéntico al caso de funciones complejas gracias a la equivalencia entre holomorfía y holomorfía débil. Así, después de definir los sectores y regiones sectoriales, con vértice en el origen, en las que estarán definidas las funciones que consideraremos, se estudian los conceptos de acotación, continuidad y diferenciablidad de las mismas en el origen, punto singular de la frontera de dichas regiones, o la noción de crecimiento exponencial en el infinito. Con el fin de dar algún ejemplo no evidente de función con crecimiento exponencial, en concreto la función de Mittag-Leffler, se ha incluido en el tercer apéndice un estudio del orden y tipo exponencial para funciones enteras, en particular las fórmulas que permiten obtener ambos valores a partir de los coeficientes de la serie de Taylor en el origen.

El segundo capítulo tendrá por objetivo explicar el concepto de desarrollo asintótico de una función f en el vértice de la región sectorial G en la que está definida: las sumas parciales de orden $N-1$, con N natural, de una serie de potencias formal, denominada desarrollo asintótico de f, proporcionan aproximaciones al valor de la función en los subsectores cerrados de G con un control del error en términos de la potencia N-ésima de la variable, generalizando lo que ocurre para las sumas parciales de la serie de Taylor de una función analítica en un entorno de un punto. Tras obtener diferentes caracterizaciones de la existencia de desarrollo asintótico para una función, se define la aplicación de Borel asintótica, que asocia a cada función con desarrollo la serie que lo proprciona, y se prueba que es un homomorfismo de álgebras diferenciales, es decir, las operaciones de suma, producto, derivación e integración de funciones con desarrollo asintótico se traducen en la correspondiente operación entre las series de potencias formales respectivas. Asimismo, también se prueba el teorema de Borel-Ritt, que establece la suprayectividad de la aplicación de Borel asintótica en una región sectorial arbitraria.

El concepto de desarrollo asintótico Gevrey de orden $s>0$ se estudia en el tercer capítulo, imponiendo ahora un control preciso de las acotaciones para los restos N-ésimos en términos de, básicamente, la potencia de $N!$ de exponente s. De nuevo, las operaciones básicas respetan el desarrollo asintótico Gevrey. Por último, se estudia la suprayectividad de la aplicación de Borel, que se obtendrá en el caso de que la amplitud de la región sectorial G sea menor que $s\pi$ (teorema de Borel-Ritt-Gevrey), y la inyectividad de la misma, válida en regiones de amplitud mayor que $s\pi$ radianes (resultado conocido como el lema de Watson). Cabe mencionar que en numerosas ocasiones las estimaciones realizadas se basan en la fórmula de Stirling, que analiza el comportamiento asintótico en infinito de la función Gamma de Euler. Se ha presentado en el cuarto y último apéndice una prueba de dicha fórmula para $\Gamma(x)$, $x>0$, y se ha indicado sin demostración la información disponible en sectores del tipo $\arg(z) \leq \pi-\varepsilon$, con $\varepsilon>0$.

El cuarto y último capítulo de esta memoria se dedica a ilustrar la aplicación de las nociones previas al estudio de un ejemplo particular, proporcionado por la denominada ecuación diferencial de Euler. Esta presenta un punto singular en el origen, y admite una serie de potencias $\hat{y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, centrada en cero y divergente (es decir, con radio de convergencia nulo), como solución formal. No obstante, la ecuación puede ser resuelta por métodos elementales, que proporcionan una solución $y(z)$. Como veremos, $\hat{y}(z)$ es precisamente el desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 de la función $y(z)$ en el origen, y de hecho $y(z)$ es la única función que admite ese desarrollo en sectores de amplitud mayor que π bisecados por el eje real positivo, como pone de relieve el lema de Watson.

Notación y terminología

Los símbolos y notaciones que utilizaremos en esta memoria serán:

$\mathcal{R}$: superficie de Riemann del logaritmo.

G : Región sectorial de la superficie de Riemann del logaritmo.

$\mathbb{E}, \mathbb{F}$: espacios de Banach complejos.

$\mathcal{H}(G, \mathbb{E})$: espacio de las funciones holomorfas en G y a valores en $\mathbb{E}$.

$\mathbb{E}[[z]]$: conjunto de las series de potencias formales en la variable z con coeficientes en $\mathbb{E}$.

$\hat{f}$: desarrollo asintótico de f.

$\mathbb{E}\{z\}$: conjunto de las series de potencias convergentes en la variable z con coeficientes en $\mathbb{E}$.

$\mathbb{E}[[z]]_s$: conjunto de las series de potencias formales de Gevrey de orden s con coeficientes en $\mathbb{E}$.

$\Re(z)$: parte real del número complejo z.

$\Im(z)$: parte imaginaria del número complejo z.

$\mathcal{A}(G, \mathbb{E})$: espacio de las funciones $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ que admiten un desarrollo asintótico $\hat{f}$ en G cuando $z \to 0$.

$\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$: espacio de los operadores lineales y continuos de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$.

γ^* : soporte de la curva γ.

$\mathbb{H}$: conjunto de números complejos con parte real positiva.

$\mathbb{S}(z, r)$: circunferencia de centro z y radio $r > 0$, es decir, es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |w - z| = r\}$.

$f \approx_a g$: equivalencia de las funciones f y g en el punto a, es decir, si g no se anula en un entorno de a, se trata de que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Capítulo 1

Funciones en regiones sectoriales de la superficie de Riemann del logaritmo

Se dedica este primer capítulo a la introducción de los conjuntos en los que trabajaremos, y al estudio de propiedades de regularidad y crecimiento de funciones holomorfas definidas en los mismos y con valores en un espacio de Banach complejo.

1.1. Sectores y regiones sectoriales

En esta sección describiremos los subconjuntos de la superficie de Riemann del logaritmo en los que estarán definidas las funciones bajo estudio.

Definición 1.1. Un *sector de la superficie de Riemann del logaritmo* será un conjunto de la forma:

$$S = S(d, \alpha, \rho) = \left\{ z \in \mathcal{R} \ : \ 0 < |z| < \rho, \ |d - \arg(z)| < \frac{\alpha}{2} \right\},$$

siendo d un número real arbitrario, $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0, \ \rho > 0$ o bien de la forma:

$$S = S(d, \alpha, \infty) = S(d, \alpha) = \left\{ z \in \mathcal{R} \ : \ |z| > 0, \ |d - \arg(z)| < \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Se suele referir a d como la dirección de bisección o bisectriz del sector, a α como la amplitud del sector y a ρ como el radio del sector.
Observemos que en la superficie de Riemann del logaritmo, el valor $\arg(z)$, para cada $z \neq 0$, está determinado de manera unívoca; de ahí que la dirección de bisección del sector está determinada de manera única.

En particular, si $\rho = \infty$ (resp. $\rho < \infty$) diremos que S es un sector no acotado (resp. S es un sector acotado).
Notemos que no trabajaremos ni con sectores vacíos ni con sectores de amplitud infinita.

Definición 1.2. Llamaremos *sector cerrado de la superficie de Riemann del logaritmo* a un conjunto de la forma:

$$\overline{S}(d, \alpha, \rho) = \left\{ z \in \mathcal{R} \ : \ 0 < |z| \leq \rho, \ |d - \arg(z)| \leq \frac{\alpha}{2} \right\},$$

con un significado completamente idéntico para d y α, pero ahora ρ no puede ser infinito, sino que tiene que ser un número real positivo. Por esta razón los sectores cerrados siempre son sectores acotados y nunca contienen al origen; de hecho, son cerrados en $\mathcal{R}$, pero no lo es su proyección en $\mathbb{C}$, puesto que el sector $\overline{S}$ no contendrá como elemento al origen.

Definición 1.3. Sea S un sector de la superficie de Riemann del logaritmo. Diremos que T es un *subsector propio y acotado de S* si T es un sector y además $\overline{T} \subset S$; lo denotaremos por $T \ll S$.

Observación 1.4. En la definición 1.3 la adherencia de T se entenderá calculada en $\mathcal{R}$ y nunca en $\mathbb{C}$.

Definición 1.5. Un dominio G en la superficie de Riemann del logaritmo será llamado una *región sectorial* si existen números reales d y $\alpha > 0$ tales que $G \subset S(d, \alpha)$ y también se cumple que, para cada β, con $0 < \beta < \alpha$ siempre podemos encontrar un $\rho > 0$ para el cual $\overline{S}(d, \beta, \rho) \subset G$.
En este caso, α será la amplitud de la región G y d será la dirección de bisección de G y escribiremos, frecuentemente, $G(d, \alpha)$ para una región con dirección de bisección d y amplitud α.
Observemos, sin embargo que ahora la notación $G(d, \alpha)$ no tiene porqué tener el significado de región no acotada, como lo sería para los sectores.
También, una región sectorial no queda determinada de manera única por su amplitud y su dirección de bisección, pero estas serán las dos características esenciales para su estudio.
Como un ejemplo, mencionamos que el disco abierto centrado en un punto z_0 y de radio $|z_0|$, $B(z_0, |z_0|)$, es un región sectorial de amplitud π y su dirección de bisección será $\arg(z_0)$.

1.2. Funciones definidas en regiones sectoriales y sus propiedades

Es interesante empezar clarificando la terminología relativa a funciones multi o univaluadas.

Definición 1.6. Sea G una región sectorial dada, $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y sea $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$. Se dice que f es *multivaluada* o *multiforme* si G tiene amplitud mayor que 2π radianes, y ocurre que la igualdad

$$f(z) = f(ze^{2\pi i})$$

no se cumple para todo $z \in G$ para el que tiene sentido su escritura.

Obsérvese que si $z \in \mathcal{R}$, z será el par $(|z|, \theta)$, siendo θ su argumento; se entiende que $ze^{2\pi i}$ es el par $(|z|, \theta + 2\pi)$.

Si la función no es multivaluada, se dirá que f es univaluada, e induce entonces una función bien definida sobre la proyección de G sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Observación 1.7. Aunque todo el estudio que sigue se podría hacer para $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, el esfuerzo necesario para trabajar con funciones (resp. series de potencias), a valores (resp. con coeficientes) en un espacio de Banach complejo $\mathbb{E}$ es mínimo, y permitirá en algunos casos simplificar algunos razonamientos.

Nota: A partir de ahora, las definiciones que haremos acerca de acotación de una función en el origen, o de continuidad y diferenciabilidad en el origen las haremos imponiendo condiciones en cada subsector cerrado $\overline{S}$ de la región sectorial G donde la función está definida, pero sería equivalente imponerlas en cada subsector propio y acotado $T \ll G$.

Definición 1.8. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y G un región sectorial de la superficie de Riemann del logaritmo. Diremos que una función $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ es *acotada en el origen* si, para cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G, existe una constante real positiva, c, dependiendo del subsector $\overline{S}$, tal que $\|f(z)\| \leq c$ para todo $z \in \overline{S}$.

El que una función f sea acotada en el origen no implicará que esta función sea acotada en el corte de la región sectorial con un conjunto de la forma $\{z \in \mathcal{R} : |z| < r\}$.

Definición 1.9. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y G una región sectorial de $\mathcal{R}$. Diremos que $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ es *continua en el origen* si existe un elemento de $\mathbb{E}$, denotado por $f(0)$, tal que para cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G, y cada $\varepsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que $\|f(z) - f(0)\| < \varepsilon$ para $z \in \overline{S}$ con $|z| < \rho$.

Observación 1.10. La continuidad en el origen asegura la existencia de límite cuando hay aproximación a lo largo de curvas que se encuentren contenidas en un subsector cerrado de G, mientras que el límite no tiene porqué existir para curvas de carácter más general contenidas en G.
De manera análoga, la noción de continuidad, resp. tener límite finito en el infinito, siempre se entenderán en el sentido de la convergencia uniforme en subsectores cerrados.

Prosigamos con la definición de holomorfía de una función en el origen en una región sectorial G.

Definición 1.11. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y G una región sectorial de $\mathcal{R}$. Diremos que una función $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ es *holomorfa en el origen* si f puede ser extendida de manera holomorfa a un sector $S \supset G$ de amplitud de más de 2π radianes, y dicha extensión es una función univaluada en S y acotada en el origen.

El resultado conocido como *Teorema de Riemann de las singularidades evitables* implica que si f es holomorfa en el origen en el sentido anterior, f tiene un desarrollo en series de potencias convergente en el origen. (Esto es, f podrá ser escrita en un entorno de 0 como suma en serie de potencias convergente centrada en el origen).

Definición 1.12. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y G una región sectorial de $\mathcal{R}$. Diremos que $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ es *diferenciable en el origen* si existe un número complejo, que denotaremos por $f(0)$, para el cual el cociente:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z},$$

es continuo en el origen, en el sentido de la definición 1.9, y ese límite cuando $z \to 0$ en G será denotado por $f'(0)$ y se llamará *la derivada* de f en el origen.

De acuerdo con la definición 1.9, se observa que si f es tal que su derivada f' es continua en 0, también se ha denotado por $f'(0)$ al valor $\lim_{z\to 0} f'(z)$ (siguiendo subsectores cerrados de G). El siguiente resultado muestra que esto no genera ninguna ambigüedad.

Lema 1.13. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y sea G una región sectorial. Dada $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ son equivalentes:

1) f' es continua en el origen.

2) f es diferenciable en el origen.

Si se cumple cualquiera de las anteriores condiciones, el valor $f'(0)$ definido en 1.12 coincide con $\lim_{z \to 0} f'(z)$ (siguiendo subsectores cerrados de G).

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Veamos, antes de nada, que la función f es continua en 0.
Para cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G existe

$$\lim_{z \to 0} f'(z) = f'(0),$$

luego f' está acotada en $\overline{S}$ (obsérvese que f' es continua en el compacto

$$\overline{S} \cap \{z \in \mathcal{R} \ : \ |z| \geq \varepsilon\},$$

para cada $\varepsilon > 0$). Ahora bien, como todo sector de amplitud finita se puede escribir como unión finita de sectores convexos, podremos realizar la demostración de este resultado trabajando en cada uno de estos sectores convexos, considerar la unión de todos ellos y concluir la demostración con un argumento estándar; por este motivo, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\overline{S}$ es un subsector cerrado, y convexo de G, es decir, de amplitud menor o igual que π radianes. Si tenemos $z, w \in \overline{S}$,

$$f(w) - f(z) = \int_{[z,w]} f'(t) \ dt, \tag{1.1}$$

donde la integral del lado derecho de la igualdad denota la integral a lo largo del segmento que une los puntos $z, w \in \overline{S}$.
Si vemos que f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, acabamos, pues $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach en el que toda sucesión de Cauchy converge. Pero si en (1.1) tomamos normas y acotamos en $\overline{S}$, obtendremos

$$\|f(w) - f(z)\| \leq |z - w| \max\{\|f'(t)\| \ : \ t \in [z, w]\} \leq C_{\overline{S}} |z - w|,$$

donde $C_{\overline{S}}$ es una cota para $\|f'\|$ en $\overline{S}$.
Ahora, si tomamos una sucesión $\{w_m\}_{m=0}^{\infty}$ de elementos de $\overline{S}$ de tal forma que $\lim_{n \to \infty} w_n = 0$, podremos decir que $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy, esto es, para

todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de tal forma que si $m, n \geq n_0$ $|w_n - w_m| < \varepsilon$. Entonces, tenemos que la sucesión $\{f(w_m)\}_{m=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{E}$ es de Cauchy, para todo $z \in T$, puesto que, por la desigualdad anterior, si
$m, n \geq n_0$

$$\|f(w_m) - f(w_n)\| \leq C_{\overline{S}} |w_m - w_n| < \varepsilon,$$

luego f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy y el resultado se concluye aplicando el criterio secuencial del límite.
Una vez probada la continuidad de f en el origen, tendremos que, para estudiar la diferenciabilidad de f en el origen, tenemos que estudiar la existencia del límite en el origen de la función

$$\frac{f(z) - f(0)}{z},$$

donde $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z)$ dado que f es continua en el origen. Pero sabemos que, por ser $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$, y ser $f'(0) = z^{-1} \int_0^z f'(0)\ dz$

$$z^{-1}(f(z) - f(0)) - f'(0) = z^{-1} \int_0^z (f'(u) - f'(0))\ du.$$

Entonces, tomando normas y sabiendo que f' es continua en el origen, tenemos que, para un $\rho > 0$ de tal forma que $|z| < \rho$, se tiene que

$$\|f'(z) - f'(0)\| < \varepsilon.$$

Tomando ese mismo ρ, si u pertenece al segmento que une los puntos 0 y z, tenemos que $|u| \leq |z| < \rho$ y con ello:

$$\begin{aligned}
&\|z^{-1}(f(z) - f(0)) - f'(0)\| \\
&= |z^{-1}| \left\| \int_0^z (f'(u) - f'(0))\ du \right\| \\
&\leq |z|^{-1} |z| \max\{\|f'(u) - f'(0)\|\ :\ u \in [0, z]\} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde, por $[0, z]$ se denota al segmento que une los puntos 0 y z.
(2) $\Rightarrow$ (1)
Como f es diferenciable en el origen, se tiene que el límite cuando $z \to 0$ de

$$\frac{f(z) - f(0)}{z}$$

existe y lo denotaremos por $f'(0)$. Veremos que

$$\lim_{z\to 0} f'(z) = f'(0).$$

Si denotamos ahora por $h(z)$ a la función

$$h(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} - f'(0),$$

entonces, obtendremos, despejando

$$f(z) = f(0) + zf'(0) + zh(z), \text{ con } \lim_{z \to 0} h(z) = 0.$$

Fijado un subsector cerrado $\overline{T}$ de G, podemos considerar un nuevo subsector cerrado $\overline{S}$ de G de modo que $\overline{T}$ esté contenido en el interior de $\overline{S}$. Entonces, elegimos $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $z \in \overline{T}$, $\overline{B}(z, \varepsilon|z|) \subset \overline{S}$ y aplicando la fórmula integral de Cauchy deducimos que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{f(0) + wf'(0) + wh(w)}{(w-z)^2} \, dw \\ &= 0 + f'(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{wh(w)}{(w-z)^2} \, dw. \end{aligned}$$

Se ha usado que la función constante $f(0)$ es holomorfa, de hecho, en todo el plano complejo, y como su derivada es 0, tenemos

$$0 = \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{f(0)}{(w-z)^2} \, dw.$$

Análogamente, obtenemos que la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{wf'(0)}{(w-z)^2} \, dw,$$

es $f'(0)$, puesto que la función $g(w) = w$ es holomorfa, de hecho, en todo el plano complejo y con ello, como su derivada es $g'(w) = 1$, obtenemos

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{w}{(w-z)^2} \, dw.$$

Tenemos entonces que

$$f'(z) - f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{wh(w)}{(w-z)^2} \, dw.$$

A continuación, tomando normas, tenemos que

$$\begin{aligned}\|f'(z)-f'(0)\| &\leq \frac{1}{2\pi}\,\text{máx}\left\{\frac{|w|\|h(w)\|}{(w-z)^2}\ :\ w\in\mathbb{S}(z,\varepsilon|z|)\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi\varepsilon|z|}{\varepsilon^2|z|^2}\,\text{máx}\{|w|\|h(w)\|\ :\ w\in\mathbb{S}(z,\varepsilon|z|)\}.\end{aligned}$$

Ahora, del hecho de la desigualdad triangular

$$|w|=|w-z+z|\leq|w-z|+|z|=|z|(1+\varepsilon),\ w\in\mathbb{S}(z,\varepsilon|z|),$$

obtenemos

$$\|f'(z)-f'(0)\|\leq\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon|z|}|z|\,\text{máx}\{\|h(w)\|\ :\ w\in\mathbb{S}(z,\varepsilon|z|)\}\to 0,$$

cuando $z\to 0$ en T, puesto que teníamos

$$\lim_{w\to 0}h(w)=0 \text{ en } S.$$

que era lo que se pretendía probar. □

De manera trivial, la diferenciabilidad de una función en el origen implica la continuidad en el origen de f, pero una función f puede ser diferenciable en el origen sin ser holomorfa allí. Esto es, la holomorfía de una función f en el vértice de G no es, por lo general, equivalente a la diferenciabilidad de f. Pasaremos a describir cuándo una función es de crecimiento exponencial de orden a lo sumo k en un sector, siendo $k>0$. Este concepto intervendrá en el teorema de Phragmén-Lindelöf, expuesto en el apéndice C.

Definición 1.14. Sea $S=S(d,\alpha)$ un sector no acotado, f una función holomorfa en S y a valores en un espacio de Banach complejo $\mathbb{E}$, y sea $k>0$. Diremos que f es de *crecimiento exponencial de orden a lo sumo k en S* si para cada φ, cumpliendo $0<\varphi<\frac{\alpha}{2}$, existen $\rho,c_1,c_2>0$ tales que, para cada z con $|z|\geq\rho$ y $|d-\arg(z)|\leq\varphi$ se tiene que

$$\|f(z)\|\leq c_1\exp(c_2|z|^k).$$

Esta noción se compara con el orden exponencial como sigue: si f es de crecimiento exponencial de orden a lo sumo k, entonces es de orden exponencial inferior a k o de orden igual a k y de tipo finito, y viceversa. El conjunto de todas las funciones f, holomorfas y de crecimiento exponencial a lo sumo k, será denotado por $\mathcal{A}^{(k)}(S,\mathbb{E})$.

Ejemplo 1.15. Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,\ a_n \neq 0$, un polinomio con coeficientes complejos, y consideramos la función

$$f(z) = \exp(P(z)).$$

Puesto que se tiene la igualdad

$$\lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{a_n z^n} = 1,$$

por definición de límite, existe $r_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de tal forma que si $|z| \geq r_0$, entonces $\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| < 2$. y con ello tendremos

$$|P(z)| < 2|a_n||z|^n,$$

Por lo tanto, obtendremos

$$\|f(z)\| = \exp(\Re(P(z))) \leq \exp(|P(z)|) \leq \exp(2|a_n||z|^n),$$

con lo que f es de crecimiento exponencial a lo sumo $n = \deg(P)$. De hecho, se puede probar que f es de orden exponencial igual a n y tipo finito y positivo.

Ejemplo 1.16. Como segundo ejemplo, mencionamos la función de Mittag-Leffler, definida como

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)},\ \ \alpha > 0.$$

La función de Mittag-Leffler es una función entera, de orden $k = \frac{1}{\alpha}$ y tipo $\tau = 1$.
Si reescribimos la función de Mittag-Leffler de la forma

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

tendremos que, en virtud de la formula de Stirling

$$\begin{aligned}\frac{1}{|f_n|} &= \Gamma(1 + \alpha n) = \alpha n \Gamma(\alpha n) \\ &\approx |\sqrt{2\pi}(\alpha n)^{\alpha n + \frac{1}{2}} e^{-\alpha n}| \\ &= e^{\frac{1}{2}\ln(2\pi) + n\alpha \ln(\alpha) + n\alpha \ln n + \frac{1}{2}\ln(\alpha) + \frac{1}{2}\ln n - n\alpha},\end{aligned}$$

donde por $\approx$ denotamos el hecho de que las dos expresiones son asintóticamente equivalentes, cuando $n \to \infty$ (es decir, el límite de su cociente cuando $n \to \infty$ es 1). Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \alpha n \ln(\alpha) + n\alpha \ln n + \frac{1}{2}\ln(\alpha) + \frac{1}{2}\ln n - n\alpha}{n \ln n},$$

existe y es α, entonces también será α su límite superior. En resumidas cuentas, de acuerdo con lo probado en el apéndice C, hemos probado que el orden exponencial de la función es

$$k = \frac{1}{\alpha}.$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left[n|f_n|^{\frac{k}{n}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[e^{\ln n + (-\frac{1}{2}\ln 2\pi - n\alpha \ln \alpha - n\alpha \ln n - \frac{1}{2}\ln(\alpha) - \frac{1}{2}\ln(n) + \alpha n)\frac{1}{n\alpha}}\right] \\
&= e^{-(\alpha \ln \alpha)\frac{1}{\alpha}+1} = \frac{e}{\alpha},
\end{aligned}$$

podemos concluir que también será $\frac{e}{\alpha}$ su límite superior, y probamos así que el tipo exponencial verifica

$$\tau e k = \frac{e}{\alpha},$$

es decir, $\tau = 1$ (véase de nuevo el apéndice C).

1.2. Series de Potencias Formales

Dada una sucesión arbitraria $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ de elementos del espacio de Banach $\mathbb{E}$, las series

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

son llamadas series de potencias formales (en la variable z); el término formal enfatiza el hecho de que el radio de convergencia de estas series bien puede ser igual a cero. En caso de que el radio de convergencia ρ sea mayor que 0 (posiblemente infinito), se dice que la serie converge.

Definición 1.17. Si $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ es una serie de potencias para la cual, para algunas constantes positivas, c, K y $s \geq 0$ tenemos:

$$\|f_n\| \leq cK^n \Gamma(1 + sn), \tag{1.2}$$

para cada $n \geq 0$, entonces diremos que $\hat{f}$ es una *serie de potencias formal de Gevrey de orden* s, y escribimos $\mathbb{E}[[z]]_s$ para el conjunto de todas estas series de potencias formales.
Obsérvese que (1.2) se tiene para $s = 0$ si y sólo si la serie de potencias converge; por tanto, $\mathbb{E}[[z]]_0 = \mathbb{E}\{z\}$; en efecto, si (1.2) se da con $s = 0$, al tenerse que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1,$$

tenemos que

$$\|f_n\| \leq cK^n.$$

Entonces, si tomamos $|z| \leq \frac{1}{K}$, se tiene que

$$\|f_n z^n\| = \|f_n\||z|^n < c(K|z|)^n,$$

lo cual dice que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

converge absolutamente, y como $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach, tendremos garantizada la convergencia de la serie.
Recíprocamente, si se tiene que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

tiene radio de convergencia $\rho > 0$ por el criterio de Hadamard

$$0 < \rho = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f_n\|} \right)^{-1}.$$

Esto dirá, por definición de límite superior, que dada una constante $K > \frac{1}{\rho}$, existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de tal forma que

$$\|f_n\|^{\frac{1}{n}} \leq K,\ n \geq n_0,$$

es decir,

$$\|f_n\| \leq K^n,$$

para todo $n \geq n_0$. Ahora, si escogemos una constante $c > 0$ adecuada tendremos garantizado el hecho de que

$$\|f_n\| \leq cK^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces se tendrá (1.2) para $s = 0$, probando que $\mathbb{E}[[z]]_0 = \mathbb{E}\{z\}$.

Capítulo 2

Desarrollos asintóticos

Se dedicará este capítulo a la presentación del concepto de desarrollo asintótico, introducido por H. Poincaré a finales del siglo XIX. Se estudiará sus principales propiedades algebraicas y analíticas, y se introducirá la aplicación de Borel asintótica. Por último, se probará que esta aplicación es sobreyectiva en cada sector prefijado de la superficie de Riemann del logaritmo, es decir, una serie de potencias arbitraria es siempre el desarrollo asintótico de una función adecuada.

Definición 2.1. Dada una región sectorial G, una función $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ y una serie formal de potencias $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, diremos que $\hat{f}(z)$ es *el desarrollo asintótico de $f(z)$ en G* cuando $z \to 0$, si para cada número natural $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G existe una constante $c = c(N, \overline{S}) > 0$ tal que:

$$\|f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\| \leq c|z|^N, \quad z \in \overline{S}. \tag{2.1}$$

La definición que acabamos de dar se traduce en lo siguiente: el término

$$r_f(z, N) = z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big),$$

llamado el *resto* de orden N del desarrollo asintótico de f en G, es acotado en el origen, para cada $N \geq 0$ (en el sentido de la definición 1.8). Si esto ocurre, escribiremos, para abreviar, $f(z) \sim \hat{f}(z)$ en G, y cada vez que utilicemos esta notación, estaremos escribiendo: G es una región sectorial, $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ y $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ es el desarrollo asintótico de f en G.

Nota: Si $N = 0$, se debe entender que la suma parcial involucrada en la definición del resto de orden N del desarrollo asintótico de f en G es 0.

La siguiente proposición estudiará el comportamiento del resto de orden N del desarrollo asintótico de f en G:

Proposición 2.2. Sea G una región sectorial. Sea f una función holomorfa en G a valores en $\mathbb{E}$ y sea $f(z) \sim \hat{f}(z)$ en G para alguna serie de potencias $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{E}[[z]]$; entonces:

(a) Los restos de orden N del desarrollo asintótico de f en G son continuos en el origen (en el sentido de la definición 1.9), y además:

$$r_f(z, N) \to f_N, \quad \overline{S} \ni z \to 0, \quad N \geq 0.$$

En particular, la serie de desarrollo asintótico de f en G es única.

(b) Suponemos que la amplitud de G es mayor que 2π y $f(z)$ una función univaluada. Entonces $f(z)$ es holomorfa en el origen, y $\hat{f}$ converge y coincide con el desarrollo en series de potencias de $f(z)$ en el origen.

Demostración:

(a) Se tiene que, para cada $N \geq 0$ y $z \in G$,

$$zr_f(z, N+1) = z\Big(z^{-(N+1)}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n z^n\Big)\Big) = -f_N + r_f(z, N).$$

Si hacemos tender z a 0 al ser $\psi(z) = zr_f(z, N+1)$ un producto de funciones en G, una que tiende hacia cero y otra función que está acotada en el origen (en el sentido de la definición 1.8), tendremos que $\psi(z) \to 0$ cuando $z \to 0$ siguiendo subsectores cerrados $\overline{S}$ de G. Así pues,

$$r_f(z, N) - f_N \to 0, \quad z \to 0,$$

y de aquí concluimos que

$$r_f(z, N) \to f_N, \quad \overline{S} \ni z \to 0, \quad N \geq 0.$$

De acuerdo con estas expresiones, los coeficientes de la serie del desarrollo asintótico de f en G se pueden obtener, de forma recurrente, como límites de $r_f(z,N)$, lo que garantiza la unicidad de $\hat{f}$, es decir, de su desarrollo asintótico.

(b) Bajo nuestras hipótesis, $f(z)$ es una función holomorfa y univaluada en un disco punteado centrado en el origen, función que permanecerá acotada en un entorno del origen de acuerdo con la definición 2.1 para $N=0$, y considerando un subsector propio y acotado de amplitud mayor que 2π. Por lo tanto, el origen es una singularidad evitable de f, y sabemos que si f es holomorfa en todo un disco podrá ser escrita como desarrollo en serie de potencias alrededor del origen; además, como los desarrollos en series de potencias son, al mismo tiempo, un desarrollo asintótico, utilizando (a) tendremos garantizado que $\hat{f}(z)$ converge y es el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(z)$ en el punto 0. □

Lema 2.3. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach y G una región sectorial. Sea $f \in \mathcal{H}(G,\mathbb{E})$. Entonces, para $N \geq 1$ y cada par de puntos $z, z_0 \in G$ de modo que el segmento $[z_0, z]$ esté contenido en G, se tiene que

$$\frac{1}{(N-1)!}\int_{z_0}^{z}(z-w)^{N-1}f^{(N)}(w)\ dw = f(z) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Demostración: Este resultado se sigue al aplicar el principio de inducción. Para $N=1$, se verifica que

$$\int_{z_0}^{z} f'(w)\ dw = f(z) - f(z_0),$$

por la regla de Barrow. Luego el resultado se sigue para $N=1$.
Por hipótesis de inducción, vamos a suponer que el resultado se verifica para un número $N \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(N-1)!}\int_{z_0}^{z}(z-w)^{N-1}f^{(N)}(w)\ dw = f(z) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

A la integral del lado izquierdo de esta última igualdad la denotaremos por I_N. Entonces, veamos que se cumple que

$$\frac{1}{N!}\int_{z_0}^{z}(z-w)^N f^{(N+1)}(w)\ dw = f(z) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Entonces, integrando por partes I_{N+1}, obtendremos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N!}\int_{z_0}^{z}(z-w)^N f^{(N+1)}(w)\ dw\\
&=\frac{1}{N!}\Big((z-w)^N f^{(N)}(w)|_{w=z_0}^{w=z} + N\int_{z_0}^{z}(z-w)^{N-1}f^{(N)}(w)\ dw\Big)\\
&=-\frac{1}{N!}(z-z_0)^N f^{(N)}(z_0) + I_N,
\end{aligned}$$

y aplicando la hipótesis de inducción, se logra ver que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N!}\int_{z_0}^{z}(z-w)^N f^{(N+1)}(w)\ dw\\
&=-\frac{1}{N!}(z-z_0)^N f^{(N)}(z_0) + f(z) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,
\end{aligned}$$

que es el resultado solicitado. □

El resultado siguiente establece diferentes caracterizaciones de la existencia de desarrollo asintótico para una función.

Proposición 2.4. Sea f una función holomorfa en una región sectorial G. Entonces, los siguientes resultados son equivalentes:

(a) f admite un desarrollo asintótico.

(b) La función f es indefinitamente diferenciable en el origen, es decir, f y todas sus derivadas sucesivas son diferenciables en el origen.

(c) Todas las derivadas $f^{(n)}(z)$ son continuas en el origen.

(d) Para todo subsector $T \ll G$, y para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\sup_{z\in T}\|f^{(n)}(z)\| < \infty.$$

Además, si $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, entonces

$$f^{(n)}(0) = n! f_n \text{ en (b) } \text{ y } \lim_{z\to 0} f^{(n)}(z) = n! f_n \text{ en (c)}.$$

Demostración: $(b) \Rightarrow (c)$ Como f es indefinidamente diferenciable en el origen, el lema 1.13 aplicado a $f^{(n-1)}$ garantizará que la derivada $f^{(n)}(z)$ es continua en el origen.
$(c) \Rightarrow (b)$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ aplicamos el lema 1.13 a $f^{(n)}$, y obtenemos que f y todas sus derivadas sucesivas son diferenciables en el origen.
$(a) \Rightarrow (d)$ Sea $\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ el desarrollo asintótico de f en G. Es obvio que

$$f^{(n)}(z) = \Big(f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^k\Big)^{(n)}.$$

Fijado un subsector cerrado $\overline{T}$ de G, podemos considerar un nuevo sector cerrado $\overline{S}$ de G de modo que $\overline{T}$ esté contenido en el interior de $\overline{S}$. Podemos elegir, entonces una cantidad $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $z \in \overline{T}$, el disco $\overline{B}(z, \varepsilon|z|) \subset \overline{S}$, y aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$\Big(f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^k\Big)^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{f(w) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k w^k}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

Entonces, para cada $z \in T$, se tiene que

$$\|f^{(n)}(z)\| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi\varepsilon|z| \frac{1}{\varepsilon^{n+1}|z|^{n+1}} \operatorname{máx}\Big\{\Big\|f(w) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k w^k\Big\| \ : \ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|)\Big\}.$$

Ahora bien, como suponemos (a), tendremos

$$\Big\|f(w) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k w^k\Big\| \leq C_{n,S}|w|^n, \ w \in S$$

donde $C_{n,S}$ será una constante que dependerá de S y de cada número entero positivo n. Si $w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|)$,

$$|w| \leq |w - z| + |z| = |z|(\varepsilon + 1),$$

concluiremos que

$$\begin{aligned}\|f^{(n)}(z)\| &\leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi\varepsilon|z| \frac{1}{\varepsilon^{n+1}|z|^{n+1}} \operatorname{máx}\Big\{\Big\|f(w) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k w^k\Big\| \ : \ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|)\Big\} \\ &\leq C_{n_S} \frac{n!(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon^n}.\end{aligned}$$

Esto es, se tiene que

$$\sup_{z\in T} \|f(z)\| < \infty.$$

$(d) \Rightarrow (c)$ Se razona para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ como en la prueba de 1) $\Rightarrow$ 2) del lema 1.13.
$(c) \Rightarrow (a)$ Sea $\overline{S}$ un sector cerrado de G. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ existe

$$\lim_{z\to 0, z\in\overline{S}} f^{(n)}(z),$$

que denotaremos por $n!f_n$. Sean $z \in \overline{S}$ y $\lambda \in (0,1)$. Entonces, $\lambda z \in \overline{S}$ y, por el lema 2.3, obtenemos

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(\lambda z)}{n!}(z-\lambda z)^n = \frac{1}{(N-1)!}\int_{\lambda z}^{z} (z-w)^{N-1} f^{(N)}(w)\, dw. \quad (2.2)$$

siendo el lado derecho de la igualdad la integral a lo largo del segmento que une los puntos λz y z.
Si en (2.2) hacemos $\lambda \to 0$, obtendremos, gracias al teorema de convergencia dominada y a lo anterior, que

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n = \frac{1}{(N-1)!}\int_0^z (z-w)^{N-1} f^{(N)}(w)\, dw.$$

Concluimos el resultado tomando normas y acotando, teniéndose en cuenta que, como existe el límite cuando $w \to 0$ de $f^{(n)}(w)$, las derivadas de f están acotadas en $\overline{S}$, y con ello, $\sup_{w\in\overline{S}} \|f^{(n)}(w)\| \leq C$ para una constante C y

$$\begin{aligned} \Big\| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \Big\| &= \frac{1}{(N-1)!}\Big\| \int_0^z (z-w)^{N-1} f^{(N)}(w)\, dw \Big\| \\ &\leq \frac{C}{(N-1)!}|z||z|^{N-1} \\ &= \tilde{C}|z|^N, \end{aligned}$$

con lo que se concluye. □

Se denotará por $\mathcal{A}(G,\mathbb{E})$ al conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{H}(G,\mathbb{E})$ que admiten un desarrollo asintótico $\hat{f}(z)$. Por la proposición anterior, apartado (a), para toda función $f \in \mathcal{A}(G,\mathbb{E})$ hay, precisamente, un desarrollo asintótico, $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ tal que $f(z) \sim \hat{f}(z)$ en la región sectorial G. Por lo tanto, tendremos una aplicación:

$$J : \mathcal{A}(G,\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}[[z]], \quad z \longmapsto \hat{f} = Jf, \quad (2.3)$$

que será llamada la aplicación de Borel asintótica, asociando cada función f con su desarrollo asintótico.

2.1. Propiedades algebraicas y analíticas

Los resultados que siguen muestran que $\mathcal{A}(G, \mathbb{E})$, bajo las operaciones usuales de suma de funciones, producto por un escalar y el producto de funciones y suponiendo que $\mathbb{E}$ es un álgebra de Banach, es un álgebra diferencial, y J es un homomorfismo suprayectivo entre $\mathcal{A}(G, \mathbb{E})$ y $\mathbb{E}[[z]]$. Sin embargo, hay ejemplos que impiden la inyectividad de J, incluso si consideramos regiones de amplitud grande (esto es, de amplitud que excede 2π).

Teorema 2.5. Dada una región sectorial G, se consideran $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$. Entonces $f_1 + f_2 \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$ y $J(f_1 + f_2) = Jf_1 + Jf_2$. En otras palabras,

$$f_j(z) \sim \hat{f}_j(z) \quad z \in G, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

implica que

$$f_1(z) + f_2(z) \sim \hat{f}_1(z) + \hat{f}_2(z), \quad z \in G.$$

Demostración: Se sigue directamente de la definición, puesto que, si, $f_1(z) \sim \hat{f}_1(z)$ en G, siendo $\hat{f}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)} z^n$ entonces, por definición de desarrollo asintótico, para cada número natural $N \in \mathbb{N}$ y cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G, existe una constante $c_1 = c_1(N, \overline{S}) > 0$ de tal forma que

$$|z|^{-N} \left\| f_1(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(1)} z^n \right\| \leq c_1, \ z \in \overline{S}.$$

De manera análoga, si $f_2(z) \sim \hat{f}_2(z)$ en G, siendo $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2)} z^n$, entonces existe una constante $c = c_2(N, \overline{S}) > 0$ de tal forma que

$$|z|^{-N} \left\| f_2(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(2)} z^n \right\| \leq c_2, \ z \in \overline{S}.$$

Entonces se tiene, para todo $z \in \overline{S}$:

$$\begin{aligned}
&|z|^{-N}\Big\|f_1(z) + f_2(z) - \sum_{n=0}^{N-1}(f_n^{(1)} + f_n^{(2)})z^n\Big\| \\
&\leq |z|^{-N}\Big(\Big\|f_1(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(1)}z^n\Big\| + \Big\|f_2(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(2)}z^n\Big\|\Big) \\
&= |z|^{-N}\Big\|f_1(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(1)}z^n\Big\| + |z|^{-N}\Big\|f_1(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(2)}z^n\Big\| \leq c_1 + c_2.
\end{aligned}$$

Esto pone de manifiesto que $f_1 + f_2 \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$, y que $f_1 + f_2 \sim \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ en G. $\square$

Esto es, el desarrollo asintótico de una suma de funciones será, como cabría esperar, la suma de sus desarrollos.
Si $\mathbb{E}$ es un álgebra de Banach, entonces el producto de dos elementos de $\mathcal{A}(G, \mathbb{E})$ pertenece, de nuevo, a $\mathcal{A}(G, \mathbb{E})$. Este hecho será un corolario del siguiente resultado más general.

Teorema 2.6. Sean $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ dos espacios de Banach y G una región sectorial. Sea $f \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$, $\alpha \in \mathcal{A}(G, \mathbb{C})$, y $T \in \mathcal{A}(G, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$. Entonces:

$$Tf \in \mathcal{A}(G, \mathbb{F}), \quad J(Tf) = (JT)(Jf),$$

$$\alpha f \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E}), \quad J(\alpha f) = (J\alpha)(Jf),$$

donde se considera el producto de Cauchy de series de potencias formales.

Nota: Entenderemos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} Tf: & G & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & z & \longmapsto & (Tf)(z) = T(z)\Big(f(z)\Big) \end{array}$$

Demostración: La prueba de los dos resultados es completamente análoga la una de la otra. Probaremos, únicamente, el primer resultado.
Sea $(JT)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n$, $(Jf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, de modo que

$$\Big(JT\Big)\Big(Jf\Big)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{n} T_{n-m} f_m\Big)z^n$$

Veamos que

$$
\begin{aligned}
&|z|^{-N}\Big\|T(z)(f(z))-\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{n}T_{n-m}f_m\Big)z^n\Big\| \\
&\leq \|T(z)\|\|r_f(z,N)\|+\sum_{m=0}^{N-1}\|f_m\|\|r_T(z,N-m)\|,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ya que como

$$
T(z)(f(z))=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{n}T_{n-m}f_m\Big)z^n,
$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
&|z|^{-N}\Big\|T(z)(f(z))-\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{n}T_{n-m}f_m\Big)z^n\Big\| \\
&=|z|^{-N}\Big\|T(z)\Big(f(z)-\sum_{k=0}^{N-1}f_kz^k\Big)+\sum_{k=0}^{N-1}T(z)f_kz^k-\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{n}T_{n-m}f_m\Big)z^n\Big\| \\
&\leq \|T(z)\|\|r_f(z,N)\|+|z|^{-N}\|\sum_{k=0}^{N-1}T(z)f_kz^k-\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{n}T_{n-m}f_m\Big)z^n\| \\
&\leq \|T(z)\|\|r_f(z,N)\|+\sum_{k=0}^{N-1}\|f_k\|r_T(z,N-k)\| \\
&+\Big\|z^{-N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-k-1}T_lf_kz^{k+l}\Big)-z^{-N}\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{n}T_{n-m}f_mz^n\Big)\Big\|
\end{aligned}
$$

Puesto que se tiene que

$$
\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-k-l}T_lf_kz^{k+l}\Big)=\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{k}T_{k-l}f_l\Big)z^k,
$$

el último sumando de la última desigualdad es 0 y se obtiene la desigualdad 2.4. Por otra parte, basta tener en cuenta que T es acotada en cada subsector cerrado de G (por admitir desarrollo asintótico) para concluir que Tf admite la serie $(JT)(Jf)$ como desarrollo asintótico en G. $\square$

El teorema que acabamos de probar implica de manera inmediata el siguiente corolario.

Corolario 2.7 (Consecuencia del Teorema 2.5.). Sea $\mathbb{E}$ un álgebra de Banach y sean $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$. Entonces $f_1 f_2 \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$ y

$$J(f_1 f_2) = (Jf_1)(Jf_2).$$

En otras palabras,

$$f_j(z) \sim \hat{f}_j(z) \quad z \in G, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

implica

$$f_1(z) f_2(z) \sim \hat{f}_1(z) \hat{f}_2(z) \quad z \in G.$$

Demostración: Si $\mathbb{E}$ es un álgebra de Banach, cada $f \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$ se puede identificar con un elemento en el espacio de funciones $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$. En efecto, consideramos la aplicación T asociada a $f_2 \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$

$$\begin{array}{rccl} T\colon & G & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}) \\ & z & \longmapsto & Tz, \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccl} Tz\colon & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & v & \longmapsto & f_2(z) \cdot v. \end{array}$$

Si ponemos $f = f_1 \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$, tendremos que

$$\begin{array}{rccl} Tf\colon & G & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & z & \longmapsto & (Tf)(z) = (Tz)(f_1(z)) = f_1(z) \cdot f_2(z). \end{array}$$

Concluimos que dicho producto está bien definido ya que $\mathbb{E}$ es un álgebra de Banach. Bastará, pues, aplicar el teorema 2.6 a Tf para concluir la demostración de este resultado. $\square$

Notemos que $f(z) \sim \hat{f}(z)$ implica la continuidad de $f(z)$ en el origen; por lo tanto, $\int_0^z f(w)\, dw$ está bien definida (donde la integral se entiende calculada sobre el segmento que une 0 y z). Para $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$, definimos $\int_0^z \hat{f}(w)\, dw$ integrando el desarrollo asintótico de f término a término. De manera análoga, definimos la derivada del desarrollo asintótico de f como la derivada formal término a término del desarrollo asintótico de f, esto es:

$$\int_0^z \hat{f}(w)\, dw = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{n} z^n,$$

$$\hat{f}'(z) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \Big)' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) f_{n+1} z^n.$$

Teorema 2.8. Dada una región sectorial G, suponemos que $f(z) \sim \hat{f}(z)$, $z \in G$. Entonces:

$$f'(z) \sim \hat{f}'(z), \quad \int_0^z f(w)\, dw \sim \int_0^z \hat{f}(w)\, dw, \quad z \in G.$$

Demostración: Fijado un subsector cerrado $\overline{T}$ de G, podemos considerar un nuevo sector cerrado $\overline{S}$ de G de modo que $\overline{T}$ esté contenido en el interior de $\overline{S}$. Podemos elegir entonces una cantidad $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $z \in \overline{T}$, el disco $\overline{B}(z, \varepsilon|z|) \subset \overline{S}$, y aplicando la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}
&\Big\| f'(z) - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) f_{n+1} z^n \Big\| \\
&= \Big\| \Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n z^n \Big)' \Big\| \\
&= \Big\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{f(w) - \sum_{n=0}^{N} f_n w^n}{(w-z)^2}\, dw \Big\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\varepsilon|z|}{\varepsilon^2|z|^2} \text{máx} \Big\{ \Big\| f(w) - \sum_{n=0}^{N} f_n w^n \Big\| \;:\; w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|) \Big\},
\end{aligned}$$

Dado que se tiene que $f(z) \sim \hat{f}(z)$ en G, existe una constante c dependiente de $\overline{S}$ y de cada entero natural N de tal forma que

$$\Big\| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \Big\| \leq C|z|^N. \tag{2.5}$$

y tenemos, por (2.5), y por la desigualdad triangular que

$$\Big\| f'(z) - \Big(\sum_{n=0}^{N-1} (n+1) f_{n+1} z^n \Big) \Big\| \leq C \frac{(1+\varepsilon)^{N+1}}{\varepsilon} \frac{|z|^{N+1}}{|z|} = \tilde{C}|z|^N,$$

siendo $\tilde{C} = C\frac{(1+\varepsilon)^{N+1}}{\varepsilon}$, y concluimos el hecho de que

$$f'(z) \sim \hat{f}'(z).$$

Por otra parte, observemos que si $\overline{S}$ es un subsector cerrado de G y $z \in \overline{S}$, entonces el segmento que une los puntos 0 y z está contenido en $\overline{S}$. Entonces, para cada $N \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \int_0^z f(w)\, dw - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{f_{n-1}}{n} z^n \Big\| \\
&= \Big\| \int_0^z \Big(f(w) - \sum_{n=0}^{N-2} f_n w^n \Big)\, dw \Big\| \\
&\le |z| \max \Big\{ \Big\| f(w) - \sum_{n=0}^{N-2} f_n w^n \Big\| \ : \ w \in [0, z] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Por (2.5) concluimos que

$$
\Big\| \int_0^z f(w)\, dw - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{f_{n-1}}{n} z^n \Big\| \le C|z|^{N-1}|z| = C|z|^N,
$$

como se quería ver. □

Antes de proceder a probar el teorema de Borel-Ritt, que establece la sobreyectividad de la aplicación J de Borel definida en (2.3), demostraremos un lema previo.

Lema 2.9. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) \ge 0\}$. Entonces, se tiene que

$$
|1 - \exp(-z)| \le |z|, \ \ z \in \Omega.
$$

Demostración: Si logramos probar que para cada $z, w \in \Omega$ se tiene que

$$
|e^w - e^{-z}| \le |z + w| e^{\max\{\mathcal{R}(w), -\mathcal{R}(w)\}},
$$

reduciéndose al caso $w = 0$ concluiríamos la demostración. Sabemos que $e^w - e^{-z} = \int_{[-z,w]} e^v dv$, y se puede establecer la acotación:

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_{[-z,w]} e^v \, dv \Big| &\le \max\{|e^v| \ : \ v \in \gamma^*\} long([-z, w]) \\
&= |w + z| e^{\max\{\mathcal{R}(w), -\mathcal{R}(z)\}},
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

Teorema 2.10 (Teorema de Borel-Ritt). Para cualquier región sectorial G y cualquier serie de potencias formal $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$, existe $f \in \mathcal{A}(G, \mathbb{E})$ de tal forma que $f(z) \sim \hat{f}(z)$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, tomemos G un sector $S(d,\alpha)$ no acotado y sea $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ una serie de potencias dada. Para $\beta = \pi/\alpha$, y $c_n = (\|f_n\| n!)^{-1}$ en el caso $f_n \neq 0$, resp. $c_n = 0$ en caso contrario, sea $w_n(z) = 1 - \exp\left[-c_n/(ze^{-id})^{\beta}\right]$. Vamos a encontrar una cota para $|w_n(z)|$. Como se tiene que

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{c_n}{z^{\beta}\exp(-id\beta)}\right) &= \frac{c_n}{|z|^{\beta}}\Re(\exp(i\beta(d-\arg(z))))\\ &= \frac{c_n}{|z|^{\beta}}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(d-\arg(z))\right),\end{aligned}$$

y $z \in S(d,\alpha)$, ocurre que $|d - \arg(z)| < \frac{\alpha}{2}$ y entonces

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\alpha}(d-\arg(z)) < \frac{\pi}{2},$$

y con ello

$$\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(d-\arg(z))\right) > 0,$$

de modo que

$$\Re\left(\frac{c_n}{(z^{\beta}\exp(-id\beta))}\right) = \frac{c_n}{|z|^{\beta}}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(d-\arg(z))\right) > 0,$$

y el lema 2.9 es aplicable. Entonces, obtendremos que

$$|w_n(z)| = |1-\exp[-c_n/(ze^{id})^{\beta}]| \leq \left|\frac{c_n}{z^{\beta}\exp(i\beta d)}\right| = \frac{c_n}{|z^{\beta}|} \leq \frac{|z|^{-\beta}}{n!\|f_n\|},$$

y con todo esto, llegamos a

$$\|f_n\||z|^n|w_n(z)| \leq \frac{|z|^{n-\beta}}{n!}.$$

Esto prueba la convergencia puntual en G, y uniforme en los compactos de G de $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n w_n(z)$, esto es, $f \in \mathcal{H}(G,\mathbb{E})$. Además:

$$z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big) = f_N(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{n-N}\exp\left[-c_n/(ze^{-id})^{\beta}\right],$$

donde $f_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} f_n z^{n-N} w_n(z)$ está acotada en G en el sentido de la definición 1.8, y los otros términos tienden a cero cuando $z \to 0$ en cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G, y, por lo tanto, están acotados en el origen. En efecto, si $\psi(z) = \sum_{n=N+[\beta]+1}^{\infty} f_n z^{n-N} w_n$, donde por $[\beta]$ denotamos la parte entera de β, tendremos entonces

$$
\begin{aligned}
\|\psi(z)\| &\leq \sum_{n=N+[\beta]+1}^{\infty} \|f_n\||z|^{n-N}|w_n| \\
&\leq \sum_{n=N+[\beta]+1}^{\infty} \frac{|z|^{n-N-\beta}}{n!} \leq \sum_{n=N+[\beta]+1}^{\infty} |z|^{n-N-\beta} \\
&= \frac{|z|^{[\beta]+1-\beta}}{1-|z|}
\end{aligned}
$$

y como siempre se tiene que

$$
[\beta] \leq \beta \leq [\beta]+1,
$$

el último término

$$
\frac{|z|^{[\beta]+1-\beta}}{1-|z|}
$$

tiende a 0 cuando $z \to 0$.
Entonces, como

$$
\begin{aligned}
& z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big) \\
&= |z|^{-N}\Big\|f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big\| \\
&= |z|^{-N}\Big\|f(z) - \sum_{n=0}^{N+[\beta]+1} g_n z^n + \sum_{n=N}^{N+[\beta]+1} g_n z^n\Big\| \\
&\leq |z|^{-N}\|\psi(z)\| + \sum_{n=N}^{N+[\beta]+1} \|g_n z^{n-N}\|,
\end{aligned}
$$

y lo que tenemos es que el primer sumando tiende a 0 cuando $z \to 0$ y el segundo sumando está acotado, puesto que tenemos una suma finita y el exponente $n-N$ es siempre positivo, lo cual prueba que el resto de orden N de f en el punto z está acotado en el origen. □

A continuación, supondremos que $\mathbb{E}$ es un álgebra de Banach con elemento unidad e, y que f es una función que admite inversa algebraica y también desarrollo asintótico con término independiente invertible. Nuestro objetivo es obtener el desarrollo asintótico de $f^{-1}(z)$.

Comenzamos probando un lema auxiliar.

Lema 2.11. Sea $\mathbb{E}$ un álgebra de Banach con elemento unidad e. Dada una región sectorial G, suponemos que $f(z) \sim \hat{f}$ en G. Supondremos, además, que el término constante f_0 de $\hat{f}(z)$ y todos los valores $f(z)$, $z \in G$, son elementos invertibles en $\mathbb{E}$. Si $\hat{f}^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n z^n$ es la inversa formal de la serie de potencias $\hat{f}$, entonces

$$z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n z^n\Big) f(z) = -\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}_m r_f(z, N-m).$$

Demostración: Se tendrá que

$$\hat{f}(z)\hat{f}^{-1}(z) = \hat{e} = e + 0z + 0z^2 + \cdots$$

Entonces, si $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, se tiene que:

$$\hat{e} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{n} \tilde{f}_m f_{n-m}\Big) z^n.$$

Ahora bien, tendremos que $f_0 \tilde{f}_0 = e$, y para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{m=0}^{n} \tilde{f}_m f_{n-m} = 0, \tag{2.6}$$

y con ello

$$\begin{aligned}
z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n z^n\Big) f(z) &= z^{-N} f(z)\Big(f^{-1}(z) - \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}_m z^m\Big) \\
&= z^{-N} - \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}_m z^{m-N} f(z) \\
&= z^{-N} - \sum_{m=0}^{N-1}\Big(\tilde{f}_m z^{m-N}\Big(f(z) - \sum_{k=0}^{N-m-1} f_k z^k\Big) + \sum_{k=0}^{N-m-1} \tilde{f}_m f_k z^{m-N+k}\Big) \\
&= z^{-N} - \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}_m r_f(z, N-m) - z^{-N}\sum_{m=0}^{N-1}\Big(\sum_{k=0}^{N-m-1} \tilde{f}_m f_k z^{m+k}\Big).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

De nuevo, el último sumatorio doble se puede reordenar, resultando

$$-z^{-N}\sum_{m=0}^{N-1}\Big(\sum_{k=0}^{N-m-1} \tilde{f}_m f_k z^{m+k}\Big) = -z^{-N}\sum_{m=0}^{N-1}\Big(\sum_{k=0}^{m} \tilde{f}_m f_{n-m}\Big) z^m.$$

Por (2.6), se tendrá entonces que

$$\sum_{m=0}^{N-1}\Big(\sum_{k=0}^{N-m-1}\tilde{f}_m f_k z^{m+k}\Big)=e,$$

y por lo tanto, llegamos a la igualdad pedida. □

Podemos ya probar el resultado que caracteriza la inversibilidad de los elementos en $\mathcal{A}(G,\mathbb{E})$ en el caso en el que $\mathbb{E}$ sea un álgebra de Banach con elemento unidad.

Teorema 2.12. Sea $\mathbb{E}$ un álgebra de Banach con elemento unidad e. Dada una región sectorial G, suponemos que $f(z)\sim\hat{f}(z)$ en G. Además, suponemos que el término constante f_0 de $\hat{f}(z)$ y todos los valores $f(z)$, $z\in G$, son elementos invertibles en $\mathbb{E}$. Entonces

$$f^{-1}(z)\sim\hat{f}^{-1}(z),\quad z\in G.$$

Demostración: Como todos los elementos invertibles de $\mathbb{E}[[z]]$ son aquellos cuyo término constante es invertible en $\mathbb{E}$, este hecho pone de manifiesto la existencia de $\hat{f}^{-1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{f}_n z^n$. Dado un subsector cerrado $\overline{S}$ de G, existe $c_N>0$ de tal forma que $\|r_f(z,N)\|\leq c_N$ para $N\geq 0$ y $z\in\overline{S}$ y, usando el apartado (a) de la proposición 2.2, $\|f_N\|\leq c_N$ para cada $N\geq 0$. Por el lema 2.11 obtenemos

$$z^{-N}\Big(f(z)-\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}_n z^n\Big)f(z)=-\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}_n r_f(z,N-n).$$

Por otra parte como se tiene que $f_0\neq 0$ (para que f_0 sea invertible), y f es continua en el compacto

$$\overline{S}\cap\{z\in\mathcal{R}\ :\ |z|\geq\varepsilon\},\ \text{para cada}\ \varepsilon>0,$$

llegamos a que, por el teorema de Weierstrass, existe $\delta>0$ de tal forma que

$$\|f(z)\|\geq\delta>0,\ \text{en}\ \overline{S}.$$

Notemos que cuando $z\to 0$ se tiene que $\hat{f}(z)\to f_0$ y como se tenía que $f_0\neq 0$ y $f(z)\sim\hat{f}(z)$ en G cuando $z\to 0$ entonces $f(z)\neq 0$ en un entorno

de 0.
Con todo esto y dado que se verifica el lema 2.11 deducimos que

$$
\begin{aligned}
\left\| z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n z^n\Big) \right\| &\leq \|f(z)\|^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \|f_n\| \|r_f(z, N-n)\| \\
&\leq \delta^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_n c_{N-n}
\end{aligned}
$$

completando la demostración. $\square$

Capítulo 3

Desarrollos Gevrey

Este capítulo se centrará en el estudio de los desarrollos asintóticos de tipo Gevrey, caracterizados por imponer una limitación en el crecimiento de los restos de orden N en términos de, básicamente, una potencia de $N!$. Como se verá, este concepto conserva las propiedades de estabilidad respecto de las operaciones algebraicas y analíticas, pero el carácter de la aplicación de Borel asintótica dependerá ahora de la amplitud de la región sectorial en la que se trabaje: será inyectiva para amplitudes grandes, y sobreyectiva para amplitudes pequeñas, no siendo nunca biyectiva.

Definición 3.1. Dado $s > 0$, f una función holomorfa en una región sectorial G y una serie de potencias $\hat{f}(z) = \sum f_n z^n$, diremos que $\hat{f}(z)$ es el desarrollo asintótico Gevrey de orden s si para cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G, existen constantes $c, K > 0$ de tal forma que para cada entero no negativo N, y cada $z \in \overline{S}$ se tiene que

$$\|r_f(z, N)\| \leq cK^N \Gamma(1 + sN), \tag{3.1}$$

donde Γ es la función Gamma de Euler (ver apéndice D). Si esto ocurre, escribiremos para abreviar $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G.

Esta terminología no está unánimemente aceptada, pero está en consonancia con la terminología clásica usada en la mayoría de documentos donde se explican los desarrollos de Gevrey. Mientras que para un desarrollo asintótico general, la cota c_N para los restos $\|r_f(z, N)\|$ puede ser completamente arbitraria, notemos que para un desarrollo Gevrey de una función f de orden s, el modo en que esta cota crezca con respecto a N está restringido. Como podremos ver, esto traerá consecuencias importantes.
Observemos que $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G implica $f(z) \sim \hat{f}(z)$ en G en el sentido del capítulo anterior; además, de la proposición 2.4, podemos concluir que $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G implica $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}[[z]]_s$.

Observación 3.2. En la definición de desarrollo Gevrey de orden $s > 0$ para una función f, la cota que exigimos en (3.1) es equivalente, por la fórmula de Stirling, a establecer cotas de la forma

$$\|r_f(z, N)\| \leq cK^N (N!)^s, \tag{3.2}$$

siendo c y K constantes no necesariamente iguales a las de (3.1). En efecto, por la fórmula de Stirling, sabemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(1 + sN) &= sN\Gamma(sN) \\
&\approx sN\sqrt{2\pi}(sN)^{sN}e^{-sN}(sN)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2\pi Ns}(s^s)^N N^{sN}e^{-sN} \\
&= (s^s)^N \sqrt{s}\sqrt{2\pi N} N^{sN}e^{-sN},
\end{aligned}$$

mientras que

$$(N!)^s = \Gamma(1 + N)^s \approx (\sqrt{2\pi N})^s N^{Ns}e^{-Ns},$$

y, dado el comportamiento de las expresiones potenciales frente a las exponenciales, queda visto el hecho de que las acotaciones que pedíamos en (3.1) son equivalentes a las acotaciones del tipo (3.2)

Para $\tilde{s} > s$, la fórmula de Stirling implica

$$\Gamma(1 + sN)/\Gamma(1 + \tilde{s}N) \to 0, \quad N \to \infty,$$

puesto que si utilizamos cotas del tipo (3.2) llegamos a que existen constantes $c, K > 0$ tales que

$$\Gamma(1 + sN)/\Gamma(1 + \tilde{s}N) \leq CK^N (N!)^{s-\tilde{s}} \to 0, \text{ cuando } N \to \infty;$$

por lo tanto $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G implica $f(z) \sim_{\tilde{s}} \hat{f}(z)$ en G. Notemos también que si se dan las acotaciones (3.1) o (3.2) para $s = 0$ es equivalente a la holomorfía en el origen de la función f, y $\hat{f}(z)$ será su desarrollo en serie de Taylor en $z_0 = 0$.

Proposición 3.3. Sea f una función holomorfa en una región sectorial G, y sea $s \geq 0$. Los siguientes asertos son equivalentes:

(a) $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G.

(b) Todas las derivadas $f^{(n)}(z)$ son continuas en el origen, y para cada subsector cerrado $\overline{S}$ de G, existen constantes c, K de tal forma que

$$\frac{1}{n!}\sup_{z\in\overline{S}}\|f^{(n)}(z)\| \leq cK^n\Gamma(1+sn),$$

para cada $n \geq 0$.

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$ Fijado un subsector cerrado $\overline{T}$ de G, podemos considerar un nuevo subsector cerrado $\overline{S}$ de G de modo que $\overline{T}$ esté contenido en el interior de $\overline{S}$. Entonces, elegimos $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $z \in \overline{T}$, $\overline{B}(z, \varepsilon|z|) \subset \overline{S}$ y aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \Big(f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^k\Big)^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{f(w) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k w^k}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

Ahora, tomando normas y acotando de la forma clásica, llegamos a

$$\begin{aligned}\|f^{(n)}(z)\| &\leq \frac{n!}{2\pi i}\frac{2\pi\varepsilon|z|}{\varepsilon^{n+1}|n|^{n+1}} \max\Big\{\Big\|f(w) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k w^k\Big\| \ : \ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|)\Big\}\\ &\leq \frac{n!}{2\pi}CK^n\Gamma(1+sN)\max\{|w|^n \ : \ w \in \mathbb{S}(z,\varepsilon|z|)\},\end{aligned}$$

para constantes adecuadas $C, K > 0$, y de nuevo, al tenerse por la desigualdad triangular

$$|w| = |w - z + z| \leq |w-z| + |z| = |z|(1+\varepsilon), \text{ si } w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|),$$

llegamos a que

$$\frac{1}{n!}\|f^{(n)}(z)\| \leq \frac{C}{2\pi}K^n\Gamma(1+sn)\frac{(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon^n}|z|^n,$$

para todo $z \in \overline{T}$, lo cual resuelve esta implicación.
Para demostrar la implicación $(b) \Rightarrow (a)$, hemos de hacer tender z_0 a 0 en G en (2.3) para obtener

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n = \frac{1}{(N-1)!}\int_0^z (z-w)^{N-1} f^{(N)}(w)\, dw, \qquad (3.3)$$

Tomando normas y acotando de la manera clásica, tenemos que utilizando también las acotaciones del tipo (3.2)

$$\begin{aligned}\Big\|f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big\| &\le \frac{1}{(N-1)!}|z| \operatorname{máx}\{|z-w|^{N-1}\|f^{(N)}(w)\| \ : \ w \in [0,z]\} \\ &= \frac{1}{(N-1)!}|z|^N \operatorname{máx}\{\|f^{(N)}(w)\| \ : \ w \in [0,z]\} \\ &\le \frac{CN!}{(N-1)!}K^N (N!)^s |z|^N\end{aligned}$$

y llegamos a que

$$\frac{CN!}{(N-1)!}K^N (N!)^s |z|^N \le C\tilde{K}^N (N!)^s |z|^N,$$

como queríamos probar. □

3.1. Propiedades algebraicas y analíticas

Denotemos por $\mathcal{A}_s(G,\mathbb{E})$ al conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{H}(G,\mathbb{E})$, que tienen un desarrollo asintótico Gevrey de orden s. Los siguientes resultados vienen de los análogos de la sección anterior, y prueban que la aplicación de Borel asintótica, definida ahora como

$$J : \mathcal{A}_s(G,\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}[[z]]_s$$

$$f \longmapsto \hat{f} = Jf,$$

es un homomorfismo de álgebras diferenciales, es decir, respeta las operaciones algebraicas y analíticas (derivación e integración) propias de ambos espacios.

Teorema 3.4. Dada una región sectorial G y $s \ge 0$, supongamos que $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_s(G,\mathbb{E})$. Entonces $f_1 + f_2 \in \mathcal{A}_s(G,\mathbb{E})$ y $J(f_1+f_2) = Jf_1 + Jf_2$. En otras palabras,

$$f_j(z) \sim_s \hat{f}_j(z) \text{ en } G, \ 1 \le j \le 2,$$

implica que

$$f_1(z) + f_2(z) \sim_s \hat{f}_1(z) + \hat{f}_2(z) \text{ en } \ G.$$

Demostración: Se sigue directamente de la definición. En efecto, sea $N \in \mathbb{N}$ un número entero no negativo y sea $\overline{S}$ un subsector cerrado de G. Sean $\hat{f}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,1} z^n$ y $\hat{f}_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,2} z^n$. El hecho de que $f_1(z) \sim_s \hat{f}_1(z)$ en G implica que para cada subsector cerrado existen constantes $c_1, K_1 > 0$ de tal forma que para cada entero no negativo N y cada $z \in \overline{S}$, se tiene

$$\|r_{f_1}(z, N)\| \leq c_1 K_1^N \Gamma(1 + sN).$$

De manera análoga, el hecho de que $f_2(z) \sim_s \hat{f}_2(z)$ en G implica que existen constantes $c_2, K_2 > 0$ tales que para cada entero no negativo N y cada $z \in \overline{S}$,

$$\|r_{f_2}(z, N)\| \leq c_2 K_2^N \Gamma(1 + sN).$$

Considerando, ahora, $c = \text{máx}\{c_1, c_2\}$ y $K = K_1 + K_2$, tendremos

$$\begin{aligned}
&\left\| z^{-N}(f_1(z) + f_2(z)) - \sum_{n=0}^{N-1} (f_{n,1} + f_{n,2}) z^n \right\| \\
&= \|r_{f_1}(z, N) + r_{f_2}(z, N)\| \\
&\leq \|r_{f_1}(z, N)\| + \|r_{f_2}(z, N)\| \leq c_1 K_1^N \Gamma(1 + sN) + c_2 K_2^N \Gamma(1 + sN) \\
&= (c_1 K_1^N + c_2 K_2^N) \Gamma(1 + sN) \leq \text{máx}\{c_1, c_2\}(K_1^N + K_2^N) \Gamma(1 + sN) \\
&\leq \text{máx}\{c_1, c_2\}(K_1 + K_2)^N \Gamma(1 + sN) = c K^N \Gamma(1 + sN),
\end{aligned}$$

como queríamos probar □

Teorema 3.5. Supongamos que $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ son espacios de Banach, G una región sectorial, y $s \geq 0$. Sean $f \in \mathcal{A}_s(G, \mathbb{E})$, $\alpha \in \mathcal{A}_s(G, \mathbb{C})$, y $T \in \mathcal{A}_s(G, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$. Entonces

$$Tf \in \mathcal{A}_s(G, \mathbb{F}), \quad J(Tf) = (JT)(Jf),$$

$$\alpha f \in \mathcal{A}_s(G, \mathbb{E}), \quad J(\alpha f) = (J\alpha)(Jf).$$

Demostración: En el teorema 2.6 hemos probado que $Tf \in \mathcal{A}(G, \mathbb{F})$ y $J(Tf) = (JT)(Jf)$, por lo que para completar la demostración basta probar el carácter Gevrey del desarrollo (para demostrar la segunda parte del resultado se procederá de manera análoga). Ahora bien, para cada $N \geq 1$, habíamos probado que se verificaba

$$\|r_{Tf}(z,N)\| \leq \|T(z)\|\|r_f(z,N)\| + \sum_{m=0}^{N-1} \|f_m\|\|r_T(z,N-m)\|.$$

Como $T \sim_s JT$, se tiene que existen constantes $c, K > 0$ de tal forma que

$$\|r_T(z,N)\| \leq cK^N(N!)^s,$$

del mismo modo, como $f \sim_s Jf$, se tiene que existen constantes $\tilde{c}, \tilde{K} > 0$ de tal forma que

$$\|r_f(z,N)\| \leq \tilde{c}\tilde{K}^N(N!)^s.$$

De acuerdo con los cálculos realizados en la demostración del teorema 2.6 resulta que

$$\begin{aligned}
\|r_{Tf}(z,N)\| &\leq \sum_{m=0}^{N} cK^m(M!)^s\tilde{c}\tilde{K}^{N-m}(N-M)! \\
&\leq \sum_{m=0}^{N} c\tilde{c}K'^N(N!)^s = Nc'K'^N(N!)^s \\
&\leq \tilde{C}\tilde{K}^N(N!)^s,
\end{aligned}$$

siendo $c' = \text{máx}\{c, \tilde{c}\}$, $\tilde{K} = \text{máx}\{K, \tilde{K}\} > 0$, $C = c'$, $K = 2K'$. Notemos que la segunda desigualdad se debe a que

$$k!(n-k)! \leq n!$$

En efecto, como el número combinatorio

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

es un número natural y por definición se tiene que

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

tendremos entonces que $k!(n-k)!$ tiene que dividir necesariamente a $n!$ y esto sólo es posible si $k!(n-k)! \leq n!$. $\square$

Como teníamos en la sección anterior para un desarrollo asintótico general, tendremos un corolario de este último teorema.

Corolario 3.6. En el caso de que $\mathbb{E}$ sea un álgebra de Banach, sean $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_s(G, \mathbb{E})$. Entonces $f_1 f_2 \in \mathcal{A}_s(G, \mathbb{E})$ y $J(f_1 f_2) = (Jf_1)(Jf_2)$. En otras palabras,

$$f_j(z) \sim_s \hat{f}_j \text{ en } G, \; 1 \leq j \leq 2,$$

implica que

$$f_1(z) f_2(z) \sim_s \hat{f}_1(z) \hat{f}_2(z) \; z \in G.$$

También, como teníamos en la sección anterior, si f tiene un desarrollo asintótico Gevrey de orden s en G, la derivada y la integral de f tendrán desarrollos asintóticos Gevrey de orden s en G. Su demostración se basará, sobre todo en renombrar a las constantes c_N escribiéndolas de la forma

$$c_N = cK^N \Gamma(1 + sN),$$

para algunas constantes $c, K > 0$ adecuadas, construidas a partir de la existencia del desarrollo Gevrey de orden s de la función f, dando el siguiente resultado para desarrollos Gevrey de orden s:

Teorema 3.7. Dado $s > 0$ y una región sectorial G, supongamos que $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G. Entonces

$$f'(z) \sim_s \hat{f}'(z), \quad \int_0^z f(w) \, dw \sim_s \int_0^z \hat{f}(w) \, dw \text{ en } G.$$

Demostración: Fijado un subsector cerrado $\overline{T}$ de G, podemos considerar un nuevo subsector cerrado $\overline{S}$ de G de modo que $\overline{T}$ esté contenido en el interior de $\overline{S}$. Entonces, elegimos $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $z \in \overline{T}$, $\overline{B}(z, \varepsilon|z|) \subset \overline{S}$ y aplicando la fórmula integral de Cauchy, se deduce que

$$\begin{aligned}
&\Big\| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) f_{n+1} z^n \Big\| = \Big\| \Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n z^n \Big)' \Big\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big\| \int_{|w-z|=\varepsilon|z|} \frac{f(w) - \sum_{n=0}^{N} f_n w^n}{(w-z)^2} \Big\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\varepsilon|z|}{\varepsilon^2|z|^2} \text{máx} \Big\{ \Big\| f(w) - \sum_{n=0}^{N} f_n w^n \Big\| \; : \; w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|) \Big\} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon|z|} cK^{N+1} [(N+1)!]^s \, \text{máx} \{ |w|^{N+1} \; : \; w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|) \}.
\end{aligned}$$

Ahora, si $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ y $f(z)$ tiene a $\hat{f}(z)$ como desarrollo asintótico Gevrey de orden s, existen constantes $c, K > 0$ de tal forma que

$$\left\| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right\| \leq cK^n (N!)^s |z|^N,$$

y con ello, concluimos

$$\begin{aligned}
&\left\| f'(z) - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) f_{n+1} z^n \right\| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon |z|} \tilde{c} K^N (N+1)^s (N!)^s \max\{|w|^{N+1} \ : \ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|)\},
\end{aligned}$$

donde $\tilde{c} = cK$ y de nuevo, por la desigualdad triangular, se vuelve a tener

$$|w|^{N+1} \leq |z|^{N+1} (1+\varepsilon)^{N+1}, \ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|),$$

y dado que $(1+N) \leq 2^N$ tendremos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon |z|} \tilde{c} K^N (N+1)^s (N!)^s \max\{|w|^{N+1} \ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|)\} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon |z|} \tilde{c} K^N (2^s)^N (N!)^s |z|^{N+1} (1+\varepsilon)^{N+1} \\
&= \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \tilde{c} \tilde{K}^N (N!)^s |z|^N (1+\varepsilon)^N = \tilde{c}_1 \tilde{K}_1^N (N!)^s |z|^N,
\end{aligned}$$

donde $\tilde{K} = 2^s K$, $\tilde{K}_1 = \tilde{K}(1+\varepsilon)$ y $\tilde{c}_1 = \tilde{c}(1+\varepsilon)$, lo cual probamos que

$$f'(z) \sim_s \hat{f}'(z).$$

Ahora, si $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, de nuevo existen constantes $c, K > 0$ de tal forma que

$$\left\| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right\| \leq cK^n (N!)^s |z|^N.$$

Entonces si $[0, z]$ es un segmento íntegramente contenido en G, tendremos que

$$\Big\| \int_0^z f(w)\,dw - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{f_{n-1} z^n}{n} \Big\| = \Big\| \int_0^z f(w)\,dw - \int_0^z \sum_{n=0}^{N-2} f_n w^n \,dw \Big\|$$
$$\le |z| \max\Big\{ \Big\| f(w) - \sum_{n=0}^{N-2} f_n w^n \Big\| \ :\ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|) \Big\}$$
$$\le |z| c K^N (N!)^s \max\{ |w|^{N-1} \ :\ w \in \mathbb{S}(z, \varepsilon|z|) \}$$
$$\le |z| c K^{N-1} ((N-1)!)^s |z|^{N-1} (1+\varepsilon)^N \le \tilde{C} \tilde{K}^N (N!)^s |z|^N,$$

siendo $\tilde{K} = K(1+\varepsilon)$ y $\tilde{C} = \frac{c}{\tilde{K}}$, y con ello probamos que

$$\int_0^z f(w)\,dw \sim_s \int_0^z \hat{f}(w)\,dw.$$

□

Teorema 3.8. Sea $\mathbb{E}$ un álgebra de Banach con elemento unidad e. Dado $s > 0$ y una región sectorial G, supongamos que $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G. Más aún, supongamos que el término constante f_0 de $\hat{f}(z)$ y todos los valores $f(z)$, $z \in G$ son elementos invertibles de $\mathbb{E}$. Entonces

$$f^{-1}(z) \sim_s \hat{f}^{-1}(z) \quad en\ G,$$

si $\hat{f}^{-1}(z)$ denota la única serie de potencias formal $\hat{g}(z)$, con $\hat{f}(z)\hat{g}(z) = \hat{e}$, el único elemento unidad de $\mathbb{E}[[z]]$.

Demostración: Como teníamos en el teorema 2.12, si $\hat{f}(z) = \sum f_n z^n$, tendremos que $\hat{f}$ es invertible siempre y cuando el término constante de $\hat{f}$, f_0, sea invertible; con ello, tendremos que

$$\hat{f}^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n z^n \in \mathbb{E}[[z]]_s, \tag{3.4}$$

donde los coeficientes de $\hat{f}^{-1}$, $\tilde{f}_n$ se definen a partir de la división formal (uno entre $\hat{f}$). Por otra parte en el teorema 2.12 habíamos probado que

$$\|r_{f^{-1}}(z, N)\| \le \delta^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_n c_{N-n}.$$

Ahora bien, como $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ existen constantes $c, K > 0$ de tal forma que

$$\left\| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right\| \leq cK^N (N!)^s |z|^N.$$

Entonces, definiendo las constantes $c_N = cK^N(N!)^s$, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\|r_{f^{-1}}(z, N)\| &\leq \delta^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} cK^n (n!)^s cK^{N-n} [(N-n)!]^s \\
&= (N-1)c^2 K^N (n!)^s [(N-n)!]^s \\
&\leq (N+1)c^2 K^N (n!)^s [(N-n)!]^s \\
&\leq \tilde{c}\tilde{K}^N (N!)^s.
\end{aligned}$$

siendo $\tilde{c} = c^2$, $\tilde{K} = 2K$. Con ello probamos que

$$f^{-1}(z) \sim_s \hat{f}^{-1}(z).$$

$\square$

3.2. Desarrollos Gevrey en regiones de amplitud menor o igual que $s\pi$ radianes

El siguiente resultado que presentaremos es una versión del teorema de Ritt, adaptado al caso de desarrollos asintóticos Gevrey; su demostración utiliza la denominada transformada de Laplace finita o truncada, cuya definición es la siguiente.

Definición 3.9. Sean $d, \rho > 0$ números reales fijos y sea $g(u)$ una función continua para $\arg(u) = d$ y $0 \leq |u| \leq \rho$. Definimos $f(z)$ mediante

$$f(z) = z^{-k} \int_0^a g(u) \exp[-(u/z)^k] \, d(u^k), \tag{3.5}$$

para $k > 0$ y $a = \rho e^{id}$, calculando la integral a lo largo del segmento $[0, a]$. Entonces la aplicación f se denomina *transformada de Laplace finita o truncada de g*.

Nota: La notación $d(u^k)$ se refiere a la siguiente expresión

$$d(u^k) := ku^{k-1}\, du,$$

luego, la transformada de Laplace finita se puede escribir también como

$$f(z) = kz^{-k} \int_0^a u^{k-1} g(u) \exp[-(u/z)^k]\, du.$$

Para probar la holomorfía de la función f definida en 3.5 recurriremos al siguiente resultado clásico.

Teorema 3.10 (Holomorfía bajo el signo integral). Sea U un conjunto abierto del plano complejo, X un subconjunto medible Lebesgue de la recta real y $f : X \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación que verifica las condiciones siguientes:

1. Para todo $t \in X$, la función $z \mapsto f(t, z)$ es holomorfa en U.
2. Para todo $z \in U$, la función $t \mapsto f(t, z)$ es integrable en X.
3. Para cada z_0 en U existen un entorno V de z_0 contenido en U y una función integrable
$$g : X \longrightarrow [0, \infty),$$
de modo que
$$|f(t, z)| \leq g(t)$$
para todo $t \in X$ y todo $z \in V$.

Definimos la función

$$h(z) = \int_X f(t, z)\, dt, \quad z \in U.$$

Entonces, h es holomorfa en U.

Demostración: La demostración de este resultado se basa en utilizar el teorema de derivación de integrales paramétricas para variables reales y deducir que la función h es de clase $\mathcal{C}^1$ en sentido real, y en probar posteriormente que h verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en cada punto de U. □

Observación 3.11. Mencionemos también que el resultado se puede formular para funciones

$$f : X \times U \longrightarrow \mathbb{E},$$

siendo $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y X y U como en el teorema 3.10, pidiendo en 3. que

$$\|f(t,z)\| \leq g(t), \ (t,z) \in X \times V,$$

siendo V como en el teorema 3.10. Su demostración se reducirá a probar la holomorfía débil, de acuerdo con el apéndice C, para lo que se utilizará el lema previo.

Lema 3.12. Sea $f(z)$ la transformada de Laplace finita definida como en 3.5. Entonces:

(a) $f(z)$ es holomorfa en la superficie de Riemann del logaritmo.

(b) Supongamos que existen números complejos g_n y números reales $c_n \geq 0$ (para $n \geq 0$) tal que para cada $N \geq 0$ y cada u como en las hipótesis de este lema,

$$\Big\| u^{-N}\Big(g(u) - \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n\Big)\Big\| \leq c_N.$$

- Haciendo $g(u) = 0$ para $\arg(u) = d$, $|u| > d$, se tiene que

$$\Big\| u^{-N}\Big(g(u) - \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n\Big)\Big\| \leq \tilde{c}_N,$$

para cada $N \geq 0$, cada u con $\arg(u) = d$, y siendo

$$\tilde{c}_N = \text{máx}\Big\{c_N, \sum_{n=0}^{N-1} c_n \rho^{n-N}\Big\}.$$

- Para z con $\cos(k(d - \arg(z))) \geq \varepsilon > 0$ y $N \geq 0$, si ponemos $f_n = g_n \Gamma(1 + n/k)$, entonces

$$\Big\| z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big)\Big\| \leq K_N = \varepsilon^{-1-N/k} \tilde{c}_N \Gamma(1 + N/k).$$

(c) Con c_n, K_n como en el apartado (b), supongamos que, para $s_1 \geq 0$, $c_n \leq cK^n\Gamma(1+ns_1)$, $n \geq 0$, para constantes suficientemente grandes $c, K \geq 0$, independientes de n. Entonces, $K_n \leq \tilde{c}\tilde{K}^n\Gamma(1+ns_2)$, con $s_2 = 1/k + s_1$ y para constantes $\tilde{c}, \tilde{K} \geq 0$ suficientemente grandes (independientes de n pero dependientes de $\varepsilon > 0$).

Demostración:

(a) Utilizaremos el lema 3.10 para probar la holomorfía de $f(z)$ en la superficie de Riemann del logaritmo. Antes de nada, parametrizando la integral dada en 3.5, obtendremos que

$$\begin{aligned} f(z) &= kz^{-k}\int_0^a u^{k-1}g(u)\exp[-(u/z)^k]\ du \\ &= kz^{-k}\int_0^\rho g(te^{id})t^{k-1}e^{idk}e^{-(te^{id}/z)^k}\ dt,\ (t,z)\in(0,\rho)\times\mathcal{R} \end{aligned}$$

Pondremos $F(t,z) = g(te^{id})t^{k-1}e^{idk}e^{-(te^{id}/z)^k}$, como g es continua para $\arg(z) = d$, tenemos que $\|g(te^{id})\| \leq M$, para cierta constante $M > 0$, y como $|e^{idk}| = 1$, obtendremos que

$$|F(t,z)| \leq Mt^{k-1}e^{-\Re((te^{id}/z)^k)}.$$

Ahora bien, también tenemos que

$$\Re\Big(\frac{(te^{id})^k}{z^k}\Big) = \frac{|te^{id}|^k}{|z^k|}\cos\Big(\arg\Big(\Big(\frac{te^{id}}{z}\Big)^k\Big)\Big) = \frac{t^k}{|z|}\cos(k(d-\arg(z))),$$

dado que el argumento de un cociente de números complejos es la diferencia de los argumentos. Ahora, si tenemos

$$|k(d-\arg(z))| < \frac{\pi}{2}\gamma,\ \gamma\in(0,1),$$

entonces

$$\frac{t^k}{|z|^k}\cos(k(d-\arg(z))) > \frac{t^k}{|z|^k}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\gamma\Big) \geq 0.$$

y como $\Re\left(\frac{t^k e^{idk}}{z^k}\right) \geq 0$, obtenemos la acotación

$$|F(t,z)| \leq Me^{-\cos(\frac{\pi}{2}\gamma)t^k/|z|^k}t^{k-1},$$

Ahora bien, como $k > 0$, la función t^{k-1} es integrable en un entorno de 0 y con ello, podemos establecer la acotación de F, en un entorno de cada punto $z \in \mathcal{R}$, por una función integrable, y obtenemos la holomorfía de la transformada de Laplace finita.

(b) • Tendremos dos casos en función de $|u|$, siendo $\arg(u) = d$:

Caso I: Si $0 \leq u \leq \rho$, entonces las hipótesis del apartado (b) dice

$$\|u^{-N}\Big(g(u) - \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n\Big)\| \leq c_N \leq \tilde{c}_N.$$

Caso II: Si $|u| > \rho$, entonces, al ser $g(u) = 0$, tendremos:

$$\begin{aligned}
\|u^{-N}\Big(g(u) - \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n\Big)\| &= |u|^{-N}\Big\| - \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{n=0}^{N-1} g_n u^{n-N}\Big\| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \|g_n\| |u|^{n-N} \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} c_n \rho^{n-N} \leq \tilde{c}_n,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $c_n \geq \|g_n\|$, como se deduce de las desigualdades $\|r_g(u,n)\| \leq c_n$ mediante un paso al límite cuando u tiende hacia 0.

- Utilizando la representación integral de la función Γ,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

y teniéndose en cuenta que

$$z^N r_f(z,N) = f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n,$$

como $f_n = g_n \Gamma(1 + n/k)$, obtendremos:

$$\begin{aligned}
z^N r_f(z,N) &= f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \\
&= z^{-k} \int_0^a g(u) e^{-(u/z)^k}\, du^k - \sum_{n=0}^{N-1} g_n \Gamma(1+n/k) \\
&= z^{-k} \int_0^a g(u) \exp(-(u/z)^k)\, du^k - \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^\infty g_n t^{n/k} e^{-t} z^n\, dt \\
&= z^{-k} \int_0^a g(u) \exp(-(u/z)^k)\, du^k - \int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} g_n t^{n/k} z^n\, dt.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t^{1/k}z = u$ en la segunda integral, obtendremos $dt = \frac{1}{z^k} du^k$ y con ello la expresión anterior puede reescribirse como:

$$z^{-k} \int_0^a g(u) \exp(-(u/z)^k) \; du^k \\ - z^{-k} \int_0^{\infty(d=\arg(u))} e^{-(u/z)^k} \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n \; du^k,$$

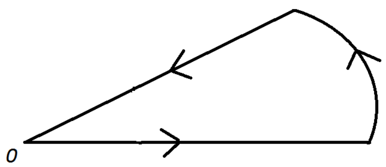
donde por

$$\int_0^{\infty(d=\arg(u))}$$

haremos referencia a la integral entre 0 e infinito siguiendo la dirección $d = \arg(u)$. Por el teorema de los residuos aplicado a sectores de la forma

$$S = \{u \in \mathcal{R} \;:\; 0 \leq |u| \leq \rho, \; 0 < \arg(u) \leq d\},$$

dotado de la orientación positiva tal y como muestra la siguiente figura



obtenemos que como en S la función

$$f(u) = e^{-(u/z)^k} \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n,$$

no tiene ninguna singularidad, entonces, si γ_ρ denota el arco de circunferencia de centro 0 y radio ρ:

$$0 = \int_{[0,\rho]} f(u) \; du + \int_{\gamma_\rho} f(u) \; du - \int_{[0,\rho e^{id}]} f(u) \; du, \qquad (3.6)$$

puesto que el segmento $[0, \rho e^{id}]$ se recorre en sentido opuesto. Acotando se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \int_{\gamma_\rho} e^{-(u/z)^k} \sum_{n=0}^{N-1} g_n u^n \; du \Big\| \\
&\leq d\rho \max\{e^{-\Re((u/z)^k)} \sum_{n=0}^{N-1} \|g_n\| |u|^n \; : \; u \in \gamma_\rho^*\} \\
&= d\rho e^{-(\rho^k/|z|^k)\cos(k(d-\arg(z)))} \sum_{n=0}^{N-1} \|g_n\| \rho^n \to 0,
\end{aligned}
$$

cuando $\rho \to \infty$. Dado que la integral

$$\int_{\gamma_\rho} f(u) \; du$$

cuando $\rho \to \infty$ tiende hacia 0, deducimos, por (3.6) que

$$\int_0^{\infty(d=\arg(u))} f(u) \; du = \int_0^\infty f(u) \; du.$$

Teniendo en cuenta esta igualdad en la última expresión obtenida para $z^N r_f(z,N)$, obtenemos que

$$z^N r_f(z,N) = z^{-k} \int_0^\infty u^N r_g(u,N) \exp(-(u/z)^k) \; du^k.$$

A continuación, si tomamos normas, obtendremos

$$
\begin{aligned}
|z|^N \|r_f(z,N)\| &\leq |z|^{-k} \int_0^\infty u^N \|r_g(u,N)\| \exp(-\Re(u/z)^k) \; d(u^k) \\
&\leq \tilde{c}_N |z|^{-k} \int_0^\infty u^N e^{-\frac{u^k}{|z|^k}\cos(k(d-\arg(z)))} \; d(u^k).
\end{aligned}
$$

y, por lo tanto, si aplicamos el cambio de variable

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{u^k}{|z|^k}\varepsilon, \\
dt &= \frac{d(u^k)}{|z|^k}\varepsilon
\end{aligned}
$$

llegaremos a

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}_N|z|^{-k}\int_0^\infty |u|^N e^{-\frac{|u|^k}{|z|^k}\cos(k(d-\arg(z)))}\, d(u^k)\\
&\leq \tilde{c}_N|z|^{-k}\int_0^\infty u^N e^{-\frac{u^k}{|z|^k}\varepsilon}\, d(u^k)\\
&= \tilde{c}_N|z|^N|z|^k|z|^{-k}\varepsilon^{-1-N/k}\int_0^\infty t^{N/k}e^{-t}\, dt\\
&= \tilde{c}_N|z|^N\varepsilon^{-1-N/k}\Gamma(1+N/k)
\end{aligned}
$$

Esto es, tendremos que

$$
\left\| z^{-N}\Big(f(z)-\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big)\right\| \leq \tilde{c}_N\varepsilon^{-1-N/k}\Gamma(1+N/k).
$$

(c) Este apartado se basa en las acotaciones realizadas en (3.2). En efecto, si se tiene que $c_nK^n(n!)^{s_1}$, para $n \geq 0$ y para constantes suficientemente grandes $c, K \geq 0$ independientes de n, entonces, la acotación del apartado anterior

$$
\left\| z^{-N}\Big(f(z)-\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big)\right\| \leq K_N = \varepsilon^{-1-N/k}\tilde{c}_N\Gamma(1+N/k),
$$

dice que

$$
K_n \leq \varepsilon^{-1-n/k}c_nK^n(n!)^{s_1}cK^n(n!)^{\frac{1}{k}} = \tilde{c}\tilde{K}(n!)^{s_1+\frac{1}{k}},
$$

siendo $\tilde{c} = c_n\varepsilon^{-1}$ y $\tilde{K} = \varepsilon^{\frac{1}{k}}K^2$ concluyendo la demostración de este lema. □

Proposición 3.13 (Teorema de Ritt para desarrollos Gevrey). Dado $s > 0$, sea $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_s$ y una región sectorial G de amplitud, como mucho, $s\pi$ dado de manera arbitraria. Entonces, existe una función $f(z)$, holomorfa en G, de tal manera que $f(z) \sim_s \hat{f}(z)$ en G.

Demostración: Sea $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ y definimos

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u^n / \Gamma(1+sn);$$

entonces $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_s$ implica la holomorfía de $g(u)$ para $|u|$ suficientemente pequeño. Sea d la bisectriz de G y definimos para $a = \rho e^{id}$, para $\rho > 0$ suficientemente pequeño, y $k = 1/s$:

$$f(z) = z^{-k} \int_0^a g(u) \exp[-(u/z)^k] \; du^k. \tag{3.7}$$

El lema anterior permitirá concluir que la función f tiene las propiedades que deseamos. □

El resultado anterior garantiza que la aplicación de Borel asintótica Gevrey

$$J : \mathcal{A}_s(G, \mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}[[z]]_s,$$

es suprayectiva si la amplitud de G es menor o igual que $s\pi$. Sin embargo, en este caso, la aplicación J no es inyectiva. Para ver este hecho, consideremos la función de variable compleja $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z}\right)$ en un sector de amplitud π y sea $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}\gamma$, donde $\gamma \in (0,1)$. Esta función verifica que $f \neq 0$, pero $\hat{f}(z) = 0$, puesto que

$$|z^{-N} f(z)| = |z^{-N} \exp(-(1/z))| \leq \frac{1}{|z|^N} \exp\Big(- \Re\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big).$$

Ahora, como tenemos el siguiente hecho

$$\Re\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{1}{|z|} \cos(\arg(z)) \geq \frac{c_\gamma}{|z|},$$

con $c_\gamma = \frac{\pi\gamma}{2}$, tendremos que

$$\frac{1}{|z|^N} \exp\Big(- \Re\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) \leq \frac{1}{|z|^N} \exp\Big(- \frac{c_\gamma}{|z|}\Big).$$

Si consideramos la función de variable real $f(x) = x^n e^{-cx}, \; x > 0, \; c > 0$, bastará estudiar dónde alcanza el máximo de esta función para concluir. Entonces, derivando e igualando a cero la derivada de f tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n x^{n-1} e^{-cx} - x^n e^{-cx} \\ &= x^{n-1} e^{-cx} (n - cx) = 0, \end{aligned}$$

hecho que ocurre siempre y cuando $x = \frac{n}{c}$ o $x = 0$. La segunda condición no puede ocurrir, puesto que $x > 0$. Entonces, ocurre que

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}e^{-cx} - ncx^{n-1}e^{-cx} - f'(x),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} f''\Big(\frac{n}{c}\Big) &= n(n-1)\frac{n^{n-2}}{c^{n-2}}e^{-n} - (nc)\frac{n^{n-1}}{c^{n-1}}e^{-n} \\ &= \frac{n^n e^{-n}}{c^{n-2}} - \frac{n^{n-1}e^{-n}}{c^{n-2}} - \frac{n^n e^{-n}}{c^{n-2}} \\ &= -\frac{n^{n-1}}{c^{n-2}}e^{-n} < 0, \end{aligned}$$

dado que $\frac{n}{c}$ es un punto crítico de f, y por lo tanto $f'\Big(\frac{n}{c}\Big) = 0$. Con ello concluimos que $x = \frac{n}{c}$ es donde la función alcanza su máximo relativo, que vale

$$f\Big(\frac{n}{c}\Big) = \frac{n^n}{c^n}e^{-n}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|z|^N}\exp\Big(-\Big(\frac{c_\gamma}{|z|}\Big)\Big) \leq \frac{N^N}{c_\gamma^N}e^{-N},$$

dado que $\frac{1}{|z|} > 0$ y $c_\gamma > 0$. Ahora bien, como

$$N^N e^{-N} \leq \sqrt{2\pi N}N^N e^{-N} \approx N!,$$

tendremos que

$$\frac{1}{|z|^N}\exp\Big(-\Big(\frac{c_\gamma}{|z|}\Big)\Big) \leq \sqrt{2\pi N}N^N e^{-N}c_\gamma^{-N} \approx c_\gamma^{-N}(N!),$$

es decir

$$\Big|\exp\Big(-\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big)\Big| \leq \tilde{c}K^N N!|z|^N,$$

con $K = c_\gamma^{-1}$ y $\tilde{c} = 1$. Juntando toda esta información, concluimos que

$$\|f(z)\| \leq cK^N N!|z|^N,$$

y con ello probamos que $f \sim_1 \hat{0}$ en el semiplano de la derecha a pesar de que $f \neq 0$.

El razonamiento anterior se puede adaptar sin grandes complicaciones al caso de sectores de amplitud πs, trabajando con la función $f(z) = \exp(-1/z^{1/s})$ que resulta tener desarrollo asintótico Gevrey nulo de orden s.

Esta información sobre la inyectividad de la aplicación J se completará en la siguiente sección con el lema de Watson.

3.3. Desarrollos Gevrey en regiones de amplitud mayor que sπ radianes

Hemos aprendido en la sección anterior que la aplicación de Borel asintótica Gevrey

$$J : \mathcal{A}_s(G, \mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}[[z]]_s,$$

es suprayectiva para regiones sectoriales de amplitud como mucho $s\pi$. Probaremos ahora que para regiones grandes (regiones sectoriales de amplitud mayor que $s\pi$) la aplicación J es inyectiva. Antes de ver el teorema que dará esta información, el denominado lema de Watson, veremos un lema que establece un decrecimiento exponencial en el origen para las funciones con desarrollo asintótico de Gevrey nulo.

Lema 3.14. Sea G una región sectorial de amplitud arbitraria, y sea $f(z)$ una función holomorfa en G con $f(z) \sim_s \hat{0}$ en G. Para cada subsector cerrado $\overline{S}$, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ de tal forma que

$$\|f(z)\| \leq c \exp[-c_2|z|^{-k}],\ \ z \in \overline{S}.$$

Demostración: Por hipótesis, y de acuerdo con la fórmula de Stirling (véase apéndice D), al ser $f \sim_s \hat{0}$ en G, sabemos que existen constantes $c, K > 0$ tales que

$$\|f(z)\| \leq cK^n n^{sn}|z|^n,$$

Ahora bien, para $|z|$ pequeño, el término $(|z|K)^n n^{sn}$ primero decrece para n siendo $|z|Ke^s n^s \leq 1$y luego crece con respecto de n para $|z|Ke^s(n+1)^s > 1$. En efecto, estudiando los puntos críticos de la función $f(x) = b^x x^{sx}$, tendremos

$$f'(x) = b^x \log(b) x^{sx} + b^x[sx x^{sx-1} + sx^{sx}\log(x)],$$

y con ello

$$\log(b) + s + s\log(x) = 0,$$

igualdad que se traduce en

$$x = e^{-1-\frac{\log(b)}{s}}.$$

Si reordenamos esta expresión, también obtendremos

$$be^s x^s = 1$$

Por otra parte, notemos que, cuando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ y cuando $x \to 0$, $f(x) \to 1$, puesto que, si

$$L = \lim_{x\to 0} x^{sx},$$

al tomar logaritmos, ocurre que, utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\log(L) &= \lim_{x\to 0} sx\log(x)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{sx}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sx^2}}\\
&= \lim_{x\to 0} -sx = 0.
\end{aligned}$$

Ahora, resolviendo el límite pedido, $L = e^0 = 1$, y con ello, se tiene que

$$f(x) \to 1, \text{ cuando } x \to 0,$$

y como $f(x) \to \infty$, cuando $x \to \infty$, tendremos que $x = e^{-1-\frac{\log(b)}{s}}$ tiene que ser, necesariamente, un mínimo relativo para $f(x)$. Es decir, el término $(|z|K)^n n^{sn}$ decrece para $|z|Ke^s n^s \leq 1$ y luego crece para $1 < |z|Ke^s(n+1)^s$. Ahora bien, se tiene que, si despejamos en $|z|Ke^s n^s \leq 1$, ocurre que

$$\|f(z)\| \leq (|z|K)^n n^{sn} \leq e^{-sn},$$

y si en $1 < |z|Ke^s(n+1)^s$ despejamos, ocurre que

$$(n+1)^s > \frac{1}{Ce^s|z|},$$

es decir, si $k = 1/s$, entonces

$$n+1 > \frac{1}{C^k e|z|^k},$$

o también

$$n > \frac{1}{C^k e|z|^k} - 1.$$

Ya podemos deducir que

$$-sn < \frac{-s}{C^k e|z|^k} + s,$$

y a continuación llegamos a

$$e^{-sn} < e^s e^{\frac{-s}{C^k e|z|^k}} = c_1 e^{-c_2|z|^{-k}},$$

siendo $c_1 = e^s$ y $c_2 = \frac{s}{eC^k}$.

Proposición 3.15 (Lema de Watson)**.** Supongamos que G es una región sectorial de amplitud mayor que $s\pi$, $s > 0$ y sea $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ satisfaciendo $f(z) \sim_s \hat{0}$ en G. Entonces $f(z) \equiv 0$ en G.

Demostración: Sea $\overline{S} = \overline{S}(d, \alpha, \rho)$ un subsector cerrado de G de amplitud $\alpha > s\pi$. Como G es una región sectorial de amplitud $\alpha > s\pi$ y f es holomorfa en G, teniéndose $f(z) \sim_s \hat{0}$ en G, del lema 3.14, para $z \in \overline{S}$ existen constantes suficientemente grandes $c, K > 0$ y $k = 1/s$ de tal forma que

$$\|f(z)\| \leq ce^{-K|z|^{-k}}, \quad z \in \overline{S}.$$

En particular, $\|f(z)\|$ está acotada, digamos, por C, en $\overline{S}$. Para $\kappa = \pi/\alpha(< k)$ y $z = z(w) = e^{id}(\rho^{-\kappa} + w)^{-1/\kappa}$ tenemos $z \in \overline{S}$ para cada w en el semiplano cerrado derecho. En efecto, pues sabemos que, para todo número complejo u, siempre se verifica que

$$|\Re(u)| \leq |u|;$$

esto se traduce en que

$$(|u|)^{-1/\kappa} \leq |\Re(u)|^{-1/\kappa},$$

y entonces, aplicando esta propiedad al número complejo $\rho^{-\kappa} + w$, siendo $w \in \mathbb{H}$, obtenemos

$$\begin{aligned} |z| &= |e^{id}(\rho^{-\kappa} + w)^{-1/\kappa}| \\ &= |\rho^{-\kappa} + w|^{-1/\kappa} \\ &\leq (\Re(\rho^{-\kappa} + w))^{-1/\kappa} \\ &= (\rho^{-\kappa} + \Re(w))^{-1/\kappa} \\ &\leq (\rho^{-\kappa})^{-1/\kappa} = \rho, \end{aligned}$$

al tenerse que $w \in \mathbb{H}$.
Por otra parte, como

$$(\Re(\rho^{-\kappa} + w))^{-1/\kappa} = (\rho^{-\kappa} + \Re(w))^{-1/\kappa} \geq 0,$$

se tiene que si $\psi = \arg(\rho^{-\kappa} + w)$, entonces

$$|\psi| \leq \frac{\pi}{2},$$

y con ello deducimos que, al ser el argumento de un producto de números complejos la suma de los argumentos,

$$\arg(z) = \arg(e^{id}(\rho^{-\kappa} + w)^{-1/\kappa}) = d - \frac{1}{\kappa}\arg(\rho^{-\kappa} + w) = d - \frac{\psi}{\kappa}.$$

Ahora bien, como $\kappa = \frac{\pi}{\alpha}$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, entonces, deducimos que, como

$$d - \arg(z) = -\frac{\psi}{\kappa}$$

al tomar módulos, ocurre que

$$|d - \arg(z)| = \frac{\alpha}{\pi}|\psi| \leq \frac{\alpha}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

es decir, tenemos que

$$|d - \arg(z)| \leq \frac{\alpha}{2}$$

y con ello podemos decir que $z \in \overline{S}$. Así, para un $x > 0$ arbitrario, la función $g(w) = \exp[xw]f(z(w))$ es acotada por C en la recta $\mathcal{R}(w) = 0$ y, ya que $\kappa < k$, acotada por alguna constante grande para que se haga $\mathcal{R}(w) \geq 0$. El principio de Phragmén-Lindelöf implica entonces

$$\|g(w)\| = \exp[x\mathcal{R}(w)]\|f(z(w))\| \leq C, \quad \mathcal{R}(w) \geq 0.$$

Haciendo $x \to \infty$ se completa la demostración. $\square$

Dada una región sectorial G, podemos decir que un subespacio $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}(G, \mathbb{E})$ es un espacio asintótico, si la aplicación $J : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{E}[[z]]_s$ es inyectiva. Utilizando esta terminología podemos expresar la proposición anterior diciendo que $\mathcal{A}_s(G, \mathbb{E})$ es un espacio asintótico si la amplitud de G excede $s\pi$ radianes.

Capítulo 4

Una aplicación de los desarrollos asintóticos Gevrey

En esta sección, daremos un ejemplo de una ecuación diferencial que tendrá como solución una serie formal de potencias, pero dicha serie no convergerá. No obstante, dicha serie será la representación asintótica Gevrey de orden $s = 1$ de una verdadera solución para dicha ecuación.
Sea $z \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) > 0\}$. Estudiemos la ecuación diferencial de Euler

$$z^2 y'(z) + y(z) = z.$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial por el método clásico, hemos de resolver la ecuación homogénea

$$z^2 y'(z) + y(z) = 0,$$

Resolviendo entonces esta ecuación diferencial por el método de separación de las variables y denotando por $y_h(z)$ a la solución de la ecuación homogénea, deducimos que

$$\int \frac{y'}{y}\, dy = -\int \frac{1}{z^2}\, dz,$$

es decir,

$$\log(y_h(z)) = \frac{1}{z} + C_0,$$

siendo C_0 una constante de integración, o también

$$y_h(z) = C \exp\left(\frac{1}{z}\right).$$

Para buscar una solución particular, hemos de aplicar el método de variación de las constantes, y entonces, si obligamos a $y(z) = C(z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ a ser solución de la ecuación diferencial de Euler, tenemos que

$$z^2\Big(C'(z)\exp\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{C(z)}{z^2}\exp\left(\frac{1}{z}\right)\Big) + C(z)\exp\left(\frac{1}{z}\right) = z,$$

es decir, llegamos a

$$z^2 C'(z)\exp\left(\frac{1}{z}\right) = z.$$

o también

$$C'(z) = \frac{1}{z}\exp\Big(-\frac{1}{z}\Big).$$

Entonces, una solución es

$$C(z) = \int_0^z \frac{1}{t}\exp\Big(-\frac{1}{t}\Big)\,dt,$$

que tiene sentido integrando en el segmento $[0, z]$ siempre que $\Re(z) > 0$, lo que garantiza el comportamiento adecuado del integrando en 0 y su integrabilidad. y llevando dicha expresión para $C(z)$ a $y(z)$, resulta que

$$y(z) = \int_0^z \frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right)\,dt, \quad z \in \mathbb{H}.$$

Notemos que $\frac{1}{z} - \frac{1}{t}$ recorre la semirrecta que parte del origen con argumento $-\arg(z)$.

En este caso es natural realizar un cambio de variable que lleve el camino de integración a $(0, \infty)$: basta tomar

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{u}{z},$$

con lo cual obtendremos $u = \frac{z}{t} - 1 \in (0, \infty)$, puesto que $\frac{z}{t}$ recorre el intervalo $(1, \infty)$. La integral resulta entonces

$$y(z) = \int_0^\infty e^{-u/z} \cdot \frac{1}{1+u}\,du,\ z \in \mathbb{H}, \tag{4.1}$$

que es solución de la ecuación en $\mathbb{H}$.

Otra posible aproximación a la hora de buscar soluciones de la ecuación consiste en considerar una serie de potencias

$$\hat{y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]],$$

y obligar a que $\hat{y}(z)$ sea solución de la ecuación diferencial de Euler. Haciendo esto, llegamos a

$$z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z,$$

o también,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z.$$

Ahora, si igualamos coeficientes, llegaremos al sistema de recurrencias

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ n a_n + a_{n+1} = 0, \quad n \geq 1, \end{cases}$$

cuya solución es

$$a_n = (-1)^n n!,$$

y con ello tendremos que

$$\hat{y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^{n+1},$$

serie que sabemos que diverge para $z \neq 0$.

Por este motivo, no es posible encontrar soluciones analíticas en 0, pero es de esperar que $\hat{y}(z)$ tenga algún significado analítico con respecto a la ecuación que satisface. Como vamos a ver, resulta que $y(z) \sim_1 \hat{y}(z)$, siendo $y(z)$ la solución de la ecuación dada en (4.1). Comencemos recordando que

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\, dt,$$

y entonces

$$n! z^{n+1} = \int_0^{\infty} (zt)^n e^{-t} (z dt), \; z \in \mathbb{H}.$$

Si realizamos el cambio de variable $zt = u$, obtendremos

$$n! z^{n+1} = \int_0^{\infty \; (arg(z))} u^n \exp\left(-\frac{u}{z}\right) du,$$

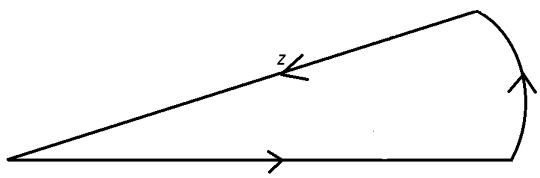
donde

$$\int_0^{\infty(\arg(z))}$$

hace referencia a una integral calculada en la semirrecta $(0, \infty)$, siguiendo la dirección $\arg(z)$. Si aplicamos el teorema de los residuos a esta última integral en sectores de la forma

$$S_\rho = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| \leq \rho, \ 0 \leq \arg(w) \leq \arg(z)\},$$

y dotando a S de la orientación positiva como muestra la figura



aplicando el teorema de los residuos a la función $f(s) = s^n \exp\left(-\frac{s}{z}\right)$ y dado que esta función no tiene ninguna singularidad en S_ρ, tendremos que si denotamos por γ_ρ al arco de circunferencia de centro 0 y radio ρ, tendremos

$$0 = \int_{[0,\rho]} f(u)\ du + \int_{\gamma_\rho} f(u)\ du - \int_{[0,\rho e^{i\arg(z)}]} f(u)\ du, \tag{4.2}$$

dado que el segmento $[0, \rho e^{i\arg(z)}]$ se recorre en sentido opuesto. Ahora, acotaremos de la manera clásica la integral

$$\int_{\gamma_\rho} f(u)\ du,$$

sin más que hacer

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\gamma_\rho} f(u)\ du \Big| &\leq \arg(z)\rho \operatorname{máx}\{|u|^n \exp(-\Re\Big(-\frac{u}{z}\Big)) \quad : \quad u \in \gamma_\rho^*\} \\ &= \arg(z)\rho^{n+1} e^{-\rho^k/|z|^k \cos(k(\arg(u)-\arg(z)))} \to 0, \end{aligned}$$

cuando $\rho \to \infty$. Como la integral a lo largo del arco de circunferencia γ_ρ tiende a 0 cuando ρ tiende a infinito, concluimos por (4.2) que

$$\int_0^\infty f(u)\ du = \int_0^{\infty(\arg(z))} f(u)\ du.$$

Con ello hemos visto que también se puede escribir

$$n! z^{n+1} = \int_0^\infty u^n \exp\Big(-\frac{u}{z}\Big)\ du.$$

Por lo tanto, si $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
y(z) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n n! z^{n+1} &= \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}} \Big(\frac{1}{1+u} - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n u^n \Big) \, du \\
&= (-1)^N \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}} \frac{u^N}{1+u} \, du,
\end{aligned}$$

y en consecuencia, si tomamos $\gamma \in (0,1)$ y $z \in S_\gamma$, donde

$$S_\gamma = \Big\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}\gamma \Big\},$$

entonces

$$\cos(\arg(z)) = \frac{\Re(z)}{|z|} \geq \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right).$$

Si llamamos $c_\gamma := \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) > 0$, hemos probado que $c_\gamma > 0$. Con ello

$$\begin{aligned}
\Big| y(z) - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n \Big| &\leq \int_0^\infty e^{-u\Re(z)/|z|^2} \cdot \frac{u^N}{1+u} \, du \\
&\leq \int_0^\infty e^{-c_\gamma u/|z|} \cdot u^N \, du \\
&= \frac{|z|^{N+1}}{c_\gamma^{N+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^N \, dt = \frac{N!}{c_\gamma^{N+1}} |z|^{N+1}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Estas dos últimas igualdades se deben al cambio de variable

$$\frac{c_\gamma u}{|z|} = t, \ du = \frac{|z|}{c_\gamma} dt,$$

y a la definición de $N!$ a partir de la función Gamma.
En el caso clásico (desarrollo de Taylor-Laurent de una función analítica en 0) se tiene que estas cotas tienden hacia 0, para z fijo y con $|z|$ pequeño, cuando $N \to \infty$. Esto no ocurre en este caso, pero puesto que $y(z)$ es fijo si fijamos z, interesará minimizar la cota haciendo variar N y calcular la precisión de dicha aproximación para el valor de N que haga óptima la misma. En otras palabras, estudiando la monotonía de la sucesión

$$\left\{ \frac{N!}{c_\gamma^{N+1}} |z|^{N+1} \right\}_{N=0}^\infty,$$

obtenemos que

$$\frac{N!}{c_\gamma^{N+1}}|z|^{N+1} \leq \frac{(N+1)!}{c_\gamma^{N+2}}|z|^{N+2},$$

precisamente cuando

$$N+1 \geq \frac{c_\gamma}{|z|},$$

es decir, la cota óptima se alcanza en $N_0 = \left[\frac{c_\gamma}{|z|}\right]$ es decir, se alcanzará en la parte entera de $\frac{c_\gamma}{|z|}$. Para estimar su valor, observamos que si $|z| < \frac{c_\gamma}{2}$ se tiene que

$$1 - \frac{c_\gamma}{|z|} < 1 - 2 = -1 < -\frac{c_\gamma}{2|z|},$$

con lo que

$$-N_0 < 1 - \frac{c_\gamma}{|z|} < -\frac{c_\gamma}{2|z|}.$$

Por la fórmula de Stirling, existe $C > 0$ suficientemente grande para que

$$N! \leq CN^N e^{-N} N^{\frac{1}{2}},$$

luego tenemos

$$\begin{aligned} N_0! \left(\frac{|z|}{c_\gamma}\right)^{N_0+1} &\leq N_0! \cdot N_0^{-N_0-1} \leq C\frac{e^{-N_0}}{N_0^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq Ce^{-N_0} \leq C \exp\left(-\frac{c_\gamma}{2|z|}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

La primera desigualdad de (4.4) se debe a que, como $N_0 = \left[\frac{c_\gamma}{|z|}\right]$, se tiene que $N_0 \leq \frac{c_\gamma}{|z|}$, y la tercera desigualdad de (4.4) se debe a que $N_0 = \left[\frac{c_\gamma}{|z|}\right] \geq 2$, lo cual cierra este ejemplo.
Otros comentarios que podemos hacer es que las cotas dadas en (4.3) indican que $y(z)$ admite a $\hat{y}(z)$ como desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 en

$$S_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

De hecho, si se rota el camino de integración en la expresión dada en (4.1), es posible comprobar que $y(z)$ admite prolongación analítica a sectores de amplitud mayor que π, en los que conserva el mismo desarrollo asintótico $\hat{y}(z)$. Esto, aplicando el lema de Watson, garantiza que $y(z)$ es la única función que en tales sectores admite a $\hat{y}(z)$ como desarrollo asintótico Gevrey

de orden 1, y tiene sentido considerarla como la suma de $\hat{y}(z)$.
También el hecho de que la suma conocida como "to the least term" proporciona aproximaciones exponencialmente correctas se debe precisamente a que el desarrollo es de Gevrey. De hecho, esto es una caracterización de estos desarrollos asintóticos. $\square$

Apéndice A

Nociones de superficies de Riemann

Sea X un espacio topológico. Nuestro objetivo es dotar a X de una estructura que permita ver a X, en forma local, como un abierto del plano complejo e introducir las nociones necesarias para disponer de la maquinaria relativa a las funciones complejas holomorfas en X.

A.1. Cartas y atlas

Pasaremos a continuación a definir nociones básicas tales como qué es una *carta*, explicaremos cuándo dos cartas son *compatibles* y procederemos con la definición de *atlas complejo.*

Definición A.1. Una *carta compleja*, o simplemente *carta*, sobre un espacio topológico X es un par (ϕ, U), siendo $U \subset X$ un conjunto abierto de X, y ϕ un homeomorfismo $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$, y $\phi(U) \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto abierto del plano complejo. El abierto U se denomina *dominio* de la carta ϕ.

Definición A.2. Sean (ϕ_1, U_1) y (ϕ_2, U_2) dos cartas complejas en X. Decimos que ϕ_1 y ϕ_2 son *compatibles* si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o cuando la aplicación *cambio de carta* o *función de transición entre las cartas*:

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2),$$

es holomorfa y su inversa también es holomorfa por el teorema de la aplicación abierta. Dicho teorema se puede aplicar ya que la aplicación cambio de carta es una biyección.

Observamos que la definición de cartas compatibles es simétrica; si $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(U_1 \cap U_2)$, entonces $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(U_1 \cap U_2)$. La aplicación cambio de carta es una biyección en cualquier caso.
Pasemos ahora a la definición de atlas complejo:

Definición A.3. Un *atlas complejo*, o simplemente *atlas*, $\mathcal{A}$ de X es una colección $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de cartas compatibles dos a dos, cuyos dominios recubren a X, es decir, $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, siendo α un elemento que recorrerá un conjunto de índices Λ dado.

Dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *equivalentes* si cada carta de uno es compatible con cada carta del otro.

Observación: Notemos que dos atlas son equivalentes si y solamente si su unión es un atlas complejo. Si aplicásemos el Lema de Zorn, tendríamos garantizado el resultado de que todo atlas complejo está contenido en un atlas maximal y sólo en uno. Más aún; dos atlas son equivalentes si y solamente si están contenidos en el mismo atlas maximal.

A.2. Superficies de Riemann

Definición A.4. Una *estructura compleja* en X es un atlas complejo maximal en X, o de forma equivalente, una clase de equivalencia de atlas complejos en X.

Observación: Cualquier atlas determina una única estructura compleja; de este hecho parte el que se defina una estructura compleja mediante un atlas.
A continuación, pasaremos a definir el concepto de *superficie de Riemann*; aunque lo haremos de forma general, sólo estamos interesados en un caso particular, el de la denominada superficie de Riemann del logaritmo.

Definición A.5. Una *superficie de Riemann* es un espacio topológico X, Hausdorff, conexo y cumpliendo el segundo axioma de numerabilidad, dotado de un atlas.
Habitualmente se añade la condición de conexo, puesto que las superficies de Riemann más interesantes son las de este tipo.

Definición A.6. Sean S_1, S_2 superficies de Riemann y sea U abierto de S_1 y $f : U \longrightarrow S_2$ una aplicación entre un abierto de S_1 y S_2. Diremos que f es *holomorfa en* U si para cada carta (ϕ_1, U_1) de S_1, con $U \cap U_1 \neq \emptyset$ y cada carta (ϕ_2, U_2) de S_2 con $f(U \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ se tiene que

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U \cap U_1) \longrightarrow \mathbb{C},$$

es holomorfa en sentido clásico.

A continuación, veremos la construcción de la superficie de Riemann asociada a la función multiforme (o multivaluada) $\log(z)$.
Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$ y θ un argumento de dicho número complejo, el conjunto de todos los logaritmos de z es

$$\log(z) = \{\ln |z| + i(\theta + 2\pi k) \ : \ \theta \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Una forma de evitar este carácter multivaluado del logaritmo es distinguir en el dominio los pares $(|z|, \theta)$ y $(|z|, \theta + 2\pi)$ que representan el mismo número complejo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de módulo $|z|$ y argumentos θ o $\theta + 2\pi$.
Para ello consideramos el espacio topológico producto $X = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ dotado de la topología producto. Es claro que X es conexo y para cada $\theta \in \mathbb{R}$, consideramos el abierto

$$U_\theta = (0, \infty) \times (\theta, \theta + 2\pi)$$

y la carta (ϕ_θ, U_θ) dada por

$$\begin{array}{rccl} \phi_\theta \colon & U_\theta = (0, \infty) \times (\theta, \theta + 2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus L_\theta \\ & (t, \psi) & \longmapsto & t \exp(i\psi) = t(\cos \psi + i \sin \psi), \end{array}$$

donde $L_\theta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \theta \text{ es un argumento de z}\} \cup \{0\}$. Es claro que ϕ_θ es un homeomorfismo, y que

$$\bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} U_\theta = X$$

Entonces, nuestro atlas quedará definido mediante la familia de pares

$$\{(\phi_\theta, U_\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}.$$

Observemos que si $U_\theta \cap U_{\theta'} \neq \emptyset$, entonces $\phi_\theta \circ \phi_{\theta'}^{-1}(z) = z$, con lo que la condición de compatibilidad de cartas está garantizada. El resultado final es una superficie conexa que puede ser vista como una espiral infinita hacia

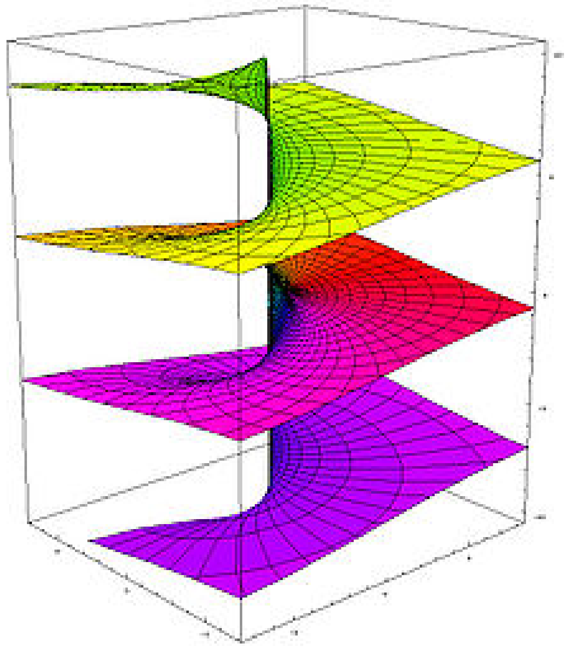


Figura A.1: Superficie de Riemann del Logaritmo

arriba y hacia abajo. Esta es la *superficie de Riemann del logaritmo*, $\mathcal{R}$, o también llamada *superficie de Riemann asociada al logaritmo*.
En esta superficie tiene sentido considerar la función logaritmo como función univaluada

$$\begin{array}{rccl} \log\colon & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (r,\theta) & \longmapsto & \log(r,\theta) := \ln|r| + i\theta, \end{array}$$

que es holomorfa por serlo las funciones $\log\circ\phi_\theta^{-1}$, que son precisamente las ramas o determinaciones del logaritmo manejadas habitualmente.

Apéndice B

Álgebras de Banach

Dedicaremos esta sección a explicar qué es un álgebra, qué es un álgebra de Banach y los resultados que utilizaremos en el desarrollo de esta memoria.

Definición B.1. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ tal que para cada par ordenado de elementos $x, y \in \mathcal{A}$ hay definido un producto $xy \in \mathcal{A}$ cumpliendo las siguientes propiedades:

(a) $(xy)z = x(yz)$,

(b) $x(y+z) = xy + xz$,

(c) $(x+y)z = xz + yz$,

(d) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$ y escalares $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra real o compleja, respectivamente.
$\mathcal{A}$ será llamada álgebra conmutativa o abeliana si para cada $x, y \in \mathcal{A}$,

$$xy = yx.$$

Diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra con elemento unidad si $\mathcal{A}$ contiene un elemento e tal que para todo $x \in \mathcal{A}$,

$$ex = xe = x. \tag{B.1}$$

Este elemento e es llamado elemento unidad o elemento identidad de $\mathcal{A}$.

Proposición B.2. Si un álgebra $\mathcal{A}$ tiene elemento unidad, éste es único.

Demostración: Sean e, e' elementos unidad de $\mathcal{A}$. Aplicando dos veces (B.1) se tiene,

$$e = ee' = e'.$$

La primera igualdad se obtiene dado que e' es también elemento unidad de $\mathcal{A}$ y la segunda igualdad se obtiene del hecho de que e es elemento unidad de $\mathcal{A}$. $\square$

Pasemos, a continuación, a la definición de álgebra normada.

Definición B.3. Un *álgebra normada* $\mathcal{A}$ es un espacio normado el cual es un álgebra y tal que para cada $x, y \in \mathcal{A}$,

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|. \tag{B.2}$$

Diremos que un álgebra normada $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach si $\mathcal{A}$ es completa (i.e. toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathcal{A}$ es convergente).

Notemos que la condición (B.2) relaciona multiplicación con norma y hace al producto una función continua. En efecto, basta observar que

$$\|xy - x_0y_0\| = \|x(y - y_0) + (x - x_0)y_0\| \leq \|x\|\|y - y_0\| + \|x - x_0\|\|y_0\|.$$

Si $\mathcal{A}$ tiene un elemento unidad e, se supondrá también que

$$\|e\| = 1.$$

Los siguientes ejemplos ilustran que muchos espacios que ya conocemos son álgebras de Banach.

Ejemplo: La recta real $\mathbb{R}$ y el plano complejo $\mathbb{C}$ son álgebras de Banach conmutativas, con elemento unidad $e = 1$.

Ejemplo: El espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}[a, b]$ con la norma del supremo y el producto de funciones habitual:

$$(xy)(t) = x(t)y(t), \quad t \in [a, b],$$

es un álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad, la función idénticamente igual a uno.

También, el subespacio $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}[a, b]$ de los polinomios en una variable, es un álgebra normada conmutativa con elemento unidad, pero no es de Banach; de hecho, $\mathcal{P}$ es denso en $\mathcal{C}[a, b]$ por el Teorema de Weierstrass.

Ejemplo: El espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de todas las matrices $n \times n$ con entradas complejas ($n > 1$, fijado) es un álgebra que sabemos que no es conmutativa y con elemento unidad la matriz identidad I de orden n. En $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ definimos la siguiente norma, que será justamente la norma matricial:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

obteniendo un álgebra de Banach.

Ejemplo: El espacio $\mathcal{B}(X)$ de todos los operadores lineales y acotados de un espacio de Banach complejo $X \neq \{0\}$ en sí mismo, dotado de la norma de los operadores:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

y del producto de composición de operadores es un álgebra de Banach con elemento unidad el operador identidad en X, denotado por I. Se tiene que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra no conmutativa, a menos que la dimensión de X sea 1.

Definición B.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con elemento unidad. Un elemento $x \in \mathcal{A}$ será llamado *elemento invertible* si x tiene un elemento inverso en $\mathcal{A}$, esto es, si $\mathcal{A}$ contiene un elemento, denotado por x^{-1}, tal que

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e.$$

Proposición B.5. Si $\mathcal{A}$ tiene un elemento inverso, x, el inverso es único.

Demostración: En efecto, si

$$yx = e = xz,$$

entonces

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

$\square$

Apéndice C

Funciones a valores en espacios de Banach

En este apéndice, probaremos algunos resultados de la teoría de funciones holomorfas definidas en abiertos del plano complejo y a valores en espacios de Banach complejos, los cuales serán usados en el trabajo.

A partir de ahora y salvo que se diga lo contrario, consideraremos abiertos del plano complejo y espacios de Banach complejos, $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$.

Escribiremos $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ para el espacio de operadores lineales y continuos de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$, que es de Banach (al ser $\mathbb{F}$ un espacio de Banach) e incluso un álgebra de Banach para la composición de operadores. En el caso de que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, escribiremos $\mathbb{E}'$ para denotar al dual topológico de $\mathbb{E}$, es decir, $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{C})$. Denotaremos por G a un dominio fijo en el plano complejo, esto es, un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, y por f a una aplicación $f : G \longrightarrow \mathbb{E}$.

Definición C.1. Diremos que f es *holomorfa* en G si para cada $z_0 \in G$ el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. A dicho límite lo denotaremos por $f'(z_0)$, que será un vector de $\mathbb{E}$. Diremos que f es *débilmente holomorfa* en G si para cada funcional lineal y continuo $\phi \in \mathbb{E}'$, la funcion a valores en $\mathbb{C}$, $\phi \circ f$ es holomorfa en G.

Definición C.2. Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{E}$ una función continua. Definimos la integral en $[a, b]$ de h como

$$\int_a^b h = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} h(t_{j,n}),$$

donde $t_{j,n} = a + j\frac{b-a}{2^n}$, $j = 1, \ldots, 2^n$. Observemos que dichas sumas son las de Riemann asociadas a h, a la partición equidistribuida

$$\mathcal{P}_n = \Big\{a, a + \frac{b-a}{2^n}, a + \frac{b-a}{2^{n-1}}, \ldots, a + 2^{n-1}\frac{b-a}{2^n}, b\Big\}$$

del intervalo $[a, b]$, de diámetro $\frac{b-a}{2^n}$ y al conjunto

$$T_n = \{t_{j,n} \; : \; j = 1, \ldots, 2^n\}$$

de puntos intermedios para $\mathcal{P}_n$.

Veamos que la definición de integral para una función continua en un intervalo compacto $[a, b]$ es consistente, esto es, hay que ver que existe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} h(t_j).$$

Como $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach, bastará probar que

$$\Big\{\sum_{j=0}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} h(t_j)\Big\}_{n=0}^{\infty},$$

es de Cauchy.
Observemos que si $n > m$, entonces

$$\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_n \tag{C.1}$$

Por otra parte, como f es continua en el compacto $[a, b]$, del teorema de Heine se deduce la continuidad uniforme de f, esto es, para cada par de puntos $x, y \in [a, b]$, y para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal forma que si $|x - y| < \delta$, entonces $\|h(x) - h(y)\| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Entonces, si tenemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$\frac{b-a}{2^{n_0}} < \delta$$

se deducirá que si $n > m \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} h(t_{j,n}) - \sum_{l=1}^{2^m} \frac{b-a}{2^m} h(t_{l,m})\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{j=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} h(t_{j,n}) - \frac{b-a}{2^n} \sum_{l=1}^{2^m} 2^{n-m} h(t_{l,m})\Big\| \\
&\leq \frac{b-a}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \|h(t_{j,n}) - h(s_{j,m})\|
\end{aligned}$$

siendo

$$s_{j,m} = t_{l,m}, \text{ si } j \in \{(l-1) \cdot 2^{n-m} + 1, \ldots, l \cdot 2^{n-m}\}.$$

De la continuidad uniforme de h logramos deducir que

$$\Big\| \sum_{j=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} h(t_{j,n}) - \sum_{l=1}^{2^m} \frac{b-a}{2^m} h(t_{l,m}) \Big\| < \frac{b-a}{2^n} \cdot 2^n \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

lo cual prueba la convergencia de la sucesión

$$\Big\{ \sum_{j=0}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} h(t_j) \Big\}_{n=0}^{\infty}.$$

Hemos probado que la definición de integral es consistente.

Definición C.3. Si f es una función continua en un conjunto abierto G y $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \gamma(t)$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ con soporte contenido en G, definimos:

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \ dt,$$

siendo la integral del lado derecho de la igualdad una integral del tipo de la definición anterior.

Definición C.4. Sea f es una función continua en un conjunto abierto G, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \gamma(t)$. Si $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$, $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \gamma_j(t)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ curvas de clase $\mathcal{C}^1$y $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \cdots + \gamma_n(t)$ entendiéndose la suma como la concatenación de curvas, diremos que γ es una curva de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y definimos

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t) \ dt.$$

C.1. El teorema de Cauchy y sus consecuencias

En lo que sigue, veremos cómo se puede aplicar el Teorema de Cauchy para funciones definidas a valores en un espacio de Banach complejo, $\mathbb{E}$. Antes de dar la demostración de la fórmula integral de Cauchy, veremos antes un lema que permitirá intercambiar el límite con la integral.

Lema C.5. Sea γ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en el soporte de γ. Sea f una función definida en el soporte de γ. Si se tiene que

$$f_n \to f, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

de manera uniforme en γ^*, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

El siguiente teorema será clave para probar todos los resultados desprendidos posteriormente:

Teorema C.6 (de Cauchy). Suponemos que G es un conjunto abierto y $f : G \longrightarrow \mathbb{E}$ continua en G. Entonces, los siguientes asertos son equivalentes:

(a) La función f es holomorfa en G.

(b) La función f es débilmente holomorfa en G.

(c) La integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado en G es nula.

(d) Para cada camino de Jordan orientado positivamente, γ con soporte contenido en G y cada z en $G \setminus \gamma^*$, tendremos:

$$\eta(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{C.2}$$

donde por $\eta(\gamma, z)$ se denota el índice de la curva γ en el punto z.

Demostración: Probaremos la siguiente cadena de resultados:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a).$$

Suponemos que se da (a) y sea $\phi \in \mathbb{E}'$ Entonces, existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Ahora bien, tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{(\phi \circ f)(z) - (\phi \circ f)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \phi\Big(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\Big) \\
&= \phi\Big(\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\Big) \\
&= \phi(f'(z_0)).
\end{aligned}$$

Notemos que la primera igualdad se da puesto que ϕ es lineal, y la penúltima igualdad se da al ser ϕ continua, con lo que se llega a la veracidad de (b).
Supongamos que se da (b). Esto es, para todo funcional $\phi \in \mathbb{E}'$, tendremos que la aplicación $\phi \circ f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, siendo G un abierto del plano complejo, es holomorfa en sentido clásico. Luego, si γ es un camino cerrado:

$$\int_\gamma \phi \circ f = 0 = \phi(0).$$

Notemos que la segunda igualdad se da al ser ϕ lineal. Entonces, sabemos que, por el Teorema de Hahn-Banach, $\mathbb{E}'$ separa puntos, y como se tiene

$$\int_\gamma \phi \circ f = \phi\Big(\int_\gamma f\Big),$$

llegamos a la conclusión de que:

$$\phi\Big(\int_\gamma f\Big) = \phi(0).$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, se tendrá el resultado buscado:

$$\int_\gamma f = 0.$$

Supongamos, que se da (c) y veremos la veracidad de (d). Sea γ un camino de Jordan orientado positivamente y z un número complejo situado en el interior del soporte de γ. Como se da (c), tendremos que, para cada $\phi \in \mathbb{E}'$ se tendrá que:

$$\phi\Big(\int_\gamma f\Big) = \phi(0) = 0.$$

Por otra parte, a partir de la definición de la integral a lo largo de una curva como límite de sumas de Riemann, tanto en el caso complejo como en el caso vectorial, es sencillo probar, dada la linealidad y continuidad de ϕ, que se tiene la igualdad

$$\int_\gamma \phi \circ f = \phi\Big(\int_\gamma f\Big)$$

esto se traduce en que:

$$\int_\gamma \phi \circ f = 0,$$

lo cual dice entonces, que la función $\phi \circ f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, siendo G un abierto del plano complejo, es holomorfa en sentido clásico, y entonces se verificará, para esta aplicación, la fórmula integral de Cauchy:

$$\phi \circ f(z) = \eta^{-1}(\gamma, z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\phi \circ f(w)}{w - z} \, dw.$$

Ahora bien, utilizando los mismos argumentos que antes, el segundo miembro de esta última igualdad es igual a:

$$\phi\Big(\eta^{-1}(\gamma, z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dz\Big).$$

Y de nuevo, por el teorema de Hahn-Banach, como se tiene:

$$\phi(f(z)) = \phi\Big(\eta^{-1}(\gamma, z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dz\Big),$$

y $\mathbb{E}'$ separa puntos, llegamos a (C.2):

$$\eta(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw.$$

Supongamos, ahora, que se da (d). Veremos que (a) es cierto sin más que probar que existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Sea $\phi \in \mathbb{E}'$. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\phi\Big(\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\Big) \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0}(\phi(f(z))-\phi(f(z_0))) \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi\circ f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi\circ f(w)}{w-z_0}\Big) \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi\circ f(w)}{w-z} - \frac{\phi\circ f(w)}{w-z_0}\, dw\Big) \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(w-z_0)\phi(f(w))-(w-z)\phi(f(w)}{(w-z)(w-z_0)}\, dw\Big) \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-z_0)\phi(f(w))}{(w-z)(w-z_0)}\, dw\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi(f(w))}{(w-z_0)^2}\, dw = \phi(f'(z_0)).
\end{aligned}$$

Y de nuevo, por el Teorema de Hahn-Banach, tendremos que:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0).$$

Notemos que $f'(z_0)$ existe aplicando el teorema de derivación bajo el signo integral en (C.2), lo cual cierra la demostración. $\square$

Por $\mathcal{H}(G,\mathbb{E})$ denotaremos al conjunto de todas las funciones a valores en un espacio de Banach complejo $\mathbb{E}$ que son holomorfas en G.

Utilizando en (C.2) el teorema de diferenciabilidad bajo el signo integral, y dado que el índice de una curva es constante en cada componente conexa de G, probamos el siguiente teorema:

Teorema C.7. Cada función $f \in \mathcal{H}(G,\mathbb{E})$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y además:

$$\eta(\gamma,z)\cdot f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \quad n \geq 0,$$

para γ y z como en (C.2).

C.2. Series de Potencias

De la misma forma que en el caso escalar, podemos representar de manera holomorfa funciones mediante series de potencias, como mostraremos ahora.

Para $f_n \in \mathbb{E}$, $n \geq 0$, consideramos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n$ (notemos, de nuevo que hacemos un abuso de notación y ponemos el factor escalar $(z-z_0)^n$ a la derecha de los vectores f_n). Si $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach complejo, la convergencia de la serie equivale a la verificación de la condición de Cauchy, y esto implica que los términos de la serie han de tender hacia cero. Además, toda serie que converja normalmente en un conjunto lo hará absoluta y uniformemente.

Definición C.8. Dado $\mathbb{E}$ un espacio de Banach complejo y $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ una serie de potencias formal, definimos su radio de convergencia ρ, mediante

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^{1/n}. \tag{C.3}$$

Usaremos el convenio clásico de considerar $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$. Para cada $K > 1/\rho$ tenemos $\|f_n\| \leq K^n$ para cada $n \geq n_0$ adecuado. En efecto, como

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^{1/n} = \frac{1}{\rho} < K,$$

tendremos que, por definición de límite superior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$\|f_n\|^{\frac{1}{n}} < K \text{ para cada } n \geq n_0,$$

y por lo tanto, obtendremos $\|f_n\| < K^n$. Con un argumento análogo, para cada $k < 1/\rho$, sin embargo, obtendremos $\|f_n\| > k^n$ para infinitos n.

Esto prueba que, como en el caso escalar, la serie de potencias converge absolutamente en el disco $D(z_0, \rho)$ y uniformemente en cada uno de los compactos del disco, pues es sencillo acotar sus sumandos por los de una serie numérica geométrica de razón menor que 1, con lo que hay convergencia, de hecho, normal, mientras que diverge siempre que $|z| > \rho$, puesto que el término general no tiende a 0, no pudiéndose decir nada acerca de la convergencia en la frontera del disco. Este comportamiento justifica el nombre dado a ρ.

Proposición C.9. Para $z_0 \in G$, sea $\rho > 0$ de tal forma que $D(z_0, \rho) \subset G$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, \rho), \tag{C.4}$$

con sus coeficientes dados por

$$f_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho-\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \geq 0,$$

para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Demostración: Desarrollando $(w-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n(w-z_0)^{-n-1}$, insertando este desarrollo en (C.2) e intercambiando sumatorio con la integral, lo cual está justificado, puesto que tenemos convergencia uniforme (probado siendo z_0 interior al soporte de γ y $|z-z_0| < \inf_{w\in\gamma}|w-z_0|$), y a partir de este punto se procederá de forma análoga a como se realizó en el caso escalar. $\square$

Las series de potencias convergentes con el mismo centro, z_0 pueden ser sumadas término a término, pero en general, el producto de dos series de potencias no está definido. Sin embargo, el siguiente aserto siempre es correcto:

Proposición C.10. Para $f \in \mathcal{H}(G,\mathbb{E}), \alpha \in \mathcal{H}(G,\mathbb{C})$ y $T \in \mathcal{H}(G,\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}))$ suponemos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n$, $\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ y $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z-z_0)^n$, para $|z-z_0| < \rho$. Entonces $Tf \in \mathcal{H}(G,\mathbb{F})$, $\alpha f \in \mathcal{H}(G,\mathbb{E})$, y tenemos

$$T(z)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} T_{n-m}f_m\right)(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < \rho,$$

$$\alpha(z)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} \alpha_{n-m}f_m\right)(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < \rho.$$

Demostración: Se sigue de la construcción del producto de Cauchy de series. En efecto, como $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z-z_0)^n$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n$ entonces:

$$\begin{aligned} T(z)f(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n(z-z_0)^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z-z_0)^m\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m+k} T_n f_m(z-z_0)^{n+m}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} T_{n-m}f_m\right)(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < \rho. \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba la segunda igualdad. □

Sea f la función dada por (C.4) y escogemos un punto $z_1 \in D(z_0, \rho)$. Entonces, la representación de f mediante su serie de potencias en torno al punto z_1 puede ser dada por:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n+m \\ m \end{array} \right) f_{n+m}(z_1 - z_0)^n \right) (z - z_1)^m,$$

y la serie converge al menos para los puntos que verifican $|z - z_1| < \rho - |z_1 - z_0|$ pero puede converger en un disco más grande.

C.3. Orden y tipo de funciones enteras

Antes de empezar a explicar conceptos relacionados con el orden y tipo de funciones enteras, daremos la definición de función entera.

Definición C.11. Diremos que una función f a valores en un espacio de Banach $\mathbb{E}$ es entera si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbb{E})$.

Sea f una función entera. Definimos

$$M(\rho, f) = \text{máx}\{\|f(z)\| \ : \ |z| = \rho\},$$

para $\rho \geq \rho_0$.

Si no hay ambigüedad en la notación, denotaremos por $M(\rho)$ a $M(\rho, f)$.

Notemos que, como consecuencia del teorema del módulo máximo que se verifica en $\mathbb{C}$, la función $M(\rho, f)$ es estrictamente creciente en $(0, \infty)$ siempre que f no sea constante. De hecho, se verifica que

$$\lim_{\rho \to \infty} M(\rho, f) = \infty,$$

puesto que si no, gracias al teorema de Liouville, deduciríamos que f sería constante, llegando a una contradicción.

De forma natural, haciendo uso del conocimiento de las funciones elementales reales, procede comparar $M(\rho)$ con funciones del tipo $e^{\rho^{\mu}}$, con $\mu > 0$. Esto motiva las siguientes definiciones; el *orden* y el *tipo* de una función. Pero antes daremos la definición de función entera.

A continuación, pasaremos a definir el orden y tipo de una función entera.

Definición C.12. Sea f una función entera. Decimos que f es de *orden finito* cuando se verifica la siguiente propiedad:

$$\text{Existen } \mu > 0 \text{ y } R(\mu) > 0 \text{ tales que } M(\rho) < e^{\rho^{\mu}} \text{ para todo } \rho > R(\mu). \tag{C.5}$$

Llamaremos *orden* de la función f al extremo inferior del conjunto

$$\{\mu > 0 \ : \ \mu \text{ verifica (C.5)}\}$$

Habitualmente denotaremos el orden de una función mediante k. Si el conjunto anterior es vacío se dirá que f es de orden infinito.
El siguiente resultado caracterizará en términos de límites al orden de una función f.

Proposición C.13. Sea f una función entera. Entonces su orden k se puede escribir como

$$k = \limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log(\log(M(\rho)))}{\log(\rho)}.$$

Demostración: Por la definición de orden como inferior, dado $\varepsilon > 0$, tendremos lo siguiente:
Por un lado, existe $R(\varepsilon)$ tal que $M(\rho) < e^{\rho^{k+\varepsilon}}$ para cada $\rho > R(\varepsilon)$. Despejando, obtendremos

$$\frac{\log(\log(M(\rho)))}{\log(\rho)} < \rho + \varepsilon,$$

siempre que $r > R(\varepsilon)$.
Por otro lado, existen módulos ρ_1, ρ_2,. . . ,ρ_n,. . . arbitrariamente grandes cumpliendo que $M(\rho_n) > e^{\rho_n^{k-\varepsilon}}$ (puesto que $M(\rho) \to \infty$, cuando $\rho \to \infty$), esto es

$$\frac{\log(\log(M(\rho_n)))}{\log(\rho_n)} > \rho - \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De las dos desigualdades anteriores, deducimos precisamente que

$$k = \limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log(\log(M(\rho)))}{\log(\rho)}.$$

□

Definición C.14. Sea f una función entera, de orden finito k. Decimos que f es de *tipo finito* cuando se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{Existen } K > 0 \text{ y } R(K) > 0 \text{ tales que } M(\rho) < e^{K\rho^k} \text{ para } \rho > R(K). \quad \text{(C.6)}$$

Llamaremos *tipo* de la función f al extremo inferior del conjunto

$$\{K > 0 \ : \ K \text{ verifica (C.6)}\}.$$

Habitualmente denotaremos el tipo de una función por τ. De nuevo, si el conjunto anterior es vacío, se dirá que f es de *tipo infinito*, $\tau = \infty$.

De manera similar al orden, el siguiente resultado caracterizará al tipo de f en términos de límites superiores.

Proposición C.15. Sea f una función entera, f no constante de orden finito k. Entonces, su tipo τ se puede escribir como

$$\tau = \limsup_{\rho\to\infty} \frac{\log M(\rho)}{\rho^k}$$

Demostración: Por la definición de tipo como inferior, dado $\varepsilon > 0$, tendremos lo siguiente:
Por un lado, existe $R(\varepsilon)$ tal que $M(\rho) < e^{(\tau+\varepsilon)\rho^k}$ para todo $\rho > R(\varepsilon)$. Despejando esta desigualdad, tendremos

$$\frac{\log M(\rho)}{\rho^k} < \tau + \varepsilon, \text{ siempre que } \rho > R(\varepsilon).$$

Por otra parte, de manera análoga a como teníamos para el orden de f, existen módulos $\rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_n, \ldots$ arbitrariamente grandes cumpliendo que $M(\rho_n) > e^{(\tau-\varepsilon)\rho_n^k}$, es decir

$$\frac{\log(M(\rho_n))}{\rho_n^k} > \tau - \varepsilon.$$

Al verificarse las dos desigualdades para $\frac{\log(M(\rho))}{\rho^k}$, deducimos que

$$\tau = \limsup_{\rho\to\infty} \frac{\log M(\rho)}{\rho^k}.$$

A continuación, veremos un lema que permitirá simplificar algunos cálculos para probar las fórmulas de orden y tipo de una función entera f cuando conocemos su desarrollo de Taylor.

Lema C.16. Sean K y μ números reales positivos. Sea, para cada n natural,

$$g_n(\rho) = \frac{e^{K\rho^\mu}}{\rho^n}, \text{ para } \rho > 0.$$

Entonces se tiene que

$$\left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} \leq g_n(\rho) = \frac{e^{K\rho^\mu}}{\rho^n}.$$

Demostración: Veamos que este resultado se cumple porque, de hecho se tiene

$$\min_{\rho>0} g_n(\rho) = \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu},$$

pero esto último se reduce a un sencillo problema de optimización de funciones. Derivando la función $g_n(\rho)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$g_n(\rho) = \frac{K\mu\rho^{\mu+n-1}e^{K\rho^\mu} - n\rho^{n-1}e^{K\rho^\mu}}{\rho^{2n}} = \frac{\rho^{n-1}e^{K\rho\mu}[K\mu\rho^\mu - n]}{\rho^{2n}}.$$

Luego, los posibles candidatos a ser extremos relativos son aquellos que anulen a la derivada de la función $g_n(\rho)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es decir, estos son aquellos que verifiquen

$$\mu K\rho^\mu - n = 0,$$

o también

$$\rho = \left(\frac{n}{K\mu}\right)^{1/\mu}.$$

Derivando dos veces la función $g_n(\rho)$ y evaluando en el punto crítico, se puede ver claramente que dicha derivada segunda es mayor que cero, y por ello los candidatos a ser puntos críticos son, efectivamente, mínimos relativos para la función $g_n(\rho)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Viendo el valor que toma g_n en su mínimo correspondiente permite concluir que dicho mínimo es el que dice el resultado. □

Ahora, pasaremos a la definición de función trascendente.

Definición C.17. Diremos que una función f es *trascendente* si es entera y su desarrollo de Taylor tiene infinitos coeficientes no nulos, es decir, cuando f no es una función polinómica.

Así pues, vamos a dar otro resultado auxiliar con el que, con su ayuda, completará la demostración de las fórmulas de orden y tipo de una función entera conocido su desarrollo de Taylor.

Lema C.18. Sea f una función trascendente con desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n.$$

Supongamos además que existen constantes $K, \mu > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$|f_n\| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu}, \text{ para todo } n > N.$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon)$ tal que para $\rho > R$ se tiene que

$$M(\rho) < e^{(K+\varepsilon)\rho^\mu}.$$

Demostración: Separaremos en tres sumas la serie de Taylor de f y acotaremos convenientemente cada uno de los tres sumandos usando lo siguiente: Utilizando el criterio mayorante de Weierstrass, es inmediato que, para μ y K fijos, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu},$$

es convergente. Por esto, existirá un $N_1 = N_1(\mu, K)$, que supondremos mayor que el N del enunciado, $N_1 > N$ de modo que

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} < 1,$$

esto es, el resto de orden N_1 del desarrollo de Taylor de f es acotado.
Por otra parte, del lema C.16 anterior y por las hipótesis de los coeficientes f_n tendremos que, para $n > N$, se verifica que

$$\|f_n\| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} \leq g_n(\rho) = \frac{e^{K\rho^\mu}}{\rho^n},$$

es decir, que para $n > N$ tendremos que $\|f_n\|\rho^n < e^{K\rho^\mu}$.
Acotando, pues, y suponiendo que $\rho > 1$ tendremos lo siguiente

$$\begin{aligned} M(\rho) &\leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \|f_n\|\rho^n + \sum_{n=N+1}^{N_1} \|f_n\|\rho^n + \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|\rho^n \\ &< 1 + (N_1 - N)e^{K\rho^\mu} + \rho^N \sum_{n=0}^{N} \|f_n\| \\ &< e^{K\rho^\mu}\Big[N_1 - N + e^{-K\rho^\mu}\Big(1 + \rho^N \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Como vemos, fijado $\varepsilon > 0$, existe un $R(\varepsilon) > 1$ tal que la expresión que figura entre corchetes es menor que $e^{\varepsilon\rho^\mu}$, para $\rho > R(\varepsilon)$ (puesto que la expresión que figura entre corchetes tiende a 0 cuando ρ tiende a ∞).
Concluyendo el resultado, queda que, en efecto, existe $R(\varepsilon)$ tal que

$$M(\rho) < e^{K\rho^\mu} e^{\varepsilon\rho^\mu} = e^{(K+\varepsilon)\rho^\mu}, \text{ para } \rho > R(\varepsilon).$$

□

Dicho todo lo anterior, ya tenemos todas las herramientas disponibles para demostrar el hecho de que se puede calcular el orden y tipo de una función entera sabiendo los coeficientes de su desarrollo de Taylor, f_n.

Proposición C.19. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbb{E})$ con desarrollo de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \; z \in \mathbb{C}.$$

Entonces, el orden k se pueden escribir como

$$k = -\limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log(\|f_n\|)}.$$

Demostración: Primero, por comodidad, denotamos como

$$\alpha = -\limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log(\|f_n\|)}.$$

A continuación, veremos que:

1. Si k es finito, entonces también lo es α y $k \geq \alpha$.

2. Si α es finito, entonces k lo es y se tiene que $\alpha \geq k$.

De lo anterior se deduce que si uno de los valores es finito, lo es el otro y coinciden. De esta manera, si uno de los valores es infinito, lo es también el otro y la fórmula se puede considerar igualmente válida.

1. Supongamos que f es de orden finito k y veamos pues que α es finito y también $k \geq \alpha$. Por definición de orden, para todo $\mu > \rho$ tendremos que existe $R = R(\mu)$ tal que $M(\rho) < e^{\rho^\mu}$, siempre que $\rho > R(\mu)$. En virtud de las desigualdades de Cauchy tendremos que

$$\|f_n\| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} < \frac{e^{\rho^\mu}}{\rho^n} := g_n(\rho), \text{ para } \rho > R.$$

Hacemos uso del lema C.16 previo para $K = 1 > 0$ para encontrar la mejor cota posible para la desigualdad anterior. Este lema da los puntos en los que las funciones $g_n(\rho)$ alcanzan sus valores mínimos y el valor que toma la función $g_n(\rho)$ en dichos puntos. Es decir, si llamamos m_n a estos puntos, se tiene que

$$g_n(m_n) = \left(\frac{e\mu}{n}\right)^{n/\mu}, \text{ siendo } m_n = \left(\frac{n}{\mu}\right)^{1/\mu}.$$

Obérvese que la información anterior sólo será de utilidad cuando se cumpla que $m_n > R$. No obstante, observamos que $m_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ lo cual permite encontrar un índice N, que dependerá de $R(\mu)$, tal que $m_n > R$ para $n > N$.
En definitiva, tendremos que

$$\|f_n\| < \left(\frac{e\mu}{n}\right)^{n/\mu}, \text{ para cada } n > N.$$

Despejamos ahora μ en la desigualdad anterior con la siguiente puntualización: puesto que f es entera sabemos que, por el teorema de Hadamard

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f_n\|} = 0, \text{ de donde } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\|f_n\|} = 0.$$

Además, $\|f_n\| < 1$ para n suficientemente grande y por consiguiente, tendremos que $\log\|f_n\| < 0$. Como tomaremos límite superior cuando $n \to \infty$ podemos suponer que la desigualdad se invertirá cuando multipliquemos por el factor $\log\|f_n\| < 0$. Quedará así pues

$$\mu > \frac{n[\log(e\mu) - \log(n)]}{\log\|f_n\|}.$$

Finalmente tomando límite superior queda precisamente que

$$\mu \geq -\limsup_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{\log\|f_n\|} = \alpha.$$

Para concluir, como todo lo dicho anteriormente es válido para cualquier $\mu > \rho$, obtenemos que $k \geq \alpha$ y vemos que si k es finito entonces α también lo es.

2. Supongamos ahora que $\alpha < \infty$. Por la definición de α vemos que dado cualquier $\mu > \alpha$, existe $N = N(\mu)$ de tal forma que

$$-\frac{n\log(n)}{\log\|f_n\|} < \mu, \text{ para todo } n > N.$$

De nuevo, por ser f holomorfa en todo el plano complejo podemos asegurar que existe $N = N(f)$ tal que $\log|a_n| < 0$, para todo $n > N$. Es decir, para índices suficientemente grandes $n > N(\mu, f)$ podremos despejar $\|f_n\|$, obteniendo la desigualdad

$$\|f_n\| < \left(\frac{1}{n}\right)^{n/\mu}, \text{ para todo } n > N(\mu, f).$$

En virtud del lema C.18 tomando $N = N(\mu, f)$ y $e\mu K = 1$, es decir, $K = 1/(e\mu)$ podremos garantizar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R(\varepsilon)$ tal que

$$M(\rho) < e^{(K+\varepsilon)\rho^{\mu}}, \text{ siempre que } \rho > R(\varepsilon),$$

lo cual invita a decir que f tiene orden finito $k \leq \mu$ y como esto es válido para cualquier $\mu > \alpha$ obtenemos la desigualdad $k \leq \alpha$ y vemos que si α es finito, entonces k también lo será, como queríamos.

□

Teorema C.20. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbb{E})$ de orden finito $k > 0$ y sea su desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n.$$

Entonces, es posible calcular su tipo despejando en la fórmula:

$$(ek\tau)^{1/k} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/k} \sqrt[n]{\|f_n\|}.$$

Demostración: La demostración seguirá la misma estructura que la de la proposición anterior. Por comodidad haremos

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} n^{1/k} \sqrt[n]{\|f_n\|},$$

y veamos que:

- Si τ es finito, entonces β también lo es y $\beta \leq (ek\tau)^{1/k}$.
- Si β es finito, entonces τ también lo es y se tiene que $\beta \geq (ek\tau)^{1/k}$.

De nuevo, de lo anterior se deduce que si uno de los valores es finito, lo es el otro, coinciden y, en definitiva, la fórmula se puede considerar igualmente válida.

1. Supongamos que f es de tipo finito τ. Para todo $K > \tau$, en virtud de las desigualdades de Cauchy, tendremos que existe $R(K)$ de modo que:

   $$\|f_n\| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} < \frac{e^{\rho^\mu}}{\rho^n} := g_n(\rho), \text{ para } \rho > R(K).$$

   Volveremos a utilizar los puntos m_n del plano en los que las funciones $g_n(\rho)$ presentan un mínimo, que vienen dados por el lema C.16, teniéndose que

   $$g_n(m_n) = \left(\frac{ekK}{n}\right)^{n/k}, \text{ siendo } m_n = \left(\frac{n}{kK}\right)^{1/k}.$$

   Igualmente, podremos encontrar un índice N, que dependerá de $R(K)$, de modo que $m_n > R(K)$ si $n > N$ (puesto que $m_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$) y tenemos la desigualdad

   $$\|f_n\| < \left(\frac{ekK}{n}\right)^{n/k}, \text{ para } n > N.$$

   Esta vez mediante una sencilla manipulación, despejamos K en la anterior desigualdad y obtendremos

   $$n^{1/k}\sqrt[n]{\|f_n\|} < (ekK)^{1/k}.$$

   Tomando límite superior cuando $n \to \infty$, quedará

   $$\beta \leq (ekK)^{1/k}.$$

   Por último, por ser todo lo dicho anteriormente válido para cualquier $K > \tau$, obtenemos la desigualdad solicitada.
   También observamos que el hecho de que la función f de orden finito k tenga tipo finito τ implica que β es finito.

2. Supongamos ahora que β es finito. Veamos que entonces f es de tipo finito τ y se verifica que $\beta \geq (ek\tau)^{1/k}$. Consideramos el valor τ' de tal forma que hace que se verifique la igualdad $\beta = (ek\tau')^{1/k}$, es decir,

   $$\tau' = \frac{\beta^k}{ek}.$$

De nuevo, por la definición de β como límite superior vemos que dado cualquier $K > \tau'$ existe $N(K)$ de tal forma que

$$n^{1/k} \sqrt[n]{\|f_n\|} \leq (ekK)^{\frac{1}{k}}, \text{ para todo } n > N.$$

Otra vez, despejamos el coeficiente $\|f_n\|$ obteniendo la desigualdad

$$\|f_n\| < \left(\frac{ekK}{n}\right)^{\frac{n}{k}}, \text{ para todo } n > N.$$

Y una vez más, en virtud del lema C.18 tomando $N = N(K)$ y $\mu = k$, podremos afirmar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R(\varepsilon)$ tal que

$$M(\rho) < e^{(K+\varepsilon)\rho^{\mu}}, \text{ siempre que } \rho > R(\varepsilon).$$

En consecuencia f tiene tipo finito $\tau \leq K$, y como esta afirmación es válida para cualquier $K > \tau'$, se verificará que

$$\tau \leq \tau' = \frac{\beta^k}{ek}, \text{ de donde } \beta \geq (ek\tau)^{1/k},$$

que es el resultado solicitado. $\square$

C.3. El Principio de Phragmén-Lindelöf

En varios textos podemos encontrar numerosos teoremas, todos llevando el nombre de *Phragmén-Lindelöf* siendo variantes resp. consecuancias del bien conocido *Principio del módulo máximo*, que se puede generalizar fácilmente a un espacio de Banach cualquiera:

Proposición C.21 (Principio del módulo máximo). Sea G una región cualquiera en $\mathbb{C}$, y supongamos que existen z_0 y $\rho > 0$ con $D(z_0, \rho) \subset G$ para el cual

$$\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|, \quad z \in D(z_0, \rho).$$

Entonces $f(z)$ es constante.

Demostración: Sin perder generalidad, hagamos $z_0 = 0$ (las traslaciones y homotecias de discos no alteran las propiedades topológicas de los discos). Desarrollando $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $|z| < \rho$, queremos probar $f_n = 0$ para $n \geq 1$. Supongamos que lo hemos hecho para $1 \leq n \leq m-1$, que es una suposición trivial si $m = 1$. De acuerdo con el Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional $\phi \in \mathbb{E}'$ con $\|\phi\| = 1$ y $\phi(f_0) = \|f_0\|$, $|\phi(f_m)| = \|f_m\|$. Por continuidad de ϕ concluimos que

$$\phi(f(z)) = \phi(f_0) + \sum_{n=m}^{\infty} \phi(f_n) z^n, \quad |z| < \rho.$$

Las suposiciones que teníamos para f y ϕ implican

$$|\phi(f(z))| \leq \|f(z)\| \leq \|f(0)\| = \phi(f_0).$$

Tomando z para que $z^m \phi(f_m)$ y $\phi(f_0)$ tengan el mismo argumento, y $|z|$ tan pequeño como para que $|\sum_{n=m+1}^{\infty} \phi(f_n) z^n| \leq |z^m \phi(f_m)|/2$, obtendremos

$$|\phi(f(z))| \geq |\phi(f_0) + z^m \phi(f_m)| - |z^m \phi(m)|/2 = |\phi(f_0)| + |z^m \phi(f_m)|/2,$$

implicando $\phi(f_m) = 0$, y por lo tanto $f_m = 0$. □

Otra forma de expresar el resultado anterior es diciendo que para una función $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{E})$ arbitraria, con $f'(z)$ no idénticamente nula en G, la función $F(z) = \|f(z)\|$ no puede tener un máximo local en G. Usando toda esta información, probaremos el principio de Phragmén-Lindelöf:

Teorema C.22 (Principio de Phragmén-Lindelöf). Para $k > 0$, sea $S = \{z \;:\; |z| \geq \rho_0, \alpha < \arg z < \beta\}$, siendo $\rho_0 > 0$, $0 < \beta - \alpha < \pi/k$. Para una función $f \in \mathcal{H}(S, \mathbb{E})$, suponemos $\|f(z)\| \leq c \exp[K|z|^k]$ en S, para constantes $c, K > 0$ suficientemente grandes. Además, supongamos que f es continua hasta la frontera de S y está acotada por una constante C en la frontera de S. Entonces

$$\|f(z)\| \leq C, \quad z \in S.$$

Demostración: Sin perder generalidad, tomemos como bisectriz del sector S la recta real positiva (siempre podemos tener esta situación tras un giro adecuado), por lo que podremos escribir

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; |\arg(z)| < \frac{\pi\alpha}{2} \right\}.$$

Cogeremos ahora $0 < k < k_1 < k_2 < 1/\alpha$ y denotaremos por S_R al sector acotado

$$S_R = \{z \in S \ : \ |z| < R\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, aplicaremos el principio del módulo máximo a la función auxiliar $F_\varepsilon(z) = f(z)\exp(-\varepsilon z^{k_2})$ tomando como recinto el sector acotado S_R.
Con vistas a aplicar el principio del módulo máximo, acotaremos F_ε en la frontera del recinto S_R. Tendremos dos casos:

Caso I: Si z es un punto del plano perteneciente a los lados de S_R expresado como $z = \rho e^{i\theta}$, entonces se tendrá que

$$\|F_\varepsilon(z)\| \leq C|\exp(-\varepsilon z^{k_2})| = C\exp(-\varepsilon \rho^{k_2}\cos(k_2\theta)).$$

puesto que la parte real de $z = \rho e^{i\theta}$ es $\rho\cos(\theta)$.
Si vemos que el exponente del lado derecho de la desigualdad es negativo, podremos concluir.
En efecto, puesto que z se encuentra en un lado del sector de amplitud $\pi\alpha$ centrado en el eje real, observamos que

$$|\theta| = \frac{\pi\alpha}{2} \ \text{ y que } k_2 < \frac{1}{\alpha},$$

esto es, tendremos que

$$|k_2\theta| < \frac{\pi\alpha}{2\alpha} \ \text{ y que } k_2 < \frac{1}{\alpha},$$

y, por supuesto, $\cos(k_2\theta) > 0$.
Con todo esto, podremos concluir que $\|F_\varepsilon(z)\| \leq C$.

Caso II: Si z es un punto de la frontera del sector circular que se encuentra en el arco circular de radio R, es decir, $z = Re^{i\theta}$, con $|\theta| \leq \pi\alpha/2$, tendremos que, por definición de orden, $\|f(z)\| \leq M(R) < \exp(R^{k_1})$ para cada $R > R_1$ adecuado. Por consiguiente, tendremos

$$\|F_\varepsilon(z)\| < \exp(R^{k_1} - \varepsilon R^{k_2}\cos(k_2\theta)) < \exp\left(R^{k_1} - \varepsilon R^{k_2}\cos\left(\frac{k_2\alpha\pi}{2}\right)\right).$$

Esto es, para todo R suficientemente grande tendremos que $\|F_\varepsilon(z)\| \leq C$ en la frontera del recinto S_R y el principio del módulo máximo avala que dicha acotación es también válida en el sector S_R y por ello en S.

Observamos que lo anterior es válido para cada $\varepsilon > 0$. Haciendo $\varepsilon \to 0$, obtendremos

$$\|F_\varepsilon(z)\| = \|f(z_0)\exp(\varepsilon z_0^{\rho_2})\| = \|f(z_0)\|,$$

y podremos cerrar la demostración de este resultado al ser

$$\|f(z_0)\| \leq C, \quad \text{para todo } z_0 \in S.$$

$\square$

Apéndice D

Fórmula de Stirling en el plano complejo

En este apéndice estudiaremos el comportamiento de la función Γ de Euler y de la fórmula de Stirling deduciremos el desarrollo asintótico de la función Γ definida en el semiplano

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) > 0\}.$$

A partir de ahora y salvo que se diga lo contrario $\mathbb{H}$ denotará ese conjunto del plano complejo.

D.1. Fórmula de Stirling para números reales mayores que 0

Definición D.1. Sea $z \in \mathbb{H}$. Llamamos función Gamma de Euler a la función definida mediante

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ dt.$$

Observemos que si $z = x + iy$ con $x > 0$, entonces

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} \in L^1(0, \infty)$$

lo que garantiza que la función Γ está bien definida en $\mathbb{H}$. Además por el teorema de holomorfía bajo el signo integral, Γ es holomorfa en $\mathbb{H}$.

Teorema D.2. Para todo $x > 0$ se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x\sqrt{x}}{x^x}\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}.$$

Demostración: Sea $x > 0$. Aplicando la definición D.1, y realizando el cambio de variable $t = u^2$, tenemos

$$\frac{e^x\sqrt{x}}{x^x}\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{x-u^2}\Big(\frac{u}{\sqrt{x}}\Big)^{2x-1}\,du.$$

Realizando el cambio de variable $u = \sqrt{x} + v$, tendremos

$$\frac{e^x\sqrt{x}}{x^x}\Gamma(x) = 2\int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-2v\sqrt{x}}\Big(1+\frac{v}{\sqrt{x}}\Big)^{2x-1}e^{-v^2}\,dv = 2\int_{-\infty}^\infty \varphi_x(v)e^{-v^2}\,dv,$$

donde

$$\varphi_x(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \le -\sqrt{x} \\ e^{-2v\sqrt{x}}\left(1+v/\sqrt{x}\right)^{2x-1} & \text{si } v > -\sqrt{x}. \end{cases}$$

Por una parte, usando el desarrollo asintótico de $\ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{x}}\right)$ que es

$$\ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{x}}\right) = \frac{v}{\sqrt{x}} - \frac{v^2}{2x} + \dots$$

tenemos que para un v fijo

$$\ln\varphi_x(v) = -v^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ \text{para } x \to \infty,$$

de donde

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_x(v) = e^{-v^2}.$$

Derivando, obtenemos

$$\varphi_x'(v) = -\frac{\sqrt{x}e^{-2v\sqrt{x}}\left(\frac{v}{\sqrt{x}}+1\right)^{2x}(2v\sqrt{x}+1)}{(v+\sqrt{x})^2}$$

Podremos observar que $\varphi_x(v)$ alcanza el máximo para

$$v = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Teniéndose la mayoración

$$\varphi_x(v) \le e\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{2x-1}$$

dicha cota está acotada para valores de x arbitrariamente grandes, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{2x-1}=\frac{1}{e}.$$

Resumiendo, hemos demostrado que

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty}\varphi_x(v)e^{-v^2}=e^{-2v^2}, \quad \forall v\in\mathbb{R} \\ \varphi_x(v)e^{-v^2}=O(e^{-v^2}) \text{ para } x\to\infty, \end{cases}$$

siendo la función e^{-v^2} integrable en $\mathbb{R}$. Podemos aplicar entonces el teorema de la convergencia dominada y concluir que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\sqrt{x}}{x^x}\Gamma(x)=2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2v^2}\,dv=\sqrt{2\pi},$$

que era lo que se pretendía probar. □

D.2. Fórmula de Stirling en el plano complejo salvo el semieje real negativo

Probaremos en primer lugar un lema que permite extender el dominio de definición de la función Gamma.

Lema D.3. Sea $z\in\mathbb{H}$. Entonces, se verifica la siguiente ecuación funcional

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

Demostración: Utilizando la definición (D.1), obtenemos

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}t^ze^{-t}\,dt.$$

Si integramos por partes esta expresión

$$u=t^z,\ du=zt^{z-1};\ dv=e^{-t}\,dt, v=-e^{-t},$$

llegamos a

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}t^ze^{-t}\,dt=\left[-t^ze^{-t}\right]_{t=0}^{t\to\infty}+z\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt=z\Gamma(z),$$

obteniendo el resultado solicitado. □

Esta identidad permite extender Γ a la banda vertical

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ -1 < \Re(z) \leq 0, \ z \neq 0\},$$

poniendo

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Es inmediato que Γ así extendida es holomorfa en

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) > -1, \ z \neq 0\},$$

y presenta un polo simple en $z = 0$. Recurrentemente, podemos extender Γ a $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ de manera holomorfa, siendo $-j$ un polo simple de Γ, para todo $j \in \mathbb{N}$.

A continuación, presentamos, sin demostración, una escritura de la función Gamma como un producto infinito:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots\},$$

siendo γ la constante de Euler ($\gamma = 0{,}5772156649\dots$).

A partir de esta escritura es posible proporcionar el comportamiento asintótico de la función Gamma en sectores del plano complejo adecuados. No entraremos en detalles, pues su demostración (que se puede consultar en [5]) requeriría un esfuerzo adicional considerable.

Teorema D.4. Para todo z con $|\arg(z)| < \pi$ se tiene que

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{J(z)},$$

donde la potencia de z se considera en la rama principal y J es la llamada función de Binet. Para cada θ con $0 \leq \theta < \pi$ existe $\kappa(\theta) > 0$ de tal forma que

$$|J(z)| \leq \frac{\kappa(\theta)}{|z|},$$

para todo z en el sector $S_\theta : |\arg(z)| \leq \theta$. Por lo tanto,

$$\lim_{z\to\infty} \Gamma(z) \frac{e^z \sqrt{z}}{\sqrt{2\pi} z^z} = 1$$

uniformemente en cada sector S_θ.

Bibliografía

[1] W. Balser, From divergent power series to analytic functions, Universitext, Springer, 1994.

[2] W. Balser, Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations, Universitext, Springer, 2000.

[3] J. Dieudonné, Elementos de análisis tomo II, Reverté, 1982.

[4] J. Gago Vargas, Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla, Superficies de Riemann, disponible en la página web:
https://rodas5.us.es/file/9c67d392-d8a9-65f4-3e52-e773f337f88c/1/apuntes-sri-paso01.pdf, 2013.

[5] P. Henrici, Applied and computational complex analysis Volume 2, Wiley classics library, 2000.

[6] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, Wiley classics library, 1978.