



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Introducción a la teoría de wavelets.

Construcción y propiedades de wavelets continuas y discretas.

Autor: Laura Martín Martín

Tutor/es: Fernando Gómez Cubillo

Índice general

Introducción	v
Notación	ix
1. Preliminares	1
1.1. Espacios L^p	1
1.2. Espacios de Hilbert	2
1.3. Transformada de Fourier	4
1.4. Otros resultados	6
2. Wavelets	7
2.1. Transformada de Fourier en ventanas	7
2.2. Wavelets continuas	9
2.2.1. Tipos de wavelets	10
2.3. Wavelets Discretas	15
2.3.1. Análisis Multiresolución	15
2.3.2. Construcción de la wavelet	20
2.3.3. Algoritmos de análisis y reconstrucción	26
3. Propiedades de las wavelets. Construcción de wavelets con soporte compacto.	29
3.1. Localización polinomial	29
3.2. Momentos nulos	30
3.3. Soporte compacto	32
3.4. Construcción de wavelets de soporte compacto	34
3.4.1. Regularidad de la wavelet en función de m_0	40
Bibliografía	45

Introducción

Imaginemos por un momento una señal acústica elemental que suena de forma ininterrumpida. Podemos identificar el sonido mediante la frecuencia con la que vibra el aire que llega a nuestros oídos. Al mantenerse constante, es relativamente fácil dar una expresión matemática que describa el movimiento de las partículas, sería algo de la forma $\sin(Kt + C)$. En el caso de que no fuera una, sino varias las señales acústicas elementales que oyéramos superpuestas, bastaría sumar más senos con la misma estructura a la expresión anterior, uno por cada señal. Siguiendo por esta línea resulta tentador utilizar el análisis de Fourier para generalizar todas las superposiciones posibles de señales elementales, y es muy acertado siempre y cuando las señales no varíen con el tiempo. Sin embargo, estos casos son situaciones ideales. Si queremos trabajar con los sonidos presentes en nuestro día a día, sobre todo aquellos que nos aporten algún tipo de información, es necesario buscar herramientas más sofisticadas que nos permitan manejar señales sonoras, ya sea para describirlas o para estudiarlas. Pongamos otro ejemplo. En esta ocasión suena la radio de fondo. Pasados unos minutos, nuestro cerebro se olvida de que la radio existe, y no es hasta que se queda sin batería que nos damos cuenta de que estaba encendida. Irónicamente el silencio nos avisa de que la radio estaba encendida, pero no el silencio en sí mismo, sino la transición entre los dos estados. Con este ejemplo pretendemos mostrar cómo la información se encuentra en la variación de frecuencias e intensidades. Los objetivos de la teoría de la señal, entre otros, son el análisis, diagnóstico, modificación, cuantización, compresión, transmisión, almacenamiento, síntesis y reconstrucción de cualquier tipo de información. Como acabamos de comentar, el estudio de las señales unidimensionales no estacionarias necesita técnicas diferentes del análisis de Fourier. Estas técnicas incluyen una descomposición atómica que consiste en extraer los constituyentes simples de la señal, fundamentalmente de tipo tiempo-frecuencia o tiempo-escala. Estos constituyentes simples se denominan en la literatura átomos en general, o wavelets en el segundo caso.

Varias fueron las ramas del conocimiento que estudiaban las wavelets, a pesar de que cada una siguió un camino distinto y razonó desde un punto de vista diferente. Por ejemplo en el campo de las matemáticas puras, todo comenzó con la presentación de Haar (1909) de una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, ejemplo que encontraremos varias veces a lo largo del texto. Después le siguieron otras teorías

como la de Littlewood-Paley (1930) o la descomposición en átomos de Calderón (1960). Mientras tanto, en el campo de tratamiento de la señal, Burt y Anderson publicaron en 1982 el algoritmo en pirámide. Inicialmente diseñado para tratamiento de la imagen, este algoritmo puede simplificarse a una dimensión para obtener una variante que permita el análisis de señales. Gabor propuso la utilización de ventanas (1946), funciones que permitían estudiar la señal en el tiempo y frecuencia deseados. En 1984, Morlet utilizó esta teoría en el ámbito de la sismología. Grossman, físico teórico contemporáneo a Morlet, detectó similitudes entre su trabajo y las ventanas de Gabor. De esta forma se dieron cuenta que matemáticos, físicos y analistas de señales habían estado trabajando en paralelo, llegando en varias ocasiones a los mismos resultados desde puntos de vista distintos. Conscientes de ello, Morlet y Grossman decidieron unificar ese mismo año toda la teoría existente en [Gros], tarea que también llevó a cabo Mallat [Mall] en 1998. Las referencias a todos los trabajos nombrados se pueden encontrar en estos dos últimos.

El objeto de este trabajo es presentar una introducción a ciertos aspectos de la teoría de wavelets. Partiendo del análisis tiempo-frecuencia asociada a la transformada de Fourier en ventanas introduciremos las wavelets continuas, las fórmulas integrales de análisis y reconstrucción asociadas y un estudio detallado de las wavelets continuas reales y analíticas. Estudiaremos también las wavelets discretas diádicas, aquellas funciones que generan una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ mediante traslaciones enteras y dilataciones asociadas a potencias de 2. El estudio, en este caso se centra en las wavelets discretas que derivan de análisis multiresolución. Dicho análisis multiresolución genera un par de filtros de cuadratura conjugados, de los que se derivan algoritmos eficientes para el análisis y reconstrucción de las señales. Este trabajo se limita al estudio de señales en una dimensión, aunque la mayoría de los resultados pueden generalizarse a dos dimensiones para el estudio de imágenes o dimensión arbitraria.

En el primer capítulo introduciremos los espacios de funciones L^p y espacios de Hilbert sobre los que se construye la teoría. Se incluyen algunos resultados básicos sobre la transformada de Fourier indispensables a la hora de llevar a cabo las demostraciones y estudio de la señal en el ámbito frecuencial. También presentaremos algunos conceptos adicionales, como son las bases de Riesz, espacios de Hölder, el principio de incertidumbre de Heisenberg y otros resultados técnicos que se utilizarán a lo largo del texto.

El capítulo 2 comienza con el estudio de las ventanas de Gabor. Estas nos permiten realizar un análisis frecuencial local, de manera que aportan información acerca de la intensidad localizada en el tiempo con que las frecuencias simples intervienen en la señal, dando lugar al espectrograma. En la sección 2.2 presentaremos las wavelets continuas, las cuales proporcionan un análisis tiempo-escala que deriva en transformadas integrales para el análisis y reconstrucción de la se-

ñal, tal como se muestra en el teorema 2.1. Para que esto sea posible, es necesario exigir que la wavelet sea de integral nula y que verifique la condición de admisibilidad que aparece en este teorema. La idoneidad de una wavelet a la hora de analizar una señal pasa por la condición de redundancia descrita en términos de Reproducing Kernel y correlaciones no nulas. Esta característica también se aprecia en el escalograma, sustituto del espectrograma en el ámbito de las wavelets continuas. Finalmente prestaremos especial atención a los casos de wavelets continuas reales y analíticas. En la sección 2.3 se introducirán las wavelets discretas diádicas, esto es, como ya se ha comentado, funciones ψ caracterizadas por generar una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ de la forma $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Por lo tanto, las fórmulas de análisis y reconstrucción de la señal se basa en la teoría general de espacios de Hilbert. Encontrar wavelets discretas es en general una tarea complicada. Su construcción puede llevarse a cabo con la teoría presentada en la sección 2.3.1.: el análisis multiresolución. Dicho análisis consiste en considerar una familia creciente para la inclusión de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ que verifican ciertas propiedades. En particular, el subespacio V_0 contiene una función denominada función escala cuyas desplazadas $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son una base ortonormal de V_0 . Mediante las relaciones de doble escala, se puede asociar a esta función un filtro de paso bajo. Estos dos ingredientes permiten asociar una wavelet a dicho análisis multiresolución mediante un filtro (de cuadratura) conjugado al filtro de paso bajo antes mencionado, tal como se describe en la sección 2.3.3. Algunas de las wavelets clásicas asociadas a análisis multiresolución son las wavelets de Shannon, descritas en el ejemplo 6, o la wavelet de Battle-Lemarié que aparece en el ejemplo 7.

El capítulo 3 está orientado al estudio de algunas propiedades relevantes de las wavelets, en particular regularidad, localización, momentos nulos y soporte, prestando especial atención a las relaciones e incompatibilidades que existen entre ellas, y su relevancia en teoría de la señal. Por ejemplo, en el teorema 3.3 se muestra que el orden del momento nulo se puede calcular a partir de la regularidad y la localización. También se incluye en la sección 3.4 los detalles para construir wavelets de soporte compacto, que como es bien conocido (ver corolario 3.8), están asociadas a análisis multiresolución. Puesto que la familia de subespacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ queda determinado por el filtro de paso bajo, centraremos la atención en el análisis de dicho filtro. En particular, si la función de escala, y entonces también la wavelet, son de soporte compacto, los generadores de los filtros asociados son polinomios trigonométricos, y en la sección 3.4.1. se realiza un estudio detallado de estos polinomios que permiten deducir propiedades de regularidad de la wavelet. Como caso particular se presenta la wavelet de Daubechies, cuyo soporte es mínimo en función del orden de momentos nulos.

Este trabajo ha supuesto una gran oportunidad de profundizar en cuestiones relativas a la teoría de funciones y análisis armónico, y en particular en el estudio de las transformadas de Fourier y algunas generalizaciones. A su vez, la historia

de esta teoría deja al descubierto la importancia de apoyarse en otras ramas del conocimiento, ya sea dentro o fuera de las matemáticas, pudiendo aprovechar resultados ya demostrados para avanzar y desarrollar estudios más profundos. Debido a las fórmulas obtenidas a lo largo del trabajo es posible implementar gran parte de los procesos y cálculos que nos hemos ido encontrando. En el caso de Matlab y Maple, entre otros, incluso existe una biblioteca específica para estudio y tratamiento de señales mediante wavelets.

Para terminar quería agradecer al profesor Fernando Gómez Cubillo el haber aceptado dirigir este trabajo y compartir conmigo sus conocimientos en este área de las matemáticas.

Notación

\mathbb{N}	Números naturales.
\mathbb{Z}	Números enteros.
\mathbb{R}	Recta real.
\mathbb{C}	Plano complejo.
\mathbb{T}	Intervalo $[0, 2\pi)$.
\mathbb{S}	Elementos del plano complejo de modulo 1.
ψ	Wavelet.
φ	Función escala.
m_0	Filtro de paso bajo.
$\chi_{[a,b]}$	Función indicatriz de $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
\bar{x}	Conjugado del elemento $x \in \mathbb{C}$.
$[x]$	Parte entera de $x \in \mathbb{R}$.
$ x $	Módulo de $x \in \mathbb{C}$.
\mathcal{C}^k	Espacio de funciones con derivadas continuas hasta el orden k .
$\text{span}\{\mathcal{B}\}$	Espacio generado por los elementos de \mathcal{B} .
$\text{supp}(f)$	Soporte de la función f .
$\mathcal{P}(k)$	Espacio de funciones periódicas de periodo k .

Capítulo 1

Preliminares

Antes de presentar el grueso del trabajo haremos una pequeña introducción de la teoría vista durante el grado necesaria para poder trabajar con las Wavelets. Los resultados referentes a las dos siguientes secciones se encuentran en [Rud] y en el primer capítulo de [Mall].

1.1. Espacios L^p

Definición 1.1. Sean $p, q \in (0, \infty]$. Llamamos exponentes conjugados a p y q si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.1. Sean p, q exponentes conjugados, X un espacio medible de medida μ . Sean $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funciones medibles. Entonces se dan las siguientes desigualdades:

$$\int_X f(x)g(x) d\mu \leq \left(\int_X f(x)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g(x)^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.1)$$

$$\left(\int_X (f(x) + g(x))^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f(x)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g(x)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.2)$$

La desigualdad (1.1) se denomina desigualdad de Hölder, mientras que (1.2) es la desigualdad de Minkowski. En el caso $p = q = 2$, la desigualdad de Hölder es conocida como desigualdad de Schwarz.

Definición 1.2. Sea $0 < p < \infty$, X un espacio medible de medida μ . Se define el espacio $L^p(\mu)$ como

$$L^p(\mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible, } \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \right\}.$$

La norma asociada a este espacio $\|\cdot\|_p$ se denomina norma L_p donde

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Las desigualdades (1.1) y (1.2) dan lugar al siguiente resultado.

Teorema 1.2. Sean p y q exponentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Sean $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$. Entonces $fg \in L^1(\mu)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.3)$$

(b) Sean $f, g \in L^p(\mu)$. Entonces:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (1.4)$$

Teorema 1.3 (Fubini). Sean X e Y espacios medibles con medidas μ y λ respectivamente, y sea f una función medible de $X \times Y$. Definimos

$$f_x = \int_Y f d\mu, \quad f^y = \int_X f d\lambda.$$

Si $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, entonces $f_x \in L^1(\lambda)$ para casi todo x , $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$. Además se cumple

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_X f_x d\lambda = \int_Y f^y d\mu. \quad (1.5)$$

Teorema 1.4 (Fatou). Sea X un espacio de medida μ , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ una sucesión de funciones medibles. Entonces

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Definición 1.3. Sea X un espacio medible de medida μ , $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Identificamos con Λ_α el conjunto $f^{-1}((\alpha, +\infty]) \subset X$. Definimos el supremo esencial de f como

$$\text{ess.sup}(f) = \inf \{ \alpha \mid \mu(\Lambda_\alpha) = 0 \}.$$

Definición 1.4. Sea X un espacio de medida μ . Se define el espacio $L^\infty(\mu)$ como

$$L^\infty(\mu) = \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \mid \text{ess.sup}(f) < \infty \}.$$

1.2. Espacios de Hilbert

Definición 1.5. Sea H un \mathbb{K} -espacio vectorial (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}). Sea $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación tal que $\forall x, y \in H$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall z \in H.$
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \alpha$ escalar.
4. $(x, x) \geq 0.$
5. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Entonces H se denomina espacio prehilbert, y (\cdot, \cdot) es su producto escalar asociado.

Corolario 1.5. Es posible definir una norma asociada al producto escalar de H de la forma

$$\|x\|^2 = (x, x),$$

que verifica:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad (1.6)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (1.7)$$

Definición 1.6. Sea H un espacio prehilbert, $\Gamma = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subset H$. Γ se denomina conjunto ortonormal si

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Si las combinaciones lineales finitas de elementos de Γ son densas en H , se dice que Γ es una base ortonormal de H .

Definición 1.7. Sea H un espacio prehilbert donde toda serie de Cauchy converge. Entonces H se denomina espacio de Hilbert.

Nota. A partir de ahora, siempre que hablemos del espacio H estaremos considerando un espacio de Hilbert.

Definición 1.8. Sean $x, y \in H$. Decimos que x e y son ortogonales si $(x, y) = 0$. A su vez, sea A un subespacio vectorial de H , se define $A^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in A, (x, y) = 0\}$.

Definición 1.9. Sea A un subespacio cerrado de H , $x \in H$. Definimos la proyección de x sobre A , $P_A(x) \in A$, como el único elemento de A que verifica

$$\|x - P_A(x)\| = \min_{y \in A} \|x - y\|.$$

Teorema 1.6. Sea A un subespacio cerrado de H , $x \in H$. Podemos reescribir x , y la norma de x , de la siguiente forma:

1. $x = P_A(x) + P_{A^\perp}(x).$
2. $\|x\| = \|P_A(x)\| + \|P_{A^\perp}(x)\|.$

Definición 1.10. Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ una base ortogonal de H , entonces podemos escribir todo elemento $x \in H$ como combinación lineal generalizada de u_α :

$$x = \sum_{\alpha \in \Delta} x(\alpha) u_\alpha, \quad x(\alpha) = (x, u_\alpha). \quad (1.8)$$

Teorema 1.7. Sea $\mathcal{B} = \{u_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ un conjunto de elementos ortonormales de H . Entonces:

$$\forall x \in H, \quad \|x\|^2 \geq \sum_{\alpha \in \Delta} |x(\alpha)|^2 \quad (\text{Desigualdad de Bessel}).$$

Si además \mathcal{B} es una base ortonormal de H

- $\forall x \in H, \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \Delta} |x(\alpha)|^2.$
- $\forall x, y \in H, \quad (x, y) = \sum_{\alpha \in \Delta} x(\alpha) \overline{y(\alpha)} \quad (\text{Identidad de Parseval}).$

Definición 1.11. Sea H un espacio de Hilbert, Se define

$$l^p(H) = \left\{ (z_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \subset H, \Delta \text{ numerable} \mid \sum_{\alpha \in \Delta} |z_\alpha|^p < \infty \right\}.$$

Los espacios de Hilbert en los que trabajaremos serán de la forma $L^2(\Omega, \beta, \mu)$ dotado del siguiente producto escalar:

$$\forall f, g \in H \quad (f, g) = \int_{\Omega} f \overline{g} d\mu. \quad (1.9)$$

Por tanto podemos aplicar todas las definiciones y desigualdades enunciadas al principio del capítulo. En particular tomaremos (Ω, β, μ) con $\Omega = \mathbb{R}^n$, β la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n y $\mu = d_{x_1} \dots d_{x_n}$ la medida de Lebesgue producto en (\mathbb{R}^n, β) , con el siguiente producto escalar asociado:

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

1.3. Transformada de Fourier

Los siguientes resultados se pueden encontrar en el capítulo 2 de [Mall].

Definición 1.12 (Transformada de Fourier). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$. Definimos la transformada de Fourier de f en el punto ξ como:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt. \quad (1.10)$$

Teorema 1.8 (Teorema de inversión). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi. \quad (1.11)$$

A la función f la llamaremos transformada inversa (de Fourier) de \widehat{f} . Véase, por ejemplo, el teorema 2.1 de [Mall].

Propiedad 1.13. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces:

$$f(t) \mapsto f(t-b) \iff \widehat{f}(\xi) \mapsto e^{-ib\xi} \widehat{f}(\xi). \quad (1.12)$$

$$f(t) \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \iff \widehat{f}(\xi) \mapsto \widehat{f}(a\xi). \quad (1.13)$$

$$f(t) \mapsto e^{it\theta} f(t) \iff \widehat{f}(\xi) \mapsto \widehat{f}(\xi - \theta). \quad (1.14)$$

$$\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}. \quad (1.15)$$

Demostración. Para (1.12), (1.13) y (1.14), basta aplicar un cambio de variable dentro de la forma integral. En el caso (1.15) se aplica $\int f \overline{d\mu} = \int \overline{f} d\mu$,

$$\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(t)} e^{-it\xi} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(t) e^{it\xi}} \overline{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{it\xi}} \overline{dt},$$

pero como $\overline{dt} = dt$, obtenemos $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$. \square

Nota. Si nos encontramos con el caso $f(t) \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{t-b}{a}\right)$, basta aplicar (1.12) y (1.13) consecutivamente para ver que $\widehat{f}(\xi) \mapsto e^{-ib\xi} \widehat{f}(a\xi)$

Definición 1.14. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Se define la convolución de f con g en t como

$$f \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y) g(y) dy. \quad (1.16)$$

Teorema 1.9. Sean f y g funciones de $L^1(\mathbb{R})$. Se cumple $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad (1.17)$$

Teorema 1.10. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi. \quad (1.18)$$

Teorema 1.11 (Teorema de Plancherel). Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|^2. \quad (1.19)$$

1.4. Otros resultados

En este apartado presentamos definiciones y resultados adicionales a los que haremos referencia a lo largo del texto.

Definición 1.15 (Base de Riesz). *Sea $K \subset L^2(\mathbb{R})$ el espacio generado por $\mathcal{F} = \{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces \mathcal{F} es una base de Riesz de K si para cada función $g \in K$, existe una única secuencia $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tal que*

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k f_k,$$

convergente en $L^2(\mathbb{R})$, y existen dos constantes A y B , $0 < A \leq B < \infty$ independientes de g tales que

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k f_k \right\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2.$$

Proposición 1.12. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\{g(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal si y solo si*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi + 2k\pi)| = 1 \quad \text{c.s. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Tanto la definición 1.15 como la proposición 1.12 pueden encontrarse en [Wei], siendo esta última la proposición 1.11. en dicho libro.

Teorema 1.13 (Principio de incertidumbre de Heisenberg). *La varianza temporal σ_t y la varianza frecuencial σ_ξ de $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisface*

$$\sigma_t^2 \sigma_\xi^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (1.20)$$

Este resultado no es más que una reproducción del teorema 2.5 presente en [Mall]. Las varianzas temporal y frecuencial se definirán más adelante, en el capítulo 2.

Definición 1.16. *Sea g una función definida en todo \mathbb{R} , y sea $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ la función $\delta(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Entonces si $\delta_a = \delta(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$, denotaremos la acción de δ_a sobre g en el sentido de distribución por $(\delta_a, g) = \overline{g}(a)$.*

El siguiente teorema se extrae del comienzo del capítulo 6 de [Dau].

Teorema 1.14 (Bezout). *Sean p_1, p_2 dos polinomios de grado n_1, n_2 respectivamente, sin raíces comunes. Entonces existen dos polinomios q_1, q_2 de grado $n_1 - 1, n_2 - 1$ tales que*

$$p_1(t)q_1(t) + p_2(t)q_2(t) = 1.$$

Definición 1.17. *Sea $\alpha = n + \beta > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq \beta < 1$. Se denomina espacio de Hölder de orden α a las funciones de \mathcal{C}^n tales que la derivada n -ésima verifica la condición de Hölder:*

$$C^\alpha = \left\{ f \in \mathcal{C}^n \mid \forall t \in \mathbb{R} \exists K_t > 0, |f^n(t+h) - f^n(t)| \leq K_t |h|^\beta \right\}.$$

Capítulo 2

Wavelets

Nuestro objetivo no es otro que encontrar un método para describir las señales no estacionarias (cuya frecuencia varía con el tiempo) definidas sobre \mathbb{R} utilizando señales más simples. Para ello, no vale solo con tener en cuenta la presencia de diferentes frecuencias, sino también el momento en que estas aparecen. Para ello comenzaremos con el estudio en ventanas presentado por Gabor (1946) para ilustrar una de las primeras ideas que surgió para análisis de señal, la cual se basa en observar la energía de la señal sobre el plano tiempo-frecuencia. Más tarde, apareció otra técnica que sustituía las ventanas por wavelets, estudiadas en las secciones precedentes. Comenzaremos presentando las wavelets continuas para más tarde pasar al grueso del capítulo que suponen las wavelets discretas y su construcción. Para ello nos apoyaremos en el análisis resolución, que aparte de ayudarnos a la hora de construir las wavelets discretas sirve de base para el desarrollo de algoritmos de análisis y reconstrucción de señales. Para este capítulo se han utilizado mayoritariamente los textos de [Mall] y [Wei].

2.1. Transformada de Fourier en ventanas

Gabor propone en [Gab] cortar el tiempo en varios trozos y estudiarlos independientes unos de otros. Puesto que $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$, una primera idea podría ser dividir la recta de los reales en intervalos disjuntos de la forma $[\alpha_k, \alpha_{k+1})$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, y asociar a cada uno la base

$$\left\{ e^{ik\beta_k(t)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \beta_k(t) = \begin{cases} 2\pi \frac{t - \alpha_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}, & \text{si } t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}), \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \quad (2.1)$$

ya que así tendríamos la información bien localizada tanto en tiempo como en frecuencias. Sin embargo, esta construcción produce comportamientos indeseados en los puntos de unión de los intervalos.

Buscamos entonces una familia de elementos tales que su comportamiento sea suave, particularmente en los extremos, y además nos permitan trabajar en

cualquier momento $t = u$ y frecuencia $\xi = s$. Esto se consigue utilizando funciones regulares $g \in L^2(\mathbb{R})$, simétricas y de normal $\|g\| = 1$.

Antes de exigirle más propiedades a g aclararemos el concepto *función centrada en x* al que se hará referencia en repetidas ocasiones durante este capítulo:

Definición 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f está centrada en el punto $x \in \mathbb{R}$ si

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt.$$

Además de las propiedades anteriores, g y su transformada de Fourier deben estar centradas en 0. A estas funciones las llamaremos **ventanas**, las cuales nos permitirán situarnos en el tiempo que queramos, aplicando una traslación a la ventana original $g(t) \mapsto g(t-u) \Rightarrow g(t-u)$ centrada en $t = u$. Para poder desplazarnos por las frecuencias, multiplicaremos las ventanas por exponenciales e^{ist} , obteniendo una familia de átomos

$$\left\{ g_{u,s}(t) = e^{ist} g(t-u) \right\}_{u,s \in \mathbb{R}}. \quad (2.2)$$

Gracias a las propiedades de 1.13, la transformada de Fourier del átomo $g_{u,s}$ es $\widehat{g}_{u,s}(\xi) = \widehat{g}(\xi-s)e^{iu(\xi-s)}$, función centrada en $\xi = s$ como queríamos. La información de la señal referente a un entorno del punto (u, s) viene dada por la **Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT)**. Explícitamente se define como

$$Sf(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g}_{u,s}(t) dt,$$

y se utiliza para detectar las variaciones repentinas en la señal. Cada átomo se identifica con un rectángulo o ventana $R_{u,s}$ del plano tiempo-frecuencia centrado en (u, s) y de lados σ_t y σ_ξ , donde

- $\sigma_t = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt}$ se denomina varianza temporal de g ,
- $\sigma_\xi = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi}$ se denomina varianza frecuencial de g .

Más adelante veremos una generalización de esta fórmula para funciones cuya transformada de Fourier no está centrada en 0. Por el teorema 1.13, el área del rectángulo no puede ser tan pequeña como queramos, ya que se debe cumplir $\sigma_t \sigma_\xi \geq \frac{1}{2}$. La energía de la señal f en torno a (u, s) (más exactamente, sobre $R_{u,s}$) se calcula a partir de la función STFT de la siguiente forma:

$$P_S f(u, s) = |Sf(u, s)|^2.$$

Los valores $P_S f(u, s)$ definen el **espectrograma**. Los átomos más utilizados son los presentados en [Gab]

$$\psi(t) = e^{-\alpha^2(t-t_0)^2} e^{i(2\pi f_0 t + \phi)},$$

donde α , t_0 , f_0 y ϕ son constantes, en parte porque consiguen que el rectángulo sea de área mínima al utilizar ventanas gaussianas. A pesar de esto, si tomamos dos rectángulos disjuntos $R_{u,s}, R_{u',s'}$, el producto escalar de sus átomos asociados es distinto de cero. La prueba puede encontrarse en [Mey]. Otro inconveniente de la STFT es la forma de las ventanas: puesto que g y \hat{g} solo se trasladan (no se dilatan), σ_t y σ_ξ no varían, lo que acarrea falta de precisión cuando queremos conocer información precisa del tiempo o frecuencia.

Ejemplo 1. *Supongamos que trabajamos con una átomo g tal que \hat{g} está centrado en 1, $\sigma_t = 1$ y $\sigma_\xi = 1$. Entonces sería posible cubrir completamente el plano tiempo-frecuencia como en la figura (2.1) dando valores a u y s . Podemos ver que aunque los rectángulos $R_{u,s}$ se desplazan, su forma no varía.*

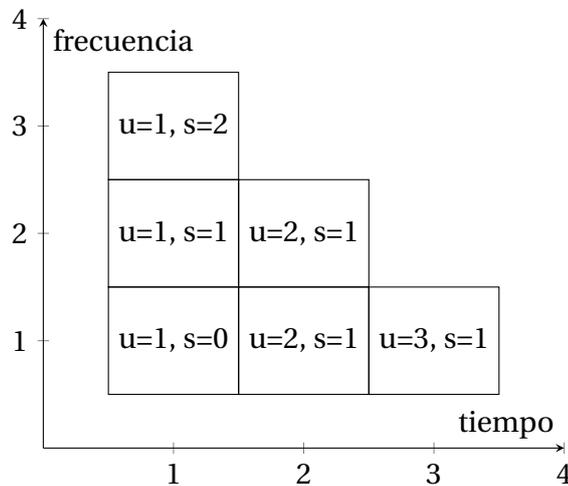


Figura 2.1: Embalado STFT asociado a g

Si ahora preferimos centrarnos en el análisis de los detalles de la señal, o buscamos una forma de comprimirla, deberemos acudir a otros métodos. El más extendido es el de la **transformada wavelet (WT)**. En él se trabaja tanto con wavelets continuas como discretas, y es en el estudio de estas funciones en el que nos centraremos en la siguiente sección.

2.2. Wavelets continuas

No se puede presentar la teoría de esta sección sin haber saber previamente qué es una wavelet y una transformada wavelet. Dicha información puede encontrarse tanto en [Mall, Cap. 4] como al inicio del capítulo 1 de [Hol]. Una wavelet es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0,$$

de manera que la familia de átomos que forman sus trasladadas y dilatadas

$$\left\{ \psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), u \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (2.3)$$

permita analizar y reconstruir las señales. Es por esto que a las wavelets se les denomina átomos tiempo-escala.

Nota. Aunque no sean propiedades que caractericen las wavelets, exigiremos que $\|\psi\| = 1$ y ψ esté centrada en $t = 0$ para facilitar el desarrollo de la teoría.

Definición 2.2 (Transformada wavelet). Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. La transformada wavelet de f en el punto $(u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ es:

$$Wf(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi}_{u,s}(t) dt.$$

2.2.1. Tipos de wavelets

Esta diferenciación se encuentra tanto en el capítulo 4 de [Mall] como en [Hol], aunque en este último las wavelets analíticas se denominan progresivas, la cual es una denominación mucho más intuitiva.

Reales

Haciendo referencia al nombre, nos referimos a wavelets cuya imagen está contenida en \mathbb{R} . Dentro de este conjunto existen funciones tales que su transformada toma valores positivos para frecuencias negativas. Físicamente esta propiedad no tiene sentido, pero matemáticamente podemos asociarlo al giro del argumento en sentido antihorario sobre \mathbb{S} . Este tipo de wavelets se emplean preferentemente en la detección de singularidades y entornos con una baja regularidad.

La transformada wavelet guarda la información de la señal en torno a un momento y una frecuencia exacta. Entonces, ¿sería posible recuperar la señal inicial si conociéramos la transformada wavelet en todo el plano tiempo-frecuencia? Calderón consiguió demostrar en 1964 [Cal] que sí era posible, aunque él no lo supiera en ese momento, ya que su estudio no estaba orientado hacia el análisis de las señales. Grossmann y Morlet presentaron la misma fórmula en [Gros]. El siguiente resultado está tomado de [Mall], donde posee el mismo nombre.

Teorema 2.1 (Calderón, Grossmann, Morlet). Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función real tal que

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty \quad (\text{condición de admisibilidad}). \quad (2.4)$$

Para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \psi_{u, s}(t) du \frac{ds}{s^2}, \quad (2.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2}. \quad (2.6)$$

Demostración. Para probar ambas igualdades, definiremos $\psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(\frac{t}{s})$. Por como está definida $Wf(u, s)$, podemos reescribirla de la forma $f \star \overline{\psi'_s}(u)$, donde $\psi'(t) = \psi(-t)$, y aplicando las propiedades de la transformada de la convolución, $\widehat{Wf}(u, s) = \widehat{f} \widehat{\overline{\psi'_s}}(u)$. Gracias a la siguiente igualdad,

$$\widehat{\overline{\psi'}(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi'(t)} e^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(-t)} e^{-i\xi t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(y)} e^{i\xi y} dy = -\widehat{\psi}(-\xi) = \widehat{\psi}(\xi),$$

la transformada de Fourier de Wf se puede sustituir por $\widehat{Wf}(u, s) = \widehat{f} \widehat{\overline{\psi'_s}}(u)$. Para probar (2.5) definiremos la parte derecha de la igualdad como $b(t)$. Tomemos un s fijo. Entonces

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \psi_s(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f \star \overline{\psi'_s}(u) \psi_s(t-u) du = f \star \overline{\psi'_s} \star \psi_s(t).$$

Sustituyendo en (2.5) y pasando a la transformada de Fourier, el teorema de Fubini asegura que

$$\begin{aligned} \widehat{b}(\xi) &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) \widehat{\overline{\psi'_s}}(\xi) \widehat{\psi_s}(\xi) \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) \sqrt{s} \widehat{\psi}(s\xi) \sqrt{s} \widehat{\psi}(s\xi) \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{\widehat{f}(\xi)}{C_\psi} \int_0^\infty |\widehat{\psi}(s\xi)|^2 \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variable $w = s\xi$,

$$\widehat{b}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{C_\psi} \int_0^\infty |\widehat{\psi}(w)|^2 \frac{dw}{w} = \widehat{f}(\xi),$$

como queríamos.

En el caso (2.6), sea b el valor de la parte derecha de la igualdad. Sustituimos $Wf(u, s)$ por $f \star \overline{\psi'_s}(u)$, y aplicando el teorema 1.10

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\psi_s}(\xi)|^2 d\xi \frac{ds}{s^2} = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2 |\sqrt{s} \widehat{\psi}(s\xi)|^2 d\xi \frac{ds}{s^2}. \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo Fubini y el cambio de variable $w = s\xi$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_\psi 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(s\xi)|^2 \frac{ds}{s} d\xi = \\ & = \frac{1}{C_\psi 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(w)|^2 \frac{dw}{w} d\xi = \frac{1}{C_\psi 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 C_\psi d\xi. \end{aligned}$$

Basta con utilizar el teorema de Plancherel para ver que $b = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$. \square

Nota. Una condición necesaria para que se cumpla (2.4) es $\hat{\psi}(0) = 0$, pero esto es inmanente a todas las wavelets ya que por definición $\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$. Si además ψ es diferenciablemente continua, entonces la condición se verifica.

Ejemplo 2. Un ejemplo de wavelet real es la llamada Sombrero Mexicano, que no es otra cosa que la derivada segunda de una función Gaussiana. En la figura 2.3 se observa que la imagen de su transformada de Fourier no está restringida solo al dominio de las frecuencias positivas, al contrario de lo que veremos en la sección siguiente.

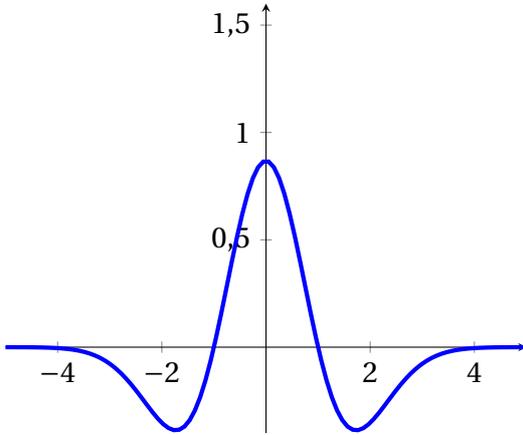


Figura 2.2: ψ sombrero mexicano

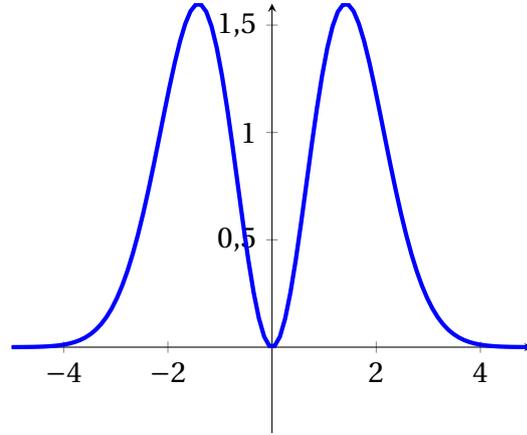


Figura 2.3: $\hat{\psi}$ sombrero mexicano

Reproducing Kernel

Gracias a la transformada wavelet estamos guardando la información de una aplicación de una variable en una función de dos variables. Esto implica que será inevitable encontrar información repetida en distintos puntos de la WT.

Sea u_0 y s_0 un tiempo y frecuencia fijos. Combinando (2.5) con la definición de transformada wavelet, podemos escribir $Wf(u_0, s_0)$ a partir de $Wf(u, s)$:

$$Wf(u_0, s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \psi_{u,s}(t) du \frac{ds}{s^2} \right) \overline{\psi_{u_0, s_0}(t)} dt. \quad (2.7)$$

Aplicando el teorema de Fubini, obtenemos

$$Wf(u_0, s_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) K(u_0, u, s_0, s) du \frac{ds}{s^2}, \quad (2.8)$$

donde $K(u_0, u, s_0, s) = \int_{-\infty}^\infty \psi_{u,s}(t) \overline{\psi_{u_0, s_0}}(t) dt$ es el **Reproducing Kernel**. Su valor indica la correlación entre $\psi_{u,s}$ y $\overline{\psi_{u_0, s_0}}$, y por tanto, la redundancia de información que almacenan sus transformadas.

Analíticas

Definición 2.3. Una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se denomina analítica si su transformada de Fourier es cero para frecuencias negativas:

$$\widehat{f}(\xi) = 0, \quad \text{si } \xi \leq 0.$$

Toda función analítica f_a es compleja, por lo que podemos estudiar por separado su módulo y su argumento. Aún así, es posible definir de forma única f_a conocida su parte real $f = \text{Re}(f_a)$. Definimos su transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{f}_a(\xi) + \widehat{\overline{f}_a}(\xi)}{2} = \frac{\widehat{f}_a(\xi) - \widehat{\overline{f}_a}(-\xi)}{2}.$$

Inversamente,

$$\widehat{f}_a(\xi) = \begin{cases} 2\widehat{f}(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

y aplicando al transformada inversa de Fourier a (2.9), obtenemos la función analítica de partida. Para estas wavelets existe un teorema equivalente al teorema 2.1 también en [Mall] (Teorema 4.4), que además reconstruye W_{f_a} a partir de W_f .

Teorema 2.2. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Se tiene

$$Wf(u, s) = \frac{1}{2} W_{f_a}(u, s). \quad (2.10)$$

Si $C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty$ y f es real

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi} \text{Re} \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \psi_{u,s}(t) du \frac{ds}{s^2} \right], \quad (2.11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2}. \quad (2.12)$$

A partir de ahora hablaremos de **transformadas wavelets analíticas (AWT)** cuando apliquemos la definición 2.2 a wavelets analíticas. Con este tipo de wavelets es posible retomar el estudio de las frecuencias utilizando las ventanas asociadas al principio de incertidumbre de Heisenberg. El rectángulo $R_{u,s}$ asociado a la wavelet $\psi_{u,s}$ estará dado en función de las siguientes propiedades:

- $\psi(t)$ centrada en $t = 0 \implies \psi_{u,s}(t)$ centrada en $t = u$.
- $\hat{\psi}(\xi)$ centrada en $\xi = \eta \implies \hat{\psi}_{u,s}(\xi)$ centrada en $\xi = \eta/s$.
- Recuérdese que la varianza temporal de ψ viene dada por $\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt \implies$ La varianza temporal $\psi_{u,s}$ es $\sigma_t^2 s^2$.
- La varianza frecuencial de ψ viene dada por $\sigma_\xi^2 = \int_0^{+\infty} (\xi - \eta)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \implies$ La varianza frecuencial de $\psi_{u,s}$ es σ_ξ^2 / s^2 .

Entonces el rectángulo $R_{u,s}$ tiene centro $(u, \eta/s)$ y lados $s\sigma_t$ y σ_ξ/s , con lo que mantiene el área independientemente de la dilatación aplicada a la wavelet ψ . De esta forma se cubre el plano tiempo-frecuencia con rectángulos de distintas proporciones. Esto es una ventaja, por ejemplo, cuando estudiamos frecuencias pequeñas, ya que necesitamos un intervalo de tiempo más amplio para aproximarlas bien.

Ejemplo 3. Supongamos ahora que trabajamos con una wavelet ρ centrada en $t = 0$, con $\sigma_t = 1$ y $\hat{\rho}$ centrada en $\eta = 2$, con $\sigma_\xi = 1$. Vamos a dar diferentes valores a u y s con el fin de observar la variación de forma y localización de los rectángulos sobre el plano tiempo-frecuencia (figura 2.4). Podemos apreciar que el valor que determina la forma y altura a la que se encuentra $R_{u,s}$ viene dado en función de s , mientras que u solo indica la posición a lo largo del eje temporal.

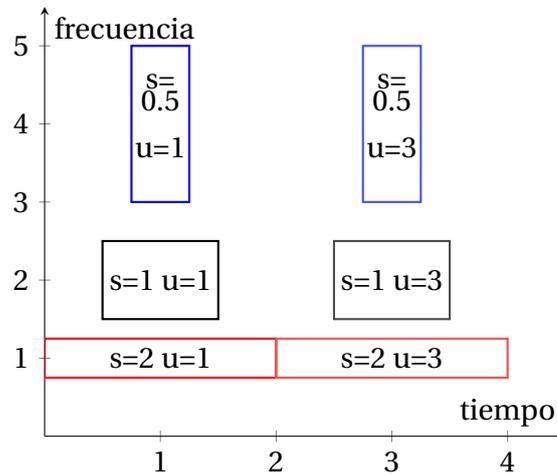


Figura 2.4: Embalsado AWT

En la transformada Wavelet analítica, el elemento que correspondería en STFT con el espectrograma se denomina **escalograma** y se define de forma semejante:

$$P_W f \left(u, \frac{\eta}{s} \right) = |W f(u, s)|^2$$

2.3. Wavelets Discretas

Habiendo presentado la teoría de las wavelets continuas ahora nos centraremos en las wavelets discretas, para ello nos apoyaremos esencialmente en [Wei, Cap. 2] y en el capítulo 7 de [Mall]. Estas wavelets forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ de la forma

$$\left\{ \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.13)$$

Esta característica nos permite reconstruir la señal como combinación lineal de los elementos de la base

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k}. \quad (2.14)$$

Los elementos $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para un j fijo son aquellos asociados a la resolución 2^j , capaces de guardar la información de los detalles de tamaño 2^{-j} . Así, esta familia de átomos permite almacenar la información de distintas resoluciones por separado, lo que resulta muy útil para guardar una señal, ya que podemos elegir la cantidad de información que queremos almacenar, sabiendo cuanta definición tendremos al reconstruirla. Sin embargo, necesitamos asegurarnos de que efectivamente (2.13) es una base ortonormal. Esto se consigue construyendo nosotros mismos la wavelet ψ . El inicio de esta construcción puede llevarse a cabo mediante el Análisis Multiresolución, con lo que empezaremos definiéndolo.

2.3.1. Análisis Multiresolución

Definición 2.4 (Análisis Multiresolución (MRA)). *Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un MRA si verifica las siguientes propiedades:*

$$V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (2.15)$$

$$f(\cdot) \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (2.16)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (2.17)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (2.18)$$

$$\exists \varphi \text{ tal que } \{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ es una base ortonormal de } V_0. \quad (2.19)$$

La función requerida en (2.19) se denomina **función escala** del MRA. La base a la que también nos referimos en (2.19) puede sustituirse por una base de Riesz sin que esto conlleve ningún problema. En ese caso hablaremos de un MRA asociado a una base de Riesz. La demostración de que ambos MRA son equivalentes

puede encontrarse en la sección 2.1 del capítulo 2 de [Wei] y en la 5.3 de [Dau].

Antes de comenzar con la teoría, definimos $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Para $j = 0$ tenemos que $\{\varphi_{0,k}(t) = \varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 . Por la propiedad (2.16), $\{\varphi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortogonal de V_j , con lo que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j . Nuestro objetivo final es conseguir escribir de forma única una señal, definida por una función f , como combinación lineal de otras más simples. Una forma de conseguir esto es proyectando f sobre los espacios V_j . Dichos subespacios contienen funciones de resolución 2^j (debido a la dilatación de φ), es decir que $P_{V_j}(f)$ guarda los detalles de f que sean más grandes de 2^{-j} , siendo el tamaño 2^0 el correspondiente a φ . Es posible dar la forma explícita de $P_{V_j}(f)$ como

$$P_{V_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k}. \quad (2.20)$$

De la forma en que el MRA está construido podemos observar que al pasar de V_j a V_{j+1} se están añadiendo funciones de resolución 2^{j+1} . Podemos expresar V_{j+1} de la siguiente manera:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Esto nos permite expresar la proyección de f sobre el espacio V_{j+1} como $P_{V_{j+1}}(f) = P_{V_j}(f) + P_{W_j}(f)$. Intuitivamente podemos identificar W_j con las funciones capaces de guardar la información de resolución 2^{j+1} pero no de 2^j . Aplicando inducción es fácil ver que se puede reescribir V_j como

$$V_j = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k.$$

Puesto que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ cumple las propiedades (2.15) y (2.18), se deduce

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} W_k}.$$

Por otro lado, la función escala φ pertenece al espacio V_0 . Por la propiedad (2.16), $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$ es a su vez una función de $V_{-1} \subset V_0$. Esto quiere decir que es posible descomponer $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$ como suma de los elementos de la base de (2.19):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(t - k), \quad \alpha_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - k) \right). \quad (2.21)$$

En general, esta descomposición es posible para todas las funciones de la forma $2^{-j/2}\varphi(2^{-j}\cdot)$, siendo $j \in \mathbb{N}$. Puesto que φ es una función de $L^2(\mathbb{R})$, se tiene por el teorema 1.7

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \right\|^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(t - k) \right\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < +\infty, \quad (2.22)$$

por lo que $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{R})$. En numerosas ocasiones haremos referencia a las funciones trabajando con su transformada de Fourier, ya que quedan definidas de manera única. Tomando la transformada de (2.21) obtenemos la siguiente propiedad:

Propiedad 2.5. *Sea φ una función escala. Entonces*

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi), \quad m_0(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{ik\xi}. \quad (2.23)$$

A la función m_0 la denominaremos **filtro de paso bajo** por estar ligada a una función del espacio V_{-1} . Puesto que $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{R})$, y $\{e^{ik\xi}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$, y todos sus elementos son 2π -periódicos, $m_0(\xi)$ también es una función de $L^2(\mathbb{T})$ 2π -periódica. Esta función resulta muy útil a la hora de implementar algoritmos, como se puede apreciar en la sección 7.3 de [Mall].

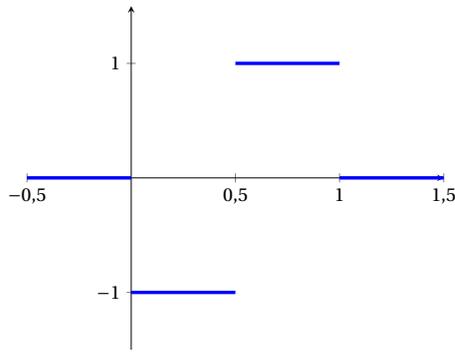


Figura 2.5: Wavelet Haar

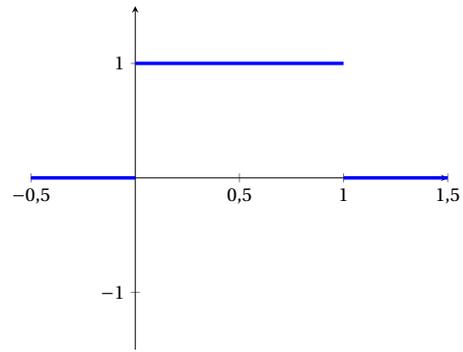


Figura 2.6: Función escala Haar

Ejemplo 4. *La wavelet más sencilla es la wavelet de Haar (figura 2.5). Podemos obtenerla a partir de la función escala $\varphi(t) = \chi_{[0,1]}(t)$. Siendo el filtro de paso bajo:*

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \Rightarrow m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\xi}).$$

Esta wavelet posee un soporte compacto y es constante a trozos, lo cual resulta muy atractivo a la hora de realizar cálculos con ella. Pero hasta ahí llegan las ventajas, ya que en $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ existen discontinuidades que provocan efectos indeseados a la hora de reconstruir la señal inicial.

Por (2.23), podemos escribir $\widehat{\varphi}(\xi)$ como

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-N}\xi).$$

Si $\widehat{\varphi}(\xi)$ es continua en $\xi = 0$, tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)\widehat{\varphi}(0).$$

Para terminar de simplificar la expresión vamos a buscar el valor explícito de $\varphi(0)$ ayudándonos del teorema 7.2 de [Mall].

Teorema 2.3 (Mallat, Meyer). *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ una función escala de un MRA, $\widehat{\varphi}$ continua en 0, y sea m_0 el filtro de paso bajo asociado. Entonces*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad \xi \in \mathbb{R} \text{ c.s.} \quad (2.24)$$

y

$$m_0(0) = 1 \quad (2.25)$$

Además, $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$

Demostración. Empezaremos con (2.24): al ser φ una función escala, (2.19) nos asegura que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal, por lo que podemos aplicar (1.12) para conseguir

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2 + k\pi)|^2 |m_0(\xi/2 + k\pi)|^2.$$

Al haber tenido en cuenta (2.23), podemos separar el sumatorio en dos dependiendo de si k es par o impar:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 |m_0(\xi/2 + 2k\pi)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2 + \pi + 2k\pi)|^2 |m_0(\xi/2 + \pi + 2k\pi)|^2.$$

Ya sabemos que $m_0 \in \mathcal{P}(2\pi)$, por lo que

$$m_0(\xi/2 + 2k\pi) = m_0(\xi/2) \quad \text{y} \quad m_0(\xi/2 + \pi + 2k\pi) = m_0(\xi/2 + \pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora que podemos sacar el factor común, volvemos a aplicar (1.12) en ambos sumatorios obteniendo

$$\begin{aligned} |m_0(\xi/2)|^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2 + \pi + 2k\pi)|^2 &= \\ &= |m_0(\xi/2)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2. \end{aligned}$$

Basta tomar $\xi' = \xi/2$ para obtener $|m_0(\xi')|^2 + |m_0(\xi' + \pi)|^2 = 1$ para casi todo $\xi' \in \mathbb{R}$.

Para el caso (2.25), tenemos que $\widehat{\varphi}(0) = m_0(0)\widehat{\varphi}(0)$. Esta igualdad solo es posible si $m_0(0) = 1$ o $\widehat{\varphi}(0) = 0$, por lo que probaremos que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ para terminar con la demostración. Utilizando de nuevo que φ es una función escala de un MRA, existe un conjunto de subespacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ que verifican (2.15) y (2.18).

Por ello, y siendo f una función de $L^2(\mathbb{R})$, $\|P_{V_j}(f) - f\| \rightarrow 0$ si $j \rightarrow \infty$, lo cual implica $\|P_{V_j}(f)\| \rightarrow \|f\|$ cuando $j \rightarrow \infty$. Tomamos f la función cuya transformada es $\chi_{[-1,1]}$. Por el teorema de Plancherel,

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\| = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}, \text{ por lo tanto } \|P_{V_j}(f)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi}.$$

Trabajemos ahora con la forma explícita (2.20), $\|P_{V_j}(f)\|^2 = \|\sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k}\|^2$. Si tenemos en cuenta que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j , aplicando la segunda parte del teorema 1.7

$$\|\sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k}\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f, \varphi_{j,k})|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_{j,k}(t)} dt \right|^2.$$

Gracias a 1.10, podemos pasar a una integral de transformadas como la siguiente, y a partir de ahí aplicar las propiedades de 1.13:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}_{j,k}(\xi)} d\xi \right|^2 = \\ &\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) 2^{-j/2} \frac{1}{2^{-j}} \overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right)} d\xi \right|^2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{-j}}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi)} e^{-i2^{-j}k\xi} d\xi \right|^2 = \\ &\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{-j}}{4\pi^2} \left| 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2^j y) \overline{\widehat{\varphi}(y)} e^{-iky} dy \right|^2, \end{aligned}$$

con el cambio de variable $y = 2^{-j}\xi$. Recordemos que

$$\widehat{f}(y) \equiv \chi_{[-1,1]}(y) \Rightarrow \widehat{f}(-2^j y) \equiv \chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]}(y)$$

y $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iky}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$. Si j es lo suficientemente grande, $[-2^{-j}, 2^{-j}] \subset [-\pi, \pi]$ y podremos trabajar en $L^2([-\pi, \pi])$ con el producto escalar $(f, g)_{[-\pi, \pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} f \overline{g} dt$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2^j y) \overline{\widehat{\varphi}(y)} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]}(y) \overline{\widehat{\varphi}(y)} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} dy = \\ &\left(\chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]} \overline{\widehat{\varphi}}, \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{[-\pi, \pi]}, \end{aligned}$$

es decir, cada integral es uno de los coeficientes de la definición 1.10, por lo que podemos aplicar la primera igualdad del teorema 1.7 para obtener

$$= \frac{2^j}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \left(\chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]} \overline{\widehat{\varphi}}, \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{[-\pi, \pi]} \right|^2 = \frac{2^j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} \right|^2 d\xi =$$

$$\frac{2^j}{2\pi} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \frac{2^j}{2\pi} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Por la continuidad de $\widehat{\varphi}$ en 0, y si j es lo suficientemente grande, la última integral se comporta como $2 \cdot 2^{-j} |\widehat{\varphi}(0)|^2$, por lo que

$$\|P_{V_j}(f)\|^2 \approx \frac{2^j}{2\pi} 2 \cdot 2^{-j} |\widehat{\varphi}(0)|^2 = \frac{1}{\pi} |\widehat{\varphi}(0)|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi},$$

si $j \rightarrow \infty$. Gracias a esto, no solo hemos demostrado que $|\widehat{\varphi}(0)| \neq 0$, sino que además $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$ \square

En lo que sigue, supondremos $\widehat{\varphi}(0) = 1$ obteniendo

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi). \quad (2.26)$$

Ejemplo 5. Las wavelets de Meyer están caracterizadas por tener un filtro de paso bajo que verifica

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}], \\ 0, & \text{si } \xi \in [-\pi, -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi]. \end{cases}$$

Se aprecia que en los intervalos $[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ el filtro no está definido, por lo que podemos elegirlo como queramos, siempre y cuando verifique (2.24). Una vez hecha la elección del filtro, la función escala viene dada de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = \begin{cases} m_0(\frac{t}{2}), & \text{si } t \in [-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}], \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

2.3.2. Construcción de la wavelet

Ahora nos interesa buscar la wavelet ψ . Dar su expresión explícita no es posible sin conocer explícitamente la función escala, sin embargo es posible escribirla en función de $\widehat{\varphi}$ y de m_0 . Para ello necesitamos conocer también la forma de las funciones de V_{-1} y V_0 , la cual se describe en el Lema 2.6 de [Wei, Cap. 2]:

Lema 2.4. Si φ es una función escala para un MRA y m_0 es el filtro de paso bajo asociado a φ , entonces

$$V_{-1} = \{f : \widehat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi), \quad m \in \mathcal{D}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})\},$$

$$V_0 = \{f : \widehat{f}(\xi) = l(\xi)\widehat{\varphi}(\xi), \quad l \in \mathcal{D}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})\}.$$

Comenzaremos hablando del espacio W_{-1} para mas tarde repetir el proceso en W_0 . Sabemos que W_{-1} es el complementario de V_{-1} dentro de V_0 . Esto quiere decir que si tenemos una función f de W_{-1} , para toda función $g \in V_{-1}$, $\langle f, g \rangle = 0$.

Por el lema anterior y aplicando el teorema 1.10, esta igualdad se traduce en:

$$\exists l \in L^2(\mathbb{T}) \cap \mathcal{P}(2\pi) \mid \forall m \in L^2(\mathbb{T}) \cap \mathcal{P}(2\pi), \int_0^{2\pi} l(\xi) \overline{m(2\xi) m_0(\xi)} d\xi = 0.$$

Separando el integrando en dos partes,

$$\int_0^{\pi} l(\xi) \overline{m(2\xi) m_0(\xi)} + l(\xi + \pi) \overline{m(2(\xi + \pi)) m_0(\xi + \pi)} d\xi = 0.$$

Al ser $m(\cdot) \in \mathcal{P}(2\pi)$, $m(2 \cdot) \in \mathcal{P}(\pi)$ y se tiene $m(2\xi) = m(2(\xi + \pi))$, pudiendo sacar factor común de la siguiente manera:

$$\int_0^{\pi} m(2\xi) \left\{ l(\xi) \overline{m_0(\xi)} + l(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \right\} d\xi = 0.$$

Esta igualdad es cierta para toda función $m \in L^2(\mathbb{T}) \cap \mathcal{P}(2\pi)$, por lo que el elemento entre corchetes deberá ser idénticamente nulo. Reescribiéndolo en forma vectorial, llegamos a una expresión del tipo

$$(l(\xi), l(\xi + \pi)) = \lambda(\xi + \pi) (\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)}) \quad c.s. \quad (2.27)$$

Aplicando el cambio de variable $\xi = \xi + \pi$, y por la 2π -periodicidad de las funciones l y m_0 ,

$$(l(\xi + \pi), l(\xi)) = \lambda(\xi + 2\pi) (\overline{m_0(\xi)}, -\overline{m_0(\xi + \pi)}) \quad c.s.$$

Cambiando el orden de los vectores a ambos lados de la igualdad, llegamos a una expresión similar a (2.27):

$$\begin{aligned} (l(\xi), l(\xi + \pi)) &= \lambda(\xi + 2\pi) (\overline{-m_0(\xi + \pi)}, \overline{m_0(\xi)}) \quad c.s. \\ (l(\xi), l(\xi + \pi)) &= \lambda(\xi + \pi) (\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)}) \quad c.s. \end{aligned} \quad (2.28)$$

de donde podemos deducir fácilmente que $\lambda(\xi + \pi) = -\lambda(\xi + 2\pi)$. además $\lambda \in L^2(\mathbb{T})$ ya que l y m_0 también pertenecen a $L^2(\mathbb{T})$. Entonces $\lambda \in \mathcal{P}(2\pi)$, por lo que podemos reescribirla como producto de funciones 2π -periódicas, donde una de ellas verifique $q(x + k\pi) = (-1)^k q(x)$. La exponencial compleja cumple esta propiedad, con lo que podemos decir que λ es de la forma $\lambda(\xi) = e^{i\xi} s(2\xi)$, siendo $s \in \mathcal{P}(2\pi)$. Por las propiedades de λ y la exponencial compleja, s es también una función de $L^2(\mathbb{T})$. Tras este proceso, ahora sabemos que podemos definir las funciones del espacio W_{-1} de la siguiente forma:

$$W_{-1} = \left\{ f : \widehat{f}(\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi), \quad s \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Construyamos ahora el conjunto W_0 , para ello necesitamos saber como se define V_1 . Sea $f(\cdot)$ una función de V_1 , entonces $f(\frac{\cdot}{2})$ es una función de V_0 , lo cual implica que podemos escribirla como suma de elementos de (2.19):

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k \varphi(t - k), \quad \sigma_k = \left\langle f\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - k) \right\rangle.$$

Aplicando el cambio de variable $y = \frac{t}{2}$ a la expresión anterior, obtenemos $f(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k \varphi(2y - k)$, y calculando la transformada de Fourier en el punto 2ξ , llegamos a la expresión

$$\widehat{f}(2\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k e^{-ik\xi} \widehat{\varphi}(\xi) = h(\xi) \widehat{\varphi}(\xi),$$

siendo $h \in L^2(\mathbb{T}) \cap \mathcal{P}(2\pi)$, por lo que siguiendo con la notación anterior definimos

$$V_1 = \{f : \widehat{f}(2\xi) = h(\xi) \widehat{\varphi}(\xi), \quad h \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})\}.$$

Sea f una función de V_0 . Entonces cumple $\widehat{f}(\xi) = l(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)$, con $l \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})$. Aplicando la igualdad (2.23), podemos redefinir el espacio V_0 como

$$V_0 = \{f : \widehat{f}(2\xi) = l(2\xi) m_0(\xi) \widehat{\varphi}(\xi), \quad l \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})\}.$$

Para buscar los elementos de W_0 basta tomar los elementos de V_1 que sean ortogonales a todos los elementos de V_0 . Esto es equivalente a buscar las funciones $h \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})$ tales que sean ortogonales a $l(2\xi) m_0(\xi)$, siendo $l \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})$. En este momento nos encontramos en la misma situación que a la hora de buscar una caracterización de las funciones de W_{-1} . Aplicando de nuevo el procedimiento anterior, y teniendo en cuenta que esta vez trabajamos con transformadas de Fourier evaluadas en 2ξ , podemos definir W_1 como:

$$W_0 = \left\{ f : \widehat{f}(2\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi), \quad s \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Por inducción, podemos obtener la expresión de todos los conjuntos $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$

$$W_j = \left\{ f : \widehat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi), \quad s \in \mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Basta escoger una función de W_0 . Por comodidad, tomaremos $f \in W_0$ tal que $s \equiv 1$, de forma que la wavelet del MRA será aquella $f \in W_0$ tal que

$$\widehat{f}(2\xi) = e^{i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi),$$

y la denotaremos por ψ . El siguiente resultado nos muestra que (2.13) es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.5. *Sea φ una función escala, y m_0 su filtro de paso bajo asociado. Sea $\psi \in W_0$ una función tal que*

$$\widehat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi). \quad (2.29)$$

Denotemos $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$. Entonces para toda escala 2^j , $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j . Para todas las escalas, $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Además, (2.29) es equivalente a

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2t - (k-1)). \quad (2.30)$$

Demostración. Comencemos viendo que $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ está contenido en W_j . Aplicando las propiedades de 1.13 a ψ_{j,k_0} , k_0 un entero cualquiera, se tiene

$$\widehat{\psi_{j,k_0}}(\xi) = 2^{-j/2} e^{-ik_0 2^{-j} \xi} \widehat{\psi}(2^{-j} \xi) \Rightarrow \widehat{\psi_{j,k_0}}(2^{j+1} \xi) = 2^{-j/2} e^{-ik_0 2 \xi} \widehat{\psi}(2 \xi).$$

Como sabemos que $\psi \in W_0$, podemos usar (2.29) para deducir que

$$\widehat{\psi_{j,k_0}}(2^{j+1} \xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi).$$

siendo $s(\xi) = 2^{-j/2} e^{-ik_0 \xi}$. De esta forma hemos verificado que $\psi_{j,k_0} \in W_j$. Veamos ahora que es un sistema ortonormal. Dados $n, k \in \mathbb{Z}$, calculemos el valor del producto escalar $(\psi_{j,n}, \psi_{j,k})$. Por el teorema 1.10,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,n}(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_{j,n}(\xi) \overline{\widehat{\psi}_{j,k}(\xi)} d\xi.$$

Aplicando las propiedades de 1.13, y posteriormente el cambio de variable $y = 2^{-j} \xi$,

$$\begin{aligned} \frac{2^{-j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-n)2^{-j}\xi} \left| \widehat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-n)y} \left| \widehat{\psi}(y) \right|^2 dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-n)y} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(y + 2\pi p) \right|^2 dy. \end{aligned}$$

Centrémonos por el momento en conseguir $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(y + 2\pi p) \right|^2 = 1$. Por (2.29),

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(y + 2\pi p) \right|^2 &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| m_0(y/2 + \pi p + \pi) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}(y/2 + \pi p) \right|^2 = \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| m_0(y/2 + 2\pi p + \pi) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}(y/2 + 2\pi p) \right|^2 + \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| m_0(y/2 + 2\pi p + 2\pi) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}(y/2 + 2\pi p + \pi) \right|^2 = \\ &= \left| m_0(y/2 + \pi) \right|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}(y/2 + 2\pi p) \right|^2 + \left| m_0(y/2) \right|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}(y/2 + 2\pi p + \pi) \right|^2 = \\ &= \left| m_0(y/2 + \pi) \right|^2 + \left| m_0(y/2) \right|^2 = 1, \end{aligned}$$

gracias a la propiedad 1.12 y (2.24). Al final hemos llegado a

$$(\psi_{j,n}, \psi_{j,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-n)y} dy = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k, \\ 0, & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

Así terminamos con la prueba de que $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal de W_j para un j fijo. Falta comprobar que efectivamente es una base, es decir, que dada

una función f de W_j , se puede escribir $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \psi_{j,k}$. Si $f \in W_j$,

$$\widehat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi),$$

siendo s una función de $\mathcal{P}(2\pi) \cap L^2(\mathbb{T})$. Tomemos $s(\xi) = 2^{-j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ik\xi}$ que es 2π -periódica, y además integrable en el sentido L^2 en \mathbb{T} , ya que por la identidad de Parseval y la desigualdad de Bessel

$$\|s\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2 \leq \|f\|^2 < +\infty.$$

Si volvemos a tener en cuenta (2.29),

$$\widehat{f}(2^{j+1}\xi) = 2^{-j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ik2\xi} \widehat{\psi}(2\xi) \Rightarrow \widehat{f}(\xi) = 2^{-j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi).$$

Deshaciendo las transformaciones presentadas en la propiedad 1.13,

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \widehat{\psi}_{j,k}(\xi).$$

Por lo tanto $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \psi_{j,k}(t)$ como queríamos. Entonces $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base de W_j . Anteriormente habíamos visto que $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} W_k}$. Al ser $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una base ortonormal de W_j queda probado que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Solo nos queda probar que (2.29) es equivalente a (2.30). Trabajando con m_0 en su forma de sumatorio (2.23), podemos escribir

$$\overline{m_0(\xi + \pi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-ik\xi}.$$

Insertando dicha igualdad en (2.30), obtenemos

$$\widehat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-ik\xi} \widehat{\varphi}(\xi).$$

Aplicando dos veces la transformada inversa de Fourier, obtenemos

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-ik\xi} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i2\xi t} d\xi =$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i(2t-(k-1))\xi} d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2t - (k-1)).$$

□

La primera parte de este teorema puede encontrarse en el teorema 7.3 de [Mall], mientras que la última equivalencia se ha tomado del teorema 5.1.1 de [Dau].

Ejemplo 6. La función

$$\psi(t) = \frac{\sin(2\pi(t + \frac{1}{2})) - \sin(\pi(t + \frac{1}{2}))}{\pi(t + \frac{1}{2})},$$

representada en la figura 2.7 se denomina *wavelet de Shannon*. Normalmente se define a partir de su transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \chi_{[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]}(\xi)$ por ser más sencilla de manejar, siendo posible obtenerla a partir de $\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$ y $m_0(\xi) = -e^{i2\xi} \chi_{[\pi, 2\pi]}(\xi)$ mediante la construcción presentada en esta sección. La función escala $\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ es la que nos permite construir todas las expresiones anteriores y dar explícitamente el MRA al que está asociada:

$$V_j = \text{span} \left\{ \varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \frac{\sin(\pi(2^j t - k))}{\pi(2^j t - k)}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ejemplo 7. Las *wavelets Battle-Lemarié* están asociadas a un MRA donde los subespacios V_j son espacios de splines. Estas *wavelets* vienen definidas en su forma frecuencial:

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{-i\xi/2}}{\xi^{m+1}} \sqrt{\frac{S_{2m+2}(\xi/2 + \pi)}{S_{2m+2}(\xi) S_{2m+2}(\xi/2)}}, \quad \text{donde } S_m(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^m}.$$

Este sumatorio aparece tanto en

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{e^{i\xi/2}}{\xi^{m+1} \sqrt{S_{2m+2}(\xi)}}$$

como en la función del filtro

$$m_0(\xi) = \frac{e^{-i\xi/2}}{2^m} \sqrt{\frac{S_{2m+2}(\xi)}{S_{2m+2}(\xi/2)}}.$$

El corolario 5.4.2 de [Dau] nos indica que esta *wavelet* tiene localización exponencial, sin embargo al ser un polinomio de grado m , $\psi \in \mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R})$. La *wavelet de Haar* es un caso particular obtenida a partir de splines constantes, siendo la función escala $\varphi(t) = \chi_{[0,1]}(t)$. En la figura 2.8 se aprecia una *wavelet* formada a partir de splines lineales ($m = 1$).

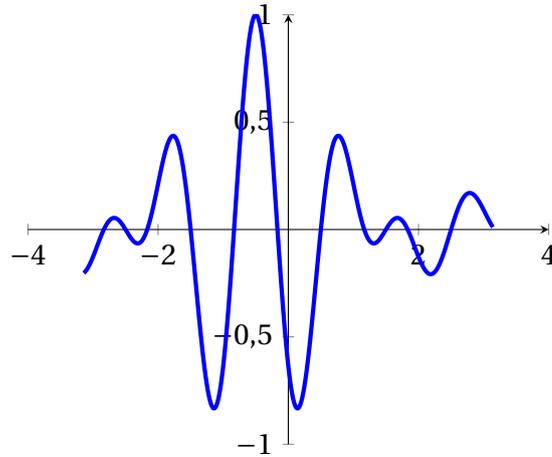
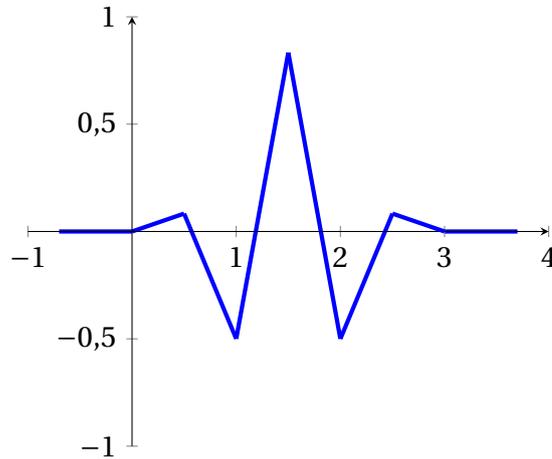


Figura 2.7: Wavelet Shannon

Figura 2.8: Wavelet Battle-Lemarié ($m = 1$)

2.3.3. Algoritmos de análisis y reconstrucción

Una vez que hemos desarrollado la teoría del análisis multiresolución sería interesante aplicar dichos conocimientos al tratamiento de señales. El procedimiento más repetido en la bibliografía es el algoritmo en cascada ([Mall], [Dau]) o algoritmo en pirámide ([Mey]). Para llevarlo a cabo necesitaremos utilizar los coeficientes del filtro de paso bajo. Recordemos cómo estaban definidos:

$$\alpha_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - k) \right).$$

Asociado al análisis multiresolución aparece otro filtro g , llamado filtro espejo conjugado. Ya ha aparecido en la sección 2.3.1 en la forma $g(\xi) = e^{i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}$, pero lo que vamos a utilizar realmente son los coeficientes de g en su forma de

sumatorio, calculados como

$$\beta_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \psi \left(\frac{\cdot}{2} \right), \varphi(\cdot - k) \right).$$

Como curiosidad, si escribimos $g(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{ik\xi}$, el valor β_k puede calcularse en función de α_{-k-1} .

Antes de trabajar con la señal, veremos un par de propiedades que resultarán útiles más adelante. Recordemos que el subespacio V_j estaba contenido dentro de V_{j+1} , por lo que sus elementos pueden escribirse en función de $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ como el sumatorio $\varphi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,n}) \varphi_{j+1,n}$. Aplicando un cambio de variable, se aprecia

$$(\varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{(j+1)} t - n) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1/2} \varphi(y/2) \varphi(y + 2k - n) dy = (2^{-1/2} \varphi(\cdot/2), \varphi(y - (n - 2k))) = \alpha_{n-2k}.$$

Puesto que W_j también está contenido en V_{j+1} , podemos repetir el razonamiento obteniendo $(\psi_{j,k}, \varphi_{j+1,n}) = (2^{-1/2} \psi(\cdot/2), \varphi(y - (n - 2k))) = \beta_{n-2k}$. Así hemos conseguido

$$\varphi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-2k} \varphi_{j+1,n}, \quad \psi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{n-2k} \varphi_{j+1,n} \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.31)$$

Imaginemos que conocemos la información de una señal f hasta resolución 2^{j+1} , es decir, $P_{V_{j+1}}(f)$, pero no nos interesa tener tanto detalle o queremos comprimir la información. Una solución es quedarse solo con la información de resolución 2^j ($P_{V_j}(f)$). Para ello no hará falta volver a calcular la proyección $P_{V_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_j(k) \varphi_{j,k}$, siendo $A_j(k) = (f, \varphi_{j,k})$, sino que podremos utilizar los datos que ya tenemos aplicando (2.31) a:

$$A_j(k) = \left(f, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-2k} \varphi_{j+1,n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-2k} (f, \varphi_{j+1,n}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-2k} A_{j+1}(n).$$

Normalmente no nos interesará tener por separado los detalles de tamaño 2^{-j} , salvo que más tarde quisiéramos recuperar la información inicial $P_{V_{j+1}}(f)$. Conociendo $P_{W_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_j(k) \psi_{j,k}$, siendo $D_j(k) = (f, \psi_{j,k})$, podemos aplicar el mismo procedimiento que antes,

$$D_j(k) = \left(f, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{n-2k} \psi_{j+1,n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{n-2k} (f, \psi_{j+1,n}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{n-2k} D_{j+1}(n).$$

Repetiendo el proceso podemos separar la información a distintas escalas de forma iterativa, como se aprecia en el esquema de la figura 2.9.

Situémonos ahora en el caso contrario. Para recuperar la información inicial $P_{V_{j+1}}(f)$, basta aplicar la ortogonalidad de V_j y W_j . Como conocemos sus bases, podemos escribir los elementos de $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ como

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1,k} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,n}) \varphi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\varphi_{j+1,k}, \psi_{j,n}) \psi_{j,n} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-2n} \varphi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{k-2n} \psi_{j,n}. \end{aligned}$$

Si disponemos de los valores $(A_j(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ y $(D_j(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, podemos conseguir $(A_{j+1}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ (que son los únicos que hacen falta para calcular la proyección sobre V_{j+1}) de la siguiente forma:

$$A_{j+1}(k) = (f, \varphi_{j+1,k}) = \left(f, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-2n} \varphi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{k-2n} \psi_{j,n} \right) =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-2n} (f, \varphi_{j,n}) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{k-2n} (f, \psi_{j,n}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-2n} A_j(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{k-2n} D_j(n).$$

Todo este desarrollo corresponde con el teorema 7.7 de [Mall]. Gracias a estas expresiones resulta relativamente sencillo obtener algoritmos para extraer la información a distintas resoluciones, comprimir y reconstruir la "señal" inicial. Con "señal" nos referimos a los datos con los que inicializaríamos el programa, ya que es imposible trabajar directamente con la señal original.

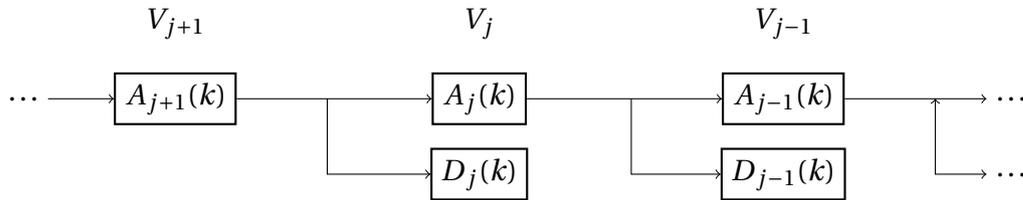


Figura 2.9: Algoritmo de análisis.

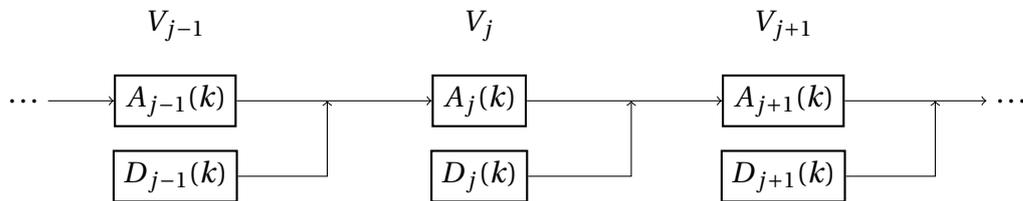


Figura 2.10: Algoritmo de reconstrucción.

Capítulo 3

Propiedades de las wavelets. Construcción de wavelets con soporte compacto.

Es interesante saber para qué vamos a utilizar las wavelets antes de construirlas, pues en función de eso nos interesará que tengan unas u otras propiedades. En este capítulo presentaremos algunas de las más relevantes, como son la localización, los momentos nulos y el soporte de la wavelet, y como se relacionan entre ellas. Posteriormente pasaremos a construir wavelets que posean soporte compacto utilizando MRA, pudiendo decidir además cómo será su regularidad dependiendo de la función de partida escogida.

3.1. Localización polinomial

Definición 3.1. Diremos que f está polinomialmente localizada si existe $\kappa_\alpha(t) = (1 + |t|)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ de forma que $\kappa_{-\alpha}f \in L^\infty(\mathbb{R})$. En este caso f posee localización de orden α .

Intuitivamente se puede asociar que una función tenga localización de orden α a que esté acotada y en el infinito se comporte como $|t|^{-\alpha}$. Cuanto mayor sea el α , más rápido decrecerá, por lo que diremos que la función está más localizada. La localización de la wavelet y de la función a estudiar influyen en la localización de la transformada wavelet como se señala en el teorema 12.0.1 de [Hol]:

Teorema 3.1. Se ψ una wavelet y f una función analítica cualquiera. Supongamos que están localizadas en el espacio frecuencial de forma que para $\xi > 0$

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq \frac{\xi^\alpha}{(1 + \xi)^{\alpha+\beta}}, \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{\xi^{\alpha'}}{(1 + \xi)^{\alpha'+\beta'}}$$

con $\alpha, \beta > 0$, $\alpha' > -1$, $\beta' > -1$, $\alpha \neq \beta' - 1$ y $\alpha' \neq \beta - 1$. Entonces

$$|Wf(a, b)| \leq C \frac{a^{\min\{\alpha, \beta' - 1\}}}{(1 + a)^{\min\{\alpha, \beta' - 1\} + \min\{\alpha' + 1, \beta\}}}$$

Ejemplo 8. Si queremos analizar una señal, nos interesa una wavelet muy localizada, de forma que el Reproducing Kernel tome valores pequeños y así evitar almacenar información redundante.

Pero la localización polinomial también puede influir en otras propiedades, como por ejemplo en la continuidad. Es el caso de la función escala y el filtro de paso bajo asociado. Supongamos sobre φ tiene una localización polinomial de orden m . También quiere decir que existe una constante $C > 0$ de forma que $|\varphi(t)| \leq C(1 + |t|^2)^{-m/2}$. A partir de esta desigualdad podemos obtener $\int_{|t| \geq A} |\varphi(t)|^2 dt \leq \frac{C_m}{(1+A^2)^m}$ y así acotar los coeficientes α_k de m_0 en función de k :

$$|\alpha_k| \leq \frac{C'_m}{(1 + |k|^2)^{m/2}},$$

y de esta forma $m_0 \in \mathcal{C}^{m-2}(\mathbb{T})$ siempre y cuando $m > 2$. Los cálculos pueden encontrarse al final de la sección 2.2 de [Wei, Cap. 2]. Mejor que cualquier localización polinomial es la localización exponencial:

Definición 3.2. Sea f una función cualquiera. Entonces f tiene localización exponencial si existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{\gamma|t|} dt < +\infty.$$

La regularidad de la wavelet también es un detalle a tener en cuenta. No parece una buena idea intentar recuperar una señal utilizando, por ejemplo, la wavelet de Haar. Esta wavelet ni siquiera es continua, con lo que la reconstrucción poseería muchos puntos poco regulares. De esta forma nos interesa una wavelet muy regular, a ser posible \mathcal{C}^∞ . Sabiendo esto lo ideal sería encontrar una wavelet que tuviera localización exponencial y fuese $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con todas las derivadas acotadas, pero resulta imposible tener todas las propiedades al mismo tiempo. Daubechies lo demostró en el Corolario 5.5.3 de [Dau]:

Corolario 3.2. Supongamos que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal. Entonces es imposible que ψ tenga localización exponencial y $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con todas las derivadas acotadas, a menos que $\psi \equiv 0$.

Ejemplo 9. Recordemos que la wavelet de Meyer tenía cierta libertad a la hora de construirla. Por lo tanto es posible elegir el m_0 sobre el intervalo $[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ de forma que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. No obstante estas wavelets tienen una localización polinomial. En el caso de Battle-Lemarié ocurre al revés: Las wavelets son $\mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R})$ pero tienen una localización exponencial.

3.2. Momentos nulos

Otra propiedad que se estudia en [Wei] y [Mall], entre otros, es la cantidad de momentos nulos, aunque no tiene tanto peso como la continuidad o el soporte.

Definición 3.3. Diremos que una función tiene un momento nulo de orden p si

$$\int_{\mathbb{R}} t^j \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq j < p. \quad (3.1)$$

Nota. Una forma de conocer el orden del momento nulo de una wavelet es observar cuantas derivadas consecutivas de $\hat{\psi}$ se anulan en cero. Esto es consecuencia de la integración por partes $\frac{\partial^m \hat{\psi}}{\partial \xi^m}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^m \psi(t) dt$.

Al igual que la localización de la wavelet y su regularidad influyen la una en la otra, ambas propiedades nos informan del orden mínimo del momento nulo, como se aprecia en el Teorema 3.4 de [Wei, Cap. 2].

Teorema 3.3. Sea $r \in \mathbb{N}$, ψ una función en $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ tal que

$$|\psi(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^{r+1+\epsilon}},$$

para $\epsilon > 0$, y $\psi^{(m)} \in L^\infty(\mathbb{R})$ para $1 \leq m \leq r$. Si $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} t^m \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq m \leq r.$$

Demostración. Para demostrar este teorema aplicaremos inducción. Empezaremos con $r = 0$. Sea $a = 2^{-j_0} c_0$, $j_0, c_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\psi(a) \neq 0$. Dicho número existe por la continuidad de ψ y $\|\psi\| = 1$. Si tomamos $j > \max\{j_0, 0\}$, $c = 2^{j-j_0} c_0$, por la ortogonalidad de $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(t) \psi(2^j t - c) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(t) \psi(2^j(t-a)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(2^{-j}y + a) \psi(y) dy.$$

Al hacer tender $j \rightarrow \infty$, podemos sacar $\bar{\psi}(a)$ como una constante obteniendo $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$.

Ahora lo probaremos para un r cualquiera, suponiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0$, $0 \leq k \leq r-1$. Definimos

$$\vartheta_1(t) = \int_{-\infty}^t \psi(y) dy, \quad \vartheta_k(t) = \int_{-\infty}^t \vartheta_{k-1}(y) dy, \quad 2 \leq k \leq r.$$

Integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^r \psi(t) dt = t^r \vartheta_1(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - r t^{r-1} \vartheta_2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \cdots + (-1)^r r! \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_r(t) dt.$$

Por la localización de ψ , $|\vartheta_{k+1}(t)| \leq C(1+|t|)^{-(r-k+\epsilon)}$, así que

$$\left| t^{r-k} \right| |\vartheta_{k+1}(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow \pm\infty, \quad 0 \leq k \leq r-1,$$

pudiendo eliminar los primeros sumandos para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^r \psi(t) dx = (-1)^r r! \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_r(t) dt.$$

Sabemos que $\psi^{(r)}$ es continua, y $\psi^{(r-1)}$ no es constante (si lo fuera sería idénticamente nula, entonces $\psi^{(r-2)}$ sería constante y por tanto también nula, y así sucesivamente hasta llegar a ψ , pero esta no es constante ya que $\|\psi\| = 1$). Así existe $a = 2^{-j_0} c_0$, $j_0, c_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\psi^{(r)}(a) \neq 0$. Tomando de nuevo $j > \max\{j_0, 0\}$, $c = 2^{j-j_0} c_0$, e integrando por partes

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(t) \psi(2^j t - c) dt &= \overline{\psi}(t) \vartheta_1(2^j t - c) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \overline{\psi^{(1)}}(t) \vartheta_2(2^j t - c) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \dots + \\ &+ (-1)^r \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(r)}}(t) \vartheta_r(2^j t - c) dt. \end{aligned}$$

De nuevo por la localización de $\psi, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$ y que las derivadas de ψ están en $L^\infty(\mathbb{R})$, eliminamos sumandos hasta quedarnos con

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(t) \psi(2^j t - c) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(r)}}(t) \vartheta_r(2^j t - c) dt.$$

Con un cambio de variable como en el caso anterior, y haciendo tender $j \rightarrow \infty$,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(r)}}(2^{-j} y + a) \vartheta_r(y) dy \longrightarrow \overline{\psi^{(r)}}(a) \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_r(y) dy.$$

Como la integral de ϑ_r vale 0, $\int_{-\infty}^{\infty} t^r \psi(x) dt = 0$. □

Nota. Supongamos que tenemos una wavelet con momento nulo de orden n y la señal f es polinómica de grado a lo sumo $n - 1$. Entonces los coeficientes $(f, \psi_{j,k})$ de la transformada wavelet serán nulos. En el caso de encontrarnos con una señal que posee escasos puntos problemáticos, y que es suficientemente regular entre ellos (del orden de \mathcal{C}^n), los coeficientes asociados a altas resoluciones ($j \gg 0$) serán pequeños, permitiéndonos despreciarlos, y quedándonos con muy pocos coeficientes no nulos.

3.3. Soporte compacto

Volvamos a la parte de localización. Mejor que cualquier localización polinomial o exponencial es tener una wavelet con soporte compacto. Unido a que también queremos $\psi \in \mathcal{C}^\infty$, no nos queda más que empezar a buscar filtros y funciones escala para construir la wavelet deseada. Pero antes de nada nos condría echar un vistazo al siguiente teorema (3.8 en [Wei]).

Teorema 3.4. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función de soporte compacto tal que $\psi \in \mathcal{C}^\infty$. Entonces $\{\psi_{j,k}\}$ no puede ser un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 10. *Retomando algunas wavelets presentadas en el capítulo anterior, la de Haar es un ejemplo de wavelet de soporte compacto pero sin regularidad. En particular solo posee un momento nulo, por lo que no es recomendable a la hora de aproximar funciones con alta regularidad.*

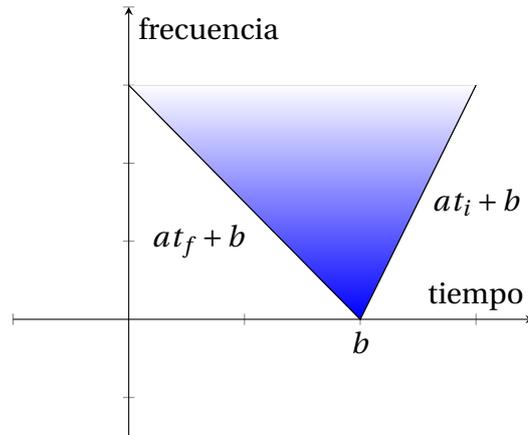
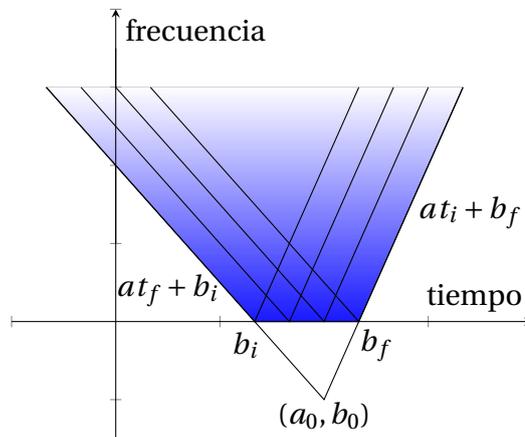
Ejemplo 11. *El ejemplo contrario lo encontramos en las wavelets de Shannon, las cuales pertenecen a $C^\infty(\mathbb{R})$ y cuyo soporte no es compacto, como se deduce de su expresión explícita. A pesar de que en el infinito se comporta como $|t|^{-1}$, posee infinitos momentos nulos.*

De nada nos sirve intentar construir una wavelet que cumpla ambas propiedades ya que no existe. De esta forma tendremos que dar prioridad a una de ellas. Nos quedaremos con el soporte compacto, y ya que apenas hay diferencia entre $\psi \in \mathcal{C}^m$ y $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ si m es medianamente grande.

Nota. *Si la señal es menos regular y/o presenta numerosos puntos problemáticos, los momentos nulos de la wavelet no son una propiedad que nos ayude a conseguir coeficientes pequeños. En su lugar trabajaremos con el soporte. Fijémonos en cada singularidad individualmente: cuanto más pequeño sea el soporte, menos coeficientes se verán afectados por esta. Como consecuencia conseguiremos aumentar el número de coeficientes despreciables, reduciendo la cantidad de información a almacenar.*

Ejemplo 12. *Sea ψ una wavelet cualquiera, y $\delta(t - t_0)$ la señal a analizar. La transformada wavelet de $\delta(t - t_0)$ se define como $W\delta(a, b) = \frac{1}{a}\bar{\psi}\left(\frac{t_0 - b}{a}\right)$. Supongamos que $\text{supp}(\psi) = [t_i, t_f]$, entonces $Wf(a, b) \neq 0$ si $\frac{t_0 - b}{a} \in [t_i, t_f]$, o lo que es lo mismo, si $t_0 \in [at_i + b, at_f + b]$. En la figura 3.1, se muestra la zona del plano tiempo-frecuencia que se ve afectado por la delta.*

En este otro caso queremos estudiar una señal s con soporte compacto $[b_i, b_f]$ (no transmite información fuera de $[b_i, b_f]$). Podemos tratar cada punto del intervalo de forma independiente como si de una delta se tratase. Si calculáramos su cono de influencia veríamos que se trata de la unión de todos los conos con vértice en $[b_i, b_f]$. Si nos fijamos en la figura 3.2, veremos que la zona de influencia de s también puede entenderse como el cono de vértice (a_0, b_0) restringido a frecuencias positivas.

Figura 3.1: Cono de influencia generado por $\delta(t - t_0)$ Figura 3.2: Cono de influencia generado por s

3.4. Construcción de wavelets de soporte compacto

Al igual que hicimos en el capítulo anterior, buscaremos la wavelet a partir de un MRA, aunque en este caso utilizaremos el filtro de paso bajo para generarlo. Para ello exigiremos que m_0 sea un polinomio trigonométrico de la forma

$$m_0(\xi) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{ik\xi}.$$

Que el filtro sea de esta forma no es un capricho, ya que para construir una wavelet de soporte compacto mediante (2.30) necesitamos que la función escala sea también de soporte compacto y haya un número finito de α_k distintos de cero. Además estas dos últimas afirmaciones son equivalentes, como se ve en la proposición 7.2 de [Mall]. Para obtener φ utilizaremos (2.26). Debido a la forma polinomial de m_0 , $\hat{\varphi}$ es un sumatorio de elementos de la forma

$$e^{i\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \lambda_j\right)\xi}, \quad -M \leq \lambda_j \leq M, \quad (3.2)$$

por lo que $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \lambda_j \in [-M, M]$. De esta forma todos los exponentes se encuentran dentro de un compacto. Al pasar de $\widehat{\varphi}$ a φ , también hay que pasar a la transformada inversa de las exponenciales. La transformada inversa de $e^{-ia\xi}$ es $\delta(t-a)$ (en el sentido de distribuciones), así φ es un sumatorio de deltas de la forma

$$\delta\left(t + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \lambda_j\right)$$

y todas ellas tienen soporte contenido en $[-M, M]$, y por tanto φ también. Que la función escala sea de soporte compacto implica que la wavelet también lo es. Para ver esto utilizaremos (2.30), demostrada en el capítulo anterior: La función ψ depende de los coeficientes α_k . Si φ es de soporte compacto, el número de $\alpha_k \neq 0$ es finito. De esta forma ψ es una suma finita de elementos de $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, los cuales tienen soporte compacto. Así hemos conseguido construir una función de soporte compacto.

Aparte de conocer la forma que debe tener m_0 , también debemos pedir que cumpla ciertas propiedades, algunas de ellas nos resultarán familiares:

$$\left. \begin{aligned} &\bullet m_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}(2\pi), \\ &\bullet |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \\ &\bullet m_0(0) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\bullet m_0(\xi) > 0, \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.4)$$

Ejemplo 13. Supongamos que $m_0(\xi) = \frac{1+e^{i\xi^3}}{2}$, el cual verifica (3.3), sin embargo no cumple (3.4). La función escala asociada es $\varphi(t) = \frac{1}{3} \chi_{[-3,0]}(t)$. Para que φ genere un MRA se necesita que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sea un sistema ortonormal, pero ni siquiera es ortogonal.

Con este ejemplo se ilustra la necesidad de imponer (3.4), ya que sin ella podríamos no ser capaces de construir el MRA. Las otras tres propiedades se verificaban para todo filtro de paso bajo. Ahora que tenemos la wavelets, debemos asegurarnos de que la función escala está asociada a un MRA. Para ello empezaremos probando que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ gracias a la proposición 3.9 de [Wei, Cap. 2].

Proposición 3.5. Sea φ una función definida en \mathbb{R} que verifica (3.3). Entonces la función definida según (2.26) pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y $\|\varphi\| \leq 1$.

Demostración. Sea $\Pi_N(\xi) = \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi)$. Al ser m_0 una función de $\mathcal{P}(2\pi)$, Π_N es una función de $\mathcal{P}(2^{N+1}\pi)$. Entonces

$$I_N = \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{2^{N+1}\pi} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi =$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2^N \pi} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi + \int_{2^N \pi}^{2^{N+1} \pi} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi &= \int_0^{2^N \pi} |\Pi_N(\xi)|^2 + |\Pi_N(\xi + 2^N \pi)|^2 d\xi = \\ &= \int_0^{2^N \pi} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 |m_0(2^{-N} \xi)|^2 + |\Pi_{N-1}(\xi + 2^N \pi)|^2 |m_0(2^{-N} \xi + \pi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Al ser Π_{N-1} periódica de periodo $2^N \pi$,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2^N \pi} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 \left\{ |m_0(2^{-N} \xi)|^2 + |m_0(2^{-N} \xi + \pi)|^2 \right\} d\xi = \\ &= \int_0^{2^N \pi} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 d\xi = I_{N-1}. \end{aligned}$$

Repetiendo este proceso, obtenemos

$$\begin{aligned} I_N = I_1 &= \int_0^{4\pi} |m_0(2^{-1} \xi)|^2 d\xi = 2 \int_0^{2\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = \\ &= 2 \left[\int_0^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{\pi}^{2\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi \right] = 2 \int_0^{\pi} \left\{ |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \right\} d\xi = 2\pi. \end{aligned}$$

Por como está construido $\widehat{\varphi}$, sabemos que $|\Pi_N|^2 \rightarrow |\widehat{\varphi}|^2$ si $N \rightarrow \infty$. Aplicando el teorema de Plancherel y el lema de Fatou a $\chi_{[-2^N \pi, 2^N \pi]} \Pi_N$, tenemos

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-2^N \pi}^{2^N \pi} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 1.$$

Así sabemos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\|\varphi\| \leq 1$. □

A continuación propondremos un conjunto de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ y nos aseguraremos que verifican las propiedades de un MRA. Definiremos $V_0 = \text{span} \{ \varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z} \}$ y el resto de subespacios como $V_j = \{ f(2^j \cdot) \mid f \in V_0 \}$.

- Por definición se verifica (2.16).
- Sabemos que $\{ \varphi(\cdot - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema generador de V_0 . Para comprobar que $\{ \varphi(\cdot - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 , y de esta forma obtener la propiedad (2.19), nos apoyaremos en el Teorema 3.13 de [Wei, Cap. 2].

Teorema 3.6. *Supongamos que m_0 es un polinomio trigonométrico que verifica (3.3) y (3.4). Si φ está construida a partir de (2.26), entonces $\{ \varphi(\cdot - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal.*

Demostración. Definamos $G(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2$. Aplicando 1.12, comprobar que $\{ \varphi(\cdot - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal es equivalente a ver que $G \equiv 1$ en $[-\pi, \pi]$.

Empezaremos verificando que $G(0) = 1$. Como

$$m_0(0) = 1 \text{ y } |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

podemos deducir que $m_0(k\pi) = 0$ si k es impar. Con esto queremos ver que $\widehat{\varphi}(2l\pi) = 0$ si $l \neq 0$, $l \in \mathbb{Z}$. Supongamos que l es impar, entonces

$$\widehat{\varphi}(2l\pi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}2l\pi) = m_0(l\pi) \prod_{j=2}^{\infty} m_0(2^{-j}2l\pi) = 0.$$

En caso de que l sea par, existen $q \in \mathbb{N}$, r impar de forma que $l = 2^q r$. Así

$$\widehat{\varphi}(2l\pi) = \prod_{j \neq q+1, j \geq 1} m_0(2^{-j}2l\pi) m_0(2^{-(q+1)}2l\pi) = m_0(r\pi) \prod_{j \neq q+1, j \geq 1} m_0(2^{-j}2l\pi) = 0.$$

De esta forma el único sumando del sumatorio de $G(0)$ que no se anula es $|\widehat{\varphi}(0)|^2 = |m_0(0)|^2 = 1$.

Ahora vamos a comprobar que G es constante en $[-\pi, \pi]$. Para ello utilizaremos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} G(2\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(2(\xi + k\pi))|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 |m_0(\xi + k\pi)|^2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 |m_0(\xi + 2k\pi)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + \pi + 2k\pi)|^2 |m_0(\xi + \pi + 2k\pi)|^2 = \\ &= |m_0(\xi)|^2 G(\xi) + |m_0(\xi + \pi)|^2 G(\xi + \pi). \end{aligned}$$

Sea ζ el punto donde G alcanza el mínimo en el intervalo $[-\pi, \pi]$, $G(\zeta) = m$. Supóngase $G(\zeta/2) > m$. Entonces aplicando la igualdad anterior,

$$\begin{aligned} m = G(\zeta) &= |m_0(\zeta/2)|^2 G(\zeta/2) + |m_0(\zeta/2 + \pi)|^2 G(\zeta/2 + \pi) > \\ &> m [|m_0(\zeta/2)|^2 + |m_0(\zeta/2 + \pi)|^2] = m. \end{aligned}$$

Absurdo, con lo que $G(\zeta/2) = m$. Iterando el proceso llegamos a $G(2^{-j}\zeta) = m$ para $j = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto $m = \lim_{j \rightarrow \infty} m = \lim_{j \rightarrow \infty} G(2^{-j}\zeta) = G(0) = 1$. Si repetimos el proceso suponiendo que sobre ζ se alcanza el máximo, $G(\zeta) = M$, e invertimos las desigualdades llegamos a que $M = 1$. El mínimo y el máximo tienen el mismo valor, $M = m = 1$, así que $G \equiv 1$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, como queríamos. \square

- A la hora de demostrar (2.15) basta con ver $V_{-1} \subset V_0$. Si aplicamos la transformación inversa a (2.23) (habiéndola deducido previamente de (2.26)), obtenemos $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k \varphi(\cdot - k)$, lo cual implica que $\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$ es una función de V_0 . Al ser invariante por traslación, $\varphi\left(\frac{t}{2} - k\right) \in V_0$ para todo k entero. Como $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base de V_0 , $\{\varphi\left(\frac{\cdot}{2} - k\right)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base de V_{-1} contenida en V_0 , y por tanto $V_{-1} \subset V_0$.

Para demostrar (2.17) y (2.18) utilizaremos (2.15), (2.16) y (2.19).

- Vamos a comprobar que $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$. Supongamos que existe una función $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, $f \neq 0$, por lo que podremos suponer $\|f\| = 1$. Definimos

$$f_j(t) = 2^{j/2} f(2^j t).$$

Puesto que f pertenece a todos los subespacios V_j , $f_j \in V_0$, $j \in \mathbb{Z}$ y de esta forma podemos escribirla como

$$f_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{j,k} \varphi(t - k), \quad \sigma_{j,k} = (f_j, \varphi(\cdot - k)).$$

Aplicando la identidad de Parseval primero y un cambio de variable después, obtenemos:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\sigma_{j,k}|^2 = \|f_j\|^2 = \|f\|^2 = 1, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Por la propiedad 1.13, $\widehat{f}_j(\xi) = 2^{-j/2} \widehat{f}(2^{-j} \xi)$, con lo que

$$2^{-j/2} \widehat{f}(2^{-j} \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{j,k} e^{-ik\xi} \widehat{\varphi}(\xi) = m_j(\xi) \widehat{\varphi}(\xi).$$

Sea $A \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{2\pi A}^{2\pi(A+1)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2^{j/2} \int_{2\pi A}^{2\pi(A+1)} |m_j(2^j \xi)|^2 |\widehat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi.$$

Por la desigualdad de Schwarz, y tomando $2^j \xi = \mu$,

$$\begin{aligned} &\leq 2^{j/2} \left(\int_{2\pi A}^{2\pi(A+1)} |m_j(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2\pi A}^{2\pi(A+1)} |\widehat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-j/2} \left(\int_{2^{j+1}\pi A}^{2^{j+1}\pi(A+1)} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^{j+1}\pi A}^{2^{j+1}\pi(A+1)} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-j/2} \left(\sum_{m=0}^{2^j-1} \int_{2^{j+1}\pi A + 2\pi m}^{2^{j+1}\pi A + 2\pi(m+1)} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^{j+1}\pi A}^{2^{j+1}\pi(A+1)} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por la 2π -periodicidad de m_j , y $\int_0^{2\pi} |m_j(\mu)|^2 d\mu = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{j,k}|^2 = 2\pi$,

$$= 2^{-j/2} \left(\sum_{m=0}^{2^j-1} 2\pi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^{j+1}\pi A}^{2^{j+1}\pi(A+1)} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

Denotamos por $\mathcal{J} = \int_{2^{j+1}\pi A}^{2^{j+1}\pi(A+1)} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu$. Ahora estudiaremos dos casos según el valor de A:

$$\text{Si } A \geq 1, \quad \mathcal{J} \leq \int_{2^{j+1}\pi A}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

$$\begin{aligned} \text{si } A = 0, \quad \mathcal{I} &= \int_0^{2^{j+1}\pi} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0, \\ \text{si } A = -1, \quad \mathcal{I} &\leq \int_{-2^{j+1}\pi}^0 |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0, \\ \text{si } A \leq -2, \quad \mathcal{I} &\leq \int_{-\infty}^{2^{j+1}\pi(A+1)} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

De esta manera hemos comprobado que $\widehat{f} \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow$ se verifica (2.17).

- Ya solo nos queda demostrar (2.18). Por como está construida, φ es continua por serlo m_0 . Al exigir $m_0(0) = 1$, se deduce que $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Entonces nos encontramos en condiciones de aplicar el Teorema 1.7 de [Wei, Cap. 2]:

Teorema 3.7. *Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen (2.15), (2.16) y (2.19). Supongamos que la función φ de (2.19) es tal que $|\widehat{\varphi}|$ es continua en 0. Si $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, entonces se verifica (2.18).*

Demostración. Denotemos por $U = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$. Sabemos que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, y además $|\widehat{\varphi}|$ es continua en un entorno de 0, es decir, existe $\mu > 0$ tal que $|\widehat{\varphi}(\xi)| \neq 0$ en $[-\mu, \mu]$. Supongamos que existe $g \in U^\perp$, entonces $\forall f \in U$, $(f, g) = 0$. Al ser los subespacios V_j invariantes por traslación, U también lo es. Aplicando el teorema 1.10

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\overline{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi \quad \forall f \in U, x \in \mathbb{R}.$$

De esta forma sabemos que $\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi) = 0$ casi siempre. Si tomamos en particular $f(t) = \varphi(2^j t)$, obtenemos $\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi) = 0$ casi siempre. Como sabemos que $\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi) \neq 0$ en $[-2^j\mu, 2^j\mu]$, entonces $\overline{\widehat{g}}(\xi)$ se anula en dicho intervalo. Haciendo tender j hacia ∞ se obtiene $\overline{\widehat{g}}(\xi) = 0$ casi siempre, por lo tanto $g \equiv 0$. De aquí se deduce que $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$. \square

Habiendo conseguido construir wavelets de soporte compacto mediante MRA, podríamos preguntarnos si existen otras formas de conseguir wavelets con esta característica. Si $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ es ortonormal la respuesta es no, como se aprecia en el corolario 3.15 de [Wei, Cap. 7]:

Corolario 3.8. *Cualquier wavelet de soporte compacto, tal que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ sea ortonormal, está generada por un MRA.*

De esta forma sabríamos que una wavelet está generada por un MRA sin tener que volver a construir la función escala ni los subespacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, lo cual resulta bastante cómodo. De nuevo [Wei, Cap. 7], en su corolario 3.17 va un paso más allá y nos presenta otra forma de saber si una wavelet está construida a partir de un MRA.

Corolario 3.9. *Si $\widehat{\psi}$ tiene soporte compacto, y $|\widehat{\psi}|$ es continua, entonces la wavelet ψ está generada por un MRA.*

3.4.1. Regularidad de la wavelet en función de m_0

Tras comprobar que, efectivamente, a partir de m_0 se genera un MRA, terminaremos el capítulo viendo cómo influye la elección de m_0 en el número de derivadas continuas de φ . Al estar ψ construida a partir de φ , obtendremos también la regularidad de la wavelet. Al comienzo del capítulo 7 de [Dau], el autor comenta la existencia de dos métodos para calcular la regularidad de ψ . Nosotros utilizaremos el método más sencillo, ya que solo nos interesa conocer la regularidad mínima global. La otra opción queda para desarrollo de teorías que necesitan información más precisa acerca de la continuidad de las derivadas.

Recordemos que m_0 es un polinomio trigonométrico. Aplicando el corolario 5.5.4 de [Dau] podemos escribir $m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi)$.

Corolario 3.10. *Sea $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ una base ortonormal asociada a un MRA. Si $|\varphi(t)|, |\psi(t)| \leq C(1+|t|)^{-(m+1+\epsilon)}$, $\psi \in \mathcal{C}^m$ con las derivadas de ψ acotadas hasta orden m . Entonces m_0 factoriza como*

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^{m+1} \mathcal{L}(\xi), \quad (3.5)$$

siendo $\mathcal{L}(\xi) \in \mathcal{D}(2\pi) \cap \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$.

La demostración comienza aplicando el teorema 3.3 para calcular los ceros de $\widehat{\psi}$ en $\xi = 0$, así conocer que m_0 posee $m+1$ ceros en $\xi = \pi$. La acotación de la función escala y la wavelet nos permite calcular la continuidad de sus transformadas. Ambas pertenecen a \mathcal{C}^m , por lo tanto m_0 también. De esta forma se deduce $m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^{m+1} \mathcal{L}(\xi)$, siendo $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^m$.

Para simplificar la notación, definiremos $M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2$, $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$. Entonces

$$\begin{aligned} M_0(\xi) &= \left(\frac{1+e^{i\xi}}{2}\right)^N \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N |\mathcal{L}(\xi)|^2 = \left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi} + 2}{4}\right)^N L(\xi) = \\ &= \left(\frac{1+\cos(\xi)}{2}\right)^N L(\xi) = (\cos^2(\xi/2))^N L(\xi), \end{aligned}$$

donde L también es un polinomio en $\cos(\xi)$. Gracias al cambio de variable $\sin^2(\xi/2) = \frac{1-\cos(\xi)}{2}$, es posible escribir L como polinomio en $\sin^2(\xi/2)$, por lo que existe un polinomio Q tal que

$$M_0(\xi) = (\cos^2(\xi/2))^N Q(\sin^2(\xi/2)).$$

Recordemos que m_0 verificaba la propiedad (2.24), por lo tanto

$$1 = M_0(\xi) + M_0(\xi + \pi) =$$

$$(\cos^2(\xi/2))^N Q(\sin^2(\xi/2)) + (\cos^2(\xi/2 + \pi/2))^N Q(\sin^2(\xi/2 + \pi/2)).$$

Si definimos $x = \cos^2(\xi/2)$ y $1 - x = \sin^2(\xi/2)$, como $\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$ y $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$, obtenemos

$$x^N Q(1 - x) + (1 - x)^N Q(x) = 1. \quad (3.6)$$

Como esta igualdad se verifica en el intervalo $[0, 1]$, también lo hace en todo \mathbb{R} . Por el teorema de Bezout, existen dos polinomios q_1, q_2 de grado $N - 1$ de forma que

$$x^N q_1(x) + (1 - x)^N q_2(x) = 1.$$

Si sustituimos x por $1 - z$, obtenemos $(1 - z)^N q_1(1 - z) + z^N q_2(1 - z) = 1$. Uniendo estas dos igualdades podemos deducir que $q_1(1 - x) = q_2(x)$. Recordemos que el polinomio Q también era solución de la ecuación. Si tomamos $q_2(x) = Q(x)$, entonces $Q(1 - x) = q_2(1 - x) = q_1(x)$, y sustituyendo en (3.6),

$$x^N q_2(1 - x) + (1 - x)^N q_2(x) = 1.$$

De esta forma podemos escribir $q_2(x)$ en función de $q_2(1 - x)$:

$$q_2(x) = \frac{1 - x^N q_2(1 - x)}{(1 - x)^N} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} x^k + O(x^N).$$

Puesto que q_2 es de grado $< N$, su expresión explícita es $q_2(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} x^k$. De esta forma solo existe un polinomio Q de grado $< N$ que será con el que trabajaremos más adelante.

Nota. El polinomio Q de grado mínimo corresponde a la construcción de la wavelet de Daubechies. Si escogiéramos Q entre los infinitos polinomios de grado superior que también verifican (3.6) obtendríamos infinitas wavelets distintas, pero todas con un soporte más grande. A parte de la elección de Q , las wavelets de Daubechies se caracterizan por tener el soporte más pequeño en función de los momentos nulos, como aparece en la proposición 7.4. de [Mall]. Este resultado afirma que las wavelets con momento nulo de orden p poseen un soporte $\geq 2p - 1$. En particular el soporte de las wavelets de Daubechies es $[-p + 1, p]$, y el de su función escala $[0, 2p - 1]$, como se puede apreciar en la figura 3.3. Si la wavelet de Daubechies posee un momento nulo de orden 1, nos encontramos ante la wavelet de Haar.

Al inicio de la sección decidimos que $L(\xi)$ fuera equivalente a $Q(\sin^2(\xi/2))$. Ahora que conocemos la expresión de Q , podemos decir

$$L(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} (\sin^2(\xi/2))^k. \quad (3.7)$$

De dicha igualdad se puede deducir que $L(\xi) \geq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$. Si además escribimos $\sin^2(\xi/2)$ en función de exponenciales complejas,

$$L(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \left[\left(\frac{1 - e^{i\xi}}{2} \right) \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{2} \right) \right]^k = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \left[\left| \frac{1 - e^{i\xi}}{2} \right|^2 \right]^k,$$

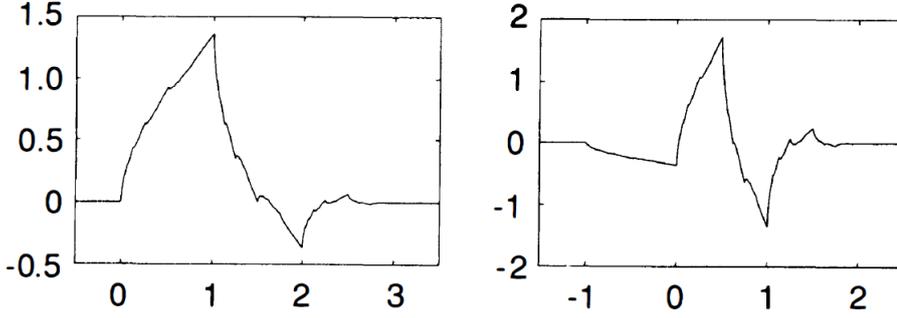


Figura 3.3: Función escala y wavelet Daubechies con momento nulo de orden 2.

siendo fácil apreciar que L es un polinomio trigonométrico de grado $N - 1$. Nos queda verificar que existe otro polinomio trigonométrico \mathcal{L} de forma que el cuadrado de su módulo coincida con L . Para ello nos apoyaremos en el Lema 3.16 de [Wei, Cap. 2].

Lema 3.11. Sea $L(\xi) = \sum_{k=-M}^M \gamma_k e^{ik\xi}$ un polinomio trigonométrico tal que $L(\xi) \geq 0$ en \mathbb{R} . Entonces existe un polinomio trigonométrico $\mathcal{L}(\xi) = \sum_{k=0}^M \sigma_k e^{ik\xi}$ tal que $|\mathcal{L}(\xi)|^2 = L(\xi)$.

Puesto que los coeficientes de L son reales, es posible elegir los de \mathcal{L} también en \mathbb{R} . Así hemos conseguido ver que la factorización de m_0 (3.5) puede escribirse como producto de dos polinomios trigonométricos.

Ya dijimos que la regularidad de ψ venía dada en función de φ , y esta a su vez depende de m_0 . Utilizando (3.5) se aprecia como en particular depende de \mathcal{L} :

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-i2^{-j}\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(2^{-j}\xi) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-i2^{-j}\xi}}{2} \right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi).$$

Aplicando inducción, podemos escribir los productorios finitos como series geométricas de las cuales conocemos su valor exacto

$$\prod_{j=1}^n \frac{1 + e^{-i2^{-j}\xi}}{2} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(e^{-i2^{-n}\xi} \right)^k = \frac{1}{2^n} \frac{1 - e^{-i\xi}}{1 - e^{-i2^{-n}\xi}}$$

Para calcular el productorio infinito basta hacer tender n hacia infinito en la expresión anterior. Si $n \rightarrow \infty$, $2^{-n}\xi \rightarrow 0$ para ξ fijo. En esta situación podremos sustituir la exponencial por su desarrollo de Taylor hasta orden 1, aproximando $e^{-i2^{-n}\xi}$ por $1 - i2^{-n}\xi$. Entonces

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-i2^{-j}\xi}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \frac{1 + e^{-i2^{-j}\xi}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \frac{1 - e^{-i\xi}}{1 - e^{-i2^{-n}\xi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-i\xi}}{2^n i 2^{-n}\xi} = \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi},$$

y por tanto,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi).$$

A continuación presentamos el lema 7.1.2. extraído de [Dau] que nos indicará la regularidad de φ a partir de \mathcal{L} .

Lema 3.12. Sea $S_n = \sup_{\xi} \left| \prod_{j=1}^n \mathcal{L}(2^{-j}\xi) \right|$, $\kappa_j = \frac{\log S_j}{j \log 2}$ y $\kappa = \inf_{j \in \mathbb{Z}} \kappa_j$. Si $\kappa < N - \alpha - 1$, entonces C^α .

Como $\kappa < N - \alpha - 1$, existen $l \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ tales que

$$\sup_{\xi} \left| \prod_{j=1}^l \mathcal{L}(2^{-j}\xi) \right| < 2^{l(N-1-\alpha-\epsilon)}.$$

Si $|\xi| \leq 1$,

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi) \right| \leq e^C (1 + |\xi|)^{(N-\alpha-1-\epsilon)}.$$

En el caso $|\xi| > 1$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $2^{l(J-1)} \leq |\xi| \leq 2^{lJ}$, por lo que

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi) \right| \leq e^C 2^{l(N-\alpha-1-\epsilon)} (1 + |\xi|)^{(N-\alpha-1-\epsilon)}.$$

Entonces existen $K, K' > 0$ de forma que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq K |\xi|^{-N} (1 + |\xi|)^{(N-\alpha-1-\epsilon)} \leq K' (1 + |\xi|)^{(-\alpha-1-\epsilon)}.$$

De esta desigualdad se deduce que $\varphi \in C^\alpha$, y al ser la wavelet una suma finita de trasladadas de la función escala, $\psi \in C^\alpha$.

Basándonos en (3.7), podemos decir que $\sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)|$ se alcanza cuando $\sin^2(\xi/2) = 1$, por lo que

$$\sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)| = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \right]^{\frac{1}{2}} < \left[2^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} 2^{-k} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2^{N-1} Q\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Basta sustituir $x = \frac{1}{2}$ en (3.6) para obtener $Q(1/2) = 2^{N-1}$, y así $\sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)| < 2^{N-1}$. De esta forma sabemos que φ es continua. Para ajustar más el resultado, calcularemos

$$S_2 = \sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi/2)\mathcal{L}(\xi)| = \sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)|.$$

Sea $x = \sin^2(\xi/2)$, entonces

$$\sin^2(\xi) = 1 - \cos^2(\xi) = 4 \left(\frac{1 - \cos(\xi)}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos(\xi)}{2} \right) =$$

$$4 \sin^2(\xi/2) \cos^2(\xi/2) = 4 \sin^2(\xi/2) [1 - \sin^2(\xi/2)] = 4x(1-x).$$

Por lo tanto

$$\sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| = \sup_{x \in [0,1]} |Q(x)Q(4x(1-x))|^{\frac{1}{2}}.$$

Para acotar dicha expresión utilizaremos el siguiente resultado:

Corolario 3.13. Sea $Q(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} x^k$. Entonces:

$$0 \leq x \leq y, \quad x^{-N+1} Q(x) \geq y^{-N+1} Q(y), \quad (3.8)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad Q(x) \leq 2^{N-1} \max\{1, 2x\}^{N-1}. \quad (3.9)$$

Estudiaremos cuatro casos según los valores de x y $4x(1-x)$, sin embargo en todos los casos utilizaremos la desigualdad (3.9) para acotar. Para simplificar denotaremos $Z = |Q(x)Q(4x(1-x))|$

$$x \leq \frac{1}{2}, \quad 4x(1-x) \leq \frac{1}{2} \implies Z \leq \left| Q\left(\frac{1}{2}\right) Q\left(\frac{1}{2}\right) \right| = 2^{2(N-1)},$$

$$x \leq \frac{1}{2}, \quad 4x(1-x) > \frac{1}{2} \implies Z \leq 2^{N-1} 2^{N-1} (2 \cdot 4x(1-x))^{N-1} \leq 2^{3(N-1)},$$

$$x > \frac{1}{2}, \quad 4x(1-x) \leq \frac{1}{2} \implies Z \leq 2^{(N-1)} (2x)^{N-1} 2^{N-1} \leq 2^{3(N-1)},$$

$$x > \frac{1}{2}, \quad 4x(1-x) > \frac{1}{2} \implies Z \leq 2^{(N-1)} (2x)^{N-1} 2^{N-1} (2 \cdot 4x(1-x))^{N-1} \leq \\ \leq 2^{6(N-1)} \left(\frac{4}{27}\right)^{N-1} = 2^{8(N-1)} 3^{-3(N-1)}.$$

De esta forma sabemos $\sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| \leq 2^{4(N-1)} 3^{-\frac{3}{2}(N-1)}$. Aplicando la notación de 3.12, $\kappa \leq \kappa_2$, donde

$$\kappa_2 = \frac{\log\left(2^{4(N-1)} 3^{-\frac{3}{2}(N-1)}\right)}{2\log(2)} = (N-1) \frac{4\log(2) - \frac{3}{2}\log(3)}{2\log(2)} =$$

$$(N-1) \left(2 - \frac{3\log(3)}{4\log(2)}\right) \leq 1'8(N-1)$$

Así el α que aparece en 3.12 es $0'8(N-1)$, de forma que la regularidad de ψ queda en función de N . En particular ψ posee $[0'8(N-1)] - 1$ derivadas continuamente diferenciables y la derivada $[0'8(N-1)]$ es continua. Con esta información ya somos capaces de construir m_0 según la regularidad que queramos imponer a ψ .

Hasta aquí el razonamiento llevado a cabo por Daubechies para presentar la regularidad de las wavelets. Unos años más tarde Weiss llegó a los mismos resultados siguiendo un orden distinto. Para empezar, define

$$\left| m_0^{(k)}(\xi) \right|^2 = 1 - c_k \int_0^\xi (\sin(t))^{2k+1} dt, \quad c_k^{-1} = \int_0^\pi (\sin(t))^{2k+1} dt$$

para después comprobar que verifica (3.3), (3.4).

Ejemplo 14. Si para la elección de [Wei] de $|m_0^k|^2$ tomamos $k = 0$, nos encontramos con

$$|m_0^0(\xi)|^2 = 1 - \frac{\cos(\xi) - 1}{2} = \frac{1 + \cos(\xi)}{2} = \left(\frac{1 + e^{i\xi}}{2}\right) \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2}\right) = |m_0(\xi)|^2,$$

donde $m_0(\xi)$ era el filtro de paso baso asociado a la wavelet de Haar (ejemplo 4).

Al estar en función del seno, propone escribirlo es su forma trigonométrica obteniendo un polinomio trigonométrico de orden $2k + 1$. Gracias al lema (3.11), prueba que m_0^k es a su vez otro polinomio trigonométrico. Después vuelve a la expresión inicial $|m_0^k|^2$. Como es una función par, puede escribirse en función del coseno. Derivando, buscando el número de ceros en -1 e integrando de nuevo obtiene $|m_0^k(\xi)|^2 = (1 + \cos(\xi))g^k(\xi)$. Por (3.11), llegamos a escribir $m_0^k(\xi) = \left(\frac{1+e^{i\xi}}{2}\right)^{k+1} m^k(\xi)$, siendo m^k otro polinomio trigonométrico, conclusión a la que nosotros también habíamos llegado. Por el camino, Daubechies consiguió una expresión más precisa de g^k , al contrario que Weiss, quién demostró primero la continuidad de la wavelet y después presentó en el teorema 3.27 [Wei, Cap. 2] la descomposición (3.7).

Bibliografía

- [Cal] A. P. CALDERÓN, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*. Sfid. Math.,(1964).
- [Dau] I. DAUBECHIES, *Ten lectures on wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, (1992).
- [Gab] D. GABOR, *Theory of communication*, J. Inst. Elect. Engrg., London, 93 (III), (1946) , pp. 429-457.
- [Gros] A. GROSSMANN AND J. MORLET, *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*. SINJ. of Math. And.,(1984).
- [Hol] M. HOLSCHNEIDER, *Wavelets. An analysis tool*, Oxford University Press, Oxford, New York, (1995).
- [Mall] S. MALLAT, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, (1998).
- [Mey] Y. MEYER, *Les ondelettes: algorithmes et applications*, Armand Colin, Paris, (1992).
- [Rud] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., NY, (1987).
- [Wei] G. WEISS AND E. HERNÁNDEZ, *A first course on wavelets*, with a foreword by Yves Meyer, CRC Press, Boca Raton, FL, (1996).