



Universidad de Valladolid

Facultad de ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Física

**MATEMÁTICAS Y NÚMEROS EN LAS
ONDAS GRAVITATORIAS**

Autor:

Carmelo de Castro Caballero

Tutor:

Mariano Santander Navarro

ABSTRACT

This paper was born from the need to understand how gravitational waves behave. Most of the existing studies are too much complex and theoretical, so numbers were proposed to account for their effect.

After a short historical introduction, the most important mathematical concepts were introduced according to different requirements. Then, they were used to report the amplitude and the frequency of gravitational waves in some physically relevant situations. The analyzed systems were binaries of stars or black holes, pulsars and supernova blasts. The feasibility of detection for each such system depends on the numerical conditions found in those calculations. Finally, the effect of gravitational waves was compared to gravity with the use of the main concept of general relativity, curvature.

Índice

1	Introducción	3
2	Contexto histórico	4
2.1	Precedentes	4
2.2	Relatividad general	5
2.3	Detección	6
3	Marco teórico	10
3.1	Aspectos generales	10
3.2	Ondas gravitatorias	11
4	Desarrollo	17
4.1	Amplitud	18
4.1.1	Sistemas binarios	19
4.1.2	Sistemas rotatorios	23
4.1.3	Sistemas expansivos	24
4.2	Frecuencia	24
4.3	Instrumentos de detección	27
4.4	Curvatura	30
5	Conclusiones	33

1. Introducción

Desde el primer hallazgo de ondas gravitatorias el 14 de Septiembre de 2015, el interés por su estudio y comprensión ha sufrido tal trascendencia que ha terminado sobrepasando el estricto rigor físico, haciendo eco en otros ámbitos científicos e incluso sociales. Numerosos estudios han surgido acerca de este tema; no obstante, la mayoría de ellos se dividen en dos conjuntos diametralmente opuestos. Unos se centran en ampliar la formulación actual, ya sea profundizando en los conceptos más teóricos o planteando cómo mejorar las técnicas experimentales. Otros, en cambio, ofrecen una introducción más divulgativa que precisa, con objeto de acercar a los menos iniciados. Es esta diferencia tan extrema lo que motiva la elaboración de este trabajo, que, además de incluir los aspectos más básicos de estas dos vertientes, centra todo su peso en un aspecto menos frecuentemente discutido: los valores numéricos de las propiedades de las ondas.

Son estos números los que, además de servir como puente entre ambos niveles, facilitan el entendimiento de las ondas gravitatorias. Si bien las matemáticas proporcionan las bases e incluso resultados generales de su estudio, el uso de números es útil para, en última instancia, dar cuenta real del efecto de las ondas, justificar las particularidades de cada situación (de las cuales se derivan numerosas propiedades físicas de los sistemas emisores), y relacionar su efecto con el de otros fenómenos similares.

Sin embargo, antes de comenzar con los aspectos numéricos, es preciso ilustrar la situación en la que nos encontramos. Nuestro punto de partida será una exposición histórica, en la cual se comentarán los acontecimientos más destacables que llevaron a su predicción, y, posteriormente, a las detecciones logradas hasta la fecha. Prosiguiendo con el marco teórico, se presentarán varios de los conceptos más significativos de la teoría de la relatividad general, los cuales particularizaremos de acuerdo con las exigencias de nuestro estudio, derivando las herramientas necesarias para abordar el desarrollo numérico.

Comenzaremos dicho desarrollo describiendo el efecto de una onda gravitatoria y sus fuentes más importantes, para después tomar diversos casos, algunos existentes y otros supuestos, pero todos ellos de interés real. En cada uno de los ejemplos analizaremos las dos propiedades ondulatorias fundamentales: amplitud y frecuencia. Una vez calculados todos los resultados, pasaremos a contrastarlos con los valores requeridos por los instrumentos de detección, explicando, además, de qué dependen estas condiciones. Por último, estudiaremos la curvatura que posee el espacio-tiempo en presencia de tales ondas, cualidad que surge de la teoría de Einstein por tratarse de un fenómeno gravitatorio. Ésta nos servirá para comparar su efecto mecánico con el de la gravedad, lo que nos ayudará a adquirir una idea bastante concreta de sus implicaciones.

Conviene tener en cuenta que, aun queriéndolo, no se podría ser auténticamente conciso en los cálculos. El carácter astrofísico de los sistemas con los que trataremos implica una imprecisión considerable en los datos disponibles. Sin embargo, es esta imprecisión la que respalda el empleo de diversas aproximaciones, usadas para facilitar enormemente los cálculos sin desfigurar los órdenes de magnitud de las variables físicas implicadas.

2. Contexto histórico

2.1. Precedentes

Pese al enorme triunfo que en 1687 supuso la teoría de la gravedad de Isaac Newton, el hecho de que se tratase de una acción a distancia trajo consigo una extendida confusión. Ni siquiera el propio Newton parecía completamente convencido con dicha idea, pues, aunque la teoría funcionaba, fue incapaz de encontrarle sentido a este tipo de interacción, aun suponiendo que los cambios se reflejaban de forma instantánea.

Este problema comienza a tratarse de otra manera en 1849, cuando Michael Faraday introduce el concepto de campo. Poco a poco, esta idea comienza a servir como base de un gran número de teorías. Dentro de la hidrodinámica, fueron las propiedades de los fluidos (velocidad, densidad y presión, tratadas como campos) lo que le sirvió a Clerk Maxwell para desarrollar y presentar su teoría del electromagnetismo en un artículo de 1865 titulado ‘Una teoría dinámica del campo electromagnético’. En él, no solo logra demostrar que ambos, campo eléctrico y magnético, están relacionados, sino también que en conjunto se propagan como una onda, a la velocidad de la luz. Además, se comenta la posibilidad de que la gravedad se propagase también por medio de un campo.

En 1893, Oliver Heaviside expuso una analogía gravitatoria al electromagnetismo de Maxwell. Su trabajo consta fundamentalmente de dos puntos: Primero, Heaviside deriva un conjunto de leyes circuitales y obtiene un grupo de ecuaciones análogo al de Maxwell, lo que le permite definir una ecuación de ondas para la gravedad. En la segunda parte de su artículo, calcula la influencia del movimiento del Sol en el (por entonces aceptado) éter terrestre, y obtiene numerosas perturbaciones en su órbita. Luego concluye que, al no haberse observado tales perturbaciones, la velocidad con la que cambia el campo gravitatorio sea muy probablemente igual a la de la luz. Heaviside no fue el primero en sugerir una velocidad finita para la gravedad; ya en 1770 Pierre-Simon Laplace había sopesado tal hipótesis.

La discordancia entre las creencias de Newton y Maxwell fue lo que llevó a Jonathan Zenneck a escribir un artículo en 1905 para una enciclopedia alemana. En él, propone una revisión de la gravitación newtoniana para asemejarla a la teoría electromagnética, aceptada ya por muchos como la base de toda la física. Aunque no tuvo muy en cuenta las propuestas de Heaviside, Zenneck se apoyó en los resultados de otros físicos que también consideraban una velocidad finita en la propagación gravitatoria. Algunas de estas teorías fueron desarrolladas con objeto de explicar las discrepancias en la órbita de Mercurio, con una precesión en su perihelio de 43 segundos de arco por siglo. Paul Gerber propuso la solución a este problema a través de una teoría gravitatoria modificada por él, pero lejos aun de la relatividad especial.

No fue hasta que Albert Einstein presentó esta teoría en 1905 que se completó la unificación electromagnética, alegando que campo eléctrico y magnético son en realidad dos aspectos de un mismo objeto. Con la introducción de sus dos postulados estableció la velocidad máxima a la que puede viajar cualquier tipo de información. Ese mismo año, Henri Poincaré presentó por su parte un documento titulado ‘Sobre la dinámica del electrón’, el cual sigue una línea análoga al trabajo de Einstein pero carece de la claridad que éste logró con sus dos postulados. Pese a recibir un crédito mucho menor, Poincaré incluyó una sección diferente, dedicada a la gravitación. En ella, trata de modificar la gravedad newtoniana para adaptarla a las transformaciones de Lorentz, de un modo similar a como

hizo Heaviside, pero incluyendo sus ideas relativistas. Asumiendo que la fuerza gravitatoria se propaga a la velocidad de la luz, se llega a un tiempo retardado entre el cambio en el campo gravitatorio y el efecto. Tales cambios se propagan por lo que Poincaré llamó ondas gravitatorias. No obstante, esta idea debe considerarse prematura ya que no sigue ningún esquema teórico consistente y completo.

2.2. Relatividad general

Tiempo después de concluir la relatividad especial, Einstein se propuso incorporar la gravedad a dicha teoría. Pronto comprendió que no iba a ser tan sencillo; en 1907 planteó su principio de equivalencia, percatándose de la indistinguibilidad entre la atracción gravitatoria y una aceleración de igual magnitud del marco de referencia. De este modo, resultaba imposible construir una teoría sobre el marco de la relatividad especial de la forma en que otros físicos trataban de hacer por entonces, sino que era necesario planear un nuevo enfoque.

Al comienzo de su planteamiento, Einstein descubrió que relojes situados a diferente altura en un campo gravitatorio no marcaban el mismo ritmo. Esto le llevó a pensar que la velocidad de la luz era una función de la posición. Aunque ahora sabemos que tal idea no es la definitiva, tuvo un gran impacto sobre otro físico, Max Abraham. Éste publicó un artículo en 1912 modificando la relatividad especial para incluir la velocidad de la luz variable. En él se concluye que, del mismo modo que una carga acelerada emite radiación electromagnética, una masa en movimiento debe producir radiación gravitatoria, pero a partir del término cuadrupolar en este caso. Sin embargo, las ondas gravitatorias a las que Abraham llega debían ser longitudinales. En 1913, Gustav Mie llegó a un resultado similar al de Abraham, pero no alcanzó la misma consideración pues violaba el principio de equivalencia de Einstein.

El error en el tipo de movimiento de las ondas fue solventado por Gunnar Nordström, a quien Einstein prestó una mayor atención. Este joven físico propuso dos teorías, en 1912 y 1913 respectivamente. La primera de ellas fue desechada, pero la segunda se corresponde con la primera explicación geométrica de la gravedad. A pesar de su gran simplicidad y las discrepancias entre sus resultados y las observaciones, dicha teoría predijo correctamente la aparición de ondas gravitatorias transversales.

Después de todos estos intentos por efectuar un tratamiento relativista de la gravedad, Einstein presentó su teoría de la relatividad general en 1915. Sin embargo, en su primer escrito no figura ningún comentario acerca de las ondas gravitatorias. Según explicó poco después, por entonces no creía que existieran, al menos de un modo análogo a las ondas electromagnéticas (cuyo orden principal de radiación es el dipolo). No tardó en publicar un nuevo artículo haciendo referencia a ello y dedicando una breve explicación de la radiación gravitatoria. Einstein hizo uso de coordenadas armónicas para llegar a unas expresiones muy similares al conjunto de Maxwell, con lo que pudo derivar una ecuación de ondas.

Dos años más tarde, tras ser notificado por Nordström acerca de un error en la construcción de uno de sus tensores, decidió reescribir los cálculos de su relatividad general. Al hacerlo, además de simplificar la mayoría de sus ecuaciones, derivó la actual fórmula del cuadrupolo para la potencia emitida en forma de radiación gravitatoria. No obstante, Einstein obtuvo tres tipos diferentes de ondas gravitatorias. En 1922, Arthur Eddington

escribió ‘La propagación de ondas gravitatorias’, donde desecha dos de estos tres tipos por viajar a diferentes velocidades según el sistema de coordenadas que se escogiese. El tercer tipo es la conocida onda transversal que demostró que se propaga a la velocidad de la luz.

A pesar de sus conclusiones, Einstein siguió sin mostrarse convencido de que las ondas gravitatorias fuesen reales, pues su derivación partía de la aproximación linealizada y no de la teoría exacta. En 1936 envió, junto con su asistente Nathan Rosem, un nuevo artículo, aportando pruebas matemáticas de la inexistencia de las mismas. Resulta que, tras una revisión por parte del referee, se encontraron diversos errores en el texto, por lo que no llegó a publicarse en la revista inicialmente escogida. Finalmente, tras su corrección y con el tiempo, Einstein llegó a admitir que las ondas existiesen, pero nunca pensó que pudieran llegar a ser detectadas. El escepticismo que mostró hasta su muerte en 1955 sirvió, entre otras razones, como impedimento para su búsqueda.

2.3. Detección

Para probar la existencia de ondas gravitatorias es necesario detectar sus efectos. Uno de los principales problemas al plantear esto era la elección del sistema de coordenadas bajo las cuales describir las ondas. Hasta ese momento, se solía elegir con vistas a posibles simplificaciones matemáticas, y no por conveniencia física.

En 1956, Felix A. E. Pirani publicó ‘Sobre el significado físico del tensor de Riemann’, texto en el que introduce un formalismo matemático para la deducción de observables físicos, con objeto de aplicarlo a las ondas gravitatorias. En él, deduce el efecto mecánico que éstas tienen sobre la materia cuando la atraviesan. Mientras tanto, el resto de la comunidad científica se dedicaba a examinar si las ondas transportaban o no energía. Estas cuestiones fueron tratadas al año siguiente en un congreso en Chapel Hill, en Carolina del Norte. En dicho evento se discutieron todo tipo de temas relativos a la gravitación: gravitación clásica, unificación con la física cuántica, cosmología, etc... y, por supuesto, ondas gravitatorias. Fue el trabajo de Pirani el que inspiró a Feynman a plantear un argumento a favor de su existencia: sabiendo que las ondas provocan un movimiento relativo entre dos los cuerpos, si estos ejerciesen un rozamiento sobre cualquier superficie, se produciría una emisión calorífica. La conservación de la energía exigiría que las ondas la transportasen y transfiriesen.

Un año después del congreso, Joseph Weber comenzó a plantearse cómo detectar ondas gravitatorias. Básicamente, su propuesta era medir las vibraciones inducidas sobre un sistema mecánico como antena. Tras su construcción, en 1966 publicó un nuevo artículo desvelando los detalles de su detector, el cual consistía en un enorme cilindro de aluminio, con una masa de 3 toneladas, 153 cm de largo y 66 cm de diámetro. Dicho artefacto se encontraba aislado en el interior de una cámara de vacío, y sus vibraciones serían evaluadas a través del voltaje que generarían unos cristales piezoeléctricos conectados al cilindro. Para asegurar su fiabilidad, Weber construyó un segundo detector y lo situó a 950 km del primero. Además, dedicó mucho tiempo a aislar correctamente sus aparatos de vibraciones externas, terremotos, e interferencias electromagnéticas, hasta el punto de asegurar que la única fuente de ruido era la agitación térmica de los átomos de aluminio del cilindro, movimientos de unos 10^{-16} m.

Pasaron unos años hasta que Weber y su equipo lograron unas medidas de lo que dicen fueron ondas gravitatorias. En 1969 publicaron un nuevo artículo anunciando estas detecciones, en su mayoría de ondas provenientes del centro galáctico. Si sus resultados hubiesen sido correctos, habrían supuesto la transformación de masa a energía de un gran número de estrellas a un ritmo tal que la Vía Láctea habría dejado de existir hace tiempo. Muchos físicos interpretaron esto como un fallo en las medidas, alegando que Weber no había sido capaz de eliminar el suficiente ruido de sus detectores, pero esto realmente es algo que jamás podrá conocerse.

Fue el trabajo de Weber lo que sirvió de inspiración a muchos otros científicos de todo el mundo, que construyeron nuevos detectores con notables mejorías. Sin embargo, a excepción de Weber (que seguía obcecado con su triunfo), ninguno de ellos logró registrar una sola medida. En 1974 Joseph Hooten Taylor y Alan Russell Hulse descubrieron un pulsar binario cuyas propiedades orbitales se han podido determinar con extraordinaria precisión, comprobando que las dos componentes se acercan a un ritmo que corresponde a la pérdida de energía por radiación gravitatoria predicha por la teoría de Einstein.

Eventualmente, los investigadores comprendieron que los métodos empleados hasta ese momento no disponían de la sensibilidad necesaria, por lo que hubo que plantearse otras formas de detección. Esto pronto les condujo al uso de interferómetros, como ya se había planteado de forma explícita en 1962 por parte de Gertsenshtein y Pustovoid.

A comienzos de los años 70, Robert L. Forward (uno de los alumnos y ayudantes de Weber), fue alentado por Rainer Weiss para construir el primer interferómetro orientado a la búsqueda de ondas gravitatorias. Su primer prototipo fue presentado en 1971, y poseía unos brazos de 8,5 m de largo. Sin embargo, después de 150 horas de examinación, no dio con ningún resultado. Por su parte, Weiss también decidió construir su propio interferómetro, inspirado en los papeles de Pirani y las charlas de Phillip Chapman, quien había trabajado en el MIT de Massachusetts y la NASA. Su prototipo, de brazos de 1,5 m, nunca llegó a ser terminado debido a una nueva ley en contra de la financiación de proyectos que no fuesen de ámbito militar.

En 1974 la NSF solicitó a Peter Kafka que valorase un nuevo proyecto de Weiss, para el que pedía una subvención. Se trataba de un interferómetro con una longitud de 9 m en sus brazos, capaz, según Weiss, de detectar ondas producidas por el pulsar del cangrejo. Kafka, al dedicarse principalmente a la física teórica, decidió presentar el proyecto ante un grupo de físicos experimentales que habían trabajado con Weber. Estos resultaron realmente fascinados con la idea, y en 1975 la subvención fue concedida. Ese mismo año, Kafka impartió una charla en Sicilia, en la que criticó duramente la falta de sensibilidad de los cilindros de Weber. Uno de los oyentes, Ronald Drever, quedó tan impresionado por los comentarios de Kafka, que al volver a Glasgow (de donde provenía) comenzó a desarrollar diversas técnicas interferométricas. Inicialmente, la falta de dinero le obligó a dedicarse a tareas sencillas: comenzó utilizando un interferómetro para monitorizar la vibraciones en unas barras masivas de aluminio, procedimiento diferente al resto. Más adelante, su constante dedicación le permitió llegar a operar con un interferómetro de 10 m de largo. A raíz de sus investigaciones, en 1979 fue invitado a liderar un equipo en Caltech, California.

En 1983, un grupo del instituto Max Planck, en Garching, logró desarrollar el que, según Weiss, fue el primer interferómetro realmente interesante, con brazos de 30 m. Este

dispositivo implementaba un sistema de espejos con objeto de incrementar su tamaño efectivo, haciendo rebotar el láser varias veces.

Estos dos equipos decidieron cooperar en 1989 para fabricar el mayor interferómetro hasta la fecha. Inicialmente, se planteó construirlo bajo Tierra y con una longitud de 3 km, pero su proyecto no fue subvencionado. Tras reducir su tamaño a 600 m y aprovechar para mejorar las técnicas de detección, comenzó su construcción en 1995, al sur de Hanover. No fue hasta el 2002 que el GEO600 se puso en funcionamiento, y aun hoy en día se encuentra operativo. Además de ser un excelente observatorio, ha servido para el desarrollo y la prueba de avances tecnológicos que se han empleado en sistemas más avanzados.

Además del GEO600, otro de los observatorios más importantes es el denominado Virgo. Este proyecto nació de la idea de Alain Brillet, perteneciente al instituto francés CNRS, y Adalberto Giazotto, del instituto italiano INFN. En un primer momento, su intención era juntarse a un grupo alemán del Max Planck para colaborar en un gran proyecto europeo. Sin embargo, al ser notificados de la indisponibilidad de fondos, decidieron trabajar por su cuenta. El proyecto Virgo debe su nombre al Cluster de Virgo, que recoge cerca de 1500 galaxias, zona donde se centrarían las observaciones y que se encuentra a unos 50 millones de años luz de la Tierra.

Tras una serie de contratiempos económicos, el proyecto fue aprobado en 1993 por el CNRS y en 1994 por el INFN. Con unos brazos de 3 km de largo, el interferómetro de Virgo fue situado sobre una planicie cerca de Pisa, en Italia. Entre 1996 y 1999 el proyecto sufrió una demora por diversos problemas administrativos, ya que no existía ninguna entidad conjunta a ambos institutos que lo regulara. Para solventarlo, en 2000 se creó el Observatorio Gravitatorio Europeo, EGO. La construcción del primer Virgo finalizó en 2003.

Por último se tiene el último y más importante de los observatorios, el LIGO. Su origen se remonta al año 1975, cuando Kip Thorne viaja a Washington, D.C. para reunirse con Weiss. Ya por el 1968, Thorne había fundado un grupo de investigación en Caltech, dedicado a la teoría de las ondas gravitatorias y a sus fuentes. Sin embargo, a causa de la conversación que mantuvo con Weiss aquel día, decidió modificar el objetivo del colectivo y centrar la investigación en la detección de las ondas. Ya de vuelta en Caltech, Thorne pensó en proponer a su amigo Vladimir B. Braginski, de Rusia, para trabajar junto a ellos, pues disponía de una amplia experiencia en dicho tema. Sin embargo, los acontecimientos de la Guerra Fría impidieron su incorporación, por lo que Weiss sugirió a Thorne ofrecérselo a Drever. Tras su incorporación en 1979, juntos comenzaron con la construcción de un interferómetro de 40 m de largo, con el cual terminaron en 1983.

Weiss, por su parte, se encontraba trabajando en el MIT con un interferómetro mucho más modesto, de 1,5 m. Al comprender que los dos equipos perseguían un mismo fin, Weiss propuso a Thorne formar una coalición, y ambos firmaron un acuerdo en 1984 con el propósito de construir un interferómetro de dimensiones kilométricas. De este modo nació el proyecto LIGO.

Entre dicho año y el siguiente, el programa sufrió importantes retrasos a causa de las discusiones entre Weiss y Drever. Tales fueron los percances que, en 1985, la NSF solicitó la disolución de su liderazgo, junto con el de Thorne. A partir de entonces, Rochus E.

Vogt ocupó el mando. De este modo, la NSF terminó por subvencionar el proyecto. Sin embargo, los problemas no cesaron, de modo que en 1994 Vogt fue sustituido por Barry Clark Barish, logrando así mejores ayudas económicas y un avance más veloz. Finalmente, dos observatorios fueron creados entre 1994 y 1997, uno en Hanford y otro en Livingston.

El LIGO inicial estuvo en funcionamiento desde 2002 hasta 2010 sin ningún registro de ondas gravitatorias. De hecho, durante esa temporada, el personal de LIGO y Virgo mantuvo un estrecho contacto entre sí, terminando con un acuerdo de colaboración en 2007. En 2010 se paralizó la búsqueda de ondas gravitatorias para implementar notables mejoras en el sistema de LIGO. Éstas finalizaron en 2015, con un gasto de 200 millones de dólares. El LIGO avanzado (o aLIGO), dispone de una sensibilidad diez veces mayor que su predecesor.

La primera detección de ondas gravitatorias tuvo lugar el 14 de Septiembre de 2015. Se trataba de la fusión de dos agujeros negros, de 36 y 29 masas solares, situados a 1,3 billones de años luz de la Tierra. La duración del evento fue de 0,2 s. Desde entonces, LIGO ha logrado registrar otros diez casos, muy similares a este primero, todos ellos correspondientes a la fusión de un par de objetos cósmicos (nueve parejas de agujeros negros y una de estrellas de neutrones).

3. Marco teórico

3.1. Aspectos generales

Aunque los siguientes resultados pueden enunciarse de forma más general para espacios métricos de cualquier dimensión n , nosotros nos ceñiremos al contexto de la relatividad general, tomando $n = 4$ y el tiempo propio τ como parámetro del que dependen las cuatro coordenadas x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), con las que se describen los sucesos. La primera coordenada es $x^0 = ct$ y está relacionada con el tiempo t . Las otras tres, x^i ($i = 1, 2, 3$), se utilizan describir el espacio. Aquí emplearemos las coordenadas cartesianas.

El espacio físico está dotado de una métrica dada por el tensor $g_{\mu\nu}$, de segundo orden, covariante y simétrico, definido sobre el espacio de vectores tangentes en cada suceso. La distancia entre dos sucesos de separación diferencial, x^μ y $x^\mu + dx^\mu$ (o elemento de línea ds), puede escribirse a partir de las dieciséis componentes de este tensor:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1)$$

Se ha utilizado el convenio de Einstein para la suma en los índices repetidos al mismo lado de la igualdad. Las componentes del tensor $g_{\mu\nu}$ pueden escribirse en forma de matriz 4×4 que, al invertirse, da como resultado la matriz del tensor métrico en su forma contravariante, $g^{\mu\nu}$. Así, se tienen los dos objetos necesarios para subir o bajar los índices de cualquier otro tensor.

Al igual que los vectores tangentes para las curvas, en el caso de las superficies se tiene un concepto parecido, denominado bivector tangente. Es en base al espacio formado por estos objetos que se construye la denominada métrica de los bivectores:

$$g_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}. \quad (2)$$

Por otro lado, en un espacio métrico como el nuestro se puede definir una conexión o derivada covariante respecto de las coordenadas, que, en el caso de cualquier tensor A^μ contravariante y de primer orden, viene dada por:

$$\frac{DA^\mu}{Dx^\alpha} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta. \quad (3)$$

Los símbolos $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ son los coeficientes de la conexión, que, conocidas las componentes covariantes del tensor métrico, pueden calcularse a través de la siguiente fórmula:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (4)$$

A partir de dichos coeficientes se define el tensor de curvatura de Riemann, $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$, de cuarto orden, que en su forma natural es una vez contravariante y tres veces covariante:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}. \quad (5)$$

La mayor utilidad de este tensor reside en la ecuación de desviación geodésica, que da cuenta de como varía la separación δx^μ (coordenadas) entre dos partículas puntuales en caída libre, situadas en el seno de un campo gravitatorio:

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{D\tau^2} \simeq -R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (6)$$

La derivada covariante con respecto al tiempo propio se calcula mediante la regla de la cadena, utilizando las derivadas covariantes con respecto de las coordenadas, por lo que aparecerán varios productos de los coeficientes de la conexión.

El tensor de curvatura puede escribirse en su forma completamente covariante, $R_{\rho\nu\alpha\beta} = g_{\rho\mu} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$, que es antisimétrica frente al intercambio de los dos primeros o de los dos últimos índices, y simétrica en cuanto al intercambio de estas dos parejas. Tomando ésta y la métrica de los bivectores en (2), se definen las curvaturas seccionales en los 2-planos según las diferentes coordenadas:

$$\mathcal{K}_{(\alpha\beta)} = \frac{R_{\alpha\beta\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta\alpha\beta}}. \quad (7)$$

Las curvaturas seccionales se encuentran estrechamente relacionadas con el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, pues, dado un punto cualquiera, el valor promedio de las curvaturas seccionales es proporcional a la traza del tensor de Ricci. En general, éste se obtiene por contracción de los dos índices impares del tensor de Riemann, a través de la métrica:

$$R_{\mu\nu} = g^{\beta\alpha} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^\beta{}_{\mu\beta\nu}. \quad (8)$$

El tensor de Ricci juega un papel fundamental en las diez ecuaciones de campo de Einstein, que relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la densidad local de energía y momento (debida a la existencia materia o no), dada por el tensor $T_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Aquí, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es la curvatura escalar (la traza del tensor de Ricci), y $\Lambda = 1,1056 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ la constante cosmológica.

3.2. Ondas gravitatorias

Considérese un observador situado lejos de una distribución de materia, de modo que el espacio en el que reside se encuentra caracterizado la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. Cualquier cambio en dicha distribución (en el tensor $T^{\mu\nu}$) se traduce en una alteración del tensor de Ricci, y, por tanto, en la métrica, ahora designada por $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (10)$$

El tensor $h_{\mu\nu}$ representa el cambio inducido en la métrica. Para hallarlo, se han de resolver las ecuaciones de Einstein para la distribución variable de materia, tarea nada sencilla a menos que se consideren cambios extremadamente pequeños ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). De este modo, podemos despreciar los términos de orden mayor al lineal.

Comencemos con los símbolos de la conexión (4), los cuales quedan quedan:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial h_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (11)$$

Para el cálculo del tensor de Riemann en (5) podemos eliminar los productos de dos coeficientes de conexión, pues dejan de ser lineales en $h_{\mu\nu}$. Enlacemos con la definición del tensor de Ricci en (8) para obtenerlo directamente, en términos del tensor $h_{\mu\nu}$ y de su traza, h :

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\square h_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial h_{\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial h_{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}} \right) \right]. \quad (12)$$

Los índices pueden subirse o bajarse mediante el tensor de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. Hemos designado como \square al operador D'Alambertiano, que, en el espacio-tiempo plano, viene dado por:

$$\square = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} = \eta^{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}. \quad (13)$$

Resulta conveniente introducir un nuevo tensor, $\tilde{h}_{\mu\nu}$ antes de proceder con las ecuaciones de Einstein:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Éste contiene la misma información que $h_{\mu\nu}$ y representa el campo gravitatorio. Calculando la traza de (12), R , y llevando ambos a (9), se obtienen la ecuaciones para la gravedad linealizada, ya en términos del nuevo tensor:

$$-\square \tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial \tilde{h}_{\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \tilde{h}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{\partial \tilde{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right) \eta_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Ahora bien, al igual que en electromagnetismo, es posible simplificar esta última ecuación por medio de un gauge específico, denominado *gauge de Hilbert* (que en este caso es simplemente una elección de las coordenadas). Éste es equivalente al gauge de Lorenz para la radiación electromagnética, y nos permite fijar la siguiente condición:

$$\frac{\partial \tilde{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0. \quad (16)$$

Para justificar esta elección, tomemos dos sistemas de referencia x^μ y x'^μ separados una pequeña cantidad ξ^μ :

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (17)$$

La transformación de la métrica \tilde{g} de un sistema al otro conduce a una relación entre los tensores del campo gravitatorio:

$$\tilde{h}'_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu}. \quad (18)$$

Subiendo los dos índices con la métrica plana y tomando la divergencia, se tiene:

$$\frac{\partial \tilde{h}'^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \tilde{h}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x_\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x_\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\beta} \eta^{\mu\nu} \right). \quad (19)$$

Al existir una suma en el índice ν , los dos últimos términos a la derecha de la igualdad se anulan entre si. El termino restantes es el D'Alambertiano de ξ^μ :

$$\frac{\partial \tilde{h}'^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \tilde{h}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \square \xi^\mu. \quad (20)$$

Se sabe que, dada una función f cualquiera, siempre podemos encontrar otra función F tal que $\square F = f$. Por tanto, es posible elegir un valor para ξ^μ de modo que el miembro de la derecha en (20) se anule, cumpliéndose la elección propuesta en (16). Así, se logran eliminar los tres últimos términos del miembro de la izquierda en (19), quedando simplemente:

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (21)$$

Y, en el caso del vacío ($T_{\mu\nu} = 0$):

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (22)$$

Ésta es la conocida ecuación de ondas para el tensor $\tilde{h}_{\mu\nu}$, y su solución más sencilla es la de una onda plana general, dada por la parte real de la siguiente expresión:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{i k_\alpha x^\alpha} = A_{\mu\nu} e^{i k_j x^j} e^{i k_0 ct}. \quad (23)$$

En ella, $A_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico y constante, y k_α es el vector de onda, con su primera componente $k_0 = -k^0 = -\frac{\omega}{c}$ relacionada con la frecuencia de la onda. Llevando el resultado en (23) a la ecuación (22), se obtiene una condición para estas dos propiedades:

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow k_\alpha k^\alpha = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c} = \pm \sqrt{(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2}. \quad (24)$$

De primeras, uno podría pensar que, al haber diez ecuaciones en (22), deberían existir diez soluciones independientes para $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Sin embargo, la elección del gauge de Hilbert impone ciertas restricciones sobre dicho tensor. Al introducirlo en (16) se deduce que:

$$A^{\mu\alpha} k_\alpha = 0. \quad (25)$$

Esto se cumple sea cual sea el índice μ . Se tienen cuatro ecuaciones de ortogonalidad, a partir de las cuales podemos despejar cuatro de las dieciséis componentes de $A^{\mu\alpha}$.

Así, pasamos de tener diez soluciones independientes a solo seis. Es posible reducir aun más éste número con una buena elección de ξ^μ en (17). En efecto, tómesese una transformación de coordenadas como la que sigue:

$$\xi^\mu = i B^\mu e^{i k_\alpha x^\alpha}. \quad (26)$$

Puede demostrarse que, al llevar esta cantidad a (18), se nos permite escoger las componentes de B^μ de forma que se anule la traza de $A_{\mu\nu}$ y sus elementos temporales (siendo, por tanto, $h_{\mu\nu}$ y $\tilde{h}_{\mu\nu}$ idénticos según (14)). Esta elección se denomina *gauge TT* y nos deja únicamente con dos soluciones independientes para (22). La forma general del tensor $A_{\mu\nu}$ podrá expresarse como combinación lineal de los de las dos soluciones:

$$A_{\mu\nu} = h_+ [\epsilon_+]_{\mu\nu} + h_\times [\epsilon_\times]_{\mu\nu}. \quad (27)$$

Los tensores $[\epsilon_+]_{\mu\nu}$ y $[\epsilon_\times]_{\mu\nu}$ representan los dos tipos polarización de la onda. Suponiendo que ésta se propaga en la dirección z , ambos tensores pueden escribirse del siguiente modo en su forma matricial:

$$[\epsilon_+]_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\epsilon_\times]_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Uno de los ejemplos más sencillos es el de una onda gravitatoria con polarización + únicamente. En este caso, el vector de onda tiene una única componente espacial, que, según (24), es $k_z = \frac{\omega}{c}$. Se ha elegido el signo positivo, contrario al de k_0 , por analogía con el tiempo retardado en electromagnetismo. Volvamos a (23) y tomemos su parte real, con $h_+ \equiv h$:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Sumándole el tensor métrico de Minkowski, se obtiene la métrica general del espacio-tiempo en presencia de una onda gravitatoria con polarización + y dirección z , en la aproximación lineal:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} [1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} [1 - h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

El elemento de línea (1) será, entonces:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ \left[1 + \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \right] dx^2 + \left[1 - \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \right] dy^2 - dz^2 \right\}. \quad (31)$$

Con respecto a las ecuaciones (6) para la desviación geodésica, encontramos una simplificación en caso de que las partículas se muevan a velocidades muy bajas ($v^i \ll c$). Así, la primera componente de la cuadrivelocidad $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c, v^x, v^y, v^z)$ es la única relevante frente al resto de ellas. Además, podemos confundir el tiempo propio con el tiempo coordenado y despreciar la componente temporal del vector separación, con lo que quedan únicamente las componentes espaciales δx^i . Eliminando los términos no lineales en el desarrollo de la doble derivada covariante, se llega a la siguiente expresión para la desviación geodésica debida a las ondas gravitatorias:

$$\frac{d^2 \delta x^i}{dt^2} \simeq -R^i_{0j0} \delta x^j. \quad (32)$$

Para comprender la naturaleza de la radiación gravitatoria resulta conveniente compararla con la electromagnética, más conocida. Se sabe que radiación puede descomponerse en una serie de multipolos, de los cuales el de orden más bajo es el que le otorga el nombre. El primer término en el desarrollo es el monopolar, inadmisibles en la radiación electromagnética ya que exigiría un cambio en la carga total. Algo parecido ocurre con la radiación gravitatoria, pero en este caso es la masa lo que, al conservarse, impide la existencia de radiación monopolar.

El segundo término es el dipolar. En electromagnetismo, dado un sistema discreto de n cargas q_i , su momento dipolar \vec{P}_{em} asociado se escribe como:

$$\vec{P}_{em} = \sum_i q_i \vec{r}_i. \quad (33)$$

Es la derivada segunda del momento dipolar lo que determina la intensidad de la radiación electromagnética dipolar, por lo general distinta de cero. No es este el caso de la

radiación gravitatoria, pues la conservación del momento lineal del sistema obliga a que la segunda derivada de su momento dipolar \vec{P}_g sea nula:

$$\vec{P}_g = \sum_i m_i \vec{r}_i \Rightarrow \frac{d^2 \vec{P}_g}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0. \quad (34)$$

Queda así demostrada la inexistencia de radiación gravitatoria monopolar y dipolar. De hecho, puede probarse que la parte espacial de la amplitud que poseen las ondas gravitatorias a una distancia r de su fuente está relacionada con la derivada temporal segunda de su momento cuadrupolar Q_{ij} mediante la *fórmula del cuadrupolo*:

$$h_{ij} = \frac{G}{c^4} \frac{2}{r} \frac{d^2 Q_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{dt^2}. \quad (35)$$

El momento cuadrupolar se obtiene a través de su definición:

$$Q_{ij} = \sum_k m_k \left(x_{i,k} x_{j,k} - \frac{1}{3} |\vec{r}| \delta_{ij} \right). \quad (36)$$

Dada la complejidad de su cálculo en la mayoría de los sistemas reales (finitos y continuos, por lo que sería necesario sustituir el sumatorio por una integral), nosotros nos valdremos de una aproximación extremadamente simplista, pero realmente eficaz para averiguar su orden de magnitud.

$$Q_{ij} \sim MR^2 \Rightarrow \frac{d^2 Q_{ij}}{dt^2} \sim \frac{MR^2}{T^2} \sim Mv^2 = 2E_{ns}. \quad (37)$$

Aquí, E_{ns} es la energía cinética debida al movimiento de la fuente que no sea esférica o cilíndricamente simétrico. Resulta comprensible que este tipo de movimientos no generen ondas gravitatorias: Además de poder comprobarse que no provocan ningún cambio en el momento cuadrupolar de la fuente, se constata dentro de la teoría newtoniana que ni rotaciones esféricas o cilíndricas, ni expansiones esféricas, modifican el campo gravitatorio en el exterior de un cuerpo sometido a estos movimientos.

Finalmente, llevando el resultado (37) a (35,) se llega a la fórmula para la estimación de la amplitud:

$$h = \frac{4G}{c^4} \frac{E_{ns}}{r}. \quad (38)$$

4. Desarrollo

Cualquier movimiento de masas induce (salvo en situaciones excepcionales) la creación de ondas gravitatorias. El efecto que éstas tienen a su paso es un movimiento oscilatorio, en el plano perpendicular a su dirección de propagación, y con la misma frecuencia que la de las ondas. El tamaño de estas oscilaciones viene determinado por la amplitud de las ondas en ese punto, h , y las dimensiones del cuerpo afectado. En efecto, h es en realidad lo que se conoce como una deformación: $h = \frac{2\Delta L}{L}$, adimensional. En la Figura 1 puede verse una representación extrema del efecto de una onda que se propaga en la dirección normal al folio sobre un anillo de masas, según la polarización $+$ o \times .

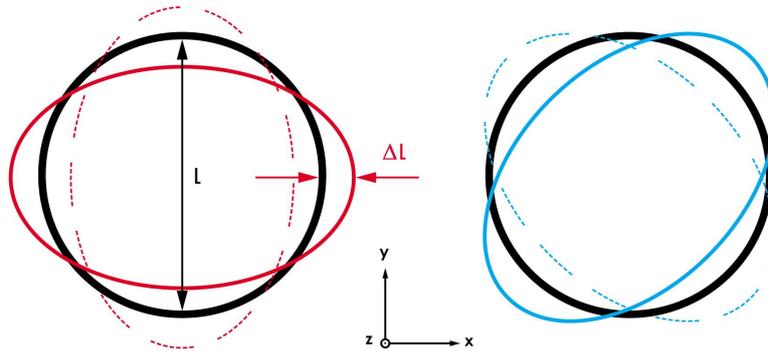


Figura 1. Efecto de una onda con polarización $+$ (rojo) y \times (azul).

La razón del factor 2 en el numerador del anterior cociente es el movimiento simétrico en puntos opuestos, como puede verse fácilmente en la figura. Nótese que el patrón de la polarización \times es el obtenido del de la polarización $+$ por una rotación espacial de ángulo $\frac{\pi}{4}$, mientras que en electromagnetismo el patrón de la polarización vertical es el de la horizontal rotado $\frac{\pi}{2}$. Claramente, estas deformaciones son mucho más discretas en la práctica. Como veremos más adelante, la máxima amplitud de las ondas que nos llegan a la Tierra es del orden de 10^{-21} , lo cual provocaría, por ejemplo sobre un anillo de un kilómetro de radio, oscilaciones de $\Delta L \sim 10^{-18}$ m (ocho ordenes por debajo del diámetro de un átomo de hidrógeno). No es de extrañar que el efecto de las ondas resulte prácticamente insignificante en la mayoría de situaciones, lo cual supone una complicación a la que hacer frente durante los experimentos, en los cuales se requieren instrumentación extremadamente sensible a estos movimientos.

De entre todas las fuentes de ondas gravitatoria, existen tres tipos con diferentes propiedades en la amplitud y frecuencia de sus ondas. Todos ellos son de carácter cósmico y atienden a la siguiente clasificación:

- **Sistemas binarios:** Formados por dos cuerpos en rotación alrededor del centro de masas del conjunto. Son, por lo general, los sistemas de mayor interés, ya que, además de su larga existencia, las ondas generadas se van intensificando a medida que los cuerpos se acercan lentamente.

Aunque pueden estar compuestos por todo tipo de objetos astronómicos, los más importantes vienen dados por un par de agujeros negros o de estrellas de neutrones.

Recientes estudios sugieren que la mayoría de las estrellas del universo pertenecen a sistemas binarios, siendo este tipo, por tanto, el más común de los tres. El proceso de

creación no está del todo claro, pero se cree que se debe a la formación de las propias estrellas principalmente. Tampoco se descartan capturas gravitatorias ocasionales.

- Sistemas rotatorios: Objetos individuales que se encuentran girando alrededor de su propio centro de masas. Es de gran importancia que estos no presenten simetría esférica o cilíndrica completa alrededor de su eje de giro ya que, de lo contrario, la emisión de ondas sería nula.

Un buen ejemplo de este tipo de sistemas son los púlsares: estrellas de neutrones que emiten radiación periódica girando sobre si mismos a velocidades muy elevadas. Pueden ser originados a partir de una supernova o de la colisión y fusión final de un sistema binario de dos estrellas del mismo tipo, y su existencia es también muy duradera. En cambio, al poseer un alto grado de simetría esférica, la amplitud de las ondas será considerablemente menor que en el caso anterior.

- Sistemas expansivos: Son los únicos en los que las ondas se generan mediante un proceso explosivo, y no por su rotación. Normalmente tienen una vida muy corta, de modo que la emisión de ondas no es tan prolongada como en los otros dos sistemas. Como ejemplo más común se tiene la explosión de una supernova, cuya duración suele ser de 100 segundos aproximadamente. Además, se trata de acontecimientos muy poco comunes, con una estimación de dos casos por siglo en nuestra galaxia.

Al igual que con el anterior tipo, es necesario que la expansión se produzca de forma no esférica, lo cual siempre sucede pero no en un grado de asimetría total. La amplitud de las ondas suele ser mayor que la de los púlsares, pero, al ser un fenómeno tan corto e inusual, resultan los sistemas más difíciles de detectar.

En lo sucesivo se darán ejemplos de estos tres tipos de sistemas y se examinarán las ondas gravitatorias que producen, atendiendo a su amplitud y frecuencia. Como un estudio detallado requeriría un conocimiento muy preciso de los sistemas (así como unos cálculos mucho más detallados), aquí nos limitaremos a proporcionar una estimación de sus valores en la mayoría de los casos.

4.1. Amplitud

Para empezar, y como ejemplo curioso pero ilustrativo, estimaremos la amplitud de las ondas gravitatorias generadas por dos luchadores en un combate de lucha libre. De esta forma se pretende entender el carácter de estas ondas cuando de hechos cotidianos se trata, pues los movimientos que se ejecutan en una situación así no se alejan mucho de los que realizamos en nuestro día a día.

Más que el resultado exacto, lo que realmente interesa es el orden de magnitud de la amplitud, de forma que podremos permitirnos ciertas licencias en la modelización. Supondremos que los dos luchadores poseen las mismas características corporales, esto es, en masa. por otro lado, tras analizar varios combates reales, se hizo una estimación de la velocidad promedio de cada parte corporal a partir de sus valores máximo y mínimo (cero) y el tiempo que suelen estar en movimiento. En la Tabla 1 se encuentran los valores escogidos para la masa m y velocidad v de los miembros de cada luchador. No se tienen en cuenta los posibles rangos de variabilidad en estas modelizaciones, pues tampoco nos son de interés aquí.

	M / kg	$v / \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Brazos	$2 \times 8 = 16$	5
Piernas	$2 \times 18 = 36$	4
Tronco	20	3,5
Cabeza	8	3

Tabla 1. Masas y velocidades para cada parte corporal.

Sumando todas las masas se tiene que la masa total de cada luchador es de 80 kg.

Resulta razonable suponer que durante el combate ninguno de los movimientos se hace de forma esférica o cilíndricamente simétrica. Teniendo esto en cuenta, se llega a la amplitud estimada para las ondas gravitatorias que mediría, por ejemplo, el arbitro del combate ($r = 1 \text{ m}$) directamente a partir de la fórmula (38). Se introduce un factor 2 debido a la presencia de dos luchadores, y subíndices $i = 1, \dots, 4$ para cada parte corporal:

$$h(r = 1) \simeq 2 \frac{4G}{c^4} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 M_i v_i^2 = 4,26 \cdot 10^{-41} .$$

Nótese cómo la amplitud decrece rápidamente con la distancia a la fuente: un espectador situado a diez metros del ring mediría una amplitud diez veces menor que la obtenida aquí. Lo mismo sucede con el resto de fuentes. Este decaimiento no es tan brusco como, por ejemplo, el del campo gravitatorio (que lo hace con la segunda potencia de la distancia radial, en lugar de la primera), pero debido a la minúscula cantidad $\frac{4G}{c^4} \sim 10^{-44} \frac{\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$, se suelen alcanzar valores mucho menores.

4.1.1. Sistemas binarios

Siguiendo con el primero de los sistemas astrofísicos, tomaremos cinco estrellas binarias estelares y estimaremos la amplitud con la que nos llegan las ondas que se generan, a partir de sus datos tabulados. Al tratarse de sistemas de dos cuerpos, conviene expresar la fórmula (38) en términos de los parámetros orbitales más típicos:

$$h(r) \simeq \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{2\pi^2 d^2}{T^2} \frac{M_A M_B}{M_A + M_B} . \quad (39)$$

Aquí, T representa el periodo orbital y d la separación media entre las estrellas A y B. Una deducción de esta fórmula puede encontrarse en el Anexo 1 ubicado al final del documento. La Tabla 2 contiene los datos necesarios de las cinco estrellas (en orden creciente de r) y la amplitud de las ondas creadas en cada caso. Para una mejor comprensión

de las distintas magnitudes, se incluyen las equivalencias entre las unidades astronómicas empleadas y las del Sistema Internacional.

Estrella	$r / \text{a.l.}$	d / UA	$T / \text{años}$	M_A / M_\odot	M_B / M_\odot	h
α Centauri	4,36	23,70	79,91	1,10	0,91	$3,07 \cdot 10^{-23}$
β Persei	93	0,062	0,0082	3,17	0,70	$1,08 \cdot 10^{-21}$
α Virginis	260	0,12	0,11	11,43	7,21	$6,18 \cdot 10^{-23}$
α Scorpii	520	550	2500	12	7,20	$1,28 \cdot 10^{-24}$
β Lyrae	880	0,28	0,035	13,16	2,97	$5,38 \cdot 10^{-22}$

Tabla 2. Amplitud de las ondas emitidas por estrellas binarias reales.

Año luz: $1 \text{ a.l.} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$

Unidades Astronómicas: $1 \text{ UA} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Masa solar: $1 M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Nos encontramos con unas amplitudes mucho mayores que la del caso de los dos luchadores (10^{20} ordenes por encima como máximo). De los ejemplos de β Persei y β Lyrae se deriva la importancia del periodo T y la separación d sobre el resto de parámetros. Además de tomar valores mucho más variados entre si, sus valores mínimos coinciden en estos dos sistemas con las ondas de mayor amplitud. Al estar elevados al cuadrado en (39) tienen una mayor influencia sobre el resultado final.

Existe, sin embargo, la posibilidad de que estos periodos disminuyan con el tiempo. A medida que orbitan, las estrellas van perdiendo energía a causa de la radiación que emiten (gravitatoria, electromagnética o térmica), así como de la colisión con partículas de ciertos gases. La conservación del momento angular del sistema provocará un aumento de la velocidad angular del sistema binario y, por ende, una caída en su periodo. Esto, además de favorecer el crecimiento frecuencial, aumentará la amplitud de las ondas. Supongamos el sencillo caso de una partícula de masa m y velocidad v en una órbita circular de radio $a = \frac{d}{2}$. Su momento angular L viene dado por el producto de las tres:

$$L = m v a = m \frac{2\pi}{T} a^2 = \frac{\pi m}{2} \frac{d^2}{T} .$$

Puede verse que, al estar d elevado al cuadrado, si se da una disminución en esta cantidad se producirá una aun mayor en T . En el caso de dos estrellas binarias, tratando el problema como dos órbitas circulares independientes se llega a un aumento de la amplitud de las ondas gravitatorias. Esto es más fácil de visualizar con los datos del Anexo 1, de donde puede deducirse la contribución orbital de cada cuerpo y su radio, ya que este no es igual para ambos.

Dicho esto, sería interesante estimar la amplitud de las ondas que emitirían estas mismas estrellas justo cuando su separación fuese mínima, o sea, en el momento en que colisionaran. En la Tabla 3 se muestran los nuevos datos para las separaciones (la suma de los radios de cada estrella), los periodos y las amplitudes comparadas con las actuales. Para el cálculo de los periodos se utilizó de la tercera ley de Kepler, en su aplicación a sistemas binarios. Su desarrollo es sencillo y puede encontrarse en el Anexo 1, del cual se obtiene la siguiente expresión para el periodo de las estrellas:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G(M_A + M_B)}} d^3. \quad (40)$$

Estrella	d' / UA	$T' / \text{días}$	h'	h
α Centauri	0,0097	0,30	$4,18 \cdot 10^{-20}$	$3,07 \cdot 10^{-23}$
β Persei	0,028	1,21	$1,34 \cdot 10^{-21}$	$1,08 \cdot 10^{-21}$
α Virginis	0,005	0,042	$1,08 \cdot 10^{-19}$	$6,18 \cdot 10^{-23}$
α Scorpii	3,21	671,98	$8,03 \cdot 10^{-23}$	$1,28 \cdot 10^{-24}$
β Lyrae	0,099	3,97	$6,96 \cdot 10^{-22}$	$5,38 \cdot 10^{-22}$

Tabla 3. Comparación entre amplitudes actuales y cerca del colapso del sistema.

No es de extrañar que los mayores cambios se encuentren, por lo general, en las amplitudes originalmente menores. Existe una excepción, α Scorpii, cuya amplitud solo aumenta un orden de magnitud. El problema reside en el tamaño de sus componentes, pues, al contrario que en el resto de binarios (cuyas estrellas tienen radios no más de dos decenas de veces el del Sol), la estrella principal de α Scorpii posee un radio ochocientos veces mayor. Para cuando éstas colisionen, la distancia entre sus centros será mucho mayor que en los otros cuatro casos, así como su periodo orbital.

Otro tipo de sistemas binarios son los que están formados por una pareja de agujeros negros. Lamentablemente, los únicos agujeros negros binarios de los que se tiene constancia fueron encontrados a raíz de las ondas gravitatorias que emitían, por lo que un análisis tan básico no aportaría nada nuevo. En lugar de ello, aquí tomaremos cinco casos hipotéticos de agujeros negros en el momento de su colisión. Las masas se supondrán idénticas (M) y todas ellas de $30 M_{\odot}$, que es, en orden de magnitud, el valor de las de los eventos detectados. La separación vendrá dada por la suma de sus radios de Schwarzschild:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (41)$$

Teniendo en cuenta (40) y (41), podemos reducir la fórmula (39) a la siguiente:

$$h(r) \simeq \frac{4G}{c^4} \frac{M c^2}{4r}. \quad (42)$$

Para las distancias no podemos limitarnos a regiones tan cercanas como con las estrellas binarias, así que escogeremos valores de r mucho más distantes, correspondientes a zonas conocidas del cosmos. En la Tabla 4 se recogen estos cinco ejemplos.

Localización	$r/$ a.l.	h
Sol	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,12 \cdot 10^{-7}$
α Centauri	4,37	$1,07 \cdot 10^{-12}$
Centro galáctico	$2,65 \cdot 10^4$	$1,76 \cdot 10^{-16}$
Cúmulo de Virgo	$5,38 \cdot 10^7$	$8,69 \cdot 10^{-20}$
Borde del Universo	$4,66 \cdot 10^{10}$	$1,00 \cdot 10^{-22}$

Tabla 4. Amplitud de las ondas emitidas por un agujero negro binario.

Antes de nada, conviene justificar la elección de distancias, sobre todo la primera de todas. Un par de agujeros negros de tales características ocupan a lo largo un espacio de cuatro veces su radio de Schwarzschild, es decir, $4 r_s = 353,99$ km. Esto es aproximadamente el 0,025% del diámetro del Sol, por lo que no resulta muy descabellado posicionar en su lugar nuestro sistema. En este caso, la amplitud es del orden de 10^{-7} , un valor extremadamente alto comparado con el resto de resultados de este documento, pero que sigue siendo reducido. Las oscilaciones que estas ondas provocarían sobre un kilómetro de longitud serían de un milímetro, que, aunque perfectamente visibles al ojo humano, no constituyen un efecto tan notable, sobre todo a menor escala. No si se compara, por ejemplo, con los 47 días que duraría un año si la Tierra orbitase alrededor de dicho sistema, o con las fuerzas de marea debidas a su atracción gravitatoria, casi treinta veces más significativas que las de la Luna.

En todos los casos la separación es $d = 176,89$ km, y el periodo $T = 5,24 \cdot 10^{-3}$ s, notablemente inferiores a los valores de las estrellas binarias.

Los sistemas binarios no se reducen únicamente a un par de cuerpos de características similares, sino que también pueden estar formados por objetos muy diferentes. Un caso extremo es el de las parejas entre los que existe una gran diferencia de masas. Ejemplos bien conocidos son los sistemas Tierra - Luna, Sol - Tierra, etc... en los que se puede suponer el cuerpo más masivo fijo en el espacio, y el otro rotando alrededor suyo. No

es de extrañar que esto pueda darse también entre un agujero negro supermasivo y una estrella. Sin embargo, lo que no está tan claro es el fenómeno equivalente al acercamiento entre ambos cuerpos: la caída de la estrella en el agujero negro, de lo cual solo se ha logrado un registro. Del mismo modo que con la primera detección de ondas gravitatorias se consiguió demostrar la existencia de agujeros negros binarios, se espera que posteriores eventos faciliten la observación de otros muchos acontecimientos. Éste es uno de ellos.

Para ilustrarlo nos centraremos en la conocida estrella S2, de masa $19,5 M_{\odot}$ y radio $10 R_{\odot}$, que se encuentra orbitando alrededor de la radiofuente Sagitario A* (situada en el centro de nuestra galaxia a $2,65 \cdot 10^4$ años luz de la Tierra) con un periodo de 16,05 años. Numerosos estudios sugieren que dicha fuente se trata en realidad de un agujero negro supermasivo, de masa $4 \cdot 10^6 M_{\odot}$. Sabiendo que el máximo acercamiento de S2 a Sagitario A* es de $1,83 \cdot 10^{10}$ km, podemos estimar la amplitud de las ondas que se generan en ese punto. Igualmente, a través del radio en (41) se llega la separación d en el momento del impacto, y, con ella, al periodo y la amplitud de las ondas en ese instante. En la Tabla 7 se muestran las amplitudes de las ondas actuales (en el punto de máximo acercamiento) y las generadas durante la colisión.

Situación	d / UA	$T / \text{años}$	h
Actualidad	122,33	16,05	$1,31 \cdot 10^{-22}$
Impacto	7,89	0,011	$1,16 \cdot 10^{-18}$

Tabla 5. Amplitud de las ondas emitidas por el decaimiento de la S2.

No debemos ignorar las implicaciones que surgen de la gran diferencia másica. Es muy probable que el cuerpo de mayor masa sea capaz de hacer orbitar a su alrededor más de un objeto (como sucede en cualquier sistema planetario). Para llevar a cabo el anterior estudio de forma realmente rigurosa, habría que tener en cuenta las interacciones con el resto de astros.

Con esto ponemos fin al estudio de los sistemas binarios. Los otros dos sistemas no albergan el suficiente interés como para dedicarles tantos ejemplos, por lo que únicamente se comentarán los aspectos más importantes.

4.1.2. Sistemas rotatorios

Para estos sistemas, puede emplearse la siguiente expresión para la fórmula (38):

$$h(r) \simeq \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{\epsilon 2\pi^2 MR^2}{T^2}. \quad (43)$$

Aquí, R es el radio del objeto, en caso de que pueda considerarse esférico. Esto no es muy desacertado, pues a pesar de que una esfericidad total anularía la emisión de radiación gravitatoria, siempre existe un cierto grado de asimetría. Esta deformidad viene

dada en forma de irregularidades o ‘montañas’ en la superficie, y se cuantiza por medio de la elipticidad $\epsilon = \frac{\Delta R}{R}$ (con ΔR la altura de estos montículos).

Escojamos dos de los púlsares más importantes: el púlsar de Vela y el pulsar del Cangrejo. Al no conocer sus valores de ϵ , lo que haremos será calcular la cantidad $\frac{h}{\epsilon}$. En la Tabla 6 se encuentran sus resultados, junto con todas las características tabuladas de los púlsares.

Púlsar	$r / \text{a.l.}$	M / M_{\odot}	T / ms	R / km	$\frac{h}{\epsilon}$
Vela	936,14	1,89	89	9,66	$3,25 \cdot 10^{-21}$
Cangrejo	5708,22	19	33,5	15	$9,14 \cdot 10^{-21}$

Tabla 6. Amplitud de las ondas emitidas por dos púlsares.

Más adelante veremos las conclusiones que pueden sacarse de estos resultados, y cómo guardan información sobre el aspecto de los púlsares.

4.1.3. Sistemas expansivos

En último lugar tenemos los sistemas expansivos, mayoritariamente explosiones de tipo supernova. No todas las estrellas poseen la masa necesaria para provocar estos fenómenos, que se encuentra entre $8 M_{\odot}$ y 40 o $50 M_{\odot}$. En estas condiciones, una supernova suele generar 10^{44} J de energía, de la cual solo una parte se expande de forma no esférica. Aquí se tomará $\epsilon = 0,7$, en base al único artículo que trata esta asimetría.

Un buen candidato para progenitor de supernova es justamente la estrella principal de α Virginis. En caso de que estallase, la amplitud de las ondas podría estimarse por medio de (38), dando como resultado $h \simeq 9,37 \cdot 10^{-19}$. Este resultado está cuatro ordenes por encima del que se obtendría si, en vez de estallar, la estrella terminase colisionando con su compañera binaria (datos en la Tabla 3), pero sigue siendo algo menor que los de los agujeros negros.

4.2. Frecuencia

Pasemos a calcular la frecuencia de las ondas en cada uno de los anteriores sistemas, comenzando con los sistemas periódicos (ya sean binarios o rotatorios). En el primer caso se tienen dos cuerpos de masas M_k ($k = A, B$) respectivamente, en cuyo centro de masas situaremos el origen de coordenadas. Sean r_k las distancias entre este punto y cada uno de los cuerpos, y $\vec{\omega}$ la velocidad angular con la que orbitan. Sus coordenadas pueden escribirse en términos de estos parámetros:

$$x_k = r_k \cos(\omega t + \theta_k), \quad y_k = r_k \text{sen}(\omega t + \theta_k), \quad z_k = 0.$$

Aquí, θ_k representa la fase inicial de cada cuerpo. La única condición es que se encuentren diferenciadas 180° , por lo que aquí elegiremos $\theta_A = 0$ para el primer cuerpo, y $\theta_B = \pi$ para el segundo. Al no existir una aproximación como la de la amplitud, será necesario trabajar con la fórmula del cuadrupolo completa, (35). Las componentes del momento cuadrupolar del sistema vienen dadas por (36), y su matriz resulta ser:

$$Q_{ij} = (M_A r_A^2 + M_B r_B^2) \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} & \cos(\omega t) \sin(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) \sin(\omega t) & \sin^2(\omega t) - \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Éste es el mismo resultado que se habría obtenido en caso de no considerar los objetos puntuales, sino dos esferas finitas. Normalmente se suele introducir la masa reducida para simplificar las expresiones, pero resulta más intuitivo mantener esta forma. Calculemos ahora la derivada temporal segunda del tensor Q_{ij} :

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{ij} &= 2\omega^2 (M_A r_A^2 + M_B r_B^2) \begin{pmatrix} -\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) & 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) & 0 \\ 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) & \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\omega^2 (M_A r_A^2 + M_B r_B^2) \begin{pmatrix} -\cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tras la simplificación de la última igualdad (por medio de las propiedades trigonométricas del ángulo doble), se llega a la parte espacial de la amplitud de las ondas, (35):

$$h_{ij} = \frac{4G\omega^2}{c^2} \frac{1}{r} (M_A r_A^2 + M_B r_B^2) \begin{pmatrix} -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente se trata de una solución de la ecuación de ondas, (22), en donde la frecuencia angular resulta ser 2ω , o lo que es lo mismo, $f = 2 f_{orbital}$. Se tiene, por tanto, que la frecuencia de las ondas generadas por un sistema binario es el doble de la frecuencia con la que se encuentra orbitando. La explicación de esto reside en la simetría implícita en la fórmula (36), con lo que el momento cuadrupolar del sistema es idéntico cada media vuelta.

Con ello, daremos la máxima frecuencia de las ondas producidas por los sistemas binarios de las Tablas 2 y 3 (hoy en día y cuando colisionen), así como la frecuencia de los agujeros negros en la Tabla 4 y las del decaimiento de la S2 en la Tabla 5.

Caso	f / Hz
β Persei actualmente	$7,73 \cdot 10^{-6}$
α Virginis al impactar	$5,51 \cdot 10^{-4}$
Agujeros negros	381,68
Decaimiento S2 actualmente	$3,95 \cdot 10^{-9}$
Decaimiento S2 al impactar	$5,76 \cdot 10^{-6}$

Tabla 7. Frecuencias de las ondas gravitatorias emitidas por los sistemas binarios.

En el caso de un sistema rotatorio se obtendría un resultado similar: supongamos un púlsar de masa M con n montículos sobre su superficie, situados a una distancia r_k ($k = 1, \dots, n$), del eje alrededor del cual rota con velocidad angular ω . La masa de cada montículo es $\epsilon_k M_k$, con $\sum \epsilon_k = \epsilon$ la elipticidad en su apariencia, y sus coordenadas pueden escribirse del mismo modo que en el caso anterior (salvo $z_k = C$, constante, lo cual no afecta en los cálculos). Entonces, la amplitud (35) adopta una forma similar a la anterior, extendiendo la suma entre paréntesis a las n ‘montañas’ del púlsar:

$$h_{ij} = \frac{4GM\omega^2}{c^2} \frac{1}{r} \sum_k^n \epsilon_k r_k^2 \begin{pmatrix} -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto conduce a la misma frecuencia que en caso de un sistema binario, del doble de la rotación del púlsar. En los casos de la Tabla 6, se tiene una frecuencia de 22,47 Hz para el púlsar de Vela, y 59,70 Hz para el del Cangrejo.

El caso de los sistemas expansivos es completamente diferente. Al no existir un modo sencillo de describir la forma de la explosión, resulta prácticamente imposible cuantizar su momento cuadrupolar, y menos de forma general. En vez de ello, habrá de hacerse una estimación de la frecuencia de las ondas a través del tiempo que dura la explosión. Éste se denomina *tiempo de caída libre*, \mathcal{T} , y se corresponde con el tiempo que tarda un cuerpo dado en colapsar debido a su propio campo gravitatorio. Para una explosión de supernova, puede calcularse fácilmente mediante la siguiente fórmula, donde ρ es la densidad del sistema:

$$\mathcal{T} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}. \quad (44)$$

La deducción de esta fórmula puede hallarse en el Anexo 2. Durante una supernova, la densidad de materia eyectada suele encontrarse entre 10^{14} y 10^{17} $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Sabiendo que la frecuencia máxima de las ondas emitidas puede escribirse como la inversa de este tiempo, $f = \mathcal{T}^{-1} \simeq \sqrt{G\rho}$, encontramos resultados desde los 80 Hz hasta los 2,5 kHz. Este método es el más general de todos y no solo se aplica a este tipo de sistemas, sino que también es válido para los sistemas periódicos, aunque menos exacto que el método utilizado.

4.3. Instrumentos de detección

Actualmente se dispone de un único tipo de instrumentos para la detección de ondas gravitatorias: Virgo, GEO600, y el más importante de todos y al que aquí referenciaremos, LIGO, son unos interferómetros parecidos al archiconocido modelo de Michelson-Morley, pero provistos de un complejo sistema de láseres y espejos que favorecen la observación del efecto de las ondas. Haciendo reflejar los pulsos láser en cavidades tipo Fabry-Perot, se consigue que los brazos de LIGO (de unos 4 km de largo) alcancen una longitud efectiva de 1120 km.

La sensibilidad de LIGO es de $h \gtrsim 10^{-23}$ para la amplitud. Este valor varía en función de la frecuencia, cuyo rango sensible se extiende desde los 10 Hz hasta los 10 kHz y depende del tamaño del detector (la longitud de onda $\lambda = c \cdot f^{-1}$ ha de ser comparable a la de los brazos). En la Figura 2 puede verse la curva de sensibilidad y los tres tipos básicos de ruido que la determinan.

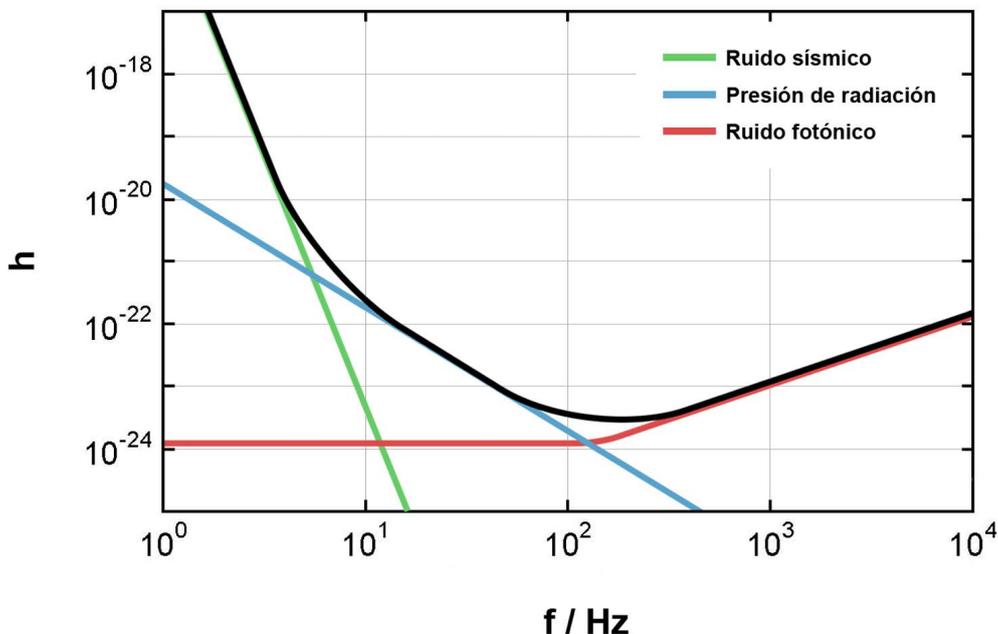


Figura 2. Sensibilidad de LIGO.

Por otro lado, existen numerosos proyectos de detección muy prometedores. Uno de ellos es el interferómetro LISA, que será enviado al espacio para realizar las observaciones.

Con un tamaño efectivo de más de un millón de kilómetros, se espera que pueda captar ondas gravitatorias de frecuencias comprendidas entre los 0,1 mHz y 1 Hz, centrándose así en los sistemas más grandes y lentos. Además permitirá eliminar el ruido procedente de la superficie terrestre (aunque seguirá siendo sensible a otros tipos de ruido).

Conociendo los límites de estos dos interferómetros, podemos establecer cuales de ondas gravitatorias creadas por los anteriores sistemas cumplen las condiciones necesarias para ser detectadas.

- Estrellas binarias: Solo dos de las estrellas de la Tabla 2 emiten ondas de amplitud detectable por LIGO: β Persei y β Lyrae. Sin embargo, ninguno de estos sistemas rota lo suficientemente rápido como para alcanzar la frecuencia a la que ambos interferómetros son sensibles.

En el momento de cada colisión (datos en la Tabla 3), cuatro de los cinco sistemas producirían ondas con la suficiente amplitud (quedando excluido α Scorpii debido a su enorme tamaño). En cuanto a su frecuencia, solo las de α Virginis entrarían dentro del rango en el que trabaja LISA.

Como ya se dijo, solo uno de los eventos registrados pertenece al caso de dos estrellas binarias. Se trataba de un par de estrellas de neutrones situadas a $1,30 \cdot 10^8$ años luz en el momento de su impacto. Este tipo de estrellas se caracterizan por tener masas similares a la del Sol, pero un radio de 10 km aproximadamente, lo que origina periodos de unos $3,5 \cdot 10^{-4}$ s a separaciones cortas. La amplitud detectada en dicho evento fue de $h \sim 10^{-22}$.

- Agujeros negros binarios: En teoría todos los casos de la Tabla 4 podrían ser detectados mediante LIGO, tanto por las amplitudes de las ondas como por su frecuencia. El sistema localizado en el borde del Universo observable se encuentra al límite entre un orden y otro, por lo que pequeños cambios en la masa podrían ser cruciales. Sabiendo que durante la colisión de dos agujeros negros es la masa la que determina su periodo, sería interesante averiguar cuál es el máximo valor que podría poseer dentro del rango de frecuencias de cada interferómetro. Haciendo $d = 2r_s$ en (40) e introduciendo (41), se despeja la masa M en función de la frecuencia de las ondas:

$$M = \frac{\sqrt{2} c^3}{8 \pi G f}.$$

Tomando el ínfimo de cada intervalo, se llega a $M_{max} = 1144,5 M_{\odot}$ para LIGO, y $M_{max} = 1,14 \cdot 10^8 M_{\odot}$ para LISA.

- Decaimiento de la S2: A pesar de que en los dos casos de la Tabla 5 la amplitud de las ondas supera el límite, en ninguno la frecuencia es lo suficientemente alta como para permitir su detección. Normalmente los sistemas binarios extremos suelen producir ondas más potentes, siendo su amplitud mayor que la de los binarios convencionales.
- Púlsares: En este caso no tenemos ningún resultado para la amplitud, sino para el cociente entre ésta y la elipticidad, $\frac{h}{\epsilon}$, presentes en la Tabla 6. A pesar de que las frecuencias de las ondas que estos púlsares emiten cumplen con las condiciones de LIGO, ningún experimento hasta la fecha ha logrado identificarlas. Esto nos

permite escoger un valor máximo para la elipticidad, conocido como límite superior: $\epsilon_{max} \sim 10^{-2}$ para los dos púlsares, con lo que imposibilitaríamos la medición de h .

Estudios más avanzados han conseguido reducir aun más estos valores: $\epsilon_{max} \sim 10^{-5}$ para el púlsar de Vela, y $\epsilon_{max} \sim 10^{-4}$ para el del Cangrejo. Sabiendo que $\epsilon = \frac{\Delta R}{R}$, se llega a la conclusión de que no existen ‘montañas’ de más de 0,1 m en el púlsar de Vela, ni de más de 1 m en el del Cangrejo.

- Supernova: A pesar del amplio intervalo de frecuencias en las que una supernova corriente es capaz de emitir, todos sus valores entran dentro del rango de LIGO, pero no de LISA. La amplitud también cumple las condiciones de detección.

Evidentemente, una mayor sensibilidad en la amplitud se traduce en un mayor alcance en las observaciones. Sin embargo, no todo se reduce a eso. En la Figura 3 viene representada la forma de la amplitud, de la cual pueden extraerse importantes conclusiones. Por ejemplo, supongamos un evento que ocurre en un mismo entorno de diferentes puntos, a unas distancias r_1 y r_2 respectivamente. No solo se obtendrán mayores amplitudes en r_1 , el punto más cercano, sino que además se registrarán valores mucho más diferenciados que los correspondientes a r_2 . Es decir, cuanto más cerca ocurra un evento, mayor será el rango Δh de la amplitud de las ondas. Esto resulta verdaderamente útil al tratar de recolectar información sobre un determinado sistema, ya que podrá obtenerse un mayor número de datos, o hacerlo durante más tiempo. Basta con pensar en un sistema binario o una supernova para hacerse una idea de las implicaciones de esto, en cuanto a su evolución y comportamiento se refiere.

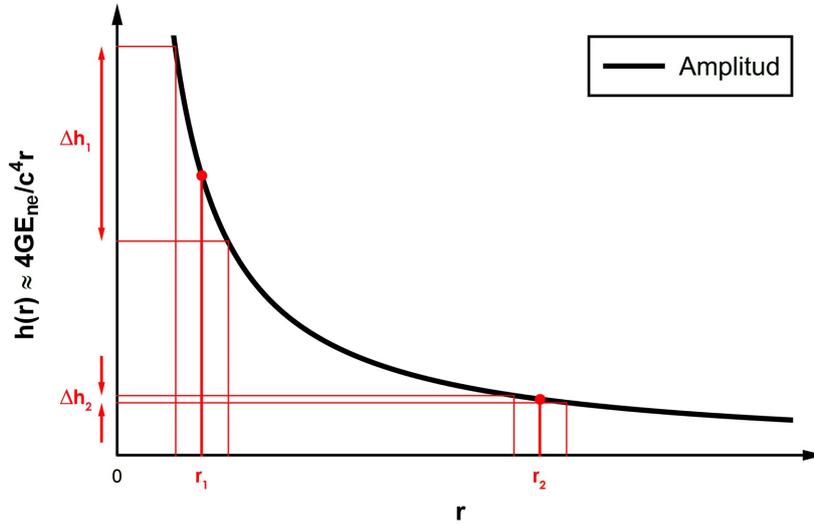


Figura 3. Rangos en la amplitud.

Uno podría pensar que, pudiendo obtener más datos a distancias cortas, no tendría sentido alejarse en exceso. Pues bien, existen dos problemas. El primero es la probabilidad de encontrar algún caso interesante. El Universo es inmenso, y, como ya se dijo, cuanto más se aleje el Δr , mayor es el espacio en el que poder dar con alguno de los sistemas ya descritos. Además, aunque se descubriese alguno en las proximidades, éste debería ser capaz de crear ondas más potentes que si se encontrara más alejado. Véase como Δh_1 , pese a ser más amplio, abarca un intervalo de puntos mayores que Δh_2 .

4.4. Curvatura

Hasta ahora se habían estado estudiando las ondas gravitatorias por medio de dos propiedades totalmente independientes: amplitud y frecuencia. Si, por el contrario, lo que se quiere es obtener una visión unificada del efecto que éstas tienen, así como establecer una comparación con otro tipo de fenómenos gravitatorios, se ha de recurrir a la curvatura.

Ya se encontró en (30) la expresión matricial para la métrica de una onda gravitatoria con polarización + que se propaga en la dirección del eje z , ahora llamada $g_{\mu\nu}$. El siguiente paso es calcular el resto de objetos relativistas: Los símbolos de la conexión, el tensor de Riemann y las curvaturas seccionales. Para ello se hizo uso de un software de cálculo simbólico, *Mathematica*, pues los cálculos a realizar son muchos y muy tediosos. Pueden verse todos estos resultados en el Anexo 3.

Aquí trabajaremos principalmente con el último conjunto de objetos: las curvaturas seccionales. La razón es la simplicidad que nos proporciona frente al resto de ellos, dado el pequeño número de elementos y la reducción a dos coordenadas diferentes en cada caso. Más que las consecuencias mecánicas de su efecto, representan cuán diferente del espacio de Minkowski es el espacio-tiempo en presencia de una onda, según las dos direcciones de cada una.

Además de la interpretación geométrica, se puede efectuar un análisis físico por medio de la ecuación (32), expresándola en términos de las curvaturas seccionales en vez de las componentes del tensor de curvatura de Riemann. Esto es posible gracias a la diagonalidad en la métrica ($g^{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu$), a la anulación de los elementos del tensor de Riemann con dos índices temporales y los otros dos desiguales ($R^i_{0j0} = 0, i \neq j$), y a $g_{00} = 1$:

$$\frac{d^2 \delta x^i}{dt^2} \simeq -R^i_{0j0} \delta x^j = -g^{ii} R_{i0i0} \delta x^i = -g^{ii} K_{(0i)} (g_{00} g_{ii} - g_{0i} g_{i0}) \delta x^i = -K_{(0i)} \delta x^i.$$

Si en lugar del tiempo propio se hubiese elegido la distancia propia, ℓ , como parámetro de δx^i , se llegaría a una expresión similar para las curvaturas seccionales espaciales, siendo la dirección z común en ambas. Se tienen, por tanto, dos ecuaciones para la desviación geodésica diferentes, según el parámetro que se escoja:

$$\frac{d^2 \delta x^i(t)}{dt^2} \simeq -K_{(0i)} \delta x^i(t), \quad \frac{d^2 \delta x^i(\ell)}{d\ell^2} \simeq -K_{(iz)} \delta x^i(\ell). \quad (45)$$

Por un lado, los elementos $K_{(0i)}$ indican cómo cambia con el tiempo la separación entre dos partículas puntuales situadas en un plano perpendicular a la dirección de las ondas. Obviamente han de tener unidades de s^{-2} , ajustándose a los datos del Anexo 3. Las dos restantes, $K_{(iz)}$, dan cuenta del cambio según la distancia recorrida por la onda en la dirección z , y sus unidades son de m^{-2} . Como éstas no coinciden con las del resultado que tenemos, $K_{(iz)}$, es necesario expresarlos en las unidades adecuadas. Una forma razonable de hacerlo es multiplicándolos por la cantidad $-\frac{1}{c^2}$, pues así es como se igualan unidades entre el tiempo t y las coordenadas espaciales.

También se requiere hacer otro ajuste en los resultados del Anexo 3: estamos trabajando con una teoría linealizada, por lo que debemos prescindir de los términos de orden mayor que 1 en h que han aparecido durante los cálculos:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(0x)} &= \frac{1}{4} \omega^2 \left(1 + \frac{-1 + h^2}{[1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]^2} \right) = \frac{\omega^2}{4} \frac{[1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]^2 - 1 + h^2}{[1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]^2} \\ &= \frac{\omega^2}{4} \frac{h^2 \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c})) + 2h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})) + h^2}{1 + h^2 \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c})) + 2h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))} \simeq \frac{\omega^2}{4} 2h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})). \end{aligned}$$

Además de eliminar los términos en h^2 , se suprimió el sumando en h del denominador, pues su valor es despreciable frente a 1. Haciendo esto mismo con las otras tres curvaturas seccionales se llega a los siguientes resultados, ya expresados en las unidades adecuadas:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(0x)} &= \frac{\omega^2}{2} h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})), & \mathbb{K}_{(xz)} &= \frac{\omega^2}{2c^2} h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})), \\ \mathbb{K}_{(0y)} &= -\frac{\omega^2}{2} h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})), & \mathbb{K}_{(yz)} &= -\frac{\omega^2}{2c^2} h \cos(\omega(t - \frac{z}{c})). \end{aligned}$$

Nótese la relación entre curvaturas seccionales según direcciones completamente ortogonales: $-\frac{1}{c^2} \mathbb{K}_{(0x)} = \mathbb{K}_{(yz)}$, $-\frac{1}{c^2} \mathbb{K}_{(0y)} = \mathbb{K}_{(xz)}$. Asimismo, $\mathbb{K}_{(0x)} = -\mathbb{K}_{(0y)}$, $\mathbb{K}_{(xz)} = -\mathbb{K}_{(yz)}$, lo que significa que basta con hallar una de las cuatro para tenerlas todas.

Veamos el valor que adquieren las curvaturas seccionales de una onda gravitatoria típica en la Tierra. Supongamos una onda de frecuencia $f \simeq 200$ Hz que nos llega en dirección z con una amplitud $h \sim 10^{-21}$ (datos muy parecidos a los eventos registrados). Aunque estas curvaturas oscilan con el tiempo, su valor máximo (su amplitud) permanece constante, sea cual sea la distancia a la fuente.

$$\max \mathbb{K} = \frac{\omega^2}{2} h \sim 10^{-17} \text{ s}^{-2}, \quad \max \mathbb{K} = \frac{\omega^2}{2c^2} h \sim 10^{-34} \text{ m}^{-2}.$$

Estos valores puede compararse con la curvatura en la superficie de la Tierra debida a su propia atracción gravitatoria. Aunque es cierto que no se trata del mismo efecto que el de las ondas, resulta práctico para concebir una idea de su importancia. La teoría de Einstein impone seis curvaturas seccionales en dicho punto:

$$\tilde{\mathbb{K}}_{(0x)} = \tilde{\mathbb{K}}_{(0y)} = -\frac{1}{2} \tilde{\mathbb{K}}_{(0z)} = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3} \sim 10^{-6} \text{ s}^{-2}, \quad \tilde{\mathbb{K}}_{(xy)} = \tilde{\mathbb{K}}_{(xz)} = -\frac{1}{2} \tilde{\mathbb{K}}_{(yz)} = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3} \sim 10^{-23} \text{ m}^{-2}.$$

De primeras, lo más llamativo es la presencia de tres objetos de cada tipo frente a los dos que forman cada pareja en el caso de las ondas. Los términos adicionales en la dirección z sirven como evidencia de la componente radial de la atracción gravitatoria de la Tierra en contra del efecto de las ondas gravitatorias, únicamente sobre el plano perpendicular a su dirección de propagación.

Cabe destacar cómo se comportan las curvaturas seccionales de la Tierra, constantes con el tiempo pero diferentes en cualquier otro punto exterior a su superficie.

Puede demostrarse que las curvaturas seccionales de la Tierra cumplen también las ecuaciones en (45), por lo que podemos comparar los elementos temporales directamente con el valor de la gravedad, según la 2ª ley de Newton. Poniendo, por ejemplo, una separación igual a la longitud de LIGO, ($\delta x = 4$ km, considerablemente amplia), encontramos su aceleración inicial simplemente multiplicandola por las curvaturas seccionales. Tomaremos los valores máximos para las curvaturas de la onda:

$$\max K \delta x \sim 10^{-14} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, \quad \tilde{K} \delta x \sim 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, \quad g \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Aunque la aceleración debida la desviación geodésica que provoca la curvatura de la Tierra está cuatro ordenes por debajo de la gravedad, es posible medirla experimentalmente. En cambio, para las ondas gravitatorias esta aceleración está quince ordenes por debajo de la misma, quedando completamente eclipsada por la de la curvatura terrestre.

En el caso de las curvaturas seccionales de tipo espacio, no disponemos de ningún dato con el que poder contrastarlas según la fórmula en (45). En vez de ello, podemos calcular sus radios de curvatura asociados, R , y hacerlo con el de la propia Tierra. De este modo se tiene una forma menos abstracta de visualizar la deformación espacial en cada caso.

$$R = \frac{1}{\sqrt{\tilde{K}}}. \quad (46)$$

Los tres valores a comparar son los siguientes:

$$\min R \sim 10^{17} \text{ m}, \quad \tilde{R} \sim 10^{12} \text{ m}, \quad R_{\oplus} = 10^6 \text{ m}.$$

Si ya a nivel local la superficie de la Tierra parece completamente plana, resulta evidente que la curvatura espacial debida cualquiera de los dos fenómenos nos sea imperceptible. Para la gravedad se tiene un radio de curvatura seis ordenes por encima del terrestre, impidiendo su medición experimental en cualquier caso. Es por ello que, siguiendo con las ondas gravitatorias, su curvatura espacial (con un radio once ordenes menor que el de la Tierra como mínimo) puede considerarse prácticamente inaccesible a la observación directa.

5. Conclusiones

De todos estos resultados pueden extraerse no solo conclusiones meramente teóricas, sino también consecuencias prácticas con las que seguir trabajando. Por un lado, podemos atender a los sistemas según las propiedades físicas de sus ondas, lo que nos permitirá contrastar las diferencias entre unos y otros, incluso dentro de un mismo tipo. Primero se tienen los sistemas binarios, que, aunque conforman el grupo más variado, arrojan, en las condiciones más óptimas (por ejemplo, la colisión de dos agujeros negros) los valores más altos de la amplitud según la distancia. A continuación, los púlsares, de los cuales se han analizado dos de los más importantes. Realmente, existen una gran cantidad de púlsares en el universo, pero no todos giran con periodos tan reducidos como los de estos dos. Aun así, incluso las ondas gravitatorias de los que aquí se han visto poseen unos valores por debajo de los del resto de sistemas. En tercer lugar se encuentran las explosiones de supernova, cuyas ondas nos llegan con amplitudes más estables a distancias fijas, entre las de los sistemas binarios más potentes y las de los púlsares. Sus frecuencias, sin embargo, llegan a sobrepasar las de estos primeros.

Por otra parte, ya en términos de la detección, la clasificación de los sistemas queda fraccionada. Solo las ondas emitidas por las supernovas y algunos sistemas binarios cumplen los requisitos para llegar a ser detectadas por los instrumentos actuales. De todos modos, no solo es posible extraer información provechosa de las observaciones, sino también de los sistemas que no proporcionan ningún valor experimental. En el caso de los púlsares, esto se traduce en una muestra su aspecto físico, algo de lo que no podríamos hablar si se hubiesen detectado las ondas que emiten. Además, es de estos casos de donde se derivan los aspectos a mejorar en los sistemas de detección. Varios de los sistemas estudiados (concretamente, binarios actuales y algunos predichos) emiten ondas cuya amplitud en la Tierra es lo suficientemente elevada, pero su baja frecuencia impide su detección. Precisamente para solventar este problema nació el ya comentado proyecto LISA.

A mayores, se tiene la curvatura de las ondas gravitatorias, cuyo estudio ha terminado siendo realmente efectivo como evidencia de su efecto, comparándolo además con el de la propia gravedad terrestre.

Como comentario adicional, destacar el buen funcionamiento de la aproximación cuadrupolar en (37), que para predicciones como las anteriores resulta más que adecuada. Sin embargo, sería interesante considerar la situación opuesta, en la que los datos de la amplitud y frecuencia se obtienen mediante los experimentos y son el resto de propiedades las que se derivan de estas cantidades. De la frecuencia podrían obtenerse resultados directos, sobre todo para los sistemas binarios y los púlsares. La amplitud, en cambio, requeriría un tratamiento diferente al que se ha seguido aquí, siendo necesario trabajar con la fórmula del cuadrupolo no aproximada. Además, la dependencia temporal de estas dos magnitudes (que es lo que favorece la distinción de los sistemas en la práctica) provocaría la necesidad de recurrir a otros factores, como la energía, el corrimiento al rojo, e incluso a teorías complementarias.

A lo largo de todo el trabajo se ha tratado de escoger sistemas con cierto grado de relevancia y de fácil relación. No obstante, para ser realmente rigurosos en este tema habría que tener en cuenta aspectos como la probabilidad de aparición o las localizaciones más frecuentes, que requieren de un estudio estadístico, algo que escapa a la finalidad marcada.

Referencias

- *Moments of inertia for neutron and strange stars: Limits derived for the Crab pulsar*, M. Bejger, P. Haensel, Astronomy and Astrophysics, (2002).
- *The surprising Crab pulsar and its nebula: A review*, R. Bühler, R. Blandford, (2013).
- *Spica is a whirling double star*, D. Byrd, L. Sessions, recuperado de <https://earthsky.org> (2017).
- *Asymmetric supernovae: Not all stellar explosions expand spherically*, Calar Alto Observatory-CAHA, (2011).
- *The Vela Pulsar: Results from the First Year of Fermi LAT Observations*, G. A. Caliendo, A. K. Harding, T. J. Johnson, M. Kerr, Ö. Çelik, (2010).
- *A Brief History of Gravitational Waves*, J. L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, G. F. Smoot, MDPI, (2016).
- *Beta Lyra*, G. Fox, recuperado de <http://www.sal.wisc.edu>, (1998).
- *Lecture X: Linearized gravity*, C. M. Hirata,(2011).
- *Algol*, J. Kaler, recuperado de <http://stars.astro.illinois.edu>, (1998).
- *Antares*, J. Kaler, recuperado de <http://stars.astro.illinois.edu>, (1998).
- *Gravitational Wave Physics*, K. D. Kokkotas, Encyclopedia of Physical Science and Technology, 3rd Edition, Volume 7 Academic Press, (2002).
- *Gravitational Waves*, C. Lämmerzahl, V. Perlick, (2014).
- *Teoría Clásica de Campos*, L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Editorial Reverté, (1981).
- *The Prediction of Gravitational Waves in 1893*, T. D. Mees, The General Science Journal, (2014).
- *Gravitation*, C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company, (1971).
- *Pulsars ellipticity revised*, C. Palomba, Astronomy and Astrophysics, (2000).
- *The mass of the neutron star in Vela X-1 and tidally induced non-radial oscillations in GP Vel*, H. Quaintrell, A. J. Norton, T. D. C. Ash, P. Roche, B. Willems, T. R. Bedding, I. K. Baldry, R. P. Fender, Astronomy and Astrophysics, (2003).
- *The Secret History of Gravitational Waves*, T. Rothman, American Scientist Volume 106, (2018).
- *Hands-on Gravitational Wave Astronomy: Extracting astrophysical information from simulated signals*, L. J. Rubbo, S. L. Larson, M. B. Larson, D. R. Ingram, American Journal of Physics, (2007).
- *Cálculo Diferencial Absoluto*, M. Santander, (2005).

- *Ripples in Spacetime: Einstein, Gravitational Waves, and the Future of Astronomy*, G. Schilling, Harvard University Press, (2017).
- *Alpha Centauri AB System Orbits*, Sol Company, recuperado de <http://www.solstation.com> (2010).
- *Gravitational Waves*, K. S. Thorne, editado por E. W. Kolb y R. D. Peccei, (1995).
- *The Distance To The Crab Nebula And NP 0532*, V. Trimble, (1973).
- LIGO, <https://www.ligo.org/>.
- VIRGO, <http://www.virgo-gw.eu/>.
- LISA, <https://lisa.nasa.gov/>.

Anexo 1: Cálculos en sistemas binarios

Amplitud

Supongamos un sistema binario en el que los cuerpos tienen masas M_A y M_B y orbitan alrededor de su centro de masas (donde situaremos el origen de coordenadas) con una velocidad angular $\vec{\omega}$. Sean \vec{r}_A y \vec{r}_B las posiciones de cada estrella respectivamente, y \vec{v}_A y \vec{v}_B las velocidades con las que se mueven. Llamemos \hat{u}_\perp al vector unitario en la dirección perpendicular al plano de movimiento.

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \frac{2\pi}{T} \hat{u}_\perp \times \vec{r}_i \Rightarrow v_i^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}; \quad i = A, B$$

De la condición de centro de masas se tiene la siguiente relación:

$$M_A \vec{r}_A = M_B \vec{r}_B \Rightarrow \vec{r}_A = \frac{M_B}{M_A} \vec{r}_B,$$

$$d = \vec{r}_A + \vec{r}_B = \frac{M_B}{M_A} \vec{r}_B + \vec{r}_B = \left(\frac{M_B + M_A}{M_A} \right) \vec{r}_B \Rightarrow \vec{r}_B = \left(\frac{M_A}{M_A + M_B} \right) d, \quad \vec{r}_A = \left(\frac{M_B}{M_A + M_B} \right) d.$$

Por último, operemos en la fórmula (38) para llegar a la expresión deseada:

$$\begin{aligned} h &\simeq \frac{4G}{c^4} \frac{1}{2r} (M_A v_A^2 + M_B v_B^2) = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{2r} \frac{4\pi^2}{T^2} (M_A r_A^2 + M_B r_B^2) = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{2\pi^2}{T^2} \left[M_A \left(\frac{M_B}{M_A + M_B} \right)^2 d^2 \right. \\ &\quad \left. + M_B \left(\frac{M_A}{M_A + M_B} \right)^2 d^2 \right] = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{2\pi^2 d^2}{T^2} \left[\frac{M_A M_B^2 + M_A^2 M_B}{(M_A + M_B)^2} \right] = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{2\pi^2 d^2}{T^2} \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}. \end{aligned}$$

Tercera ley de Kepler

Partiendo de las expresiones de r_A y r_B , apliquemos la tercera ley de Newton a cualquiera de las dos estrellas. En este caso, elegimos la estrella B y llamaremos \hat{u} al vector unitario dirigido desde el centro de masas hasta la posición de dicha estrella. Al tratarse de un sistema rotatorio, han de incluirse los términos no inerciales (fuerza centrífuga). Sea \vec{a}_B la aceleración de la estrella B, que en el sistema que rota es cero.

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_{B,i} - M_B \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r_B \hat{u}) &= M_B \vec{a}_B \Rightarrow -\frac{G M_A M_B}{d^2} \hat{u} - M_B \omega^2 r_B \hat{u} = 0 \\ \Rightarrow \frac{G M_A M_B}{d^2} &= M_B r_B \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \left(\frac{M_A M_B}{M_A + M_B} \right) \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 d \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G (M_A + M_B)}} d^3. \end{aligned}$$

Anexo 2: Tiempo de caída libre

Supongamos un sólido esférico de masa M . Su tiempo de caída libre característico, \mathcal{T} , es el que tardaría un cuerpo cualquiera, de masa m , en caer desde la superficie hasta el centro del sólido debido a la atracción gravitatoria.

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{m M}{r^2}.$$

Para poder resolver esta ecuación, es necesario hacer un cambio en la derivada y escribirla en términos de la velocidad usando la regla de la cadena.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} v.$$

Con ello, integramos desde la superficie hasta un punto cualquiera del sólido y despejamos la velocidad, que ha de ser negativa por la naturaleza atractiva de la fuerza:

$$\frac{dv}{dr} v = -G \frac{M}{r^2} \Rightarrow \int_0^v v dv = -G M \int_R^r \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = G M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \Rightarrow v = -\sqrt{2 G M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}.$$

El tiempo de caída libre puede calcularse haciendo $v = \frac{dr}{dt}$ e integrando de nuevo desde la superficie hasta el centro. Para resolver la última integral en r se hizo uso del software *Mathematica*.

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2 G M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)} \Rightarrow \int_0^{\mathcal{T}} dt = -\sqrt{\frac{R}{2 G M}} \int_R^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} dr \Rightarrow \mathcal{T} = \sqrt{\frac{R}{2 G M}} \frac{\pi R}{2} = \sqrt{\frac{3 \pi}{32 G \rho}}.$$

Anexo 3: Resultados de *Mathematica*

- Expresión matricial de la métrica de una onda gravitatoria, en su forma covariante y contravariante respectivamente.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} [1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} [1 - h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c^2}{1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c^2}{1 - h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

- Símbolos de la conexión, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, ordenados según la coordenada (t, x, y, z) que tome el índice superior, μ . Los que no aparecen listados tienen un valor nulo.

$$\Gamma^t_{xx} = -\frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2c^2},$$

$$\Gamma^t_{yy} = \frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2c^2},$$

$$\Gamma^x_{xt} = -\frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2[1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]},$$

$$\Gamma^x_{zx} = \frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2c[1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]},$$

$$\Gamma^y_{yt} = -\frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2[-1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]},$$

$$\Gamma^y_{zy} = \frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2c[-1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]},$$

$$\Gamma^z_{xx} = -\frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2c},$$

$$\Gamma^z_{xx} = \frac{h\omega \operatorname{sen}(\omega(t - \frac{z}{c}))}{2c}.$$

- Componentes no nulas del tensor de Riemann en su forma natural, $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$, siguiendo de nuevo el orden según μ . Se ha introducido la variable $\varsigma = \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))$ por comodidad en la escritura. Los elementos redundantes debidos al intercambio de índices no se muestran en la lista.

$$R^t_{xtx} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(1 + h\varsigma)}, \quad R^t_{xxz} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^3(1 + h\varsigma)}, \quad R^t_{yty} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(-1 + h\varsigma)}, \quad R^t_{yyz} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^3(-1 + h\varsigma)},$$

$$R^x_{ttx} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4(1 + h\varsigma)^2}, \quad R^x_{txz} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c(1 + h\varsigma)^2}, \quad R^x_{ztx} = \frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c(1 + h\varsigma)^2}, \quad R^x_{zzz} = \frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(1 + h\varsigma)^2},$$

$$R^y_{tty} = -\frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4(-1 + h\varsigma)^2}, \quad R^y_{tyz} = -\frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c(-1 + h\varsigma)^2}, \quad R^y_{zty} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c(-1 + h\varsigma)^2}, \quad R^y_{zyz} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(-1 + h\varsigma)^2},$$

$$R^z_{xtx} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c(1 + h\varsigma)}, \quad R^z_{xxz} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(1 + h\varsigma)}, \quad R^z_{yty} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c(-1 + h\varsigma)}, \quad R^z_{yyz} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(-1 + h\varsigma)}.$$

- Componentes no nulas del tensor de Riemann en su forma completamente covariante, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, de nuevo en términos de la variable ς y con la redundancia eliminada. En primer lugar, los elementos útiles para el cálculo de las curvaturas seccionales (a la izquierda los temporales y a la derecha los espaciales), y a continuación los restantes, de tres índices diferentes.

$$R_{tctx} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(1 + h\varsigma)}, \quad R_{xxz} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^4(1 + h\varsigma)},$$

$$R_{tyty} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^2(-1 + h\varsigma)}, \quad R_{yyyz} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^4(-1 + h\varsigma)},$$

$$R_{txxz} = R_{xxzt} = -\frac{h\omega^2 [2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^3(1 + h\varsigma)}, \quad R_{tyyz} = R_{yyzt} = \frac{h\omega^2 [-2\varsigma + h(1 + \varsigma^2)]}{4c^3(-1 + h\varsigma)}.$$

- Componentes no nulas del tensor métrico de los bivectores, $g_{\mu\nu\alpha\beta}$, en su forma completamente covariante.

$$g_{txtx} = -\frac{1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))}{c^2},$$

$$g_{xyxy} = \frac{1 - h^2 \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c}))}{c^4},$$

$$g_{tyty} = -\frac{1 - h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))}{c^2},$$

$$g_{xzxz} = \frac{1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))}{c^4},$$

$$g_{tztz} = -\frac{1}{c^2},$$

$$g_{yzyz} = \frac{1 - h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))}{c^4}.$$

- Curvaturas seccionales no nulas, $K_{(\alpha\beta)}$, tal cual resultan de su cálculo intacto, sin eliminar los términos de orden superior a 1 en h como consecuencia de la aproximación lineal.

$$K_{(tx)} = \frac{1}{4} \omega^2 \left(1 + \frac{-1 + h^2}{[1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]^2} \right),$$

$$K_{(xz)} = \frac{1}{4} \omega^2 \left(-1 - \frac{-1 + h^2}{[1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]^2} \right),$$

$$K_{(ty)} = \frac{1}{4} \omega^2 \left(1 + \frac{-1 + h^2}{[-1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]^2} \right),$$

$$K_{(yz)} = \frac{1}{4} \omega^2 \left(-1 - \frac{-1 + h^2}{[-1 + h \cos(\omega(t - \frac{z}{c}))]^2} \right).$$