UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

PISA y la competencia de modelización matemática en ESO

Trabajo Final del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Inés Calzada González

Tutor: José María Marbán Prieto

Valladolid, Julio de 2019

RESUMEN

El presente trabajo focaliza la atención en el importante papel que la modelización matemática tiene, por un lado, en el desarrollo de competencias que permitan a los ciudadanos una eficiente resolución de problemas del mundo real apoyándose en la Matemática y, por otro lado, en la persecución de un aprendizaje significativo. Ayudar a los estudiantes de ESO a comprender qué son los modelos matemáticos, dónde pueden encontrarse, cómo pueden generarse y cómo deben gestionarse no es tarea fácil, pero al mismo tiempo resulta altamente motivadora y útil para una educación matemática de calidad. En este trabajo, nuestro objetivo será ofrecer una propuesta didáctica basada en el desarrollo de la competencia de modelización matemática en 4º curso de ESO a partir del propio marco competencial y de evaluación establecido por PISA.

PALABRAS CLAVE: Modelización matemática, ciclo de modelización, competencias, competencia matemática, competencia modelización matemática, PISA, motivación, resolución de problemas, aprendizaje significativo.

ABSTRACT

This work focuses on the important role that mathematical modelling has, on the one hand, in the development of competencies which allow citizens to efficiently solve real world problems relying on the use of mathematics and, on the other hand, to adquire significant learnings. Helping secondary school students to understand what mathematical models are, where they can be found, how they can be generated and how they should be managed is not an easy task but it turns out to be highly motivating and useful for a quality mathematics education. The main aim of this work is offering a didactic proposal for development mathematical modelling competence in the last year of secondary school based on PISA frameworks.

KEY WORDS: Mathematical modelling, modelling cycle, competencies, mathematical competence, mathematical modelling competence, PISA, motivation, problem solving, significant learning.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo Fin de Máster gira entorno al diseño de una propuesta didáctica para la asignatura de Matemáticas académicas de 4ºESO basada en la modelización matemática como elemento motivador, que sirva como medio para la adquisición de las competencias básicas, y más en concreto, para el desarrollo de todas las competencias en las que se subdivide la competencia matemática. Para ello se utilizará el marco competencial y de evaluación que establece PISA. A continuación, se detalla la motivación que hay detrás de este trabajo, los objetivos que se persiguen y la estructura del texto.

1.1 Justificación y objetivos del trabajo

Uno de los grandes retos educativos es aquel que busca reducir la brecha entre el currículo pretendido y el que finalmente se lleva o es posible llevar a la práctica. En particular, mi propia experiencia como estudiante y como docente en prácticas me ha permitido constatar una distancia aún notable entre aquello que se dice en los textos normativos en relación con los roles que docente y estudiante deben asumir y los roles que estos finalmente asumen, roles que deben estar en todo caso en consonancia con la propia propuesta curricular del trabajo por competencias. Entre las causas que habitualmente suelen asociarse con este hecho se encuentra la resistencia al cambio por parte de alumnado y profesorado, pero también, en ocasiones, la falta de formación docente o materiales de apoyo que sirvan de guía para la innovación en el aula que propicie un cambio de enfoque en esta dirección.

A través de la investigación documental llevada a cabo para la elaboración de este trabajo se ha podido observar que la modelización matemática es un método potencialmente adecuado para propiciar este cambio y, en definitiva, favorecer el acercamiento de las matemáticas al alumno y contribuir a que se produzca un aprendizaje significativo. Por ello parece adecuado contribuir a este cambio mediante una pequeña guía que pueda servir de apoyo al docente que desee comenzar a trabajar en el aula mediante la modelización.

A su vez, se recuerda que el Trabajo Fin de Máster es un ejercicio de reflexión final en el cual el autor, como estudiante del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, debe mostrar que ha adquirido un conjunto de competencias que le capacitan para desarrollar su actuación como docente. Estas competencias se han ido trabajando en las asignaturas que forman el módulo genérico, el módulo específico y las prácticas externas (*Figura 1*).

Figura 1. Relación del TFM con el resto de las asignaturas del máster

En especial, cada una de las asignaturas han contribuido a una o varias partes del trabajo: *Prácticas Externas* e *Innovación docente* en la motivación y orientación el trabajo; *Iniciación a la Investigación* en la selección y exposición de estudios previos; *Didáctica de la matemática* y *Metodología y Evaluación* en el planteamiento de la gestión y desarrollo de la propuesta en el aula; *Diseño Curricular* en la situación de la propuesta dentro del currículo y el desarrollo de su estructura; *Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia* en la presentación cronológica de los didactas más destacados en resolución de problemas; *Complementos de Matemáticas*, *Resolución de problemas en Educación Secundaria* y *Modelos Matemáticos en Educación Secundaria* en los contenidos matemáticos involucrados en las tareas de modelización de la propuesta; *Procesos y contextos educativos* en el diseño del marco normativo; *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad* y *Sociedad, familia y educación* en el estudio de la importancia de la motivación y las metodologías activas de cooperación.

Particularmente, con este trabajo se pretende contribuir al incremento del uso de las tareas de modelización en el aula de matemáticas en la etapa de secundaria, persiguiendo los siguientes objetivos:

Objetivos generales:

- Diseñar una sencilla propuesta didáctica orientada a la incorporación de la actividad de modelización matemática en el aula de secundaria.
- Proporcionar un marco teórico, competencial y de evaluación basado en PISA para el desarrollo de propuestas didácticas similares a la presentada.

Objetivos específicos:

- Identificar las posibles relaciones entre modelización matemática y los marcos normativos actuales para la ESO.
- Presentar los marcos normativos y de evaluación de PISA como herramientas para el diseño de actividades y para la evaluación formativa.
- Identificar los factores fundamentales que se deben tener en cuenta para la implementación de procesos de modelización en Secundaria.
- Diseñar tareas y actividades matemáticas para una posible aplicación de la modelización matemática en el aula de secundaria.
- Analizar las posibilidades de contribución al desarrollo de la competencia matemática a través de las tareas de modelado matemático.

1.2 Estructura del trabajo

El presente Trabajo de Fin de Máster se compone de seis bloques que han sido organizados en apartados que a su vez se ven divididos en subapartados, de los cuales se ofrece una primera descripción a continuación:

- **Apartado 1: Introducción**

  Este primer apartado tiene carácter puramente introductorio, como su propio nombre indica, y en él se hace una justificación del trabajo basada en los propósitos del Máster, citando los objetivos que se persiguen con él, y definiendo la estructura del TFM.

- **Apartado 2: Contextualización y marcos de referencia**

  En este apartado, se sientan las bases del trabajo a partir de dos elementos que se consideran clave en la modelización, que son la resolución de problemas y la motivación. Por un lado, se expone el marco normativo, y el marco competencial y de evaluación de PISA. Por otro lado, se realiza una pequeña investigación documental para: argumentar la importancia de la motivación en el aprendizaje de las matemáticas, y mostrar un pequeño recorrido histórico de la evolución de la concepción de la resolución de problemas. Se exponen además, diversos modelos de resolución de problemas, diferenciando distintos tipos de bloqueos ante la resolución de problemas y considerando el Aprendizaje Basado en Problemas (en grupos reducidos) como la metodología más adecuada para trabajar la modelización en el aula.

- **Apartado 3: Procesos de modelización en Secundaria**

  Este tercer apartado describe los factores fundamentales involucrados en los procesos de modelización en Secundaria. Para ello se comienza definiendo lo que es un modelo matemático y la modelización matemática, después se exponen distintos ciclos de modelización, se describen las competencias de modelización y los niveles de estas. Por último, se analiza el papel del profesor en las tareas de modelización en Secundaria.

- **Apartado 4: Propuesta didáctica**

  Este apartado es el central del trabajo. En él, se confecciona una colección de actividades y un proyecto para trabajar la modelización en un curso de 4ºESO, a partir de la información que se ha recabado en los apartados 2 y 3. Esta propuesta tiene como objetivo ofrecer una guía de uso para los docentes que quieran iniciarse en la implementación de tareas de modelización en el aula. Junto con las actividades y el proyecto se justifica la contribución de la propuesta al trabajo de las competencias básicas, los objetivos generales que perseguimos con ella y la metodología que se propone para llevarla a cabo.

- **Apartado 5: Análisis crítico de la propuesta**

  En este quinto apartado se realiza un análisis crítico de la propuesta que se ha presentado en el apartado anterior, exponiendo sus ventajas e inconvenientes.

- **Apartado 6: Limitaciones de la propuesta y futuras líneas de trabajo**

  Este último apartado trata de describir las limitaciones de la propuesta y las futuras líneas de investigación que quedan abiertas.

2 CONTEXTUALIZACIÓN Y MARCOS DE REFERENCIA

El concepto de educación ha sufrido enormes cambios a lo largo de la historia. Inicialmente, se hacía referencia a él como un proceso unidireccional de instrucción de un maestro o profesor hacia un alumno, que se debía llevar a cabo durante las primeras etapas de la vida. Sin embargo, en nuestros días, se prefiere recurrir a una definición mucho más amplia, en la que se matiza que es un proceso de enseñanza-aprendizaje que se debe desarrollar a lo largo de toda la vida, y que debe perseguir la formación de personas que puedan ejercer, de forma libre y con sentido crítico, la ciudadanía. Más aún, actualmente se persigue el alcance no tanto de contenidos, sino de competencias que sirvan al alumno en su vida cotidiana. Una muestra de este cambio, en la concepción de la educación, se encuentra en la propia Comisión Europea y, más concretamente, en la guía publicada el 22 de mayo de 2018 de Recomendaciones del Consejo. En ella, destacan que las habilidades, como la resolución de problemas, el pensamiento crítico, la capacidad para cooperar, la creatividad, el pensamiento computacional y la autorregulación son más esenciales que nunca en nuestra sociedad que cambia rápidamente. Son las herramientas para hacer que lo que se ha aprendido funcione en tiempo real para generar nuevas ideas, nuevas teorías, nuevos productos y nuevos conocimientos.

Ahora, si se centra el tema en la educación matemática, dos de sus retos clave en nuestros días son, por un lado, convencer sobre la necesidad de tener en cuenta las matemáticas en todas las acciones de la vida, personales, cotidianas o profesionales, y por otro, el que hace referencia al desarrollo de competencias que permitan a los ciudadanos una eficiente resolución de problemas del mundo real apoyándose en la Matemática. Para esta actividad el trabajo orientado a la modelización matemática es imprescindible, ya que “problematizar” y “modelizar” son procesos que se implican recíprocamente. Por tanto, ligadas estrechamente a la modelización se encuentra la propia resolución de problemas y también la componente motivadora que se alcanza al conectar estos con la realidad.

Así pues, en este apartado, se da una justificación del planteamiento de la propuesta didáctica de tareas orientadas al desarrollo de la competencia de modelización matemática, a partir de las referencias que se han encontrado sobre la modelización matemática, la resolución de problemas y su componente motivadora, en la normativa educativa en vigor y en el marco competencial y de evaluación del informe PISA. Además, se presta especial atención a la importancia de la motivación en el aprendizaje de las matemáticas, la resolución de problemas como elemento nuclear del proceso de modelización, el Aprendizaje Basado en Problemas (trabajando en pequeños grupos cooperativos) como metodología a tener en cuenta para este proceso, y el papel del profesor en el proceso.

2.1 Marco normativo

Un factor importantísimo para que en el aula se puedan facilitar y desarrollar sosteniblemente nuevos estilos de trabajo es que estos estén amparados o recomendados por los organismos y la normativa vigente que regula la educación. Por tanto, el objetivo en este apartado será mostrar que la modelización, la resolución de problemas y la motivación son piezas fundamentales de la educación matemática. Para ello, se expone lo que el marco normativo señala referente a estos tres puntos que hemos destacado, y que servirá para respaldar la importancia del trabajo en modelos en el aula de matemáticas, y, por ende, el valor educativo de la propuesta.

Estas referencias normativas se encuentran en todos los niveles de organización educacional a los que está sujeta la sociedad, tanto a nivel europeo, como a nivel nacional y regional.

2.1.1 A nivel europeo

A nivel europeo, tenemos que destacar el trabajo que impulsó la Comisión Europea desde 2006 para introducir la modelización matemática y la investigación en el aula.

En ese año, la Comisión Europea encarga a un grupo de expertos liderado por M. Rocard (ex primer ministro francés) un informe acerca de las prácticas que podrían desarrollar interés en los jóvenes por la ciencia. En este informe se sugiere la introducción del enfoque de Enseñanza de las Ciencias Basada en la Indagación (ECBI).

"Por definición, la indagación es el proceso intencionado de diagnóstico de problemas, crítica de experimentos y distinción de alternativas, planificando investigaciones, estudiando conjeturas, buscando información, construyendo modelos, debatiendo con compañeros y formando argumentos coherentes" (Rocard, 2007, p.9).

Entre las consecuencias de estas recomendaciones está el desarrollo de números programas europeos de educación, investigación y proporción de recursos que podrían ayudar en el desarrollo de la modelización. A continuación, se citan algunos de ellos:

- **POLLEN**. Fue un programa europeo que estuvo en funcionamiento de 2006 a 2009 y aportaba recursos materiales, metodológicos y pedagógicos que ilustraban el enfoque de la enseñanza basada en la indagación.

- **LEMA** (Learning and Education in and through Modelling and Applications). Es un proyecto europeo desarrollado entre 2006 y 2009, y tenía como objetico principal promover un cambio en las prácticas en el aula del profesor incluyendo actividades de modelado matemático, mediante los problemas basados en situaciones. A su vez, desarrolló un programa de desarrollo profesional para docentes, junto con materiales de apoyo.

- **S-TEAM** (Science Teacher Education Advanced Methods). Es un programa que se desarrolló de 2009 a 2012 a nivel europeo para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en Europa mediante la creación de recursos y desarrollo profesional de los docentes en estas materias.

- **COMPASS**. Es un proyecto realizado de 2009-2011 para proporcionar tareas a los docentes para desarrollar enfoques interdisciplinarios que reúnan matemáticas y ciencias.

- **PRIMAS.** Es un proyecto llevado a cabo de 2010 a 2013 para promover en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas basadas en la indagación en niveles de primaria y secundaria en toda Europa.

De entre esta lista de proyectos el que mayor relevancia va a tener en la propuesta es LEMA, ya que en las tareas de modelización que se proponen parten de un determinado contexto o situación, y a partir de este se plantean una serie de preguntas relacionadas que deben ser resueltas en pequeños grupos de trabajo.

2.1.2 A nivel nacional

En cuanto a la normativa vigente que fija el marco de Educación Secundaria Obligatoria en España, y que se puede encontrar publicada en el BOE, la propuesta quedaría respaldada legalmente bajo las referencias que se pueden encontrar en la Ley Orgánica 2/2006, la Ley Orgánica 8/2013, el Real Decreto 1105/2014 y la Orden ECD/65/2015 (Tabla 1).

La **Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo**, de Educación expone, entre otros, los principios y fines que persigue la educación. Entre ellos menciona algunas de las bases que conforman los procesos de modelización y que, en concreto, se han considerado y se intentan trabajar con el desarrollo de esta propuesta, como el esfuerzo individual y la motivación del alumnado, el fomento y la promoción de la investigación, la experimentación y la innovación educativa, el pleno desarrollo de la personalidad, el desarrollo de la capacidad de los alumnos para regular su propio aprendizaje, confiar en sus aptitudes y conocimientos, así como para desarrollar la creatividad, la iniciativa personal y el espíritu emprendedor y la preparación para el ejercicio de la ciudadanía y para la participación activa en la vida económica, social y cultural, con actitud crítica y responsable y con capacidad de adaptación a las situaciones cambiantes de la sociedad de conocimiento. Además, todas estas características son las que la sociedad está demandando en sus individuos, por tanto, parece lógico que la Educación Secundaria Obligatoria, y por ende las nuevas propuestas que en esta se produzcan, se dirijan en esta misma línea de trabajo.

Por otra parte, en el preámbulo de la **Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre**, para la mejora de la calidad educativa, se hace una reflexión sobre los últimos resultados que se recogen en el Informe PISA y se incluye entre los objetivos marcados para 2020 mejorar los resultados para España en las competencias lectora, matemática y científica de dicho informe. La colección de actividades que se han diseñado para la propuesta está inspirada en los ítems liberados de ediciones anteriores del informe, por tanto, parece que además de ser un recurso muy útil para iniciar en la modelización a los alumnos de secundaria, puede servir para que estos trabajen las competencias que evalúa PISA, contribuyendo así a la mejora de los resultados en competencia matemática de dicho informe en España. Otro de los objetivos 2020 es el de reducir en un 10% la tasa de abandono educativo temprano, y conscientes de que la asignatura de Matemáticas (en ocasiones) resulta determinante en la decisión de los alumnos de abandonar los estudios, parece que proporcionando tareas que puedan resultar motivadoras y del interés de los alumnos, se puede contribuir a su disminución. La herramienta clave que aquí se propone para proporcionar esta motivación se produce mediante la contextualización de las tareas a entornos que se consideran que pueden ser del interés del alumno y resultarles familiares.

En cuanto a la organización del currículo la ley es clara, los contenidos dejan de ser el eje central del mismo y pasan a serlo las competencias. El **Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre**, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, establece la definición de competencias como las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos. Además, las diferencia en siete competencias claves o básicas que son la comunicación lingüística, la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, la competencia digital, aprender a aprender, las competencias sociales y cívicas, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, y la conciencia y expresiones culturales. Desde esta propuesta se intenta que se trabajen todas ellas (véase de manera más precisa en el Apartado 4.2).

Más en concreto, será en la **ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero**, por la que se describen las relaciones entre competencias, contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, donde se encuentra la definición de competencia matemática, refiriéndose a ella como la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos y su contexto. Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en una situación determinada a lo largo de la vida. Además, menciona que para el adecuado desarrollo de esta competencia resulta necesario abordar cuatro áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística, interrelacionadas de formas diversas bajo los contenidos que denomina cantidad, espacio y forma, el cambio y las relaciones, y la incertidumbre y los datos, que son a su vez los contenidos que define PISA, y los que se utilizan en la colección de actividades de la propuesta didáctica. Por último, destacar que mencionan que la competencia matemática junto con la científica y tecnológica deben capacitar para identificar, plantear y resolver situaciones de la vida cotidiana tanto personal como social, precisamente habilidades que se pretenden desarrollar con la implementación en el aula de la propuesta.

Tabla 1
Normativa a nivel nacional

Normativa a nivel nacional	Ley Orgánica 2/2006	Art.1- Principios de la ed.
		Art.2- Fines de la ed.
	Ley Orgánica 8/2013	Preámbulo- Objetivos 2020
	Real Decreto 1105/2014	Art.2- Competencias clave
	Orden ECD/65/2015	Anexo 1- Def. comp. mat.

2.1.3 A nivel regional

En cuanto a la normativa vigente que fija el marco de Educación Secundaria Obligatoria en Castilla y León, y que está publicada en el BOCyL, la propuesta quedaría respaldada legalmente bajo las referencias que se han encontrado en la Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo (Tabla 2), por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

Por un lado, se vuelve a expresar la necesidad de proponer actividades motivadoras al alumnado y, de hecho, se enfatiza que entre los principios pedagógicos debe estar el desarrollo de actividades que fomenten la motivación y el interés por el uso de las matemáticas. Bajo este principio se sitúa la necesidad de implantar en el aula propuestas de didáctica de la matemática, modelizadoras, como la que se presenta en este trabajo.

Por otro lado, en el Art. 60 se menciona el trabajo que se debe llevar a cabo en los Centros para conseguir que el aprendizaje por competencias se vuelva un hecho en la práctica. Para ello, los centros docentes necesitarán diseñar e implantar métodos pedagógicos y estrategias didácticas propias referidas a los elementos del currículo y en especial a las relacionadas con las competencias.

También se encuentran referencias a las características que deben seguir los principios metodológicos que deben implantarse en Educación Secundaria, entre los que se destaca que los procesos de enseñanza y aprendizaje deben proporcionar al alumno un conocimiento sólido de los contenidos, al mismo tiempo que propiciar el desarrollo de hábitos intelectuales propios del pensamiento abstracto, tales como la observación, el análisis, la interpretación, la investigación, la capacidad creativa, la comprensión y expresión y el sentido crítico, y la capacidad para resolver problemas y aplicar los conocimientos adquiridos en diversidad de contextos, dentro y fuera del aula, que garanticen la adquisición de las competencias y la efectividad de los aprendizajes.

Además, se destaca que el rol del docente es fundamental a la hora de presentar los contenidos con una estructuración clara en sus relaciones, de diseñar secuencias de aprendizaje integradas que planteen la interrelación entre distintos contenidos de una materia o de diferentes materias, de planificar tareas y actividades que estimulen el interés y el hábito de la expresión oral y la comunicación. En este trabajo, precisamente, se pone especial atención en describir el papel que debe adoptar el docente para favorecer que el protagonismo del aprendizaje recaiga sobre el propio alumno, actividad para la cual resulta potencialmente adecuado el trabajo con tareas de modelización matemática.

El Anexo I.B, será fundamental en esta justificación del trabajo a partir de la normativa en vigor, ya que lo sitúa dentro del currículo de Educación Secundaria Obligatoria. En él se encuentra una descripción de la materia de matemáticas como instrumento que se tiene la obligación de explotar para optimizar los beneficios que obtendrán los ciudadanos y, por añadidura, la sociedad con un adecuado planteamiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Dentro de esta descripción, se estructura el currículo de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria en cinco bloques. El primero de estos bloques corresponde a *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, tiene un carácter transversal y vertebrador, y está constituido por cinco grandes ejes:

- La resolución de problemas, más allá de la resolución de ejercicios de carácter rutinario y previsible.

- El planteamiento y ejecución de investigaciones matemáticas relacionadas con los cuatro restantes bloques.

- El enfoque modelizador e interpretativo que la matemática confiere a la realidad en distintos entornos.

- El conocimiento de la propia capacidad de desarrollo de una actitud positiva y responsable para enfrentarse a los retos que plantea el mundo, las ciencias y la matemática.

- La capacitación para aplicar y utilizar los diferentes medios tecnológicos, especialmente informáticos.

La propuesta, por tanto, tiene también perfecta cabida en el currículo, enmarcándola en este primer bloque de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*.

Además, en este mismo anexo, se continúa expresando la importancia de las propuestas de trabajo centradas en la realidad y próximas al alumnado para aportar elementos de motivación y justificación de la necesidad del conocimiento de las matemáticas.

Por último, también se hace mención a la resolución de problemas, calificándola de actividad formativa de primer orden y de reto que favorece el desarrollo de la competencia *sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.*

Tabla 2
Normativa a nivel regional (Castilla y León)

Normativa a nivel regional	Orden EDU/362/2015	Art.8- Princ.pedagógicos
		Art.60- Estrategias didáct.
		Anexo I.A.- Princ. metod.
		Anexo I.B- Divisiones en bloques didáct.

2.2 Marco competencial y de evaluación

Una vez expuesto el marco normativo se debe establecer el marco competencial y de evaluación. Se usará el establecido por el Informe PISA, debido a que su manera de entender la competencia matemática hace que se produzca un acercamiento entre la matemática y la realidad, utilizando como pilares la resolución de problemas y, la modelación y motivación de los mismos. Además, PISA no solo se enfoca a procesos de evaluación diagnóstica y análisis comparativos, sino que también proporciona marcos de trabajo formativos.

PISA (Programme for International Student Assessment) es un estudio que se lleva a cabo por la OCDE a nivel mundial desde 1997 y se realiza cada tres años. En él se desarrollan indicadores que miden el nivel de adquisición de conocimientos y destrezas clave que son esenciales para la plena participación en las sociedades modernas, de los alumnos de 15 años, mediante pruebas de competencias científica, lectora y matemática.

En cuanto a las matemáticas, para lograrlo se ha establecido una definición de la competencia matemática y, a partir de esta, un marco de evaluación que refleja los elementos más importantes de esta definición.

En concreto, en este trabajo se usará el Informe PISA del año 2012, ya que es el año más reciente en el que las matemáticas fueron el área principal del informe (las últimas versiones de PISA presentan pequeños cambios que no afectan significativamente a la propuesta que se presenta). En él, la competencia matemática se define como:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2013, p.9)

A partir de esta definición de competencia matemática, PISA 2012 determina una organización del área de conocimiento de las matemáticas (*Figura 2*) basada en tres elementos: procesos, contenidos y contextos.

Figura 2. Esquema organización del área de matemáticas según PISA 2012.

- Los **procesos** matemáticos son los que describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto del problema con las matemáticas y de ese modo resolverlo, y las capacidades que subyacen de estos procesos. Los procesos se dividen en tres categorías:
  - **Formulación** matemática de las situaciones.
  - **Empleo** de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.

- **Interpretación**, aplicación y valoración de los resultados matemáticos.

A su vez, estos procesos se basan en siete capacidades matemáticas fundamentales:

1. Comunicación.
2. Matematización.
3. Representación.
4. Razonamiento y argumentación.
5. Diseño de estrategias para resolver problemas.
6. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.
7. Utilización de herramientas matemáticas.

Esta clasificación de los diferentes procesos con sus correspondientes capacidades matemáticas fundamentales asociadas permitirá diseñar diversos problemas, donde se evalúe en cada caso, una o varias de las habilidades matemáticas del alumno. De tal manera, que la implementación de este marco en el aula nos serviría para poder trabajar a diferentes niveles y de una manera organizada las diferentes capacidades que consideramos importantes para llevar a cabo en la resolución de problemas, desde su planteamiento hasta su solución.

En concreto, para las pretensiones de esta propuesta, se tratará de focalizar la importancia de la resolución del problema en la parte de formulación o modelación del mismo, para la cual es necesario analizar el problema en su situación real y transformarlo en un planteamiento puramente matemático. Es por ello, que en este proceso se debe incluir:

- La identificación de los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto del mundo real e identificación de las variables significativas.
- El reconocimiento de la estructura matemática en los problemas.
- La simplificación del problema para que sea susceptible de análisis matemático.
- La identificación de las limitaciones y supuestos que están detrás de cualquier construcción de modelos y de las simplificaciones que se deducen del contexto.
- La representación matemática de una situación, utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos estándar adecuados.
- La representación de un problema de forma diferente, incluida su organización según conceptos matemáticos y formulando los supuestos adecuados.
- La comprensión y explicación de las relaciones entre el lenguaje específico del contexto de un problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para representarlo matemáticamente.
- La traducción de un problema a lenguaje matemático o a una representación.

- El reconocimiento de aspectos de un problema que corresponden con problemas conocidos o conceptos, datos o procedimientos matemáticos.
- La utilización de la tecnología para representar una relación matemática inherente a un problema contextualizado.

- Los **contenidos** matemáticos específicos serán los que se utilicen en las preguntas de la evaluación y que están relacionados con componentes familiares del currículo, como los números, el álgebra y la geometría, en formas complejas y superpuestas. Se dividen en cuatro categorías:

    - **Cambio y relaciones**. En esta categoría se usarán modelos matemáticos para describir y predecir cambios y relaciones, además de crear, interpretar y traducir las representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones.
    - **Espacio y forma.** Está constituida por la geometría, la visualización espacial, la medición y el álgebra.
    - **Cantidad.** Incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades del mundo, interpretando distintas representaciones de esas cuantificaciones y juzgando interpretaciones y argumentos basados en la cantidad.
    - **Incertidumbre y datos.** Incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las medidas, y los contenidos sobre el azar, además de la elaboración, interpretación y valoración de las situaciones donde la incertidumbre es fundamental.

  La organización de esta manera de los contenidos matemáticos no es una invención de PISA, sino que ha sido utilizada y ampliada en números artículos de la literatura matemática desde el siglo XX y en la actualidad también forma parte de los currículos de matemáticas de secundaria y bachiller aunque no de forma explícita, ya que en los libros de texto los contenidos siguen dividimos por las ramas clásicas de las matemáticas como son los números y el álgebra, la geometría, el análisis y la estadística y probabilidad.

- Los **contextos** en los que se sitúan los problemas o ejercicios de evaluación y ofrecen la posibilidad de conectar estos problemas con la realidad en la que está inmerso el individuo. Se diferencian cuatro grandes tipos:
    - **Personal.** En este primer contexto encontramos los problemas que tratan de actividades del propio individuo, su familia y su grupo de iguales.

- **Profesional.** Bajo este tipo se encuentran aquello problemas que versan sobre el mundo laboral.
- **Social.** Los problemas que clasificaremos en esta categoría de contexto serán los que se centran en la propia comunidad.
- **Científico.** En este último contexto incluiremos los problemas que hagan referencia a la aplicación de las matemáticas al mundo laboral y a cuestiones relacionadas con la ciencia y la tecnología.

La variedad de contextos en los que situar los problemas aportarán diferentes enfoques bajo los cuales poder conectar la realidad del alumno con el problema. A su vez, de esta manera, se estará motivando el estudio del mismo al definirlo como un posible problema real del entorno (personal, educativo, social o científico) del alumno, evitando así, que el alumno perciba los problemas como entes externos que carecen de relaciones con la realidad y sin utilidad cotidiana.

El objetivo de PISA al establecer esta organización del área de conocimiento de las matemáticas es poder evaluar el grado de eficacia con el que los alumnos pueden utilizar lo que han aprendido (a través del uso de los contenidos que conocen) participando en procesos y aplicando las capacidades que han adquirido para resolver problemas que pueden encontrarse en el mundo real que los rodea.

Una vez descrito el marco competencial de PISA se debe pasar a analizar la evaluación que se sugiere de la competencia matemática. Para ello se comenzará por plasmar mediante un cuadro resumen (Tabla 3) los porcentajes con los que se presenta cada proceso, contenido y contexto, en las preguntas de evaluación de esta prueba (no obstante, la propuesta no responde a estos porcentajes ya que no busca ser un elemento puramente evaluativo sino de formación).

Tabla 3

Distribución aproximada de las puntuaciones matemáticas según PISA 2012

Procesos 100%		**Contenidos 100%**		**Contextos 100%**	
Formulación	25%	Cambio y relaciones	25%	Personal	25%
Empleo	50%	Espacio y forma	25%	Profesional	25%
Interpretación	25%	Cantidad	25%	Social	25%
		Incertidumbre y datos	25%	Científico	25%

Las proporciones en que aparece cada tipo de proceso, contenido y contexto son aproximadamente las reflejadas en la Tabla 3. Además, las preguntas pueden ser de tres tipos: abiertas, cerradas o de selección múltiple, existiendo guías de codificación y puntuación para garantizar la equidad entre las respuestas a la hora de su corrección, sobre todo en aquellas de tipo abierto donde podremos encontrarnos multitud de respuestas distintas y es por ello que se necesitarán expertos que codifiquen manualmente las respuestas de los alumnos.

Otro de los aspectos a tener en cuenta es el nivel de dificultad. Dentro de cada categoría existen seis niveles de dificultad que forman una escala de competencia matemática y en cada uno de ellos se describen las destrezas que debe tener un estudiante para pertenecer a ese nivel. Estos seis niveles, de menor a mayor dificultad, son los siguientes:

- **Nivel 1.**
  Los alumnos reconocen la informan que les da el enunciado y son capaces de realizar procedimientos rutinarios bajo directrices simples o que se deducen directamente de los estímulos presentados. Necesitan que los problemas muestren toda la información pertinente, estén bien definidos y se presenten en contextos que conozcan.

- **Nivel 2.**
  Los alumnos saben sacar la información de una sola fuente, hacer uso de un único modelo representacional, realizar razonamientos directos mediante el uso de algoritmos, fórmulas y procedimientos básicos, y realizar interpretaciones literales de los resultados. Además, en contextos que solo requieren una inferencia directa son capaces de interpretar y reconocer situaciones.

- **Nivel 3.**
  Los alumnos saben razonar directamente a partir del uso y la interpretación de representaciones basadas en diferentes fuentes de información, ejecutar procedimientos descritos con calidad y seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Además, en este nivel son capaces de acompañar sus razonamientos con breves escritos explicativos.

- **Nivel 4.**
  Los alumnos pueden elaborar y comunicar explicaciones basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones. Saben trabajar con modelos explícitos en situaciones complejas o exigir la formulación de supuestos, y razonan con flexibilidad asociando las diferentes situaciones (también simbólicas) a situaciones del mundo real.

- **Nivel 5.**

  Los alumnos pueden trabajar adecuadamente con caracterizaciones simbólicas y formales, reflexionar sobre sus acciones, y formular y comunicar sus razonamientos. Además, ya son capaces elaborar modelos y manejarlos en situaciones complejas evaluando las estrategias convenientes de solución de problemas relativos a estos modelos.

- **Nivel 6.**

  Los alumnos que consiguen alcanzar este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Saben comunicar con exactitud sus razonamientos y su adecuación a las situaciones originales, además de utilizar sus destrezas para desarrollar de manera formal nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Además, pueden generalizar la información basada en modelos extraídos de problemas complejos, a la vez que relacionar diferentes fuentes de información.

De la descripción de estos niveles, en concreto, también podemos extraer una escala de dificultad en relación a los modelos matemáticos, de tal manera que los alumnos que se encuentren en los niveles más bajos solo serán capaces de identificar modelos muy simples, y sin embargo, los alumnos que se encuentren en los niveles más altos podrán elaborar sus propios modelos, manejarlos en situaciones complejas e incluso llegar a generalizarlos a diferentes situaciones, llegando a crear modelos nuevos a partir de éstos.

Por otra parte, a la hora de elaborar las preguntas se tiene mucho cuidado en que su redacción sea lo más clara y sencilla posible, para que, a la hora de medir la competencia matemática, esta no se vea obstaculizada por el nivel de competencia lectora del alumno. Es por ello que los trabajos de traducción de las preguntas a los distintos idiomas en los que se realiza el estudio deben ser muy cuidadosos y precisos. De igual modo, se usan contextos que puedan ser comprendidos por los estudiantes de los diferentes países y que respeten la igualdad entre todas las personas, independientemente de su sexo, origen o condición sexual.

Ahora que se ha detallado tanto el marco normativo como el marco competencial y de evaluación que se usará en el desarrollo de la propuesta, se pasa a describir las dos piezas que se habían considerado claves en la modelización, que son la motivación y la resolución de problemas.

2.3 Importancia de la motivación en el proceso de modelización matemática

La motivación juega un doble papel en los procesos de modelización. Por un lado, una de las características de las tareas de modelización es que resultan motivadoras para el alumno porque al enfrentarse a situaciones de la vida real, ve el vínculo que hay entre las matemáticas y esta. Por otro lado, aunque ciertas tareas rutinarias que tradicionalmente se proponen en el aula de matemáticas no exigen una motivación para poder desarrollarlas, en los procesos de modelización la motivación resultará esencial para el alumno, ya que se enfrentará a una actividad que exigirá de él un mayor esfuerzo, y en ocasiones le guiará por caminos erróneos. Mientras que un alumno sin motivación entenderá este trabajo como un fracaso, para el alumno motivado el error será un medio de aprendizaje.

En este apartado, se tratará de exponer cuáles son las creencias motivadoras de los alumnos, cómo conseguir en ellos una motivación inicial y cómo mantener esa motivación durante la realización de la tarea. Para ello, parece adecuado comenzar comentando algunos de los prejuicios que socialmente se le atribuyen a la Matemática, y que mucho tendrán que ver en la motivación inicial y predisposición que muestre el alumno hacia la asignatura.

Actualmente, como apunta Armenteros (2009): "la imagen social de las matemáticas en nuestra sociedad predomina el carácter negativo" (p.20), atribuyéndola calificativos como difícil, aburrida, sin utilidad... y asociando a los alumnos que les gustan, con personas empollonas, raras, etc. Y esta mala fama unida a las dificultades que algunos alumnos se encuentran con la materia hace que desencadene en una gran desmotivación y pierdan el interés por aprender.

Sin embargo, Font (1994) expone que si se logra despertar en los alumnos el interés por las matemáticas se estará ayudando a que se produzca un cambio en su forma de afrontar el estudio de esta materia, consiguiendo por su parte una mayor implicación, mayor entusiasmo y por ende mayor resistencia ante las dificultades, contribuyendo al cambio de un aprendizaje sistemático y superficial, a un aprendizaje significativo y duradero. Por tanto, uno de nuestros primeros objetivos como docentes será el conseguir motivar al alumnado hacia el estudio de las matemáticas.

Para conseguir acrecentar la motivación de los alumnos hacia la asignatura Maseda (2011) afirma que se deben tener en cuenta dos aspectos. El primero de ellos es que los docentes estén motivados y sepan transmitir esa motivación a sus alumnos. Aquí, se asume que esta primera condición no supone ningún problema ya que depende única y exclusivamente del propio docente. El segundo aspecto consistirá en conseguir la motivación del alumno y será en el que se centren todos los esfuerzos del docente.

En el camino hacia la motivación del alumnado frente a una tarea concreta se deberá tener en cuenta:

a) Cuáles son las creencias motivadoras de los alumnos.

Para ello, se comienza analizando los resultados de las investigaciones llevadas a cabo por Boekaerts (2002), quien trabaja en el ámbito de la autorregulación del aprendizaje y estudia la importancia de las creencias en el aprendizaje de las matemáticas. A partir de estos resultados, se establecen las creencias que tienen los alumnos frente a ciertos aspectos y se han aportado una serie de principios que motivan el aprendizaje de los alumnos, y que se tendrá que tener en cuenta en el complejo proceso de motivar. Algunos de estos principios son los siguientes:

i. Ante el fracaso los estudiantes pierden la motivación por aprender.

Cuando un alumno se topa de manera continuada con situaciones de fracaso acaba interiorizando que éste se debe a su propia incapacidad, conduciendo a una disminución de su autoestima, que obstaculizará su aprendizaje. Además, se sabe que las creencias de logro y fracaso de los alumnos en una asignatura son bastantes resistentes al cambio, por lo que cuando se enfrente a futuras tareas de la misma asignatura pensará que el resultado normal debe ser su fracaso, y ya se mostrará desmotivado incluso antes de enfrentarse a ella.

Por ello, resulta tan importante que el profesor sea consciente de los conocimientos previos del alumno y le proporcione situaciones de aprendizaje en las que puedan obtener logros, aunque en ocasiones esos logros puedan ser consecuencia de un error previo.

ii. Los estudiantes que valoran las actividades de aprendizaje dependen menos del estímulo, los incentivos y la recompensa.

Se deben proporcionar actividades que los alumnos consideren significativas, ya sea por el propio valor intrínseco de la tarea como por su relación o aplicación en otras asignaturas o actividades que ellos valoren. En definitiva, se trata de presentar las matemáticas en términos de competencias que ellos consideren importantes e interesantes, donde puedan relacionar los nuevos contenidos con los previos y con experiencias propias de la vida cotidiana.

iii. Los estudiantes se comprometen más con el aprendizaje si los objetivos son compatibles con sus propios objetivos.

Este principio está a su vez relacionado con el anterior ya que los alumnos valoran sus objetivos, por tanto, si el docente es capaz de relacionar los objetivos de la materia con los suyos propios, estará poniendo los primeros también en valor.

iv. Los estudiantes esperan que su esfuerzo sea valorado.

Se tiene que conseguir que el alumno se vea a sí mismo como responsable de su propio aprendizaje y no culpabilice del mismo a agentes externos o casuales. Una de las formas que tiene el docente de ayudarle a cambiar esta percepción, será valorando los esfuerzos que los alumnos realicen por aprender o llevar a cabo una tarea.

b) Cómo conseguir la motivación inicial del alumno.

Antes de comenzar con la tarea será importante lograr un estímulo inicial que haga que los estudiantes, en algún modo, se encuentren predispuestos a la realización de la misma. Si la tarea no les parece interesante desde un principio, será más complicado conseguir motivarles durante la realización de la misma. Sin embargo, si el profesor les consigue enganchar, aunque sea de manera leve, desde el inicio se podrá trabajar progresivamente el incremento de esta motivación durante la realización de la tarea. Según Font (1994), esta motivación inicial en los alumnos se consigue a través de tres aspectos:

i. Que conozcan el objetivo final de la tarea.

A menudo sucede que los estudiantes se preguntan cuál es la finalidad de realizar los ejercicios o problemas que se les plantean, en nuestro caso, en el aula de matemáticas. Una pregunta comúnmente extendida por éstos es: *¿para qué sirve esto?*

Los profesores tienen la responsabilidad de plantear actividades que persigan objetivos y transmitir estos a nuestros alumnos cuando se expone la tarea.

ii. Que los alumnos hagan suyas las tareas.

Los alumnos deben participar activamente en la realización de las tareas, ya que en el momento que se ven parte pasiva de la acción, su interés y motivación por la realización del problema disminuirá al disminuir también la sensación de éxito o fracaso propio, atribuyendo estos a la acción del profesor. En definitiva, cuando el alumno no participa en la acción la responsabilidad del resultado deja de sentirla como propia.

iii. Que sean conscientes de que serán capaces de realizar la tarea.

De acuerdo con la primera creencia motivadora que se ha enunciado, si se proponen tareas que no están al alcance de los alumnos y estos lo perciben desde un comienzo, se esforzarán mucho menos en realizarlas ya que pensarán que acabarán fracasando de todos modos.

Además, si los alumnos ven la tarea contextualizada, en algún entorno que les sea conocido, podremos acercar los objetivos de la tarea a los objetivos propios del alumno.

c) Cómo motivar al alumno durante la realización de la tarea.

Al igual que para la motivación inicial, se quiere conseguir que los estudiantes sean participes de la tarea. Difícilmente se logrará atraer a los alumnos si se les relega a un segundo plano, como meros espectadores y donde no formen parte activa de la tarea. Así pues, las metodologías activas serán clave en el objetivo de favorecer la participación del alumnado en la tarea.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, en la propuesta didáctica que se ofrece en este trabajo y que se basa en los modelos matemáticos, se optará por usar como elemento motivador principal el acercamiento de las matemáticas al alumno mediante su aplicación en el mundo cotidiano, propiciando así un aprendizaje significativo y de carácter propiamente funcional. Para ello, se usarán metodologías activas que requieran por parte de los alumnos una motivación inicial, el mantenimiento de la atención continuada y, la participación y realización de un esfuerzo para resolver los problemas o situaciones que se pueden dar en la vida real. De igual manera, el aprendizaje basado en problemas trabajando en grupos reducidos será también una de las claves metodológicas para nuestra propuesta didáctica.

2.4 Resolución de problemas

Indiscutiblemente, la resolución de problemas forma parte del proceso de modelización, más aún, se debe considerar a la primera como base de desarrollo del segundo. Es por ello, que las investigaciones donde se proponen modelos de resolución de problemas, o estrategias llevadas a cabo para este fin, constituirán los antecedentes del proceso de modelación. A su vez, una de las metodologías a tener en cuenta en un proceso de modelación en el aula será el Aprendizaje Basado en Problemas, que precisamente tienen en sus bases el desarrollo de la enseñanza a partir de la resolución de problemas.

De tal manera que la estructura de este subapartado se dividirá en tres partes. En la primera parte, se pondrá de manifiesto diversas concepciones de la resolución de problemas, los factores que intervienen en el proceso y por último un repaso histórico de los principales didactas de la matemática que han trabajado en este campo y los modelos de estrategias de resolución de problemas que han aportado.

La segunda parte versa sobre los tipos de bloqueos a los que se puede enfrentar un alumno ante la resolución de un problema. Además, se expondrán algunas recomendaciones para sobrevenirse de cada tipo de bloqueos.

En la tercera y última parte, se tratará la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Se verá en qué consiste esta metodología, sus características principales y el papel que desempeña en ella los docentes, así como las dificultades a las que se enfrentan para llevarlo a cabo en el aula. Además, se citarán las ventajas que supone organizar el aula en grupos pequeños cuando se trabaja con esta metodología.

2.4.1 Modelos de resolución de problemas

Como ya se ha comentado, las investigaciones sobre resolución de problemas constituirán los antecedentes de la modelización, pero antes de pasar a analizar los diferentes métodos de resolución de problemas se debe aclarar qué entendemos por resolución de problemas. Para ello, se referencia a la información que recopiló Schoenfeld en *Learning to think mathematically* (1992).

Los problemas han ocupado siempre un puesto central en los currículos de matemáticas, sin embargo, en un principio, en éstos no se trataba el proceso de resolución de problemas y tardó en ser considerado como una habilidad a la que se debía prestar especial atención en las clases de matemáticas. Hoy en día, la mayoría de los currículos de matemáticas de educación secundaria y bachillerato atienden el proceso de resolución de problemas, y en concreto, como hemos mencionado previamente en el marco normativo, en nuestro país está comprendido en el bloque de "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", que tiene un carácter transversal.

En línea con lo anterior, Stanic & Kilpatrick (1989) añadían que: "el término resolución de problemas se ha convertido en un eslogan que abarca diferentes concepciones sobre qué es educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemáticas en general y resolución de problemas en particular".

Estos mismos autores darán tres concepciones distintas que históricamente ha recibido la resolución de problemas:

- Resolución de problemas: como **contexto**.
  Bajo esta concepción los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares. Además, ellos identifican cinco papeles juegan los problemas:

  1. Como justificación para enseñar matemáticas.
     Ya que, la importancia de algunos problemas en la vida real, han servido a los docentes como argumento para convencer a los alumnos de la importancia de la matemática.

  2. Para proporcionar motivación a ciertos temas de la asignatura.
     Los problemas se usan a veces para introducir ciertos contenidos de la asignatura, explicando a los alumnos que con ciertos contenidos serán capaces de resolver ciertos problemas que consideran que pueden resultarles de incentivo al estudio, sentirse atraídos por su solución.

  3. Como actividad recreativa.
     Demuestran que las matemáticas pueden ser divertidas a partir de la resolución de ciertos problemas.

  4. Como medio para desarrollar nuevas habilidades.
     Proporcionando una serie de problemas ordenados adecuadamente, éstos pueden aportar a los estudiantes nuevas habilidades y servir de contexto para la discusión con algún otro tema.

  5. Como práctica.
     A los estudiantes se les muestra una técnica o procedimiento, y después se les proporciona problemas en los que poder aplicar estas técnicas.

  Bajo esta concepción la resolución de problemas no se concibe como un objetivo en sí mismo, sino como el camino para conseguir otras metas u objetivos.

- Resolución de problemas: como **habilidad.**

  La mayoría del desarrollo curricular e implementación llevada a cabo bajo el nombre de “resolución de problemas” en los años 80, hace un tratamiento de este tema como una habilidad en sí misma.

  Además, si se pone en relación con otras de las habilidades que curricularmente se pretende que adquiera el alumno en el aula de matemáticas, la resolución de problemas no rutinarios es considerada de alto nivel, de hecho, se debe adquirir después de la habilidad para resolver problemas rutinarios, para la que a su vez se necesitan conceptos matemáticos y habilidades básicas.

  Cabe destacar que, aunque bajo esta segunda concepción ya se considere la resolución de problemas como una habilidad en sí misma, en realidad, las técnicas de resolución de problemas son concebidas como instrucciones que son aprendidas o “memorizadas” a partir de diversos problemas usados como práctica para estudiar esas instrucciones.

- Resolución de problemas: como **arte.**

  Esta tercera concepción se aleja más de las dos anteriores y mantiene que la resolución de problemas reales es el “corazón” de las matemáticas, sino la matemática en sí misma.

Esta última concepción fue compartida, por varios matemáticos, entre los que destaca Paul Halmos (1916-2006), matemático húngaro, nacionalizado estadounidense que, entre otras cosas, defendió esta concepción en su obra que precisamente titula *The heart of mathematics* (1980).

> Las matemáticas no podrían existir sin axiomas, demostraciones, teoremas, fórmulas o métodos, ya que estos elementos son esenciales. Sin embargo, ninguno de ellos está en el corazón de la asignatura, ya que la razón principal de la existencia del matemático es resolver problemas y, por lo tanto, en lo que consiste realmente la matemática es en problemas y soluciones. (Halmos, 1980)

Además, Halmos sostenía que las experiencias matemáticas a las que se sometía a los estudiantes les deberían preparar para resolver problemas reales y defendía la necesidad de aumentar tanto la divulgación como la presencia en el aula de metodologías que focalizasen su atención en la resolución de problemas:

> Creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, y espero que tanto los docentes en el aula o en seminarios, y en los libros y artículos que escribimos, los demos cada vez más

> importancia, y que capacitemos a nuestros alumnos para sean mejores que nosotros, proponiendo problemas y resolviéndolos (Halmos, 1980)

Por otra parte, el matemático más conocido por su concepto de las matemáticas como "resolución de problemas", y por su trabajo situando a la resolución de problemas el centro de la instrucción matemática es George Pólya.

Pólya (1887-1985) fue un matemático húngaro, nacionalizado estadounidense, que dedicó gran parte de sus esfuerzos a trabajar sobre la resolución de problemas. Su primer trabajo sobre este tema fue *How to solve it* (1945), en el que introducía el término "heurística" para describir el arte de resolver problemas. Más tarde, desarrollaría aún más este término en *Mathematics and plausible reasoning* (1954) y *Mathematical Discovery* (1962,1965/1981).

Como decía Kilpatrick (1998), "se puede pensar en heurística en contraste con los algoritmos, ya que mientras los algoritmos son procesos bien definidos, que determinan o son determinantes y garantizan una solución, en la heurística la solución no está garantizada. Esto, genera muchos problemas en los estudiantes, quienes prefieren los algoritmos".

Para Pólya la matemática se debía concebir como una actividad, como prueba de ello la siguiente cita:

> Para un matemático activo en la investigación, las matemáticas a veces pueden aparecer como un juego de adivinanzas; tienes que descubrir un teorema antes de probarlo y tienes que encontrar la idea en la que se basa la demostración antes de llevarla a cabo con sus detalles. Los aspectos matemáticos primero se deben descubrir y después probar (…) Si aprender matemáticas tiene que ver con descubrirlas, se les debe dar a los estudiantes la oportunidad de hacer problemas en los que primero descubran y luego prueben alguna cuestión matemática de un nivel apropiado para ellos (Pólya, 1954)

En definitiva, para Pólya la experiencia que se les ofrece a los alumnos con las matemáticas debería estar constituidas por un conjunto de actividades encaminadas a mostrar de qué forma se crean realmente las matemáticas, ya que para él era necesario conocer cómo es descubierta una teoría para poder entenderla.

Una obra importante y que complementa el trabajo de Pólya, es *Thinking mathematically*, escrita por Mason, Burton & Stacey (1982). En ella se estudia el cómo pensar, cómo hacer cuando uno se queda atascado y cómo proceder en la resolución de problemas. Otros investigadores como Lesh también compartían la idea de trabajar la heurística en las aulas, y en concreto él, a partir del estudio de problemas de la vida cotidiana concluiría que, si se les ofreciese a los alumnos más oportunidades para formular y resolver problemas de situaciones reales, éstos mejorarían su capacidad para resolver problemas.

Aunque en la actualidad no existe un modelo explicativo único, en cuanto a cómo encaja la resolución de problemas y el pensamiento matemático, lo cierto es que la comunidad matemática parece haber llegado a un consenso sobre la importancia de estos cinco aspectos, que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos (Schoenfeld, 1992):

1. El conocimiento de base
2. Las estrategias para la resolución de problemas
3. Monitorización y control
4. Creencias y afectos
5. La práctica

Este texto se centrará en el segundo aspecto, analizando los métodos de resolución de problemas más significativos y relevantes en la historia de la didáctica matemática, que se propusieron en el siglo XX. A continuación, se presentan dichos modelos:

- **Modelo de Poincaré (1908)**

  Fue propuesto por Henri Poincaré (1854-1912), matemático francés que dedicó parte de su obra a estudiar la metodología general de la ciencia. En concreto, destacamos aquí, el análisis que realizó del proceso de creación de los conceptos matemáticos en su obra *Science et Méthode* (1908). En ella diferenciaba cuatro fases del acto creativo:

  1. Saturación. Actividad consciente que implica trabajar el problema hasta donde sea posible.
  2. Incubación. En esta fase es el subconsciente el que trabaja.
  3. Inspiración. Según Poincaré, la idea surge repentinamente "como un flash".
  4. Verificación. Consiste en la comprobación de la respuesta para asegurarnos de su veracidad.

- **Modelo de Dewey (1910)**

  Fue propuesto por John Dewey (1859-1952), filósofo, pensar y educador estadounidense. Su modelo lo encontramos por primera vez en su obra *How we think* (1910) y distinguía cinco etapas que intervenían en la resolución de problemas:

  1. Sugerencias, en las que la mente salta hacia adelante en busca de una posible solución.

2. Intelectualización de la dificultad que se ha experimentado en un problema que hay que resolver.
3. Formulación de una hipótesis, para iniciar y guiar la observación.
4. Razonamiento, como el ensayo en la hipótesis.
5. Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.

- **Modelo de Hadamard (1945)**

  Fue propuesto por Jacques Hadamard (1865-1963), matemático francés, del que destacaremos su obra *An essay on the psychology of invention in the mathematical field* (1945). En ella Hadamard continua con la idea de creación matemática de Poincaré, y resaltará la actividad consciente, la reflexión y el trabajo inconsciente. Su modelo presenta seis fases:

1. Documentación. Esta primera fase hace referencia a los procesos de informarse, leer previamente, escuchar y discutir.
2. Preparación. La realización de un proceso de ensayo-error sobre diferentes hipótesis, considerando un cambio eventual de actividad en caso de no obtener ningún progreso.
3. Incubación. Al cambiar de actividad.
4. Iluminación. Cuando ocurre la idea repentina.
5. Verificación. La comprobación de la idea.
6. Conclusión. La ordenación y formulación de los resultados.

- **Modelo de Pólya (1945)**

  Este modelo fue propuesto por George Pólya. Como ya hemos comentado, su obra *How to solve it* (1945), supuso un antes y un después en el estudio de la resolución de problemas y su importancia dentro de la matemática, marcando un hito en el campo de la Didáctica Matemática. Este modelo tiene cuatro fases:

1. Entender el problema. Se resume la información dada y la que se desea determinar.
2. Concebir un plan. Se expresa la relación entre los elementos que intervienen en el problema mediante una fórmula o ecuación.
3. Ejecutar el plan. Se resuelve y evalúa la ecuación y se identifica el término constante del patrón.
4. Mirar hacia atrás. También se conoce a esta fase como “vista retrospectiva” y consiste en examinar la solución obtenida.

- **Modelo de J. Mason, L. Burton y K. Stacey (1982)**

  Este modelo fue propuesto por Mason, Burton y Stacey en *Thinking mathematically* (1982), y analiza el pensamiento y la experiencia en general, que engloba como un caso particular la resolución de problemas. En él se considera imprescindible el tener en cuenta las emociones de quien resuelve el problema, el enfoque positivo que se concede al hecho de estar atascado y el dejar todo el proceso de resolución por escrito. El método se estructura en tres fases:

  1. Abordaje. Esta fase está encaminada a comprender, interiorizar y familiarizarse con el problema.
  2. Ataque. Se trata de asociar y combinar toda la información toda la información de la fase anterior. Aquí se incluyen los procesos de inducción y deducción.
  3. Revisión. Comprende la comprobación de la solución, el intento de generalizarla a un contexto más amplio y la redacción de la solución dejando el proceso que se ha seguido, así como el porqué del mismo.

- **Modelo de El Grupo Cero (1985)**

  El Grupo Cero estuvo formado por profesores de matemáticas de bachillerato de Valencia. Surgió hacia 1975 ante la necesidad de una renovación pedagógica de las matemáticas en las aulas. Una de sus mayores aportaciones fue el impulsar en España la resolución de problemas. Consideraban la resolución de problemas como motor del aprendizaje y defendían que el rigor de las matemáticas admite distintos niveles y que las matemáticas de los alumnos no pueden quedar reducidas al uso de técnicas. Su modelo distingue tres fases:

  1. Fase introductoria.
  2. Fase exploratoria.
  3. Fase de resolución.

     En esta fase se distinguen a su vez dos categorías de comportamiento:

     - Las estrategias heurísticas.
     - Las decisiones ejecutivas que toma el sujeto respecto a cómo utilizar los algoritmos, los conceptos y las estrategias de que dispone para resolver el problema.

- **Modelo de Miguel de Guzmán (1991)**

  Fue planteado por Miguel de Guzmán (1936-2004), matemático, divulgador y educador español, en su libro *Para pensar mejor* (1991). Este trabajo se divide en cinco partes:

  - La primera trata de los bloqueos que sufren los alumnos y su tipo.
  - La segunda parte plantea las estrategias generales del pensamiento, así como un posible esquema de trabajo en grupo.
  - La tercera parte la dedica a las estrategias y expone manera de familiarizarse con el problema.
  - La cuarta parte la dedica a la selección de contenidos adecuados que desarrollen el pensamiento.
  - La quinta y última parte versa sobre la actividad subconsciente en la resolución de problemas.

  El modelo que presenta está constituido por cuatro fases:

  1. Familiarización con el problema. Atiende a la adquisición de información sobre el problema.
  2. Búsqueda de estrategias. Recopilación de las ideas que pensamos que nos ayudarán a resolver el problema.
  3. Llevar adelante la estrategia. En esta fase alude a la incubación e iluminación (procesos del desarrollo creativo que ya hemos comentado).
  4. Revisar el proceso y sacar consecuencias. La reflexión sobre el proceso debe atender tanto al propio problema como a los bloqueos, aptitudes y tendencias que se han observado en él.

Se puede observar que, aunque se distingan diversas fases en los modelos expuestos, guardan entre sí muchas similitudes, partiendo de una aproximación a la situación y finalizando con la comprobación del resultado obtenido. Cuando se expongan las fases involucradas en los procesos de modelización matemática (que serán parte de las competencias que adquieren los alumnos con las tareas de modelización de la propuesta) quedará de manifiesto la relevancia de estos modelos en la propuesta, sobre todo el de Pólya, al comportarse como antecedente de lo que se llamaría ciclo de modelización.

2.4.2 Bloqueos en la resolución de problemas

Un tema que el docente debe aprender a gestionar y, más concretamente, cuando desarrolle tareas de modelización, son los bloqueos que se producen ante la resolución de problemas.

En este apartado, se comentarán los tipos de bloqueos que puede experimentar un alumno cuando se enfrenta a la resolución de un problema, basándonos en la clasificación y el análisis que establece Guzmán (1991) y algunas de las recomendaciones que sugiere el autor para superar este tipo de bloqueos.

Para este texto se escoge la visión de Guzmán porque, aunque no es un referente internacional en dominio afectivo y bloqueos, su clasificación de bloqueos resulta muy clarificadora y simple, lo cual se adapta perfectamente a los objetivos de este trabajo con respecto a este tema, que lejos de pretender convertirse en un estudio exhaustivo de las emociones, busca ofrecer unas pequeñas instrucciones que el docente pueda tener en cuenta durante la gestión de las tareas de modelización de nuestra propuesta didáctica.

Los bloqueos a los que se enfrentan los alumnos ante la resolución de problemas se diferencian en los siguientes tipos:

- **Bloqueos de origen afectivo.**
  Según Guzmán, este tipo de bloqueo no ha recibido históricamente la importancia que debiese por parte de los autores clásicos, destacando que Descartes, ni en *Reglas para la dirección del espíritu* ni en su *Discurso del método* "tratan de sondear la influencia de las emociones sobre el resto del pensamiento", y Pólya en su extensa obra dedicada a la heurística y la pedagogía tampoco tiene en cuenta cómo influye el afecto humano en la resolución de problemas. Sin embargo, parece que a partir de los años ochenta se produce un aumento sustancial del interés por explorar los aspectos emocionales del conocimiento, donde destaca *Affect and Mathematical Problem Solving* de McLeod y Adams.

  Dentro de los bloqueos de origen afectivo realiza una distinción más precisa:

  - **Apatía, abulia y pereza ante el comienzo.**
    El primer bloqueo ante el que se encuentra el alumno (y naturalmente cualquier otra persona que se enfrente a un problema, que no debe porque ser matemático) se refiere al cómo empezar. Guzmán dice que, aunque es cierto que es importante una buena planificación inicial, llega un punto en el que tenemos que vencer a las escusas y lanzarnos a desarrollar la idea, sin mayor demora y más adelante, cuando veamos todo en conjunto, podremos analizar con mayor perspectiva los ajustes que debemos hacer para que la idea termine de adquirir la forma que nosotros deseamos.

Guzmán sintetiza sus explicaciones sobre este tipo de bloqueo con algunos consejos que podemos observar en la Tabla 4.

Tabla 4
Recomendaciones ante un bloqueo afectivo en el comienzo de una tarea.

Recomendaciones ante un bloqueo afectivo en el comienzo de una tarea
1. Piensa un poco en las distintas formas posibles de comenzar tú tarea.
2. Escoge una y comienza. Da a tu comienzo una buena oportunidad de demostrar lo que vale. No te detengas mucho a examinarlo en este estadio inicial. Lo que ahora parece malo puede no serlo tanto.
3. Conserva la conciencia de que tu inicio puede tener carácter provisorio. Si al juzgarlo razonadamente con cierta perspectiva piensas que se debe cambiar, cámbialo. Pero no te dejes llevar por un perfeccionismo paralizante. Recuerda: « Lo mejor es enemigo de lo bueno »”.

Nota. Fuente: Guzmán (1991, p.49)

- **Miedos.**

Principalmente se pueden diferenciar entre tres tipos de miedos: el miedo al fracaso, el miedo al ridículo y el miedo al examen.

El fracaso y el ridículo no siempre son malos, si fracasamos o quedamos en ridículo es porque hemos intentado salir de la zona de confort y afrontar nuevos retos. En cuanto al miedo ante un examen, Guzmán explica que es normal sentir miedo y repugnancia ante el acto de ser examinados y valorados por los conocimientos que posee uno, y que la única manera de combatir estas sensaciones será preparándose lo mejor posible para dicho examen, favoreciendo así nuestro control sobre él y aumentando nuestra confianza y autoestima.

Los miedos solo pueden ser buenos en una cierta medida y cuando nos hacen ser prudentes, pero no nos impiden intentarlo.

Guzmán sintetiza sus explicaciones sobre este tipo de bloqueo con algunos consejos que podemos observar en la Tabla 5.

Tabla 5

Recomendaciones ante un bloqueo por miedo

Recomendaciones ante un bloqueo por miedo
1. Las sombras del fracaso y de la equivocación son mucho más largas que la realidad misma.
2. Los fallos y equivocaciones nos enseñan sobre las formas adecuadas de proceder.
3. «El camino para el éxito consiste en duplicar la proporción de fallos.»
4. Quien trata de introducir nuevas formas de pensar y actuar, ha de tropezar con resistencias que provienen de él mismo y de su ambiente. No te amilanes.
5. El gran remedio para los miedos que un examen puede producir consiste en tener la convicción de ir bien preparado.

Nota. Fuente: Guzmán (1991, p.56).

- **Ansiedades.**

  “La ansiedad es un estado de ánimo complejo caracterizado por cierta tensión interna, preocupación nerviosismo, agitación, en el que generalmente intervienen a la vez causas emocionales y cognitivas” (Guzmán, 1991, p.56).

  En este contexto, se pueden dar dos tipos de ansias: el ansia por triunfar y el ansia por acabar. Una cierta tensión puede ayudar a trabajar de manera más rápida y eficiente, pero si esta se convierte en un exceso, solo favorecerá a ralentizar e incluso impedir que se enfrenten a un problema empleando todos aquellos conocimientos que poseen.

Guzmán sintetiza sus explicaciones sobre este tipo de bloqueo con algunos consejos que podemos observar en la Tabla 6.

Tabla 6
Recomendaciones ante un bloqueo por ansiedad

Recomendaciones ante un bloqueo por ansiedad
1. Hacerse consciente del grado de influencia en uno mismo de cada una de estas ansiedades.
2. Tratar de ponderar serenamente el valor relativo del triunfo sobre todo si su precio ha de ser una merma importante de la calidad de la existencia.
3. Aminorar conscientemente la velocidad y la hiperactividad cuando nos percatamos de que estamos siendo empujados por ellas.

Nota. Fuente: Guzmán (1991, p. 59)

- **Repugnancias.**

  Cuando una tarea no es de nuestro agrado, ya sea porque nos resulta repetitiva, difícil, poco familiar, o no hemos hecho un esfuerzo inicial por comprenderla, nos va a costar mucho más esfuerzo llevarla a cabo. De manera natural nos vamos a ver influenciados por este sentimiento y será muy difícil despojarnos de él. Guzmán advertía de que:

  "La neutralización de las consecuencias de estos sentimientos profundos es, posiblemente, una de las tareas más difíciles de nuestra vida intelectual" (Guzmán, 1991).

  Algunas de las recomendaciones que nos da Guzmán para ello se pueden ver en la Tabla 7.

Tabla 7

Recomendaciones ante un bloqueo por repugnancia

Recomendaciones ante un bloqueo por repugnancia
1. Trata de conocer y estudiar tus posibles sentimientos de repugnancia ante las diferentes tareas intelectuales. El conocerlos es ya un buen tramo para contrarrestar sus efectos.
2. Intenta equilibrar tus sentimientos racionalmente, observando sus efectos nocivos, su carencia de motivación, sus posibles orígenes injustificados.
3. Actúa ocasionalmente de forma directa contra la tendencia que te arrastra.
4. A veces, tus repugnancias son indicios de tus limitaciones. Observándolas te conocerás mejor y podrás insistir en poner remedio a ellas.
5. Permanece atento a las transferencias que haces de la aversión a una persona determinada al tema en que se ocupa o a la obra que realiza. Hay quien puede ser profundamente antipático, engreído vanidoso y muchas más cosas, y al mismo tiempo ser capaz de componer maravillosas sinfonías.

Nota. Fuente: Guzmán (1991, p.63)

- **Bloqueos de tipo cognitivo.**

  A diferencia de los bloqueos de origen afectivo, los bloqueos de tipo cognitivo son más fácilmente detectables y probablemente sea más sencillo también su tratamiento. Entre estos bloqueos se distinguen: las dificultades en la percepción del problema, la incapacidad en el ataque del problema, la visión estereotipada, la tendencia al juicio crítico y la rigidez mental (Tabla 8).

  - **Dificultades en la percepción del problema.** En ocasiones nos resulta más difícil detectar cuál es el problema que una vez detectado solucionarlo, por tanto, es conveniente dedicar un tiempo al análisis de las causas del problema.

- **Incapacidad de desglosar el problema.** Uno de los problemas más frecuentes a la hora de abordar un problema surge por querer atacarlo directamente. Un previo análisis del mismo, que nos sirva para dividir el problema en varios problemas más sencillos, nos facilitará enormemente el trabajo y nos transformará el problema en una tarea accesible.

- **Bloqueos en el ataque al problema.** Guzmán señala que se debe encontrar un equilibrio entre lanzarse directamente a resolver el problema, sin interesarse por los avances que han realizado otros autores, y sobresaturarse de información sobre el tema. La creatividad y la invención propia son características importantísimas, pero de nada sirve perder el tiempo con errores que ya han cometido otros y podemos evitarlos informándonos previo al inicio de nuestro razonamiento.

- **Visión estereotipada.** Consiste en: "ver, ante una situación determinada, solamente lo que esperamos ver" (Guzmán, 1991, p.68). Guzmán nos recomienda permanecer abierto a lo extraño, a aquello que en principio no cabría esperar, para poder llegar a visiones nuevas de la realidad.

- **Tendencia al juicio crítico.** Las críticas cuidadosas y razonadas nos invitan a la reflexión y el análisis, sin embargo, en ocasiones nos impiden ver lo positivo o novedoso del razonamiento criticado.

- **Rigidez mental.** Cuando se trata de resolver un problema muchas veces tendremos que dejar de lado nuestros favoritismos en cuento a que herramientas usar y priorizar el problema en sí y el razonamiento que mejor se adecue a este.

Tabla 8

Bloqueos de tipo cognitivo

Bloqueos de tipo cognitivo	En la percepción de un problema
	Para desglosar el problema
	En el ataque al problema
	Visión estereotipada
	Tendencia al juicio crítico
	Rigidez mental

Nota. Fuente: Guzmán (1991)

- **Bloqueos culturales y ambientales.**
  Hacen referencia a los bloqueos que derivan de las formas de pensar que se transmiten de unos a otros a través del tiempo y mediante la comunicación.

  Por un lado, destaca lo que se conoce como **sabiduría popular** que representa la experiencia colectiva de toda una comunidad humana. Sin embargo, a menudo constituyen una obstrucción en el camino hacia la resolución original de ciertos problemas.

  Por otro lado, están las ideas que meramente son recibidas en la mente sin ser utilizadas, o contrastadas, o incorporadas en combinaciones nuevas, a este tipo de ideas se les denominó **ideas inertes.** Guzmán dice que:" El antídoto contra las ideas inertes consiste en reconocerlas y tratar de experimentar su ineficacia y la conveniencia de su sustitución, haciendo fuerza contra nuestra tendencia espontánea a mantener la seguridad que falsamente pensamos que ellas proporcionan" (Guzmán,1991, p.81).

Una vez explorados los distintos tipos de bloqueo que se pueden experimentar frente a la resolución de problemas y algunas recomendaciones para superarlos, falta preguntarse qué metodología será la adecuada para llevar a cabo la resolución de problemas y, en particular, las tareas de modelización matemática.

2.4.3 Aprendizaje basado en problemas (ABP)

En este apartado se intenta justificar por qué el Aprendizaje Basado en Problemas es una metodología potencialmente adecuada para implementar los procesos de modelización matemática, debido, entre otros, a cómo se entiende en ella la gestión en el aula y el papel que adoptan profesor y alumno en ella.

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente la metodología más adecuada para trabajar el desarrollo del proceso matemático y acercar éste a la vida real de los alumnos, mediante problemas cotidianos de su entorno, que además los motiven en el estudio de las matemáticas. Además, esta metodología cada vez es más valorada, ya que propicia la iniciativa del alumno en la consecución de los objetivos.

Prueba de esta importancia actual son las numerosas investigaciones que se continúan realizando sobre la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas.

“Este método brinda a cada estudiante la oportunidad de demostrar su capacidad para razonar, justificar y desarrollar la comprensión conceptual y aprender a aplicar las matemáticas para tomar buenas decisiones sobre problemas auténticos” (Stacey, 2018).

Por otra parte, cabe destacar los buenos resultados que están produciendo los métodos que utilizan la resolución de problemas como eje principal para el aprendizaje en matemáticas. Entre ellos destaca el Yeap Ban Har, más conocido como método Singapur.

Después de esta breve introducción a la metodología ABP en la que se ha justificado el valor de esta metodología en sí misma, se pasa a su definición y a ver algunas de sus características principales que serán las que terminen de justificar su uso en esta propuesta, al adaptarse en perfectas condiciones a nuestras pretensiones con esta.

El ABP es una metodología centrada en el aprendizaje, en la investigación y reflexión que siguen los alumnos para llegar a una solución ante un problema planteado por el profesor. La diferencia que se encontrará entre el ABP y la simple resolución de problemas en el aula está en el papel que juega el problema en el proceso de aprendizaje. Normalmente, el docente explica unos contenidos mediante la clase magistral o algún otro método y, a continuación, plantea a los alumnos unos problemas de aplicación de dichos contenidos. Sin embargo, el ABP es un método que: “se basa en el principio de usar los problemas como punto de partida para la adquisición e integración de nuevos contenidos” (Barrows, 1986).

> El énfasis está puesto en que los estudiantes se conviertan en buenos resolutores de problemas. Al decir esto se quiere resaltar el interés en que adquieran herramientas y construyan estrategias para abordar problemas a la vez que el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido específico. (Rodríguez, 2012, p. 154)

Algunas de las características principales del ABP son las siguientes:

- Es un tipo de metodología que se centra en el alumno y su aprendizaje.
- Cuando se lleva a cabo en grupos pequeños los alumnos adquieren un compromiso de trabajo con sus aprendizajes y con los de sus compañeros, mientras desarrollan el trabajo autónomo y en equipo.
- Favorece la posibilidad de interrelacionar distintas materias o disciplinas matemáticas.
- Facilita la posibilidad de que alumno reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente.

- El trabajo con las matemáticas puede resultar atrayente, divertido, satisfactorio, y creativo.

Como ya se adelantó, esta metodología resulta más rica cuando se realiza en pequeños grupos de trabajo, ya que esto nos proporciona una serie de ventajas importantes:

- Permite observar distintas formas de enfrentarse a un mismo problema.
- El profesor puede actuar como moderador del grupo o como un observador externo.
- El grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede parecer más difícil o tediosa.
- Da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros.
- Proporcionará mayor conocimiento a la hora de desempeñar una tarea de características similares, conociendo más herramientas que funcionan en diferentes circunstancias y personas.

Por último, se ven cuál deben ser los papeles del profesor y de los alumnos en el Aprendizaje Basado en Problemas y que dificultades deberá afrontar el docente en el desarrollo del mismo.

Tabla 9

Papel del docente en el ABP

Profesor
1. Da un papel protagonista al alumnado en la construcción de su aprendizaje.
2. Tiene que ser consciente de los logros que consiguen sus alumnos.
3. Es un guía, un tutor, un facilitador del aprendizaje que acude a los alumnos cuando le necesitan y que les ofrece información cuando la necesitan.
4. El papel principal es ofrecer a los alumnos diversas oportunidades de aprendizaje.
5. Ayuda a sus alumnos a que piensen críticamente orientando sus reflexiones y formulando cuestiones importantes.
6. Realizar sesiones de tutoría con los alumnos.

Nota. Fuente: Servicio de Innovación Educativa (2008)

Por tanto, las dificultades a las que se enfrentará el docente al desarrollar este tipo de aprendizaje podrán ser de tres tipos:

- De tipo matemático. Deben percibir las implicaciones de los diferentes enfoques que plantean los alumnos, darse cuenta si pueden ser válidos y ofrecer alternativas.
- De tipo pedagógico. En su papel como guía del proceso de aprendizaje, debe decidir cuándo es adecuado que intervenga y cuando debe dejar al alumno reflexionar solo.
- De tipo personal. Se encontrará a menudo en la posición de no saber dar respuesta a todas las preguntas por lo que necesitará experiencia, confianza y autoestima.

Por último, veamos (Tabla 10) el papel de los alumnos en el Aprendizaje basado en Problemas.

Tabla 10

Papel del alumnado en el ABP

Alumnado
1. Asumir su responsabilidad ante el aprendizaje.
2. Trabajar con diferentes grupos gestionando los posibles conflictos que surjan.
3. Tener una actitud receptiva hacia el intercambio de ideas con los compañeros.
4. Compartir información y aprender de los demás
5. Ser autónomo en el aprendizaje (buscar información, contrastarla, comprenderla, aplicarla, etc.) y saber pedir ayuda y orientación cuando lo necesite.
6. Disponer de las estrategias necesarias para planificar, controlar y evaluar los pasos que lleva a cabo en su aprendizaje.

Nota. Fuente: Servicio de Innovación Educativa (2008)

Estos son los papeles que queremos que tengan alumno y profesor en el proceso de modelización que pretendemos llevar a cabo en nuestra propuesta, donde el protagonista del aprendizaje sea el propio alumno y el profesor limite su función, durante el desarrollo de la tarea, a facilitar el aprendizaje de su alumnado.

3 PROCESO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN SECUNDARIA

A lo largo del trabajo se ha puesto de manifiesto la importancia de incluir en el aula de matemáticas la modelización. Ahora, se necesita hacer un análisis de todos los componentes que tienen lugar en un proceso de modelización en Educación Secundaria y que se deberán tener en cuenta, antes de planificar una propuesta didáctica basada en este tipo de tareas.

En este apartado, se pueden diferenciar claramente tres partes. La primera parte, que está constituida por los dos primeros subapartados, tiene como objetivos esclarecer algunas de las cuestiones que giran en torno a la modelización y el proceso de modelización, sobre todo, enfocando estos a la Educación Secundaria. Para ello, se reflexionará sobre qué son los modelos matemáticos, dónde se pueden encontrar, cómo se pueden generar y cómo deben gestionarse, poniendo de manifiesto diferentes conceptualizaciones de ambos términos, exponiendo algunas de sus características más diferenciadas y analizando tres posibles ciclos de modelización donde se distinguen los distintos estadios por los que pasa el proceso, así como los subprocesos empleados para pasar de uno a otro.

La segunda parte, que está formada por los apartados tres y cuatro, tratará de definir la competencia de modelización, distinguiendo esta en competencias cognitivas, competencias afectivas y competencias metacognitivas, y analizando las subcompetencias de cada una de ellas. Además, se expondrá una clasificación por niveles de competencia de modelización basada en las habilidades cognitivas que adquieren los alumnos durante el proceso de modelización.

La tercera y última parte, versará sobre el papel que adquiere el profesorado en el proceso de modelización y se reflexionará sobre la necesidad de una formación docente, que haga posible que los avances a nivel teórico sobre modelización matemática en la etapa de secundaria se acaben implementando en el aula de manera generalizada.

3.1 Modelos y modelización matemática

La primera incógnita a la que se deberá dar respuesta consiste en buscar una definición de lo que es un modelo matemático. Son muchas las definiciones de este término que se pueden encontrar en la literatura matemática y, más en concreto, en el área destinado a la investigación en modelización. A continuación, se mostrarán algunas de ellas:

- Un modelo es un esquema que describe un sistema de la vida real, y consiste en elementos, relaciones, operaciones que describen como los elementos interaccionan y patrones o reglas que se aplican a las relaciones u operaciones precedentes. Se centra en las características estructurales subyacentes del sistema de la vida real que describe. (Lesh, 1998, p.362)

- Por otra parte, Biembengut & Hein (2004) definen un modelo matemático como: “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías” (p.3).

- El Ministerio de Educación Nacional de Colombia da otra definición de modelo que se centra en la familiarización y descripción de un problema real: Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema o estructura que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o concepto para su apropiación y manejo. (Villa-Ochoa, 2010, p.1444)

- Por último, se atiende a la definición de modelo que se propone en el primer borrador del marco de referencia de PISA 2021: “Los modelos son simplificaciones de la realidad que fundamentan ciertas características de un fenómeno mientras se aproximan o ignoran otras características” (Schleicher, 2018, p.19).

A partir de estas cuatro definiciones se construye la definición de modelo matemático que se usará en nuestra propuesta. Un modelo matemático es un sistema de la vida real que se describe a partir de un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que simplifican el fenómeno real, ignorando algunas de sus características para hacerlo más comprensible, cercano y concreto para su apropiación y manejo.

Por tanto, atendiendo a esta definición los modelos matemáticos se pueden encontrar en multitud de situaciones de la vida real, pero ¿cómo generarlos? Es aquí donde nace el sustantivo modelización, que hace referencia, precisamente, al proceso que se debe llevar a cabo para obtener o generar un modelo.

El proceso de modelización matemática, al igual que sucede con la resolución de problemas, se puede concebir desde diferentes ópticas:

- “Motivación, desarrollo e ilustración de la importancia de ciertos contenidos matemáticos” (Chinnappan, 2010).

- “Un entorno de aprendizaje donde se invita a los estudiantes a investigar mediante matemáticas, situaciones que surgen en otras áreas de conocimiento” Barbosa (Doosti & Ashtiani, 2005, p.5).

En particular, en este trabajo se interpreta la modelización como una práctica de enseñanza que relaciona el mundo real y la matemática, la cual además de motivar el proceso de aprendizaje y ayudar a los alumnos a construir conceptos matemáticos relevantes, conforma un conocimiento por sí misma. De tal manera que la modelización no solo es un medio idóneo para trabajar contenidos matemáticos de forma activa y con actitud crítica, sino que se percibe como un contenido propio que curricularmente queda expuesto en el bloque de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* (Apartado 2.1.3.), y en el que se encuentran además todos los procesos que intervienen en el proceso de modelización y que veremos con detalle en la siguiente sección.

La idea de usar la modelización matemática como método de enseñanza de las matemáticas surgió a mediados de los años setenta por Barreto. Y nació vinculada al trabajo de proyectos en grupos pequeños y a la resolución de problemas. Actualmente, un proceso de aprendizaje basado en la modelización se puede implementar desde edades muy tempranas, en Educación Primaria, hasta niveles educativos superiores, como son los universitarios. En definitiva, “el papel que asume el alumno en el proceso es similar al que vive un matemático en el desarrollo de una investigación, con la salvedad de que el nivel de los conocimientos con los que trabaja es menor” (Romero, 2011, p.46).

En este trabajo se centrará su uso en Educación Secundaria Obligatoria, y se perseguirá, entre otros, que el alumno una vez termine esta etapa sea capaz de matematizar las situaciones o problemas cotidianos que se pueda encontrar en su día a día, ayudándolos a desarrollar su gusto por las matemáticas descubriéndolas no imponiéndoselas. Biembegut & Hein (2004) consideran que la modelización en el aula provoca que: el aprendizaje se vuelva más rico, considerando que el alumno no sólo aprende matemática inserta en el contexto de otra área de conocimiento, sino que también despierta su sentido crítico y creativo, (…) y es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significado o sentido para él. (p.107)

Además, parece propio citar, a modo de justificación de la importancia de llevar la modelización al aula, alguna de las reflexiones que realiza Miguel de Guzmán (en concordancia con las nuestras) sobre la modelización y sus aplicaciones en la educación matemática:

> Existe en la actualidad una fuerte corriente en educación matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas no se realice explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, (…) sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad. (…) Parece obvio que si nos limitáramos en nuestra educación a una mera presentación de los resultados (…) dejando a un lado sus orígenes en los problemas que la realidad presenta y sus aplicaciones para resolver tales problemas, estaríamos ocultando una parte muy interesante y sustancial de lo que la matemática verdaderamente es. A parte de que estaríamos con ello prescindiendo del gran poder motivador que la modelización y las aplicaciones poseen. (Guzmán, 1994, p.19)

Para poder implementar la modelización, lo primero que debemos tener en cuenta es cuáles son los puntos por los que debemos pasar y cuáles serán los procesos que intervienen en ella. Estos esquemas se conocen como ciclos de modelización y han sido objeto de muchos estudios, dejándonos diferentes propuestas con una intención común: describir de forma ordenada las fases diferenciadas que constituyen el proceso de modelización matemática.

3.2 Ciclo de modelización matemática

Existe una gran variedad de ciclos de modelización que intentan describir el proceso de modelización desglosándolo en diversos subprocesos que intervienen en el proceso. Nosotros mostraremos los diseñados por Pollak (1979) (*Figura 3*), por Galbraith, Stillman, Brown & Edwards (2007) (*Figura 4*) y el de Blum & Leiβ (2007) (*Figura 5*) ya que son algunos de los referentes a nivel internacional en modelización.

El primero de estos ciclos de modelización fue elaborado en 1979 por Pollak (*Figura 3).* En él podemos distinguir entre dominio matemático y el resto del mundo. Según expone Aymerich (2016), Pollak considera problemas con contexto real e introduce la idea de diferenciar la situación problemática en su propio entorno del producto matemático elaborado para dar respuesta a los interrogantes del problema.

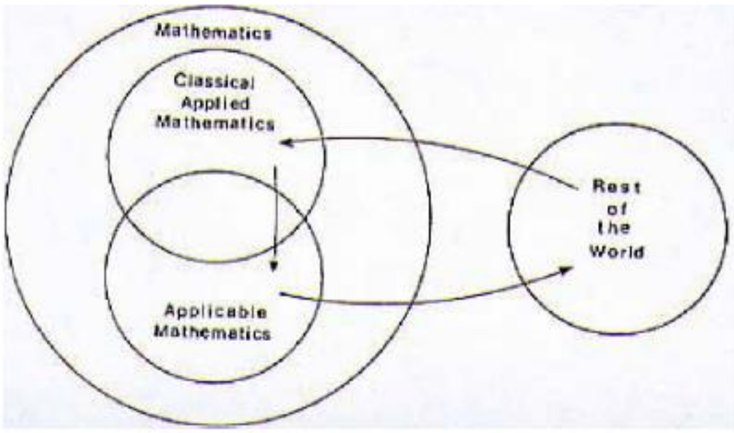


Figura 3. Ciclo de modelización. (Pollak, 1979)

Por otra parte, los ciclos de Galbraith, Stillman, Brown & Edwards (2007) (*Figura 4*) y el de Blum & Leiβ (2007) (*Figura 5*) parten de un problema o situación real y describen de manera más detallada la relación que se crea entre este y el problema matemático en el que deriva.

En ciclo de Galbraith y colegas (*Figura 4*) se distinguen siete subprocesos. Primero se presenta una situación del mundo real que mediante la comprensión, estructuración, simplificación e interpretación del contexto pasará a convertirse en el planteamiento de un problema del mundo real. A su vez, mediante la formulación y la matematización este se convierte en un modelo matemático del que obtendremos su solución matemática trabajando en él con herramientas matemáticas. A continuación, se interpreta esta solución matemática consiguiendo así una solución del problema real, que se deberá comparar, criticar y validar, hasta aceptar la solución, en cuyo caso solo quedará elaborar un informe justificando todo el proceso, o si la solución no es válida se tendrá que revisar todo el proceso de modelización hasta que se encuentre el fallo y se pueda dar una solución a la situación real (si es que esta existe).

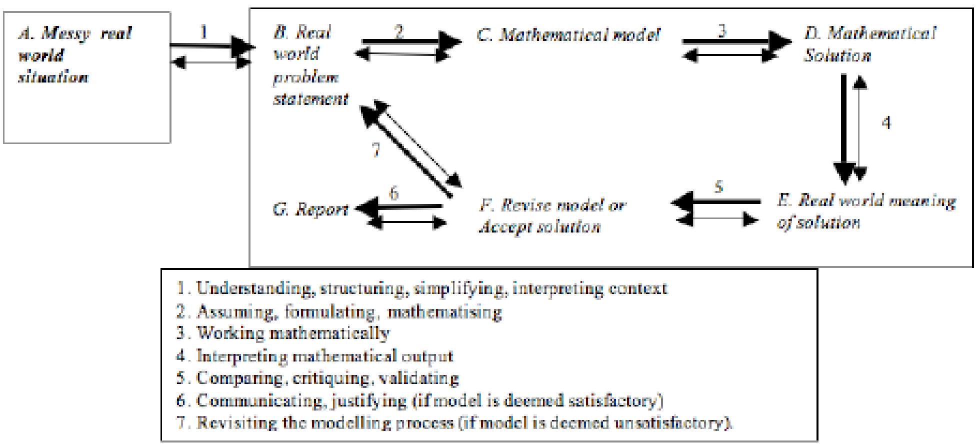


Figura 4. Ciclo de modelización. (Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007)

Por su parte, en el ciclo de Blum & Leiβ (*Figura 5*) también se pueden distinguir siete fases y es bastante similar al anterior ciclo que se acaba de presentar. Se parte de la situación real que mediante la comprensión pasa a ser un modelo de situación que al simplificarlo y estructurarlo se transforma en un modelo real. Ahora, matematizando este se transforma en un modelo matemático sobre el que se trabaja con herramientas matemáticas y se obtendrán unos resultados matemáticos que mediante la interpretación podremos considerarlos resultados reales. Estos resultados se validarán es el modelo de situación propuesto y se trasladará a la situación real inicial.

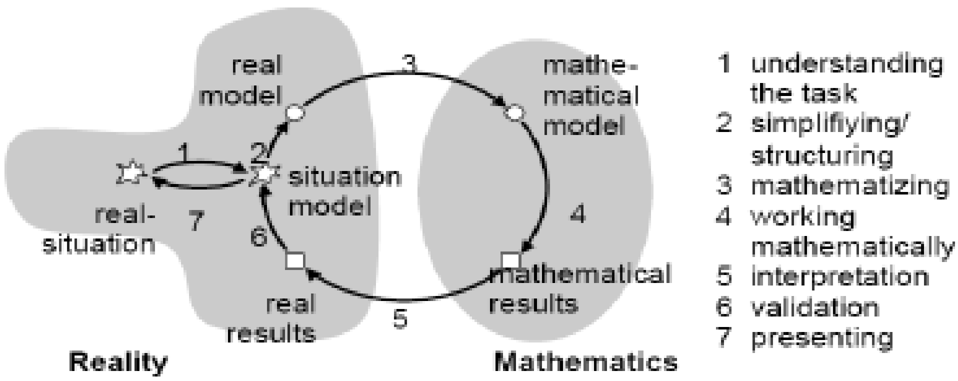


Figura 5. Ciclo de modelización. (Blum & Leiβ,2007)

Este último ciclo será el que tome de referencia la propuesta didáctica ya que se considera que describe de manera bastante precisa todos los estadios y procesos por los que el alumno deberá pasar para realizar de manera adecuada las tareas de modelización que proponen en dicha propuesta.

3.3 Competencias de modelización matemática

En el marco normativo de este trabajo se ha destacado la importancia que en la actualidad tiene la adquisición de competencias en la educación. Por ello, se necesitará analizar las competencias que trabajarán los alumnos cuando se enfrentamos a situaciones de modelización matemática, como las que se ofrecen en esta propuesta.

Muchas de las competencias que se trabajan en los procesos de modelización ya están incluidas en la propia definición que da la OCDE de competencia matemática. Basta recordar que en ella incluían la idea de formar ciudadanos reflexivos que usan el razonamiento matemático para explicar fenómenos y son capaces de reconocer el papel de las matemáticas en el mundo real. Desde este punto de vista, se puede decir, que la OCDE y, más en concreto, PISA orienta la matemática al aprender a aprender que centraliza el proceso de modelización.

Otras de las ventajas que ofrece el proceso de modelización en el aula es que ayuda a comprender como los alumnos razonan y como se desarrolla su aprendizaje. Siguiendo los pasos de Biccard (2010) se diferencian las competencias modelizadoras en tres grupos: competencias cognitivas, competencias afectivas y competencias metacognitivas.

- **Competencias cognitivas.** Son aquellas que ocurren en cada uno de los puntos del ciclo de modelización. Por tanto, tomando como ciclo de modelización el expuesto por Blum & Laiβ (2007) las competencias cognitivas se diferencian en una lista de siete subcompetencias que sirven para conocer el progreso de los alumnos durante el ciclo de modelización. Estas subcompetencias son las siguientes:

  a. **Comprensión.** Entendida como la capacidad de conocer la naturaleza de algo o asumir la información que está implícita. Solo se puede dar en relación a un contexto o experiencia.

  b. **Simplificación.** Sirve para ayudar a los estudiantes a determinar qué información es relevante y cual no, y así poder hacer más fácil el tratamiento del problema.

  c. **Matematización.** Consiste en la traducción del problema del mundo real en un problema matemático. Para ello, Mousoulides (Biccard, 2010) sostiene que: "los estudiantes deben identificar las variables y relaciones dentro del mundo matemático con variables y relaciones de condiciones y suposiciones anteriores" (p.70). Además, como expone Treffers (Biccard, 2010): "los alumnos no saben matematizar directamente, necesitan que se den una serie de factores: realidad personal, conocimiento matemático y contextualización del problema" (p.71).

  d. **Trabajar matemáticamente.** Se refiere a la selección, aplicación y uso de las matemáticas escogidas para resolver el problema.

  e. **Interpretar.** Según Borromeo Ferri (Biccard, 2010): "la interpretación hace referencia a la transición de los resultados matemáticos a los resultados reales, y confirma que a menudo los estudiantes realizan este proceso de manera inconsciente" (p.72).

f. **Validar.** Hace referencia no solo la verificación del resultado sino también a la validación del modelo para poder posteriormente generalizarlo a otras situaciones de la vida cotidiana.

g. **Presentar. "**Esta competencia implica la comunicación, el intercambio de ideas, información e instrucciones sobre el modelo matemático" (Biccard, 2010, p.73). Los alumnos tienen que ser capaces de justificar su modelo, así como cada una de las fases que han experimentado en su proyecto.

- **Competencias afectivas.** Las competencias afectivas que se trabajan en la modelización tienen que ver con las creencias sobre las matemáticas, la naturaleza de las tareas, cómo resolver problemas y el valor de las matemáticas en la resolución de un problema real.

  Por otra parte, una buena propuesta y gestión de la modelización en el aula puede ayudar a aumentar el interés y la motivación de los alumnos por las matemáticas, pero así mismo, estos constituirán un factor decisivo en el éxito del proceso de modelización. McLeod (1992) afirma que: "las emociones del alumno juegan un papel importante en el proceso de modelización" (p.578), y diferencia tres aspectos a tener en cuenta:

  - Los estudiantes tienen ciertas creencias sobre las matemáticas, sobre cómo se deben enseñar, sobre el contexto social en el que tiene lugar el aprendizaje matemático, y sobre la propia naturaleza de las matemáticas. Por ello, en ocasiones se sentirán reticentes a experimentar nuevos estilos de aprendizaje e incluso se les hará difícil comprender que están realmente están aprendiendo con un método que dista del habitual.

    De hecho, Schoenfeld (1992, p.69) señala algunas de las típicas creencias de los estudiantes acerca de la naturaleza de las matemáticas y que nosotros recogemos en la Tabla 11.

Tabla 11

Creencias de los alumnos acerca de la naturaleza de las matemáticas

Creencias de los alumnos acerca de la naturaleza de las matemáticas
Los problemas matemáticos tienen una sola solución correcta.

Solo existe un camino para llegar a la solución de un problema matemático.
Las matemáticas no se pueden comprender, solo se deben memorizar los pasos a seguir de manera mecánica.
Solo se puede estudiar matemáticas de forma individual.
Los alumnos que comprenden las matemáticas son capaces de resolver cualquier problema sin mucho esfuerzo en cinco minutos o menos.
Las matemáticas que se enseñan en el instituto no tienen nada que ver con el mundo real.
Las demostraciones formales son irrelevantes para los procesos de descubrimiento o invención.

Nota. Fuente: Schoenfeld (1992, p.69)

- Las interrupciones y los bloqueos son una parte inevitable del aprendizaje de las matemáticas y los estudiantes experimentarán emociones positivas y negativas, más notablemente con aquellas tareas que resulten una novedad para ellos.

- Los estudiantes desarrollarán una actitud positiva o negativa basada en la repetición de ciertas respuestas emocionales. Como ya se ha comentado anteriormente, ante el fracaso continuado los estudiantes pierden la motivación por aprender, y de manera análoga, ante experiencias de éxito repetitivas los estudiantes ganarán en autoestima y confianza.

McLeod prevé que, como el alumnado trabajará en grupos y necesitará de matemáticas básicas en la modelización, los bloqueos que surjan se superarán, encontrando una respuesta emocional positiva que producirá a su vez una actitud más positiva de los alumnos hacia las matemáticas.

Sobre la relación de la motivación y la modelización hablan muchos autores, entre ellos Zibiek & Conner (Biccard, 2010, p.76) proponen que la modelación se apoya en tres tipos diferentes de motivación:

- Por un lado, los alumnos se sentirán más atraídos hacia las matemáticas al ver la asociación que tienen estas con el mundo real. De lo que se puede deducir la importancia de proponer situaciones reales de entornos que resulten conocidos e interesantes para el alumno.

- Por otro lado, perciben directamente la aplicabilidad de las matemáticas al concebirlas como una herramienta útil en la solución de problemas complejos reales.
- Por último, la propia motivación por aprender nuevas matemáticas que necesita para resolver ciertas tareas concretas.

Esta motivación impulsa aún más el desarrollo de las competencias cognitivas en la modelización.

- **Competencias metacognitivas.**

  El término metacognición ha adoptado muchas definiciones a lo largo de su historia. En nuestro contexto, aceptaremos como válida la definición de Flavell (Schoenfeld, 1992, p.38), que entiende la metacognición como el conocimiento que tiene uno mismo sobre su propio conocimiento cognitivo cualquier cosa relacionada con el mismo. Es por ello que el contexto y el entorno de trabajo tendrán un fuerte peso en las competencias metacognitivas.

  Tomando como referencia esta concepción, y conscientes de los muchos aspectos que se pueden tener en cuenta en la metacognición, nosotros destacamos como competencias metacognitivas más importantes a tener en cuenta: el uso informal del conocimiento, la planificación y monitorización, y lo que se conoce como el sentido de la dirección ("sense of direction").

  - **Uso informal del conocimiento.** Según Mousoulides (2007, p.39) el uso de los estudiantes de su conocimiento informal sobre los diferentes contextos que pueden encontrarse es una de las competencias que se trabajan en los procesos de modelización. Por tanto, la orientación en tareas de modelización dependerá en gran medida de los contextos en las que estas estén situadas, de manera que, si las tareas se diseñan adecuadamente, usando contextos que resulten familiares a los alumnos, estos podrán orientarse en ellas más rápidamente.

  - **Planificación y monitorización.** Estos dos aspectos tienen una gran importancia en cualquier tarea profesional o académica, y más notablemente en las tareas de modelización (Lesh, 1988, p.54).

    Una buena planificación inicial puede evitar mayor trabajo en medio del proceso de modelización, ya que de haber planificado mal en un inicio, se llevarán a cabo todas las fases del proceso de modelización hasta que se encuentre un fallo y se tenga la necesidad de volver al principio y revisar el modelo propuesto. Además de una buena planificación inicial, será muy importante una capacidad de adaptación o ajuste durante el desarrollo del proceso. Los estudiantes que estén muy ligados a un entorno de aprendizaje tradicional tendrán más problemas a la hora de desarrollar su capacidad de ajuste.

De esta manera, los estudiantes que planifiquen y sepan ajustarse mejor a cada situación podrán sentir que tienen el control sobre el proceso. Estas capacidades se ven fortalecidas cuando las tareas de modelización se llevan a cabo en pequeños grupos de trabajo ya que todos los miembros podrán discutir los diferentes puntos de vista y pensamientos como individuos y como grupo y será una muy buena base para que los estudiantes desarrollen sus propias habilidades cognitivas.

- **Sentido de la dirección.** Según Treilibs (1980, p.52) el sentido de la dirección se entiende como la capacidad de prever la estructura subyacente del método de solución, incluyendo también bajo esta denominación la capacidad de los estudiantes para detener el proceso de modelado para validar su trabajo.

3.4 Niveles de competencia de modelización

Para distinguir los niveles de competencia de modelización recurriremos a las habilidades cognitivas, bases teóricas e investigaciones empíricas que considera Henning (2007), según el cual en el desarrollo de la competencia de modelización se pueden diferenciar tres niveles y cada uno de ellos se caracteriza por una serie de habilidades que posee el alumno que se encuentra en dicho nivel.

- **Nivel 1**: Reconocer y entender el modelado.
  Este nivel se caracteriza por:
  - Reconocer y describir procesos de modelización.
  - Caracterizar, distinguir y localizar las fases del proceso de modelización.

- **Nivel 2:** Modelado independiente
  Este nivel se caracteriza por:
  - Analizar y estructurar problemas y abstraer cantidades.
  - Adoptar diferentes perspectivas.
  - Configurar modelos matemáticos.

- Trabajar con modelos.
- Interpretar resultados y describir modelos.
- Validar modelos y su entero proceso.

- **Nivel 3:** Meta-reflexión sobre modelado

  Este nivel se caracteriza por:
  - Analizar críticamente el modelado.
  - Definir los criterios de evaluación del modelo.
  - Reflexionar sobre la causa del modelado.
  - Reflexionar sobre la aplicación de las matemáticas.

En resumen, en el primer nivel los alumnos deberían ser capaces de reconocer y entender los métodos empleados en el proceso de modelado. En el segundo nivel, son capaces de resolver los problemas de manera independiente, de forma que los alumnos deberían ser capaces de adaptar o crear nuevos modelos a partir de los conocidos, para las diferentes situaciones problemáticas que se les presenten. Y, por último, el tercer nivel, requiere de una reflexión que solo podrá ser alcanzada por aquellos alumnos que se hayan familiarizado perfectamente con el proceso de modelado y sean capaces de juzgar críticamente el proceso desarrollado y la utilidad que tiene el mismo en el mundo real.

En esta propuesta, en principio, no se espera que los alumnos alcancen el nivel 3 ya que se considera de difícil acceso para alumnos que no tienen mucha experiencia en procesos de modelado.

3.5 Papel del docente

A lo largo de este trabajo se ha justificado desde diferentes perspectivas el valor que tienen las actividades de modelización, fundamentalmente en el desarrollo de la competencia matemática, pero (como se verá más adelante) también en el del resto de las competencias claves. También se han citado algunas de las numerosas investigaciones o programas que se han llevado a cabo para contribuir al desarrollo de la modelización.

Sin embargo, actualmente sigue existiendo una gran brecha entre el avance teórico de la modelización y su implementación en el aula. Entre las razones de la existencia de esta brecha se encuentra la falta de formación docente. Es por ello que en este apartado, por un lado, se citarán algunas de las dificultades a las que se enfrentan los profesores de matemáticas al iniciar actividades de modelización, y por otro, se proporcionarán algunas de las pautas que deberá seguir un docente para incorporar y gestionar el modelado en sus clases de matemáticas. No se pretende, en ningún caso, convertir este espacio en una guía exhaustiva de cómo debe comportarse el profesor en el aula, primero de todo, porque la primera de las habilidades que debe tener un profesor y, más concretamente, de matemáticas, es el ser flexible y saber adaptarse a cada situación concreta, ya que su papel como profesor puede distar mucho de la propuesta de unas situaciones problemáticas a otras.

A nivel curricular, ya son muchos los planes de estudio del máster en profesor de enseñanza secundaria con especialidad en matemáticas que incorporan asignaturas sobre modelización, como es el caso de la Universidad de Valladolid que cuenta con una optativa llamada *Modelos Matemáticos en Educación Secundaria* y que puede servir de complemento a aquellos que en su formación de grado no se han familiarizado con los modelos matemáticos.

Sin embargo, actualmente, una de las dificultades principales que se encuentran muchos docentes están relacionadas con la falta de conocimientos propios sobre los procesos de modelización, tanto a la hora de plantear aquellos que resultan más beneficiosos para los alumnos en cada situación, como para su propia formulación matemática de ciertas situaciones problemáticas reales o en la gestión del aula de este tipo de tareas.

"La elaboración de un modelo matemático requiere, por parte del modelador, conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos. Además de una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto y discernir cuáles son las variables involucradas" (Biembengut & Hein, 2004, p.106).

Todo docente debe estar abierto a la innovación y al cambio, y lo primero que debe tener claro, es que para desarrollar este tipo de actividades se necesitará dedicar mucho tiempo y esfuerzo en su adecuada planificación y, posteriormente, se debe organizar y estructurar con cuidado la gestión de éstas en el aula, ya que algunas de las características propias de las actividades de modelación resultan incompatibles con las prácticas en el aula más tradicionales.

Una de estas características es que no tienen una única solución válida, ni mucho menos un único razonamiento posible para llegar a ella. De tal manera que el aprendizaje debe centrar su protagonismo en el alumno, y el profesor deberá solo guiarlo e incentivarlo para que sea él el que encuentre el camino o el razonamiento a seguir, y la solución o soluciones a las que llega a través de éste. El objetivo que se debe perseguir es que el alumno haga un proceso de reflexión, se enfrente al problema y lo resuelva de manera razonada.

Si el profesor percibe un bloqueo, por parte del alumno que le impide continuar razonadamente con el proceso, deberá intentar reconducir su razonamiento sin imponer su solución, ya que de imponerla estaría quitando el papel protagonista al alumno y situándolo en su tradicional papel pasivo, y una vez el alumno adopta el papel pasivo y receptivo es difícil que, dentro de aquella misma actividad, vuelva a tomar el papel protagonista.

Para saber cómo debe actuar el profesor sin quitar el papel protagonista del proceso al alumno Sol (2013) establece que se debe encontrar el punto de equilibrio entre la mínima guía del profesorado y la máxima autonomía del alumnado, y la mejor forma de ayudarlo indirectamente es mediante preguntas al alumno sobre su propio proceso del tipo:

- ¿Estás seguro de lo que haces?
- ¿Has pensado en probar…?
- ¿Qué es lo que desconoces?
- ¿Qué vas a hacer ahora?
- ¿Este resultado se ajusta a tu situación?
- ¿Reconoces algún patrón?

Por otra parte, como explican Gallart, García.Raffi & Ferrando (2019): "El debate, entendido como la confrontación argumentada de diversas estrategias de resolución para una misma tarea, juega un papel principal en el desarrollo de la actividad modelizadora" (p.79).

Por ello, el profesor debe conocer el papel que debe asumir en él (Tabla 12), motivo por el cuál, se debe diferenciar entre el "debate intragrupo", que lo definen como el que se produce entre los miembros del grupo cuando exponen, consensuan o reflexionan sobre su proceso de resolución; y el "debate intergrupo", que se produce con alumnos de otros grupos que han realizado, de forma independiente, la misma tarea, con el fin de intercambiar ideas y contrastar soluciones y estrategias.

Tabla 12

Papel del profesor durante una actividad de modelización

Papel del profesor	Objetivo	Momento	Desencadenante
Observador	Documentar el estado actual del proceso de resolución de los alumnos.	Debate intragrupo	Iniciativa del profesor.
Gestor de recursos	Proporcionar nuevas vías de resolución. Ayudar a centrar el problema.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.
Asesor	Aconsejar y resolver dudas.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos.
Moderador	Moderar y conducir el debate.	Debate intergrupo	Iniciativa del profesor.
Experto	Emitir juicios. Completar la información. Comparar los modelos. Formalizar el conocimiento.	Debate intergrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.

Nota. Fuente: Gallart, Garcia-Raffi & Ferrando (2019, p.79)

Por último, hay que poner de manifiesto, el creciente aumento de organismos, revistas y convenciones que tienen por objeto, no solo procurar más avances a nivel teórico sobre la modelización en secundaria, sino también proveer materiales, técnicas y consejos al profesorado para facilitar su implementación en el aula. Además, existen encuentros que sirven de espacio para la discusión y el intercambio de experiencias entre profesores que pueden contribuir a la mejora progresiva del desarrollo de estas actividades en el aula, y como formación para aquellos que se quieran comenzar a modelizar en el aula.

De entre ellas destaca, por su importancia internacional, el International Community of Teachers of Modelling and Applications (ICTMA) que es un grupo de trabajo perteneciente al Comité Internacional de Educación Matemática (ICMI) y realiza conferencias bianuales por todo el mundo con el objetivo de compartir investigaciones y experiencias del área de la modelación matemática a todos los niveles.

A nivel nacional, también existen diferentes formatos para promover la formación docente en diversos temas, de hecho, en la *X Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán* (organizada por la RSME y la FESPM) celebrada en julio de 2018 en la Facultad de Ciencias de la Universidad de la Laguna el tema principal era "La resolución de problemas como parte esencial del quehacer matemático" e iba dirigida a profesores de todos los niveles educativos. Además, desde 2005 en España se celebran las Jornadas de Modelización Matemática que, tras un parón de cinco años hasta su segunda edición en 2010, las Jornadas pasaron a ser bianuales, celebrándose en 2018 las VI Jornadas de Modelización Matemática en Valencia. Estas jornadas están dirigidas tanto a investigadores como a docentes que quieran formarse en la modelización matemática.

Por otra parte, entre la inmensa cantidad de artículos científicos que existen sobre modelización, vinculada a las Jornadas que se acabamos de citar, se encuentra la revista *Modelling in Science Education and Learning* (MSEL), que es una revista científica española de acceso abierto dedicada al uso de modelos en ciencias de la educación con una especial atención a los modelos de carácter matemático, y en ella se pueden encontrar muchas experiencias de aula con materiales disponibles para su uso y los análisis de los comportamientos de los alumnos ante tales tareas, así como propuestas de mejora para posibles implementaciones futuras.

4 PROPUESTA DIDÁCTICA

4.1 Introducción

En esta propuesta didáctica se pretende ofrecer algunos ejemplos de tareas contextualizadas motivadoras con las que poder llevar al aula el proceso de modelización, y contribuir al desarrollo de la competencia matemática y, más concretamente, a las competencias de modelización matemática descritas en el Apartado 3.3. Estas tareas deben responder al marco competencial y de evaluación que establece PISA (Apartado 2.2) y se trabajarán mediante metodologías de aprendizaje cooperativo y aprendizaje basado en problemas (Apartado 2.4.3). Junto con cada una de estas tareas podemos encontrar, entre otros, los objetivos concretos que se persiguen con cada una de ellas, las posibles dificultades que a priori podrían encontrar los alumnos cuando se enfrenten a ellas, el nivel de dificultad al que pertenece de los que se distinguen en PISA, posibles razonamientos válidos a seguir y el tiempo estimado en su realización por los grupos. Además, los papeles que adoptan alumno y profesor en ellas se ajustarán a los mencionados en apartados anteriores. Por tanto, esta propuesta constituye una pequeña guía para los docentes que quieran comenzar a implementar la modelización en el aula de matemáticas.

Las tareas que se pueden encontrar en esta propuesta didáctica son situaciones de modelización matemática, enfocadas para alumnos de 4ºESO de matemáticas académicas. Esta colección de tareas consta de dos partes atendiendo a su propia estructura y el objetivo de su implementación. La primera parte está compuesta por actividades originales de corta duración (de 10-30 min), inspiradas en los ítems liberados de PISA y en los problemas basados en situaciones (LEMA), que están diseñadas con la idea de que se puedan incluir en la dinámica del curso escolar cuando el profesor considere más adecuado, y sirvan como primer contacto de los alumnos con las tareas de modelización. Por otro lado, se presenta un proyecto original, inspirado en el trabajo realizado por Gallart & Garcia- Raffi (2013), que está planificado para llevar a cabo en dos o tres semanas, y que se considera adecuado implementarlo en el aula después de que el alumnado haya tenido alguna experiencia previa anterior con tareas de modelización, como la que ha podido suponer la realización de actividades del tipo a las que presentaremos en la primera parte.

Es importante resaltar que estas tareas no suponen un contenido a mayores del ya establecido para 4ºESO, razón por la cual, lo que se ofrece en este trabajo es una propuesta didáctica y no una unidad didáctica con sesiones propias. Las tareas de modelización servirán para fortalecer el currículo, fomentando el trabajo de competencias, de tal manera que las actividades aquí propuestas se integrarían en las unidades didácticas a las que perteneciese su área de conocimiento, y se combinarían con actividades de otro tipo propuestas para esa unidad. Por su parte, el proyecto no forma parte de ninguna unidad didáctica en sí, pero trabaja aspectos de muchas de ellas, además de ser un muy buen exponente del contenido que queda recogido en el currículo en el bloque 1 de *Procesos, contextos y aspectos matemáticos.*

4.2 Contribución a las competencias básicas

En este apartado se citarán las siete competencias básicas que se establecen en el Real Decreto 1105/2014 y que se van a trabajar mediante las tareas de modelización que se han diseñado en la propuesta didáctica que se ofrece en este trabajo.

- **Competencia lingüística.** La expresión escrita y oral serán trabajadas continuamente mediante la formulación, expresión y confronto de ideas que se deben llevar a cabo para la realización que actividades y proyecto. Además, la comprensión oral será base para llegar a entendimientos en los debates intragrupo e intergrupo.

- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.** Además de utilizar herramientas matemáticas en la resolución de los problemas planteados matemáticamente, a través de estas tareas de modelización se está favoreciendo el uso de distintas formas de pensamiento matemático, de tal manera que forman parte del propio aprendizaje todos los procesos involucrados en el ciclo de modelización, con el fin de conseguir interpretar y describir la realidad y poder actuar sobre ella. En definitiva, se desarrolla la competencia matemática mediante el trabajo de las competencias de modelización.

- **Competencia digital.** Por un lado, se necesitará recurrir a los recursos digitales para la recogida y tratamiento de la información necesaria en el proyecto de investigación. Por otro lado, en la colección de actividades se ha indicado aquellas en las que resultaría interesante mostrar a los alumnos como se podría usar GeoGebra y de qué manera este recurso gráfico nos simplificaría el trabajo.

- **Aprender a aprender.** Con este tipo de tareas se favorece que el alumno vaya tomando conciencia de todos aquellos factores que afectan a su aprendizaje. Además, lo primero que aprenden es el qué deben hacer, cómo deben planificar el desarrollo de la tarea y comprender que el uso de simplificaciones puede resultar útil cuando tengan que enfrentarse a situaciones problemáticas. Una vez que avanzan en el desarrollo pueden enfrentarse a situaciones en las que deben reflexionar sobre qué deben cambiar si han llegado a una solución que no se puede ser aceptada en el problema de la situación real, por qué ocurre esto, qué han aprendido del error cometido, etc.

- **Competencias sociales y cívicas.** En la propuesta planteada se ha apostado por un aprendizaje cooperativo en pequeños grupos de trabajo, donde deberán debatir acerca de diferentes razonamientos y opiniones, y tendrán por tanto aprender a argumentar sus ideas, escuchar las de los demás, y en definitiva aprender a trabajar en grupo. Además, se procura el desarrollo en el alumno de la reflexión crítica y la capacidad de juzgar por sí mismo la información (un ejemplo claro lo constituye la "Actividad 5: La crítica de Netflix" donde a partir de unos mismos datos se pueden obtener conclusiones muy distintas).

- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.** El alumno adopta el papel protagonista en el proceso de aprendizaje, ya que es él el que tiene la responsabilidad de planificar las estrategias a seguir y encargarse de la toma de decisiones, promoviendo así en él actitudes como la autonomía, la creatividad o la autocrítica.

- **Conciencia y expresiones culturales.** Esta competencia se trabaja mediante algunos de los contextos que hemos elegido para situar nuestras tareas de modelización de esta propuesta didáctica.

4.3 Objetivos generales

Los objetivos que se pretenden alcanzar con esta propuesta de tareas de modelización son:

- Favorecer el aumento del interés por las matemáticas y la motivación hacia las mismas, mediante el diseño de tareas de modelización que respondan al marco competencia y de evaluación de PISA y contribuyan al desarrollo de la competencia matemática.
- Favorecer el desarrollo de las competencias inmersas en el proceso de modelización, tales como, la comprensión de enunciados reales (que a su vez trabaja la competencia lingüística), la simplificación de un problema en problemas más sencillos para hacer posible su abordaje, la matematización o transformación de los problemas reales en problemas formulados matemáticamente, el trabajar matemáticamente en la resolución

de estos problemas y la interpretación, validación y presentación de los resultados obtenidos.

- Ofrecer al alumno la posibilidad de observar, mediante ejemplos reales, la aplicación práctica de las matemáticas.
- Crear situaciones que propicien el error del alumno y su aprendizaje derivado a este.
- Ofrecer situaciones de aprendizaje en las que el alumno se ve en la obligación de tomar decisiones, potenciando así la competencia de sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
- Fomentar el aprendizaje cooperativo y el aprendizaje basado en problemas, ayudando así al desarrollo de las competencias sociales y cívicas.
- Favorecer el aprendizaje significativo y la competencia de aprender a aprender.

Todos estos objetivos pretenden ir en las líneas de trabajo marcadas por la Comisión Europea, la OCDE, y las legislaciones nacionales y regionales, como hemos comentado en el Apartado 2.

Además de estos objetivos generales, tanto en cada una de las actividades como en el proyecto propuesto, se especificarán los objetivos concretos que pretendemos alcanzar con cada una de estas tareas.

4.4 Metodología

Para poder justificar metodológicamente esta propuesta se deberá tener en cuenta gran parte de la fundamentación teórica que se ha ido exponiendo en este trabajo.

Por una parte, tanto en las actividades como en el proyecto, como metodologías base se usará el aprendizaje basado en problemas junto con el aprendizaje cooperativo (grupos de 3-4 personas), ya que cuando se trabaja el ABP en pequeños grupos, hemos visto que sus ventajas aumentan considerablemente (facilitan la superación de bloqueos, aumento de la motivación, trabajo de mayor numero de competencias claves), y además este método es idóneo para los desarrollos de procesos de modelización (Apartado 2.4.3.). Más aún, los papeles que adoptan alumno y profesor en esta metodología se ajustan a los que se deben adoptar en un desarrollo del proceso de modelización en el aula (Tabla 9 y Tabla 10) en el que el protagonismo de la acción debe recaer en el alumno y el profesor debe limitarse a ser un guía del aprendizaje u orientador que debe ser muy cuidadoso en cuanto a sus indicaciones (Tabla 12).

Además, tanto las actividades como el proyecto que se proponer tienen que cumplir una serie de características:

- Que respondan al marco competencial y de evaluación que establece PISA (Apartado 2.2). Es decir, involucren los procesos, capacidades, contenidos y contextos ahí descritos.

- Los contextos en los que se sitúen deben intentar proporcionar al alumno una motivación inicial hacia la tarea. Y, si bien los datos del problema puedan ser inventados, deben responder a posibles realidades. Para contribuir a esta motivación inicial también se les proporcionará junto con la tarea el objetivo de la misma (Apartado 2.3).

- No deben dar pie al alumno a interpretarlas como un conjunto de reglas o instrucciones a seguir. Deben darles la oportunidad de reflexionar sobre distintas estrategias en su resolución.

- La solución no tiene por qué ser única, debe ser razonada y válida según la situación real que se plantea.

- Las matemáticas que involucren deben corresponderse con su capacidad y nivel. Si el alumno percibe que no es capaz de resolverlo perderá el interés y la motivación por intentarlo (Apartado 2.3)

Otro de los aspectos a tener en cuenta en esta propuesta, y que a su vez está relacionado con las capacidades básicas del marco de PISA, es el ciclo de modelización por el que pasarán los alumnos en el desarrollo de las tareas y, más notablemente, en la realización del proyecto. Como afirma Maaβ (2006), la importancia del ciclo de modelización radica en el hecho de que nos da un marco de referencia para describir las acciones que se dan en la resolución de una tarea de modelización.

Por ello, parece adecuado usar la herramienta de análisis (Tabla 13) diseñada por Gallart & García.Raffi (2017, p.140) para la evaluación del trabajo de cada grupo. Esta herramienta está formada por una serie de preguntas vinculadas a las fases que se distinguen en el ciclo de modelización establecido por Blum & Leiβ (*Figura 5*), que son: comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar, validar y presentar.

Tabla 13

Herramienta de análisis de las producciones de los grupos

Pregunta	Acción
¿Se formula un problema que pueda dar respuesta, total o parcial, a la situación original propuesta?	Comprender la situación en la que se enmarca la tarea, tomando decisiones, elaborando hipótesis y supuestos que lleven al planteamiento de un problema o sub-problemas.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?	Simplificar y seleccionar los elementos y relaciones relevantes, identificando las matemáticas que subyacen en la realidad.
¿Se usan representaciones?	Utilizar representaciones (gráficos, dibujos, esquemas,...) para codificar la realidad en términos matemáticos e interpretar los resultados obtenidos.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	Utilizar el lenguaje formal y simbólico para codificar la realidad en términos matemáticos, resolver el problema, e interpretar los resultados obtenidos.
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	Trabajar con las herramientas y procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema planteado.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	Validar las soluciones matemáticas en la realidad, reflexionando sobre el modelo utilizado y llegando a conclusiones razonadas.

Nota. Fuente: Gallart & García-Raffi (2017, p.140)

Las actividades están pensadas para que se trabajen única y exclusivamente en las horas de clase. Por tanto, su evaluación se hará usando esta herramienta (Tabla 13) y respondiendo a las preguntas que en ella aparecen mediante:

- La observación del profesor del trabajo en el aula.
- La realización por escrito de la actividad.

Por su parte, el proyecto está pensado para que se trabaje, de forma prácticamente completa, en las horas de clase (no obstante, los alumnos tendrán la posibilidad de avanzar fuera del aula si lo considerasen oportuno), por tanto, su evaluación se hará usando esta herramienta (Tabla 13) y respondiendo a las preguntas que en ella aparecen mediante:

- La observación del profesor del trabajo en el aula.
- El porfolio que redacta cada grupo con todo el proceso seguido.
- La exposición oral al profesor y al resto de los alumnos de las conclusiones finales y la valoración del trabajo realizado.

4.5 Colección de actividades

Este conjunto de actividades pretenden ser una pequeña guía o material para el docente que quiere iniciar a sus alumnos en las competencias de modelización. Para su realización se requiere de la formación de pequeños grupos de trabajo (3-4 personas) y que el profesor adopte el papel de guía y debe cuidar sus intervenciones siguiendo las recomendaciones que hemos visto anteriormente.

Actividad 1: Sillas que den la talla

Descripción del problema: Es por todos conocido que habitualmente las sillas de clase se quedan pequeñas para los alumnos que cada vez son más altos. Se quiere estimar de forma argumentada qué altura aproximada deberán tener las patas de las sillas de las clases palentinas de 4ºESO en el año 2049 distinguiendo entre chicos y chicas.

Datos:

- La medida de la planta del pie a la rodilla es aproximadamente un cuarto de la altura total de la persona (equivalente a la medida de las patas de la silla).
- La Tabla 14 nos proporciona datos sobre la altura de chicos y chicas palentinas de 4ºESO de diversos años.

Tabla 14

Alturas por años alumnos 4ºESO Palencia

Alumnos palentinos 4ºESO			
Chicos		Chicas	
Altura (media)	Año	Altura (media)	Año
163.9cm	1959	156.0cm	1980
164.4cm	1969	156.8cm	1986
165.1cm	1979	157.1cm	1989
165.8cm	1989	157.7cm	1995
166.3cm	1999	158.0cm	2001
167.8cm	2019	160.3cm	2019

Área de contenido matemático: Incertidumbre y datos
Contexto: Social
Categoría del proceso: Interpretar
Nivel de dificultad: 3

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar y presentar.

Objetivo: Que a partir de la interpretación de los datos los alumnos sean capaces de encontrar la relación aproximada entre la altura media de la actualidad y la del 2049, relacionando a su vez esta con la altura de las patas de una silla.

Posibles dificultades: El primer bloqueo que podemos prever es que el alumno no sepa interpretar los datos de la Tabla 1 de manera correcta e intente hallar la altura de los alumnos en 2049 "a ojo" en vez de calculando el incremento medio por cada 1,10 o 30 años (o algún otro razonamiento argumentado) en el caso de los chicos y por cada 1,6 o 30 años en el caso de las chicas. Si superan este paso la siguiente dificultad puede venir en formular la altura en 2049 en función de la actual más el incremento correspondiente. (Varios razonamientos pueden ser válidos)

Posibles razonamientos válidos:
Para los chicos:
1.Calculamos el incremento medio por cada 10 años, lo multiplicamos por las tres décadas que hay de 2019 a 2049 y se lo sumamos a la altura que presentan en 2019. A continuación, para calcular la altura aproximada de la silla basta dividir esa cantidad entre cuatro.
2. Calculamos el aumento en los últimos 30 años y se lo sumamos a la altura en 2019. A continuación, para calcular la altura aproximada de la silla basta dividir esa cantidad entre cuatro.
3. Calculamos el incremento de 1959 a 1989, y el incremento de 1989 a 2019, hacemos su media y se lo sumamos a la altura de 2019.
Para las chicas: (razonamientos análogos)

Tiempo estimado de realización: 20 min.

Actividad 2: Ofertas de trabajo

Descripción del problema: Llega el verano y como tienes vacaciones decides trabajar julio y agosto para sacarte un dinerillo. Te han llegado dos ofertas de trabajo para estos dos meses completos y tienes que razonar gráficamente cuál es la mejor atendiendo al sueldo.

Datos:

- La Tabla 15 nos proporciona los datos con respecto al sueldo fijo y las horas trabajadas durante los fines de semana que hay en el periodo de trabajo (9 fines de semana).

Tabla 15

Sueldos oferta A y oferta B

	Oferta A: Socorrista	Oferta B: Monitor de tiempo libre
Sueldo temporada	1700€	1900€
Horas extra (fin de semana)	13€/h	8€/h

- En ambos empleos se trabajan 6h de media cada fin de semana.

Área de contenido matemático: Cambio y relaciones

Contexto: Profesional

Categoría del proceso: Formulación

Nivel de dificultad: 3

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar y presentar.

Objetivo: Comprobar el manejo de las expresiones algebraicas, así como su interpretación gráfica, identificando las distintas situaciones en función de las horas extra realizadas.

Posibles dificultades: La primera dificultad correspondería a la formulación del sueldo final en ambos trabajos. Una vez el alumno tiene la fórmula tiene que ser capaz de asociar el razonamiento gráfico que le están pidiendo con la resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde las dos variables en juego son el sueldo total y las horas extra realizadas al fin de semana. Finalmente, siendo x la solución del sistema, buscaríamos un razonamiento del tipo: “de 0 a x horas conviene más un trabajo y a partir de x horas el otro, como seis es mayor (menor) que x, cobraremos más en el trabajo A (B)”.

Posibles razonamientos válidos:

1.Según lo que podemos observar en la gráfica la oferta A es mayor siempre que se trabaje 4.44h de media los fines de semana o más. Como sabemos que de media se trabaja 6h cada fin de semana, ganaré más dinero de socorrista que de monitor de tiempo libre.

2. La recta que representa la oferta A queda por encima de la de la oferta B para una media de 6h cada fin de semana, por tanto, ganaré más dinero de socorrista.

Tiempo estimado: 20 min

Características adicionales: Aconsejable su comprobación a posteriori con GeoGebra (*Figura 6*) (Media horas fin de semana (x)-Sueldo total(y))

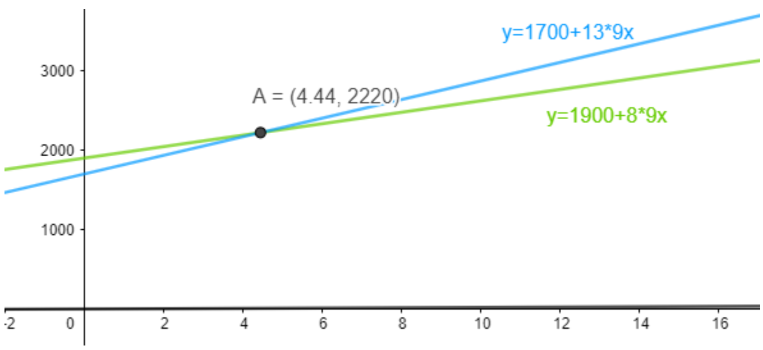


Figura 6. Representación en GeoGebra (Actividad 2)

Actividad 3: Nuevas equipaciones

Descripción del problema: Perteneces a un equipo de natación y necesitáis renovar los bañadores oficiales de todo el club. Para conseguir sufragar parte de los gastos vais a preparar dos cestas regalo para vender por el día del padre. ¿Cuántas cestas tendréis que preparar de cada tipo si queréis maximizar los beneficios?

Datos:

- La cesta A contiene una camiseta del club y dos participaciones para un viaje de un fin de semana a una casa rural. Y cuesta 8€.
- La cesta B contiene tres camisetas del club y dos participaciones para un viaje de un fin de semana a una casa rural. Y cuesta 12€.
- Disponéis de un máximo de 500 camisetas y 700 participaciones.

Área de conocimiento matemático: Cambio y relaciones
Contexto: Personal
Categoría del proceso: Interpretar
Nivel de dificultad: 4

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar, validar y presentar.

Objetivo: Comprobar la interpretación de relaciones, así como su concepción de máximo.

Posibles dificultades: La primera dificultad la encontramos a la hora de formular el problema como un sistema de inecuaciones. La segunda atiende a la interpretación gráfica de una inecuación. Y por último una vez han resulto el sistema en trasladar esa información a su problema de maximizar.

Posibles razonamientos válidos:

1.Establecer las condiciones de número máximo de camisetas y participaciones disponibles ($x + 2y \leq 500, 3x + 2y \leq 700$) y suponer $x \geq 0, y \geq 0$. A continuación, resolver algebraicamente el sistema de inecuaciones y comprobar que con cualesquiera valores de x e y distintos de la solución los beneficios son menores.

2.Establecer las condiciones de número máximo de camisetas y participaciones disponibles ($x + 2y \leq 500, 3x + 2y \leq 700$) y suponer $x \geq 0, y \geq 0$. A continuación, resolver gráficamente el sistema de inecuaciones y comprobar que con cualesquiera valores de x e y distintos de la solución los beneficios son menores.

Tiempo estimado: 30 min

Características adicionales: Aconsejable su comprobación a posteriori con GeoGebra (*Figura 7*) (nºcestas A (x)-nºcestas B (y))

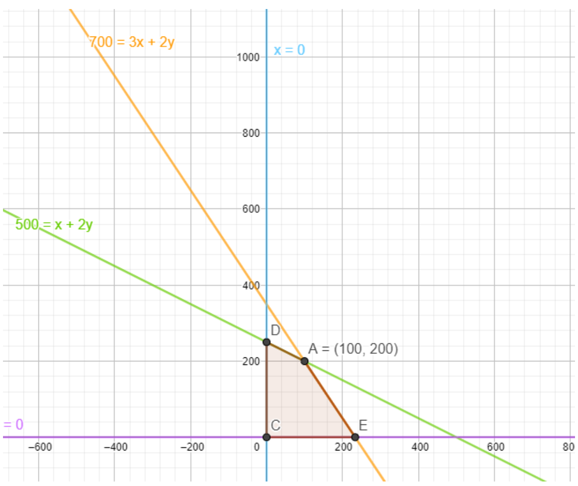


Figura 7. Representación en GeoGebra (Actividad 3)

Actividad 4: La huerta

Descripción del problema: Tus abuelos tienen un terreno en el pueblo y quieren convertirlo en una huerta. Quieren que el 50% del terreno se dedique a calabacines, un tercio de la superficie de calabacines para zanahorias y el resto lo dedicarán a patatas. ¿Cuántos kilos obtendrán aproximadamente de patatas?

Datos:

- La *Figura 8* corresponde a los planos del terreno.

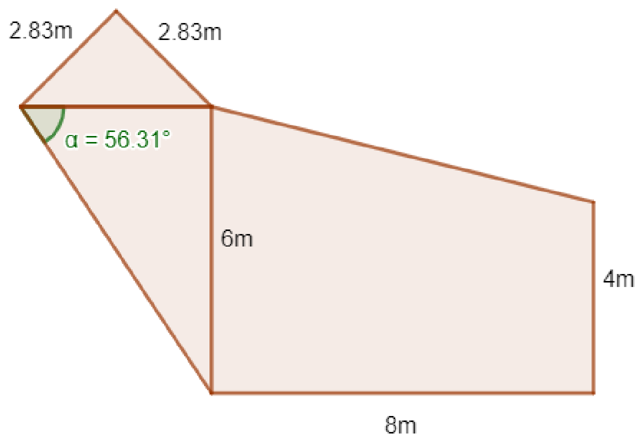


Figura 8. Planos del terreno (Actividad 4).

- Por cada metro cuadrado que se dedica al cultivo de patata se estima que se obtendrán 3kg de patatas.

Área de conocimiento matemático: Espacio y forma

Contexto: Social

Categoría del proceso: Empleo

Nivel de dificultad: 3

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, trabajar matemáticamente y presentar.

Objetivo: Trabajar cantidades dadas de distintas formas, aplicar propiedades de triángulos rectángulos y calcular superficies de polígonos.

Posibles dificultades: La primera dificultad se puede plantear al no saber extraer los datos del problema. Posteriormente se necesitan recordar cómo se trabaja con triángulos rectángulos.

Posibles razonamientos válidos:

1.Calculamos la superficie de la huerta como suma de la superficie de polígonos, calculamos el porcentaje que se dedicará a patatas, de lo que obtenemos los m^2 que se dedicarán a patatas y ahora basta multiplicar por 3 para obtener la aproximación de kg de patatas que se obtendrán.

Tiempo estimado: 30min

Actividad 5: La crítica de Netflix

Descripción del problema: Recientemente se ha publicado una encuesta realizada a los usuarios de Netflix que comparan las series Juego de Tronos y Breaking Bad.

Dos revistas de crítica de cine han usado esa encuesta para decidir qué serie es mejor. Una de las revistas ha dado argumentos a favor de Juego de Tronos mientras que la otra ha dado argumentos a favor de Breaking Bad. Ponte en la piel de las dos revistas y da al menos un argumento a favor de cada una.

Datos:

- En el siguiente diagrama (*Figura 9*) se muestra la encuesta realizada con las valoraciones de los usuarios sobre ambas series, con una puntuación de 0 a 5 estrellas.

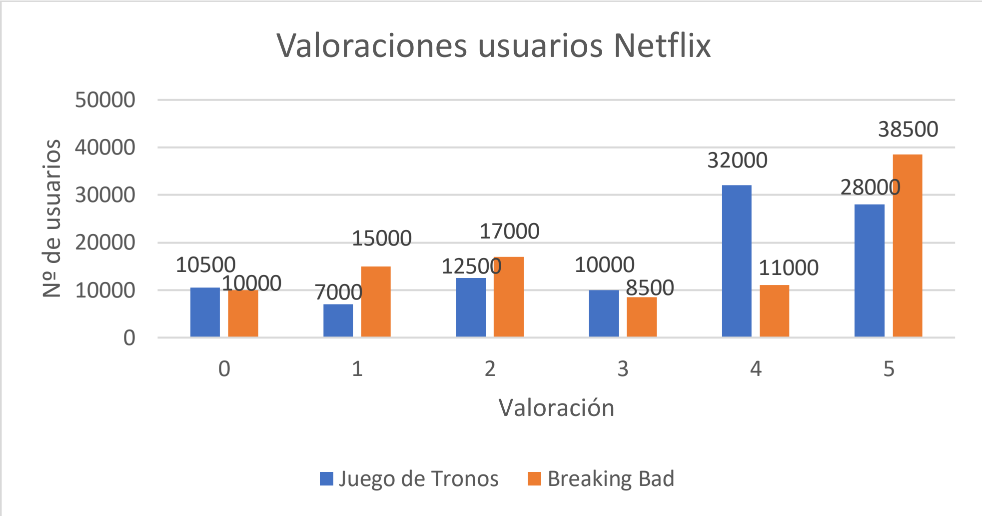


Figura 9. Valoraciones usuarios Netflix (Actividad 5)

Área de conocimiento matemático: Incertidumbre y datos

Contexto: Social

Categoría del proceso: Interpretación

Nivel de dificultad: 2

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, trabajar matemáticamente, interpretar y presentar.

Objetivo: Comprobar la capacidad de argumentación matemática y la interpretación de datos.

Posibles dificultades: La única verdadera dificultad esta en saber interpretar los datos de una gráfica.

Posibles razonamientos válidos:

A favor de Juego de Tronos (JDT):

1.La mediana de JDT se sitúa en las 4 estrellas, mientras que la de BB en las 3 estrellas.

2.El 70% de los encuestados aprueba la serie, frente al 58% de BB.

A favor de Breaking Bad (BB):

1.El número de encuestados que ha valorado BB con la puntuación máxima (5 estrellas) es mayor que el de JDT.

2.BB tiene menor número de encuestados que la ha valorado con la puntuación mínima (0 estrellas) que JDT.

Tiempo estimado: 20 min

Actividad 6: Vacaciones

Descripción del problema: Quieres planificar tus vacaciones a Florencia, para ello consultas en una página web de viajes donde tú mismo te puedes planificar tu viaje escogiendo entre distintos vuelos (ida y vuelta), traslado (de ida y vuelta del aeropuerto a Florencia) y hoteles. Calcula entre cuántos paquetes de viaje distintos podrás escoger y cuánto pagarás por los vuelos, el traslado y el hotel como mínimo y como máximo.

Datos: Estas son las distintas ofertas entre las que puedes escoger (Tabla 16):

Tabla 16
Catálogo de ofertas

	Iberia	**Alitalia**	**Vueling**
Vuelos (Ida y vuelta)	200€	178€	153€

	Autobús	**Taxi**
Traslado (aeropuerto-Florencia)	6€	15€

	Hotel A	**Hotel B**	**Hotel C**	**Hotel D**
Hoteles	500€	570€	700€	880€

Área de conocimiento matemático: Cantidad

Contexto: Personal

Categoría del proceso: Empleo

Nivel de dificultad: 2

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar y presentar.

Objetivo: Usar los datos dados para calcular el número de opciones posibles y de entre ellas la más cara y la más barata.

Posibles dificultades: A la hora de contar todas las posibilidades los alumnos que no usen métodos de recuento o un diagrama de árbol es posible que se olviden de algunos casos.

Posibles razonamientos válidos:

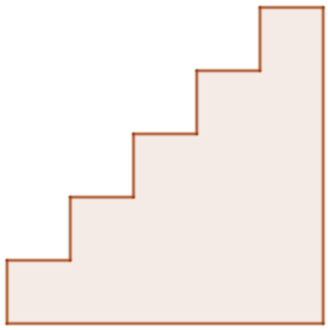
1.Contar mediante un diagrama de árbol o algún método rudimentario todas las posibilidades. Calcular el mínimo (máximo) sumando las menores (mayores) cantidades.

2.Percibir que se trata de un problema de combinaciones, por tanto, bastará con multiplicar $C_{3,1} * C_{2,1} * C_{4,1}$ para obtener el número total de posibilidades distintas. Calcular el mínimo (máximo) sumando las menores (mayores) cantidades.

Tiempo estimado: 15 min

Actividad 7: La escalera

Descripción del problema: Calcular de cuántas maneras distintas podemos subir una escalera de 5 escalones suponiendo que como máximo se permite subir los escalones de dos en dos.



Área de conocimiento: Cantidad

Contexto: Social

Categoría del proceso: Empleo

Nivel de dificultad:2

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificar, matematización, trabajar matemáticamente e interpretar.

Objetivo: La introducción de la sucesión de Fibonacci a partir de su construcción mediante el ejemplo dado.

Posibles dificultades: De concepción del problema.

Posibles razonamientos válidos:

1.Atacar el problema directamente y contar los casos posibles para la escalera de 5 escalones.

2.Comenzar contando desde la escalera de 1 escalón hasta la de 4 escalones y calcular la de 5 escalones a partir de la de 4.

Tiempo estimado: 15 min

(Modificada de Romero (2015, p.60))

Actividad 8: La piscina

Descripción del problema: Queremos construir una piscina en nuestro jardín para poder entrenar en verano. En el ayuntamiento nos han dado una licencia para construir piscinas de como máximo 100 m^2.

Datos:

- Una piscina reglamentaria tiene forma rectangular y mide 25m de largo y cada calle mide 2m de ancho.

- Necesitamos rodear la piscina con un vallado para que los niños pequeños no se caigan al agua por accidente.

Pregunta 1: Si decidimos que su superficie sea de 100 m^2, ¿necesitaremos la misma longitud de vallado independientemente de la forma que escojamos para la piscina?

Área de conocimiento matemático: Espacio y forma
Contexto: Personal
Categoría del proceso: Formulación
Nivel de dificultad:4

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar y presentar.

Objetivo: Comprobar qué piensan los alumnos en cuanto a la relación que pueda existir entre el perímetro y la superficie de una figura plana.

Posibles dificultades: Aquellos alumnos que no usen algún ejemplo sencillo en su razonamiento tendrán más opciones de equivocarse que aquellos que sí que recurran a ello.

Posibles razonamientos válidos:
1.Razonamar mediante ejemplos sencillos y concluir que la respuesta es negativa.

Tiempo estimado: 10 min

Pregunta 2: Razona si podremos construir una piscina reglamentaria con dos calles si disponemos de 54m de vallado.

Área de conocimiento matemático: Espacio y forma
Contexto: Personal
Categoría del proceso: Formular
Nivel de dificultad: 2

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, matematización, trabajar matemáticamente y presentar.

Objetivo: Comprobar si los alumnos son capaces de identificar el problema y transformarlo matemáticamente un enunciado relacionado con medidas y superficies de rectángulos.

Posibles dificultades: La dificultad reside en entender bien lo que nos piden.

Posibles razonamientos válidos:

1.Calcular el perímetro de la piscina que nos están pidiendo y comprobar que es mayor que la longitud de vallado de la que disponemos.

Tiempo estimado: 10 min

Características adicionales: Aconsejable su comprobación a posteriori con GeoGebra (*Figura 10*)

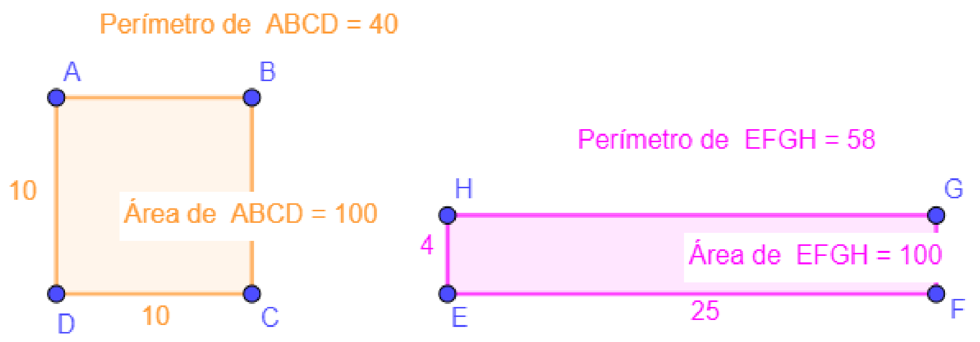


Figura 10. Representación Actividad 8 en GeoGebra

<u>Actividad 9: Videoconferencias al tiempo</u>

Descripción del problema: Un grupo de matemáticos de la Universidad de Madrid están realizando una investigación conjunta con matemáticos de la Universidad de Sydney y matemáticos de la Universidad de Edimburgo, para ello necesitan establecer un horario adecuado que les permita a todos realizar videoconferencias periódicas. Razona si hay alguna franja de tiempo en la que puedan coincidir y si no la hay qué solución piensas que sería la más adecuada para que puedan realizar las videoconferencias.

Datos:

- Cuando en Madrid son las 13h, en Edimburgo son las 12h y en Sydney las 21h.
- En Madrid están disponibles de las 9.00h a las 18.00h.
- En Edimburgo están disponibles de las 7.00h a las 16.00h.
- En Sydney están disponibles de las 8.00h a las 17.00h.

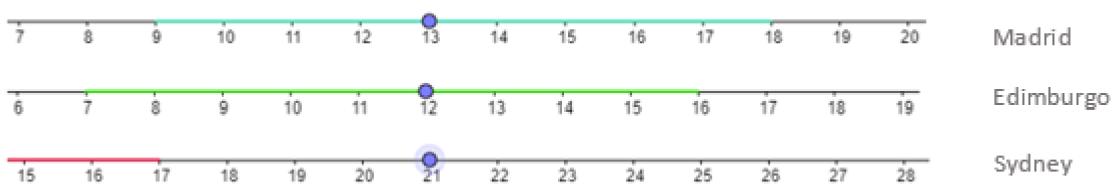
Área de conocimiento matemático: Cambio y relaciones
Contexto: Científico
Categoría del proceso: Interpretación
Nivel de dificultad: 3

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, validar y presentar.

Objetivo: El objetivo es hacer reflexionar a los alumnos a partir de un problema común y sencillo, comprobando sus nociones de ordenación de números e intersección de sucesos.

Posibles dificultades: Pueden cometer errores de cálculo o errores en el razonamiento de buscar la mejor solución.

Posibles razonamientos válidos:
1.Ayudarse de una representación gráfica de líneas que muestren las horas en las tres ciudades, representar los intervalos en los que están disponible cada uno y ver si hay intervalos que coinciden.



Como no hay ningún espacio de tiempo en el que coincidan los tres se debe elegir una solución, que podría ser que en Madrid entrasen una hora antes a trabajar y así podrían hacer la reunión de 8.00-9.00 en Madrid, de 7.00-8.00 en Edimburgo y de 16.00-17.00 en Sydney.

Tiempo estimado: 20 min

Actividad 10: Riego aspersores

Descripción del problema: Un jardinero lleva 20 años encargándose del mantenimiento de un jardín que tiene cuatro aspersores. Calcula el aumento del coste por m^3 que ha sufrido el agua desde hace 20 años a partir de los datos que conoces del jardín.

Datos:

- El caudal de cada aspersor es de 250 l/h.
- Los aspersores permanecen en funcionamiento dos horas al día.
- En la actualidad pagan 16.24 €/semana por el riego del jardín.
- Hace 20 años pagaban por el riego del jardín en las mismas condiciones 5.88€/semana.

Área de conocimiento matemático: Cambio y relaciones
Contexto: Profesional
Categoría del proceso: Empleo
Nivel de dificultad: 3

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar y presentar.

Objetivo: Comprobar la capacidad de organización ante un problema que requiere de varias operaciones ordenadas.

Posibles dificultades: La mayor dificultad de este problema es que requiere de una simplificación inicial que nos ayude a ir resolviéndolo paso a paso. Un ataque directo al problema sin una mínima planificación inicial obstaculizará mucho su resolución. Si por el contrario el alumno consigue ver los pasos que debe de dar hasta alcanzar la solución final, este problema no le resultará difícil ya que las matemáticas que se emplean en él son muy básicas.

Posibles razonamientos válidos:1.Se calcula, por un lado, la diferencia de coste en una semana (10.36€), y por otro lado los m^3 que se consumen en una semana (14m^3) y se realiza una regla de tres para obtener el aumento por m^3(0.74€/m^3).

2.Calculamos los m^3 que se consumen en una semana ($14m^3$) y mediante reglas de tres calculamos, por un lado, el coste por m^3 en la actualidad (1.16€/m^3), y por otro lado el coste por m^3 hace veinte años (0.42€/m^3). Ahora basta restar estas cantidades para ver el aumente del coste por m^3 (0.74€/m^3).

Tiempo estimado: 20 min

Actividad 11: Consumo de aplicaciones para el móvil

Descripción del problema: Ha salido a la luz un informe sobre las horas que pasan los adolescentes frente a la pantalla del móvil y la distribución de este consumo. Calcula las horas que dedican los jóvenes a dormir y a estar en Instagram y relaciona ambos tiempos en una fórmula.

Datos:

- De media los adolescentes duermen 216h al mes
- De media los adolescentes pasan 6h al día frente a la pantalla del móvil.
- La distribución del tiempo frente al móvil de personas de 16-24 años se corresponde con los datos presentados en el siguiente diagrama (*Figura 11*).

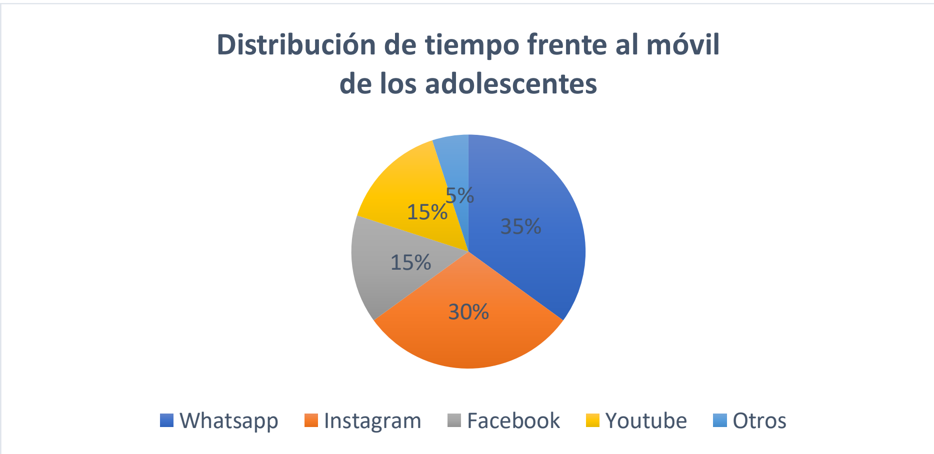


Figura 11. Distribución de tiempo frente al móvil de los adolescentes (Actividad 11)

Área de conocimiento matemático: Incertidumbre y datos

Contexto: Personal

Categoría del proceso: Formular

Nivel de dificultad:3

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente y presentar.

Objetivo: Por un lado, el correcto uso de porcentajes y por otro el reconocer las relaciones entre cantidades.

Posibles dificultades: La mayor dificultad reside en la creación de la fórmula de relación entre las dos cantidades, no porque sea una tarea difícil en sí, sino porque los alumnos no están acostumbrados a ese tipo de preguntas.

Posibles razonamientos válidos:

1.Calcular las horas al día que se estima que pasen en Instagram (1.8h) y multiplicarlo por 30 días (540h). Observar que aproximadamente, duermen 4 veces más que el tiempo que dedican a pasar en Instagram.

2. Calcular las horas al día que se estima que pasen en Instagram (1.8h) y las horas que duermen de media al día (7.2h). Observar que duermen 4 veces más que el tiempo que dedican a pasar en Instagram.

Tiempo estimado: 15 min

Actividad 12: Museo de la Ciencia

Descripción del problema: En el Museo de la Ciencia de Valladolid han organizado una jornada de puertas abiertas. En una de las actividades que ofrecerán a los alumnos, estos deberán realizar la codificación de un mensaje de 52 caracteres distintos. ¿Cuántos mensajes distintos podrán escribir?

Datos:

- Disponen de 15 emoticonos (distintos), 10 números (0-9) y las 27 letras de nuestro alfabeto.

Área de conocimiento matemático: Incertidumbre y datos

Contexto: Científico

Categoría del proceso: Empleo

Nivel de dificultad:2

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, matematización y trabajar matemáticamente.

Objetivo: Comprobar el manejo de los métodos de recuento.

Posibles dificultades: Los alumnos que no entiendan el problema y traten de contar todos los casos directamente se encontrarán con que son demasiadas posibilidades para realizarlas todas en tan poco tiempo.

Posibles razonamientos válidos:

1.El único razonamiento que parece viable debido a la cantidad de casos, es la identificación como un problema de permutaciones y la aplicación de su fórmula.

Tiempo estimado: 10 min

4.6 Proyecto: Viaje fin de curso

Explicación del proyecto:

Dividiremos la clase en grupos de trabajo de 3-4 personas y plantearemos el problema al que tienen que dar solución trabajando en los grupos que previamente hemos establecido. Por una parte, les entregaremos un dossier en el que, además del enunciado del problema que les hemos propuesto, habrá una serie de cuestiones guía que pueden utilizar para resolver el problema. Cada grupo será libre de decidir afrontar el problema directamente o hacer uso de las cuestiones del dossier. En este dossier de trabajo también incluiremos algunos datos adicionales que consideramos que deben tener en cuenta antes de comenzar con el problema. Por otra parte, cada grupo redactará un porfolio en el que plasmará todos los avances que vayan realizando a lo largo del proceso, así como las dificultades a las que se vayan enfrentando.

Contextualización del proyecto:

Queremos que el contexto del proyecto sea personal, por tanto, resulta conveniente adaptarlo a las características del propio centro en el que vamos a llevar a cabo esta propuesta. Como ya hemos comentado anteriormente, lo que aquí presentamos es una propuesta genérica para un centro de secundaria y pensada para que sea llevada a cabo por estudiantes de 4ºESO de matemáticas académicas (en grupos de 3-4 personas) en las dos o tres semanas últimas del curso, después de que durante al curso hayan tenido algún primer contacto con tareas de modelización más sencillas y cortas.

Descripción del problema:

Los alumnos de 4ºESO van a organizar un viaje de fin de curso. Antes de decidir su destino quieren tener en cuenta el dinero que van a conseguir con la organización del concierto de fin de curso (que como viene siendo habitual, organizan los alumnos de 4ºESO) y los beneficios que consiguen los utilizan para costearse parte de este viaje. Calcula cuánto dinero ganarán como máximo por persona aproximadamente con este concierto.

Datos adicionales:

- Con la entrada los asistentes tienen derecho a un refresco gratis y la opción de un segundo refresco a un precio fijo establecido previamente.
- El recinto debe estar controlado por el mínimo número necesario de vigilantes de seguridad (para minimizar costes).
- Los gastos de refrescos, alquiler de escenario y vigilantes corren a cargo de los alumnos de 4ºESO.
- Existe un número máximo de personas por m^2 estipulado por el reglamento del centro.

Etapas de modelización involucradas: Comprensión, simplificación, matematización, trabajar matemáticamente, interpretar, validar y presentar.

Cuestiones guía del dossier:

1. **Los alumnos deberán recoger y organizar toda la información que consideren de importancia en la resolución del problema.**

   Por un lado, necesitarán recoger información sobre la forma del patio y sus dimensiones, la forma del escenario, su colocación prevista en el patio y sus dimensiones. Por otro lado, necesitarán saber cuánto cobra la empresa de vigilancia por cada vigilante, cuánto pagan por los refrescos, cuál es el precio de venta de estos para la segunda consumición, cuál es el precio de la entrada por persona, etc.

2. **La segunda cuestión que deberán resolver es calcular cuánto dinero ingresarán cómo máximo.**

   Para ello necesitarán tener una aproximación del número de personas que pueden asistir. Una forma de conseguirlo será calculando la superficie del patio restándole el escenario, y a partir del número de personas por m^2 estipulado por el reglamento, obtener el número máximo de personas que podrán acudir. Por último, bastará con multiplicar estos por el precio de entrada por persona y por lo que pagan por los segundos refrescos, y sumar ambas cantidades.

3. **La tercera cuestión es calcular cuánto gastarán como mínimo.**

   En los gastos, por un lado, tendrán que contar con el alquiler del escenario y el coste de los refrescos que será el aforo por dos (suponiendo el aforo máximo para poder calcular el beneficio máximo).

   Además, deberán calcular el mínimo número de vigilantes que necesitarán para que todo el recinto quede vigilado. Para ello, deberán parcelar el recinto, y quizás, hacer alguna simplificación inicial en caso de que la colocación del escenario obstaculice la visión de algunos de los supuestos vigilantes.

4. **A continuación, necesitan calcular los beneficios máximos.**

   Para ello deberán restar los gastos a los ingresos y dividir entre el número de alumnos de 4º que han organizado el concierto.

5. **Por último, deben trasladar su propuesta a la situación real para comprobar si es válida.**

   Es posible que no hayan tenido en cuenta alguna variable del problema real que les obligue a tener que realizar algún cambio.

Objetivo: El objetivo de este proyecto es que los alumnos sean capaces de resolver el problema que se plantea, centrándose en los aspectos matemáticos que ofrece este, y teniendo en cuenta los conocimientos y las herramientas matemáticas que han ido adquiriendo a lo largo del tiempo, tanto en tareas previas de modelización, como en otro tipo de tareas matemáticas, para seleccionar aquellos que creen útiles para la resolución de este problema, así como para la interpretación y validación de la solución obtenida en la situación real que se plantea. Además, se pretende que los grupos sean capaces de presentar de forma razonada esta solución al profesor y al resto de sus compañeros, más aún, siendo capaces de responder a las dudas que presenten estos últimos, hasta tal punto que se pueden crear debates razonados entre los diferentes grupos (debate intergrupo) una vez hayan presentado todas las soluciones a las que han llegado. Por supuesto, también perseguimos que se trabaje la discusión de razonamientos entre los miembros del mismo grupo (debate intragrupo), que deberán llegar a acuerdos que les permitan llevar adelante el proyecto.

Posibles dificultades:

Las principales dificultades que parecen esperables durante la realización de este proyecto son las que están vinculadas a las características propias que definen las tareas de modelización. Por un lado, los alumnos no están habituados a enfrentarse a tareas en las que las matemáticas que deben usar no se intuyan con facilidad (o incluso se especifiquen en su enunciado). Por otro, las tareas que se proponen normalmente tampoco ofrecen al alumno la posibilidad de experimentar con estrategias propias y aprender de los errores cometidos. Esto nos lleva a suponer que muchos alumnos se bloquearán, tanto al inicio de la tarea al no saber cómo deben afrontarla y encontrarse con que son ellos los que deben decidir qué hacer y no el profesor o algún algoritmo los que les marquen las instrucciones a seguir; como durante ella cuando cometan algún error. Además, en este último caso, es posible que haya alumnos que no acepten el hecho de que hayan llegado a una solución correcta para el modelo que han planteado pero que esta no sea válida para la situación real que se plantea.

Tiempo estimado: 2-3 semanas

5 ANÁLISIS CRÍTICO DE LA PROPUESTA

En este apartado se reflexiona de manera crítica sobre la propuesta didáctica de implementación de tareas modelizadoras en el aula de secundaria que se ha detallado en el apartado anterior, mostrando sus ventajas y desventajas. Aunque este análisis se vería enriquecido al realizarlo después de conocer los resultados de una experiencia real, se usan reflexiones recuperadas de investigaciones reales (Aparisi, L.A. & Pochulu, M.D. (2013) y Biembengut, S. & Hein, N. (2004)) y reflexiones propias, que se pueden esperar a la vista de la investigación teórica que se ha realizado y la propia estructura de las tareas que componen la propuesta.

Existen numerosas ventajas, tanto para alumnos, como profesores, al implementar los procesos de modelización en el aula de secundaria, entre ellas destacan las siguientes:

- Dota a los problemas matemáticos de un significado, al vincularlos con situaciones de la realidad, lo que provoca que los estudiantes estén más interesados en este tipo de actividades que en aquellas que no tienen sentido, ni para ellos, ni en ocasiones para el propio profesor.

- Conecta las matemáticas con otras áreas de conocimiento, como pueden ser la física, la biología, la economía, la sociología, etc.

- Favorece la independencia del estudiante, al no depender a cada momento de las directrices que le marce un profesor o al algoritmo establecido; el descubrimiento autónomo, al permitirle investigar; el sentido crítico al tener que apreciar la información relevante y tomar decisiones; la creatividad; y la autogestión del propio aprendizaje.

- Facilita la posibilidad de trabajar el debate como elemento fundamental del aprendizaje cooperativo y del trabajo en equipo.

- Muestra el potencial del error como medio que propicia el aprendizaje de forma natural.

- Se produce un aprendizaje significativo del alumno, ya que la incorporación de la modelización puede ayudar a tener una comprensión más profunda y facilitar la retención de los conceptos, nociones, métodos y resultados matemáticos.

- Permite al profesor, por un lado, comprender las dificultades que presenta el alumno en contenidos, métodos, razonamientos, etc., y, por otro lado, permite obtener mucha más información para tener en cuenta en la evaluación del alumnado. Todo esto gracias a que puede observar el trabajo del día a día en el aula, las vivencias descritas en el portafolio, y las exposiciones razonadas de las soluciones.

- La propia estructura de las tareas y la metodología elegida para llevarlas a cabo, hacen que resulte muy natural el trabajo de la mayoría de las competencias básicas.

A pesar de presentar todas estas ventajas, también se pueden encontrar en la implementación de tareas de modelización en el aula de secundaria, una serie de dificultades o desventajas, que hacen más costoso su desarrollo. Entre ellas destacan las siguientes:

- La falta de tiempo. No todo tipo de situaciones de modelización necesitan un gran periodo de tiempo para realizarse, pero muchas de ellas sí, como es el caso del proyecto que se propone. Estos tipos de tareas requieren mucho más tiempo del que en ocasiones dispone el profesor. Sin embargo, estos tiempos se pueden reducir en el aula con una buena planificación de las tareas por parte del profesor.

- Al tratarse de clases más abiertas, la planificación, la gestión y la evaluación de las tareas requiere un mayor esfuerzo por parte el profesor, quien además no siempre tendrá todas las respuestas.

- Aunque se les proporcione pequeñas guías de uso con recursos, muchos profesores no se ven con la confianza suficiente para llevar a cabo la modelización en el aula en un primer momento.

- Para los estudiantes que están acostumbrados a trabajar bajo enfoques tradicionales, la resistencia a la modelización es significativa, ya que son tareas más exigentes, menos predecibles que las tradicionales, en las que el conocimiento de la teoría no garantiza la capacidad de resolver problemas de la vida real. Además, no solo los alumnos muestran este rechazo, sino que en ocasiones serán los padres los que se opongan a la renovación del estilo de trabajo en el aula.

- Al tratarse de tareas cooperativas se necesita del compromiso de todos los integrantes del grupo para el correcto funcionamiento de la actividad.

Para conseguir salvar las desventajas que hacen de la modelización en el aula de secundaria una metodología poco convincente para algunos, se necesitará que el propio docente ayude en la difusión de las numerosas ventajas que esta ofrece (y que vienen respaldadas por la Comisión Europea y desde el currículo como capacidades que se deben trabajar en el aula) y, a su vez, ayude a superar los inconvenientes que se puedan encontrar (por ejemplo, construyendo recursos de libre acceso). Además, será importante trabajar con los alumnos situaciones de modelización desde edades tempranas e ir aumentando su grado de dificultad de acuerdo estos van progresando.

Sin embargo, el mayor obstáculo al desarrollo del cambio metodológico será la concepción propia de cada docente. Si el docente no cree firmemente que la implementación de tareas de modelización en el aula motiva al alumno, potencia el aprendizaje y ayuda a desarrollar en él capacidades fundamentales (que con los métodos tradicionales no se trabajan), será muy difícil que se produzcan cambios en el aula, por mucha información que exista sobre sus ventajas u organizaciones que lo promuevan, ya sea mediante formación docente, o su inclusión curricular.

6 LIMITACIONES DE LA PROPUESTA Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

El trabajo que se presenta ha sido enfocado a la educación secundaria obligatoria y, más en concreto, al último curso de esta en la rama de matemáticas académicas, por tanto, el nivel de las matemáticas involucradas en estas tareas propuestas se adapta al que han adquirido los estudiantes a lo largo de los cuatro cursos de esta etapa educativa.

Resultaría altamente interesante trasladar esta propuesta teórica a una experiencia donde se realizaría una investigación áulica en la que se podrían obtener de primera mano cuáles son las dificultades que presentan alumnos y profesores ante estas tareas de modelización y analizarlas con la intención de averiguar si se pueden replantear ciertos aspectos de la propuesta para que, por un lado, resulte de un mayor valor para el aprendizaje significativo de los alumnos, y por otro lado, facilite la gestión de la misma por parte del profesor.

Además, existen varias futuras líneas de trabajo, que merecerían del tiempo del investigador interesado en la modelización en el aula. Por un lado, resultaría interesante estudiar acerca de la importancia de la modelización como elemento nuclear del Aprendizaje Basado en Proyectos con proyectos interdisciplinares trimestrales, basados en problemas reales, motivantes y que necesitasen de los conocimientos desarrollados en varias materias.

Por otro lado, en toda la documentación que se ha consultado y recabado para este trabajo, no se han encontrado investigaciones áulicas sobre la modelización matemática como elemento integrador. Y podría resultar de interés el estudiar cómo se puede mejorar la integración de alumnos con perfiles de exclusión por parte de la clase, a partir del trabajo cooperativo de tareas modelizadoras en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

Aparisi, L.A. & Pochulu, M.D. (2013). *Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp.1387-1397). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Armenteros, B. (2009). Imagen social de las matemáticas. Las matemáticas como elemento de exclusión. *Enfoques educativos*, 30, 20-24. Recuperado de: https://www.yumpu.com/es/document/read/45610649/na-30-15-01-2009-enfoqueseducativoses

Asensio, C. (2013). *Adaptación del modelo de Miguel de Guzmán para la resolución cooperativa de problemas para alumnos de 1º de la ESO*. Universidad Internacional de la Rioja.

Aymerich, A. & Albarracín, L. (2016). Complejidad en el proceso de modelización de una tarea estadística. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(2), 5-23.

Barrows, H.S. (1986). A Taxonomy of problem-based learning methods, in *Medical Education*, 20/6, 481–486.

Biccard, P. (2010). *An investigation into the development of mathematical modelling competencies of Grade 7 learners*. Faculty of Education, Stellenbosch University.

Biembengut, S. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, 16,105-125.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (eds). *Mathematical Modelling. ICTMA 12. Education, Engineering and Economics.* Chichester, UK: Horwood Publishing: 222-231.

Boekaerts, M. (2002). *Motivar para aprender.* International Academy of Education, Serie prácticas educativas, núm. 10.

Cabassut, R. (2013). Reflections from European examples on the teaching of modelling. *Modelling in Science Education and Learning*, 6(1), No.2, 21-32.

Chinnappan, M. (2010). Cognitive load and modelling of an algebra problem. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(2), 8-23.

Dewey, J. (1989). *Cómo Pensamos: Nueva exposición de la relación entre el pensamiento reflexivo y proceso educativo.* Barcelona: Paidós.

Doosti, A. & Ashtiani, A. (2005). *Mathematical Modelling: A New Approach in Mathematics Teaching in Differents Levels.*Islamic Azad University.

European Commission. (2018). Council Recommendations of Key Competences and Basic Skills. Official Journal of the European Union, 22 de mayo,2018. Recuperado de:

https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=uriserv:OJ.C_.2018.189.01.0001.01.ENG&toc=OJ:C:2018:189:TOC

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Revista Suma*, 17, 10-16.

Gairín, J.M. (2001). Grupo cero, ¿nostalgia?. *Revista Suma*, 38, 117-123.

Galbraith, P. L., Stillman, G., Brown, J. & Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 130-140). Chichester, UK: Horwood.

Gallart, C. & Garcia-Raffi, L.M. (2013). Primeros pasos con las tareas de modelización en secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 6(1), No. 4, 49-60.

Gallart, C. & García-Raffi, L.M. (2017). Análisis de los procesos de resolución de tres tareas de modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 137-152.

Gallart, C., Garcia-Raffi, L.M. & Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-85.

Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor. https://es.slideshare.net/drimachi/para-pensar-mejor-miguel-de-guzmn-47664249

Guzmán, M. (1994). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática.* Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, Editorial Popular. Recuperado de [http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/]

Henning H., Keune M. (2007). *Levels of Modelling Competencies*. In: Blum W., Galbraith P.L., Henn HW., Niss M. (eds) Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field.* Ed Princenton, Princenton: University Press, Halmos, P. (1980). *The heart of mathematics.* American Mathematical Monthly, núm. 87, 519-524.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid, 2013.

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2005). Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid, 2005.

Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L. (1998). Educación Matemática., 51-67. Universidad de los Andes.

Lesh, R. & Doerr, H.M. (1998). Symbolizing, communicating and mathematising: key concepts of models and modeling. In Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K. (eds). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers: 361-394.

Lesh, R. & Zawojewski, J.S. (1988). Problem solving. In Post, T.R. (ed.) *Teaching Mathematics in Gr K-8: Research Based Methods.* Massachusetts, USA: Allyn and Bacon Inc: 40-77.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 4 de mayo de 2006, núm. 106.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295.

Maaβ, K. (2006). What are modeling competencies?. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 38(2),113-142.

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. InGrouws, D.A (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, USA: MacMillan: 575-596.

Maseda, M. (2011). *Estudio bibliográfico de la motivación en el aprendizaje de las matemáticas y propuesta de talleres aplicados a la vida real.* Universidad Internacional de la Rioja.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* New York: Addison Wesley

Mousoulides, N., Sriraman, B. & Christou, C. (2007). From problem solving to modeling – the emergence of models and modelling perspectives. In *Nordic Studies in Mathematics Education*. 12(1): 23–47.

ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre competencias, contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25.

ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León.* Valladolid, 8 de mayo de 2015, núm. 86, 32051-32480.

Pollak, H. (1979). *The interaction between mathematics and other school subjects.* New Trends in Mathematics Teaching IV, Paris.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: University Press.

Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning (Volume 1, Induction and analogy in mathematics; Volume 2, Patterns of plausible inference). Princeton University Press

Pólya, G. (1962,1965/1981). Mathematical Discovery (Volume 1, 1962; Volume 2, 1965). Princeton: University Press. Combined paperback edition, 1981. New York: Wiley.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 3de enero de 2015, núm. 3, 169-546.

Rocard, M. et al. (2007). *Science education now: a renewed pedagogy for the future of Europe*. European Commission, Scientific Culture and Gender.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de Problemas. En M. Pochulu y R. Rodríguez (Comps.). *Educación Matemática -Aportes a la formación de docentes desde distintos enfoques teóricos*, (pp.153-174). Buenos Aires: EDUVIM y Ediciones UNGS.

Romero, S. (2011). La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática. *Modelling in Science Education and Learning*, 4, No. 4, 35-70.

Romero, S., Rodríguez, I., Romero, J., Benítez, R. & Salas, I. (2015). La resolución de problemas como instrumentos para la modelización matemática: "Ejemplos para la vida real". *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 51-65.

Schleicher, A. (2018). *PISA 2021 Mathematics Framework (First Draft).* Directorate for Education and Skills Programme for International Student Assessment.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics.* In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning.* (pp.334-370). New York: Macmillan.

Servicio de Innovación Educativa (2008). *Aprendizaje Basado en Problemas.* Universidad Politécnica de Madrid. Madrid, 2008.

Sigarreta, J.M., Rodríguez, J.M. & Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol XIII, No. 1, (pp. 53-66).

Sol, M. (2013). Contribuciones de la modelización al desarrollo de las competencias básicas. *Modelling in Science Education and Learning*, 6(1), No. 6, 73-91.

Stacey, K. (2018). Teaching Mathematics through Problem Solving. *Revista Números*, 98, 7-18.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). *Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum.* In R. Charles & E. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Treilibs, V., Burkhardt, H. & Low, B. 1980. *Formulation processes in mathematical modelling.* Nottingham, England: Shell Centre for Mathematical Education.

Vila-Ochoa, J.A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A. & Ocampo, D. (2010). El Proceso de Modelación Matemática: Una mirada a la práctica del docente. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, Universidad de Antioquia, 1443-1451.