TRABAJO FIN DE MÁSTER

Correspondiente a los estudios de

MÁSTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Especialidad: **Matemáticas**

Presentado por

Rafael Martín Villaverde

1 de julio de 2013

EL INFINITO EN BACHILLERATO

Trabajo dirigido por

Felipe Cano Torres

Universidad de Valladolid

Índice general

Introducción

Hemos constatado que en el currículo LOE vigente se huye de la mención explícita del término infinito. Sin embargo el concepto de infinito está detrás de casi todos los apartados en los que se divide el currículo en ambos cursos de bachillerato. Nos parece pues lógico el preguntarse si no se debería abordar el asunto de una forma más directa.

Este trabajo es un estudio de campo acerca de la capacidad de un grupo de alumnos de ESO y Bachillerato para comprender conceptos relacionados con el aspecto aritmético del infinito. Expondremos a dichos alumnos en una sesión de una hora una demostración de que el cardinal de $\mathbb{R}$ es superior al de $\mathbb{N}$, es decir, la existencia de infinitos más grandes que otros. Analizaremos los resultados de comprensión de la exposición mediante un conjunto de respuestas a preguntas que les serán planteadas antes y después de la misma.

El trabajo queda estructurado de la siguiente manera: comenzamos con un capítulo introductorio a la idea de infinito desde un punto de vista divulgativo, resaltando la relación directa de dicha idea con múltiples nociones matemáticas básicas. A continuación se expone y analiza el tratamiento del concepto de infinito en el currículo del bachillerato vigente. Terminamos con un capítulo dedicado a la exposición y análisis del experimento realizado de manera detallada.

Capítulo 1

El concepto de infinito

La idea de infinito como contraposición a lo abarcable y como proceso sin fin ronda en la cabeza del hombre desde que este adquiere su razón. Aristótles lo trata en su Metafísica y después de él muchos otros pensadores.

Las matemáticas formalizan esta inquietud del pensamiento humano. Resaltamos tres aspectos del concepto matemático de infinito.

1. Aritmético: existen cantidades infinitamente grandes, como la de números naturales.

2. Geométrico: se puede entender el infinito como un lugar. Por ejemplo, allá donde dos rectas paralelas se cortan.

3. Topológico-Analítico: la idea de proximidad infinita que podemos encontrar en la construcción de los números reales, y en los límites, continuidad, derivación e integrabilidad de funciones.

Una definición en positivo del aspecto aritmético del infinito matemático la da Georg Cantor en el siglo XIX:

Un conjunto es infinito si es equipotente a alguno de sus subcojuntos propios.

El aspecto geométrico queda recogido en la geometría proyectiva, cuyo origen podemos datar en el siglo XVII.

La formalización del análisis matemático del siglo XIX fija el aspecto analítico del infinito.

El infinito es pues una inquietud del pensamiento humano que lleva más de un siglo satisfactoriamente resuelta. Más aún, es una idea clave en las matemáticas debidamente formalizada. Si revisamos el currículo de bachillerato, como haremos en el siguiente capítulo, teniendo en mente que el infinito está detrás de las ideas de paralelismo, recta, plano y espacio en geometría, ley de los grandes números en el cálculo de probabilidades, números reales y aproximaciones numéricas, límites, continuidad, derivabilidad e integrabilidad de funciones reales de variable real en el análisis, llegaremos a la conclusión de la conveniencia de una idea clara del concepto para poder comprender adecuadamente todo lo que sobre él se construye.

Sin embargo, nos tememos que en el bachillerato no se habla sobre el infinito ni lo suficiente ni con el rigor necesario. Esta es la temática de nuestro estudio.

Capítulo 2

El infinito en el currículo LOE

Dedicamos este capítulo al análisis de la no aparición explícita del concepto de infinito en el currículo matemático del bachillerato vigente. Comenzamos con una descripción de la estructura del bachillerato. Continuamos con la presentación de los contenidos y los criterios de evaluación de las asignaturas de matemáticas que pueden cursarse en el bachillerato. Finalizamos con un breve análisis y una conclusión.

2.1. Estructura del bachillerato

El bachillerato LOE se organiza en 3 modalidades:

1. Artes
2. Ciencias y tecnología
3. Humanidades y ciencias sociales

Cada una de ellas consta de dos cursos. En cada curso existen materias obligatorias, de modalidad y optativas. Entre todas ellas podemos encontrar un total de 4 asignaturas de matemáticas:

1. "Matemáticas I" correspondiente al primer curso de la modalidad de ciencias y tecnología
2. "Matemáticas II" correspondiente al segundo curso de la modalidad de ciencias y tecnología
3. "Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I" correspondiente al primer curso de la modalidad de humanidades y ciencias sociales
4. "Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II" correspondientes al segundo curso de la modalidad de humanidades y ciencias sociales.

Estas cuatro asignaturas de matemáticas tienen la categoría de materia propia de la modalidad. El alumno inscrito en una modalidad ha de cursar 3 materias propias de la modalidad cada curso. Descartamos la modalidad de Artes, donde no es posible cursar ninguna asignatura de matemáticas y exponemos las materias propias de las modalidades de ciencias y tecnología y de humanidades y ciencias sociales:

1. Las materias propias de la modalidad de ciencias y tecnología son las siguientes:

a) En primer curso: Biología y geología, Dibujo técnico I, Física y química, Matemáticas I, Tecnología Industrial I. Entre estas se han de cursar 3 durante el primer curso.

b) En segundo curso: Biología, Ciencias de la Tierra y medioambientales, Dibujo técnico II, Electrotecnia, Física, Matemáticas II, Química, Tecnología Industrial II. Entre estas se han de cursar 3 durante el segundo curso.

2. Las materias de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales son las siguientes:

   a) En primer curso: Economía, Griego I, Historia del mundo contemporáneo, Latín I, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I. Entre estas se han de cursar 3 durante el primer curso.

   b) En segundo curso: Economía de la empresa, Geografía, Griego II, Historia del Arte, Latín II, Literatura universal y Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II. Entre estas se han de cursar 3 durante el segundo curso.

Las materias propias de modalidad tienen una carga horaria de 4 horas semanales.

Queremos resaltar la posibilidad existente, atendiendo a la literalidad de la LOE [1] y a su desarrollo por parte de la Junta de Castilla y León [2], de que un alumno pueda obtener el título de bachillerato en la modalidad de ciencias y tecnología sin haber cursado ninguna asignatura de matemáticas durante el mismo.

Este esperpento queda en parte solucionado, al menos en la Comunidad de Castilla y León, por la orden autonómica ORDEN EDU/1061/2008, de 19 de junio por la que se regula la implantación y el desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León [3], en la que establece la obligatoriedad de cursar "Matemáticas I" en el primer curso de la modalidad Ciencias y Tecnología.

2.2. Contenidos matemáticos en el bachillerato

Se plasman a continuación los contenidos y los criterios de evaluación de cada una de las cuatro asignaturas de matemáticas que aparecen en el bachillerato LOE tal y como vienen expuestos en [2].

- **Matemáticas I**

  - Contenidos

    1. Aritmética y álgebra:

       a) Números reales. Valor absoluto. Desigualdades. Distancias en la recta real. Intervalos y entornos.

       b) Resolución algebraica e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.

       c) Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Sistemas de inecuaciones.

       d) Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.

    2. Geometría:

a) Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Resolución de ecuaciones trigonométricas.

b) Resolución de triángulos rectángulos. Teorema del seno. Teorema del coseno. Resolución de triángulos. Resolución de problemas geométricos diversos.

c) Números complejos. Formas binómica, trigonométrica y polar. Operaciones. Formula de Moivre.

d) Vectores en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector. Ortogonalidad.

e) Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.

f) Idea de lugar geométrico en el plano. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola: definición geométrica, elementos característicos y ecuación canónica. Método de completar cuadrados.

g) Utilización de programas de geometría dinámica para construir e investigar relaciones geométricas.

3. Análisis:

a) Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

b) Dominio, recorrido y extremos de una función.

c) Operaciones y composición de funciones.

d) Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. Técnicas elementales de cálculo de límites. Límites y comportamiento asintótico de una función.

e) Aproximación al concepto de derivada. Reglas de derivación. Aplicaciones geométricas: recta tangente, extremos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura. Aplicaciones físicas: velocidad y aceleración.

f) Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.

g) Utilización de herramientas informáticas para el estudio de funciones y sus gráficas.

4. Estadística y Probabilidad:

a) Distribuciones bidimensionales. Distribuciones marginales. Medias y desviaciones típicas marginales. Covarianza. Coeficiente de correlación lineal. Regresión lineal.

b) Técnicas de recuento, combinatoria. Binomio de Newton.

c) Probabilidades a priori y a posteriori. Probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.

d) Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media y varianza. Distribución binomial. Uso de tablas. Cálculo de probabilidades de sucesos simples y compuestos.

e) Variables aleatorias continuas. Función de distribución. Distribución normal. Normal típica y uso de tablas. Tipificación de una variable normal. Cálculo de probabilidades de sucesos simples y compuestos.

    f) Utilización de la hoja de cálculo para realizar cálculos estadísticos y simulaciones de probabilidad.

- Criterios de evaluación

  1. Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica.
  2. Resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.
  3. Utilizar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera y sus identidades notables para resolver problemas geométricos obtenidos como modelos de situaciones reales, interpretando y valorando las conclusiones obtenidas.
  4. Conocer y operar correctamente con los números complejos (en sus formas binómica, trigonométrica y polar), utilizarlos en la resolución de problemas geométricos y ecuaciones algebraicas sencillas.
  5. Utilizar el lenguaje vectorial para modelizar analíticamente distintas situaciones susceptibles de ser tratadas con métodos de geometría plana elemental, resolver problemas afines y métricos e interpretar las soluciones.
  6. Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano en distintas situaciones de la vida real, obtener, a partir de su definición como lugar geométrico, la ecuación de una cónica e identificar sus elementos característicos.
  7. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos.
  8. Encontrar e interpretar las características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente y, manejar el cálculo elemental de límites y derivadas como herramienta para representar gráficamente funciones elementales a partir de sus características globales y locales (dominio, continuidad, simetrías, puntos de corte, asíntotas, comportamiento en el infinito, intervalos de crecimiento y puntos de tangente horizontal), y relacionarlas con fenómenos económicos, sociales, científicos y tecnológicos que se ajusten a ellas.
  9. Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.
  10. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.
  11. Utilizar recursos informáticos y tecnológicos para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, reducir el tiempo de cálculo y servir como herramienta en diferentes tipos de problemas.

- **Matemáticas II**

- Contenidos

  1. Álgebra lineal:

     a) Sistemas de ecuaciones lineales. Operaciones elementales y reducción Gaussiana. Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

     b) Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

     c) Operaciones con matrices. Matrices inversibles. Obtención por el método de Gauss del rango de una matriz y de la matriz inversa. Aplicación de las operaciones y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.

     d) Determinantes. Propiedades elementales de los determinantes. Cálculo de determinantes. Rango de una matriz.

     e) Utilización de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

  2. Geometría:

     a) Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.

     b) Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

  3. Análisis:

     a) Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. Límites en el infinito. Comportamiento asintótico de una función.

     b) Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.

     c) Concepto de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica y física.

     d) Función derivada. Cálculo de derivadas. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Regla de l'Hôpital.

     e) Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.

     f) Primitiva de una función. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas, en particular inmediatas, por cambio de variable, de funciones racionales sencillas y por partes.

     g) Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Integral definida. Regla de Barrow. Teorema del valor medio para integrales. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

- Criterios de evaluación

  1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss.
  2. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones y, en general, para resolver situaciones diversas.

3. Obtener el rango y la inversa de una matriz mediante el método de Gauss. Discutir y resolver, en términos matriciales, sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
4. Manejar determinantes de órdenes dos y tres, y usarlos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y para calcular la inversa de una matriz.
5. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto.
6. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita.
7. Utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos derivados de la geometría, la física y demás ciencias del ámbito científico-tecnológico, e interpretar las soluciones de acuerdo a los enunciados.
8. Identificar, calcular e interpretar las distintas ecuaciones de la recta y el plano en el espacio tridimensional para resolver problemas de incidencia incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos y utilizarlas, junto con los distintos productos entre vectores, expresados en bases ortonormales, para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
9. Calcular límites, derivadas e integrales.
10. Utilizar el cálculo de límites y derivadas para la resolución de problemas de optimización extraídos de situaciones reales y para el estudio de fenómenos naturales y tecnológicos.
11. Utilizar el cálculo de integrales para obtener las áreas de regiones limitadas por rectas y curvas representables por los alumnos.
12. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.

- **Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I**
  - Contenidos
    1. Aritmética y álgebra:
       a) Números racionales e irracionales. La recta real, ordenación y operaciones. Valor absoluto. Aproximación decimal de un número real. Estimación, redondeo y errores.
       b) Operaciones con potencias y radicales. Logaritmos.
       c) Ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones.
       d) Estudio y resolución gráfica y algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistemas con tres incógnitas: método de Gauss.
       e) Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Interpretación y resolución gráfica.

f) Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales.

g) Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y número índice. Parámetros económicos y sociales.

2. Análisis:

   a) Funciones reales de variable real. Tablas y gráficas. Expresión analítica. Estudio gráfico y analítico de las funciones polinómicas de primer y segundo grado y de las funciones de proporcionalidad inversa.

   b) Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos.

   c) Determinación de valores de una función. Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales.

   d) Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.

   e) Conceptos intuitivos de límite y continuidad. Técnicas elementales de cálculo de límites. Aplicación al estudio de asíntotas.

   f) Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Tendencias. Derivada de una función. Reglas de derivación.

3. Probabilidad y estadística:

   a) Estadística descriptiva unidimensional. Tipos de variables. Métodos estadísticos. Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición.

   b) Distribuciones bidimensionales de datos. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Distribuciones marginales. Medias y desviaciones típicas marginales. Covarianza. Coeficiente de correlación lineal. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.

   c) Técnicas de recuento, combinatoria. Binomio de Newton.

   d) Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media y varianza. Distribución binomial. Uso de tablas. Cálculo de probabilidades de sucesos simples y compuestos.

   e) Variables aleatorias continuas. Función de distribución. Distribución normal. Normal típica y uso de tablas. Tipificación de una variable normal. Cálculo de probabilidades de sucesos simples y compuestos.

   f) Aproximación de la binomial por la normal.

   g) Utilización de la hoja de cálculo para realizar cálculos estadísticos y simulaciones de probabilidad.

- <u>Criterios de evaluación</u>

1. Utilizar los números reales para presentar e intercambiar información, controlando y ajustando el margen de error exigible en cada situación, en un contexto de resolución de problemas.

2. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas.
3. Resolver sistemas de ecuaciones lineales de problemas del ámbito de las ciencias sociales.
4. Utilizar los porcentajes y las fórmulas de interés simple y compuesto para resolver problemas financieros e interpretar determinados parámetros económicos y sociales.
5. Relacionar las gráficas de las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas, con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas.
6. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos.
7. Utilizar el lenguaje de funciones para elaborar e interpretar informes sobre situaciones reales, susceptibles de ser presentadas en forma de gráficas o a través de expresiones polinómicas o racionales sencillas, que exijan tener en cuenta continuidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y tendencias de evolución de una situación.
8. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.
9. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión.
10. Utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.
11. Abordar problemas de la vida real, organizando y codificando informaciones, elaborando hipótesis, seleccionando estrategias y utilizando tanto las herramientas como los modos de argumentación propios de las matemáticas para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia.
12. Utilizar recursos informáticos y tecnológicos para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, reducir el tiempo de cálculo y servir como herramienta en diferentes tipos de problemas.

- **Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II**

  - <u>Contenidos</u>

    1. Álgebra:
       a) Sistemas de ecuaciones lineales. Estudio e interpretación gráfica.
       b) Las matrices como expresión de tablas y grafos. Suma y producto de matrices. Matrices inversibles. Obtención de matrices inversas sencillas

por el método de Gauss. Interpretación del significado de las operaciones con matrices en la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales.

   c) Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Interpretación y resolución gráfica.

   d) Programación lineal bidimensional. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones.

2. Análisis:

   a) Aproximación al concepto de límite y continuidad. Técnicas elementales de cálculo de límites. Tipos de discontinuidad. Aplicación al estudio de asíntotas. Interpretación en el tratamiento de la información.

   b) Derivada de una función en un punto. Recta tangente en un punto. Reglas de derivación.

   c) Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de una función. Máximos y mínimos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

   d) Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.

   e) Aplicación de las derivadas a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía.

3. Probabilidad y estadística:

   a) Probabilidades a priori y a posteriori. Probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.

   b) Implicaciones prácticas del Teorema Central del Límite, del teorema de aproximación de la binomial a la normal y de la Ley de los Grandes Números.

   c) Muestreo. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población.

   d) Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.

   e) Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.

   f) Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

- Criterios de evaluación

  1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss.
  2. Operar correctamente con matrices y utilizar el lenguaje matricial como instrumento para representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones.
  3. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.

4. Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.
5. Identificar y representar gráficamente funciones polinómicas, racionales sencillas, exponenciales y logarítmicas a partir de sus propiedades locales y globales.
6. Resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social.
7. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando técnicas personales de recuento, diagramas de árbol o tablas de contingencia.
8. Conocer el concepto de muestreo y planificar y realizar estudios estadísticos de fenómenos sociales que permitan estimar parámetros con una fiabilidad y exactitud prefijadas, determinar el tipo de distribución e inferir conclusiones acerca del comportamiento de la población estudiada.
9. Analizar de forma crítica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.
10. Reconocer la presencia de las matemáticas en la vida real y aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones nuevas, diseñando, utilizando y contrastando distintas estrategias y herramientas matemáticas para su estudio y tratamiento.

2.3. Análisis y conclusión

Hemos de resaltar en primer lugar lo inadecuado que a nuestro juicio resulta la existencia de la posibilidad de obtener el título de bachillerato científico sin haber cursado ninguna asignatura de matemáticas durante el mismo. Las matemáticas no solamente son el lenguaje de modelización de todas las ciencias sino que además son un saber en sí mismas ligado al hombre tanto como la filosofía, la historia o el lenguaje, todas estas materias obligatorias en todas las modalidades de bachillerato.

A Dios gracias esta aberración queda corregida en el proyecto de ley LOMCE aprobado por el consejo de ministros el 17 de mayo de 2013. Esperamos que si alguna modificación de dicho proyecto fuere introducida antes de su aprobación definitiva por las cortes no afecte a este aspecto y que las matemáticas sean obligatorias en ambos cursos del bachillerato científico.

Tras una detallada lectura de los contenidos y los criterios de evaluación de las 4 materias de matemáticas existentes en el bachillerato podemos constatar que el término infinito aparece explícitamente tan solo en dos ocasiones:

1. en el criterio de evaluación número 8 de la asignatura “Matemáticas I”

   Encontrar e interpretar las características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente y, manejar el cálculo elemental de límites y derivadas como herramienta para representar gráficamente funciones elementales a partir de sus características globales y locales (dominio, continuidad, simetrías, puntos de corte, asíntotas, comportamiento en el

> ***infinito***, *intervalos de crecimiento y puntos de tangente horizontal), y relacionarlas con fenómenos económicos, sociales, científicos y tecnológicos que se ajusten a ellas.*

2. en el contenido *a*) del bloque 3. Análisis de la asignatura "Matemáticas II"

> *Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. Límites en el* ***infinito***. *Comportamiento asintótico de una función.*

Esta constatación no pasaría de lo anecdótico si no existiese el problema que creemos haber detectado: los alumnos, que están contínuamente manejando el concepto de infinito de manera implícita, no tienen una noción clara de su significado lo que inevitablemente implica la mala, o al menos incompleta, comprensión de todos los conceptos en los que subyace la idea de infinito.

Recordemos que los alumnos comienzan el primer curso de bachillerato con 16 años de edad. Su capacidad intelectual está pues completamente desarrollada. Si pudiese ser demostrado que los alumnos de bachillerato no presentan una dificultad especial para comprender el concepto matemático de infinito tal vez sería aconsejable su introducción en el currículo de manera más explícita.

El experimento que hemos realizado llevado a cabo a mayor escala podría ayudar a dilucidar esta cuestión. Veámoslo en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El experimento

Pasamos a describir en este capítulo la parte principal de nuestro trabajo: el experimento realizado con un grupo de alumnos de bachillerato. Comenzamos con una presentación de la problemática que motiva el estudio. A continuación realizamos una descripción detallada de cómo se llevó a cabo y de los criterios que se siguieron para su ejecución. Finalizamos el capítulo con el análisis de los resultados obtenidos y la conclusión.

3.1. Problemática

De los dos primeros capítulos se deduce que el concepto de infinito está detrás de la mayoría de nociones que aparecen en el currículo de las matemáticas de bachillerato. Echamos en falta desde una perspectiva purista que el tema se aborde de una manera más directa: la idea de infinito es muy importante en matemáticas. Por hacer un símil con otra rama del conocimiento, es difícil explicar gramática de la lengua española sin fijar previamente el concepto de verbo.

Pero el problema que motiva este estudio es de índole más práctica. Intuimos una relación directa entre la mala o incompleta comprensión de las matemáticas del bachillerato por parte de los alumnos y la claridad en su cabeza sobre el concepto de infinito.

El estudio que hemos realizado, ejecutado a mayor escala, podría ayudar a dilucidar esta cuestión.

3.2. Procedimiento

Reunimos un grupo de 10 personas de entre 15 y 19 años. Se les plantean 3 tandas de preguntas por escrito. La primera tanda sobre sus conocimientos previos e intuiciones del infinito. La segunda sobre la motivación que les produce la idea. La tercera tanda, tras una charla acerca del infinito, gira en torno a los aspectos fundamentales de la misma, para comprobar lo que ha sido asimilado.

Veámoslo de forma detallada.

3.2.1. Circunstancias físicas

El experimento tuvo lugar en el seminario 118 del departamento de Álgebra, Geometría, Topología y Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid. Se realizó el viernes 28 de junio de 2013, entre las 10:30 y las 12:45 de la mañana. La temperatura era agradable, entorno a 20 grados, y el día muy luminoso, completamente despejado. Incluimos esta información por la posible influencia de las condiciones meteorológicas en el ánimo de los presentes.

El seminario 118 es un aula con buena iluminación natural, 4 filas de mesas corridas donde caben 4 alumnos por mesa. Capacidad total de oyentes, 16 personas. Hay una pizarra de gran tamaño en la pared enfrentada a las mesas.

Conocía personalmente a 8 de los 10 participantes en el experimento antes del mismo. Estas personas accedieron por voluntad propia para hacerme un favor personal. A pesar de la edad y de encontrarse en periodo de vacaciones escolares la disposición fue inmejorable y la participación muy activa.

3.2.2. Sujetos del estudio de campo

Reunimos a 10 alumnos de Valladolid de entre 15 y 19 años de edad que han cursado durante el presente año académico 2012/2013 estudios comprendidos entre 3ºESO y 2º de Bachillerato.

Decidimos incluir dos sujetos de 15 años de edad que han finalizado 3ºESO y otro sujeto de 16 años de edad que ha finalizado 4ºESO por los siguientes motivos:

1. La capacidad intelectual de una persona de 15 años está completamente desarrollada. Luego una persona de 15 años es en principio tan capaz como cualquier otra de edad igual o superior de comprender un mismo razonamiento abstracto.

2. Sus ideas sobre el infinito no están viciadas con un manejo implícito tan continuado como se da del mismo en las matemáticas del bachillerato. Consideramos este punto de interés para la realización de un análisis comparativo de los resultados obtenidos en las preguntas relativas a los conocimientos previos o la intuición sobre la idea de infinito.

La siguiente tabla recoge los datos relevantes sobre los participantes en el experimento.

Alumno	**Edad**	**Sexo**	**Centro**	**Curso**	**Opción**	**Media**	**PAU**	**Rep.**
1	15	M	Enseñanza	3ºESO		6		
2	15	M	Enseñanza	3ºESO		6		
3	18	M	Enseñanza	2ºBach	CyT	7	6’5	
4	17	V	Enseñanza	2ºBach	CyT	6	6’95	
5	16	V	Agustinas	4ºESO	B	3		
6	17	M	Teresianas	1ºBach	CyT	3		
7	18	M	Agustinas	2ºBach	CCSS	4		
8	19	V	NúñezA.	2ºBach	CyT	6	4	2ºBach
9	17	M	GregorioF.	1ºBach	CyT	8		
10	17	M	Agustinas	2ºBach	CCSS	5	5’15	

Se ha numerado a los alumnos de 1 a 10 para mantener su privacidad.

Los centros a los que pertenecen se ubican todos en Valladolid capital. Sus nombres completos son: Colegio Santa Teresa de Jesús (Teresianas) de carácter concertado con el bachillerato privado; Colegio Nuestra Señora de la Consolación (Agustinas) de carácter concertado con el bachillerato privado; Colegio Compañía de María (La Enseñanza) de carácter concertado con el bachillerato privado; IES Núñez de Arce de carácter público; Centro de Enseñanza Concertado Gregorio Fernández de carácter concertado.

En la columna "opción" aparecen las opciones CyT referente a la modalidad de bachillerato de Ciencias y Tecnología, CCSS referente a la modalidad de bachillerato de Ciencias Sociales y B referente a la opción de matemáticas B en 4ºESO (son las matemáticas destinadas a dar la base para las matemáticas de la opción científica tecnológica del bachillerato. La otra opción son las matemáticas A, de carácter menos teórico).

En la columna "media" se refleja la nota media obtenida en matemáticas en el curso actual.

En la columna "PAU" aparece la nota obtenida en la prueba de matemáticas de la selectividad 2013.

En la columna "Rep." aparecen los cursos de bachillerato que ha repetido el alumno.

3.2.3. Secuenciación

Acudimos con el grupo de alumnos al aula arriba descrito. Hasta este momento lo único que se les ha dicho es que me van a ayudar a realizar un experimento. Ya en el aula se les solicita que respondan a un conjunto de preguntas por escrito. Cuando terminan, recojo sus respuestas. Llamamos a estas preguntas, **"Preguntas antes de la exposición I"**.

A continuación, se les da una breve explicación de en qué va a consistir la experiencia: van a recibir una segunda hoja con preguntas para responder, se les dejará un tiempo para que lo hagan, después les hablaré durante 1 hora sobre algo que deberán tratar de entender y finalizaremos con la entrega de una última hoja con preguntas sobre lo que se haya tratado en mi exposición para comprobar qué es lo que han entendido de la misma.

Tras esta breve explicación se les entrega una segunda hoja con otras preguntas que también responden por escrito. Llamamos a estas preguntas, **"Preguntas antes de la exposición II"**.

Recojo la segunda hoja y comienzo mi **exposición**. El objetivo de la misma es mostrarles un ejemplo de que existen infinitos más grandes que otros, mediante la demostración de que la cantidad de números naturales es inferior a la cantidad de números reales, siendo ambas cantidades infinitas. Para ello utilizamos la demostración de la diagonal de Cantor.

Finalizamos el experimento entregando una última hoja que llamamos "**Preguntas después de la exposición**".

3.3. Criterios

Dividimos la experiencia en 4 partes que pasamos a describir a continuación. La primera relacionada con la idea que los alumnos tienen sobre el infinito y la intuición del mismo en diversas situaciones matemáticas. Quedó recogido en lo que hemos llamado

Hoja antes de la exposición I. La segunda parte estuvo relacionada con la motivación que la reflexión sobre el infinito produce en los alumnos. La misma queda recogida en la Hoja de antes de la exposición II. A continuación tuvo lugar mi exposición sobre la existencia de infinitos más grandes que otros ilustrándolo al probar mediante la diagonal de Cantor que la cantidad de números reales es superior a la de números naturales siendo ambas cantidades infinitas. Para finalizar, la cuarta parte consistió en la evaluación de lo que los alumnos consiguieron captar de la exposición. Esto último queda recogido en la hoja de preguntas de después de la exposición.

3.3.1. Hoja antes de la exposición I

Nada más llegar los alumnos al aula se les entregó una hoja con preguntas y se les pidió que las respondiesen por escrito. Comenzaron a las 10:30 y el último entregó la hoja a las 10:50, es decir, 20 minutos.

Las preguntas, que aparecen en la hoja que se entregó a los alumnos en otro orden, fueron las siguientes:

1. Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

2. Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

3. ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

4. Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

5. ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

6. ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

7. Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

8. ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.

9. Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

El objetivo de las dos primeras era el de averiguar si el alumno reconoce al infinito como un lugar. Están relacionadas con el aspecto geométrico del infinito. Introducimos la segunda pregunta para examinar si en caso de identificar al infinito como un lugar en la primera pregunta, ¿aparece algún conflicto cognitivo si la dimensión de dicho lugar aumenta? El alumno sabe, o debería saber, que dos planos en dimensión 3 si se cortan lo hacen en una recta. Aquellos que respondan "en el infinito" a la pregunta primera, ¿cómo lo harán a esta otra?.

La tercera y la cuarta tienen que ver con el aspecto aritmético del infinito. Sirven para indagar sobre la intuición del alumno acerca de la posibilidad de que existan infinitos mayores que otros.

La 5ª, 6ª, 7ª y 8ª preguntas tratan sobre el aspecto analítico del infinito. La noción de lo infinitamente próximo. Esto es fundamental para la comprensión de múltiples conceptos analíticos como los límites, la continuidad, la derivación, la integración como aproximación para el cálculo de áreas, las aproximaciones numéricas, errores, etc.

La 9ª pregunta se relaciona con la ley de los grandes números del cálculo de probabilidades.

Estas preguntas se realizaron en un principio con la única intención de comprobar si había algún tipo de relación entre los alumnos que tenían una intuición más clara del infinito y aquellos que comprendían mejor la exposición. Sin embargo algunas respuestas repetitivas nos sorprendieron. Analizamos este aspecto en las secciones resultados y conclusión.

3.3.2. Hoja antes de la exposición II

Tras la entrega de la primera hoja con las respuestas por parte de todos los alumnos, les expliqué el motivo del experimento. Les dije que era acerca del infinito y que les iba a entregar una segunda hoja de preguntas para que respondiesen por escrito. Que a continuación les hablaría durante una hora sobre un aspecto del infinito y que deberían tratar de comprender lo que les dijese, pues al finalizar les entregaría una nueva hoja con preguntas sobre mi exposición.

Esta segunda hoja de preguntas está relacionada con la motivación personal de cada alumno para pensar en la idea del infinito. También queríamos investigar acerca de los alumnos que presentan o aducen una mayor motivación y aquéllos que comprenden mejor la explicación.

Les entregué esta hoja a las 11:00 y el último me la devolvió a las 11:05.

Las preguntas de esta hoja son las siguientes:

1. ¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

2. ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

3. ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

También pretendíamos comprobar si existe alguna contraposición entre la idea propia que tienen sobre el infinito y el recuerdo de cuándo fue la primera vez que pensaron en ello y lo que se les dice en el colegio acerca de este concepto.

3.3.3. Exposición

La exposición duró exactamente una hora: de 11:10 a 12:10. Fue participativa, es decir, les pedí insistentemente que preguntaran si en algún momento no entendían algo y que intervinieran si se les ocurría cualquier idea o comentario que quisieran compartir. Preguntaron e intervinieron en múltiples ocasiones a lo largo de la charla. También se les entregó una hoja en blanco para que tomasen los apuntes que quisieran. Se les repitió que después de la charla se les daría una última hoja de preguntas para responder por escrito sobre la charla y que para ello podían utilizar los apuntes que hubiesen tomado.

Comencé la exposición con una breve introducción acerca de la presencia del infinito en muchos de los conceptos matemáticos que se les han presentado en el colegio. A continuación dejé claro el objetivo de la exposición: demostrar que hay cantidades infinitas más grandes que otras.

Para evitar sorpresas hice un breve comentario sobre la necesidad de demostrar los enunciados matemáticos. Me serví del ejemplo que todos conocían del cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para algunos esto es así porque se lo han dicho y se lo han aprendido, pero ¿por qué es verdad? La evidencia de la demostración algebraica utilizando cuentas que todos manejan

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

dejó zanjado el asunto. Añadí que este era un hecho muy fácil de demostrar pero que existen otros, como el que nos ocupaba que requieren de demostraciones un poco más largas y complejas.

También hice un pequeño repaso sobre los conjuntos numéricos que conocen y los símbolos que los representan. Hacemos aquí un pequeño inciso. Como queda de manifiesto en una de las preguntas de después de la exposición este es un asunto que no tienen nada claro. Mi experiencia como profesor en un internado de verano (1 mes), profesor en prácticas en un IES (2 meses), profesor substituto en un colegio concertado (1 mes), de primer y segundo curso de universidad (un año) y profesor particular (11 años) me permite conjeturar que este hecho es general. En ámbitos tan distintos lo he percibido constantemente. Estoy de acuerdo en que no es un hecho catastrófico ni un fallo de primera índole del sistema educativo, pero resulta extraño que algo a priori tan fácil no consigan asimilarlo. Personalmente me resulta una incógnita pues vienen manejando los conjuntos numéricos y su simbología desde primaria. ¿Causas?

Tras el recuerdo de los distintos números, se presentaba lo que creí sería el obstáculo más grande para que comprendiesen la exposición: comparar la cantidad de elementos en conjuntos infinitos. Sorprendentemente, el asunto quedó claro sirviéndome del ejemplo del arca de Noé y remarcando que nuestro objetivo no era saber el número exacto de elementos de un conjunto sino si la cantidad de elementos en uno es igual, superior o inferior a la cantidad de elementos en otro.

> Y dijo Dios a Noé: *“y llevarás contigo en tu arca una pareja de cada especie animal sobre la tierra, el macho y su hembra, y una pareja de cada especie de ave del cielo, el macho y su hembra”*

En realidad son 7 parejas por especie con algunas excepciones (Génesis 7:2) pero no era cuestión liar más la cosa. La pregunta que todos entendieron fue ¿hay la misma cantidad de animales macho que de animales hembra en el arca? Sí, porque a cada macho le asocio una y sólo una hembra (su hembra), y al hacer esto no me dejo hembras sin macho. Luego en el arca hay la misma cantidad de animales macho que de animales hembra. El hecho de utilizar la palabra cantidad y no número es completamente intencionado.

Sirviéndonos de esta noción de comparación de cantidades les mostré que había la misma cantidad de números pares e impares, de números pares y naturales, de números naturales y de enteros y de números naturales y racionales, mediante los procedimientos usuales. Como queda de manifiesto en las preguntas la mayoría asimiló bien esta idea y los hechos que con ella demostramos. Les dije que aquellos conjuntos infinitos que tienen la misma cantidad de elementos que el conjunto de los números naturales son conjuntos que podemos contar y ordenar (el primero, el segundo, el tercero,...), o contables.

Para finalizar vimos, con otro lenguaje, que esa asociación biyectiva se puede representar también con gráficas de funciones, lo que me sirvió para hacerles ver que hay la misma cantidad de números reales que de números en el intervalo $[0, 1]$ mediante la gráfica de la tangente. A juzgar por las respuestas entregadas muchos comprendieron que la cantidad de puntos en toda la recta real es la misma que en un trozo de ella, por pequeño que sea.

Finalizamos la exposición con el procedimiento de la diagonal de Cantor para demostrar que es imposible contar los números del intervalo [0,1]. Tuve que hablarles sobre las dos posibles representaciones decimales de los números decimales exactos y sobre el razonamiento por reducción al absurdo, pero a juzgar por las respuestas de las preguntas de después de la exposición más o menos les quedó claro.

3.3.4. Preguntas después de la exposición

Con este conjunto de preguntas que se les entregó tras un breve descanso después de la exposición pretendimos comprobar lo que habían asimilado acerca de los aspectos fundamentales de la misma. Tuvieron media hora para contestarlas, de 12:15 a 12:45. Podían usar los apuntes que habían tomado. Las preguntas eran

1. ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

2. Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

3. ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

4. ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

5. Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

6. Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

7. ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

8. ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

3.4. Resultados

Presentamos en la siguiente tabla los resultados obtenidos en las 3 tandas de preguntas, la primera relacionada con la intuición del infinito por parte de los alumnos, la segunda con la motivación que les produce profundizar en el conocimiento de la idea y la tercera sobre su comprensión de lo dicho en la durante la charla. Las calificaciones aparecen en esta tabla sobre 10 puntos.

Alumno	**Intuición**	**Motivación**	**Comprensión**
1	1'9	5	10
2	1'7	3'3	5'7
3	3'7	1'7	4'6
4	2	10	10
5	2'7	8'3	5
6	2'5	8'3	5
7	1'9	1'7	5
8	5'3	10	9'3
9	1'9	6'7	2'9
10	0'6	1'7	4'3

3.4.1. Criterios de calificación

En la siguiente tabla aparecen las calificaciones obtenidas según se detalla más adelante. La tabla anterior es una transformación de la que presentamos en este epígrafe sobre criterios de calificación. La transformación consiste en pasar todas las notas según proceda a notas sobre 10 puntos, con un solo decimal, por redondeo al alza. Presentamos ambas tablas por dos motivos:

1. Sa ha calificado cada hoja siguiendo los criterios que a continuación se exponen. Para poder observar la relación entre dichos criterios, las respuestas evaluadas adjuntadas al final del documento y la calificación otorgada es preferible la utilización de la tabla del presente epígrafe.

2. La tabla anterior es más manejable para un estudio comparativo entre la intuición, la motivación y la comprensión, ya que utiliza la misma escala, sobre 10 puntos.

Alumno	Intuición	Motivación	Comprensión
1	1’5*	1’5	7
2	1’35*	1	4
3	3’35	0’5	3’25
4	1’85	3	7
5	2’45	2’5	3’5
6	2’25	2’5	3’5
7	1’75	0’5	3’5
8	4’75	3	6’5
9	1’75	2	2
10	0’5	0’5	3

Las calificaciones son subjetivas. A modo orientativo incluimos los criterios de calificación que hemos seguido. De aquí en adelante, hasta el final del epígrafe, por “la tabla” comprenderemos la que aparece justo sobre estas lineas.

Intuición o preguntas antes de la exposición I

Puntuamos sobre 1 punto cada pregunta, y la calificación que aparece en la tabla en la columna intuición es sobre 9 puntos, siendo 9 máxima intuición y 0 mínima, salvo para los 2 sujetos de 15 años, alumnos 1 y 2 en la tabla, en los que la pregunta número 8 no ha sido tenida en cuenta ya que no conocían la función trigonométrica tangente, por lo que su calificación es sobre 8 puntos. En la tabla hacemos notar esta diferencia añadiendo un asterisco (*) al lado de sus calificaciones.

Las preguntas

> Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?
>
> Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

han sido calificadas positivamente si se identifica al infinto como un lugar en donde se cortan tanto las rectas como los planos paralelos. También se ha valorado cualquier atisbo de idea de infinitud tanto en la recta como en los planos.

Las preguntas

> ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?
>
> Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

han sido calificadas positivamente si se identifica al infinto como una cantidad y si de da alguna razón intuitiva para explicar que un conjunto es infinito. Por ejemplo, algo del estilo a “hay infinitos números naturales porque nunca se acaban”.

Las preguntas

> ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti “x tiende a cero”?

> ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?
>
> Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?
>
> ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala. han sido valoradas positivamente si se identifica al infinito detrás de los conceptos de límite y asíntota y si se aprecia una intuición vaga de la completitud de la recta real.

La pregunta

> Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

ha sido valorada positivamente si se aprecia intuición del infinito como un proceso sin fin detrás de la ley de los grandes números.

A modo orientativo incluimos la calificación media sobre 10 puntos obtenida por los alumnos en el apartado de intuición. Para ello pasamos a una nota sobre 10 multiplicando por 10/9 (10/8 en el caso de los alumnos 1 y 2) la nota de cada alumno, realizamos la media aritmética de las cantidades así obtenidas, y eso nos da la media numérica sobre 10 puntos de las calificaciones de los alumnos en el apartado de intuición.

Nota media en intuición sobre 10 puntos: 2'4 sobre 10

Motivación o preguntas antes de la exposición II

La calificación de la motivación que aparece en la columna correspondiente de la tabla es sobre 3 puntos, siendo 3 máxima motivación y 0 mínima. Las preguntas

> ¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?
>
> ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

tienen un peso específico mayor dado que lo que se está evaluando es la motivación suscitada por una reflexión acerca del infinito. La pregunta

> ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

es más bien orientativa acerca de lo que recuerdan sobre lo que se les ha dicho en sus centros de enseñanza sobre el infinito. Un recuerdo acertado podría estar ligado con la atención prestada durante la explicación.

De manera análoga que con los resultados de intuición, obtenemos

Nota media en motivación sobre 10 puntos: 5'6 sobre 10

Comprensión o preguntas después de la exposición

En la columna "comprensión" de la tabla aparecen las calificaciones sobre 7 puntos de la hoja de después de la exposición. La calificación es sobre 7 puntos, porque la pregunta sobre los distintos conjuntos numéricos,

> Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

buscaba que clarificasen de manera más o menos autónoma las diferencias entre unos tipos de números y otros. El resto de preguntas están evaluadas sobre 1 punto. Recordamos que la exposición fue de 1 hora de duración, en la que se hizo una demostración larga y complicada para el nivel de complejidad al que se les (mal)acostumbra en el bachillerato y en la ESO.

De manera análoga que con los resultados de intuición, obtenemos

Nota media en comprensión sobre 10 puntos: 6'1 sobre 10

Adjuntamos todas las hojas recogidas durante el experimento, incluída la de apuntes tomados sobre la exposición si la hubo, en el apéndice del final del trabajo.

3.5. Conclusión

Extraemos del estudio realizado las siguientes conclusiones:

1. Los alumnos sometidos a estudio vienen con una idea muy difusa del concepto de infinito. ¿Podrán comprender bien los conceptos matemáticos relacionados que se les enseñan en el bachillerato? Inferimos que su formación en este sentido es deficitaria.

2. Sin embargo, la curiosidad que muestran sobre el concepto de infinito es media. ¿Costaría mucho introducir en dos sesiones una idea clara de lo que es el infinito en el bachillerato? ¿Tiene el profesorado una formación suficiente? Es decir, ¿qué parte del profesorado en secundaria y bachillerato comprende bien el concepto matemático del infinito? Esto podría también formar parte de otro estudio paralelo y complementario al nuestro.

3. La comprensión de una demostración bastante más larga de las que se ven, cuando se ven, en el bachillerato por los alumnos sometidos a estudio es ampliamente satisfactoria. Remarcamos la obtenida por el sujeto 1 de 15 años de edad (3ºESO) y con una idea previa del infinito muy pobre. Fue uno de los que mejor comprendió la charla, siendo un alumno que obtiene calificaciones medias en matemáticas.

4. La percepción geométrica del infinito como un lugar donde se cortan las rectas paralelas es nula entre los alumnos sometidos a nuestro estudio.

3.6. Continuación del trabajo

Nuestro estudio es un trabajo de campo que trata de acercarse a la realidad de un problema patente: la pobre formación matemática del alumnado de ESO y Bachillerato. Una de las causas podría estar relacionada con el asunto que manejamos aquí de manera más directa, el infinito, que como hemos visto subyace en muchos de los conceptos clave del currículo de bachillerato y sin embargo no se aborda de manera explícita.

Así pues, nuestro trabajo, puede entenderse como una llamada de atención sobre un tema a reflexionar, en el que se podría profundizar realizando un verdadero estudio estadístico a gran escala.

Apéndice A

Respuestas de los alumnos

Adjuntamos todo el material recogido en el experimento, ordenado por tandas de preguntas. En la parte superior derecha de cada hoja se apunta el alumno que la rellenó.

Alumno 1

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde? No se cortan ~~(porque)~~ porque la posición de los paralelas es infinita y continua.

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo? Los números ~~reales~~ naturales los ~~fra~~, fraccionarios, los enteros, los irracionales. los números reales.

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué? Ninguno, no se puede asegurar el número de caras y cruces que se obtendrán, la probabilidad no se puede asegurar.

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

Menos de uno.

Sería 0 para que anule al denominador, x tiende a cero es para ver qué numero tiende a igualar a 0 el denominador. En este caso como el denominador es x será el 0.

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ? Tres con infinitos decimales.

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No las paralelas nunca cortan porque su posición separada escontinua.

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

5'5 y el 5'6, sí el 5'55....
Nunca dos números van ~~a estar~~ a ser consecutivos
todos tienen infinitas cifras decimales

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala. No sé lo que es una tangente.

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Hay infinitos de los dos tipos. Hay más números enteros (porque se incluye el 0). También hay infinitos números.

Alumno 2

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No, no se cortan porque son paralelas y las paralelas no se cortan.

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

N ~~Numerales~~ Naturales 1 2 ∞...
R Reales
Q Enteros
Z Radicales
I Irracionales

en todos infinitos.

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

5 _ 2 _ 3
15 _ 9 _ 6.

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

Que es muy próximo a 0.
El resultado de dividir es 0' algo valores más pequeños todavía.
El límite de la función 1/x es 1.

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

2 y decimales.

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

Que las paralelas nunca se cortan.

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

0´98 y 1.

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.

No se lo que es.

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

todos los números son infinitos.

todos los números son infinitos.

Alumno 3

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

NO SE CORTAN EN NINGÚN PUNTO PORQUE CADA UNA ESTÁ EN DIFERENTE PLANO.

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

NÚMEROS reales e imaginarios, naturales y enteros. Hay infinitos de los dos

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

NO PORQUE CADA VEZ SALE DE UNA FORMA.

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

1 entre algo muy pequeño da ∞

El límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 es ∞

x tiende a 0 quiere decir que la x toma valores aproximándose al 0 pero sin coger el valor 0

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

INFINITOS

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

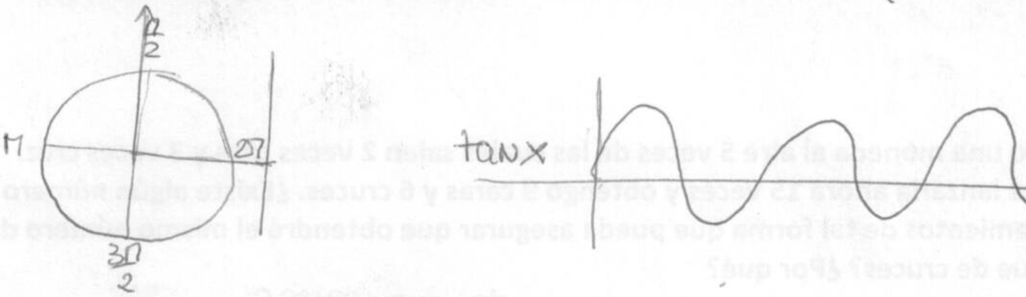
NUNCA SE CORTAN PORQUE SON PARALELOS

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

1 y 2 entre medias hay infinitos números 1'1, 1'2, 1'3
todos los números se pueden dividir en otros más pequeños

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.

La tangente del ángulo 0 es 0 y la de $\frac{\pi}{2}$ infinito.



9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Iguales e infinitos pares y impares
Más números enteros que naturales. Naturales 10 y enteros infinitos

Preguntas antes de la exposición I

Alumno 4

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No se cortan en ningún punto ya que tienen la misma dirección y sentido y mantienen siempre el mismo alejamiento entre ellas.

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

2, reales e imaginarios

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

No porque nunca podrás asegurar cuantas veces va a salir cada cosa. Solo puedes calcular una probabilidad alta.

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

- Obtengo un valor cercano a ∞
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ ya que 1 dividido por un valor mínimo da ∞.
- El $x \to 0$ quiere decir que x toma el valor 0.

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

entre π(3,14) y 5,41 existen infinitos números, con infinitas décimas, centésimas, milésima etc...

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

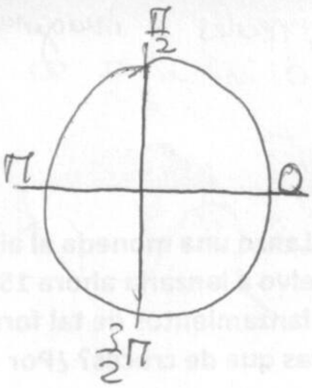
No se cortan en ningún punto por el mismo caso que la pregunta 1º, mantienen su alejamiento en todos los puntos del espacio.

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

5 y 6. Un número entre ellos. 5,5.

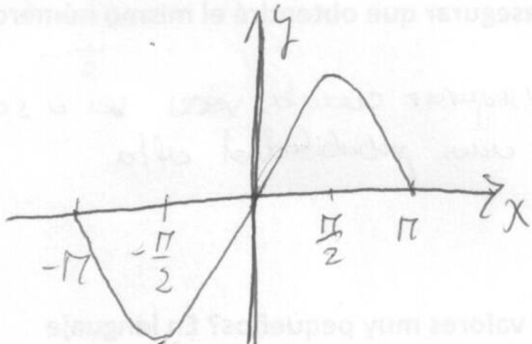
Se deduce que un tramo, por pequeño que sea, siempre va a poder dividirse en partes más pequeñas.

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.



- $\tan g = \frac{\operatorname{sen}}{\cos} = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

- $\tan g \frac{\pi}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$



9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Igual en número de pares y de impares

Más números naturales que enteros

Alumno 5

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No se cortan, porque dos rectas paralelas por mucho que las prolongues nunca llegan a cortarse en ningun punto

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

Reales
Racionales
Fraccionarios
Irracionales
Naturales
enteros

~~infinitos~~

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

No existe, porque depende de la suerte. Son lanzamientos que salen al azar y nunca se conoce el lado de la moneda que va a salir

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

un numero mayor que 1

$\text{límite}_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \infty$

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

$5'41 - 3'14 = 2'27$ Existen infinitos numeros.

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No, por que si son paralelos no se cortan en ningun punto, ~~aunque~~ pueden ~~lleg~~ estar a muy poca distancia, pero nunca llegaran a tocarse.

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

1 . 1'1

Sí, que ~~siempre~~ por muy seguidos que estén dos números siempre va a haber otro número entre esos dos.

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Hay infinitos números ~~naturales~~ pares e impares.
Hay infinitos números de todas las clases.

Alumno 6

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No se cortan porque dos rectas paralelas nunca se cortan

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

2 Reales → hay muchos tipos

Imaginarios →

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

No porque es aleatorio.

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

Números mas altos que 1 a partir de

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} =$

Son los valores más proximos de la función al número al que tiende x

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

Infinitos

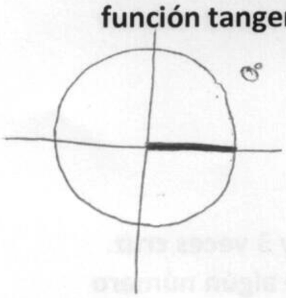
6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No porque son paralelos y los planos paralelos nunca se cortan

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

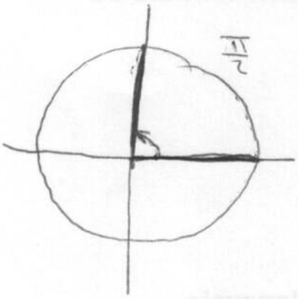
1 − 0,9 Entre medías puede estar el 0,99 los números son infinitos.

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.



$$tg\, 0° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$tg\, 0° = \frac{0}{1}$$



$$tg\, \frac{\pi}{2} = 1$$

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Hay los mismos números pares que impares
hay infinitos y hay los mismos números naturales
que enteros también hay infinitos

Alumno 7

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No se cortan, porque las rectas paralelas van en la misma dirección y siempre una encima de otra.

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

2.

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

todos los lanzamientos con números pares. Porque con numeros pares tengo la posibilidad de sacar el mismo numero de caras que de cruces

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

Da ∞ ~~esta~~

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No se cortan porque los espacios paralelos nunca se cortan

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

1 y 1'5

1'3

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Hay el mismo numero, son infinitos.

El mismo numero.

Alumno 8

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde? No se cortan. Tienen la misma dirección y no tienen ningún punto en común

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

4 tipos de numeros. Infinitos de cada tipo

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué? No, porque es un caso de azar, con la mitad de ~~probabilidad posibilidades~~ provalilidad de cada resultado.

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

Obtendre valores mas grande cuanto menores sean los valores entre los que divido a 1.

El limite es infinito. Porque cualquier numero entre 0 da ∞

Que x toma valores cada vez mas proximos a 0

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

Existen infinitos numeros.

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

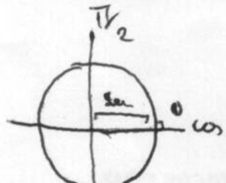
No se cortan, porque tienen la misma direccion y estan desplazados en el espacio uno respecto al otro

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

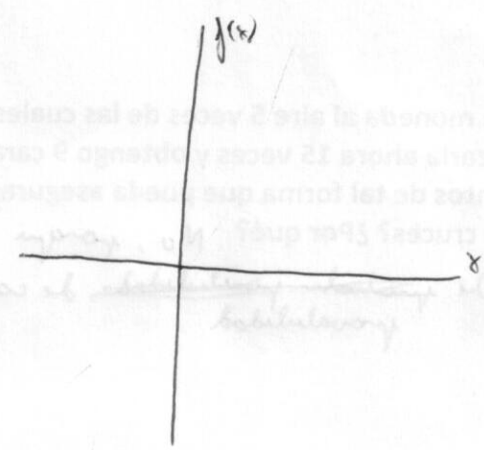
$\frac{4}{2}$ y $\frac{4}{2'1}$ Se puede escribir uno entre ellos dos (Ej: $\frac{4}{2'05}$)

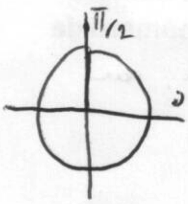
Se me ocurre, que no existen dos numeros que se sucedan inmediatamente el uno al otro, siempre existirá un numero entre ellos dos

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.



La $tg\,0 = 0$





$Tg\,\pi/2 = \infty$

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Hay el mismo numero de pares que de impares, porque de ambos tipos hay infinitos numeros. Hay el mismo numero de numeros naturales que de enteros, de los dos tipos hay infinitos numeros.

Alumno 9

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No se cortan en ningún punto ya que van en el mismo sentido, dirección y una "en frente" de otra.
Es así:

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

Los números reales que ~~no~~ son infinitos que se pueden diferenciar en enteros y decimales y racionales.
Los números complejos que depende de una constante.

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

Todos los lanzamientos pares

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

Que te da 0 o aproximado a 0.
El límite de una función es indeterminada tendrías que hallar los límites laterales ya que te da $\frac{1}{0}$
Lo que quiere decir es que en donde haya una "x" en la función la sustituyes por cero

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

Hay 2'27 números entre ellos.

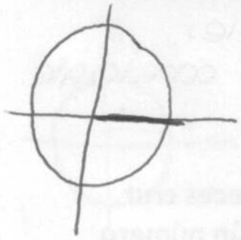
6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No, porque siguen siendo lo mismo

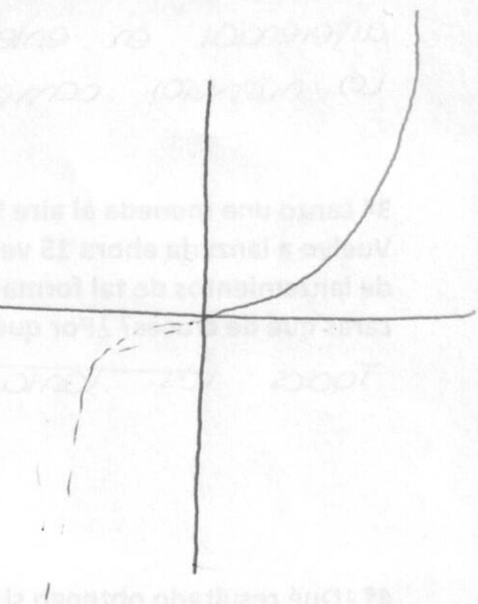
7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

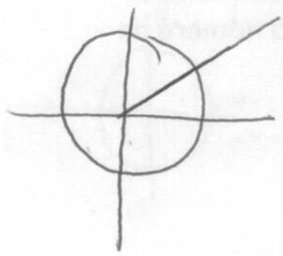
1 1'5 2

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.



la $tg\ 0° = 0$





la $tg \frac{\pi}{2} = \frac{sen \frac{\pi}{2}}{cos \frac{\pi}{2}}$

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Lo mismo, porque son infinitos ambos.
Lo mismo también.

Alumno 10

Preguntas antes de la exposición I

1º Dadas dos rectas paralelas, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

No se cortan en ningún punto porque están a la misma distancia y van en el mismo sentido.

2º ¿Cuántos tipos de números conoces? ¿Cuántos hay de cada tipo?

Enteros, reales, decimales, racionales, irracionales.

3º Lanzo una moneda al aire 5 veces de las cuales salen 2 veces cara y 3 veces cruz. Vuelvo a lanzarla ahora 15 veces y obtengo 9 caras y 6 cruces. ¿Existe algún número de lanzamientos de tal forma que pueda asegurar que obtendré el mismo número de caras que de cruces? ¿Por qué?

4º ¿Qué resultado obtengo si divido 1 por valores muy pequeños? En lenguaje matemático, ¿quién es el límite de la función 1/x cuando x tiende a cero? ¿Por qué? ¿Qué quiere decir para ti "x tiende a cero"?

Al dividir 1 por valores pequeños da valores aproximados a 0.

El $\lim_{x \to 0} 1/x \to \frac{1}{0} \to$ indeterminado

Que tiende a 0 es que el valor de "x" es 0.

5º ¿Cuántos números existen entre el número pi y el número 5,41 ?

6º Dados dos planos en el espacio paralelos, ¿se cortan en algún punto? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, ¿dónde?

7º Escribe dos números que consideres que están muy próximos. ¿Puedes escribir otro que se encuentre entre ellos? ¿Se te ocurre alguna conclusión? ¿Cuál?

El 0 y el 1. Entre estos el 1,5

8º ¿A quién es igual la tangente del ángulo 0? ¿Y la del ángulo pi medios? Haz un dibujo explicativo si lo consideras necesario. ¿Recuerdas cómo es la gráfica de la función tangente de x? En caso afirmativo, dibújala.

9º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? ¿Por qué?

Hay Los mismos de pares e impares.
Hay el mismo numero de naturales y enteros.

Alumno 1

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito? En primaria nos lo explicaron.
El infinito es una cifra que REPRESENTA todos los números existentes, infinitas cifras decimales o infinitos números enteros.

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál? Bueno, curiosidad no mucha pero lo que me llama la atención es que una sola cifra contenga todos los números que existen.

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto? El infinito es una representación de todos los números existentes y ~~se~~ se representa con el símbolo ∞

Alumno 2

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

El infinito es un símbolo ∞.

Pues hombre, el infinito es muy largo y grande y abarca infinitos números.
Al final todo está relacionado con el infinito, todo.

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

Puesto que todo en las matemáticas tiene que ver con el infinito es algo que nunca acaba. Todo es infinitos.

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

∞, Que todos los números nunca acababan y que se llamaba ∞ infinito. Que había infinitos números, radicales, fracciones etc.

Alumno 3

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Si, cuando empezamos a estudiar los límites.
Es el número más grande que existe.

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

No me despierta curiosidad.

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

Si, cuando explicaron los límites.
Te explican que es muy grande y que si divides algo entre el da 0

Alumno 4

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Si, pensando en el universo, se hace difícil entender que algo nunca tenga fin.

El infinito es para mi algo muy difícil de entender ya que nunca se ha demostrado que algo sea infinito. Lógicamente, ya que nunca se llegaría al fin, porque no hay.

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

Si, muchas. Como he dicho en la anterior pregunta el infinito es indemostrable.

¿Cómo saber entonces si algo es infinito? Cuando se habla por ejemplo ~~del~~ que el universo es infinito, no sé en que se basan. Nosotros conocemos muy poco de él.

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

Sí, en matemáticas y filosofía.

En matemáticas porque el infinito es un importante signo y valor matemático.

En filosofía del universo.

Me he quedado con que el infinito es algo inexplicable, un valor, un lugar, que no lo es en realidad, algo al que nunca se llega ~~a él~~.

Alumno 5

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Si, ~~Despues de~~ no me acuedo, el infinito es un simbolo que significa que algo no se acaba nunca, que se prolonga y nunca se termina.

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

~~Si porque en algo~~ Si; ~~tengo la curiosidad~~ he tenido la curiosidad de si algo dura infinito o llega hasta el infinito.

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

Si, en clase de matematicas, asique mi idea sobre el infinito es que es un número. Aunque no solo se utiliza para expresar un numero, en ~~muchas~~ algunas ocasiones de nuestra vida ~~oti~~ se utiliza el termino infinito.

Alumno 6

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Alguna vez pero no se cuando

Es algo que está lejos que no sabemos lo que es ni ~~[illegible]~~ - como hallarlo

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

Si porque es interesante no saber que es y no saber hasta donde llega

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

Si en los limites, sucesiones...
Que es un número muy grande que, todas las operaciones que se hagan con el casi siempre dan ∞

Alumno 7

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Si. Cuando ~~empe~~ empecé a estudiar ~~lo~~

Cuando me quiero referir a algo largo o a un lugar lejano es cuando uso el infinito. No tiene mucho significado para mí el infinito.

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

Ninguna.

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

Si. El infinito representa a ~~números~~ una serie de numeros que no tienen fin o que es dificil que puedas llegar a su fin.

Alumno 8

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Si, cuando aprendí a contar hasta 100, pregunté hasta que número se podía contar, la respuesta no fue la que yo esperaba. La idea de algo inconcebiblemente grande no me entró en la cabeza hasta tiempo despues.

Actualmente pienso en el infinito como algo teórico, y únicamente aplicable a la práctica quizas en el espacio.

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

Si, aplicado a la concepción del universo o multiverso, siendo imposible para mi, concebir una delimitación dentro del espacio, sin separar dos partes de este.

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

Si, la idea general es ~~lo~~ que representa el extremo o maximo posible.

Alumno 9

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Nunca he pensado en el infinito, ~~y en~~ solo cuando nos hablan en colegio, pero nunca me he planteado que es

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

Si me pongo a pensarlo claro que me preocupa, pero como nunca me he puesto a pensar sobre ello, es mejor llevar una vida de dia a dia y no pensar en el más allo

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

En el colegio si que han hablado sobre el infinito, en el colegio nos hablaban relacionado con Dios y la religión. Pero en el instituto ya no te hablan en relación a eso sino en relación como que el infinito es como la muerte.

Alumno 10

Preguntas antes de la exposición II

1º¿Has pensado alguna vez en el infinito? En caso afirmativo, ¿recuerdas cuándo fue la primera vez? ¿Qué es para ti el infinito?

Nunca he pensado en el infinito.
El infinito ~~es~~ no es un numero concreto,

2º ¿Es la idea del infinito un asunto que te despierte alguna curiosidad? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál?

No

3º ¿Te han hablado alguna vez en el colegio o instituto sobre el infinito? En caso afirmativo, ¿con qué idea general te has quedado de lo que te explicaron sobre este concepto en el colegio o instituto?

Sí, que no es ningún numero concreto, se identifica con Dios.

Alumno 1

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? Hay ~~las~~ misma cantidad de números pares e impares, porque según la correspondencia $2n \longrightarrow 2n+1$ hay infinitos números de los dos tipos.

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

a) $\pi \rightarrow \pi$ es real y no es racional porque no se puede dividir $\frac{\pi}{4}$

b) $2/5$

c) -2

d) 54

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? Hay la misma cantidad de números naturales y enteros. Porque si hacemos otra vez una correspondencia

$0 \longrightarrow 0$

$2n \longrightarrow n$

$2n+1 \longrightarrow -n-1$

~~Salen~~ acaban saliendo todos los números naturales y enteros con infinitas cifras los 2

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase? Hay más números ~~naturales~~ reales porque los reales no se pueden contar. Hay infinitos naturales y ~~ninguno real porque son incontables~~ ~~No se puede contar [0, 1]~~ muchísimos más reales porque no se pueden contar.

Hay infinitos naturales pero tantos reales que no se pueden contar.

Los naturales sí son contables

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

No se pueden contar; Pero sí se pueden comparar emparejando uno de un conjunto con uno de otro A llegar al final si ~~todos~~ no ha sobrado ninguno eso quiere decir que hay los mismos y si ~~sobra~~ uno ha quedado solo quiere decir que hay más en el conjunto ~~q~~ en el que ha sobrado uno.

Alumno 1

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

He aprendido muchas cosas, que un intervalo (por pequeño que sea es incontable). Que hay infinitos más grandes que otros, que una forma de contar conjuntos es emparejar elementos, que los números reales son incontables y que se pueden hacer muchas relaciones sobre si hay más cantidad de números en naturales....

También que la fórmula de los pares es $2n$ y q la de los impares es $2n+1$.

Alumno 1

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales? Establecer una relación

$\mathbb{R} \longrightarrow$ Intervalo

y decir ~~que~~ ¿Si fuesen contables, ¿Podrían ser ~~contable~~ contables? Es imposible que un ~~...~~ intervalo sea contable por lo tanto los números reales no.
Y luego pensar, si no se pueden contar, es que hay más nºs reales que naturales.

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué? Sí porque ~~hay~~ un infinito de $\mathbb{R}$ es mucho más grande que uno de ~~...~~ $\mathbb{N}$.

infinitos más grandes que otros

Alumno 1

pares $2n$
impares $2n+1$.

pares $\longleftrightarrow$ impares
$2n \longrightarrow 2n+1$.

Hay la misma cantidad de nºs pares e impares

pares $\longleftrightarrow \mathbb{N}$
$2n \longrightarrow n$.

$\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, \}$

$0 \rightsquigarrow 0$
$2n \rightsquigarrow n$
$2n+1 \rightsquigarrow -n-1$

$\boxed{\mathbb{N} = \longrightarrow \mathbb{Q}}$

$0 \rightsquigarrow 0$
$1 \rightsquigarrow -1$
$2 \rightsquigarrow 1$
$3 \rightsquigarrow -2$
$4 \rightsquigarrow 2$
$5 \longrightarrow -3$
$6 \longrightarrow 3$
$7 \rightsquigarrow -4$

Hay la misma cantidad de números naturales y enteros.

Los reales no se pueden contar.

$\boxed{\mathbb{R} \longleftrightarrow [0, 1]}$

Diagonal de cantor

No puedo contar $[0, 1]$, supongamos que puedo contar $[0,1]$

$[0, 1]$ $r_1 = 0' x_{1_1} x_{2_1} x_{3_1} x_{4_1} x_{5_1} \ldots$
$r_2 = 0' x_{1_2} x_{2_2} x_{3_2} x_{4_2} x_{5_2} \ldots$
$r_3 = 0' x_{1_3} x_{2_3} x_{3_3} x_{4_3} x_{5_3} \ldots$
$r_4 = 0' x_{1_4} x_{2_4} x_{3_4} x_{4_4} x_{5_4}$
$r_5 = 0' x_{1_5} x_{2_5} x_{3_5} x_{4_5} x_{5_5}$

$r = r_5 \rightarrow t_5$
$= x_{55}$
$x_{55}+1$ si $x_{55} \neq 9$
0 si $x_{55} = 9$

No puede ser.

Si encuentro uno que está fuera, se demuestra que no lo puedo contar

$r = 0' t_1 t_2 t_3$

$t_1 = \begin{cases} x_{11}+1 \text{ si } x_{11} \neq 9 \\ 0 \text{ si } x_{11} = 9. \end{cases}$ $\quad r_1 = 0'12399\ldots$

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN Alumno 2

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay los mismos números pares que impares la cantidad de números es infinita.

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

π ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; -3 ; 2 .

π: es real porque es un nº pero no es racional

$\frac{1}{\sqrt{2}}$:

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay la misma cantidad de números naturales y enteros.

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, -2\}$.

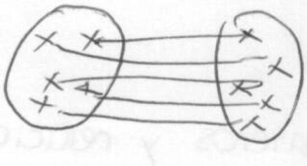
Porque puedes contar los números naturales y enteros y relacionarlos.

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

No porque es imposible contar los números reales y los naturales sí que se pueden contar.

Hay infinitos en ambos.

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?



Relacionándolos, es decir contándolos entre sí creando proporción.

Alumno 2

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

Pues como todo lo que ha dicho no lo sabía lo he aprendido todo.

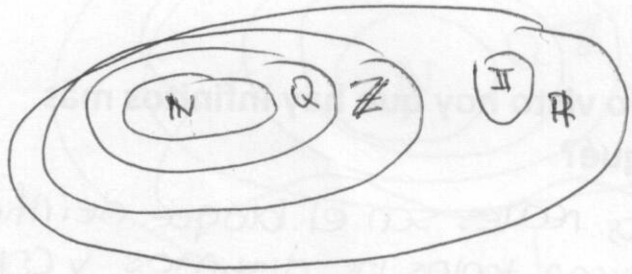
Todo iba relaccionado con los números infinitos.
Y las cantidades posibles y no posibles para contar números.

Y que los números reales no se pueden contar, pero entre los números reales sí que hay una similitud de mismas cantidades entre los números naturales y enteros, o los pares con los naturales

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z}$.

2n Par

2n+1 Impar



$\mathbb{N}$ = Naturales
$\mathbb{Q}$ = Racionales
$\mathbb{Z}$ = Enteros
$\mathbb{I}$ = Irracionales
$\mathbb{R}$ = Reales.

contable
contable
contable
Infinitos.
contable
Incontables.

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

Pues que los números reales son infinitos y los naturales también son infinitos pero que hay más cantidad (de infinitos) de números reales que infinitos de números reales.
Hay más cantidades de infinitos que otros infinitos.

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Sí porque los números reales son el bloque de infinitos más grandes ya que abarcan todos los distintos y COMPLEJOS bloques de números.

Alumno 2

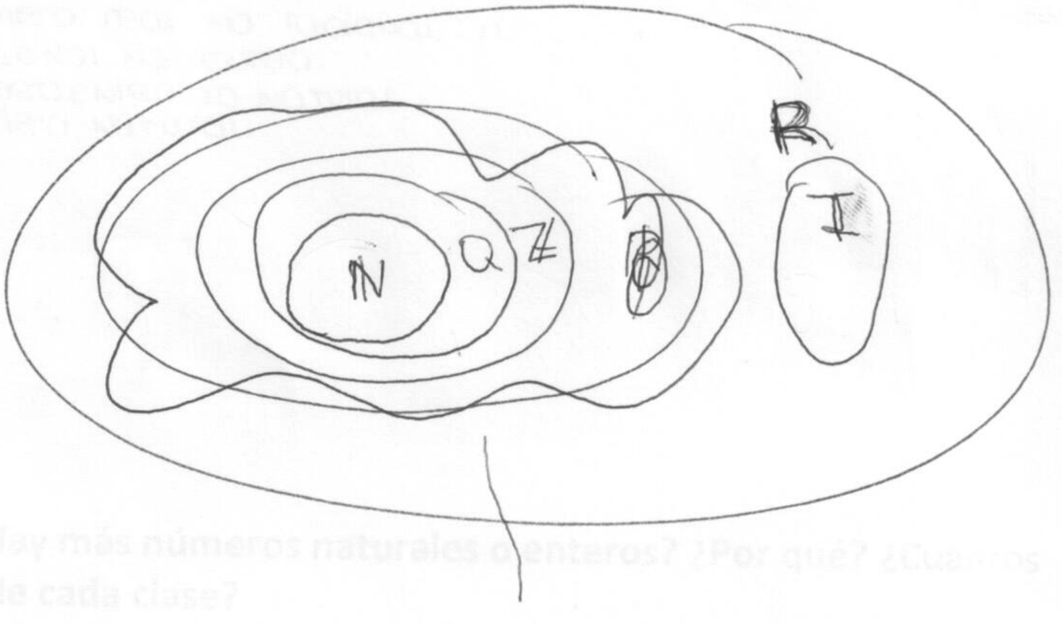
$2n$ Par
$2n+1$ Impar.

Mima cantidad de números pares con naturales

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, -2\}$.

No se pueden contar los números reales.

misma cantidad de numeros naturales y enteros.



Alumno 3

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay el mismo número de pares y impares porque a cada número par le corresponde uno impar. Hay infinitos

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

Número real no racional: π
Racional no entero:
Número entero no natural:
Número natural:

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

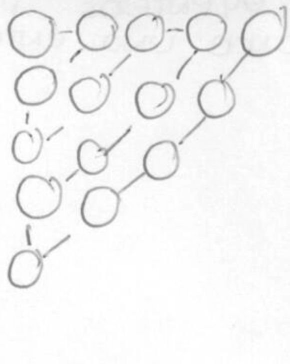
Hay el mismo número de naturales y enteros porque a cada número natural le corresponde uno entero. Hay infinitos de cada uno

$0 \rightsquigarrow 0$
$1 \rightsquigarrow -1$
$2 \rightsquigarrow 1$
$3 \rightsquigarrow -2$
$4 \rightsquigarrow 2$

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay el mismo número de reales que de naturales

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?



Si les puedes numerar les puedes contar y así ver si tienen el mismo número de elementos o no

Alumno 3

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

He aprendido que es la diagonal de cantor

Julia

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Si que hay infinitos más grandes que otros porque no podemos contar los intervalos.

[0,1]

$r_1 = 0'x_{11}\ x_{21}\ x_{31}$

$r_2 = 0'x_{12}\ x_{22}\ x_{32}$

$r_3\ 0'x_{13}\ x_{23}\ x_{33}$

$r = 0't_1\ t_2 t_3$

$t_1 = \begin{cases} x_{11} + 1 \text{ si } x_{11} \neq 9 \\ 0 \text{ si } x_{11} = 9 \end{cases}$

$r_1 = 0'1,2399$

$r = r_5 \to t_5$

$t_5 = \begin{cases} x_{55} + 1 \text{ si } x_{55} \neq 9 \\ 0 \text{ si } x_{55} = 9 \end{cases}$

No puede ser

Alumno 4

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay el mismo número de pares que de impares.

A cada impar le asociamos un par: $2n \rightarrow 2n+1$

Hay infinitos de cada clase, pero el mismo número infinito.

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

1) $\pi = 3,14\ldots \rightarrow$ porque tiene infinitos decimales

2) $\frac{3}{4} \rightarrow$ porque ~~es menor que 9~~ $\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$

3) $-4 \rightarrow -4 \notin \mathbb{N}$

4)

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay iguales cantidad de nº naturales que de enteros.

Lo demostramos si a cada número natural le asociamos uno entero:

$\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Z}$

$2n \text{ —— } n$

$2n+1 \text{ —— } -n-1$

infinitos de cada clase, pero el mismo número infinito.

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

No se pueden contar la cantidad de números reales por lo tanto ~~no~~ podemos decir que ~~hay mas reales q~~ el ~~el~~ infinito de los reales es mayor que los naturales.

Por la diagonal de Cantor demuestro que no puedo contar el intervalo $[0,1]$, y demuestro en en $\mathbb{R}$ hay la misma cantidad de números que en $[0,1]$. Por lo tanto, no puedo contar los $\mathbb{R}$.

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

~~A~~ Contándolos mediante una asociación en la que asocies cada número de un conjunto con ~~a~~ cada número del otro conjunto.

Alumno 4

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

Se puede demostrar que ~~en~~ dos conjuntos tienen la misma cantidad de números mediante la Asociación de éstos.
Asociando cada número de un conjunto con otro y sólo otro del 2º conjunto podemos comprobar que tienen el mismo número infinito.

Cuando no podemos asociarlo, es decir, contar la cantidad de números de un conjunto, es que no tienen el mismo número infinito.

He aprendido que hay números infinitos más grandes que otros.
También que se puede asociar dos conjuntos y demostrar que tienen la misma cantidad.

Alumno 4
Juan

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

Que no podíamos asociar ambos conjuntos, es decir, que no se puede contar los números reales.

Con la diagonal de Cantor se demuestra que no podemos contar los números $\mathbb{R}$.

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Sí porque asociando dos conjuntos infinitos vemos que no son iguales.

Por lo tanto no todos los infinitos son iguales.

Alumno 4

$\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Z}$

$0 \longrightarrow 0$

$2n \longrightarrow n$

$2n+1 \longrightarrow -n-1$

~~Pares~~

$\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \; - \\ 2 \text{ or } \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \; - \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}$$

No se pueden contar los números reales:

→ $\mathbb{R} \longleftrightarrow [0,1]$

→ Diagonal de Cantor

No puedo contar $[0,1]$

Supongamos que ~~no~~ puedo contar $[0,1]$

$r_1 = 0'x_{11}\, x_{21}\, x_{31}\, x_{41} \ldots$

$r_2 = 0'x_{12}\, x_{22}\, x_{32}\, x_{42} \ldots$

$r_3 = 0'x_{13}\, x_{23}\, x_{33}\, x_{43} \ldots$

$r_4 = 0'x_{14}\, x_{24}\, x_{34}\, x_{44} \ldots$

$r_5 = 0'x_{15}\, x_{25}\, x_{35}\, x_{45} \ldots$

$r_6 = 0'x_{16}\, x_{26}\, x_{36}\, x_{46} \ldots$

$\vdots$

Si encuentro un número que no pueda contar, no podemos contar $[0,1]$:

$r = 0't_1\, t_2\, t_3 \ldots$

$t_1 = \begin{cases} x_{11}+1 & \text{si } x_{11} \neq 9 \\ 0 & \text{si } x_{11} = 9 \end{cases}$

$r = r_5 \Rightarrow t_5 = x_{55}$

Alumno 5

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay la misma cantidad de números pares que impares
Hay infinito numeros de cada clase

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

$\frac{1}{2}$ = racional no entero
π = real no racional
-3 = entero que no sea natural
2 = Natural

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Los mismos, porque hay la misma catidad de numeros tanta naturales como enteros.

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

No se pueden comparar ya que los números reales engloban a los naturales y por lo tanto no se puede decir que haya mas números reales.

Hay infinitos numeros naturales y tambien reales ya que estos engloban a todos los demas

Hay mas números reales.

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

~~Relacionando~~ Comparando ambos conjuntos entre si.

Alumno 5

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

~~la ex~~ El tema principal de la exposicion era sobre el número infinito. lo mas importante de la exposición es que hay infinitos mas grandes que otros. He aprendido bastantes cosas que antes no sabia como que existen diferentes infinitos, las relacciones entre los diferente clases de numeros...

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

P

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Sí ,

Alumno 5

$0 \longrightarrow 0$

$2n \longrightarrow n$

$2n+1 \longrightarrow -n-1$

$0 - 0$

$1 - {-1}$

$2 - 1$

$3 - {-2}$

$r_1 = 0'\,x_{11}\,x_{21}\,x_{31}\,x_{41}\,x_{51}\ldots$

$r_2 = 0'\,x_{12}\,x_{22}\,x_{32}\,x_{42}\,x_{52}\ldots$

$r_3 = 0'\,x_{13}\,x_{23}\,x_{33}\,x_{43}\,x_{53}\ldots$

$\vdots$

$r = 0'\,t_1\,.\,t_2\,.\,t_3\ldots$

$$t_1 = \begin{cases} x_{11}+1 & \text{si } x_{11} \neq 9 \\ 0 & \text{si } x_{11} = 9 \end{cases}$$

$r_1 = 0'12399\ldots$

Alumno 6

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay la misma cantidad de números pares que impares porque a cada par le corresponde un impar

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

Real no racional -> π
Racional que no sea entero -> 0,49
entero no natural -> -1
natural -> 1

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay los mismos hay infinitos.

Alumno 6

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay más números naturales que reales porque los reales no pueden enterse.

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

Tienen el mismo número porque es infinito

Alumno 6

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

Hemos hablado sobre los infinitos, hay unos más grandes que otros y eso se puede demostrar comparando, dando a cada valor de un conjunto un unico valor de otro conjunto
Todos los tipos de números son infinitos y se pueden contar menos los reales.

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

Pues comparar si hay números para cada grupo y hay mas reales que naturales

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Si porque hay algunos que abarcan más cantidad de números

Alumno 6

$\mathbb{N}$ — $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$

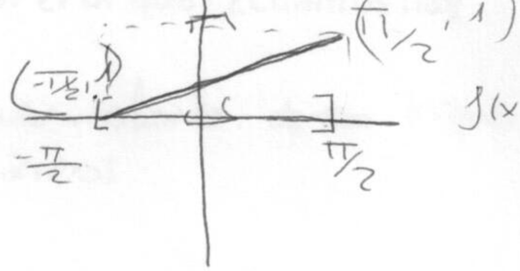
0 — 0

$2n$ — n

$2n+1$ — $-n-1$

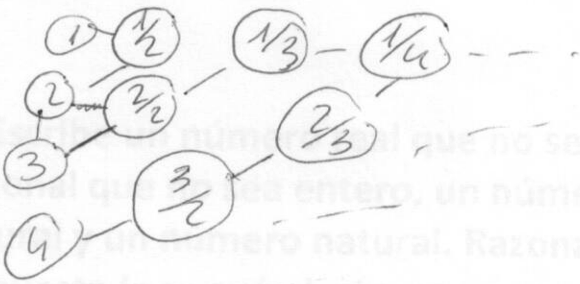
Pares — $\mathbb{N}$

$2n$ — n



$f(x) = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}$

$\mathbb{N}$ — $\mathbb{Q}$



$[0,1] \leftrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

$\updownarrow$

$\mathbb{R}$

DIAGONAL DE CANTOR

No puedo contar $(0,1]$

Sup. q puedo contar $[0,1]$

$[0,1]$

$r_1 = 0, x_{1_1}\ x_{2_1}\ x_{3_1}\ x_{4_1}$ ---

$r_2 = 0, x_{1_2}\ x_{2_2}\ x_{3_2}\ x_{4_2}$

$r_3 = 0, x_{1_3}\ x_{2_3}\ x_{3_3}\ x_{4_3}$

$r_4 = 0, x_{1_4}\ x_{2_4}\ x_{3_4}\ x_{4_4}$

$r_5 = 0, x_{1_5}\ x_{2_5}\ x_{3_5}\ x_{4_5}$

$r = 0, t_1\ t_2\ t_3\ t_4$

$t_1 = x_{1_1} + 1$ si $x_{1_1} \neq 9$

0 si $x_{1_1} = 9$

Alumno 7

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay el mismo número, ~~vamos que infinito~~. ~~cada~~ Porque los dos ~~son~~ tienen infinito números.

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

- 4
- π
- -5
- 2

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay la misma cantidad de números naturales y enteros ∞ veces.

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Los dos son infinitos peo reales hay más ya que los reales son todos los números y ~~los naturales~~

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

No se puede saber. ya que los dos son numeros muy altos.

Alumno 7

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

Explicación de la diagonal de Cantor, explicación de porque tienen o no la misma cantidad los numeros naturales y enteros, los impares y los pares.

Sí. La diagonal de Cantor. porque no puedo contar [0, 1], porque los ~~...~~ numeros reales no se pueden contar.

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

Los numeros reales no se pueden contar y como los naturales sí, si algo se puede contar es mas pequeño que algo que no se puede contar

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Sí. porque aunque los dos son ∞ unos son más ~~que~~ que otros.

Alumno 8

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay el mismo numero de cada tipo. Cada numero par se puede relacionar con uno impar. Hay infinitos de cada clase.

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

A) π : $\nexists \frac{m}{t} = \pi$

B) $1/3$: $\frac{1}{3} \neq$.

C) $-1/3$

D) 2

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay el mismo numero de los dos tipos, porque a cada numero entero se le puede relacionar con uno natural (se pueden contar los numeros enteros). Existen infinitos de cada clase.

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay mas numeros reales que naturales, porque existe un numero real al que no se le asocian una natural, por lo tanto, dentro del conjunto de numeros reales, no se le puede asociar una posicion ordinal (1º, 2º, 3º...), osea, un numero natural (1, 2, 3...) a cada uno de los numeros que lo componen.

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

~~Asociando~~

~~Asociando a cada numero~~

Asociando a cada uno de los miembros de un conjunto, un miembro del otro.

Si no queda ningun miembro sin asociar, entonces ambos conjuntos tienen el mismo numero de elementos

Alumno 8

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

En resumen, la exposicion demuestra que existen infinitos de distinto tamaño, o, mas bien, conjuntos numericos que son infinitos, pero que uno de ellos tiene mas miembros que el otro. ~~Es~~ Esto es así, porque asociando a cada miembro de un conjunto a uno del otro, en uno de los dos, quedan miembros sin asociar.

~~Además, de~~

He aprendido que no se pueden contar los numeros reales, y la manera de comparar el tamaño de dos conjuntos

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

Que existen numeros reales a los que no se puede asociar un numero natural.

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Si, porque pese a ser dos conjuntos infinitos, el conjunto de numeros reales tiene mas miembros que el conjunto de numeros naturales.

Alumno 9

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

~~Es~~ Hay los mismos números pares e impares porque se pueden contar y relacionar que 2n que son los pares con n que son los impares

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

π, 0'19, -3, 2,

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Los dos son infinitos, osea son los mismos. infinitos de los dos

Alumna 9

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

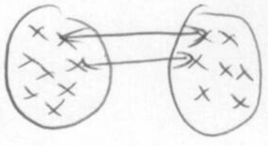
Hay más naturales porque los reales no se pueden contar. Los naturales son infinitos.

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

Haciendo una relación con ambos grupos, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

si uno le comparas con uno los demás serán igual.



Alumno 9

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

Hemos estado hablado de porque unos números ~~[illegible]~~ infinitos pueden ser más grandes unos que otros.

Al principio nos ha dado una introducción sobre todos los números y sus tipos para luego poder explicarnos la diagonal de cantor.

Si que he aprendido sobre los números que no tenía claro si había más de un lado que de otros

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

La idea que ~~tener~~ hemos visto es la diagonal del cantor que en un intervalo muy pequeño no se pueden llegar a contar todos $[0,1]$.

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Si, porque hay la demostración de si $r = 0'r_1 r_2 r_3 \ldots$ sabiendo que $r_i \begin{cases} x_{ii}+1 & \text{si} \\ & \text{si } x = 9 \\ & \text{si } x \neq 9 \end{cases}$; puedes demostrar que no se pueden contar en un intervalo

Alumno 9

$\mathbb{N}$ — $\mathbb{Z}$ $\{0, 1, -1, 2, -2\}$

0 — 0

$2n$ — n

$2n+1$ — $n-1$

No se pueden contar los números reales

Diagonal de cantor

No puedo contar $(0,1]$

Supongamos que puedo contar $[0,1]$

$r_1 = 0'x_{11}\, x_{21}\, x_{31}\, x_{41}\, x_{51} \ldots$

$r_2 = 0'x_{12}\, x_{22}\, x_{32}\, x_{42} \ldots$

$r_3 = 0'x_{13}\, x_{23}\, x_{33}\, x_{43} \ldots$

$r_4 = 0'x_{14}\, x_{24}\, x_{34}\, x_{44} \ldots$

$\boxed{r = 0't_1 t_2 t_3}$

$t_1 = \begin{cases} +1 & \text{no si } x \neq 9 \\ 0 & \text{si } x = 9 \end{cases}$

$r = r_5 \sim t_5 = x_{55}$

$\to x_{55} + 1$ si $x_{55} \neq 9$

$\to 0$ si $x_{55} = 9$ ■

Alumno 10

PREGUNTAS DESPUÉS DE LA EXPOSICIÓN

1º ¿Hay más números pares o impares? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Hay el mismo número de números pares e impares porque se pueden comparar.
Infinitos.

2º Escribe un número real que no sea racional, un número racional que no sea entero, un número entero que no sea natural y un número natural. Razona brevemente cada respuesta (por qué el número que escribes es real y no racional, racional y no entero, etc.)

0,15
-2

3º ¿Hay más números naturales o enteros? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Mismos números enteros y naturales
Hay infinitos de los dos.

4º ¿Hay más números reales o naturales? ¿Por qué? ¿Cuántos hay de cada clase?

Como los reales no se pueden contar hay mas numeros naturales.
-Naturales hay infinito.
-Reales → no se pueden contar.

5º Si tengo dos conjuntos infinitos, ¿cómo sé si ambos tienen el mismo número de elementos?

Relacionando ~~un elemento de~~ cada elemento de un conjunto con los del otro conjunto.

Alumno 10

6º Haz un resumen de la exposición y de lo que consideres más importante (matemáticamente) de la misma. ¿Has aprendido algo que no supieses (si es que no, no pasa nada, ponedlo)? En caso afirmativo, ¿qué has aprendido?

De Numeros pares e impares hay los mismos y de ambos hay infinitos, al igual que de números naturales y enteros.

Los numeros reales no se pueden contar.

Diagonal de Cantor → suponiendo que se puede contar $[0,1)$. → $r = 0'\,t_1\,t_2\,t_3.$

$t_1 = x_{11}+1 \quad x_{11} \neq 9 \qquad 0 \text{ si } x_{11} = 9.$

7º ¿Cuál es la idea que hemos visto en la exposición para demostrar que hay más números reales que números naturales?

La idea que hemos visto ha sido la diagonal de Cantor

8º ¿Podemos concluir de lo visto hoy que hay infinitos más grandes que otros? ¿Por qué?

Si, por esta demostración $\boxed{r = 0'\, t_1\, t_2\, t_3 \ldots}$

$$t_1 = \begin{cases} x_{11} + 1 & x_{11} \neq 9 \\ 0 \text{ si } x_{11} = 9 \end{cases}$$

Alumno 10

$\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \ldots\}$

$0 \longrightarrow 0$

$2n \longrightarrow n$

$2n+1 \longrightarrow -n-1$

Numeros reales no se pueden contar.

Diagonal de Cantor

- No puedo contar $[0, 1]$
- Supongo que puedo contar $[0, 1]$

$r_1 = 0'x_{11}\ x_{21}\ x_{31} \ldots$

$r_2 = 0'x_{12}\ x_{22}\ x_{32}\ x_{42} \ldots$

$r_3 = 0'x_{13}\ x_{23}\ x_{33} \ldots$

$r_4 = 0'\ x_{14}\ x_{24} \ldots$

$r = 0'\ t_1\ t_2\ t_3 \ldots$

$$t_1 = \begin{cases} x_{11} + 1 & x_{11} \neq 9 \\ 0 \text{ si } x_{11} = 9 \end{cases}$$

Bibliografía

[1] Boletín Oficial del Estado
RD 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas
BOE número 266, páginas 45381 y siguientes.

[2] Boletín Oficial de Castilla y León
D 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León
BOCyL número 111, páginas 11306 y siguientes.

[3] Boletín Oficial de Castilla y León
ORDEN EDU 1061/2008, de 19 de junio, por la que se regula la implantación y el desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.
BOCyL número 118, páginas 12142 y siguientes.