



Universidad de Valladolid

**Trabajo final del máster de Profesor de Educación Secundaria
Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

(Especialidad: Física y Química)

Curso 2018/2019

Cómo pesar adecuadamente

Presentado por: D. Eduardo Martínez Morlot

Dirigido por: Prof. Dr. D. José Carlos Cobos Hernández

A la reina de mis desvelos,
la que tanto me ha dado,
y a la que nunca podré
devolver tanto amor

TABLA DE CONTENIDO (Índice)

RESUMEN/ABSTRACT	1
------------------------	---

Parte I

1.- INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN	3
2.- CUESTIONES RELATIVAS AL CURRÍCULO	6
3.- CONTEXTUALIZACIÓN	11

Parte II

4.- DEFINICIÓN DE LA MASA.....	13
4.1 Clásicamente	13
4.1 Relatividad restringida	16
5.- UNIDAD DE MASA (SI)	22
6.- DEFINICIÓN DEL KILOGRAMO	26

Parte III

7.- MEDIDA DE LA MASA	27
7.1 Efectos de la altitud y latitud (g)	27
7.2 Efecto del empuje de Arquímedes (flotabilidad)	29
7.3 Repetibilidad	32
7.4 No linealidad	33
7.5 Sensibilidad	34
7.6 Coeficiente térmico	34
7.7 Expresión general	35
7.8 Estudio estadístico	36
8.- CALIBRADO	41
8.1 Efecto de la temperatura	41
8.2 Ensayo de excentricidad	42
8.3 Repetibilidad	42
8.4 Linearidad	43

Parte IV

9.- ACTIVIDADES PEDAGÓGICAS PROPUESTAS	45
9.1 4º ESO	46
9.2 Bachillerato	57
10.- CONCLUSIONES	64
11.- BIBLIOGRAFÍA	65

RESUMEN

El presente trabajo titulado “Cómo pesar adecuadamente”, examina los aspectos principales relativos a la operación de medida de la magnitud fundamental masa, de un sistema físico o químico sencillo.

En un primer momento se define la masa, tanto desde el marco de la mecánica clásica, como de la relatividad restringida, poniendo de manifiesto que la definición de dicha magnitud no es nada trivial. Se presenta asimismo el nuevo sistema de unidades del Sistema Internacional de Unidades (S.I) y la nueva definición del kilogramo. Tras estas cuestiones introductorias, se analizan los factores (influencias externas) que alteran la medición de la masa, tales como la variación del campo gravitatorio terrestre, en función de la latitud y altitud. Posteriormente, se examina, con mayor detalle, la influencia del empuje de Arquímedes del aire, sobre el valor de la masa medida, prestando particular interés, a su efecto en el análisis estadístico de los datos experimentales, a la hora de calibrar una balanza. Finalmente, se proponen actividades pedagógicas (experimentos de laboratorio ilustrativos) que permiten transponer los conceptos anteriores a alumnos del sistema educativo español (4º ESO y 2º bachillerato).

Palabras clave: Masa, Mecánica Clásica, Relatividad Especial, Metrología, Sistema Internacional de Unidades (SI), SI revisado, Constante de Planck, Redefinición del kilogramo, Caracterización de Balanzas, Precisión en el pesaje, Incertidumbre en la masa, Calibrado de balanzas, Hidrostática, Arquímedes, Corrección de empuje (flotabilidad), Experimentos ilustrativos, Densidad, Líquido, Picnómetro

ABSTRACT

The present work entitled "How to weigh properly", examines the main aspects related to the process of measuring mass, of a simple physical or chemical system.

First of all, the mass is defined, both from the framework of classical mechanics, and from special relativity, showing that the definition of this quantity is not trivial at all. The new International System of Units (SI) system of units of the international system is also presented and the new kilogram is briefly defined. After these introductory questions, the factors (external influences), such as the variation of earth gravitational field, as a function of latitude and altitude, that alter the measurement of mass, are analyzed. The influence of Archimedes' thrust of the air, on the value of the measured mass, is then examined in greater detail, paying particular attention to the statistical analysis of the experimental data, when this correction is introduced. Finally, pedagogical activities are proposed that allow transposing the previous concepts to students of the Spanish educational system (4º ESO y 2º Bachillerato).

Keywords: Mass, Classical Mechanics, Special relativity, Metrology, International System of Units (SI), revised SI, Planck constant, kilogram redefinition, Balance assessment, Weighing accuracy, Mass uncertainty, Balance calibration, Hydrostatic, Archimedes, Buoyancy correction, Illustrative Experiments, Density, Liquid, Pycnometer.

Parte I

1 INTRODUCCION Y JUSTIFICACIÓN

Ante la plétora de fenómenos que se le presentan al científico para su estudio, destacan particularmente aquellos en los que es fundamental determinar la masa de un objeto o de una sustancia. Se hace efectivamente patente la imperiosa necesidad de definir dicha magnitud y, una vez conocida su naturaleza, poder determinar, con la precisión requerida, dicha variable, en cualquier sistema sometido a examen. De allí, el interés del presente Trabajo de Fin de Máster, que versará sobre estas cuestiones, así como sobre como trasladar a los alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato, desde una adecuada perspectiva pedagógica, la preocupación por el rigor a la hora de trabajar en un ámbito científico.

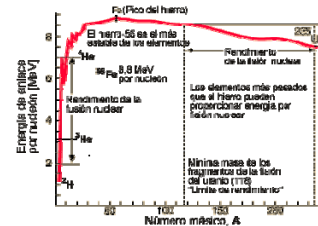
Haciendo un poco de historia, conviene recordar que (Jammer, 2000, pp. 122):

*“After Newton’s introduction of the notion of mass the earliest example of a substance to which a negative m_p was assigned was probably the **phlogiston**. According to the phlogiston theory, which dominated chemical thought in the eighteenth century, primarily owing to Georg Ernst Stahl’s **Fundamenta Chymiae** (1732), every combustible substance contains a chemical element, the phlogiston, which in the process of burning escapes into the air. However, as Robert Boyle, John Mayow, and others observed, when metals are burned the calx weighs more than the metal. Hence, if burning implies loss of phlogiston, this hypothetical element had to be assigned a negative weight or negative m_p . As is well known, phlogiston was banished from science only after **Antoine Laurent Lavoisier** showed that combustion is the union of the burning substance with air or some part of air (oxygen) and that the gain in weight of the substance burned is equal to the loss of weight of the air, or in other words, that the gravitational masses involved satisfy the law of the conservation of mass”.*

Así pues, fue Antoine-Laurent de Lavoisier (París, Francia, 26/08/1743–ibídem, 08/05/1794), en su *“Traité élémentaire de chimie (Présenté dans un Ordre Nouveau et d’après les découvertes modernes)*. Paris. 1789”, el que establece el principio de conservación de la materia: **“La masa no se crea ni se destruye, sólo se transforma”**, que da origen a la **Nouvelle Chimie**. Junto con el principio de conservación de la energía (Termodinámica) que se estableció en la segunda parte del siglo XIX (véanse los correspondientes enlaces Web que aparecen en la Bibliografía de esta Memoria), fueron los cimientos con los que se construyó la Ciencia Moderna (los otros dos principios habituales, los de conservación tanto del momento lineal como angular, son más difíciles de comprender por ser de naturaleza vectorial).

Hasta que llegó Alberto Einstein (Ulm, Alemania, 14/03/1879–Princeton, EUA, 18/04/1955), y demostró que ambos principios podían quebrantarse (como las dos caras de Jano), dando lugar a un nuevo principio (más general), en donde la materia (fermiónica) y la energía pura (luz o radiación electromagnética, bosónica), se transformaban la una en la otra. Por ejemplo, en la fusión/fisión nuclear o en la nucleosíntesis primordial estelar (Gamow, 2010), la masa total del sistema y la energía del universo termodinámico no tienen por qué conservarse estrictamente, cumpliéndose la conocida ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \Delta m &\neq 0 \\ \Delta E &\neq 0 \\ \Delta E &= \Delta m \cdot c^2 \end{aligned} \right\} (1.1)$$



De da origen a ese festín de nuevas entidades elementales (los así llamados “Elementos Químicos”), cuyo año internacional celebramos este 2019: “Año internacional de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos” (Véase la **Figura 1.1**)

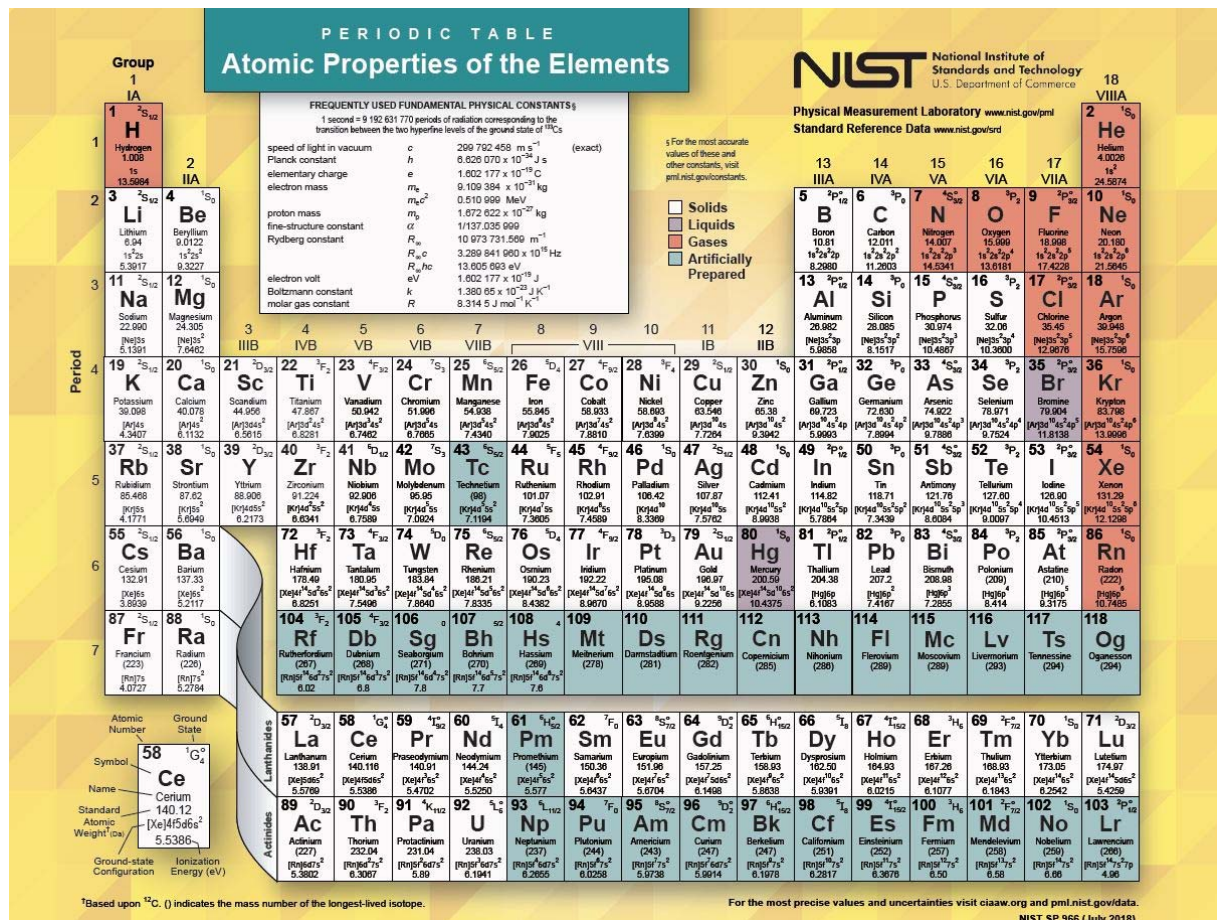


Figura 1.1.- Tabla Periódica de los Elementos Químicos

Parece innecesario recordarlo, pero podemos destacar el hecho de que buena parte de nuestro bienestar se deriva de los avances científico-técnicos que se han logrado en el último siglo. Es por tanto innegable que, el desarrollo científico de una sociedad moderna garantiza mayores niveles de renta, así como condiciones de vida más favorables. Por todo ello, siempre ha de ser prioritario el desarrollo de la investigación científica que permita a nuestra sociedad no quedar al margen del desarrollo, en la era de la “sociedad del conocimiento”. Se percibe entonces como fundamental fomentar el estudio de la ciencia por los jóvenes. El primer motivo que así lo demanda radica en su importancia, a nivel social, ya que como hemos comenzado diciendo, una sociedad que descuide la formación científica de sus ciudadanos es una sociedad que de algún modo se empobrece. Por otro lado, para premiar la curiosidad innata de la mayor parte de los adolescentes, en busca de respuestas que les permitan entender el mundo en el que les ha tocado vivir, se concibe también como totalmente irrenunciable la necesidad de incidir en proporcionarles una formación científica básica, a la vez que sólida. Es en este marco, en el que se ubica este trabajo, donde se prestará mucha atención al método científico, en lo que atañe a la medida de la masa y su definición.

Efectivamente, vamos ir desgranando los aspectos más importantes relativos a la masa, desde un enfoque docente, y como su medición, operación aparentemente sencilla, no lo es tanto.

El primero de ellos que queremos destacar es que la masa, en cuanto tal, es un concepto un tanto fugaz, si se define con todo rigor. Evidentemente, de todos es conocida la segunda ley de los Principia de Newton, a partir de la cual se define clásicamente. Sin embargo, en el Capítulo 4º de esta memoria se pondrá de relieve el hecho de que, desde un punto de vista relativista, el concepto de masa se esfuma detrás de un armazón conceptual mucho más elaborado. Este comentario tiene la intención de resaltar que los alumnos, para poder familiarizarse con el lenguaje científico, tienen que ser capaces de tener un enfoque global de la asignatura. Existen magnitudes, y de eso se encarga la **metrología (la Ciencia de la medida)**, cuya misma definición plantea problemas. En ocasiones, esa misma definición solo es aceptable en unas condiciones determinadas, y no en otras. Transmitirles este hecho, a saber que la misma definición de un concepto, no es algo evidente, forma parte intrínseca de la formación básica de un futuro científico. Es necesario que el alumno entienda que los conceptos que se le presentan en el aula, tienen fecha de caducidad, en la medida de que únicamente son válidos por ser **operativos** (Jules Henri Poincaré, Nancy, Francia, 29/04/1854–París, 17/07/1912). Con esto nos referimos a que tienen la finalidad específica de posibilitar la resolución de ejercicios básicos y fundamentar una comprensión de los

fenómenos del mundo físico, en una primera aproximación. La primera tarea docente, consiste a nuestro entender, en proporcionarles, “el espíritu de la duda”, el espíritu crítico capaz de contrastar los hechos con la realidad experimental, y asumir la tarea del científico como un proceso en perpetua renovación, afinando progresivamente la comprensión del mundo que nos rodea.

Hemos escogido una bibliografía muy resumida, pero muy significativa, sobre metrología, teniendo en cuenta tanto la normativa legal aplicable:

Ley 32/2014, de 22 de diciembre, de Metrología, Real Decreto 244/2016, de 3 de junio, por el que se desarrolla la Ley de Metrología, **Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre**, por el que se establecen las unidades legales de medida, que traspone la **directiva 80/181/CEE**, por la que **el Consejo de las Comunidades Europeas estableció el uso del Sistema Internacional de Unidades (SI) como sistema legal de unidades**, y sus modificaciones posteriores, además de hacer suyos los acuerdos de la *Conferencia General de Pesas y Medidas*.

Como las recomendaciones de los organismos nacionales e internacionales más importantes:

Bureau International des Poids et Mesures (**BIPM**), Centro Español de Metrología (**CEM**), European Association of National Metrology Institutes (**EURAMET**), National Institute of Standards and Technology (**NIST**), Organisation Internationale de Métrologie Légale (**OIML**), Mettler–Toledo AG, etc.

(Véanse las monografías correspondientes y los diferentes enlaces Webs citados en el Capítulo de Referencias bibliográficas de esta Memoria).

2 CUESTIONES RELATIVAS AL CURRÍCULO

Ciertamente, los alumnos de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) solo pueden entender la masa desde un punto de vista clásico (ya sea inercial o gravitacional), pero se les tiene que adelantar, para evitar futuras desilusiones, de que se trata de una primera definición, perfectamente adecuada para las pretensiones de ese curso, pero incapaz de dar cuenta de experimentos que se realicen a altas velocidades, o altas energías (donde hay que tener en cuenta los efectos cuánticos y relativistas).

Esto se corresponde con la parte del temario más deslucida, y que por norma general cae en el olvido de la mayoría de los docentes. No deja de ser, sin embargo, de suma importancia en cuanto a la hora de explicar la tarea del investigador. En un primer momento todo investigador ha de ser capaz de ubicar su campo de conocimiento, y de dar definiciones claras y precisas de lo que busca determinar. Así sucede con la masa.

Atendiendo las **ORDEN EDU/362/2015** y **ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo**, por la que se establece el **currículo** y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la **educación secundaria obligatoria y el bachillerato en la Comunidad de Castilla y León**, y lo que indican respecto de la asignatura Física–Química (tanto en 4º de ESO como en 1º de Bachillerato), dicha preocupación docente se encuadra perfectamente en el “**Bloque 1. La actividad científica**”, donde se debe iniciar al alumno en lo que es la actividad científica. En concreto, los contenidos que se deben de abordar se corresponden con:

- El método científico.
- Sistema Internacional de Unidades (S.I.).
- Unidades.
- Medida de magnitudes.
- Las Magnitudes escalares y vectoriales. Magnitudes fundamentales y derivadas.

Clásicamente, la masa es una magnitud escalar que caracteriza perfectamente un sistema físico desde un punto de vista dinámico. Sin embargo, como se verá en el Capítulo 4º, no es así en mecánica relativista. Estas cuestiones solo se pueden abordar, en 2º de Bachillerato, tal como lo contempla el currículo en vigor en la Comunidad de Castilla y León.

En efecto, es en este 2º curso en donde se ven las siguientes partes del temario:

- El problema de la simultaneidad de los sucesos.
- El experimento de Michelson y Morley.
- Los postulados de la teoría de la relatividad de Einstein.
- Las ecuaciones de transformación de Lorentz.
- La contracción de la longitud.
- La dilatación del tiempo.
- Energía relativista.
- Energía total y energía en reposo.
- Repercusiones de la teoría de la relatividad: modificación de los conceptos de espacio y tiempo y generalización de la teoría a sistemas no inerciales.
- ...
- Física Nuclear.
- Leyes de la desintegración radiactiva.
- Energía de enlace nuclear.
- Ley de la desintegración radiactiva.

- Fusión y Fisión nucleares.
- Las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza: gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil.

Tras estudiar estas nociones físicas es cuando los alumnos podrán entender que la masa deja de ser una variable puramente escalar, para revestir una forma más complicada. De todas formas, dado que el grado de madurez de los alumnos no lo permite, se tendrán que obviar cuestiones de muy alto nivel que oscurezcan lo que se planea llevar a cabo. Es decir se huirá de demostraciones demasiado formales.

Las actividades pedagógicas (junto con experimentos de laboratorio ilustrativos) planteadas en esta memoria para alcanzar los objetivos planteados, se dirigen fundamentalmente a estudiantes de la asignatura Física y Química de 4º de la ESO y de la asignatura Física de 2º de Bachillerato.

La primera tarea será la de dar una definición adecuada de masa.

Dadas las transformaciones de Lorentz, conocidas las propiedades de su derivación, se obtienen las expresiones de la aceleración, en las que se comprueba la inoperancia del concepto de masa clásica. Por otro lado, hemos esbozado en las siguientes páginas de este trabajo un ejercicio mental, que deberán de hacer los alumnos, para justificar la elección de la expresión del impulso lineal relativista. Es también bien sabido por el físico que, en ocasiones, tal como lo hizo Einstein con los llamados “*gedankenexperimenten*”, se acuden a representaciones mentales idealizadas que permiten hallar leyes fundamentales de la disciplina.

Los alumnos de 2º de Bachillerato deben conocer la conservación del momento lineal de un sistema físico clásico, definido como el producto de la masa por la velocidad de un cuerpo cualquiera. En todos los fenómenos observados, en sistemas cerrados donde no actúen fuerzas externas y las internas verifiquen el principio fuerte de acción y reacción, se conserva dicha magnitud vectorial; conservación que, tal como se comprobará más tarde, impone la conservación de la masa del sistema.

En relatividad restringida, se pretende que los alumnos comprueben, a través de ejercicios, que el impulso lineal clásico **no es un invariante, ni una magnitud que se conserve**, y por ende lo mismo ocurre con la masa del sistema sencillo considerado. Si se define el impulso lineal relativista como producto del impulso clásico, multiplicado por el factor gamma asociado a las transformaciones de Lorentz, se obtiene una magnitud física que **sí se conserva**. Con ello se pretende, al margen de que además mejoren en el manejo de las

fórmulas básicas de la relatividad restringida, que comprueben, por analogía, cómo se procede en física teórica: emitiendo hipótesis sobre la forma matemática que ha de revestir una magnitud que permita, por ejemplo, la obtención de una Ley de Conservación.

Habiendo establecido la expresión del momento lineal relativista, en el marco de un ejercicio que vaya un poco más allá de mera aplicación de conceptos, se les llevará a deducir la expresión de la aceleración de un móvil y que comprueben como **la masa clásica deja de ser un concepto válido**, para movimientos con velocidades cercanas a la de la luz.

De esta forma queda claro que, si se procede adecuadamente, en la Física de 2º de Bachillerato, los alumnos podrán entender lo que se ha dicho hasta el momento: *que la definición de una magnitud física puede resultar problemática*. Todo ello, encaja perfectamente dentro de lo establecido en el currículo oficial de dicha asignatura, ya que también se pretende presentar rigurosamente, aquello en lo que consiste el trabajo científico, tal y como viene recogido en la normativa vigente: Los alumnos deberán de ser capaces de “Reconocer y utilizar las estrategias básicas de la actividad científica”. Obviamente, lo anterior se aplica en particular, a la Física.

En resumidas cuentas, en un primer momento nos enfrentamos a la definición de la masa, definición que se hará de modo distinto en función de si nos dirigimos a alumnos de 4º ESO, o de 2º de Bachillerato:

- 4º ESO: Solo se introducirá desde la perspectiva de la física clásica (ya sea inercial o gravitacional), pero anticipando que dicha definición no es del todo rigurosa y que podrá ser completada más adelante, en segundo de bachiller.
- 2º de Bachillerato: Se amplía la definición, mostrando, a través de ejercicios, que el concepto de masa relativista no es equivalente al de masa clásica.

Una vez encarada la definición del concepto de masa, nos tenemos que preocupar por su **medición**.

En lo sucesivo quedará perfectamente claro, que para pesar masas con elevada precisión, (dado que dicha operación se realiza en la mayoría de los casos, en aire, y no en el vacío), siempre se tendrá que aportar una corrección correspondiente al **empuje de Arquímedes**. Dicha corrección es dependiente de la temperatura, humedad y presión del aire. Se puede comprobar perfectamente que, dada la naturaleza del currículo de ESO y Bachillerato, es factible explicar con rigor en lo que consiste dicha corrección y que el alumnado evalúe el orden de magnitud de la misma. En efecto, se han de abordar los contenidos siguientes, en el “Bloque 2. El movimiento y las fuerzas”, del currículo de 4º de ESO en vigor:

- Presión. Aplicaciones.
- Principio fundamental de la hidrostática.
- Principio de Pascal. Aplicaciones prácticas.
- Principio de Arquímedes. Flotabilidad de objetos.
- Física de la atmósfera: presión atmosférica y aparatos de medida.
- Interpretación de mapas del tiempo

Como puede verse rápidamente, los alumnos deben conocer el significado de la presión, así como sus unidades. De igual manera, deben de ser capaces de aplicar ese concepto al caso de la atmósfera, y comprender el funcionamiento de los instrumentos más habituales utilizados para determinarla. Asimismo, han de estar familiarizados con el **principio de Arquímedes**. Es evidente que, por lo general, durante el curso escolar, la principal aplicación de dicho principio se verá a la hora de explicar la flotabilidad de elementos sólidos en líquidos (en particular en agua). No obstante, también es la ocasión perfecta de de aplicarlo a otros fluidos, como son los gases. El concepto de **densidad** debe de quedar perfectamente claro (aparece en el “Bloque 2. La materia” de ese mismo currículo).

A la vista de las características del temario, resulta evidente que, **las correcciones debidas al empuje de Arquímedes**, para una composición estándar del aire, **son perfectamente asequibles** de entender y aplicar, una vez que se les proporciona a los alumnos la ecuación empírica que permite obtener la densidad del aire en función de las condiciones ambientales. De hecho, realizar ese tipo de cálculos, que si bien son más técnicos que la mayoría de los que habrán realizado hasta la fecha, es la ocasión de poner en práctica los principios físicos que se han de impartir durante el transcurso del curso lectivo (Caamaño, 2011; Espinosa-Ríos et al., 2016; García Carmona, 2002; Oliver-Hoyo et al., 2012; Orantes 2017; Wilson and Hernandez-Hall 2010).

A nivel de 4º de la ESO, **las cuestiones de calibración deberán no obstante de quedar al margen**, ya que supone un grado de abstracción demasiado elevado para las edades del alumnado, que se sitúan alrededor de los quince años. En cambio, esas cuestiones tienen buen ajuste en el marco de un curso de segundo de bachiller, si bien se procurará no alargar las exposiciones, por el tedio que estas puedan suponer, ya que se trata de cuestiones bastante técnicas, que requieren un alto grado de esfuerzo intelectual.

En cuanto a las **cuestiones acerca del campo gravitatorio**, los alumnos de 4º de ESO pueden entender que una balanza calibrada a una determinada altura, medirá diferente masa a una altura distinta. Bastará aplicar la ecuación de la gravitación universal, supuesta la Tierra como

una esfera perfecta, de radio conocido. No se podrá abordar, sin embargo, la corrección debida al giro de nuestro planeta sobre su eje. En segundo de bachiller, habiéndose introducido las funciones trigonométricas, lo anterior no planteará serias dificultades.

Así es como enmarcamos este trabajo, en cuanto atañe al temario en vigor, en Castilla y León.

(El resto de normativa oficial española a considerar aparece listada en la Bibliografía)

3 CONTEXTUALIZACIÓN

Tal como hemos señalado anteriormente, las actividades pedagógicas que proponemos a lo largo del trabajo se ajustan a los cursos de 4º de ESO y 2º de Bachillerato, **en lo que al temario se refiere**.

Por otro lado, ya hemos mencionado, de manera concisa, que el principal interés de **enseñar a los alumnos a pesar adecuadamente** un objeto, o sustancia química, radica en permitir que comprendan que **el proceso de medida de una variable física no es un proceso automático**, que depende únicamente de un instrumento de medida, previsto al efecto, sino que depende del grado de precisión que nos hayamos fijado como objetivo. Se pretende conseguir así, que se comprenda que el proceso experimental depende, de manera marcada, de lo que ambicionemos obtener con el equipo experimental disponible.

Como se podrá comprobar, al hilo de unos ejercicios que propondremos más adelante, si quisiéramos pesar exactamente 1 dm³ de alcohol etílico en aire, con ayuda de una balanza, lo podríamos hacer sin tomar en consideración la corrección del empuje del aire, si no deseamos una medida más precisa del gramo. Si deseamos, al contrario, tener mayor precisión, estaríamos cometiendo un error no despreciable, y nos veríamos obligados a tener en cuenta dicha corrección (**EURAMET CG-18**, 2015; Gläser and Borys, 2009; Kozdon, 2001; Malengo, 2014–2018; **Mettler–Toledo**, 2015; **OIML R 111-1. Edition 2004; OIML G–14. Edición 2011**; Pozivil et al., 2006; Reichmuth et al. 2004, Walked, 1887).

En cuanto a las características de los alumnos, supondremos que, tanto en lo que se refiere al Aula de 4º de ESO como de 2º de Bachillerato, sus integrantes no rebasan los 30 individuos, ni son menos de 20 personas. Nos situamos, por ende, en el marco de una clase habitual. Dado que varias sesiones transcurrirán en el **Laboratorio** (donde se realizarán los experimentos ilustrativos), las actividades previstas no serían viables para un número superior de alumnos; siendo preferible actuar, de todas formas, con grupos reducidos. Evidentemente,

si la clase tiene 30 integrantes, habrá que prever que las sesiones de laboratorio se desdoblen; no sucederá así, si son solo 20.

Por otro lado, se supondrá que en cada caso, cada aula contará con 2 alumnos brillantes, y con otros dos que presentan serias dificultades, de modo que a la hora de diseñar las actividades, tendremos presentes las peculiaridades y necesidades pedagógicas de dichos estudiantes.

Parte II

4 DEFINICIÓN DE LA MASA

Desde un punto de vista físico, la masa se puede definir y determinar de muchas formas diferentes (Gläser and Borys, 2009; Jammer, 2000; Khrapk, 2000; Okun, 1989, 2000; Walked, 1887), como aparece reflejado en la Figura 4.1 adjunta. En esta memoria no se estudiarán todas ellas. Solamente aquellas que son necesarias para alcanzar los objetivos planteados.

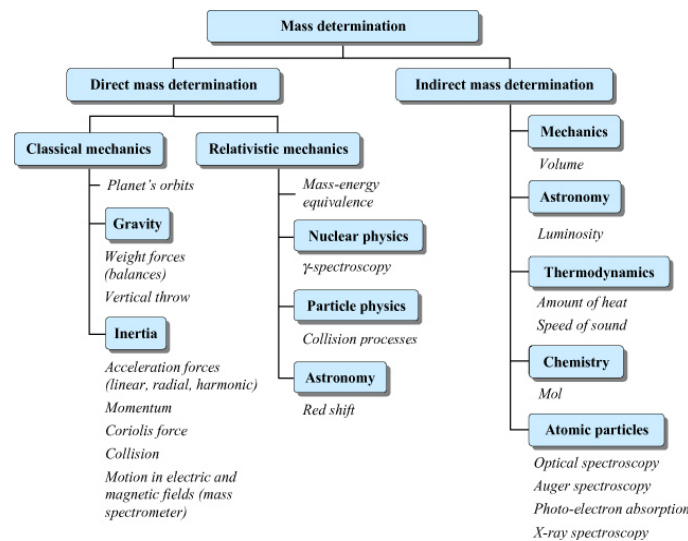


Figura (4.1).- Principios y métodos de determinación de la masa

4.1 Clásicamente

Una de ellas (la más conocida) es, evidentemente, por medio de la Segunda Ley de Newton de la dinámica como fundamento. Esta ley establece que la aceleración de un cuerpo, de masa m , sometido a una fuerza F , es inversamente proporcional a la masa de dicho cuerpo:

$$\vec{a} = \vec{F}/m \quad (4.1.1)$$

Es decir, para una misma fuerza, la aceleración es tanto menor cuanto mayor es la masa. En este caso, la masa m que acabamos de mencionar es la **masa inercial**, y es una forma de medir la resistencia que opone todo cuerpo a ser acelerado. Evidentemente, se puede imaginar un experimento ideal mediante el que se puede llegar a conocer la masa de un objeto cualquiera, a partir de la ley a la que hemos hecho referencia. Supongamos que un objeto reposara sobre una superficie plana perfectamente lisa (perfectamente lubricada), que eliminara por completo los fenómenos de fricción. Por otro lado, supongamos también, por un momento, que el objeto se hallara en un túnel en el que se hubiese alcanzado un vacío

perfecto. En esas condiciones ideales, en las que no existiera ninguna fricción, ni el aire se opusiera al movimiento del móvil considerado, al ser aplicada una fuerza F colineal con la superficie horizontal sobre la que reposa el objeto, y de módulo conocido, esta induciría un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado descrito por la ecuación (4.1.1).

Dado que el movimiento es rectilíneo, podemos prestar únicamente atención a los módulos de la fuerza y la aceleración, obviando su naturaleza vectorial, tal como acabamos de escribir. Por otra parte, dado que la aceleración es constante, la posición del móvil en función del tiempo vendrá dada por la conocida ecuación:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (4.1.2)$$

De forma que, si se escoge el sistema de referencia adecuado [$x_0 = 0, v_0 = 0$], al representar gráficamente la posición en función de tiempo al cuadrado, obtendríamos una recta que pasaría por el origen, con una pendiente igual a la mitad de la aceleración: $a/2$.

Conocida la aceleración, y conocido el módulo de la fuerza, se deduce el valor de la masa inercial.

De todo lo anterior se desprende con claridad que pretender medir la masa de un cuerpo, de esta manera, al margen de ser irrealista (ya que supone unas condiciones experimentales irrealizables), es poco cómodo para la mayoría de aplicaciones para las que el conocimiento de la masa se hace necesario.

Por todos es conocido, también, el hecho de que existe una vinculación directa entre la masa de un objeto y la fuerza de atracción que este ejerce sobre otro cuerpo másico. Se trata, evidentemente, de la ley de gravitación universal de Newton, que establece que dos cuerpos ejercen, el uno sobre el otro, una fuerza de atracción, de mismo módulo y misma dirección, pero de sentido opuesto, directamente proporcional al producto de las masas de los dos cuerpos, e inversamente proporcional a la distancia que los separa; es decir:

$$|\vec{F}| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (4.1.3)$$

A través de esta expresión, queda definida la **masa gravitacional**, pero no queda resuelta a priori la cuestión, no baladí, de *si las masas inercial y gravitacional son la misma magnitud*. No obstante, la teoría de la relatividad general, contrastada experimentalmente, se construye a partir del **principio de equivalencia**, que establece precisamente que **estas dos masas son indistinguibles**. Aclarada esta cuestión, se hace patente que es mucho más cómodo, a efectos de medir masas, hacerlo midiendo pesos y no aceleraciones.

Las principales características de la masa, si partimos de criterios clásicos con los cuales

poder definirla (que, en general, no son siempre válidos a altas velocidades y energías), son los siguientes:

- La masa es una forma de cuantificar la materia de un sistema físico.
- La masa total de un sistema constituido por varias partes, es la suma de la masa de las partes de dicho sistema.
- La masa es una variable que se conserva en todo proceso (Lavoisier).
- La masa es la misma, en cualquier sistema de referencia inercial.
- La masa de un cuerpo es la medida de la inercia del mismo.
- Las masas de dos cuerpos son el origen de la atracción gravitatoria mutua que sufren dichos cuerpos.

Desde un punto de vista clásico, se puede pues definir la masa, tal como ya hemos señalado, como la resistencia de un cuerpo a ser acelerado. Esto es consecuencia de la siguiente relación:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \quad (4.1.4)$$

Evidentemente, dado que para un sistema cerrado su masa no varía, se obtiene la conocidísima relación con la que ha comenzado esta introducción:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (4.1.5)$$

Sin embargo, a la hora de trasladarla a sistemas que se desplazan a velocidades próximas a la de la luz en el vacío, aparecen los primeros problemas. Es bien sabido que, en mecánica clásica, el momento lineal definido como el producto de la masa por la velocidad de cualquier partícula, es una magnitud física que se tiene que conservar, tal como ha sido contrastado experimentalmente innumerables veces. Dado que las velocidades que un observador mide dependen del referencial inercial en el que se sitúe, cabe preguntarse si las leyes fundamentales de la física son las mismas, independientemente del referencial inercial considerado.

Planteemos una situación sencilla: Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que colisionan. Ambos vienen animados por velocidades respectivas v_1 y v_2 antes del choque, para pasar a una situación en la que estas son v_3 y v_4 , posteriormente. Para que el ejemplo escogido no pierda generalidad, suponemos que los cuerpos también pueden variar su masa (m_3 y m_4).

Si suponemos que el observador es solidario de un referencial inercial (R_1), se tiene que cumplir la siguiente relación:

$$m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_3 \cdot v_{3x} + m_4 \cdot v_{4x} \quad (4.1.6)$$

Podríamos reescribir esta relación teniendo en cuenta las componentes v_y y v_z de las velocidades, pero para que nuestro propósito no acabe siendo demasiado engorroso, lo omitimos, por ser semejante al actual.

Supongamos ahora que otro observador, solidario con un referencial inercial (R_2), que se mueve respecto de (R_1) con una velocidad relativa V , realizase las medidas del mismo fenómeno. Obtendría la siguiente ecuación:

$$m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x} = m_3 \cdot v'_{3x} + m_4 \cdot v'_{4x} \quad (4.1.7)$$

Utilizando el **Principio de Relatividad** clásico de Galileo, se puede escribir:

$$v'_{1x} = v_{1x} - V \quad v'_{2x} = v_{2x} - V \quad v'_{3x} = v_{3x} - V \quad v'_{4x} = v_{4x} - V \quad (4.1.8)$$

Si se sustituyen estas expresiones en la anterior, se obtiene que:

$$m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} - m_3 \cdot v_{3x} - m_4 \cdot v_{4x} - V \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = 0 \quad (4.1.9)$$

Dado que la velocidad V es arbitraria, la ecuación precedente solo puede verificarse si se verifican, simultáneamente, las dos igualdades siguientes:

$$m_{1x} \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_3 \cdot v_{3x} + m_4 \cdot v_{4x} \quad m_1 + m_2 = m_3 + m_4 \quad (4.1.10)$$

4.2 Relatividad restringida

Es decir, el principio de la conservación del momento lineal impone la conservación de la masa. Esta situación sobresale por su extraordinaria sencillez y elegancia. En el marco de la relatividad restringida, esta situación no es reproducible. Efectivamente, tanto el tiempo, como el espacio que miden dos observadores, depende del referencial inercial desde el cual se hagan las medidas. Concretamente, las transformaciones de Lorentz establecen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \gamma(V)(x' + V \cdot t') & \text{siendo} & \quad \gamma(V) = [1 - (V^2/c^2)]^{-1/2} \\ t &= \gamma(V)(t' + x' \cdot V/c^2) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

Ecuaciones válidas para el caso en que el segundo referencial se desplaza, en la dirección del eje x , con una velocidad relativa V respecto del primero.

Por definición, la velocidad de un cuerpo es la derivada de la posición respecto del tiempo. Sin embargo, dada la naturaleza de las transformaciones de Lorentz, resulta obvio que la velocidad que miden dos observadores, en movimiento relativo uniforme el uno respecto del

otro, serán distintas. Basta operar para poder escribir que:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \cdot (V/c^2)} \quad v_y = \frac{v'_y / \gamma(V)}{1 + v'_x \cdot (V/c^2)} \quad v_z = \frac{v'_z / \gamma(V)}{1 + v'_x \cdot (V/c^2)} \quad (4.2.2)$$

Así pues, si se emplean ahora estas fórmulas, denominadas de composición de velocidades, **no se obtiene ninguna relación sencilla de conservación del momento lineal**. La conservación del momento lineal clásico no constituye un principio válido, en cualquier referencial inercial, en mecánica relativista. Se desprende de todo ello, que *el impulso relativista debe de adoptar una forma más general*, si lo que se pretende es encontrar una magnitud que se conserve sea cual sea el referencial que se adopte.

Con tal finalidad, se define un nuevo impulso en función de la velocidad propia u , definida como la derivada del vector posición, medida en un referencial inercial (R), respecto del tiempo propio del móvil. Recordemos que el tiempo propio, es el tiempo que mediría un observador, en un referencial solidario de la partícula o cuerpo cuyo movimiento se pretende estudiar.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{u} \quad (4.2.3)$$

En esta expresión, se ha definido un nuevo impulso en el que aparece la velocidad propia u del cuerpo o partícula considerada. Esta nueva magnitud, es la que se conserva desde una perspectiva relativista, cuando se pasa de un referencial inercial a otro. Concretamente se puede escribir:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \vec{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \gamma(v) \cdot \vec{v} \quad (4.2.4)$$

Lo anterior es válido para un referencial genérico R. Imaginemos sin embargo, que queramos determinar la velocidad propia, situándonos como observadores, en otro referencial R' que se desplaza a velocidad constante, respecto de R. En ese caso, dado que el tiempo propio del móvil cuyo movimiento se está estudiando no cambia, podremos escribir lo siguiente:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt'} \cdot \frac{dt'}{d\tau} = \vec{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(v) \vec{v} \quad (4.2.5)$$

Aparece de manera evidente que la velocidad propia es, en general, un vector distinto, en función del referencial que se use para definirla.

A modo de comprobación repitamos, el ejercicio mental del inicio de esta sección, en la que considerábamos dos partículas de masa m_1 y m_2 que experimentan un choque. Supongamos

pues, que el impulso lineal definido precedentemente ($p=m\gamma$) es una magnitud que se conserva.

Atendiendo a la componente y del impulso lineal, así definido, se podrá escribir con todo rigor, en el referencial genérico R de partida, lo siguiente:

$$\gamma(v_1)m_1v_{1y} + \gamma(v_2)m_2v_{2y} - \gamma(v_3)m_3v_{3y} - \gamma(v_4)m_4v_{4y} = 0 \quad (4.2.6)$$

Por otro lado, se verifica la relación siguiente, que para no alargarnos demasiado, no será demostrada.

$$1 - \frac{v_x V}{c^2} = \frac{\gamma(v')}{\gamma(V) \cdot \gamma(v)} \quad (4.2.7)$$

Usando la relación (4.2.7), junto con las leyes de composición de velocidades, se obtiene, respecto de un referencial R' que se desplaza con velocidad uniforme V, respecto de R, en la dirección del eje x, lo siguiente:

$$\gamma(v'_1)m_1v'_{1y} + \gamma(v'_2)m_2v'_{2y} - \gamma(v'_3)m_3v'_{3y} - \gamma(v'_4)m_4v'_{4y} = 0 \quad (4.2.8)$$

Comprobándose que el impulso lineal que se ha definido es una magnitud cuya componente y, se conserva.

Igualmente se puede comprobar que también se conserva la componente x. En efecto tenemos por un lado que:

$$\gamma(v'_1)m_1v'_{1x} + \gamma(v'_2)m_2v'_{2x} - \gamma(v'_3)m_3v'_{3x} - \gamma(v'_4)m_4v'_{4x} = 0 \quad (4.2.9)$$

Ecuación que se transforma, teniendo en cuenta las leyes de composición de velocidades, en la expresión siguiente:

$$\gamma(v_1)m_1(v_{1x} - V) + \gamma(v_2)m_2(v_{2x} - V) - \gamma(v_3)m_3(v_{3x} - V) - \gamma(v_4)m_4(v_{4x} - V) = 0 \quad (4.2.10)$$

Esta ecuación ha de ser válida sea cual sea el valor de V. Es evidente entonces que:

$$\gamma(v_1)m_1v_{1x} + \gamma(v_2)m_2v_{2x} - \gamma(v_3)m_3v_{3x} - \gamma(v_4)m_4v_{4x} = 0 \quad (4.2.11)$$

Y, que por otro lado:

$$\gamma(v_1)m_1 + \gamma(v_2)m_2 - \gamma(v_3)m_3 - \gamma(v_4)m_4 = 0 \quad (4.2.12)$$

Habiéndose comprobado de este modo, que el momento lineal relativista se corresponde con la expresión señalada, concretamente:

$$\vec{p} = \gamma(v) \cdot m \cdot \vec{v} \quad (4.2.13)$$

La dinámica clásica parte del postulado esencial, del que nos hemos hecho eco ya, de que la aceleración de un cuerpo masivo es directamente proporcional a la fuerza aplicada al mismo. Queda patente, con todo lo visto hasta el momento, que esta ley, perfectamente invariante si se aplican las transformaciones de Galileo, pasando de un referencial inercial a otro, no es de aplicación en el marco de la relatividad restringida. Esta ley ha de ser reformulada de tal manera que permita la existencia de una invariancia semejante, teniendo en cuenta las transformaciones de Lorentz.

Se parte en esta ocasión de un postulado semejante, formulado en función del impulso lineal relativista, presentado anteriormente:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (4.2.14)$$

$$\vec{F} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) = m \frac{d}{dt} (\vec{v}\gamma(v)) \quad (4.2.15)$$

Derivando la expresión anterior se obtiene una expresión que depende únicamente del tiempo t , medido en un referencial cualquiera, y que pone de manifiesto que, en dinámica relativista, la fuerza aplicada al cuerpo no es colineal con la aceleración del cuerpo.

$$\vec{F} = m\gamma(v)\vec{a} + m\vec{v} \frac{d\gamma(v)}{dt} \quad (4.2.16)$$

A la vista de la ecuación anterior existen dos situaciones especiales:

- La primera es aquella en la que el movimiento es uniforme, entendiéndose por esto último, la constancia de la norma del vector velocidad. En ese caso, el factor gamma asociado a ese movimiento no cambia con el tiempo, por lo que el segundo sumando de la ecuación anterior se anula. En este caso, la fuerza tiene por expresión:

$$\vec{F} = m \cdot \gamma(v) \cdot \vec{a} \quad (4.2.17)$$

- La segunda situación se da cuando nos encontramos ante un movimiento rectilíneo. Dada la expresión particular del factor gamma, y aplicando las reglas de derivación, se obtiene sin dificultad lo siguiente:

$$\frac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3(v) \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \quad (4.2.18)$$

$$v \frac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3(v) \frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{dt} = \gamma(\gamma^2 - 1) \frac{dv}{dt} \quad (4.2.19)$$

Como el movimiento es rectilíneo, la expresión de la fuerza queda entonces reducida a:

$$\vec{F} = \gamma^3(v) \cdot m \cdot \vec{a} \quad (4.2.20)$$

Llamándose en el primer caso, el factor que multiplica la aceleración, **masa transversal**, y en el segundo, **masa longitudinal**. A la vista de estas ecuaciones, la inercia, definida como la oposición que manifiesta un cuerpo a ser acelerado, es mucho mayor en el caso del incremento del módulo de la velocidad, que en el caso en que varíe su dirección. De todo ello, se desprende que la masa, en mecánica relativista, no es una magnitud puramente escalar, y no se corresponde con su equivalente clásico.

Inciendo más en la naturaleza de la masa, desde una perspectiva relativista, no se trata tampoco de una magnitud aditiva. Efectivamente podemos escribir la ecuación siguiente:

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2} \quad (4.2.21)$$

La energía y el momento lineal, sí son magnitudes aditivas:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (4.2.22)$$

$$E = E_1 + E_2 \quad (4.2.23)$$

De modo, que la masa puede expresarse:

$$m^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{c^2} \quad (4.2.24)$$

Pudiéndose comprobar fácilmente que la masa depende del ángulo que formen los dos momentos lineales p_1 y p_2 , así como que:

$$m^2 \neq (m_1 + m_2)^2 \quad (4.2.25)$$

Con todo lo anterior pretendemos subrayar los siguientes aspectos, sin profundizar en exceso en los mismos:

- La masa no es una medida de la materia del sistema sometido a estudio. En física relativista, no se establece una diferencia entre radiación y materia.
- Las energías de las partículas son grandes o muy grandes comparadas con sus masas respectivas. La masa de un sistema no viene determinada, por el número de partículas que lo componen, sino por sus energías y la orientación mutua de sus momentos lineales. Como consecuencia, la masa del sistema no es una propiedad aditiva de las partes que lo integran.
- Como en mecánica newtoniana, la masa de un sistema aislado, permanece constante en el tiempo. Sin embargo, para que lo anterior sea cierto, tienen que tomarse en consideración tanto la “materia” del sistema, como la radiación del mismo.

- De nuevo, como en el marco de la mecánica newtoniana, la masa no se ve alterada, al considerar el paso de un referencial inercial a otro.
- La masa de un móvil, NO es una medida de su inercia, dado que la resistencia de todo cuerpo a ser acelerado, depende del ángulo que formen la fuerza y la velocidad del mismo.
- La masa de un cuerpo moviéndose a velocidades próximas a la de la luz, no refleja su interacción con un campo gravitatorio. Para cuantificar el dato anterior, se ha de recurrir a una expresión matemática que depende tanto de la energía del cuerpo, como de su momento lineal.

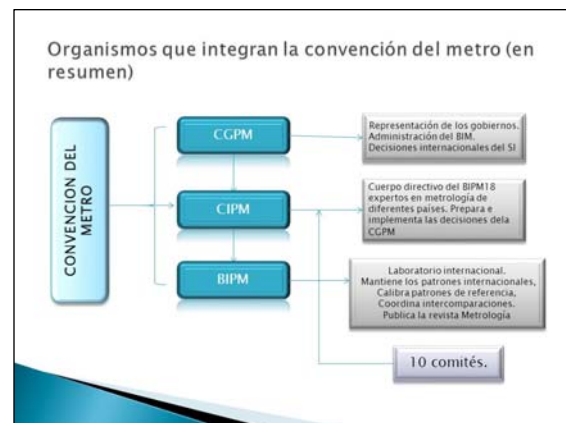
Como podemos comprobar con el breve repaso anterior, el concepto de masa clásico no se corresponde con el de masa relativista. Esto sugiere que si se pretende definir la masa con todo rigor, en previsión de cualquier tipo de experimento científico, nos vamos a encontrar con esta dificultad añadida. No obstante, dado que el propósito de este trabajo, se enfoca desde la perspectiva de la medición de la masa, a nivel de un laboratorio ordinario, en el que el instrumento o instrumentos de medida que se utilicen al efecto, siempre estará fijo con respecto del mismo, podemos considerar que los efectos relativistas serán inexistentes. También y dado que las variaciones de temperatura que tienen lugar en un laboratorio ordinario, son pequeñas, las correcciones que de estas se derivarían, en el marco de la teoría relativista, serían tan ínfimas, que serán siempre indetectables, dada la precisión máxima de las balanzas actuales. Siendo así, podemos adoptar como muy adecuada, por ser perfectamente operativa, respecto de los propósitos que nos hemos fijado, la definición clásica de masa.

Evidentemente estas cuestiones tan solo se pueden esbozar en la asignatura de Física en segundo de bachillerato.

5 UNIDAD DE MASA (SI)

Una vez que hemos fijado el concepto de masa en cuanto tal, nos debemos de interesar, como no puede de ser de otro modo, por la medida de esa misma magnitud; es decir, tenemos que ser capaces de medir la masa de cualquier sistema ordinario, en una misma unidad, la cual ha de ser usada por todos los laboratorios, a nivel mundial. Actualmente, la unidad de referencia es el kilogramo.

El trabajo de redefinición del kilogramo fue encomendado (como siempre) al BIPM. Este organismo fue creado por la *Convención del Metro*, o *Tratado del Metro* (Figura 5.1, adjunta), que es un tratado internacional firmado el 20 de mayo de 1875 en París por diecisiete estados, con el fin de establecer una autoridad mundial en la metrología (se instauró el sistema



métrico decimal), siendo posteriormente modificada en 1921, donde se amplió a todas las medidas físicas. Se instituyó entonces la “Conferencia General de Pesas y Medidas” (CGPM), que actualmente se realiza cada 4 años, el “Comité Internacional de Pesas y Medidas” (CIPM) y la “Oficina Internacional de Pesas y Medidas” (BIPM).

Entre las principales funciones del BIPM cabe destacar las siguientes:

- Representa a la comunidad metrológica mundial, con el fin de otorgarle la visibilidad y el reconocimiento debidos.
- Se trata de un centro de colaboración científica y técnica entre los Estados firmantes, lo que favorece el desarrollo de comparaciones internacionales de operaciones de medida.
- Se le encomienda la tarea de coordinar el Sistema Internacional de Unidades, haciéndose cargo de la comparación de los resultados experimentales obtenidos a nivel internacional.

En 1960 el sistema de unidades establecido desde 1921 fue renombrado como «Sistema Internacional de Unidades» (abreviado **SI**), y se utiliza de manera preferente en el ámbito científico y técnico. Este sistema se fundamenta en un conjunto de **siete unidades fundamentales**, a partir de las cuales se puede definir cualquier otra, como producto de potencias de la anteriores (BIPM, 2019).

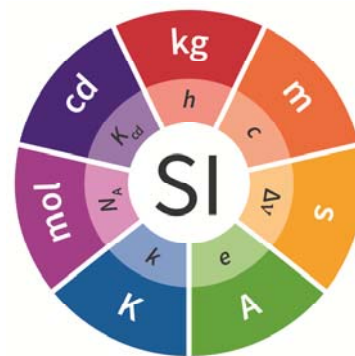
En la **Tabla 5.1** se describen sucintamente dichas magnitudes base.

MAGNITUD BASE	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Tabla 5.1.- Magnitudes fundamentales del SI

Y en la Figura 5.2 las constantes fundamentales que se utilizan para su definición:

En este trabajo la magnitud que nos interesa es la masa. Sin embargo, como se sabe, para poder definir el kilogramo utilizando constantes físicas universales, se requiere también definir la unidad de tiempo, el segundo, así como la de longitud, el metro.



A partir del producto de potencias de las unidades fundamentales anteriores, se definen las **unidades derivadas**, como por ejemplo la velocidad, el volumen, la aceleración, o la energía. Se desprende de todo lo anterior que, en términos de coherencia interna, el Sistema Internacional de Unidades (SI) se ve confrontado, desde un primer momento, con la *tarea de definir las unidades fundamentales referidas*. Para dicho propósito, y desde una perspectiva histórica, se han utilizado varias aproximaciones: Se han usado artefactos, tales como el **prototipo internacional de kilogramo**. Estados físicos, tales como el correspondiente al punto triple del agua, para definir el Kelvin. Principios de índole experimental que requieren condiciones ideales, como los que se usaban a la hora de definir la candela y el amperio, y constantes universales, tales como la de la velocidad de la luz en el vacío.

Tal vez, de lo anteriormente expuesto, destaque particularmente, el uso del artefacto del kilogramo. A pesar de que su uso, para definir dicha unidad, se fundaba en un método conceptualmente sencillo, presenta varios inconvenientes operativos. En particular, y dado que se trata de un objeto material, su masa se ha visto reducida, de manera contrastada, conforme transcurría el tiempo, en varios microgramos, debido a que en el proceso de limpieza para eliminar el óxido que podría formarse, se arrancaban átomos durante el proceso

de frotamiento mecánico (véase la Figura 5.3, adjunta).

Ha existido, por lo tanto, un riesgo de alteración de las propiedades del artefacto, y estas variaciones han sido tan graves, que han alterado irreversiblemente la propiedad a partir de la cual se definía la unidad de la magnitud física. También, y desde esa misma perspectiva histórica, es interesante señalar que la definición del metro utilizaba inicialmente un artefacto equivalente, comprobándose que al redefinirlo en relación directa con la velocidad de la luz en el vacío, que es una constante universal, ha supuesto una gran ventaja, desde un punto de vista metrológico.



Por lo tanto, tal como señala el propio BIPM, surge la necesidad de definir todas las unidades, a partir de constantes físicas. Las enumeramos y presentamos en la tabla siguiente:

Tabla 5.2.- Valores de las siete constantes naturales que definen el SI

CONSTANTE	SÍMBOLO	VALOR NUMÉRICO	UNIDAD
Frecuencia de la transición hiperfina del cesio	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
Velocidad de la luz en el vacío	c	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$	$J \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
Carga elemental	e	$1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$	C
Constante de Boltzmann	k	$1,380\ 649 \times 10^{-23}$	$J K^{-1}$
Constante de Avogadro	N_A	$6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Eficacia luminosa	K_{cd}	683	lm/W

La ventaja de utilizar una constante de la naturaleza para definir una unidad asociada a la misma, estriba en que se disocia su definición de su determinación práctica. Se abre así la posibilidad de que se establezcan protocolos experimentales distintos para dicho fin, conforme el progreso tecnológico lo posibilite, sin que sea necesaria una nueva definición de la unidad en cuestión.

La constante de Planck y la de la velocidad de la luz en el vacío, son constantes fundamentales, dado que rigen los efectos cuánticos, la primera, y las propiedades generales del espacio-tiempo, la segunda. Afectan a todas las partículas del mismo modo, cualquiera que sea la escala considerada.

La constante de Boltzmann es una constante de proporcionalidad entre la energía y el inverso de la temperatura (en realidad, proporciona las unidades de la entropía, en su relación con las probabilidades de los microestados asociados a los sistemas físicos).

La frecuencia de transición hiperfina del estado fundamental del átomo de cesio 133 ($^{133}\text{Cs}_{55}$), es un parámetro que puede venir alterado por el entorno; en particular, piénsese en campos electromagnéticos. Sin embargo, la transición es bien conocida y es estable.

La constante de Avogadro, es una constante de proporcionalidad entre la cantidad de materia de un sistema y la posibilidad de efectuar un recuento de las entidades discretas que lo constituyen.

La carga elemental, e , representa una constante de acoplamiento de la fuerza electromagnética, a través de la constante de estructura fina. Existen marcos teóricos que predicen la variabilidad de dicha constante con el tiempo. Lo anterior no resulta ser un problema, ya que dicha variación es extraordinariamente pequeña, de forma que no se verán afectadas las medidas experimentales venideras.

Finalmente, la eficacia luminosa, para una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} Hz, es una constante de índole técnica que establece la relación existente entre las características físicas de dicha radiación, y la reacción fisiológica que provoca en un individuo promedio, considerado como observador.

6 DEFINICIÓN DEL KILOGRAMO

Como veremos más adelante, para poder definir de manera coherente el kilogramo, debemos definir previamente, tanto el segundo, como el metro.

El segundo, cuyo símbolo es s, se define fijando la frecuencia de transición hiperfina del estado fundamental del átomo de cesio ($^{133}\text{Cs}_{55}$), no perturbado. Dicha frecuencia se fija al valor de 9 192 631 770 Hz. Evidentemente, se trata de una definición del “tiempo propio” del átomo de cesio 133. Con todo rigor, siempre se tendrán que tener en cuenta las correcciones relativistas, si tenemos que pasar de un referencial inercial a otro, quedándonos en el marco teórico de la relatividad restringida, o si consideramos también los efectos del campo gravitatorio (como pueden requerirlo aplicaciones técnicas, como el GPS), tendremos que situarnos el marco de la relatividad general.

El metro, representado por el símbolo m, se define a partir de la velocidad de la luz en el vacío. En efecto se fija su valor de manera exacta a $299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, y se define el metro como la distancia recorrida por ella, en $1/299\,792\,458\text{ s}$.

Finalmente el kg es la unidad de masa del Sistema Internacional de Unidades (SI). Para poder definirla se fija la constante de Planck al valor $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ cuando se expresa en J s (es decir, $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$), pudiendo escribir, entonces, el kg como la unidad siguiente:

$$1\text{ kg} = \left(\frac{h}{6,62607015 \times 10^{-34}} \right) \text{m}^{-2} \cdot \text{s} \approx 1,4755214 \times 10^{40} \cdot \frac{h \cdot \Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2} \quad (6.1)$$

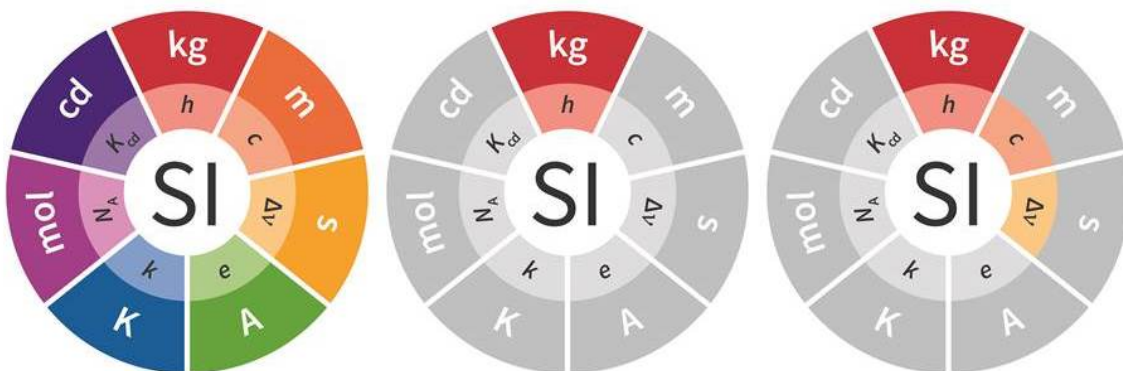


Figura 6.1.- Relación del kg con las constantes naturales que lo definen.

Parte III

7 MEDIDA DE LA MASA

En los apartados que vienen a continuación vamos a mostrar algunas de las correcciones y precauciones y cuidados que han de tenerse en cuenta durante el proceso de medida de la masa

7.1 Efecto de la altitud y latitud (g)

Una vez que ha quedado definida la masa desde un punto de vista metrológico, pasamos ahora a interesarnos, a cómo poder cuantificar la masa de un sistema cualquiera.

Es bien sabido que cuando pesamos una masa, con la ayuda de una balanza, lo que realmente determinamos es el peso del objeto o sustancia que ejerce sobre el instrumento de medida. Evidentemente, el peso de una masa m sobre una balanza, depende de la intensidad del campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) en dicho lugar, es decir podemos escribir lo siguiente:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{g} \quad (7.1.1)$$

Siendo el vector g , la aceleración de la gravedad. Sabemos por otro lado, que dicho vector, sufre variación en su módulo, en función de la localización geográfica. Es tanto mayor, cuanto más cerca de los polos terrestres nos encontremos, y tanto menor cuanto más cerca del ecuador nos hallemos. Esto es consecuencia del hecho de que la Tierra es un planeta que gira sobre su eje y, consecuentemente, se puede definir una aceleración efectiva de la gravedad:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (7.1.2)$$

Es decir, como se comprueba en la fórmula anterior, existen dos términos: La gravedad real g , y el término debido a la fuerza centrípeta. De este modo, sobresale de manera evidente, que la gravedad efectiva no está dirigida perfectamente al centro de la Tierra, sino que está levemente desplazada. Existen dos componentes: la componente según la dirección norte-sur y la componente radial.

- Componente según la dirección norte-sur:

$$\omega^2 R \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda \quad (7.1.3)$$

- Componente radial:

$$\omega^2 R \cos^2 \lambda \quad (7.1.4)$$

En dónde la letra griega lambda designa la latitud sobre la superficie terrestre. La aceleración de la gravedad se podrá escribir, entonces, como sigue:

$$g' = g - \omega^2 R \cos^2 \lambda = g - 0,0339 \cos^2 \lambda \quad (7.1.5)$$

Este es el motivo, el de la rotación de la Tierra sobre su eje, por el que los cuerpos sienten una atracción gravitatoria máxima en los polos, y mínima en el ecuador.

Se comprende entonces que una balanza, calibrada en una localización geográfica determinada, mide las masas (es decir los pesos correspondientes) en función de la aceleración de la gravedad en donde ha sido calibrada. Rigurosamente, no se podría utilizar la misma balanza en localizaciones diferentes. Recordemos por ejemplo que la aceleración g , en el polo norte es $9,8321 \text{ m/s}^2$, mientras que ese valor disminuye a $g=9,7799 \text{ m/s}^2$, en el ecuador. Por ese solo efecto, una masa de 1 kg que hubiese sido pesada en el polo norte, indicaría una masa de $994,69 \text{ g}$, en el ecuador.

Por otro parte, ya hemos visto, en la introducción, que dos masas respectivas se atraen mutuamente según la ecuación que hemos presentado, al principio de este trabajo. En el caso de la Tierra, esta atracción, para una masa m , a una altura h sobre la superficie terrestre, vendrá dada, por la ecuación siguiente:

$$F_h = \frac{GM_t m}{(R_t + h)^2} \quad (7.1.6)$$

Por lo que si hemos pesado una masa m determinada, en la superficie terrestre, a una altura h , mediríamos la siguiente masa:

$$m_{medida} = m \cdot \frac{R_t^2}{(R_t + h)^2} \quad (7.1.7)$$

Imaginemos, que habiendo calibrado la balanza sobre la superficie, y habiendo medido una masa de 200 g , en dicho lugar, desplazemos dicha balanza unos 10 metros en altitud y repitamos la operación anterior. Ahora el resultado sería:

$$m_{medida} = 200 \cdot \frac{6370000^2}{(6370000 + 10)^2} = 199,99937 \text{ g} \quad (7.1.8)$$

Si en lugar de 10 m , el cambio de altura fuese de 100 m , el nuevo valor obtenido sería: $199,99372 \text{ g}$. Así pues, como se acaba de demostrar, se produce una variación significativa en la masa medida.

7.2 Efecto del empuje de Arquímedes (flotabilidad)

Además de lo que acabamos de ver hasta ahora, todas las mediciones habituales de la masa se hacen en el aire. Por lo tanto, y dado que este es un fluido, también es de aplicación la ley de Arquímedes que establece, que el empuje debido a ese fluido es directamente proporcional a la densidad del aire, y el volumen del objeto cuya masa estemos tratando de determinar.

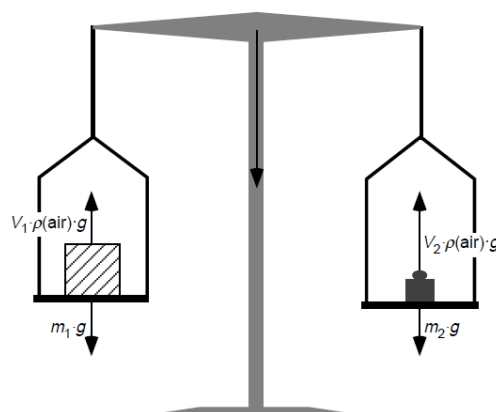
Cuando el efecto del empuje de Arquímedes del aire no entre en consideración, estaremos midiendo una masa inferior de la real. Se trata de la mayor fuente de errores, en cuanto a la determinación de la masa, con alta precisión.

Se tendrá por lo tanto que conocer la densidad del aire, con la suficiente precisión, lo cual obligará a medir, tanto la presión del aire, como la humedad relativa del mismo.

En este tipo de medidas, se habla de masa aparente y masa real, entendiéndose masa aparente, por la masa que hemos medido, prescindiendo de la corrección debida al empuje de Arquímedes. Antiguamente, se usaban pesos de $8,4 \text{ g/cm}^3$ para calibrar las balanzas, sin embargo, hoy en día, se utilizan pesos de 8 g/cm^3 .

A pesar de que la mayoría de balanzas actuales son de un solo plato, el siguiente criterio, que queda expuesto en la siguiente figura, y las ecuaciones que de él se derivan, son también de aplicación. El principio sigue siendo el mismo, solo que ahora, para comparar los pesos, se utiliza un sensor, que secuencialmente los compara, en vez de utilizarse el equilibrio de una varilla.

La situación queda representada en la figura siguiente:



$$m_1 \cdot g - V_1 \cdot \rho(\text{aire}) \cdot g = m_2 - V_2 \cdot \rho(\text{aire}) \cdot g \quad (7.2.1)$$

En esta expresión g es la aceleración de la gravedad en el lugar considerado, m_2 el “peso” de una masa verdadera m_1 .

Dada la definición de la densidad, la ecuación anterior se puede reescribir del modo siguiente:

$$m_1 - m_1 \frac{\rho(\text{aire})}{\rho_1} = m_2 - m_2 \frac{\rho(\text{aire})}{\rho_2} \quad (7.2.2)$$

Y, reordenándola, queda de la manera siguiente:

$$m_1 = m_2 \cdot \frac{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_2)}{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_1)} \quad (7.2.3)$$

Esta ecuación toma la forma siguiente, cuando lo que se pretende es corregir el empuje de Arquímedes, a la hora de pesar objetos o sustancias:

$$m = w \cdot \frac{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{pesa}})}{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{muestra}})} \quad (7.2.4)$$

En **donde w es el peso que indica la balanza.**

La fórmula anterior nos da la **masa real** (verdadera), en función del **peso que mide la balanza**. Se comprueba, de manera trivial, que la masa real se determina multiplicando el peso medido, por un factor de proporcionalidad, en el que aparecen las densidades del aire, de la muestra y de la pesa interna de la balanza. Dicho factor, que denominaremos **Bu**, es evidentemente:

$$Bu = \frac{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{pesa}})}{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{muestra}})} \quad (7.2.5)$$

Para que el efecto del empuje de Arquímedes sea más evidente, se presenta a continuación una gráfica (Figura 7.2.1; Reichmuth et al., 2004), en donde se representa, en términos relativos, la diferencia del valor de la pesada, con la masa real del sistema estudiado, suponiendo que la densidad del aire tiene un valor de 1.01 kg/m³ (Nótese que ese valor difiere del valor estándar sugerido por los organismos metrológicos oficiales, que lo fijan a 1,2 kg/m³). Se puede verificar visualmente, que la diferencia se anula, como no podía ser de otro modo, para un valor de la densidad de la muestra igual de 8000 kg/m³. Otro hecho muy destacable de la gráfica, es que la corrección por el empuje del aire es tanto mayor, cuanto menor es la densidad de la muestra, respecto de la densidad de referencia de la pesa de la balanza. Las correcciones son mucho menos acusadas, para muestras que exceden la densidad aludida, y de signo opuesto. Es decir, se comete un error por exceso.

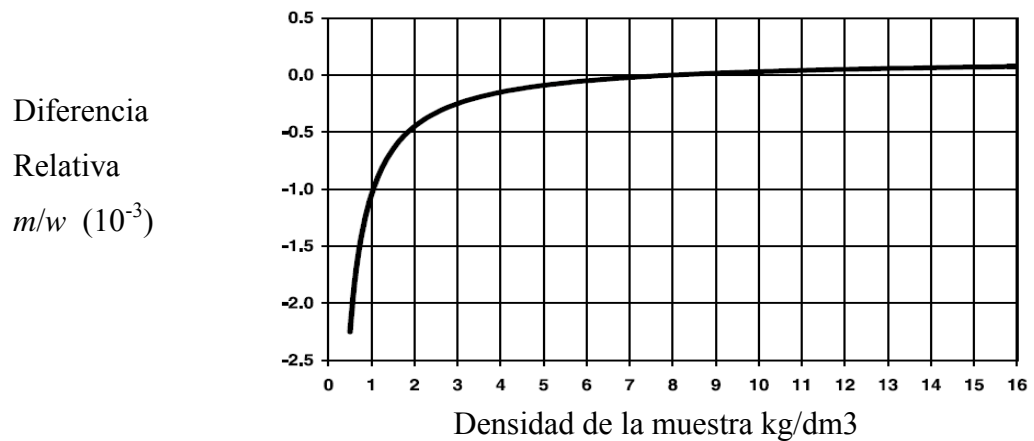


Figura (7.2.1).- The relative air buoyancy (Reichmuth et al., 2004)

Dada la expresión de las ecuaciones (7.2.4) y (7.2.5), el cálculo de las incertidumbres que de ellas se derivan son:

$$\frac{u_c(m)}{m} = \sqrt{\left(\frac{u(Bu)}{Bu}\right)^2 + \left(\frac{u(w)}{w}\right)^2} \quad (7.2.6)$$

Si se pretende derivar las que corresponden al empuje del aire, se vuelve a acudir a la ecuación (7.2.4), y teniendo en cuenta las reglas de derivación ordinarias, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Bu}{\partial \rho_{muestra}} &= \frac{\rho_a(\rho_a - \rho_{pesa})}{\rho_{pesa}(\rho_{muestra} - \rho_a)^2} \\ \frac{\partial Bu}{\partial \rho_a} &= \frac{\rho_{muestra}(\rho_{pesa} - \rho_{muestra})}{\rho_{pesa}(\rho_{muestra} - \rho_a)^2} \\ \frac{\partial Bu}{\partial \rho_{pesa}} &= \frac{\rho_{muestra}\rho_a}{\rho_{pesa}^2(\rho_{muestra} - \rho_a)} \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

La desviación estándar correspondiente se expresa como:

$$u(Bu) = \sqrt{\left(\frac{\partial Bu}{\partial \rho_{muestra}}\right)^2 u^2(\rho_{muestra}) + \left(\frac{\partial Bu}{\partial \rho_{pesa}}\right)^2 u^2(\rho_{pesa}) + \left(\frac{\partial Bu}{\partial \rho_a}\right)^2 u^2(\rho_a)} \quad (7.2.8)$$

Obteniéndose:

$$u(Bu) = \frac{\rho_{muestra}}{\rho_{pesa}(\rho_{muestra} - \rho_a)} \sqrt{\left(\frac{\rho_a(\rho_a - \rho_{pesa})}{\rho_{muestra}(\rho_{muestra} - \rho_a)}\right)^2 u^2(\rho_{muestra}) + \left(\frac{\rho_a}{\rho_{pesa}}\right)^2 u^2(\rho_{pesa}) + \left(\frac{\rho_{pesa} - \rho_{pesa}}{\rho_{muestra} - \rho_a}\right)^2 u^2(\rho_a)} \quad (7.2.9)$$

Ahora bien, a la vista de los valores numéricos, podemos suponer:

$$\rho_{\text{pesa}} - \rho_a \approx \rho_{\text{pesa}}$$

Con lo que la ecuación de la desviación estándar queda simplificada, de la manera siguiente:

$$u(Bu) = \frac{\rho_{\text{muestra}}}{\rho_{\text{pesa}}(\rho_{\text{muestra}} - \rho_a)} \sqrt{\left(\frac{-\rho_{\text{pesa}} \cdot \rho_a}{\rho_{\text{muestra}}(\rho_{\text{muestra}} - \rho_a)}\right)^2 u^2(\rho_{\text{muestra}}) + \left(\frac{\rho_a}{\rho_{\text{pesa}}}\right)^2 u^2(\rho_{\text{pesa}}) + \left(\frac{\rho_{\text{pesa}} - \rho_{\text{muestra}}}{\rho_{\text{muestra}} - \rho_a}\right)^2 u^2(\rho_a)} \quad (7.2.10)$$

La ecuación precedente ignora que existen otras fuentes de incertidumbre.

Pasamos a examinar brevemente cada una de ellas.

7.3 Repetibilidad

No es infrecuente que un objeto con una masa determinada, al ser pesado repetidas veces, por el mismo instrumento, esté asociado por el mismo, con una masa distinta, en cada ocasión. A este hecho, se le denomina la “no-repetibilidad” de la operación de medida. Los motivos que la explican, en el caso que nos ocupa, son de distinta naturaleza, y abarcan fenómenos tales como, corrientes de aire no controladas, en el entorno de la balanza, la presencia de campos magnéticos transitorios, la ausencia de equilibrio térmico entre la balanza y el objeto sometido a estudio, por mencionar algunos de los más frecuentes. Todas estas fuentes de incertidumbre, quedan reflejadas en un término que puede ser estudiado a nivel estadístico. Por adoptar una referencia, las balanzas AT 201, han sido perfectamente caracterizadas por su fabricante, y las desviaciones estándar, siendo función del rango de carga en el que se esté trabajando, se estiman a:

- $s(\text{REP})=0,015$ mg para cargas inferiores a 50 g
- $s(\text{REP})=0,04$ mg para cargas entre 50–200 g

7.4 No linealidad

Es de sobra conocido el hecho de que un instrumento de medida ideal, al caracterizar un objeto, con el valor de una magnitud concreta, debe de tener una **respuesta lineal**. Es decir, si la magnitud concreta que se trata de determinar se multiplica por un factor dado, la señal del instrumento debe de hacerlo en la misma proporción. Lo anterior es una situación ideal que se implementa de manera imperfecta. Se puede ver gráficamente en la figura siguiente:

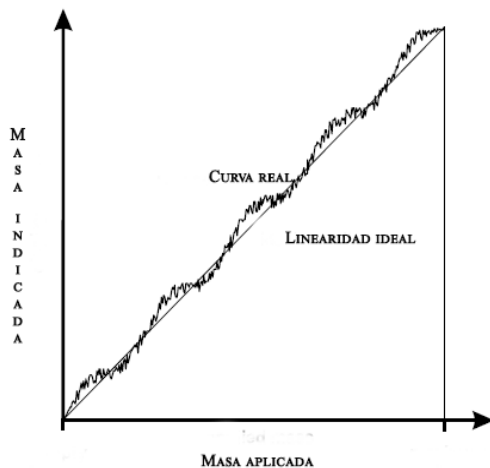


Figura (7.4.1)

La curva real no presenta la misma pendiente, en todo el rango de medida.

El fabricante garantiza que las desviaciones de la linealidad no exceden un valor máximo. Como en el caso presentado anteriormente, ese valor es función de la carga. A rasgos generales, para el mismo tipo de balanza, se verifica que:

- $NL < 0,03$ mg para cargas inferiores a 10 g
- Entre 10 y 200 g se puede garantizar que $NL < 0,12$ mg

Estos datos se refieren al peso neto, por lo que siempre se tendrán que multiplicar por dos, ya que aparece también este efecto, al tarar la balanza. Suponiendo que los datos se ajustan a una distribución rectangular, al operar con ellos, desde un punto de vista estadístico, se deberán dividir por raíz de 3. Por consiguiente se tiene que:

$$u(NL) = \frac{NL_{\max}}{\sqrt{3}} \quad (7.4.1)$$

Es decir:

$$u^2(NL) = 2 \cdot \frac{NL_{\max}^2}{3} = 0,67 \cdot NL_{\max}^2 \quad (7.4.2)$$

7.5 Sensibilidad

Todo instrumento de medida viene caracterizado por su sensibilidad. Se trata de la pendiente de su curva característica. Dicha pendiente contiene a su vez un grado de indeterminación. En particular, para las balanzas *Mettler–Toledo AT 201*, la desviación máxima asociada a este factor es de $2,10^{-6}$ %. Si pesáramos una masa de 1g, la incertidumbre sería inferior a 2 microgramos.

Estadísticamente, se supone también una distribución rectangular, de modo que se puede escribir:

$$u(ST) = w_{neto} \frac{ST_{\max}}{\sqrt{3}} = w_{neto} \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} \quad (7.5.1)$$

$$u^2(ST) = w_{neto}^2 \cdot 1,3 \cdot 10^{-12} \quad (7.5.2)$$

7.6 Coeficiente térmico

Se acaba de aludir a la curva característica de la balanza. Se trata de una curva cuya pendiente es sensible a la temperatura. Por este motivo, es muy importante que a la hora de pesar con gran exactitud, no aparezcan gradientes de temperatura, y se haya alcanzado el equilibrio térmico. Sin entrar en honduras que desbordan los propósitos de este trabajo, este fenómeno tiene asociado la desviación estándar siguiente, que presentamos sin más justificación:

$$u(TC) = w_{neto} \frac{TC_{\max}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta T}{\sqrt{3}} = w_{neto} \frac{1,5 \cdot 10^{-6}}{3} \Delta T \quad (7.6.1)$$

7.7 Expresión general

Si consideramos todos los factores que acabamos de mencionar, se obtiene la siguiente ecuación que da cuenta del error global asociado a la medida de la masa:

$$\frac{u(m)}{m} = \sqrt{\left(\frac{u(Bu)}{Bu}\right)^2 + \frac{u^2(REP) + u^2(NL) + u^2(TC) + u^2(ST)}{w_s^2}} \quad (7.7.1)$$

Aproximando la masa m al peso w , la ecuación anterior se simplifica como:

$$u(m) = \sqrt{m^2 \left(\frac{u(Bu)}{Bu}\right)^2 + u^2(REP) + u^2(NL) + u^2(TC) + u^2(ST)} \quad (7.7.2)$$

Los datos se tendrán que especificar, en cada caso, en función de la balanza de la que se disponga, y por tanto, de la información proporcionada por el fabricante.

Con ello se tiene la expresión que relaciona el peso medido por la balanza, con la masa real del objeto, así como la ecuación que proporciona la desviación estándar de la pesada. Vemos, en ellas, que la densidad del aire es un dato que se necesita conocer.

Para una temperatura, humedad relativa y presión del aire especificadas, se puede calcular la densidad del aire a partir de la fórmula siguiente:

$$\rho(\text{aire}) = \frac{3,4848(p - 0,0037960.U.e_s)}{T + 273,15} \cdot 10^{-3} \quad (\text{Jones, 1978})$$

En esta ecuación aparecen las siguientes variables:

- p presión del aire (kPa)
- U humedad relativa (%)
- T temperatura (°C)
- e_s Se calcula como: $e_s = 1,7526 \times 10^8 \times e^{-\frac{5315,56}{T+273,15}}$

Para ejemplificar todo lo anterior, hagamos unos pequeños cálculos. Supongamos que hemos pesado 100g de un sólido con nuestra balanza. Los datos de la pesada son los siguientes:

- Peso de la muestra $w=100,00000$ g
- Densidad de la muestra, $1,0000$ g/cm³
- $p=1,01325$ kPa (1 atm)
- $U=30$ %
- Densidad de la pesa, $8,0000$ g/cm³

Cálculo de la densidad del aire:

- $e_s=2,338$ kPa
- Densidad del aire: $0,0012013$ g/cm³

Cálculo de la masa:

- $m=100,10524$ g

Como vemos, el error de no tener en cuenta el empuje de Arquímedes es, en este caso, del 0,11%, lo cual no es nada desdeñable.

7.8 Estudio estadístico

De modo semejante a como hemos visto hasta el momento, podemos evaluar las incertidumbres relacionadas, con el cálculo de la densidad del aire. Para alcanzar dicho propósito, podemos reescribir la ecuación de la densidad del aire, de manera más sencilla:

$$\rho_a = \frac{A.p - B.U.e^{CT}}{273,15 + T} \quad (7.8.1)$$

De donde se deduce:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = \frac{A}{273,15 + T} \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial U} = \frac{-B.e^{CT}}{273,15 + T} \quad (7.8.2)$$

y:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial T} = -\frac{(273,15 + T).B.C.U.e^{CT} + A.p - B.U.e^{CT}}{(273,15 + T)^2} \quad (7.8.3)$$

Conociendo estas tres derivadas parciales, queda perfectamente explicitada la ecuación siguiente:

$$u(\rho_a) = \rho_a \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_a}{\partial p}\right)^2 u^2(p) + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial T}\right)^2 u^2(T) + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial U}\right)^2 u^2(U)} \quad (7.8.4)$$

La necesidad que se desprende de lo anterior, es la de establecer un método de calibración adecuado de la balanza. Para ello recordemos que la lectura de una balanza electrónica es proporcional a la fuerza ejercida por el objeto sobre ella. Habiendo visto lo anterior podemos escribir:

$$I = k.m.(1 - \frac{\rho(\text{aire})}{\rho}).g \quad (7.8.5)$$

En donde I , es la indicación de la balanza y k un factor de ajuste que se determina electrónicamente.

Ya hemos visto también que la masa convencional m_c de un objeto de densidad ρ_c viene dada por la expresión:

$$m_c = m \cdot \frac{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{pesas}})}{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{cuerpo}}} \quad (7.8.6)$$

En donde la densidad del aire es cercana a $1,2 \text{ kg/m}^3$ y la densidad de las pesas de acero, normalmente se construyen equivalente a 8000 kg/m^3 .

Supongamos que realizamos el ajuste con una pesa interna, que posee una densidad distinta de la convencional (8000 Kg/m^3), y con una densidad del aire también diferente de la estándar ($1,2 \text{ kg/m}^3$). La ecuación (7.8.7) queda transformada en la siguiente expresión:

$$I_s = k_s \cdot m_{cs} \cdot \frac{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{pesas}})}{1 - (\rho(\text{aire})/\rho_{\text{cuerpo}}} \cdot (1 - \frac{\rho_{as}}{\rho_s}) \cdot g = m_{cs} + \Delta m_{cs} \quad (7.8.7)$$

siendo:

- m_{cs} la verdadera masa convencional
- ρ_{as} la densidad del aire al efectuar el ajuste.

Con esta ecuación, lo que se pretende determinar, es la variación de masa que supone no realizar el calibrado, con una pesa del aparato, con la misma densidad que la densidad estándar, y una densidad del aire distinta, también, del valor estándar.

De allí que se pueda deducir trivialmente:

$$K_S = \left(\frac{1}{g}\right) \cdot \frac{1}{1 - (\rho_{as}/\rho_s)} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho(\text{aire})}{\rho_s}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{\rho(\text{aire})}{\rho_c}\right)\right]} \cdot \left(1 + \frac{\Delta m_{cs}}{m_{cs}}\right) \quad (7.8.8)$$

Se comprueba, por tanto, que una vez definido el peso que se ha de utilizar para el ajuste, la fluctuación de K_s solo depende de ρ_{as} . Dado que en general la variación de la densidad del aire se suele dar en unos rangos comprendidos entre el 6% al 15 %, la variación relativa es del orden de 10^{-5} hasta $2 \cdot 10^{-5}$. Por este motivo, la corrección del empuje del aire solo afecta a balanzas con una precisión relativa superior a los valores anteriormente señalados.

Con la finalidad, de definir un mejor modelo, se añade en la ecuación (7.8.5) un término aditivo que dé cuenta de la linealidad de la balanza. Por otra parte, también se tendrá en cuenta la sensibilidad del instrumento de pesada, que vendrá dada por:

$$S_s = \frac{I_s}{k_s m_s \left[1 - \left(\frac{\rho_{as}}{\rho_s} \right) \right]} \cdot g \quad (7.8.9)$$

Sin embargo, para poder tener en cuenta, el desplazamiento que se deriva de la inestabilidad del sistema de medida, se añade un factor adicional, a la ecuación (7.8.5). Existen dos contribuciones a la señalada inestabilidad:

- La que atañe al desplazamiento de la sensibilidad, con el paso del tiempo.
- La otra, se debe a la variación provocada por los cambios de temperatura. Es decir, existe una dependencia de la sensibilidad, con la variación de la temperatura.

$$\Delta S_T = K_T \Delta T \quad (7.8.10)$$

Existen balanzas que se ajustan a sí mismas, una vez que la temperatura se sitúa fuera de un rango determinado.

Otro efecto a tener en cuenta, es la reproducibilidad del ajuste. Esta contribución puede en condiciones generales ser despreciada.

Así pues, teniéndose en cuenta las ecuaciones anteriores y tomando en consideración los factores mencionados, la indicación de una balanza quedará como sigue:

$$I = m_c \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right) \right]}{\left[1 - \left(\frac{\rho_{as}}{\rho_s} \right) \right]} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho_a}{\rho} \right) \right]}{\left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \right]} \cdot \left(1 + \frac{\Delta m_{cs}}{m_{cs}} \right) \cdot (1 + \Delta S) + E_{Lin}(I) \quad (7.8.11)$$

Es de notar que aun si la balanza operara perfectamente, y se pudiese despreciar el término correctivo que hemos introducido, con $E(I)=0$, la balanza indicaría la masa convencional m_c solo en el caso especial en el que:

$$\rho_a = \frac{[\rho(\rho_0 - \rho_{as}) + \rho_0(\rho_{as} - \rho_a)]}{\rho_0 - \rho_a} \quad (7.8.12)$$

Los casos más evidentes son aquellos en que:

- $\rho_a = \rho_{as}$ y el cuerpo tiene una densidad
- La densidad del aire es igual a ρ_0

En todos los demás casos, es necesario corregir el dato obtenido por la balanza, dado el efecto del empuje de Arquímedes del aire.

La ecuación (7.8.11) que acabamos de obtener da cuenta de cuál es el valor I indicado por la balanza, relacionándolo con la masa convencional m_c de un objeto que es pesado por la misma. Comprende, cómo se puede comprobar, el efecto del aire, así como otros efectos que se pueden determinar, teóricamente, por calibración. Sin embargo, resulta bastante problemático llegar a determinarlos y discriminar su efecto individualmente. Se pueden hacer las siguientes suposiciones, con tal finalidad, teniéndose que verificar si son acertadas posteriormente:

La primera de ellas, consiste en combinar las contribuciones en una sola, denominado error de la medida $E(I)$. La ecuación (8.6.10) queda transformada entonces en:

$$I = m_c \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{\rho_{as}}{\rho_s}\right)\right]} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho_a}{\rho}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]} \cdot (1 + \Delta S) + E(I) \quad (7.8.13)$$

Por otro lado, como el cociente de densidades es mucho menor que uno, podemos usar la siguiente aproximación:

$$\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\rho_0}{\rho}$$

Despreciando términos de segundo orden, en la densidad, se tendrá:

$$I = m_c \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_a - \rho_0}{\rho}\right) + \left(\frac{\rho_{as} - \rho_0}{\rho_s}\right)\right] \cdot (1 + \Delta S) + E(I) \quad (7.8.14)$$

Que a su vez, se puede reescribir del modo siguiente:

$$I = m_c \cdot \left[1 - (\rho_a - \rho_0) \cdot \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right) - \left(\frac{\rho_{as} - \rho_0}{\rho_s}\right)\right] \cdot (1 + \Delta S) + E(I) \quad (7.8.15)$$

Esta ecuación recuerda, exceptuando los términos $E(I)$ y Δ_s , a la ecuación dada por la guía de EURAMET.

Aparecen dos términos que tienen respectivamente en cuenta, la contribución del empuje de Arquímedes del aire con una densidad del aire distinta de ρ_0 , y el efecto de que la densidad del aire varíe respecto de la que tenía en el momento del ajuste.

8 CALIBRADO

En el Capítulo anterior hemos analizado algunas de las correcciones y precauciones y cuidados que han de tenerse en cuenta durante el proceso de medida de la masa. Veamos, ahora, las consideraciones pertinentes acerca del calibrado.

La calibración consiste en el hecho de colocar sobre la balanza pesos de masa estándar conocida, con la finalidad de obtener un resultado de pesada de trazabilidad adecuada. La calibración depende del lugar en donde se efectúe, dado que la aceleración de la gravedad se ve alterada, ya sea por la latitud, o altitud, en la que se halle el instrumento a calibrar, o incluso, por la orografía del entorno (la Tierra, evidentemente no es una esfera perfectamente homogénea y existen alteraciones locales de densidad, dieléctricas o magnéticas, etc.).

Por otro lado, acabamos de ver que, a la hora de calibrar el instrumento, las condiciones ambientales son unas determinadas, que pueden ser bastante distintas de las estándar. Finalmente, se ha de recordar que la balanza, al ser trasladada, puede sufrir alteraciones estructurales que modifiquen su correcto funcionamiento, por lo que el calibrado pierde la efectividad deseada.

Asimismo, la balanza tiene que contar con estabilidad térmica al ser calibrada, y debe de estar perfectamente nivelada, para evitar cualquier efecto de una posible excentricidad de la carga.

Ya hemos dicho que, en la actualidad, se utilizan pesas patrón previamente calibradas, en términos de su masa convencional, lo cual permite que los cálculos sean bastante más sencillos. En teoría si el calibrado responde a los criterios de calidad necesarios, cuando la densidad del aire se corresponde con el valor de $1,2 \text{ kg/m}^3$, se debe de obtener la masa convencional de la masa patrón. En función de estas condiciones ambientales, recordemos que la balanza indicará:

$$I = m_c \frac{g}{g_s} \left[1 - (\rho_a - \rho_0) \cdot \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s} \right) - \left(\frac{\rho_{as} - \rho_0}{\rho_s} \right) \right] \quad (8.1)$$

8.1 Efecto de la temperatura

Cuando se calibra una balanza, hay que evitar que las pesas usadas para el calibrado tengan una temperatura muy diferente de la misma, como del aire del entorno, dado que se establecen fenómenos de convección que alteran el proceso de la pesada. Es por ello que se hace

necesario, asegurarse a que se alcance al equilibrio térmico, de manera previa. Dicho equilibrio se alcanza tanto más pronto, cuanto menor sea el tamaño de la pesa. Si la pesa está a una temperatura más elevada que la del aire del entorno, entonces se producirá un calentamiento del aire que rodea la pesa, originándose una corriente ascendente de aire que provocará una caída, en el valor registrado de la masa. Inversamente, si la pesa está más fría que el aire del entorno, se producirá una corriente de aire descendente, lo que conlleva un mayor valor de la masa registrada. Para evitar dichos efectos es pues imprescindible, establecer un protocolo en el que exista un tiempo de aclimatación, que deberá de ser mayor en el caso de las pesas más grandes.

8.2 Ensayo de excentricidad

Este ensayo requiere que una masa de prueba sea colocada en posiciones bien señaladas de la balanza (Estas posiciones se muestran en la Figura (8.2.1) que adjuntamos)

Quedan señalados el centro (1), las dos posiciones posteriores (3,4) como las dos anteriores (2,5)

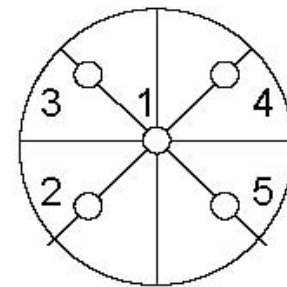


Figura (8.2.1)

La primera etapa del ensayo consiste en poner la indicación de la balanza a cero y de colocar el peso de prueba, en la posición 1 y las otras cuatro en un orden aleatorio, registrándose las indicaciones respectivas.

8.3 Repetibilidad

Se calcula una desviación estándar típica según la fórmula siguiente:

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_{ji} - \bar{I}_j)^2} \quad (9.3.1)$$

siendo:

$$\bar{I}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{ji}$$

Cuando se pesa una sustancia u objeto, se producen errores sistemáticos y aleatorios. El tipo de error sistemático más importante, es el que ya hemos visto, a saber, el efecto del aire. Los errores aleatorios más importantes son los correspondientes a la reproducibilidad, linealidad y resolución. En una balanza electrónica los siguientes procesos han de ser considerados:

- Se genera una fuerza eléctrica que se oponga a la fuerza del peso del objeto menos el empuje del aire.
- La lectura de la balanza es proporcional a la corriente.
- Durante la calibración de la balanza, generalmente automática, se usa un peso interno, y los circuitos internos se ajustan de tal manera que la lectura indica la masa convencional de dicho peso.

8.4 LINEARIDAD

En cuanto a la comprobación de linealidad, esta permite establecer la precisión del instrumento, para valores intermedios de la medida. La linealidad de una balanza debería expresarse por el fabricante, como la tolerancia a_L , que representa la desviación máxima de la balanza del valor que se obtendría por una interpolación lineal de los puntos de ajuste, es decir, el cero y los puntos de carga interna y externa. Se tiene que procurar siempre que la linealidad se mantenga en unos márgenes óptimos. Para conseguirlo se debe de seguir el protocolo siguiente:

- Se tara la balanza.
- Se coloca el peso de prueba sobre la balanza. Se anota dicho valor.
- Se retira el peso y se anota este valor como “cero”.
- Se repiten los dos procesos anteriores. Un mínimo de 10 medidas iteradas cuando se calibra un rango másico hasta 50 kg
- Se calcula la desviación estándar de la selección del “cero” así como la correspondiente al establecimiento de la escala.

Parte IV

9 ACTIVIDADES PEDAGÓGICAS PROPUESTAS

Las actividades propuestas se estructuran en cuatro o cinco sesiones, y pueden ir dirigidas a alumnos de 4º de la ESO, o de 2º de Bachillerato. Durante el desarrollo de las mismas, se contempla la realización de actividades más “clásicas”, tales como la resolución de problemas, o que los alumnos expongan en clase, sus trabajos de investigación, así como otras, menos habituales, que girarán alrededor de la obtención de datos experimentales en el laboratorio, teniendo en cuenta las consideraciones técnicas referidas anteriormente. Se pretende que el alumno conciba la actividad científica, como un proceso en el que toda hipótesis ha de ser contrastada, finalmente, con la experimentación. Por otro lado, dado que hemos considerado que las aulas constarán de 25 alumnos en promedio, se tendrá que prever la organización de varios grupos de alumnos, a la hora de realizar las prácticas. Como las actividades consisten en la determinación de densidades de una sustancia líquida, los diferentes grupos podrán comprobar qué grupos de alumnos atinan más a la hora de proporcionar un resultado cuantitativo. Se desprende de ello, que indirectamente se percatarán, aunque procurando, en todo momento, que ningún grupo sea etiquetado, por un posible mal desempeño, de la mayor o menor bondad del dato que entregarán al profesor. En el caso de los alumnos de 2º de Bachillerato, deberán de darlo además, con la incertidumbre asociada a la medida. La última sesión consistirá en la puesta en común de los datos. Esta será la ocasión en que, de acuerdo con el temario en vigor, se podrá presentar el trabajo del científico, como un proceso colectivo y cooperativo, e incidir, en el caso de los alumnos de 2º de Bachillerato, con el tema bastante árido, de la calibración de las balanzas.

9.1 4º ESO

9.1.1 Primera sesión

La **primera sesión** prevista, consiste en la **presentación teórica del concepto de masa, en el marco de la mecánica clásica**. Por supuesto, se revisarán rápidamente los conceptos de velocidad y aceleración, así como la segunda ley de Newton, teniendo presente que los alumnos no saben derivar funciones reales de variable real. No estarán, por tanto, en medida de entender explicaciones demasiado generales y rigurosas, pero estarán restringidas al caso de que sean consideradas fuerzas constantes. Por otra parte, tal como es exigible a ese nivel, no obviaremos la naturaleza vectorial de la segunda ley de Newton, pero insistiremos en el cálculo del módulo de la aceleración y la fuerza aplicada al móvil considerado, para deducir la masa del mismo e incidir sobre el hecho de que la masa es una magnitud escalar.

Habiendo iniciado la **clase magistral** con estas cuestiones introductorias, se pasa a presentar el **experimento ideal**, descrito en las primeras páginas del trabajo, en el que se consideraba un móvil de masa m desconocida, sometido a una fuerza F colineal con la superficie que lo soporta, en ausencia de toda fricción. Se les planteará la posibilidad teórica de medir masas de ese modo, esperando que haya individuos en la audiencia, que de manera espontánea manifiesten, que se trata de un modo operativo poco adaptado a las necesidades de un laboratorio usual.

Posteriormente, se les preguntará si creen que el móvil puede adquirir indefinidamente, cada vez mayor velocidad. Sabemos que la respuesta es negativa, y usaremos ese hecho para hablar de la relatividad restringida cualitativamente, dejando claro que existe una velocidad límite, lo que supone que la masa es algo más complicado que lo que se desprende de la segunda ley de Newton

Se hablará también de la ley de atracción universal, distinguiendo masa inercial y masa gravitatoria, para enunciar brevemente el principio de equivalencia.

Los últimos minutos de la sesión se dedicarán a presentar las actividades posteriores que se llevarán a cabo. Se requerirá a los alumnos la realización de un trabajo de investigación y de búsqueda bibliográfica, para exponerlo en el aula delante de los compañeros de la clase. El

tema acerca del cual deberán recabar información, será el del sistema internacional de unidades. En esta ocasión los alumnos se repartirán en unos cinco grupos. Existen tres posibilidades, a este respecto: Que se constituyan de modo aleatorio, que sea el profesor el que los organice, o que de modo espontáneo los alumnos se asocien en función de sus filias. Probablemente, la praxis docente sugiere que suele ser esta modalidad la que presenta mayores ventajas. Se ha prever, sin embargo, la posibilidad de que existan enemistades patentes que dificulten la constitución de los grupos, eventualidad ante la cual el profesor puede intervenir, del modo más conveniente.

Los alumnos deberán de presentar las diferentes magnitudes fundamentales, y las unidades correspondientes:

- **Masa** por supuesto
- **Tiempo**
- **Distancia**
- Temperatura
- Cantidad de materia

Las tres magnitudes señaladas en negrita, son indispensables para poder entender la nueva definición del kilogramo, del sistema internacional de unidades. Por lo tanto, obligatoriamente, deberán de ser abordados por alguno de los grupos de alumnos. Las otras dos, que probablemente son las más intuitivas para alumnos de esta edad, son sustituibles por otras que sean del gusto de alumnos. El reparto de los temas se hará aleatoriamente.

9.1.2 Segunda sesión:

La **segunda sesión** consistirá en la **exposición del tema asignado a cada grupo**. La exposición, tal como será detallado más adelante, será evaluada por el profesor. La posibilidad de que los alumnos también evalúen a sus compañeros, a través de una rúbrica prevista al efecto, se desecha porque existe evidencia de que los alumnos, a la hora de evaluar a sus semejantes, muestran generalmente un sesgo característico, de infravalorar el trabajo ajeno, al margen de que como opinión personal, esa elección puede suponer tensar antipatías previas. Dadas las características del aula, se prevé la intervención de cinco grupos, con lo que, en promedio, cada uno dispondrá de un poco menos de diez minutos para exponer el tema correspondiente.

El alumno encargado de realizar la exposición será **designado al azar** entre los integrantes del grupo, con ello se pretende que no sea el integrante más brillante, o con mayor compromiso académico, el encargado de presentarlo. La mayor preocupación es que los alumnos asuman que se trata de una tarea colectiva, de la que nadie se puede desistir. Por otro lado, dado que la nota que obtendrá el grupo en su conjunto, será **su responsabilidad**, se persigue que los integrantes del grupo, cuando preparen su intervención, alcancen cierto “feed-back”. Es decir, de existir individuos con ciertas dificultades, los demás integrantes del grupo deberán corresponsabilizarse de las mismas, ante la eventualidad de que sea uno de ellos, el encargado de realizar la exposición.

Finalmente, se pedirá a los estudiantes que tomen notas de las diferentes exposiciones, en previsión de la siguiente actividad, que consistirá en la puesta en común de las exposiciones, en formato de debate. También, se les dirá que tendrán que presentar un trabajo escrito individual, en donde deberán incluir un informe detallado del tema de su grupo, así como un resumen de las demás exposiciones y de las cuestiones que hayan salido en el transcurso del debate.

Evaluación

La exposición oral se evaluará en base a los siguientes criterios:

- **A/Contenidos:** Se tendrá que comprobar si los alumnos se ajustan a las demandas del profesor en cuanto a los temas abordados.
- **B/Veracidad de la información.**
- C/Corrección del lenguaje utilizado, desde un punto de vista semántico y gramatical.
- D/Correcta utilización de la terminología científica.
- E/Soltura a la hora de transmitir información: el alumno no repite de memoria un guión, sino que conoce lo que dice, ni tampoco se limita a leer unos apuntes.
- F/El alumno refiere las fuentes bibliográficas a las que ha acudido.
- G/Se ajusta a los requisitos temporales de la actividad.

Cada epígrafe anterior será evaluado individualmente de 1 a 5. Los dos primeros puntuarán el doble, por lo que la nota final se expresa del modo siguiente:

$$N_{final} = 2 \cdot \left(\frac{2.N_A + 2.N_B + N_C + N_D + N_E + N_F + N_G}{9} \right)$$

9.1.3 Tercera sesión

Se trata de una **sesión de puesta en común de las exposiciones de la actividad anterior**. Se busca la participación del alumnado. Se preguntará por las dudas, las opiniones de los estudiantes, acerca del trabajo de los demás grupos. El profesor aprovechará la ocasión para subsanar cualquier error de concepto o error que hubiese surgido durante las exposiciones, dando la posibilidad a los alumnos de que lo manifiesten ellos mismos. En el caso afortunado de que así fuera, el alumno será premiado con un punto adicional en el trabajo escrito y la nota de los integrantes de su grupo, se verá incrementada en medio punto. Evidentemente para poder premiar la intervención del alumno, ha de ser fundada a nivel científico y de tener suficiente entidad.

Se detallarán los criterios de evaluación del trabajo escrito que deben de presentar. Deberá de constar de varias partes bien diferenciadas:

- Una parte recopilatoria del trabajo de investigación que llevó a cabo en su grupo. Deberá ceñirse a los contenidos específicos del mismo, sin entrar a valorar cual fue el reparto de tareas que acordaron los alumnos entre ellos. Se trata de fomentar una actitud de madurez por su parte y de que surja en ellos, el sentido de la corresponsabilidad.
- Un resumen de los contenidos que presentaron los demás grupos, con las puntualizaciones y matices que haya aportado el profesor en la sesión de puesta en común.
- Un resumen de las cuestiones que hayan surgido en el transcurso del debate, en el cual podrá aportar una opinión personal del mismo. Siempre le será exigido al alumno que toda opinión, aun siendo posiblemente subjetiva, sea respaldada por razones objetivas y de ese modo adquiera soltura argumentando. Se trata de fomentar las competencias transversales contempladas en la legislación vigente.

Evaluación del trabajo escrito

Los puntos a los que se prestará particular atención, a la hora de evaluar el trabajo escrito serán:

- La Corrección gramatical del mismo, su variedad léxica, la adecuación del registro lingüístico al tipo de texto del que se trata.
- La ausencia de faltas ortográficas.

- Claridad expositiva, rigor en la presentación de los argumentos de índole científica.
- Originalidad del trabajo
- Estructuración conveniente que cuente con una introducción y una conclusión, así como partes perfectamente diferenciadas.
- Ausencia de errores de concepto

9.1.4 Cuarta sesión

En esta sesión se **introducirán**, bajo el formato de una clase magistral al uso, **los conceptos específicos que serán de utilidad en la sesión de laboratorio**.

Los ejes pedagógicos de la clase serán los siguientes elementos:

- Se les pedirá, en primer lugar, que recuerden la expresión del trabajo necesario para levantar un objeto a una altura h .

$$W = m \cdot g \cdot h \quad (9.1.4.1)$$

- En un segundo momento, se les pedirá que obtengan la expresión de ese mismo trabajo, pero recordando de que se efectúa en presencia de la atmósfera terrestre (aire). Deberán de repetir los cálculos, asociando con el movimiento ascendente del sólido, uno descendente de un volumen equivalente de aire en las condiciones ambientales dadas. La expresión el trabajo será pues:

$$W = m_s \cdot g \cdot h - m_a \cdot g \cdot h = (m_s - m_a) \cdot g \cdot h \quad (9.1.4.2)$$

$$m_{\text{aparente}} = (m_s - m_a) \quad (9.1.4.3)$$

- El peso de la masa de aire, en el campo gravitatorio, es evidentemente, el empuje de Arquímedes del aire, sobre el sólido considerado, al principio de la sección.

$$\vec{E}_c = -m_a \cdot \vec{g} \quad (9.1.4.4)$$

Una vez que se les haya presentado los resultados anteriores, se les planteará que obtengan, a través de un ejercicio, las ecuaciones que utilizarán en el laboratorio.

Supondremos que tenemos un objeto de una densidad de 800 kg/m^3 (alcohol etílico o benceno, por ejemplo), y que la densidad del aire es de $1,2 \text{ kg/m}^3$.

Se les pide lo siguiente:

- Deducir que:

$$m_{\text{aparente}} = m_s \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right) \quad (9.1.4.5)$$

Tendrán que suponer que el **volumen del aire desplazado es igual al volumen del líquido problema** (Principio de Arquímedes). Con lo cual, se cumple que:

$$V_a = V_s = \frac{m_a}{\rho_a} = \frac{m_c}{\rho_c} \quad (9.1.4.6)$$

De donde,

$$m_a = m_s \frac{\rho_a}{\rho_c} \quad m_{aparente} = m_s - m_s \frac{\rho_a}{\rho_c} = m_s \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right) \quad (9.1.4.7)$$

- En un segundo momento, se les pedirá que deduzcan el trabajo necesario para levantar, en el aire, una masa de 50 kg hasta una altura de 1 metro. También se les pedirá que comparen el resultado anterior con el que se obtendría en el vacío.

En el vacío el trabajo será:

$$W = m_s \cdot g \cdot h = (50 \times 9,8 \times 1) \text{ J} = 490 \text{ J} \quad (9.1.4.8)$$

En el aire se obtendría, según la fórmula del apartado anterior:

$$W_{aire} = m_s \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right) gh = 50 \times \left(1 - \frac{1,12}{800}\right) \times 9,8 \times 1 = 489,31 \text{ J} \quad (9.1.4.9)$$

De forma que:

$$\frac{W_{aire}}{W} = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_c} = 0,998588 \quad (9.1.4.10)$$

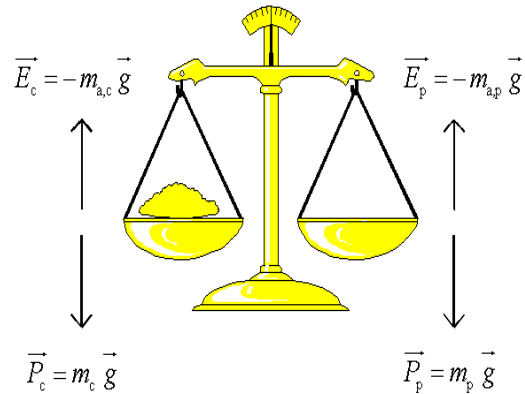
Es decir:

$$\Delta W = W_{aire} - W = m_s \frac{\rho_a}{\rho_s} gh = 0,7 \text{ J} \quad \frac{\Delta W}{W} = \frac{\rho_a}{\rho_s} = 0,0014 \quad (9.1.4.11)$$

- Por último se les pedirá que deduzcan la masa real de un objeto de la densidad señalada (800 kg/m^3), si se determina con una balanza de dos brazos, utilizando pesas de cobre (8800 kg/m^3) para alcanzar el equilibrio. Por supuesto, la pesada se efectúa en presencia de aire. Ilustramos la situación con la figura siguiente:

En el equilibrio:

$$\begin{aligned}\vec{P}_c + \vec{E}_c &= \vec{P}_p + \vec{E}_p \\ m_c \vec{g} - m_{ac} \vec{g} &= m_p \vec{g} - m_{ap} \vec{g}\end{aligned}$$



Aplicando la fórmula (10.1.4.7), se deduce:

$$m_c \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right) = m_p \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right) \quad (9.1.4.12)$$

Y de aquí deducimos:

$$m_c = m_p \cdot \frac{\left[1 - (\rho_a / \rho_p)\right]}{\left[1 - (\rho_a / \rho_c)\right]} \quad (9.1.4.13)$$

Numéricamente si suponemos que la pesa de cobre tiene una masa real de 800 g, su masa aparente será:

$$m'_p = 799,90g$$

Consecuentemente la masa desconocida del objeto será:

$$m_c = 800 \times 1,001286 = 801,03g$$

Este tipo de cálculos son a los que los alumnos se verán confrontados en el laboratorio.

9.1.5 Quinta sesión

La quinta y última sesión prevista consiste en la **medida de la densidad de una mezcla líquida**. Concretamente, se les invitará a determinar la densidad del alcohol etílico puro.

En **primer lugar** se les familiarizará con los instrumentos básicos para llevar a cabo dicha operación. En particular, se les hablará del **picnómetro** y de las características del mismo. Entre ellas, se destacará que debe de ser un instrumento que sufra una *dilatación muy moderada* conforme se incrementa la temperatura.



Picnómetro según Gay-Lussac (10 ml).
Referencia 2713000. Marca MARIENFELD

Tendrán por tanto que operar de la manera siguiente:

- a) Deberán determinar el **volumen de los picnómetros**.

Para ello se utiliza un líquido de densidad perfectamente conocida y tabulada en función de la temperatura: el agua destilada.

Deberán de determinar la temperatura del agua con la que llenan el picnómetro en el equilibrio, para poder conocer su densidad.

A continuación, operarán del modo siguiente:

- Pesarán el picnómetro vacío
- Pesarán el picnómetro lleno de agua destilada
- Deducirán de los dos valores anteriores el peso del agua que contiene el picnómetro.
- Dividirán ese dato entre la densidad del agua, a la temperatura considerada.

Con todo ello podrán calcular el volumen del picnómetro, de modo exacto, sin haber introducido la corrección del empuje de Arquímedes.

- b) Deberán determinar la **densidad de un líquido problema**.

Posteriormente llenarán el picnómetro con el alcohol etílico puro, repitiendo la operación:

- Determinarán la masa de alcohol contenida en el picnómetro
- Dividirán el dato anterior por el volumen del picnómetro calculado en el apartado anterior.
- Deducirán el valor de la densidad del alcohol etílico

Así se procederá cuando se trabaja sin la corrección del empuje de Arquímedes debido al aire.

Repetirán la operación teniendo en cuenta dicha corrección, utilizando para ello la fórmula de Jones (1978) para hallar la densidad del aire húmedo:

$$\rho(\text{aire}) = \frac{3,4848(p - 0,0037960.U.es)}{T + 273,15} \cdot 10^{-3}$$

Determinarán consecuentemente:

- La temperatura ambiente del laboratorio
- La presión reinante en el laboratorio.
- La humedad relativa.

Para ello emplearán un termómetro, un higrómetro Fischer Haar (≈ 45 €) y un barómetro.

Higrómetro Fischer Haar



Para evaluar la densidad del aire utilizarán la fórmula de Jones (1978), antes mencionada, empleando para ello las unidades adecuadas:

- p presión del aire (kPa)
- U humedad relativa (%)
- T temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
- es Se calcula como: $e_s = 1,7526 \times 10^8 \times e^{\frac{5315,56}{T+273,15}}$

Los alumnos tendrán que aplicar esta fórmula para obtener la densidad del aire. Posteriormente, conocida esta, para calcular la corrección del empuje de Arquímedes y deducir el nuevo valor de la densidad del alcohol etílico, así hallado. Obviamente, si proceden del mismo modo cuando calibren el picnómetro con agua destilada obtendrán otro valor del volumen del picnómetro.

Se trata de un proceso iterativo:

- Calculan la densidad del alcohol sin la corrección del empuje de Arquímedes.
- A partir de ese valor, aplican la fórmula deducida en la sesión anterior:

$$m_{\text{real}} = m_{\text{medida}} \cdot \frac{\left[1 - (\rho_{\text{aire}} / \rho_{\text{pesas}})\right]}{\left[1 - (\rho_{\text{aire}} / \rho_{\text{alcohol}})\right]}$$

Obteniendo este nuevo dato, obtienen un nuevo valor de la densidad del alcohol. Volviendo a utilizar la expresión anterior, se obtiene un nuevo valor de la densidad, y así sucesivamente. Iterando dos, o tres veces más, el valor de la densidad converge rápidamente.

Finalmente, compararán el valor obtenido sin la corrección, con aquel en el que se ha tenido en cuenta esta última, pudiéndose comprobar cómo este valor es más preciso.

Evaluación

A la hora de evaluar el desempeño de los alumnos en el laboratorio nos fijaremos en particular en:

- El respeto de las normas de seguridad básicas
- El correcto empleo del material de laboratorio
- Su comportamiento en el laboratorio

Por otro lado, dado que la práctica consiste en encontrar un dato experimental, la evaluación también tendrá en cuenta la bondad de dicho valor, perfectamente tabulado, en función de la temperatura. Se concederá la nota máxima, cuando consigan hallar las dos primeras cifras decimales de la densidad, expresada esta en g/cm^3

Por fin se les pedirá que redacten un informe de la práctica que también será evaluado. Se tendrán en cuenta:

- La claridad
- La riqueza léxica y corrección gramaticales
- La ausencia de faltas ortográficas
- La calidad científica del informe, en particular, se insistirá en comprobar que todos los datos presentados vienen asociados con las unidades correspondientes.

Se asignará una nota de uno a diez:

- Al trabajo escrito.
- Al desempeño en el laboratorio.
- Al dato experimental de la densidad del alcohol etílico, presentado el día mismo de la sesión en el laboratorio.

La nota final se calculará en base a lo siguiente:

$$N_{final} = \frac{2 \times N_{dato} + N_{Trabajo} + N_{laboratorio}}{4}$$

Con estas prácticas se pretende poner de relieve los siguientes aspectos:

- Familiarizar a los alumnos con los instrumentos de medida de presión, temperatura y humedad relativas del aire.
- Acostumbrarlos a utilizar fórmulas empíricas, y por ende a manejarse adecuadamente con las unidades que estas imponen.
- Que conciban el trabajo experimental como algo que requiere esfuerzo y que dista mucho de ser la parte menos importante de la asignatura.
- Que comprueben como el valor de la densidad, hallado en el laboratorio, se corresponde muy bien con el que aparece en la bibliografía especializada.
- Que comprueben que se consiguen resultados sorprendentemente precisos, con argumentos matemáticos muy sencillos.

9.2 2ºBACHILLERATO:

Lo visto en relación a las actividades pedagógicas previstas para alumnos de 4º ESO, se puede transponer para ser impartido a alumnos de 2º de Bachillerato, que cursen la asignatura de Física. Ya se ha dicho, que en consonancia con el temario en vigor, se ha de presentar, con cierto rigor, en qué consiste el trabajo del científico. Se tiene en consecuencia que destinar cierto tiempo a relativizar el concepto de masa.

9.2.1 Primera sesión

Se trata de una **clase magistral** en donde se incidirá en los siguientes aspectos:

- Recordar las leyes de Newton y el concepto de masa clásica.
- Recordar la conservación del momento lineal clásico.
- Demostrar, en forma de ejercicio, que lo anterior supone la conservación de la masa.
- Recordar las transformaciones de Lorentz.
- Obtención de la ley de composición de velocidades.
- Encontrar la forma del momento lineal relativista.
- Obtención de la expresión de la fuerza, en mecánica relativista.

$$\vec{F} = m \cdot \gamma(v) \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{v} \cdot \frac{d\gamma(v)}{dt} \quad (9.2.1.1)$$

- Dejar claro entonces, la inoperancia del concepto de masa clásica, a altas velocidades.

Como se puede comprobar, los temas abordados son de cierta complejidad conceptual, por lo que, si se percibe que una parte importante de la clase no los asimila adecuadamente, se deberá tomar la decisión de dedicarles otra sesión más. Sea como fuere, al cabo de esta primera parte, se darán las indicaciones para la actividad siguiente. Se organizará la clase en varios grupos de alumnos, para realizar un trabajo de investigación bibliográfica. Los mismos comentarios que se han hecho, para los alumnos de 4º de la ESO, se aplican a este caso. A priori, se dejará que sean los mismos alumnos que formen los grupos, salvo en el caso de que una antipatía notoria, imponga la intervención del profesor.

En este caso, también se les pedirá que **el trabajo de investigación verse acerca del Sistema Internacional de Unidades (SI)**. Dado que inicialmente varias unidades de magnitudes físicas, tales como el metro o el kilogramo, se definían a partir de artefactos, y que desde la

última reforma, esto ya es historia, se les pedirá que investiguen qué procesos se utilizan para obtener las constantes físicas a partir de las cuales se definen estas. Se dejará el tema bastante abierto, dado que acotarlo demasiado podría suponer una dificultad añadida.

9.2.2 Segunda y Tercera

De nuevo, **el trabajo de investigación de los alumnos será expuesto por uno de los integrantes del grupo, que será designado al azar.** Dado que en segundo de bachiller es esperable que los alumnos se explayen con mayor profusión, al margen de que los temas son de mayor complejidad técnica, las exposiciones se llevarán a cabo en dos sesiones de 50 minutos, cada una. Es decir, se otorgará a cada grupo, en vez de unos diez minutos, unos quince o veinte en promedio. Las restricciones temporales serán en esta ocasión menores, pues a la hora de evaluar los grupos, no se tendrá tanto en consideración este factor, como la concreción científica de los argumentos que se expongan. Se estima que en edades en torno a los 17–18 años han de poder organizar su trabajo con mayor libertad, y se valorará positivamente la originalidad, si esta redundará en una mayor calidad de la exposición.

Los principales aspectos que se entrará a valorar serán:

- A/Claridad de la exposición
- B/Lenguaje científico-técnico adecuado
- C/Originalidad
- D/Dominio del tema
- E/Actitud corporal natural
- F/Ausencia de errores de concepto

Los cinco primeros puntos se evaluarán numéricamente de 1 a 5. La nota se calculará mediante la siguiente fórmula:

$$N_{final} = 2 \times \frac{2 \times N_A + 3 \times N_B + N_C + 2 \times N_D + N_E}{9}$$

Evidentemente el apartado **D**, se evaluará también, mediante preguntas que formulará el profesor al término de la exposición.

La nota anterior será minorada, en función de la gravedad, si hubiera algún error de concepto. Durante las dos sesiones, los alumnos tendrán que tomar notas de las exposiciones de sus compañeros, ya que se les pedirá que presenten un informe individual al respecto.

9.2.3 Cuarta sesión

Se trata de la **puesta en común de todas las exposiciones anteriores bajo la forma de un debate**. Tal como en el caso de los alumnos de 4º de la ESO, es la ocasión de que los alumnos manifiesten si creen que hubo errores de concepto, en los demás grupos, o incluso de que rectifiquen los suyos propios. Si fuere así, y algún alumno lo refiriera, sería premiado tanto en la nota de la exposición, como del trabajo escrito, con medio punto por error detectado. También esta sesión es la ocasión de que el profesor aclare todo aquello que no hubiese sido expuesto convenientemente, o de sacar a colación algún aspecto que hubiese quedado en el olvido.

Al final de la sesión se les especificarán las características del **trabajo escrito individual que se espera de ellos**. Dicho trabajo deberá constar de **tres partes**:

- Una en la que se haga un resumen de la parte del trabajo de investigación, llevado a cabo en grupo.
- Otra, en la que se hará un resumen de las exposiciones de los demás grupos.
- Finalmente, también se podrán incluir, las percepciones personales así como todos los temas que hayan salido en la sesión de puesta en común.

La evaluación de dicho trabajo tendrá en cuenta los siguientes aspectos:

- La Corrección gramatical, la ausencia de faltas de ortografía, así como la calidad lingüística del trabajo en su conjunto.
- La adecuación del lenguaje científico-técnico.
- Una Argumentación sólida.
- Que el trabajo esté bien estructurado

Los puntos anteriores serán evaluados de 1 a 10 y se calculará la nota correspondiente al trabajo, promediando las notas de los apartados anteriores.

9.2.4 Quinta sesión

Esta sesión versará esencialmente acerca del **tratamiento estadístico de los datos experimentales**. Se enseñará a los alumnos, que cuando en física se realiza una medida de una magnitud A , nunca se obtiene el valor real a_r , sino que se obtiene un valor medido, a . Toda medida está limitada por el error que la misma conlleva y, desde luego, la tarea del docente consiste en resaltar que ese error se ha de conocer, o por lo menos se ha de poder estimar. Se plantea abordar los siguientes aspectos:

- Los errores sistemáticos.
- Los errores aleatorios o fortuitos.
- Las incertidumbres.
- La ley de distribución normal
- Los tipos de incertidumbre, en particular aquellos ligados al posicionamiento, a un intervalo o a la lectura (el ejemplo perfecto es la lectura de la temperatura en un termómetro de mercurio)
- La propagación de las incertidumbres

En cuanto al último apartado aludido, se dará, sin incidir en exceso en el proceso por el que se obtiene, la ecuación que da cuenta de ese fenómeno. Concretamente supongamos que una magnitud física viene dada por la expresión matemática siguiente:

$$x = f(y, z) \quad (9.2.4.1)$$

Se les demostrará con argumentos sencillos que la incertidumbre ligada a la medida de la magnitud x es:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta y^2 \left[\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} \right]^2 + \Delta z^2 \left[\frac{\partial f(y, z)}{\partial z} \right]^2} \quad (9.2.4.2)$$

Evidentemente, la fórmula es extensible al caso en el que la variable x sea función de más de dos variables.

Lo que acabamos de exponer tiene un inconveniente principal a la hora de impartirse, y es que **los alumnos**, a pesar de que conocen la derivación, **no saben calcular derivadas parciales**. Lo anterior puede subsanarse en la medida de que solo se pretende dar una “**receta**” para calcularlas: la de considerar todas las otras variables como constantes, cuando se deriva una en particular.

Se obtendrán, entonces, cuatro casos que, por su sencillez, merecen ser mencionados:

- Si $X = Y + Z$, entonces $\Delta x = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}$ (9.2.4.3)

- Si $X = aY + b$, entonces $\Delta x = a\Delta y$ (9.2.4.4)

- Si $X = Y \cdot Z$, entonces $\Delta x = x \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z} \right)^2}$ (9.2.4.5)

- Si $X = \frac{Y}{Z}$, entonces $\frac{\Delta x}{x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z} \right)^2}$ (9.2.4.6)

La sesión finalizará realizando algunos unos ejercicios de aplicación.

9.2.5 Sexta y Séptima sesión

Se trata de dos **sesiones de laboratorio en la que deberán determinar la densidad del alcohol etílico**, tal como hemos especificado en el caso de los estudiantes de 4º ESO, con la peculiaridad de que deberán indicar el error esperable de la medida. Deberán entregar asimismo un informe de la práctica.

También *se puede organizar una sesión alternativa* en la que se les proporcione una prueba directa del principio de Arquímedes, utilizando la densidad que del alcohol etílico que han calculado.

Se procederá del siguiente modo:

- Pesarán un objeto metálico, de densidad conocida, m_0 . También deberán determinar el peso de un vaso de precipitados vacío.
- Introducirán el objeto metálico en un recipiente lleno a rebosar de alcohol etílico, y al ser introducido, recogerán el líquido rebosante desplazado, en el vaso de precipitados previamente tarado. De allí deducirán el peso de alcohol recogido
- Pesarán, mediante un dispositivo adecuado, previsto al efecto, el peso del objeto metálico en alcohol etílico, midiendo m_0'
- Finalmente comprobarán de manera sencilla que:

$$\overrightarrow{F}_{\text{Arquímedes}} = (m_0 - m_0')\vec{g} = m_{\text{alcohol}}\vec{g} \quad (9.2.5.1)$$

Como conocen la densidad del alcohol etílico, podrán deducir el volumen del objeto metálico. En este caso no es necesario hacer las correcciones del empuje de Arquímedes, dado el protocolo experimental cualitativo empleado.

Evaluación

En este caso, la evaluación también tendrá en cuenta:

- A/ El desempeño general en el laboratorio: Respeto de las normas de seguridad básicas, así como limpieza y uso adecuado del material de laboratorio.
- B/ La bondad del valor numérico hallado de la densidad del alcohol etílico.
- C/ el informe escrito de las sesiones de laboratorio.

La **nota final** se computará de la siguiente manera:

$$N_{final} = \frac{N_A + N_B + N_C}{3}$$

Señalemos que, a este nivel, a diferencia de como se haría para alumnos de 4° ESO, dada la mayor pericia de los alumnos, se concederá la nota máxima al apartado B, cuando obtengan las tres primeras cifras decimales de la densidad del alcohol etílico, a la temperatura escogida.

En cuanto al trabajo escrito se atenderá a lo siguiente:

- A/Corrección gramatical, variedad léxica
- B/Solidez argumental
- C/Presentación, estructuración
- D/Validez de los argumentos científicos
- E/Tratamiento estadístico de los datos adecuado.

Cada apartado será evaluado de 1 a 10.

La nota del trabajo vendrá dada por:

$$N_{final} = \frac{N_A + N_B + N_C + 2 \times N_D + 2 \times N_E}{7}$$

Merece la pena que nos detengamos un poco en la cuestión del tratamiento estadístico de los datos, ya que, a priori, dicha cuestión excede las capacidades normales de un alumno de 2° de bachiller. La preocupación docente será la de adaptarlo a sus posibilidades. Tal como ya ha sido referido en la parte teórica del presente trabajo, la incertidumbre relacionada con la determinación de la densidad del aire viene dada por:

$$u(\rho_a) = \rho_a \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_a}{\partial p}\right)^2 u^2(p) + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial T}\right)^2 u^2(T) + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial U}\right)^2 u^2(U)} \quad (9.2.5.2)$$

En donde aparecen tres derivadas parciales cuyo cálculo, tal como ya se ha visto, dista de ser trivial para los alumnos a los que va dirigida esta actividad. Por ello, dadas las características de la ecuación de Jones, este cálculo será realizado por el profesor y el resultado proporcionado a los alumnos, dejando claro que se obtiene aplicando el método general expuesto en la sesión teórica, destinada a las cuestiones estadísticas.

Una vez hecha esta salvedad, recordemos la fórmula que nos proporciona la masa real en función de la masa medida por la balanza:

$$m_c = m_p \cdot \frac{[1 - (\rho_a / \rho_p)]}{[1 - (\rho_a / \rho_c)]} \quad (9.2.5.3)$$

Aparecen cuatro variables con sus incertidumbres asociadas, sin embargo, para que la obtención de la incertidumbre de m_c no acabe siendo farragosa, se precisará a los alumnos, que consideren constantes todas las variables, a excepción de m_p y la densidad del aire.

En estas condiciones solo deberán de calcular dos derivadas parciales, a saber:

$$\frac{\partial m_c}{\partial m_p}, \frac{\partial m_c}{\partial \rho_a} \quad (9.2.5.4)$$

Dada la expresión de m_c , lo anterior está perfectamente a su alcance.

Así pues, a la hora de evaluar el tratamiento estadístico de los datos, se prestará atención a cómo deducen la fórmula de de la incertidumbre de la masa real, con las salvedades que hemos señalado.

10 CONCLUSIONES

Tal como ha podido comprobarse en este trabajo, la operación de medida de la masa de un sistema químico o físico sencillo, dista mucho de ser una operación mecánica trivial. Se ha pretendido que los alumnos se percaten de ello, para que también sean partícipes, a su nivel, de lo que supone el trabajo de investigación. Por otro lado, se ha procurado, fomentar el rigor al realizar una práctica de laboratorio, incidiendo de manera singular, en el caso de los alumnos de 2º de Bachillerato, en la necesidad de presentar los datos experimentales obtenidos, con sus incertidumbres respectivas.

También, y a grandes rasgos, se ha pretendido mostrar que el método científico necesita, definiciones claras y precisas, pero que sean operativas, un sistema de unidades coherente, empleado por toda la comunidad científica, e instrumentos de medida adaptados a los objetivos experimentales.

Finalmente, a través de la determinación de la densidad del alcohol etílico, se quiere conseguir que los alumnos comprueben, que obtener buenos datos no requiere principios experimentales demasiado complicados, sino una buena ejecución del protocolo propuesto.

11 BIBLIOGRAFÍA

11.1.- NORMATIVA

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, **LOE**. Boletín Oficial del Estado (04/05/2006), Nº 106, 17158–17207. Disponible en:

<https://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, **LOMCE**. Boletín Oficial del Estado (10/12/2013), Nº 295, 12886–12950. Disponible en:

<https://www.boe.es/buscar/pdf/2013/BOE-A-2013-12886-consolidado.pdf>

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el **currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato**. Boletín Oficial del Estado (03/01/2015), Nº 3, 169–546. Disponible en:

<https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado (29/01/2015), Nº 25, 6986–7003. Disponible en:

<https://www.boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-738-consolidado.pdf>

ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el **currículo** y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la **educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León**. Boletín Oficial de Castilla y León (08/05/2015), Nº 86, 32051–32480. Disponible en:

<http://bocyl.jcyl.es/boletines/2015/05/08/pdf/BOCYL-D-08052015-4.pdf>

ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el **currículo** y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del **bachillerato en la Comunidad de Castilla y León**. Boletín Oficial de Castilla y León (08/05/2015), Nº 86, 32481–32984. Disponible en:

<http://bocyl.jcyl.es/boletines/2015/05/08/pdf/BOCYL-D-08052015-5.pdf>

Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida. Ministerio de Industria, Turismo y Comercio. Boletín Oficial del Estado (21/01/2010), Nº 28, 5607–5619. Disponible en:

<https://www.boe.es/buscar/pdf/2010/BOE-A-2010-927-consolidado.pdf>

Este **Real Decreto 2032/2009**, traspone la **directiva 80/181/CEE**, por la que **el Consejo de las Comunidades Europeas estableció el uso del sistema internacional de unidades como sistema legal de unidades**, y sus modificaciones posteriores, además de hacer suyos los acuerdos de la Conferencia General de Pesas y Medidas.

Ley 32/2014, de 22 de diciembre, de Metrología. Boletín Oficial del Estado (23/12/2014), Nº 309, 104386–104408. Disponible en:

<https://www.boe.es/boe/dias/2014/12/23/pdfs/BOE-A-2014-13359.pdf>

Real Decreto 244/2016, de 3 de junio, por el que se desarrolla la Ley 32/2014, de 22 de diciembre, de Metrología. Boletín Oficial del Estado (07/06/2016), Nº 137, 37689–37858.

Disponible en:

<https://www.boe.es/boe/dias/2016/06/07/pdfs/BOE-A-2016-5530.pdf>

<https://www.boe.es/buscar/pdf/2016/BOE-A-2016-5530-consolidado.pdf>

11.2.- ENLACES WEB

https://es.wikipedia.org/wiki/A%C3%B1o_Internacional_de_la_Tabla_Periodica_de_los_Elementos_Quimicos

https://es.wikipedia.org/wiki/Conservaci%C3%B3n_de_la_energ%C3%ADa

https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_conservaci%C3%B3n_de_la_materia

<https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>

<https://www.bipm.org/metrology/mass/units.html>

<https://www.bipm.org/en/publications/mises-en-pratique/>

<https://www.bipm.org/en/publications/>

<https://www.cem.es/>

<https://www.cem.es/content/el-sistema-internacional-de-unidades-si>

<http://www.educaplus.org/game/termometro-de-galileo>

https://www.fisicanet.com.ar/fisica/estatica_fluidos/lb03_densidad_picnometro.php

<https://www.iypt2019.org/>

<https://www.nist.gov/pml/periodic-table-elements>

11.3.- ARTÍCULOS Y LIBROS

BIPM (Bureau international des poids et mesures) (2019) «The International System of Units (SI). Le Système international d'unités (SI)» (SI Brochure) [9th Edition, 2019], Disponible en: <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9.pdf>

Caamaño Ros, Aureli (2011) “*Los trabajos prácticos en Física y Química: interpretar e investigar*”. **Didáctica de la Física y la Química**. Aureli Caamaño (coord.). Serie: Didáctica de las Ciencias experimentales (Física y Química)/Formación y Desarrollo Profesional del Profesorado. Ministerio de Educación Cultura y Deporte y Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L. Barcelona (2011. Nº 5. Vol. II) págs. 143-168.

CEM (Centro Español de Metrología) (2013) “*Recomendaciones del CEM para la enseñanza y utilización del sistema internacional de unidades de medida*”. Disponible en:

https://www.cem.es/sites/default/files/files/recomendaciones_cem_ensenanza_metrologia.pdf

CEM (Centro Español de Metrología) **EURAMET cg-18 Versión 4.0 (11/2015)**. Traducción al español de: “EURAMET/cg-018v.04: Guidelines on the Calibration of Non-Automatic Weighting Instruments” (Guía para la Calibración de Instrumentos de Pesaje de funcionamiento no automático). Disponible en:

https://www.cem.es/sites/default/files/euramet_cg-18_calibracionipfna.pdf

CEM (Centro Español de Metrología) (2018) “*Preguntas frecuentes sobre el SI revisado (CEM)*”. Disponible en:

<https://www.cem.es/sites/default/files/files/Preguntas%20frecuentes%20sobre%20el%20SI%20revisado%20%28CEM%29.pdf>

Espinosa-Ríos, E. A.; González-López, K. D.; Hernández-Ramírez, L. T. (2016) “*Las prácticas de laboratorio: una estrategia didáctica en la construcción de conocimiento científico escolar*”. **Entramado** 12[1](2016)266-281. Disponible en:

<http://revistasojs.unilibrecali.edu.co/index.php/entramado/article/view/345>

<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5755305.pdf>

García Carmona, A. (2002) “*El termómetro de Galileo como instrumento didáctico en el aula de Física*”. **Revista Española de Física** Vol. 16 [2. Abril-junio] (2002) 46-49.

Gamow G. (2010) **Biografía de la física**. El libro de Bolsillo. Ciencia y Técnica. Física (CT 2006) (Alianza Editorial. Madrid 2010)

Garrido Garrido, Quintín (coord.) (2016) **CIENCIA, y además lo entiendo!!! . SCIENCE, and I also understand it!!!** Libro en la web con licencia Creative Commons. Madrid (2016).

Gläser M. and Borys M. (2009) “Precision mass measurements” **Rep. Prog. Phys.** 72 (2009) 126101 (32pp)

Güémez, J., Fiolhais, C. y Fiolhais, M. (2010) “Juguetes en clases y demostraciones de Física”. **Revista Iberoamericana de Física** [agosto](2010)1-12.

Jammer, Max. (2000) **Concepts of Mass in Contemporary Physics and Philosophy**. Princeton Univ. Press. (2000. Princeton, NY)

Jones, Frank E. “The Air Density Equation and the Transfer of the Mass Unit” J. Res. Nat. Bur. Stand. 83[5](1978) 419- 428

Khrapk, R. I. (2000) “What is mass?” **Physics Uspekhi** 43 (12)(2000)1267-1275

Kozdon, A. F. (2001) “New example of the self-improving measuring system in pycnometric density measurements on liquids” **Metrologia** 38 (2001)135-145

Malengo A. (2014-2018) “Buoyancy effects and correlations in calibration and use of electronic balances” **Metrologia** 51 (2014) 441–451. **Corrigendum: Metrologia** 55 (2018) 618. **Erratum: Metrologia** 53 (2016) 1010

Mettler-Toledo AG (2015). “Weighing the Right Way” (Proper Weighing with Laboratory Balances). Laboratory Weighing (01/2015).

OIML R 111-1. Edition 2004 (E). Weights of classes E1, E2, F1, F2, M1, M1–2, M2, M2–3 and M3. Part 1: Metrological and technical requirements. Organisation Internationale de Métrologie Légale. Organización Internacional de Metrología Legal (OIML).

https://www.oiml.org/en/files/pdf_r/r111-1-e04.pdf

OIML G-14: MEDICIÓN DE DENSIDAD, GUÍA. Edición 2011 (E). Organisation Internationale de Métrologie Légale. Organización Internacional de Metrología Legal (OIML). Traducción Oficial No. 083-15 a Idioma Español. Universidad Nacional de Bogotá (04 de agosto de 2015).

<https://www.oiml.org/publications/other-language-translations/spanish/g014-es11.pdf>

Okun, L.B. (1989) “*The concept of mass (mass, energy, relativity)*” *Sov. Phys. Usp.* 32 (7,july)(1989)629-638.

Okun, L.B. (2000) “*Reply to the letter "What is mass?" by R I Khrapk*” *Physics Uspekhi* 43 (12)(2000)1270-1275

Oliver-Hoyo, M. T.; Alconchel, F. y Pinto, G. (2012) “*Metodologías activas para el aprendizaje de la Física: un caso de hidrostática para su introducción en la práctica docente*”. *Revista Española de Física* Vol. 26[1. Enero-marzo](2012)45-50.

Orantes de la Fuente, J.L. (2017) **Física olímpica. Mucho más que problemas.** Universidad de Valladolid (2017).

Pozivil, M., Winiger, W., Wunderli, S. and Meyer, V. R., (2006) “*The Influence of Climate Conditions on Weighing Results*” *Microchim. Acta* 154 (2006) 55–63

Reichmuth, A., Wunderli, S., Weber M. and Meyer, V.R., (2004) “*The Uncertainty of Weighing Data Obtained with Electronic Analytical Balances*” *Microchim. Acta* 148 (2004) 133–141.

Walked, J. (1887) **The theory and use of a physical balance.** Oxford (at the Clarendon Press). (London. 1887).

Wilson, J. D. and Hernandez-Hall, C.A. (2010). **Physics Laboratory Experiments.**7th. Edition. Brooks-Cole. (2010). Boston (USA).