Universidad de Valladolid

Escuela de Doctorado Universidad de Valladolid

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN
TRANSDISCIPLINAR EN EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL:

ANÁLISIS DEL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ASÍNTOTAS A TRAVÉS DE SUS GRÁFICAS EN BACHILLERATO MEDIANTE FLIPPED CLASSROOM

Presentada por Rosa María Fernández Barcenilla para optar al grado de
Doctor/a por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Tomás Ortega del Rincón

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

ANÁLISIS DEL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ASÍNTOTAS A TRAVÉS DE SUS GRÁFICAS EN BACHILLERATO MEDIANTE FLIPPED CLASSROOM

TESIS DOCTORAL

Rosa María Fernández Barcenilla

Valladolid, julio de 2019

Memoria presentada para optar al grado de Doctor por la Universidad de Valladolid por Dña. Rosa María Fernández Barcenilla. Licenciada en Matemáticas en la Universidad de Valladolid, en el Programa de Doctorado en Investigación Transdisciplinar en Educación.
Investigación en Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales, y de la Matemática.
.

Director de la Tesis:
Dr. Tomás Ortega del Rincón.
Departamento Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática.
Universidad de Valladolid.

TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN, CAUN de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que la presente memoria, *Análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje de las asíntotas a través de sus gráficas en bachillerato mediante Flipped Classroom",* ha sido realizada por Doña Rosa María Fernández Barcenilla bajo mi dirección en la Universidad de Valladolid.

Valladolid, julio de 2019.

Fdo.: Tomás Ortega del Rincón

En primer lugar, quiero agradecer al director de esta tesis, Tomás Ortega del Rincón, la paciencia, la dedicación, la ayuda y el apoyo que me ha prestado en la realización de este trabajo de investigación. Especialmente, le agradezco que me animara a retomar un camino que dejé pausado, pero no abandonado, hace muchos años; que me acompañara en este viaje, sabiendo que no iba a ser un vuelo regular, que me haya facilitado todo, adaptándose a mis circunstancias, que me centrara en los momentos de dispersión, que han sido muchos; y, sobre todo, por ayudarme a saber distinguir lo verdaderamente importante con la magia de la Enseñanza de las Matemáticas.

Ha sido un verdadero placer haber compartido reflexiones y preocupaciones, acompañado todo con el entusiasmo por la Educación Matemática. No hay suficientes palabras de agradecimiento por todo lo que me ha transmitido, por haber podido aprender tanto y haber podido trabajar con una excelente persona y excelente Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Aprovecho para desearle todo lo mejor en su nueva etapa, fruto de una intensa vida profesional y una merecida jubilación, aunque estoy segura que compartirá su sapiencia más allá de los muros de la Facultad.

Gracias a la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, por permitir dedicarme, durante el curso 2018-2019, a este trabajo de investigación, dándome la posibilidad de reflexionar y dar un respiro a la cultura de la prisa. Asimismo, quiero expresar mi agradecimiento a los Equipos Directivos y al profesorado de los Departamentos de Matemáticas de los IES “Condesa Eylo” de Valladolid, IES “Recesvinto” de Venta de Baños e IES “María Moliner” de Laguna de Duero, por el apoyo que me han prestado durante los cursos que duró la experimentación en el aula; en especial, a Marta Carazo Lores y Cristina Pecharromán Gómez por abrirme las puertas de sus aulas, cuando yo no disponía del elemento principal, los alumnos, y por haberme dedicado su tiempo a colaborar en la investigación, actuando como observadoras externas; sus aportaciones han sido de gran ayuda para encauzar mi trabajo de investigación aportando sus experiencias docentes.

Tampoco me olvido de mis compañeros asesores del CFIE de Valladolid, fuente de vitalidad e innovación educativa, ni de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, por su gran trabajo por acercar el aprendizaje y el disfrute de las Matemáticas en nuestro alumnado, y especialmente, mi más sincera gratitud al Grupo de Divulgación Matemática, por no dejar de disfrutar y aprender cada minuto que paso a su lado. También quiero dar las gracias al profesorado del IES María Moliner, por su ánimo e interés en mi proyecto y a los compañeros de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Matemáticas de la Facultad de Educación de

Valladolid y Palencia, con los que he compartido agradables e interesantes tertulias matemáticas alrededor de un buen café.

Esta investigación nunca hubiese sido posible sin la implicación activa de todos los alumnos que han participado, ellos son la esencia de nuestra profesión, día a día, también nos enseñan a los docentes a mejorar en muchos aspectos, no solo en el curricular. A ellos les quiero agradecer su colaboración, porque con su comportamiento y actitud me han animado a seguir adelante "Quien ose a enseñar no debe dejar nunca de aprender".

Por último, gracias a mi familia, a mis padres, Rosi y Amaro; a mis hermanos Nuria, Javi y César, para que sean muy felices y compartamos la vida aunque no siempre vayamos por el mismo camino, pero disfrutando y siguiendo unidos. Lo hago extensible al resto de mi familia paterna, materna y política. También tengo palabras de agradecimiento para los amigos de verdad, los que están cuando más se les necesita, para apagar penas y compartir alegrías.

A Manuel por su comprensión y apoyo mutuo, y sobre todo, por su ánimo para que acabe todo lo que empiezo, a Adrián para que no esconda todos sus tesoros y luche por conseguir sus sueños y Alba para que no deje de brillar y me siga iluminando cada día.

A mis padres

A Alba, Adrián y Manuel

ÍNDICE

ÍNDICE FIGURAS

ÍNDICE TABLAS

CAPÍTULO I

I INTRODUCCIÓN

Es evidente que el alumnado de las aulas es muy heterogéneo y que esta diversidad es el cúmulo de múltiples factores: niveles alcanzados, interés por el estudio, apoyos externos, relaciones sociales, tipos de inteligencia,… (García Olivares, 2008). En esta diversidad, los apoyos externos que puedan tener unos alumnos favorecen la discriminación. Según se va avanzando en los niveles educativos, los alumnos no evolucionan de forma uniforme sino que se van ampliando sus diferencias, Howson (1991), indica que las diferencias de nivel entre los alumnos se acrecientan con la edad. García Hoz (1988, 119), también indica que los alumnos difieren unos de otros, principalmente, por la capacidad que tienen para aprovechar las posibilidades de aprender, diferencias que van aumentando con el paso del tiempo, estimándose que en educación intermedia, la variabilidad en el rendimiento escolar es aproximadamente dos tercios de la edad media cronológica. Así, en un aula de 1º de Educación Secundaria Obligatoria, (ESO), puede haber alumnos de 12 años con rendimientos equiparables a 3º de Educación Primaria y otros a 4º de ESO.

Howson (1991) estudió este fenómeno en Inglaterra y vio que la coexistencia en el aula de alumnos con niveles tan dispares hace difícil la enseñanza.

El currículo español es menos concreto que el británico, pero la diversidad en las aulas no sucede de modo diferente. Ortega (1999), haciéndose eco de la teoría de Howson (1991), añade que en múltiples ocasiones, esas diferencias vienen motivadas porque las actitudes de los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas son muy diferentes; tanto, que en las aulas del segundo ciclo de ESO, prácticamente, pueden estar presentes todos los niveles educativos que contempla Howson. Según estos autores, es una utopía pensar que todos van a avanzar lo mismo y en el mismo tiempo y, por tanto, hay que buscar mecanismos para que no sólo unos pocos avancen mucho, sino para facilitar que todo el alumnado progrese; pero sí que se pueden planificar y diseñar escenarios facilitadores de la integración y atender a la diversidad. A continuación, según Talbert (2014) se presentan brevemente algunos desajustes que se pueden producir en la organización tradicional de la docencia en relación a posibles apoyos externos:

1. A menudo, la disponibilidad de apoyo al alumnado bajo el modelo tradicional es inversamente proporcional a la dificultad de la tarea propuesta. Mientras que en el aula los estudiantes tienen acceso al docente sin restricciones y se les pide un trabajo de baja dificultad, ya que abundan las explicaciones, fuera del aula se les piden trabajos de mayor complejidad, sin que tengan acceso al docente-instructor.

2. Los estudiantes no tienen un control completo sobre el flujo de información que se produce en el aula (el profesor suele presentar la información en forma de conferencias sin que intervengan los alumnos). Ellos no tienen la posibilidad de pausar o repetir segmentos de explicación, salvo en muy pequeñas excepciones. Esto presenta un problema para muchos estudiantes, en particular para los que tienen más dificultades de aprendizaje. Éstos podrían beneficiarse más si tuviesen algún mecanismo externo que les proporcionara un mayor control sobre la forma en que reciben la información.

3. Los estudiantes que tienen dificultades para administrar el tiempo y las tareas fuera de clase están en desventaja con el modelo tradicional en el aula. Trabajar en tareas cognitivas de nivel superior requiere períodos de tiempo más largos y mayor reflexión. Estos periodos de tiempo a menudo son mal administrados o simplemente no existen para muchos estudiantes.

4. La disrupción en el aula, causada por múltiples motivos, provoca la falta de atención y silencio, por lo que no se produce un total aprovechamiento del periodo lectivo del que se dispone y, en general, sin ayuda externa fuera del aula no lo recuperan.

Teniendo en cuenta los puntos precedentes, parece razonable que en el aula se utilicen técnicas de participación de los alumnos y se propongan actividades que faciliten la comprensión de los contenidos matemáticos. En este sentido, la aplicación de la metodología de educación matemática atendiendo a la diversidad (Ortega, 1999; García Olivares, 2008) expone una organización de la docencia con la que los alumnos aprovechen la totalidad del tiempo lectivo. En esta docencia, las explicaciones del profesor son muy breves y éste trata de monitorizar el trabajo de los alumnos que está basado en los siguientes principios: un test permanente de autocontrol, respeto a los ritmos de aprendizaje de los alumnos, grupos de trabajo colaborativo y propuesta de tareas en orden creciente de dificultad. Esta metodología responde al trabajo del alumno en el aula, trabajo que se desarrolla con la presencia del profesor, pero no resuelve el problema del trabajo personal fuera del aula, trabajo que en muchas ocasiones requiere un mayor nivel cognitivo.

La metodología "Flipped Classroom", traducida como "El Aula Invertida", a partir de aquí AI, es un modelo en el que los estudiantes llevan a cabo el primer contacto inicial con la nueva información fuera de las sesiones de clase, y los alumnos dedican el tiempo de aula en actividades de creación de un nivel superior. El modelo de AI se llama así porque invierte o "voltea" el diseño habitual de aula donde el tiempo de clase se utiliza generalmente en la transferencia de información (habitualmente a través de una metodología expositiva, como si se tratase de asistir a una conferencia), mientras que la mayor parte las tareas de mayor dificultad se llevan a cabo fuera del aula a través de "tareas para casa".

Los estudiantes utilizan el tiempo de los periodos de docencia principalmente para la transferencia de información, generalmente escuchando al profesor y tomando notas, y de vez en cuando, trabajando en grupo; mientras que fuera de la clase, los estudiantes, por lo general, trabajan por su cuenta y, tras recibir la información básica de las tareas, deben realizar "deberes" de más nivel. Mientras tanto, el papel del profesor es principalmente para mediar en la transferencia de información en el aula y proponer cuestiones o preguntas a los estudiantes que deberán realizar fuera de clase (para evaluar posteriormente el trabajo de cada estudiante).

Para situar a los estudiantes en una mejor posición para tener éxito, podría parecer que los contextos del aula tradicional necesitan ser revertidos: la transferencia de información debe ser hecha fuera de clase utilizando medios de comunicación que den a los estudiantes un mayor control, y dentro de la clase se propondrán tareas de un nivel superior, ya que el profesor está presente para guiar a los estudiantes en el trabajo eficiente y eficaz. Esta inversión de contexto es el corazón de lo que se conoce como el diseño invertido del aula.

El AI se refiere al diseño de una clase en la que la transferencia de la información tiene lugar principalmente fuera del aula, y el trabajo de los estudiantes en clase se centra en tareas más complejas con el tiempo que se ha liberado. A menudo, el contacto inicial de los estudiantes con el nuevo material, fuera de clase, se lleva a cabo a través de recursos de video colocados en línea para que se pueda hacer una pausa, rebobinar y revisar en sus propios dispositivos, según sus propios ritmos y horarios. Con el tiempo ganado al eliminar al menos parte de las exposiciones verbales de las horas de clase, los estudiantes pueden trabajar en tareas de una complejidad cognitiva superior siguiendo la orientación activa del profesor.

Sin embargo, este emparejamiento de tareas cognitivas a los contextos físicos (en clase o fuera de clase) puede presentar algunos problemas a los estudiantes y se considera que sería muy enriquecedor trabajar en el diseño, planificación y ejecución de una propuesta didáctica innovadora fundamentada en un marco teórico y con aplicación de diferentes metodologías, incluida la AI, que facilitasen la mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación, se ha centrado el estudio en el bloque relativo a funciones, en especial el estudio de los aprendizajes de los alumnos sobre el comportamiento asintótico de las funciones.

Se cree que este planteamiento puede facilitar el aprendizaje global y competencial, no centrándose tanto en la transmisión acumulativa en el alumnado de datos sobre los contenidos que se traten, sino en la comprensión paulatina de los conceptos y la capacidad de trabajar en equipo sobre los mismos. De este modo, se potencian las competencias socio-relacionales, la participación en proyectos comunes y se aumenta el grado de implicación en las propuestas grupales en el aula de Matemáticas. Con este planteamiento se señala el siguiente objetivo general de la tesis:

- Valorar si la implantación de la metodología Flipped Classroom (AI) es apropiada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas. Estimar el grado de aceptación por el alumnado y analizar los aprendizajes producidos.

La memoria de tesis se estructura en 8 capítulos, amén del correspondiente apartado de referencias bibliográficas y del bloque de ANEXOS. Como ya se ha observado, en este primer capítulo, a modo de introducción, se hace la presentación de la metodología docente y se incluye el objetivo fundamental de la misma y, a continuación, se describe una sucinta descripción de los contenidos de cada capítulo.

El segundo capítulo está dedicado a los antecedentes que fundamentan el trabajo de tesis y se agrupan en varios apartados: por un lado se presentan diferentes metodologías y experiencias llevadas a cabo por diferentes investigadores de referencia en el ámbito educativo y, por otro lado, resultados de investigaciones centradas en el aprendizaje del concepto de límite como sustrato del concepto de asíntota.

En el capítulo III se presentan los marcos teóricos y metodológicos referenciales de la investigación realizada. Se profundiza en tres marcos teóricos de referencia. Por un lado, se muestran diferentes teorías de aprendizaje activo, por otro lado la teoría relativa a los estadios de aprendizaje enfoque lógico semiótico según Socas (1997, 2007) y, por último, un compendio de los resultados más relevantes y significativos relativos al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. En relación a los marcos metodológicos de referencia para la puesta en acción de los diferentes ciclos de investigación, se centrarán especialmente en la metodología de Investigación-Acción y, en las orientaciones metodológicas, según la normativa educativa vigente.

En el capítulo IV se plasma el desarrollo del Primer Ciclo de Investigación llevado a cabo durante el curso 2015/16 en el IES Condesa Eylo de Valladolid.

En el capítulo V se centra en el desarrollo del Segundo Ciclo de Investigación llevado a cabo durante el curso 2016/17 en el IES Recesvinto de Venta de Baños de Palencia.

En el capítulo VI y VII se deja constancia del desarrollo del Tercer y Cuarto Ciclo de Investigación llevado a cabo durante los cursos 2016/17 y 2017/18 en el IES María Moliner de Laguna de Duero de Valladolid.

Por último, en el capítulo final VIII se analizan conclusiones, aportaciones, puntos fuertes, puntos débiles, propuesta didáctica y problemas abiertos como apertura de nuevas líneas de investigaciones futuras en relación a la materia de estudio que nos ocupa.

CAPITULO II

II ANTECEDENTES

En este capítulo se presentan los antecedentes que han fundamentado esta tesis. Por una parte, se describe la metodología “Flipped Classroom” (AI), así como experiencias llevadas a cabo por diferentes investigadores de referencia en el ámbito educativo utilizando esta metodología, y se enfatizan las aportaciones de Talbert que proporcionan un modelo de aplicación del AI. Por otra parte, se presentan estudios relacionados con metodologías que incorporan nuevos ecosistemas de aprendizaje y, por último, resultados de investigaciones centradas en el aprendizaje del concepto de asíntota y en el concepto de límite, por ser éste el fundamento del concepto de asíntota.

II.1 METODOLOGÍA FLIPPED CLASSROOM

Ha pasado más de medio siglo desde que Bloom (1956) advirtiera que el trabajo del estudiante en clase utilizando metodologías tradicionales es de perfil bajo, ya que se centra principalmente en los dos niveles de comprensión que considera más básicos (recordar y entender), mientras que en el trabajo fuera del aula se ponen en juego las categorías de taxonomía superiores (aplicar, analizar, evaluar, crear).

En el año académico 2007-2008 Bergmann y Sams iniciaron su experimentación con su “primer aula invertida”. Inicialmente, ellos comenzaron a grabar sus clases cuando, por diversas causas, tenían varias faltas de asistencia de sus estudiantes. Posteriormente, otros estudiantes empezaron a usar los videos para mejorar su comprensión o para repasar antes de las pruebas. Por ello, decidieron grabar todas sus conferencias y que los estudiantes tuvieran acceso para poder visualizarlas en sus casas. El tiempo que no se utilizó para impartir las conferencias durante la clase, se usó para que los estudiantes trabajasen en las tareas. Bergmann y Sams utilizaban el tiempo en clase para ayudar a los estudiantes de forma individual, fomentando de este modo una mayor comprensión de los contenidos. Así es como nació el aula invertida.

Begmanny & Sams (2012) escribieron sobre *Flipped Clasroom* (AI) que es un modelo pedagógico que transfiere el trabajo de determinados procesos de aprendizaje fuera del aula, y utiliza el tiempo de clase para facilitar y potenciar otros procesos de adquisición y práctica de conocimientos de nivel superior, este modelo invierte o “voltea” el diseño habitual de docencia tradicional. En ésta el tiempo de clase se suele utilizar en la transferencia de información (generalmente a través de una metodología expositiva, como si se tratase de asistir a una conferencia), mientras que buena parte las tareas de mayor dificultad se llevaban a cabo fuera del aula a través de "deberes", aunque posteriormente sean corregidos en los períodos docentes.

Según Berret (2012), la clase invertida favorece sobre todo a materias como ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, y aunque la presentación de expectativas claras para los estudiantes ayudará a aumentar su interés por el AI (Roehl, Reddy & Shannon, 2012), el hecho de que los estudiantes estén acostumbrados al estilo de clase tradicional puede crear dificultades para adaptarse a esta nueva forma de aprender y algunas de las docencias fallidas del AI pueden atribuirse a las expectativas poco claras del instructor. Por otra parte, Aronson, Arfstrom, & Tam (2013) indican la diferencia de valoración de los estudiantes ante la nueva metodología y señalan que, mientras que unos estudiantes encuentran nuevo y emocionante el aprendizaje activo que se produce en un AI sustituyendo a la conferencia, a otros les resulta difícil seguir esta metodología. Unas y otras actitudes han provocado valoraciones más bajas en las evaluaciones de los estudiantes sobre algunos profesores que seguían la metodología propia del AI, metodología que requiere que los estudiantes tomen parte de la responsabilidad de aprender por sí mismos, lo que impone un nuevo contrato didáctico (Gascón, 1997). Como las valoraciones de los estudiantes son una parte importante de la evaluación de los profesores, en algunos casos; éstos pueden dudar en dedicar mucho tiempo en el rediseño de un curso y, además, se arriesgan a que sus evaluaciones de calidad por sus estudiantes disminuyan.

En los últimos años se ha escrito mucho sobre las aulas volteadas, pero también se han formado algunos conceptos erróneos. Para Bishop & Verleger (2013, p. 5) el AI contiene dos partes: "*Actividades interactivas de aprendizaje en grupo dentro del aula y la instrucción directa individual basada en computadoras fuera del aula*". Estos autores rechazan las definiciones más amplias, con el argumento de que la asignación de lecturas fuera de clase y tener una discusión en clase no constituye AI. Bergmann, Overmyer & Willie (2014) indican que el AI requiere *"mover la entrega de material fuera del horario de clases formales (a través de extensas notas, vídeos grabados, conferencias y otros medios apropiados) y usar los periodos de clase formal de los estudiantes para llevar a cabo actividades de colaboración e interactivos relacionados con ese material"* (tomado de Butt, 2014, p. 33). Para Bergmann, Overmyer & Willie (2014) AI no es simplemente ver vídeos en línea, o la sustitución de los profesores por videos, o dejar a los estudiantes aprender por su cuenta. El AI está diseñado para aumentar el tiempo de aprendizaje personalizado entre estudiantes y profesores, ayudar a los estudiantes a involucrarse y a ser responsables en su aprendizaje; y esto se logra a través de actividades de un aprendizaje activo durante el tiempo de clase. Se trata de un enfoque integral que combina la instrucción directa con métodos activos que promuevan el incremento de compromiso e implicación de los estudiantes con el contenido del curso para mejorar su comprensión conceptual. Con el fin de poner en práctica la implementación del aprendizaje activo, los profesores deben estar dispuestos a hacer cambios de la metodología tradicional expositiva en las que los profesores hablan y los estudiantes escuchan. Bonwell & Eison (1991, p. iii) definen el aprendizaje activo como "actividades de instrucción basadas en que los estudiantes deben hacer las cosas y pensar en lo que están haciendo". Estos autores indican que se debe poner menos énfasis en la transmisión de información y más en el desarrollo de habilidades de los estudiantes porque, según ellos, al poner mayor énfasis en la exploración de las propias actitudes y valores de los estudiantes, éstos participan en pensamientos de orden superior (análisis, síntesis, evaluación, creación), se involucran más en el proceso de aprendizaje y aprenden más. Estos mismos autores destacan la importancia de hacer preguntas que fomenten la discusión, el análisis y la reflexión; preguntas con las que los alumnos se sientan cómodos participando. Con estas premisas es adecuado proponer preguntas sobre las que los alumnos deben pensar en pares o en grupos pequeños, compartir sus reflexiones y exponer sus resultados emitiendo una respuesta. Para Prince (2004, p. 225) el aprendizaje activo es "la introducción de actividades en la clase tradicional y promover la participación de los estudiantes". De forma similar se expresan Zayapragassarazan & Kumar (2012, p. 3), para quienes "el aprendizaje activo implica proporcionar oportunidades a los estudiantes de hablar con sentido, escuchar, escribir, leer y reflexionar sobre el contenido, ideas, problemas y preocupaciones de una materia académica".

En el currículo español, y en el de Castilla y León, se indican aspectos metodológicos y se señala que la planificación de actividades debe realizarse de forma gradual de manera que permitan la asimilación de contenidos. Los nuevos conocimientos que deben adquirirse tienen que apoyarse en los ya conseguidos: los contextos deben ser elegidos para que el alumnado se aproxime al conocimiento de forma intuitiva mediante situaciones cercanas al mismo, y vaya adquiriendo cada vez mayor complejidad, ampliando progresivamente la aplicación a problemas relacionados con fenómenos sociales y a otros contextos menos cercanos a su realidad inmediata. Partiendo de los hechos concretos hasta lograr alcanzar otros más abstractos, el aprendizaje de matemáticas permite al alumnado adquirir los conocimientos matemáticos, familiarizarse con el contexto de aplicación de los mismos y desarrollar procedimientos para la resolución de problemas y para la elaboración de trabajos de investigación (BOCYL 86, 8 de mayo 2015, p. 227).

Por otra parte, la metodología del AI, salvo para unos pocos estudiantes que no les gusta los cambios fuertes, es positiva (Bishop & Verleger, 2013). Esos estudiantes no se acomodan con rapidez porque prefieren trabajar solos, están acostumbrados a clases tradicionales, con las tareas completadas en el entorno elegido por el estudiante (Roehl, Reddy & Shannon, 2013). Así, muchos estudiantes están a favor del cambio, pero algunos otros no están de acuerdo y razonan que no les gusta la metodología del AI, porque no pueden recibir pasivamente el material en clase, y están obligados a ser responsables de su propio aprendizaje (Berret, 2012). Este mismo autor indica que "*la tensión cognitiva que impone voltear representa en los estudiantes gran parte de su éxito y de la resistencia que engendra*" (p. 6). AI requiere que los estudiantes tomen parte de la responsabilidad de aprender por sí mismos y Fulton (2012) comenta que a los estudiantes les suele gustar el cambio, y Verleur, Heuvelman & Verhagen (2011 p. 573) indican que "*los estudiantes de hoy están cómodos en entornos de imágenes ricas, tienen necesidad de interactividad, son emocionalmente abiertos, y muestran una preferencia por actividades que promuevan y refuercen la interacción social*".

Faure (1981) ya preconiza una enseñanza personalizada y comunitaria como puesta en acción de las propias personas que se revelan a sí mismas sus posibilidades de desarrollo y de progreso al descubrirse capaces de ello. Este autor cree que el profesorado debe tener confianza en los jóvenes, proponiéndoles actividades en las que puedan progresar y obtener algún resultado. Las actividades interactivas y los entornos digitales facilitan la personalización y la progresión.

El uso de vídeos en línea se convierte en una práctica crucial en AI, ya que los alumnos se sienten cómodos con ellos debido a la facilidad de ser visionados (Bondad-Brown, Rice & Pearce, 2012). Sin embargo, para que sean adecuados estos vídeos tienen que cumplir ciertos requisitos: deben ser cortos (Miller, 2012, y Verleur, Heuvelman & Verhagen, 2011), ya que si son demasiado largos, los estudiantes se aburren, o no tienen tiempo para verlos; el contenido de los videos debe tener una cantidad manejable de información (Miller, 2012); el contenido debe ser lo suficientemente interesante como para que los estudiantes quieran aprender de él; tienen que ser fácilmente accesibles, útiles y fáciles de usar (Falk, Sockel, & Chen, 2005); el diseño debe de estar centrado en el usuario y, por tanto, deben ser creados con la mente centrada en los estudiantes; finalmente, se debe prever cierta interactividad, ya que ésta mejora la experiencia del usuario (Yale & Noyes, 2007).

Con estas características los alumnos estarán más interesados en los videos cuando se relacionen bien con los contenidos (Huang, Chen & Weng, 2012) y en la experimentación que se ha llevado acabo se han elaborado vídeos que cumplen estas características y contienen imágenes de contenido matemático. Los vídeos que se han utilizado en la presente experimentación son originales e inéditos, accesibles, cortos, interesantes, contienen una cantidad manejable de información y se les ha dotado de interactividad al hacer partícipes al alumnado de los mismos, ya que deben contestar a las cuestiones que se les plantea al finalizar cada visionado.

Butt (2014) investigó las reacciones de los estudiantes en el ambiente de un aula invertida. Planteó una encuesta al principio del semestre que pretendía analizar los pensamientos iniciales de los estudiantes ante la estructura propuesta para el AI. Encontró que prácticamente el 50% de los encuestados creía que el método de enseñanza propuesto tendría éxito y otro porcentaje que no. Al final del semestre realizó otra encuesta para valorar la experiencia de los estudiantes, y el resultado fue que el 75% de los encuestados manifestó que el AI era beneficioso para su aprendizaje. A veces, se pone mucho énfasis en la transferencia de información, pero según Berret (2012) ese modelo está teniendo cada día menos sentido, ya que la transmisión de información no debe ser el foco de la enseñanza y debe ser sustituido por ayudar a los estudiantes a asimilar dicha información.

Uno de los beneficios de voltear a la docencia es el incremento del tiempo de relación estudiante/profesor. Este aumento de la interacción ayuda a los docentes a determinar el grado de comprensión de la información y el aprendizaje del estudiante, antes de las pruebas, en lugar de las mismas y después de ellas (Roehl, Reddy & Shannon, 2013). Otros beneficios que se incluyen son: proporcionar más oportunidades de hacer preguntas, generar interesantes debates, interrelacionar la asignatura con otras áreas de conocimiento y potenciar la creatividad. A los estudiantes que son generalmente más reacios a verbalizar posicionamientos en un entorno relacional “uno a uno”; posibilitar un ritmo más rápido en un aula invertida a los estudiantes que no tienen retos en el aula tradicional, y facilitar el acceso a los contenidos a los estudiantes que están ausentes por enfermedad u otros motivos, pudiendo mantenerse así al tanto de las clases perdidas (Roehl, Reddy & Shannon, 2013, Bergmann & Sams, 2012).

Esta nueva metodología favorece la convivencia en el aula y reduce la disrupción, ya que cuando un alumno trabaja además de ser positivo para él, supone una ayuda para los demás, ya que se está creando un clima de aula favorable para el aprendizaje.

Debido a que el profesor no está utilizando el tiempo de clase para dar una conferencia, las sesiones de docencia se vuelven flexibles. El alumnado con niveles y dudas similares se pueden agrupar para recibir indicaciones del profesor, los estudiantes pueden ayudarse unos a otros, y aquellos más avanzados pueden ir progresando y profundizando más allá de los contenidos mínimos que se han fijado para el alumnado inicialmente; este alumnado, con capacidades superiores al resto, no son frenados por los compañeros que necesitan refuerzo específico en un tema o cuestión concreta. El profesor deja de tener un control absoluto del aula, de modo que hay cierta posibilidad de no cumplir estrictamente lo programado inicialmente. Las particularidades de cada grupo puede hacer que una sesión inicialmente planificada igual tenga resultados diferentes; en cualquier caso, más motivantes, ya que los alumnos no se sienten encorsetados en una estructura académica rígida que no contempla sus intereses e inquietudes.

El AI ha ganado una gran y reciente popularidad en varias universidades de prestigio, como por ejemplo en la Universidad de Utah, EE.UU, dónde varios profesores han implementado esta metodología. Según Furse, Ziegenfuss & Bamberg (2014) se llevaron a cabo diversos programas de capacitación en sus facultades para ayudar y tutelar la capacidad de aprender a enseñar utilizando el AI. Se pusieron a prueba varios módulos en 2013-2014, incluyendo la enseñanza activa, cómo crear conferencias de vídeo, selección de contenidos para "el volteado de las clases", implementación de la metodología AI en las aulas, ayuda a sus estudiantes para optimizar el uso de esta nueva metodología y la evaluación del AI. Dichos programas están disponibles gratuitamente para los profesores interesados y la valoración global fue positiva.

II.2 EL MODELO DE TALBERT

Según Talbert (2014), el uso cuantitativo del AI en disciplinas de educación superior se aplica a la enseñanza de la ingeniería de software (Lage, Platt, Treglia, 2000). En Ciencias de la Educación, Bergmann y Sams (2012) aplicaron el modelo al diseño de cursos, también se ha utilizado en Biología, Informática, Física, Ingeniería y Estadística, así como en varios temas matemáticos. Una revisión de las implementaciones de aulas invertidas realizada por Talbert sugiere que para tener una experiencia eficaz en el uso de esta metodología es necesaria una planificación "pre-clase" altamente estructurada sobre las tareas que los estudiantes deben hacen en el primer contacto con el nuevo material, un medio de la rendición de cuentas para garantizar que los estudiantes hagan el trabajo fuera de la clase, diseños metodológicos con creación de actividades para que los estudiantes hagan durante la clase, y líneas abiertas de comunicación a lo largo del curso.

Talbert (2014) propone un modelo de una tarea previa de clase perfectamente organizada llamada **Práctica Guiada**. Este modelo se compone de cinco fases:

1. Una breve descripción del próximo contenido para situar el nuevo material en el contexto de lo que ya se conoce (aprendizaje significativo).
2. Dos listas de objetivos de aprendizaje para el siguiente contenido, uno de los cuales (los objetivos "básicos") se componen de conocimientos y acciones que los estudiantes deben tener alcanzados cuando lleguen a clase, y el otro (los objetivos "avanzados") que son las habilidades en las que los estudiantes no

tienen que dominar totalmente cuando vienen a clase, pero que deberán adquirir fluidez en su dominio con el tiempo.

3. Una colección de recursos de vídeos y de impresión que dan a los estudiantes el contacto inicial con el nuevo material, y proporcionan material de entrenamiento para la formación de la fluidez básica.
4. Un conjunto de ejercicios, relacionados con la lista de objetivos de aprendizaje básicos, que llevan a los estudiantes a alcanzar la consecución de estos objetivos.
5. Una lista de especificaciones para saber cómo y cuándo presentar las respuestas a las tareas asignadas.

Las listas de objetivos de aprendizaje tienen como finalidad proporcionar a los estudiantes una idea clara de qué se espera que aprendan. Al dividir los objetivos en “básicos” y “avanzados”, los estudiantes tienen un objetivo inequívoco sobre qué deben insistir en su trabajo previo a la clase; y lo más importante, se comunica a los estudiantes que no tienen que saber todo en la próxima sesión antes de venir a clase. Los objetivos avanzados sirven como una agenda de la próxima reunión de la clase, y la unión de ambas listas puede ser utilizada más tarde como una guía de temas para la preparación de exámenes.

Los recursos asignados a los estudiantes están diseñados para abordar directamente el aprendizaje de los objetivos. Estos recursos pueden incluir a menudo archivos de vídeo enviado a YouTube o a otro lugar, pero esto no tiene por qué ser único. Los recursos de impresión también pueden ser utilizados en lugar de, o en combinación con, vídeos para proporcionar a los estudiantes un rico conjunto de material de apoyo accesible para ayudarles a alcanzar el aprendizaje de los objetivos. Muchos instructores que han utilizado el aula invertida con recursos de vídeo han elegido la sede de los vídeos de YouTube porque este servicio es gratuito, fácil de usar e integrado en muchos paquetes de software de edición de video. Sin embargo, hay otros servicios disponibles de alojamiento de vídeo (como Vimeo o TeacherTube) y los profesores también pueden alojar vídeos en privado a través de un sistema de gestión de cursos o en un sitio web alojado en sí mismo.

El diseño de los videos será breve (de preferencia entre 5 y 7 minutos de duración) y no solo mostrará a los estudiantes cómo realizar procedimientos mecánicos, sino también ofrecer una perspectiva sobre el tema desde el punto de vista de un experto.

El video no sólo ilustra el procedimiento sino también la discusión del proceso de toma de decisiones utilizado por un experto en llegar al resultado. De esta manera, los estudiantes comenzarán a ver cómo los matemáticos piensan a través de un problema y comenzar a ver la interconexión de los conceptos en el sujeto.

Las actividades previas a la clase tienen un valor limitado si los estudiantes no hacen la tarea completamente. Por tanto, también es importante tener algún tipo de rendición de cuentas sobre la resolución de las actividades asignadas. Talbert realizó una serie de talleres con esta metodología en 2013 e ilustra la posibilidad de invertir parte, o la totalidad, de una clase; también valora si es práctico, o no, invertir toda la clase o si los instructores desean experimentar con la metodología AI antes de hacer una implementación de curso completo. Estos talleres fueron valorados y el 80% de los alumnos se sintieron muy satisfechos. Tras esta experiencia, rediseñó dos unidades de álgebra lineal y aplicó la metodología AI y la instrucción por pares diseñada por Mazur (2010). Este diseño propone una exposición muy breve del profesor de cada concepto a la que sigue un escenario de trabajo por pares, una revisión por el profesor sobre las respuestas de los alumnos y una nueva discusión sobre estas respuestas. Sólo se permitieron exposiciones muy cortas cuyo único propósito era establecer el escenario de instrucciones de las preguntas entre los compañeros. Talbert observó que se logró una mejora normalizada de 0,421 puntos en la comprensión del concepto de dependencia lineal que alcanzaron sin la intervención de un instructor. Además, la mayor parte de los alumnos (69,8%) declararon preferir la metodología de AI frente a la instrucción por pares.

En suma, la metodología de AI para la enseñanza de matemáticas ofrece un modelo en el que el profesor está más disponible para ayudar cuando, precisamente se producen esas dificultades, y facilitando al alumno la posibilidad de seguir una evolución positiva en los cursos posteriores. Los profesores asumen la responsabilidad de preparar materiales y tareas previas a la clase; para situar a los estudiantes en una posición favorable para aprender nuevas enseñanzas de forma independiente. Esto puede ser difícil y precisa mucha dedicación de tiempo, especialmente si los profesores producen sus propios videos y material multimedia. Los docentes deben asumir que con esta metodología se renuncia a un cierto grado de control sobre lo que sucede en el aula, mientras que en una conferencia, los comunicadores pueden elegir el ritmo y el contenido del periodo lectivo; en un aula invertida, las actividades y los comportamientos de los estudiantes son menos predecibles.

II.3 ECOSISTEMAS DE APRENDIZAJE

Murillo (2001) define ecosistema de aprendizaje como un entorno interactivo constituido por: los alumnos, el contenido/saber, el profesor/tutor y el medio, cuyos procesos de funcionamiento se relacionan entre sí y se desarrollan en función de los factores físicos de un mismo ambiente; de forma que la modificación de alguno de sus componentes cambia el estado de los restantes. A través del juego interactivo, con sus iguales o con el resto de los elementos del ecosistema, emerge la identidad personal del alumno.

Se pretende establecer un modo colaborativo entre profesor y alumnos, tomando en consideración las ideas del andamiaje (Bruner, 1978) y el término acuñado, “scafolding”, que fue conformado con las ideas teóricas de Vigostky (1978), quien consideraba que las interacciones guiadas por adultos pueden ayudar a los niños a desarrollar un funcionamiento psicológico superior y que la asistencia de un adulto permite al niño operar en la “zona de desarrollo próximo” (Alvarez, 1990), área situada entre el nivel de lo que un niño puede conseguir por sí solo y el nivel que el mismo niño puede alcanzar con asistencia.

Los entornos informáticos permiten a sus usuarios manipular de una forma más directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera los conceptos matemáticos abstractos. Lo que los diferencia de otros materiales pedagógicos, es su naturaleza intrínsecamente cognitiva (Balacheff y Kaput, 1996). Hay un cambio de complejidad entre la manipulación de un instrumento material y la utilización de software, debido no sólo al número o a la velocidad del número de operaciones posibles; sino también a la capacidad de ayudar a visualizar conceptos abstractos.

Estos entornos de aprendizaje, se construyen a partir de una representación del conocimiento para un sistema de objetos y relaciones, y esta representación accesible al usuario le permite una interacción de una forma más o menos significativa en relación al conocimiento que transmite. Así, aprendizaje es el resultado de una construcción de conocimientos en el curso de la interacción con el entorno. El trabajo realizado con el conocimiento para que resulte manejable por el sistema–transposición informática– determina fuertemente la interacción del usuario con el sistema y, por tanto, el conocimiento que emerge de esta interacción (Balacheff, 1994).

Cuando la escuela se organiza como “comunidad de aprendizaje”, las actividades se planifican de forma que interesen a los alumnos y les permitan participar en ellas, comprendiendo la finalidad de las mismas. El discurso instruccional se transforma en diálogo y el papel del profesor consiste en apoyar el aprendizaje y no en controlar las interacciones en el aula. De esta manera la clase se convierte en una organización compleja, en la que sus miembros deben aprender a asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje; todos trabajan y en función del grado de comprensión de su actividad, asumen papeles diferentes y diversos grados de responsabilidad.

El profesor como gestor del trabajo debe llevar a cabo como mínimo las siguientes categorías de actividades: organización, interrogación, explicación, valoración y advertencia (tomado de Gairín, 1998). El análisis de las mismas permite estudiar la forma en que se ha organizado la enseñanza, obtener los datos de cómo funciona el sistema que se ha diseñado, y conocer si el medio y la organización que le acompaña son correctos o presentan deficiencias. Esta clasificación de categorías permite controlar las interacciones entre las variables profesor/tutor y medio.

II.4 ANTECEDENTES CONCEPTO ASÍNTOTA

Se han buscado antecedentes en torno al concepto de asíntota y, exceptuando la investigación realizada por Kidron (2011), todas los demás versan sobre el propio contenido desde una perspectiva puramente matemática aplicando conceptualizaciones de límites funcionales infinitos (al menos una de las dos variables tiende a infinito). Kidron estudió las concepciones del alumnado en relación a la asíntota horizontal *(AH)*, tal y como narra en su artículo, su trabajo comenzó casi de forma casual tras preguntar a sus alumnos de Cálculo si una función podría cortar a la *AH*. El 86% de un grupo de 50 sujetos respondió de forma negativa. Tras obtener esa información, les mostró como la función, $f(x) = 2 + sen(x)/x$ interseca a la recta horizontal, $y = 2$, en infinitos puntos, y les propuso que analizaran la posibilidad de que la función dada tuviera una *AH*. La mayoría de los alumnos comprendió entonces que $y = 2$ es una *AH* de la función, pero algunos sujetos seguían mostrando dificultades para apreciar este detalle, justificando que se encontraba continuamente oscilando con valores superiores e inferiores a la hipotética *AH* sin dirigirse a un valor determinado en el ∞. Este comportamiento ya fue indicado por Cornu (1991) quien considera que son las imágenes, intuiciones y experiencias que los alumnos poseen las que pueden dar lugar a un sentido matemático fundamentado sobre concepciones erróneas, y señala como ejemplo las creencias de que "la función nunca puede cortar a la asíntota" o "se acerca infinitamente pero nunca llega a tocar".

Kidron describe la experiencia con una alumna a la que va preguntándole acerca de la *AH* y el posible comportamiento de la función respecto a ella. Plantea tres tareas con el propósito, en sus propias palabras, de "create conflicts", proponiendo ejemplos que contradigan lo dicho previamente por la alumna. Así, propone tres funciones que se comportan de manera diferente: la primera, $f(x) = (2 - x^2)/(1 - x^2)$, nunca corta a la *AH*; la segunda, $f(x) = (x + 3)^2/(x^2 + 6)$, que corta a la asíntota en un punto; y la tercera, $f(x) = 2 + sen(x)/x$, que corta a la *AH* en infinitos puntos.

Kidron registra y analiza las intervenciones de la alumna sobre los conflictos planteados y en una de sus intervenciones formula la siguiente pregunta: "*Why is it a problem if it intersects the asymptote*?" (p.1269). Sin duda este planteamiento tiene que ver con la concepción del concepto de límite y la creencia de los alumnos de que la función no puede rebasar el límite y Kidron señala que el alumnado tiende a identificar la noción de límite con un proceso frente a un resultado, además de la idea de ir "acercándose a", asociada a *"se acerca infinitamente pero nunca llegar a tocar",* en lugar de un número al que se está aproximando. Estas observaciones concuerdan con la investigación desarrollada por Fernández Plaza (2015) quien afirma que para muchos alumnos el límite nunca se rebasa y nunca se llega a alcanzar, creencias que, por otra parte, ya fueron observadas por Cornu (1991) y, desde otra perspectiva, señala que buena parte de los alumnos interpretan *"tender a"* como aproximarse, aproximarse sin llegar y la mayoría piensan en una convergencia monótona sin que se alcance el límite.

Estas investigaciones ponen de manifiesto las relaciones entre el concepto de asíntota y el de límite en los casos en los que una de las variables de la función o las dos tienden a infinito, y las dificultades de aprendizaje de aquel estarán en consonancia con las de éste. Este planeamiento es avalado por Kilpatrick (1998), quien indica que el aprendizaje de un concepto es la culminación de los aprendizajes de los procesos subyacentes, y no son pocos los que conducen al concepto de asíntota, pero son fundamentales el de función y el de límite. Para varios investigadores (Cornu, 1983; Blázquez, 1999; Blázquez y Ortega, 2000, 2001a, 2001b, 2002; Blázquez, Gatica, Ortega y Banegas, 2006) este concepto es de los que tienen mayor grado de dificultad debido a los fenómenos que organiza entre ambas variables funcionales (Claros Mellado, Sánchez Compaña y Coriat Benarroch, 2013; Sánchez Compaña, 2013). Otras investigaciones (Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, & Vidakovic, 1996; Valls, Pons, y Llinares, 2011; Arce, Conejo, Ortega, y Pecharromán, 2016). 2016) ponen el énfasis en la falta de coordinación general entre los valores de la variable y de la función, dificultad insalvable para muchos alumnos de Bachillerato. Asimismo, la significación escolar que dan los alumnos al concepto de límite están asociadas a errores de comprensión (Fernández Plaza, 2015). Por otra parte, Cotrill et al. (1996) al analizar la comprensión de límite de una función en un punto en sus estudiantes consideran que la función es la que organiza la coordinación entre las aproximaciones de la variable independiente y los valores de la función. Estos autores tratan de establecer esta coordinación a través de la definición métrica de límite y concluyen que sólo la logran algunos alumnos. Esta coordinación también es analizada por Valls, Pons y Llinares (2011) y concluyen que el nivel de la coordinación de las aproximaciones es el que marca la comprensión del concepto de límite por los alumnos, detectan que no van más allá de la idea intuitiva de aproximación numérica y, por tanto, no llegan a comprender la dependencia de ε, la función y el punto, $\delta = \delta(\varepsilon, f, a)$. Arce, Conejo, Ortega y Pecharromán (2016) enlazan con estas investigaciones y considerando la definición de límite creada por Blázquez y Ortega como aproximación óptima, entre otras cosas, tratan de averiguar con sus investigaciones si sus alumnos del máster de secundaria pueden determinar la dependencia anterior, $\delta = \delta(\varepsilon, f, a)$ en tablas numéricas generadas para tal fin. Concluyen que a través de estas tablas sí que se producen coordinaciones numéricas entre las variables independiente y dependiente asociadas al concepto del límite, y que estas coordinaciones pueden garantizar una mayor comprensión del concepto. En otro orden de cosas, sendos autores, también concluyen que varios alumnos conceden mayor valor a sus creencias formativas pasadas que al razonamiento. Esta valoración se refuerza cuando no se comprenden los conceptos y, por tanto, es de capital importancia la comprensión de los mismos para que así se produzcan razonamientos a partir de ellos. Por esta razón se utilizará la concepción de límite creada por Blázquez y Ortega ya que, como se concluye en la investigación, la ausencia del formalismo $\varepsilon - \delta$ favorece la comprensión.

CAPITULO III

III MARCOS TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En el presente capítulo se presentan los marcos teóricos y metodológicos referenciales de la investigación llevada a cabo. El primero de ellos es en marco de integración formado por teorías de aprendizajes activos, estadios de aprendizaje, enfoque lógico semiótico y conceptualizaciones sobre el concepto de límite. Por otra parte, se consideran las orientaciones metodológicas del currículo legal dentro de la investigación-acción, de la que se han implementado varios ciclos.

III.1 MARCO TEÓRICO

Se profundiza en tres marcos de referencia que se han integrado para realizar los correspondientes análisis de la documentación recabada en los diferentes ciclos de investigación. Por un lado, se presentan diferentes teorías de aprendizaje activo, por otro lado la teoría relativa a los estadios de aprendizaje y enfoque lógico semiótico, según Socas, y, por último, un compendio de los resultados más relevantes y significativos relativos al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite.

III.1.1 Teorías de aprendizaje activos

El aprendizaje activo se ha convertido en una palabra de moda, estando presente tanto en las redes sociales, como en diferentes formatos de debates y foros de reflexión de la comunidad educativa, apareciendo también como una demanda e interés del profesorado para incorporarlo como temática en su formación permanente.

Drew & Mackie (2011) trataron de definir el aprendizaje activo, ya sea como una teoría del aprendizaje o conjunto de estrategias pedagógicas. Watkins (2007) presentó un marco global que permite analizar las definiciones de aprendizaje activo, explicando que hay tres dimensiones distintas en el aprendizaje activo: conductuales, cognitivas y sociales.

El aprendizaje activo-conductual se logra al ayudar a los estudiantes a comportarse activamente y crear materiales.

El aprendizaje activo se logra cognitivamente cuando los estudiantes piensan de manera activa para construir un nuevo significado (Watkins, 2007). Una parte importante del aprendizaje cognitivo es la reflexión, tiempo dedicado a que los estudiantes reflexionen sobre lo que han aprendido y analizar si ha sido efectivo (Drew & Mackie, 2011).

Por último, el aprendizaje social activo se logra cuando se "participa activamente con otros como colaboradores y recursos" (Watkins 2007, p 71). Esto permite que los estudiantes aprendan a trabajar con los demás y practicar el uso de los recursos disponibles.

La teoría epistemológica subyacente de estas dimensiones es el constructivismo y en esta teoría "el aprendizaje debe ser un proceso activo en el que los aprendices construyen nuevas ideas o conceptos basados en su conocimiento actual o pasado" (Brandon & All, 2010, p 90). Si el aprendizaje activo se centra en la capacidad del individuo para construir el conocimiento se habla de constructivismo cognitivo mientras que si el conocimiento se construye a través de la interacción con los demás se trata de un constructivismo social (Drew & Mackie, 2011). No es fácil determinar si el aprendizaje activo es una teoría o una serie de estrategias disponibles que pueden ser utilizadas en un enfoque pedagógico para lograr un aprendizaje.

Si un profesor pretende incorporar un aprendizaje activo en su actividad docente debe estar dispuesto a cambiar los métodos tradicionales centrados principalmente en la metodología expositiva por parte del docente y la posición pasiva del alumno basada, en la mayoría de los casos en lo que se podría denominar: profesor-ponente y alumno-oyente (la clase magistral).

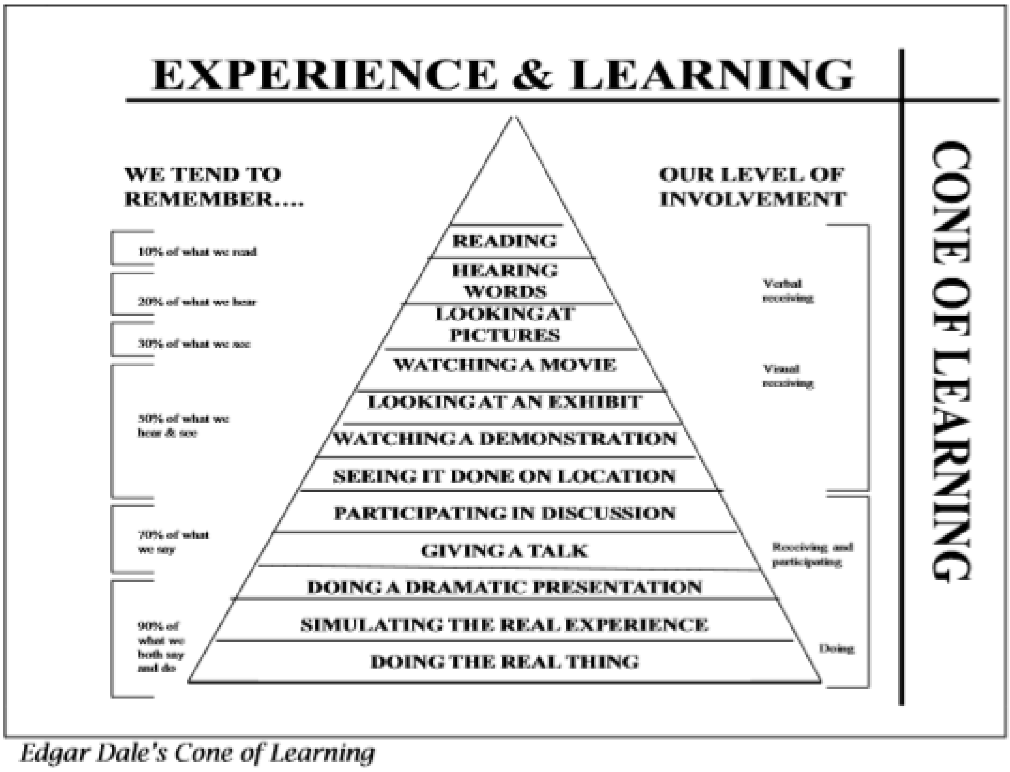
Implementar un aprendizaje activo, por un lado, supone un esfuerzo al profesorado en el trabajo de planificación y temporalización de las diferentes actividades a realizar y, por otro lado, se debe hacer una labor de concienciación del alumnado para optimizar su implicación en la nueva metodología para obtener los fines buscados.

> Estudios sobre tendencias en educación muestran que la metodología de estudio tradicional es cada vez menos efectiva y si se centra más la atención en el alumno, surgen nuevas formas de docencia, sobresaliendo aquellas que hacen hincapié en el aprendizaje activo. Hay resultados de investigaciones que muestran que los estudiantes aprenden más cuando se involucran en el proceso de aprendizaje, que simplemente recibiendo contenidos de forma pasiva (Bonwell y Eison, 1991).

Para estos autores, el aprendizaje activo se caracteriza porque los estudiantes están involucrados en algo más que escuchar, se pone menos énfasis en la transmisión de información y más en el desarrollo de habilidades de los estudiantes, los estudiantes participan en pensamientos de orden superior (análisis, síntesis, evaluación), se pone mayor acento en la exploración de las propias actitudes y valores de los estudiantes; y definen el aprendizaje activo como *"actividades de instrucción basadas en que los estudiantes hagan cosas y piensen en lo que están haciendo*" (Bonwell y Eison, 1991, p iii). A continuación se presentan otras interpretaciones interesantes parafraseando a los propios autores: *"el aprendizaje activo implica proporcionar oportunidades a los estudiantes de hablar con sentido y escuchar, escribir, leer y reflexionar sobre el* *contenido, ideas, problemas y preocupaciones de los una materia académica*" (Zayapragassarazan y Kumar, 2012, p.3); "*La introducción de actividades en la clase tradicional y promover la participación de los estudiantes*" (Prince, 2004, p. 225); "*Los estudiantes deben leer, escribir, hablar, o estar involucrado en la resolución de problemas ... [que] deben participar en las tareas de pensamiento de orden superior tales como análisis, síntesis y evaluación*" (Bonwell y Eison, 1991, p. 19).

En función de la naturaleza de la actividad involucrada, se clasifica el aprendizaje en pasivo o activo. Por un lado, si solamente intervienen actividades verbales (lecturas, audiciones, imágenes,…) o actividades visuales (observador externo, espectador, receptor visual,..); entonces lo denomina aprendizaje pasivo. Por otro lado, si el individuo participa en la actividad propuesta y se muestra receptivo ante la misma y, en un nivel superior está la actividad en estado puro dónde se priorice la acción y el sujeto es el protagonista de la propia situación.

Además, Dale (1969) cuantifica la retención de los contenidos en función del tiempo, según el nivel de pasividad-actividad que se haya implementado. A continuación se expone el famoso cono de aprendizaje de Dale que plasma en forma infográfica todo lo anteriormente expuesto, como muestra la figura 3.1 que está tomada de Jacobs, Hurley & Unite (2008).



III.1 *Figura 3.1.* Cono de aprendizaje según Dale

Compatible con la base de la teoría constructivista de Piaget y Vygotsky, el Cono de Experiencia de Dale transmite ideas similares sobre el aprendizaje de forma gráfica y propuso que el aprendizaje se estimula progresivamente de lo concreto a lo abstracto. Dale creía que la base para la instrucción dependía de experiencias sensoriales directas combinadas con una interacción intencional con fuentes de estímulos (Martin, Arendale & Blanc, 1997).

Se podría afirmar que todo aprendizaje es activo, por el hecho de serlo, pero en dicho proceso hay un continuo con intensidades diferentes. En uno de los extremos de ese continuo estaría el estilo de clase tradicional donde el estudiante está sentado, escucha y suele tomar apuntes, pudiéndose denominar como una actividad pasiva-receptiva o bien un aprendizaje de baja intensidad. A medida que se avanza en ese continuo, los estudiantes, van tomando apuntes, más o menos detallados, hacen esquemas o gráficos, parafrasean lo que están aprendiendo y van interviniendo progresivamente en clase haciendo preguntas si no entienden, planteando dudas o solicitando aclaraciones respecto alguna cuestión… En el otro extremo del continuo está el aprendizaje activo de alta intensidad y en él los estudiantes participan en actividades de escritura, de discusión, debates, actividades para grupos pequeños y juegos de rol (Bonwell y Eison, 1991).

Bonwell y Eison (1991) dan varias técnicas útiles para que un profesor pueda promover el aprendizaje activo en el aula, destacando la formulación de preguntas para provocar la discusión. Se trata de hacer preguntas que inviten a los estudiantes a analizar y formar opiniones basadas en el tema, que creen un ambiente que ayude a que los estudiantes se sientan cómodos participando y que se sientan todos involucrados en pensar y compartir. Otras técnicas que podrían ser utilizadas en el aprendizaje activo incluyen: enseñanza entre pares, juegos de rol, simulaciones, juegos, teatro, debates, aprendizaje cooperativo, enseñanza asistida por ordenador, escribir en clase y demostraciones. Algunas de estas técnicas pueden resultar más útiles que otras para la enseñanza de temas específicos. El profesor deberá valorar tanto al material como a los estudiantes involucrados para la decisión de que técnicas de aprendizaje activo usará en cada sesión de docencia. Bonwell y Eison (1991) recomiendan que los profesores utilicen gran variedad de técnicas de aprendizaje activo con el fin de mantener a los estudiantes interesados. Mediante el aprendizaje activo se consigue que el alumno se involucre en su proceso de enseñanza-aprendizaje, siendo protagonista de su propia historia académica, constructor de sus propios conocimientos y consciente de su crecimiento evolutivo y su proceso de adquisición de conocimientos y maduración personal.

Se comparten dichas ideas en la *ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León*:

> "En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene gran importancia la manera de trabajar en el aula. Por ello, se deben generar situaciones diversas que permitan al alumnado adquirir conocimientos a través de diferentes estrategias, experimentar el gusto por el trabajo personal y colaborativo y valorar los procesos, el esfuerzo y los errores, procurando que sea partícipe de la evolución de su propio aprendizaje. También debe existir variedad en los procedimientos de evaluación para facilitar la exposición de conocimientos por parte de todo el alumnado y como herramienta imprescindible para mejorar la calidad de la educación" (p. 32191).

La necesidad de que la metodología esté centrada en el desarrollo y adquisición por parte del alumnado de las competencias del currículo manifiesta la necesidad de utilizar las tecnologías digitales e informáticas como mecanismo que mejorará el aprendizaje conceptual, facilitará la ejecución de tareas rutinarias tediosas y proporcionará una herramienta para representar gráficamente distintos fenómenos de la realidad o presentar los resultados de manera ordenada y adecuada. También aportarán elementos de motivación y justificación de la necesidad del conocimiento de las matemáticas las propuestas de trabajo centradas en la realidad y próximas al alumnado. De esta manera se valorará la utilidad de esta materia.

Según Garrett (1997), las filosofías educativas de John Dewey, Edgar Dale y Jerome Bruner afirmaron que la experiencia es esencial para el proceso de aprendizaje. Dewey enfatizó que la calidad y la continuidad de la experiencia son críticas. Dale avanzó estas ideas desarrollando el Cono de la Experiencia, un modelo que demuestra visualmente cómo las experiencias concretas dan sentido a las teorías abstractas. La Teoría de la Instrucción de Bruner explicó cómo los alumnos pasan de representaciones inactivas a través de representaciones icónicas a representaciones simbólicas en el proceso de aprendizaje. Las teorías constructivistas del aprendizaje de Jean Piaget y Lev Vygotsky, así como el Cono de Experiencia de Edgar Dale, se centran en el conocimiento cognitivo y que el desarrollo y aprendizaje del alumnado se construye dentro de un entorno interactivo y un contexto social (aprendizaje colaborativo entre iguales y guiado). Vygotsky (1978) creía que el conocimiento se construye socialmente y el aprendizaje se desarrolla como resultado de interacciones dialógicas y dialécticas entre profesores (facilitadores) y estudiantes, y entre estudiantes. La premisa es que el conocimiento es producido en lugar de distribuido (Zerger, 2008). Estas teorías de aprendizaje tienen una particular relevancia para el contexto de la formación y proporcionan "el andamiaje" necesario para que el aprendizaje de los estudiantes, la colaboración y la construcción del conocimiento tenga lugar efectivamente (Zerger, 2008; Hogan y Pressley, 1997).

III.1.2 Estadios de aprendizaje según Socas

Socas (1997, 2007) considera que las dificultades de aprendizaje se conectan y se refuerzan en redes complejas, y las clasifica en cinco grandes apartados según que estén asociadas a: la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al desarrollo cognitivo de los alumnos y a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Para la investigación que se va a desarrollar, se considera que tienen especial relevancia las primeras, las asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos relacionados con las tendencias asintóticas, que se ponen de relieve desde los niveles semántico y sintáctico del lenguaje de las matemáticas.

En dicho estudio, Socas indica que la comunicación del conocimiento matemático se realiza a través de signos que conforman el lenguaje matemático. Este lenguaje no siempre comunica su significado de forma diáfana, por lo que se recurre al lenguaje habitual para favorecer la interpretación de estos signos. Sin embargo, el uso conjunto de ambos lenguajes puede originar conflictos que afectan a la comprensión y a la comunicación de los objetos matemáticos, conflictos de precisión. También aparecen confusiones semánticas, debido a que en ambos lenguajes encontramos vocabulario común pero con significado diferente. Sin embargo, existen vocablos con el mismo significado, por lo que es importante el contexto en el que se sitúe la palabra o signo para su comprensión. Por último, encontramos vocabulario específico matemático que sólo se encuentra en el estudio de esa área.

Socas interpreta el aprendizaje de los conceptos matemáticos como un proceso de abstracción de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos y, en este proceso, distingue los estadios de desarrollo siguientes:

Semiótico: Los signos nuevos adquieren significado y se definen a partir de los antiguos, ya conocidos. El sistema nuevo de signos es caracterizado por el sistema antiguo.

Estructural: El sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo; es decir, se mantienen las propiedades del sistema antiguo. Pueden aparecer dificultades cognitivas para dar sentido a determinados objetos o nuevas propiedades; y, para explicarlas y dotarlas de significado, se recurre a la observación de regularidades y a comportamientos patrones.

Autónomo: Los signos nuevos que aún no habían podido ser dotados de significado, ni recurriendo a la observación de regularidades o comportamientos patrones, actúan con significado propio, con independencia del sistema anterior. Así, el sistema nuevo adquiere significado en sí mismo, pero es una fuente de dificultades, al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo. Se tiene aquí una generalización de las matemáticas, característica de la misma en el desarrollo de sus signos.

Por tanto, los objetos de las matemáticas se pueden presentar bajo dos estados diferentes: el operacional, de carácter dinámico (*sintaxis*), donde los objetos son vistos como un proceso, y el conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual (*semántica*). Ambos aspectos caracterizan la naturaleza abstracta y ponen de relieve la complejidad de los conceptos matemáticos.

En definitiva, según Socas, el aprendizaje de los objetos matemáticos está estructurado por los estadios semiótico, estructural y autónomo, organizados de forma jerárquica, de manera, que el siguiente se fundamenta en el anterior.

III.1.3 Enfoque Lógico Semiótico para el análisis del aprendizaje de los conceptos matemáticos

Socas (2007) presenta un marco teórico desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) que integra los diversos campos de actividad de la práctica educativa, aunque se centra en el Microsistema Educativo. Este marco se define a través de la elaboración de modelos de competencia teóricos y prácticos (Formal y Cognitivo), y va a permitir analizar y entender situaciones problemáticas del propio microsistema. En concreto, en su trabajo analiza y clasifica las dificultades y los errores en la construcción de conocimientos algebraicos, para determinar el origen de los mismos.

El autor considera importantes y necesarios tanto el diagnóstico como tratamiento de los errores de los alumnos por su influencia en el aprendizaje matemático subsiguiente. En concreto, menciona varios estudios (Rico 1995, Radatz 1980, Brueckner y Bond 1984, Brousseau, Davis y Werner 1986, Mulhern 1989, Bell 1986, Borassi y otros 1987), que constatan que el estudio de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas ha sido un objetivo de investigación constante en Educación Matemática, que ha ido evolucionando a través de distintas líneas de trabajo.

El Modelo de Competencia Formal en ELOS se establece a partir de los aspectos funcionales, fenomenológicos y conceptuales del lenguaje algebraico, que el autor determina, y cuyas características relevantes son:

− Funcionales: Relativos a las representaciones externas del objeto algebraico, definiciones, propiedades, relaciones con otros objetos y demostraciones.

− Fenomenológicos: Situaciones concretas asociadas a los conceptos que permiten desarrollar capacidades para dar significado a los signos del Álgebra.

− Conceptuales: Permiten relacionar los signos con los objetos matemáticos y sus significados. Este aspecto constata la dualidad objeto-proceso del lenguaje algebraico; es decir, la convivencia del conocimiento conceptual, que depende de la cantidad de relaciones entre las representaciones internas y no puede aprenderse sin significado, y el procedimental, que depende del sistema de representación y de sus reglas sintácticas, y se genera a partir de aprendizajes rutinarios. Ambos conocimientos se benefician y se promueven recíprocamente. El autor caracteriza esta dualidad del pensamiento algebraico a través de los aspectos operacional, estructural y procesual de los objetos matemáticos.

El Modelo de Competencia Cognitivo de ELOS sobre el lenguaje algebraico se organiza en torno a tres componentes, que describimos brevemente:

− Las representaciones semióticas: Diversas investigaciones, (Hiebert, 1988; Duval, 1993, 1998, 1999; Castro y Castro, 1997), manifiestan que las representaciones son fundamentales para la comprensión del conocimiento y la formación de conceptos. En concreto, el autor presenta la caracterización que hace Duval (1993) de la comprensión de un concepto (coordinación espontánea de al menos dos registros de representación). El autor aborda la noción de *representación* considerando el marco de Peirce (1987), y la define a través de los siguientes elementos: el contexto (aspectos del Microsistema Educativo), los referentes (signo, objeto y significado) y las relaciones entre los referentes (signo-significado, signo-objeto y objeto-significado). En concreto, la representación es un signo que tienen caracteres que le son propios, establece una relación diádica con el significado y establece una relación tríadica con el significado a través del objeto, mediante las díadas signo-objeto y objeto-significado, Pecharromán, (2014).

− Sobre los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación, Socas considera que a partir de los sistemas de representación semióticos (SRS), más visuales o intuitivos de los objetos matemáticos, tienen lugar una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo, denominados y caracterizados en Socas (1997), hasta alcanzar de forma significativa el SRS formal del objeto.

− Sobre las dificultades y errores en el aprendizaje, Socas retoma las ideas de su primer artículo citado, en relación a las dificultades, los obstáculos y los errores en el aprendizaje de las matemáticas. En concreto, el autor considera que los errores tienen su origen en alguno de los dos siguientes aspectos del aprendizaje de las matemáticas:

- Los obstáculos, que el autor interpreta como obstáculos cognitivos, propios de la matemática y del desarrollo del conocimiento matemático. Dentro de estos, pueden observarse obstáculos de origen didáctico, motivados por determinadas estrategias de enseñanza; y, a veces, obstáculos que tienen su origen en el análisis epistemológico del conocimiento matemático, aunque en este caso, existen obstáculos desligados de la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar (Socas 2007, p. 33).

- La ausencia de significado, debida a la complejidad de los objetos y procesos matemáticos, o debida a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Una vez definidos los Modelos de Competencia, Socas describe la comprensión que el alumno tiene de un objeto matemático desde el punto de vista de las relaciones entre los elementos del modelo de competencia cognitivo (sistemas de representación, estadios de desarrollo del objeto y dificultades y errores). El autor tiene como referente el modelo de coordinación de registros de Duval (1993), considera que la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático, Socas (2007, p.35), y lo adapta al marco de Peirce interpretando las relaciones de la tríada signo-objeto-significado. La relación objeto-significado se establece a través de los estadios de desarrollo cognitivo del signo hacia el objeto representado. Socas distingue dos categorías de comportamiento en cada estadio señalado en el modelo anterior, pero aquí, sólo se señalan los rasgos más característicos de cada uno:

− Semiótico: Se reconocen los elementos de un SRS en relación con el objeto matemático.

− Estructural: Se realizan transformaciones en el anterior SRS y conversiones entre SRS, en las que hay un sistema que el alumno controla y facilita la conversión al otro.

− Autónomo: Se dominan diversos SRS para significar el objeto (al menos dos), y se coordinan de forma espontánea. Se realizan producciones en los SRS y producciones idiosincrásicas.

III.1.4 Conceptualizaciones sobre el concepto de límite

La investigación que aquí se describe se basa en el análisis de los procesos docentes que tienen lugar siguiendo diferentes metodologías para que los alumnos adquieran el concepto de asíntota, que como ya se ha indicado en el capítulo anterior (apartado de antecedentes) su fundamento es el concepto de límite de una función. Aquí se considera la conceptualización de Blázquez y Ortega (2002), que es equivalente a la definición métrica, por ejemplo de Spivack (1970, p. 110), pero que según Gatica (2007) no es tan difícil de comprender por los alumnos. A continuación, se reproducen las conceptualizaciones de límite infinito en un punto y de límite infinito positivo cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$. (No se escribe el resto de variantes por su sencillez):

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ sií para cualquier número real K existe un entorno reducido del punto a tal que las imágenes de todos los valores de este entorno son mayores que K.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ sií para cualquier aproximación K de L ($K \neq L$) existe un número real H tal que para todo $x > H$, *f(x)* es mejor aproximación de L que K (las diferencias positivas son menores).
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ sií para cualquier número real K existe otro número real H tal que para todo $x > H$ sus imágenes $f(x) > K$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ sií para cualquier número real K existe otro número real H tal que para todo $x < H$ sus imágenes $f(x) > K$.

Por otra parte, Ortega y Pecharromán (2010, 2014), siguiendo el modelo de aprendizaje basado en estadios de aprendizaje (Socas, 2007), analizan las acciones de aprendizaje partiendo de las representaciones gráficas de las funciones y prueban que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) adquieren el estadio semiótico de sus propiedades globales, alcanzan competencias estructurales y, en algunos casos, llegan al estadio autónomo. Estos autores consideran que el punto de partida de estos aprendizajes está en las representaciones gráficas y, por esta razón, será la fundamentación teórica de esta investigación.

Según Pecharromán y Ortega (2014) los alumnos presentan algunos errores que manifiestan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones a través de sus gráficas, y hacen una clasificación de éstos según que los alumnos van adquiriendo los conceptos a través de los estadios de aprendizaje. Estos estadios llevan asociados unas acciones de aprendizaje caracterizadas en el marco del Enfoque Lógico Semiótico que son las que nos permiten identificar tales errores.

El conocimiento de los errores pretende motivar estrategias didácticas para su prevención, lo que profundiza en el conocimiento del proceso de enseñanza de los conceptos. Por esta razón, es importante dar a conocer dónde y cómo se producen los errores en el aprendizaje de los conceptos con el fin de tratar de evitar el fracaso escolar que se produce en estos niveles educativos.

En general, predominan los aprendizajes del estadio semiótico, en el que la información se obtiene de forma directa de la gráfica, y aparecen importantes dificultades de aprendizaje al pasar del estadio semiótico al estructural, mediante una transformación gráfica. En el estadio autónomo predominan aprendizajes memorísticos y poco significativos de las definiciones de los conceptos, y hay dificultades para completar los aprendizajes asociados a este estadio debido a que los aprendizajes de los estadios anteriores no han sido adecuadamente adquiridos.

Habida cuenta de que la coordinación de representaciones se desarrolla desde las conversiones, y considerando que para que el aprendizaje de un concepto sea real, es necesario que se produzca de forma espontánea la coordinación de dos representaciones de dicho concepto; la docencia debe favorecer todas las acciones que preceden a la coordinación o doble conversión, como los reconocimientos en los distintos sistemas de representación, las trasformaciones y las conversiones directas e inversas.

Por tanto, se propone una docencia estructurada que se desarrolle a través de las acciones de aprendizaje de reconocimiento, transformación, conversión y coordinación sobre las representaciones del concepto. Se parte del sistema de representación gráfico, que es el más intuitivo y cercano al alumno y, a partir de él, se sucederán los distintos sistemas de representación, hasta la formalización del concepto en su representación algebraica.

III.2 MARCO METODOLÓGICO

Se considera principalmente una metodología de referencia para la puesta en acción de los diferentes ciclos de investigación siguiendo las pautas marcadas por la Investigación-Acción y, por otro lado, se integran en dicha metodología las orientaciones metodológicas según la normativa educativa vigente.

III.2.1 La investigación-acción

La Investigación-Acción (IA) se enmarca en la metodología cualitativa y aporta una vía de reflexión sistemática sobre la acción, a la vez que facilita un procedimiento para clarificar y definir la práctica. Está vinculada a la práctica profesional, y orientada a la transformación y al cambio, y proporciona también elementos que pueden ayudar a redimensionar las tareas y a replantear los objetivos que se pretenden alcanzar. Se acomoda perfectamente. Se trata de un estilo de investigación centrada en los problemas sociales y, por tanto, es aplicable para analizar problemas prácticos de la educación.

Kemmis y McTaggart (1988, p.9) definen la IA como: una forma de indagación introspectiva colectiva emprendida por participantes en situaciones sociales con objeto de mejorar la racionalidad y la justicia de sus prácticas sociales o educativas, así como la comprensión de estas prácticas y de las situaciones en las que tiene lugar. En resumen, la IA proporciona una forma de gestionar situaciones sociales complejas.

Esta forma de investigación educativa ofrece a los enseñantes el modo de llevar a cabo una indagación crítica de su propio trabajo, una indagación que según Carr y Kemmis (1986) es moldeada y a su vez moldea el objetivo general de la mejora (citado por Kemmis y McTaggart).

Uno de los rasgos distintivos de la IA es que las personas afectadas por los cambios planificados, tienen la responsabilidad de decidir acerca de la orientación de una acción críticamente informada que parece susceptible de conducir a una mejora y a valorar los resultados de las estrategias sometidas a una prueba práctica.

Según Kemmis y McTaggart, Lewin (1946) la definió como un proceso de peldaños en espiral, cada uno de los cuales se compone de planificación, acción y evaluación del resultado de la acción. En la práctica, el proceso comienza con la idea general de mejorar o cambiar un hecho. Este plan general se divide en fases alcanzables que, una vez puestas en práctica, aportan datos que permiten valorar sus circunstancias, su acción y sus efectos lo que proporciona una reflexión crítica del proceso y plantear una nueva acción. Así, se genera una nueva situación sobre la que se puede actuar nuevamente.

Kemmis y McTaggart enuncian las fases que deben seguirse una vez que ha sido identificada la preocupación temática:

1. Planificación de una acción organizada y flexible que reconozca las limitaciones reales, materiales y políticas.
2. Actuación de manera deliberada y controlada, vinculada a una práctica anterior. Quizás sea necesaria la negociación y el compromiso. Los actores intentan recoger datos acerca de su acción con objeto de poder valorarlos a fondo.
3. Observación como base para la reflexión. Las categorías de la observación planeadas con antelación serán insuficientes. Además, los autores recomiendan que en esta fase, las personas dedicadas a la IA deberían registrar siempre en un diario observaciones adicionales a aquellas que encajan en las categorías planificadas de la observación.
4. Reflexión sobre lo observado. Se pretende hallar el sentido de los procesos, los problemas y las restricciones que se han manifestado en la acción estratégica mediante la discusión entre los participantes. Esta fase tiene, por un lado, un aspecto valorativo y, por otro, un aspecto descriptivo a través de un retrato más vigoroso de la vida y el trabajo en la situación dada y de las limitaciones de la acción.

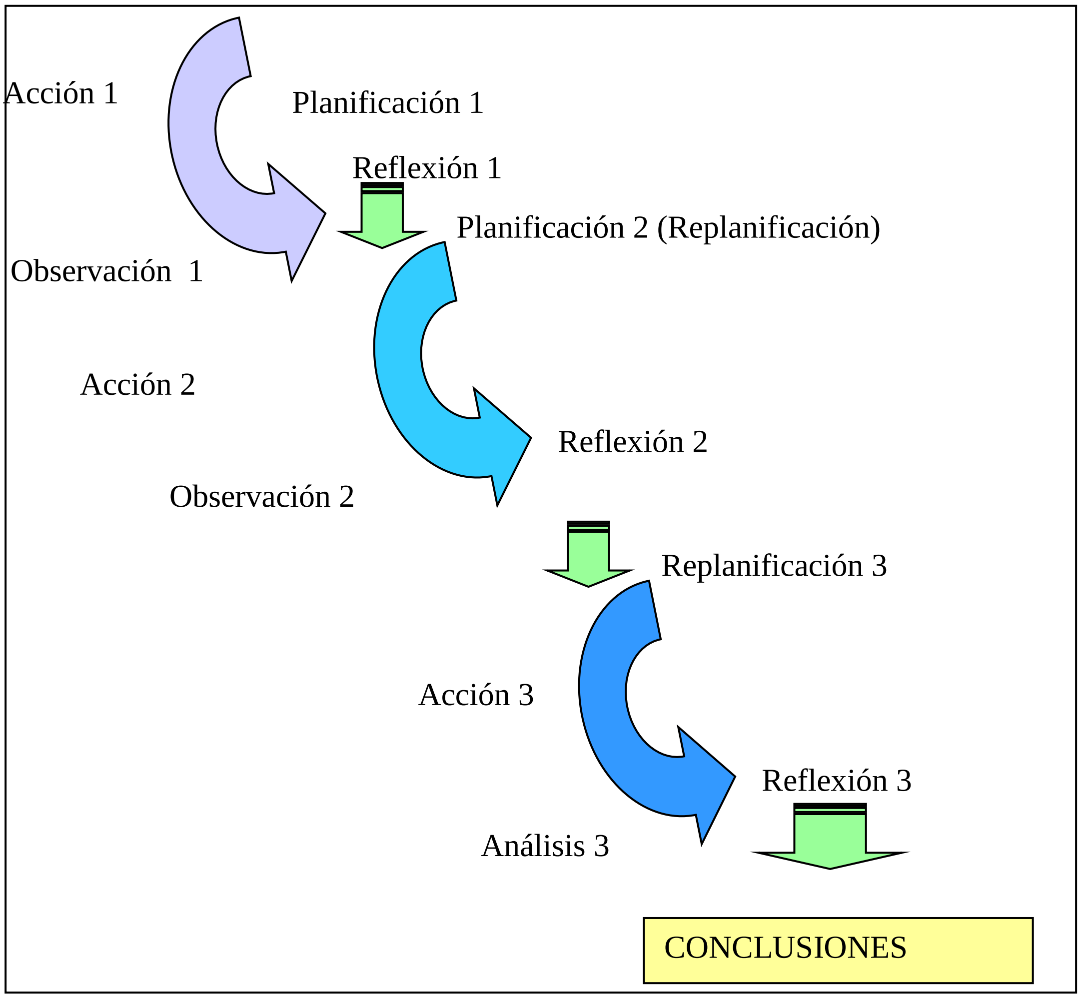
Todos estos pasos no son momentos estáticos sino pasos de una espiral.

Los autores consideran que la IA no debe ser ni lo que hacen los profesores normalmente (proceso de reflexión), ni la resolución de un problema concreto, ni una investigación acerca de otras personas ni tampoco un método científico aplicado a la enseñanza. Kemmis y McTaggart señalan una serie de puntos para que una investigación siga una metodología de IA y, de ellos, se destacan los siguientes:

- Se propone mejorar la educación mediante su cambio y aprender a partir de las consecuencias de los cambios.

- Es participativa.
- Sigue una espiral introspectiva (planificación, acción, observación, reflexión y, luego, replanificación).
- Es colaboradora en cuanto que implica a los responsables de la acción a la mejora de ésta, ampliando el grupo colaborador tanto a las personas más directamente implicadas como con el mayor número posible de personas afectadas por la práctica que se toman en consideración.
- Es un proceso sistemático de aprendizaje (utiliza la inteligencia crítica).
- Induce a teorizar acerca de las prácticas indagando en las circunstancias, la acción y las consecuencias de ésta. Esta indagación va a permitir al investigador comprender las relaciones entre todas ellas.
- Concibe de modo más amplio y flexible aquello que puedan constituir pruebas; no sólo implica registrar descriptivamente aquello que ocurre con la máxima precisión posible, sino también recopilar y analizar nuestros propios juicios, reacciones e impresiones en torno a lo que ocurre.
- Exige el mantenimiento de un diario personal.
- Implica que las personas realicen análisis críticos de las situaciones con las que operan.
- Empieza operando con cambios que pueden ser intentados por una persona y se desplaza hacia cambios más amplios. Además, se comienza con pequeños ciclos (de planificación, acción, observación y reflexión), que pueden ayudar a definir problemas, ideas y supuestos con mayor claridad.
- Nos permite dar una justificación razonada de nuestra labor educativa ante otras personas.

Kemmis y McTaggart indican que los pasos que se deben seguir para realizar una IA, comienzan con la formación del grupo de trabajo y la realización de una reflexión inicial. A continuación, debe realizarse la planificación de la acción, siempre examinando la situación en términos de condiciones objetivas (oportunidades y limitaciones físicas y materiales, disponibilidad de recursos, límites en el tiempo y en el espacio,...) y de condiciones subjetivas (oportunidades y restricciones en cuanto al modo en que la gente piensa, a las expectativas, las pautas existentes de relaciones formales e informales,...). Entre los puntos importantes que se deben planificar están: el cambio de utilización del lenguaje y el discurso, el cambio en las actividades y las prácticas y finalmente planificar el producto.



III.2 *Figura 3.2.* Ciclo Investigación-Acción

El hecho de que la IA deba ser colaborativa supone el trabajo conjunto y la interacción progresiva entre los investigadores y los prácticos. Esta colaboración contribuye a ir modificando paulatinamente la mentalidad de todos los que colaboran en la investigación y, por tanto, va a repercutir en la innovación educativa. Pérez Serrano (1990) afirma que es una modalidad de investigación en la acción, que pone el énfasis en el trabajo conjunto entre investigadores y educadores, sin excluir otros miembros de la comunidad educativa. La innovación se produce a partir del esfuerzo conjunto realizado para vincular la investigación con el desarrollo, la producción del conocimiento y su utilización práctica en el ámbito educativo. Las decisiones se toman siempre entre todos; cada miembro del equipo actúa con igual responsabilidad en las decisiones que afecten al equipo, así como en sus actuaciones.

Aunque la IA no prescribe reglas que rijan las actuaciones de los profesores para facilitar la comprensión en los alumnos, la integración de docencia, praxis e investigación permite que el investigador pueda ir reformulando las hipótesis de trabajo según avanza en la investigación, y que los docentes adquieran una orientación general que les permita una mejor comprensión de las situaciones particulares del proceso de enseñanza y aprendizaje.

No todos los trabajos que describen o analizan un problema educativo son investigaciones, ni todas las investigaciones educativas que sigan los ciclos, con las cuatro fases descritas, se pueden considerar que siguen el método de IA, ya que, para ello, tienen que cumplir además otros requisitos adicionales. Aquí se describen los que considera Pérez Serrano (1990, p.156):

- Unión de teoría y praxis: Hoy día, cada vez es mayor la demanda de una investigación abierta, flexible, participativa, asequible a cualquier profesional y sobre todo, comprometida en la resolución de problemas prácticos. La autora cita a Escudero (1987, p.16) que dice que la IA es uno de los compromisos más decididos para superar el binomio teoría-práctica.
- Está orientada a la mejora de la acción: en el terreno educativo podríamos enunciarlo como "beneficiar a los otros" (formación). Cita Pérez Serrano a Stenhouse, para quien la IA "*perfecciona la práctica docente, enriquece a profesores, alumnos e investigadores, a la vez que perfecciona la enseñanza y ayuda al profesor a desarrollar sus destrezas*".
- Parte de problemas prácticos: Este tipo de investigación no pretende la explicación de un problema por una ley general o una teoría, sino que busca la comprensión de una situación particular. Su objetivo va más dirigido a la organización de la práctica que a la predicción de proposiciones generales.
- Protagonismo del práctico: La IA pretende implicar activamente a los docentes, *"convertirles en protagonistas de sus propias investigaciones"* ya que ellos conocen directamente los problemas cotidianos del colegio o del aula, razón por la cual está justificado el papel de protagonista. La autora cita a Stenhouse (1987) que se inclina también por "*dar prioridad a los docentes en la investigación educativa, toda vez que considera que los profesores son los investigadores más adecuados, porque unen directamente el problema objeto de estudio*".
- Que se mantenga la redacción de un diario del proyecto en el que se registren las reflexiones críticas relativas al desarrollo de la investigación en cada uno de los ciclos de IA que deben seguir una secuencia helicoidal donde la reflexión de uno de ellos debe integrarse en la planificación del siguiente.
- Perspectiva ecológica: Realiza el estudio en su contexto. Se sigue la programación establecida, sin alterar el ritmo de trabajo, ni el contenido, ni otros factores propios de la docencia, manteniendo uniformidad en los criterios y

acuerdos que se establecen dentro de las decisiones competentes del Departamento de Matemáticas de cada centro dónde se ha intervenido.

La investigación que aquí se describe cumple todos los requisitos formulados por Pérez Serrano y, por tanto, la metodología que se ha considerado en el desarrollo de la tesis es IA. Esta metodología integra docencia, praxis e investigación y, aunque sólo garantiza una validez interna que depende del usuario, el equipo investigador está convencido de que los resultados obtenidos puedan ser aplicados en la práctica educativa en otros colectivos similares.

III.2.2 Orientaciones metodológicas

Según Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Se recuerda que las competencias clave en el Sistema Educativo Español son las siguientes:

a) Comunicación lingüística.
b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
c) Competencia digital.
d) Aprender a aprender.
e) Competencias sociales y cívicas.
f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
g) Conciencia y expresiones culturales.

En el ANEXO I de dicha orden se describen con más detenimiento dichas competencias y en él se hacen ciertas afirmaciones que merece la pena ser consideradas aquí. Se hace una transcripción de las mismas:

La competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología inducen y fortalecen algunos aspectos esenciales de la formación de las personas que resultan fundamentales para la vida.

La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.

El uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos, así como para emitir juicios fundados y seguir cadenas argumentales en la realización de cálculos, el análisis de gráficos y representaciones matemáticas y la manipulación de expresiones algebraicas, incorporando los medios digitales cuando sea oportuno. Forma parte de esta destreza la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan (p. 6993).

Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo real y utilizar los conceptos y procedimientos propios de la matemática y utilizar herramientas apropiadas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en situaciones de la vida real. La adquisición de la competencia matemática adquirida por el alumno supone que éste es capaz de establecer una relación profunda entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, implicados en la resolución de una tarea matemática determinada. La resolución de una tarea matemática determinada requiere un nivel competencial basado en el rigor, respeto a los datos reales de la problemática en cuestión también, por qué no, de una actitud positiva que incluya la voluntad de querer resolver dicha tarea.

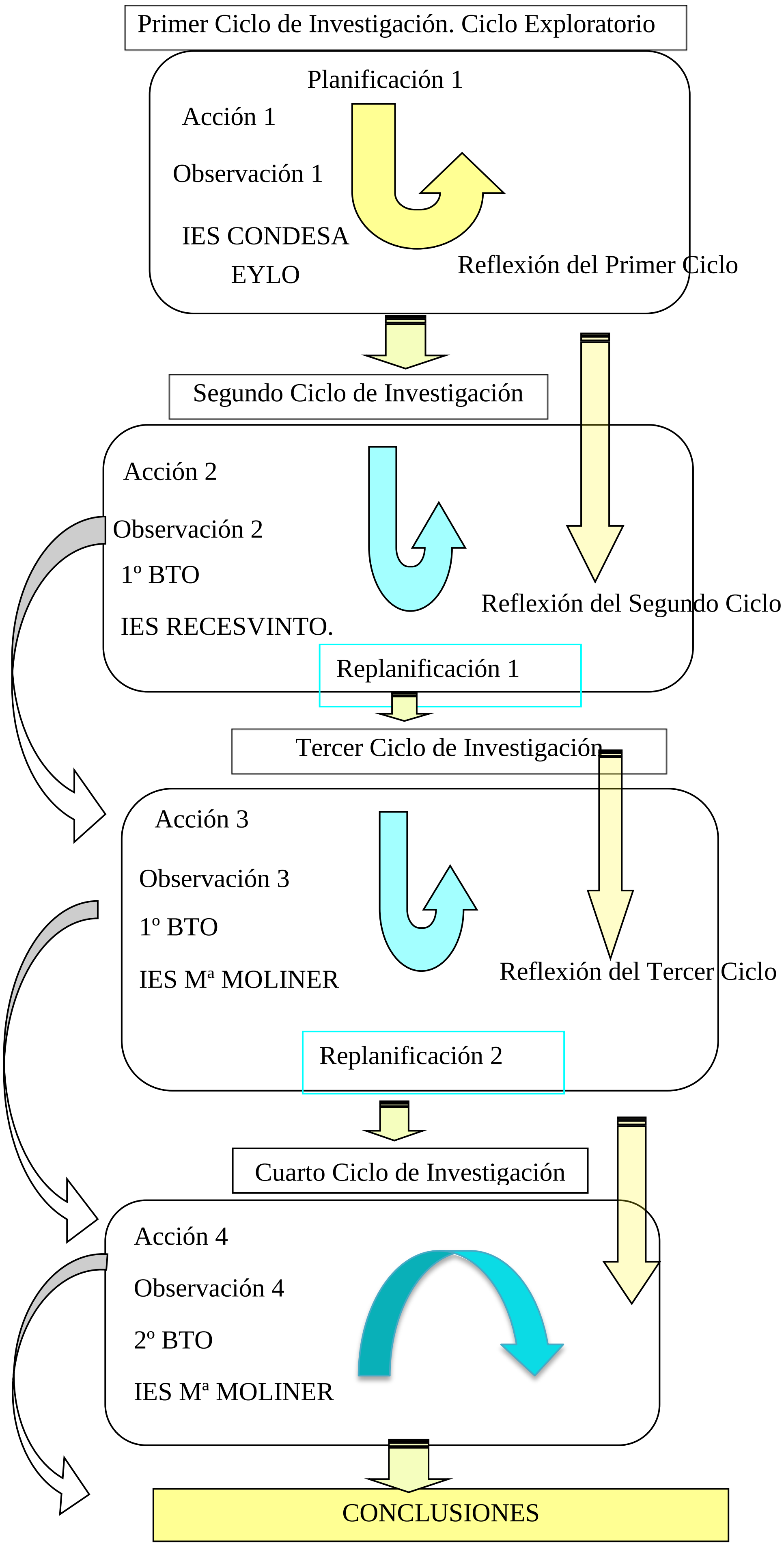
A continuación se seleccionan algunas de las orientaciones metodológicas recogidas en dicha Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, concretamente en el ANEXO II, que se han tenido en consideración para el marco metodológico de la investigación. Sin duda, dichas orientaciones facilitan el desarrollo de estrategias metodológicas que permiten trabajar por competencias en el aula y, por tanto se transcriben las más interesantes a continuación. Se comparte plenamente que:

- Todo proceso de enseñanza-aprendizaje debe partir de una planificación rigurosa de lo que se pretende conseguir, teniendo claro cuáles son los objetivos o metas, qué recursos son necesarios, qué métodos didácticos son los más adecuados y cómo se evalúa el aprendizaje y se retroalimenta el proceso.
- La naturaleza de la materia, las condiciones socioculturales, la disponibilidad de recursos y las características de los alumnos condicionan el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que será necesario que el método seguido por el profesor se ajuste a estos condicionantes con el fin de propiciar un aprendizaje competencial en el alumnado.
- Los métodos didácticos han de elegirse en función de lo que se sabe que es óptimo para alcanzar las metas propuestas y en función de los condicionantes en los que tiene lugar la enseñanza. Asimismo, la selección y el uso de materiales y recursos didácticos constituye un aspecto esencial de la metodología. El profesorado debe implicarse en la elaboración y diseño de diferentes tipos de materiales, adaptados a los distintos niveles y a los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje de los alumnos y alumnas, con el objeto de atender a la diversidad en el aula y personalizar los procesos de construcción de los aprendizajes. Se debe potenciar el uso de una variedad de materiales y recursos, considerando

> especialmente la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje que permiten el acceso a recursos virtuales (p. 7002-7003).

Todo lo anteriormente expuesto justifica la elaboración de material multimedia original e inédito para el desarrollo de la investigación.

La presente investigación se ha llevado a cabo durante cuatro cursos académicos 2014/15, 2015/16, 2016/17 y 2017/18 en los siguientes IES: Condesa Eylo de Valladolid, Recesvinto de Venta de Baños (Palencia) y María Moliner de Laguna de Duero (Valladolid) los dos últimos años. A continuación, se presentan todos los aspectos relativos a cada ciclo de investigación especificado en diferentes capítulos. El siguiente esquema muestra los ciclos de IA que se han desarrollado, como están relacionados entre sí, los centros educativos implicados y los cursos académicos en los que se ha realizado la experimentación.


Primer Ciclo de Investigación. Ciclo Exploratorio
Planificación 1
Acción 1
Observación 1
IES CONDESA
EYLO
Reflexión del Primer Ciclo
Segundo Ciclo de Investigación
Acción 2
Observación 2
1º BTO
IES RECESVINTO.
Reflexión del Segundo Ciclo
Replanificación 1
Tercer Ciclo de Investigación
Acción 3
Observación 3
1º BTO
IES Mª MOLINER
Reflexión del Tercer Ciclo
Replanificación 2
Cuarto Ciclo de Investigación
Acción 4
Observación 4
2º BTO
IES Mª MOLINER
CONCLUSIONES

El trabajo que se desarrollará en la experimentación, como no puede ser de otra manera, tiene que impartir los contenidos del currículo según la normativa vigente referente al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato que publica en forma de tablas tales contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Posteriormente la Comunidad de Castilla León (Orden EDU/362/2015 y Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo) publica el desarrollo de dicho currículo siguiendo la misma estructura. En el ANEXO X.1.1, se recoge dicho tratamiento curricular relativo al Bloque de Funciones. Aquí sólo se presenta de forma transversal un resumen de los contenidos curriculares relativos al concepto de asíntota y de todos los subyacentes a él:

- El sistema de representación cartesiana
- Concepto y representación gráfica de funciones
- Propiedades globales de las funciones
- Modelos lineales y cuadráticos
- Familias de modelos funcionales
- Operaciones y composición de funciones
- El concepto de límite. Cálculos de límites
- Continuidad
- Asíntotas
- Representación de funciones

La palabra asíntota aparece 5 veces en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Por un lado, concretamente en Dibujo Técnico I y II, correspondiente a 1º y 2º Bachillerato, respectivamente, como un estándar de aprendizaje evaluable, vinculado únicamente como elemento que define a una cónica: *"Traza curvas cónicas determinando previamente los elementos que las definen, tales como ejes, focos, directrices, tangentes o asíntotas, resolviendo su trazado por puntos o por homología respecto a la circunferencia"*. Por otro lado, como un contenido en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1º Bachillerato, textualmente: *"Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Aplicación al estudio de las asíntotas",* y su correspondiente estándar de aprendizaje evaluable *"Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales"*. En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, aparece como un estándar de aprendizaje *"Calcula las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas*.

Respecto a la concreción en Castilla y León aparece 8 veces: en Matemáticas I: "*Comportamiento asintótico de una función: asíntotas y ramas infinitas"* y su estándar correspondiente "*Representación gráfica de funciones: dominio, recorrido, simetrías, monotonía, extremos relativos y absolutos, curvatura, puntos de inflexión, asíntotas y periodicidad"*.

En Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I se muestra el contenido *"Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Límites en el infinito. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Tipos de discontinuidades. Aplicación al estudio de las asíntotas. Ramas infinitas"*. En 2º de Ciencias Sociales *"Continuidad. Tipos de discontinuidad. Estudio de la continuidad en funciones elementales y definidas a trozos. Asíntotas y comportamiento asintótico de una función"*.

El tratamiento del concepto de asíntota no es preceptivo en Secundaria Obligatoria, pero se suele introducir intuitivamente relacionado con las tendencias en 4º de ESO como una propiedad global a través de las gráficas de familias de funciones, aunque todo depende de cada profesor. Se deberá estudiar con mayor rigor en 1º de Bachillerato y, por tanto, en el marco ELOS es fundamental conocer qué saben los alumnos sobre contenidos mínimos relativos al bloque de funciones antes de enfrentarse al nuevo concepto.

CAPITULO IV

IV PRIMER CICLO DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

Como ya se indicó en estructura de la tesis, este capítulo está dedicado a la investigación asociada al Primer Ciclo de Investigación-Acción. Sin embargo, este ciclo no constituyó el primer acto de investigación, ya que inicialmente se llevó a la práctica una experimentación exploratoria que se describe como una introducción al primer ciclo propiamente dicho.

En el curso académico 2014/15, la investigadora se encontraba en situación de comisión de servicio como Asesora de Formación Permanente del Ámbito Científico-Tecnológico en el Centro de Formación e Innovación educativa (CFIE) de Valladolid y, al no tener docencia directa a su cargo en educación secundaria, implementó este ciclo en el IES Condesa Eylo de Valladolid con la colaboración de la profesora Dña. Marta Carazo Lores, en un grupo de 4º ESO, durante los periodos lectivos del mes de marzo del curso escolar.

IV.1 PLANIFICACIÓN

A continuación, se especifica brevemente la planificación de las diferentes fases relativas a este periodo de investigación:

Fase de preparación: El proyecto se presentó al Área de Programas Educativos de la Dirección Provincial de Educación de Valladolid, y al Equipo Directivo y Departamento de Matemáticas del IES Condesa Eylo. La experimentación tuvo lugar en un grupo de 29 alumnos de 4º ESO de la opción A y se contó con la colaboración de su profesora, quien, además de facilitar dicha intervención, colaboró en la misma. Esto posibilitó recoger información del profesorado que impartió docencia en el grupo de dicha experimentación el curso académico anterior y se diseñó una prueba inicial para recoger datos sobre los saberes matemáticos de los alumnos previos a la implementación de la intervención educativa.

Schön (2011) concede mucha importancia a la práctica profesional y la asocia a la utilización de metodologías innovadoras como resultado de una reflexión. Con sus propias palabras *"La práctica profesional reflexiva permite al docente la construcción de conocimientos a través de la solución de problemas que se encuentran en la práctica; esto conlleva la construcción de un tipo de conocimiento desde las acciones* *para tomar decisiones mediante la utilización de estrategias y metodologías para innovar"*, Schön (2011, p. 14). La propuesta de Schön va encaminada a lo que hoy se le conoce como formación permanente para ayudar al docente a mejorar la calidad de la enseñanza, mediante la práctica docente reflexiva.

Refiriéndose al aprendizaje de la Geometría por alumnos del Grado de Educación Primaria, Ortega (2011) destaca la importancia de la reflexión sobre la práctica educativa para, de esa forma, poner de manifiesto aspectos mejorables de la docencia. Llega a decir que los profesores de matemáticas mejoran su actividad profesional si son analistas de lo que ocurre en el aula y son capaces de prever lo que ocurrirá, también será necesario adaptarse a lo que realmente ocurre y a las necesidades de los alumnos para la mejora de su aprendizaje. En suma, se puede afirmar que la reflexión en la acción sobre la acción mejora la comprensión.

Fase implementación: Se recabó el apoyo de las familias para que los alumnos visualizaran en sus casas los vídeos desde la plataforma Moodle, mediante una circular escrita (ANEXO X.2.1) y una reunión presencial (ANEXO X.2.2). También se estableció un nuevo contrato didáctico con el alumnado basado en la aplicación de la Metodología "Flipped Classroom" (AI) y se les explicó cómo se iba a desarrollar la docencia en las próximas sesiones (ANEXO X.2.3); para lo cual, ellos deberían previamente visualizar en sus casas los vídeos que se habían preparado sobre el bloque de contenido relativo a funciones (ANEXO X.2.6). Se explicó a los alumnos el funcionamiento del nuevo entorno de aprendizaje virtual, la importancia de la visualización de los vídeos antes de cada sesión de docencia en el aula y se les informó sobre las normas y buenas prácticas de uso de los foros virtuales. Finalmente, se desarrolló la docencia directa en el aula en la que participaron como profesores tanto la investigadora como la profesora titular.

Fase observación y análisis: Se analizaron los documentos producidos en la fase anterior: cuadernos de los alumnos, producciones verbales (orales, escritas) y gráficas que aportasen información sobre el proceso mental que recorre cada alumno individualmente, recogidas directamente en el diario del investigador, en el blog de la profesora titular, en grabaciones de vídeo y audio, cuestionarios inicial y final, información recabada mediante un protocolo de actuación del observador externo, documentos e informes creados por la plataforma de Moodle, entrevistas fuera del horario lectivo con alumnos seleccionados; cuestionario para valorar la metodología y el proceso de aprendizaje del alumnado, grado de motivación y valoración global de la primera fase de exploración de la investigación.

Fase de reflexión: Esta etapa es una consecuencia directa del análisis realizado sobre los documentos que se han generado en la acción. Siguiendo las directrices de IA, esta reflexión proporcionará una serie de orientaciones que se deberán tener en cuenta en la preparación, fase de planificación (replanificación) del siguiente ciclo de IA, si ha lugar.

IV.2 ACCIÓN

Las acciones llevadas a cabo en este ciclo exploratorio se centran principalmente en los siguientes bloques:

- Test inicial de conocimientos previos al alumnado
- Sesiones de docencia
- Test de valoración globalizada para el alumnado y la observadora externa

La concreción de todos los aspectos relativos a cada uno de los anteriores bloques se especificará en el siguiente apartado.

IV.3 OBSERVACIÓN, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

A continuación se presenta la fase de observación de este ciclo en el que tienen lugar el análisis y la discusión de la experimentación realizada.

IV.3.1 Test inicial de contenidos previos

Con el objetivo de determinar qué sabían los alumnos sobre los conceptos que serán necesarios para el futuro aprendizaje del concepto de asíntota y que están en relación con los contenidos mínimos exigibles al alumnado tras haber superado positivamente 3º ESO, se propone un test inicial sobre contenidos previos básicos para estos aprendizajes. Dicho test se encuentra en el (ANEXO X.2.4). Según la legislación vigente, finalizado dicho nivel educativo, el alumnado tendrá conocimiento de los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica, también deberá ser capaz de identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal o cuadrática, calculando sus parámetros y características. Además, según el marco ELOS es fundamental conocer qué saben los alumnos sobre contenidos mínimos relativos al bloque de funciones antes de enfrentarse a nuevos conceptos.

Se les insistió en que plasmasen por escrito el razonamiento seguido para contestar a las diferentes cuestiones y todas las dificultades o dudas que se les plantearan. Un comentario bastante generalizado fue que no se acordaban de nada. Un alumno manifestó que mejor dejarlo para después del fin de semana para poder *"saber lo que tenían que recordar"*. Hubo gran número de preguntas sin contestar y en buena parte de las respondidas, se mostró graves errores conceptuales en relación al bloque de contenido de las funciones matemáticas. A modo de resumen se constató:

Aspectos Generales

Confusión en la numeración de los ejes coordenados y en la ordenación de los números enteros en la recta real (por ejemplo, un alumno considera que -2 es menor que -3); consideración de intervalos incoherentes, por ejemplo (a, b) con $a > b$; errores graves en operaciones con números racionales.

Dominio/Recorrido

Confusión entre dichos conceptos; consideración solamente del dominio y recorrido de la función que corresponde a la gráfica que está representada en el papel, a pesar del símbolo de la flecha que indica el carácter infinito de la misma (no reconocen que una flecha representa el carácter infinito de la función).

Crecimiento y Decrecimiento

Mala simbolización de los intervalos de crecimiento y decrecimiento; proyecciones de los intervalos de crecimiento y decrecimiento sobre el eje de ordenadas, en vez del eje de abscisas; confusión de intervalos del eje de abscisas con los del eje de ordenadas.

Máximos y Mínimos

No diferencian los máximos y mínimos absolutos de los relativos; aceptación de que la función sólo tiene valor máximo cuando exactamente en ese valor se pasa de un intervalo de crecimiento a otro intervalo de decrecimiento; ídem para un valor mínimo, cuando se pasa de un intervalo de decrecimiento a crecimiento.

Funciones Afines

Necesidad de dar más de dos pares de coordenadas para dibujar la gráfica de la función afín (no consideran que una recta queda totalmente determinada con dos puntos); no conexión de la resolución analítica de sistemas de ecuaciones lineales con la resolución gráfica y no relacionan el punto de corte de dos rectas con la solución del sistema de ecuaciones.

Función Continua

Argumentación de que toda función continua debe ser creciente y, en algunos casos, consideración de función discontinua si hay intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Como reflexión de este análisis, se considera que estos alumnos no tienen adquiridos los conocimientos básicos mínimos relativos a funciones, supuestos en un alumnado de su nivel educativo. Ante esta situación, se acuerda llevar a cabo un itinerario formativo completo en relación a todos los conceptos de funciones expuestos con el fin de que, mediante los visionados de vídeos, todos los alumnos puedan revisar todos los contenidos que debieran tener adquiridos a la finalización de este curso, que tiene un carácter de educación secundaria obligatoria. Se planificaron las sesiones de intervención en el aula desde la perspectiva de AI aplicada a la docencia de los conceptos de función básicos y previos al de asíntota. Se consideró como objetivo fundamental de esta acción analizar si el uso la metodología de AI podía ser aconsejable.

IV.3.2 Desarrollo de las sesiones de docencia

En las 10 sesiones programadas se aplicó AI y además se implementaron metodologías activas, debates dirigidos e instrucción por pares, con el apoyo de la plataforma Moodle del centro, dónde se alojó el material multimedia generado; en especial, los vídeos editados por la investigadora para poder ser visionados por los alumnos. Tanto la investigadora como la profesora titular, ayudaron a resolver cuantas dudas y conflictos fueron planteados por los alumnos. Según la profesora titular, este grupo se siente menos valorado que otros de su mismo nivel por ser el único no bilingüe (tienen peores expedientes) y estaban deseosos de que comenzara la experimentación que se iba a realizar con ellos como protagonistas. Los alumnos tuvieron una actitud muy buena, estando atentos y receptivos a toda la información que se les trasmitía. Se les expuso una presentación prezi (ANEXO X.2.3) en una reunión previa para que conocieran la nueva metodología para las sucesivas sesiones de docencia. Ningún alumno había oído hablar del AI. Dicha presentación se alojó en la plataforma Moodle del centro. Solamente una alumna comentó que esta nueva forma de trabajo *“no la molaba”* porque, según ella, *“o sea que en casa tenemos que ver los vídeos y contestar a las cuestiones de los foros y en clase los deberes…. Vamos a tener que trabajar más, pues no mola”*.

En esta primera sesión se mostró la disposición de los materiales en la plataforma de Moodle (ANEXO X.2.5). Se les comentó brevemente la estructura de temas y la disposición de los foros. Tras el visionado de los vídeos, los alumnos deberán contestar a las cuestiones que se les plantean. Las diferentes respuestas aparecerán en estructura anidada. Cuando se les pida poner ejemplos, no podrán repetir las respuestas de sus compañeros. Con esta instrucción se pretende que lean las respuestas de sus iguales, que busquen respuestas diferentes y vean la diversidad de situaciones en las que están presentes las funciones; y por último, fomentar la motivación por contestar “rápido” para que los compañeros no “roben o copien sus respuestas”.

Todos los alumnos disponían de ordenador y/o dispositivos móviles para la visualización de los vídeos. Excepcionalmente, un alumno manifestó no disponer de un ordenador en su domicilio, ya que se le ha estropeado; como solución se acordó que visualizara los vídeos en un centro cívico, biblioteca o en el propio centro educativo en periodos de recreo.

Previo a la segunda sesión, se comprobó que sólo 3 alumnos de los 29 habían visualizado el primer vídeo propuesto. Se trataba de un vídeo de la serie Aventura Matemática que trasmitía el concepto de función. Se intentó motivar al alumnado sobre la importancia de la visualización de los vídeos y la responsabilidad que supone implementar esta nueva metodología con su ayuda e implicación. Un alumno, en relación al vídeo introductorio del concepto de función, argumentó: *"que no era de matemáticas, que no explica nada, pero que lo ha entendido bien".* Otro alumno afirmó que ya lo había visto con anterioridad, pero que el profesor del vídeo se liaba mucho, pero que ayudaba a entender los conceptos. Ante esta situación se ha modificado la estructura del Moodle y se ha dividido el contenido del vídeo en cuatro capítulos. Algunos alumnos manifestaban tener una difícil relación con las matemáticas, como el caso de uno de ellos que afirmó *"no tengo ni idea de matemáticas, me aburren…"*.

Se desarrolló la docencia con diálogos continuos con los alumnos y se insistió en la necesidad de ser cuidadosos con la expresión oral y escrita, con la notación matemática y con un uso correcto de los conceptos matemáticos, en concreto con su denominación y formalización; por ejemplo, en las expresiones del dominio y recorrido. Asimismo, se intentó consolidar conceptos básicos y erradicar interpretaciones erróneas, como por ejemplo que la división entre cero no tiene sentido, y se establecieron conexiones matemáticas con situaciones reales cercanas al alumnado. A continuación, se sintetizan las ideas previas que manifiestan de forma oral respecto a cada concepto:

Sobre el concepto de función afirman lo siguiente: que es una curva, que es la situación de números en coordenadas, que es la representación en un eje de coordenadas, que es la unión de variables, que x es la madera y la función $f(x)$ es la silla.

Sobre la función constante: que es siempre continua, que no tiene extremos.

Sobre una función creciente: que es la que tiende a ir hacia arriba, que es la que asciende, que es la que según avanza hacia la derecha va aumentando la altura, que es la que va aumentando el valor de la y.

Sobre la función continua: que es la que no se acaba, que es constante, que es la que no se levanta el lápiz del papel, que es la que sigue la misma trayectoria, que es la función con un dominio sin cortes.

Sobre ideas previas en relación a extremo máximo: que es el punto más alto en el eje y, que es el valor más alto más alto.

Sobre ideas previas en relación a extremo mínimo: que es el punto más bajo en el eje y, que es el valor más bajo más bajo.

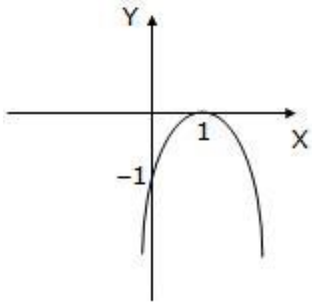
A continuación, se presenta el análisis de los diálogos que se produjeron en la fase de intervención. Las correspondientes trascripciones se reproducen íntegramente en el (ANEXO X.2.7) y sobre dichas transcripciones se han hecho anotaciones a pie de página que son interpretaciones, reflexiones o aclaraciones de la investigadora en relación al sentido matemático del objeto o situación de estudio. Se denotará con P a las intervenciones de la profesora/investigadora y por An (siendo n un número natural) las correspondientes a los alumnos o bien se escriben en cursiva intercalando sus declaraciones en la descripción.

El concepto de dominio y recorrido de una función son básicos para el bloque de contenido que nos ocupa, ante la pregunta de un alumno *"¿Puede ser un dominio y un recorrido para cada punto?"*, manifiesta no comprender dichos conceptos globales de la función, centrando toda su atención en el estudio local de cada punto de la gráfica.

Ante una función definida sólo para números negativos, a un alumno le genera dudas el hecho de calcular las imágenes de algún valor positivo. La profesora le pide que reformule la pregunta para que así sea él mismo quien intente encontrar la solución a su dilema y comenta: *"Porque si sólo está definida desde menos infinito hasta cero, ¿tendría sentido dar valores mayores que cero?"* Inmediatamente, él mismo se responde correctamente, pero pide insistentemente la confirmación por parte de la investigadora. El alumno se muestra muy inseguro y, aunque verbaliza su creencia, no tiene total seguridad en sus afirmaciones.

Ante la dificultad de encontrar los máximos y mínimos en una función, un alumno *"imagina"* una periodicidad en la función que no se manifiesta en el gráfico presentado; argumentando que si la función tuviese esa periodicidad, entonces presentaría varios mínimos y máximos. Otro alumno utiliza el símil de buscar dónde haya un valle y dónde una montaña en la gráfica, para después buscar los valores de las ordenadas. Posteriormente, según palabras de propio alumno, *"Miraremos las profundidades de todos los valles y las altura de las montañas. También la profundidad de los pozos y la altura de montaña, por debajo de la tierra"*. Esta interpretación ayudó a que otros compañeros identificaran extremos relativos.

Cierto alumno no admite que un valor máximo se presente en funciones cuyo recorrido sean valores negativos y, por ejemplo, en la situación de la gráfica de la figura 4.1 afirma que *"Una función que está por debajo de cero no puede tener máximo"*. Siguiendo la comparación del alumno expuesta anteriormente, la investigadora le propone la siguiente reflexión: *"Imagínate que estás por debajo del mar, ¿en la profundidad del mar puede haber montañas? ¿Qué es lo más alto que está bajo el mar?, ¿Se trataría de un máximo relativo?"*. La situación resulta difícil de comprender para cierto sector del alumnado y se incide en que se debe estudiar el comportamiento de la función en entornos de cada posible extremo relativo o absoluto.



IV.1 *Figura 4.1.* Función con recorrido negativo que presenta el máximo, M=(1,0)

Se elaboró un vídeo con GeoGebra dónde se trazaba una recta paralela al eje de abscisas por el punto de la gráfica que presentaba un máximo relativo y se veía que la gráfica quedaba por debajo de la gráfica de la recta en un entorno, aunque pueda haber parte de la gráfica por encima, pero no en ese entorno… Análogamente, cuando se trazaba una paralela al eje de abscisas por un punto de la gráfica en el que presentaba un mínimo se observaba que la gráfica quedaba por encima de esa recta horizontal en un entorno, aunque pudiera haber parte de la gráfica por debajo, pero no en ese entorno. Este mismo razonamiento se hizo con una hoja de papel, haciendo paralelas mediante dobleces, y los alumnos manifestaron que les había facilitado la comprensión de los extremos relativos. Cierto alumno llama *"funciones raras"* a aquellas tales que todas las imágenes de la función sean valores negativos.

Un alumno tenía memorizado, pero sin comprenderlo, que en el caso de una función creciente en todo su dominio de definición, no hay máximo absoluto, y lo verbalizó: *"Si hay infinito no hay máximo absoluto, pero…¿Se podría poner como máximo el infinito?"* La investigadora intentó explicarle que pensase en un valor, el que quisiera, que siempre existiría un valor de la imagen de la función mayor, pero la alumna insistía *"¿Se podría poner que el máximo es más infinito?".* Esta pregunta muestra que para esta alumna el infinito le considera como un valor alcanzable.

También hubo problemas para la formalización en el estudio de la monotonía de una función decreciente en todo su dominio. Cierto alumno, $A5$, planteó dudas ante el estudio global de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y preguntaba insistentemente "*¿Tengo que dar valores?... No se puede, ¿no?"*. Otros alumnos, que tenían muy claros los conceptos, iban contestando a las cuestiones que $A5$ planteaba y le respondían "*¿Para qué quieres valores?", "¿no ves que la hipérbola es decreciente?"* El alumno $A5$ seguía trasmitiendo sus dudas y se produjo este diálogo pedagógico:

"A5: Pero, ¿no hay que poner siempre valores, en plan,… crece de no sé dónde a no sé dónde…?

A1: ¡Es que no crece!

A5: ¡Ya, bueno!… decrece de no sé dónde a no sé dónde…

A3: ¡Es que decrece siempre!

A5: Entonces cuando decrece siempre ¿no se ponen valores?"

En este punto se comprende que *"poner valores"* se refiere a concretar el (o los intervalos) para estudiar la monotonía de la función. En su esquema mental necesitaba fijar intervalos sobre los que indicar si la función es creciente o decreciente. Se clarificó que, en este caso, la función decrece en todo su dominio; es decir, en todos los números reales, salvo el cero. Para ciertos alumnos, y así lo manifiestan ellos, les parece más sencillo expresarlo en forma de intervalo $(-\infty, 0)U(0, +\infty)$.

Ante esta dificultad, un alumno recuerda la situación que se explicó en el estadio semiótico, del estudio de la monotonía, en el que se presentaba a una persona que *"avanzaba"* sobre la gráfica, siempre hacia la derecha, *"subiendo o bajando",* siguiendo el avance natural de la recta real representada en el eje de abscisas para que se visualizasen los intervalos de crecimiento o decrecimiento. El alumno comprende que en la función *"el hombre camina bajando siempre".* $A5$ insiste *"¿Pero aquí?...* señalando la discontinuidad de salto infinito relacionado con la asíntota vertical *(AV)* $x = 0$. A lo que el alumno $A3$ le contesta *"Imagínate que pasa por un "agujero negro" y aparece de nuevo aquí arriba, pero ¿qué pasa?, vuelve a seguir bajando".* La investigadora les anima a hacer el esfuerzo de intentar formalizar el estudio de la monotonía de una función más allá de *"ir para abajo…o para arriba"*. A la pregunta "*¿Cuándo una función es decreciente?"* el alumno $A5$ responde "*No me acuerdo yo"*.

Se constataron confusiones verbales: llamar *"centro",* al origen de coordenadas del plano cartesiano, afirmar que la función afín corta al eje en el punto n, refiriéndose a la ordenada en el origen de coordenadas $(0, n)$; es decir, identificar el valor de x con el punto $(0, x)$.

Inicialmente, ningún alumno contemplaba la posibilidad de que una magnitud pudiese ser variable independiente y dependiente, según la situación concreta de una función. Al reflexionar en grupo, han avanzado en su comprensión respecto al concepto de función.

En otra actividad propuesta, se trataba de encontrar el dominio definición de $f(x) = 1/(x-2)$. Un pequeño sector del alumnado ve claro que $x = 2$ no pertenece al dominio *"Porque no lo puedes calcular, no se puede…",* pero no son capaces de formalizarlo mejor. Ante la dificultad de algunos alumnos que no comprenden por qué se deben buscar los valores que anulan el denominador, se retoma la reflexión sobre el concepto de fracción. Un alumno justifica "*No se puede hacer dos "ceroavos". Está* *mal dicho”,* centrando su razonamiento en que no se puede decir, simplemente como una imposición del lenguaje, no como una incoherencia matemática.

Para que el alumnado visualizase el carácter asintótico de la función inversa $f(x) = \frac{1}{x-2}$ se hizo una práctica con las calculadoras para ir hallando las imágenes de valores cercanos a $x = 2$, tanto por la derecha como por la izquierda. El *“juego”* consistía en que un alumno decía un número cercano a dos y el siguiente decía un número más próximo y calculaba su inverso. Se han detectado graves dificultades en cierto sector del alumnado en relación a la ordenación de números racionales para aproximar los números; en concreto, encontrar un número más próximo a otro, a partir de uno dado. Algunos alumnos no son capaces de construir una sucesión, en el primer caso de números crecientes que se aproximen a 2 y, en el segundo caso, una sucesión decreciente hacia 2. Además, varios alumnos manifiestan cierto grado de ansiedad ante un proceso que puede ser infinito “*Pero, ¿cuántos hay? ¿De cuántos tengo que calcular?”* y del que necesitan saber cuántos debieran calcular *“¡Si hombre!¿Ya con estos ya vale?”*

Un alumno relaciona la inclinación de la recta con la aparición de la variable x (seguramente influenciado por el GeoGebra), pero no lo asocia con el coeficiente que acompaña a x en una función afín. Tampoco se tiene adquirido que la dirección de una recta está determinada por un vector (vector director), que no es único, pero todos ellos comparten dicha dirección; y, curiosamente, otro alumno verbaliza que las únicas rectas que tienen la misma dirección son las paralelas al eje de abscisas. Otro alumno denomina *“funciones planas”* a las funciones constantes, *“porque siguen la misma dirección”.*

Para dibujar funciones a trozos, el mayor problema es, según el lenguaje de los propios alumnos: *“cuando el punto no entra, porque si el punto entra, ya sé cuál es la imagen*”, refiriéndose a la situación de un dominio de intervalo abierto o semiabierto. Se les indicó que para dibujar la gráfica, cuando fuera posible, calcularan el valor de la función como si estuviera definida en el (o los) valores de dichos puntos extremos, pero dibujando un *“punto hueco”* o un *“agujero vacío”* para enlazar, pero parece que no entienden que el cardinal de los puntos de una curva es infinito y no consiguen establecer un orden de los mismos, ni tampoco que el primero y el último pueden no existir. Según un alumno *“es que es difícil de entender, que tengo infinitos puntos y no sé cuál es el primero… o el último”.* Ante la representación gráfica de una función a trozos ciertos alumnos sólo calculan las imágenes de números enteros, dejando *“trozos”* entre números enteros consecutivos sin calcular su imagen. Pero a otros les preocupa *“rellenar los huecos, esos que nos quedan, porque queda raro”.* Es un avance que se comparta esa preocupación, pero muestran desconcierto, como uno de ellos que manifiesta *"nunca he calculado las imágenes de puntos decimales para una función, y no sé cuáles elegir"*.

A continuación, se presenta un interesante debate sobre el infinito entre el alumnado:

"A5: Por mucho espacio que tengas, va a llegar un momento en que no se pueda dividir más, porque… Decís que siempre hay algo más pequeño, pero…no se puede, no va a quedar espacio. No va a quedar casi…

A6: Coge la calculadora y divide, y divide… que no se acaba. Si es infinito no se acaba.

A1: Puedes hacer grupos de 100, 100 más 100… pero puedes hacer 101.

A5: Cada vez más pequeño, más pequeño, pero el espacio no es infinito.

A1: Sí, sí que lo es…

A5: No, que no es infinito

A1: Si es infinito a lo grande y es infinito a lo pequeño, pero lo que pasa es que nuestra capacidad de imaginar eso es muy pequeña.

A2: Pero si yo, ahora, este espacio lo veo con una lupa que parezca que es este espacio, entonces si…

A5: Vale, pero…, aunque…, pero si lo sigo juntando…

A2: Entonces tomo una lupa más grande, vuelve a ser ese espacio…"

El alumno *A1* entiende el concepto del infinito como el proceso infinito de dividir entre un número con la calculadora sin fin, es decir, como un proceso que se puede repetir indefinidamente. El alumno *A*2 interpreta el infinito como la infinidad de posibilidades de reagrupamiento de los números. El alumno *A*5 muestra cierto nerviosismo y sus pensamientos reflexionan sobre la paradoja de una iteración infinita sobre un espacio finito (Aquiles y la tortuga). El alumno *A*2 conjuga la dualidad razonamiento e imaginación, tiene la ingeniosa idea lo de incorporar la herramienta *"lupa"* para que su compañero *"comprenda"* el concepto de infinito.

También surgieron interesantes debates en torno a las tendencias asintóticas. La investigadora propuso a un alumno la siguiente pregunta: "*¿Cómo intentarías explicar a alguien que no entiende lo que es una asíntota?"* y el alumno respondió: *"Pues, que a la función la puedes poner infinitos números, pero que, o sea, que se juntan en infinito, pero como el infinito no acaba pues nunca llegan a juntarse… se aproximan muchísimo pero no llega a tocar la asíntota… Pues que nunca se va a juntar, o sea,… es que yo lo veo también como los programas de diseño por ordenador de piezas y todo eso, que son vectoriales, tú puedes ampliar, ampliar, ampliar y… no va a cambiar el grosor y de una asíntota nunca vas a ver el final… ¿no?"*

IV.3.3 Análisis de la valoración de los alumnos

Los resultados académicos del alumnado respecto al rendimiento obtenido en anteriores trimestres no han variado significativamente, por lo que no se pueden constatar cambios dignos de mención. El mayor interés de esta fase de exploración es el análisis de la metodología y, tras la finalización de la fase de intervención, se propuso al alumnado un cuestionario final para que los alumnos valoraran la docencia recibida. En este apartado, se realiza el análisis de los datos obtenidos con dicho cuestionario, que se encuentra en el (ANEXO X.2.8). Consta de 56 ítems y están distribuidos para recabar información sobre los siguientes apartados: el punto de partida, el grado de implicación personal en el proyecto, el grado de implicación de los docentes, el desarrollo de la actividad, la valoración de los vídeos, según su temática, los resultados obtenidos y sobre la experiencia.

Se dieron unas instrucciones previas para cada uno de los ítems, insistiendo en la necesidad de que justificaran al máximo sus razonamientos y explicaran aquellos puntos que no quedaron suficientemente claros. Además, se hizo especial énfasis en que no se trataba de un examen, y que era anónimo y confidencial.

En el (ANEXO X.2.9) se incluye un estudio pormenorizado de cada ítem, con un análisis porcentual de los datos y una reflexión sobre el resultado observado; pero aquí, se ha optado por una síntesis para aportar una visión global.

Sobre el punto de partida

A tenor de las respuestas de los alumnos, parece que la mayoría ha comprendido la metodología AI, consideraron que era positiva y aceptaron de buen grado la propuesta experimental. La mayor pare de los alumnos confiesa que les produce escasa ansiedad, y el resto se distribuye por igual entre los que expresan un nivel alto y un nivel bajo de ansiedad. Estas valoraciones se mantienen sobre las expectativas de aprendizaje.

La mayor parte de los alumnos no han utilizado tutoriales on-line, pero hay un grupo de alumnos que sí que han recurrido a vídeos tutoriales alojados en Youtube debido a dificultades puntuales en las asignaturas de física-química y matemáticas. Estos alumnos indican que sí que los ayudaron a comprender los conceptos y prácticamente la mitad del alumnado prefiere la explicación de un profesor frente a un video tutorial y el resto considera que *"a veces"*.

Sobre el grado de implicación personal en el proyecto

En esta apartado alcanzan la mayor valoración el interés de la profesora y el dominio de la materia y la menor el grado de responsabilidad del alumnado sobre su papel activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje y la planificación de las sesiones, siendo la puntuación media 2,6 sobre 5 y la amplitud del intervalo de respuestas 0,7. Los alumnos consideran que las profesoras se han interesado por mejorar sus aprendizajes y que siempre han sido tratados con respeto. Estas declaraciones concuerdan con las prevenciones sobre esta metodología señaladas en los antecedentes.

Sobre el desarrollo de la actividad

La valoración media de los ítems de este apartado es de 3,0 puntos sobre 5 y valoran más la explicación del profesor que los vídeos, dicen que aprenden más, que *"aprovechan más la clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas"* y que prefieren hacer los *"deberes clásicos"* en casa que ver un vídeo explicativo. Asimismo, prefieren estudiar revisando sus apuntes que volviendo a visionar los vídeos del tema. En otro orden de cosas, les gusta la plataforma Moodle y se han divertido más que con otras unidades didácticas.

Sobre la valoración de los vídeos, según su temática

El grado de aceptación de los vídeos por parte de los alumnos tiene una puntuación media de 2,7 puntos y destaca positivamente la valoración sobre el vídeo dedicado a crecimiento/decrecimiento y el peor valorado es el dedicado a periodicidad, el resto tiene una valoración parecida en torno a la media.

Sobre los resultados obtenidos

La mayor parte de los alumnos considera que con esta metodología trabaja menos, y que con esta metodología han aprendido menos que con la metodología habitual del aula. Valoran con la puntuación más alta (3,96) *"que esta metodología depende de la responsabilidad del alumno"* y consideran que esta metodología potencia el trabajo en grupo. Sin embargo, aseguran que ha sido escasa la comprensión de conceptos relativos a funciones gracias al visionado de vídeos.

Sobre la experiencia

La valoración media de este apartado es de 2,34. Reconocen su carácter innovador, que conocen suficientemente las características de esta metodología y que ha sido interesante participar en dicha metodología, pero no desean que se aplique en otras unidades ni en otras materias. Declaran que no les produce ansiedad esta metodología y que se han cumplido escasamente sus expectativas de aprendizaje.

IV.3.4 Análisis de la valoración de la observadora externa

La observadora externa (OE) valoró la programación didáctica, la actuación de la profesora-investigadora y las de los alumnos, las interacciones profesor-alumnos, los recursos y condiciones materiales y, por último, aportó sus comentarios finales. En el

(ANEXO X.2.10) aparece el cuestionario-protocolo completo contestado por la profesora titular Dña. Marta Carazo Lores, y ella puntúa de 1 a 5 todas las cuestiones propuestas. En cada ítem se podían aportar comentarios para apreciar mejor los matices de su valoración.

La OE considera que ha habido un alto grado de adecuación de los objetivos y contenidos de la docencia, tanto al nivel educativo de los alumnos como al currículo de la materia. Valora con alta puntuación la metodología utilizada en el desarrollo de la docencia, así como la temporalización del proceso de enseñanza de los contenidos y la introducción de los contenidos nuevos a partir de los conocimientos previos que posee el alumno. También reconoce que se articularon suficientes refuerzos de los conceptos con los ejercicios y ejemplos propuestos. Por otra parte, puntualiza que depende también de lo que trabaje el alumno, no solo de la metodología.

En relación a la actuación de la investigadora, valora positivamente el dominio de los contenidos tratados, así como la claridad y calidad de los videos diseñados. Refiere que su comportamiento y papel durante el desarrollo de la docencia se centró en fomentar el interés y motivar a los alumnos para el aprendizaje, atendiendo a la diversidad.

El alumnado, en el aula, se ha mostrado activo y participativo durante el desarrollo de la docencia. Según la observadora, los alumnos estaban muy acostumbrados a salir a la pizarra y a verbalizar situaciones matemáticas, así que cuando se desarrolló esta metodología, se adaptaron bien: participando en intervenciones orales, preguntando sobre dudas, conceptos que no entendían o que no habían quedado suficientemente claros en los libros o en la clase. Focaliza su atención en las interacciones entre iguales, y considera que se han producido interesantes discusiones sobre las distintas maneras de entender un concepto.

Según la observadora, la motivación de los alumnos hacia el aprendizaje era muy variada y difería mucho entre ellos, pero su grado de esfuerzo y trabajo personal global no ha variado respecto a otras metodologías. Su impresión sobre lo que han aprendido los alumnos, analizando las notas finales del tema, es que no han variado respecto a bloques anteriores. Los alumnos que estudian diariamente siguen manteniendo su trabajo y sus notas.

La frecuencia de las interacciones ha sido constante, la investigadora creaba o provocaba habitualmente situaciones de reflexión. También han sido muy enriquecedoras las interacciones colectivas entre profesor y alumnado así como entre iguales, que han quedado recogidas en las trascripciones correspondientes.

Mediante esta metodología se hace uso de los medios tecnológicos fuera del aula. La observadora aporta que **s**e puede dar la materia sin medios tecnológicos, pero estos siempre nos ayudaran tanto en explicaciones, como a la hora de motivar al alumno. La

OE considera que los recursos empleados han sido idóneos en relación al desarrollo de la docencia, pero no fueron optimizados, ya que, como la mayoría de los alumnos no habían visionado los vídeos previamente, no se pudieron realizar todas las actividades previstas, pues se requería un primer contacto con el contenido teórico.

El uso de la plataforma constituyó el mayor impedimento y así lo indica la OE, quien afirma que no se tenía la suficiente formación para un uso óptimo ni permisos para resolver los problemas técnicos que surgieron en la propia plataforma; y también influyeron negativamente las restricciones de acceso a la misma.

Como propuesta de mejora, la OE aporta la reducción de la duración de algunos de los videos, ya que deben ser cortos y muy claros para no perder la atención del alumno. Observación que coincide con las indicaciones de Miller (2012) y de Verleur, Heuvelman, & Verhagen (2011).

A modo de conclusión, la OE manifiesta que la metodología puesta en práctica tiene que ser utilizada de manera constante, puesto que requiere mucha implicación por parte de los alumnos para obtener resultados mejores que con las metodologías clásicas. Es necesario que los alumnos cambien su manera de trabajar y estudiar en casa; aunque parezca inicialmente una metodología que no requiere mucho esfuerzo en casa del alumno, éstos se quejan de que con ella tienen que trabajar mucho más. A pesar de no haber sido una experiencia totalmente satisfactoria, por lo anteriormente expuesto, ha sido muy positiva por la riqueza interactiva entre todas las personas implicadas en el proyecto.

IV.4 REFLEXIÓN

A partir del análisis y valoración de estas interesantes aportaciones de los alumnos, se considera que las dificultades lingüísticas afectan a la comprensión matemática. Ha sido frecuente que el alumnado planteara cuestiones a la investigadora sin situarlas en contexto de modo que la docente no tenía la información necesaria (precisa) para responder a la demanda que se la solicitaba.

La flexibilidad organizativa del aula ha proporcionado espacio y tiempo para facilitar un aprendizaje por descubrimiento y la oportunidad de trabajar en los temas donde los estudiantes manifestaban mayores dificultades y necesitaban más ayuda. Las trascripciones de los diálogos llevados a cabo en el aula, tanto entre iguales como con el profesorado implicado (investigadora-profesora titular), han facilitado el conocimiento de las concepciones erróneas, errores habituales y dificultades de comprensión del alumnado en relación a los conceptos básicos de funciones, y, a partir de ello, se replanificará el siguiente ciclo de investigación.

Se observa que los alumnos tenían serias dificultades en la comprensión de los conceptos de dominio, recorrido y extremos; sobre todo cuando la función está definida en los reales negativos o sus valores son negativos, lo que requiere hacer un análisis local en entornos del punto. Bastantes alumnos consideran $+\infty$ como si fuera un número y por esta razón algunos alumnos consideran que $+\infty$ es un máximo.

Para ciertos alumnos es difícil comprender que no es necesario obtener valores de la función si se conoce su carácter de monotonía, no entienden que en los extremos de los intervalos de definición ($[a, b]$) la función puede tener un máximo o un mínimo y también tienen dificultades en expresar el dominio. Otra dificultad grave es comprender la imposibilidad de dividir por cero, lo que lleva a la imposibilidad de formalizar los dominios de ciertas funciones.

Otro error recurrente, muy extendido, es de tipo procedimental y cierto alumnado trata de evocar conceptos que puede haber memorizado sin comprender. De hecho, afirman que cuando la comprensión es difícil intentan omitirla e incluso tratan memorizar aquello que "*puede servir para aprobar*", y no se tienen en cuenta los aprendizajes.

Algunos alumnos no son capaces de construir una sucesión monótona de números que se acerquen cada vez más a un número dado porque fracasan en la ordenación de decimales y, como consecuencia, no tienen asumido el orden usual de los números reales, y menos aún la densidad de $\mathbb{Q}$.

También se ha percibido que ciertos alumnos no tienen adquirida la idea de dirección y, menos aún, que en las rectas ésta viene determinada por el coeficiente de la x que se denomina pendiente de una recta.

Otra dificultad, no menor, es que el cardinal de los puntos de un trozo de curva es infinito y que pudiera no tener ni primer ni último elemento. Esto puede estar relacionado con el hecho de que los alumnos sólo han evaluado funciones cuando x toma valores enteros, incluso para alguno de ellos la función no existe para valores decimales.

Se percibe que la mayor dificultad que presenta el alumnado es todo lo relativo a procesos dónde interviene el infinito, en especial, el estudio de las tendencias asintóticas por lo que se profundizará sobre dicho estudio.

Respecto a la metodología se han concretado fortalezas y debilidades de la misma por lo que se modificará la misma para potenciar al máximo su implementación en el siguiente ciclo de investigación. En general, el alumnado se mostró satisfecho y más motivado con estas metodologías más activas que con las metodologías clásicas.

A pesar del malestar inicial de un pequeño sector estudiantil por la falta de *"explicaciones"* del profesor en el aula (ruptura con el modelo tradicional), se han producido discusiones significativas y guiadas sobre los contenidos de la materia de estudio y se ha podido trabajar desde una perspectiva competencial, sobre todo potenciando la competencia de aprender a aprender. Mediante esta metodología se produce un progreso real de los estudiantes para convertirse en aprendices de por vida y fomentar su autorregulación. Se comparte con Talbert (2014) la opinión de que los estudiantes a menudo encuentran la experiencia inicial con el aula invertida como inquietante e incómoda; posiblemente debido a su falta de familiaridad y a la sensación de que se espera que el trabajo del profesor sea dar una charla o conferencia. Además, toda innovación supone una alteración en los hábitos, para algunos alumnos supone salir de su zona de confort y, de entrada, muestran un rechazo inicial. Sin embargo, las potencialidades de este nuevo método parecen ser prometedoras. También creen que con esta metodología han aprendido menos, pero es un error, ya que no se observan diferencias significativas con los rendimientos alcanzados con la metodología tradicional, hecho ya señalado por Aronson, Arfstrom, & Tam (2013).

Los estudiantes mostraron rechazo o problemas para adaptarse a la clase invertida y un amplio sector de los mismos, no visualizaban los vídeos y el material multimedia creado para la puesta en práctica de esta metodología. Otra barrera es que los estudiantes están acostumbrados al estilo de clase tradicional y tienen dificultades para adaptarse a una nueva forma de aprender.

A pesar de que a los estudiantes se les ofreció la posibilidad de utilizar la plataforma Moodle para mantener una comunicación fluida con la investigadora, no se optimizó esta posibilidad, debido en gran parte al no estar afianzada esta posibilidad virtual en el hábito diario del alumnado. También cabe destacar que hubo problemas técnicos en dicha plataforma y tanto la investigadora como la profesora-observadora externa no disponían de todos los permisos necesarios para subsanar ciertos problemas que sólo podía gestionar el administrador de la plataforma Moodle del IES. A partir de todo ello, se ha reformulado el objetivo inicial.

IV.5 REFORMULACIÓN DE OBJETIVOS

Una vez que se ha completado todas las fases de este ciclo, de la formulación general enunciada en el Capítulo I, objetivo general de la tesis:

- Valorar si la implantación de la metodología Flipped Classroom (AI) es apropiada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas. Estimar el grado de aceptación por el alumnado y analizar los aprendizajes producidos.

se establecen otros objetivos más específicos.

La reflexión que se ha realizado en esta primera experimentación exploratoria permite reformular los objetivos generales de investigación y redactarlos con más precisión:

O.1. Valorar la implantación de una metodología Flipped Classroom mixta siguiendo el modelo de Talbert.

O.2. Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de asíntotas a través de sus gráficas mediante dicha metodología.

O.3. Detectar las dificultades de los alumnos y la influencia concepto de tendencia en el proceso de comprensión del concepto de asíntota.

O.4. Descubrir posibles errores asociados o subyacentes al concepto de asíntota.

CAPITULO V

V SEGUNDO CICLO DE INVESTIGACIÓN

En el curso académico 2015/16, la investigadora continúa en situación de comisión de servicio como Asesora de Formación Permanente en el CFIE de Valladolid y, al no impartir docencia directa a alumnado de educación secundaria, realizó la experimentación de este ciclo en el IES Recesvinto de Venta de Baños (Palencia), con la colaboración de la profesora Dña. Cristina Pecharromán Gómez y del departamento de Matemáticas de dicho IES, recabando la correspondiente autorización de la Dirección Provincial y el apoyo del Equipo Directivo. La experimentación se desarrolló en el grupo de 1º de Bachillerato de Ciencias formado por 11 alumnos.

V.1 PLANIFICACIÓN

Considerando las reflexiones del ciclo exploratorio, se incorporaron las propuestas de mejora para que fuera efectiva la visualización de los vídeos por parte del alumnado, ya que la totalidad no lo hacía en sus casas, y se optó por adaptar la metodología al modelo de Talbert (2014): se presentan los nuevos contenidos, se organiza la docencia pensando en los objetivos que se deben alcanzar a partir de los previos (test inicial, cuadernos y entrevista con el profesorado), se facilita a los alumnos los vídeos y material impreso para el trabajo de aula, se desarrolla una práctica guiada y se diseñan pruebas específicas de los contenidos tratados.

Se considera importante que los estudiantes puedan hacer preguntas en cualquier momento y obtener ayuda de su profesor o de sus compañeros, ya que esto aminora la percepción de los estudiantes sobre que están aprendiendo matemáticas *"por su cuenta"* por lo que en este ciclo de investigación se intentará potenciar nuevas vías de comunicación y aplicaciones de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), más enfocadas a las TAC (Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento). Todo ello, porque se considera que facilitar líneas de comunicación entre el docente y los estudiantes es fundamental para el éxito de la clase invertida. También se potenciará el uso del programa de geometría dinámica GeoGebra, software utilizado en el diseño de los vídeos para facilitar la comprensión del concepto de aspectos globales de las funciones a través de sus gráficas.

A continuación se especifica brevemente la planificación de las diferentes fases relativas a la acción de la investigación:

Fase preparación:

En esta fase se recogió información sobre la docencia que tuvieron en 4º ESO el pasado curso académico (2014/15), se diseñó la prueba inicial para completar la información sobre los conocimientos previos, se explicó a los alumnos el cambio metodológico que se seguirá, se elaboraron nuevos vídeos considerando la experiencia del ciclo anterior; y se programaron las sesiones de docencia y de recogida de datos.

Fase implementación:

La investigadora y la profesora titular desarrollaron las cuatro sesiones de docencia programada; y ambas, trataron de que el alumnado se familiarizara con el nuevo entorno de aprendizaje virtual. Asimismo, antes de cada sesión de docencia se explicaron las "Prácticas guiadas" que debían hacer en la misma.

Fase observación y análisis:

En esta fase se analizan y se discuten los documentos recabados en el ciclo: cuaderno de los alumnos, documentos orales, escritos y gráficos que aporten información sobre el proceso mental que experimenta cada alumno individualmente; cuestionarios inicial y final; diario del investigador (cuaderno físico); protocolo de observación del observador externo; grabaciones en los foros virtuales de la plataforma de Moodle; grabaciones de audio; entrevistas personales con algunos alumnos fuera del horario lectivo; cuestionario para valorar la metodología y el proceso de aprendizaje del alumnado a través de los vídeos, grado de motivación y valoración global de la segunda fase de exploración de la investigación.

Fase de reflexión

Tras el análisis detallado de todo el material generado tiene lugar una reflexión del ciclo que se utilizará en la planificación del ciclo siguiente.

V.2 ACCIÓN

Las acciones llevadas a cabo en este ciclo se pueden estructurar en cuatro grandes apartados:

- Entrevista con el profesorado que impartió docencia el curso académico 2014/15.
- Test inicial de conocimientos previos al alumnado.
- Sesiones de docencia: metodología y recursos utilizados.

- Diseño y confirmación del Test Global validado por expertos.

La concreción de todos los aspectos relativos a cada uno de los anteriores bloques se especificará en el siguiente apartado.

V.3 OBSERVACIÓN, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

V.3.1 Test inicial de conocimientos previos

Según el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria*, el alumnado que supere con éxito 4º de ESO reconocerá modelos y relaciones funcionales e interpretará críticamente tablas y gráficas. El concepto de tendencia se introduce como una propiedad global a través de las gráficas de familias de funciones, y se estudia con mayor rigor en 1º de Bachillerato y, por tanto, en el marco ELOS es fundamental conocer qué saben los alumnos sobre contenidos mínimos relativos al bloque de funciones antes de enfrentarse al nuevo concepto.

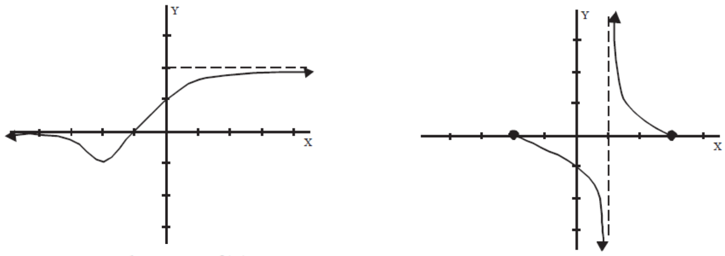
Con el fin de determinar el nivel de conocimientos sobre conceptos necesarios para el desarrollo de la investigación, los alumnos del grupo experimental cumplimentaron un cuestionario sobre temática propia del curso anterior referentes al manejo de un sistema cartesiano y conceptos básicos relativos al estudio de funciones. A pesar de presentarse errores y respuestas incompletas se percibe un nivel adecuado para poder afrontar el estudio de las asíntotas a partir de la gráfica de las funciones. Merece especial atención los tres apartados correspondientes al estudio de la tendencia funcional con los que se trata de averiguar las concepciones que tienen sobre las *AH* y *AV*, a partir de las gráficas de funciones:

a) $x \to k^-$ y/o $x \to k^+,\ y \to \pm\infty$
b) $x \to \pm\infty, y \to k$

Los alumnos realizaron el test en un período lectivo de 50 minutos y durante su cumplimentación se observaron ciertos comentarios relativos a no saber qué contestar como: *"no me acuerdo de nada", "¿qué hay que contestar aquí?...,"* y la profesora dio algunas indicaciones para que entendieran las preguntas planteadas. Dicho test inicial de conocimientos previos se encuentra en el ANEXO X.3.1. A continuación, se describe cada ítem y se discuten los resultados:

Cuestión 1. Estudio de la tendencia de la gráfica de una función:

a) Señala sobre la gráfica la tendencia de la x *y de la* y *en los lugares donde se escapa la gráfica de la función.*



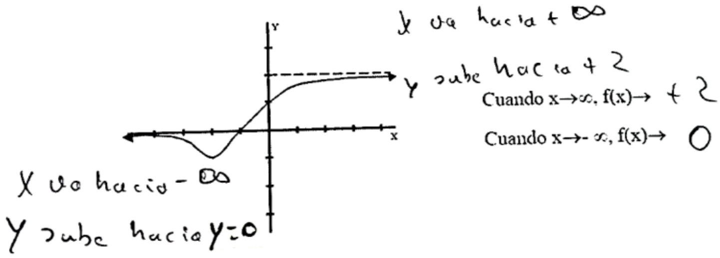
Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ | Cuando $x \to 1^+$, $f(x) \to$

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ | Cuando $x \to 1^-$, $f(x) \to$

b) Completa las frases que acompañan al texto.

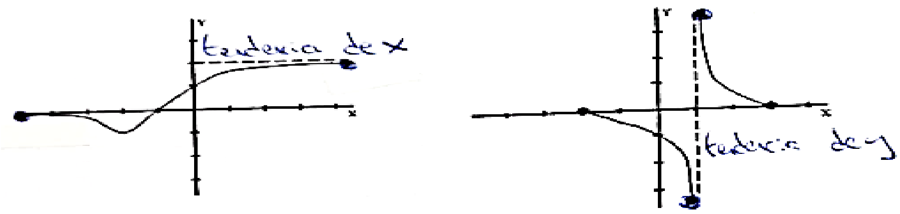
Respuestas del apartado a):

Sólo dos alumnos (18,18%) han señalado sobre la gráfica alguna referencia en relación a la tendencia de la x y de la y en los lugares donde *"se escapa"* la gráfica de la función.



V.1 *Figura 5.1.* Respuesta del alumno A1

Este alumno verbaliza la tendencia infinita de la variable x, mediante la expresión *"se va hacia"*. En el caso de la variable y, expone *"sube hacia".* En este caso, se presentan dos *AH* y el alumno interpreta la tendencia asintótica horizontal: x tiende (va) a infinito positivo y negativo mientras que la variable y tiende (sube) hacia valores fijos. Sin embargo, este alumno no aporta nada en la gráfica de las *AV*.



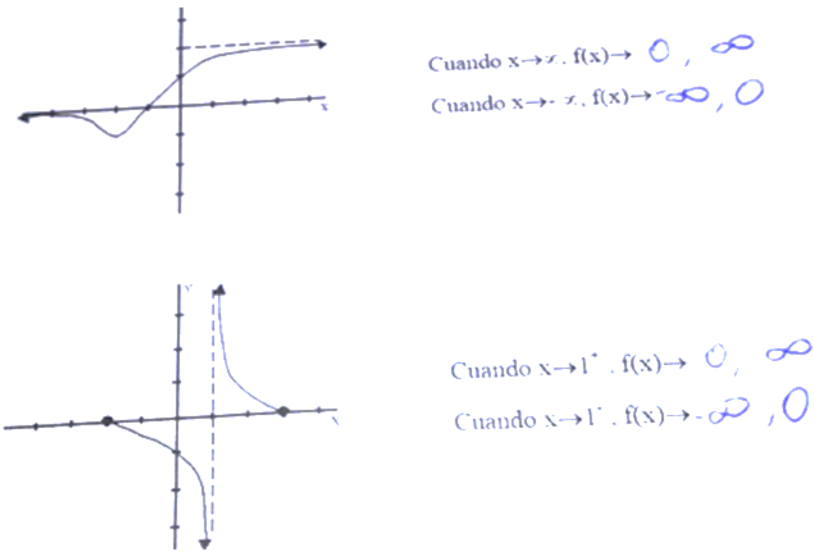
V.2 *Figura 5.2.* Respuestas del alumno A2

El siguiente alumno, $A2$, percibe parcialmente la tendencia de x en una de las AH y la tendencia de y cuando se tiene AV. Por tanto, este alumno sólo interpreta tendencia cuando la variable tiene comportamiento infinito.

El alumno $A2$ no es capaz de completar las frases que acompañan al texto. En la primera función que presenta dos *AH*, sólo señala la tendencia de *x*, que es infinita. Para la variable *y*, cuya tendencia es hacia el valor 2, el alumno no la interpreta como tendencia por estar acotada o delimitada.

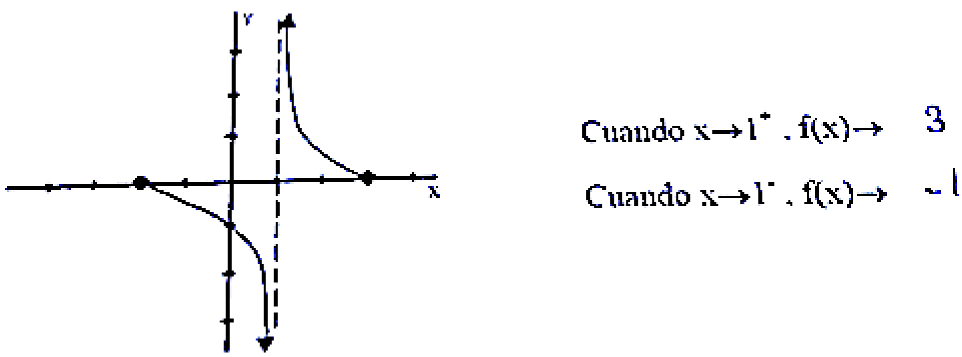
Respuestas del apartado b):

Cuatro alumnos completaron correctamente las cuatro cuestiones, otros cuatro no contestaron nada y los tres restantes contestaron de forma errónea como sigue:



V.3 *Figura 5.3.* Respuesta del alumno A3

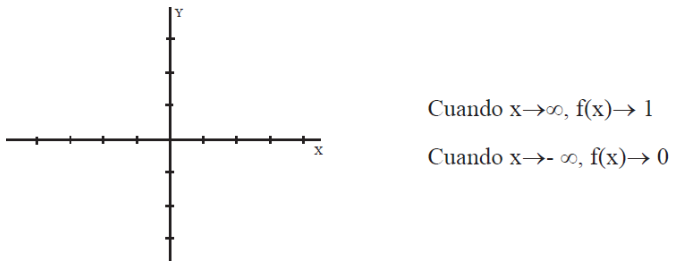
$A3$ responde sin sentido a las cuatro propuestas (Figura 5.3) con los valores 0 e ∞, en el primer caso y, $-\infty$ y 0 en el segundo caso. $A4$ sólo responde sobre la segunda función y escribe que la función tiende a los valores 2 y -2 por la derecha y la izquierda, respectivamente.



V.4 *Figura 5.4.* Respuesta del alumno A5

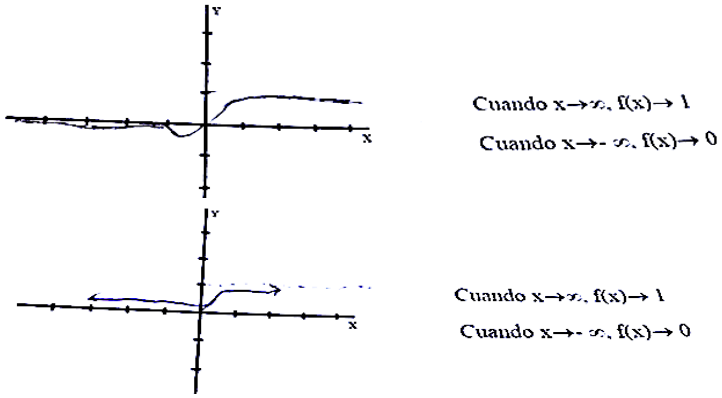
Por último, el alumno $A5$, en la primera gráfica responde correctamente a la tendencia cuando x tiende a infinito positivo e incorrectamente cuando x tiende a infinito negativo. Respecto al comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a ± 1 responde como se indica en la figura 5.4. La tendencia cuando x tiende a 1 por la derecha lo valora con el valor de la abscisa en el punto de corte con el eje OX y en el caso de la tendencia a 1 por la izquierda lo valora valor de la ordenada en el punto de corte con el eje OY.

Cuestión 2. Dibuja una función con las siguientes características:



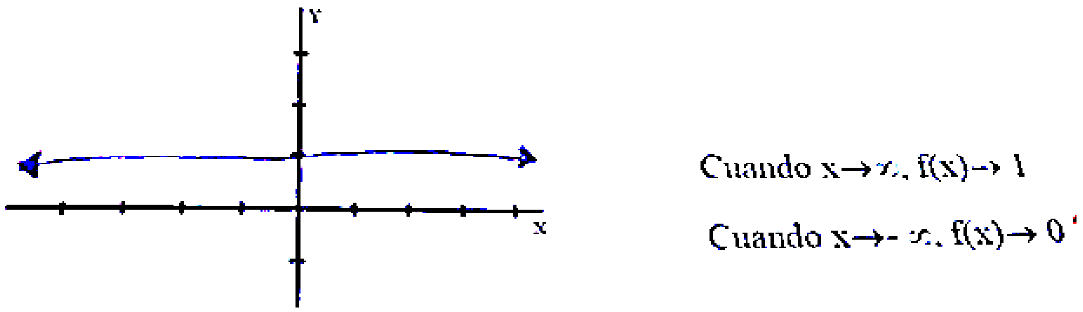
Respuestas:

Cuatro alumnos representaron correctamente, dos respondieron parcialmente, un alumno representa incorrectamente y cuatro alumnos no aportaron nada. A continuación, figura 5.5, se presentan dos de las gráficas que hicieron los alumnos y que se consideran representaciones correctas:



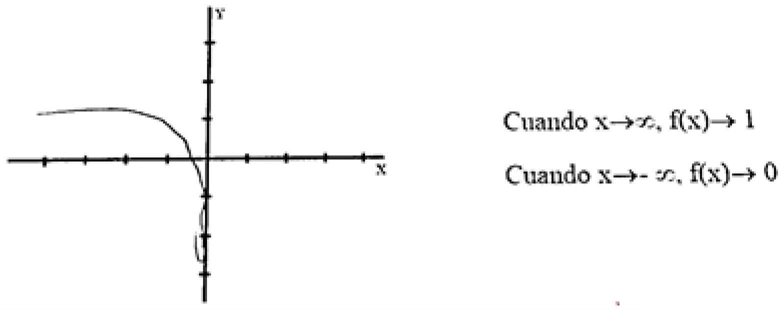
V.5 *Figura 5.5.* Representaciones correctas

La figura 5.6 representa una de las respuestas parcialmente correcta.



V.6 *Figura 5.6.* Respuesta parcialmente correcta

La figura 5.7 presenta una opción incorrecta, además, representa una AV, pero no simboliza en la gráfica las flechas cuando x tiende $-\infty$; hecho que si presenta en la AV. Este alumno no representa la tendencia cuando x tiende a infinito positivo y confunde $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow 0$, por $x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow -\infty$; ya que ha intercambiado lo pedido.



V.7 *Figura 5.7.* Respuesta incorrecta

Cuestión 3. ¿Qué se observa cuando se estudia la tendencia de una función?

Respuestas

Sólo respondieron cuatro alumnos (36,36%) que responden a esta cuestión.

A1: Lo que pasará cuando uno de los valores tomen el valor ∞.

A2: El valor de x *sobre* y *o al revés.*

A3: El valor de la función con 1 valor en el infinito.

A4: La paralela a los ejes de coordenadas.

Reflexión

- Se perciben dificultades de coordinación de las variables. Un alumno presenta el error de intercambiar los valores de la variable *x* con los de la variable *f(x).*
- Los alumnos tienen más facilidad para representar la tendencia de *AH* cuando x tiende $+\infty$ que cuando x a $-\infty$.
- La simbología de la flecha en la gráfica para representar la tendencia infinita no está totalmente consolidada en el alumnado.
- Se observa una discretización de la recta real y no la interpretan en su globalidad.
- Posible conexión errónea de dependencia entre *AH* y *AV*, ya que dos alumnos dibujaron una *AV* en lugar de *AH*, como se había pedido.
- Aparecen expresiones del tipo *"va hacia"* y *"subir hacia"* para intentar expresar situaciones de tendencia funcional.
- Algunos sólo interpretan la tendencia cuando la variable tiende a infinito.

- Un alto porcentaje del alumnado que estudiamos (81,81%) no ha interiorizado el concepto de tendencia introducido el curso pasado.
- Se visualiza mejor la tendencia asintótica horizontal que la vertical.
- Cierto alumnado no interpreta la simbología de flechas para representar una tendencia infinita. Por ello, señalan los valores de la tendencia como los valores finitos que están dibujados próximos a la gráfica.
- Un alumno relaciona tendencia funcional con los puntos de corte con los ejes de abscisas y ordenadas, hecho que no se ha presentado formalmente al alumnado y carente de toda lógica.
- Confusión de los conceptos valor y variable.
- Conectar necesariamente la tendencia funcional con la tendencia infinita de una de las variables.
- Consideración del infinito como valor alcanzable.
- Sólo contemplar la posibilidad de tendencia asintótica horizontal.
- Ante la dificultad del alumnado de no distinguir entre tendencia vertical y horizontal se tendrá en cuenta para la docencia del siguiente ciclo de investigación.

V.3.2 Desarrollo de las sesiones de docencia

El esquema de trabajo de la cada sesión de intervención en el aula ha sido el siguiente:

Visualización de los vídeos. Tras el visionado de cada uno de ellos, se siguieron los pasos que se exponen a continuación:

- Debate grupal: Planteamiento de dudas, reflexiones y aportaciones en relación al vídeo expuesto. Todos los diálogos están recogidos en el (ANEXO X.3.3) y se han analizado minuciosamente.
- Trabajo individual a partir de las actividades propuestas en el material impreso facilitado (ANEXO X.3.2). Dicho documento se divide en tres partes diferenciadas.
    - Cuestionario con ítems para elegir una respuesta entre dos opciones.
    - Cuestiones abiertas dónde el alumnado deberá contestar razonando sus respuestas.
    - Autoevaluación de su propio proceso de enseñanza-aprendizaje reflexionando, en relación a: contenido trasmitido, lo aprendido y lo no comprendido.
    - Valoración numérica de cada vídeo en relación con: el aprendizaje a través de él, la dificultad del contenido y el interés por el aprendizaje.

En la última sesión, se recogió una valoración más globalizada del alumnado respecto a las cuatro sesiones de docencia llevadas a cabo y se les dio la oportunidad de aportar observaciones y sugerencias.

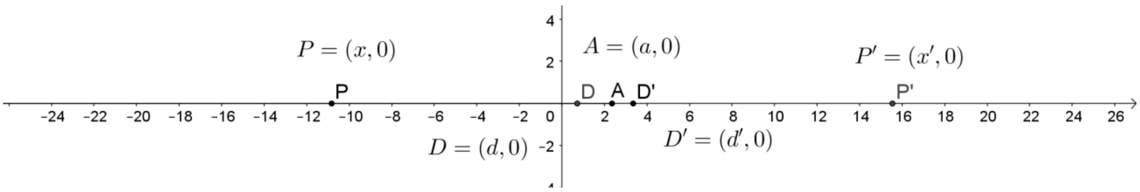
A continuación se presenta la fase de observación de este ciclo en el que tienen lugar el análisis y la discusión de la experimentación realizada. Ésta se compone de cuatro sesiones de trabajo y en ellas se proyectas 17 vídeos, cuatro en las tres primeras y 5 en la cuarta. Se analizan los vídeos siguiendo el orden de las sesiones de docencia.

V.3.2.1 1ª Sesión (14/03/16)

En esta sesión se proyectan cuatro vídeos sobre contenidos previos implícitos en el concepto de asíntota, y se facilitó material fotocopiado al alumnado (ANEXO X.3.2.1).

V.3.2.1.1 Discusión del primer vídeo

En el primer vídeo, el punto *P* (*P'*) está dotado de movimiento y se va acercando al punto *A* mejorando cualquier aproximación *D* (*D'*) fijada. Esta animación se reproduce automáticamente *P* se acerca a *A* por la izquierda y *P'* por la derecha. El proceso se repite con nuevas posiciones de *D y D'* más cercanas a *A* (*P* y *P'* mejoran cualquier aproximación fijada). Además, en la proyección aparece el texto que sigue a la figura:



V.8 *Figura 5.8.* Fotograma de la tendencia finita en el eje de abscisas

- *Un punto en el plano cartesiano queda determinado por su abscisa y por su ordenada,* P=(x, y). *Un punto* P *tiende al punto* A *por la izquierda, si mejora cualquier aproximación de otro punto* D *previamente fijado.*
- *Análogamente, estamos visualizando sucesivas posiciones del punto* P´ *que está tendiendo a* A *por la derecha.*
- *Las abscisas,* x, *de* P *tienden por la izquierda a la abscisa,* a, *de* A, *si* x *mejora a la abscisa del punto* D *arbitrario, previamente fijado.*
- *Se mueve el punto* P *y se sitúan* A *y* D *en posiciones diferentes.*
- *Que* P *tiende a* A *se simboliza* $P \to A$ *y que* x *tiende a* a , *se simboliza por* $x \to a$.
- *Que* x *tiende a a por su izquierda se simboliza* $x \to a^{-}$.
- *Que* x *tiende a a por la derecha se simboliza* $x \to a^{+}$.

Los alumnos van cumplimentando el test que, en esta sesión, tiene por objetivo valorar si discriminan entre aproximación y tendencia.

P.1. El punto D *respecto de* A *es: una aproximación* ◯, *una tendencia* ◯

P.2. *Los puntos* P *y* P' *llegan a estar más cerca de* A *que* D, *por tanto: se aproximan a* A ◯, *tienden a* A ◯

P.3. *Las abscisas de* P *y de* P' *llegan a estar más cerca de la abscisa de* A *que la abscisa de* D*: sí* ◯*, no*◯

P.4. *Si el punto* D *estuviera más cerca de* A, P *y* P' *nunca estarían más cerca de* A *que* D*: sí* ◯*, no* ◯

P.5. *¿Podría situar el punto* D *tan cerca de* A*, de modo que no podría ser mejorada la proximidad a* A *por ningún punto* P *y* P'*?: sí* ◯*, no* ◯

P.6. *Siempre se pueden encontrar ordenadas de* P *y de* P' *que están más cerca de la ordenada de* A *que la ordenada de* D*: sí*◯*, no* ◯

Las dos tablas siguientes expresan los resultados de los alumnos según el número de aciertos globales en cada ítem:

V.1 Tabla 5.1. *Frecuencia de la variable aciertos de los alumnos*

Aciertos	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Nº alumnos	2	3	2	3	0	1	0
% Alumnos	18,18%	27,27%	18,18%	27,27%	0,00%	9,09%	0,00%

V.2 Tabla 5.2. *Aciertos y fallos de cada ítem*

Respuestas	**P.1**	**P.2**	**P.3**	**P.4**	**P.5**	**P.6**
Aciertos	9	10	6	5	6	9
Fallos	2	1	5	3	3	1
N/C				3	2	1

La segunda cuestión, fue la que sumó mayor número de respuestas correctas y la cuarta el menor. Sin embargo, si fijamos nuestro punto de atención en la respuesta que obtuvo el mayor número de respuestas incorrectas, debemos reparar en la tercera. En el caso de las cuestiones 4 y 5 hubo alumnos que no contestaron. Dichas cuestiones fueron enunciadas en forma negativa y es posible que esta redacción pudiera dificultar la comprensión de las mismas.

Desde una perspectiva cualitativa, se puede afirmar que prácticamente la totalidad de los alumnos comprenden el concepto de aproximación y lo diferencian del concepto de tendencia, según la información de las preguntas *P.1* y *P.2*. Sin embargo, que cuando un punto *P* tiende al punto *A*, éste mejora cualquier aproximación de otro punto *D* arbitrario y fijado previamente es donde hay bastantes fracasos. Asimismo, se pone en evidencia que es más sencillo para ellos interpretar las tendencias a través del propio punto sobre la curva que a través de sus abscisas.

Para averiguar la competencia lingüística y comunicativa (verbal y gráfica) en relación a los conceptos de aproximación y tendencia se les plantearon tres preguntas abiertas:

P.7. ¿Qué diferencia hay entre aproximar y tender?

Según sus respuestas, los alumnos pueden ser clasificados en tres grupos con cierta uniformidad.

- El primer grupo expone ideas correctas, aunque cada alumno utiliza diferentes expresiones para manifestar lo que han interiorizado tras la visualización del vídeo:

  *A2.- Aproximar es que se acerca (*D*) y tender que va hacia ello (*P, P'*).*

  A4.- Aproximar es acercarse, pero por mucho que se aproxime, tender es algo más, es un punto más próximo a lo que tiende.

  A5.- Tender es más que aproximar.

- El segundo grupo discrimina entre aproximación y tendencia, pero manifiesta concepciones erróneas:

  A3.- Aproximar es acercarse lo más posible y tender es pasar por el punto.

  - Error de considerar la tendencia como un valor alcanzable siempre.

  A1.- Que tender casi llega a tocar y aproximar se queda más lejos.

  - Error de considerar la tendencia como un valor inalcanzable.

  A8.- Aproximar es que se acerca y tender es que se acerca al infinito.

  - Error de considerar la tendencia siempre como infinita.

- Por último, el tercer grupo, muestra su incomprensión respecto a estos conceptos, respondiendo de forma incoherente.

  A6.- Que en la aproximación llega al punto y en la tendencia no llega a pasar por el punto al que tiende.

  A7.- A la hora de aproximar se tiene que tener un valor fijo, sin embargo para tender se puede coger cualquier valor cercano a A.

  A11.- Tender se refiere a una variable, función o valor determinado. Aproximar se realiza de forma exacta es desconocido o difícil de obtener.

  A9.- No consigo encontrar la diferencia aunque sí comprendo que son conceptos distintos.

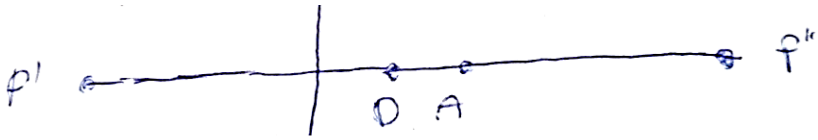
  A10.- Tender es aproximarse a una meta.

En resumen, casi la mitad de los alumnos no concretan diferencias entre aproximación y tendencia; la mitad del resto (del 55%) discrimina con argumentos válidos y la otra mitad expone razonamientos erróneos y utiliza un vocabulario impreciso.

Con el fin de recabar información globalizada sobre la representación gráfica de la tendencia finita en las abscisas en la recta real y analizar qué sistemas de representación utilizan los alumnos se les plantearon las dos siguientes preguntas abiertas:

P.8. Representa una tendencia finita de la abscisa.

Sólo dos alumnos representan gráficamente la tendencia finita sobre el eje de abscisas señalando algunos de los puntos de interés y la del segundo bastante incompleta:



V.9 *Figura 5.9.* Respuesta del alumno A10

V.10 *Figura 5.10.* Respuesta del alumno A8

Otros tres alumnos optan por una representación simbólica, como la que se muestra a continuación la respuesta del alumno *A11*:

V.11 *Figura 5.11.* Respuesta del alumno A11

Parece que los alumnos se han sentido desconcertados por esta pregunta tan abierta y sólo algunos comprenden el sentido de la pregunta, y concretan la tendencia en las abscisas y optan por una representación gráfica o por una simbólica, lo que sin duda es una discriminación entre ambas.

P.9. ¿Qué es para ti la tendencia de abscisas finita?

En el análisis se tienen en cuenta las diferentes interpretaciones (significaciones) detectadas en el vocabulario y expresiones de los alumnos, Éstas se categorizan por su: Finitud (F), Dinamismo (D), Rebasamiento (R), Inalcanzabilidad (I) y Aproximación óptima (A):

V.3 Tabla 5.3. *Frecuencias de las significaciones de tendencia*

Categorías	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
F - Finitud	8	0,38

D - Dinamismo	7	0,33
I - Inalcanzabilidad	3	0,14
R - Rebasamiento	2	0,10
A - Aproximación óptima	1	0,05

Con el fin de ver si hay una dependencia entre significados, se consideran las frecuencias de las intersecciones de los grupos de alumnos que asumen los mismos significados:

V.4 Tabla 5.4. *Significados comunes*

Intersecciones	**Nº alumnos**	**%**
D - I - F	3	27,27%
D - F - R	2	18,18%
A- D - F	1	9,09%
D - F	1	9,09%
F	1	9,09%
No contestan	3	27,27%

Según las respuestas, aparte de los alumnos que no responden, surgen tres grupos:

- El primero está formado por tres alumnos y asocia la tendencia finita de abscisas con el dinamismo inalcanzable finito (D-I-F). Lo expresan así:

  Que casi llega a un punto concreto. Un punto que se acerca a otro sin llegar a tocarle., Acercarse mucho a un punto sin tocarlo., Acercarse más que cualquier otro punto.

- Un segundo grupo, de dos alumnos, enfatiza en el dinamismo de llegada o rebasamiento del punto al que tiende, respondiendo:

  Llegar a un punto fijo, pasando por otro móvil. La tendencia a un punto concreto por el que llega a pasar.

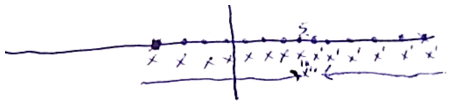
- El tercer grupo, de tres alumnos, aporta respuestas simples que refuerzan el concepto de finitud y, en un caso, de aproximación óptima. Sus respuestas fueron:

  Que esa tendencia está delimitada, no es infinita. Una aproximación a una meta, que tiene principio y fin, x *toma valores menores a* ∞*. La tendencia de un punto hasta otro punto determinado en cierto lugar.*

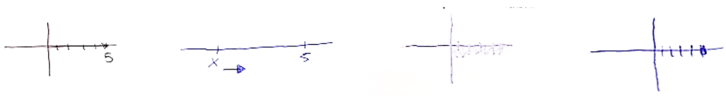
Al ser preguntados por una tendencia finita, los alumnos, mayoritariamente, visualizan la finitud y el dinamismo, la diferencia está en que algunos de ellos consideran la alcanzabilidad o no de dicha tendencia. La combinación que más se repite es la del dinamismo inalcanzable finito (D-I-F) seguida de (D-F-R) dinamismo finito con llegada o rebasamiento. Sin embargo, el hecho de afirmarlo categóricamente, indica que los alumnos no ven la posibilidad de que no ocurra.

P.10. Representa gráficamente que la variable x *tiende al valor* 5 *del eje de abscisas.*

Sólo un alumno hace una representación gráfica que se puede considerar aceptable (*A4*). Otros cuatro hacen representaciones más incompletas y sólo consideran tendencias por la izquierda (*A2*, *A3*, *A7* y *A10)*.



V.12 *Figura 5.12.* Respuesta del alumno A4



V.13 *Figura 5.13*. Respuestas de los alumnos A2, A3, A7 y A10

Otro alumno utiliza el simbolismo de los vídeos, pero no lo representa gráficamente.

V.14 *Figura 5.14.* Respuesta del alumno A11

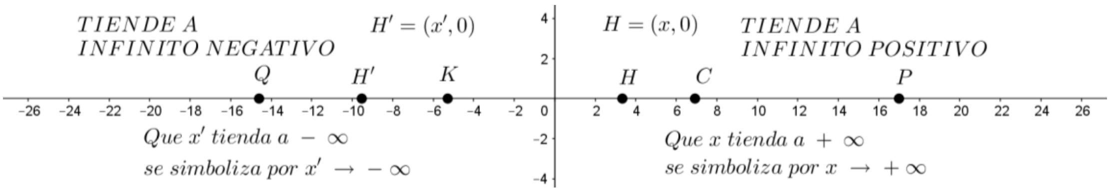
Finalmente, cuatro alumnos no responden y otro alumno dibuja la gráfica de una función que, presumiblemente, tendría una *AV*, *x=5*.

V.15 *Figura 5.15.* Respuesta del alumno A6 sobre la primera gráfica

Si contrastamos las respuestas dadas a *P.8* con las de *P.10*, se observa que cuando se concreta el valor fijo al que tiende, responden más alumnos y con más precisión. Un amplio sector de ellos, sólo percibe la tendencia de manera imprecisa, ya que sólo representan la tendencia lateral izquierda (coincidiendo con orden usual de la recta real); pero, en general, se van acercando al concepto de tendencia, aunque sólo es alcanzado completamente por un alumno.

V.3.2.1.2 Discusión del segundo vídeo

En este segundo vídeo, los puntos *H* y *H’* están dotados de movimiento, *C* y *K* son puntos fijos, y *Q y P* son puntos prefijados y alejados de *C* (a la derecha) y *K* (a la izquierda). En el movimiento hacia +∞, *H* supera a *P* y en el movimiento hacia -∞, las abscisas de *H’* son menores que las de *K*. Además de la imagen de la figura 5.16, tomada del vídeo, en la proyección aparece el texto que se transcribe a continuación de la misma:



V.16 *Figura 5.16.* Fotograma de tendencia infinita en el eje de abscisas

- *Un punto* H *tiende a +infinito, si se aleja de cualquier punto* C *hacia la derecha más que cualquier punto,* P*, fijado.*
- *Un punto* H’ *que se aleja de cualquier punto* K *hacia la izquierda más que cualquier punto,* Q*, fijado tiende a -infinito.*
- *Las abscisas,* x*, de* H *tienden a +infinito si* x *supera (es mayor que) la abscisa de cualquier punto* P*, previamente fijado; es decir,* x *toma valores mayores que cualquier número positivo.*
- *Las abscisas,* x *de* H’*, tienden a -infinito si* x *es menor que la abscisa de cualquier punto* Q *prefijado; es decir,* x *toma valores menores que cualquier número negativo.*
- *Movamos a posiciones diferentes los puntos* P *y* C*, por un lado, y* K *y* Q*, por otro.*

Los alumnos siguen cumplimentando el test que tiene por objeto valorar si comprenden la tendencia infinita de la abscisa y discriminan entre tendencia a +∞ a -∞.

P.11. Elige la frase o frases que consideres verdaderas y justifica tu respuesta:

P11.1. La tendencia infinita positiva es que el punto P *se aleja del origen* O *sin saber hasta qué punto.*

P11.2. Un punto P *del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa es menor que la de cualquier otro punto* A *prefijado.*

P11.3. Un punto P *del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto* A *prefijado.*

Las tablas 5.5. y 5.6. expresan los aciertos y fallos de los alumnos:

V.5 Tabla 5.5. *Frecuencia de la variable aciertos de los alumnos*

Aciertos	**3**	**2**	**1**	**0**
Nº alumnos	1	5	1	4
% Alumnos	9,09%	45,45%	9,09%	36,36%

V.6 Tabla 5.6. *Aciertos y fallos de cada ítem*

Respuestas	**P11.1**	**P11.2**	**P11.3**
Aciertos	5	2	7
Fallos	6	9	4

El número de aciertos de *P11.1* es similar al de fallos y llama la atención la justificación errónea de dos alumnos. Para éstos el alejamiento sigue el orden natural de la recta real *"que se aleja hacia infinito",* y entienden que el alejamiento del origen se produce siempre hacia el infinito positivo. La frase que más dificultades ha generado en el alumnado es *P11.2*. Por el contrario, *P11.3*, que es la análoga a la anterior, pero para el infinito positivo, ha sido respondida correctamente por el mayor número de alumnos. Así, se puede afirmar que la mayoría de los alumnos comprenden que un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto *A* prefijado. Pero, salvo dos alumnos, el resto no interpreta correctamente la correspondiente analogía con el infinito negativo. Por tanto, la comprensión de la tendencia a infinito negativo presenta más dificultades y parece que no discriminan entre *"tendencia a infinito"* por la izquierda y por la derecha.

Con el fin de averiguar la competencia lingüística y comunicativa en relación al concepto de tendencia infinita y si discriminan la lateralidad infinita se les plantea la siguiente pregunta abierta:

P.12. ¿Cómo explicarías a un compañero qué es la tendencia infinita?

Sólo un alumno hace mención al infinito negativo de manera explícita: *"Cuando supera los puntos, cuando tienden a infinito y a - ∞ lo mismo".* Este alumno muestra imprecisión en relación a los puntos que se superan, ya que no indica que se supera cualquier punto fijado, para la tendencia hacia infinito positivo, y no utiliza otro verbo u expresión diferente para el infinito negativo y, en contra de lo que el mismo expone, no es exactamente lo mismo.

- Dos alumnos utilizan la tendencia infinita para explicar la expresión que contiene este término:
  A1.- Cuando un punto se ***aleja*** *tanto que acaba* ***tendiendo*** *a infinito.*
  A4.- Es superar cualquier número, ***tender*** *al infinito, acercarse sin tocarlo.*

- Tres alumnos han utilizado los verbos *alejar*, *partir, no parar;* y cierto grado de indefinición en relación al sentido de dichos movimientos. Lo consideran aplicable en ambos infinitos.

  *A2.- Cuando un punto se **aleja** en el infinito respecto a otro punto prefijado.*

  *A3.- **Partir** de un origen y no saber dónde parar.*

  *A8.- Lo que se **aleja*** P.

- Cuatro alumnos manifiestan diferentes errores en sus respuestas. Se transcriben sus respuestas y el tipo de error contenido en ellas.

  A5.- Que el valor que tomará será símbolo de infinito.

- Error de considerar el símbolo infinito como un valor alcanzable

  A7.- Cuando un punto se acerca al infinito.

- Error de precisión en el lenguaje.

  A6.- Es cuando la x *se aproxima a un punto al que llega y acaba.*

- Error de finitud del infinito alcanzable

  A10.- Una aproximación que toma valores infinitos.

- Error que asocia infinitud a valores muy grandes.

Los alumnos que escriben una explicación que se puede interpretar como correcta, ya que no incurren en contradicciones, utilizan diferentes acciones verbales y, quizá, influenciados por los vídeos, el verbo más repetido es A*lejar"*, le sigue "*superar"* y, finalmente, *"partir sin determinar".*

Con el objetivo de averiguar si los alumnos han comprendido la diferencia entre tendencia finita e infinita se les propone la siguiente pregunta abierta.

P.13. ¿En qué se diferencia la tendencia finita de la tendencia infinita?

Solamente dos alumnos comparan y contrastan las dos situaciones de tendencia. Simplificando sus argumentos, ellos asocian la tendencia finita a "*un punto concreto conocido y determinado"*, y la tendencia infinita como A*lgo desconocido, indeterminado, sin fin y que no acaba"*.

Además, cuatro alumnos muestran errores conceptuales, tres de ellos ya fueron detectados en el ítem anterior, y ahora se confirman, pero en la respuesta del cuarto ha aparecido una nueva concepción errónea sobre tendencia finita e infinita. Este alumno afirma que "*La tendencia finita es* x *puntos y la infinita es infinitos puntos".* En ambos razonamientos puede aparecer un error de discretización (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990), pero en el primer caso se considera una discretización finita y en el segundo caso infinita. Este alumno no comprende que en ambas tendencias hay un tránsito hacia el límite por los infinitos puntos de un entorno. A este error le denominamos "Error de discretización en el proceso de la tendencia".

Sin duda hay una confusión entre el infinito potencial y el infinito actual, lo que influirá en la discriminación entre tendencia finita e infinita. Para afianzar nuestras apreciaciones se formula el siguiente ítem que ejemplifica una situación concreta.

P.14. *Un punto,* P*, situado en el eje de abscisas se va acercando hacia el origen de coordenadas recorriendo en cada segundo la mitad de la distancia que le separa de dicho punto. Justifica si esta tendencia es finita o infinita.*

Sólo tres alumnos comprenden la tendencia finita de la situación presentada, cuatro alumnos la clasifican erróneamente como tendencia infinita y los cuatro alumnos restantes dicen sentirse confusos y no responden.

Sólo un alumno justifica su respuesta y asegura que *"la tendencia es infinita, porque nunca lo alcanzará"*. Este alumno tiene la concepción errónea de relacionar la tendencia finita con el alcance del valor concreto al que tiende y, cuando esto no ocurre, para él se trata de tendencia infinita. Se trata de un *error en la interpretación del concepto de tendencia*. Por tanto, este alumno no tiene adquirida la idea de infinito en intervalos acotados y, al considerar que el punto no es alcanzable en el proceso, aparece un *error de iteración infinita de la tendencia*

Esta cuestión reproduce la paradoja de Zenón, que es una situación compleja y requiere cierto grado de abstracción en la comprensión del infinito que está presente en procesos infinitos acotados. El alumnado refleja dificultades que también se han mostrado históricamente.

Finalmente, nos preguntamos si los alumnos comprenden mejor la tendencia finita o la tendencia infinita y para dar respuesta a esta pregunta se formula el siguiente ítem:

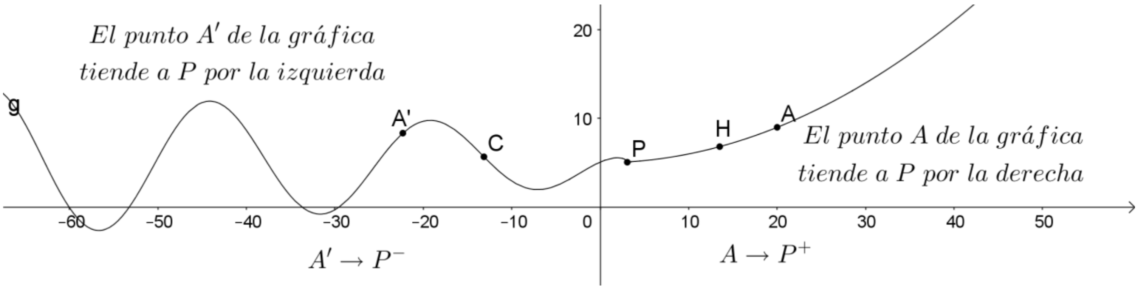
P.15. *Comprendo el concepto de tendencia:*

- *mejor la tendencia finita* ◯ *mejor la tendencia infinita* ◯
- *en los dos casos igual* ◯ *en ninguno* ◯
- Observaciones:

Los alumnos no han escrito observaciones, la mayor parte de ellos cree comprender mejor la tendencia infinita, algo menor es el número de alumnos que cree que comprende por igual ambas tendencias y, menos de la quinta parte, creen que comprenden mejor la tendencia finita.

V.3.2.1.3 Discusión del tercer vídeo

Se sigue aplicando la metodología establecida y además de la imagen de la figura 5.17, en la proyección aparece el texto que se transcribe tras ella:



V.17 *Figura 5.17.* Fotograma de la tendencia finita en la gráfica

- *Veamos como los puntos* A *y* A' *tienden a* P *por la propia curva.*
- *Un punto de la gráfica,* A', *tiende por la izquierda a otro punto de la gráfica,* P, *cuando al recorrer esta gráfica hacia* P *por la izquierda,* A' *se acerca a este punto más que cualquier otro punto fijado,* C. *Se denota* $A' \to P^-$. *Un punto de la gráfica,* A, *tiende por la derecha a otro punto de la gráfica,* P, *cuando al recorrer esta gráfica hacia* P *por la derecha,* A *se acerca a este punto más que cualquier punto otro fijado,* H. *Se denota* $A \to P^+$.

Los alumnos cumplimentan los ítems del test con el fin de valorar si discriminan entre tendencias laterales.

P.16. Sólo es importante estudiar en la gráfica la tendencia siguiendo el orden de la recta real, es decir, de izquierda a derecha: sí ◯, no ◯

La mayoría de los alumnos (el 81,82%) responde correctamente, lo que hace pensar que los alumnos van adquiriendo el concepto de tendencia lateral. Para averiguar el nivel de comprensión del alumnado en relación a la conexión entre los conceptos de aproximación y tendencias laterales finitas, se les plantea la siguiente pregunta abierta:

P.17. Representa gráficamente que un punto de una gráfica, A', *tienda por la izquierda a otro punto de la gráfica,* P. *Ayúdate de algún punto que esté próximo a* P.

Se hace un análisis de sus representaciones estudiando si han utilizado puntos auxiliares próximos a *P* (Aprox) por la izquierda, si utilizan notación simbólica para indicar el sentido del movimiento (Not) y si han representado una gráfica en el plano cartesiano (Graf). En la tabla 5.7 se representan las respuestas de los alumnos según qué tipos de representación hayan utilizado.

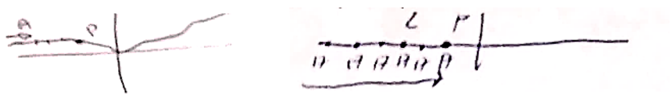
V.7 Tabla 5.7. *Tipos de respuesta de los alumnos*

Tipos	**Nº alumnos**	**%**
Graf + Aprox + Not	**2**	18,18%
Graf + Aprox	**4**	36,36%
Graf + Not	**2**	18,18%

Graf	**1**	9,09%
Not	**1**	9,09%

Además de una respuesta en blanco aparecen todas las posibles asociaciones de respuestas que tienen cierto sentido, considerando que en todas debe aparecer una representación gráfica (Not+Aprox y Aprox carecen de sentido). A continuación, se muestran las representaciones de los alumnos según la clasificación anterior:

- Graf + Aprox + Not



V.18 *Figura 5.18.* Respuestas alumnos A2 y A4

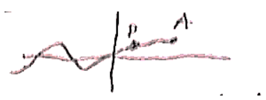
- Graf + Aprox

V.19 *Figura 5.19.* Respuestas alumnos A1, A7, A8 y A9

- Graf + Not

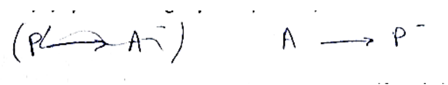
V.20 *Figura 5.20.* Respuestas alumnos A3 y A5

- Graf (Respuesta incorrecta):



V.21 *Figura 5.21.* Respuesta alumno A6.

- Nada (Simbólico)



V.22 *Figura 5.22.* Respuesta alumno A11

La mayor parte del alumnado utiliza el plano cartesiano para representar la tendencia por la izquierda en una gráfica arbitraria, hay dos representaciones en las que se ha graficado la tendencia en el eje de abscisas y otra más que utiliza una recta. Los puntos de aproximación son utilizados por algo más de la mitad del alumnado. Sin embargo, la utilización de algún tipo de simbología que represente el sentido del movimiento sólo ha estado presente en alrededor de un tercio del alumnado, y en todos los casos se ha utilizado una flecha.

Para interpretar con mayor precisión la comprensión de los alumnos sobre tendencia se propone la siguiente cuestión sobre el significado.

> P.18. *Explica con tus palabras que significa que un punto de una gráfica,* A, *tienda por la izquierda a otro punto* P.

Sólo tres alumnos responden correctamente y afirman que *A* se acerca a *P* más que cualquier otro punto fijado y otros dos alumnos responden de forma incompleta: el alumno *A4* manifiesta lo expuesto en respuestas (de vídeos anteriores) asociando la inalcanzabilidad a la tendencia finita. Por otra parte, el alumno *A5* confunde los conceptos de dirección y sentido, pero parece que tiene adquirido el sentido de tendencia. Este alumno utiliza la acción verbal *"va"* que caracteriza el sentido del movimiento hacia un punto final.

> *A4: Si* $A \to P^-$. *Qué* A *se* ***acerca a*** **P*, sin coincidir***, *por la izquierda, por la gráfica.*
>
> *A5: El punto* A ***va*** *en dirección al punto* P *por la izquierda, dirección de izquierda a derecha.*

Otros dos alumnos siguen confundiendo tendencia y aproximación, el primero de ellos asigna a *P* el carácter fijo. El segundo utiliza el verbo *"llegar",* cuya acción ya se había utilizado varias veces y que sugiere la alcanzabilidad.

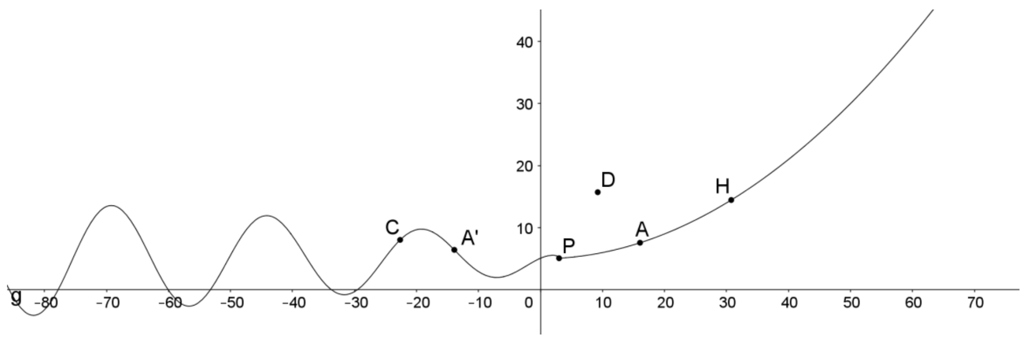
> *A7: Se acerca a un punto* A *desde la izquierda.*
>
> *A9: Que un punto* A *se acerca al punto* P*, que* ***llega*** *desde la izquierda.*

Con el fin de contrastar si los alumnos han mejorado con la docencia su comprensión sobre la tendencia lateral por la derecha se les formularon otras dos preguntas análogas a las formuladas en la sesión anterior, pero ahora considerando tendencias por la derecha. El análisis de las mismas manifiesta que se mantiene el número de alumnos que utilizan la referencia del movimiento, disminuyen a la mitad los alumnos que utilizan correctamente los puntos de aproximación y también baja el número de alumnos que hacen una representación gráfica (de 8 a 6). Algunos otros (los mismos que antes) ven la necesidad de utilizar los sentidos de las flechas para representar esta tendencia, aunque descuidan la utilización de puntos de aproximación. Por tanto, la tendencia por la derecha presenta más dificultades que la tendencia por la izquierda y cierto sector del alumnado no es capaz de ver la similitud entre ambas.

V.3.2.1.4 Discusión del cuarto vídeo

La figura 5.23 es un fotograma del vídeo y en su proyección aparece el texto que se transcribe a continuación:

- *Un punto de la gráfica,* A, *se aleja infinitamente si al recorrer la gráfica se aleja de cualquier punto de la gráfica,* P, *más que cualquier otro punto,* H, *fijado en la gráfica. También se ve como el punto* A' *se aleja del punto* P *infinitamente.*
- *Considerando que el punto fijo es el origen de coordenadas,* O, *el punto* A *se aleja infinitamente recorriendo la gráfica si se aleja de* O *más que cualquier punto fijado en la gráfica. Lo mismo con cualquier otro punto,* D, *del plano.*



V.23 *Figura 5.23.* Tendencia infinita en la gráfica

Los alumnos siguen cumplimentando el test cuyo objetivo es valorar la comprensión de la tendencia hacia infinito de un punto de la gráfica.

P.19. *Explica con tus palabras que significa que un punto* A *de la gráfica tienda a infinito.*

Las respuestas de los alumnos se pueden agrupar en tres categorías: el grupo más numeroso está compuesto por 8 alumnos y en sus respuestas han utilizado los verbos *alejarse, moverse, tender, superar…* A su vez, se pueden agrupar en dos subgrupos:

- en el primer subgrupo se relaciona la tendencia hacia infinito con la acción de **alejamiento**.

  Cuatro alumnos consideran que se produce un **alejamiento**. Concretamente, escriben lo siguiente: "*Alejamiento de cualquier punto de la gráfica", "Alejamiento del centro", "Alejamiento del punto de partida"* y "*Alejamiento del punto* P*".*

- en el segundo subgrupo se relaciona la tendencia al infinito con la acción de ***superación***.

  Cuatro alumnos utilizan el verbo superar. Respectivamente, hacen referencia a: "*superar todos los puntos", "superar positivamente, siguiendo la gráfica"; "superar a cualquier punto"; "superar todos los puntos hacia infinito"*.

Se puede considerar que estos ocho alumnos comprenden el concepto de tendencia de un punto *A* de la gráfica a infinito; pero el resto del alumnado, otros tres, tienen una concepción errónea, estos consideran al infinito como un ente concreto, pero para dos de ellos es alcanzable, mientras que para el restante es inalcanzable: "*Que se va a alejar hasta ese punto, pero sin llegar a el"* apareciendo nuevamente el error conceptual de tendencia.

Comparando estas respuestas con las que dieron los alumnos a su análoga del segundo vídeo, la *P.12*, que trataba sobre la tendencia infinita en el eje de abscisas, se observa que ha habido una evolución positiva respecto a la comprensión del concepto de tendencia. El alumno *A10*, que mostró el error que asociaba la infinitud a valores muy grandes, en esta ocasión ha respondido de una manera aceptable, aunque utiliza la palabra *"tiende"* que es lo que debe definir *"Tiende a infinito y supera a cualquier punto"*. Por tanto, la docencia que se ha llevado a cabo sí que produce una evolución positiva en la comprensión de la tendencia infinita.

V.3.2.1.5 Discusión del desarrollo de la primera sesión de docencia

El lunes 14 de marzo de 2016 en el último periodo lectivo de la mañana, concretamente de 13:20 horas a 14:10 se llevó a cabo la primera intervención en el aula con el alumnado de 1º Bachillerato de la modalidad de Ciencias de la Salud. Previamente, se habían alojado en la plataforma Moodle del IES Recesvinto de Venta de Baños los 17 vídeos relativos al bloque de contenido que nos ocupa. La ubicación asignada es un aula de informática que cuenta con 15 equipos y un ordenador con proyector para el profesor.

El espacio reúne unas buenas condiciones para la docencia. El único inconveniente es que la superficie de proyección no es lo suficientemente grande para que se perciba sin esfuerzo por el alumnado de la última fila. Por ello, se da la posibilidad al alumnado de que visualice individualmente los vídeos desde su pantalla y se oye en grupo con los altavoces del aula. Algunos alumnos de las últimas posiciones optaron por esta posibilidad.

La profesora titular presentó a la investigadora, y ésta agradeció públicamente al centro y, en especial, a su profesora titular, Cristina Pecharromán Gómez, y a ellos, como alumnos; poder tener la posibilidad de llevar a cabo esta investigación.

Se trata de un grupo de 11 alumnos que manifiestan muy buen comportamiento. La semana anterior estuvieron de viaje de estudios; por ello, quizás, no manifiestan el posible cansancio asociado al final de un trimestre lectivo. Están totalmente receptivos a todas las indicaciones que se les trasmite. Se les explica brevemente que el fin de esta intervención es comprender el concepto de asíntota a través de las gráficas y que para ello se procederá a visualizar pequeños vídeos dónde se va profundizando por diferentes estadios en la comprensión de dicho concepto. Se les anima a que vuelvan a ver dichos vídeos en sus casas, ya que en el aula reflexionaremos, debatiremos y realizaremos actividades de aplicación. Para ello, en cada sesión se les aportará un documento de trabajo dónde deberán plasmar sus ideas, observaciones, conclusiones y valoraciones.

Se les preguntó si habían utilizado video tutoriales de la red para comprender conceptos matemáticos y 6 alumnos comentaron que sí y que les había sido de utilidad. Comentaron que la mayoría de ellos eran provenientes de canales sudamericanos.

Como dato curioso, es que los alumnos no hacían preguntas ni manifestaban nada, pero estaban totalmente atentos y receptivos a lo que se les trasmitía. Para facilitar las trascripciones de los diálogos con el alumnado, se identificará a cada alumno con la simbología *A1, A2,…* para diferenciarlos y se denota con *P* a la profesora investigadora

Sólo el alumno *A5* hizo la siguiente pregunta:

"¿Por qué al animar al punto, al principio tiene una velocidad cuando avanza, y después va más deprisa?"[1]

La profesora le respondió que la animación es una posibilidad que da el programa GeoGebra y, efectivamente, según se va alejando el punto de la pantalla "parece" que va más deprisa, pero en realidad iría a la misma velocidad. Quizás lo simulan así para que se perciba que el movimiento no tiene fin.

Gran parte del alumnado comentó que no le había dado tiempo a contestar las cuestiones y las valoraciones de la ficha de trabajo. Se les ofreció la posibilidad de acabarlo en horario extraescolar.

Se visualizaron los cuatro primeros vídeos relativos a la tendencia finita en el eje de abscisas, tendencia infinita en el eje de abscisas, tendencia finita en la gráfica y tendencia infinita en la gráfica. Los alumnos comentaron que el primer vídeo había sido el más complicado de todos. Manifestaron que les parecía más fácil de entender la tendencia infinita que la tendencia finita.

Se ha tratado de una sesión muy intensa y de alto nivel de contenidos tratados. El alumnado ha colaborado y se han mostrado receptivos ante las novedades presentadas. Para el próximo ciclo de investigación se reducirán algunas cuestiones para que el alumno no se sienta agobiado por el tiempo.

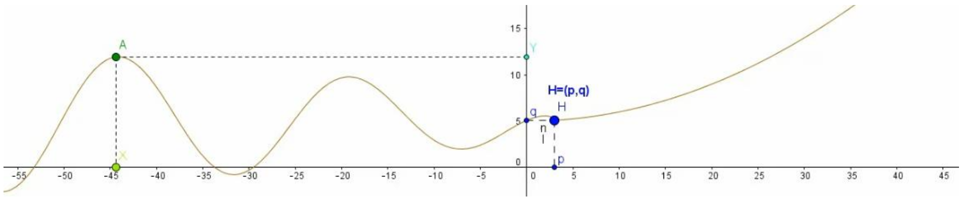
[1] Este detalle había pasado desapercibido por la investigadora, pero efectivamente el efecto óptico era el señalado por el alumno.

V.3.2.2 2ª Sesión (15/03/16)

En esta sesión se proyectan los cuatro vídeos siguientes sobre contenidos relativos a tendencias finitas e infinitas y discriminación asintótica. Se facilitó material fotocopiado al alumnado (ANEXO X.3.2.2).

V.3.2.2.1 Discusión del quinto vídeo

En este vídeo se detallan diferentes puntos de interés para el estudio de la tendencia finita en la gráfica. Por un lado, se analizan los puntos pertenecientes a la propia gráfica y por otro, también los puntos determinados por sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas y, sobre todo, las tendencias de ambos. En la proyección aparece el texto que sigue a la figura 5.24:



V.24 *Figura 5.24.* Fotograma de las tendencias finitas asociadas en las gráficas

El movimiento de un punto sobre la gráfica de una función, A=(X, Y), lleva asociados los movimientos de los puntos que determinan sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas.

La tendencia por la derecha de un punto de la gráfica A=(X, Y) hacia otro punto de la gráfica H=(p, q), por tanto, lleva asociada dos tendencias:

- *A tiende a* H^{+} *implica que* $X \rightarrow p^{+}$ *y que* $Y \rightarrow q$.

La tendencia por la izquierda de A'=(X', Y') al punto H=(p, q), lleva asociadas también las dos tendencias:

- *A' tiende a* H^{-} *implica que* $X' \rightarrow p^{-}$ *y que* $Y \rightarrow q$.

En resumen, las abscisas X de A, tienden a la abscisa, p, de H y las ordenadas de Y de A tienden a la ordenada, q, de H.

Tras el visionado del vídeo el alumno debe responder a las tres preguntas siguientes relacionadas con el contenido, el aprendizaje y la comprensión:

Cuestión 1. ¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

De las 11 respuestas, un alumno interpreta las gráficas del vídeo de forma primaria, sin que se haya producido alguna evolución en su significación:

A11.- Los puntos en la gráfica.

Aparte de este alumno, hay un grupo formado por cinco alumnos para los que el contenido del vídeo trata las tendencias finitas y casi lo expresan con las mismas palabras:

A3.- La función en las gráficas con tendencia finita.

A8.- Tendencias finitas en las gráficas.

En las diferentes grabaciones presentadas se suele expresar *"la gráfica que corresponde a una función"* o *"la función que está representada en la siguiente gráfica",* pero nunca *"la función en las gráficas"* como ha expresado *A*3.

Hay tres alumnos que asocian las variaciones de las coordenadas del punto en movimiento sobre la curva.

A2. Los valores de x *e* y *cuando un punto se va moviendo (proyecciones).*

A4. Que el movimiento del vídeo anterior está en x *(abscisas) e* y *(ordenadas) (Proyecciones).*

A5. El movimiento de un punto sobre la función, llevan asociados los movimientos de los puntos y de sus proyecciones.

Parece que estos alumnos han alcanzado el estadio estructural de comprensión aunque *A5* muestra una mayor competencia lingüística. Sin embargo, no comentan nada sobre tendencia finita que aparece en el vídeo.

Aparece otro grupo de dos alumnos, que relacionan los conceptos de tendencia y proyecciones, pero indican que se trata de tendencia finita. Por ejemplo:

A7.- La tendencia finita en las gráficas mediante proyecciones.

A9.- El concepto de tendencias representando sus proyecciones sobre el eje "y" *y* "x".

Finalmente, otro alumno hace referencia a la mayor comprensión de la docencia tradicional impartida por el profesor.

Cuestión 2. ¿Qué he aprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Aparte de dos respuestas sin sentido se pueden considerar:

a) Dos alumnos centran lo que han aprendido en los puntos, no han interiorizado la tendencia finita en profundidad. Sus respuestas han sido:

   A1.- Que ahora se da en un punto.

   A2.- Las tendencias de los puntos que van acercándose al punto.

b) Hay varios alumnos que se centran en la finitud de los puntos, frente a las tendencias infinitas que, según ellos, no se acercan a ningún punto. Se reproducen dos de estas respuestas:

   A2.- Las tendencias de los puntos que van acercándose al punto.

A4.- La proyección de los puntos sobre el eje y.

c) Otros dos alumnos manifiestan haber aprendido la distinción entre tendencia por la izquierda y por la derecha. Estas fueron sus respuestas:

A5.- Las tendencias por la derecha e izquierda.

A3.- La traslación de tender hacia izquierda o derecha.

Merece especial atención la respuesta de $A3$, ya que la palabra *"traslación"* no se ha utilizado en el vídeo pero muestra que el alumno entiende la tendencia hacia izquierda o derecha como una situación trasladable.

d) Un grupo de seis alumnos manifiestan haber aprendido el concepto de proyección. Este hecho fue manifestado verbalmente a la investigadora por parte del alumnado. Algunos alumnos afirmaron que no se les había hablado de las proyecciones de un punto sobre sus ejes de coordenadas. Curiosamente, dos alumnos inciden en que han aprendido a proyectar sobre el eje y, por lo que concluimos que sí conocían la proyección sobre el eje de abscisas, y les ha parecido novedoso la proyección sobre y. Reproducimos un par de estas respuestas:

A6.- La tendencia hacia un punto y sus proyecciones.

A9.- A identificar las proyecciones de un punto.

Cuestión 3. ¿Qué no he comprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Seis alumnos no responden, un alumno dice que no comprende la gráfica y otro responde que no ha comprendido algunos términos que la interlocutora utiliza, sin precisar cuáles. Esta afirmación nos hace concienciarnos sobre el escaso lenguaje matemático del alumno.

Hay un alumno que confiesa no haber entendido nada y, por el contrario, otro dice que todo.

Dos alumnos, *A7* y *A10*, expresan no haber comprendido el sentido del vídeo en indican no comprender el porqué de la proyección:

A7.- Para qué sirve proyectarlo en el eje X.

A10.- El por qué se proyecta.

Si se relacionan estas respuestas con las que dieron en el ítem anterior se podría pensar que para $A7$ es más fácil la comprensión sobre el eje de ordenadas (valores de la función) que sobre el eje de abscisas y, en el caso de $A10$, se puede pensar en aprendizajes mecánicos.

Uno de los alumnos, $A5$, escribe que no comprende la gráfica, pero en el ítem anterior afirmó haber comprendido la tendencia por la derecha e izquierda. Esta respuesta nos hace reflexionar sobre la importancia de presentar una gráfica descontextualizada o con una explicación que haga relacionar dicha gráfica con una situación concreta.

Valoración del aprendizaje a través del video

Finalmente, se pidió al alumnado que valorasen en una escala Likert (1 poco,…, 5 mucho) el aprendizaje a través del video, la dificultad del contenido del vídeo y el interés que le ha despertado el vídeo por el aprendizaje.

Hubo un rango de respuestas de 3 puntos, lo que indica una dispersión notable, y las medias respectivas fueron 2.5, 3,13 y 2,58, destacando la dificultad de contenido del video.

Reflexión

El sector del alumnado que ha sido capaz de relacionar la importancia de las proyecciones de los puntos de la gráfica para el estudio de la tendencia finita representa el 41.67 %. Ese mismo porcentaje de alumnos, de manera muy escueta, sintetiza que el contenido del vídeo es la tendencia finita en las gráficas.

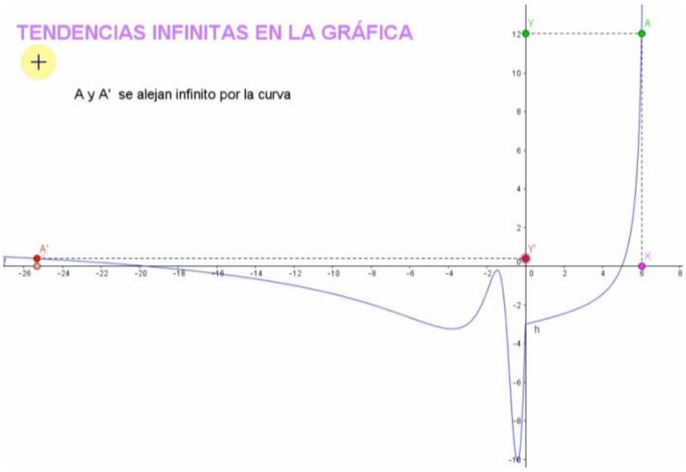
Hay gran diversidad de respuestas en relación a la valoración que hacen los alumnos sobre lo que han aprendido y merece especial atención el descubrimiento de la importancia de las proyecciones sobre los ejes coordenados por (50% del alumnado) y su interés en el estudio de tendencias.

Las proyecciones de los puntos de la gráfica sobre los dos ejes coordenados han supuesto una novedad en el alumnado que ha sido interiorizada en diferentes niveles por parte del alumnado. Cierto sector ha aprendido el procedimiento a seguir para proyectar, en especial, sobre el eje *y*, ya que dicen no haberlo hecho antes; pero no han llegado a comprender su importancia y utilización para el estudio de las tendencias. En sucesivas ciclos se incidirá en este aspecto.

Finalmente, la valoración del aprendizaje de los alumnos fue discreto y también el interés por el mismo y destaca la apreciación sobre la dificultad del contenido del video.

V.3.2.2.2 Discusión del sexto vídeo

Con este vídeo se pretende presentar las diferentes posibilidades que puede presentar la tendencia infinita en una gráfica. Además de la imagen de la figura 5.25, tomada del vídeo, en la proyección aparece el texto que se transcribe a continuación de la misma:



V.25 *Figura 5.25.* Fotograma de tendencias infinitas asociadas en la gráfica

- *Un punto de la gráfica* $\mathrm{A} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *tiende a infinito cuando ocurren una de las siguientes tendencias:*
- X *tiende a infinito.*
- Y *tiende a infinito.*
- X *e* Y *tienden a infinito.*

Tras el visionado del vídeo el alumno debe responder a las mismas preguntas (cuestiones 1, 2 y 3) ya formuladas en el vídeo anterior, que versan sobre el contenido, el aprendizaje y la comprensión.

Cuestión 1. ¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Tras el análisis de las respuestas, se pueden categorizar las respuestas de los alumnos en seis bloques:

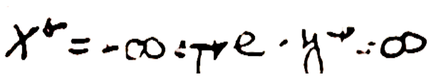
Hay un alumno que interpreta la tendencia no como algo global, sino como el comportamiento del punto que se mueve

> *A11.- Si los puntos tienden o no a infinito.*

Un segundo grupo formado por tres alumnos *(A4, A5* y *A2*) se refiere a las proyecciones sobre los ejes. En particular *A4* alude, con cierta duda, a la proyección del infinito.

> *A4.- ¿Proyecciones de infinito también?*
>
> *A5.- Muestran las proyecciones de 2 gráficas diferentes, sobre los ejes cartesianos.*
>
> En el vídeo sólo se presenta la gráfica de una función. Este alumno confunde las proyecciones a partir de la gráfica como dos gráficas diferentes. En el vídeo se asocia la tendencia al infinito con las tendencias en relación a las abscisas y las ordenadas.

Hay un alumno que utiliza una simbología inventada por él, o por alguien ajeno a la docencia del IES, como es la flecha como superíndice en sentidos diferentes y que sin duda se refiere a las tendencias de *x* y de *y* concretas.



V.26 *Figura 5.26.* Respuesta alumno A2

El grupo cuarto está formado por cuatro alumnos ($A1, A3, A8$ y $A10$), que han optado por reproducir el título del vídeo con expresiones casi idénticas. Los dos primeros parece que quieren enfatizar la idea de tendencias y los últimos parecen indicar que sólo hay una tendencia y totalmente determinada. Se reproducen dos, como muestra:

A1.- Tendencias infinitas en las gráficas.

A8.- La tendencia infinita en las gráficas.

Un quinto grupo está formado por los alumnos $A6$ y $A7$, que trasladan las tendencias de las variables a los valores coordenados.

A6.- Las tendencias infinitas de x *e* y.

A7.- Las tendencias infinitas en cada eje.

Por último, el alumno $A9$ interpreta que la tendencia infinita es lo contrario de la tendencia finita responde *"El concepto contrario al anterior".*

Cuestión 2. ¿Qué he aprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

A continuación se analizan las respuestas y éstas, como en la *cuestión 1*, se agrupan sus respuestas basándose en los mismos criterios.

Hay un grupo de cuatro alumnos ($A1, A5, A6$ y $A8$) que perciben la presentación de forma particular y hacen referencia expresa al caso presentado.

A1.- Utiliza simbolismo pero únicamente del caso particular que nos ocupa.

A6.- Que la x *y la* y *tienden a cosas distinta en el ejemplo.*

Por el contrario, el alumno $A10$ se refiere al comportamiento general de las variables:

A10.- Tanto la x *como la* y *pueden tender a* ∞.

Aparece otro alumno, $A9$, que comete errores de interpretación o al menos de expresión:

A9.- Que tender a infinito por la izquierda supone $-\infty$ *y por la derecha* $+\infty$.

Este alumno sólo ha interiorizado la tendencia sobre las abscisas.

El grupo cuarto está formados por los alumnos $A2$ y $A11$ que afirman no haber entendido nada:

A2.-Nada, no lo he entendido.

Finalmente, el grupo quinto está formado por los alumnos $A3, A4, y\ A7$, y sólo escriben trivialidades. Se muestra la declaración de uno de los alumnos:

A4.- Lo que trasmite (creo).

Cuestión 3. ¿Qué no he comprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

En este caso, las respuestas son tan pobres que no es posible analizar nada, ya que hacen alusiones globales sin que haya alguna especificación que pueda ser interpretada. La mayor parte no responde y el resto, de una u otra forma, dice que todo o nada.

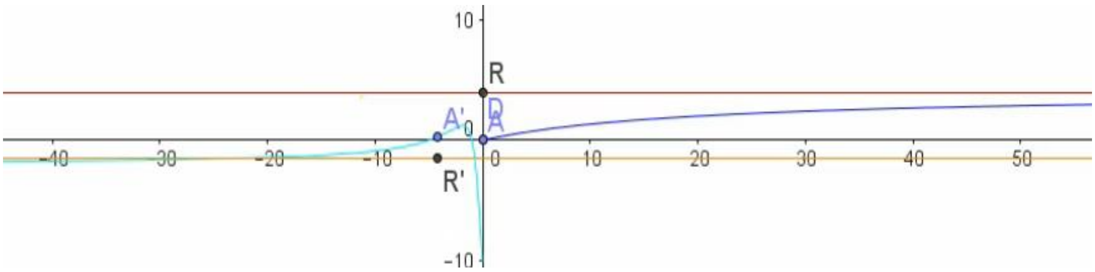
Valoración del aprendizaje a través del video

Finalmente, lo mismo que en el vídeo anterior se pidió al alumnado que valorasen en una escala Likert (1 poco,…, 5 mucho) el aprendizaje a través del video, la dificultad del contenido del vídeo y el interés que le ha despertado el vídeo por el aprendizaje.

Hubo un rango de respuestas de 5 puntos, lo que indica que hay valores en todo el rango posible. Las medias respectivas fueron 2.45, 3,45 y 2,27, destacando la dificultad de contenido del video.

V.3.2.2.3 Discusión del séptimo vídeo

Se sigue aplicando la metodología establecida intentando introducir al alumnado el concepto de tendencia asintótica, presentando gráficas de diferentes funciones, y además de la imagen de la figura 5.27, en la proyección aparece el texto que se transcribe tras ella:



V.27 *Figura 5.27.* Fotograma de tendencia asintótica en la gráfica

- *La gráfica de una función* y=f(x) *tiene un comportamiento asintótico cuando los puntos que recorren la gráfica tendiendo hacia infinito se comportan de forma similar que los puntos que recorren una recta hacia infinito.*
- *Otra forma de explicarlo: Si* A *es un punto de la gráfica de la función y* R *es el punto de la recta más cercano a* A*, la gráfica de la función tiene un comportamiento asintótico si, cuando* A *tiende a infinito, la distancia entre los puntos de la curva* A *y de la recta* R *tiende a cero.* $(d(A,R) \to 0)$. *Es decir, la distancia entre un punto de la curva y la recta se hace más pequeña que cualquier valor.*

- *En esta segunda gráfica, podemos observar como los puntos* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ *y* D *se alejan hacia infinito por la curva de forma asintótica.*
- *Estos puntos se comportan como los puntos* $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ *y* D' *de las rectas dibujadas.*
- *Esta recta recibe el nombre de asíntota de la gráfica de la función.*
- *Para concluir, con esta última presentación vemos que en su tendencia hacia infinito, la gráfica de la función, se aproxima a la gráfica de una recta más que cualquier aproximación fijada y la distancia entre ambas gráficas tiende a cero (se aproxima a cero más que cualquier otro número).*

Cuestión 1. ¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Se pueden distribuir en tres grupos. El primero está formado por cinco alumnos que contestan con trivialidades ($A2, A4, A8, A10$ y $A11$). Como ejemplo, $A2$, $A8$ y $A10$ contestan *"Tendencias asintóticas",* que es el título del vídeo, y *A4 "Lo que es una asíntota".*

El segundo grupo está formado por tres alumnos que comenten ciertos errores que, a continuación, se valoran individualmente:

A6.- El concepto de asíntotas en el eje de coordenadas.

Este alumno comete un error de precisión semántica y del vocabulario utilizado. $A6$ asigna el concepto de asíntota al *"eje de coordenadas"*, hecho que no se presenta en el vídeo, que versa sobre las posibles tendencias asintóticas de la gráfica de una función; habiendo un caso que cuando x tiende a infinito la asíntota es una recta paralela al eje de abscisas y cuando x tiende a menos infinito, la asíntota coincide con el propio eje de abscisas.

A5.- Qué el punto no va a llegar a tocar a la recta.

Este alumno descontextualiza el punto, aunque hace referencia a un punto que recorre la gráfica tendiendo a infinito, que es lo que se presenta en el vídeo. Dicho alumno afirma que el punto no llega a tocar a la recta, eso no se ha expresado en el vídeo, como se puede ver en su trascripción textual.

A7.- La tendencia hacia un punto.

Demuestra no haber comprendido la tendencia como una propiedad global de las funciones. $A7$ analiza las gráficas de las funciones puntualmente, no ha llegado a relacionar la tendencia asintótica de una función hacia una recta.

Finalmente, el tercer grupo está formado por tres alumnos que manifiestan un acercamiento hacia la comprensión de la tendencia asintótica.

A3.- Que las rectas hacen de asíntotas.

Parece que este alumno puede tener una idea clara y sencilla, pero también que identifica la asíntota como recta inconexa a la función, por lo que se trata de otro error a categorizar.

A1.- Los puntos que recorren que tienden a ∞ se comportan de forma similar.

Esta afirmación está incompleta, pero este alumno comprende la importancia de relacionar el comportamiento asintótico con el comportamiento similar entre la función y la recta, cuando se tiende a infinito.

A9.- Diferencia entre función exponencial y asintótica.

Este alumno parece que se acerca al concepto de asíntota al discriminar un tipo de funciones, como son las exponenciales, que no presentan dicho comportamiento.

Cuestión 2. ¿Qué he aprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Tres alumnos dicen no haber aprendido nada ($A4, A10$ y $A11$), otros tres alumnos dicen haber aprendido el contenido que nos ocupa, asíntotas y tendencia asintótica ($A2, A3$ y $A6$); mientras que, $A9$ ha centrado su atención en que la función exponencial no presenta tendencia asintótica cuando crece.

Por otro lado, dos alumnos responden con imprecisiones:

A1.- En el ∞ no se toca nada.

A5.- A medida que un punto de la curva se hace más pequeño (cuando se aleja).

Es curiosa la declaración de este alumno que asigna tamaño a los puntos y variación de los mismos.

Otros dos alumnos manifiestan errores que se pueden calificar como graves:

A7.- Qué es la tendencia hacia un punto o recta.

A8.- Que en la recta tiende a 0.

Por un lado, $A7$ no discrimina entre la tendencia a un punto, de la tendencia a una recta; porque no diferencia entre objetos de diferentes dimensiones, y evidencia el mismo error que en la cuestión anterior al considerar la asíntota como una tendencia de comportamiento local. Por otro lado, $A8$ presenta el error precisión semántica y del vocabulario. Ambos errores ya han sido identificados en la cuestión anterior.

Cuestión 3. ¿Qué no he comprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Ocho alumnos no contestan, dos responden que nada y otro que todo, pero no concretan nada más. Tiene relevancia la respuesta del alumno *A*5 que responde con una pregunta a la que no sabe contestar:

A5.- ¿Cuándo se toca?

Lo que manifiesta este alumno es no haber comprendido cuándo se toca, es decir, bajo qué circunstancias puede o no ocurrir el contacto.

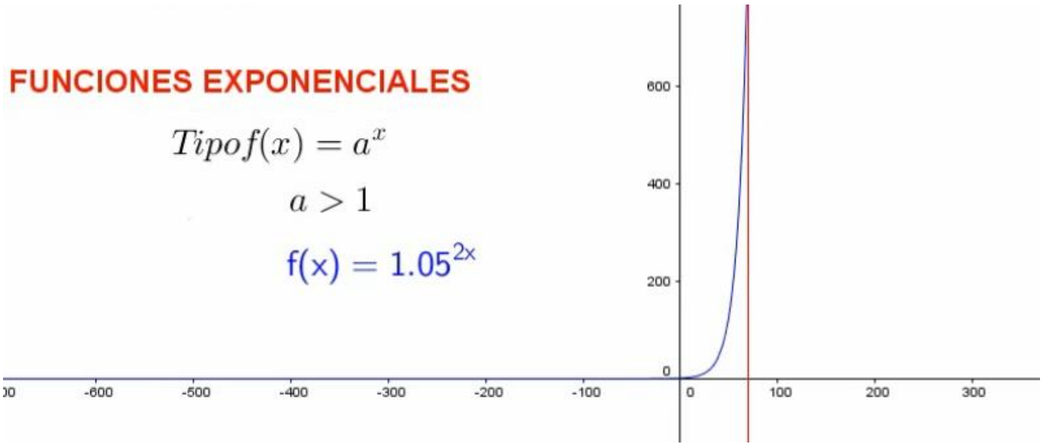
Valoración del aprendizaje a través del video

Finalmente, lo mismo que en el vídeo anterior se pidió al alumnado que valorasen en una escala Likert (1 poco,…, 5 mucho) el aprendizaje a través del video, la dificultad del contenido del vídeo y el interés que le ha despertado el vídeo por el aprendizaje.

Aunque el rango de respuestas sigue siendo de 5 puntos, solo hubo una valoración con 5 puntos y tres con 1 punto. Las medias respectivas fueron 2.55, 3,45 y 3.00, destacando la mayor valoración sobre el interés por el aprendizaje despertado por el vídeo.

V.3.2.2.4 Discusión del octavo vídeo

Se continúa en el proceso de profundización del concepto que nos ocupa mediante la discriminación asintótica. La figura 5.28 es un fotograma del vídeo y en su proyección aparece el texto que se transcribe a continuación:



V.28 *Figura 5.28.* Fotograma de discriminación asintótica

- *Vamos a presentar diferentes funciones para estudiar sus tendencias.*
- *Aquí presentamos una función exponencial* $f(x) = a^x$ $(a > 1)$. *Presenta un comportamiento asintótico cuando* x *tiende a* $-\infty$, *pero no presenta comportamiento asintótico cuando* $x \to +\infty$. *En el primer caso, la gráfica se comporta como una recta, pero en el segundo no.*
- *Ahora, vemos que la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *no presenta comportamiento asintótico porque cuando* x *tiende a* $+\infty$ *o a* $-\infty$, *la curva de la función se aleja más y más de*

cualquier recta. Por tanto, no se comporta como una recta paralela al eje de abscisas.

- *En este caso tenemos una función definida a trozos. Presenta un comportamiento asintótico cuando* x *tiende a* $-\infty$*, pero cuando* x *tiende a* $+\infty$ *la gráfica no se parece a una recta.*
- *Para finalizar, presentamos una función con dominio y recorrido en intervalos cerrados. No presentan tendencias infinitas porque la gráfica es finita, por tanto, no puede haber comportamientos asintóticos.*
- *En suma, no todas las gráficas de funciones tienen comportamientos asintóticos, no todas las funciones tienen asíntotas.*

Cuestión 1.- ¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Como viene siendo habitual, un primer grupo, en este caso tres alumnos, ($A5, A6$ y $A8$) optan por responder con el título del vídeo presentado "*Discriminación asintótica*".

El segundo grupo está formado por cuatro alumnos que, de alguna manera, tratan de puntualizar sobre la discriminación asintótica; bien porque consideran que algunas funciones no tienen asíntota, bien cuando hay un parecido en el comportamiento de curva y recta o bien porque la curva sobrepasa a la asíntota o la cruza bruscamente. Se reproducen las declaraciones de dos de estos alumnos:

> *A2.- No todas las funciones tienen asíntotas.*
> *A4.- Que en diferentes funciones como pueden ser la exponencial, radical, la función crece pero sobrepasa a la asíntota que es una línea recta.*

El alumno $A4$ parece que entiende la discriminación, pero en el texto sigue escribiendo asíntota en lugar de cualquier recta.

Finalmente, aparte de un alumno para el que el contenido no es nada, hay otro alumno que evidencia un error que se puede considerar grave:

> *A10.- Que hay gráficas cuyas asíntotas no se acercan a la recta.*

Dicha afirmación es contradictoria, ya que si una gráfica presenta una asíntota, ésta es una recta. Se trata de otro error, consideración de asíntota a la rama infinita de la función. Los dos alumnos restantes no contestan.

Cuestión 2. ¿Qué he aprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Dos alumnos ($A2$ y $A7$) responden con una generalidad:

A2.- La tendencia asintótica.

Otros dos declaran lo que pueden entender sobre un comportamiento asintótico:

A9.- Qué supone la tendencia asintótica.
A3.- Que la función se comporta como una recta en el infinito.

Tres alumnos inciden en la discriminación asintótica, aunque cada uno lo manifiesta de diferente forma:

A1.- Que se comporta de diferente manera dependiendo que función sea.
A8.- Que no se acerca a la recta.
A4.- Que no tiene un comportamiento asintótico la función exponencial.

$A1$ responde de una forma simple aludiendo al comportamiento, $A8$ tiene en cuenta el acercamiento, pero no el alejamiento y $A4$ concreta que no se tiene comportamiento asintótico en la función exponencial sin precisar estudio de la variable ni signo del infinito; aunque así, se considera uno de los ejemplos del vídeo.

El alumno $A10$, manifiesta el mismo error que en la cuestión anterior, afirmando que hay gráficas cuyas asíntotas no se acercan a la recta y los tres alumnos restantes escriben términos que no aportan demasiada información (todo, nada nuevo y nada).

Cuestión3. ¿Qué no he comprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Seis no responden, tres responden nada, uno todo y, por último, otro, tras este vídeo y los anteriores, manifiesta no comprender el concepto de tendencia asintótica.

Valoración del aprendizaje a través del video

Lo mismo que en el vídeo anterior se pidió al alumnado que valorasen en una escala Likert (1 poco,…, 5 mucho) el aprendizaje a través del video, la dificultad del contenido del vídeo y el interés que le ha despertado el vídeo por el aprendizaje. Finalmente, aunque el rango de respuestas sigue la misma pauta del vídeo anterior, las medias respectivas fueron 2.64, 3.45 y 2.68, destacando la ligera subida del aprendizaje y la pequeña bajada del interés por el aprendizaje despertado por el vídeo.

Reflexión

Las respuestas a la primera cuestión planteada tras el sexto vídeo se basan en la representación simbólica de la situación planteada, han sido muy variadas y destacan la importancia de los puntos, la tendencia infinita global de la gráfica y la tendencia infinita de las proyecciones. Algo más de un tercio del alumnado manifiesta haber aprendido el caso particular de la gráfica presentada, sólo un alumno es capaz de extraer conclusiones globales a partir de la gráfica particular. Merece especial atención un alumno que afirma que la tendencia a infinito por la izquierda supone $-\infty$ y por la derecha $+\infty$. Este alumno centra la tendencia por la izquierda (o derecha) a la tendencia de la variable x cuando tiende a $-\infty$ (o $+\infty$), lo que supone una nueva concepción errónea. Será denominada por *"Error respecto a la tendencia de la variable x".*

En relación con el comportamiento asintótico de las funciones (séptimo vídeo) se han encontrado los siguientes errores:

- Error de precisión semántica y del vocabulario
- Error de desconexión entre asíntota y función
- Error de considerar la asíntota como comportamiento local

Una cuarta parte de los alumnos van avanzando en la comprensión de los contenidos, aunque algunos de ellos con imprecisiones, otros manifiestan errores graves y la mitad de los alumnos aportan poca información, ya que responden con el título del vídeo o con cuantificadores subjetivos. Finalmente, sólo un alumno manifiesta no comprender cuándo se produce un contacto entre la función y la asíntota.

Una tercera parte de los alumnos van avanzando en la comprensión de la discriminación asintótica (vídeo octavo), casi tres cuartas partes de ellos van progresando sobre la comprensión del contenido que nos ocupa. Uno de los alumnos nos trasmite un error grave (de considerar rama infinita como asíntota) Llama la atención que ningún alumno invoca en sus ejemplos a funciones conocidas, como a la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, que se presenta en los vídeos y se conoce de cursos anteriores.

V.3.2.2.5 Cuestionario global de los vídeos de la segunda sesión

Con el fin de completar información sobre esta sesión se plantea un cuestionario con ítems de respuesta doble (verdadero o falso) y otras abiertas para que puedan expresar libremente sus apreciaciones.

Texto que se presenta al alumnado:

Contesta Verdadero o falso, justificando la respuesta:

P.1. Si cuando A *tiende a infinito la distancia entre los puntos de la curva* A *y de la recta* R *tiende a cero.* ($\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) \to 0$)*, en el infinito, la curva se comporta como la recta.*

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Sólo dos responden correctamente, aunque ninguno justifica la respuesta. Uno de ellos simplemente responde con una V y el otro justifica con el propio enunciado.

A7.- Si, porque la distancia tiende a 0.

Cuatro responden incorrectamente, uno de ellos no argumenta la respuesta, curiosamente dos alumnos afirman que sería verdad si tendiera a $-\infty$. Hay otro alumno, $A5$, que considera que el enunciado es falso:

A5.- Falso. Se cruzará en el infinito por lo tanto no se une.

Este alumno afirma que la curva y la asíntota *"se cruzan".* Es posible que quisiera decir *"se cortan".* Puede tratarse de otro error semántico. Según este alumno, por tanto, en algún momento la distancia llega a ser cero, y como él argumenta "*no se une*".

Además, al cruzarse no mantienen comportamiento análogo, el alumno lo verbaliza explicando que no se unen, entendiendo que la unión es el solapamiento y sólo en ese caso, se tendría el mismo comportamiento. Por otro lado, cinco no responden.

P2. Continuado con la situación anterior. Pienso en un número cualquiera, incluso muy pequeño, siempre encontraré dos puntos, uno de la curva y otro de la recta cuya distancia es menor que ese valor. ¿Esto es posible?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Cuatro alumnos responden correctamente que el enunciado es verdadero, dos responden incorrectamente y cinco no contestan. De los cuatro alumnos que afirman que si es posible, solamente dos lo justifican ($A4$ y $A7$):

A4.- Sí. Tiende a 0*; luego cualquier aproximación (el número cualquiera), tiende es más que aproximación.*
A7.- Si porque los números son ∞.

Sin embargo, *A4*, cómo sería deseable, no explica que la tendencia siempre mejora cualquier aproximación y menos aún $A7$, para el que ∞ es un número. Este alumno no está aplicando el concepto de tendencia asintótica, sino la propiedad de la infinitud de los números, aunque comete el error comentado.

Respecto a los dos alumnos que contestan incorrectamente, tan solo aluden al crecimiento de la función que no supone tendencia alguna:

A2.- Falso. Va creciendo.
A3.- Falso. Se va haciendo mayor.

No indican que no es posible encontrar un puntos de la curva tal que a partir de él todos los que le siguen en el movimiento están más próximos a la recta que cualquier aproximación fijada. Estos alumnos han focalizado su razonamiento en el crecimiento o avance de la variable independiente, no en la relación de las variables dependientes de la curva y de la recta-asíntota.

P.3. La curva tiene una asíntota. Pienso en un valor muy pequeño ¿puedo encontrar un punto de la curva cuya distancia a recta sea menor que ese valor?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Cinco alumnos contestan correctamente que la cuestión es verdadera, uno contesta incorrectamente y cinco no responden.

De las cinco respuestas correctas, solamente dos son razonadas, de forma análoga a la pregunta anterior.

A4.- Sí. Pensamos aproximaciones, y tender es más.
A7.- Si porque los números entre dos números son ∞.

Los tres alumnos restantes ponen condiciones, que no siempre son ciertas. $A2$ y $A3$ aseguran que es cierto cuando se cortan o cuando se cruzan y el tercero hace referencia a la posición *"baja un punto"* o a la comparación de sus valores:

A5.- Verdadero. La función baja un punto de la recta es menor que la curva.

P.4. Toda tendencia asintótica es una tendencia infinita.

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Cuatro alumnos responden correctamente, sin razonar su respuesta; dos alumnos responden incorrectamente y cinco no responden.

Nuevamente las respuestas de $A2$ y $A3$ nos permiten ver sus concepciones erróneas:

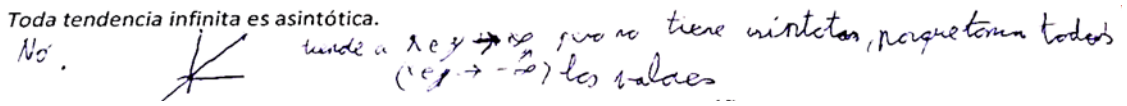
A2.- Falso. Puede tender a un valor.
A3.- Falso. Puede tender a un número.

- Error de considerar que la tendencia asintótica es finita porque puede tender a un valor/número

P.5. Toda tendencia infinita es asintótica.

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Aparte de los cinco alumnos que no responden; dos dicen que es verdadero sin que den justificación alguna; otros tres afirman que es falso, pero no lo justifican de ninguna manera y sólo uno, $A4$, responde correctamente que es falso y lo justifica como muestra la siguiente figura 5.29 en la que representa una recta como contraejemplo, aunque su justificación no es todo lo formal que sería deseable, afirmando que "*Tiende a* x *e* y $\rightarrow \infty$ *(*x *e* y $\rightarrow -\infty$) *pero no tiene asíntota, porque toma todos los valores*"

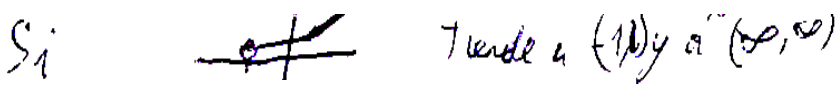


V.29 *Figura 5.29.* Repuesta del alumno A4

P.6. Una función puede tener tendencias finitas e infinitas en la misma gráfica.

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Cinco alumnos responden correctamente, uno incorrectamente y cinco no contestan. Sin embargo, sólo razonan su respuesta dos alumnos que contestan correctamente. Uno de ellos, $A3$, que en anteriores cuestiones respondía de manera errónea, en este caso, argumenta: "*Verdadero. Porque puede estar para los dos lados".* No utiliza un lenguaje técnico, pero contempla la posibilidad de que haya más de un tipo de tendencia.



V.30 *Figura 5.30:* Respuesta del alumno A4

Por otro lado, $A4$, clarifica su respuesta con el esbozo de una gráfica y representa tendencia finita cuando x tiende a -1 y tendencia infinita cuando x tiende a ∞, aunque muestra imprecisión en su simbología y notación matemática, mostrando la tendencia, tanto finita, como infinita, en forma de notación de coordenadas de puntos $(-1{,}1)$ y (∞, ∞), es decir $(\mathrm{a}, \lim_{\mathrm{x}\rightarrow\mathrm{a}} \mathrm{f(x)})$, con la posibilidad de a finita o infinita (figura 5.30).

P.7. Si una función tiene tendencia infinita, ¿ocurre lo mismo en el infinito positivo que en el negativo?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Sólo un alumno, $A7$, responde correctamente, argumentando que no tiene por qué ocurrir lo mismo en $+\infty$ y en $-\infty$, pero no explica su creencia.

El alumno $A3$, como en anteriores cuestiones nos muestra nuevamente su concepción errónea respecto al comportamiento de las funciones en el infinito.

A3.- No. Cuando tiende a infinito positivo no tiene valor asintótico. Cuando tiende a infinito negativo tiene valor asintótico.

Se trata de una concepción errónea ya que sólo cree que hay comportamiento asintótico cuando x tiende a $-\infty$ (error asintótico asociado a infinito negativo); quizás motivado por la función exponencial de base mayor que 1, y otro más, ya repetido muchas veces, al considerar que el comportamiento asintótico es un valor.

Dos alumnos responden incorrectamente sin razonarlo y la mayoría ni responde.

P.8. No todas las gráficas de funciones tienen comportamientos asintóticos, no todas tienen asíntotas.

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Esta cuestión es la única en la que no ha habido ninguna respuesta errónea, pero sí un alto grado de abstención. Ningún alumno justifica adecuadamente su respuesta, pero los que responden, casi la mitad, lo hace correctamente. La respuesta más explícita es la siguiente:

A7.- Sí, no tienen por qué tener un comportamiento asintótico.

En la última parte del test se propone al alumnado la siguiente actividad para que la terminaran en sus casas con el objetivo de comprobar si distinguían entre tendencia infinita no asintótica y asintótica. Se presentan las gráficas de las siguientes funciones dibujadas con el programa GeoGebra:

$$f(x) = 3^x, f(x) = (1/3)^x, f(x) = x^3, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, f(x) = \arctan(x)$$

$$f(x) = \frac{2x^4 - 9x^3 - 9}{x^4 + x^2 + 6}$$

P.9. Señala sus tendencias en la tabla facilitada y en la última casilla justificar la respuesta. Especifica si tienen tendencia infinita y/o tendencia asintótica.

a) *Tendencia infinita cuando* $x \to -\infty$
b) *Tendencia infinita cuando* $x \to +\infty$
c) *Tendencia asintótica cuando* $x \to -\infty$
d) *Tendencia asintótica cuando* $x \to +\infty$

A modo de ejemplo se reproduce la tabla que presentó el alumno A7

Debes señalar sus tendencias. Especifíca si tienen tendencia infinita o tendencia asintótica.

	Tendencia infinita cuando x→ $-\infty$	Tendencia infinita cuando x→ $+\infty$	Tendencia asintótica cuando x→ $-\infty$	Tendencia asintótica cuando x→ $+\infty$	Justifica la respuesta
f(x)= 3^x			X		Cuando x = -∞ y = 0
f(x)= $(1/3)^x$				X	Cuando x = ∞ y = 0
f(x)= x^3	X	X			Cuando x = ∞ y = ∞ Cuando x = -∞ y = -∞
$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$			X	X	Cuando x = ∞ y = 1 Cuando x = -∞ y = 1
$f(x) = \arctan(x)$	X	X	[illegible]	[illegible]	Cuando x = ∞ y = ∞ Cuando x = -∞ y = -∞
$f(x) = \frac{2x^4-9x^3-9}{x^4+x^2+6}$			X	X	Cuodo x = -∞ y = 2 Cuando x = ∞ y = 2

V.31 *Figura 5.31*. Respuesta del alumno A7

Los alumnos tuvieron la opción de realizar la tarea en sus casas ayudándose de la aplicación de GeoGebra on line o habiéndola descargado previamente. También se alojaron archivos de GeoGebra en la plataforma de Moodle del IES de dichas funciones, para facilitar el visionado de las mismas. Se insistió al alumnado que se ayudasen de los diferentes comandos, en especial del zoom, de los que dispone el programa de GeoGebra para visualizar el comportamiento global de la función a través del estudio de la gráfica. Sin embargo, solo realizaron la tarea la mitad de los alumnos y, en general, las respuestas emitidas por éstos son demasiado arbitrarias.

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = 3^x$:

- Respecto al comportamiento de x→ $+\infty$.
  Cuatro alumnos señalan correctamente que se tiene una tendencia infinita cuando $x \to +\infty$ ($A4, A5, A8$ y $A11$). Otro alumno responde erróneamente que se presenta una asíntota ($A2$) y el resto no responde nada.
- Respecto al comportamiento de x→ $-\infty$.

  Dos alumnos responden correctamente que se tiene una tendencia asintótica cuando x→ $-\infty$ ($A4$ y $A7$), pero el alumno A7 comete imprecisiones graves en su notación matemática. Otro alumno es consciente de la tendencia infinita en menos infinito pero no percibe que esa tendencia es asintótica. Por último, el resto de alumnos no responden nada.

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = (1/3)^x$:

- Análisis cuando x→ $+\infty$:
  Tres alumnos ($A4, A8$ y $A11$) contestan correctamente y el primero de ellos lo justificó adecuadamente, otros tres alumnos no perciben ni la tendencia infinita ni la asintótica y los cinco alumnos restantes no contestan.

- Análisis cuando x$\rightarrow -\infty$:
  Ningún alumno señala la respuesta correcta indicando que en esta situación se tiene una tendencia infinita. Tres alumnos señalan erróneamente que cuando x$\rightarrow -\infty$ se tiene un comportamiento asintótico ($A7, A8$ y $A11$). Los ocho restantes no se pronuncian.

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = x^3$:

- Análisis cuando x$\rightarrow +\infty$:
  Tres alumnos contestan correctamente y tres incorrectamente, uno de ellos afirma erróneamente que hay una asíntota y los dos restantes no señalan ninguna opción. El resto no responde.
- Análisis cuando x$\rightarrow -\infty$:
  Sólo dos alumnos son conscientes de la tendencia infinita cuando x$\rightarrow -\infty$. Del resto, uno de ellos afirma erróneamente que hay una asíntota, se trata del mismo alumno que en el caso de x$\rightarrow +\infty$; los ocho restantes no responden.

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$:

El alumno $A7$ responde correctamente, pero comete imprecisiones graves en su notación matemática "$cuando\ x = -\infty, y = 1;\ y\ cuando\ x = -\infty, y = 1$". Este alumno es el único que percibe la tendencia asintótica cuando x$\rightarrow +\infty$. Dos alumnos visualizan sólo la tendencia asintótica cuando x$\rightarrow -\infty$ ($A2$ y $A11$). Por otro lado, dos alumnos responden incorrectamente o con una incongruencia, como por ejemplo $A4$ que afirma *"No hay, no veo"* y, como en anteriores ocasiones, seis alumnos no responden.

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = \arctan(x)$:

De los cinco alumnos que responden, ninguno lo hace correctamente, solamente un alumno, $A2$, indica que se tiene una tendencia asintótica cuando x$\rightarrow +\infty$, pero no visualiza la tendencia asintótica cuando x$\rightarrow -\infty$, indicando que en ese caso se tiene una tendencia infinita. $A8$ indica que se tiene una tendencia infinita cuando x$\rightarrow +\infty$, pero no visualiza ninguna tendencia asintótica. $A7$ sigue cometiendo los mismos errores de notación y afirma que hay tendencias infinitas cuando x$\rightarrow -\infty$, la tendencia asintótica cuando x$\rightarrow +\infty$, frente a dos que perciben tendencias infinitas, pero no las concretan como asintóticas.

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = \frac{2x^4-9x^3-9}{x^4+x^2+6}$:

Sólo el alumno $A7$ responde correctamente y visualiza la tendencia asintótica cuando $x \to -\infty$, y cuando $x \to +\infty$, pero sigue cometiendo los mismos errores de notación. Finalmente, A5 señala la tendencia infinita y asintótica cuando $x \to +\infty$, pero en el caso de $x \to -\infty$ sólo señala una tendencia infinita pero no asintótica. Los tres restantes que participan seleccionan tendencias infinitas.

P.10. A modo de conclusión, se les plantea a los alumnos la siguiente pregunta totalmente abierta: ¿Cuándo presenta una función un comportamiento asintótico?

Análisis de las respuestas de los alumnos

Sólo responden tres alumnos y de sus respuestas se deduce que tienen deficiencias cuando deben expresarse y obtener conclusiones globales. La mayoría no responde y los tres que lo hacen apenas escriben unas palabras y trasmiten ideas parciales e inconexas.

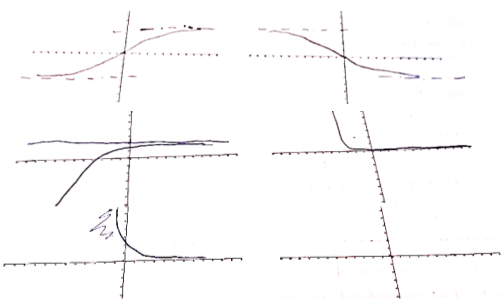
A4.- Cuando al tender al infinito (x$\to -\infty$, x$\to +\infty, \ldots$) *hay un valor que no llega a tocar, pero tiende a él.*

A5.- Cuando tiende a ∞.

A7.- Cuando se asemeja a una recta.

P.11.- Haz una representación simbólica en el plano cartesiano que se acompaña de las posibilidades que puede presentar una función con asíntotas horizontales.

Sólo responden tres alumnos y han representado cuatro esbozos de gráficas que presentan asíntotas horizontales que se muestran en la figura 5.32. Dichas representaciones son análogas a los presentados en las funciones que se visualizaron en los vídeos. En ninguno de los casos sistematizaron las diferentes posibilidades que se pueden presentar en una función.



V.32 *Figura 5.32.* Representaciones de los alumnos A4, A5 y A7

Reflexión

Se considera interesante señalar que dos alumnos afirman que cuando A tiende a infinito la distancia entre los puntos de la curva, A, y de la recta, R, tiende a cero. $(d(A,R) \rightarrow 0)$, en el infinito, entonces la curva se comporta como la recta; se cumple, pero sólo cuando se tiende a $-\infty$. Por tanto, estos alumnos aunque se están acercando a la comprensión del concepto, no lo interpretan de forma global para las dos posibilidades del infinito.

Los alumnos van comprendiendo el comportamiento asintótico de forma parcial. Algo más de la tercera parte del alumnado entiende que la tendencia asintótica es infinita, aunque no lo argumenta justificadamente y un pequeño sector afirma que la tendencia asintótica es finita. El hecho de que en la tendencia asintótica, la gráfica tenga un comportamiento en el infinito como una recta, hace que cierto sector del alumnado lo interprete como una tendencia finita; entendiendo por finitud la limitación que aporta dicha recta.

Consideran que la tendencia es finita porque, según sus respuestas, *"puede tender a un valor o a un número"*, focalizando la tendencia en una sola variable, que está fijada o acotada en un valor concreto y, por ello, concluyen que la tendencia es finita, presentándose otra concepción errónea. Por otra parte, los alumnos que consideran que si hay asíntota la tendencia debe ser infinita también creen que si la tendencia es infinita, entonces es asintótica.

Aunque en los vídeos han aparecido diversas funciones que presentaban diferentes comportamientos en relación a la tendencia de la variable independiente, este hecho no lo han interiorizado, salvo un alumno, y los alumnos que van aprendiendo consideran que existen funciones que no tienen por qué tener asíntotas

V.3.2.2.6 Discusión del desarrollo de la segunda sesión de docencia

El martes 15 de marzo, en el periodo posterior al recreo, de 11:30 a 12:20 se llevó a cabo la segunda sesión. Respecto a la sesión anterior se modificó el área de exposición, eliminando la barra de herramientas del programa GeoGebra, para optimizar la visualización de la pantalla gráfica.

La plataforma Moodle emite informes en relación a la actividad de los alumnos en dicho espacio virtual. Solamente un alumno había accedido después de la sesión lectiva, pero comentó que no pudo visualizar los vídeos. Antes de comenzar, la investigadora insistió en la importancia de visualizar los vídeos y les preguntó si tenían alguna duda respecto a lo tratado en la sesión anterior.

A continuación se transcribe uno de los diálogos que tiene su origen en la pregunta que hizo el alumno *A2:*

A2.- O sea, ¿tender es mejor que aproximarse?[2]

P- Tú, ¿qué opinas?[3]

A2.- Es una pregunta, es que estamos viendo vídeos y yo no sé si sé lo que tengo que saber para seguir avanzando, porque es un vídeo, después otro vídeo… Es que tengo dudas...[4]

P.- Dudar significa que estás aprendiendo. Podríamos darte las definiciones de los conceptos y eso sería un aprendizaje analítico; pero consideramos que es más interesantes el aprendizaje constructivista dónde vosotros vais construyendo vuestro conocimiento…[5]

(Silencio) Ante el ambiente tenso, finalmente se contestó:

P.- Sí, efectivamente tender es mejorar cualquier aproximación[6].

A2.- Es que otros años lo de las tendencias no nos lo explicaban así.[7]

P.- ¿Cómo te lo explicaban?

A2.- Pues no me acuerdo, no sé,…

P.- ¿Os parece muy difícil?

A.- A ratos.[8]

P.- Pero te parece interesante

A.- Sí.[9]

Respecto a los vídeos de tendencias finitas e infinitas en la curva, comentaron que es más fácil entender la tendencia infinita, porque como comentó un alumno mientras movía su mano hacia la derecha, *"es que el punto se va"*[10].

Otro alumno dijo que a él nunca le habían dicho *"lo de proyectar un punto sobre los ejes",* pero que con los colores se entendía bien. Este hecho es constatable con la prueba inicial en la que se pedía a los alumnos que proyectasen sobre el eje de abscisas para encontrar el dominio de la función y ninguno lo hizo. Análogamente, ningún alumno proyectó sobre el eje de ordenadas para conocer el recorrido de la función.

---

[2] Este alumno prioriza una comparación entre los conceptos de aproximación frente a la comprensión.
[3] La investigadora intenta recabar más información sobre dicho interés comparativo.
[4] Al no tratarse de una docencia lineal y cerrada, este alumno muestra cierta inseguridad.
[5] Se intenta trabajar en el aula la metacognición fomentanto la competencia de aprender a aprender.
[6] La profesora incide en que la *"tendencia mejora"* sobre que la tendencia sea mejor.
[7] Todo cambio inicialmente provoca rechazo ante lo desconocido.
[8] La dificultad, efectivamente, no es una magnitud, por lo que es difícil responder a dicha cuestión; este alumno la relaciona con la magnitud tiempo.
[9] Respuesta sincera, ya que en general el alumnado muestra interés por aprender.
[10] Relación de la tendencia infinita con el movimiento.

El tercer vídeo de la sesión es el relativo a las tendencias asintóticas. Antes de visualizarlo, la profesora preguntó*: "¿Habéis visto el pasado curso asíntotas?"* Se recibieron respuestas dubitativas, sólo un alumno dice que vieron algo.

P: ¿Qué es para vosotros una asíntota?

Sólo contesta un alumno diciendo:

A3: Es un valor x o y que se toma en el infinito.

La profesora pregunta al resto de la clase si están de acuerdo con esa afirmación y ninguno contesta. Se procede a ver el visionado del vídeo relativo a las tendencias asintóticas y la profesora vuelve a preguntar al alumno si sigue pensando que una asíntota, *"Es un valor x o y que se toma en el infinito"*[11] y el alumno contesta "*que quiso decir que en realidad es un conjunto de valores x e y que la función toma en el infinito"*[12]. Algún alumno dijo que las asíntotas son rectas. La profesora preguntó al gran grupo, que si ellos opinan que la función toma esos valores en el infinito, y un alumno dijo que *"se tocarán en el infinito".* La profesora vuelve a preguntar a todo el alumnado si están de acuerdo. Varios alumnos manifiestan que no entienden nada, otro sin embargo afirma que *"tocarse en el infinito es lo mismo que no tocarse"* La profesora le pide que aclare esa afirmación que parece contradictoria y él afirma que se lo ha dicho el profesor de dibujo técnico y que es verdad. Además, dicho alumno afirma que dos rectas paralelas en el infinito se cortan, porque también se lo ha dicho el profesor de dibujo técnico y que una recta es una circunferencia con radio infinito. Se producen comentarios a favor y en contra. El alumnado continúa diciendo, *"mis compañeros de dibujo me entienden lo que estoy diciendo"*. La profesora pregunta, "*¿hay algún alumno que no curse dibujo?"*, levantaron la mano tres alumnos y manifestaron que no comprendían lo que estaban diciendo. La profesora insistió en que intentaran explicar a sus compañeros las afirmaciones que estaban compartiendo, pero su única justificación era que se lo había contado su profesor de dibujo.

Entonces otro alumno dijo: *"si, es lo mismo que una rana que está en una charca y cada vez salta la mitad de lo que queda por recorrer y así cada vez y al final llega… es infinito pero llega, porque tiende a ello. Es como lo de las sucesiones que hemos estudiado"*.

La profesora le dijo que si una función es lo mismo que una sucesión, y el alumno dijo, que una función de una onda como la del seno si es una sucesión, pero que otras no. Otro alumno dijo que la función exponencial si es una sucesión, porque es creciente. La

[11] Confusión asíntota con "valor".
[12] Confusión de asíntota con "conjunto de valores".

profesora le preguntó: *"¿estás queriendo decir que todas las sucesiones son crecientes?"* Otros alumnos contestaron, *no, no, …*

La profesora simplemente afirmó que sucesión no es lo mismo que función pero no concretó más. Otro alumno preguntó, "*¿pero una función asintótica entonces lo es en el infinito?"*

La profesora preguntó, "*¿has oído en los vídeos que una función es asintótica?"* (ante el silencio del alumnado, continuó) ¡Cuidado con el lenguaje! Hemos hablado de tendencia asintótica, no de funciones asintóticas, no es lo mismo; porque hemos visto funciones que tienen un comportamiento asintótico cuando x tiende a +infinito y una tendencia finita o infinita cuando $x \to +\infty$ o cuando tiende a $x \to -\infty$.

Otro alumno*: "pero, ¿cuándo se tiende siempre se llega?"*[13] La profesora contestó, a veces si, a veces no; lo que siempre se cumple es que si tiende a un valor se podrá mejorar la proximidad a dicho valor más que cualquier aproximación fijada.

Otro alumno que no había intervenido anteriormente, dijo con seguridad, o sea, que toda tendencia es una aproximación, pero una aproximación no es una tendencia. La profesora le comentó que era una buena reflexión. Nuevamente la tarea planificada inicialmente para llevar a cabo en el aula no ha podido finalizarse y se les ha dejado para que reflexionen en su domicilio.

Se les plantea una actividad dónde deben discriminar la tendencia asintótica en un listado de funciones. Para ello se les ha dado dos opciones que visualicen la gráfica en los archivos que se han subido a Moodle, pero para ello tendrían que tener instalado el programa en su ordenador; o bien, acceder mediante el enlace facilitado a GeoGebra on line e introduciendo la expresión algebraica pueden visualizar la gráfica. Se les insiste en que jueguen a acercarse y alejarse desde las diferentes escalas de los ejes coordenados para poder concluir si en el infinito la gráfica de la función se comporta como una recta, mejor que cualquier otra aproximación.

V.3.2.3 3ª Sesión (17/03/16)

En esta sesión se profundiza en el estudio de las tendencias asintóticas horizontales y verticales, siguiendo el modelo ELOS, de estadios de aprendizaje (semiótico, estructural y autónomo). Se facilitó material fotocopiado al alumnado (ANEXO X.3.2.3).

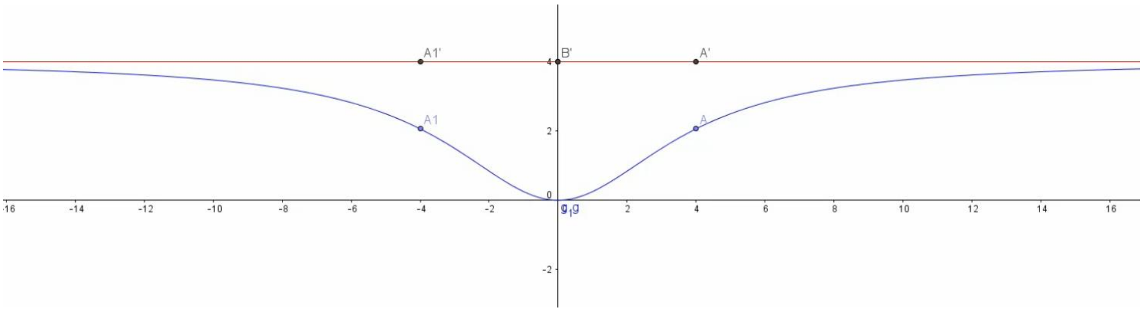
V.3.2.3.1 Discusión de los vídeos noveno décimo y undécimo

Cada una de las figuras 5.32, 5.33 y 5.34 reproduce un fotograma de los estadios semiótico, estructural y autónomo de la *AH*, relativa a los vídeos noveno, décimo y

---

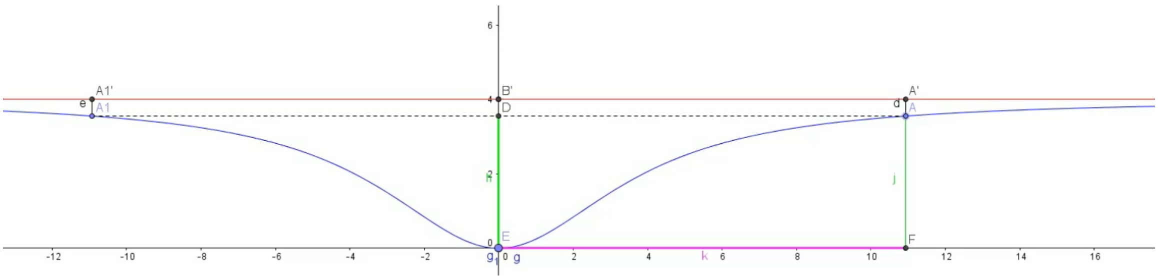
[13] El problema sobre la alcanzabilidad o no sobre el valor al que se tiende ha estado presente en toda la investigación.

undécimo, respectivamente. A cada una de ellas se siguen los textos que, respectivamente, van apareciendo en cada uno de estos vídeos.



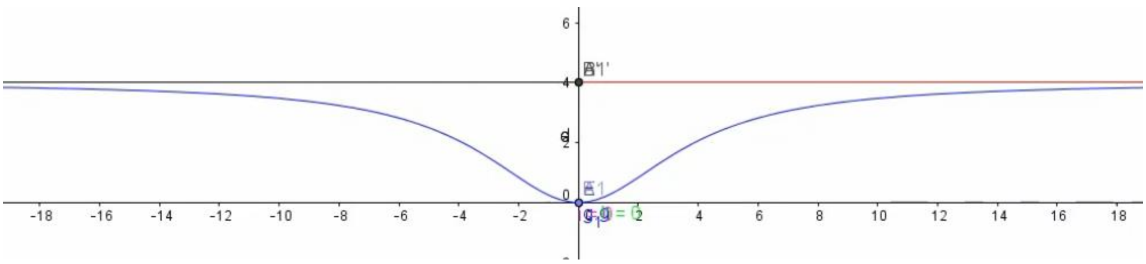
V.33 *Figura 5.33.* Fotograma del estadio semiótico de las AH

- *Se mueve el punto* A *sobre la curva y* A' *sobre la recta y se ve que cuando se aleja* A *del origen se comporta como* A'. *Análogamente, el punto* A1 *sobre la curva se comporta como* A'1 *sobre la recta.*
- *Hay una* AH, *cuando un punto* $\mathrm{A} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *de la curva tiende a infinito de forma que* $\mathrm{x} \rightarrow +\infty$, *pero* y *tiende a una constante. Análogamente, el punto* A1 *tiende a infinito porque* $\mathrm{x} \rightarrow -\infty$, *pero* y *tiende también a una constante; en este caso a la misma.*



V.34 *Figura 5.34.* Fotograma del estadio estructural de las AH

- A *es un punto de la curva.* A' *tiene la misma abscisa que* A; *pero su ordenada es constante, ya que pertenece a cierta recta paralela al eje* OX.
- *Cuando* $A = (x, y) \rightarrow \infty$, *la diferencia entre las ordenadas del punto* A *y del punto* A´, *tienden a cero.*
- *En el gráfico se puede visualizar como van disminuyendo la longitud de los segmentos* $\overline{AA'}$, *representado por el valor* d *cuando* A *se mueve sobre la curva.*



V.35 *Figura 5.35.* Fotograma del estadio autónomo de las AH

- *La función representada en los vídeos anteriores es par, simétrica respecto del eje de ordenadas.*
- *Presenta una* AH *cuando x tiende a $+\infty$ y la misma cuando* x *tiende a $-\infty$. En este caso concreto, la asíntota es la recta* $\mathrm{y} = 4$.
- *Por último, vamos a formalizar el concepto de* AH.
- *Una recta es una* AH, *cuando un punto de la curva,* $\mathrm{A} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *tiende a infinito de forma que la abscisa* x *de* A *tiende a $+\infty$ o a $-\infty$* $(\mathrm{x}\rightarrow +\infty \text{ o } \mathrm{x}\rightarrow -\infty)$ *y la ordenada tiende a una constante* $(\mathrm{y} \rightarrow \mathrm{k})$.
- *La ecuación de la asíntota es $y = k$.*

Como viene siendo habitual, tras el visionado de los vídeos, con el fin de valorar los tres ítems propuestos, el alumno debe responder a las tres preguntas que ya se han formulado. Aquí se hará de forma global para no ser repetitivos y tras el enunciado de cada una de ellas se muestra el correspondiente análisis de las respuestas de los alumnos.

Cuestión 1: ¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

Análisis de las respuestas de los alumnos

Hay tres alumnos que responden de forma genérica con las mismas palabras. Ejemplo:

> *A2.- Las asíntotas horizontales.*

Otro se fija en el concepto:

> *A9.- El concepto de* AH.

Hay dos alumnos que destacan la búsqueda ($A3$ y $A4$):

> *A3.- El encontrar las asíntotas horizontales.*

Finalmente, hay otro alumno que responde al objetivo del primer ciclo:

> *A4.- El estado semiótico de las asíntotas horizontales.*

Cuestión 2. ¿Qué he aprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos

La mayor parte de los alumnos no responde, pero dos de ellos creen que han aprendido lo que es una *AH*, otro a localizarlas y un cuarto cree que no ha aprendido nada.

> *A2.-Qué es una AH.*

> *A7.- Qué son las asíntotas horizontales.*

A3.- A localizarlas.

A4.- Nada nuevo.

Cuestión 3. ¿Qué no he comprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos

Esta cuestión sólo es respondida por el alumno *A4* de forma afirmativa. Respuesta que está en consonancia con la del ítem anterior.

A4.- Una AH *puede ser cortada.*

Valoración del aprendizaje a través del video

Finalmente, lo mismo que en vídeos anteriores se pidió al alumnado que valorasen en una escala Likert (1 poco,…, 5 mucho) el aprendizaje a través del video, la dificultad del contenido del vídeo y el interés que le ha despertado el vídeo por el aprendizaje.

Hubo tres alumnos que no respondieron y el rango de respuestas es el intervalo [1, 4]. Las medias respectivas fueron 2.88, 3,25 y 2,44, destacando la ligera subida del aprendizaje. Las medias del interés por el aprendizaje despertado por el vídeo y de la dificultad se mantienen en los valores anteriores.

Test de respuestas múltiple, verdadero o falso y justificadas:

A continuación, se presentan las formulaciones de cuatro cuestiones para que respondieran si los correspondientes enunciados eran verdaderos o falsos y justificaran su elección. A cada una de ellas le sigue el análisis correspondiente de las respuestas del alumnado.

P 1. La gráfica de una función puede presentar tres asíntotas horizontales.

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Hay ocho respuestas correctas y aportan razonamientos que justifican su elección, aunque todas tienen matices diferentes. Se reproducen tres de estas respuestas:

A2.- No es posible, porque si ya hay una que tiende a infinito, si hubiese otra, se repetiría un mismo valor y no es posible.

A3.- No. Porque tendría dos imágenes, y a un valor de x *le correspondería dos de* y.

A4.- No, pues no puede tener dos imágenes en 1 infinito. Sólo son posibles 2.

El resto de los alumnos, otros tres también dicen que no es posible, pero los razonamientos son menos precisos, incluso pueden ser erróneos como muestra *A6*:

A6.- No. Sólo puede tener 2, si tiene 3 tendría 3 imágenes en y, y eso no es una función.

Este alumno puede tener en mente la gráfica de una parábola de eje horizontal (o una circunferencia) y pensar que se trata de una función en lugar de dos.

P.2. Si una función f(x) *tiene una* AH $\mathrm{y} = \mathrm{a}$, *entonces:*

A. *Nunca puede cortar a su AH.*
B. *Puede cortar a su AH pero cerca del origen de coordenadas.*
C. *Puede cortarla sin limitaciones porque no está en contradicción con la propiedad que verdaderamente cumple una asíntota.*
D. *La función puede cortar a la asíntota, pero un número finito de veces.*
E. *La gráfica de la función puede cortar a la asíntota infinitas veces, pero sin llegar a solaparse totalmente.*
F. *La gráfica de la función en el infinito tiene la misma gráfica que su asíntota.*

Análisis de las respuestas de los alumnos:

A continuación, la tabla 5.8 recoge toda la información relativa a cada apartado de la pregunta *P12.*

V.8 Tabla 5.8. *Frecuencia de respuestas sobre posibles cortes de la curva y la asíntota*

Apartado	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Correctas	2	5	0	0	3	3
Incorrectas	3	1	6	6	0	0
No responden	6	5	5	5	8	8

Como se observa en la tabla 5.8 las respuestas correctas son muy escasas y la mayoría de alumnos no responde. Por tanto, parece que los alumnos, mayoritariamente, no terminan de comprender si las *AH* se pueden cortar o no con la curva. Los tres alumnos que respondieron correctamente a los dos últimos apartados indican, además, cuando la función $y = f(x)$ tiene una *AH. A3* y *A7* hacen declaraciones poco precisas y un tanto desacertadas. De hecho, *A*7 repite el error de discretización (dar valores) y error de tendencia, considerando que *"la función tiende a la recta"*.

A7.- Cuando al dar valores a la función esta tiende a una recta.

Sin embargo $A4$ utiliza tendencias y escribe lo siguiente:

A4.- Cuando hay un valor que cuando $x \to \infty$ *o* $x \to -\infty$, $y \to a$.

Vistas las respuestas anteriores, se les formula otra cuestión que, en cierto modo, pudiera complementar las informaciones tan pobres que habían proporcionado las respuestas anteriores

Cuestión complementaria. ¿Cómo definirías que la función $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *presenta una* AH *en la recta* $\mathrm{y} = \mathrm{a}$*? Haz una representación en un diagrama cartesiano de una* AH.

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Solo responden cuatro alumnos y, de ellos, tres son los mismos respondieron la cuestión anterior. Las respuestas son muy similares a las anteriores. La cuarta de estas respuestas utiliza una terminología de acercamiento indefinidamente, pero su declaración sigue presentando cierto grado de indeterminación, ya que no especifica la tendencia de las variables.

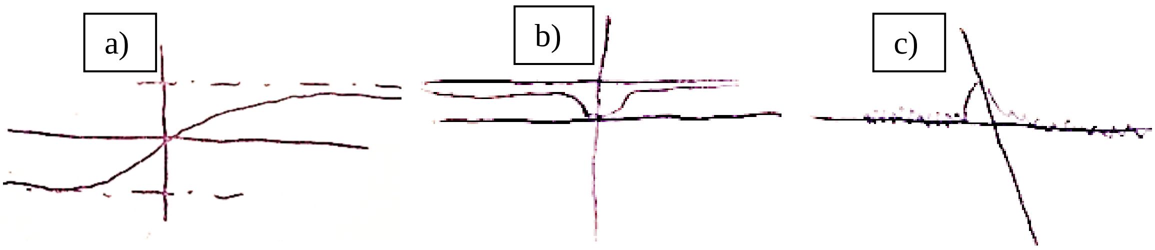
A2.- Recta horizontal a las cuales la función se va acercando indefinidamente.

Estos mismos alumnos, y no otros, hacen representaciones gráficas de asíntotas horizontales en el plano cartesiano.

V.36 *Figura 5.36.* Gráficas realizadas por los alumnos A2 y A3

Los alumnos $A2$ y $A3$ representan una AH y otra AV (Figura 5.36). $A3$ ya mostró confusión entre dichos tipos de asíntotas y con esta representación lo concreta nuevamente.

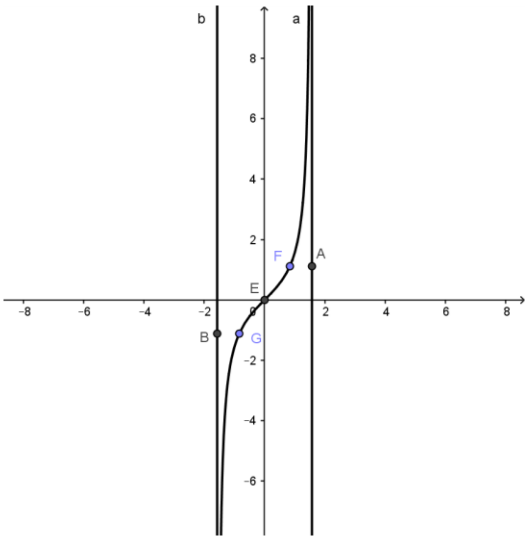
Finalmente, $A4$ muestra dos asíntotas horizontales de una misma función (Figura 5.37 a) y $A7$ muestra dos ejemplos, uno de ellos (Figura 5.37 b) similar al de la figura 5.34 del fotograma y, en el otro (Figura 5.37 c), una asíntota coincidente con el eje de abscisas, presentando cortes entre curva y asíntota. En ambos casos, se presenta comportamiento asintótico en los dos infinitos coincidiendo además con la misma y única asíntota.



V.37 *Figura 5.37.* Gráficas realizadas por los alumnos A4 (a) y A7 (b y c)

V.3.2.3.2 Discusión de los vídeos décimo segundo, décimo tercero y décimo cuarto vídeo

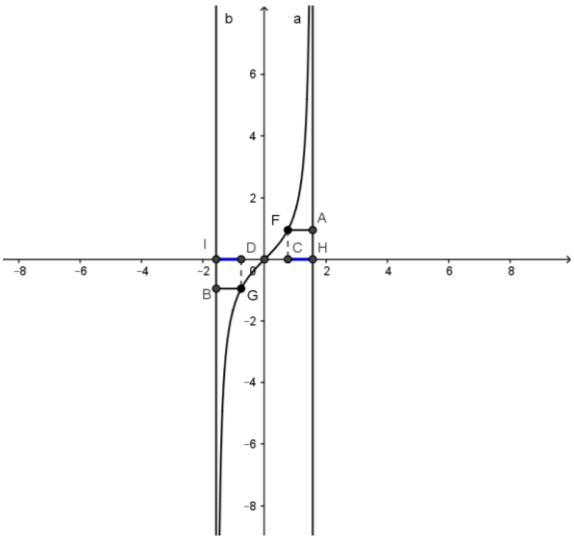
Los vídeos relativos a esta sección corresponden al estudio de las *AV*, siguiendo los estadios semiótico, estructural y autónomo de las mismas. Además, en cada proyección aparece el texto que sigue a la figura correspondiente:



V.38 *Figura 5.38.* Fotograma del estadio semiótico de las AV

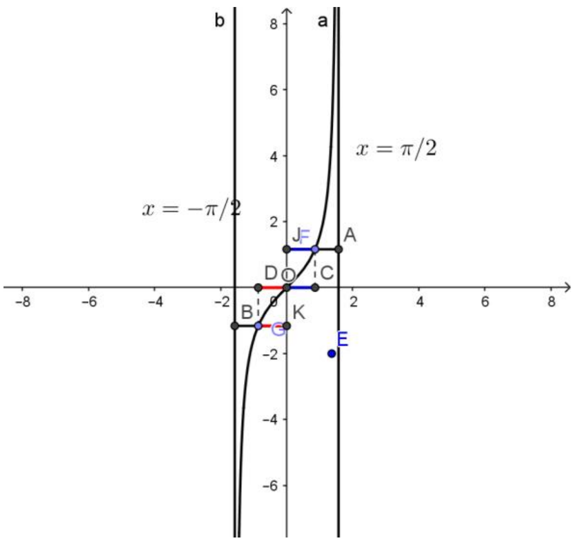
- *Se mueve el punto* A *sobre la curva y* A' *sobre la recta y se ve que cuando se aleja* A *del origen se comporta como* A', *análogamente el punto* B *sobre la curva se comporta como* B' *sobre la recta.*
- *Hay una* AV, *cuando un punto* $\mathrm{A} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *de la curva tiende a infinito de forma que* $\mathrm{y} \to +\infty$ *pero x tiende a una constante.*

- *Análogamente, el punto* B *tiende a infinito porque* $y \rightarrow -\infty$, *pero* x *tiende también a una constante, en este caso a otra distinta.*



V.39 *Figura 5.39.* Fotograma del estadio estructural de las AV

- A *es un punto que recorre la curva y* A' *es el punto de la recta que recorre la recta y tiene la misma ordenada que* A. *Su abscisa es constante porque dicha recta es paralela al eje de ordenadas.*
- *Cuando* A *tiende a infinito la diferencia entre las abscisas del punto* A *y del punto* A´, *tiende a cero.*
- *A medida que* A *tienda a infinito se ve como la longitud de los segmentos* $\overline{AA'}$ *va disminuyendo y tiende a cero.*



V.40 *Figura 5.40.* Fotograma del estadio autónomo de las AV

- *La función representada en los vídeos anteriores es impar, simétrica respecto al origen de ordenadas.*

- *Presenta una* AV *cuando* y *tiende* $a + \infty$ *y lo mismo cuando* y *tiende a* $-\infty$. *En este caso concreto, la asíntota es la recta* x=π/2.
- *Por último, vamos a formalizar el concepto de* AV.
- *Una recta es una* AV, *cuando un punto de la curva,* $A = (x, y)$ *tiende a infinito de forma que la ordenada de* A *tiende a* $+\infty$ *o a* $-\infty$ $(y \rightarrow +\infty \text{ o } y \rightarrow -\infty)$, *y la abscisa tiende a una constante* $(x \rightarrow h)$.
- *La ecuación de la asíntota es* $x = h$. *En este caso particular, la ecuación de las* AV *son* x=π/2 *y* x=-π/2.

Después de la visualización de los tres vídeos, lo mismo que con el proceso seguido con la *AH*, cada alumno individualmente debe realizar una autoevaluación de su propio proceso de aprendizaje. Por un lado, debe responder sobre el contenido que le trasmite el vídeo y, por otro, qué ha aprendido y qué es lo que no ha comprendido. También se les pidió que valoraran en una escala Likert el aprendizaje a través del video, la dificultad del contenido del vídeo y el interés por el aprendizaje que le ha despertado el vídeo.

Las tres primeras preguntas sólo fueron respondidas por tres alumnos y sus declaraciones fueron muy similares a las de *AH* (*"encontrar asíntotas verticales, qué son las asíntotas verticales* y *nada"*). Sin embargo, y esto contrasta con las puntuaciones anteriores, las medias de las valoraciones sobre aprendizaje a través del video y el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo han subido notablemente y alcanzan los valores de 3,13 en ambos casos.

A continuación, como en el caso anterior, se formulan una serie de cuestiones complementarias con el objetivo de indagar hasta qué punto comprendían el concepto, pero solamente participaron activamente tres alumnos. Aun así reproducimos las preguntas y un ejemplo de la respuesta del mismo alumno en todas ellas.

P.1. Las funciones presentan, como mucho, dos asíntotas verticales.
A4.- Falso. $f(x) = tg(x)$

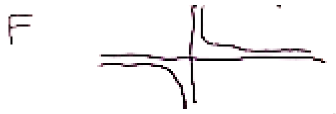
P 2. Si f(x) *tiene como* AV *la recta* x=k, *entonces* k *no pertenece al dominio definición de la función. (Respuesta correcta: Falso)*
A4.- Verdadero.

P 3. Si k *no pertenece al dominio definición de la función, entonces* x=k *es una* AV. *(Respuesta correcta: Falso)*
A4.- Verdadero.

P 4. Una función no puede presentar, en su representación gráfica, asíntotas horizontales y verticales a la vez. (Respuesta correcta: Falso)

A4.- Falso.

A pesar de la respuesta dibuja una hipérbola que presenta ambas asíntotas.



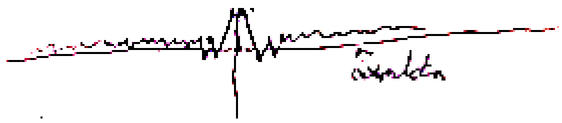
V.41 *Figura 5.41*. Gráfica contradictoria con la respuesta de A4

P 5. La función f(x) *tiene una* AV, x=k, *la función nunca puede cortar a la* AV. *(Respuesta correcta: Falso)*

A4.- Verdadero.

P 6. Una función nunca puede cortar a las asíntotas, ni verticales ni horizontales. (Respuesta correcta: Falso)

A4.- Falso.



V.42 *Figura 5.42*. Gráfica respuesta de A4

P 7. ¿Cuándo presenta una función una AV*?*

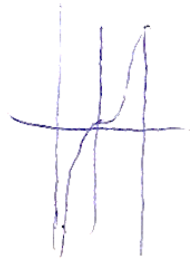
A4.- Cuando $\mathrm{y} \to \infty, \mathrm{x} \to \mathrm{k}.\ \mathrm{y} \to -\infty, \mathrm{x} \to \mathrm{k}.$

P 8. ¿Cómo definirías que la función $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ *presenta una* AV *en la recta* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$*?*

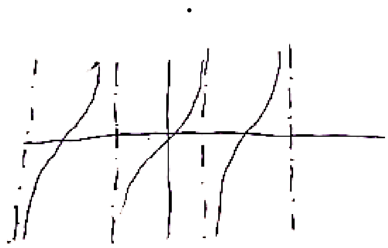
A4.- Cuando $\mathrm{y}\ tiende\ a + o - \infty, \mathrm{x}\ tiende\ a\ \mathrm{k}.$

P 9. Haz una representación gráfica en el plano cartesiano de las posibilidades que puede presentar una función de asíntotas verticales.

Sólo contestan tres alumnos, uno de ellos (figura 5.43) presenta una gráfica con dos *AV*, otro (figura 5.44) muestra cuatro, pudiéndose interpretar como infinitas, aunque no hay ningún tipo de notación que indique el carácter ilimitado de las mismas y, por último, otro alumno expone la expresión funcional de dos funciones racionales cuyas asíntotas están representadas conjuntamente en el mismo plano cartesiano; es decir, se trata de la señalización de las asíntotas sin hacer un esbozo de las correspondientes gráficas (figura 5.45).



V.43 *Figura 5.43.* Respuesta del alumno A7



V.44 *Figura 5.44.* Respuesta del alumno A4

V.45 *Figura 5.45.* Respuesta del alumno A13

Reflexión

A pesar de que buena parte de los alumnos no responde y de que la mayoría del alumnado no es capaz de extraer conclusiones globales a partir de la gráfica particular (las proyectadas en los vídeos), hay gran diversidad en las respuestas en relación a la valoración que hacen los alumnos sobre lo que han aprendido.

La mitad del alumnado ha sido capaz de relacionar las proyecciones para el estudio de la tendencia finita. Merece especial atención el descubrimiento, por parte del alumnado, de la importancia de proyectar los puntos de la gráfica sobre los dos ejes coordenados y su interés en el estudio de tendencias. Ha supuesto una novedad que ha sido interiorizada en diferentes niveles de comprensión. Cierto sector, aunque ha aprendido el procedimiento a seguir para proyectar, en especial sobre el eje de ordenadas, ya que manifiestan no haberlo hecho antes; no ha llegado a comprender su importancia y utilización para el estudio de las tendencias.

Se considera interesante señalar que un pequeño sector de alumnado asocia la tendencia asintótica solamente cuando x tendiera a $-\infty$; afirmando que cuando un punto de la curva A tiende a infinito y la distancia entre los puntos de la curva, A, y de la recta, R, tiende a cero $(d(A,R) \to 0)$, en el infinito, la curva se comporta como la recta; pero sólo cuando se tiende a $-\infty$, posiblemente influenciado por la función exponencial de base $a > 1$, y la priorización sobre funciones crecientes.

Algunos alumnos focalizan su razonamiento en el crecimiento o avance de la variable independiente, no en la relación de las variables dependientes de la curva y de la asíntota e indican que no es posible encontrar dos puntos, uno de la curva y otro de la recta más próximos que un valor dado porque se va creciendo o se va haciendo mayor.

Algo más de la tercera parte del alumnado entiende que la tendencia asintótica es infinita, aunque no lo argumenta. Asimismo, el hecho que en la tendencia asintótica, la gráfica tenga un comportamiento en el infinito como una recta, hace que cierto sector del alumnado lo interprete como una tendencia finita; entendiendo por finitud la limitación que aporta dicha recta.

Consideran que la tendencia es finita porque, *"puede tender a un valor o a un número",* restringiendo la tendencia en una sola variable, que está fijada o acotada en un valor concreto y, por ello, concluyen que la tendencia es finita, presentándose otra concepción errónea.

V.3.2.3.3 Discusión del desarrollo de la tercera sesión de docencia

Durante esta sesión se produjo un debate sobre la docencia que están recibiendo en la que juega un papel fundamental la proyección de los vídeos elaborados para la misma. La totalidad de la transcripción de los diálogos se encuentra el (ANEXO X.3.3) y, en la codificación de las mismas, aparecen todas las intervenciones. Aquí sólo se reproducen las más interesantes, pero se conserva el orden de intervención y se ponen pies de página con información relevante.

> *A1.- Es que esta dinámica no la habíamos visto antes. Normalmente en clase se explicaba en la pizarra y la profesora hasta que no entendemos eso, no pasa a lo siguiente*[14].

> *A2.- Es que esto es muy nuevo, muy novedoso, muy directo…no es a lo que estamos "acostumbraos",…lo vemos mejor lo del movimiento así que en la pizarra*[15].

---

[14] Reconoce la novedad de la metodología y, por otra parte, la apreciación del alumno no es veraz, ya que hay algunos alumnos que no siguen el curso.

A3.- ¿El punto A' *siempre es constante*[16] *y* A *es el que tiende a infinito*[17]*?*

A2.- No, quiere decir que el punto que es constante, es constante respecto al eje y, que tiene el mismo valor[18]*...*

A1.- Que cuando A *y* A' *tienden a infinito*[19] *la distancia entre* A *a* A' *tiende a cero.*

A3.- Las proyecciones de A' *son las mismas*[20]*, porque está en la misma recta y las de* A…

A1.- Que la diferencia entre las ordenadas de A *y* A' *tiende a cero quiere decir que los valores de* y *de* A *y* A' *son cada vez más parecidos. Que los valores de* y *de* A' *se van pareciendo más al valor* y *de* A*. Además el valor y de* A *es siempre el mismo, por* y*. Los valores* x *son siempre los mismos porque se van moviendo pero a la par, son los mismos*[21] *(Se está refiriendo a la* AV*).*

A2.- Volvemos a lo mismo que el otro día. No, porque pasaría de tender a superar[22]*, o a estar inferior, depende si está por arriba del cero o por abajo del cero. Por ejemplo, en este caso de* $\mathrm{y} = 4$*, si la supera la imagen de* A' *sería superior a* 4*, dejaría de tender, sino que tendería y superaría, se aproximaría a cuatro y superaría*[23]*. No sé si me entiendes. Yo lo he entendido así…*

A2: Pues no, en la asíntota nunca se llega a ese punto, en el infinito si llega, pero como al infinito no se llega, porque nunca se llega a alcanzar… pues tampoco, porque nunca se llega a tocar.[24]

A2.- Pues falso, porque no puede llegar a cortar a una asíntota[25]*, no sé… es lo que yo tenía entendido.*

A2: Pues es que nos lo representaban[26]*... era así… (*A continuación se representa la hipérbola $y = 1/x$).

A5.- La asíntota es un punto de la gráfica[27]*, el cual...*

---

[15] Apreciación del dinamismo de la representación.
[16] Ser un punto constante para este alumno es irse moviendo por la recta horizontal $y = k$.
[17] A es el punto sobre la gráfica y para dicho alumno sí que tiende a infinito. Sin embargo, el punto sobre la recta no tiende a infinito.
[18] Ahora lo trata de aclarar y parece que quiere decir que la ordenada es constante.
[19] Aquí ya se comprende que tanto A como A´ tienden a infinito.
[20] Gran imprecisión en el lenguaje de los alumnos. Se refiere a la ordenada.
[21] Se va centrando en el comportamiento asintótico a medida que va hablando.
[22] Aparece la idea de alcanzar, llegar (cortar) superar.
[23] Contraposición entre tender y superar, según el alumno si supera deja de tender. Este alumno no da la posibilidad de intervalos crecientes y decrecientes, sino que la función es siempre monótona creciente o decreciente.
[24] Dificultad de razonamiento en procesos dónde interviene el infinito.
[25] Para este alumno la curva y la asíntota no se pueden cortar nunca.
[26] Aquí, el alumno señala un error didáctico

> *A2: Que la gráfica va a acercarse muchísimo, lo más que pueda*[28]*, pero nunca va a llegar a cortarla…*
>
> *A3.- Es que volvemos a la misma, es que yo no creo que pueda cortarla*[29].
>
> *P.- La gráfica de la función puede cortar a la asíntota infinitas veces, pero sin llegar a solaparse totalmente*[30].
>
> *A2: Eso de solaparse no lo entiendo*[31].
>
> *A5.- Tienen la misma* x *pero de signo distinto*[32] *(se está refiriendo a la* AV*).*
>
> *A2.- Vamos a ver… cuando hay un valor* x *fijo de* x *y la función se va acercando*[33].
>
> *A4.- ¿Puede alejarse y volver? (se refiere a la curva respecto a la* AV*)*
>
> *A5. Tendría que volver la* x *a tomar el mismo valor*[34] *y eso no se puede.*

Cierto sector del alumnado muestra un leve rechazo pasivo ante la nueva dinámica de las clases, pero la mayoría presenta cierto estado de expectación ante la novedad. En general, los alumnos se muestran interesados en el tema que nos ocupa, aunque trasmiten verbalmente que esta dinámica es nueva para ellos y los contenidos tratados presentan cierto grado de dificultad en el nivel educativo que nos ocupa.

Los vídeos son muy cortos de duración, pero muy intensos en contenido.

La metodología expositiva está muy arraigada en ellos y se sienten guiados por la docente que les asegura ir avanzando todos, pero es un grupo heterogéneo en relación al nivel competencial lingüístico y matemático.

Admiten que les gusta el dinamismo del programa GeoGebra (de los vídeos), pero tienen serias dificultades de aprendizaje, aunque en el debate se percibe que van aprendiendo. En principio, no entienden la variabilidad de las coordenadas del punto de la curva según que tiende a infinito y confunden la variación de la abscisa y de la ordenada de las *AH* y *AV* conforme el punto de la asíntota tiende a infinito, con las particularidades de cada caso. Otro foco de dificultad, quizá mayor, es el de posibles cortes de la curva y la asíntota, pero al final del debate parece que algunos alumnos sí

---

[27] Confusión de la asíntota que es una recta con un punto.
[28] Relación de la tendencia con el mayor acercamiento posible, pero siguen pensando que *"no puede tocarla".*
[29] Tienen muy arraigada esta creencia.
[30] La PI está pensando que a partir de un K en adelante la curva de la función no puede ser recta.
[31] El alumnado no comprende todas las palabras que se utilizan en la docencia.
[32] Este alumno confunde la aproximación lateral de ls abscisas con el signo de la ordena.
[33] Es una muestra de que este alumno no identificado, tras un largo debate, sigue sin entender.
[34] El alumno no identificado está explicando que la curva no puede cortar a la asíntota vertical en más de un punto.

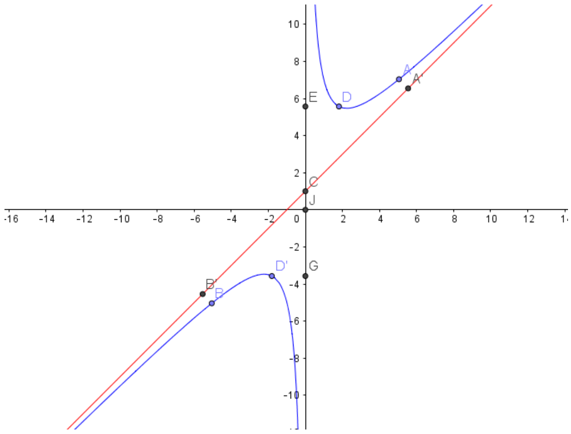
que los han comprendido. Finalmente, las intervenciones producidas en el debate son un reflejo de las opiniones vertidas en los test que han cumplimentado.

V.3.2.4 4ª Sesión (18/03/16)

En esta última sesión se profundiza en el estudio de las tendencias asintóticas oblicuas (*AO*), siguiendo el modelo ELOS, de estadios de aprendizaje (semiótico, estructural y autónomo). Se facilitó material fotocopiado al alumnado (ANEXO X.3.2.4).

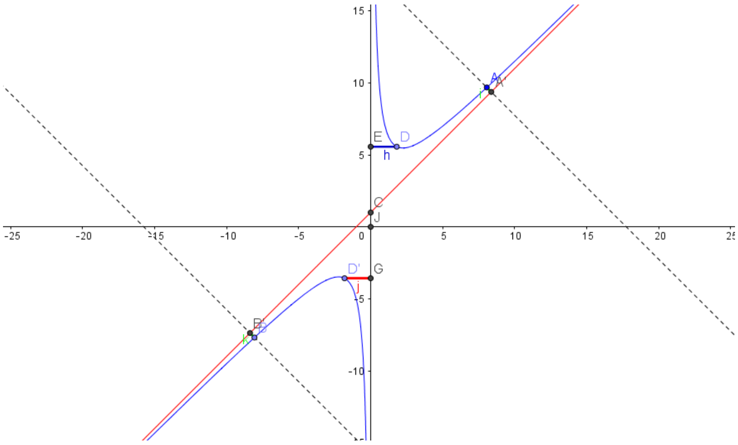
V.3.2.4.1 Discusión de los vídeos décimo quinto, décimo sexto y décimo séptimo: Estadios semiótico, estructural y autónomo (asíntota oblicua)

Cada una de las figuras 5.45, 5.46 y 5.47 reproduce un fotograma de los vídeos décimo quinto, décimo sexto y décimo séptimo, respectivamente. A cada una de ellas se siguen los textos que, respectivamente, van apareciendo en cada uno de estos vídeos.



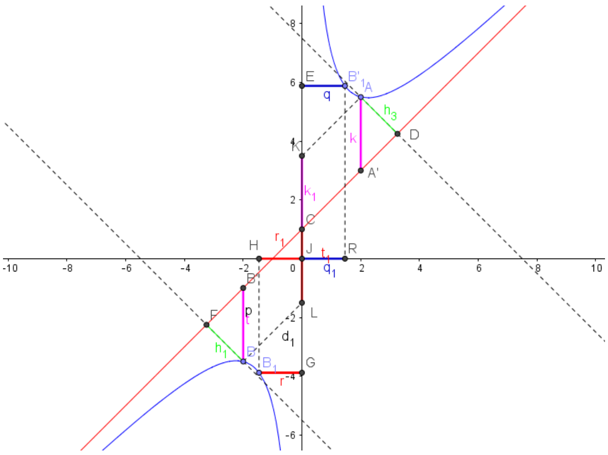
V.46 *Figura 5.46*. Fotograma del estadio semiótico de las AO

- *Se mueve el punto* A *sobre la curva y* A' *sobre la recta y se ve que cuando se aleja* A *del origen se comporta como* A', *análogamente el punto* B *sobre la curva se comporta como* B' *sobre la recta. Hay una* AO, *cuando un punto,* $A = (x, y)$ *de la curva tiende a infinito de forma que* $x \to +\infty$ *e* $y \to +\infty$ *y el punto* B *tiende a infinito* $x \to -\infty$ *e* $y \to -\infty$.
- *Cuando un punto de la curva,* $A = (x, y) \to \infty$, *se pueden dar alguna de estas cuatro posibilidades:*
  - $x \to +\infty$ e $y \to +\infty$
  - $x \to +\infty$ e $y \to -\infty$
  - $x \to -\infty$ e $y \to +\infty$
  - $x \to -\infty$ e $y \to -\infty$



V.47 *Figura 5.47*. Fotograma del estadio estructural de las AO

- A *es un punto que recorre la curva y* A' *es el punto más cercano de la recta que recorre la recta.*
- *Cuando* A *tiende a infinito la diferencia entre las ordenadas y abscisas del punto* A *y del punto* A´, *tiende a cero.*
- *A medida que* A *tienda a infinito se ve como la longitud de los segmentos* $\overline{\mathrm{AA}}$´ *va disminuyendo.*



V.48. *Figura 5.48.* Fotograma del estadio autónomo de las AO

- *Cuando la distancia de la curva a la recta,* h, *tiende a* 0 *también tiende a cero la diferencia de ordenadas de la curva* y *de la recta,* k. *En el límite, cuando* x *tiende a* ∞ *ambas distancias tienden a cero.*
- *Por último, vamos a formalizar el concepto de* AO
- m *es el límite de* $\mathrm{f(x)/x}$ *cuando* x *tiende a infinito*
- n *es el límite cuando* x *tiende a infinito de* $\mathrm{f(x) - mx}$
- *Así se obtiene la ecuación de la asíntota oblicua* $\mathrm{y = m\,x + n}$
- *Cuando un punto de la curva,* $\mathrm{A = (x, y) \rightarrow \infty}$, x *la abscisa e* y *la ordenada del punto* A, *tienden ambas a infinito (positivo o negativo). Su ecuación es* $y = mx + n\ (m \neq 0)$ *y se verifica que:*

- *Como la función y la recta se parecen en el infinito:* $f(x) \to mx$ *y* $f(x)/x \to m$, *y para calcular la ordenada en el origen* $f(x) - m(x) \to n$.
- *Ejemplo: Si* $f(x) = \frac{1+(5+x)^2}{x}$, $\frac{\frac{1+(5+x)^2}{x}}{x} \to 1$, $\frac{1+(5+x)^2}{x} - 1x \to 1$
- *Por tanto, la ecuación de la asíntota es* $y = x + 1$.
- *Presenta una* AO *cuando* x *tiende a* +∞ *e* y *tiende a* +∞, *a la vez que* x *tiende a* -∞ *e* y *tiende a* -∞. *En este caso concreto, la asíntota es la recta* $y = x + 1$.

Como viene siendo habitual, tras el visionado de los vídeos, al igual que se hizo con la docencia relativa a las *AH* y *AV*, con el fin de valorar el avance del alumnado en los sucesivos estadios, cada alumno debe responder a las tres preguntas que ya se han formulado. Aquí se hará nuevamente de forma global, para no ser repetitivos; y tras el enunciado de cada una de ellas, se muestra el correspondiente análisis de las respuestas de los alumnos.

Cuestión 1. ¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

Análisis de las respuestas de los alumnos

Hay dos alumnos que responden de forma genérica con las mismas palabras. Ejemplo:

A2 y A8.- Asíntotas oblicuas.

Otro se fija en la comprensión:

A9.- Entender la actividad de las asíntotas oblicuas.

Dos alumnos fijan su atención en la localización o visualización de las asíntotas:

A3.- A localizar las asíntotas oblicuas.

A5.- Cómo ver las asíntotas oblicuas.

Finalmente, un alumno relaciona el contenido del vídeo con conceptos geométricos:

A4.- Para tomar distancias, coger la perpendicular.

El resto de alumnos no contestaron.

Cuestión 2. ¿Qué he aprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos

Sólo contestan cuatro alumnos, dos de ellos creen que han aprendido *"las tendencias condicionadas";* uno de ellos especifica que pueden ser dependientes o independientes, y el otro afirma que las tendencias se condicionan siempre. Las otras dos respuestas no aportan nada relevante

A2.- Las tendencias se condicionan ya sean dependientes o independientes.

A4.- Que las tendencias se condicionan siempre.

A9.- Lo que trasmite.

A11.- Nada.

Cuestión 3. ¿Qué no he comprendido?

Análisis de las respuestas de los alumnos:

Solamente un alumno concreta la no comprensión sobre que la tendencia siempre esté determinada. Los tres alumnos restantes que contestan aportan subjetividades.

A9.- Que las tendencias siempre están determinadas.

A4.- Nada.

A5.- Varias cosas.

A11.- Todo.

Reflexión de los resultados

Casi una cuarta parte de los alumnos da mucha importancia al contenido relativo a localizar las AO y a los conceptos geométricos asociados a su estudio (distancias, perpendicularidad,…). Respecto a lo que han aprendido, cierto sector del alumnado (15,38%) introduce un concepto que no aparece textualmente en las explicaciones del vídeo *"tendencias condicionadas",* pero que relaciona las dos variables que nos ocupan; y el alumnado lo trasmite como *"algo aprendido",* salvo para el 7,69 % del alumnado que manifiesta no comprender las *"tendencias condicionadas".* Cuando a los alumnos se les pregunta sobre lo que no han comprendido, alrededor de la cuarta parte responde con cuantificadores subjetivos del tipo, todo, nada,… hecho que se produjo también en ocasiones anteriores.

Valoración del aprendizaje a través del video

Finalmente, lo mismo que con los vídeos anteriores, se pidió al alumnado que valorase en una escala Likert (1 poco,…, 5 mucho) el aprendizaje, la dificultad del contenido y el interés que le ha despertado el vídeo por el aprendizaje.

Hubo tres alumnos que no respondieron y el rango de respuestas es el intervalo [1, 5]. Las medias respectivas fueron 2.56 - 3,44 – 2.67 destacando la tendencia creciente en relación al aprendizaje y un ligero descenso de las medias del interés por el aprendizaje despertado por el vídeo y de la dificultad en relación con los valores de los vídeos anteriores, quizás fruto del avance de la experimentación.

En la última parte del test, se propone al alumnado la siguiente actividad con el objetivo de comprobar si son capaces de visualizar, a partir de las gráficas, las diferentes tendencias asintóticas y formalizar la expresión de las asíntotas, en caso de existir. Como en la sesión anterior, se presentaron las gráficas de las siguientes funciones dibujadas con el programa GeoGebra, en caso de no poder finalizarlo en la sesión de docencia, podría terminarse en sus casas:

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}, \quad f(x)=\frac{x^3+2x^2+5x-9}{x^2-x+1} \quad , f(x)=x^{\frac{|x|}{x}}+\frac{1}{x}, \quad f(x)=+\sqrt{x^2-1}$$

$$f(x)=-\sqrt{x^2-1}, \quad f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-3x}, \quad f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}, \quad f(x)=e^{\frac{1}{x}}\, si\ x>0\ , \ f(x)=x^2$$

Cuestión 4. Señala y especifica en la tabla facilitada si la función presenta asíntotas y de qué tipo se trata, concretando su expresión analítica. En la última casilla justifica la respuesta.

a. AH *cuando* $x \to -\infty$
b. AH *cuando* x $\to +\infty$
c. AV *cuando* x $\to$ a^-
d. AV *cuando* x $\to$ a^+
e. AO *cuando* x $\to -\infty$
f. AO *cuando* x $\to +\infty$

Cada alumno disponía de un ordenador con el programa GeoGebra para representar las funciones o acceder al archivo que alojaba dicha función en la plataforma Moodle del centro. El alumnado debía discriminar, en caso de existir, qué tipo de asíntota (*AH, AV* y/o *AO*), presentaba cada función. En los archivos facilitados al alumnado no aparecían dibujadas las asíntotas específicamente.

Análisis de las respuestas

Sólo contestaron a esta pregunta cinco alumnos ($A2, A4, A7, A9$ y $A11$), presentando las mismas respuestas, posiblemente lo hicieron en común. Por tanto, el análisis de dichas respuestas no es de gran importancia, ya que no se justifican las diferentes elecciones y no se trata de un estudio individualizado. Sin embargo, nos aporta información general sobre la comprensión del comportamiento global de una función a partir de su gráfica en un grupo de cinco alumnos.

A modo de ejemplo, se reproduce la tabla que presentó el alumno A7, como muestra de la respuesta común de los alumnos anteriormente citados.

	AH $x \to -\infty$	AH $x \to +\infty$	AV $x \to a$	AV $x \to +\infty$	AO $x \to -\infty$	AO $x \to +\infty$	Expresión de la asíntota
$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$		✓	✓	✓		✓	
$f(x) = \frac{x^3+2x^2+5x-9}{x^2-x+1}$		✓	✓	✓		✓	
$f(x) = x^{\frac{\lvert x \rvert}{x}} + \frac{1}{x}$			✓	✓		✓	
$f(x) = +\sqrt{x^2-1}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
$f(x) = -\sqrt{x^2-1}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-3x}$	✓	✓	✓	✓	✓		
$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$							
$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0$							
$f(x) = x^2$		✓	✓	✓		✓	

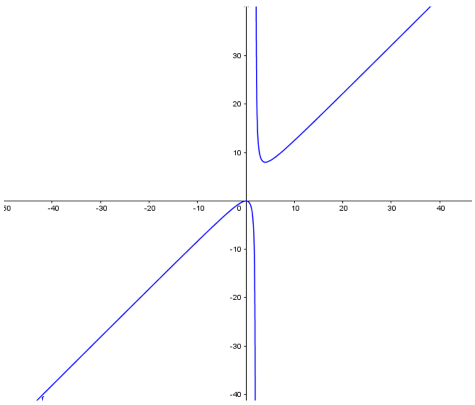
V.49 *Figura 5.49.* Respuesta del alumno A7

El resto de alumnos no contestó.

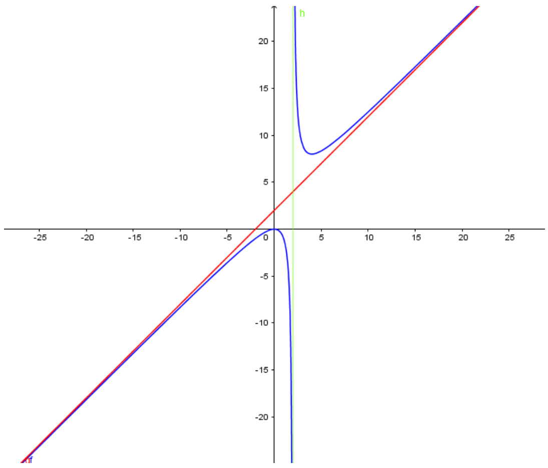
Se procede a estudiar cada función por separado.

$a)$ $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

La *AV* de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ es $x = 2$ y la *AO* es $y = x + 2$. Su representación es la siguiente figura 5.50.



V.50 *Figura 5.50.* Fotogramade la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x-2}}$



V.51 *Figura 5.51*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x-2}}$ y sus asíntotas

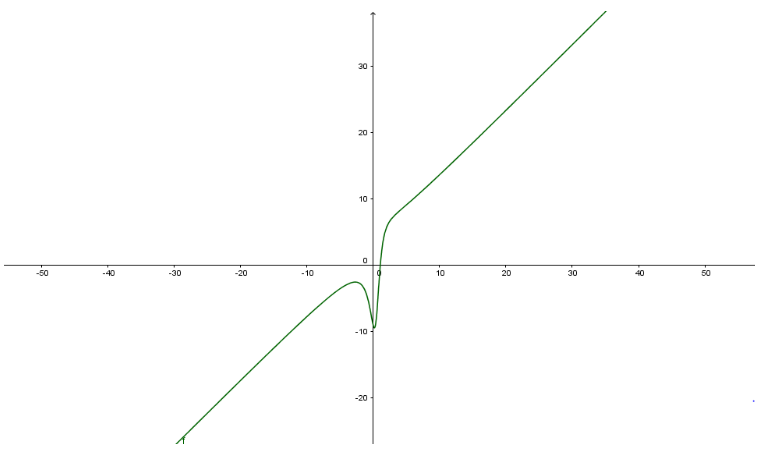
Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$:

- Respecto al comportamiento de $x \to +\infty$.
  Los alumnos señalan a la vez una *AH*, que no existe, y *AO*; hecho incompatible.
- Respecto al comportamiento de $x \to -\infty$.
  No señalan ninguna tendencia asintótica para este caso.
- Respecto al comportamiento de $x \to a^-$ y de $x \to a^+$.
  Los alumnos señalan que la función presenta una *AV*, tanto por la izquierda como por la derecha, pero no especifican que su expresión es $x = 2$.

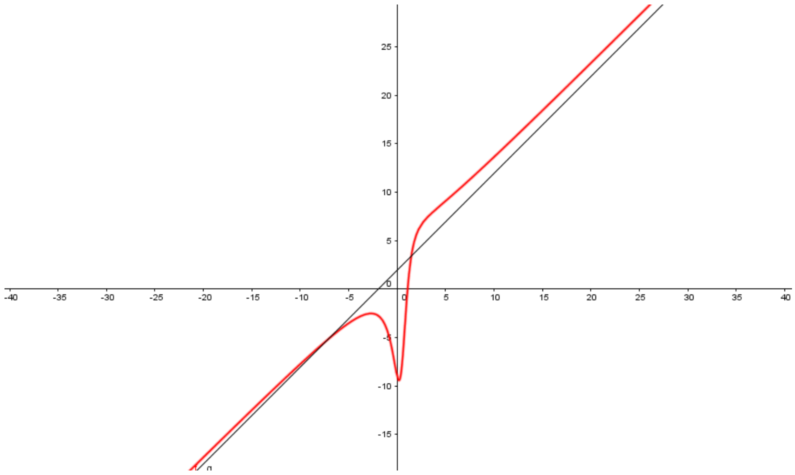
Curiosamente, ante la *AO* cuando *x* tiende a infinito positivo y negativo, los alumnos sólo visualizan dicha tendencia en el primer caso.

b) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x - 9}{x^2 - x + 1}$

Dicha función sólo presenta una *AO*, cuya expresión es $y = x + 2$. Su representación es la siguiente figura:



V.52 *Figura 5.52*. Fotograma de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x - 9}{x^2 - x + 1}$



V.53 *Figura 5.53.* Fotograma de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+5x-9}{x^2-x+1}$ y su asíntota

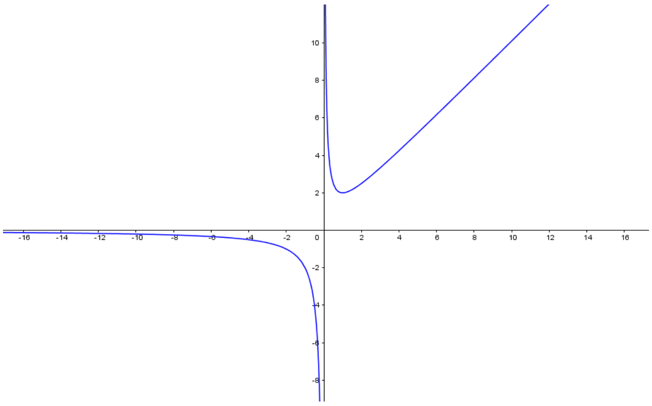
Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+5x-9}{x^2-x+1}$:

- Respecto al comportamiento de $x \to +\infty$.
  Los alumnos señalan a la vez una *AH*, que no existe, y *AO*; hecho incompatible y también presente en estudio de la función anterior, por lo que se categorizará como error de confusión y/o dependencia errónea entre *AH* y *AO*.
- Respecto al comportamiento de $x \to -\infty$.
  No señalan ninguna tendencia asintótica para este caso.
- Respecto al comportamiento de $x \to a^-$ y de $x \to a^+$.
  Los alumnos señalan que la función presenta una *AV*, tanto por la izquierda como por la derecha, que en realidad no existe, sin especificar su expresión.

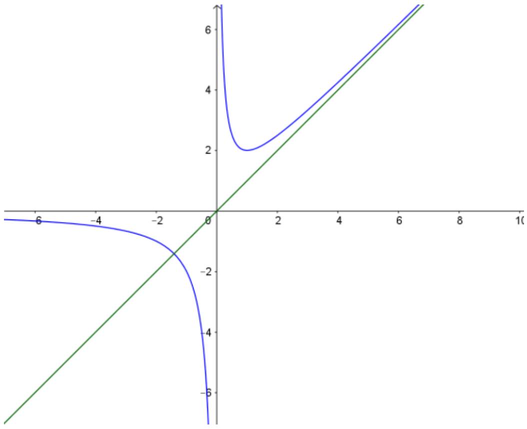
La función presenta una *AO* cuando x tiende a infinito positivo y negativo, pero sólo visualizan dicha tendencia cuando x tiende a infinito positivo. Al igual que en la respuesta de la función anterior, dichos alumnos visualizan una *AH* y *AV*, que en este caso no existe.

c) $f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \frac{1}{x}$

Esta función presenta los tres tipos de asíntotas: *AH* cuando x tiende a infinito negativo $(y = 0)$, *AV* cuando x tiende a cero, en ambas tendencias laterales $(x = 0)$ y *AO* cuando x tiende a infinito positivo $(y = x)$.



V.54 *Figura 5.54*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \frac{1}{x}}$



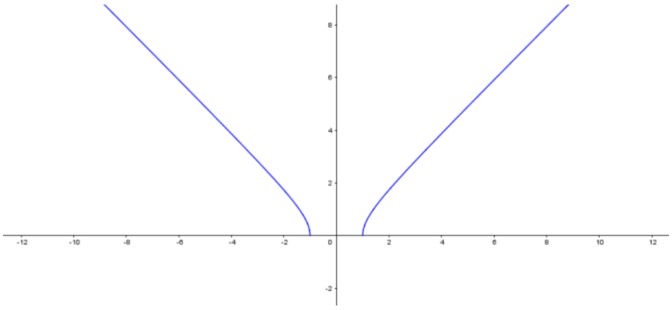
V.55 *Figura 5.55*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \frac{1}{x}}$ y sus asíntotas

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \frac{1}{x}$

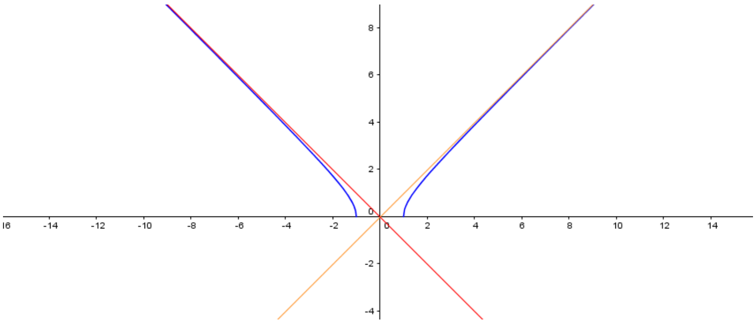
Los alumnos visualizan *AO* cuando x tiende a infinito positivo y *AV* por la izquierda y la derecha de cierto valor a, sin concretar que en este caso es $a = 0$. No perciben la *AH* cuando x tiende a infinito negativo.

d) $f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}$
e) $f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$.

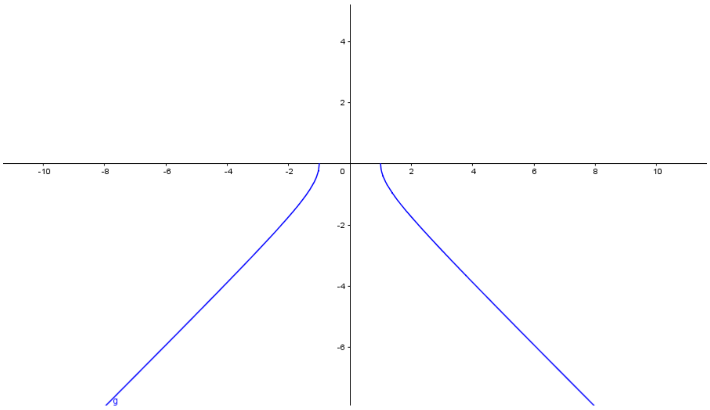
Estas dos funciones radicales se van a estudiar de forma conjunta, ambas presentan las mismas *AO* $(y = -x\ ,\ y = x)$; pero con las particularidades que se van a exponer a continuación.



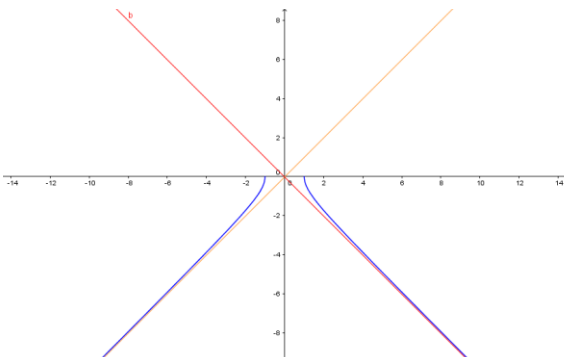
V.56 *Figura 5.56*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}}$



V.57 *Figura 5.57*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}}$ y sus asíntotas



V.58 *Figura 5.58*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}}$



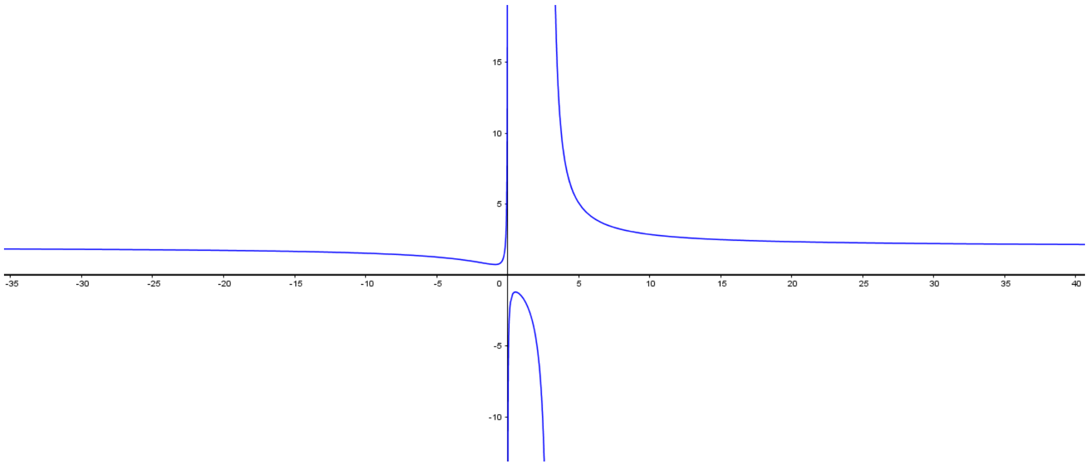
V.59 *Figura 5.59*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}}$ y sus asíntotas

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}$ y $f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$.

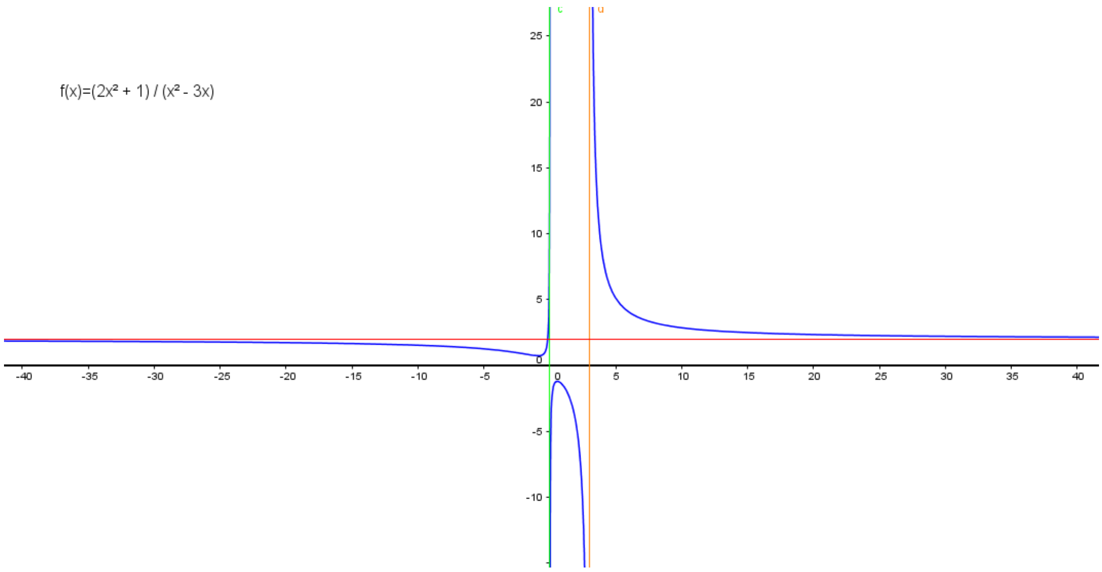
Los alumnos señalan todas las opciones posibles que se proponen, sin especificar la expresión de ninguna de las asíntotas. Por tanto, tienen confusión entre el comportamiento asintótico en ambos infinitos ya consideran posible, nuevamente, que se presente a la vez *AH* y *AO* cuando x tiende a ambos infinitos; además señalan una *AV*, que no existe.

f) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-3x}$

Esta función presenta una *AH* $(y = 2)$ en ambos infinitos y dos *AV* $(x = 0, x = 3)$. Su representación gráfica es:



V.60 *Figura 5.60*. Fotograma de la gráfica de la función función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{2x^2+1}}{\mathbf{x^2-3x}}$.



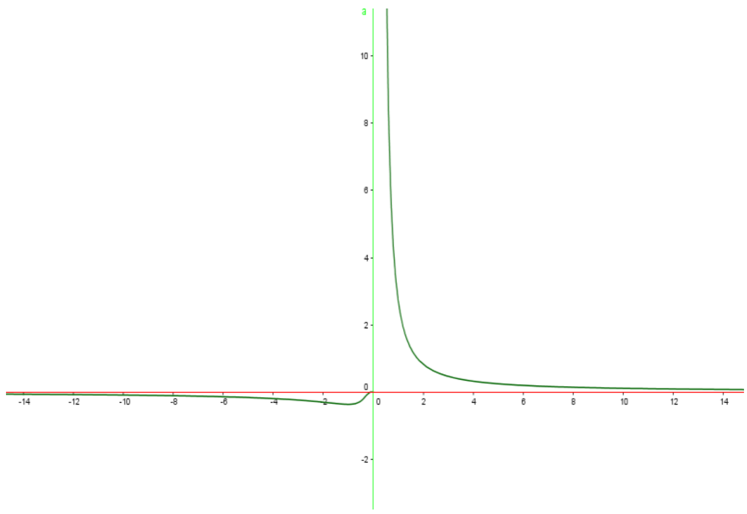
V.61 *Figura 5.61*. Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{2x^2+1}}{\mathbf{x^2-3x}}$ y sus asíntotas

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-3x}$

Han respondido correctamente en relación a las AV y la AH cuando x tiende a infinito positivo. Sin embargo, han señalado que existe una AH y AO cuando x tiende a infinito negativo; categorizado anteriormente.

g) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

En este caso, las asíntotas son los propios ejes coordenados $(AH, y = 0;\ AV, x = 0)$; con la particularidad de que la función, cuando x tiende a *0*, tiene tendencia lateral izquierda finita y tendencia lateral derecha infinita.



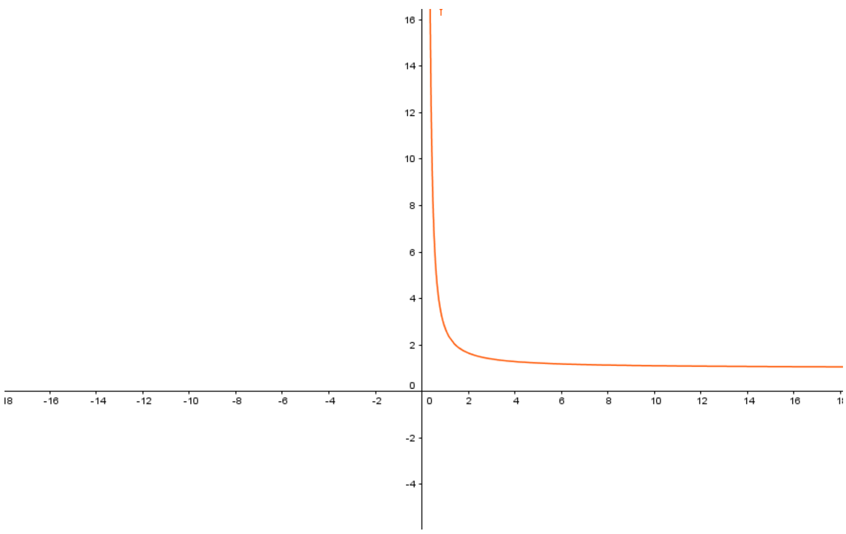
V.62 *Figura 5.62.* Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ y sus asíntotas

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

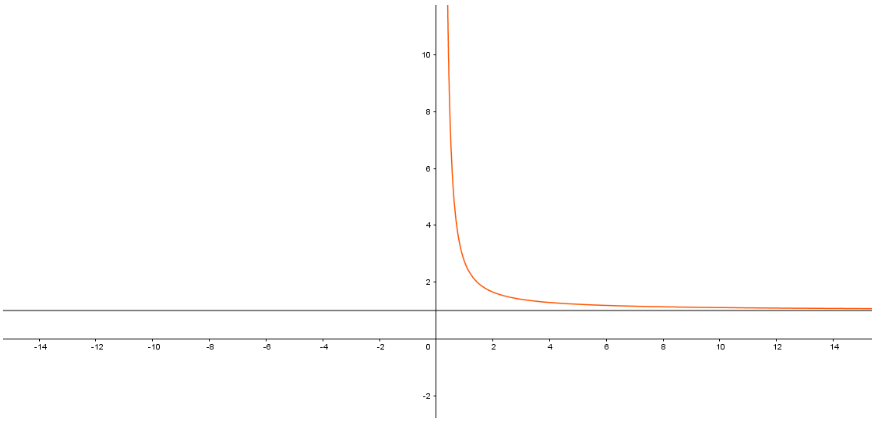
En este caso, los alumnos no señalaron ninguna opción, no visualizaron que los propios ejes coordenados son las asíntotas de la función.

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0$

Por el dominio de definición de esta función, su AH $(y = 1)$ se presenta cuando *x* tiende a infinito positivo y la tendencia infinita se tiene por la derecha de la AV $(x = 0)$.



V.63 *Figura 5.63.* Fotograma de la gráfica de la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0$



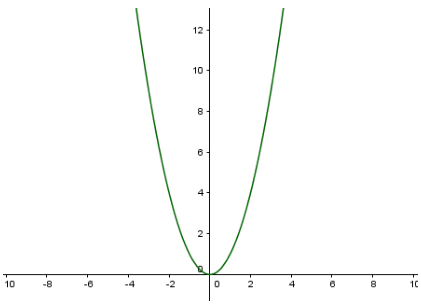
V.64 *Figura 5.64.* Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0}$y sus asíntotas

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0$

Al igual que en la función anterior, los alumnos no señalaron ninguna opción.

i) $f(x) = x^2$

La función cuadrática, cuya gráfica es la parábola, no presenta tendencias asintóticas.



V.65 *Figura 5.65.* Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

Análisis de las respuestas de los alumnos sobre $f(x) = x^2$

Las propiedades globales de la familia de las funciones cuadráticas, contenido presentado en etapas educativas anteriores, debieran estar interiorizadas en el alumnado. A pesar de no tener tendencias asintóticas, los alumnos manifiestan que presenta *AH* cuando x tiende a infinito positivo y *AV* tanto por la derecha como por la izquierda, sin determinar la expresión de la recta; errores muy graves.

Reflexión de los resultados:

No se pueden extraer conclusiones significativas de esta actividad, ya que sólo han participado cinco alumnos y han contestado de forma conjunta; pero en todos los ejemplos está presente la dificultad del alumnado para comprender el comportamiento de las funciones cuando x tiende a infinito negativo. En varias ocasiones, se ha repetido el error de unificar el concepto de *AH* y *AO*, no dando importancia a la pendiente de la recta asíntota. Debido a la totalidad de respuestas erróneas se concluye que se debe profundizar en la utilización del programa GeoGebra para que los alumnos sean capaces de visualizar y discriminar las diferentes tendencias asintóticas.

A modo de conclusión se les plantea a los alumnos la siguiente pregunta totalmente abierta:

Cuestión 5. ¿Cuándo presenta una función una asíntota oblicua?

Análisis de las respuestas de los alumnos

A2, A4 y A7.- Cuando x *tiende a* ∞ *o* $-\infty$.

A3, A9 y A11.- Cuando tienen pendiente. (Tiene que tener pendiente).

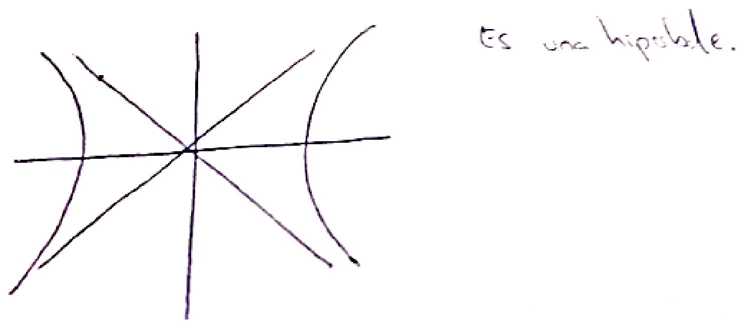
A5.- Cuando la recta no es vertical ni horizontal.

Reflexión

De los siete alumnos que contestan, tres inciden en la tendencia hacia ∞ o $-\infty$ de la variable x como la única condición necesaria para asegurar que estamos ante una *AO*, razonamiento erróneo; y los cuatro restantes focalizan toda su atención sobre la pendiente de la asíntota e, incluso uno de ellos, puntualiza que la recta no sea ni vertical ni horizontal. Ninguno de ellos coordina la relación entre las dos tendencias de las dos variables Los cuatro alumnos restantes no responden.

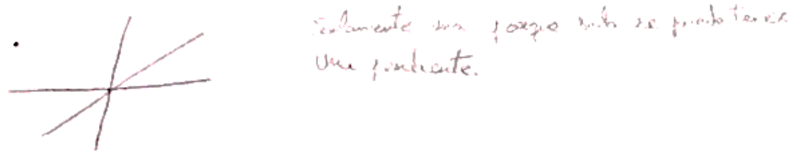
Cuestión 6.- Haz una representación simbólica en el plano cartesiano de las posibilidades que puede presentar una función con asíntotas oblicuas.

A continuación, se presentan las figuras correspondientes a los seis alumnos que han contestado a dicha cuestión (Figura 5.66 hasta 5.72).



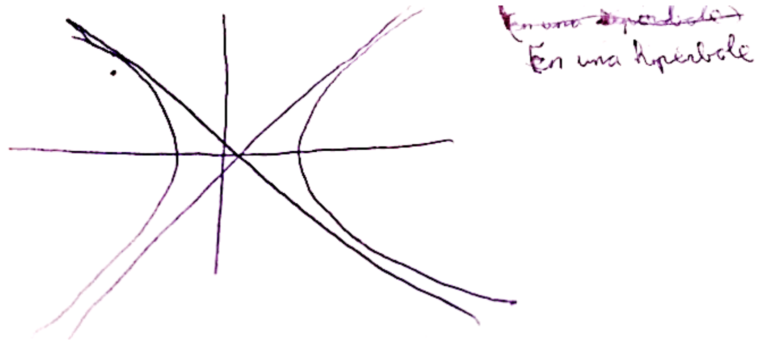
V.66 *Figura 5.66.* Respuesta del alumno A2

A3.- Solamente una porque solo se puede tener una pendiente.

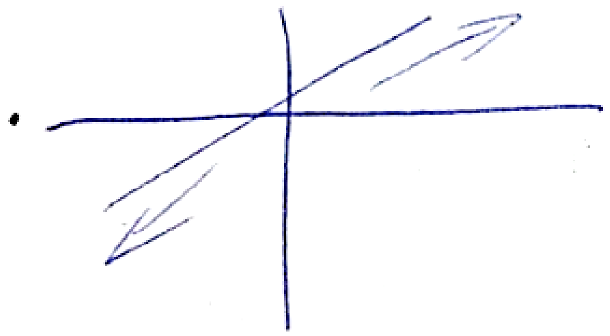


V.67 *Figura 5.67.* Respuesta del alumno A3

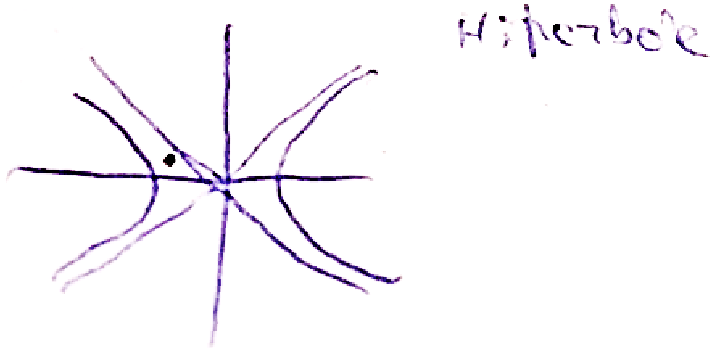
A4.- Es una "hipérbole".



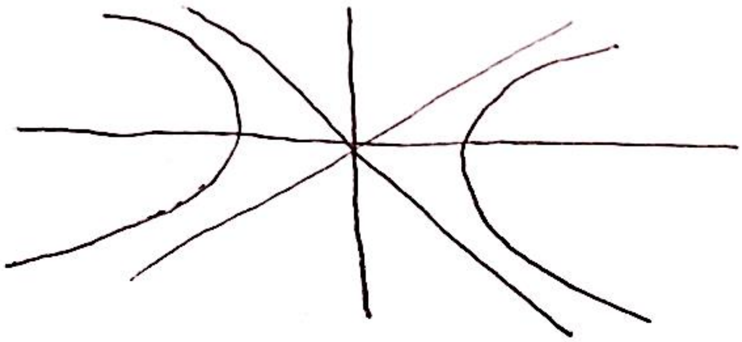
V.68 *Figura 5.68.* Respuesta del alumno A4



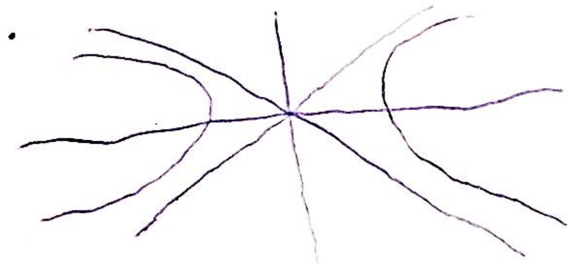
V.69 *Figura 5.69.* Respuesta del alumno A5



V.70 *Figura 5.70.* Respuesta del alumno A7



V.71 *Figura 5.71.* Respuesta del alumno A9



V.72 *Figura 5.72.* Respuesta del alumno A11

De los 7 alumnos que han contestado, 5 de ellos han señalado una hipérbola, los dos alumnos que difieren se limitan a dibujar una recta que pasa por el origen de pendiente positiva; por un lado, $A5$ lo acompaña de flechas y, por otro lado, $A3$, que además asegura, que sólo se puede tener una asíntota, porque sólo se puede tener una pendiente. Dicho alumno no contempla la posibilidad de una función que presente dos *AO* en la misma gráfica, lógicamente en las dos tendencias infinitas de *x*; como se ha dado en dos de los casos presentados en la actividad anterior.

Reflexión

La mayoría de los alumnos han simbolizado una función con *AO* en el caso particular de la hipérbola y, al dibujarla gráficamente no representa una función, ya que a un valor de *x* le asigna dos valores de *y*; pero este *"detalle"*, de gran importancia por otro lado, para ellos pasa desapercibido focalizando toda su atención en las rama de dicha cónica. Esto puede estar influenciado por estudios curriculares previos de Dibujo Técnico como del temario específico del estudio de cónicas de Matemáticas I.

V.3.2.4.2 Discusión del desarrollo de la cuarta sesión de docencia

Esta sesión se desarrolló en una ubicación diferente a las tres anteriores. En la nueva aula de informática la disposición de los ordenadores era en forma de U, de modo que los alumnos estaban dispuestos frente a la pared y la zona central del aula estaba despejada. Como dato positivo, la zona de proyección era mucho mayor que en el anterior aula. Se considera que esta distribución facilita más la comunicación entre los alumnos que la de la anterior sala de informática dispuesta por filas paralelas.

El horario fue el correspondiente al primer periodo lectivo, es decir, de 8:20 a 9:10. Se percibió cierto grado de adormecimiento en el alumnado y cabe destacar que faltaron 3 alumnos, en principio, se desconocía la justificación de dicha inasistencia.

Antes de comenzar formalmente la sesión se les preguntó si habían visionado los vídeos y si tenían alguna pregunta o comentario que aportar. Declinaron participar, por lo que se procede a ver el primer vídeo relativo al estadio semiótico de las *AO*. Tras el visionado, se pregunta al alumnado si tienen alguna duda y/o sugerencia y responden negativamente. Para consolidar conceptos, la profesora/investigadora preguntó*: "¿Qué habéis visto en este vídeo?"* Sólo se animó a contestar el alumno *A2: "En este vídeo que… qué cuando tanto* x *como* y *tienden a infinito…eh… se produce una asíntota oblicua, en la cual se producen dos a la vez… las dos a la vez, que por un lado tiende a* x *a menos infinito e* y *menos infinito, por otro lado a más infinito, y a infinito,* x *a infinito y que según te acercas al infinito*[35] *de una manera se van acercando los dos puntos de esa recta que se forma oblicua*[36] *y de la hipérbola."*

A pesar de manifestar deficiencias de expresión en su respuesta, la investigadora le reconoció su esfuerzo por intentar sintetizar todo lo que se había trasmitido en el vídeo.

P: Muy bien. ¿Tenéis alguna duda? (Silencio) *¿Qué diferencias veis de las asíntotas horizontales y verticales respecto a las asíntotas oblicuas*[37]*?* (Silencio) *¿Vemos alguna diferencia?* (Silencio) *De momento no somos capaces de ver diferencias. No pasa nada, volveremos a pensarlo más tarde… ¿Os ha provocado el vídeo alguna duda?* (Silencio)

---

[35] Nuevamente aparece el acercamiento al infinito como un ente alcanzable.

[36] En el vídeo se presenta la AO como una recta con la particularidad de tener cierta pendiente, el alumno incide en la importancia de la inclinación de la misma.

[37] Se intenta potenciar en el alumnado la rutina de pensamiento de comparar y contrastar entre nuevos y antiguos conceptos para consolidar la comprensión e incorporación en sus esquemas mentales de conocimiento.

Bueno, pues pasamos al segundo visionado, para ir avanzando en el estadio estructural[38].

Después del visionado del segundo vídeo, se les vuelve a preguntar:

> *P: ¿Qué habéis visto en este vídeo?*
>
> *A2: Que para saber la distancia que hay entre A y A' tienes que hacer una perpendicular a la recta*[39] *y esa distancia es puesto que…, y que cada vez se acerca más a cero… y ya está.*
>
> *P: Bien, ¿Alguna aportación más?* (Silencio, pero asienten con la cabeza) *¿No hay nada más que decir?*

La investigadora no puede certificar, con total seguridad, que se haya consolidado el estadio estructural; pero, parece que se tienen las condiciones para poder seguir avanzando hacia el siguiente estadio. Para finalizar la planificación relativa a la fase inicial de visionado relativa al primer contacto con el contenido teórico, se procedió a ver la tercera, y última, grabación. Se comentó al alumnado que era un *"poquito más difícil"* que los demás, por lo que sería necesaria la máxima atención. Siguiendo el mismo esquema que con los vídeos anteriores se vuelve a preguntar al grupo sobre lo que les ha trasmitido el vídeo y responde el alumno *A*4.

> *A4: Digamos que el espacio*[40] *que había entre* A *y* A' *… era un espacio*[41] *que era paralelo al eje* y*… ¿No? ¿O sí?*[42]....
>
> *P: En este caso de una asíntota oblicua, perdona, pero no sé exactamente que me estás preguntando…*
>
> *A4: No, que en este vídeo representaba una recta que iba desde el punto* A *hasta un punto* A' *en la recta, que era así…* (Hace gestos con las manos, desde su cabeza hacia el suelo)*, y que no era perpendicular a la recta… ni paralelo… y se supone que es paralelo al eje* y[43].
>
> *P: Correcto ¿Y por qué me importa a mí ese* A *y ese* A'*?*

---

[38] La falta de participación puede ser debida a no tener suficiente consolidación en el tema que nos ocupa; ante ello, la investigadora intenta restar importancia a la falta de aportaciones y les insta a que más adelante retomarán el análisis.

[39] Debiera decir que el punto *A* pertenece a la curva, y al trazar la perpendicular a la recta, se corta en el punto *A'* de dicha recta.

[40] Confusión de espacio con distancia.

[41] Confusión de espacio con segmento.

[42] A pesar de las confusiones anteriormente expuestas, el alumno se ha percatado de que los segmentos $\overline{AA'}$, que se presentan en el vídeo, son todos paralelos al eje de ordenadas.

[43] Este alumno ha comprendido lo que se quería trasmitir en el vídeo.

A2: Pues, porque ya has mirado la distancia que hay de una perpendicular a la recta, ahora miras otra distancia que haya, que también que tienda a cero, creo, no sé…

P: Porque estoy viendo la comparativa entre puntos que comparten la misma abscisa… ¿Lo veis?

A2: Si, yo creo que sí.

(El resto de alumnado ni responde ni gesticula, sólo se tiene información del alumno $A2$ y $A4$).

P: ¿El resto lo veis? ¿No lo vemos o si lo vemos…?

Por el silencio y la expresividad de las caras del resto de los alumnos, la investigadora considera que no lo están comprendiendo.

A2: Es complicado.[44]

P: Recapitulemos, en el anterior vídeo, del estadio estructural, veíamos la distancia utilizando la recta perpendicular; porque, efectivamente, para calcular la distancia entre un punto y una recta, se mide mediante la distancia del segmento perpendicular…;pero, en este vídeo se mete las rectas paralelas al eje de ordenadas, para ir viendo que también esas diferencias de ordenadas…

(Se deja un momento de silencio y, curiosamente, se solapa la frase entre la investigadora y el alumno $A4$).

P y $A4$ (a la vez): *También tienden hacia cero…*

P: Por eso, después utilizamos el cociente de $\mathrm{f(x)}$ *partido de* x *para buscar la pendiente* m[45]*, para ver su comportamiento en el infinito… ¿Alguna duda?*

A2: ¿Cociente de x*? ¿Cómo has dicho?*

P: Cociente de $\mathrm{f(x)}$ *entre* x *para encontrar el valor de la pendiente* m*… ¿Lo entiendes?*

A2: Si, si,..

P: ¿Por qué?

A2: Es que no lo entendía lo del cociente de $\mathrm{f(x)}$ *entre* x*… pero es importante…*

P: ¿Por qué es importante?

---

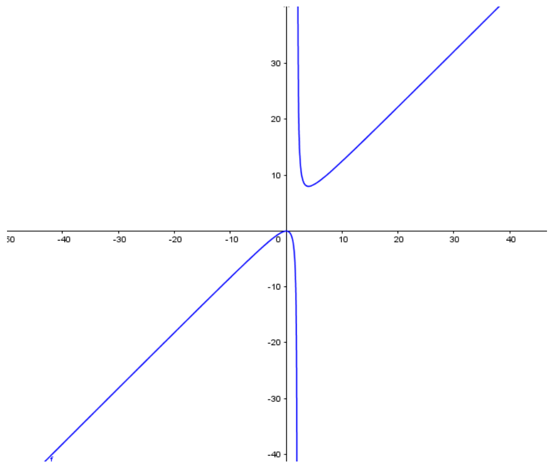
[44] A4 a pesar de comprenderlo es consciente de la dificultad de comprensión de esta nueva situación propuesta.
[45] La investigadora intenta incidir en la justificación de esa "regla" para calcular la pendiente de la *AO*.

A4: Para encontrar la pendiente, para colocarla (gesticulaba con los brazos haciendo movimientos)*… a partir de lo de* y *que es igual a* m *por* x *más* n, *¿no?, para colocar la recta.*

P: Porque es lo que ocurre en el infinito, por eso buscamos ese límite en el infinito. Por lo que hemos insistido tanto en que el comportamiento de la función en el infinito es parecido al comportamiento de la recta.

La percepción de la investigadora es que los dos alumnos $A2$ y $A4$ han comprendido perfectamente los contenidos transmitidos y los 6 restantes están en proceso. Al no verbalizar ninguna cuestión ni comentario no sabemos en qué estadio se encuentran. Pero, después de esta conversación, las expresiones de dichos alumnos mostraban menos tensión que al comienzo de la misma.

Para consolidar todo lo que se ha comentado se pasó a trabajar con el programa de GeoGebra on-line para visualizar los posibles comportamientos asintóticos de las funciones. Los alumnos ya estaban familiarizados con este programa porque lo habían utilizado en la asignatura de Informática. Cuando se propuso la actividad de introducir la expresión algebraica de una función en el programa de GeoGebra no hubo ningún problema, salvo la necesidad de recalcar la importancia de la jerarquía de las operaciones y del uso de los paréntesis para la formalización de la expresión. Se trabajó con la primera función propuesta en la ficha de actividades, $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$, que presenta como AO la recta $y = x + 2$.



V.73 *Figura 5.73.* Fotograma de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x-2}}$

La investigadora planteó la siguiente pregunta *"¿Creéis que esta función presenta una asíntota oblicua?"*, instó al alumnado a encontrar la respuesta utilizando la herramienta zoom para poder ver la gráfica desde diferentes ópticas. El alumnado percibió de una manera natural que cuando más se acercaban localmente con la opción lupa, en cualquier sector, más información global de la gráfica se perdía. Por el contrario, cuanto más se alejaban; es decir, cuando desde nuevas referencias se podían visualizar más valores de las variables independientes y dependientes, más información global teníamos de la gráfica y, por tanto, de la función. Se disminuyó tanto el zoom que la gráfica que apareció en la pantalla *"parecía una recta"*. La investigadora, mostrando sorpresa, comentó:

> *P: ¡Anda, de repente se me ha convertido en una recta!... ¿Qué creéis que habrá pasado?"*

> *A7: Pues que en el infinito se comporta como una recta.*

> *P: ¡Genial, estupendo!... Esa es la idea que os quería trasmitir. Pero,... ¿sabríais decirme cuál será esa recta?* (Silencio) *¿Sabríamos encontrar la expresión algebraica de dicha recta?*

Se produjo unos segundos de silencio y la investigadora les comentó que iban a ayudarse de ciertas utilidades del programa GeoGebra. Sólo con una breve explicación comprendieron el concepto de deslizadores y todos los alumnos crearon dos, nombrándoles m y n. El primero, relativo a la pendiente, y el segundo a la ordenada del origen, de una recta genérica. Por defecto, el programa hace variar a dichos parámetros del valor -5 a 5, para nuestro caso particular ese rango de valores respondía a nuestra búsqueda. Posteriormente, se introdujo la expresión $y = mx + n$ y se fueron variando los valores de dichos parámetros. Al preguntar la investigadora "*¿Cómo llamábamos a ese parámetro* m*?"*, varios alumnos respondieron correctamente, nombrándole pendiente de la recta. Sin embargo, preguntados por el parámetro n, solamente el alumno *A3* respondió:

> *A3: El punto de corte con el eje* y.

> *P: ¿*n *es un punto?*

Varios alumnos gesticularon, negando con la cabeza.

> *P: ¿Entonces qué es?* (Silencio). *Bueno, os hago otra pregunta ¿Recordáis cómo se llamaba? ¿Y qué representa?*

Se oyeron palabras inconexas: "*punto de corte, lo del eje de las* y*,..."* Sólo $A4$ recordaba que el parámetro n se llama ordenada en el origen y verbalizó que era la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas. Cabe destacar que, en general, no suelen usar la palabra *"ordenadas",* utilizando *"coordenadas de y"*. Posiblemente, esto es debido a que gran parte del profesorado del ámbito científico utiliza dicha denominación, por lo que se ha trasladado al alumnado (aunque, en general, el profesorado de matemáticas sí lo denomina así).

Esta interactividad ayudó a recordar el concepto de crecimiento y decrecimiento de una función. El hecho de ir modificando los valores de *m* y ver que para valores *m* positivos se tiene una función creciente y que los alumnos puedan visualizar las diferentes inclinaciones de la gráfica de la recta en el plano cartesiano, se considera que favorece el aprendizaje del concepto de pendiente. Del mismo modo, cuando *m* toma valores negativos, dicha función tiene un comportamiento decreciente; fácilmente visible en la recta que le correspondía a cada representación gráfica.

La investigadora les comentó que dicha función *"parece"* que presenta una *AO*. "*¿Seríais capaces de encontrar la expresión algebraica de dicha recta?"* Se sintieron bloqueados ante la pregunta, por lo que la investigadora les aconsejó que *"por tanteo"*, intentaran *"aproximarla a la gráfica de la función en el infinito"*, haciendo variar los deslizadores *m* y *n* que se habían creado. Con esta instrucción, comenzaron a manipular los deslizadores y, rápidamente, se produjo el siguiente diálogo:

> *A3: Yo creo que* m, *la pendiente, tiene que ser* 1.
>
> *P: ¿Por qué?*
>
> *A3·: Porque la he dibujado y se parece. He ido moviendo y eso.*
>
> *A4: Yo creo que es* $y = x + 2$[46]
>
> *A2: ¿Y cómo lo buscamos?*[47]
>
> *P: Buena pregunta, más adelante en vuestras clases vuestra profesora os enseñará a dominar las herramientas matemáticas para poder calcular el límite de expresiones matemáticas que se exponían en el vídeo, pero, por ahora queremos que tengáis la idea intuitiva y la comprensión de estos conceptos que no son fáciles*[48]. *(*La investigadora percibía cierto desánimo en el alumnado). *Muy bien, estoy satisfecha con el trabajo que estáis haciendo. Ahora quiero que sigamos reflexionando sobre todo lo que estamos aprendiendo y os voy a plantear la siguiente pregunta.*
>
> *P: ¿Alguien ve la posibilidad de que podríamos tener a la vez una asíntota oblicua y horizontal, cuando* x *tienda a más infinito, por ejemplo?*[49]

Los alumnos se mantenían en silencio y se les invitó a que plasmasen en su cuaderno, o en la ficha, un posible esbozo de esta situación.

---

[46] Este alumno ha manifestado una buena evolución en toda la fase de docencia y se caracteriza por comprender los contenidos que nos ocupan.

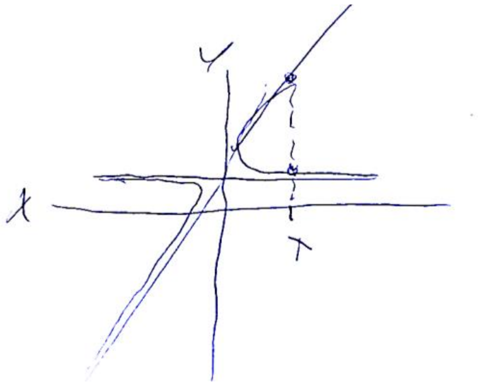
[47] A2 manifiesta ansiedad por no que no tiene claro cómo ha sido capaz su compañero de encontrar la expresión y pide unas estrategias o pasos a seguir para encontrar dicha ecuación de la recta.

[48] La investigadora intenta tranquilizar al alumno y focalizar su atención en la comprensión del concepto de la *AO*, más que en la búsqueda de su expresión analítica.

[49] Les hace esa pregunta, porque en las fichas de trabajo individual se presentó dicho error.

El alumno *A*2 enseña una gráfica con dos *AO*, y se le comenta que no es lo que se ha preguntado.

La investigadora se va acercando a las diferentes mesas y el alumno *A1* pregunta *"¿Puede ser algo así?"*(Figura 5.74).



V.74 *Figura 5.74.* Gráfica presentada por el alumno A1

> *P: ¿Una función para un mismo valor de* x *puede tener dos imágenes?* [50]*¡Cuidado!*
>
> *A1: ¡No! Ya, ya, ya, ya,….*
>
> *P: Una función para un valor de la variable independiente sólo puede corresponder un único valor de y, ¿no?* (Silencio) *¡Cuidado con el concepto de función!*

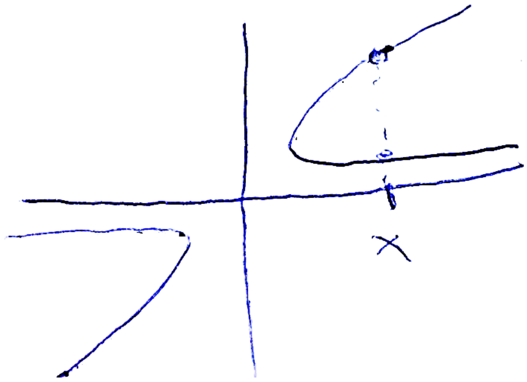
El alumnado asiente, pero no se posicionan sobre si es posible o no que se tenga la presencia conjunta de *AH* y *AO*, según se ha propuesto. Ante esta situación, la investigadora continúa planteando cuestiones.

> *P: Si se tiene una* AH *cuando* x *tiende a más infinito, la gráfica se comporta como esa recta paralela al eje de abscisas, ¿Sí? Y la recta es infinita ¿verdad?*
>
> Prácticamente la totalidad del alumnado muestra estar de acuerdo.
>
> *P: ¿Si?, pero si también tiene una AO, o sea, que cuando* x *tiende a más infinito también, se comporta como esta otra recta* (se señala a la recta que ha dibujado *A1* que tiene cierta pendiente no nula) *¿Entonces? ¿Se comporta en el infinito como dos rectas?...!Cuidado!*

Cierto sector del alumnado comienza a ver la contradicción y a percatarse de la situación planteada. A continuación, se muestra al grupo la gráfica propuesta por el alumno *A5*, que presenta la misma problemática que *A1*:

---

[50] Para que el propio alumno visualizara este hecho se le mandó que señalara un valor x, y que viese que tiene dos imágenes, algo contrario a la definición de función.



V.75 *Figura 5.75.* Gráfica presentada por el alumno A5

P: ¿Lo estás viendo?

A2: Sí, sí,.. no puede ser,..

P: ¿Por qué no?

A2: Tiene dos valores….

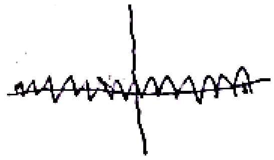
P: ¿Estamos viendo, que cuando x tiende a infinito positivo, por ejemplo, no puede ocurrir que tenga a la vez una AH y AO?

Aunque los alumnos manifiestan con movimientos gesticulares su acuerdo, la investigadora "no les veía totalmente convencidos" por lo que les instó a que manifestasen, tanto sus dudas como sus conclusiones, pero no contestaba ninguno. Sonó la sirena que indicaba el fin de la clase. Se pidió por favor a los alumnos que resolvieran en sus casas las actividades propuestas y se les informó que serían recogidas después del periodo vacacional. También se recordó que son actividades susceptibles de ser valoradas, no tanto por el cómputo de respuestas correctas, sino por el grado de implicación de responder a todas las cuestiones planteadas y de las aportaciones en las respuestas abiertas y observaciones. Nuevamente, se les agradeció sinceramente el grado de implicación en el desarrollo de las sesiones y su comportamiento, verdaderamente ejemplar.

El alumno $A2$ se acercó a la investigadora y le preguntó que si le podía aclarar una duda expresándose en los siguientes términos:

A2: Yo es que tengo una duda, el otro día has dicho que la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ *cortaba a la asíntota, que era el eje de abscisas, mi duda es si una función de este tipo*[51] *(Figura 5.76) también tiene una asíntota en el eje de abscisas.*

[51] La función que presentó el alumno no fue a partir de una expresión analítica, sino a partir de su gráfica.



V.76 *Figura 5.76.* Gráfica presentada por el alumno A1

P: ¿Tú que crees?[52]

A2: Pues es que no lo sé.

P: ¿Recuerdas qué comentábamos que tenía que verificar una asíntota?

A2: No sé.

P: ¿Y recuerdas cómo se comportaba una función cuando x *tiende a infinito si tiene un comportamiento asintótico?*

A2: Sí, de eso me acuerdo… la función es como una recta.[53]

P: Decíamos que la función cuando x *tiende a infinito se comporta como una recta ¿sí?*

A2: Sí.

P: ¿Esta función se comporta como una recta cuando x *tiende a más infinito?*

A2: No.

P: ¿Los puntos de la función cuando x *tiende a más infinito se acercan más a la recta que cualquier valor que fijemos?*

A2: Unos si y otros no…

P: ¿Lo verifican "todos" los puntos cada vez que se alejan más hacia el infinito?

A2: ¿Entonces?[54]

P: ¿Entonces?

A2: Pues entonces no… Pero entonces ¿en la del seno del otro día?

Como estaba el ordenador todavía encendido, se volvió a ver la gráfica para comprobar que al principio la función oscilaba y cortaba al eje de abscisas, pero después oscilaba

---

[52] La investigadora intenta conocer las concepciones erróneas del alumno, por ello se limita a responder preguntándole sobre su creencia.

[53] Ante las preguntas relativas a las creencias o las condiciones a cumplir, el alumno no se manifiesta, pero si responde de datos inconexos que recuerda.

[54] El alumno no está siguiendo el razonamiento que le está proponiendo la investigadora. Intenta buscar una respuesta como solución a su pregunta y la investigadora está intentando que sea él, el que tras la comprensión llegue a la respuesta correcta.

por encima de la recta y cuando x tendía a más infinito el comportamiento de la gráfica se parecía al de la recta.

A2: Sí, sí, ya lo veo. Gracias[55]

P: Gracias a tí, por tu interés.

Así finalizó la última sesión correspondiente al viernes 18 de marzo de 2016.

Reflexión

En esta última sesión ha aparecido un nuevo error. Los alumnos visualizan en una misma gráfica, simultáneamente en un mismo infinito, una *AH*, que no existe, y una *AO*; hecho incompatible, presentado en varias funciones, por lo que se categorizará como error confusión *AH* y *AO*.

Vuelven a aparecer fallos en la base de conceptos básicos relativos al bloque de contenido de funciones como obstáculos para poder avanzar en los diferentes estadios de aprendizaje; por ejemplo, el hecho que se vea viable que una función presente tendencia asintótica horizontal y oblicua cuando x tienda a infinito positivo, esta situación, muestra que no tiene totalmente adquirido el concepto de función, ya que dar la posibilidad de que un valor x tuviese dos imágenes, es algo contrario a la definición de función. Cierto alumnado intenta focalizar más su atención en la búsqueda de la expresión analítica de la *AO* que en la comprensión de la misma.

El programa GeoGebra ha sido de gran ayuda para conjugar la vista analítica con la vista gráfica y la opción de zoom ha posibilitado entender el comportamiento local y global de las funciones. Según se va avanzando en los diferentes estadios según Socas, el número de alumnos que manifiestan comprender en profundidad cada nivel de abstracción disminuye, hecho directamente proporcional al grado de participación e implicación en la respuesta de las cuestiones planteadas.

V.3.3 Análisis de la valoración de los alumnos

Para obtener una apreciación más completa por parte del alumnado se les pidió que escribieran cualquier observación y que valoraran en una escala Likert los siguientes aspectos de los vídeos y la metodología:

a) *Claridad en la exposición.*

b) *Interés del contenido*

c) *El visionado de vídeos dinámicos me facilita la comprensión de los conceptos.*

---

[55] El alumno manifestó alegría al comprender el comportamiento de esa función, además de un alto nivel de educación, agradeciendo a la investigadora su intervención.

d) *Me ha gustado esta nueva metodología*

Las puntuaciones medias han resultado ser las siguientes: 2.6, 3.00, 2.78, 3.00. Las dos más altas responden al interés por el contenido y a la aceptación de esta metodología, pero no hay que perder de vista la escasa participación del alumnado en las cuestiones que debían haber respondido.

Sólo tres alumnos respondieron sobre la petición de que escribieran las observaciones que quisieran aportar:

> *A3.- Esta metodología está bien, el único inconveniente es que se explica de forma rápida sin poder ver ejemplos claros.*
>
> *A5.- No me he enterado de nada.*
>
> *A11.- Cuesta mucho entender lo que quiere decir los vídeos.*

Por un lado, se hace referencia al problema de la temporalización relativa a la rapidez con la que se presentan los contenidos, por otro lado, a la dificultad del tema que nos ocupa y, por último, a la dificultad del contenido. Por una parte, *A5* manifiesta que no se ha enterado de nada, percepción subjetiva, ya que es un alumno que ha participado activamente en la sesión y ha mostrado evolución en su proceso de aprendizaje. Por otra parte, respecto al comentario de *A3*, los alumnos podían haber visionado los vídeos cuantas veces hubiesen querido. Sin embargo, debido a la situación extraordinaria de inclusión de esta nueva metodología en el aula de 1º Bachillerato del IES Recesvinto, dónde la investigadora no es docente habitual, ha hecho que el desarrollo de las sesiones fuese muy rápido, pudiendo generar dificultades de comprensión en el alumnado. Tampoco podemos olvidar el comentario de *A11,* ya que los conceptos en los que interviene el infinito, en particular el estudio de las tendencias asintóticas, siempre requieren un alto grado de abstracción, lo que supone una gran dificultad para buena parte del alumnado.

Por último, los alumnos no están acostumbrados a autoevaluarse ante una tarea realizada, por lo que quizá no sean totalmente objetivos a la hora de extraer conclusiones y cuantificar dichas situaciones mediante una calificación numérica.

V.3.4 Análisis de la valoración de la observadora externa

La observadora externo dice estar completamente de acuerdo con la descripción hecha por la investigadora respecto a las discusiones relativas al desarrollo de las cuatro sesiones de docencia. Cabe apreciar que al principio del visionado de los vídeos algún alumno expresó que *"no entendía nada"*. Por tanto, en esta primera sesión y, sobre todo tras el visionado de los primeros vídeos, hubo que reinterpretar verbalmente su contenido con alguna explicación. Por ejemplo, aclaraciones sobre el comportamiento de los puntos que aparecen en el vídeo y aclaraciones que permitiesen distinguir entre aproximación y tendencia.

En las siguientes sesiones, los alumnos ya estaban familiarizados con el recurso tecnológico de los vídeos para transmitir el contenido. Sin embargo, también hubo que realizar alguna aclaración sobre el contenido que transmitían los vídeos, pero de manera más breve. Se observa que los alumnos que expresaban en alto sus ideas o respuestas a las preguntas de la profesora investigadora tienen cierta comprensión sobre el contenido que transmiten los vídeos. Sin embargo, también hay alumnos que no llegan a entender en profundidad todo lo que se les intenta transmitir. Habrá que corroborarlo con sus respuestas al cuadernillo que acompaña a los vídeos.

V.4 REFLEXIÓN

En el segundo ciclo, tras el estudio y análisis de la prueba inicial de conocimientos previos, y centrados en el concepto de tendencia, se perciben dificultades iniciales en la coordinación de las variables e incluso, se intercambian los valores de la variable x con los de la variable $f(x)$. Se visualiza y se representa mejor la tendencia asintótica horizontal, (y mejor aun cuando x tiende $+\infty$ que cuando x a $-\infty$), que la vertical; contemplando algunos alumnos únicamente la posibilidad de tendencia asintótica a la horizontal. Otros manifiestan una posible conexión errónea de dependencia entre *AH* y *AV*, ya que dibujaron una *AV* en lugar de *AH*, como se había pedido. Aparecen expresiones del tipo *"ir hacia"* y *"subir hacia"* para intentar expresar situaciones de tendencia funcional. La simbología de la flecha en la gráfica para representar la tendencia infinita no está totalmente consolidada en el alumnado y, algunos, no la interpretan como representación de una tendencia infinita ya que señalan los valores de la tendencia como los valores finitos que están dibujados próximos a la gráfica. Se observa una discretización de la recta real y no la interpretan en su globalidad. Un alto porcentaje del alumnado no ha interiorizado ni sabe interpretar el concepto de tendencia introducido el último curso de la ESO. Cierto alumno relaciona tendencia funcional con los puntos de corte con los ejes de abscisas y ordenadas, hecho que no se ha presentado formalmente en la docencia y carente de toda lógica. Otros, confunden los conceptos valor y variable, conectando necesariamente la tendencia funcional con la tendencia infinita de una de las variables o consideran el infinito como valor alcanzable. Por tanto, se percibe la dificultad del alumnado de no distinguir entre tendencia vertical y horizontal, se tendrá en cuenta para la docencia del siguiente ciclo de investigación.

Recabada información a partir del material creado para profundizar en el contenido teórico, se han extraído las siguientes conclusiones. Desde una perspectiva cualitativa, se puede afirmar que prácticamente la totalidad de los alumnos comprenden el concepto de aproximación y lo discriminan del concepto de tendencia, además ciertos alumnos intentan graduar comparativamente ambos conceptos *("tender es mejor que aproximar")*. Sin embargo, que cuando un punto *P* tiende al punto *A*, éste mejora cualquier aproximación de otro punto *D* arbitrario y fijado previamente, es donde hay bastantes fracasos. Asimismo, se pone en evidencia que es más sencillo para ellos interpretar las tendencias a través del propio punto que a través de sus abscisas.

Sobre la competencia lingüística y comunicativa (verbal y gráfica) en relación a los conceptos de aproximación y tendencia, casi la mitad de los alumnos no concretan diferencias entre ellos; alrededor de una cuarta parte discrimina con argumentos válidos y, el resto, expone razonamientos erróneos y utiliza un vocabulario impreciso.

Preguntados globalmente sobre la representación gráfica de la tendencia finita en las abscisas en la recta real y sobre qué sistemas de representación utilizan, los alumnos se han sentido desconcertados por esta pregunta tan abierta y sólo algunos comprenden el sentido de la pregunta, y lo concretan optando por una representación gráfica o por una simbólica, lo que sin duda es una discriminación entre ambas.

Categorizan la tendencia de abscisas finita por su: Finitud (F), Dinamismo (D), Rebasamiento (R), Inalcanzabilidad (I) y/o Aproximación óptima (A). Al ser preguntados por una tendencia finita, los alumnos, mayoritariamente, visualizan la finitud y el dinamismo, la diferencia está en que algunos de ellos consideran la alcanzabilidad o no de dicha tendencia. La combinación que más se repite es la del dinamismo inalcanzable finito (D-I-F) seguida de dinamismo finito con llegada o rebasamiento (D-F-R). Sin embargo, el hecho de afirmarlo categóricamente, indica que los alumnos no ven la posibilidad de que no ocurra.

Se observa que cuando se concreta el valor fijo del eje de abscisas al que la variable x debe tender, responden más alumnos y con más precisión, que si sólo se les pide la representación de una tendencia finita de abscisa. Un amplio sector de ellos, sólo percibe la tendencia de manera imprecisa, ya que sólo representan la tendencia lateral izquierda (coincidiendo con orden usual de la recta real); pero, en general, se van acercando al concepto de tendencia, aunque sólo es alcanzado completamente por un alumno.

En relación al concepto de tendencia infinita, los alumnos se explican utilizando diferentes acciones verbales y los verbos más repetidos son *"alejar", "superar" y "partir sin determinar"*; la mayoría si discriminan la lateralidad infinita.

El alumnado refleja dificultades que también se han mostrado históricamente, en relación a la caracterización entre tendencia finita e infinita; por ejemplo, en situaciones complejas que requiere cierto grado de abstracción como es la comprensión de procesos infinitos acotados.

La mayor parte de los alumnos cree comprender mejor la tendencia infinita, algo menor es el número de alumnos que cree que comprende por igual ambas tendencias y menos de la quinta parte creen que comprenden mejor la tendencia finita.

La mayoría de los alumnos van adquiriendo y discriminando el concepto de tendencia lateral y va aumentando el nivel de comprensión del alumnado en relación a la conexión entre los conceptos de aproximación y tendencias laterales finitas. Por un lado, la mayor parte del alumnado utiliza el plano cartesiano para representar la tendencia en una gráfica arbitraria, hay algunas representaciones en las que se ha graficado la tendencia en el eje de abscisas y alguna otra que utiliza una recta. Los puntos de aproximación son utilizados por algo más de la mitad del alumnado. Sin embargo, la utilización de algún tipo de simbología que represente el sentido del movimiento sólo ha estado presente en alrededor de un tercio del alumnado, y en todos los casos, se ha utilizado una flecha; lo que muestra la dificultad de plasmar el dinamismo en el plano. Por otro lado, la tendencia por la derecha presenta más dificultades que la tendencia por la izquierda, ya que se presenta en menor proporción todas las posibilidades anteriormente expuestas para representarla, y cierto sector del alumnado no es capaz de ver la similitud entre ambas.

La verbalización sobre la comprensión de la tendencia hacia infinito de un punto de la gráfica, se puede agrupar en tres categorías según lo relacionan con: verbos de movimiento (alejarse, moverse, tender, superar…), acción de alejamiento y acción de superación. Se va incorporando el lenguaje mostrado en la docencia *"tiende a infinito y supera a cualquier punto"*. Por tanto, la docencia que se ha llevado a cabo sí que produce una evolución positiva en la comprensión de la tendencia infinita, inicialmente sobre el eje de abscisas y mejorada la comprensión sobre la curva.

Se detallan diferentes puntos de interés para el estudio de la tendencia finita en la gráfica. Por un lado, se analizan los puntos pertenecientes a la propia gráfica y por otro, también los puntos determinados por sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas y, sobre todo, las tendencias de ambos. Alrededor de la mitad del alumnado ha sido capaz de relacionarlos y descubrir su importancia. Las proyecciones de los puntos de la gráfica sobre los dos ejes coordenados, en especial sobre el eje y, han supuesto una novedad en el alumnado que ha sido interiorizada en diferentes niveles por parte del alumnado, por lo que en sucesivas ciclos se incidirá en este aspecto.

Se han presentado las diferentes posibilidades de tendencia infinita global de una gráfica asociada con la tendencia infinita de una (o de las dos) proyecciones de sus coordenadas. Según avanza la docencia, se van acercando a la comprensión del concepto, siendo interpretado para la mayoría únicamente cuando se tiene la tendencia infinita para las dos variables.

Los alumnos van comprendiendo el comportamiento asintótico de forma parcial. Por un lado, algo más de la tercera parte del alumnado entiende que la tendencia asintótica es infinita, aunque no lo argumentan justificadamente; por otro lado, el hecho de que en la tendencia asintótica, la gráfica tenga un comportamiento en el infinito como una recta, hace que cierto sector del alumnado lo interprete como una tendencia finita; entendiendo por finitud la limitación que aporta dicha recta.

Aunque en los vídeos han aparecido diversas funciones que presentaban diferentes comportamientos en relación a la tendencia de la variable independiente, sólo un número muy reducido de alumnos lo ha interiorizado y discriminan sobre la existencia o no de *AH*.

Se considera interesante señalar que un pequeño sector de alumnado asocia la tendencia asintótica solamente cuando x tendiera a $-\infty$; afirmando que cuando un punto de la curva, A, tiende a infinito y la distancia entre los puntos de la curva, A, y de la recta, R, tiende a cero $(d(A,R)\rightarrow 0)$, en el infinito, la curva se comporta como la recta; pero sólo cuando se tiende a $-\infty$. Por tanto, estos alumnos aunque se están acercando a la comprensión del concepto, no lo interpretan de forma global para las dos posibilidades del infinito.

En lo que concierne al estudio de tendencias asintóticas, en general, dan más importancia a búsqueda y localización de las asíntotas que a la comprensión, lo que provoca que no las visualicen correctamente, dándose tanto el caso de afirmar su existencia en funciones con tendencias infinitas no asintóticas, como el caso contrario. También se ha percibido que, por un lado, para ciertos alumnos la única opción de asíntotas son los propios ejes coordenados, frente a otros que no visualizan (o no dan la opción) que los propios ejes coordenados sean las asíntotas de la función en una gráfica dada.

Ningún alumno ha coordinado la relación entre las tendencias de las dos variables ni en la *AH*, ni en la *AV*; y, en general, en el caso de la asíntota oblicua, la mayoría focalizan toda su atención sobre la pendiente de la recta; e incluso, alguno puntualiza que la recta no sea ni vertical ni horizontal, también se ha presentado el caso de unificar el concepto de *AH* y *AO*. Varios alumnos relacionan a las *AO* con algunos conceptos geométricos asociados con distancias, posiciones relativas, perpendicularidad,…aparece en un número reducido de alumnos el término de *“las tendencias condicionadas”*; uno de ellos especifica que pueden ser dependientes o independientes, y el otro afirma que las tendencias se condicionan siempre, como un acercamiento al verdadero concepto de tendencia. Curiosamente, ante la *AO* cuando *x* tiende a infinito positivo y negativo, varios alumnos sólo visualizan dicha tendencia en el primer caso; hay diferentes ejemplos dónde está presente la dificultad del alumnado para comprender el comportamiento de las funciones cuando *x* tiende a infinito negativo. Varios alumnos han simbolizado una función con *AO* en el caso particular de una *"hipérbola",* presentando conjuntamente una *AH* y *AO* cuando *x* tiende a infinito positivo. El dibujo de su gráfica no corresponde a una función, ya que, a un valor de *x* se le asignan dos valores de *y*, pero no se percatan de ello, ya que focalizan toda su atención en la representación de *"las ramas"* más que en la profundización de los conceptos.

Debido a la totalidad de respuestas erróneas en relación a la identificación de asíntotas a partir de una función dada, se concluye que se debe profundizar en la utilización del programa GeoGebra para que los alumnos sean capaces de visualizar y discriminar las diferentes tendencias asintóticas.

La gran dedicación de tiempo y esfuerzo que ha supuesto la creación de los materiales audiovisuales siguiendo el modelo ELOS por estadios de aprendizaje para la presentación de los contenidos relativos al estudio de asíntotas, podrán ser aprovechados posteriormente, ya que los vídeos y actividades pueden ser reutilizados, refinados y actualizados en el tiempo; pudiendo ser compartidos entre el profesorado. Se está de acuerdo con las reflexiones de Bergmann y Sams (2012) sobre que al principio la carga de trabajo puede parecer abrumadora, pero que una vez que la clase se ha rediseñado la carga de trabajo disminuye; por lo que se afronta el siguiente ciclo de investigación con positividad.

La investigadora, al no ser la profesora titular del grupo de estudio, dispuso de una temporalización limitada para implementar la investigación, pero el estudio y análisis de las fichas personalizadas de los alumnos y las intervenciones en el aula han sido muy enriquecedoras.

CAPITULO VI

VI TERCER CICLO DE INVESTIGACIÓN

La experimentación del tercer ciclo de investigación se desarrolló durante el curso académico de 2016/17 en el IES María Moliner de Laguna de Duero en la asignatura de Matemáticas I de 1º Bachillerato de la especialidad de Ciencias. La investigadora es la profesora titular de este grupo experimental, que está formado por 23 alumnos que tienen muchas diferencias en el nivel competencial matemático. Se cree que esta diversidad aportará gran riqueza en la investigación que nos ocupa porque, en general, muestran alto interés, motivación y actitud positiva ante la asignatura. Además, según su historial académico, cierto sector de dicho alumnado, tiene altas aptitudes matemáticas, pero hay otro sector, parecido en número, que arrastra dificultades en la comprensión matemática.

VI.1 PLANIFICACIÓN

La planificación gira en torno a cinco focos que se presentan a continuación, según el orden de temporalización:

- Valoración del punto de partida recogiendo información a partir del profesorado del curso anterior y de los propios alumnos que participan en la experimentación.
- Ejecución de una propuesta didáctica basada en el anterior ciclo de investigación cimentada en la metodología mixta AI, junto con otras metodologías activas.
- Implementación de TIC (Tecnologías de la Información y el Conocimiento), TAC (Tecnologías del aprendizaje y la comunicación) y herramientas web 2.0 en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Propuesta de validación de un test globalizado final por un comité de expertos y su posterior implementación.
- Reflexión global del presente ciclo de investigación.

Como propuesta de mejora, se potenciará la participación del alumnado para evitar las abstenciones en las respuestas y se incidirá en aquellos aspectos anteriormente expuestos en el ciclo anterior que presentan mayor dificultad de comprensión en el alumnado. Para ello, se mejorará el diseño de algunos vídeos incorporando unas secuencias que faciliten la comprensión de las mayores dificultades y otras que traten de evitar los errores de interpretación descubiertos. Por todo ello, la modificación parcial del AI, que dio lugar a una metodología mixta, asegurará el acceso al contenido teórico controlado por el docente y posibilitará la apertura del proceso de enseñanza-aprendizaje más allá del aula, ofreciendo la posibilidad de tener acceso ilimitado al marco teórico de forma interactiva y así, poder realizar actividades de un nivel cognitivo superior en el aula. Además de las novedades apuntadas, en el presente curso, se cambió la plataforma Moodle por la plataforma EDpuzzle, que se presentará más adelante.

VI.2 ACCIÓN

Las acciones llevadas a cabo en este ciclo se pueden estructurar en cinco grandes bloques:

- Reunión departamental con el profesorado que impartió docencia el curso académico 2015/16.
- Test inicial de conocimientos previos al alumnado.
- Sesiones de docencia: metodología y recursos utilizados.
- Plataforma EdPuzzle.
- Test global validado por expertos.

La concreción de todos los aspectos relativos a cada uno de los anteriores bloques se especificará en el siguiente apartado.

VI.3 OBSERVACIÓN, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

A continuación se presenta la fase de observación de este ciclo en el que tienen lugar el análisis y la discusión de la experimentación realizada.

VI.3.1 Debate con el profesorado que impartió docencia el curso académico 2015/16

Para recabar datos relativos a la docencia llevada a cabo por el profesorado del Departamento de Matemáticas en 4º ESO, opción Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, durante el curso escolar 2015/16, se realizó un debate siguiendo las preguntas que se encuentran recogidas en el ANEXO X.4.1. En realidad, se podría describir como una entrevista múltiple, ya que se dieron respuestas a las preguntas formuladas individualmente, en presencia de los tres entrevistados y de la investigadora. A continuación, se recoge la síntesis de la información recogida.

Preguntado el profesorado sobre cómo introduce el concepto de asíntotas, el profesor $P1$ incide en presentar el concepto a partir de la definición; y, en su caso, concreta que utilizando los conocimientos que adquirió en sus estudios universitarios.

Todos coinciden en utilizar la gráfica de la función $f(x) = 1/x$, presentando su expresión analítica, haciendo un esbozo en la pizarra a partir de la representación ayudándose de una tabla de valores y, así, poder visualizar lo que ocurre. Se trata de mostrar al alumnado que, para valores x suficientemente grandes, los valores de $y = f(x)$ *"tienden"* a cero; y lo mismo para x suficientemente pequeños y, por tanto, se introduce el concepto de AH con $y = 0$, tanto cuando x tiende a infinito positivo como negativo. Por otro lado, ir concretando que cuando x se *"aproxima"* por la derecha a 0, y tiende a infinito positivo; y análogamente cuando x tiende a 0 por la izquierda, y tiende a infinito negativo, pudiéndose comprobar que los valores se hacen *"tan pequeños como se quiera";* así presentan el concepto de *AV*. Respecto a las *AO*, no son trabajadas en 4º ESO.

Al ser preguntados por la utilización de metodologías innovadoras, no aportan información. Ninguno utiliza una idea intuitiva, ni parte de un problema, ni de una situación problemática o un contexto de la vida real; tampoco utilizan programas de geometría dinámica, salvo dos profesores, *P2* y *P3*, que refieren que utilizan los ploteadores de Google, que consisten en escribir la expresión analítica de la función y dicha aplicación TIC la representa en el plano. Les presentan ese recurso on-line para que lo puedan utilizar en casa con sus ordenadores, tabletas y/o "Smartphone". Recuerdan que les suele sorprender lo fácil que resulta su utilización.

Se siguió el libro de texto de la editorial Anaya, en especial, para mandar los ejercicios propuestos al final de la unidad relativa a funciones. No se ayudan de ninguna imagen, vídeo, recurso multimedia… ni utilizan símiles, comparaciones, ni ningún recurso literario, plástico o visual.

Preguntados sobre el grado de satisfacción ante la docencia respecto a este bloque de contenido en cursos pasados, responden que es análogo al resto de bloques.

No ha habido uniformidad respecto a si el alumnado manifiesta mayor, igual o menor dificultad ante este concepto; pero todos los docentes argumentan que dentro del "bloque de funciones", lo que más les cuesta es la introducción al concepto de límite; siendo un tema que suscita cierto interés en el alumnado, y sus preguntas suelen ser relativas a la incomprensión de *"un proceso infinito, pero acotado por algo finito".* Un profesor recuerda que varios alumnos comentaban *"¿Cómo es eso de que se acerca al infinito, pero no llega a tocar?"*

En relación a la valoración del proceso de comprensión del concepto de asíntota en el alumnado, la mayoría del profesorado coincide en plantear sencillas cuestiones orales para ir valorando el progresivo grado de comprensión relativo al concepto abstracto que nos ocupa. Todos comparten que también, en ciertos momentos, se generan interesantes debates grupales, a pesar de la dificultad para respetar los turnos de intervención y mantener el control en el aula, por el alto grado de participación. En cuanto a las pruebas escritas, las cuestiones que se suelen plantear a los alumnos son relacionadas con: análisis e interpretación de gráficas que presenten asíntotas y/o ramas infinitas, discriminación de funciones con comportamiento asintótico, búsqueda de la expresión algebraica de la *AH* y/o *AV* a partir de la gráfica y/o de la expresión, esbozo de una gráfica que presente una asíntota y representación gráfica de familias de funciones.

Aunque se trabajan conceptos básicos relativos a funciones, en 4º ESO no quedan suficientemente consolidados los siguientes aspectos:

- ✓ Diferencia entre aproximar y tender.
- ✓ Discriminación entre tendencia infinita y tendencia asintótica.
- ✓ Concepto de límite.

Ningún profesor ha relacionado la tendencia de una función con el estudio de las tendencias sobre las proyecciones en el eje de abscisas y/o eje de ordenadas. La notación que utilizan todos los profesores para representar una tendencia infinita es la flecha.

Al ser preguntado el profesorado sobre si ha afirmado al alumnado que una función nunca corta a una *AH*, todos responden afirmativamente.

Respecto a la valoración del grado de comprensión global del concepto de asíntota en el alumnado que finalizó sus estudios de 4º ESO el pasado curso académico, consideran que hay gran diversidad de niveles competenciales matemáticos; pero que, en general, no se comprende dicho concepto en su totalidad; debido, sobre todo, al nivel de desarrollo madurativo alcanzado en relación a la edad del alumnado.

Respecto a la percepción de errores o concepciones erróneas que el alumnado suele presentar en relación al concepto de asíntotas, todos manifiestan que es un concepto difícil de comprender, concretamente el profesor $P2$ incide en aclarar al alumnado que la asíntota no pertenece a la gráfica de la función porque ha percibido esa concepción errónea en gran parte del alumnado. El profesor $P3$ cree que no es tan importante comprender el concepto de asíntota, que lo más importante es saber cuándo se presenta en una función y encontrar su expresión analítica; añade que es un concepto que se adquiere en edades más avanzadas.

Del discurso de los profesores se descubren dos errores didácticos, el primero sobre los posibles cortes de la función y *AH*, y el segundo, sobre la afirmación de que la asíntota no pertenece total o parcialmente a la gráfica de la función (pudiendo estar incluida, entera o una semirrecta o intervalo de ella, en la gráfica de la función).

VI.3.2 Test inicial de conocimientos previos

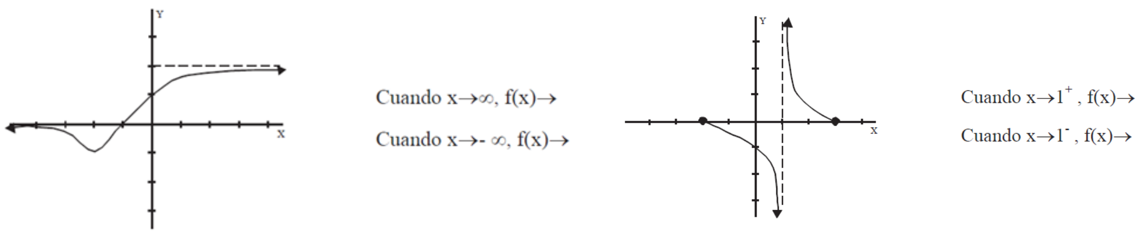
En el ANEXO X.4.2 se encuentra el cuestionario de conocimientos previos que fue propuesto al alumnado de 1º Bachillerato de Ciencias en este ciclo de investigación.

A continuación se reproducen los enunciados para facilitar su estudio y análisis de los resultados.

Cuestión 1.- Estudio de la tendencia de la gráfica de una función:

a) Señala sobre la gráfica la tendencia de la x *y de la* y *en los lugares donde se escapa la gráfica de la función.*

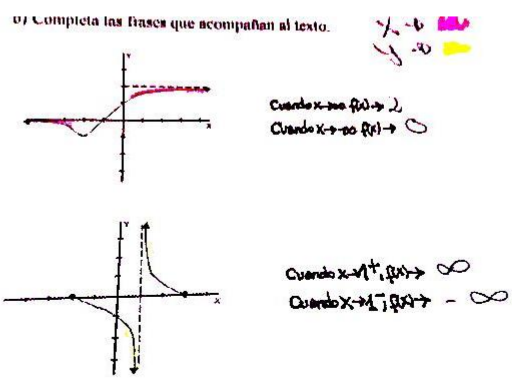
b) Completa las frases que acompañan al texto.



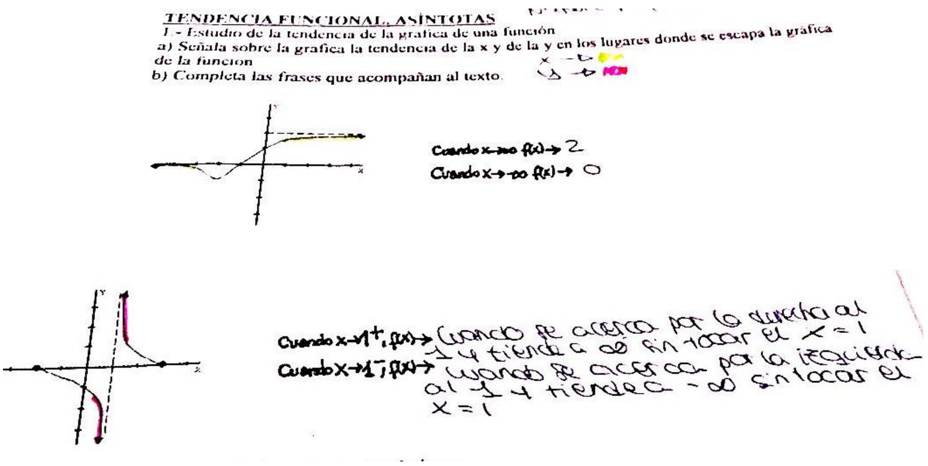
VI.1 *Figura 6.1.* Pregunta 1 del test inicial

Cuestión 1: Apartado a)

Sólo tres alumnos (13.04%) han señalado sobre la gráfica alguna referencia en relación a la tendencia de la x y de la y en los lugares donde se escapa la gráfica de la función. En dos casos, han utilizado colores para representar cuando una de las variables tiende a infinito. Se denominarán a los alumnos mediante el siguiente código: A seguida de un número natural (An), siendo n el número del alumno. Se plasman a continuación sus respuestas:

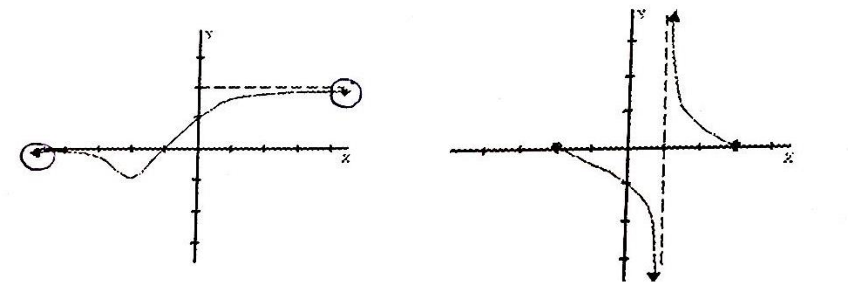


VI.2 *Figura 6.2.* Respuesta del alumno A1



VI.3 *Figura 6.3.* Respuesta del alumno A15

El siguiente alumno sólo rodea en la gráfica las flechas relativas a la función que presenta asíntotas horizontales y en la segunda gráfica, con presencia de asíntotas verticales, no señala ninguna tendencia, como se indica en la imagen de la figura 6.4.



VI.4 *Figura 6.4.* Respuesta alumno A13

Reflexión

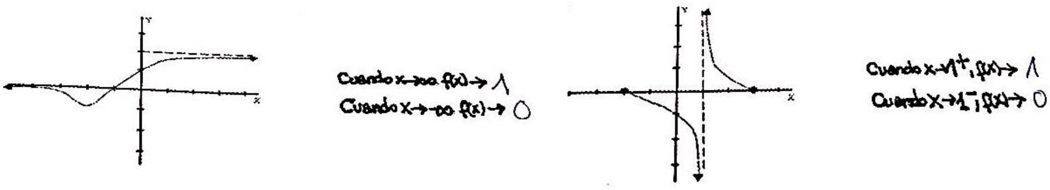
- Aparecen expresiones del tipo *"se acerca por la derecha"*, *"se acerca por la izquierda"* y *"tender a"* para intentar expresar situaciones de tendencia funcional.
- Ciertos alumnos sólo interpretan la tendencia de la variable que tiende a infinito, obviando la tendencia finita de la otra variable.
- Un altísimo porcentaje del alumnado que se estudia no ha interiorizado el concepto de tendencia introducido el curso pasado y no se manifiesta al ser preguntado sobre ello.
- De los tres alumnos que contestan; dos de ellos, visualizan tanto la tendencia asintótica horizontal como la vertical y el restante sólo señala la horizontal.

Apartado b) Estudio conjunto de las dos funciones:

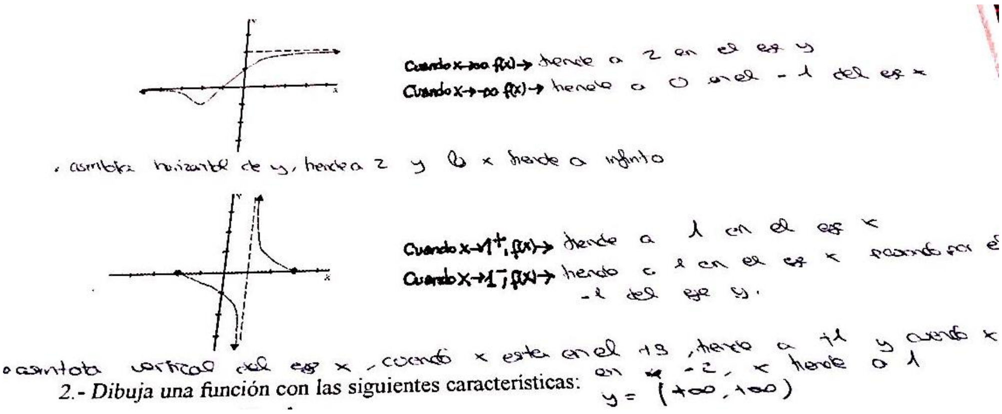
VI.1 Tabla 6.1. *Análisis comparativo estudio funciones*

1º BTO	1ª Función	2ª Función
Respuestas correctas	52,17%	39,13%
Respuestas incompletas	8,7%	8,7%
Respuestas incorrectas	4,35%	13,04%
No responden	34,78%	39,13%

A continuación, se muestran dos ejemplos de respuestas incompletas (un apartado incorrecto y otro correcto), respecto a la primera función e incorrectas respecto a la segunda función:



VI.5 *Figura 6.5.* Respuesta del alumno A6



VI.6 *Figura 6.6.* Respuesta del alumno A3

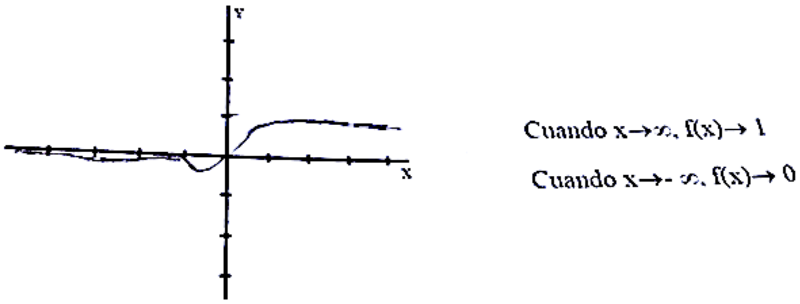
Este alumno asocia las *AH* y *AV* a los ejes, expresando *"asíntotas horizontales de* y*"* y *"asíntotas verticales del eje* x*"* además muestra graves errores conceptuales; ya que fija la misma tendencia para la x que para la y, en este caso afirma que tanto *"x como f(x) tiende a 1"*; es decir, ante una *AV*, $x = k$ se considera una tendencia finita de las dos variables hacia el valor k. Erróneamente, para este alumno, la *AV* fija una tendencia finita de la función.

Reflexión

- Ante la dificultad de representar en un soporte finito una tendencia infinita, cierto alumnado no interpreta la simbología de flechas para representar dicha situación. Por ello, señalan los valores de la tendencia como los valores finitos que están dibujados próximos a la gráfica.

- Un alumno relaciona tendencia funcional con los puntos de corte con los ejes de abscisas y ordenadas, hecho que se presentó en otro alumno en el ciclo de investigación del pasado curso académico.
- Un alumno confunde la tendencia de y con el recorrido ($y = (-\infty, +\infty)$.)
- Un alumno no diferencia entre infinito positivo y negativo.
- Un alumno ante una $AV\ x = k$ fija una tendencia finita de las dos variables hacia el valor k.

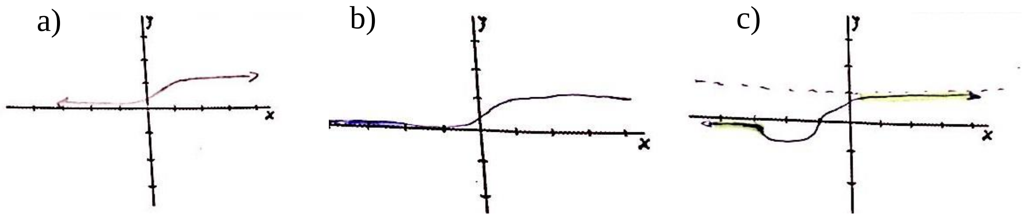
Cuestión 2.- Dibuja una función con las siguientes características:



VI.7 *Figura 6.7.* Pregunta 2 del test inicial

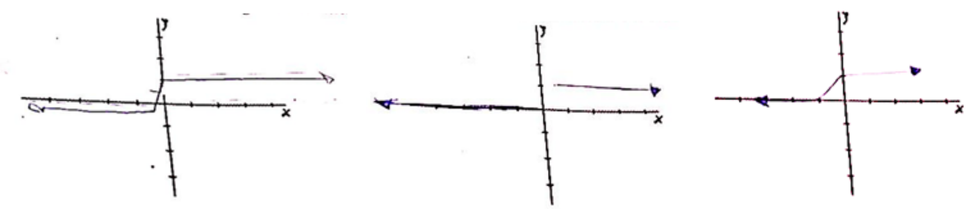
Respuestas correctas:

El porcentaje de participación ha sido mayor que en la anterior pregunta, y un elevado número de respuestas se consideran correctas, ya que en las gráficas de los alumnos se puede interpretar que las ramas de las funciones representadas tienden a infinito, aunque algunos de ellos no incorporan la simbología de la flecha (Figura 6.8.b)).



VI.8 *Figura 6.8.* Ejemplos de algunas respuestas correctas

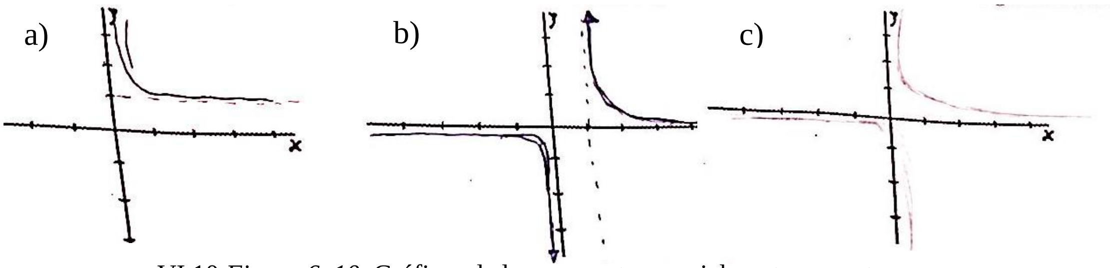
Entre las respuestas correctas, sólo un alumno (Figura 6.8c*)* ha presentado la función con recorrido negativo, apareciendo la gráfica por debajo del eje de abscisas cuando x tiende a infinito negativo.



VI.9 *Figura 6.9.* Ejemplos de algunas respuestas correctas

Un caso que merece atención especial es la respuesta que han emitido varios alumnos cuándo consideran rectas o semirrectas paralelas al eje de abscisas, como se indica en la Figura 6.9. Es evidente, que el comportamiento de estas funciones cuando x tiende a infinito, es el de una recta y, por ello, tanto las rectas como las semirrectas se pueden considerar funciones de en x tales que sus asíntotas son ellas mismas.

Respuestas parcialmente correctas:



VI.10 *Figura 6. 10.* Gráficas de las respuestas parcialmente correctas

El alumno de la Figura 6.10a) representa bien la tendencia cuando $x \to +\infty,\ f(x) \to 1$; pero, en vez de representar que cuando $x \to -\infty, f(x) \to 0$, considera que $x \to 0^+, f(x) \to +\infty$. Ha intercambiado las condiciones impuestas a las variables, el signo de la tendencia infinita y, además, ha incorporado una tendencia lateral no especificada.

Situación distinta es la interpretación que aparece en la figura 6.10b), este otro alumno representa bien la tendencia cuando $x \to -\infty,\ f(x) \to 0$; pero en vez de representar que cuando $x \to +\infty, f(x) \to 1$, impone $f(x) \to 0$ y además, lo confunde por $x \to 1^+, f(x) \to +\infty$ e incorpora condiciones no pedidas $x \to 0^-, f(x) \to -\infty$ Considera que los propios ejes coordenados son asíntotas de la función buscada. Incorpora, por tanto, la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ si\ x < 0 \\ \frac{1}{x-1}\ si\ x > 1 \end{cases}$

No estando definida la función en el intervalo $[0,1]$. Error adquirido o proveniente de la representación gráfica de la asíntota equilátera de ecuación $y = \frac{1}{x}$, ya que ésta no rebasa por la izquierda al eje de ordenadas.

Por último, en la figura 6.10c), el alumno representa bien $x \to -\infty, f(x) \to 0$. Pero respecto a la tendencia cuando $x \to +\infty,\ f(x) \to 1$; lo intercambia por $x \to 1,\ f(x) \to \pm\infty$, apareciendo la presencia de una AV a pesar de las imprecisiones que se perciben en dicha representación.

Reflexión

- Por una parte, la mitad del alumnado ha representado la función con las características pedidas y, por otra parte, a la vista de las respuestas de los tres alumnos que emiten respuestas parcialmente correctas, se podría pensar que tienen más facilidad para representar la tendencia de *AH* cuando x tiende a infinito negativo que la situación que se propone para la tendencia de x hacia el infinito positivo; ya que los alumnos que han contestado correcto parcialmente han fallado en dicha situación. Sin embargo, esta percepción, no se ajusta totalmente a la realidad, ya que la tendencia de la variable dependiente es diferente en cada caso y, es claro, que los tres alumnos representan una tendencia cuando x tiende a infinito positivo.

- La simbología de la flecha en la gráfica para representar la tendencia infinita está parcialmente consolidada en el alumnado, ya que la usa alrededor de la mitad del alumnado. Dicho símbolo es utilizado tanto en el avance natural de la recta real, como en la tendencia hacia el infinito negativo; sólo un alumno utiliza la notación de la flecha para las *AV*, y no para las *AH*.
- Se perciben dificultades de coordinación de las variables. De hecho, algunos alumnos, el 13.04%, presentan el error de intercambiar la tendencia infinita para la variable x con la de la variable $f(x)$, modifican las condiciones impuestas a las variables e incluso incorporan nuevas restricciones. Se detecta una posible conexión errónea de dependencia entre *AH* y *AV*, ya que estos alumnos, que escribieron respuestas parcialmente correctas, dibujaron una gráfica con parte de las condiciones pedidas y, además, una *AV* ajena totalmente al enunciado de la actividad propuesta. Además, hacen coincidir estas asíntotas con el eje de ordenadas.
- Merecen una reflexión las respuestas que consideran funciones constantes como funciones cuya asíntota es la recta determinada por la propia función.
- Finalmente, se observa una discretización de la recta real, no la interpretan en su globalidad.

Cuestión 3.- ¿Qué se observa cuando se estudia la tendencia de una función?

Respuesta de los alumnos:

Se presenta las diferentes respuestas, agrupadas cuando comparten razonamientos comunes, y una breve valoración de las mismas.

A1.- Si es ascendente o descendente.

A10.- Que sube o baja.

Ambos alumnos confunden la tendencia con el estudio de la monotonía de la función.

A2.- La dirección hacia la que se dirige.

A4.- Hacia dónde se dirige ésta, es decir, si tiende a 0 *o* ∞, *por ejemplo.*

Se genera una fuerte conexión entre tendencia y dirección. Aparecen imprecisiones en dicha relaciona, pero se considera la posibilidad de *“dirigirse”* hacia valores finitos e infinitos, aunque no precisa las posibles combinaciones de las tendencias de las dos variables.

> *A3.-A qué tiende depende de la asíntota si es horizontal o vertical, y dónde esté situada.*

Asocia la tendencia únicamente a la tendencia asintótica horizontal y vertical.

> *A5.- Número al que tiende una función.*

Este alumno sólo contempla la tendencia de la función a un número; es decir, una tendencia finita de $f(x)$, lo que en el caso de que x tendiera a ∞, sólo implicaría la existencia de *AH*.

> *A11.- Qué dominio y recorrido de la función* $\mathbb{R}$.

Confusión de la tendencia con el dominio y el recorrido.

> *A16.- Los valores a los que se acercan* x *a* y.

Utiliza la idea de acercamiento finito. Sin embargo su expresión es muy confusa y se puede interpretar como “a qué valores se acerca la y cuando x se acerca a un valor”.

> *A7.- En una tendencia si* $\mathrm{x} = \mathrm{n}$, x *no llega a “tocar” cuando* $\mathrm{y} = \mathrm{n}$.

Confusión entre las variables e interpretación que la función no llega a alcanzar el valor de la tendencia y, a la vez, impone que ambas variables deben tomar el mismo valor.

> *A8.- Sus límites.*

Este alumno repite 1º Bachillerato, por lo que se le ha presentado con anterioridad el concepto de límite, pero no concreta nada más.

> *A6.- Se observa la tendencia de la función.*

Responde con la misma palabra que se pretende definir y, por tanto, no aporta información relevante.

A continuación, se presentan las respuestas de 9 alumnos que comparten el concepto erróneo de la tendencia como inalcanzable y finita. Nuevamente aparece la inalcanzabilidad sobre el valor al que tiende, situación recurrente en anteriores ciclos de investigación. Cuatro de ellos focalizan la tendencia hacia un valor y los cinco restantes, hacia un punto:

- **Focalización sobre un valor-número:** (Se acerca a un solo valor, en singular; luego, sólo se considera la tendencia de una de las variables)

A12.- Se estudia el ***valor*** *al que se va a acercar según evolucione dicha función sin llegar a alcanzarlo.*

A17.- Que se acerca al ***número*** *pero no llega a tocarle.*

A18.- Cuando nunca toca el ***nº*** *pero se aproxima y se pone una flecha hacia dónde va la función---- →"*

A21.- El ***valor*** *al que se acerca pero nunca termina alcanzando.*

- **Focalización sobre un punto:** (Subyace la tendencia finita de las dos variables).
  A15.- Qué la función se va acercando a un ***punto*** *de la gráfica sin llegar a tocarlo.*

  A19.- Al ***punto*** *que se acerca pero sin llegar a él.*

  A20.- Hacia qué ***punto*** *se acerca pero nunca llega a tocar.*

  A22.- Los ***puntos*** *hacia los que va a ir la función.*

  A23.- Qué se va acercando poco a poco a ***un punto*** *del eje contrario, pero sin alcanzarlo.*

Aunque mal expresado, subyace la idea de conexión entre la tendencia de las dos variables.

Los tres alumnos restantes no se manifiestan.

Reflexión

- Detección de las siguientes confusiones entre conceptos:
  - Numéricos y geométricos básicos, como por ejemplo: punto, número, valor y variable.
  - Tendencia frente a los conceptos de dirección, dominio, recorrido o monotonía de una función.
- Conectar necesariamente la tendencia funcional con la tendencia infinita de una de las variables y, por tanto, con la existencia de asíntotas.
- Varios alumnos consideran el concepto erróneo de la tendencia hacia un valor considerando sólo la tendencia de una de las variables, pudiendo ser infinita. En otros, subyace la idea de la tendencia finita de las dos variables hacia un número o punto; en ambos casos lo consideran no alcanzable, apareciendo la idea de acercamiento finito Muchos alumnos consideran punto como sinónimo de valor, y es posible que consideren que ∞ sea un valor.
- Dificultades para discriminar entre la tendencia de la función frente a la tendencia de las variables.

Cuestión 4.- Escribe un ejemplo de una tendencia numérica a $x = 3$.

Respuestas de los alumnos:

Ningún alumno responde a la pregunta porque no concretan un ejemplo. Todos ellos escriben generalidades, correctas o incorrectas, y utilizan simbolismos diversos.

Se muestran a continuación:

> *A15.- Cuando* ***la recta*** *nunca toca el tres pero se aproxima mucho y se le pone una flecha para indicar que continúa (rozando el tres).*

Este alumno considera la tendencia no alcanzable hacia el valor tres, en el propio eje de abscisas u otra recta, podría considerarse el haz de rectas sobre un punto, para este alumno sería el punto $(3,0)$. Entiende la tendencia *"como una recta que no toca el tres, pero se aproxima mucho"*.

> *A1.- Cuando* ***la recta*** *nunca toca el* 3 *en el* ***eje de la*** x *pero se acerca y se le pone una flecha para indicar que va a infinito.*

> *A3.- Tiende a tres pero sin tocarlo, lo que nos dice que la* ***AV está en*** **3**.

Estos alumnos interpretan la tendencia numérica a $x = 3$ necesariamente con la presencia de una *AV*.

> *A6.- Cuando* $\mathrm{x} \to 3,\ \mathrm{f(x)} \to 3.$

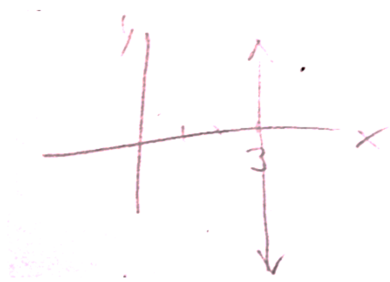
Sin ser prefijado, asegura que cuando x tiende a cierto valor k, $f(x)$ también tiende a k.

> *A5.-* $\mathrm{y} \to -\infty,\ \mathrm{y} \to +\infty$

> *A8.-* $\mathrm{x} \to 3,\ \mathrm{f(x)} = \infty$

> *A12.-* $\mathrm{x} \to 3,\ \mathrm{f(x)} = \infty$

El alumno *A9*, además de escribir la misma relación que *A6* y *A12*, lo acompaña con el siguiente gráfico en el que representa únicamente la recta $x = 3$ y su tendencia a $\pm\infty$ indicada con las puntas de flecha.



VI.11 *Figura 6. 11.* Respuesta del alumno A9

> *A20.-* $\mathrm{x} = 3, \mathrm{y} = \infty$

Añade a la respuesta el siguiente gráfico.

VI.12 *Figura 6. 12.* Respuesta del alumno A20

Estos 5 alumnos se ayudan de simbología, dos de ellos presentan además una gráfica, para representar la tendencia que se pide. Todos imponen la tendencia hacia infinito de la variable y, no admitiendo como posible una tendencia finita para dicha variable; cuatro alumnos lo expresan mediante igualdad $y = \infty$, incluso, llegando un alumno a imponer que la variable y tienda a la vez a infinito negativo y positivo ($y \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty$), aunque no lo especifica, está posibilitando ramas infinitas diferentes en los límites laterales de la función cuando x tienda a 3.

> *A2.- Cuando tres tiende a infinito.*
>
> *A16.-* y *tiende a* ∞.

En estas dos respuestas, aunque formalmente presentan incoherencias; en ellas, subyace la idea de la presencia de una *AV* en la recta $x = 3$.

Los 13 alumnos restantes no contestan.

Reflexión

- Prácticamente todos los alumnos que contestan, fijan una tendencia para la variable y totalmente ajena al enunciado de la actividad y consideran una posible relación entre las variables que a veces la escriben como tendencias y otras como igualdades.
- Ocho alumnos que contestan, el 34.78%, interpretan la tendencia numérica hacia el valor $x = 3$, con la necesaria presencia de una *AV* en $x = 3$.
- Nuevamente aparece la concepción errónea de la inalcanzabilidad hacia el valor al que se tiende.
- Ciertos alumnos ante la tendencia de x hacia 3 lo relacionan con la tendencia hacia infinito de y (positivo para varios e infinito positivo y negativo para uno); es decir, fijar una tendencia finita a una de las variables implica una tendencia infinita a la otra.

Cuestión 5.- Escribe lo que creas que es una Asíntota Horizontal.

Respuestas alumnos

Sus respuestas se agrupan según las ideas comunes que comparten, no pudiéndose considerar ninguna correcta:

Imposiciones parcialmente ciertas:

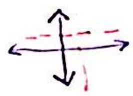
- La función nunca toca a la asíntota

A1.- Una recta ***discontinua*** *que se* ***coloca en el eje y*** *para indicar que la función nunca la toca y sirve para* ***limitar****.*

Importancia en la discontinuidad de la recta como límite o frontera intocable.

A3.- Una AH *es una recta dónde una función tiende a tocar la asíntota dónde esté pero sin llegar a ello. Si la asíntota está en* 1 *los valores de* x *tienden a* 1 *pero sin llegar a tocarlo.*

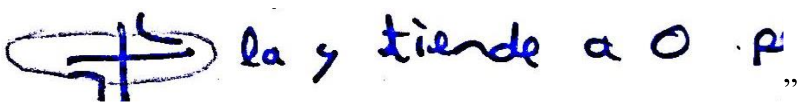
Por un lado, explica que *"la función tiende a tocar a la asíntota… pero sin llegar a ello",* llevando implícita la tendencia combinada de la variable *x* tendiendo a un valor finito y la variable *y* tendiendo a ∞*;* pero el alumno solo especifica la tendencia de la variable *x* sin concretar lateralidad. Este alumno muestra confusión ya que se expresa en términos cercanos a la *AV*, pero acompaña el siguiente gráfico que representa los dos tipos de asíntotas.



VI.13 *Figura 6.13.* Respuesta alumno A3

Utiliza la simbología de la flecha para los ejes coordenados y no para la asíntota.

A21- La y *tiende a* 0 *pero no llega a alcanzarlo.*



VI.14 *Figura 6.14.* Respuesta alumno A21

Se ha optado por presentar un caso concreto, la función $f(x) = 1/x$, que tiene *AH* en $y = 0$.

A23.- Aparecen líneas discontinuas y expresa que tiende a cierto valor de y *pero nunca llega.*

A2.- ***Línea imaginaria que está en la función****, pero que la línea de la función no llega nunca a tocar por mucho que se acerque la función.*

- Focalización en la pendiente/inclinación de la *AH.*

A6.- La que va ***paralela*** *al eje* x.

Focalización en la pendiente.

A4.- Qué tiende a infinito de forma ***horizontal****.*

Invención de nueva conceptualización: Tendencia infinita horizontal.

- Tendencia infinita de la variable independiente

A12.- x $=\infty$ *y se **limita** con el número* r, y $=$ r.

Confusión $=$ con $\rightarrow$; es decir, igualdad con tendencia.

*A15.- Pues una recta **discontinua q**ue va de manera horizontal y que **al final** tiene una flecha.*

Una recta tendrá cierta pendiente y lo verbaliza con *"ir de cierta manera"*. También expone que la recta tiene un final, por lo que confunde recta con su representación, en la que la punta de la flecha indica su extensión infinita.

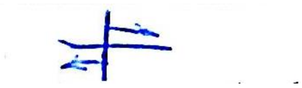
A16.- Qué x *tiende a* $+\infty$ *o* $-\infty$.

Esta respuesta no tiene en cuenta la tendencia de la variable dependiente y, en consecuencia, incluso podría tener una asíntota oblicua o no tener un comportamiento asintótico.

A8.- $lim\ f(x)\ cuando\ x \rightarrow \infty$ o $-\infty$".

Priorización del procedimiento de cálculo frente a la conceptualización de asíntota. Este alumno repetidor conoce el procedimiento para encontrar la expresión de la recta *AH*, aunque presenta imprecisiones, ya que no considera la tendencia finita de $f(x)$.

A22. – Presenta es gráfico de la figura 6.15.

"  "

VI.15 *Figura 6.15.* Respuesta alumno A22

Considera que la función presenta paralelismo respecto al eje de abscisas y cierta simetría respecto del origen de coordenadas y en el comportamiento de la función en las posibles tendencias infinitas de x.

- *Respuestas* erróneas:

A5.- Creo que es una función tiende.

Invención de una nueva denominación.

A10.- Qué sólo tiene o da puntos en la y.

Invoca al recorrido de la función.

A11.- Una función que tiende a infinito en el eje y.

Confusión errónea con tendencia infinita de la variable x.

A17.- Qué x *tiende a un número, el que sea, pero no llega a tocarlo.*

Tendencia finita.

A18.- Que nunca llega a tocar del todo el eje de las x".

Posible *AH* en el eje de abscisas.

A19.- El valor de "y" *que no tiene imagen en* "x""

Confusión recta con valor y visión de que la función no corta nunca a la asíntota.

A20.- Función que se va a acercar hacia un valor del eje x*"*

Confusión de asíntota con rama de la función *"que se va a acercar a un valor",* relacionándolo con la idea de una potencial una raíz real)

A7.- Es una línea imaginaria que se aproxima al eje horizontal"

Consideración de la asíntota como curva de la función que tiende al eje de abscisas)

En general, escriben respuestas carentes de sentido e invocan algunas palabras cuya significación matemática sí que está relacionada con el concepto de *AH*: tendencia, valores, eje de abscisas, aproximación,…

Los tres alumnos restantes no contestan.

Cuestión 6.- Escribe lo que creas que es una Asíntota Vertical.

Respuestas alumnos:

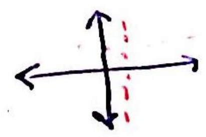
Clasificación de las respuestas según el criterio de la pregunta anterior:

Imposiciones parcialmente ciertas:

- La función nunca toca a la asíntota

  A1.- Una recta discontinua que se coloca en el eje x *para indicar que la función nunca la toca y sirve para limitar.*

  A3.- La AV *es sino en el eje* y *para diferentes puntos de* x *sin llegar a tocar la asíntota sino que tiende a esa asíntota sin tocarla.*



VI.16 *Figura 6.16.* Respuesta del alumno A3

A21.- La x *tiende a* 0 *pero no llega a alcanzarlo"*

VI.17 *Figura 6.17.* Respuesta alumno A21

Como en el caso de la *AH*, nuevamente este alumno opta por presentar el caso concreto de la función $f(x) = 1/x$, que también tiene *AV* en $x = 0$.

A23.- Tiende a cierto valor de x *pero nunca llega.*

A2.- Línea de la función no llega nunca a tocar aunque se acerca por la x*"*

- Focalización en la "inclinación" de la asíntota

A4.- Que tiende a infinito de forma vertical.

Invención de nueva conceptualización: tendencia infinita vertical)

- Tendencia infinita de una de las variables

A16.- Que f(x) *o* y *tiende a* +∞ *o a* -∞.

Desprecio de la variable x.

- Respuestas erróneas:

A12.- Si c *es raíz de* f(x), x = c *es una asíntota.*

Faltaría especificar que esto podría ocurrir cuando $f(x)$ es el denominador de la función racional.

A5.- Yo creo que es cuando la función tiende hacia arriba o abajo infinito.

Confusión con el estudio de la monotonía y las ramas infinitas.

A6.- La que va paralela al eje x.

Posible despiste de notación de los ejes coordenados, ya que ha respondido igual que hizo para las *AH*.

A10.- Qué sólo da puntos en la x.

Invoca al dominio de la función.

A11.- Una función que tiende a infinito en el eje x.

Confusión errónea con tendencia infinita de la variable y.

A18.- Que nunca llega a tocar del todo el eje de las y.

Posible *AV* en el eje de abscisas.

A17.- Igual pero con la y, el número que no llega a tocar.

Analogía con las asíntotas horizontales.

A19.- El valor de "x" *que no tiene imagen en* "y".

Conexión con los valores que no pertenecen al dominio de la función y la función puede presentar *AV*.

A8.- lim f(x) cuando y→∞ o -∞"

Priorización del procedimiento de cálculo frente a la conceptualización de asíntota, por lo que aparecen errores no considerando que *f(x)=y*-

A7.- Función que se va a acercar hacia un valor del eje y"

Función que se va a acercar al eje de ordenadas, es decir, posible función con *AV*, *x=0*.

A11.- Es una línea imaginaria que se aproxima al eje de las ordenadas"

Consideración de la asíntota como línea/curva de la función que tiende al eje de ordenadas.

- Analogía con las asíntotas horizontales:

A15.- Una AV *es lo mismo que la horizontal pero vertical.*

A20.- Igual que la horizontal, pero en vertical"

A22.-

VI.18 *Figura 6.18.* Respuesta alumno A22

Análogamente a lo que consideraba para las asíntotas horizontales, representa dos rectas paralelas respecto al eje de ordenadas, sin hacer alusión a ninguna función.

Reflexión

- Gran similitud entre las respuestas relativas a las *AH* y *AV*. Aproximadamente la cuarta parte del alumnado afirma que la función nunca tocará a la *AH* ni a la *AV*, otros focalizan en la inclinación/pendiente de las mismas y, algunos, únicamente en la tendencia infinita de una de las variables.
- Vuelve a manifestarse confusión de las tendencias de la variable x con las tendencias de la variable y.
- Se observan dificultades con la notación y la formalización para expresar las ideas relativas a tendencia, en el caso de la *AH*, cierto alumno expresa *"recta colocada en el eje* y*"* para referirse a una recta paralela al eje x; y en el caso de la *AV* escribe *"recta colocada en el eje* x*"* como recta paralela al eje y.

- Algunos alumnos recuerdan la representación gráfica de las asíntotas incidiendo en que son rectas cuya importancia es la de límite o frontera y otro alumno focaliza la atención de las asíntotas en su pendiente.
- Ningún alumno impone condiciones conjuntas a la tendencia de las dos variables x e y, presentando en muchos casos restricciones de las condiciones globales, imponiendo condiciones a una de las variables y despreciando a la otra.
- Aparecen errores conceptuales graves sobre el concepto de asíntota: línea imaginaria que está en la función, recta discontinua, asíntota como valor; entre otras.
- Invención de nuevas conceptualizaciones: *Tendencia infinita horizontal y vertical"*
- Sólo tres alumnos utilizan una representación gráfica en el plano para representar ambas asíntotas, sin ser pedido en el enunciado; uno de ellos no utiliza el símbolo de la flecha, otro sólo lo utiliza para los ejes coordenados y el tercero utiliza la simbología de la flecha sólo para las asíntotas.
- Confusiones más reseñables:
    - Variable x con y.
    - Igualdad con tendencia (= con →), ejemplo: $x=\infty$.
    - Confusión del concepto de recta con su representación.
    - Pendiente con *"ir de cierta manera",* verbalizando el alumno *"ir de manera horizontal o de manera vertical".*
    - *"Función tiende"* por función con tendencia asintótica.
    - *"Línea de la función"* para referirse a la curva de la función.
- Priorización del procedimiento de cálculo de la expresión de asíntota, frente a la conceptualización de la misma. En el caso de la *AH* calculando los límites en el infinito, y en el caso de la *AV*, asociándolo a las raíces del denominador de una función racional. Pero se corre el riesgo, como le ha pasado a cierto alumno, que afirma que si c es raíz de $f(x)$, $x = c$ es una asíntota.
- Dar la única posibilidad de *AH* al eje de abscisas y de *AV* al eje de ordenadas, no pudiendo existir otras posibilidades de asíntotas en el plano.
- Muchos alumnos escriben como asíntota *"recta discontinua".* Sin duda, esta forma de expresarse es debida a que en la pizarra, los profesores, suelen dibujar las asíntotas mediante rectas a trazos, posiblemente, para diferenciarlo de la propia gráfica de la función.
- Elevado número de alumnado que responde erróneamente, ligeramente superior en la *AV*.

Cuestión 7.- Escribe por qué crees que todas las funciones tienen alguna asíntota o por qué no.

Respuestas alumnos

Respuestas parcialmente correctas:

> *A1.- Porque depende de la función, puede haber asíntota sí o no, como ejemplo* $\frac{1}{x}$ *tiene asíntotas ya que no llega a cortar con ningún eje. Es para limitar, delimitar la función, dar unos valores.*

Este alumno introduce la idea de funciones que están, o no, limitadas o delimitadas por valores y, por ello, presentan o no asíntotas)

> *A3.- No tiene por qué, pero no sé por qué es.*

Se trata de una afirmación sin justificación alguna.

> *A21.- No las tienen todas, suelen tener las de* $y = \frac{k}{x}$.

Concreta una familia de funciones que presenta asíntotas no es una justificación de que haya otras que no lo verifiquen, también debiera haber puntualizado otra familia que no lo presentase.

> *A23.- No todas las funciones tienen asíntotas porque hay funciones que acaparan todos los números reales"*

Para este alumno acaparar significa que el dominio o el recorrido de la función son todos los números reales. Él no concreta si *"la acaparación"* se refiere al dominio o al recorrido; en cualquier caso, la presencia de *AH* o *AV*, no implica, necesariamente, la no acaparación de todos los números reales del recorrido o dominio, respectivamente; aunque en las funciones que se suelen presentar a los alumnos como ejemplo sí se cumple. Por tanto, es un error didáctico utilizar siempre ejemplos de funciones en los que el dominio o el recorrido no contengan al valor en el que se presenta la asíntota.

> *A15.- Dependiendo del tipo de función que sea, es decir, si se acerca al eje de la* x *o de la* y, *pero nunca lo llega a tocar"*

Razona sobre la existencia de funciones cuyas asíntotas sean los propios ejes coordenados y vuelve a aparecer la idea de que la asíntota no puede tener puntos comunes con la gráfica de la función.

> *A8.- No todas tienen, porque si el límite de* $f(x) = (-\infty, \infty)$ *no hay asíntota"*

Aparece un error grave de notación, el alumno quiere expresar dos posibles igualdades ($\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$, y en su lugar presenta que un límite sea igual que un intervalo abierto. Nuevamente se canaliza el estudio en el procedimiento del cálculo de la asíntota y no en la comprensión del concepto. En este caso, se está refiriendo a la *AH*, aunque no lo concreta.

Respuestas incorrectas:

A11.- Si, todas, en algunos de sus valores tienden a algo, un valor, o al infinito.

Expresa una confusión valor con variable y asíntota con tendencia).

A2.- Si, porque tiende a infinito.

Es una concepción doblemente errónea, toda función tiende a infinito, y toda tendencia infinita es asintótica.

A15.- Porque la asíntota indica que nunca toca la recta con rayas discontinuas.

Consideración de la curva como asíntota.

Reflexión

Solamente seis alumnos responden de forma correcta, aunque parcialmente, ya que no justifican la elección, pero parecen tener claro que no todas las funciones presentan asíntotas; y tres responden de manera incorrecta, los catorce restantes no se pronuncian.

A partir de las consideraciones de los alumnos que responden de forma correcta parcialmente aparecen:

- Ideas de *"limitar, delimitar la función, dar unos valores"* y *"acapar todos los números reales"* como justificación de la presencia o no de asíntotas.
- Razonamientos superficiales, que no justifican las afirmaciones en profundidad:
  - Las funciones racionales sí presentan asíntotas.
  - Únicamente la posibilidad de los ejes coordenados como asíntotas.
- Tienen dificultades para sacar conclusiones globales en relación a comportamientos particulares de funciones concretas.
- Conocimiento de una situación sin saber la justificación.
- Utilización únicamente del estudio del procedimiento del cálculo de la asíntota, para la justificación de su existencia.

En relación a los alumnos que contestan incorrectamente se percibe:

- Confusión de valor con variable y de asíntota con tendencia.
- Razonamiento transitivo falso: toda función tiende a infinito, toda tendencia infinita es asintótica, por tanto toda función presenta asíntotas.
- Incomprensión del enunciado de la pregunta.

Cuestión 8.- Escribe lo que creas que es una Asíntota Oblicua.

Respuesta de los alumnos:

Se presentan los siguientes tipos de respuestas:

- Respuesta parcialmente correcta:

  A6.- La que no va paralela ni al eje x *ni al eje* y.

Nuevamente se destaca la importancia de la pendiente de la recta)

- Respuestas incorrectas o carentes de sentido:

  A2.- Es una función en forma curva.

  A11.- Una asíntota mediante una función cuadrática.

En ambas respuestas la asíntota deja de ser una función lineal, pudiendo se cualquier *"forma curva"* o *"función cuadrática".*

A8.- Límite de f(x) *cuando* x *e* y $\rightarrow \infty$ *o* $-\infty$"

Este alumno repetidor ha focalizado todas las cuestiones en relación con los límites.

Los 19 alumnos restantes no responden.

Reflexión

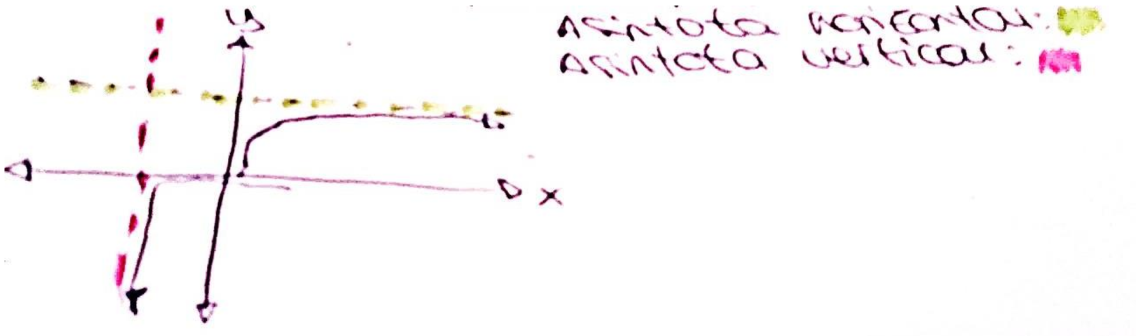
Los cuatro alumnos que responden muestran imprecisiones y errores conceptuales. Uno de ellos da importancia a que la asíntota oblicua no será paralela a ningún eje coordenado, para dos alumnos dicha asíntota deja de ser una función lineal, pudiendo ser cualquier *"forma curva"* o *"función cuadrática"* y, por último, el alumno repetidor no responde a lo pedido queriendo conectar con el cálculo de límites.

Este concepto no fue introducido el pasado curso académico y, tan solo, se trataba de comprobar si tenían algún tipo de conocimiento o idea previa.

Cuestión 9.- Representa y clasifica en el plano los casos que se pueden dar de cada tipo de asíntota.

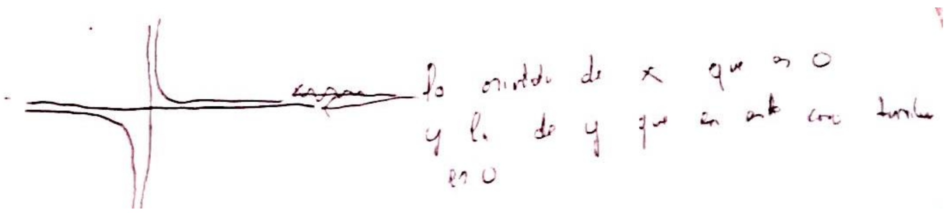
Ningún alumno responde lo pedido, no ha habido una sistematización en la clasificación relativa a cada tipo de asíntotas. Sólo contestan cinco alumnos que se limitan a poner un ejemplo de función con tendencia asintótica. Tres de ellos han presentado una gráfica con *AH* y *AV*; los dos restantes han optado por plasmar tres gráficas con la leyenda especificativa de cada tipo de asíntota, siendo, en ambos, incorrecta la oblicua.

A continuación, vamos a analizar con más detenimiento cada una de las cinco respuestas:



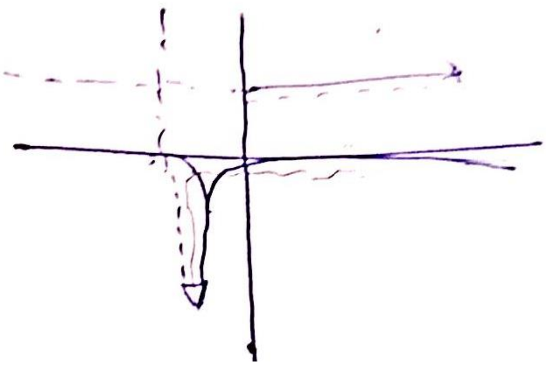
VI.19 *Figura 6.19.* Respuesta del alumno A15

En la propia gráfica se presenta una *AV* y otra *AH*. Utiliza la notación de flecha para la gráfica y los ejes, y no para las asíntotas.



VI.20 *Figura 6.20.* Respuesta alumno A20

Acompaña al gráfico la siguiente frase *"la asíntota de* x *que es* 0 *y la de* y *que en este caso también es* 0*"*. No aparecen las palabras de *AH*, ni *AV*; sí especifica que en los dos casos *"es* 0*",* una forma muy simplificada de las dos expresiones de las asíntotas ($x = 0$ e $y = 0$).



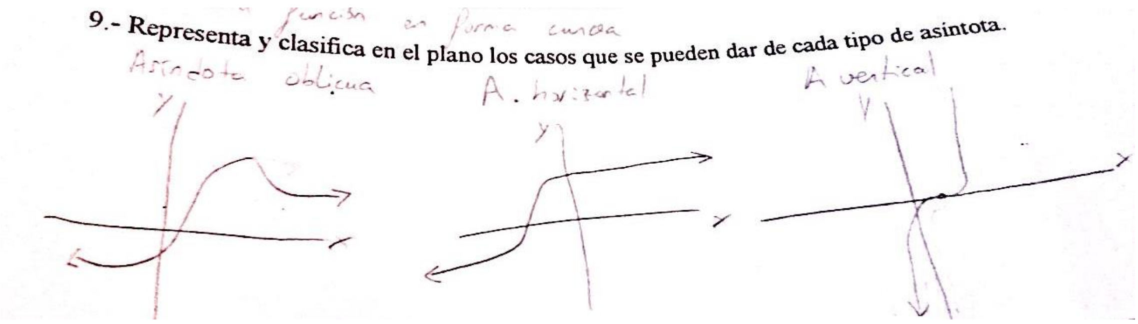
VI.21 *Figura 6.21.* Respuesta alumno A1

En la misma gráfica ha querido representar diferentes posibilidades pudiéndose pensar, inicialmente, que no tiene claro el concepto de función.

El alumno A3 dibuja dos asíntotas horizontales cuando x tiende a infinito positivo, una de ellas coincidiendo con el eje de abscisas y la otra con una semirrecta paralela a dicho eje de abscisas. Cuando x tiende a infinito negativo hace coincidir también la asíntota con el eje de abscisas. Suele utilizar el símbolo de flecha en todas las ramas, en el caso de la *AV*, ha dibujado varias ramas, a modo de esbozo muy impreciso.

VI.22 *Figura 6.22.* Respuesta del alumno A3

El alumno A3 considera que la presencia de asíntotas horizontal y vertical tiene que ocurrir a la vez, no pudiendo existir la una sin la otra, como si estuvieran hermanadas. En realidad, ha puesto dos ejemplos de la familia de funciones inversas. En el caso de asíntota oblicua, representa una función afín, pero no la función cuya asíntota es dicha recta, aunque en ese caso la asíntota coincide con la función.



VI.23 *Figura 6.23.* Respuesta del alumno A2

En el caso de la asíntota oblicua en las representaciones del alumno A2 (Figura 6.23), aparentemente, aparecen dos asíntotas horizontales para ambos infinitos; pero, da la posibilidad de presencia de extremos relativos (parece que asocia la palabra oblicua a que la curva no mantiene cierta horizontalidad o verticalidad), ya que dibuja un posible mínimo y máximo de dicha función, para diferenciarlo de la segunda gráfica que sí presenta dos asíntotas horizontales. Curiosamente, respecto a la *AV*, indica la flecha para la rama contraria al avance natural de la recta real, dejando en la otra rama simplemente el trazo de la curva. En ninguna de las tres gráficas dibuja el trazo de ninguna asíntota.

Reflexión

- Nuevas denominaciones de invención propia del alumnado: *Asíntota de* x*”* y *Asíntota de* y*”* para nombrar las asíntotas.
- Conexión hermanada entre las asíntotas horizontales y verticales.
- Dificultades en representar y clasificar en el plano los casos que se pueden dar de cada tipo de asíntota bajo ningún posible criterio: número de asíntotas,

posiciones relativas entre la curva y la asíntota u otras posibles clasificaciones o estudios. Sus respuestas se resumen en presentar un ejemplo de cada tipo.

VI.3.3 Desarrollo de las sesiones de docencia

Las sesiones lectivas corresponden al mes de marzo de 2016, en ellas se proyectan los diferentes vídeos, se producen debates en el aula moderados por la investigadora, se realizan tareas de reflexión, análisis y consolidación de la comprensión de los contenidos que han sido objeto de estudio.

El esquema de trabajo de cada sesión ha sido el siguiente:

- Visualización de los vídeos. Tras el visionado de cada uno de ellos, se siguieron los pasos que se exponen a continuación:
    - Debate en el grupo y planteamiento de dudas, reflexiones y aportaciones en relación al vídeo expuesto.

Se ha combinado la metodología mixta de aula invertida junto con otras metodologías activas, así como con diferentes recursos didácticos: software educativo, animaciones web y programas específicos matemáticos, en especial GeoGebra.

Todos los diálogos llevados a cabo en el aula se encuentran transcritos íntegramente en el ANEXO X.4.4 y se han analizado minuciosamente, con anotaciones al pie de página y con comentarios de la investigadora interpretando las diferentes aportaciones del alumnado así como las intervenciones de ella misma. La actuación de la profesora se centra principalmente en guiar el proceso de aprendizaje y, en algunos casos, su figura es la de moderadora, aportando serenidad ante los conflictos dialécticos y, en otros casos, a modo de cierre de sesión, concluye clarificando ideas y consolidando conocimientos. A continuación, se exponen las reflexiones tras el análisis de los vídeos siguiendo el orden de las sesiones de docencia.

Tras el riguroso estudio y análisis de los diálogos que se produjeron en las sesiones de docencia en el tercer ciclo de investigación, se describe aquí la reflexión global de los mismos.

Se han reconocido limitaciones o dificultades en la comprensión y relación entre conceptos. El reconocimiento de éstas ha tenido lugar a través de las acciones que se relatan a continuación:

- Aceptación de las aproximaciones inferiores o superiores, pero sólo consideran como tendencias a aquellas que son crecientes por números menores al número que se tiende.

- Incomprensión de la densidad de los números en la recta real, queriendo ordenarlos como números naturales o enteros.
- Consideración de *"tendencia de un número a otro número"* en vez de la tendencia de una sucesión a un número.
- Tendencia hacia un número suficientemente grande implica tender a infinito, ya que se identifica números grandes con infinito.
- Consideración del infinito como un valor fijo alcanzable.
- Asociación biunívoca de tendencia infinita y tendencia asintótica.
- Distinción entre fórmula y expresión.
- Discriminación de los elementos fundamentales que caracterizan a una función, por ejemplo, entre asíntota y gráfica de la función.
- Diferenciación entre una función y su expresión algebraica, que puede ser única o diferente en ciertos intervalos de su dominio.
- Expresión correcta de lo que representa una situación gráfica.
- Presentación problemática en la comprensión de las tendencias asintóticas cuando x tiende a infinito negativo.
- Confusión entre familias de funciones, en especial entre polinómicas y racionales.
- Diferenciación del concepto abstracto de función con una representación concreta de la misma.
- Comprensión del comportamiento local y global de las funciones.

Además de las acciones descritas, también se han producido manifestaciones o comparaciones entre concepciones de tipo explicativo, sobre la comprensión o la visualización de conceptos abstractos, con las que pretenden facilitar la comprensión de dichos conceptos, aunque pudiera darse el caso de que produjeran interpretaciones erróneas:

- *Aproximar es como si te lo inventas",* frente a la tendencia que es *"el número más cercano".*
- Tendencia infinita dónde las ramas de la función *"se abren"* o *"se va alejando".*
- Tendencia asintótica horizontal *"como una tendencia a infinito que se va acercando, se va acercando a lo que es la asíntota".* Introduciendo la noción de movimiento y pasando de una simple aproximación, a la idea de aproximación óptima; es decir, de tendencia.
- *"Si desde el punto que le pasas, pues puede tender a infinito, y si no le pasas, pues puedes tender a finito".*
- Concepción de tendencia finita asociada a la geometría finita de la pantalla, y asociación de infinito a la no visibilidad del punto. *"Tendencia finita para dentro y tendencia infinita para afuera".*

- Consideración de la tendencia a infinito como una aproximación, pero desvinculada de la superación, posiblemente por el desconocimiento de la aritmética asociada al infinito. Planteamiento de dudas como *"La tendencia infinita tiende a infinito; pero, ¿a qué valor se aproxima?"* o afirmaciones del tipo, *"pues que se aproxima a infinito y tiende a infinito"*.
- Interpretación que *"la asíntota hace lo que le da la gana"* ante la posibilidad de tener infinitos cortes la curva con la asíntota.

Se ha contrastado que la incorporación de nuevos conceptos a los ya conocidos de otros bloques de contenido ha suscitado la aparición de *"invenciones de nuevos conceptos",* carentes de sentido matemático, pero no para ellos, como por ejemplo: *tendencia de una recta a cero".* También se han producido paralelismos o analogías que provocan errores por intento de acomodación de nuevos conceptos a los que consideran similares, no focalizando en las diferencias. Por ejemplo, se intenta hacer un paralelismo entre la tendencia finita e infinita, entre las propiedades o posibilidades de los tres tipos de asíntotas (como es el caso de asegurar la máxima presencia de 2 asíntotas de un mismo tipo en una misma gráfica,…)

Se ha percibido que se ha ido avanzando en el itinerario formativo planificado, a pesar de que la investigadora se ha percatado de que algunos conceptos funcionales básicos no estaban totalmente adquiridos, ni consolidados. Merece un comentario especial la afirmación de algunos alumnos sobre que *"una función definida a trozos no es una función",* ya que se ha trabajado suficientemente sobre ello durante este curso, y en años anteriores, para no ser considerada como tal. Sus comentarios giraban en torno a denominarla como *"una función de funciones"* o *"como que son varias funciones"*.

Globalmente, se han confirmado diferentes ritmos y niveles de acercamiento a la idea intuitiva y consolidación de los diferentes comportamientos asintóticos, siguiendo el marco metodológico de estadios según Socas (2007). Se ha ido avanzando en la comprensión, aunque seguían manifestándose imprecisiones en el vocabulario asociado a los conceptos que nos ocupan.

El corte entre curva y asíntota ha sido una preocupación constante en el alumnado, en todas sus variedades. El alumnado no acaba de comprender que los posibles cortes, finitos o no, no influyen en el comportamiento de la función en el infinito. Por un lado, en algunos alumnos está enquistada la pretensión de sacar generalidades a partir de un caso concreto; afirmando, por ejemplo, que nunca la función cortará a la asíntota porque no ocurre en el caso presentado. Por otro lado, *"no es posible un corte de la curva y la asíntota sin desviación"* porque *"si se juntan en un punto la distancia ha llegado a cero, entonces ya no puede tender a cero".* Sería equivalente a asegurar que si se ha conseguido cierta distancia entre la curva y la asíntota, cero en este caso particular;

entonces, no puede tender la distancia a ese valor cuando la variable x tiende a infinito, según sus palabras, *"no puede pasar más tarde"*. Este es el argumento que imposibilita la existencia de puntos de corte y constituye un obstáculo de aprendizaje. Se explica al alumnado la posibilidad de que pueda haber alejamientos y acercamientos, a modo de oscilación de la curva alrededor de la asíntota. Este hecho, es asumido por cierto sector del alumnado, como mucho por un número finito de cortes, pero difícilmente imaginable en un número infinito de posibilidades. Este caso, aún presentado con ejemplos concretos, y con la ayuda del programa de geometría dinámica GeoGebra, se asume pero no con total convencimiento.

Por otro lado, cierto sector del alumnado va planteándose nuevas situaciones y propuestas, lo que muestra su evolución en la comprensión del marco teórico, como por ejemplo la preocupación por si una función puede presentar dos o más asíntotas verticales.

Sigue habiendo sorpresa en temas relacionados con el infinito, por ejemplo al visualizar la presencia de infinitas asíntotas verticales en la función tangente, pero tras su análisis han sido capaces de relacionarlo con propiedades matemáticas ya estudiadas anteriormente, como la periodicidad o la simetría y el correspondiente estudio algebraico-geométrico, apareciendo expresiones muy curiosas como las siguientes: *la función puede dar infinitas vueltas…., "todo se repite" y "¿hay cierta simetría no?".*

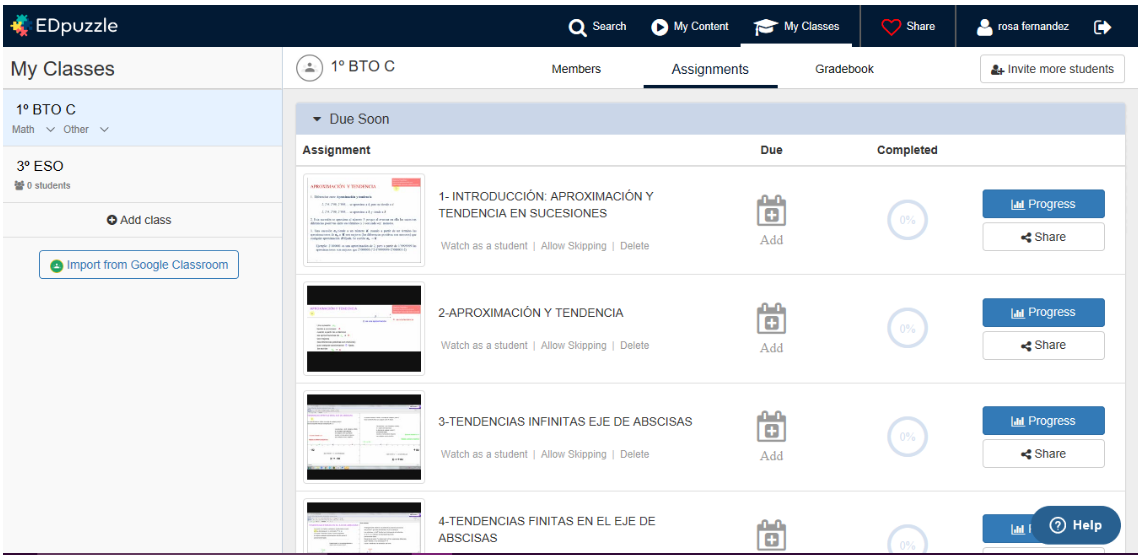
Curiosa es la dotación a la asíntota del papel principal de su tendencia en el infinito frente a la curva. Las gráficas de las rectas responden a un modelo universal (que es siempre el mismo), mientras que se pueden crear funciones cuyas gráficas puedan comportarse como se precise o sea necesario en el infinito, según los casos.

En la última sesión, se recogió una valoración más globalizada del alumnado respecto a la experiencia de las sesiones de docencia llevadas a cabo en relación al bloque de contenido que nos ocupa a partir de un test final validado por expertos, que se explicará en apartados posteriores y, además, se les dio la oportunidad de aportar observaciones y sugerencias.

VI.3.4 Estructura de la plataforma Edpuzzle

EDpuzzle es una aplicación web gratuita que permite la creación de vídeo-cuestionarios de evaluación. En esta plataforma se alojaron los vídeos editados y refinados del ciclo de investigación anterior, que sirven de base de los contenidos, y están a disposición de los alumnos para que los puedan utilizar todas las veces que consideren oportunas, posibilitando la metodología Flipped Classroom. Los alumnos visualizan y contestan a una serie de preguntas (abiertas o tipo test) pudiendo ser insertadas en medio o al final del vídeo. Al finalizar las tareas, cada alumno puede conocer sus aciertos y se establece una valoración de los mismos, por tanto es una herramienta de autoaprendizaje. Después el profesor/investigador puede ver información relativa al número de visualizaciones, así como las estadísticas proporcionadas por la plataforma para evaluar el aprendizaje de los alumnos.

Para hacer uso de esta herramienta, previamente, la investigadora se registró en la web, para crear sus cuestionarios propios. Una vez diseñado todo el material de la clase virtual se ofreció a los alumnos una clave para acceder a dicha documentación. A modo de ejemplo, se muestra una captura de pantalla de dicha plataforma (Figura 6.24). En ella, además de la identificación de la clase, aparecen la relación de vídeos que deben visualizar los alumnos y ventanas de control del progreso de los alumnos. La interfaz para los alumnos sólo muestra los vídeos con el acceso a las cuestiones y su información personalizada.



VI.24 *Figura 6.24.* Interfaz Plataforma EDpuzzle

Los vídeos que se han utilizado en este ciclo son los mismos que visualizaron los alumnos en el ciclo de investigación anterior, si bien, a mayores se elaboraron tres nuevos, dos introductorios y uno de consolidación. Todos los vídeos se encuentran en el llamado ANEXO DIGITAL (ANEXO X.6) del ciclo de investigación anterior.

Se optó por plantear las actividades individuales al final de cada vídeo. Dicha propuesta de cuestiones tenía tres posibilidades:

- Cuestionario con ítems para elegir una única respuesta verdadera entre dos opciones excluyentes.
- Cuestionario con ítems de respuesta válida múltiple.

- Cuestiones abiertas dónde el alumnado deberá contestar razonando sus respuestas.

En este ciclo esta plataforma ha sido un recurso de apoyo para obtener información fundamentalmente sobre las respuestas de los alumnos al test de expertos.

En la plataforma Edpuzzle se subieron todas las actividades que se propusieron en las cuatro sesiones de docencia del ciclo de investigación anterior, pero no fueron contestadas por la totalidad del alumnado. Se dieron de alta en dicha plataforma y se visualizaron los vídeos, pero hubo absentismo y poca implicación en la respuesta de las cuestiones planteadas, sobre todo en las preguntas de abiertas; por lo que no aportaban información de interés respecto a la investigación planteada.

VI.3.5 Validación test por expertos

Tras la experiencia del pasado ciclo de investigación, se aportó información relativa a las posibles cuestiones a proponer al alumnado para ser validadas por un comité de especialistas formado por investigadores experimentados de varias universidades españolas. El punto de partida fue el test que se utilizó en el IES Recesvinto de Venta de Baños, dicho test fue enviado a una comisión de expertos en investigación educativa junto con la correspondiente trayectoria hipotética de docencia. En dicha trayectoria se consideran las definiciones de tendencia (límite) que serán fundamentales en la misma. Dicho test se encuentra en el ANEXO X.4.3.

VI.3.6 Análisis de las respuestas al test de expertos

Tras finalizar la experimentación, se pasó por escrito el siguiente test validado por expertos para analizar el grado de comprensión de los conceptos en el alumnado.

Han participado activamente 23 alumnos de Bachillerato de Ciencias. A continuación, se transcriben todas las preguntas con el objetivo correspondiente y el análisis de las respuestas que emitieron los alumnos en cada una de ellas.

Cuestión 1. Se considera la siguiente sucesión: 1, 1’9, 1’99, 1’999,…

a. *Se aproxima a* 3*, pero no tiende a* 3
b. Se aproxima a 3 y tiende a 2
c. Se aproxima a 3, pero no tiende a 2
d. Se aproxima a 3 y tiende a 3
e. Se aproxima a 3 y tiende a ∞

Señala las opciones correctas.

Objetivo: Identificar y discriminar aproximación y tendencia numéricas.

Respuestas correctas: a) y b).

A continuación se presenta la tabla 6.2, que es un resumen de las respuestas de los alumnos que han seleccionado cada opción:

VI.2 Tabla 6.2. *Respuestas alumnos cuestión 1*

Apartado	Pregunta	Respuesta	Nº alumnos	%
a	Aprox 3, no Tend 3	Verdadera	18	78,26%
b	Aprox 3, Tend 2	Verdadera	19	82,6%
c	Aprox 3, No Tend 2	Falsa	3	13,04%
d	Aprox 3,Tend 3	Falsa	2	8,70%
e	Aprox 3, Tend inf	Falsa	3	13,04%

Como se aprecia en la tabla 6.2, las respuestas de los alumnos son mayoritariamente correctas (37 frente a 8 falsas) y para ver hasta qué punto entendían la opción elegida se les pidió que explicaran por qué creen que son verdaderos los apartados que había señalado en la pregunta anterior. Se reproducen íntegramente las respuestas que se obtuvieron para señalar en ellas lo más destacado, las palabras que son las claves de sus justificaciones:

A1: Porque 1,999999 ***es casi lo mismo*** *que representar el 2"*

A2: *Porque las* ***aproximaciones son mejores****, es decir, las diferencias positivas son menores.*

A3: Porque aproximar es ***Acercarse,*** *es decir, el número más cercano a esa sucesión o número; en cambio la* ***tendencia*** *puede tender a* ***cualquier*** *número sin que este se acerque a ese número"*

A4: Son correctos porque una ***tendencia*** *es la* ***aproximación*** *que se puede tener de un valor.*

A5: Porque la ***proximidad*** *puede ser* ***cualquier número*** *y la* ***tendencia*** *un número muy* ***cercano.***

A6: Son verdaderos porque la sucesión al avanzar las diferencias entre 1'999 *y* 2 *van siendo menores.*

A7: Se aproxima a tres porque al avanzar en ella las sucesivas diferencias positivas entre sus términos y 3 *son menores.* (Omite la tendencia)

A8: Porque cada vez se ***aproximan más*** *a los términos (*2 *y* 3 *en este caso) y hay* ***menor diferencia*** *(a* 2*).*

A9: Porque nunca va a llegar a ∞ pero sí que tiende.

A10: Porque cada vez la **distancia** *hacia el* 3 *es* **menor** *pero sin embargo tiende hacia* 2*.*

A11: Porque la **aproximaciones positivas son cada vez menores hacia dos***, por eso tiende a dos, y se aproxima a tres porque cada vez está más cerca.*

A12: Porque 1,999 *se aproxima a* 3 *porque* **queda menos** *para* 3 *pero no tiende a tres ya que* **tiende a 2 antes que a 3,** *si fuera 2,999 ese sí que tiende a* 3 *y se aproxima a* 3*.*

A13: Porque la **diferencia positiva entre la sucesión y el dos** *es menor que la diferencia positiva entre la sucesión y* 3*, por eso podemos decir que tiende a dos y no a tres, aunque la sucesión se aproxime a ambas.*

A14: Se aproxima a 3 *porque según avanza la sucesión, el valor que se adquiere dista menos de* 3*, en cambio no tiende a* 3 *ya que no es la mejor aproximación, la mejor aproximación es* 2*, ya que según avanza, cada vez está más cerca de dos y* **no le sobrepasa.**

A15: Se aproxima a 3 *ya que se acerca al número pero es al* 2 *al que se acerca la sucesión pero* **sin llegar al propio 2***; por lo tanto decimos que se aproxima a* 3 *y tiende a 2.*

A16: Se aproxima a tres porque el número se va acercando cada vez más a tres, y tiende a dos porque **no hay una mejor aproximación** *que la de la sucesión.*

A17: Porque la sucesión tiende a 2 pero se puede aproximar a muchos números.

A18: Son verdaderos porque (se aproxima a 3*) debido a que las diferencias de los números de la sucesión son cada vez menores, (tiende a* 2*) debido a que* ***no existe ninguna sucesión que se aproxime mejor a* 2 *y por último (no tiende a* 3*) debido a que si existen sucesión que se aproximen a* 3 *mejor que esta, por ejemplo:* 2'9, 2'99, 2'999.**

A19: Porque cada vez es más cercano a 2 **el número de la sucesión** *pero sin llegar a tocarlo, por lo tanto tiende a* 2*, y a su vez se va acercando a* 3*.*

A20: Porque nunca pasa del 2*.*

A21: Porque 1'9, 1'99, 1'999 *está más cerca de* 2*, por tanto tiende a* 2 *y se aproxima a* 3*, porque* ***está cerca del* 3*, pero no tanto como el* 2***.*

A22: Porque un número se aproxima un número cercano a él, y tiende a un número porque las diferencias positivas son menores.

A23: Porque los números que nos han planteado cada vez se acercan más al 2*,* **sin llegar a él***. Decimos que se aproxima cuando se acerca.*

A continuación, en la reflexión se hace una categorización de las respuestas y se discuten las justificaciones.

Reflexión

A modo de resumen, se presenta la siguiente *Tabla 6.3* que categoriza las respuestas de los alumnos y, a continuación, se especifican las particularidades de cada grupo:

VI.3 Tabla 6.3. *Categorización alumnado según criterios justificativos cuestión 1*

Categorías	**Nº alumnos**	**%**
G0-Confusión representación y conceptos	2	8,70%
G1-Tendencia como mejor aproximación	4	17,39%
G2-Subjetividad aproximación/tendencia	2	8,70%
G3-Focalización en el Acercamiento	12	52,17%
G3.1.-Aproximaciones mayores	5	21,74%
G3.2.-Criterios métricos	7	30,43%
G4-Intuiciones aproximación/tendencia	3	13,04%

Respecto a las respuestas justificativas del alumnado se les puede clasificar globalmente en cuatro grupos:

- *Grupo 0: Confusión de representaciones y errores conceptuales.*

Está formado por dos alumnos. Por un lado, *A1* que entiende que la aproximación 1,999999 es una representación del 2. Ya que considera que según se va avanzando en la sucesión "*es casi lo mismo que representar el* 2*"* Bien es cierto, que la fracción generatriz del decimal periódico $1.\widehat{9}$ es un número entero, pero en su razonamiento se ha quedado con un número finito de decimales. Por otro lado, *A9* al responder "*Porque nunca va a llegar a ∞ pero sí que tiende"* manifiesta doble error, infinito como valor y confusión de tendencia finita con infinita.

- *Grupo 1: Tendencia como la mejor aproximación.*

Dicha afirmación se presenta con matices en los alumnos *A8, A14, A16 y A18;* con expresiones del tipo: *se aproxima más", "es la mejor aproximación", "no hay una mejor aproximación"* y *"no existe ninguna sucesión que se aproxime mejor".*

- *Grupo 2: Criterios subjetivos respecto a la diferenciación de aproximación y tendencia.*

A12 y *A21* manifiestan que: *tiende a 2* ***antes que*** *a 3"* (tender antes a un valor que a otro, introduciendo una variable espacio-temporal), y "*están cerca del* 3*,* ***pero no tanto*** *como el* 2*"* (planteando cierta relatividad respecto a la comparativa).

- *Grupo 3: Focalización en el acercamiento.*
    - *Grupo 3.1: Aproximaciones mayores.*

Únicamente se basan en que las aproximaciones son cada vez mayores, pero no se dan cuenta que los términos de la sucesión también se aproximan cada vez más a todos los valores mayores que 2, (pero no más que cualquier aproximación fijada). En esta opción se sitúan *A3, A5, A15, A19* y *A23*, con afirmaciones del tipo: ***Acercarse", "tendencia*** *un número muy* ***cercano",*** *"se acerca pero* ***sin llegar al propio 2", "****sin llegar a tocarlo", "se acercan más al 2,* ***sin llegar a él"****.* El alumno *A3* responde incorrectamente.

- Grupo 3.2: Criterios métricos.

Incorporación de comentarios relativos a las diferencias o distancias en relación a los términos de la sucesión y la tendencia a 2. Los alumnos *A2, A6, A7, A10, A11, A13* y *A22* comparten expresiones del tipo: las *sucesivas diferencias positivas son menores", "la distancia es menor", "queda menos", "tiene menores diferencias"* o *Al avanzar las diferencias… van siendo menores".*

- *Grupo 4: Intuición sobre la diferencia entre aproximación y tendencia*

Presentan afirmaciones sin justificación *(A4, A17 y A20).*

Respecto a un análisis transversal e individualizado se ha constatado en varios grupos las siguientes interpretaciones:

- La **inalcanzabilidad** es reseñada por tres alumnos que argumentan sobre el 2 en los siguientes términos: *sin llegar a tocarlo" (A19), "sin llegar al propio 2" (A15)* o *"sin llegar a él" (A23).* Frente a otros dos que aseguran que no hay una superación, pero no niegan un posible alcance, *"no le sobrepasa" (A14)* o *"nunca pasa del 2" (A20)*. El resto de alumnos no se manifiesta respecto a este particular.
- **Errores léxicos*:*** *A13* escribe **"***diferencia positiva entre la sucesión y el dos",* en vez de las diferencias entre los términos de la sucesión, según avanza, y el *2. A19* confunde *"el número de la sucesión",* por el término de la sucesión. Por último, *A11* detalla *Aproximaciones positivas son cada vez menores hacia dos"* en vez de las diferencias positivas.
- Curiosa es la respuesta del alumno *A18* que afirma *"no existe ninguna sucesión que se* ***aproxime mejor*** *a* 2 *y, por último, (no tiende a* 3*) debido a que sí existe una sucesión que se aproxime a* 3 *mejor que esta, por ejemplo:* 2'9, 2'99, 2'999". Este alumno utiliza el modelo aportado por el ítem para construir una sucesión que tienda a *3*, y, afirma, que dicha sucesión así construida por él es la sucesión que mejor se aproxima a *3*, en lugar de indicar que son los términos de la sucesión los que mejoran cualquier aproximación (a *3* en este caso y a *2* en el caso del ítem), pero parece que no ve la posibilidad de que haya más de una sucesión que tienda a un valor, siendo la estructura de la misma el que cada término vaya creciendo en su parte decimal.

Respecto a los alumnos que seleccionan opciones incorrectas: se presentan justificaciones contradictorias, ya que algunos seleccionan opciones incompatibles a la vez. Pero tienen como nexo común, la no creencia en la unicidad de la tendencia, pudiendo una sucesión tender a más de un número, ya que relacionan únicamente la tendencia con el acercamiento. Por un lado, un pequeño sector considera que la sucesión propuesta tiende a infinito porque se tiene una aproximación de infinitos valores y, al ser creciente, según avanza la sucesión, también se está acercando al infinito y, por tanto, *"tiende hacia infinito"*. Por otro lado, para algunos alumnos la sucesión del ítem tiende a más de un valor, en concreto para ellos tiende a todos los valores a los que se aproxima y por esa razón afirman *"tiende a más infinito"*.

Por tanto, se constatan los siguientes errores:

- Consideración de la no unicidad de la tendencia.
- Toda sucesión creciente tiende a infinito.
- Toda tendencia finita de una sucesión creciente es infinita porque tiende a todos los valores a los que se aproxima.

En el ciclo de investigación del curso académico anterior no se trabajaron sucesiones por lo que no se puede establecer un análisis comparativo.

Cuestión 2. P *es un punto de la curva que se mueve libremente sobre ella, hacia* A, que *es un punto fijo y* D *es un punto arbitrario fijo y cercano a* A.

a. D *es una aproximación de* A, *pero no una tendencia a* A___
b. P *es una aproximación de* A *y una tendencia a* A__
c. *La abscisa* x *de* P *es una aproximación a la abscisa* a *de* A *y es una tendencia*___
d. *Se podría situar un punto* H *tan cerca de* A *que* P *no podría estar más cerca de* A *que* H___

Objetivo: Valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia sobre la curva.

A modo de resumen, se presenta el número de alumnos que señala cada opción, incluyendo los que no se pronuncian, y en cada caso, entre paréntesis, se muestran los porcentajes.

VI.4 Tabla 6.4. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 2*

Pregunta	**V (%)**	**F (%)**	**NC (%)**
1-D aproximación no tendencia	15 (65,22%)	4 (17,39%)	4 (17,39%)
2-P aproximación y tendencia	14 (60,87%)	5 (21,74%)	4 (17,39%)
3-Tendencia abscisas asociada	13 (56,52%)	6 (26,09 %)	4 (17,39%)

4-Tendencia como mejor aproximación	12 (52,17%)	7 (30,43%)	4 (17,39%)

Reflexión

Cuatro alumnos no contestan y otros cuatro (17.39%) han respondido incorrectamente a todas las cuestiones, frente a un elevado grupo de alumnos (65.22%) que ha comprendido que un valor fijado es una aproximación, pero no una tendencia; sólo un alumno de ellos no comprende la reversibilidad de que la tendencia también es una aproximación. Dicho alumno, junto con otro, no visualizan que dicha situación también ocurre cuando nos centramos en la tendencia asociada a las abscisas de los puntos que tienden a otro punto. Curiosamente, tres alumnos que respondieron correctamente a la primera cuestión, junto con los que fallaron en la misma, no comprenden que la tendencia mejora cualquier aproximación prefijada. Se puede concluir que este aspecto es el más complicado de comprender para cierto sector del alumnado (47,82%).

Cuestión 3. P *es un punto del eje de abscisas que se aleja hacia infinito,* A *es un punto fijo del eje y* D *es un punto cualquiera del eje fijado (próximo a* A*). Si* P *se aleja de* A *más que* D *solamente por la izquierda o solamente por la derecha.*

a. *El punto* P *del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa es menor que la de cualquier otro punto* D *prefijado__*
b. *Un punto* P *del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto* D *prefijado___*
c. *El punto* P *del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa tiende a la de cualquier otro punto* D *prefijado___*
d. *Un punto* P *del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa tiende a la de cualquier otro punto* D *prefijado___*

Objetivo: Valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia en el eje XX’

Análisis en función de la elección de cada opción correspondiente por parte del alumnado, siendo algunas verdaderas y otras falsas:

VI.5 Tabla 6.5. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 3*

Apdo.	Pregunta	Respuesta	Nº	%
a	Tend $-\infty$ si abscisa menor que la de $\forall$ pto	Verdadera	15	65,22%
b	Tend $+\infty$ si abscisa mayor que la de $\forall$ pto	Verdadera	16	69,57%
c	Tend $-\infty$ si abscisa tiende a la de $\forall$ pto	Falsa	4	17,39%
d	Tend $+\infty$ si abscisa tiende a la de $\forall$ pto	Falsa	3	13,04%

Reflexión

Se puede afirmar que una gran mayoría de los alumnos, casi las tres cuartas partes del alumnado, comprenden que un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto *A* prefijado. Dichos alumnos, salvo uno, son capaces de ver la correspondiente analogía con el infinito negativo. Por tanto, la comprensión del infinito negativo puede presentar más dificultades en dicho alumnado, esta interpretación ya surgió en la experimentación realizada en el curso anterior.

Respecto a las dos opciones falsas, sólo cuatro alumnos eligen la opción incorrecta relativa a que un punto *E* del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa tiende a cualquier punto prefijado y, tres de ellos, también seleccionan la análoga para infinito positivo. Dichos alumnos (alrededor del 20%) no diferencian entre infinito positivo y negativo, simplemente asocian la tendencia infinita con el alejamiento por la derecha o por la izquierda, hacia cualquier punto. Por otro lado, tres alumnos no seleccionan ninguna opción.

Cuestión 4. Elige la frase o frases que consideren verdaderas y justifica tu respuesta: Un punto de la gráfica $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *tiende a infinito cuando ocurre una de estas opciones:*

a) x *tiende a ± infinito e* y *tiende a un número fijo.*
b) y *tiende a ± infinito y* x *tiende a un número fijo.*
c) x *e* y *tienden a infinito.*
d) x *e* y *superan a cualquier número fijo.*

Objetivo: Valorar la caracterización de tendencia infinita sobre la gráfica de una función.

Todas las opciones propuestas son correctas, a continuación se muestra la tabla 6.6 que muestra al alumnado, según sus elecciones, atendiendo a un estudio global de cada ítem:

VI.6 Tabla 6.6. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 4*

Apdo.	**Elección correcta**	**Nº alumnos**	**%**
a	x tiende a ± ∞ e y tiende a un número fijo	5	21,74%
b	y tiende a ±∞ y x tiende a un número fijo	6	26,09%
c	x e y tienden a ∞	15	65,22%
d	x e y superan a cualquier número fijo.	7	30,43%

De las 4 opciones que se presenta al alumnado, hay $2^4 = 16$ combinaciones posibles. De dichas posibilidades, sólo se han presentado 8, que se presentan a continuación (Tabla 6.7.), con el número de alumnos que las han seleccionado y el porcentaje que representa:

VI.7 Tabla 6.7. *Clasificación respuestas alumnado por combinaciones cuestión 4*

Opciones	**Nº alumnos**	**%**
b	1	4,35%
c	7	30,43%
d	1	4,35%
a-b	1	4,35%
c-d	4	17,39%
a-b-c	2	8,70%
a-b-c-d	2	8,70%
Ningún apartado	5	21,74%

Reflexión

Estos resultados concuerdan con la anterior cuestión, ya que la mayoría de los alumnos (65,22%) entienden la tendencia infinita de un punto como la tendencia a infinito de sus dos coordenadas, seguida de la idea de la superación de cualquier valor fijo por parte de las coordenadas del punto de la gráfica. El porcentaje de alumnos que comprenden que también se tiene una tendencia infinita en un punto cuando una de las variables tiende a un valor fijo y la otra a $\pm\infty$ se reduce considerablemente, estando cercano a la cuarta parte de los mismos, siendo ligeramente superior los alumnos que lo consideran cuando tienda a infinito la variable y.

Reseñable es que una tercera parte del alumnado valida sólo la opción c) relativa a la tendencia infinita de x e y, alrededor del 18% señala la combinación c)-d) incidiendo en lo anterior, pero con la introducción de la idea de infinito como superación de cualquier valor. Otros dos alumnos aceptan todas las opciones salvo dicha última opción d) de superación y, solamente dos alumnos señalan todas las opciones correctas. La comprensión y aceptación de todas las posibilidades es clave para la comprensión de los comportamientos asintóticos que se explican posteriormente; siendo alcanzada dicha situación por alrededor de una décima parte del alumnado.

Sólo 4 alumnos señalan las dos opciones equivalentes (c y d), aunque en todas ellas haya una tendencia infinita. Además, las dos primeras señalan una tendencia asintótica, mientras que en las dos últimas la tendencia es infinita pero no tiene por qué ser asintótica. Parecería lógico, que los alumnos señalaran estas agrupaciones o todas, pero no es así, y otra vez se confirma que la superación de cualquier valor por cualquiera de las variables equivale a una tendencia infinita no está totalmente interiorizado en el alumnado.

Cuestión 5. La gráfica de la función tiene un comportamiento asintótico (La función tiene una asíntota) cuando:

a) *Existe una recta que no la corta.*
b) *La gráfica de la curva se aproxima a la gráfica de una recta cuando* $x \to \pm\infty$ *o* $y \to \pm\infty$.
c) *La gráfica de la curva tiende a la gráfica de una recta cuando* $x \to \pm\infty$ *o* $y \to \pm\infty$.
d) *Un punto* P(x,y) *arbitrario de la curva cuando* $x \to \pm\infty$ *o cuando* $y \to \pm\infty$ *mejora la aproximación de cualquier punto prefijado de la curva a la recta que es la asíntota.*

Objetivo: Valorar la identificación del comportamiento asintótico.

Análisis en función de la elección de cada opción correspondiente por parte del alumnado, siendo algunas verdaderas y otras falsas:

VI.8 Tabla 6.8. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 5*

Apdo.	Pregunta	Respuesta	Nº	%
a	Recta que no corta f(x)	Falsa	7	30,43%
b	Curva próxima a una recta $x \to \pm\infty$ o $y \to \pm\infty$	Falsa	6	26,09%
c	Curva tiende a una recta $x \to \pm\infty$ o $y \to \pm\infty$	Verdadera	7	30,43%
d	Mejora la aproximación $x \to \pm\infty$ o $y \to \pm\infty$	Verdadera	11	47,83%

Reflexión

Prácticamente una tercera parte del alumnado ha seleccionado las dos opciones correctas. Además, alrededor de un 17% más comprende el comportamiento asintótico como que al alejarse un punto de la curva a infinito éste mejora la aproximación a la recta de cualquier otro punto de la curva a la recta prefijada. Algo menos de las tres cuartas partes del alumnado comprende que el comportamiento asintótico no sólo es una aproximación y que, el hecho de que una recta no corte a la curva, no implica comportamiento asintótico.

Complementariamente, algo más de una cuarta parte del alumnado no discrimina entre que una curva se aproxime o tienda a una recta, por lo que valida que se tenga un comportamiento asintótico cuando la gráfica de la curva se aproxima a la gráfica de la recta. Dichos alumnos, y uno más, también aseguran, erróneamente, que la tendencia asintótica se tiene si existe una recta que no corta a la curva, focalizando en ello su atención, no siendo ésto lo más relevante en la tendencia asintótica. Cinco alumnos (21,74%) no seleccionan ninguna opción.

A continuación se presentan las cuestiones 6, 7 y 8; y posteriormente se analizarán conjuntamente.

Cuestión 6. Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $y = f(x)$ *con una* AH, $P(x, y)$ *es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito* $(x \to +\infty, x \to -\infty)$.

Gráfico 1. Un punto *Q* de la asíntota, con la misma abscisa que *P*, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian las diferencias entre las ordenadas de *P* y de *Q*

Gráfico 3. Se aprecia como la ordenada de *P* tiende a la ordenada de la recta $y = k$

Selecciona las opciones que consideres correctas:

a) *La* AH *tiene ecuación* $y = k$, *siendo* k *cualquier constante.*
b) *Entre la curva cuando* $x \to \pm\infty$ *y la asíntota* $y = k$ *(que no corta a la curva) hay más rectas horizontales.*
c) *La curva no puede cortar a la* AH.
d) *Entre la* AH *(que no corta a la curva) y la curva no hay más rectas horizontales cuando* $x \to \pm\infty$. *La curva y la asíntota se pueden cortar y la* AH *tiene ecuación* $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Objetivo: Valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización de la *AH*.

Cuestión 7. Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $y = f(x)$ *con una* AV, $P(x, y)$ *es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito* $(y \to +\infty, y \to -\infty)$.

Gráfico 1. Un punto *Q* de la asíntota, con la misma ordenada que *P*, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian las diferencias entre las abscisas de *P* y de *Q*

Gráfico 3. Se aprecia como la abscisa de P tiende a la abscisa de la recta $x = k$

Selecciona las opciones que consideres correctas:

a) *La* AV *tiene ecuación* $x = k$, *siendo* k *cualquier constante*
b) *Entre la recta* $x = k$ *y la curva hay más rectas verticales cuando* $x \to k$
c) *La curva no puede cortar a la* AV
d) *Entre la* AV *y la curva no hay más rectas verticales, la curva y la* AV *tiene ecuación* $x = k$, *con* k *la constante para la que* $\lim_{x\to k^-} f(x) = \pm\infty$ *y/o* $\lim_{x\to k^+} f(x) = \pm\infty$.

Objetivo: Valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización de AV.

Cuestión 8. Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *con una* AO, $\mathrm{P(x, y)}$ *es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito* ($\mathrm{x} \to \pm\infty$ e $\mathrm{y} \to \pm\infty$).

Gráfico 1. Un punto *Q*, intersección de la AO con la perpendicular a ésta por *P*, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian el segmento determinado por *P* y *Q* (de extremos *P* y *Q*)

Gráfico 3. Se aprecia que la *AO* tiene ecuación $y = px + q$ con $p = lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $q = lim_{x\to\infty}(f(x) - px)$.

Selecciona las opciones que consideres correctas:

- *a) La asíntota oblicua tiene ecuación* $\mathrm{y} = \mathrm{kx} + \mathrm{h}$, *siendo* h *y* k ($\mathrm{k} \neq 0$) *constantes cualquiera.*
- *b) Entre la curva y la* AO *puede haber otras rectas oblicuas más cercanas a la curva cuando* $\mathrm{x} \to \pm\infty$.
- *c) La curva no puede cortar a la asíntota oblicua.*
- d) *Entre la asíntota oblicua y la curva no hay más rectas oblicuas, la curva y la asíntota se pueden cortar o tocar y la asíntota oblicua tiene ecuación* $\mathrm{y} = \mathrm{kx} + \mathrm{h}$.

Objetivo: Valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización la *AO*.

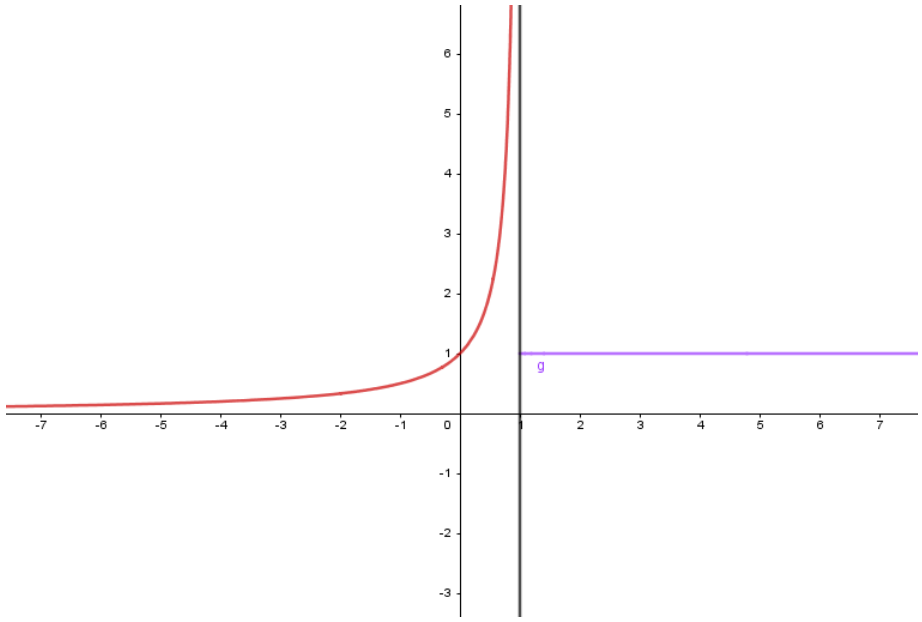
A continuación se presenta de forma conjunta (Tabla 6.9), en términos porcentuales, el alumnado que ha seleccionado las opciones correctas de las que se presentaron:

VI.9 Tabla 6.9. *Clasificación respuestas del alumnado respecto a las asíntotas*

Elección correcta	AH	AV	AO
No existencia de rectas entre la asíntota y la curva	91,30%	82,61%	26,09%
Corte entre curva y asíntota	69,57%	26,09%	56,52%
Expresión analítica de la asíntota	43,48%	43,48%	43,48%
Definición global	43,48%	43,48%	26,09%

A continuación, se presenta un ejemplo de función definida a trozos, dónde se cumple que la *AV* corta a la función, ya que es una posibilidad que no contempla la mayoría del alumnado.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, x < 1 \\ 2, \quad x \geq 1 \end{cases}$$



VI.25 *Figura 6.25.* Gráfica de la función

Reflexión

Alrededor de la mitad del alumnado considera que la curva puede ser cortada por la asíntota oblicua, ascendiendo hasta casi el 70% el porcentaje que ofrece la posibilidad para la AH y alrededor de una cuarta parte lo considera posible para la *AV*.

Prácticamente cercano a la mitad del alumnado identifica y relaciona la expresión algebraica genérica de cada tipo de asíntota; y se mantiene dicho porcentaje considerando la opción más completa que determina las propiedades de las asíntotas horizontales y verticales. En el caso de las oblicuas, se reduce alrededor de la cuarta parte de los mismos.

En general, casi la totalidad del alumnado es capaz de abstraer la propiedad de que no puede existir una recta más próxima a la curva que la propia asíntota, para el caso de la horizontal, pero van disminuyendo ligeramente los que lo consideran también para la vertical, llegando al 26% el porcentaje que lo visualizan para la asíntota oblicua. Se percibe un tratamiento diferenciado de la AO, respecto al resto de asíntotas, restringiéndoles condiciones y perdiendo la caracterización asintótica de la misma.

Cuestión 10. Explica brevemente los siguientes apartados:

Objetivo: Valorar las interpretaciones (concepciones) de los alumnos acerca de las asíntotas.

a. *Escribe un ejemplo de una tendencia numérica a* $x = 3$.
b. *Escribe lo que creas que es una* AH.
c. *Escribe lo que creas que es una* AV.

d. *Escribe por qué crees que todas las funciones tienen alguna asíntota o por qué no.*
e. *Escribe lo que creas que es una asíntota oblicua.*
f. *Escribe la razón de por qué* $y = px^2 + 3\ (p \neq 0)$ *puede ser o no ser la ecuación de una asíntota.*
g. *Escribe por qué crees, o por qué no,* $\mathrm{y = k}$ *es la ecuación de una AV*
h. *Escribe por qué una asíntota de ecuación* $\mathrm{y = px + q}$ *nunca puede ser horizontal o por qué sí*
i. *Escribe cuántas asíntotas verticales, horizontales y oblicuas puede tener una función.*

Se hace un análisis por apartados y para facilitar la lectura se vuelven a reproducir todos ellos en cursiva precediendo al análisis correspondiente.

a. *Escribe un ejemplo de una tendencia numérica a* $\mathrm{x = 3}$.

La tabla siguiente presenta la clasificación de las respuestas de los alumnos

VI.10 Tabla 6.10. *Respuestas de los alumnos cuestión 10 a)*

Tendencia numérica $\mathbf{x = 3}$	**Nº alumnos**	**%**
Sucesión numérica	7	30,43%
Aproximación numérica	5	21,74%
AV en $\mathrm{x = 3}$	5	21,74%
AH en $\mathrm{y = 3}$	2	8,70%
$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$	1	4,35%
Situación real	1	4,35%
No responden	2	8,70%

Se agrupan las respuestas según la siguiente clasificación:

- *Sucesión y aproximación numérica:* Hay muchos alumnos, 11 en total, que responden utilizando la sucesión *2.9, 2.99, 2.999,…*, aunque no consideran el mismo número como primer término. Además, unos utilizan tendencias y otros, los menos, aproximaciones considerando un único término de la sucesión. Ejemplos:

  A3.- 2.9, 2.99, 2.999,…

  A4.- 2; 2,9; 2,99; 2,999...

  A5.- 2,999”

  A17.- 2,99999”

El alumno, *A20*, escribe un término de una posible sucesión creciente y otro término de otra posible sucesión decreciente, y se puede interpretar que este alumno piensa que ambas tienden a 3.

A20.- 2,9… o 3,1…”

- *Conexión con comportamientos asintóticos:*
  - Relación de esta tendencia con la existencia de una *AV* en $x = 3$, presente en 3 alumnos:

    A14.- Cuando una función tiende a x=3 *significa que hay una* AV *en* x=3.

    Al expresar la tendencia de una función a una recta, no ha interiorizado la importancia de la tendencia de las dos variables. Se trata de un error de interpretación funcional, ya que considera que es la función o la gráfica la que se mueve por el plano tendiendo a la gráfica de la recta en este caso.

    A7.- $\frac{1}{\mathrm{x}-3}$ *Quedando el punto* 3 *sin imagen y, por tanto, es una asíntota.*

    A21.- AV *en* $x = 3$*, la función no tiene imagen en ese valor de* x.

    Error de ambos alumnos al considerar que un valor que no pertenece al dominio es condición suficiente para asegura la existencia de asíntota vertical, aunque en el primer caso, *A7*, la función sí que presentaría una *AV*.

    A8.- No entiendo muy bien la pregunta y no sé si lo que voy a poner es lo que se pide. $\frac{1}{x-3}$”.

    Manifiesta dificultades en comprender la pregunta y su duda significa la posibilidad de la existencia de otras opciones o que no tiene la certeza de responder a lo pedido.

    A12.- $\mathrm{x} = 3$ *tiende a infinito.*

    Aparentemente no tiene sentido, pero subyace la tendencia infinita de la variable *y*.

  - Relación oculta o subyacente con la *AH* $y = 3$, aunque no hacen ninguna referencia a la misma:

    A15.- $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ ”

    A16.- $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2}$ ”

  - Tendencia numérica como límite de una función cuando la variable x tiende hacia *3* (no se especifican límites laterales):

A6.- $\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x-1}$ ”

- Relación con una situación de la vida real:

  A11.- Por ejemplo, cuando se llena una piscina hasta el máximo, que es hasta la franja 3*.*

  A9 y *A13.- No responden.*

Se ha producido gran cantidad de respuestas diversas, casi una tercera parte del alumnado responde correctamente, concretando la misma sucesión numérica creciente, análoga a la presentada en la sesión de docencia, cuyo límite es *3*. Cinco alumnos optan por responder con un valor numérico próximo a *3*: cuatro de ellos con una aproximación por la izquierda, dando valores menores que *3*, y el quinto, da dos valores aproximados, uno menor y otro mayor que *3,* simétricos y diferenciándose una décima respecto al 3.

Otros cinco alumnos lo relacionan con la existencia de una AV $(x = 3)$, asociando la tendencia de la variable x hacia un valor finito como es *3*, necesariamente con la tendencia infinita de la variable y, frente a dos alumnos que presentan dos funciones racionales diferentes que presentan una *AH*, ya que*,* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$. Otro alumno presenta la tendencia como límite de una función cuando la variable x tiende hacia *3*, $\lim_{x\to 3} f(x)$ (sin especificar límites laterales) y, por último, un alumno presenta una situación real que interpreta como un máximo valor alcanzable.

Reflexión

Mejoría en los resultados de la pregunta, ya que esta cuestión en la prueba inicial no fue contestada correctamente por ningún alumno.

Limitación de la tendencia a una aproximación, ya que los alumnos simplemente fijan un valor o valores numéricos próximos, por defecto y/o exceso, al valor fijado.

Conexión errónea de tendencia con la presencia de *AH* y/o *AV*.

Confusiones entre el concepto de tendencia numérica y los diferentes procedimientos de cálculo de límites de funciones, ya que se han presentado en las respuestas diferentes expresiones funcionales $f(x)$, que tienen en común la relación con el estudio del $\lim_{x\to a} f(x) = b$, con diferentes posibilidades de variación de a y de b en dicha expresión, que se presentan a continuación:

- $a = 3$ y $\forall b \in \mathbb{R}$ interpretando los valores de b pertenecientes a un intervalo acotado, tratándose por tanto de una tendencia finita, y además apareciendo explícitamente la expresión $\lim_{x\to 3} f(x)$.
- $a = 3$ y $b = \pm\infty$, posibilitando la presencia de la AV $x = 3$, en la $f(x)$ presentada.

- $a = \pm\infty$ y $b = 3$, posibilitando la presencia de la AH $y = 3$, en la $f(x)$ presentada.

Sin duda, estas respuestas se deben a una priorización del cálculo de límites de alguna de las variables frente al concepto de tendencias.

b. *Escribe lo que creas que es una Asíntota Horizontal.*

Aunque es muy difícil la interpretación de las respuestas y, por consiguiente, su clasificación, se consideran criterios de afinidad teniendo en cuenta el mayor o menor acercamiento al concepto, según se resume en la siguiente tabla:

VI.11 Tabla 6.11. *Respuestas alumnos respecto a AH*

¿Qué es AH?	**Nº alumnos**	**%**
Respuestas correctas	4	17,39%
Respuestas incompletas	8	34,78%
Respuestas incorrectas	11	47,83%

Se procede a un análisis más pormenorizado de cada grupo.

Respuestas correctas:

Se pueden agrupar en dos grupos en relación a la coincidencia de sus centros de interés:

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia, comportamiento análogo en el infinito de curva y recta e importancia de que la curva toque/corte o no a la *AH*:

> *A4: Es una recta* $y = k$ *y la curva respecto a ésta tiende a infinito, no se tocan, cada vez se van acercando más la curva a la* AH *(aunque puede cortar).*

Se presenta un error léxico o de precisión al asegurar que *"la curva respecto (de la recta) tiende a infinito"*. Este alumno asegura que curva y asíntota *"no se tocan… aunque puede cortar"* interpreta tocar con solapar o coincidir y el corte como algo puntual o discreto, dónde la curva atraviesa a la asíntota. La declaración de este alumno podría interpretarse en el sentido de que la asíntota es tangente a la curva en el infinito.

> *A18: Una* AH *es una recta* $y = k$ *cuando las ordenadas* (y) *de un punto de una curva tienden a* k *a medida que* x *tiende a + infinito o –infinito.*

Valoración positiva de este alumno al introducir el estudio de las dos variables.

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia y relación métrica (distancia que tiende a cero):

A9: Una AH *es una recta horizontal a la que se va* ***acercando*** *la función, cuando* x *tiende a infinito. Por lo que la* ***distancia*** *entre la asíntota y la función tiende a* 0*.*

A10: Una AH *es una recta paralela al eje de abscisas* $(y = k)$ *a la que tiende una determinada función, es decir, cuyo comportamiento se parece y la* ***distancia*** *que las separa en la gráfica tiende a cero.*

Interesante introducción del concepto *"tendencia de una función a una recta"* y su definición.

Respuestas parcialmente correctas:

Se trata de 8 alumnos que se van acercando a la comprensión del concepto, pero no completan todos los aspectos anteriormente citados para incorporarlos como respuestas correctas. A continuación, se presentan dichas aportaciones:

A2: Ecuación de una recta a la cual se la va a ***aproximar*** *la función* ***sin tocarla****. Tiene ecuación* $y = k$.

Aparece una denominación inventada por el alumno, Aproximación de una función a una ecuación" y no especifica tendencias.

A7: Es la línea imaginaria paralela al eje x *a la que* ***tiende una función****.*

No especifica expresión algebraica ni comportamiento en el infinito.

A8: Es una recta imaginaria con $y = k$ *a la que tiende una función en* $x = \pm\infty$**.**

Análogos al alumno *A10*, introducen el concepto *"tendencia de una función a una línea o recta imaginaria"*, pero sin concretar su definición. El último considera a infinito como valor alcanzable y asegura, además, la tendencia asintótica horizontal en las dos ramas infinitas.

A12: La recta paralela al eje x *que* ***hace*** *que la rama de dicha función* ***tienda a infinito.***

La recta impone a la rama de la función que tienda a infinito, cuando en realidad lo que tiende a infinito es la variable x. Introduce una idea de acotación de la función por la posición de la *AH*.

A19: Es una recta horizontal que ***corta a una función*** *tendiendo a infinito o a menos infinito.*

Quizás este alumno quería decir que puede cortar, no que obligatoriamente corta. No especifica que la tendencia infinita es de la variable x.

A20: Cuando una función, si x *tiene a infinito da un valor exacto de manera que* $y = k$.

Importancia del cálculo del límite por encima de la comprensión.

> *A21: La rama de dicha función tiende a infinito. Nos indica* ***a que*** *tiende en el infinito.*

Cuando expresa que la rama tiende a infinito debería concretar que la tendencia infinita es relativa a la variable x, y que la *AH "nos indica a qué tiende en el infinito"*, se refiere a que comportamiento tiene la variable y cuando x tiende a infinito. Se trata de un caso claro de comprensión pero mala expresividad.

> *A22: Comportamiento de algunas funciones cuando* ***la gráfica de la curva tiende a la gráfica de una recta*** *en* $\mathrm{x} \to \pm\infty$ *o* $\mathrm{y} \to \pm\infty$, *su ecuación es* $\mathrm{y} = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{f(x)} = \mathrm{k}$.

Aunque presenta una expresión algebraica correcta e idea de tendencia, abre la posibilidad de que $y \to \pm\infty$, incompatible con la *AH*.

Respuestas incorrectas:

El resto de alumnos (11) muestra confusiones y errores que se pueden agrupar en 4 grupos en relación a conceptos implicados con: geometría (4), asíntota/función (2), estrategias de cálculo (2) e incoherencias (3).

- Geometría: Confusión de conceptos geométricos y analíticos básicos relativo al estudio de funciones,:
  - *"constante k"* con función constante o $y = k$:

    A1: Una constante k *que corta al eje* y.

    A5: Una recta que corta el eje Y *una constante.*

  - Confusión de los conceptos: punto, recta y valor.
    A17: Un punto en una función en la que no hay una imagen para un valor de x. *Es una situación en una gráfica en la que no hay valor de* "y" *para un valor de* "x".

Un punto de la gráfica de una función, está determinado por los valores de sus coordenadas, por tanto fijado x se asigna un único valor $y = f(x)$. Este alumno interpreta la asíntota como "*punto en una función"*, cumpliendo que x no pertenece al dominio de $f(x)$, lo que contradice la declaración anterior. Se acumulan graves errores conceptuales.

> *A15: Un punto con el valor* $\mathrm{y} = \mathrm{k}$ *que tiende a infinito.*

No especifica si el punto es de la curva o de la asíntota, compartiendo todos los puntos de ésta última que su ordenada es $y = k$. No aporta información de la relación entre la función y la asíntota.

- Asíntota/Función: Error de considerar la asíntota a la rama de la gráfica de la función con tendencia asintótica horizontal:

  A13: Una AH *sigue a una* ***recta en el eje*** **Y** *y la asíntota se* ***acerca*** *cada vez más a la recta.*

En ítems anteriores ya apareció la denominación *"recta en el eje y"* como recta paralela al eje de abscisas.

  A11: Son las ***ramas de una función*** *que va horizontalmente.*

- Estrategias de cálculo: Priorización del cálculo de límites sobre la comprensión del concepto, a modo de "receta", apareciendo, además, diferentes errores:

  A3: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \to$ *tiende a* $\pm\infty$ *.de una función"*

En este caso no habría tendencia asintótica, sería una rama infinita.

  A23: Una AH *es el resultado de calcular el valor de nuestra función cuando tiende a infinito y menos infinito.*

Asíntota como valor y no especifica que variable es la que tiende a infinito.

- Incoherencias: Combinación sin sentido de límites, tendencia y recorrido. No discriminación entre tendencias asintóticas y ramas infinitas.

  A6: Es cuando se dan valores al eje de las x.

Este alumno describe una discretización del eje real y no indica si en esos valores se podría apreciar una tendencia infinita de la variable independiente, ni finita de la variable dependiente.

  A14: Puntos de "y" *a los que* ***tiende una ecuación***.

Confusión de los conceptos función y ecuación, pero además expresa una tendencia carente de sentido.

  A16: Recta horizontal a la que tiende otra, puede tender a más o menos infinito, se calcula haciendo los límites laterales.

Denomina límites laterales al estudio de los mismos cuando x tiende a más o menos infinito.

Reflexión

Alrededor del 18% del alumnado responde correctamente compartiendo la expresión algebraica correcta y la idea de aproximación/tendencia. Lo que varió entre ellos fue la posibilidad de que la curva toque/corte o no a la *AH* y la importancia de la relación métrica relativa a que la distancia entre la asíntota y la curva tiende a cero. Un alumno presenta un error léxico o de precisión afirmando que *"la curva respecto de la recta* *tiende a infinito"* y, otro alumno, introduce el concepto de *"tendencia de una función a una recta"* y su definición personal en relación a comportamientos parecidos y que la distancia de separación entre las gráficas tiende a cero; sin concretar estudio de las variables.

Superior es el porcentaje de los alumnos que responden correcto parcialmente (35%), aunque tienen cierto grado de comprensión, les perjudica su mala expresividad. En dichas respuestas parcialmente correctas, se han constatado los siguientes errores:

- Errores léxicos: *tendencia de una función a otra función",* en vez de la tendencia de la gráfica de una función a la gráfica de otra, especificando el comportamiento de las variables implicadas o expresiones del tipo *"la recta hace que la rama tienda a infinito"*, omitiendo el estudio de las tendencias conjuntas de x e y.
- Error de considerar el infinito como valor alcanzable.
- Asegurar la tendencia asintótica horizontal en las dos ramas infinitas.
- Obligatoriedad de cortar la *AH* a la curva.
- Imponer la importancia del cálculo del límite por encima de la comprensión del concepto de la *AH*.
- Tratamiento compacto y homogéneo de las dos variables x e y imponiendo condiciones análogas en ambas, no posibilitando diferentes combinaciones de tendencias para dichas variables.

Por último, casi la mitad del alumnado contesta incorrectamente, y se perciben los siguientes errores relativos a:

- Confusión de conceptos geométricos y analíticos básicos relativos al estudio de funciones.
- Consideración de asíntota a la rama de la gráfica de la función en vez de la recta.
- Priorización del cálculo de límites sobre la comprensión del concepto.
- Asignación de asíntota como valor, sin especificar que variable es la que tiende a infinito.
- Combinación sin sentido de límites, tendencia y recorrido.
- No discriminación entre tendencia asintótica y ramas infinitas.
- Consideración de que el dominio de la función que presenta una *AH* es necesariamente toda la recta real.
- Interpretación simétrica del comportamiento de la *AH* cuando la variable x tiende a infinito positivo y negativo.
- Aparición de errores léxicos: *tendencia de una ecuación"* y *"recta que tiende a otra recta"*.
- Denominación de límites laterales a los límites infinitos.

c. *Escribe lo que creas que es una Asíntota Vertical.*

Se clasifican las respuestas de forma análoga a como se hizo con la *AH*. Para ello, se tienen en cuenta las incorrecciones que cometen los alumnos y esto, nos lleva a considerar los tres grupos, según se resume en la siguiente tabla:

VI.12 Tabla 6.12. *Respuestas alumnos respecto a AV*

¿Qué es AV?	**Nº alumnos**	**%**
Respuestas correctas	4	17,39%
Respuestas incompletas	8	34,78%
Respuestas incorrectas	11	47,83%

Se procede a un análisis más pormenorizado de cada grupo.

Respuestas correctas:

Análogamente, se pueden agrupar en dos grupos en relación a la coincidencia de sus centros de interés:

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia y la curva no corta a la *AV*:

  A4: Una AV *tiene como ecuación* x = k *y la curva nunca le podrá cortar.*

  A9: Es una recta vertical a la que ***se acerca*** *la función sin llegar nunca a cortarla.*

Este alumno impuso condiciones métricas a la *AH* y no se las impone a la *AV*.

  A18: Una AV *es una recta* x = k *cuando las abscisas* (x) *de un punto de una curva tienden a* k *a medida que* y *tiende a +infinito o – infinito".*

Como en el caso de *AH*, este alumno tiene una correcta y globalizada visión de la *AV* ya que impone condiciones a las dos variables.

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia y **relación métrica** (distancia tiende a cero):

  A10: Una AV *es una recta paralela al eje de ordenadas* (x = k) *a la que* ***tiende una determinada función****, es decir, cuyo* ***comportamiento*** *se parece y la* ***distancia*** *que las separa en la gráfica tiende a cero. Además* k *no pertenece al dominio de la función.*

  Este alumno continúa con su concepto personalizado de *"tendencia de una función a una recta"* en este caso a la *AV*.

Respuestas parcialmente correctas

Se trata de los mismos 8 alumnos clasificados para la *AH* que se van acercando a la comprensión del concepto, pero no completan todos los aspectos anteriormente citados para poderlos incorporar como respuestas correctas. A continuación, se presentan dichas aportaciones:

> *A2: Igual que* AH*, pero con ecuación* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$.

> *A7: Es una recta imaginaria paralela al eje de ordenadas* ***en el origen*** *y* ***a la que tiende una función.***

Sólo se da la posibilidad de que la *AV* sea el propio eje de ordenadas.

> *A8: Es una recta imaginaria con* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *a la que tiende una función en* $\mathrm{y} = \pm\infty$**.**

Asegura una tendencia de la función hacia la recta en ambos infinitos, considerando a éstos como valores alcanzables para la variable y. Tampoco especifica lateralidad y, por tanto, erróneamente da a entender que la función puede tender a $\pm\infty$ por un lateral.

> *A12: Recta vertical a la cual la función se va* ***acercando indefinidamente*** *sin llegar nunca a cortarla.*

El adverbio indefinidamente no fue utilizado en las sesiones de docencia, pero el alumno lo incorpora para indicar un acercamiento asintótico.

> *A19: Es una recta vertical que corta la función tendiendo a infinito o a menos infinito"*

Toda recta tiene tendencia infinita positiva y negativa, al menos en una de las dos variables, y este alumno afirma que la recta vertical tiende a infinito o menos infinito. Dota a la recta de más importancia y actividad que a la propia función, ya que ella es la que tiende a más infinito o a menos infinito y, además, asegura que corta a la función, no especificando el comportamiento de esta última.

> *A20: Cuando* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *y* k *sea un valor de* x *que no pertenece al domino de la función.*

La situación que propone se cumple para funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo k uno de los posibles valores que anulan al denominador. Al igual que sucedió en el estudio de la AH, se da más importancia al cálculo del valor k por encima de la comprensión.

A21: Una AV *es aquella recta que corta el eje* y*, y puede tender a una recta (función).*

Si la *AV* corta al propio eje *y*, deben coincidir ambas rectas, coincidiendo con el razonamiento del alumno *A7*.

> *A22: Asíntota es la que* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *(*k *cualquier cte.) e* $\mathrm{y} = \pm\infty$*, no puede ser cortada por* f(x).

> *A22: La recta paralela al eje* x *que* ***hace*** *que la rama de dicha función* ***tienda a infinito.***

La recta impone a la rama de la función que tienda a infinito, cuando en realidad lo que tiende a infinito es la variable y.

> *A19: Es una recta vertical que* ***corta a una función*** *tendiendo a infinito o a menos infinito.*

Quizás este alumno quería decir que puede cortar, no que obligatoriamente corta. No especifica que la tendencia infinita es de la variable y.

> *A20: Cuando* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *, y* k *sea un valor de* x *que no pertenece al domino de la función".*

La situación que propone se cumple para funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo k uno de los posibles valores que anulan al denominador. Al igual que para *AH*, se da más importancia al cálculo del valor *56+*por encima de la comprensión.

> *A21: Una* AV *es aquella recta que corta el eje* y, *y puede tender a una recta (función).*

Si la *AV* corta al propio eje *y*, deben coincidir ambas rectas, hecho que coincide con la respuesta del alumno *A7*.

> *A22: Asíntota en la que* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *(*k *cualquier cte.) e* $\mathrm{y} = \pm\infty$*, no puede ser cortada por* f(x).

Respuestas incorrectas:

El resto de alumnos (11) muestra confusiones y errores que se pueden agrupar en 4 grupos en relación a conceptos implicados con: geometría (4), asíntota/función (2), estrategias de cálculo (2) e incoherencias (3).

- Geometría: Confusión de conceptos geométricos y analíticos básicos relativos al estudio de funciones, por ejemplo:
  - *"constante* k*"* con función constante, o $x = k$:

    A1: Una constante que corta al eje x.

    A5: Recta paralela a eje Y*, y* K *es donde la función no existe.*

  Focalización en el valor que no pertenece al dominio, en vez de la recta.

  - Confusión de los conceptos: punto, recta y valor.

    A17: Un ***punto*** *en una función en la que no hay una imagen para un valor de* y*, es decir, no hay un valor de* **"**x**"** *para un valor de* "y"**.**

Un "*punto en una función"*, entendiendo que se refiere a un punto de la gráfica, está determinado por un valor de x y su imagen $f(x) = y$. Al afirmar que *"no hay una imagen para un valor de* y**"**, en realidad hace referencia a la contraimagen. Este alumno interpreta la asíntota con un punto de la función cumpliendo que y no pertenece al recorrido de $f(x)$, acumulándose graves errores conceptuales.

- Confusión punto con recta

  A15: Un punto con el valor $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *que tiende a infinito.*

Los infinitos puntos de la *AV* comparten que $x = k$, pero este alumno concreta en un punto; tampoco aporta información de la relación entre la función y la asíntota.

- Asíntota/Función: Error de considerar la asíntota como la rama de la gráfica de la función con tendencia asintótica vertical:

  A13: Una AV *sigue a una recta en el eje* x *y la asíntota se acerca cada vez más a la recta"*

  A11: Una rama que va verticalmente "

- Estrategias de cálculo: Priorización del cálculo de límites sobre la comprensión del concepto, a modo de receta:

  A3:" $\lim_{x \to a} f(x)$ → *tiende a un punto* → *coincide con el dominio.*

Aparece una combinación sin sentido de límite, tendencia y dominio.

A16: Recta a la que tiende verticalmente una función cuando se calcula el límite, sin llegar a cortarla.

- Incoherencias:

  A6: Es cuando se dan valores al eje de las y.

Interpreta que en la *AV* los valores de la variable *y* pueden tender a infinito positivo y negativo. Por ello, expresa que se dan valores al eje de las *y*, entendiendo que el recorrido de la función podría ser toda la recta real.

A14: Puntos de "x" *a los que tiende una función.*

A23: Resultado de calcular valor de la función cuando tiende a valores que la hacen cero.

Reflexión sobre *AV*

Hay paralelismo entre esta pregunta y la correspondiente a la *AH*, se mantienen los 4 alumnos que responden correctamente compartiendo la expresión algebraica correcta y la idea de aproximación/tendencia, llegando uno de ellos a añadir *"Igual que* AH*"* y se pierde mayoritariamente la imposición métrica de que la distancia entre la asíntota y la curva tienda a cero, siendo manifestada por un solo alumno.

Respecto a los alumnos que responden parcialmente correcto han manifestado los siguientes errores:

- Eje de ordenadas como única posibilidad a ser *AV*.
- Asegurar una tendencia de la función hacia la *AV* en ambos infinitos, lo que se trasladaría necesariamente en una tendencia asintótica vertical con ramas infinitas laterales de diferente signo a la propia *AV*.
- Aparición de igualdades erróneas *"y=±∞"*.
- Invención de nuevas denominaciones: *la función se va acercando indefinidamente a la recta vertical"*.
- Error conceptual: *la recta vertical tiende a infinito o a menos infinito y corta a la función"*, dotándola de más importancia y actividad que a la propia función, no especificando el comportamiento de esta última en el infinito.
- Obligatoriedad de cortar la *AV* a la función
- Restringir la existencia de *AV* solamente a funciones racionales, hecho que se cumple sólo para las del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo k uno de los posibles valores que anulan al denominador.
- Asegurar que si k es un valor de x que no pertenece al domino de la función, $x = k$ es *AV*.
- Dar más importancia al cálculo del valor k por encima de la comprensión de la *AV*.

Respecto a los alumnos que responden incorrectamente se han constatado los siguientes errores:

Prácticamente se perpetúan los errores analizados para *AH,* salvo algunas puntualizaciones que se presentan a continuación:

- En la AH se consideraba dicha asíntota como valor, y para la AV se interpreta como "un punto de la función" cumpliendo que y no pertenece al recorrido de f(x).
- Para AH se consideraba que el dominio de la función era necesariamente toda la recta real y para AV se asegura que es el recorrido es todo $\mathbb{R}$.

REFLEXIÓN CONJUNTA *AH* Y *AV*

Varios alumnos intentan hacer una analogía entre *AH* y *AV*, pero el hecho de que posean propiedades diferentes, provoca que se produzcan errores. Respecto a las respuestas correctas, se centran en: expresión algebraica, idea de aproximación/tendencia, comportamiento cuando x o y tiende a infinito, la importancia de que la curva toca/corta o no a las asíntotas y propiedades métricas enfocadas en que la distancia entre la función y la asíntota tienda a cero. En el caso de *AV* las condiciones que el alumnado impone son menos estrictas y en varios casos se percibe una traslación de las respuestas dadas para las *AH*, cambiando simplemente algunas palabras.

Respecto a las 8 respuestas parcialmente correctas, se percibe la importancia que dan ciertos alumnos a los procedimientos de cálculo para la búsqueda de la expresión de la asíntota por encima de la comprensión del concepto de la misma, aparecen errores léxicos y de expresión y la consideración del ∞ como un valor alcanzable al que se le imponen condiciones. En la mayoría de las respuestas se percibe un alto nivel de comprensión frente un bajo nivel de dominio verbal.

En cuanto a las respuestas incorrectas, se perciben graves confusiones de conceptos geométricos y analíticos básicos relativo al estudio de funciones. Combinación sin sentido de límites, tendencia y recorrido. No discriminación entre tendencia asintótica y ramas infinitas. Errores de considerar la asíntota como la rama de la gráfica de la función con tendencia asintótica Priorización del cálculo de límites sobre la comprensión del concepto, a modo de receta.

d. *Escribe por qué crees que todas las funciones tienen alguna asíntota o por qué no.*

Razonamientos parcialmente correctos:

> *A18.- No todas tienen una asíntota, porque no todas tienden a una recta imaginaria cuando* y *o* $\mathrm{x} = \pm\infty$.

Además del error en la notación, *“$x = \pm\infty$”*, puntualiza en la tendencia de x o y a $\pm\infty$, focalizando en AH o AV. Para una mayor generalización, también debiera considerar la combinación de las dos posibles tendencias infinitas de las dos variables.

> *A9.- Todas no, porque hay funciones cómo las cuadráticas cuyo crecimiento es muy rápido y no pueden presentar ningún tipo de asíntota.*

Este alumno ha comprendido la discriminación asintótica y difiere entre las ramas infinitas y los comportamientos asintóticos, exponiendo para ello, un ejemplo de familia de funciones.

> *A7.- Depende de la gráfica tiene, o no, asíntotas; para saberlo hay que hacer un estudio de éstas.*

Este alumno da la posibilidad de que a partir de la representación gráfica que se presente, debido a las limitaciones de su soporte o a otras causas, no se tenga total certeza de la presencia, o no, de asíntotas; y remite a un estudio algebraico pormenorizado para asegurarlo.

> *A2.- No tienen por qué tener asíntota.*

Niega, pero no lo acompaña de razonamiento justificativo.

> *A3.- No todas las funciones tienen asíntotas, ya que hay funciones que ningún valor hace cero el denominador.*

Restringe el estudio a las *AV* focalizando en criterios algebraicos o de cálculo.

> *A4.-* AV *puede que no tengan, pero creo que es muy probable que todas tengan* AH *o* AO *porque si no tienen* AH *puede que tengan* AO, *hay casos que no tendrán ninguna.*

Mala redacción e ideas contradictorias. Basa su razonamiento en afirmaciones difusas y con estudios probabilísticos carentes de toda fundamentación teórica.

> *A10.- No, porque una recta limitada por ciertos valores no puede presentar una asíntota, porque las asíntotas son infinitas y las funciones finitas no tienen asíntota.*

Presenta imprecisión en el lenguaje, debiera expresar función afín de dominio y recorrido finito, ya que una *"recta limitada"* sería un segmento, que estaría acotado en una región del plano por valores mínimos y máximos de las dos variables. En cualquier caso, este alumno comprende que en la tendencia asintótica aparece *"el concepto de infinito"* y comparte un ejemplo de función que no presenta asíntota.

> *A11.- No tiene por qué, porque una función no tiene por qué tender a infinito, que es cuando hay una asíntota.*

Cuando se dice que una función tiende a infinito, se debiera especificar en qué caso particular se encuentra. En contraposición a la presencia de asíntotas, este alumno afirma que hay funciones con tendencia finita, aunque no es totalmente cierto su razonamiento, ya que hay funciones que tienden a infinito y no presentan asíntotas.

> *A15.-: No todas tienen asíntotas, las funciones afines (rectas) y las cuadráticas (parábola) son ejemplos de funciones que no tienen asíntotas.*

Aparentemente, es una respuesta correcta, si bien, se debe considerar que las asíntotas de las funciones afines son ellas mismas.

Razonamientos erróneos:

> *A1: Tendrán asíntotas cuando tengan que acercarse a un valor sin ser el entero. Porque la función tiende hacia un valor o no (f(x))"*

Este alumno considera que las asíntotas horizontales o verticales, que tienen ecuaciones $y = h$ o $x = k, h$ y k deben ser números enteros; evidentemente, esto es erróneo, pero esta respuesta puede estar influenciada por la utilización o uso en la docencia de funciones en cuyas asíntotas aparecen valores de h e k enteros.

> *A6: No está en su dominio esa parte del recorrido.*

Mezcla de dominio y recorrido sin sentido.

> *A5: Todas las funciones tienen alguna asíntota, porque todas las funciones tienden a algo.*

Asociación de tendencia con comportamiento asintótico.

> *A13: No, porque en la mayoría de funciones, menos las polifónicas, el dominio no es continuo.*

Además del error tipográfico (polifónicas-polinómicas). Considera erróneamente que si el *"dominio no es continuo"* la función tiene una asíntota. Por lo tanto, hay una asociación entre discontinuidad del dominio y asíntota. Este alumno está pensando en asíntotas verticales, posiblemente en ciertas funciones racionales.

> *A12: Si, porque en todas hay algún valor que no pertenece al recorrido de la función.*

Afirmación errónea que si un valor no pertenece al recorrido necesariamente la función presentará una asíntota. El pensamiento de este alumno se dirige posiblemente a las *AH*. Por lo tanto, hay una asociación entre incompletitud del recorrido con *AH*.

> *A14: Para saber cuál es su límite y hacía donde tienden. (Imprecisiones).*

> *A16: No todas las rectas tienen asíntotas, puesto que aquellas que son una recta horizontal o vertical no tienen asíntotas, porque no tienden a nada más que a menos o a mas infinito".*

Como en algún caso anterior, se analiza el caso particular de las rectas paralelas a los ejes coordenados. Por un lado, se presenta el error conceptual de considerar como función a una recta vertical; por otro lado, no admite que en *"una recta horizontal"* su *AH* coincide con ella misma, aunque sí deja la posibilidad de que las funciones afines presenten asíntotas oblicuas. Por último, no estudia tendencias conjuntas, restringiendo el estudio de la tendencia a una de las variables.

> *A17: No todas las funciones tienen asíntotas porque hay funciones continuas.*

Asociación continuidad con no presencia de asíntotas. Demuestra la no comprensión del concepto de continuidad de una función.

> *A18: No todas las funciones tienen asíntotas porque para ello tendría que haber una situación en la que un valor de* "x" *dé una* "y"=0.

Asociación de asíntotas con puntos de corte con el eje de abscisas, es decir con las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Error ya detectado en la prueba inicial en otro alumno.

> *A19: No todas las funciones presentan asíntotas ya que hay funciones que son rectas y coincidiría, en caso de haber, ¡que no es posible! con la asíntota.*

Curiosamente, admite que la propia función-recta coincidiría con su asíntota, pero afirma como imposible dicha imposición no presentada en la docencia.

> *A20: Dependiendo de si a esa* f(x) *hay una recta en el infinito.*

En este nivel, no tiene sentido que una recta se sitúe *"en el infinito"*, pero quizás, quiera decir que la función se comporta como una recta en el infinito.

> *A21: Depende del tipo de función. Funciones polinómicas, exponenciales,... no tendrán. Mientras que una radical, por ejemplo sí, ya que el dominio no engloba todos los números reales.*

Aunque este alumno comprende que no todas las funciones presentan asíntotas, los ejemplos que pone son erróneos, él trata de justificar el comportamiento asintótico o no de familias de funciones, aunque dentro de una misma familia puede haber comportamientos diferentes. Por ejemplo, las funciones exponenciales siempre presentan asíntotas horizontales, pero las funciones radicales dependen del radicando ($y = \sqrt{x^2 + x}$, e $y = \sqrt{x^3 + x}$).

> *A22: Sólo tienen asíntotas si son infinitas. Aquellas que son infinitas tendrán comportamiento asintótico.*

En el aula no se ha utilizado la denominación de *"función infinita"*, pero este alumno interpreta que es una función que tiende a infinito y, por tanto, confunde tendencia infinita con tendencia asintótica.

> *A23: Asíntotas verticales tienen todas. Pero si tiene asíntota horizontal no tiene la oblicua.*

Afirmación tajante y errónea de afirmar que todas las funciones tienen *AV.* Afirmar que si tiene *AH* no tiene *AO*, sería cierto al estudiar la tendencia concreta, cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Reflexión

Los 9 alumnos (39,13 %) que responden parcialmente correcto lo hacen mediante razonamientos aislados, ideas inconexas y afirmaciones, en la mayoría de los casos, sin justificaciones. Ciertos alumnos discriminan los comportamientos asintóticos frente a las ramas infinitas y se ayudan de ejemplos de algunas familias de funciones. Ellos comprenden que en la tendencia asintótica aparece *"el concepto de infinito"* pero, para algunos, como una condición necesaria y suficiente. Otros alumnos remiten al estudio algebraico referente al algoritmo mecánico de cálculo, focalizando la existencia de asíntotas solamente por criterios algebraicos o de posibilidad de hacer el cálculo. Y otro sector, con un nivel competencial más bajo, basa su razonamiento en afirmaciones difusas y en argumentos probabilísticos carente de toda fundamentación teórica.

A partir de las 14 respuestas erróneas (60,87%), se han detectado los siguientes errores:

- Confusiones relativas a conceptos básicos de funciones.
  - Dominio con recorrido.
  - Recta vertical como función.
  - Función que tiende a infinito, sin concretar el estudio de las variables.
  - Concepto de recta con su representación y ésta con un segmento.
  - Error conceptual de *"situar rectas en el infinito"*.
- Errores de notación genéricos: variable=$\pm\infty$
- Error de considerar tendencia infinita implica existencia de asíntotas.
- Error de asociación de tendencia con comportamiento asintótico.
- Asociación errónea de *"dominio no continuo"* con *"presencia de asíntota"* y *"continuidad con no presencia de asíntotas"*.
- Asociación entre incompletitud del recorrido con presencia de *AH*.
- Asociación de asíntotas con puntos de corte con el eje de abscisas; es decir, con los valores raíces de la ecuación $f(x) = 0$.
- No admisión que toda función afín coincide con su asíntota (AH o AO, como posibles casos).
- Afirmaciones de imposiciones o restricciones erróneas, como que todas las funciones tienen *AV* o no dar la posibilidad de que una función presente *AV* y *AH* conjuntamente.
- *AH* y *AV* tienen expresiones $y = h$ o $x = k,$ con h y k obligatoriamente números enteros

e. Escribe lo que creas que es una AO.

Tras el estudio y análisis de las respuestas, se procede a su clasificación de forma análoga a como se hizo con las *AH* y *AV*. Para ello, se tiene en cuenta el nivel de comprensión y las incorrecciones que cometen los alumnos; y esto, nos lleva a considerar los siguientes grupos cuyo resumen se plasma en la siguiente tabla:

VI.13 Tabla 6.13. *Respuestas alumnos sobre AO*

¿Qué es AO?	**Nº alumnos**	**%**
Respuestas correctas	3	13,04%
Respuestas parcialmente correctas	10	43,48%
Interpretación aislada	5	21,74%
Existencia y cálculo	5	21,74%
Respuestas incorrectas	9	39,13%
No responden	1	4,35%

Respuestas correctas:

Se las considera válidas, salvo ciertas matizaciones, y comparten al menos dos de los siguientes tópicos:

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia infinita de las dos variables, comportamiento análogo en el infinito de curva y recta y la distancia tiende a cero:

A4: Son rectas imaginarias de ecuación $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$, *a las que la función se va acercando,* ***comportándose c****omo ella* ***en el infinito****.*

A10: Una AO *es una recta del tipo* $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$ *a la que* ***tiende*** *una función. En la gráfica, la* ***distancia e****ntre ambas* ***representaciones*** *tiende a cero.*

A18: Una AO *es una recta* $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$ *cuando las abscisas* (x) *y ordenadas* (y) *de un punto de una curva tienden hacía infinito* ***tendiendo*** *hacia las abscisas y ordenadas de un punto de una recta.*

Respuestas parcialmente correctas:

Se pueden clasificar en dos subgrupos, según se interprete la *AO* como objeto o si se focaliza en el interés de su existencia y/o cálculo. A continuación, se presenta con más profundidad dicha categorización:

- Interpretación aislada de la *AO* como recta sin relación con la función ni con gráfica:

  A2: Una recta que corta el eje x *y el* y.

La *AH* sólo corta al eje de ordenadas ya que es paralela al eje de abscisas, salvo la excepción de que la *AH* sea el propio eje de abscisas. Por otro lado, la *AV* al ser paralela al eje de ordenadas corta al eje de abscisas, salvo que sea la *AV* sea la propia recta $x = 0$. Este alumno da importancia al hecho de que la recta cortará necesariamente a los dos ejes ordenados, lo que implica que tendrá pendiente no nula. No ha establecido la conexión entre la recta y la gráfica y sólo se ha fijado en una condición necesaria.

A7: Son ***rectas oblicuas a la función*** *de la forma* $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$.

Este alumno expone la expresión inventada por él *"recta oblicua a una función"*

A9: Es una recta que se comporta como las rectas $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$.

A17: Una AO *tiene la ecuación de una recta* $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$*"*

A6: Una ***tendencia infinita no paralela*** *a los ejes con la función* $\mathrm{y} = \mathrm{kx} + \mathrm{n}$*"*

- *Interés sobre la justificación de su existencia.*

A3: Cuando el ***grado*** *del numerador es mayor que el del denominador.*

A19: Asíntota con ecuación $\mathrm{y} = \mathrm{nx} + \mathrm{m}$, *aparece cuando la función es una racional y el numerador es igual que el denominador más* 1.

Estos dos alumnos tienen en mente la condición que cumplen las funciones racionales relativas a los grados del polinomio numerador y denominador, influenciados más por el cálculo que por el concepto.

A15: Una asíntota oblicua solo la hay ***cuando no hay asíntotas horizontales****. Para que haya asíntota oblicua se tiene que cumplir que el grado del numerador sea exactamente* ***un grado mayor*** *que el del denominador.*

A16: La recta "$\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$*" es la asíntota oblicua.* **Son rectas de la ecuación.** *Si encontramos asíntotas horizontales antes, no es necesario que busquemos oblicuas (no puede haber para una misma imagen varios puntos).*

Estos dos alumnos conectan la existencia de *AO* con *AH*.

A20: Es $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$, *siendo* $\mathrm{m} = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}}$ *y* $\mathrm{n} = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} (\mathrm{f(x)} - \mathrm{mx})$.

No explica lo que es una *AO* sino la regla para encontrar el valor de los parámetros m y n; no señalando la posibilidad que $x \to -\infty$.

Respuestas incorrectas

En general, manifiestan razonamientos parciales o incompletos relacionados con la tendencia y, en algunos casos, ideas confusas relacionadas con conceptos geométricos y el análisis de las funciones.

A5: Es la ecuación a la que tiene tendencia una función.

Aparece la imprecisión de "tendencia de una función a una ecuación".

A13: Una rama que va de ***manera oblicua****.*

A8: Es una función que es infinita y que pasa por ***la bisectriz*** *de una gráfica.*

A22: Comportamiento de algunas funciones con ecuación $y = kx + n$*"*

Estos dos alumnos presentan el error ya analizado en las anteriores clasificaciones, que considera la asíntota a la rama de la gráfica de la función con tendencia asintótica, en este caso oblicua, y además, *A22* se restringe a las funciones afines. *A8* incluye conceptos como *"función infinita"* o *"bisectriz de una gráfica"*, cuya definición no ha sido aportada en las sesiones de docencia, en el primer caso, y una expresión sin sentido en el segundo caso

> *A11: Recta que divide el eje cartesiano en 2 partes iguales.*

Posiblemente, el alumno quería decir recta que divide en dos partes al "plano cartesiano", presentándose nuevamente la ecuación $y = x$, obligando a ser asíntota oblicua a la recta $y = x$.

> *A12: Una recta con pendiente que* ***corta*** *una función.*

> *A14: Son rectas que* ***cortan u****na función en la que puede haber muchas más opciones.*

Estos dos alumnos aseguran que siempre las *AO* cortan a la función.

> *A21: La pendiente de f(x) cada vez es menor"*

Pendiente de $f(x)$, sólo tiene sentido si se trata de una función afín, pudiendo ser dicho concepto generalizado a su tasa de variación media de un intervalo fijado. Al asegurar el alumno que la pendiente es cada vez menor se estaría ante una función decreciente; en cualquier caso no tiene coherencia con el estudio de la *AO*.

> *A23: Una recta diagonal que no corta la función pero pasa tangente a ella"*

Utiliza *"diagonal"* para indicar que es oblicua, como si fuesen sinónimos, sin precisar respecto a qué situación u objeto matemático implicado. Añade, además, que no se pueden cortar, pero sí pudiendo *"pasar"*, tangente bien en un punto o bien en el infinito. Este caso es el único en el que aparece el estudio de tangencias.

No responden

A1: No sé explicarlo, pero tengo una duda sobre los otros videos. ¿Por qué una asíntota puede cortar a una recta/curva si nunca llega a tocarse?"

Reflexión

Los tres alumnos que responden correctamente exponen la expresión algebraica de la *AO*, dos de ellos utilizan las palabras acercamiento/tendencia de las dos variables o comportamientos análogos en el infinito de la curva y recta y sólo uno de ellos refleja la relación métrica que tiende a cero en relación a la *AO* y la gráfica de la función; manifestándose al menos dos de los tópicos anteriormente citados. Aunque no muestran un dominio total en el lenguaje matemático asociado, sí comprenden el concepto que nos ocupa; salvo un alumno que relaciona perfectamente las tendencias de coordenadas de puntos de curva y recta, e interpreta una coordinación entre el movimiento de puntos de la curva asociados a movimientos de puntos de la recta (uno arrastra a otro).

Respecto a las respuestas parcialmente correctas, se pueden clasificar en dos subgrupos, formados por 5 alumnos cada uno, que se explican a continuación:

El primer subgrupo hace una interpretación aislada de la *AO* como recta sin relación con la función ni con la gráfica. Se centra, sobre todo, en la importancia de la pendiente de la *AO*, apareciendo denominaciones del tipo *"recta oblicua a la función"* o "*tendencia infinita no paralela"*, relacionando las tendencias con paralelismos o perpendicularidades y no con las variables implicadas.

El segundo subgrupo pone su foco de atención en el interés sobre la justificación de su existencia a partir los siguientes aspectos:

- Discriminación de la no existencia de la *AO* si se tiene conocimiento de la presencia de la *AH*.
- Asociación de la *AO* necesariamente con las funciones racionales, recordando la relación que se debe cumplir entre los grados de los polinomios numerador y denominador.
- Cálculo de su expresión $y = mx + n,$ con el procedimiento de búsqueda de m y n, a partir del algoritmo de los límites.

El tercer grupo, el más numeroso, formado por 9 alumnos, responde incorrectamente manifestando ideas confusas**,** incoherencias relacionadas con una falta de comprensión de conceptos asociados a la geometría analítica y al análisis de funciones. Aparecen expresiones del tipo *"Tendencia de una función a una ecuación. Función que va de manera oblicua. Una recta diagonal que no corta la función pero pasa tangente a ella"*. Ciertos alumnos imponen condiciones restrictivas a las *AO*, como por ejemplo la obligatoriedad de ser la *AO* la recta $y = x,$ o la de cortar a $f(x)$. Por todo ello, se pone de manifiesto que no se ha alcanzado el estadio autónomo que se pretendía.

Es oportuno reflejar que buena parte del alumnado se basa en la ecuación explícita de la recta, $y = kx + p$, pero omiten la obligatoriedad de $k \neq 0$ para eliminar a las *AH*. Para finalizar, hay un alumno que no se manifiesta en los términos de la cuestión planteada.

f. Escribe la razón de por qué $\mathrm{y = px^2 + 3\ (p \neq 0)}$ *puede ser o no ser la ecuación de una asíntota.*

Se presenta en la tabla 6.14 la distribución de los alumnos según las diferentes posibilidades y se concretan las particularidades a continuación:

VI.14 Tabla 6.14. *Distribución de respuestas del alumnado cuestión 10 f)*

$\mathbf{y = px^2 + 3}$	**Nº alumnos**	**%**
Respuestas correctas	8	34,78%
Respuestas incorrectas	15	65,22%
Errores conceptuales	6	26,09%
Confusión enunciado	3	13,04%
Incoherencias	6	26,09%

Respuestas correctas:

A4: "No puede ser, porque es cuadrática, y se tiene que comportar como una recta."

A8: "No puede ser porque es una función cuadrática, que crece muy rápido, es una curva."

A9: "No es la ecuación de una asíntota porque la x *está elevada al cuadrado."*

A10: No porque tendría que tratarse de una función $\mathrm{y = mx + n}$*."*

A15: No puede ser, las asíntotas son rectas y esa ecuación corresponde a una cuadrática, a una parábola".

A16: Podría ser una oblicua pero por el dos no podría ser una asíntota" (Presenta imprecisiones lingüísticas ya que *"el dos"* al que se refiere es el exponente)

A18: Porque es una función cuadrática y entonces es una curva, por lo que no puede ser asíntotas, que son rectas.

Respuestas incorrectas:

Se pueden clasificar en tres grupos, según se presenten errores conceptuales, confusión con el enunciado o incoherencias:

- Errores conceptuales:

A2: Puede ser ecuación de una AO porque tiene pendiente y punto que corta al eje y*.*

A6: Podría serlo porque tiene pendiente y n*, pero se salta un número.*

A7: Si puede serlo porque es del tipo $y = mx + n$*"*

A13: No lo es, porque esa función es una línea recta y por tanto no tiene asíntota.

Para este alumno, A13, una línea recta no es su propia asíntota.

A14: Puede ser la ecuación de una asíntota oblicua ya que no deja de ser la ecuación de una recta $(y = mx + n)$*"*

A1: Podría tratarse de la ecuación de una asíntota oblicua, ya que presenta una pendiente m.

- Confusión en el enunciado de la pregunta. Estudian las posibles asíntotas de esa función.

A3: No podría ser ni vertical porque no hay denominador, ni horizontal porque su límite cuando tiende a infinito seria infinito y oblicua no porque no tiene exponente.

A20: Es una ecuación polinómica, y el dominio engloba a todos los números reales.

A21: AV: No hay denominador, no se puede hacer cero. AH: $lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, AO*: No es una fracción (la función)"*

A22: Porque no tiene denominador y es un polinomio"

- Incoherencias.

A5: Porque dependiendo los valores que le des, puede aparecer o no. Dependería de su función.

A11: Si puede ser porque es una ecuación normal de una función.

A12: Puede serlo porque sabemos que debemos probar con el número 0.

A17: No puede porque la ecuación $x^2 + 3$ *no da 0.*

A19: Si porque es distinto de 0.

A23: Si, es una ecuación asíntota.

Reflexión

Los 8 alumnos que responden correctamente tienen claro que dicha expresión no corresponde a una función afín cuya gráfica es una recta, concretan que es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que crece muy rápido, entre otros comentarios.

Las respuestas incorrectas se han clasificado en tres grupos. En el primero, relativo a errores conceptuales, no diferencian entre funciones lineales y cuadráticas, no dominando las propiedades de cada una de ellas, ya que algunos aseguran que dicha expresión tiene pendiente e incluso varios alumnos la confunden con las ecuaciones afines $y = mx + n$. El segundo grupo comparte la confusión en el enunciado de la pregunta. La cuestión plantea si $y = px^2 + 3$ puede ser o no ser la ecuación de una asíntota, y estos alumnos, han respondido que la función $y = px^2 + 3$ puede tener asíntotas. Dos de ellos coinciden en que es polinómica y que no tiene denominador, por lo que no puede presentar asíntotas. En este caso, sin duda, está influenciado por la obtención de asíntota vertical. Por último, el tercer grupo, dónde aparecen respuestas sin un criterio de clasificación claro, manifiesta diferentes incoherencias. Hay una asociación presente en varias alusiones entre *"las asíntotas y el 0" ("probar con el valor 0"* o *"no da 0.*, entre otras) que posiblemente proceda de la *"búsqueda de ceros de la función",* cuestión que se enfatiza en la docencia, potenciada con la búsqueda de raíces de polinomios.

g. *Escribe por qué crees, o por qué no,* $\mathrm{y = k}$ *es la ecuación de una* AV.

Se presenta en la tabla 6.15 la distribución de los alumnos según las diferentes posibilidades y se concretan las particularidades a continuación:

VI.15 Tabla 6.15. *Distribución de respuestas cuestión 10 g)*

¿y = k es AV?	**Nº alumnos**	**%**
Respuestas correctas	6	26,09%
Respuestas incompletas	6	26,09%
Respuestas incorrectas	11	47,83%

Respuestas correctas:

A4.- No creo, porque $\mathrm{y = k}$ *es la ecuación de una* AH*"*

A8.- $\mathrm{y = k}$ *no puede ser una* AV *ya que es la expresión de una recta horizontal, paralela al eje de abscisas.*

A9.- No lo es porque tiene que ser $\mathrm{x = k}$.

A10.- No es una AV *porque si* $\mathrm{y = k}$ *entonces la recta es horizontal, por lo que es una* AH.

A15.- Porque $\mathrm{y = k}$ *representa una recta paralela al eje de las* x*, por lo que no puede ser* AV.

A18.- Porque k *sería la ordenada constante en cualquier punto de la recta* $\mathrm{y = k}$ *por lo tanto se trata de una* AH.

Respuestas correctas, con razonamientos parcialmente incorrectos:

A1.- Es falso porque es el eje x *no el* y.

Confusión de ejes con variables y omisión de razonamiento explicativo completo.

A3.- Es una AH porque ***corta al eje y****.*

Utilización de razonamientos de geometría analítica, no siendo exclusivo de las *AH*.

A6.- No porque $y = \pm\infty$.

Lo que quiere expresar este alumno es que en una *AV*, $x = k$ y es la variable y la que tiende a infinito positivo o negativo. Según su respuesta, da la posibilidad de un valor infinito alcanzable.

A12.- No, porque ***no tiende*** *a una línea imaginaria vertical (la AV) si no que es horizontal.*

A20.- $y = k$ *no es la ecuación de una* AV*, es una* AH *porque el límite tiende a un valor* k*. (*No concreta que límite).

Las dos respuestas anteriores no referencian sobre que variable se estudia la tendencia.

A21.- Es una AH*, porque es la* ***ecuación*** *de una* AH.

Confusión del concepto de ecuación con representación o expresión algebraica de la asíntota horizontal.

Respuestas incorrectas:

A2.- Una AH *tiene una ecuación de* $x = k$.

A7.- Si es una AV.

A5.- Ese valor k *hace* 0 *al denominador, por tanto no pertenece al dominio, y presenta una* AV.

A11.- Porque para cualquier valor de y, en el eje de las x le corresponde el mismo haciendo una recta vertical.

A13.- No, porque para un valor de x *hay infinidad de valores de* y*. Eso es una* AH.

A14.- Sería una AV *porque es constante y una recta puede estar cerca de esta asíntota.*

A16.- Porque la y *tiene que ser igual a una constante.*

A17.- Es la de una AH *porque está en el eje de coordenadas.*

A19.- Si que puede ser porque k *puede ser cualquier valor de la recta.*

A22.- Si es vertical, será paralelo al eje de ordenadas, por tanto $y = k$.

A23.- Porque tiene una constante y.

Reflexión

Seis alumnos ven claramente que se trata de una posible *AH* por su expresión algebraica y por tratarse de una recta paralela al eje de abscisas; por tanto, no puede ser una AV. Otros seis alumnos, aunque responden correctamente, manifiestan confusiones ya detectadas en anteriores ítems (confusión de ejes con variables, utilización de razonamientos de geometría analítica no válidos en todos los casos, referencias a límites sin especificar sobre qué variable se estudia la tendencia, entre otros).

Los 11 alumnos restantes, confunden *AH* y *AV*, aportando, en la mayoría de los casos, respuestas incoherentes carentes de interés, como por ejemplo que *"el valor* k *que hace* 0 *al denominador"*, que no tiene ningún sentido con el enunciado de la pregunta, ninguno aporta relaciones con la tendencia de la función.

h. *Escribe por qué una asíntota de ecuación* $y = px + q$ *nunca puede ser horizontal o por qué sí.*

Los alumnos se van a encuadrar en tres grupos globales, según sus respuestas sean correctas, parcialmente correctas o incorrectas.

VI.16 Tabla 6.16: *Distribución de respuestas del alumnado cuestión 10 h)*

$\mathbf{y = px + q}$	**Nº alumnos**		**%**	
Respuestas correctas	4		17,39%	
Respuestas incompletas	11		47,83%	
Consideración $p \neq 0$		8		34,78%
Estudio límite		3		13,04%
Respuestas incorrectas	8		34,78%	
Errores conceptuales		3		13,04%
Incomprensión enunciado		3		13,04%
Incoherencias		2		8,70%

Respuestas correctas:

Un alumno relaciona el estudio de las asíntotas únicamente con el valor de la pendiente y, los tres restantes, concretan que para $p = 0$ *s*e tiene la posibilidad de *AH* y además, expresan la ecuación de la misma correctamente*:*

A4.- Depende del valor que tenga la pendiente de la función.

A8.- Puede ser horizontal sólo si la $p = 0$, *ya que la ecuación de las asíntotas horizontales es* $y = k$.

A10.- Solo podría darse el caso de ser una horizontal si $p = 0$, *en ese caso sería del tipo* $y = q$, *una recta horizontal; sino sería* AO *(en el caso de que fuese asíntota).*

A15.- Únicamente podría tratarse de una AH *cuando* $p = 0$, *ya que la ecuación de una* AH *no presenta pendiente y su ecuación sería* $y = k$*"*

Respuestas parcialmente correctas:

Once alumnos comparten una visión muy estricta, cerrada e inamovible de la expresión que se presenta. No escriben ninguna sentencia incorrecta, pero la aparición de los parámetros p y q, les imposibilita ver que alguno de ellos o ambos puedan ser nulos.

El primer grupo, formado por 7 alumnos, ante dicha expresión algebraica con parámetros, la asignan una sola posibilidad de asíntota. El segundo grupo, menos numeroso formado por 3 alumnos, focaliza su estudio en el cálculo del $lim_{x \to +\infty} f(x)$.

A continuación, se estudia con más detenimiento cada uno de dichos grupos:

- Visión estricta *AH*, $\mathbf{y} = \mathbf{q}$ (No posibilita $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$).

 A1.- No, porque una AH solo puede tener el valor de una constante.

 A7.- No puede ser horizontal porque solo puede haber una horizontal o una oblicua en una función, y las oblicuas son las que tienen esa ecuación, además las horizontales no tienen esa forma de ecuación.

El razonamiento de este último alumno respecto a la existencia de una *AH* y *AO*, se ha concretado en el estudio de un único sentido del infinito; y además, se ha centrado en la coexistencia de ambas, hecho no demandado.

 A12.- Esa recta es **parecida** *a la recta $y = mx + n$, no puede ser una horizontal si tiene pendiente.*

A todos los efectos, la expresión $y = px + q$, representa la misma situación matemática que $y = mx + n$; pero el alumno no lo visualiza así, sino como una *"recta parecida"*. También presenta un error de precisión lingüística, ya que asocia que cuando el parámetro m sea nulo, es decir, $m = 0$, es no tener pendiente, cuando lo más correcto sería especificar que tiene pendiente cuyo valor es cero. Dicho de otro modo, el valor nulo de un objeto matemático no es equivalente a su inexistencia.

 A17.- Siempre va a ser AO *porque tiene pendiente.*

No da la posibilidad de pendiente nula.

 A19.- En el infinito, sigue creciendo.

Está presenta la idea de pendiente no nula, aunque positiva; ya que no da la opción de decrecimiento.

 A21.- No puede ser horizontal porque tiene pendiente $\mathrm{m} = \mathrm{p}$*"*

 A22.- No puede ser horizontal porque la horizontal nos da un valor, y, *mientras que éste nos pone que* y *es igual a* x *por algo.*

Para este alumno, *Algo"* no puede ser un valor que representa la ausencia de cantidad como es el cero, no aceptar que un parámetro admita todos los posibles valores numéricos, restringe los estudios globalizados.

> *A11.- No porque esa es la función de* AO.

- Focalización del estudio de ***AH*** a partir del $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} f(x)}$:

> *A2.- No, porque siempre su límite cuando tiene a infinito siempre daría infinito"*

No especifica que variable tendería a infinito y no da la posibilidad de infinito negativo.

> *A13.- No puede ser horizontal porque tiende a infinito positivo cuando va hacia el* ***infinito por la derecha****.*

No estudia la tendencia cuando $x \to -\infty$.

> *A20.- Si hallamos,* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *vamos a darnos cuenta de que no obtenemos un valor fijo* k. *Por tanto, no tiene.*

Respuestas erróneas:

Se canaliza en tres grupos, según está su foco de atención en errores conceptuales, la no comprensión del enunciado de la pregunta o respuestas sin sentido (incoherencias).

- Errores conceptuales:

> *A3.- No puede ser, porque esa se comporta como una recta y la* AH *tiene pendiente cero.*

Este alumno no considera a las *AH* rectas.

> *A14.- Si puede, porque* x *puede coger el valor cero.*

Relación errónea de *AH* con valores nulos de la variable *x*

> *A23.- Una AH sólo puede tener* $y = k$ *porque es una recta y esa ecuación es de curva.*

Consideración de la función afín como una curva.

- No comprensión del enunciado de la pregunta

Tres alumnos creen que se les pregunta que si la función $y = px + n$ presenta asíntota horizontal o no, en vez de la cuestión real. Un alumno considera que una función polinómica puede tener cierto valor de grado que asegura la presencia de *AH*, otros dos alumnos asocian la *AH* con las funciones racionales, haciendo referencia a reglas que no tienen sentido.

> *A6.- Porque no tiene el grado necesario para ser horizontal.*

> *A9.- Porque necesitamos saber su denominador.*

A18.- Si es una fracción, puede ser AH *o* AO $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)+1}}$.

Se presenta un error léxico al denominar como *"fracción"* al quererse referir a una *"función racional"*.

- Respuestas sin sentido o incoherentes:

A16.- $\mathrm{y} = x$ *al cuadrado entre* $x - 4$.

A5.- No, porque no podría permanecer siguiendo a una recta en el eje de y*, porque lo cortaría.*

Reflexión

Un pequeño sector del alumnado contesta correctamente, estudiando, con diferentes niveles de profundización, las diferentes posibilidades de los parámetros p y q. Ninguno llega a afirmar que si $p \neq 0$, nunca sería *AH*, pudiendo ser una posible *AO*, con distintas posibilidades de función afín o lineal, según que los valores del parámetro q sean nulos o no nulos .

Prácticamente la mitad de los alumnos responden de manera parcialmente correcta y se pueden dividir a su vez en dos grupos. Todos ellos, no son capaces de pensar en el valor $p = 0$, la aparición de los parámetros p y q, en la expresión $y = px + q$ les imposibilita ver que alguno de ellos, o ambos, puedan ser nulos. Por ello, comparten una visión muy estricta, cerrada e inamovible de la expresión que se presenta, no viendo la posibilidad de que para $p = 0$, $y = q$ es posible candidata a *AH*; ni el caso particular, $p = q = 0$, $y = 0$ pudiera ser el propio eje de abscisas la *AH*. El primer grupo, formado por 7 alumnos, ante dicha expresión algebraica con parámetros; en general, la asignan una sola posibilidad de asíntota, por ejemplo, el comentario de uno de ellos fue, "*pertenece a una asíntota oblicua; por lo tanto, no pertenece a una asíntota horizontal*", no admitiendo que la variación del valor de los parámetros puede posibilitar diferentes tipos de asíntotas. Respecto al segundo grupo, al focalizar únicamente en el estudio del $lim_{x\to+\infty} f(x)$ y al no cumplirse que el límite en el infinito es una constante; por ello, responden a la cuestión de forma negativa, subyaciendo por tanto lo anteriormente expuesto en relación a no aceptar la posibilidad de $p = 0$.

En el resto del alumnado, que responden incorrectamente, aparecen diferentes errores conceptuales presumiblemente heredados de la geometría analítica, incoherencias que intentan relacionar las asíntotas necesariamente a funciones racionales, y alumnos que no comprenden el enunciado de la pregunta, intentando estudiar si la función $y = px + n$ presenta *AH*.

i. *Escribe cuántas asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, a lo sumo, puede tener una función.*

Ante esta cuestión tan genérica, se ha optado por clasificar según las respuestas correctas relativas a cada tipo de asíntotas y sus combinaciones posibles, como se muestra en la tabla 6.17.

VI.17 Tabla 6.17. *Clasificación de respuestas alumnado cuestión 10 i)*

Tipos de respuesta	Nº alumnos	%
Respuestas correctas	4	17,39%
Respuestas incorrectas	3	13,04%
Respuestas incompletas	16	69,57%
Solo AH correcta	3	13,04%
Solo AV correcta	6	26,09%
Solo AO correcta	1	4,35%
AH y AV correctas	4	17,39%
AV y AO correctas	2	8,70%
AH y AO correctas	0	0,00%

A continuación, se presenta cada opción con las correspondientes respuestas de los alumnos:

Respuestas correctas:

A pesar de que no especifican signo de infinito, se sobreentiende que razonan respecto a uno de ellos.

A4.- Puede tener AV infinitas. Si no hay horizontales puede tener oblicuas. Puede tener hasta 2 oblicuas y dos horizontales.

A8.- Dos asíntotas horizontales, dos oblicuas e infinitas verticales.

A9.- Verticales infinitas, oblicuas dos, horizontales dos.

A10.- Verticales puede tener infinitas. Horizontales y oblicuas 2.

Respuestas parcialmente correctas:

Se clasifican los alumnos según respondan correctamente únicamente al número de asíntotas posibles respecto a una de ellas e incorrectamente respecto a las restantes, y posteriormente, se analizan las diferentes combinaciones correctas de dos de los tipos de asíntotas:

- *AH* correcta:

A3.- Horizontales dos, verticales dos y oblicua una”

A16.- Una función puede presentar varias asíntotas verticales, 2 asíntotas horizontales o una oblicua"

A21.- 2 asíntotas verticales, 1 oblicua (si hay oblicua no hay horizontal), y 2 horizontales.

- *AV* correcta:

A1.- Una función puede tener infinitas verticales, y o bien, o una horizontal o una oblicua.

A14.- Asíntotas verticales las que sean y oblicuas creo que una.

A5.- Asíntotas verticales puede tener tantas como valores hagan cero el denominador de su función. Horizontales puede tener infinitas y oblicuas también.

A12.- Yo creo, que verticales puede tener infinitas, horizontales una y oblicuas más de una.

A22.- Asíntotas verticales y horizontales, infinitas; asíntotas oblicuas, una.

A23.- AV: infinitas, AH: infinitas y AO ¿una? Pero nunca AH y AO a la vez (no puede existir más de un valor para un punto).

- *AO* correcta:

A11.- AV *1,* AH *1,* AO *2.*

- *AH y AV* correctas:

A7.- ∞= vertical, 2 horizontales, 1 oblicua.

A19.- AV ∞, AH 2, x→∞, x→-∞, AO 1.

A17.- Verticales: infinitas, horizontales: 2, oblicuas: 1, siempre que no haya horizontal"

A18.- No puede haber al mismo tiempo una horizontal y una oblicua, en el resto de casos, en clase hemos visto como máximo dos asíntotas verticales y dos horizontales, aunque soy consciente que en el caso de las verticales (por lo menos) puede haber más, ya que ha sido *un fallo en una de las anteriores preguntas.*

- *AV* y *AO* correctas:

A2.- Puede tener infinitas asíntotas horizontales y verticales, pero oblicuas solo dos.

A14.- Vertic*ales infinitas, horizontales 1 y oblicuas dos.*

- *AH* y *AO* correctas:

No ha habido ningún alumno que contestase correctamente a dicha combinación e incorrectamente respecto a las *AV*.

- Respuestas incorrectas:

Los tres alumnos siguientes, aportan afirmaciones globales, sin concretar ningún signo al infinito asociado ni a qué tipo de asíntota se refiere.

> *A6.- Infinitas, indefinidas.*
>
> *A20.- Dependiendo de la función, en algunos casos hay las tres, en otras dos o en otras solamente una o incluso ninguna.*
>
> *A13.- Dependiendo de la función puede tener unas u otras. El "tope" serían 4.*

A continuación, se analizan las respuestas correctas (Tabla 6.18) respecto a cada asíntota particularmente:

VI.18 Tabla 6.18. *Respuestas correctas respecto a cada tipo de asíntota*

Tipos de asíntota	Nº alumnos	%
AH	11	47.82%
AV	16	69.56%
AO	7	30.43%

En la tabla 6.19 se presenta la distribución de los porcentajes de los alumnos según los tipos de respuesta incorrecta que han manifestado respecto a cada asíntota, se marca con una X la opción correcta

VI.19 Tabla 6.19. *Respuestas incorrectas respecto a cada tipo de asíntota*

Asint	1 asíntota	2 asíntotas	∞ asíntotas	Imprecisiones	Nº alumnos (%)
AH	4 (17.39%)	X	6 (26.08%)	2 (8.69%)	12 (52.17%)
AV	1 (4.34%)	3 (13.04%)	X	3 (13.04%)	7 (30.43%)
AO	8 (34.78%)	X	3 (13.04%)	2 (8.69%)	13 (56.52%)

Respecto a la *AH*, el mayor error se presenta al considerar que puedan ser infinitas en una misma gráfica, situación contradictoria con el concepto de función, y le sigue la opción de la presencia de una única *AH*. Los alumnos que consideran que el número de *AV* debe ser finito, lo concretan en dos y en una, siendo dichos porcentajes poco significativos. Por último, es elevado el número de alumnos que considera que sólo se puede presentar una *AO*, en una gráfica concreta, y más reducido el que da la posibilidad de la infinitud de las mismas.

Reflexión

El porcentaje de respuestas correctas e incompletas es bastante bajo. Analizando el porcentaje de alumnado que responde correctamente a la presencia de cada tipo de asíntota se tiene que el alumnado ha comprendido mayoritariamente que las *AV* pueden presentarse de forma infinita (una función puede tener infinitas AV), le sigue la comprensión en relación a la *AH* y, por último, en lo que respecta a la *AO*, se presentan los porcentajes más bajos. Respecto a las respuestas incorrectas, por un lado, aparece la posibilidad de infinitas *AH* y *AO* en la misma gráfica, lo que contradice el concepto de función y, por otro lado, la unicidad en la presencia de *AH* o *AO*, en una gráfica. Este hecho puede ser debido a una mala interpretación a partir de algunos ejemplos de las gráficas mostradas en los vídeos, dónde se compartía la misma *AH* o *AV* en los dos infinitos, lo que puede provocar que cierto sector del alumnado lo trate de forma compacta. Se trata de una cuestión globalizada con la que el alumnado parece que tiene dificultades en generalizar.

El objetivo de los ítems siguientes es valorar globalmente el uso de los videos.

a. ¿Qué contenido te han trasmitido los este vídeos?

Análisis

A modo de resumen se presentan los contenidos que han sido seleccionados por los alumnos. Sus respuestas se han agrupado en tres tópicos que tienen que ver con sus percepciones. Estos se distribuyen en la tabla 6.20 y a continuación se analizan en profundidad según las respuestas de los alumnos.

VI.20 Tabla 6.20. *Contenidos de las respuestas de los alumnos*

Contenido	Nº alumnos	%
Visualización gráfica/función	5	21,74%
Límites – Tendencias	4	17,39%
Explicación-Comprensión	4	17,39%
No responden	10	43,48%

- Visualización gráfica/función:

  A9.- Me han hecho visualizarlo gráficamente.

  A7.- Ver las funciones.

  A10.- Entender visualmente las asíntotas, no sólo ecuaciones.

  A5.- Funciones gráficas.

A18.- Visualizar las tendencias.

- Límites y tendencias:

  A4.- Los conceptos de tendencias y asíntotas.

  A8.- Los límites y las asíntotas.

  A13.- Alguna referencia sobre límites y tendencias, pero realmente no he entendido muy bien algunas cosas.

  A22.- Alguna ayuda sobre los conceptos de límites y tendencias pero muchas cosas no he entendido, sabía hacerlo pero no visualizaba.

- Explicación y comprensión

  A1.- Explicaban bien aspectos que no quedaban claros en clase.

  A9.- Creo que se explicaban bien algunos aspectos que en clase no.

  A10.- Me ha ayudado a comprender los contenidos"

  A12.- Lo básico de cada caso de funciones.

El resto del alumnado no contesta.

Reflexión

Los alumnos que contestan se pueden clasificar en tres grupos equitativos. Por un lado, los que inciden en aspectos relativos a límites y tendencias, que es una forma globalizada de resumir los contenidos tratados. Por otro lado, el segundo grupo pone el énfasis en la visualización de asíntotas y tendencias; es decir en las propiedades globales de las funciones a partir de sus gráficas. Y por último, el grupo restante, y más numeroso, no responde concretando contenidos, sino manifestando que las explicaciones les han ayudado a comprender el tema que nos ocupa.

b. *Escribe cuánto y por qué te han ayudado los vídeos a comprender los contenidos.*

A continuación, se plasma la percepción de la ayuda aportada por los vídeos:

VI.21 Tabla 6.21. *Percepción de ayuda de los alumnos*

Valoración ayuda vídeos	Nº alumnos	%
Escasa	3	13,04%
Aceptable	5	21,74%
Variable	2	8,70%
No responden	13	56,52%

La clasificación se ha establecido en los siguientes grupos, según el grado de intensidad en la valoración:

- Escasa:

  A1.- Me han ayudado poco.

  A18.- Poco, me costaba entender a partir de las gráficas la explicación.

  A4.- Comprendo los conceptos sin necesidad de ver los vídeos, a lo mejor te ayudan a visualizar.

- Aceptable:

  A8.- Bastante porque lo visualizo.

  A13.- Me ha ayudado a ver cómo se comporta.

  A22.- Me han ayudado en visualizarlo.

  A9.- Me han ayudado bastante a comprender mejor las funciones.

  A7.- Bastante, porque en clase no los entendí.

- Variable:

  A10.- Si porque son de ayuda, pero creo que podemos entender el contenido sin necesidad de ver vídeos.

  A5.- En algunos me ha ayudado, en otros me ha liado más.

Reflexión

Ligeramente superior a la quinta parte del alumnado comparte que los vídeos le han ayudado bastante a profundizar en la comprensión del comportamiento y visualización de las funciones, algo más de la décima parte considera que le ha ayudado poco, y un pequeño sector muestra valoración variable pudiendo en algunos casos considerarse contradictoria. La mitad del alumnado no se manifiesta.

c. *Escribe lo que no hayas comprendido.*

Análisis

La siguiente tabla 6.22 muestra las dificultades en la comprensión, según el alumnado:

VI.22 Tabla 6.22. *Dificultades de comprensión*

Dificultades		Nº alumnos	%
Dificultades globales		5	21,74%
	Comprensión	2	8,70%
	Lenguaje	3	13,04%

Contenidos específicos	5	21,74%
Tendencia/Aproximación	2	8,70%
Asíntotas oblicuas	3	13,04%
No responden	13	56,52%

A continuación, se profundiza en las respuestas según la categorización establecida respecto a dificultades globales y contenidos específicos y sus concreciones específicas:

- Dificultades globales
  - Comprensión

    A1.- Los últimos cinco vídeos, los primeros los entendí muy bien, pero los últimos no.

    A8.- Algunas preguntas no me quedaban resueltas.

    A11.- Nada.

  - Lenguaje

    A22.- Me liaba con las palabras que utilizaba y se me hace difícil imaginarme las situaciones de los ejercicios anteriores.

    A7.- Ciertas expresiones de los ejercicios que aparecen al final del vídeo son difíciles de entender.

- Contenidos específicos
  - Aproximación/Tendencia:

    A5.- Me costó mucho la tendencia y la aproximación.

    A9.- Cuando puede tender una función a $+\infty$ *o* $-\infty$.

  - Asíntotas oblicuas:

    A4.- Algún concepto de asíntota oblicua.

    A10.- El concepto de asíntota oblicua.

    A12.- Definición de oblicua.

El resto alumnos no contestan.

Reflexión

Responde alrededor de la mitad del alumnado, y se pueden dividir en dos grupos de igual tamaño; por un lado, uno de ellos trasmite dificultad global creciente en relación a los contenidos, al lenguaje utilizado y a la abstracción de algunos conceptos. El otro grupo, concreta la diferencia entre tendencia y aproximación, y las asíntotas oblicuas, como los contenidos que les ha supuesto mayor dificultad. Ciertos alumnos no diferencian entre teoría y práctica, además muestran dificultades en la simbolización, comprensión y abstracción de los objetos matemáticos.

d. *Escribe por qué prefieres disponer de videos para el estudio o por qué no.*

Se presentan las respuestas de los 10 alumnos que participan:

> *A1.- Prefiero explicarlo en clase detenidamente y no ver vídeos en casa, porque me quita tiempo y no obtengo nada, porque no lo entiendo.*
>
> *A2.- Me da igual, si luego se explica en clase, no me ha importado verlo.*
>
> *A3.- Si porque lo visualizo.*
>
> *A4.- No es todo ecuaciones, es comprender con mayor claridad en qué consisten las asíntotas, las tendencias y aproximaciones.*
>
> *A6.- A veces se hacían pesados porque había mucha información nueva.*
>
> *A7.- El vídeo está bien, pero yo añadiría una explicación a parte de lo que poner en la definición.*
>
> *A8.- Sí, porque te ayudan a comprender mejor la materia de estudio.*
>
> *A9.- Porque me ayudan a entender la materia.*
>
> *A11.- Te ayuda a visualizarlo, pero se te hace algo más pesado.*
>
> *A12.- Está bien tenerlos para aclarar cosas básicas, pero para el estudio no las usaría.*
>
> *A13.- Sí que me gusta, pero verlos en clase, uno cada día.*

El resto de los 13 alumnos no contestan.

Análisis

En relación a la utilización de los vídeos, el alumnado aporta los resultados que se muestran en la tabla 6. 23, que ya no se van a comentar sino en la reflexión para no ser repetitivos:

VI.23 Tabla 6.23. *Sobre el uso de los vídeos*

Sobre el uso de los vídeos	Nº alumnos	%
Positividad	8	34,78%
Indiferencia	1	4,35%
Preferencia explicación clase	1	4,35%
No responden	13	56,52%

Reflexión

Algo más de una cuarta parte del alumnado manifiesta que los vídeos aportan claridad, visualización y facilitan la comprensión de los conceptos que nos ocupan. Como aspectos negativos refieren que a veces se hacen pesados, que tienen mucha información. Como sugerencia, un alumno comenta que le gustarían más explicaciones en el mismo vídeo.

Un alumno prefiere la explicación tradicional, no quiere visualizarlos en casa porque dice no tener tiempo y no los entiende; esta situación se ha presentado en estudios anteriores como se reflejó en los antecedentes. Otro alumno responde *"me da igual"*, sin aportar valoración justificativa y, por último, otro alumno le ha gustado el formato de visualizar un vídeo diariamente en el aula. Diversidad de opiniones como diversidad de alumnado y un amplio sector que no se manifiesta.

12. Valora el aprendizaje a través de los videos de 1 a 5 (1 poco,..., 5 mucho): ____

Valoración de los vídeos:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
A.-Claridad en la exposición					
B.-Interés del contenido					
C.-El visionado de vídeos me facilita la comprensión de los conceptos					
D.-Me ha gustado esta nueva metodología					
E.-Prefiero esta metodología a la clase tradicional					

A continuación se presentan los parámetros estadísticos relativos a los cinco ítems anteriores:

VI.24 Tabla 6.24. *Resumen estadístico*

GLOBAL	A	B	C	D	E
Media	3,16	3,68	3,42	2,79	2,42
Error típico	0,19	0,24	0,21	0,25	0,30
Mediana	3,00	4,00	4,00	2,00	2,00
Moda	3,00	4,00	4,00	2,00	1,00
Desviación estándar	0,83	1,06	0,90	1,08	1,30
Varianza de la muestra	0,70	1,12	0,81	1,18	1,70
Curtosis	-0,17	0,98	-0,78	-0,86	-0,36
Coeficiente de asimetría	0,32	-0,86	-0,50	0,46	0,61
Rango	3,00	4,00	3,00	4,00	4,00
Mínimo	2,00	1,00	2,00	1,00	1,00
Máximo	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00

Reflexión

La media más alta se encuentra en el interés de los contenidos, seguido de la valoración relativa a como el visionado de los vídeos facilita la comprensión de los conceptos y, el tercer puesto, lo ocupa la claridad en la exposición. Estos resultados son el reflejo del interés del alumnado por la asignatura de Matemáticas y la constatación de que el material audiovisual presentado ha ayudado a visualizar conceptos matemáticos abstractos, siendo todos conscientes de la gran dificultad de la total comprensión en la etapa educativa de estudio. La menor valoración ha sido en relación a la preferencia frente a la clase tradicional, el alumnado muestra cierto rechazo ante los cambios aunque manifiestan aspectos positivos y gusto por la nueva metodología.

VI.4 REFLEXIÓN GLOBAL DEL CICLO

Se comparte plenamente las argumentaciones aportadas por los docentes en el debate inicial previo a la experimentación, que consideran que dentro del "bloque de funciones", lo que más dificultades entraña al alumnado es el concepto de límite; siendo un tema que suscita cierto interés y sobre el que sus preguntas suelen ser relativas a la incomprensión de procesos infinitos. Todos remarcan la importancia de la verbalización en el aula para ir valorando en el alumnado el progresivo grado de comprensión relativo a los conceptos abstractos que nos ocupan a partir del planteamiento de sencillas cuestiones orales que generan interesantes debates grupales. También se ha constatado que hay gran diversidad de niveles competenciales matemáticos en el alumnado objeto de estudio; pero que, en general, no comprenden el contenido matemático en su totalidad; debido, sobre todo, al nivel de desarrollo madurativo alcanzado en relación a su edad y a la dificultad intrínseca de los conceptos. Siendo conscientes de que tras la docencia en 4º ESO, no quedaron suficientemente consolidados los siguientes aspectos: diferencia entre aproximar y tender, discriminación entre tendencia infinita y tendencia asintótica, y concepto de límite.

No se está de acuerdo con algunos de los profesores que creen que no es tan fundamental comprender el concepto de asíntota, que lo más importante es saber cuándo se presenta en una función y encontrar su expresión analítica; ya que consideran que es un concepto que se adquiere en edades más avanzadas. Esto, junto a otras causas, puede ser la razón del remarcado pragmatismo que ha presentado en la mayoría del alumnado y de su prioridad a la aplicabilidad por encima de la comprensión de los conceptos.

La importancia que han dado todos los docentes a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, como referente para el estudio de las tendencias asintóticas, ha podido influir en el test inicial dónde varios alumnos plasmaban asíntota horizontal y vertical cuando era pedida una sola de ellas, ya que en dicha hipérbola equilátera se presentan las dos.

Del discurso de los profesores se descubren dos errores didácticos, el primero sobre los posibles cortes de la función y asíntota horizontal, y el segundo, sobre la afirmación de que la asíntota no pertenece a la gráfica de la función (pudiendo estar incluida, entera o parte, en la gráfica de la función).

En las pruebas iniciales de conocimientos previos se planificaron cuestiones para valorar el análisis e interpretación del comportamiento local y global de las gráficas, ya que fue trabajado en el pasado curso académico; así como cuestiones abiertas para valorar la comprensión de conceptos, siendo conscientes de la información recabada por el equipo docente del pasado curso académico.

Un altísimo porcentaje del alumnado no tiene interiorizado el concepto de tendencia y no se manifiesta al ser preguntado sobre el estudio de la tendencia de la gráfica de una función concreta. Aparecen expresiones del tipo *"se acerca por la derecha"*, *"se acerca por la izquierda"* y *"tender a"* para intentar expresar situaciones de tendencia funcional. Ciertos alumnos sólo interpretan la tendencia de la variable que tiende a infinito, obviando la tendencia finita de la otra variable.

Ante la dificultad de representar en un soporte finito una tendencia infinita, parte del alumnado no interpreta la simbología de flechas para representar dicha situación. Por ello, señalan los valores de la tendencia como los valores finitos que están dibujados próximos a la gráfica. Entre los errores más reseñables están los de relacionar tendencia funcional con los puntos de corte con los ejes de abscisas y ordenadas, hecho que se presentó en otro alumno en el ciclo de investigación del pasado curso académico, y la confusión de tendencia de x con el dominio de la función y la tendencia de y con el recorrido.

Les resulta más fácil representar una función con las características pedidas que analizar una dada, lo que no significa que no presente dificultad para ellos. La simbología de la flecha en la gráfica para representar la tendencia infinita está parcialmente consolidada en el alumnado, ya que la usa alrededor de la mitad del alumnado. Dicho símbolo es utilizado tanto en el avance natural de la recta real, como en la tendencia hacia el infinito negativo. Se perciben dificultades de coordinación de las variables. De hecho, algunos alumnos, presentan el error de intercambiar la tendencia infinita para la variable x con la de la variable $f(x)$, modifican las condiciones impuestas a las variables e incluso incorporan nuevas restricciones. Se detecta una posible conexión errónea de dependencia entre asíntotas horizontales y verticales, ya que algunos alumnos dibujaron una gráfica con parte de las condiciones pedidas y, además, otro tipo de asíntota ajena totalmente al enunciado de la actividad propuesta. Por tanto se podría hablar de una conexión hermanada entre las asíntotas horizontales y verticales.

Además, algunos hacen coincidir estas asíntotas con el eje de ordenadas. Merecen una reflexión las respuestas que consideran funciones constantes como funciones cuya asíntota es la recta determinada por la propia función. Finalmente, se observa una discretización de la recta real y no la interpretan en su infinitud.

Al ser preguntados sobre qué se observa cuando se estudia la tendencia de una función, se detectan confusiones entre conceptos numéricos y geométricos básicos (punto, número, valor y variable), y también la tendencia frente a los conceptos de dirección, dominio, recorrido o monotonía de una función. Cierto sector de alumnado conecta necesariamente la tendencia funcional con la tendencia infinita de una de las variables y, por tanto, con la existencia de asíntotas. Varios alumnos admiten el concepto erróneo de la tendencia hacia un valor considerando sólo la tendencia de una de las variables, pudiendo ser infinita. En otros, subyace la idea de la tendencia finita de las dos variables hacia un número o punto; en ambos casos lo consideran no alcanzable, apareciendo la idea de acercamiento finito. Muchos alumnos consideran punto como sinónimo de valor, y es posible que consideren que ∞ sea un valor. La mayor dificultad se presenta para discriminar entre la tendencia de la función frente a la tendencia de las variables.

Cuando se pide al alumnado que presente un ejemplo de una tendencia numérica de una de las dos variables hacia un valor fijo; por ejemplo, $x = 3$, prácticamente todos los alumnos que contestan, fijan una tendencia para la variable y, considerando una posible relación entre las variables que a veces la escriben como tendencias y otras como igualdades. Algo más de la tercera parte interpretan la tendencia numérica hacia el valor $x = 3$, con la necesaria presencia de una *AV* en $x = 3$, relacionándola con la tendencia hacia infinito de y. Es decir, fijar una tendencia finita a una de las variables implica una tendencia infinita a la otra. Nuevamente aparece la concepción errónea de la inalcanzabilidad hacia el valor al que se tiende.

Cuando se preguntan las creencias sobre *AH* y *AV*, se presenta gran similitud entre las respuestas, aproximadamente la cuarta parte del alumnado afirma que la función nunca tocará a la *AH* ni a la *AV*. Vuelve a manifestarse confusión de las tendencias de la variable x con las tendencias de la variable y. Se observan dificultades con la notación y la formalización para expresar las ideas relativas a tendencia, apareciendo nuevas denominaciones de invención propia del alumnado: *Asíntota de* y*”* o *“recta colocada en el eje* y*”* para nombrar la *AH*, y en el caso de la *AV Asíntota de* x*”* o *“recta colocada en el eje* x*”*. También aparecen invenciones de nuevas conceptualizaciones, como por ejemplo *“tendencia infinita horizontal y vertical”*. Se incide en las asíntotas como rectas cuya importancia es la de límite o frontera, o simplemente focalizan en su pendiente. Ningún alumno impone condiciones conjuntas a la tendencia de las dos variables x e y, presentando en muchos casos restricciones de las condiciones globales o imponiendo condiciones a una de las variables y despreciando a la otra. Aparecen errores conceptuales graves sobre el concepto de asíntota: línea imaginaria que está en la función, recta discontinua, asíntota como valor; entre otras. Sólo tres alumnos utilizan una representación gráfica en el plano para representar ambas asíntotas, sin ser pedido en el enunciado. Las confusiones más reseñables son: variable x con y, igualdad con tendencia (= con →), concepto de recta con su representación, pendiente con *"ir de cierta manera"* o *"ir de manera horizontal o de manera vertical", "función tiende"* por función con tendencia asintótica o *"línea de la función"* por curva de la función; entre otras. Algunos alumnos priorizan el procedimiento del cálculo de la expresión de la asíntota, frente a la conceptualización de la misma. En el caso de la *AH* calculando los límites en el infinito, y en el caso de la *AV*, asociándolo a las raíces del denominador de una función racional. Así mismo, algunos creen que la única posibilidad de *AH* es el eje de abscisas y de *AV* al eje de ordenadas, no pudiendo existir otras posibilidades de asíntotas en el plano.

Cuando se les pide que razonen sobre su creencia de que todas las funciones tienen alguna asíntota o no, la cuarta parte de ellos parece tener claro que no necesariamente, pero sin argumentación que lo sustente y, prácticamente la mitad de ellos no contesta. A partir de sus consideraciones aparecen razonamientos superficiales, con ideas sobre *"limitar, delimitar la función, dar unos valores"* o *Acaparar todos los números reales",* entre otras; que en ningún caso justifican las afirmaciones en profundidad.

A pesar de no haber recibido docencia en 4º ESO, con el fin de recabar información, se preguntó al alumnado sobre las asíntotas oblicuas. Contestó un reducido número de alumnos mostrando imprecisiones y concepciones erróneas; como, por ejemplo, que dejan de ser funciones lineales teniendo *"forma curva"* o *"funciones cuadráticas"*; sólo un alumno afirma que no serán paralelas a ningún eje coordenado, diferenciándose de lo que es conocido por él hasta la fecha.

Ante el elevado número de alumnado que responde erróneamente o no responden a las cuestiones de este test inicial de conocimientos previos, se incidió en la planificación de la posterior experimentación.

En las sesiones lectivas, mediante la metodología de aula invertida mixta, se proyectaron los diferentes vídeos, se produjeron enriquecedores debates en el aula moderados por la investigadora, se realizaron tareas de reflexión, análisis y consolidación de la comprensión de los contenidos que han sido objeto de estudio.

Tras el riguroso estudio y análisis de los diálogos que se produjeron en las sesiones de docencia, se describe aquí un resumen de la reflexión global de las principales aportaciones de los mismos. Nos ayudaron a reconocer ciertas limitaciones o dificultades en la comprensión y dominio en relación a conceptos matemáticos básicos: fórmula y expresión o densidad de la recta real. Han surgido errores relacionados con aproximación y tendencia: sólo consideración como tendencias a aquellas aproximaciones crecientes por números menores al número que se tiende o denominar *"tendencia de un número a otro número"*.

Sigue habiendo sorpresa y desconcierto en los temas relacionados con el infinito, como la consideración de la tendencia a infinito como una aproximación, pero desvinculada de la superación, *la consideración de t*endencia hacia un número suficientemente grande implica tender a infinito o la aceptación del infinito como un valor fijo alcanzable. El alumnado muestra confusión entre tendencia infinita y asintótica, así como mayores dificultades en la comprensión de las tendencias asintóticas cuando x tiende a infinito negativo.

En relación a la función no hay discriminación: entre los elementos fundamentales que la caracteriza, entre ella y su expresión algebraica, expresión funcional de lo que representa y una situación gráfica, entre familias de funciones, sobre todo entre polinómicas y racionales, en el concepto abstracto de función con una representación concreta de la misma y, en especial, entre el comportamiento local y global de las funciones.

También en el aula, se han producido curiosas e interesantes manifestaciones o comparaciones entre concepciones de tipo explicativo, sobre la comprensión o la visualización de conceptos abstractos, con las que pretenden facilitar la comprensión de dichos conceptos, aunque pudiera darse el caso de que produjeran interpretaciones erróneas. A continuación, se muestran algunos ejemplo, como relacionar *"si pasa el punto"* con tender a infinito y, *"si no les pasas"*, tiendes a finito, o concebir la tendencia finita asociada a la geometría finita de la pantalla, y asociación de infinito a la no visibilidad del punto, "*tendencia finita para dentro y tendencia infinita para afuera"*.

Se ha contrastado que la incorporación de nuevos conceptos a los ya conocidos de otros bloques de contenido ha suscitado la aparición de invenciones de nuevos conceptos. También se han producido paralelismos o analogías que provocan errores por intento de acomodación de nuevos conceptos a los que consideran similares, no focalizando en las diferencias.

Se ha percibido que se ha ido avanzando en el itinerario formativo planificado, a pesar de que algunos conceptos funcionales básicos no estaban totalmente adquiridos, ni consolidados.

Globalmente se han confirmado diferentes ritmos y niveles de acercamiento a la idea intuitiva y consolidación de los diferentes comportamiento asintótico. Se ha ido avanzando en la comprensión, aunque seguían manifestándose imprecisiones en el vocabulario asociado a los conceptos que nos ocupan.

Curiosa es la dotación a la asíntota del papel principal de su tendencia en el infinito frente a la curva y la preocupación constante en el alumnado sobre los cortes entre curva y asíntota, en todas sus variedades. El alumnado no acaba de comprender que los posibles cortes, finitos o no, no influyen en el comportamiento de la función en el infinito. Por un lado, en algunos alumnos está enquistada la pretensión de sacar generalidades a partir de un caso concreto o de los ejemplos más habituales. Por otro lado, se han percibido obstáculos de aprendizaje con argumentos que imposibilita la existencia de puntos de corte. Este es el caso de algunos alumnos que no aceptan la posibilidad de que pueda haber alejamientos y acercamientos a modo de oscilación de la curva alrededor de la asíntota. Este hecho es asumido por cierto sector del alumnado como mucho por un número finito de cortes, pero difícilmente imaginable en un número infinito de posibilidades. Este caso, aún presentado con ejemplos concretos y con la ayuda del programa de geometría dinámica GeoGebra, se asume pero no con total convencimiento. Por otro lado, se muestra optimismo ante cierto sector del alumnado que va planteándose nuevas situaciones y propuestas, lo que manifiesta su evolución en la comprensión del marco teórico.

Como innovación en el presente ciclo de investigación, se utilizó la plataforma EDpuzzle dónde se subieron todas las actividades que se propusieron en las cuatro sesiones de docencia del ciclo de investigación anterior, pero no fueron contestadas por la totalidad del alumnado. Se dieron de alta en dicha plataforma y se visualizaron los vídeos, pero hubo absentismo y poca implicación en la respuesta de las cuestiones planteadas, sobre todo en las preguntas de abiertas; por lo que no ha aportado información de interés respecto a la investigación planteada.

Tras las sesiones de docencia se pasó un test validado previamente por expertos para valorar globalmente el grado de consecución de los objetivos planteados, en relación al nivel de comprensión del tema que nos ocupa. Se pretende valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia numérica. Algo más de las tres cuartas partes del alumnado seleccionó las dos opciones correctas sobre tendencias y aproximaciones, pero cuando se pidió la justificación de las mismas se diversificaron los razonamientos. Prácticamente la mitad del alumnado se concentra en focalizar la tendencia como acercamiento, una parte argumenta que por tratarse de aproximaciones cada vez mayores y otra parte se apoya en criterios métricos. Le sigue otro sector que considera la tendencia como la mejor aproximación; después, otros dos grupos reducidos aportan ideas intuitivas o subjetivas sobre aproximación/tendencia y el grupo más pequeño es aquel que confunde representación y conceptos. Las anteriores argumentaciones provocaron en el alumnado diferentes posicionamientos en la selección de las opciones múltiples, en algunos casos resultando opciones incompatibles. Respecto a un análisis transversal e individualizado se ha constatado en varios grupos las siguientes interpretaciones en relación a la tendencia: inalcanzabilidad y/o no superación, pero sin negar un posible alcance. Se han constatado los siguientes errores: consideración de la no unicidad de la tendencia, aseveración de que toda sucesión creciente tiende a infinito y toda tendencia finita de una sucesión creciente es infinita porque tiende a todos los valores a los que se aproxima.

Sin embargo, algo más de la mitad de los alumnos identifican la aproximación y tendencia sobre la curva, pero son muchos menos los que discriminan ambos conceptos. Alrededor del 65% del alumnado ha comprendido que un valor fijado es una aproximación, pero no una tendencia; sólo uno de ellos no comprende la reversibilidad de que la tendencia también es una aproximación. Se reduce ligeramente el porcentaje de los que visualizan que dicha situación también ocurre cuando nos centramos en la tendencia asociada a las abscisas de los puntos que tienden a otro punto. Sin embargo, la comprensión de que la tendencia mejora cualquier aproximación prefijada, se puede decir que es el aspecto más complicado de comprender para el alumnado, por confusión u omisión en la respuesta.

Cuando se pretende valorar la identificación y discriminación entre la tendencia infinita en el eje XX', se presenta una situación análoga. Se puede afirmar que una gran mayoría de los alumnos, casi las tres cuartas partes del alumnado, comprenden que un punto P del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto A prefijado. Dichos alumnos, salvo uno, son capaces de ver la correspondiente analogía con el infinito negativo. Por tanto, la comprensión del infinito negativo puede presentar más dificultades en dicho alumnado, esta interpretación ya surgió en la experimentación realizada en el curso anterior. Alrededor del 20% no diferencian entre infinito positivo y negativo, simplemente asocian la tendencia infinita con el alejamiento por la derecha o por la izquierda, hacia cualquier punto.

Dichos resultados concuerdan con lo que la mayoría de los alumnos (65,22%) entienden sobre la tendencia infinita de un punto: la necesidad de la tendencia a infinito de sus dos coordenadas, seguida de la idea de la superación de cualquier valor fijo por parte de las coordenadas del punto de la gráfica. El porcentaje de alumnos que comprenden que también se tiene una tendencia infinita en un punto cuando una de las variables tiende a un valor fijo y la otra a $\pm\infty$ se reduce considerablemente, estando cercano a la cuarta parte de los mismos, siendo ligeramente superior los alumnos que lo consideran cuando tienda a infinito la variable y.

La comprensión y aceptación de todas las posibilidades de caracterización de tendencia infinita sobre la gráfica de una función como válidas para asegurar la tendencia a infinito es clave para la comprensión de los comportamientos asintóticos que se explican posteriormente; siendo identificada dicha situación por alrededor de una décima parte del alumnado.

Algo más de las tres cuartas partes del alumnado comprende que el comportamiento asintótico no sólo es una aproximación y que, el hecho de que una recta no corte a la curva, no implica comportamiento asintótico. Complementariamente, algo más de una cuarta parte del alumnado no discrimina entre que una curva se aproxime o tienda a una recta, por lo que valida que se tenga un comportamiento asintótico cuando la gráfica de la curva se aproxima a la gráfica de la recta.

Respecto a la valoración de la identificación, discriminación, generalización y sistematización de la asíntota horizontal, vertical y oblicua, tras un estudio particular de cada tipo, se presentan los siguientes datos globalizados, tres quintas partes del alumnado considera que la curva puede ser cortada por la asíntota oblicua, algo mayor es el porcentaje que ofrece la posibilidad para AH y solamente una tercera parte lo considera posible para la AV. Prácticamente la mitad del alumnado identifica y relaciona la expresión algebraica de cada tipo de asíntota. En relación a lo que se podría considerar la opción más completa que determina las propiedades de las asíntotas horizontales y verticales, es contestada correctamente por un porcentaje ligeramente superior a la mitad y en el caso de las oblicuas, por un 40% de los mismos. En general, casi la totalidad del alumnado es capaz de abstraer la propiedad de que no puede existir una recta más próxima a la curva que la propia asíntota en la tendencia infinita, para el caso de la horizontal, van disminuyendo los que lo consideran también para la vertical, llegando al 83% el porcentaje que lo visualizan para la asíntota oblicua.

Otro punto de interés es la valoración de las interpretaciones o concepciones de los alumnos acerca de las asíntotas. Para ello, se pidió al alumnado un ejemplo de tendencia numérica a $x = 3$, como se hizo en la prueba inicial, sin obtener éxito, y se mejoró sustancialmente los resultados, ya que ha sido contestada correctamente por alrededor de una tercera parte del alumnado. Sin embargo, ciertos alumnos limitan la tendencia a una aproximación, ya que simplemente fijan un valor o valores numéricos próximos, por defecto y/o exceso, al valor fijado. Otros conectan erróneamente de tendencia con la presencia de asíntotas horizontales y/o verticales. Como novedad, se presentan confusiones entre el concepto de tendencia numérica y los diferentes procedimientos de cálculo de límites de funciones, formalizados en el presente curso y no conocido en 4º ESO, ya que se han presentado en las respuestas diferentes expresiones funcionales $f(x)$, que tienen en común la relación con el estudio del $\lim_{x\to a} f(x) = b$, con diferentes posibilidades de a y de b (variando entre 3 o $\pm\infty$) en dicha expresión. Sin duda, estas respuestas se deben a una priorización del cálculo de límites de alguna de las variables frente al propio concepto de tendencias.

Tras la experimentación se vuelve a requerir al alumnado que aporte sus creencias sobre las asíntotas horizontales y alrededor de una quinta parte del alumnado responde correctamente compartiendo la expresión algebraica correcta y la idea de aproximación/tendencia. Lo que varió entre ellos fue la posibilidad de que la curva toque/corte o no a la AH y la importancia de la relación métrica relativa a que la distancia entre la asíntota y la curva tiende a cero. Sobre una tercera parte, es el porcentaje de los alumnos que responden correcto parcialmente, aunque tienen cierto grado de comprensión, les perjudica su mala expresividad. En dichas respuestas, se han constatado errores léxicos, conceptuales o falsas imposiciones. Por último, el resto del alumnado contesta incorrectamente, y se perciben errores relativos tipificados en la reflexión más específica de dichos apartados y que aparecerán en el capítulo final de esta tesis.

Respecto a la asíntota vertical, hay paralelismo respecto a la horizontal, se mantienen los mismos porcentajes, llegando uno de ellos a añadir *"Igual que AH"* y se pierde mayoritariamente la imposición métrica de que la distancia entre la asíntota y la curva tienda a cero. Prácticamente se perpetúan los errores analizados para AH, salvo algunas puntualizaciones específicas para cada tipo de asíntota. Varios alumnos intentan hacer una analogía entre *AH* y *AV*, pero el hecho de que posean propiedades diferentes, hace que se produzcan errores. Respecto a las respuestas correctas, se centran en: expresión algebraica, idea de aproximación/tendencia, comportamiento cuando x o y tiende a infinito, la importancia de que la curva toca/corta o no a las asíntotas y propiedades métricas enfocadas en que la distancia entre la función y la asíntota tienda a cero. En el caso de *AV* las condiciones que el alumnado impone son menos estrictas y en varios casos se percibe una traslación de las respuestas dadas para las *AH*, cambiando simplemente algunas palabras.

Respecto a las respuestas parcialmente correctas se percibe la importancia que dan ciertos alumnos a los procedimientos de cálculo para la búsqueda de la expresión de la asíntota por encima de la comprensión del concepto de la misma, aparecen errores léxicos y de expresión y la consideración del ∞ como un valor alcanzable al que se le imponen condiciones. En la mayoría de las respuestas se percibe un alto nivel de comprensión frente un bajo nivel de dominio verbal.

En cuanto a las respuestas incorrectas, se perciben graves confusiones de conceptos geométricos y analíticos básicos relativo al estudio de funciones. Combinación sin sentido de límites, tendencia y recorrido. No discriminación entre tendencia asintótica y ramas infinitas. Errores de considerar la asíntota como la rama de la gráfica de la función con tendencia asintótica y, nuevamente, la priorización del cálculo de límites sobre la comprensión del concepto, a modo de receta.

Al ser preguntados de nuevo por la creencia si todas las funciones tienen alguna asíntota y su justificación, respecto a la prueba inicial, asciende alrededor del 40% el alumnado que responden parcialmente correcto mediante razonamientos aislados, ideas inconexas y algunas afirmaciones sin justificar. Ciertos alumnos discriminan los comportamientos asintóticos frente a las ramas infinitas y se ayudan de ejemplos de algunas familias de funciones. Ellos comprenden que en la tendencia asintótica aparece *"el concepto de infinito"* pero, para algunos, como una condición necesaria y suficiente. Otros alumnos remiten al estudio algebraico referente al algoritmo mecánico de cálculo, focalizando la existencia de asíntotas solamente por criterios algebraicos o de posibilidad de hacer el cálculo. Y otro sector, con un nivel competencial más bajo, basa su razonamiento en afirmaciones difusas y en argumentos probabilísticos carente de toda fundamentación teórica.

En relación a la asíntota oblicua, son escasos los alumnos que responden correctamente exponiendo la expresión algebraica de la AO, utilizando las palabras de acercamiento/tendencia de las dos variables o comportamientos análogos en el infinito de la curva y recta, y la relación métrica que tiende a cero en relación a la AO y la gráfica de la función. Aunque no se muestra un dominio total en el lenguaje matemático asociado, sí se comprende el concepto que nos ocupa; salvo un alumno que relaciona perfectamente las tendencias de coordenadas de puntos de curva y recta, e interpreta una coordinación entre el movimiento de puntos de la curva asociados a movimientos de puntos de la recta (uno arrastra a otro).

Respecto a las respuestas parcialmente correctas, se pueden clasificar en tres niveles. Por un lado, los que hacen una interpretación aislada de la AO como recta sin relación con función ni la gráfica, por otro lado, los que focalizan sobre el interés en su existencia a partir del cálculo de su expresión y, por último, los que manifiestan ideas confusas.

El primer subgrupo se centra sobre todo en la importancia de la pendiente de la AO, apareciendo denominaciones del tipo *"recta oblicua a la función"* o *"tendencia infinita no paralela"*, relacionando las tendencias con paralelismos o perpendicularidades y no con las variables implicadas.

El segundo subgrupo intenta justificar únicamente su existencia, unos a partir del cálculo de su expresión $y = mx + n$, con el procedimiento de búsqueda de m y n a partir del algoritmo de los límites; otros discriminando la no existencia de la *AO* si se tiene conocimiento de la presencia de la *AH* y, el resto, asociando la *AO* necesariamente con las funciones racionales, recordando la relación que se debe cumplir entre los grados de los polinomios numerador y denominador.

El tercer subgrupo, el más numeroso, responde incorrectamente manifestando ideas confusas, incoherencias relacionadas con una falta de comprensión de conceptos asociados a la geometría analítica y al análisis de funciones. Aparecen expresiones del tipo *"Tendencia de una función a una ecuación. Función que va de manera oblicua. Una recta diagonal que no corta la función pero pasa tangente a ella".* Ciertos alumnos imponen condiciones restrictivas a las *AO*, como por ejemplo la obligatoriedad de ser la *AO* la recta $y = x$, o la obligatoriedad de cortar a $f(x)$. Por todo ello, se pone de manifiesto que no se ha alcanzado el estadio autónomo que se pretendía.

Es oportuno reflejar que buena parte del alumnado se basa en la ecuación explícita de la recta, $y = kx + p$, pero omiten la obligatoriedad de que $k \neq 0$ para eliminar a las asíntotas horizontales.

Al ser preguntado el alumnado sobre la justificación de poder ser o no ser la ecuación de una asíntota, $y=px^2+3$ ($p\neq0$), el 35% que responden correctamente teniendo claro que dicha expresión no corresponde a una función afín cuya gráfica es una recta, concretan que es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que crece muy rápido, entre otros comentarios. El resto de alumnado responde incorrectamente y se pueden clasificar en tres subgrupos, según presentan errores conceptuales, confusión en el enunciado de la pregunta o incoherencias. El primero no diferencia entre funciones lineales y cuadráticas, ni domina las propiedades de cada una de ellas, ya que se asegura que dicha expresión tiene pendiente e incluso varios algunos afirman que se trata de una ecuación afín del tipo $y = mx + n$. El segundo subgrupo busca las asíntotas de la función $y = \ px^2 + 3$ y, el tercero, plasma incoherencias del tipo *"habría que probar con el valor 0"* o "*buscar las raíces de* $\mathrm{y} = 0$".

¿Puede $y=k$ ser la ecuación de una AV? Algo más de la mitad del alumnado responde correctamente y, además, la mitad de los mismos lo justifica aportando que pudiera tratarse de una posible *AH* por su expresión algebraica y por tratarse de una recta paralela al eje de abscisas; por tanto, no puede ser una AV. La otra mitad, aunque la respuesta es correcta manifiestan imprecisiones u omisiones ya detectadas en anteriores ítems. El resto de alumnado o bien confunden *AH* y *AV*, aportando, en la mayoría de los casos, respuestas incoherentes carentes de interés, como por ejemplo que *"el valor* k *que hace* 0 *al denominador"*, que no tiene ningún sentido con el enunciado de la pregunta, ninguno aporta relaciones con la tendencia de la función.

Ante la pregunta justificada sobre si la ecuación $y = px + q$ puede ser asíntota horizontal o no, un pequeño sector de alumnado (17,39%) contesta correctamente, estudiando con diferentes niveles de profundización las diferentes posibilidades de los parámetros p y q. No llegando ninguno a afirmar que si $p \neq 0$, nunca sería *AH*, pudiendo ser una AO, con distintas posibilidades de función afín o lineal, según los valores nulos o no nulos de q.

Prácticamente la mitad de los alumnos responden de manera parcialmente correcta ya que no son capaces de pensar en el valor $p = 0$, la aparición de los parámetros p y q, en la expresión $y = px + q$ les imposibilita ver que puedan ser nulos. Por ello, no ven la posibilidad de que para $p = 0, y = q$ es posible candidata a AH; ni el caso particular, $p = q = 0, y = 0$ pudiendo ser la AH el propio eje de abscisas. Dentro de ellos, un pequeño grupo focaliza en el estudio del $lim_{x\to+\infty} f(x)$, razonando que no se cumple que el límite en el infinito sea una constante; y, por ello, responden a la cuestión de forma negativa.

En el resto del alumnado, que responden incorrectamente, se reiteran errores conceptuales heredados de la geometría analítica, incoherencias que intentan relacionar las asíntotas necesariamente a funciones racionales, y alumnos que no comprenden el enunciado de la pregunta, intentando estudiar si la función $y = px + n$ presenta AH.

Cuando la cuestión es globalizada, y se pregunta sobre cuántas asíntotas de cada tipo puede tener una función, se registra un bajo porcentaje de respuestas correctas e incompletas. Mayoritariamente el alumnado ha comprendido que las asíntotas verticales pueden presentarse de forma infinita, le sigue la comprensión en relación a la AH y, por último, en lo que respecta a la asíntota oblicua, se presentan unos porcentajes muy bajos. El alumnado parece tener dificultades en generalizar.

A fin de recabar información individualizada de cada alumno, deberán realizar una autoevaluación de su propio proceso de enseñanza-aprendizaje a través de los vídeos, en relación a los contenidos, lo no comprendido, cuantificación y justificación de la ayuda en la comprensión del contenido matemático y la aceptación o preferencia del vídeo como recurso válido.

Los alumnos que contestan, respecto a los contenidos, se pueden clasificar en tres grupos equitativos. Por un lado, los que inciden en aspectos relativos a límites y tendencias globalizados para resumir los contenidos tratados. Por otro lado, el segundo grupo pone el énfasis en la visualización de asíntotas y tendencias; es decir en las propiedades globales de las funciones a partir de sus gráficas. Y por último, el grupo restante, y más numeroso, no responde concretando contenidos, sino manifestando que las explicaciones les han ayudado a comprender el tema que nos ocupa.

Respecto a lo que no han comprendido, sólo se manifiesta alrededor de la mitad del alumnado que se dividen en dos grupos de igual tamaño; por uno de ellos trasmite dificultad global creciente en relación a los contenidos, al lenguaje utilizado y a la abstracción de algunos conceptos. El otro grupo, concreta la diferencia entre tendencia y aproximación, y las asíntotas oblicuas, como los contenidos que les ha supuesto mayor dificultad. Ciertos alumnos no diferencian entre teoría y práctica, además muestran dificultades en la simbolización, comprensión y abstracción de los objetos matemáticos.

En cuanto a la cuantificación y justificación de la ayuda de los vídeos en la comprensión de los contenidos, ligeramente superior a la quinta parte del alumnado comparte que los vídeos le han ayudado bastante a profundizar en el comportamiento y visualización de las funciones, algo más de la décima parte considera que le ha ayudado poco, y un pequeño sector muestra valoración variable pudiendo en algunos casos considerarse contradictoria.

Al proponerles reflexionar sobre su preferencia de disponer de material audiovisual, más de una cuarta parte del alumnado manifiesta que los vídeos les ha aportado claridad, visualización y facilidades para la comprensión de los conceptos que les ocupa. Como comentario reseñable es la presencia de respuestas duales, un alumno refiere reducir la densidad en la concentración de la información de los vídeos, frente a su compañero que demanda más explicaciones en cada vídeo. También se manifiesta que ha gustado el formato de visualizar un vídeo diariamente en el aula, sin embargo otro prefiere la explicación tradicional, ya que no quiere visualizarlos en casa porque no tiene tiempo y no los entiende. Esta situación se ha presentado en estudios anteriores como se mostró en los antecedentes de este estudio. Cierto alumno responde *"me da igual",* respuesta común en los adolescentes, sin aportar valoración justificativa. Diversidad de opiniones como diversidad de alumnado y un amplio sector, alrededor de la mitad, que no se manifiesta.

Finalmente, se pide una evaluación global sobre el aprendizaje a través del visionado de los videos, valorando la claridad en la exposición, el interés del contenido, la facilidad en la comprensión de los conceptos, el gusto por esta nueva metodología y la preferencia frente a la metodología de la clase tradicional de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho). La media más alta se encuentra en el interés de los contenidos, seguido de la valoración relativa a cómo el visionado de los vídeos facilita la comprensión de los conceptos y, el tercer puesto, lo ocupa la claridad en la exposición. Estos resultados son el reflejo del interés del alumnado por la asignatura de Matemáticas y la constatación de que el material audiovisual presentado ha ayudado a visualizar conceptos matemáticos abstractos, siendo todos conscientes de la gran dificultad de la total comprensión en la etapa educativa de estudio. La menor valoración ha sido en relación a la preferencia frente a la clase tradicional, el alumnado muestra cierto rechazo ante los cambios aunque manifiestan aspectos positivos y gusto por la nueva metodología.

CAPITULO VII

VII CUARTO CICLO DE INVESTIGACIÓN

La experimentación del cuarto, y último ciclo de investigación, se desarrolló, al igual que el anterior, en el IES María Moliner de Laguna de Duero en la asignatura de Matemáticas II de 2º Bachillerato. La investigadora es nuevamente la profesora del grupo experimental de 1º Bachillerato del curso académico pasado, con la particularidad que está formado por el mismo número de alumnos, es decir 23, pero no están en dicho grupo 5 de los antiguos alumnos por no haber promocionado (algunos repitiendo curso, otros cambiando de modalidad al Bachillerato de Ciencias Sociales o por abandono del centro para cursar un ciclo formativo de grado medio) y hay 5 incorporaciones nuevas: 3 alumnos repetidores, 1 alumno nuevo en el centro proveniente de México y 1 alumna que ha cambiado de la modalidad de Tecnología a Ciencias de la Salud.

VII.1 PLANIFICACIÓN

La planificación para este último ciclo, dando continuidad al anterior, se centra en los siguientes focos, que se recuerdan nuevamente, según el orden de temporalización:

- Valoración del punto de partida y acuerdos con el Departamento de Matemáticas relativos a la temporalización de contenidos, comenzando con el Bloque relativo a Análisis, para dar conexión al tercer trimestre del pasado curso académico.
- Ejecución de una propuesta didáctica basada en una metodología de AI más pura, disponiendo de las horas lectivas asignadas para la implementación de metodologías activas.
- Profundización en la implementación de TIC (Tecnologías de la Información y el Conocimiento), TAC (Tecnologías del aprendizaje y la comunicación) y herramientas web 2.0 en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Realización del test globalizado validado por el comité de expertos en el ciclo anterior.
- Reflexión global del presente ciclo de investigación.

VII.2 ACCIÓN

Las acciones asociadas llevadas a cabo en este ciclo se pueden resumir en cinco grandes bloques:

- Valoración punto de partida.
- Sesiones de docencia: metodología y recursos utilizados.
- Plataforma EdPuzzle.
- Test global validado por expertos.
- Valoración global del alumnado participante en los dos ciclos de investigación.

La concreción de todos los aspectos relativos a cada uno de los anteriores bloques se especificará en el siguiente apartado.

VII.3 OBSERVACIÓN, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

A continuación se presenta la fase de observación de este ciclo en el que tienen lugar el análisis y la discusión de la experimentación realizada.

VII.3.1 Valoración punto de partida curso académico 2018/19

Como la investigadora fue la misma profesora del pasado curso escolar, se tiene conocimiento global de la dinámica de grupo así como información individualizada de los resultados académicos de cada uno de los alumnos, salvo de los cinco nuevos, cuyos informes fueron facilitados por sus profesores del pasado curso escolar, a excepción de uno de ellos que provenía de México, del que también se aportaron informes pertinentes.

Por ello, no se consideró necesario pasar un test inicial de conocimientos previos ya que estos alumnos eran conocidos por la profesora investigadora, unos porque fueros sus alumnos en el curso pasado y en otros, por haber sido recabada la información necesaria por diferentes vías.

Dicho alumnado tiene muchas diferencias en el nivel competencial matemático fruto de su historia escolar y fue contrastado por la investigadora en el desarrollo del curso académico anterior. Dicha diversidad aportó gran riqueza en la investigación llevada a cabo, como ha quedado reflejado en el capítulo anterior. En general, muestran buen comportamiento, alto interés, motivación y actitud positiva ante la asignatura; aunque también hay un gran abanico en el rendimiento académico como refleja el amplio espectro de calificaciones. Por un lado, hay 4 alumnos que tienen pendientes las Matemáticas I y, por otro, hay otros 4 que obtuvieron la calificación de sobresaliente;

además, un amplio sector de dicho alumnado, refiere altas aptitudes matemáticas y su meta en el presente curso académico es alcanzar una alta calificación para poder optar al grado que desean.

VII.3.2 Desarrollo de las sesiones de docencia

A continuación se presenta la fase de observación de este ciclo en el que tienen lugar el análisis y la discusión de la experimentación realizada. En los ciclos anteriores se optó por utilizar metodologías mixtas en relación al aula invertida, ya que se modificaron parcialmente las premisas que se debían cumplir ya especificadas en el correspondiente marco teórico. Como novedad en el presente ciclo, no se visualizarán los vídeos en el aula, por lo que se acerca más a las características definidas como AI más pura.

El periodo lectivo dedicado a este último ciclo de investigación se redujo respecto al anterior, básicamente se justifica dicha elección por varios motivos: la gran extensión de contenidos de la asignatura de Matemáticas II, la organización temporal de 2º Bachillerato, la investigación debe ser ecológica y no debe perturbar la docencia; además, no se trata de un material didáctico novedoso para la mayoría de los alumnos. Las sesiones lectivas corresponden a la última semana del mes de febrero.

Por todo ello, se opta por utilizar otra forma de docencia utilizando metodologías activas el aula en los limitados periodos lectivos asignados a dichos contenidos y así realizar actividades de un nivel cognitivo superior.

En el aula se produjeron interesantes debates moderados por la investigadora, se realizan tareas de reflexión, análisis y consolidación de la comprensión de los contenidos que han sido objeto de estudio. Se resolvieron individualmente y por parejas actividades relacionadas con la tendencia funcional, la representación de funciones y la relación de situaciones reales o situaciones problemáticas dónde aparecen tendencias asintóticas dónde se debe aplicar el conocimiento teórico. Retomando conversaciones sobre conceptos con carácter cíclico, tras la visualización de los vídeos por parte de los alumnos fuera del aula, se produjeron menos diálogos que en el ciclo anterior, pero no menos interesantes ya que el objetivo de los mismos era obtener observaciones, precisiones o apreciaciones que no surgieron en el curso anterior, lo que muestra la evolución en los razonamientos del alumnado, nos aportan evidencias de los progresos en la comprensión de los contenidos y la apertura de nuevas vías de conocimiento.

Los diálogos llevados a cabo en el aula se encuentran transcritos íntegramente en el ANEXO X.5.2 con anotaciones al pie de página con comentarios de la investigadora interpretando las diferentes aportaciones del alumnado así como las intervenciones de ella misma con el fin de guiar el proceso de aprendizaje, y en algunos casos, su figura es de moderadora, aportando serenidad ante los conflictos dialécticos y, en otros casos, a modo de cierre de sesión, concluye clarificando ideas y consolidando conocimientos. Tras el riguroso estudio y análisis de los diálogos que se produjeron en las sesiones de docencia en el cuarto ciclo de investigación, se describe aquí la reflexión global de los mismos.

En los primeros diálogos, a modo de consolidación, se recapitula con el alumnado sobre la diferencia entre tendencia y aproximación. A pesar de la docencia previa del curso pasado, relativa a límites y a asíntotas, un número muy reducido de alumnos sigue manifestando afirmaciones erróneas. Estos alumnos están bien identificados, y se trata de aquellos que en el curso pasado no hacían declaración alguna, porque estaban lejos de comprender los conceptos tratados o algunos de los nuevos alumnos del curso que han tenido el primer contacto con el contenido teórico mediante los vídeos. En el presente ciclo, siguen cometiendo errores, pero comparten sus pensamientos y de los diálogos se desprende que están en un proceso de aprendizaje positivo. Por una parte, se manifiesta el error de discriminar entre tendencia limitada a puntos y aproximación restringida a rectas, posiblemente porque asocian el estudio de tendencias con el cálculo de límites cuya búsqueda es un valor y en la representación de funciones se ha trabajado la aproximación de las curvas a rectas cuando había comportamientos asintóticos. Por otra parte, cierto sector considera tendencia y aproximación como sinónimos.

Sin embargo, también han aparecido interesantes conexiones verbales o comparativas entre conceptos de tipo explicativo, como muestran algunas expresiones novedosas como algunas que se recuerdan a continuación:

“tender es aproximarse al máximo”, aunque también puede ser una fuente de error.

“la aproximación es mejor cuando es menor”, volviendo a incidir prioritariamente en las sucesiones crecientes.

“tender más que” considerando que tiende más a una mejor aproximación que a otra más alejada, introduciendo un criterio comparativo entre tendencias, lo que es erróneo porque la tendencia es única, pero es interesante entre posibles aproximaciones.

“la aproximación pueden ser muchas, pero la tendencia no”, como acercamiento hacia la unicidad de la tendencia, por extensión, también al límite y dejando a la aproximación muchas opciones, por un lado, las aproximaciones pueden ser a más de un número o valor y un número puede tener muchas aproximaciones.

Cuando se pretende hacer un estudio completo del comportamiento global de la función algunos alumnos no son consciente de las dos posibles tendencias, según x tienda a infinito negativo o positivo, queriendo dar una respuesta genérica y unificada a la tendencia de la función, cuando no tienen por qué estar conexionadas; incluso uno de ellos quería intercambiar el dominio por recorrido, y viceversa, como si fuese igual una función que su inversa.

No hay unificación de criterio ante el comportamiento de la función exponencial $y = a^x$ por la izquierda para $a > 1$. Unos consideran que tiende a menos infinito, otros a infinito, otros a cero y, la mayoría, no se pronuncia. Los dos primeros grupos se han quedado con que x tiende a infinito, importando el signo o no, los terceros se han centrado en la tendencia de y, cuando x tiende a infinito negativo, que es realmente lo que se preguntaba; y la mayoría no se manifiestan, posiblemente ante el conflicto en el estudio conjunto de las tendencias de las dos variables.

Algunos alumnos imponen erróneamente a la asíntota ciertas condiciones necesarias y suficientes que se debieran cumplir siempre. Por ejemplo, imponer a la asíntota la obligatoriedad de acercamiento, pero sin pasar, y la imposibilidad de cruce con la función, circunstancia que supondría la anulación de la consideración de asíntota como tal.

Se puede afirmar que no todo el alumnado domina en profundidad la conectividad entre el campo algebraico y geométrico, ya que cierto alumno no relaciona que fijado cierto valor de la variable x, el hecho de igualar los valores de la variable y de la curva y de la recta, es un posible punto de corte de la función con la asíntota. La focalización de las preocupaciones de ciertos alumnos responde a intentar canalizar patrones visuales respecto a la tendencia asintótica que no acaban de concretar, como la búsqueda de una situación que se cumpla en todos los casos, frente a otros que son capaces de abstraer la variable matemática que subyace. Ejemplo de lo anterior es la preocupación de un alumno que muestra inquietud por imposiciones menores, como el hecho de preguntar si la aproximación de la curva hacia la asíntota es *"por encima o por abajo"* a lo que le responde otro alumno, que en cualquier caso, *"sigue la línea"* que es su manera particular de expresar que tengan análogo comportamiento en el infinito.

La mayoría del alumnado va diferenciando entre la tendencia de x y de y, además van conectando el estudio conjunto de las tendencias de las dos variables en una función, la comprensión no es fácil. Ante el comentario de un alumno *"la asíntota horizontal es una recta que tiende a infinito"*, que muestra una visión muy simplista de la misma, se posiciona el alumnado en dos sectores. Uno de ellos asocia que cuando un punto se va *"hacia infinito"*, las dos variables también tienden a infinito¸ frente a otro que diferencia entre una tendencia a infinito de la variable x con *"que se va"* y otra tendencia finita de la variable y con *"que no se va"*. Al primer grupo le parece contradictorio que el punto, como *"un todo"*, tienda a infinito; y sin embargo, que las y, *"una parte"*, tienda a una constante. Nuevamente aparece la relación del exterior de la pantalla con el infinito, ya que manifiestan que cuando un punto se va fuera de la pantalla consideran que va al infinito.

La posibilidad del toque o corte de la función y asíntota ha sido sin duda, la mayor preocupación compartida por el alumnado, demandándose diversidad de cuestiones en torno a ella. Por un lado, muchos alumnos ven incompatible dicha posibilidad con la explicación de un comportamiento asintótico, mezclándose conceptos espacio/temporales junto con cuantificadores en sus razonamientos. Por otro lado, un grupo menor de alumnos trata de justificar que siempre podrá haber un alcance entre la función y la asíntota. Hay diversidad de razonamientos, entre ellos el de un alumno que, influenciado por la paradoja de Zenón, confunde la tendencia asintótica con la suma de una sucesión geométrica de razón menor que 1, que es un límite y, por tanto, sí que es un valor finito y alcanzable, dicha conexión no tiene sentido en el caso que nos ocupa. Por otra parte, para la asíntota oblicua, tampoco había unanimidad al respecto, habiendo alumnos que interpretan que la función no debe traspasar nunca a la asíntota oblicua, teniendo una funcionalidad de *Acorralamiento”* e incluso otros alumnos en los que parece producirse un desajuste en su percepción y consideran que la curva de la función y la asíntota deben coincidir en todo su dominio.

La representación de funciones es un estándar de aprendizaje de gran importancia en 2º de Bachillerato, por lo que se incidió en ello en las sesiones de docencia con la ayuda del programa GeoGebra. Se estudiaron en profundidad las propiedades locales y globales de las funciones que se presentaban con su expresión algebraica. Se trabajó con funciones que presentaban diferentes combinaciones de los diferentes tipos de asíntotas y, en general, se considera que se alcanzó el nivel competencial fijado para el nivel educativo que nos ocupa.

VII.3.3 Estructura de la plataforma EDpuzzle

El propio alumnado pidió a la investigadora que facilitase el acceso a la plataforma EDpuzzle para visualizar de nuevo los vídeos y poder refrescar los contenidos. Este hecho es valorado de forma muy positiva, por un lado porque es reflejo del interés del alumnado y por otro, por la optimización de los materiales creados ya que van a ser reutilizados por el alumnado y puestos a disposición de otros nuevos alumnos que presentan dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y les facilitará la comprensión de los conceptos de estudio.

Como propuesta de mejora, se intentará potenciar al máximo la participación más activa del alumnado en la plataforma EDpuzzle y optimizar su uso, ya que se utilizó en el pasado ciclo y que volverá a ponerse en marcha en el presente. Como se expuso en la reflexión del ciclo de investigación anterior, se percibió que según se avanzaba el itinerario formativo iba en aumento el número de alumnos que se limitaban simplemente a visualizar los vídeos pero no a razonar en profundidad sobre las respuestas abiertas e incluso algunos no contestaban. Para conseguir dicho fin, y evitar las abstenciones en las respuestas, se incidió en dos discursos por un lado motivacional intrínseco y extrínseco; y por otro, como refuerzo positivo para mejorar la calificación final individual. Por una parte, se intentó convencer al alumnado sobre la importancia de verbalizar sus razonamientos para poder acercarse a su nivel de comprensión y poder ayudarlos individualmente a proseguir un fructífero proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, además, dicha tarea de visualización y contestación a los ítems propuestos se les ponderaría dentro del apartado de evaluación y calificación, relativa al trabajo individual y tareas propuestas por el profesorado, aprobado en la programación relativa a la asignatura por el correspondiente Departamento de Matemáticas del IES.

Se creó un nuevo aula en dicha plataforma on-line actualizando al nuevo alumnado e incorporando los vídeos del pasado curso académico junto con las actividades al final de cada vídeo y el test final validado por el comité de expertos.

VII.3.4 Análisis de las respuestas al test de expertos

En el presente curso académico (2017-2018), se cuenta con 23 alumnos de 2º de Bachillerato, pero 3 de ellos, por abandono de la materia, no se han dado de alta en la plataforma Edpuzzle y, por tanto, no han contestado a este test de expertos. Por todo ello, no hay relación exacta entre la denominación de los alumnos de este ciclo con los del anterior por no mantener una numeración no correlativa, pero sí que están identificados, como aparecen en la siguiente tabla:

VII.1 Tabla 7.1. *Identificación de alumnos de 1º y 2º de bachillerato*

1º	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2º	x	18	x	2	x		19	4	6	9	13	20	11	x	10		x	8	12	7	15	16	

Han participado activamente 20 alumnos de 2º Bachillerato de Ciencias. Los alumnos denominados como A1, A3, A5, A14 y A17 en el curso anterior relativo a 1º Bachillerato no se encuentran en el centro y dicha asignación ha sido dada a los nuevos alumnos incorporados en la experimentación; por otro lado, los denominados A6, A16 y A23, aunque participaron en el ciclo anterior, en el presente curso no se dieron de alta en la plataforma y, por tanto, no se tiene información de ellos, respecto al test final de expertos. A continuación, se transcriben todas las preguntas con el objetivo correspondiente y el análisis de las respuestas que emitieron los alumnos en cada una de ellas. Las respuestas de los alumnos están registradas en la plataforma, de modo que se sabe los alumnos que han seleccionado cada opción y la propia plataforma informa sobre el porcentaje de alumnado que responde correcta o incorrectamente. Más aún, la plataforma registra las respuestas abiertas justificativas de los alumnos, que son las que permiten conectar con su pensamiento, con su posible comprensión, y, por ende, establecer el correspondiente análisis. La plataforma redondea los porcentajes, pero en las tablas que se muestran aparecen con dos cifras decimales. Como ejemplo, en el primer ítem se muestran las gráficas de los porcentajes que elabora la propia plataforma, pero en el resto, solamente se presentarán tablas numéricas elaboradas por la investigadora para incidir en los aspectos más interesantes para nuestro estudio y también analizar combinaciones de ítems.

Se volvió a pasar a los alumnos el mismo test de expertos del ciclo de investigación anterior, con el fin de categorizar y sistematizar las mayores dificultades en la comprensión de conceptos así como los errores de interpretación descubiertos en todos los ciclos de investigación, incluido el presente, y sobre todo analizar cuáles son aquellos que persisten en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas. También se valorará la evolución global de comprensión de los conceptos asociados al de asíntota.

Como novedad en este ciclo se envió al alumnado por correo electrónico un enlace a un cuestionario con los formularios de Google que se encuentra en el ANEXO X.5.3 como valoración global de toda la experiencia llevada a cabo.

A continuación, se presentan las preguntas del test, en cursiva, y el análisis posterior.

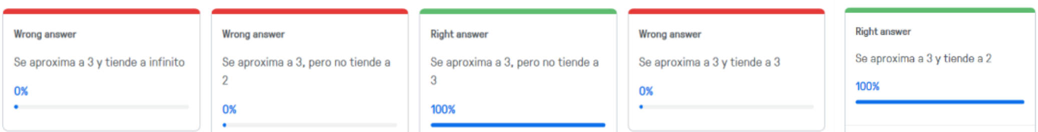
Cuestión 1. Se considera la siguiente sucesión: 1, 1’9, 1’99, 1’999,…

a. *Se aproxima a* 3, *pero no tiende a* 3
b. *Se aproxima a* 3 *y tiende a* 2
c. *Se aproxima a* 3, *pero no tiende a* 2
d. *Se aproxima a* 3 *y tiende a* 3
e. *Se aproxima a* 3 *y tiende a* ∞

Objetivo: Identificar y discriminar aproximación y tendencia numéricas.

Análisis

Todos los alumnos han seleccionado las dos opciones correctas, y ninguno se ha posicionado en alguna de las tres incorrectas, lo que muestra avance respecto al ciclo anterior y consolidación en relación a la comprensión de los contenidos aplicados a sucesiones.



VII.1 *Figura 7.1.* Porcentajes generados por la plataforma Edpuzzle

Las respuestas justificativas del alumnado se pueden agrupar en cuatro grupos A modo de resumen, se presenta la tabla 7.2 en función de las argumentaciones del alumnado:

VII.2 Tabla 7.2. *Categorización alumnado según criterios justificativos cuestión 1*

Criterios de justificación	Nº alumnos	%	
G0-Confusión representación y conceptos	1	5%	
G1-Tendencia como mejor aproximación	6	30%	
G2-Subjetividad aproximación/tendencia	4	20%	
G3-Focalización en el acercamiento	6	30%	
G3.1.-Aproximaciones mayores		2	10%
G3.2.-Criterios métricos		4	20%
G4-Intuiciones aproximación/tendencia	3	15%	

Respecto a las respuestas justificativas del alumnado se les puede clasificar globalmente en cuatro grupos, que se corresponden con los del año anterior, aunque hay algún alumno que cambia de grupo. A continuación, se presenta la clasificación de dichos grupos con las respuestas de algunos alumnos:

- *Grupo 0:* Confusión de representaciones.

Está formado sólo por el alumno *A1*, que el pasado curso no participó en la experimentación, y que contesta *"Porque cuando el último número es* > 4 *se dice que se aproxima* $n + 1$ *(redondeo), por eso en este caso se aproxima a* 3 *y tiende a* 2*, porque el último número es* 9 *y el* $n = 1$. Utilización del criterio del redondeo para la aproximación y la justificación errónea respecto a la tendencia ya que habla del *"último número"* en una sucesión infinita y la invención de criterios no válidos para concluir que la tendencia es *2*.

- *Grupo 1:* Tendencia como la mejor aproximación.

Dicha afirmación se presenta con diferentes matices en seis alumnos; con expresiones del tipo: *las **aproximaciones** de la sucesión a 2 **son cada vez mejores**", "**se aproxima más**"* y tres alumnos inciden en que ***"las aproximaciones** de la sucesión a* 2 ***son mejores que cualquier aproximación fijada**"* o, en otras palabras, ***"mejora cualquier aproximación prefijada**"*; hecho que no se presentó en el anterior ciclo de investigación y que supone un avance en la comprensión del concepto de tendencia.

- *Grupo 2:* Criterios subjetivos respecto a la diferenciación de aproximación y tendencia.

Cuatro alumnos establecen diferencias entre dichos conceptos, aunque intentan verbalizarlas con afirmaciones de su propia invención que no son totalmente rigurosas. Es curioso se asignan a la aproximación cercanía, diferencias cada vez menores y, a la tendencia, se la obliga *A más"*…, aunque no se sabe concretar verbalmente, pero se intuye.

Uno de ellos asocia *"tender con estar muy cerca de…"* y *Aproximar con estar próximo a…",* aunque cerca y próximo son sinónimos, para este alumno tienen diferente significación; otro justifica *"**por la definición,**…**tiende a dos por aproximación***. Al sentenciar que, por definición, lo impone como algo externo y que no precisa de más explicación.

Un tercer alumno cataloga la tendencia con la interesante afirmación: *tiende a 2* ***porque no hay un número más pequeño entre la sucesión y 2.*** Interesante, pero lo que quiere decir es que fijado un número menor que 2, es superado por algún término de la sucesión. Por último, el cuarto alumno manifiesta que: *"**antes del 3 va el 2,** y va a tender primero a 2",* introduciendo la variable de ordenación espacio-temporal *"tender primero a un valor que a otro".*

- *Grupo 3:* Focalización en el acercamiento.
  - *Grupo 3.1:* Aproximaciones mayores.

  Únicamente se basan en que las aproximaciones son cada vez mayores, pero no se dan cuenta que los términos de la sucesión también se aproximan cada vez más a todos los valores mayores que *2,* (pero no más que cualquier aproximación fijada). En esta opción se sitúan dos alumnos con afirmaciones del tipo: *cada vez es* ***más cercano a 2*** *el número de la sucesión, pero* ***sin llegar a tocarlo****"*, puntualizando en la inalcanzabilidad; y *"**tiende a 2, y por lo tanto no tiende a 3,** porque* ***están más próximos los números*** *dados a 2 que a 3",* comprendiendo la unicidad del límite y justificando que, como tiende a un nº, por lo tanto, no tiende a otro.
  - *Grupo 3.2:* Criterios métricos.

  Cuatro alumnos incorporan comentarios relativos a las diferencias o distancias en relación a los términos de la sucesión y la tendencia a *2.* Los alumnos comparten expresiones del tipo: *las diferencias positivas… son más cercanas", "**tiene menos diferencias positivas**", "**las diferencias entre estos dos valores son cada vez menores"*** o *"las* ***sucesivas (diferencias) cada vez son menores****"*

- *Grupo 4:* Intuición sobre la diferencia entre aproximación y tendencia.

Estos 3 alumnos presentan afirmaciones ciertas, obviedades en algunos casos, pero sin ninguna justificación, como por ejemplo, *"Porque es un número cercano a tres, pero no* *tiende tres., "No llega a ser ni 2 ni 3" y "Porque del 1 está más cerca el 2 que el 3.;* en este caso hace referencia a la parte entera de la sucesión.

Respecto a un análisis transversal e individualizado se ha constatado:

- La *inalcanzabilidad* sólo es reseñada por un alumno. El resto de alumnos no se manifiesta respecto a este particular.
- ***Errores** léxicos:* Como en el ciclo de investigación anterior aparece de nuevo *"el número de la sucesión",* por el término de la sucesión. Por economía lingüística, se omiten palabras o partes de la oración, lo que dificulta la comprensión y muestra la pobreza lingüística de algunos alumnos, como por ejemplo, escribir "sucesivas cada vez son menores" por las ***sucesivas diferencias cada vez son menores.*** En otros casos, se utilizan sinónimos que muestran cercanía hacia la comprensión de las situaciones presentadas, pero no otras denominaciones más correctas; como por ejemplo en la expresión: *las* ***diferencias positivas*** *entre sus términos son más cercanas a* 2 *que a* 3*"*, por *"las diferencias positivas entre sus términos son menores a* 2 *que a* 3*"*. Para finalizar, en otros casos se invierte el orden de ciertas palabras que modifican parcialmente el significado, aunque el alumno trasmite la comprensión de la situación, por ejemplo, al expresar *"**tiene menos diferencias positivas**",* en realidad se refiere a tener diferencias positivas menores con cierto valor.

Respecto al ciclo de investigación del curso 2016/17, se percibe un gran avance en la comprensión de los conceptos que nos ocupan; y en relación al tipo de razonamiento utilizado, comparando la tabla 7.3 (curso 2016-17 y 2017-18) se observa que disminuye la proporción de alumnos que opta por la focalización en el acercamiento; bien por centrarse en que las aproximaciones cada vez son mayores o por criterios métricos; compartiendo el porcentaje de selección con la opción centrada en la tendencia como mejor aproximación, seguida de aportaciones subjetivas que diferencian la aproximación de la tendencia. Respecto a las otras dos opciones sobre posibles confusiones en la representación/conceptos y priorizar sobre las intuiciones de aproximación/tendencia, no se muestran cambios significativos.

VII.3 Tabla 7.3. *Comparativa respuestas cuestión 1 Tercer y Cuarto Ciclo de Investigación*

Datos de los ciclos tercero y cuarto	Curso 2016/17	Curso 2017/18
G0-Confusión representación y conceptos	8,70%	5%
G1-Tendencia como mejor aproximación	17,39%	30%
G2-Subjetividad aproximación/tendencia	8,70%	20%
G3-Focalización en el acercamiento	52,17%	30%
G3.1.-Aproximaciones mayores	21,74%	10%
G3.2.-Criterios métricos	30,43%	20%

G4-Intuiciones aproximación/tendencia	13,04%	15%

Cuestión 2. P *es un punto de la curva que se mueve libremente sobre ella, hacia* A, que *es un punto fijo y* D *es un punto arbitrario fijo y cercano a* A.

a. D *es una aproximación de* A, *pero no una tendencia a* A___
b. P *es una aproximación de* A *y una tendencia a* A__
c. *La abscisa* x *de* P *es una aproximación a la abscisa a de* A *y es una tendencia*___
d. *Se podría situar un punto* H *tan cerca de* A *que* P *no podría estar más cerca de* A *que* H___

Objetivo: Valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia sobre la curva.

A modo de resumen, se presenta el número de alumnos que señala cada opción, incluyendo los que no contestan y se muestran los porcentajes entre paréntesis.

VII.4 Tabla 7.4. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 2*

Pregunta	**V (%)**	**F (%)**	**NC (%)**
1-D aproximación no tendencia	17 (85%)	0 (0%)	3 (15%)
2-P aproximación y tendencia	13 (65%)	4 (20%)	3 (15%)
3-Tendencia abscisas asociada	15 (75%)	2 (10%)	3 (15%)
4-Tendencia como mejor aproximación	13 (65%)	4 (20%)	3 (15%)

Reflexión

Salvo tres alumnos que no contestan a ninguna cuestión (15%), dos de ellos no participaron en la experimentación del año anterior, los demás comprenden que un valor fijado es una aproximación, y no una tendencia; pero 4 de ellos, no admiten la implicación de que la tendencia también es una aproximación ni que la tendencia mejora cualquier aproximación prefijada.

Respecto al anterior ciclo de investigación, se ha mejorado significativamente en todas las cuestiones, en especial en la primera y la sigue la relativa al estudio de la visualización de la tendencia asociada a las abscisas de los puntos que tienden a otro punto; aunque no se puede despreciar al 35% del alumnado que todavía no ha interiorizado y dominado en profundidad el contenido matemático que nos ocupa, bien porque no responden o porque sus respuestas son erróneas. En relación con los alumnos que participaron en la experimentación del curso 2016/17, en general, identifican y, salvo excepciones, discriminación entre aproximación y tendencia sobre la curva.

Cuestión *3.* P *es un punto del eje de abscisas que se aleja hacia infinito,* A *es un punto fijo del eje y* D *es un punto cualquiera del eje fijado (próximo a* A*). Si* P *se aleja de* A *más que* D *solamente por la izquierda o solamente por la derecha.*

El punto P del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa es menor que la de cualquier otro punto D prefijado__

Un punto P del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto D prefijado___

El punto P del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa tiende a la de cualquier otro punto D prefijado___

Un punto P *del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa tiende a la de cualquier otro punto* D *prefijado*___

Objetivo: Valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia en el eje XX'

Análisis en función de la elección de cada opción correspondiente por parte del alumnado, siendo algunas verdaderas y otras falsas:

VII.5 Tabla 7.5. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 3*

Apdo.	Pregunta	Respuesta	Nº	%
a	Tend $-\infty$ si abscisa menor que la de $\forall$ pto	Verdadera	15	75%
b	Tend $+\infty$ si abscisa mayor que la de $\forall$ pto	Verdadera	16	80%
c	Tend $-\infty$ si abscisa tiende a la de $\forall$ pto	Falsa	2	10%
d	Tend $+\infty$ si abscisa tiende a la de $\forall$ pto	Falsa	2	10%

Reflexión

Se puede afirmar que una gran mayoría de los alumnos (80%), comprenden que un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto *A* prefijado. Dichos alumnos, salvo uno, son capaces de ver la correspondiente analogía con el infinito negativo; este mismo hecho sucedió en el ciclo de investigación del curso anterior. Aunque mejorados los porcentajes, la comprensión del infinito negativo suscita más dificultades en dicho alumnado.

Respecto a las dos opciones falsas, son elegidas por dos alumnos y también cabe reseñar que dos alumnos no seleccionan ninguna opción.

Cuestión 4. Elige la frase o frases que consideren verdaderas y justifica tu respuesta: Un punto de la gráfica $P = (x, y)$ *tiende a infinito cuando ocurre una de estas opciones:*

a) x *tiende a ± infinito e y tiende a un número fijo.*
b) y *tiende a ± infinito y x tiende a un número fijo.*
c) x *e* y *tienden a infinito.*
d) x *e* y *superan a cualquier número fijo.*

Objetivo: Valorar la caracterización de tendencia infinita sobre la gráfica de una función.

Análisis

Todas las opciones propuestas son correctas, a continuación se muestra la tabla 7.6 que muestra al alumnado, según sus elecciones, atendiendo a un estudio global de cada ítem:

VII.6 Tabla 7.6. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 4*

Apdo.	Elección correcta	Nº alumnos	%
a	x tiende a ± ∞ e y tiende a un número fijo	6	30%
b	y tiende a ±∞ y x tiende a un número fijo	7	35%
c	x e y tienden a ∞	14	70%
d	x e y superan a cualquier número fijo.	12	60%

Reflexión

Estos resultados concuerdan con la anterior cuestión, ya que la mayoría de los alumnos (70%) entienden la tendencia infinita de un punto como la tendencia a infinito de sus dos coordenadas, seguida de la idea de la superación de cualquier valor fijo por parte de las coordenadas del punto de la gráfica (60%). El porcentaje de alumnos que comprenden que también se tiene una tendencia infinita en un punto cuando una de las variables tiende a un valor fijo y la otra a ± ∞ se reduce considerablemente, estando cercano a la tercera parte de los mismos, siendo ligeramente superior los alumnos que lo consideran cuando tienda a infinito la variable y.

De las 4 opciones que presenta la pregunta, hay $2^4 = 16$, posibles combinaciones que pueden elegir los alumnos, y sólo se han presentado *5* (Tabla 7.7), que se exponen a continuación, con el número de alumnos que las han seleccionado.

VII.7 Tabla 7.7. *Clasificación respuestas alumnado por combinaciones cuestión 4*

Opciones	Nº alumnos	%
b	1	5%
c	5	25%
d	3	15%
c-d	3	15%
a-b-c-d	6	30%

Ningún apartado	2	10%

Reseñable es que la combinación mayoritaria (30%) es la correcta que contempla la validez de los cuatro apartados, seguida de una cuarta parte del alumnado que valida sólo la opción c relativa a la tendencia infinita de x e y; por otro lado, comparten la proporción del 15% la opción d y la pareja de opciones *c-d* incidiendo en la idea de tendencia infinita, no necesariamente asintótica. Por tanto, la comprensión y aceptación de todas las posibilidades que es la clave para la comprensión de los comportamientos asintóticos que se explican posteriormente; ha sido alcanzada totalmente por alrededor de una tercera parte del alumnado.

Además, las dos primeras opciones señalan una tendencia asintótica horizontal o vertical, mientras que las dos últimas posibilitan ramas infinitas o asíntotas oblicuas. Parecería lógico, que cierto porcentaje de alumnado podrían posicionarse en alguna de esas dos agrupaciones o uniformemente entre todas las posibles combinaciones, pero no es así. Otra vez se confirma que la mayoría del alumnado va interpretando que la superación de cualquier valor por cualquiera de las variables equivale a una tendencia a infinita de dichas variables.

Comparativa con el ciclo de investigación anterior:

Respecto al ciclo anterior, se han elevado todos los porcentajes del alumnado que elige cada opción, manteniéndose el apartado c mayoritario en ambos.

De todas las combinaciones posibles, sólo se han presentado *5*, tres menos que en el ciclo de investigación anterior, reduciéndose la diversidad en las respuestas respecto al ciclo anterior. No aparece la combinación de las opciones *a-b*, ni de *a-b-c* que señalan una posible tendencia asintótica; pero si aparece la combinación de las dos últimas *c-d* dónde la tendencia es infinita pero no tiene por qué ser necesariamente asintótica.

Aumenta del 8,7% del alumnado que seleccionó todas las opciones correctas en el ciclo anterior al 30%, y va en la línea de la mejora manifestada en las anteriores cuestiones.

Cuestión 5. La gráfica de la función tiene un comportamiento asintótico (La función tiene una asíntota) cuando:

- *e) Existe una recta que no la corta.*
- *f) La gráfica de la curva se aproxima a la gráfica de una recta cuando* $x \to \pm\infty$ *o* $y \to \pm\infty$.
- *g) La gráfica de la curva tiende a la gráfica de una recta cuando* $x \to \pm\infty$ *o* $y \to \pm\infty$.
- *h) Un punto* P(x,y) *arbitrario de la curva cuando* $x \to \pm\infty$ *o cuando* $y \to \pm\infty$ *mejora la aproximación de cualquier punto prefijado de la curva a la recta que es la asíntota.*

Objetivo: Valorar la identificación del comportamiento asintótico.

Análisis en función de la elección de cada opción correspondiente por parte del alumnado, siendo algunas verdaderas y otras falsas:

VII.8 Tabla 7.8. *Clasificación respuestas alumnado cuestión 5*

Apdo.	**Pregunta**	**Respuesta**	**Nº**	**%**
a	Recta que no corta f(x)	Falsa	4	20%
b	Curva próxima a una recta x→±∞ o y→±∞	Falsa	5	25%
c	Curva tiende a una recta x→±∞ o y→±∞	Verdadera	10	50%
d	Mejora la aproximación x→±∞ o y→±∞	Verdadera	16	80%

Reflexión

La mitad del alumnado ha seleccionado las dos opciones correctas y además, un 30% más comprende el comportamiento asintótico como que al alejarse un punto de la curva a infinito éste mejora la aproximación a la recta de cualquier otro punto de la curva a la recta prefijada. Alrededor de las tres cuartas partes del alumnado comprende que el comportamiento asintótico no sólo es una aproximación y que, el hecho de que una recta no corte a la curva, no implica comportamiento asintótico.

Complementariamente, alrededor cuarta parte del alumnado no discrimina entre que una curva se aproxime o tienda a una recta, dándose el caso particular de un alumno que señala las dos opciones correctas y también la b) que es falsa. Salvo uno de ellos, también aseguran, erróneamente, que la tendencia asintótica se tiene si existe una recta que no corta a la curva.

Respecto al ciclo anterior se ven claros avances en la comprensión, pero también se mantiene cierto sector, no despreciable, del alumnado que perpetúa ciertas concepciones erróneas relacionadas con posibles cortes entre función y asíntota así como la dicotomía de aproximación y tendencia.

A continuación se presentan las cuestiones 6, 7 y 8; y posteriormente se analizarán conjuntamente, al igual que se hizo en el ciclo anterior. No se especifica el itinerario formativo asociado a los vídeos ya

Cuestión 6. Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $y = f(x)$ *con una* AH, $P(x, y)$ *es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito* $(x \to +\infty, x \to -\infty)$.

Gráfico 1. Un punto *Q* de la asíntota, con la misma abscisa que *P*, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian las diferencias entre las ordenadas de P y de Q

Gráfico 3. Se aprecia como la ordenada de P tiende a la ordenada de la recta $y = k$

Selecciona las opciones que consideres correctas:

- *e)* *La* AH *tiene ecuación* $\mathrm{y} = \mathrm{k}$, *siendo* k *cualquier constante.*
- *f)* *Entre la curva cuando* $\mathrm{x} \to \pm\infty$ *y la asíntota* $\mathrm{y} = \mathrm{k}$ *(que no corta a la curva) hay más rectas horizontales.*
- *g)* *La curva no puede cortar a la* AH.
- h) *Entre la* AH *(que no corta a la curva) y la curva no hay más rectas horizontales cuando* $\mathrm{x} \to \pm\infty$, *la curva y la asíntota se pueden cortar y la* AH *tiene ecuación* $\mathrm{y} = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{f(x)}$.

Objetivo: Valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización de la *AH*.

Cuestión 7. Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *con una* AV, $\mathrm{P(x, y)}$ *es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito* $(\mathrm{y} \to +\infty, \mathrm{y} \to -\infty)$.

Gráfico 1. Un punto Q de la asíntota, con la misma ordenada que P, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian las diferencias entre las abscisas de P y de Q

Gráfico 3. Se aprecia como la abscisa de P tiende a la abscisa de la recta $x = k$

Selecciona las opciones que consideres correctas:

- *e)* *La* AV *tiene ecuación* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$, *siendo* k *cualquier constante*
- *f)* *Entre la recta* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$ *y la curva hay más rectas verticales cuando* $\mathrm{x} \to \mathrm{k}$
- *g)* *La curva no puede cortar a la* AV
- *h)* *Entre la* AV *y la curva no hay más rectas verticales, la curva y la* AV *tiene ecuación* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$, *con* k *la constante para la que* $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{k}^-} \mathrm{f(x)} = \pm\infty$ *y/o* $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{k}^+} \mathrm{f(x)} = \pm\infty$.

  Objetivo: Valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización de AV.

Cuestión 8. Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *con una* AO, $\mathrm{P(x, y)}$ *es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito* $(\mathrm{x} \to \pm\infty$ e $\mathrm{y} \to \pm\infty)$.

Gráfico 1. Un punto *Q*, intersección de la AO con la perpendicular a ésta por *P*, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian el segmento determinado por *P* y *Q* (de extremos *P* y *Q*)

Gráfico 3. Se aprecia que la *AO* tiene ecuación $y = px + q$ con $p = lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $q = lim_{x\to\infty}(f(x) - px)$.

Selecciona las opciones que consideres correctas:

e) *La asíntota oblicua tiene ecuación* $\mathrm{y} = \mathrm{kx} + \mathrm{h}$, *siendo* h *y* k $(\mathrm{k} \neq 0)$ *constantes cualquiera.*

f) *Entre la curva y la* AO *puede haber otras rectas oblicuas más cercanas a la curva cuando* $\mathrm{x} \to \pm\infty$.

g) *La curva no puede cortar a la asíntota oblicua.*

h) *Entre la asíntota oblicua y la curva no hay más rectas oblicuas, la curva y la asíntota se pueden cortar o tocar y la asíntota oblicua tiene ecuación* $\mathrm{y} = \mathrm{kx} + \mathrm{h}$.

Objetivo: Valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización en la *AO*.

A continuación, se presenta de forma conjunta (Tabla 7.9) los tres tipos de asíntota, en términos porcentuales, sobre la selección que ha realizado el alumnado en cada una de las opciones que se presentan:

VII.9 Tabla 7.9. *Comparativa porcentajes de respuestas a las cuestiones 6,7 y 8*

Elección correcta	**AH**	**AV**	**AO**
No existencia rectas entre la asíntota y la curva	90%	80%	35%
Corte entre curva y asíntota	75%	35%	65%
Expresión analítica de la asíntota	80%	80%	75%
Definición global	70%	65%	60%

Reflexión

Ligeramente superior a la tercera parte del alumnado considera que la curva puede ser cortada por la *AV*, ascendiendo hasta el 65% el porcentaje que ofrece la posibilidad para la *AO* y alrededor de tres cuartas partes lo considera posible para la *AH*.

Casi la totalidad del alumnado identifica y relaciona la expresión algebraica genérica de cada tipo de asíntota; y prácticamente dichos porcentajes se mantienen en relación a la capacidad de abstraer la propiedad de que no puede existir una recta más próxima a la curva que la propia asíntota, para el caso de *AH* y *AV*, siendo solamente el 35% el porcentaje que lo visualizan para la *AO*.

En relación a lo que se podría considerarse la opción más completa que determina las propiedades de las asíntotas, es contestada correctamente por un porcentaje en torno al

65%, ligeramente superior en el caso de *AH* e inferior simétricamente en el caso de las *AO*.

Aunque mejorados todos los porcentajes respecto al ciclo anterior, en especial la conceptualización de las asíntotas y su expresión algebraica, se sigue percibiendo un tratamiento diferenciado de la *AO*, respecto al resto de asíntotas, restringiéndoles condiciones y no interiorizando la caracterización asintótica de la misma.

Objetivo de la cuestión 9: valorar las interpretaciones (concepciones) de los alumnos sobre las asíntotas.

Cuestión 9. Explica brevemente los siguientes apartados:

a. *Escribe un ejemplo de una tendencia numérica a* $x = 3$.

Análisis

La tabla siguiente presenta la clasificación de las respuestas de los alumnos

VII.10 Tabla 7.10. *Categorización respuestas a la cuestión 9.a)*

Tendencia x = 3	**Nº alumnos**		**%**	
Tendencia numérica	9		45%	
Sucesión numérica		8		40%
Aproximación numérica		1		5%
Tendencia asintótica	8		40%	
Asíntota x = 3		6		30%
Asíntota y = 3		2		10%
Situación real	1		5%	
No responden	2		10%	

Se han agrupado las respuestas según la siguiente clasificación:

- *Sucesión y aproximación numérica:*

Hay *8* alumnos en esta categorización, *6* de ellos, responden presentando la tendencia de la sucesión $2, 2.9, 2.99, 2.999, \ldots$, habiendo variación entre ellos en el primer término. El alumno *A3* presenta una sucesión que supera a 3 y que, según sus términos, tendería a ∞; aunque no ha plasmado los puntos suspensivos para indicar dicha posibilidad. Este alumno no comprende la diferencia entre la representación de conjuntos finitos y numerables y, por tanto, se mueve en proximidades o entornos del 3, siendo una representación muy pobre ya que sólo contempla décimas y, si pusiera más términos saldría de la vecindad del 3. Por último, el octavo alumno, *A15*, señala un único término de la sucesión como una aproximación. Algunos ejemplos:

A3.- 2,8 , 2,9 , 3 , 3,1 , 3,2*”*

A10.- 2; 2,9; 2,99; 2,999...

A17.- Por ejemplo 2,9 2,99 2,999 *tiende a* 3*”*

A15.- 2,99*”*

- *Conexión con comportamientos asintóticos:*
    - *Asíntota vertical:*

    Hay 6 alumnos que relacionan esta tendencia con la existencia de una asíntota vertical en $x = 3$, tres de ellos así lo verbalizan, otros dos, plasman la expresión de una función racional que presenta dicha asíntota y, el último alumno, presenta una expresión literal, que en realidad es una equivalencia a $x = 3$.

    A7.- Asíntota vertical en $\mathrm{x} = 3$*, la función no tiene imagen en ese valor de* x.

    A19.- Asíntota vertical.

    A17.- Eso es una asíntota vertical.

    A2.- No sé si se refiere a esto,. $\frac{1}{\mathrm{x}-3}$.

    A20.- $\frac{1}{\mathrm{x}-3}$*”*

    A12.- $\mathrm{x} = 3 + 2 * \mathrm{y} - 2 * \mathrm{y}$*”*

    - *Asíntota horizontal:*

    Relación oculta o subyacente con la *AH*, $y = 3$, aunque no hacen ninguna referencia a la misma:

    A4.- $\mathrm{f(x)} = \frac{3\mathrm{x}-4}{\mathrm{x}+9}$.

    A1.- $\mathrm{y} = \frac{3\mathrm{x}}{\mathrm{x}-3}$”

- Relación con una situación de la vida real:

A5.- Cuando se llena una piscina hasta el máximo, que es hasta la franja 3*”*

- No responden: Dos alumnos manifiestan lo siguiente:

A11.- No sé.

A9.- No lo entiendo.

Reflexión

Analogía en relación a los resultados de la pregunta en el ciclo de investigación anterior, con las siguientes puntualizaciones: aumenta un alumno más que señala la tendencia de una sucesión hacia 3, y se reduce el porcentaje de alumnos que limitan de la tendencia a una aproximación de un valor o valores numéricos próximos, por defecto y/o exceso, al valor fijado, pasando de 5 a 1 alumno. El resto de opciones se mantienen. Sigue apareciendo una conexión errónea de tendencia con la presencia de asíntotas horizontales y/o verticales.

No han desaparecido las confusiones entre el concepto de tendencia numérica y los diferentes procedimientos de cálculo de límites de funciones, ya que se han presentado nuevamente, en algunas respuestas, diversas expresiones funcionales $f(x)$, que tienen en común la relación con el estudio del $\lim_{x\to a} f(x) = b$, con diferentes posibilidades de variación de a y de b en dicha expresión, que se presentan a continuación:

- $a = 3$ y $b = \pm\infty$, posibilitando la presencia de la AV $x = 3$, en la $f(x)$ presentada.
- $a = \pm\infty$ y $b = 3$, posibilitando la presencia de la AH $y = 3$, en la $f(x)$ presentada.

Sin embargo, en este ciclo, no aparece la siguiente tendencia finita para $a = 3$ y $\forall b \in \mathbb{R}$ interpretando los valores de b pertenecientes a un intervalo acotado, y además tampoco aparece explícitamente ninguna expresión formal de notación de límite. Se trata, sin duda de pequeños avances pero sigue subyacente la importancia de la priorización del cálculo de límites de alguna de las variables frente al concepto de tendencias.

b. *Escribe lo que creas que es una* AH.

Partiendo de la categorización que se elaboró en el anterior ciclo de investigación a partir de la interpretación de las respuestas, se procede a la clasificación, según los criterios de afinidad teniendo en cuenta el mayor o menor acercamiento al concepto, según se resume en la siguiente tabla:

VII.11 Tabla 7.11. *Comparativa de las respuestas a la cuestión 9.b) en el Tercer y Cuarto ciclo*

¿Qué es AH?	**2016/17**	**2017/18**
Respuestas correctas	4 (17,39%)	6 (30%)
Respuestas incompletas	8 (34,78%)	7 (35%)
Respuestas incorrectas	11 (47,83%)	7 (35%)

Se procede a un análisis más pormenorizado de cada grupo. La tabla 7.11 evidencia las dificultades implícitas que tiene asociadas el concepto de asíntota, aunque no se debe pasar por alto las dificultades de expresión verbal que tiene el alumnado.

Respuestas correctas:

Se pueden agrupar en dos grupos en relación a la coincidencia de sus centros de interés:

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia, comportamiento análogo en el infinito de curva y recta e importancia de que la curva toque/corte o no a la *AH*:

  A2.- Es una recta horizontal $y = k$, *a la que la* ***función tiende en el infinito****,* ***comportándose*** *como ella.*

  A6.- Una asíntota horizontal es una línea horizontal imaginaria a la que función ***tiende.***

  A8.- Una asíntota horizontal de una curva $y = f(x)$ *es la* ***recta*** *paralela al eje x que* ***hace que la rama de dicha función tienda a infinito****.*

  A9.- Una asíntota horizontal es una recta horizontal hacia ***a la que va a tender*** *una función* ***en el infinito****.*

  A19.- Una recta $y = k$ *es una asíntota horizontal de la función* $f(x)$ *si el límite de la función en el infinito es el número* k*. Es decir,* ***los valores de*** $f(x)$ ***se aproximan a*** k ***cuando los valores de x se hacen grandes en valor absoluto.***

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia y relación métrica (distancia tiende a cero):

  A4.- Una asíntota horizontal es una recta paralela al eje de abscisas $(y = k)$ *a la que* ***tiende*** *una determinada función* ***en el infinito****, en otras palabras, su comportamiento se parece en el infinito y la* ***distancia*** *que las separa en la gráfica* ***tiende a cero****.*

Respuestas parcialmente correctas:

Se trata de 6 alumnos que se van acercando a la comprensión del concepto. No completan todos los aspectos anteriormente citados aunque omiten algunos al tratar de incorporarlos como respuestas correctas. A continuación, se presentan dichas aportaciones:

A15.- $y = k$*, ya que lo único que varía es la* x*, aparece una recta horizontal.*

A16.- Es una recta paralela al eje x *con pendiente igual a* 0*.*

Ambos presentan a la *AH* como un objeto sin conexión con alguna función.

A10.- Una asíntota horizontal es una recta que se ***comporta*** *de forma similar a una curva a medida que* x *tiende a infinito.*

En realidad es la curva la que se comporta como la recta, y no precisa las características de dicha asíntota.

A18.- La rama de dicha función tiende a infinito. Nos indica a que tiende en el infinito.

Analizando literalmente esta respuesta, aparentemente, podría considerarse como una contradicción; ya que, si la función tiende a infinito, no tiene sentido continuar expresando que nos indica a qué tiende en el infinito. Está subyacente, la concreción del estudio de las dos variable, *x* e *y*. debiendo indicar que la rama de dicha función tiende a infinito, cuando *x* tiende a infinito positivo o negativo, siendo la tendencia asociada de $y = f(x)$ finita.

A7.- Es la rama infinita que se aleja hacia menos infinito o más infinito sin llegar a tocar ***(a simple vista)*** *se calcula con los* **límites** *de la función cuando tienden hacia infinitos.*

A20.- Las asíntotas horizontales de una función son rectas horizontales de la forma $\mathrm{y} = \mathrm{a}$. *Una función puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales: una por la izquierda y otra por la derecha.*

Simplificación de la situación cuando *x* tiende a infinito positivo (o negativo) con *"por la derecha (o izquierda)"*, respectivamente; en parte, por intentar hacer una relación con los límites en los diferentes infinitos y los límites laterales cuando *x* tiende a un valor finito; y en parte por la propia representación gráfica.

A3.- Una función que se aproxima a una recta hasta ***tender a cero en el eje de la*** x.

Obligatoriedad de la *AH* como el eje de abscisas.

Respuestas incorrectas:

El resto de alumnos (7) muestra confusiones y errores que se pueden agrupar en 3 grupos en relación a conceptos implicados con: geometría (1), asíntota/función (2) e incoherencias (4).

- Geometría: Confusión en la denominación de conceptos geométricos básicos de orientación y posición.

  A11.- Recta a la que se la aproxima una función verticalmente.

- Asíntota/Función: Error de considerar la asíntota a la rama de la gráfica de la función con tendencia asintótica horizontal:

  A17.- Una asíntota horizontal ***es una función o parte de función*** *que se denota por la expresión* $\mathrm{y} = \mathrm{k}$.

  A5.- Una asíntota horizontal sigue a una recta en el eje y *la asíntota cada vez más a la recta.*

- Incoherencias: Combinación sin sentido de condiciones para la existencia y representación de las funciones

A1.- Una línea horizontal donde no ***existe*** *la función.*

A14.- Una recta $y = k$ *para la cual esa* k *no* ***existe*** *en la función.*

A13.- Una asíntota horizontal es una representación gráfica que tiene los mismos valores de los valores de x.

A12.- Una recta que divide la función en dos en base al eje y*"*

Reflexión

El 30% del alumnado responde correctamente compartiendo mayoritariamente la expresión algebraica correcta y la idea de aproximación/tendencia; y sólo un alumno da importancia a la relación métrica relativa a que la distancia entre la asíntota y la curva tiende a cero.

Ligeramente superior es el porcentaje de los alumnos que responden correcto parcialmente, aunque tienen un grado de comprensión elevado, les perjudica la omisión, limitación y/o confusión en algunas de las características consideradas de importancia para la comprensión de la *AH*. Entre ellas, se pueden señalar:

- Presentación de la *AH* como un objeto sin conexión con alguna función.
- Priorización de que la *AH* se comporta como la curva en el infinito.
- Simplificación de razonamientos relativos a tendencias sin concretar las variables implicadas.
- Asociación obligada de la *AH* únicamente con el eje de abscisas.
- Relación de límites en los diferentes infinitos con límites laterales.

Por último, el resto del alumnado contesta incorrectamente, y se perciben los siguientes errores relativos a:

- Confusión de conceptos geométricos básicos relativos a la orientación y posición.
- Consideración de asíntota a la rama de la gráfica de la función en vez de la recta.
- Combinación sin sentido de condiciones para la existencia y representación de las funciones

Reflexión conjunta del ciclo de investigación anterior:

Persiste el error léxico o de precisión que ya estaba presente en el pasado curso académico, relativo a la aparición de un concepto no incorporado en la docencia, pero presente en varias respuestas ***"tendencia de una función a una recta"*** En este ciclo, varios alumnos presentan a la asíntota horizontal como una recta, línea horizontal, recta horizontal o recta paralela a la que va a tender la función; pero no concretan el estudio de las variables implicadas. Aunque se incidió en este particular en las sesiones de docencia y siempre que se verbalizó en el aula, por la observación sistemática y diaria en el alumnado se puede afirmar que, para la mayoría del alumnado, dicha tendencia hace referencia a la variable x cuando tiende a infinito positivo o negativo. Parte del alumnado lo omite por considerarlo obvio, pero en algunos de ellos no está consolidado ya que afloran errores y confusiones en otras cuestiones, consecuencia de lo anteriormente expuesto.

En este ciclo de investigación se ha constatado la pérdida del interés principal en que la curva toque/corte, o no, a la *AH*; importancia que se le daba mucho en el ciclo de investigación anterior. En este curso, sólo un alumno ha puntualizado sobre la curva y la *AH*, *"sin llegar a tocar, a simple vista",* dando la posibilidad de que ese hecho ocurra, aunque en la representación sobre soporte finito no se visualice.

c. *Escribe lo que creas que es una* AV.

Las respuestas se clasifican de forma similar a como se hizo con la *AH*. Para ello se tienen en cuenta las incorrecciones que cometen los alumnos en sus respuestas, y esto nos lleva a considerar los tres grupos (correctas, incorrectas e incompletas) tal y como se resume en la siguiente tabla:

VII.12 Tabla 7.12. *Comparativa de las respuestas a la cuestión 9.c) en el Tercer y Cuarto ciclo*

¿Qué es AV?	**2016/17**	**2017/18**
Respuestas correctas	4 (17,39%)	6 (30%)
Respuestas incompletas	8 (34,78%)	7 (35%)
Respuestas incorrectas	11 (47,83%)	7 (35%)

Se procede a un análisis más pormenorizado de cada grupo.

Respuestas correctas:

Análogamente, se pueden agrupar en dos grupos en relación a la coincidencia de sus centros de interés:

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia, comportamiento análogo en el infinito de curva y recta e importancia de que la curva toque/corte o no a la *AV*:

  A2.- Es una recta $\mathbf{x = k}$*. La función en el infinito **se comporta** como ella y nunca la **corta**.*

  *A6.- Es una línea imaginaria vertical a la que una **función tiende**.*

A8.- Coincide con un punto en el eje X *y la función puede tender hacia ese valor* ***por la derecha y por la izquierda*** *y calculando sus límites laterales podemos saber si va hacia abajo (menos infinito) o hacia arriba (+infinito).*

A9.- Una asíntota vertical es una recta vertical hacia a la que va a tender una función en el infinito.

En el ciclo anterior este alumno expresaba que la AV es la recta A *la que* ***se acerca"*** *y en este ciclo lo cambia por* ***tendencia.***

A19.- Una recta $\mathrm{x = k}$ *es una asíntota vertical de la función* $\mathrm{f(x)}$ *si el límite de la función en el punto* k *es infinito. Es decir,* ***los valores de*** $\mathrm{f(x)}$ ***aumentan indefinidamente en valor absoluto cuando nos acercamos a*** k**.**

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia y **relación métrica** (distancia tiende a cero):

A4.- Una asíntota vertical es una recta paralela al eje de ordenadas $(\mathrm{x = k})$ *a la que tiende una determinada función en el infinito, en otras palabras, cuyo comportamiento se parece y la distancia que las separa en la gráfica tiende a cero. Además* k *no pertenece al dominio de la función.*

Respuestas parcialmente correctas:

Se trata de 7 alumnos que se van acercando a la comprensión del concepto, pero no completan todos los aspectos anteriormente citados para incorporarlos como respuestas correctas. A continuación, se presentan dichas aportaciones:

A3.- Una función que se aproxima a una recta hasta tender a cero en el eje de la y.

Obligatoriedad de la AV *como el eje de ordenadas.*

A7.- Una recta vertical a la que tiende una función por la izquierda y por la derecha pero sin tocarla.

A18.- Es la recta $\mathrm{x = a}$. *Está determinado por el dominio de la función.*

A10.- Una AV *es una recta que se comporta de forma similar a una curva a medida que y tiende a infinito"*

A15.- x=k, *como lo que varía es la* y, *se crea una recta vertical.*

A16.- Es una asíntota producida por una ***discontinuidad*** *en algún punto del eje de abscisas.*

A20.- Las asíntotas verticales de una función son rectas verticales de la forma $\mathrm{x = k}$. *No hay restricciones en cuanto al número de asíntotas verticales que puede tener una función*

Respuestas incorrectas:

El resto de alumnos (7) muestra confusiones y errores que se pueden agrupar en 3 grupos en relación a conceptos implicados con: geometría (2), asíntota/función (1) e incoherencias (4).

- Geometría: Bajo dominio en la expresión y utilización correcta de los conceptos.

  A11.- Recta a la que se **la aproxima** *una función horizontalmente.*

  A14.- Una recta $x = k$ *para la cual esa* k *no existe en la función.*

  A17.- Es un punto de una función en el que el dominio no está representado y la función tiende a ese valor.

- Asíntota/Función: Error de considerar la asíntota a la rama de la gráfica de la función con tendencia asintótica vertical:

  A5.- Una asíntota vertical sigue una recta en el eje x *y la asíntota se acerca cada vez más a la recta.*

- Incoherencias: Combinación sin sentido de condiciones para la existencia y representación de las funciones:

  A1.- Una línea vertical donde no existe la función.

  A12.- Una recta que divide la función en dos en base al eje x.

Reflexión

Se mantiene, como viene siendo habitual, el paralelismo entre esta pregunta y la correspondiente a la *AH*, se mantienen los 6 alumnos que responden correctamente bajo las mismas condiciones que se impusieron como criterio de validación; es decir, compartiendo la expresión algebraica correcta y la idea de aproximación/tendencia, y la imposición métrica de que la distancia entre la asíntota y la curva tienda a cero, siendo esta última manifestada por un solo alumno. En el anterior ciclo, no se focalizó en la lateralidad ni en la particularización del estudio de los límites laterales y en este periodo lo han incorporado dos alumnos en los siguientes términos: uno de ellos expone, *"...la función puede tender hacia ese valor* **por la derecha y por la izquierda** *y calculando sus límites laterales podemos saber si va hacia abajo (menos infinito) o hacia arriba (+infinito)";* el otro alumno responde *"los valores de* $f(x)$ *aumentan indefinidamente en valor absoluto cuando nos acercamos a* k". En ambos casos imponen que la tendencia asintótica vertical se presente conjuntamente y lateralmente, pudiendo variar en el signo.

Respecto a los alumnos que responden parcialmente correcto, se mantienen los siguientes errores encontrados en el ciclo de investigación anterior:

- Eje de ordenadas como única posibilidad a ser *AV*.
- Presencia obligada de la tendencia asintótica vertical conjunta y lateralmente.
- Determinación de la *AV* por el domino de la función.
- Dotar de mayor importancia y actividad a la *AV* que a la propia función, no especificando el comportamiento de esta última en el infinito.

Un alumno ha introducido un nuevo tópico que relaciona la AV con la discontinuidad de la función en algún punto del eje de abscisas y, otro alumno, aporta que no hay restricciones en cuanto al número de asíntotas verticales que pueda tener una función.

Respecto a los alumnos que responden incorrectamente se han constatado los siguientes errores, aparecen ciertos errores ya conocidos, con las matizaciones del bajo dominio en la expresión y utilización correcta de los conceptos, e incoherencias en relación a la existencia y representación de las funciones.

Reflexión global

Se ha ido incorporando progresivamente el concepto de tendencia sustituyendo y ampliando al concepto de mejora de la aproximación, hasta un alto porcentaje de las respuestas de los alumnos lo que muestra cierto avance en la comprensión de las asíntotas; apareciendo la palabra límite en pocas respuestas. No han aparecido en este ciclo los errores relacionados con estrategias de cálculo que priorizaban el cálculo de límites sobre la comprensión del concepto, a modo de "receta", lo que potenciaba en algunos alumnos la aparición de ciertos errores de conceptualización o comprensión.

Salvo un alumno que globaliza los comportamientos de las variables que no tienen tendencia finita del siguiente modo "*cuando los valores de* x *se hacen grandes en valor absoluto" o "los valores de* $\mathbf{f(x)}$ *aumentan indefinidamente en valor absoluto";* el resto de ellos alumnos, no incorpora en sus manifestaciones distinción entre el infinito positivo o negativo, en el estudio de las tendencias, ni para x ni para y; puede deberse a una economía lingüística o a una forma de simplificación del discurso.

El hecho de haber trabajado profundamente el estudio y representación de las funciones, ya que es un contenido de gran peso en el currículo de 2º de Bachillerato y además, de interés para la prueba de la EBAU; ha propiciado que los alumnos hayan relacionado el concepto de asíntotas con sus particularidades respecto a su representación gráfica.

d. *Escribe lo que creas que es una* AO.

Aunque es muy difícil la interpretación de las respuestas y por consiguiente, su clasificación, se consideran criterios de afinidad teniendo en cuenta el mayor o menor acercamiento al concepto, según se resume en la siguiente tabla:

VII.13 Tabla 7.13. *Distribución de las respuestas del alumnado a la cuestión 9.d)*

¿Qué es AO?	**Nº alumnos**	**%**
Respuestas correctas	6	30%
Respuestas parcialmente correctas	8	40%
Interpretación aislada	3	15%
Existencia y cálculo	5	25%
Respuestas incorrectas	6	30%

VII.14 Tabla 7.14. *Comparativa de las respuestas a la cuestión 9 d) en el Tercer y Cuarto ciclo*

¿Qué es AO?	**2016/17**	**2017/18**
Respuestas correctas	3 (13,04%)	6 (30%)
Respuestas incompletas	10 (43,48%)	8 (40%)
Respuestas incorrectas	9 (39,13%)	6 (30%)
No responden	1(4,35%)	0 (0%)

Se procede a un análisis más pormenorizado de cada grupo.

Respuestas correctas (salvo matizaciones):

Profundizan en diferentes niveles sobre los siguientes tópicos y cada alumno comparte al menos tres de los mismos:

- Expresión algebraica correcta, idea de aproximación/tendencia infinita de las dos variables, comportamiento análogo en el infinito de curva y recta y la distancia tiende a cero:

  A2.- Una recta $y = mx + n$, *a las que la función se va* ***acercando****, comportándose como ella en el infinito.*

  A4.- Una asíntota oblicua es una recta del tipo $y = mx + n$ *a la que tiende una función en el infinito. En la gráfica, la* ***distancia*** *entre ambas representaciones tiende a cero.*

  A6.- Es una función lineal con pendiente que forma una ***línea imaginaria*** *a la cual tiende una función.*

  A8.- Si no son paralelas o perpendiculares a los ejes, de ecuación $y = mx + b$. *Es una recta a la que se* ***aproxima continuamente*** *la gráfica de esta función. La distancia entre las dos* ***cosas*** *a ser cero.*

  A9.- Va a ser una recta con pendiente y la función tiende a esta en el infinito.

A10.- Una AO *es una recta que se* ***comporta*** *de forma similar en el* ***infinito*** *a una curva a medida que* **x** *e* **y** *tienden a infinito.*

- Respuestas parcialmente correctas:

Se pueden clasificar en dos subgrupos según se interprete la *AO* como objeto relacionado con la función con criterios de aproximación o tendencia, o si se focaliza en el interés de su existencia y/o cálculo A continuación, se presenta con más profundidad dicha categorización:

- Relación de la asíntota con la función, con criterios de aproximación, no tendencia.

A14.- Una recta con función $\mathrm{y = mx + n}$ *a la cual la función no la toca en ningún momento.*

A16.- Es un asíntota en la que cuanto ***mayores sean los valores de*** **x***, los puntos de la recta y de la gráfica estarán* ***más próximos.***

A17.- Una asíntota oblicua es aquella que se encuentra en los cuadrantes x *e* y *positivo y* x *e* y *negativo. Se caracterizan porque* ***cada extremo de estas asíntotas*** *se aproxima cada vez más al* 0 *pero nunca le llegan a tocar.*

- Focalización en el interés de su existencia y/o cálculo

A7.- Una asíntota oblicua solo la hay cuando ***no hay asíntotas horizontales****. Para que haya asíntota oblicua se tiene que cumplir que el grado del numerador sea exactamente un grado mayor que el del denominador.*

A15.- Una asíntota que tiene como ***pendiente el límite*** *de la función.*

A18.- La recta $y = mx + n$ *es la asíntota oblicua. Son* ***rectas de la ecuación****. Si encontramos asíntotas horizontales antes, no es necesario que busquemos oblicuas (no puede haber para una misma imagen varios puntos).*

A19.- Una recta de ecuación $y = mx + n$ *(m distinta de 0) es una asíntota oblicua de una función f(x) si el limite cuando tiende a infinito de* $f(x) - (mx + n) = 0$.

A20.- Las asíntotas oblicuas de una función son rectas oblicuas, es decir, rectas de la forma $\mathrm{y = mx + n}$. *Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas distintas.*

- Respuestas incorrectas:

Idea confusa y/o incompleta relacionada con la tendencia: o su relación confusa y/o incompleta con la tendencia.

A3.- Cuando una recta se aproxima a una función hasta tender 0.

A13.- Una tendencia de una función a una inclinación en concreto.

A11.- Recta a la que se la aproximan funciones.

A5.- Es una función que es infinita y que pasa por la bisectriz de una gráfica.

A12.- Una recta que divide la función en dos en base al eje X e Y"

A1.- Línea recta con una pendiente distinta de 0 *a la que tiende una función* ***por la derecha y por la izquierda*** *pero sin llegar a tocarla.*

Reflexión

Respecto a las respuestas correctas éstas comparten en diferente nivel de profundidad según los tópicos que se han especificado con más precisión anteriormente. Se percibe que los alumnos de este nivel incorporan más tópicos en sus respuestas que en el ciclo anterior. Ha aparecido el concepto de *Aproximación continua"* para referirse a la tendencia

Desaparece el grupo que interpreta aisladamente la *AO* como recta sin relación con la función ni con gráfica, apareciendo cierto sector que sí relaciona a la asíntota con la función, con criterios de aproximación, no tendencia**.** Entre sus interpretaciones se tiene:

- Incorporación del tiempo como una nueva variable en el estudio funcional, con expresiones del tipo *"no la toca en ningún momento"*.
- No se contempla la posibilidad de asíntota cuando x tiende a infinito negativo.
- Presencia de la *AO* en el primer y tercer cuadrante obligatoriamente.
- Finitud de la asíntota con presencia de extremos, a pesar de ser una recta infinita con afirmaciones del tipo "***extremo de estas asíntotas*** *se aproximan cada vez más al* 0"

Por otro lado, se mantiene el porcentaje del segundo subgrupo de alumnado que focaliza en el interés de la *AO* en su existencia, o su cálculo a partir del estudio de límites, diversificándose las justificaciones:

- Discriminación de la no existencia de la *AO* si se tiene conocimiento de la presencia de la *AH*.
- Asociación de la *AO* necesariamente con las funciones racionales, recordando la relación que se debe cumplir entre los grados de los polinomios numerador y denominador.
- Cálculo de su expresión $y = mx + n$, con el procedimiento de búsqueda de m y n a partir del algoritmo de los límites.
- Condiciones sobre la presencia de *AO* en la gráfica de una función concreta. *("Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas distintas")*

Respecto a las respuestas incorrectas manifiestan ideas confusas**,** incoherencias relacionadas con una falta de comprensión de conceptos asociados a la geometría analítica y al análisis de funciones. Aparecen expresiones del tipo ***"****función infinita, tendencia de una función a una inclinación****, bisectriz de una gráfica,*** *divide la función en dos en base al eje X e Y. Denominación de los diferentes infinitos por derecha e izquierda.* ***Confusión de tendencias infinitas con tendencias laterales".*** Aunque no aparece concretamente, como ocurrió en el ciclo anterior la obligatoriedad de ser la *AO* a la recta $y = x$, con los términos anteriores se posicionan en esa situación.

e. *Escribe por qué crees que todas las funciones tienen alguna asíntota o por qué no.*

Se presenta Tabla 7.15 con análisis comparativo de la distribución del alumnado y su correspondiente porcentaje respecto del presente y anterior ciclo de investigación.

VII.15 Tabla 7.15. *Comparativa de las respuestas a la cuestión 9.e) en el Tercer y Cuarto ciclo*

Existencia asíntotas	**2016/17**	**2017/18**
Respuestas correctas	0 (0%)	4 (20 %)
Respuestas incompletas	9 (39,13%)	8 (40 %)
Respuestas incorrectas	14 (60,87%)	8 (40 %)

A continuación, se estudia con mayor concreción:

Respuestas correctas:

A2.- Todas no, porque hay funciones cómo las cuadráticas cuyo crecimiento es muy rápido y no pueden presentar ningún tipo de asíntota.

A4.- No todas tienen asíntotas, por ejemplo las funciones afines (rectas) y las cuadráticas (parábola) no tienen asíntotas.

A20.- No creo que todas las funciones tengan asíntotas.

A8.- No tienen porque hay algunas que siguen un ciclo infinito como una honda.

Respuestas parcialmente correctas

Se pueden agrupar, según los tópicos que comparten, en tres grupos: clasificación de funciones, periodicidad y relación dominio/recorrido. Se concreta a continuación:

- Clasificación de las funciones: Aparecen nuevas denominaciones, en las respuestas de tres alumnos, como "finitas, infinitas, irregulares o juntas".

A5.- No, porque una recta limitada por los valores no puede presentar una asíntota, porque las asíntotas son infinitas y las funciones finitas que no tienen asíntota.

A6.- No es necesario que una función tenga asíntota, solamente la tiene si tiene tendencia a algo, pero no si es ***irregular****.*

No ha definido lo que para este alumno es una función irregular y también, erróneamente, asocia tendencia con presencia de asíntotas.

> *A11.- Porque pueden llegar a **juntarse funciones** y rectas o no.*

- Periodicidad: A pesar de que las respuestas son correctas, las justificaciones no. Estos tres alumnos aseguran que ninguna función periódica tiene asíntotas, hecho que no se cumple en la función $f(x) = tg(x)$ que tiene infinitas asíntotas verticales; posiblemente su evocación es hacia las funciones $f(x) = sen(x)$ o $f(x) = cos(x)$, u otras.

> *A3.- No todas, porque por ejemplo las funciones trigonométricas no tienen asíntotas debido a su dominio y rango.*
>
> *A7.- No todas las funciones tienen porque tener asíntotas. Las periódicas no tienen.*
>
> *A10.- No todos presentan asíntotas puesto que hay funciones periódicas que no presentan ninguna tendencia en el infinito.*

- Conexiones falsas entre dominio/recorrido y tendencias asintóticas: Para dos alumnos si el dominio y/o recorrido es $\mathbb{R}$, entonces no hay presencia de asíntotas

> *A12.- No todas las funciones tienen asíntotas, no hay asíntotas en las que están definidas para todo $\mathbb{R}$"*
>
> *A17.- No es necesario que todas las funciones tengan una asíntota, porque para que eso ocurra tiene que haber puntos que no estén en el dominio o en el recorrido, y hay funciones que tienen el dominio y el recorrido completos.*

Respuestas incorrectas

Los ocho alumnos restantes se pueden clasificar en tres grupos relacionados con afirmaciones, clasificaciones o generalizaciones falsas en relación a la existencia de asíntotas, como se muestra a continuación:

- Afirmaciones falsas: Dos alumnos aseguran que todas las funciones presentan al menos una asíntota, sin puntualizar el número máximo de las mismas. Uno de ellos, puntualizando en el carácter obligatorio y otro, asegurando su búsqueda.

> *A8.- Porque todas las funciones deben tener al menos una asíntota.*
>
> *A17.- Creo que todas las ecuaciones tienen alguna asíntota porque se pueden extraer de la función que te dan.*

- Asociación errónea en la caracterización de las familias de funciones con las propiedades de las asíntotas: Los dos alumnos que se presentan a continuación manifiestan errores conceptuales y léxicos.

A15.- Una función puede no tener ninguna asíntota como $y = 2x$, aunque, cuando la función es una función radical, sí que aparecen las asíntotas, si la x está en el denominador. (No consideración de la función afín como asíntota y confusión de la denominación radical y racional).

*A9.- Las que no tienen un denominador que sea mayor que el numerador no tendrán. (Cuantific*ador no asociado a un concepto).

- Generalizaciones falsas: Cuatro alumnos no responden a la cuestión planteada y además contestan con imprecisiones y concepciones falsas.

A1.- Tendrás siempre que en ese punto no exista la función.

A14.- Porque casi todas tienen algún punto donde no existe la función.

A16.- Una función tiene una asíntota cuando su dominio no está definido en todo $\mathbb{R}$, y por ello tiene y una discontinuidad en ese punto.

A19.- Siempre que el dominio de una función no sean los reales (números reales), esa función tiene asíntotas.

Reflexión

Aparecen respuestas correctas hecho que no ocurrió en el anterior ciclo, alguna discriminando ramas infinitas *"con crecimientos rápidos"* frente a tendencias asintóticas, llevando implícito el concepto de tasa de variación media creciente, otras repuestas presentan familias de funciones que no tienen asíntotas (afines, cuadráticas o periódicas) y un alumno aporta su creencia de que no todas tienen, pero sin justificarlo.

Todas las respuestas parcialmente correctas engloban contestación cierta, pero manifiestan algún error en su justificación, en la globalización de sus afirmaciones o nuevas designaciones, como se muestra a continuación:

- Nuevas denominaciones en la clasificación de las funciones: *finitas, infinitas, irregulares o juntas".*
- Ninguna función periódica tiene asíntotas.
- Conexiones falsas entre dominio/recorrido y tendencias asintóticas: Dominio y/o recorrido $\mathbb{R}$, implica la no presencia de asíntotas.

Respecto a las respuestas erróneas, se canalizan según sus razonamientos aportan afirmaciones, clasificaciones o generalizaciones falsas en relación a la existencia de asíntotas, como se muestra a continuación:

- Todas las funciones presentan asíntotas
- Intento de asociación de la caracterización de las familias de funciones con las propiedades de las asíntotas

- Generalizaciones falsas en relación al dominio, recorrido y discontinuidades.

Respecto al ciclo de investigación anterior, además de mejorar los porcentajes, se valora el aumento de alumnado que argumenta sobre sus afirmaciones lo que muestra avances en la comprensión del contenido y consolidación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

f. *Escribe la razón de por qué $y=px^2+3$ ($p\neq 0$) puede ser o no ser la ecuación de una asíntota.*

Se presenta en la tabla 7.16 la distribución de los alumnos según las diferentes posibilidades y se concretan las particularidades a continuación:

VII.16 Tabla 7.16. *Resumen de las respuestas a la cuestión 9.f).*

$\mathbf{y = px^2 + 3}$ $(\boldsymbol{p \neq 0})$ **¿Asíntota?**	**Nº alumnos**	**%**	
Respuestas correctas	9	45%	
Respuestas incorrectas	11	55%	
Errores conceptuales		5	25%
Confusión enunciado		4	20%
Incoherencias		2	10%

Respuestas correctas:

A2.-No, porque es una ecuación cuadrática si p *no es cero.*

A4.- No puede ser, porque no tiene la forma $y = mx + n$ *que tienen las asíntotas oblicuas*

A5.- No puede ser la función de una asíntota, ya que está mal colocada la función, sería $mx + n$.

A6.-No puede ser asíntota porque tiene que ser lineal.

A7.- No puede ser porque solo las asíntotas son líneas rectas.

A8.-No, porque esa no es la fórmula de asíntota oblicua.

A11.-Nunca puede ser la ecuación de una asíntota oblicua ya que no es la ecuación de una recta $(y = mx + n)$

A12.- No puede ser, las asíntotas son rectas y esa ecuación corresponde a una cuadrática, a una parábola.

A20.- Porque es una función cuadrática y entonces es una curva, por lo que no puede ser asíntotas, que son rectas.

Respuestas incorrectas:

Se pueden clasificar en tres grupos, según se presenten errores conceptuales, confusión con el enunciado o afirmaciones sin justificación:

- Errores conceptuales:

A3.-Porque en un momento determinado se convierten en una recta paralela a la curva.

A14.- Dependiendo de los valores que se le dé a p *y a* x.

A10.-Es la ecuación de una AO *ya que presenta una determinada pendiente.*

A13.-Podría ser la ecuación de una recta.

A18.-Puede ser que ya no tiene valor asignado a cero, y eso será una asíntota.

- Confusión en el enunciado de la pregunta. Estudian las posibles asíntotas de esa función.

A1.- No puede ser una asíntota porque es una función polinomio y su dominio es todo $\mathbb{R}$.

A9.- No, es una ecuación polinómica.

A15.- No es polinomio.

A17.- AV: No hay denominador. AH: $lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *. AO: No es una fracción.*

- Incoherencias.

A16.-Si puede

A19.- Si que puede serlo

VII.17 Tabla 7.17. *Comparativa de las respuestas a la cuestión 9.f) en el Tercer y Cuarto ciclo*

$\mathbf{y = px^2 + 3}$	**2016/17**	**2017/18**
Respuestas correctas	8 (34,78%)	9 (45%)
Respuestas incorrectas	15 (65,22%)	11 (55%)

Reflexión

Los 9 alumnos que responden correctamente tienen claro que el hecho de que el parámetro *p* sea no nulo, implica que estamos ante una función cuadrática cuya gráfica no es una recta; pero no desglosan sus razonamientos negando que no pueda ser ninguno de los tipos de asíntota a partir de sus expresiones algebraicas.

Las respuestas incorrectas se han clasificado en tres grupos. En el primero, relativo a errores conceptuales, se intuye que clasifican en una misma familia a las funciones lineales y cuadráticas, para algunos, pudiendo estar las primeras incluidas en las segundas, de modo que consideran que la expresión presentada se puede corresponder con una función afín; para otros, la misma expresión puede corresponder a una función lineal o a una cuadrática "*en un momento determinado se convierten en una recta paralela a la curva"*.

El segundo grupo comparte la confusión en el enunciado de la pregunta. La cuestión plantea si $y = px^2 + 3$ puede ser o no ser la ecuación de una asíntota, y estos alumnos, han respondido que la función $y = px^2 + 3$ no puede tener asíntotas, coincidiendo todos en que no es posible por ser un polinomio; lo que manifiesta el error de confundir función con polinomio. Por último, el tercer grupo, afirma sin ninguna argumentación. Respecto al ciclo anterior ha habido una ligera mejoría y el mayor interés se centra en el acercamiento del alumnado hacia la justificación y comprensión de los conceptos que nos ocupan.

g. *Escribe por qué crees, o por qué no, y=k es la ecuación de una AV*

VII.18 Tabla 7.18. *Comparativa de las respuestas de la cuestión 9.h) en el Tercer y Cuarto Ciclo*

¿y = k es AV?	**2016/17**	**2017/18**
Respuestas correctas	6 (26,09%)	11 (55 %)
Respuestas incompletas	6 (26,09%)	1 (5%)
Respuestas incorrectas	11 (47,83%)	8 (40%)

Análisis

Respuestas correctas:

A2.- No lo es porque es una asíntota horizontal.

A4.- y = k *no puede ser una asíntota vertical, ya que es la expresión de una recta horizontal, paralela al eje de abscisas.*

A5.- y = k *no es la ecuación de una asíntota vertical, es una asíntota horizontal porque el límite tiende a un valor* k.

A6.- No; porque es de una asíntota horizontal.

A7.- Esa sería una asíntota horizontal."

A8.- La asíntota vertical seria x = k.

A9.- Porque el eje de las y *es el eje vertical, y si* y *es constante para cualquier* x *entonces sale una recta horizontal, no vertical"*

A10.- No, porque se trataría de una recta perpendicular al eje y *que se comportaría de manera similar a la curva a medida que* x *tiende a infinito e* y *tiende a* k.

A17.- y=k *no puede ser asíntota vertical, en todo caso sería horizontal, porque todos los puntos de la función dando a x el valor k serían los mismos.*

A19.- Una asíntota vertical no es $y = k$*, si no, que es* $x = h$*, porque la variable que tiende a una constante es la abscisa* x, y *tiende a +infinito o -infinito.*

A20.- $y = k$ *corresponde a una asintota horizontal"*

Respuestas parcialmente correctas:

A1.- Porque es una constante.

Respuestas incorrectas:

A3.- Porque las asíntotas verticales se calculan con el dominio de la función.

A11.- Porque puede que la pendiente sea 1*, y* n *sea* 0.

A12.- No es una asíntota ya que la función siempre estará definida en $y = 1$*"*

A13.- Porque quiere decir que para todos los valores de y tiene el mismo valor " k *".*

A14.- Porque en el punto K *la función no existe".*

A15.- No, porque para cualquier punto de Y*, la* X *es igual a* k*"*

A16.- Porque K *es un número concreto, y la forma de esta función hace que la* AV *sea paralela al eje* x.

A18.- Si es vertical, será paralelo al eje de ordenadas, por tanto $y = k$.

Reflexión

Ligeramente superior a la mitad del alumnado responde correctamente, justificando que se trata de una posible *AH* por su expresión algebraica y por representar una recta paralela al eje de abscisas y, por tanto, no puede tratarse de una *AV*. No puede ser interpretada la respuesta de un solo alumno, al afirmar que es una constante, no pudiéndose profundizar en el análisis. Los 8 alumnos restantes confunden las variables, focalizan en criterios numéricos o aportan incoherencias.

h. *Escribe por qué una asíntota de ecuación* $y = px + q$ *nunca puede ser horizontal o por qué sí.*

Análisis

Los alumnos se van a encuadrar en tres grandes grupos según sus respuestas sean correctas, parcialmente correctas o incorrectas.

VII.19 Tabla 7.19. *Respuestas del alumnado a la cuestión 9.i)*

y = px + n	**Nº alumnos**	**%**
Respuestas correctas	4	20 %
Respuestas incompletas	10	50 %
Respuestas incorrectas	6	30%
Errores conceptuales	3	15%
Incomprensión enunciado	2	10%
Incoherencias	1	5%

Respuestas correctas:

Salvo un alumno que responde sin justificar, los tres restantes concretan que para $p = 0$ se tiene la posibilidad de *AH:*

A2.- Si puede.

A4.- Solo podría darse el caso de ser una horizontal si $p = 0$*, en ese caso sería del tipo* $y = q$*, una recta horizontal.*

A8.- Si $p = 0$*, sí es horizontal; si es distinta de* 0*, no puede ser horizontal.*

A20.- Sí que puede serlo, porque p *puede ser igual a* 0*"*

Respuestas parcialmente correctas:

Los siguientes 8 alumnos comparten una visión muy estricta, cerrada e inamovible de la expresión que se presenta, no viendo la posibilidad de $p = 0$. No escriben ninguna sentencia incorrecta, pero la aparición de los parámetros p y q, les imposibilita ver que puedan ser nulos.

A3.-No lo es porque es una oblicua.

A7.-No, porque las horizontales tienen ecuación $y = k$.

A9.-No puede porque tiene que ser $y = k$.

A10.-Porque presenta pendiente mientras que una AH *debe ser paralela al eje* x.

A11.-Porque tiene valores en m *y* n.

A12.-Nunca puede ser horizontal y que en un ejemplo queda una asíntota oblicua.

A16.-Una AH *tiene que tener una ecuación de tipo* $y = k$ *(a un número concreto).*

A17.-Sí que es horizontal porque la función mx + n *la m marca la pendiente de la recta.*

A18.-Esa ecuación pertenece a una asíntota oblicua; por lo tanto, no pertenece a una asíntota horizontal, cuya ecuación es $y = k$.

Este último alumno asigna a la *AH* la presencia del valor m, la pendiente, que en dicho caso debería ser nula.

A19.-La asíntota en el infinito, sigue creciendo.

Está presente la idea de pendiente no nula, aunque positiva; ya que no da la opción de decrecimiento.

Respuestas erróneas:

Se pueden clasificar en tres grupos, según comparten: graves confusiones, incomprensión del enunciado e incoherencias.

- Confusiones:

A6.-No puede ser porque es una función lineal.

En realidad, sería una función afín, pudiendo ser, en particular, una función lineal.

A19.-En el infinito, sigue creciendo.

Expresa la idea de pendiente no nula, pero positiva; ya que no da la opción de decrecer.

A17.-No puede serlo porque todo su dominio es continuo y no tiene partes en las que sea una línea horizontal.

Introduce la continuidad en el dominio como variable de interés en la presencia de asíntotas horizontales y, además asocia la asíntota horizontal como una función que tenga una parte que sea una línea horizontal, sin especificar que parte.

- Respuestas sin sentido:

A5.-No, porque no podría seguir una línea recta en el eje de y, *porque lo cortaría.*

A14.-No puede ser horizontal por que las horizontales siempre están en el mismo punto de la x.

- No comprensión del enunciado de la pregunta:

Un alumno cree que se le pregunta si la función $y = px + n$ presenta asíntotas, en vez de la cuestión real, y afirma que ningún polinomio tiene asíntotas, no considerando que en toda función afín, su asíntota coincide con ella misma.

A1.- Nunca lo puedo ser, en los polinomios no hay asíntotas.

VII.20 Tabla 7.20. *Comparativa de las respuestas a la cuestión 9i) en el Tercer y Cuarto Ciclo*

y = px + q	**2016/17**	**2017/18**
Respuestas correctas	4 (17,39%)	4 (20 %)
Respuestas incompletas	11 (47,83%)	10 (50%)
Respuestas incorrectas	8 (34,78%)	6 (30%)

Reflexión

No ha habido gran avance en las respuestas correctas de esta pregunta, en términos porcentuales se mantiene en torno al 20% el alumnado que contesta correctamente, estudiando con diferentes niveles de profundización las diferentes posibilidades de los parámetros p y q, puntualizando la mayoría que si $p = 0$, sería *AH*, hecho que no se presentó en ningún alumno del ciclo anterior. Sólo un alumno es capaz de visualizar las distintas posibilidades de función afín o lineal, según los valores nulos o no nulos de q. pudiendo ser una posible *AO*.

La mitad de los alumnos responden de manera parcialmente correcta ya que no son capaces de pensar en el valor $p = 0$, la aparición de los parámetros p y q, en la expresión $y = px + q$ les imposibilita ver que puedan ser nulos. Por ello, no ven la posibilidad de que para $p = 0, y = q$ es posible candidata a *AH*; ni el caso particular, $p = q = 0, y = 0$ pudiendo ser la *AH* el propio eje de abscisas. Además, ante una expresión algebraica, con parámetros; le asignan una sola posibilidad estática de asíntota, en comentarios de uno de ellos, "*pertenece a una asíntota oblicua; por lo tanto, no pertenece a una asíntota horizontal*". En el resto del alumnado, que responden incorrectamente, muestran errores ya aparecidos con anterioridad.

Prácticamente se mantienen los porcentajes en las diferentes posibilidades de respuestas del alumnado, siendo reseñable que no aparece ningún alumno que responda focalizando el estudio de *AH* a partir del $lim_{x \to +\infty} f(x)$, hecho que sí que sucedió en el ciclo de investigación anterior, por lo que se va avanzando en que el cálculo de límites es importante pero más el marco teórico que nos ocupa.

i. *Escribe cuántas asíntotas verticales, horizontales y oblicuas puede tener una función.*

Ante esta cuestión tan genérica, se ha optado por clasificar según las respuestas correctas relativas a cada tipo de asíntotas y sus combinaciones posibles, como se muestra en la tabla 7.21, al igual que en el ciclo anterior.

VII.21 Tabla 7.21. *Distribución respuestas del alumnado cuestión 9j)*

Tipos de respuestas	**Nº alumnos**	**%**

Respuestas correctas	4	20%
Respuestas incorrectas	3	15%
Respuestas incompletas	13	65%
Solo AH correcta	1	5%
Solo AV correcta	5	25%
Solo AO correcta	2	10%
AH y AV correctas	4	20%
AV y AO correctas	1	5%
AH y AO correctas	0	0%

A continuación, se presenta cada opción con las correspondientes respuestas de los alumnos:

Respuestas correctas totales:

A pesar de que no especifican signo de infinito, se sobreentiende que razonan respecto a uno de ellos.

> *A2.- A*.H - 2 A.V - *infinitas* A.O – 2.”
>
> *A4.- No puede haber al mismo tiempo una horizontal y una oblicua. En lo referente a las* AH *y a las* AO *puede haber dos, una cuando* x *tiende a más infinito y otra cuando* x *tiende a menos infinito. AV puede haber ilimitadas, ya que, por ejemplo, en la función* f(x) = tg(x) *tenemos una función periódica en la que se dan AV.”*
>
> *A8: “Dos asíntotas horizontales, dos oblicuas e infinitas verticales.”*
>
> *A20: “Verticales infinitas, oblicuas dos, horizontales dos.”*

Respuestas correctas parciales

Se clasifican los alumnos según respondan correctamente únicamente al número de asíntotas posibles respecto a una de ellas e incorrectamente respecto a las restantes, y posteriormente, se analizan las diferentes combinaciones correctas de dos de los tipos de asíntotas:

- *AH* correcta:

> *A16: “Una función puede presentar 2 asíntotas verticales, 2 asíntotas horizontales o una oblicua”*

- *AV* correcta:

> *A1: “Una función puede tener infinitas verticales, y o bien, o una horizontal o una oblicua.”*

> *A3.- Las funciones racionales pueden tener más de una asíntota vertical, pero solo pueden tener una asíntota horizontal u oblicua a la vez."*
>
> *A10.- Puede tener infinitas verticales, horizontal creo que una y oblicuas una también."*
>
> *A18.- Una función puede tener infinitas verticales, y o bien, o una horizontal o una oblicua."*
>
> *A19.- Una horizontal y varias verticales, si tiene horizontal, no podrá tener oblicua."*

- *AO* correcta:

> *A12: "A*V *1, AH 1,* AO *2"*
>
> *A15.- Verticales y oblicuas dos y horizontales más de dos."*

- *AH y AV* correctas:

> *A5.- Verticales: infinitas / horizontales: 2 / oblicuas: 1"*
>
> *A6.- Puede tener dos horizontales e infinitas verticales (funciones tangente).*
>
> *A13: "Verticales: infinitas, horizontales:* 2*, oblicuas:* 1*"*
>
> *A17: "A*V ∞, AH 2, x→∞, x→-∞, AO 1.*"*

- *AV* y *AO* correctas

> *A7.- Puede tener infinitas asíntotas horizontales y verticales, pero oblicuas solo dos."*

- *AH* y *AO* correctas:

No ha habido ningún alumno que contestase correctamente a dicha combinación e incorrectamente respecto a las *AV.*

Respuestas incorrectas

> *A9.- Puede tener una."*
>
> *A11.- Infinitas."*
>
> *A14.- Una ecuación puede tener, una asíntota vertical y una oblicua y una asíntota vertical y horizontal, nunca puede tener las 3 asíntotas a la vez, ya que si existe asíntota horizontal no existe asíntota oblicua."*

A continuación, se analizan las respuestas correctas respecto a cada asíntota particularmente, junto con su comparativa del ciclo anterior, dónde se percibe que no ha habido variaciones sustanciales:

VII.22 Tabla 7.22. Respuestas correctas respecto a cada tipo de asíntota.

Asíntota	**Curso 2017/18**	**Curso 2016/17**
AH	9 (45%)	11 (47.82%)
AV	14 (70%)	16 (69.56%)
AO	7 (35%)	7 (30.43%)

En la tabla 7.23 se presenta la distribución de los alumnos según la respuesta incorrecta o imprecisiones que se han manifestado respecto a cada asíntota, se marca con una X la opción correcta

VII.23 Tabla 7.23. *Distribución de las respuestas incorrectas del alumnado*

Asint	**1 asíntota**	**2 asíntotas**	**∞ asíntotas**	**Imprecisiones**	**Nº y % de alumnos**
AH	7 (35%)	X	1 (5%)	3 (15%)	11 (55 %)
AV	1 (5%)	3 (15%)	X	2 (10%)	6 (30 %)
AO	8 (40%)	X	0 (0%)	5 (25%)	13 (65%)

Respecto a la *AH*, el mayor error se presenta al considerar que pueda ser solamente una, en el ciclo anterior el error más numeroso era la posibilidad de ser infinitas; por lo que se considera que se va avanzando en el concepto de función. Los alumnos que consideran que el número de *AV* debe ser finito, lo concretan a lo sumo en dos, siendo mayor el porcentaje que selecciona la posibilidad de dos asíntotas. Por último, es elevado el número de alumnos que considera que sólo se puede presentar una *AO*, en una gráfica concreta, ninguno de la posibilidad de la infinitud de las mismas superando este error que estaba presente en el ciclo anterior. No es depreciable un pequeño sector que muestra imprecisiones o el intento de responder de forma global a la cuestión formulada, queriendo unificar el comportamiento de todos los tipos de asíntotas.

VII.24 Tabla 7.24. *Respuestas incorrectas respecto a cada tipo de asíntota*

Asint	**1 asíntota**	**2 asíntotas**	**∞ asíntotas**	**Imprecisiones**	**Nº y % de alumnos**
AH	4 (17.39%)	X	6 (26.08%)	2 (8.69%)	12 (52.17%)
AV	1 (4.34%)	3 (13.04%)	X	3 (13.04%)	7 (30.43%)
AO	8 (34.78%)	X	3 (13.04%)	2 (8.69%)	13 (56.52%)

Reflexión

Bajo porcentaje de respuestas totalmente correctas. Analizando el porcentaje de alumnado que responde correctamente a la presencia de cada tipo de asíntota se tiene que, mayoritariamente, el alumnado ha comprendido que las *AV* pueden presentarse de forma infinita, le sigue la comprensión en relación a la *AH* y, por último, en lo que respecta a la *AO*, se presentan los porcentajes más bajos. Respecto a las respuestas incorrectas se centran en la unicidad en la presencia de *AH* o *AO*, en una gráfica, pudiendo ser una mala interpretación al referirse a la tendencia cuando x tiende a un tipo de infinito. Cuando varios alumnos especifican que no puede haber al mismo tiempo una horizontal y oblicua, se refiere cuando x tienda a infinito positivo o negativo, es decir, asocia *"el mismo tiempo"* a la tendencia de x a infinito del mismo signo; es decir, el mismo tiempo es fijar una variable con el mismo sentido de tendencia. Respecto al anterior ciclo, se ha pasado mayoritariamente del estudio de las posibilidades que puede tener una función, cuando sólo presentase un tipo de las asíntotas al estudio conjunto de los tres tipos de asíntotas. Se trata de una cuestión globalizada que parece tener dificultades el alumnado en generalizar, a pesar de haberlo trabajado de una forma constructiva en el aula a través de diferentes ejemplos y situaciones en las sesiones de docencia.

VII.4 REFLEXIÓN GLOBAL DEL CICLO

En este ciclo final, la investigadora da continuidad a su labor docente con el mismo grupo del anterior curso académico. Se tiene conocimiento global de la dinámica grupal así como información individualizada de los resultados académicos de la mayoría de los alumnos. Por ello, no se consideró necesario pasar un test inicial de conocimientos previos. También fueron múltiples los motivos que justificaron la decisión de implementar la metodología de aula invertida pura, así como la utilización de metodologías activas en los limitados periodos lectivos asignados a dichos contenidos y así realizar actividades de un nivel cognitivo superior.

En el aula se produjeron interesantes debates moderados por la investigadora, se realizaron tareas de reflexión, análisis y consolidación de la comprensión de los contenidos que han sido objeto de estudio. Se resolvieron individualmente y por parejas actividades relacionadas con la tendencia funcional, la representación de funciones y la relación de situaciones reales o situaciones problemáticas dónde aparecen tendencias asintóticas en las cuales se puede aplicar el conocimiento teórico. Retomando conversaciones sobre conceptos con carácter cíclico, tras la visualización de los vídeos por parte de los alumnos fuera del aula, se produjeron menos diálogos que en el ciclo anterior, pero no menos interesantes ya que el objetivo de los mismos era obtener observaciones, precisiones o apreciaciones que no surgieron en el curso anterior, lo que muestra la evolución en los razonamientos del alumnado, nos aportan evidencias de los progresos en la comprensión de los contenidos y la apertura de nuevas vías de conocimiento.

Algunos alumnos bien identificados, los que en el curso pasado no hacían declaración alguna, porque estaban lejos de comprender los conceptos tratados o algunos de los nuevos que han tenido el primer contacto con el contenido teórico mediante los vídeos, siguen sin discriminar aproximación y tendencia, para algunos son sinónimos, y la concepción errónea que tienen está muy arraigada en ellos. Unos, segregan erróneamente entre tendencia limitada a puntos y aproximación restringida a rectas, posiblemente porque asocian el estudio de tendencias con el cálculo de límites cuya búsqueda es un valor y en la representación de funciones se ha trabajado la aproximación de las curvas a rectas cuando había comportamientos asintóticos. Otros, continúan incidiendo prioritariamente en las sucesiones crecientes.

Paralelamente, convive un acercamiento hacia la unicidad de la tendencia, por extensión, también al límite, y dejando a la aproximación muchas opciones; coexistiendo con la presencia de criterios comparativos entre tendencias, lo que es erróneo porque la tendencia es única, pero es interesante entre posibles aproximaciones. Del acercamiento al lenguaje de los alumnos aparecen interesantes expresiones novedosas como conexión entre conceptos de tipo explicativo, aunque también pueden ser una fuente de error.

Se manifiestan dificultades cuando se pretende hacer un estudio completo del comportamiento global de la función queriendo dar una respuesta genérica y unificada a la tendencia de la función, no concretando la variable de estudio, ni el signo del infinito, para ciertos alumnos se considera que tuvieran que estar conexionadas. A modo de ejemplo, no hay unificación de criterio ante el comportamiento de la función exponencial $y = a^x$ por la izquierda para $a>1$. Unos consideran que tiende a menos infinito, otros a infinito, otros a cero y, la mayoría no se manifiestan, posiblemente ante el conflicto en el estudio conjunto de las tendencias de las dos variables.

Algunos alumnos imponen erróneamente a la asíntota ciertas condiciones necesarias y suficientes que se debieran cumplir obligatoriamente.

Se puede afirmar que no se domina en profundidad la conectividad entre el campo algebraico y geométrico, como es el caso de no relacionar puntos de corte con ecuaciones asociadas.

El alumnado pretende canalizar patrones visuales únicos y universales respecto a la tendencia asintótica que no acaban de concretar, frente a otros que son capaces de abstraer la variable matemática que subyace. Ciertos alumnos dotan de gran importancia a situaciones gráficas o posicionamientos como por ejemplo si la aproximación de la curva hacia la asíntota es "*por encima o por abajo"* frente a otros que afirmando que lo importante es que *"sigue la línea"* que es su manera particular de expresar que tengan análogo comportamiento en el infinito.

La mayoría del alumnado va diferenciando entre la tendencia de x y de y, además van conectando el estudio conjunto de las tendencias de las dos variables en una función, la comprensión no es fácil. Ante la tendencia asintótica horizontal, el alumnado se posiciona en dos sectores. Uno de ellos asocia que cuando el punto se va *"hacia infinito"*, las dos variables también tienden a infinito¸ frente a otro que diferencia entre una tendencia a infinito de la variable x con *"que se va"* y otra tendencia finita de la variable y con *"que no se va"*. Al primer grupo le parece contradictorio que el punto, como *"un todo"*, tienda a infinito; y sin embargo, que las *y, "una parte"*, tienda a una constante. Nuevamente aparece la relación del exterior de la pantalla con el infinito, ya que manifiestan que cuando un punto se va fuera de la pantalla consideran que va al infinito.

La posibilidad del toque o corte de la función y asíntota, sin duda, ha sido la mayor preocupación compartida por el alumnado en todos los ciclos de investigación, habiendo dado lugar a diversidad de interesantes diálogos y reflexiones, tanto a favor como en contra, conectando contenidos matemáticos que no estaban implicados en la tendencia asintótica e incluso mezclando conceptos espacio/temporales junto con cuantificadores que al intervenir el infinito producía en el alumnado cierta superación cognitiva. Por otra parte, para la tendencia asintótica oblicua, tampoco había unanimidad al respecto, habiendo alumnos que interpretan que la función no debe traspasar nunca a la *AO*, teniendo una funcionalidad de barrera, e incluso otros alumnos en los que parece producirse un desajuste en su percepción y consideran que la curva de la función y la asíntota deben coincidir en todo su dominio.

La representación de funciones es un estándar de aprendizaje de gran importancia en 2º de Bachillerato, por lo que se incidió en ello en las sesiones de docencia con la ayuda del programa GeoGebra. Se estudiaron en profundidad las propiedades locales y globales de las funciones que se presentaban con su expresión algebraica. Se trabajó con funciones que presentaban diferentes combinaciones de los diferentes tipos de asíntotas y, en general, se considera que se alcanzó el nivel competencial fijado para el nivel educativo que nos ocupa.

Tras las sesiones de docencia, se volvió a pasar a los alumnos el mismo test de expertos del ciclo de investigación anterior, con el fin de categorizar y sistematizar las mayores dificultades en la comprensión de conceptos así como los errores de interpretación descubiertos en todos los ciclos de investigación, incluido el presente, y sobre todo analizar cuáles son aquellos que persisten en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas. También se valorará la evolución global y el grado de consecución de los objetivos planteados en relación al nivel de comprensión de los conceptos asociados al de asíntota.

Se pretende valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia numérica. Todos los alumnos seleccionaron las dos opciones correctas, por lo que se percibe un gran avance en la comprensión de los conceptos que nos ocupan, y en relación al tipo de razonamiento utilizado, se observa que disminuye la proporción de alumnos que opta por la focalización en el acercamiento; bien por centrarse en que las aproximaciones cada vez son mayores o por criterios métricos; compartiendo porcentaje con la opción centrada en la tendencia como mejor aproximación, seguida de aportaciones subjetivas que diferencian la aproximación de la tendencia. Se mantienen errores léxicos en las justificaciones de las diferentes opciones y se reduce considerablemente la selección de opciones incompatibles.

En relación con los alumnos que participaron en la experimentación anterior, en general, identifican y, salvo excepciones, discriminan entre aproximación y tendencia sobre la curva. Del 85% del alumnado que identifica la aproximación y tendencia sobre la curva, se reduce al 65% los que discriminan ambos conceptos y, además, visualizan dicha situación cuando se centra en la tendencia asociada a las abscisas de los puntos que tienden a otro punto. Respecto al anterior ciclo de investigación, se ha mejorado significativamente aunque no se puede despreciar alrededor de una tercera parte del alumnado que por confusión u omisión en la respuesta, todavía no ha interiorizado que la tendencia mejora cualquier aproximación prefijada, se puede decir que es el aspecto más complicado de comprender para el alumnado,.

También aumentan los alumnos que identifican y discriminan entre la tendencia infinita en el eje de abscisas, presentándose una situación análoga a la del pasado curso. Aunque mejorados los porcentajes, la comprensión del infinito negativo suscita más dificultades en dicho alumnado, pudiendo haber una situación de economía lingüística que pretende unificar y simplificar el discurso ante el infinito como un concepto global, no discriminando signo alguno. De hecho, un alumno globaliza los comportamientos de las variables con tendencia infinita del siguiente modo "*cuando los valores de* x *se hacen grandes en valor absoluto" o "los valores de* $f(x)$ *aumentan indefinidamente en valor absoluto";* el resto de ellos alumnos, no incorpora en sus manifestaciones distinción entre el infinito positivo o negativo, en el estudio de las tendencias, ni para x ni para y.

Dichos resultados concuerdan con que el (70%) de los alumnos entienden que la tendencia infinita de un punto como la necesaria tendencia a infinito de sus dos coordenadas, seguida de la idea de la superación de cualquier valor fijo por parte de las coordenadas del punto de la gráfica (60%). El porcentaje de alumnos que comprenden que también se tiene una tendencia infinita en un punto cuando una de las variables tiende a un valor fijo y la otra a $\pm\infty$ se reduce considerablemente, estando cercano a la tercera parte de los mismos, siendo ligeramente superior los alumnos que lo consideran cuando tienda a infinito la variable y. Ante estas respuestas, se interpreta que la tendencia asintótica horizontal para ciertos alumnos no se considera una tendencia infinita sobre la gráfica.

La verdadera comprensión y aceptación de todas las posibilidades de caracterización de tendencia infinita sobre la gráfica de una función por parte del alumnado engloba la aceptación de todas las posibilidades expuestas anteriormente. A este respecto se ha constatado un considerable avance respecto al ciclo anterior, ya que se ha aumentado del 8,7% al 30%, considerándose que la evolución madurativa y la visión global de todo el bloque de contenido relativo al análisis funcional ha facilitado dicha mejora.

Respecto al ciclo anterior se ven claros avances, superando las tres cuartas partes el alumnado que verdaderamente comprende el comportamiento asintótico, reduciéndose ligeramente el alumnado comprende que no sólo es una aproximación, discriminando la dicotomía aproximación/tendencia; y que, el hecho de que una recta no corte a la curva, no implica comportamiento asintótico.

Se mejoran también todos los porcentajes, situándose alrededor del 65%, en relación a la conceptualización de las asíntotas y su expresión algebraica, así como la posibilidad del corte entre curva y asíntota, aunque no lo ven con las mismas posibilidades para todos los tipos; los porcentajes van disminuyendo desde la *AH*, *AO* y *AV*, en este último caso solamente lo ve posible un 35%. Se sigue percibiendo un tratamiento diferenciado de la *AO*, respecto al resto de asíntotas, restringiéndoles condiciones y no interiorizando la caracterización asintótica de la misma.

Sobre las interpretaciones o concepciones de los alumnos acerca de las asíntotas, se aprecia que aumentan los alumnos que señalan la tendencia de una sucesión hacia un valor fijo $x = k$ y se reduce el porcentaje de alumnos que limitan dicha tendencia a una aproximación por defecto y/o exceso, al valor fijado. El resto de opciones se mantienen, sigue apareciendo una conexión errónea de tendencia con la presencia de asíntotas horizontales y/o verticales, éstas últimas en mayor proporción. No han desaparecido las confusiones entre el concepto de tendencia numérica y los diferentes procedimientos de cálculo de límites de funciones, reduciéndose una de las posibles combinaciones que se presentaron en el ciclo anterior y, además, tampoco aparece explícitamente ninguna expresión formal de notación de límite. Se trata, sin duda de pequeños avances pero sigue subyacente la importancia de la priorización del cálculo de límites de alguna de las variables frente al concepto de tendencias.

Tras la experimentación se vuelve a requerir al alumnado que aporte sus creencias sobre las asíntotas horizontales y asciende al 30% el alumnado que responde correctamente, compartiendo mayoritariamente la expresión algebraica correcta y la idea de aproximación/tendencia; es menor la importancia que se da a la relación métrica relativa a que la distancia entre la asíntota y la curva tiende a cero.

Ligeramente superior es el porcentaje de los alumnos que responden correcto parcialmente, aunque tienen un grado de comprensión elevado, les perjudica la omisión, limitación y/o confusión en algunas de algunas de características consideradas de importancia para la comprensión de la *AH*. En dichas respuestas, se han constatado diversos errores léxicos, priorizaciones, simplificaciones, confusiones, conceptuales o falsas imposiciones/relaciones/conexiones. Por último, alrededor de la tercera parte del alumnado contesta incorrectamente, y se perciben errores tipificados en la reflexión más específica de dichos apartados y que aparecerán en el capítulo final de esta tesis.

Persiste el error léxico o de precisión que ya estaba presente en el pasado curso académico, relativo a la aparición de conceptos/denominaciones no incorporados en la docencia. Varios alumnos presentan a la *AH* como una recta, línea horizontal, recta horizontal o recta paralela a la que va a tender la función; pero no concretan el estudio de las variables implicadas. Aunque se incidió en este particular en las sesiones de docencia y siempre que se verbalizó en el aula, por la observación sistemática y diaria en el alumnado se puede afirmar que, para la mayoría del alumnado, dicha tendencia hace referencia a la variable x cuando tiende a infinito positivo o negativo. Parte del alumnado lo omite por considerarlo obvio, pero en algunos de ellos no está consolidado, ya que afloran errores y confusiones en otras cuestiones, consecuencia de lo anteriormente expuesto. En este ciclo de investigación se ha constatado la pérdida del interés principal en que la curva toque/corte, o no, a la *AH*; interpretación muy importante para el alumnado en el ciclo de investigación anterior.

Respecto a la *AV*, se mantiene, como viene siendo habitual, el paralelismo en relación a la *AH*, así como los criterios de validación. En el anterior ciclo, nadie puntualizó sobre lateralidad ni en el estudio de los límites laterales, y en este periodo lo han incorporado dos alumnos imponiendo ambos que la tendencia asintótica vertical se presente conjuntamente y lateralmente, pudiendo variar en el signo.

Respecto a los alumnos que responden parcialmente correcto, se mantienen algunos errores como restricciones en las posibilidades de la *AV*, presencia obligada de la tendencia asintótica vertical conjunta y lateralmente, determinación de la *AV* únicamente por el domino de la función o desconexión de la *AV* de su función asociada. También aparecen tópicos, como la relación entre la *AV* y la discontinuidad de la función o la no restricción en cuanto al número de *AV* que pueda tener una función.

Respecto a los alumnos que responden incorrectamente se han constatado que aparecen ciertos errores ya detectados, con las matizaciones del bajo dominio en la expresión y utilización correcta de los conceptos, e incoherencias en relación a la existencia y representación de las funciones.

En relación a la *AO*, aumentan las respuestas correctas y comparten en diferente nivel de profundidad los tópicos que se han especificado con más precisión anteriormente e, incluso, aparecen nuevas denominaciones como por ejemplo *Aproximación continua"* para referirse a su tendencia.

Respecto a las respuestas parcialmente correctas, se pueden clasificar en dos niveles. Desaparece el grupo que interpretaba aisladamente la *AO* como recta sin relación con la función ni con gráfica, y se mantienen el grupo que focaliza sobre el interés en su existencia y otro grupo que manifiesta imprecisiones.

Por un lado, el interés del primer subgrupo está centrado en la existencia de la *AO* con justificaciones diversas como: discriminación de la no existencia de la *AO* si se tiene conocimiento de la presencia de la *AH*, asociación de la *AO* necesariamente con las funciones racionales, recordando la relación que se debe cumplir entre los grados de los polinomios numerador y denominador, cálculo de su expresión $y = mx + n$, con el procedimiento de búsqueda de m y n a partir del algoritmo de los límites o las condiciones sobre la presencia de *AO* en la gráfica de una función concreta.

Por otro lado, el segundo subgrupo aporta nuevas interpretaciones como la incorporación del tiempo como una nueva variable en el estudio funcional, con expresiones del tipo *"no la toca en ningún momento",* omisiones como la no contemplación de la posibilidad de asíntota cuando x tiende a infinito negativo, obligaciones como la presencia de la *AO* en el primer y tercer cuadrante o la finitud de la asíntota con presencia de extremos, a pesar de ser una recta infinita con afirmaciones del tipo *"extremo de estas asíntotas se aproximan cada vez más al* 0"; es decir, incorporan, omiten, obligan o restringen condiciones que no son ciertas.

Respecto a las respuestas incorrectas manifiestan la permanencia de ideas confusas **e** incoherencias relacionadas con una falta de comprensión de conceptos asociados a la geometría analítica y al análisis de funciones. Aparecen una serie de expresiones que están concretadas en el correspondiente apartado dónde se imponen condiciones restrictivas a la *AO*, y denominaciones erróneas del tipo *AO* como la recta con tendencia a una inclinación, función divisoria de la función o la obligatoriedad de ser la *AO* la recta $y = x$.

En suma, se ha ido incorporando progresivamente el concepto de tendencia sustituyendo aproximación por mejora de la aproximación en un alto porcentaje de respuestas de los alumnos, lo que muestra cierto avance en la comprensión de las asíntotas. La palabra límite aparece en pocas respuestas. En este ciclo no han surgido los errores relacionados con estrategias de cálculo que priorizaban el cálculo de límites sobre la comprensión del concepto, a modo de "receta", lo que potenciaba en algunos alumnos la aparición de ciertos errores de conceptualización o comprensión.

Al ser preguntados de nuevo por la creencia si todas las funciones tienen alguna asíntota y su justificación, aparecen el 20% de respuestas correctas, hecho que no ocurrió en el anterior ciclo, algunas discriminando ramas infinitas frente a tendencias asintóticas, otras repuestas presentan diferentes familias de funciones que tienen o no asíntotas y, las menos, aportan su creencia sin justificarlo.

Casi la mitad del alumnado emite respuestas correctas, pero manifiestan algún error en su justificación, en la globalización de sus afirmaciones o en la invención de nuevas denominaciones para la clasificación de las funciones, como por ejemplo que el dominio y/o recorrido sea todo $\mathbb{R}$ implica la no presencia de asíntotas o que ninguna función periódica tiene asíntotas, entre otras. Se han producido varias respuestas erróneas porque aportan generalizaciones falsas, como ejemplos: asegurar que todas las funciones presentan asíntotas, intentar asociar la caracterización de algunas familias de funciones con ciertas propiedades de las asíntotas o conexiones falsas en relación al dominio, recorrido y/o discontinuidades, entre otros.

No hay progresos apreciables sobre si la ecuación $y = px + q$ puede ser AH, en términos porcentuales se mantiene en torno al 20% el alumnado que contesta correctamente, estudiando con diferentes niveles de profundización las diferentes posibilidades de los parámetros p y q, puntualizando la mayoría que si $p = 0$, sería *AH*, hecho que no se presentó en ningún alumno del ciclo anterior. La mitad de los alumnos responden de manera parcialmente correcta ya que la aparición de los parámetros p y q, en la expresión $y = px + q$ les imposibilita ver que puedan ser nulos, asignando una sola posibilidad estática de asíntota, en comentarios de uno de ellos, "*pertenece a una asíntota oblicua; por lo tanto, no pertenece a una asíntota horizontal*". En el resto del alumnado, que responden incorrectamente, muestran errores ya aparecidos con anterioridad.

Análoga situación ocurre ante la posibilidad de que $y = k$ sea la ecuación de una *AV*, algo más de la mitad del alumnado responde correctamente y, además, la mitad de los mismos lo justifica aportando que pudiera tratarse de una posible *AH* por su expresión algebraica y por tratarse de una recta paralela al eje de abscisas; por tanto, no puede ser una AV. La otra mitad, aunque la respuesta es correcta manifiestan imprecisiones u omisiones ya detectadas en anteriores ítems

Al ser preguntados sobre el número de asíntotas de cada tipo que puede tener una función, se tiene un bajo porcentaje de respuestas totalmente correctas. Mayoritariamente, el alumnado ha comprendido que las *AV* pueden presentarse de forma infinita, le sigue la comprensión en relación a la *AH* y, por último, la *AO*. Respecto a las respuestas incorrectas se centran en la unicidad en la presencia de *AH* o *AO*, en una gráfica, pudiendo ser una mala interpretación al referirse a la tendencia cuando *x* tiende a un tipo de infinito. Cuando varios alumnos especifican que no puede haber al mismo tiempo una horizontal y oblicua, se refiere cuando *x* tienda a infinito positivo o negativo, es decir, asocia *"el mismo tiempo"* a la tendencia de x a infinito del mismo signo; es decir, el mismo tiempo es fijar una variable con el mismo sentido de tendencia. Respecto al anterior ciclo, se ha pasado mayoritariamente del estudio de las posibilidades que puede tener una función, cuando sólo presentase un tipo de las asíntotas al estudio conjunto de los tres tipos de asíntotas. Se trata de una cuestión globalizada que parece tener dificultades el alumnado en generalizar, a pesar de haberlo trabajado de una forma constructiva en el aula a través de diferentes ejemplos y situaciones en las sesiones de docencia.

Finalmente, como en anteriores ciclos de investigación, se ha realizado una evaluación global sobre el aprendizaje a través del visionado de los videos, valorando la claridad en la exposición, el interés del contenido, la facilidad en la comprensión de los conceptos, el gusto por esta nueva metodología y la preferencia frente a la metodología de la clase tradicional de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho).

La mitad del alumnado valora con 4 puntos el aprendizaje a través de los vídeos, siendo la media 3.3, respecto a la dificultad de los contenidos, la mayoría se posiciona en el valor central obteniéndose una distribución desplazada hacia la puntuación mayor y su media es 3.2. La puntuación baja cuando se pregunta sobre el interés por el aprendizaje que les ha despertado los vídeos, situándose la media en 2.9, siendo una distribución asimétrica.

El grado de comprensión individual ha sido diverso, como se ha observado en las cuestiones individuales del test final de expertos, recogidas en la plataforma EdPuzzle. Dicho alumnado tiene muchas diferencias en el nivel competencial matemático fruto de su historia escolar y ya contrastado por la investigadora en el desarrollo del curso académico anterior. Dicha diversidad ha aportado gran riqueza en la investigación llevada a cabo, como ha quedado reflejado en el anterior y presente capítulo.

CAPITULO VIII

VIII CAPÍTULO FINAL

En este capítulo, se presentan las conclusiones de esta investigación, fruto del estudio teórico realizado y de su desarrollo experimental en cada ciclo de investigación-acción. La fundamentación de estas conclusiones está implícita en las reflexiones generales de cada ciclo, en las que se recogen los aspectos más importantes observados en las fases de planificación, acción y análisis de datos correspondientes. Se trata de una investigación que se ha ido moldeando a través de los ciclos de investigación-acción y los puntos de partida de las intervenciones según se ha ido progresando en la misma.

En primer lugar, se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación en relación con los objetivos reformulados tras el primer ciclo exploratorio y en función del grado de consecución de los mismos.

En segundo lugar, se presentan las aportaciones de esta investigación a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las tendencias asintóticas como propiedad global de las funciones a través de sus gráficas, por un lado, con la implementación de una metodología innovadora apoyada en entornos virtuales y, por otro lado, con la aportación de vídeos inéditos diseñados según el modelo ELOS. Finalmente, se presenta la categorización de errores y dificultades descubiertos mediante la experimentación, contribuciones éstas que pudieran ser tenidas en cuenta en el ámbito de la investigación educativa para el desarrollo de otras exploraciones.

En tercer lugar, se reseñan fortalezas en la presente investigación desde la perspectiva de la metodología de Investigación-Acción, la colaboración de observadores externos y la validación de cuestionarios valorativos por expertos en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Posteriormente, tras la finalización del trabajo de investigación, una observación retrospectiva global de su desarrollo ha permitido descubrir puntos débiles de la misma como aspectos que pudieran ser mejorados y otros que han dificultado su desarrollo.

A continuación, se hace una propuesta didáctica educativa basada en la investigación que se ha desarrollado, centrada en Bachillerato y con el material generado en la presente tesis.

Por último, se presentan algunos problemas abiertos que podrían profundizar o dar continuidad a los objetivos propuestos en la presente tesis o bien, dar apertura a nuevas líneas de investigación que no se han podido llevar a cabo en la presente por diferentes causas y, por tanto, pueden ser el punto de partida de posteriores investigaciones.

VIII.1 CONCLUSIONES

Inicialmente se planteó el siguiente objetivo general de la tesis:

- Valorar si la implantación de la metodología Flipped Classroom (AI) es apropiada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas. Estimar el grado de aceptación por el alumnado y analizar los aprendizajes producidos.

La reflexión que se realizó tras la primera experimentación exploratoria permitió reformular dicho objetivo general de investigación y redactarlo con más precisión, ampliándolo a cuatro objetivos. Éstos se transcriben nuevamente precediendo a la presentación de las conclusiones relativas a cada uno de ellos.

A continuación, se presentan las conclusiones que se han obtenido tras los cuatro ciclos de investigación. Éstas se muestran ordenadas según los cuatro objetivos que se acaban de redactar.

VIII.1.1 Conclusiones sobre el primer objetivo

O1. Valorar la implantación de una metodología Flipped Classroom mixta siguiendo el modelo de Talbert.

En el ciclo exploratorio del curso académico 2014/15 se llevó a cabo una metodología Flipped Classroom pura (AI), el mayor interés de dicha fase de exploración fue el análisis de la metodología y, tras la finalización de la fase de intervención, se propuso al alumnado un cuestionario final, según escala Likert, para que valoraran globalmente la experimentación. Se trataba de un extenso recopilatorio (ANEXO X.5.3) sobre los siguientes apartados: el punto de partida, el grado de implicación personal en el proyecto, el grado de implicación de los docentes, el desarrollo de la actividad, la valoración de los vídeos, según su temática, los resultados obtenidos y sobre la experiencia.

Inicialmente, los alumnos comprendieron la metodología AI, consideraron que era positiva y aceptaron de buen grado la propuesta experimental, a pesar de no ser la investigadora la profesora titular. Las expectativas de aprendizaje se distribuyeron según una distribución normal, así como la ansiedad inicial frente a la experiencia.

Cierto grupo de alumnos sí que había utilizado vídeos tutoriales alojados en Youtube, ante dificultades concretas en las asignaturas de Física-Química y Matemáticas, e indican que sí que los ayudaron a comprender los conceptos; y no hay mucha diferencia entre los que prefieren videos tutoriales frente a la explicación del profesor.

Los alumnos destacan el interés de la profesora y el dominio de la materia, y la menor valoración la asignan a la escasa responsabilidad del alumnado sobre su papel activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas declaraciones concordaban con las prevenciones sobre esta metodología señaladas en los antecedentes (Berret, 2012).

Valoran más la explicación del profesor que los vídeos (siendo similar en todas las temáticas) porque, según algunos, *"aprovechan más la clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas"* y que prefieren hacer los *"deberes clásicos"* en casa que ver un vídeo explicativo. Asimismo, prefieren estudiar revisando sus apuntes que volviendo a visionar los vídeos del tema. En otro orden de cosas, les gusta la plataforma Moodle oficial del centro y se han divertido más que con otras unidades didácticas.

La mayor parte de los alumnos del ciclo exploratorio consideran que con esta metodología trabajan menos y que han aprendido menos que con la habitual del aula. Valoran con la puntuación más alta (3,96) *"que esta metodología depende de la responsabilidad del alumno"* y consideran que esta metodología potencia el trabajo en grupo. Sin embargo, aseguran que ha sido escasa la comprensión de conceptos relativos a funciones gracias al visionado de vídeos.

Reconocen el carácter innovador de la experiencia, que conocen suficientemente las características de esta metodología y que ha sido interesante participar en ella, pero no desean que se aplique en otras unidades ni en otras materias. Declaran que no les produce ansiedad esta metodología y que se han cumplido escasamente sus expectativas de aprendizaje.

Considerando las reflexiones del ciclo exploratorio, se incorporaron las propuestas de mejora y se optó por adaptar la metodología al modelo de Talbert (2014) y, en particular, para que fuera efectiva la visualización de los vídeos, ésta se realizaría en el aula. Por razones que fueron especificadas en el correspondiente ciclo, la experimentación se llevó a cabo durante una semana en una clase de 1º Bachillerato en el IES Recesvinto de Venta de Baños, centrando los contenidos en las asíntotas. El mayor interés en este ciclo era la validación del material de soporte de la investigación y el diseño, y posterior validación, del test globalizado de evaluación. Para obtener una apreciación más completa por parte del alumnado, se les pidió que escribieran cualquier observación y que valoraran en una escala Likert los siguientes aspectos de los vídeos: claridad en la exposición, interés del contenido, si el visionado de vídeos dinámicos facilita la comprensión de los conceptos y el gusto por la nueva metodología.

Las puntuaciones medias resultaron ser las siguientes: 2.5, 3.00, 2.44, 2.88. Las dos más altas están responden al interés por el contenido y a la aceptación de esta metodología, pero no hay que perder de vista la escasa participación del alumnos en las cuestiones que debían haber respondido. Por último, los alumnos no estaban acostumbrados a autoevaluarse ante una tarea realizada por lo que quizá no fueran totalmente objetivos a la hora de extraer conclusiones y cuantificar dichas situaciones mediante una calificación numérica.

En el segundo ciclo de investigación, respecto a la dinámica de esta metodología, en sintonía con lo que aportaba Talbert (2011), ciertos alumnos se mostraron inicialmente reticentes, exponiendo que lo *"normal"* es que el profesor explique en la pizarra y que, cuando lo entiendan, se pasa a lo siguiente. Se reflexiona grupalmente sobre la dificultad de asegurar dicha comprensión y, según se avanzaba en las sesiones y en los contenidos, se mostraban más cómodos y receptivos. Surgieron comentarios del tipo *"esto es muy nuevo, muy novedoso, muy directo, no es a lo que estamos acostumbraos", "lo vemos mejor lo del movimiento así que en la pizarra"* y "*que esté animado y eso está bien"*

Respecto al tercer y cuarto ciclo de investigación, la investigadora fue la profesora titular del grupo al cuál se dio continuidad durante los dos cursos, comenzando en 1º Bachillerato de ciencias (curso 2016/17) y se estableció un nuevo contrato didáctico con el alumnado basado en la aplicación de la Metodología "Flipped Classroom mixta". La valoración, por tanto, se ha hecho de forma globalizada y se presenta a continuación siguiendo el modelo del ciclo exploratorio (global, vídeos, punto de partida, grado de implicación docente, desarrollo de la actividad, resultados obtenidos y después de la experimentación).

Globalmente, salvo excepciones, se valora positivamente el aprendizaje a través del material multimedia, el alumnado es consciente de la dificultad de los contenidos; sin embargo, el interés por el aprendizaje que les ha despertado el visionado del material gráfico, es asimétrico siendo la media cercana al valor central.

Respecto a los vídeos, por un lado, el alumnado estima la claridad en la exposición y su interés en el contenido, pero, por otro lado, hay diversidad en la valoración sobre como el visionado de los vídeos dinámicos facilita la comprensión de los conceptos. Sobre el gusto de esta metodología, la mayoría lo valora muy positivamente, pero el resto de alumnado se distribuye uniformemente en el resto de las puntuaciones; por lo que hay variedad de opiniones.

Como punto de partida, se confirma que la mayoría del alumnado tiene conocimiento y hace uso, con diferente asiduidad, de las posibilidades que ofrece internet a través de canales o páginas web especializadas para consultar o profundizar en cualquier temática escolar mediante video tutoriales; en especial, ellos lo utilizan para el ámbito científico-tecnológico. La amplia colectividad considera que respondieron a sus necesidades, salvo un pequeño sector que matiza que parcialmente. Prácticamente el alumnado se divide en dos grupos al ser preguntado por la preferencia de la explicación del profesor frente a un video tutorial, siendo algo más de la mitad los que se posicionan a favor, frente al resto que no se manifiesta en términos absolutos optando por la opción *"depende"* dando valor y potencialidad a esa posibilidad. El alumnado que ha contestado a este test final se autoevalúa positivamente sobre su implicación en el visionado, así como en su interés y atención en responder a las cuestiones relacionadas con los vídeos.

Respecto al grado de implicación docente, es lo mejor valorado, situándose todos los alumnos en la máxima puntuación, salvo uno en el valor 4, dicha situación muestra el reconocimiento al trabajo e interés de la profesora por implementar innovación educativa por parte del alumnado.

Otro ámbito de estudio es la valoración de aspectos relacionados con el desarrollo de la actividad. No hay consenso en valorar si es más difícil entender la explicación de un vídeo que la explicación presencial en el aula, situándose algo más de las tres cuartas partes del alumnado en las tres puntuaciones menores y el cuarto restante en el valor máximo. En general, el alumnado declara que prefiere hacer en casa los *"deberes clásicos"* que visualizar un vídeo explicativo. Preguntados sobre si se aprovecha más en clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas, no hay consenso. A grandes rasgos, hay heterogeneidad de criterio pero se sigue dando cierto valor mayor a la metodología expositiva por parte del docente que a la implementación de otras metodologías más activas en la docencia de aula.

Respecto a los resultados obtenidos, por un lado, hay acuerdo generalizado respecto a haber comprendido conceptos relativos a funciones gracias al visionado de los vídeos, valorándolo en las mayores puntuaciones; pero, por otro lado, no hay acuerdo en la creencia sobre si han aprendido más que con una metodología expositiva tradicional, ya que en este ítem las puntuaciones se sitúan mayoritariamente en la puntuación mínima y central. Cabe destacar que la mayoría coincide en que con esta experiencia han reflexionado y valorado positivamente la importancia del auto aprendizaje.

Después de la experimentación, por una parte, unánimemente, se considera una iniciativa novedosa e innovadora, siendo las puntuaciones más altas las otorgadas por el mayor número de alumnos; por otra parte, les ha parecido interesante participar en esta experiencia, situándose prácticamente la mitad del alumnado en la posición central y el resto, salvo uno, en los dos mayores valores. También hay consenso en valorar positivamente esta metodología, ya que casi la mitad del alumnado se ha situado en la máxima puntuación y una tercera parte en el valor 4. De forma global, el alumnado prácticamente coincide en el deseo de que esta metodología se utilizase más habitualmente en la materia de Matemáticas o en otras materias, obteniéndose la misma media, siendo ésta ligeramente superior al valor central. En ambos casos el alumnado se distribuye con cierta uniformidad en todos los valores posibles, con la particularidad que para la asignatura de Matemáticas, la mayor proporción se acumula en el valor 4, y para el resto de materias en el 5.

No hay consenso sobre si se ha aprendido más con esta metodología que si se hubiera mantenido la anterior. A modo de resumen, una tercera parte del alumnado que piensa que no ha aprendido más frente a la mitad del alumnado que se muestra en una situación de equilibrio y una sexta parte que da más valor a esta nueva metodología que a la antigua. Esta distribución del alumnado coincide con el grado de satisfacción con la experiencia realizada

Para finalizar, se ofreció la posibilidad al alumnado de aportar observaciones o sugerencias a modo de cuestión abierta, agradeciéndoles de antemano su colaboración. Tres alumnos se posicionan a favor de los recursos tradicionales, según sus palabras "*prefiero la pizarra y la tiza", "prefiero las explicaciones en la pizarra de toda la vida"* o *"es mejor las clases habituales"*, pero no se manifiestan en relación a la nueva metodología. Como aspectos positivos a la experimentación llevada a cabo se manifiestan ocho alumnos, apareciendo en sus respuestas algunos de los siguientes términos, entre otros: *innovador*, *de ayuda*, *buena idea*, *llama la atención, interesante, atrayente, engancha, entretenido, buen método, nuevas maneras de aprendizaje,…"*

También se valora *"mezclar lo clásico con lo virtual"* o apreciaciones, "*no creo que deba ser sustitutivo sino complementario y de ayuda"* y la opción de las nuevas posibilidades que ofrecen los nuevos materiales generados *"mucho mejor con videos explicativos para poder revisar las explicaciones en casa".* Cierto alumno también es consciente de la dificultad y complicación de comprender ciertos contenidos por su dificultad intrínseca y que el hecho de visualizarlos desde diferentes enfoques, inicialmente, parece que lo complica, pero el fin es precisamente lo contrario, en palabras del alumno "*Como se trata de una nueva forma de incorporar contenidos, lo que más me costó fue relacionar las explicaciones de clase con los ejemplos de los vídeos, pero cuando llegas a entenderlo resulta muy útil".*

Como aspectos negativos, un alumno añade *"los vídeos a veces se hacían un poco pesados y perdía el hilo de lo que se estaba tratando de explicar"* y otro comenta *"los vídeos son muy malos y liosos".*

VIII.1.2 Conclusiones sobre el segundo objetivo

> *O2. Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de asíntotas a través de sus gráficas mediante dicha metodología.*

Para estructurar el análisis de dicho proceso de enseñanza-aprendizaje, se ha categorizado el análisis en diferentes apartado según los siguientes tópicos: conceptos básicos subyacentes, infinito, verbalización, matemáticas emocionales, creatividad y falsas imágenes conceptuales.

VIII.1.2.1 Conceptos básicos subyacentes

Se ha llevado a cabo un aprendizaje activo, según Drew & Mackie (2011), en las tres dimensiones de Watkins (2007): conductuales, cognitivas y sociales. Las matemáticas comprenden un proceso constructivo, por lo que la falta de buena base o esqueleto de sostén, necesarios para cimentar otros, provoca la inestabilidad en la estructura del conocimiento; por ejemplo, no dominar el álgebra necesaria para interpretar situaciones o la operatividad aritmética con fracciones, dificulta la determinación del dominio de una función racional. La no consolidación de conocimientos matemáticos anteriores dificulta el proceso óptimo de enseñanza y aprendizaje y es una barrera de contención; por ejemplo, la consideración de los signos matemáticos sin conexionarlos con el concepto que representan (interpretación de paréntesis ausente de la significación de intervalo abierto). Otro problema añadido, es la dificultad de algunos alumnos para conectar o vincular diferentes conceptos matemáticos de diferentes campos; por ejemplo, relacionar las resoluciones gráficas (buscar puntos de corte) con las resoluciones analíticas (encontrar valores solución), para que no sean consideradas por el alumno como opciones inconexas. Se puede afirmar que no se domina en profundidad la conectividad entre el campo algebraico y geométrico.

En la fase exploratoria con alumnado de 4º ESO, se percibió la dificultad en la comprensión de ciertos conceptos básicos del bloque de números, álgebra, geometría y, especialmente, funciones. En las siguientes fases, se perpetuaron algunas de dichas dificultades, en un reducido número de alumnado.

Respecto al bloque de número, se constataron graves problemas en cierto sector del alumnado en relación a la ordenación de números racionales para aproximar los números; en concreto, encontrar un número más próximo a otro, a partir de uno dado. Algunos alumnos no son capaces de construir una sucesión monótona de números que se acerquen cada vez más a un número dado porque fracasan en la ordenación de decimales y, como consecuencia, no tienen asumido el orden usual de los números reales, y menos aún la densidad de $\mathbb{Q}$, lo que dificulta poder avanzar en conceptos más complicados (Blázquez, 1999).

En geometría, también se ha percibido que ciertos alumnos no tienen adquirida la idea de dirección y, menos aún, que en las rectas ésta viene determinada por el coeficiente de la x que se denomina pendiente de una recta (Pecharromán, 2008).

Otros alumnos, consideran que las únicas rectas que tienen la misma dirección son las paralelas al eje de abscisas. No se tiene adquirido que toda recta está determinada, entre otras posibilidades, por mantener una dirección fijada por cualquiera de sus vectores directores y, al menos, un punto de la misma. Evidentemente, dichos vectores directores son infinitos pero todos ellos tienen en común la pendiente.

Referente al estudio de las funciones, como es el caso del dominio y recorrido, no les comprenden como conceptos globales de la función; sino, incluso, centrando toda su atención en el estudio local de dichos conceptos en cada punto de la gráfica (Pecharromán, 2008).

Situación contraria es la relativa al estudio de máximos y mínimo de una gráfica, dónde algunos alumnos visualizan únicamente extremos absolutos de la función, la analizan sólo globalmente y se olvidan de estudiar su comportamiento en entornos locales para encontrar posibles extremos relativos.

Cierto alumno, para buscar los extremos relativos estudia la monotonía globalizada de todo el dominio, porque tiene muy interiorizado que el paso de un intervalo creciente a decreciente implica la presencia de un máximo y, al revés, para un mínimo. Sin embargo, la focalización en un entorno de un punto, le supone más esfuerzo mental. Bien es cierto, que un sector del alumnado estudia los extremos relativos, y después, entre todos, busca los extremos absolutos, si los hubiera. Otro razonamiento, sobre el estudio de extremos relativos en función de la monotonía, se basa en la memorización, no en una justificación matemática razonada, como el caso de afirmar que una función creciente en todo su dominio no presenta máximo, pero no se tienen argumentos para defenderlo y tampoco parecen tener inquietudes por buscarlos, *"porque llega hasta el infinito y no acabaría, entonces…no puedes calcular un máximo…No, no hay un punto final";* o el caso de otro alumno *"¡Es verdad, es verdad! Es que se me olvida…Si hay infinito no hay máximo absoluto, pero… ¿Se podría poner como máximo el infinito?".* En ambos casos se trata de lo que se podría denominar como *"memorización sin razonamiento"*. Se trata de un error recurrente, muy extendido, de tipo procedimental al tratar de evocar conceptos que pueden haber memorizado sin comprender, es decir, conocimiento de una situación sin saber la justificación. De hecho, afirman que cuando la comprensión es difícil, intentan omitirla y tratan de memorizar aquello que "*puede servir para aprobar*", y no se tienen en cuenta los aprendizajes.

La dicotomía funcional local/global ha provocado conflictos en el alumnado (Pecharromán, 2008). Se observa que los alumnos tenían serias dificultades en la comprensión de los conceptos de dominio, recorrido y extremos, sobre todo cuando la función está definida en los reales negativos o sus valores son negativos, lo que requiere hacer un análisis local en entornos del punto. Bastantes alumnos consideran $+\infty$ como si fuera un número y por esta razón algunos alumnos consideran que $+\infty$ es un máximo (Blázquez, 1999).

Para ciertos alumnos es difícil comprender que no es necesario obtener intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función si se conoce globalmente el carácter de su monotonía, no entienden que en los extremos de los intervalos de definición ($[a, b]$) la función se puede presentar un máximo o un mínimo y también tienen dificultades en expresar el dominio. Otra dificultad grave es comprender la imposibilidad de dividir por cero, lo que lleva a la imposibilidad de formalizar los dominios de ciertas funciones. La no comprensión conceptual de las fracciones algebraicas desde sus diferentes ámbitos de aplicación, provoca dificultades en el estudio y análisis de las funciones racionales.

En menor medida, hay algún alumno que no es capaz de abstraer propiedades globales de familias de funciones, ni incluso la propiedad de que toda función lineal pasa por el origen de coordenadas; incluso, varios alumnos no llegan a interiorizar el significado correcto de los elementos y conceptos matemáticos propios de las funciones, imprescindible para potenciar la comprensión de las propiedades y relaciones entre los mismos.

También se debe señalar que cierto sector del alumnado no diferencia el concepto abstracto de función con una representación concreta de la misma, no dominando los referentes (signo, objeto y significado) y las relaciones entre dichos referentes (signo-significado, signo-objeto y objeto-significado) según el marco de Peirce (1987).

Otra gran dificultad de comprensión, presente en todos los ciclos, ha sido el valorar la relación entre las tendencias conjuntas de las dos variables. Se observa que el aprendizaje significativo se fundamenta en la aprehensión de la covariación (Leinhardt Zaslavsky, & Stein, 1990) o coordinación de lo que ocurre con las dos variables a la vez. En cualquiera de las representaciones de las tendencias asintóticas, se observa que una determinada relación de dependencia entre las dos variables caracteriza al objeto matemático, donde el cambio de una variable está relacionado con el cambio de la otra. Es decir, todos los conceptos tienen asociada la idea de dependencia funcional, que no es sencilla, y, como señalan Dolores (2004) y Dolores y Cuevas (2007), es una de las causas que provocan más errores en los alumnos, lo que sin duda indica el grado de dificultad de aprendizaje del concepto de función, sus propiedades y, en especial, las tendencias asintóticas. Por tanto, el aprendizaje de estos conceptos, contribuye al desarrollo del razonamiento covariacional (Dolores y Cuevas 2007), en concreto, se cree que el diseño del proceso de enseñanza por estadios facilita la interpretación covariacional de los conceptos, porque manifiesta la relación de dependencia entre las variables a través de diferentes representaciones (Pecharromán, 2008).

VIII.1.2.2 Infinito

Otra dificultad, no menor, es que el cardinal de los puntos de una curva, al igual que los de cualquier intervalo $(a, b), a < b$, es infinito y, algunos, no consiguen establecer un orden de los mismos ni tampoco que el primero y el último pueden no existir *"es que es difícil de entender, que tengo infinitos puntos y no sé cuál es el primero… o el último"* este hecho dificulta la representación de las funciones definidas a trozos cuyo subdominio es un intervalo abierto o semiabierto. Ciertos alumnos sólo calculan las imágenes de números enteros, dejando *"trozos"* entre números enteros consecutivos sin calcular su imagen porque argumentan que *"nunca he calculado las imágenes de puntos decimales para una función, y no sé cuáles elegir",* incluso para alguno de ellos la función no existe para valores decimales de un intervalo $(n, n+1)$. Dicha problemática se presenta al querer representar algunas funciones racionales; por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x-3}$, ciertos alumnos dejaban sin representar los intervalos (2,3) y (3,4) y verbalmente, manifestaban su incertidumbre sobre qué decimal o decimales del dominio elegir, provocándoles bloqueo parcial.

El concepto del infinito tiene diferentes interpretaciones en el alumnado, las más significativas son las que lo relacionan con un proceso, concepto abstracto, ente alcanzable/inalcanzable o valores muy grandes. El infinito como un proceso que no tiene fin, lo ejemplifican con la división de una longitud por la mitad sucesivamente o el procedimiento de dividir entre un número con la calculadora, es decir, como un proceso que se puede repetir indefinidamente, otro lo interpreta como la infinidad de posibilidades de reagrupamiento de los números. El mayor conflicto se presenta ante la comprensión de una iteración infinita sobre un espacio finito, como es el caso de la paradoja histórica de Aquiles y la tortuga, en palabras de algunos alumnos, "*pero el espacio no es infinito"* o *"no va a quedar casi".* Para otros, el infinito es un valor/ente concreto alcanzable o no, y lo manifiestan con expresiones del tipo *"llegará a infinito";* mientras que otro alumno se manifiesta respecto a la tendencia infinita en los siguientes términos *"que se va a alejar hasta ese punto, pero sin llegar a él".* Por último, un alumno asociaba la infinitud a valores muy grandes.

Para estudiar la monotonía de una función, ciertos alumnos, en su esquema mental, necesitan fijar intervalos con extremos finitos, sobre los que indicar si la función es creciente o decreciente; no siendo capaces de generalizar una situación que se cumpliría para cualquier intervalo del dominio de definición, cuando dicho dominio son todos los números reales, o todos los números reales salvo un valor; es decir, el estudio de la monotonía de una función cuyo dominio sea un intervalo con al menos uno de sus extremos $\pm\infty$, provoca incertidumbres.

La ansiedad del alumnado se ha presentado en diferentes actividades de aula con el nexo común de incluir el infinito como proceso o como concepto, coincidiendo con la clasificación de Socas (2007) referente a los dos estados diferentes de un objeto matemático: el operacional, de carácter dinámico (*sintaxis*) y el conceptual, de carácter estático (*semántica*). Ambos aspectos caracterizan la naturaleza abstracta y ponen de relieve la complejidad de dicho conceptos matemáticos. Siendo las mayores dificultades las de identificación, cómputo o control. Por ejemplo, en la actividad de ir acercándose a cierto valor de la variable x y ver intuitivamente la tendencia de $f(x)$ hacia infinito, algunos alumnos preguntaban sobre la identificación de la variable independiente *"pero, ¿cuántos* x *hay?"*, solicitaban criterios cuantitativos *"¿de cuántos tengo que calcular* f(x)*?"* y pedían un mecanismo de control para tener la certeza de haber finalizado la tarea con éxito *"¿ya con estos ya vale?"*. Ciertamente, es difícil responder al alumnado a la pregunta "*¿hasta cuándo o cuántos necesito para generalizar una tendencia hacia infinito?".*

El infinito, también ha sido hasta fuente de bromas e ironías entre compañeros, produciéndose conjuntamente un constructivismo cognitivo y social (Drew & Mackie, 2011). Cierto alumno comenta respecto de otro *"le está matando que aparezcan infinitos números"* a lo que contesta "e*l infinito no existe";* centrándose algunos debates de aula en temas metafísicos con opiniones de todo tipo en relación a la existencia o no del infinito; no siendo dicho análisis el objetivo de esta tesis. Pero, bien es cierto, que el *"infinito"* aparece en el estudio de las tendencias asintóticas y ha sido objeto de controversias. Cierto alumno incidió en que *"de una asíntota nunca vas a ver el final"* y continúa *"se juntará con la curva en infinito, pero como el infinito no acaba pues nunca llegan a juntarse… se aproximan muchísimo pero no llega a tocar la asíntota".* Otro alumno asume con total normalidad la existencia de *"la imagen del infinito",* para justificar que sólo se puede tener una asíntota horizontal para cada infinito *"pues no puede tener dos imágenes en el infinito";* es decir, incluye a ∞ como un valor del dominio al que le impone las condiciones de la función como *"otro punto"* más.

En relación a la curva y la asíntota, cierto alumno asegura que *"se tocarán en el infinito"* frente a otro que afirma *"tocarse en el infinito es lo mismo que no tocarse"*. Al pedirle la profesora que aclare esa afirmación, aparentemente contradictoria, se justifica afirmando que se lo ha dicho el profesor de dibujo técnico y que es verdad. Además, dicho alumno afirma que dos rectas paralelas en el infinito se cortan, como conocimiento de la geometría proyectiva.

Se ha constatado que las tendencias asintóticas, el concepto de límite, así como en otras situaciones matemáticas en las que aparece el infinito, son *"ganchos"* para atraer o persuadir al alumnado mediante diálogos críticos y hacerles partícipes del conocimiento.

VIII.1.2.3 Verbalización

Se ha constatado la dificultad de ciertos alumnos para definir conceptos, y de su necesidad de situarlos en un contexto o situación para verbalizar sobre ellos, por ejemplo, a la pregunta *"¿qué es una función decreciente?"* no contesta nadie; sin embargo, al reformularla diciendo *"¿cuándo se tiene una función decreciente?"* o *"represéntame una función decreciente",* entonces, si responden.

Un número reducido de alumnos dice no comprender todas las palabras que se utilizan en la docencia, lo que ilustra su baja riqueza lingüística, y otros, trasladan sus carencias o dificultades propias de la lengua al campo de las matemáticas; como por ejemplo, el hecho de considerar verbos sinónimos a cortar y solapar o la percepción de situaciones iguales cuando se presentan diferentes matices de interés matemático, dificultades de aprendizaje ya señaladas por Socas (1997).

Cierto alumno encuentra *"mucho sentido común"* en la visualización de los conceptos matemáticos a partir de las gráficas, y verdaderamente los comprende, pero presenta dificultades en explicarlos. Otros, por el contrario, tienen más desarrollada la competencia comunicativa, aunque muestran carencias y dificultades lógico-matemáticas, lo que facilita a la investigadora la recogida de información para profundizar en el estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje matemático.

Se ha potenciado en el alumnado la rutina de pensamiento de comparar y contrastar entre nuevos y antiguos conceptos para consolidar la comprensión e incorporación en sus esquemas mentales matemáticos, y afianzar el paso del sistema de representación antiguo al nuevo sistema siguiendo los estadios de aprendizaje según el modelo ELOS, de Socas (2007). Estando el aprendizaje de los objetos matemáticos estructurado por los estadios semiótico, estructural y autónomo, organizados de forma jerárquica, de manera, que el siguiente se fundamenta en el anterior. Prácticamente la mitad del alumnado sigue el itinerario formativo planificado, pero hay un pequeño sector de alumnado que no se deja guiar e incluso, *"presupone"* ciertas propiedades funcionales que no son ciertas; ejemplo de ello, es querer trasladar analogía entre *AH* y *AV*, llevar resultados de la tendencia finita a la infinita o validar intercambio de variables, entre otros.

Para conocer el nivel de comprensión y el grado de avance del alumnado respecto a dicho proceso de enseñanza-aprendizaje, se ha pedido sistemáticamente al alumnado la verbalización en el aula, hecho que no es tan habitual en la docencia diaria, debido a múltiples causas espacio-temporales y a la utilización de ciertas metodologías que no lo potencia, en especial la expositiva, entre otras. De este modo, se da la oportunidad a los estudiantes de hablar con sentido y escuchar, escribir, leer y reflexionar sobre el contenido, ideas, problemas y preocupaciones de una materia académica (Zayapragassarazan y Kumar, 2012, p.3), ya que fomenta el aprendizaje activo.

Se ha percibido que los razonamientos explicativos de la mayoría de los alumnos han sido superficiales Las causas son múltiples, y particulares en cada alumno; pero, se consideran las siguientes como más reseñables. Por un lado, la economía o pobreza lingüística provoca que a veces se omitan palabras importantes o partes de la oración, lo que dificulta tener todos los elementos de juicio para valorar su grado de comprensión y adquisición de conexiones entre conceptos y, por otro lado, es constatable la falta de práctica de hablar en público, unido a la timidez o inseguridad característicos de la adolescencia, y más remarcado en ciertos alumnos, acentúa lo anteriormente expuesto.

A partir del análisis y valoración de las interesantes aportaciones de los alumnos, se considera que las dificultades lingüísticas afectan a la comprensión y formalización matemática Socas (1997); a modo de ejemplo, la división entre cero para un alumno "*no se puede hacer dos "ceroavos", está mal dicho",* centrando su razonamiento en que no se puede decir, simplemente como una imposición del lenguaje no como una incoherencia matemática.

Ha sido frecuente, en todos los ciclos, que el alumnado planteara cuestiones a la investigadora sin situarlas en contexto de modo que la docente no tenía la información necesaria para responder a la demanda que se le solicitaba. También hay algunos alumnos, muy particulares, que no siguen el razonamiento guiado que les propone la investigadora, posiblemente por el esfuerzo mental que les supone o simplemente por desinterés o desánimo de sentirse incapaces de realizar la tarea. La petición más común que suelen solicitar a la profesora es la respuesta/solución a su pregunta y la investigadora intenta que sea el propio alumno, quien tras la comprensión y con las herramientas que se le faciliten, llegue así a la respuesta correcta. Se ha llevado a cabo a partir de las técnicas útiles descritas en el marco teórico por Bonwell y Eison (1991) para que un profesor pueda promover el aprendizaje activo en el aula, destacando la formulación de preguntas para provocar la discusión, junto con la metodología de Kidron (2011) *"create conflicts"*, proponiendo ejemplos que contradigan lo dicho previamente por el alumno.

Una parte importante del aprendizaje cognitivo es la reflexión, tiempo dedicado a que los estudiantes reflexionen sobre lo que han aprendido y analizar si ha sido efectivo (Drew & Mackie, 2011). Por ello, en todos los ciclos de investigación se han grabado interesantes conversaciones entre iguales o con la investigadora que han aportado conocimiento de las diferentes fases de comprensión del alumnado en relación a los contenidos de estudio, han ayudado a categorizar errores y concepciones erróneas e incluso en algunos casos, el alumnado ha creado términos o expresiones propias para intentar explicar conceptos abstractos. Las conclusiones se encuentran en el correspondiente objetivo de investigación de la presente tesis.

Se han constatado dificultades de comunicación entre los docentes y los discentes, encontrándose en muchas ocasiones compartiendo un código común, sin aparentes elementos distorsionadores o interferencias, sin embargo, el mensaje no tiene la misma significación en el emisor que en algunos receptores. Si no se dedican ciertos tiempos para escuchar al alumnado y esa distorsión de la comunicación no es contrastada entre las partes implicadas, no se podrá solucionar esa situación. A modo de ejemplo, en relación a la discriminación asintótica, se recuerda la explicación sobre que la función exponencial $y = a^x, a > 1$ no tiene tendencia asintótica cuando x tiende a infinito positivo, porque supera cualquier recta vertical que fijemos y cierto alumno consideraba a dichas rectas como *AV* y, por añadidura, concluía que toda función cortará siempre a sus *AV*.

Se comparte con Socas (1997, 2007) que las dificultades de aprendizaje se conectan y se refuerzan en redes complejas; y se considera muy acertada la clasificación en cinco grandes apartados, según que estén asociadas a: la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al desarrollo cognitivo de los alumnos y a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

El diseño de los vídeos ha seguido la estructura de los estadios de aprendizaje según Socas (2007) que interpreta el aprendizaje como un proceso continuo de abstracción de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos distinguiendo los estadios semiótico, estructural y autónomo que han sido suficientemente especificados en el capítulo relativo al marco teórico y metodológico. Bien es cierto, que efectivamente este planteamiento guía y facilita la evolución y la maduración cognitiva en gran parte del alumnado, aunque en diferentes ritmos y niveles de profundización debido a múltiples factores; pero hay cierto sector del alumnado que no ve las diferencias entre los diferentes estadios presentados en la secuencia de los vídeos, quedándose con las similitudes de un proceso continuo y no captando precisamente esas diferencias, aunque a veces sutiles, pero importantes de percibir para la interiorización y evolución en la comprensión de los conceptos que se estudian. Este hecho era contrastado al ser preguntados sobre lo que aportaba un vídeo de cierto estadio respecto al previo y algún alumno respondía *"es lo mismo que el anterior"*.

Ortega y Pecharromán (2010, 2014), siguiendo el modelo de aprendizaje basado en estadios de aprendizaje de Socas (2007), analizaron las acciones de aprendizaje partiendo de las representaciones gráficas de las funciones y probaron que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) adquieren la mayoría el estadio semiótico de sus propiedades globales, cierto sector competencias estructurales y, en algunos casos, llegan al estadio autónomo. Bien es cierto que en nuestro estudio no es proporcional el número de alumnos que dominan los contenidos respecto al avance en los diferentes estadios y, por tanto, es difícil establecer cuantías numéricas sobre el progreso de los alumnos por los respectivos estadios; pero, se puede afirmar que alrededor de la cuarta parte de los alumnos no superan el estadio semiótico, el resto, las tres cuartas partes, adquieren el estadio estructural y solamente alrededor de una cuarta parte, aproximadamente, progresa hasta el estadio autónomo.

La percepción ocular puede ser fuente de errores o falsas interpretaciones y, también, sirve para mostrar al alumnado que en matemáticas se dispone de otras herramientas para comprobar las diferentes hipótesis (Fischbein (1982) ya señaló que la principal vía de producción de representaciones e interpretaciones generales es la inducción empírica); de hecho, en una ocasión un alumno afirmaba con contundencia que en una animación de GeoGebra de uno de los vídeos, la curva y la asíntota vertical se cortaban y el resto de personas del aula no estaba de acuerdo.

Otro hecho que se ha presentado en diferentes situaciones de la investigación en el aula, ha sido el posicionamiento de algunos alumnos en ciertas creencias, pero sin justificarlas, y cuando se les pedía que aportasen razonamientos, tan siquiera respondían, o se limitaban a comentarios del tipo *"porque sí"* o *"porque no"*.

A veces, el alumnado se autoimpone condiciones que inicialmente no son pedidas por los docentes, lo que limita sus razonamientos o provoca que se concluyan respuestas erróneas, hecho que se corresponde con las interpretaciones que hacen los alumnos sobre los enunciados de los problemas o cuestiones que eran propuestas en el aula. Hay ejemplos de ello en las trascripciones de diferentes diálogos de varios ciclos dónde se percibe la incomprensión del alumnado ante ciertos enunciados por motivos diversos relacionados con: dificultades lingüísticas, vocabulario matemático o grado de abstracción del contenido matemático, principalmente. Por otro lado, se pueden presentar razonamientos lógicos verdaderos pero a partir de alguna proposición falsa, como es el caso de utilizar el razonamiento transitivo, siguiente: *toda función tiende a infinito, toda tendencia infinita es asintótica, por tanto, toda función presenta asíntotas"*.

VIII.1.2.4 Matemáticas emocionales

Los alumnos, en ciertas situaciones relacionadas con la tendencia asintótica, están anulados ante un bloqueo que se podría denominar mental/verbal ya que no son capaces de poner palabras a sus pensamientos, es como que se produce una desconexión de sus conocimientos previos y bagaje matemático anterior para poder avanzar en razonamientos superiores. A modo de ejemplo, es como que disponen de una caja de herramientas con muchísimo material que conocen e incluso, que ya han utilizado con anterioridad, pero que llegado el momento de utilizar de nuevo o ponerlo en marcha para una actividad novedosa, les produce desorientación y no reparan en dichos materiales o bien no saben cómo optimizar su uso. Llegados a ese tipo de situaciones, la investigadora opta por tranquilizarlos en general, o particularmente a un alumno, y por facilitar preguntas más sencillas o plantear algún ejemplo y razonar a partir de él; e incluso con la dramatización en el aula. Como se ha especificado en el análisis de los diálogos, como ejemplo, la investigadora acompañó a la explicación de la diferencia entre aproximación y tendencia, con la simulación de la recta formada por los baldosines del suelo como la recta real; fijó con la tiza un punto de la misma, haciendo diferentes desplazamientos por la derecha y por la izquierda, para diferenciar las tendencias laterales, acompañándolo con pasos, gesticulación y dramatización corporal. Bien es cierto, que en todas las aulas del IES dónde se desarrolló la experimentación se dispone de un ordenador y un proyector que fue utilizado como apoyo sobre todo con el programa GeoGebra, animaciones de la red y material facilitado por la editorial de los libros de texto; mediante ese programa se consiguen "actividades de instrucción basadas en que los estudiantes hagan cosas y piensen en lo que están haciendo" (Bonwell y Eison, 1991, p iii).

Por último, el aprendizaje social activo se logra cuando se "participa activamente con otros como colaboradores y recursos" (Watkins 2007, p 71). Esto permite que los estudiantes aprendan a trabajar con los demás y practicar el uso de los recursos disponibles.

Llegados a casos extremos, como el caso de un alumno que entró en un bucle que le hacía repetir continuamente que *"es muy complicado, muy difícil y mucho lío"*; por ello, si se consideraba lo más oportuno, se cambiaba de actividad y se decidía retomarla en otro momento en que el alumnado se sintiera más receptivo y competente para su ejecución. Ha sido práctica común la participación activa del alumnado en el aula, hablando, reflexionando, debatiendo, respetando todas las aportaciones y los turnos de intervención, pudiéndose compartir cuantos comentarios relacionados con el tema de estudio se considerasen oportunos. Ante dudas concretas planteadas por un alumno, la investigadora solía trasladar la misma pregunta al resto, o bien, la reformulaba si consideraba que no estaba lo suficientemente clara o requería de alguna precisión a mayores. Es habitual que se contestasen unos a otros, con expresiones típicas de su edad y con lenguaje poco formal, en varias ocasiones, inventándose expresiones matemáticas o aflorando concepciones erróneas; pero, en otras ocasiones, aportaban comentarios muy enriquecedores que ayudaban a comprender conceptos abstractos de especial dificultad. Esa comunicación entre iguales, ha fomentado la autoestima, el sentido de pertenencia dentro de una estructura social y, más particularmente, a su cohesión grupal dentro del contexto escolar.

En algunos casos, no respondía ningún alumno, y se generaban silencios que informan de los diferentes grados de dificultad de las cuestiones que se autoplanteaban. Especialmente, en esos momentos, la docente proponía una cuestión más sencilla, un ejemplo, una comparación para romper el obstáculo y, a modo de destreza de pensamiento, con la finalización de cada diálogo, como resumen o cierre del contenido tratado, invitaba a algún alumno que recopilara los acuerdos a los que se había llegado o en su defecto, es ella misma la que globaliza el tema o cuestión planteada para su consolidación como metacognición.

En todos los ciclos, son varias las ocasiones en las que la investigadora ante un conflicto cognitivo de un alumno le pide que lo reformule con otras palabras y, en la mayoría de los casos, son ellos mismos quienes encuentran la solución a su dilema. Pero hay algunos de ellos que aun respondiendo correctamente, piden insistentemente la repetición en la confirmación por parte de la docente. La inseguridad es una barrera emocional en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y, más cuándo, a partir de la verbalización de sus creencias, y siendo confirmadas por el docente, no tiene total seguridad en sus afirmaciones; en ese caso, el alumno presenta un conflicto cognitivo, afirmando y negando a la vez, y la indecisión no le deja posicionarse en una opción, ni valorarlas críticamente desde el punto de vista matemático.

También, se ha percibido cierto grado de angustia en algunos alumnos por no dominar totalmente el contenido teórico presentado en los diferentes vídeos, y es cómo que no asimilan el aprendizaje como un proceso continuo con diferentes niveles de recorrido, sino que lo perciben como una función discontinua en la que sienten desconexiones, a modo de fracturas, que a veces consideran insalvables; e incluso, en otras ocasiones, no son capaces ni de localizarlas "*es que estamos viendo vídeos, y yo no sé si sé lo que tengo que saber, para seguir avanzando, porque es un vídeo, después otro vídeo… Es que tengo dudas...*" Se presenta cierta resistencia o bloqueo frente a procesos abstractos que dificultan la comprensión, que se perciben como dificultades o techos de cristal que no fomentan la optimización de la docencia.

VIII.1.2.5 Creatividad

Por un lado, se constata la creatividad de ciertos alumnos que son capaces de visualizar los conceptos matemáticos con situaciones o comparaciones que, aunque no sean formalmente correctas, ayudan a otros compañeros a acercarse al contenido teórico, por lo que podrían validarse para un primer estadio semiótico del proceso de aprendizaje. El aprendizaje activo se logra cognitivamente cuando los estudiantes piensan de manera activa para construir un nuevo significado (Watkins, 2007), así se dio, por ejemplo, en la siguiente interpretación de un alumno que ayudó a sus compañeros a identificar extremos relativos *"miraremos las profundidades de todos los valles y las altura de las montañas. También la profundidad de los pozos y la altura de montaña, por debajo de la tierra";* sobre el máximo relativo dice que es *"relativamente más elevado"* y análogamente para el mínimo relativo *"relativamente más bajo"* o el comentario de otro que diferenciaba la variable independiente de la dependiente del siguiente modo, x es la madera y la función $f(x)$ es la silla. La teoría epistemológica subyacente de estas dimensiones es el constructivismo, cumpliéndose que "el aprendizaje debe ser un proceso activo en el que los aprendices construyen nuevas ideas o conceptos basados en su conocimiento actual o pasado" (Brandon & All, 2010, p 90). Otro ejemplo, es denominar a la discontinuidad de salto infinito relacionado con la asíntota vertical $x = 0$ en la función $f(x) = \frac{1}{x}$ con *"imagínate que pasa por un agujero negro".* Del acercamiento al lenguaje de algunos alumnos aparecen interesantes expresiones novedosas como conexión entre conceptos de tipo explicativo, aunque también pueden ser una fuente de error.

Otro alumno conjuga la dualidad razonamiento e imaginación, tiene la ingeniosa idea de incorporar la herramienta *"lupa"* para que su compañero *"comprenda"* o *"se acerque"* al concepto de infinitos puntos en un intervalo de la recta real.

Cierto alumno, con un alto nivel competencial matemático ha conectado tendencia con el valor absoluto, asociado a las dos variables, de modo que globaliza los comportamientos de las variables que no tienen tendencia finita del siguiente modo "*cuando los valores de* x *se hacen grandes en valor absoluto" o "los valores de* f(x) *aumentan indefinidamente en valor absoluto".*

VIII.1.2.6 Falsas imágenes conceptuales

Por otro lado, frente a la creatividad, que puede ser positiva, está la imaginación de situaciones que no aportan ayuda a la comprensión matemática, por ejemplo, *"imaginar"* una periodicidad en la función que no se manifiesta en un gráfico propuesto; argumentando que si la función tuviese *"la repetición de la gráfica presentada ilimitadamente",* entonces presentaría varios mínimos y máximos.

Otro problema es la suposición o falsa concepción/conexión de conceptos. Por ejemplo, ante dos conceptos como el recorrido y los extremos relativos, el alumnado aporta aseveraciones falsas, como por ejemplo, la no admisión de que una función cuyo recorrido sean valores negativos presente un máximo, sin haberse aportado dicha información en la docencia formal. En los esquemas mentales del alumnado se consolidan conceptos y relaciones presentadas formalmente, pero paralelamente se estructuran otro tipo de conexiones que se escapan a la programación establecida, no siendo algo reglado y difícilmente evaluable pero si perceptible en las afirmaciones de ciertos alumnos que nos muestran dichos errores.

En particular, en la presente experimentación y en relación al estudio de las funciones, se constata que cierto sector de alumnado las trata como objetos matemáticos desconectados de otros conceptos o entes matemáticos. Esa compartimentación rígida, en lo que respecta a matemáticas, hace que el alumnado separe por un lado las herramientas y razonamientos geométricos y por otro lado, los relativos al análisis. En varios casos, se percibe que el mayor interés es implementar las pautas a seguir para su representación gráfica como fin en sí mismo, despreciando otros tipos de interpretaciones y sin interés por intentar relacionarlo con otros campos, situaciones matemáticas o de la vida real.

Varios alumnos, en diferentes ciclos de investigación, restringen las matemáticas únicamente al cálculo, focalizando en la realización mecánica de ejercicios repetitivos sin estudiar el contenido matemático; llegando incluso a verbalizar que *"eso no son matemáticas",* cuando se intentaba profundizar en la comprensión de conceptos matemáticos, no compartiendo la filosofía de *"más ideas y menos cuentas"* presente en diferentes foros educativos.

Parte del alumnado no tiene ningún espíritu crítico ni ven la necesidad de comprender los conceptos matemáticos, y consideran que el fin de la asignatura es conseguir un recetario para resolver problemas. En el caso particular del estudio de las tendencias asintóticas, por un lado, algunos lo canalizan hacia la obtención de un listado cerrado de funciones que presentan cada tipo de asíntotas y su actuación se limitaría a identificarlas y clasificarlas; por otro lado, otros justificarían la existencia de asíntotas, utilizando únicamente la validación de procedimientos de cálculo de la expresión de la asíntota.

Parece que el pensamiento de ciertos alumnos no trasciende de los ejemplos más sencillos propuestos y, sin duda, hay una dificultad superlativa en el proceso de generalización; por ejemplo, no descubren que el número de asíntotas verticales puede ser arbitrario y que depende exclusivamente de la función.

Se ha contrastado que las asíntotas son interiorizada por el alumnado bajo dos estados diferentes, Socas (2007): el operacional (*sintaxis*) y el conceptual (*semántica*). Siendo mayoritario el número de alumnos que las interpretan por su carácter dinámico como proceso sobre el conceptual, salvo en el caso de las asíntotas oblicuas que la visualizan de forma más estática. Es elevado el número de alumnos que prioriza la búsqueda de la expresión de la recta asíntota oblicua sobre la comprensión, en algunos casos situándose en un falso estadio autónomo ya que no han fundamentado los dos anteriores.

En muchos casos, han mostrado la presencia de ciertas barreras que dificultan el avance hacia la generalización. Así se percibió que cuando se pedía al alumnado la representación y clasificación en el plano los casos que se pueden dar de cada tipo de asíntota; ninguno utilizó un posible criterio: número de asíntotas, posiciones relativas entre la curva y la asíntota u otras posibles clasificaciones o estudios. No fueron capaces de extraer conclusiones globales en relación a comportamientos particulares de funciones concretas; es decir, se manifiestan dificultades en el proceso de globalización o generalización.

Se comparte las ideas de Bonwell y Eison (1991) que, con las nuevas formas de docencia focalizadas en el aprendizaje activo, los alumnos aprenden más cuando se involucran en el proceso de aprendizaje, que simplemente recibiendo contenidos de forma pasiva.

A modo de resumen, se ha llevado a cabo el Modelo de Competencia Cognitivo de ELOS aplicado al estudio de las tendencias asintóticas organizado en torno a dos componentes: las representaciones semióticas y los estadios de desarrollo cognitivo.

Por un lado, con las representaciones semióticas, se ha profundizado en los referentes (signo, objeto y significado), con su correspondencia (gráficas, funciones y propiedades) y las relaciones entre los referentes trabajadas desde aspectos funcionales, fenomenológicos y conceptuales del lenguaje gráfico y algebraico.

Por otro lado, se han recorrido diferentes estadios de desarrollo cognitivo, pasando de los sistemas de representación semióticos (SRS), más visuales o intuitivos, mediante una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo, denominados y caracterizados en Socas (1997), hasta alcanzar de forma significativa el SRS formal de las tendencias asintóticas, guiados por el itinerario formativo según la sucesión de videos.

VIII.1.3 Conclusiones sobre el tercer objetivo

03.- Detectar las dificultades de los alumnos y la influencia concepto de tendencia en el proceso de comprensión del concepto de asíntota.

Kilpatrick (1998) indica que el aprendizaje de un concepto es la culminación de los aprendizajes de los procesos subyacentes, y no son pocos los que conducen al concepto de asíntota, pero son fundamentales el de función y el de límite. Por ello, el concepto de tendencia juega un papel decisivo en el proceso de comprensión de las tendencias asintóticas.

A lo largo de la experimentación se ha percibido un gran avance en la comprensión de la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia numérica, inicialmente la mayoría del alumnado optaba por la focalización en el acercamiento, pero posteriormente, se van centrando más en que las aproximaciones son mejores que cualquier aproximación, por criterios métricos o por la opción centrada en la tendencia como mejor aproximación y aportaciones subjetivas que las diferencian. Sin embargo, cierto sector, muy reducido, considera aproximación y tendencia como sinónimos, otros, segregan erróneamente entre tendencia limitada a puntos y aproximación restringida a rectas, posiblemente porque asocian el estudio de tendencias con el cálculo de límites cuya búsqueda es un valor y en la representación de funciones se ha trabajado la aproximación de las curvas a rectas cuando había comportamientos asintóticos. Otro pequeño colectivo continúa incidiendo prioritariamente en las sucesiones crecientes, pero paralelamente, convive en todos ellos un acercamiento hacia la unicidad de la tendencia, y por extensión, también al límite.

En general, identifican la aproximación y tendencia sobre la curva y, se reduce el número de los que verdaderamente los discriminan y, salvo excepciones, visualizan dicha situación cuando se centra en la tendencia asociada a las abscisas de los puntos que tienden a otro punto; por lo que se pone en evidencia que es más sencillo para ellos interpretar las tendencias a través del propio punto que a través de sus abscisas. A pesar de la mejora significativa, no se puede despreciar cierto sector del alumnado que por confusión u omisión, no interioriza que la tendencia mejora cualquier aproximación prefijada; se puede decir que es el aspecto más complicado de comprender para el alumnado.

Categorizan la tendencia finita por: Finitud (F), Dinamismo (D), Rebasamiento (R), Inalcanzabilidad (I) y/o Aproximación óptima (A). Visualizando mayoritariamente la finitud y el dinamismo, la diferencia está en que algunos de ellos consideran la alcanzabilidad o no de dicha tendencia. La combinación que más se repite es la del dinamismo inalcanzable finito (D-I-F) seguida de dinamismo finito con llegada o rebasamiento (D-F-R). Sin embargo, el hecho de afirmarlo categóricamente, indica que los alumnos no ven la posibilidad de que no ocurra.

La comprensión de la tendencia hacia infinito de un punto de la gráfica se pueden agrupar en tres categorías según lo relacionan con: verbos que indican movimiento, acción de alejamiento y acción de superación. Se manifiesta dualidad entre tendencia finita a *"un punto concreto conocido y determinado"* frente la tendencia infinita como *"algo desconocido, indeterminado, sin fin y que no acaba"*. Se va incorporando en el lenguaje del alumnado expresiones del tipo *"tiende a infinito y supera a cualquier punto",* por tanto, la docencia que se ha llevado a cabo sí que produce una evolución positiva en el tiempo respecto a la comprensión de la identificación y la discriminación, inicialmente sobre el eje de abscisas y mejorada sobre la curva. La comprensión del infinito negativo suscita más dificultades, pudiendo haber una situación de economía lingüística que pretende unificar y simplificar el discurso ante el infinito como un concepto global, no discriminando signo alguno.

Dichos resultados concuerdan con que la amplia mayoría de los alumnos entienden la tendencia infinita de un punto como la necesaria tendencia a infinito de sus dos coordenadas, seguida de la idea de la superación de cualquier valor fijo por parte de las coordenadas del punto de la gráfica. El porcentaje de alumnos que comprenden que también se tiene una tendencia infinita en un punto cuando una de las variables tiende a un valor fijo y la otra a $\pm\infty$ se reduce considerablemente, siendo ligeramente superior los alumnos que lo consideran cuando tienda a infinito la variable y. Ante estas respuestas, se interpreta que la tendencia asintótica horizontal para ciertos alumnos no se considera una tendencia infinita sobre la gráfica.

La verdadera comprensión de la tendencia infinita sobre la gráfica de una función engloba la aceptación de todas las posibilidades de caracterización expuestas anteriormente. Con la evolución madurativa (avance en edad, personalidad, interés, docencia…) y la visión globalizada de la experimentación, ha aumentado el número de alumnos que van aceptando y ampliando dichas opciones.

También se han visto claros avances hacia la verdadera comprensión del comportamiento asintótico discriminando la dicotomía aproximación/tendencia; y que, el hecho de que una recta no corte a la curva, no implica comportamiento asintótico.

Algunos alumnos pretenden canalizar patrones visuales únicos y universales respecto a la tendencia asintótica que no acaban de concretar, frente a otros que son capaces de abstraer la variable matemática que subyace. Ciertos alumnos priorizan las situaciones gráficas o posicionamientos sobre la comprensión del concepto, como por ejemplo dar la máxima importancia a si la aproximación de la curva hacia la asíntota es "*por encima o por abajo"*.

Tras la intervención llevada a cabo según el itinerario formativo diseñado, se ha mejorado en relación a la conceptualización de las asíntotas y su expresión algebraica, así como la aceptación de posibles cortes entre curva y asíntota, aunque no lo ven con las mismas posibilidades para todos los tipos; los porcentajes van disminuyendo desde la *AH*, *AO* y *AV*, siendo más acentuados en esta última. Se mantiene un tratamiento diferenciado de la *AO*, respecto al resto de asíntotas, restringiéndoles condiciones y no interiorizando la caracterización asintótica de la misma. Además a la *AO* se la considera un objeto matemático más estático y conceptual (carácter semántico) frente a la *AH* y *AV* que se las dota de más dinamismo procesual y operacional (carácter sintáctico), según las directrices de Socas (2007).

La mayoría del alumnado va diferenciando entre la tendencia de x y de y, además van conectando el estudio conjunto de las tendencias de las dos variables en una función; la comprensión no es fácil. Para varios investigadores (Cornu, 1983; Blázquez, 1999; Blázquez y Ortega, 2000, 2001a, 2001b, 2002; Blázquez, Gatica, Ortega y Banegas, 2006) este concepto es de los que tienen mayor grado de dificultad debido a los fenómenos que se organizan entre ambas variables funcionales (Claros Mellado, Sánchez Compaña y Coriat Benarroch, 2013; Sánchez Compaña, 2013).

Sigue habiendo un pequeño sector de alumnado que asocia la tendencia hacia un valor fijo $x = k$, con una sucesión monótona numérica y, residualmente, hay algún alumno que limita dicha tendencia a una aproximación por defecto y/o exceso, al valor fijado. Se perpetúa, aunque descendiendo tras la experimentación, una conexión errónea de tendencia con la presencia de *AH* y/o *AV*, estas últimas en mayor proporción. Han disminuido, pero no desaparecido, las confusiones entre el concepto de tendencia numérica y los diferentes procedimientos que priorizan el cálculo de límites de alguna de las variables frente al concepto de tendencias.

El avance respecto a las interpretaciones o concepciones de los alumnos sobre las asíntotas se manifiesta con la profundización en la verbalización de las propiedades sobre la expresión algebraica correcta, la idea de aproximación/tendencia y la relación métrica entre la asíntota y la curva. El grado de comprensión ha sido discretamente creciente respecto a la experimentación, perpetuándose diferentes errores, simplificaciones, omisiones, limitaciones, falsas imposiciones/relaciones/conexiones y/o confusiones en algunas de las características. También es reseñable el bajo dominio en la expresión y utilización correcta de algunos conceptos e incoherencias en relación a la existencia y las representaciones gráficas. Acentuado en algunos por la falta de comprensión de conceptos asociados a la geometría analítica y al análisis de funciones.

También aparecen conceptos/denominaciones no incorporados en la docencia y, lo más grave, es la no concreción del estudio de las variables implicadas, pudiéndose afirmar que, para la mayoría del alumnado, *"la tendencia"* hace referencia a la variable x cuando tiende a infinito positivo prioritariamente, ampliable a infinito negativo para otros.

Ha sido habitual en todos los ciclos el mantenimiento del paralelismo de los criterios de validación en relación a las *AH* y *AV*; respecto a estas últimas, se va dando más importancia al estudio de la lateralidad conjunta e independiente. Cabe destacar la restricción en la determinación de dichas asíntotas únicamente por criterios como dominio, recorrido y/o posibles discontinuidades; desconectando la relación conjunta e intrínseca entre asíntota y su función/gráfica asociada.

Se va incorporando progresivamente el concepto de tendencia y sustituyendo, aproximación por mejora de la aproximación, en un alto porcentaje de respuestas, lo que muestra cierto avance en la comprensión de las asíntotas. A la vez que va disminuyendo las respuestas en las que el único interés eran las estrategias que priorizaban el cálculo de límites sobre la comprensión del concepto.

Ante la tendencia asintótica horizontal, el alumnado se ha posicionado en dos sectores diferenciado. Uno de ellos asocia que cuando el punto se va *"hacia infinito",* las dos variables también tienden a infinito¸ frente a otro que diferencia entre una tendencia a infinito de la variable x con *"que se va"* y otra tendencia finita de la variable y con *"que no se va".* Al primer grupo le parece contradictorio que el punto, como *"un todo",* tienda a infinito; y sin embargo, que las *y, "una parte",* tienda a una constante.

En relación a la *AO*, se comparten en diferente nivel de profundidad los tópicos que se han especificado con más precisión anteriormente. Cierto grupo de alumnos centra su interés en la existencia de la *AO* con justificaciones como: discriminación de la no existencia si se tiene conocimiento de la presencia de la *AH* o asociación de la *AO* necesariamente con las funciones racionales. Se aportan nuevas interpretaciones como la incorporación del tiempo como una nueva variable en el estudio funcional.

Cornu (1991) quien considera que son las imágenes, intuiciones y experiencias que los alumnos poseen las que pueden dar lugar a un sentido matemático fundamentado sobre concepciones erróneas, y señala como ejemplo las creencias de que *"la función nunca puede cortar a la asíntota"* o *"se acerca infinitamente pero nunca llega a tocar".* La posibilidad del toque o corte de la función y asíntota, sin duda, ha sido la mayor preocupación compartida por el alumnado en todos los ciclos de investigación, habiendo dado lugar a diversidad de interesantes diálogos y reflexiones, tanto a favor como en contra, conectando contenidos matemáticos que no estaban implicados en la tendencia asintótica e incluso mezclando conceptos espacio/temporales junto con cuantificadores que al intervenir el infinito producía en el alumnado cierta superación cognitiva.

Cierto sector del alumnado considera que todas las funciones tienen alguna asíntota, manifestando errores en su justificación, en la globalización de sus afirmaciones o en la invención de nuevas denominaciones para la clasificación de las funciones. Entre otras causas, se debe a: no discriminar rama infinita frente a tendencia asintótica, no identificar las diferentes familias de funciones, intentar asociar la caracterización de algunas familias de funciones únicamente con ciertas propiedades de las asíntotas o conexiones falsas en relación al dominio, recorrido y/o discontinuidades con las asíntotas, entre otros.

No ha habido grandes progresos en relación al dominio en la interpretación ni de la casuística de los parámetros de las expresiones algebraicas y su correspondencia con el tipo de asíntota posible, en algunos casos incorporando, omitiendo, obligando o restringiendo condiciones que no son ciertas. No se domina en profundidad las distintas posibilidades de función afín o lineal, según los valores de los parámetros; para un amplio sector es imposible que puedan ser nulos, por lo que se restringe el número de posibilidades, asignando una sola posibilidad estática de asíntota. En general, ante una expresión funcional algebraica, no desglosan sus razonamientos por imposibilidad de ser algún tipo de asíntota a partir de sus expresiones algebraicas específicas. Un reducido número de alumnos clasifica en una misma familia a las funciones lineales y cuadráticas, para algunos, pudiendo estar las primeras incluidas en las segundas, llegando a considerar que una función cuadrática puede ser considerada una función afín; y para otros, la misma expresión puede corresponder a una función lineal o a una cuadrática "*en un momento determinado se convierten en una recta paralela a la curva*". Lo que muestra un dinamismo erróneo provocado por no tener consolidada la comprensión del concepto.

Ante la cuestión globalizada relativa al número de asíntotas de cada tipo que puede tener una función, el alumnado parece tener dificultades en generalizar, a pesar de haber trabajado de una forma constructiva en el aula a través de diferentes ejemplos y situaciones en las sesiones de docencia, para potenciar la variabilidad perceptiva y matemática.

Se manifiestan dificultades cuando se pretende hacer un estudio completo del comportamiento global de la función queriendo algunos alumnos dar una respuesta genérica y unificada a *"la tendencia de la función",* no concretando las variables de estudio, ni el signo del infinito, para ciertos alumnos se considera que tuvieran que estar conexionadas; este hecho corrobora diversas investigaciones (Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, & Vidakovic, 1996; Valls, Pons, y Llinares, 2011; Ortega, 2016) que ponían el énfasis en la falta de coordinación general entre los valores de la variable y de la función, dificultad insalvable para muchos alumnos de Bachillerato.

VIII.1.4 Conclusiones sobre el cuarto objetivo

04.-Descubrir posibles errores asociados o subyacentes al concepto de asíntota.

Por último, las dificultades y errores en el aprendizaje, pueden ser considerados como obstáculos cognitivos de origen didáctico, motivados por determinadas estrategias de enseñanza; como obstáculos que tienen su origen en el análisis epistemológico del conocimiento matemático, aunque en este caso, existen obstáculos desligados de la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar (Socas 2007, 33) y como ausencia de significado, debida a la complejidad de los objetos y procesos matemáticos, o debida a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Socas (2007) considera importantes y necesarios tanto el diagnóstico como tratamiento de los errores de los alumnos por su influencia en el aprendizaje matemático subsiguiente. A partir de las diferentes fases de la experimentación se han clasificado los errores asociados o subyacentes al proceso de enseñanza-aprendizaje de las tendencias en nueve categorías relacionados con aspectos: léxicos, notacionales, conceptuales, funcionales, tendencias, tendencias asintóticas, asíntotas horizontales, asíntotas verticales y asíntotas oblicuas. Algunos de los errores detectados aparecen en Fernández, Ortega y Pecharromán (2018).

VIII.1.4.1 Errores léxicos

A continuación, se presenta una relación de errores que podrían resumirse como conflictos de precisión semántica y del vocabulario, omisión, confusión y denominaciones erróneas así como nuevas denominaciones, definiciones, simplificaciones léxicas y nuevos conceptos con nuevas definiciones.

- Error léxico, de precisión del lenguaje, semántico o del vocabulario:
  - Igual consideración que la curva y asíntota *"se crucen"* o *"se corten"*.
  - *"La curva respecto de la recta tiende a infinito"* como una tendencia a ella infinitamente o bien una simplificación de la frase completa, dónde se añadiría *"tendencia cuando* x *o* y *tiendan a…"*.
- Omisión:
  - De palabras importantes en denominaciones o en razonamientos explicativos que pueden dar lugar a dobles sentidos o malinterpretaciones; como es el caso de *"tendencia de una función a otra función"*, sin más concreción.
- Confusión
  - Todo con las partes: expresando *"sucesión"* por términos de la sucesión, *"diferencia entre la sucesión y la tendencia"*, en vez de la diferencia entre los términos de la sucesión y el valor al que tiende.
  - *"Límites laterales"* por límites infinitos.
- Denominaciones erróneas:
  - *"El número de la sucesión"* por el término de la sucesión.
  - *"Aproximaciones positivas"* por las diferencias positivas.
  - *"Último número"* en una sucesión infinita.
  - *"Fracción"* por función racional.
- Nuevas denominaciones:
  - *"Magnitudes proporcionales"* por *"magnitudes equivalentes"*.
  - *"Puntos constantes"* a aquellos que comparten el mismo valor en una de las dos coordenadas; por ejemplo, los puntos de una *AH* o *AV*.
  - *"Ser un punto constante"* es irse moviendo por la recta horizontal $y = k$.
  - *"Aproximación de una función a una ecuación", "tendencia de una ecuación"* o *"recta que tiende a otra recta"*, en vez de la tendencia de la gráfica de una función a la gráfica de otra, especificando el comportamiento de las variables implicadas o expresiones de ese tipo.

- *"La recta hace que la rama tienda a infinito",* omitiendo el estudio de las tendencias conjuntas de *x* e *y*.
- *"Rama que va horizontalmente"* o *"recta en el eje* Y" refiriéndose a una *AH* y, análogamente, *"rama que va verticalmente"* o *"recta en el eje X"* refiriéndose a una *AV*.
- *"Función finita"* por función acotada.
- *"Función infinita"* por función con recorrido infinito.
- *"Función tiende"* por función con tendencia asintótica horizontal.
- *"Funciones raras"* a las que tienen recorrido de sólo números reales negativos.
- *"Funciones planas"* a las funciones constantes, *"porque siguen la misma dirección", "siempre continuas", "no tiene extremos".*

o Nuevas definiciones:
- Función creciente por *"tiende a ir hacia arriba", "es la que asciende"*
- Función continua por *"no se acaba"* o "*función con un dominio sin cortes".*
- *"Función continua sií función constante"* (sigue la misma trayectoria).
- Asíntota por *"Ecuación asíntota".*
- Expresión funcional por *"Ecuación normal de una función".*
- Comportamiento asintótico por *"Sigue la línea".*
- Estudiar la monotonía de la función concretando el (o los) intervalos de decrecimiento y/o crecimiento por *"Poner valores".*
- Discontinuidad de salto infinito por *"Agujero negro".*
- Tendencia a infinito por *"es que el punto se va"* y tendencia finita *""es que el punto no se va"*

o Simplificación léxica:
- *"Función asintótica"* por función que tiene un comportamiento asintótico, sin especificar el estudio de la tendencia de la o las variables implicadas en el infinito.

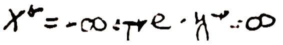
o Introducción de un nuevo concepto y su definición:
- *"Tendencia de una función a una recta"* aportando además la explicación personal, en relación a comportamientos parecidos y a que la distancia de separación entre las gráficas tiende a cero; sin concretar estudio de las variables.

VIII.1.4.2 Errores de notación

Se trata de errores de notación genéricos, en la mayoría interviene el infinito:

o Aparición de igualdades erróneas *"$x=\pm\infty$"* o *"$y=\pm\infty$".*

o Afirmación *"Tendencia$=\pm\infty$"*, sin especificar variables implicadas.

- *"Variable=±∞".*
- Mostrar la tendencia, tanto finita como infinita, en forma de notación de coordenadas de puntos (a, b), para representar que $lim_{x\to a} f(x) = b$; como $(a, \lim_{x\to a} f(x))$, por ejemplo $(-1,1)$ o (∞, ∞).
- Invención de nuevas notaciones para el estudio de las tendencias, sin coordinar las variables implicadas: $x^{\leftarrow} = -\infty$ e $y^{\rightarrow} = \infty$ () Estudiándose únicamente *"por la izquierda"* la tendencia de la variable x y *"por la derecha"* la tendencia de la variable y.

VIII.1.4.3 Errores de conceptualización

La incomprensión o no dominio del concepto matemático provoca confusiones en el uso, imprecisiones y referenciaciones no válidas en las afirmaciones del alumnado:

- Confusión entre:
  - Conceptos geométricos básicos: punto, recta, valor e intervalos.
  - Expresión y fórmula: *"fórmula de asíntota oblicua".*
  - Función y polinomio.
- Uso impreciso de los términos: espacio, distancia y segmento.
- Combinación sin sentido de límites, tendencia, dominio y recorrido.
- Error conceptual de *"situar rectas en el infinito".*
- Referencia a infinito sin concretar el signo positivo o negativo.
- Consideración del símbolo infinito como un valor alcanzable o como valor del dominio de definición de una función, que tiene su correspondiente imagen.
- Dotación de *"finitud del infinito alcanzable"*
- Asociación de infinitud a valores muy grandes.

VIII.1.4.4 Errores sobre funciones

La comprensión completa y en profundidad del concepto la función, y sus propiedades, es difícil; ya que se trata de un objeto matemático complejo de naturaleza abstracta presentado bajo dos estados diferentes: el operacional, de carácter dinámico procesual (*sintaxis)* y el conceptual, de carácter estático conceptual (*semántico*). A continuación, se presentan los errores más significativos presentados en el alumnado.

Se clasifican siguiendo el criterio globalizado de confusiones, incomprensiones, denominaciones incorrectas e imposiciones o consideraciones falsas.

- Confusión de conceptos geométricos y analíticos básicos relativos al estudio de funciones:

    - Valor con variable.
    - Magnitudes con posibles unidades.
    - Función con sucesión.
    - Dirección con sentido.
    - Dominio con recorrido.
    - Ejes con variables.
    - Identificación del valor x con el punto $(x, 0)$.
    - Incomprensión del concepto de pendiente y vector director.
- Incomprensión del concepto de función:
    - Recta vertical como función.
    - No consideración de función a una definida a trozos.
    - No discriminación entre familias de funciones, no dominando las propiedades de cada una de ellas.
    - Estudio de posibilidades de una expresión funcional cuadrática según sus parámetros con valoraciones temporales *“en un momento determinado se convierten en una recta paralela”*.
- Denominaciones incorrectas:
    - *“Centro”* por origen de coordenadas del plano cartesiano.
    - *“Constante”* por función constante.
- Imposiciones y consideraciones falsas:
    - Imposibilidad de que una magnitud pudiese ser variable independiente o dependiente, según la situación concreta de una función.
    - Consideración de función a cada una de las proyecciones obtenidas a partir de la gráfica de una función dada.
    - Confusión de proyección a partir de la gráfica con dos gráficas diferentes inconexas.

VIII.1.4.5 Errores relacionados con tendencias

La tendencia es un concepto básico y fundamental para la comprensión de los comportamientos asintóticos. A continuación, se exponen definiciones, interpretaciones, concepciones, priorizaciones y analogías erróneas en relación a la tendencia.

- Definiciones erróneas de tendencia como:
    - *“Aproximación continua”*.
    - *“Valor”*.
    - *“Valor alcanzable”*
    - *“Valor inalcanzable”*
- Errores en la interpretación del concepto de tendencia y/o restricciones:

- Tendencia siempre infinita.
- Limitación de la tendencia a una aproximación, fijando simplemente un valor o valores numéricos próximos, por defecto y/o exceso, al valor fijado.
- Simplificación de razonamientos relativos a tendencias sin concretar las variables implicadas.
- Relación de la tendencia finita con el alcance del valor concreto al que tiende y, cuando el valor no es alcanzable en el proceso, consideración de tendencia infinita *"la tendencia es infinita, porque nunca lo alcanzará";* no comprendiendo la existencia de una iteración infinita en una tendencia finita.
- Consideración únicamente de la tendencia de la variable *x*: Afirmación que la tendencia a infinito por la izquierda supone $-\infty$ y por la derecha $+\infty$.

o Confusiones:

- Asíntota con tendencia, que es un comportamiento local.
- Suma de sucesión infinita de razón menor que uno con el concepto de límite de dicha sucesión.
- No discriminación entre tendencia a un punto y tendencia a una recta, no diferenciando entre objetos de diferentes dimensiones.
- Conexión errónea de tendencia con la presencia de *AH* y/o *AV*.
- Tratamiento compacto y homogéneo de las dos variables x e y imponiéndoles condiciones análogas en ambas, no posibilitando diferentes combinaciones de tendencias para dichas variables.

o Concepciones erróneas:

- Existencia de una única sucesión que tienda a un valor fijado, siendo la estructura de la misma la que cada término vaya creciendo en su parte decimal, por ejemplo: dado el valor *2*, existe una única sucesión que tiende a él, dicha sucesión es *1.9, 1.99, 1.999,…*
- Consideración de la no unicidad de la tendencia:
  - Incorporando expresiones comparativas entre las potenciales tendencias.
  - Aceptación que una sucesión tienda a un valor finito y también a infinito.
- Creencia de que toda sucesión creciente tiende a infinito.
- Toda tendencia finita de una sucesión creciente es infinita porque tiende a todos los valores a los que se aproxima (confusión del infinito potencial con el actual).

o Tendencia infinita:

- Reconocimiento de la tendencia a infinito de un punto sií se tiene tendencias infinitas en relación a las abscisas y las ordenadas.
- No consideración de tendencia infinita en un punto cuando una de las variables tiende a un valor fijo y la otra a $\pm\infty$.
- Relación del exterior de la pantalla con el infinito, *"se va fuera de la pantalla, va al infinito"*.
- *"Función que tiende a infinito"*, sin concretar el estudio de las variables.

o Priorización del cálculo frente al concepto:

- Relación entre el concepto de tendencia numérica hacia x=a con los diferentes procedimientos de cálculo de límites de funciones, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, con diferentes posibilidades de variación de $f(x)$, a y b en dicha expresión ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ o bien a y/o $b = \pm\infty$).
- Priorización del cálculo de límites de alguna de las variables frente al concepto de tendencias.

o Analogías o conexiones erróneas:

- *"Tendencia infinita es lo contrario de la tendencia finita".*
- Consideración de las tendencias laterales como situaciones trasladables "*La traslación de tender hacia izquierda o derecha"* cuando las particularidades de cada tendencia lateral no son traslación una de la otra, o viceversa.
- Tendencia limitada a puntos y aproximación restringida a rectas: asociación del estudio de tendencias con el cálculo de límites cuya búsqueda es un valor y aproximación de las curvas a rectas en la representación de funciones cuando había comportamientos asintóticos. Por tanto, conectando erróneamente tendencia/punto y aproximación/recta.

o Interpretaciones funcionales erróneas y de expresión:

- Consideración que es la función o la gráfica la que se mueve por el plano tendiendo a la gráfica de la recta.
- Estudio único de la tendencia sobre las abscisas de la variable x: *"tender a infinito por la izquierda supone* -∞ *y por la derecha* +∞*".*
- "Error de iteración infinita en el proceso de la tendencia" al considerar que *"la tendencia finita es* x *puntos y la infinita es infinitos puntos".* En el primer caso, se considera una discretización finita y en el segundo caso infinita. No comprendiéndose que en ambas tendencias hay un tránsito hacia el límite por los infinitos puntos de un entorno.
- "Error de discretización en el proceso de la tendencia" relacionándola fundamentalmente con dar valores *"Cuando al dar valores a la función ésta tiende a una recta".*

VIII.1.4.6 Errores relacionados con tendencias asintóticas

La comprensión de la tendencia asintótica en el alumnado presenta dificultades a tenor de las definiciones, imposiciones, afirmaciones, globalizaciones, interpretaciones o conexiones erróneas que se muestran a continuación:

- Definiciones erróneas:
  - Asíntota como valor o conjunto de valores de una o dos de las variables en el infinito, según ciertos alumnos *"un valor* x *o* y *que se toma en el infinito"*, "*en realidad es un conjunto de valores* x *e* y *que la función toma en el infinito".*
  - Asignación de asíntota o comportamiento asintótico como valor, sin especificar que variable es la que tiende a infinito.
  - Identificación de asíntota con un punto.
  - Asíntota como punto de corte con el eje de abscisas, relacionándola con las raíces de la ecuación $f(x) = 0$.
  - Asíntota es el *"eje de coordenadas"*.
  - Comportamiento asintótico es un valor.
- Imposiciones erróneas:
  - Condiciones obligatorias para una asíntota: *"Si una función cruza a la asíntota, deja de ser una asíntota, porque la asíntota es que se acerque sin ser la misma, sin llegar a pasarla".* El cruce entre función y asíntota no es posible, sólo siendo posible el acercamiento de la curva a la recta, pero sin superación.
  - Imposibilidad de que una función presente *AV* y *AH* conjuntamente, frente a otro sector del alumnado que asegura un hermanamiento de ambas de modo que se deben presentan simultáneamente.
- Afirmaciones globalizadas erróneas o generalizaciones falsas:
  - Si el dominio y/o recorrido es todo $\mathbb{R}$ implica la no presencia de asíntotas.
  - Conexiones falsas en la relación a las asíntotas y otros conceptos funcionales: dominio, recorrido y/o discontinuidades, entre otros.
  - Asociación errónea de *"dominio no continuo"* con *"presencia de asíntota"* y *"continuidad con no presencia de asíntotas"*.
  - Afirmación categórica errónea: si un valor no pertenece al recorrido necesariamente la función presentará una asíntota.
  - Ninguna función periódica tiene asíntotas.
  - Todas las funciones presentan asíntotas.

    - Asociación de la caracterización de algunas familias de funciones con ciertas propiedades de las asíntotas.
    - Contacto obligado de asíntota y función.
    - Toda tendencia infinita es asintótica.
- Interpretaciones erróneas de las tendencias asintóticas
    - Asíntota como comportamiento local.
    - No comprensión de la tendencia asintótica focalizando únicamente su razonamiento en el crecimiento o avance de la variable independiente, no en la relación de las variables dependientes de la curva y de la recta-asíntota.
    - Únicamente tendencia asintótica asociada a infinito negativo: Creencia que sólo hay comportamiento asintótico cuando x tiende a $-\infty$.
    - Toda tendencia asintótica es finita, por las siguientes razones:
        - Focalizar la tendencia en una sola variable, que está fijada o acotada en un valor concreto *"puede tender a un valor o a un número"*.
        - Tener la gráfica un comportamiento en el infinito como una recta, entendiendo por finitud la limitación que aporta dicha recta.
- Conexiones erróneas
    - Asociación de tendencia con comportamiento asintótico.
    - Priorización del cálculo de límites para encontrar las expresiones algebraicas de las asíntotas, sobre la comprensión del concepto que subyace al algoritmo.
    - No discriminación entre tendencia asintótica y ramas infinitas.
    - Consideración que tendencia o rama infinita implica existencia de tendencia asintótica o asíntotas.
    - Búsqueda de la tendencia global y unificada de una función sin concretar variables de estudio.

VIII.1.4.7 Asíntotas horizontales

A continuación, se presentan los errores asociados o subyacentes al concepto de *AH*. Algunos de ellos son particularidades del apartado anterior, pero otros manifiestan dificultades o concepciones erróneas específicas de la tendencia asintótica horizontal.

- Interpretación de *AH* como valor, sin especificar variables ni tendencia alguna.
- Presentación de la *AH* como un objeto sin conexión con alguna función.
- Presencia de *AH* implica que el dominio de la función asociada es todo $\mathbb{R}$.
- Priorización de la recta sobre la tendencia funcional asintótica, incidiendo en que la *AH* se comporta como la curva en el infinito.
- Eje de abscisas como única posibilidad a ser *AH*.

- Interpretación simétrica del comportamiento de la *AH* cuando la variable x tiende a infinito positivo y negativo, es decir, se asegura una tendencia asintótica horizontal en las dos ramas infinitas.
- Utilización de expresiones difusas, como por ejemplo, *"la rama de la función tiende a infinito"*, sin precisar que x es la variable que tiende a infinito.
- Introducción de la idea de acotación de la función por la posición de la *AH*.
- Obligatoriedad de cortar la *AH* a la curva.
- Consideración de asíntota a la rama de la gráfica de la función en vez de la recta *AH*.
- Priorización del cálculo de límites sobre la comprensión del concepto de *AH*.
- Justificación de la *AH* por un razonamiento en el crecimiento o avance de la variable independiente, no en la relación de las variables dependientes de la curva y de la recta-asíntota.
- Consideración de la tendencia asintótica horizontal como finita por *"tender a un valor"* o bien porque el $lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ es un valor finito.
- Restricción de la presencia de *AH* cuando *x* tiende a infinito positivo.
- La tendencia asintótica horizontal de una función se concreta únicamente en la siguiente situación: cuando x tiende a infinito positivo la asíntota es una recta paralela al eje de abscisas y cuando x tiende a infinito negativo, la asíntota coincide con el propio eje de abscisas.

VIII.1.4.8 Asíntota vertical

En la línea del apartado anterior, se presentan los errores asociados o subyacentes al concepto de *AV*. Algunos de ellos muestran analogía con las *AH*, pero otros manifiestan dificultades o concepciones erróneas específicas de la tendencia asintótica vertical, que no se habían manifestado con anterioridad.

- Interpretación de *AV* como *"un punto de la función"* cuyo *y* no pertenece al recorrido de *f(x)*.
- Presentación de la *AV* como un objeto sin conexión con alguna función.
- Presencia de un valor que no pertenece al dominio implica la existencia de tendencia asintótica vertical, es decir, si k es un valor de x que no pertenece al domino de la función, $x = k$ es *AV*.
- Afirmación categórica: si una función presenta *AV* implica que su recorrido es todo $\mathbb{R}$.
- Priorización de la recta sobre la tendencia funcional asintótica, incidiendo en que la *AV* se comporta como la curva en el infinito.
- Eje de ordenadas como única posibilidad a ser *AV*.

- Asegurar una tendencia de la función hacia la *AV* en ambos infinitos, lo que se trasladaría necesariamente en una tendencia asintótica vertical con ramas infinitas laterales de diferente signo a la propia *AV*.
- Error conceptual de la *AV*: *la recta vertical tiende a infinito o a menos infinito y corta a la función",* dotándola de más importancia y actividad que a la propia función; no especificando la relación entre ambos comportamientos y tampoco se precisa que variable tiende a infinito.
- Obligatoriedad de cortar la *AV* a la curva.
- Consideración de asíntota a la rama de la gráfica de la función en vez de la recta.
- Priorización del cálculo del valor k sobre la comprensión del concepto de *AV*.
- Invención de nuevas denominaciones: *la función se va acercando indefinidamente a la recta vertical"*
- Restricción de existencia de *AV* a para funciones racionales, hecho que solamente se cumple para las del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo posibles *AV* $x = k$, con k uno de los posibles valores que anulan al denominador.
- Error de simplificación al considerar que es lo mismo *AH* que *AV*, esto se va a traducir en interpretaciones erróneas de los comportamientos de las variables.

VIII.1.4.9 Asíntota oblicua

Para finalizar, se procede a estudiar los errores asociados o subyacentes al concepto de *AV*. En general, se percibe un tratamiento diferenciado por parte del alumnado respecto al resto de tipo de asíntotas; pero las dificultades se mantienen, mayoritariamente, respecto a las interpretaciones, concepciones, conexiones e imposiciones falsas.

- Interpretación aislada de la *AO* como recta sin relación con la gráfica.
- Errores léxicos de notación genéricos o de denominación: "*recta oblicua a la función, tendencia infinita no paralela, tendencia de una función a una ecuación, función que va de manera oblicua, una recta diagonal que no corta la función pero pasa tangente a ella"* relacionando las tendencias con propiedades geométricas (paralelismos o perpendicularidades, principalmente) y no con las variables implicadas.
- Asociación de la *AO* necesariamente con las funciones racionales.
- Priorización únicamente en la presencia de *AO* en funciones racionales incidiendo en la relación que se debe cumplir entre los grados de los polinomios numerador y denominador.
- Imposición de condiciones restrictivas a las *AO*.

- Obligatoriedad de cortar la AO a la curva y el caso contrario, *"no se tocarán en ningún momento"*.
- Bisectriz del primer y tercer cuadrante $y = x$, como única posibilidad a ser AO.
- No asunción de que la función afín presenta una asíntota oblicua que es ella misma.
- *"Acercamiento de forma oblicua",* para referirse a la AO.
- Error de dependencia errónea entre AH y AO, asegurando la existencia conjunta de ambas cuando x tiende a infinito positivo o negativo, hecho incompatible.
- Unificación del concepto de AH y AO, no dando importancia a la pendiente de la recta asíntota.
- Tendencia de la variable x hacia ∞ o $-\infty$ como la única condición necesaria para asegurar la existencia de una AO.
- AO como la recta con tendencia a una inclinación, función divisoria de la función.
- No contemplación de la posibilidad de AO cuando x tiende a infinito negativo.
- Finitud de la asíntota con presencia de extremos, a pesar de ser una recta infinita con afirmaciones del tipo "*extremo de estas asíntotas"*.

VIII.2 APORTACIONES

En este apartado, se describen las principales aportaciones de este trabajo de investigación al proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos objeto de nuestro estudio y se señalan algunos aspectos de las mismas que pudieran ser tenidos en cuenta en el desarrollo de otras investigaciones:

- Una metodología Flipped Classroom mixta siguiendo el modelo de Talbert y su valoración desde diferentes ámbitos que aporta información relativa de sus nuevas posibilidades. Los resultados globalizados muestran claramente que la utilización de esta herramienta metodológica constituye un elemento motivador para el aprendizaje y que tiene multitud de potencialidades, tanto en el ámbito educativo, como en el formativo u organizativo.
- Una relación categorizada de errores asociados o subyacentes relacionados con el proceso de comprensión de la tendencia asintótica. Estos errores detectan las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de los conceptos tratados. Dicha relación categorizada es una ayuda para focalizar la planificación de futuras intervenciones en el aula a fin de subsanar que dichos elementos puedan provocar barreras en los avances de algunos alumnos. Dicha clasificación tiene un carácter

orientativo y propedéutico susceptible de ser ampliado. Tener conocimiento de las posibles limitaciones desde la mente del aprendiz da información al instructor para facilitar el progreso con éxito, en la medida de las posibilidades de cada sujeto individual. Toda información accesible al docente le aportará herramientas de diagnóstico valorativo y aspectos a incidir en su práctica docente con la finalidad de fomentar la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del alumnado

- El diseño, ejecución, descripción, análisis y valoración de una propuesta metodológica innovadora para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas, habiéndose utilizado diferentes entornos virtuales interactivos: plataformas educativas, Moodle, eDPuzzle, Vimeo… lo que traslada el aprendizaje más allá del aula.
- Vídeos originales e inéditos que están a disposición de la comunidad educativa. Se puede acceder a ellos de dos formas. Por un lado, se encuentran alojados dichos vídeos generados en la presente tesis en la plataforma Vimeo teniéndose acceso público en la siguiente URL: https://vimeo.com/manage/videos. Por otro lado, también se ha creado un “aula de acceso libre” en la plataforma EdPuzzle para poder visualizar todos los vídeos y realizar tareas para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para poder acceder es necesario identificarse, dándose de alta en dicha plataforma gratuita a partir de un correo electrónico e introducir la clave “ezoloto”.
- La aportación de dicho material multimedia y su fácil acceso ha facilitado el acercamiento a la comprensión de conceptos y procesos matemáticos abstractos desde diferentes visiones y posibilidades. Además, la utilización de medios tecnológicos apropiados ha facilitado la representación gráfica dinámica de las funciones, la percepción de sus características, la posibilidad de combinar diferentes ópticas; en especial, se señala al programa GeoGebra, la Pizarra Digital Interactiva y diversas animaciones accesibles en la red.
- Una propuesta didáctica basada en la investigación con aportaciones de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) aplicadas a un entorno educativo convirtiéndose en TAC (Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento). Dichos avances tecnológicos, científicos y de la información, aplicados al campo de la educación se consideran que fomentan el desarrollo intelectual y las funciones cognitivas favoreciendo la consecución de los objetivos generales de cada etapa educativa; y en especial, en el área de Matemáticas.

VIII.3 PUNTOS FUERTES

En esta investigación se ha aplicado un marco metodológico de investigación-acción durante los cuatro ciclos. Los aspectos teóricos y experimentales que se han observado en el desarrollo de cada periodo se han tenido en cuenta en la planificación del siguiente ciclo, configurando la investigación de acuerdo al análisis de datos, las interpretaciones tras la observación y la reflexión final de cada ciclo. Además, se han atendido las necesidades educativas del alumnado y se han aplicado las adaptaciones necesarias a la realidad y el contexto de cada ciclo estructural. Este carácter cíclico, unido a la constante retroalimentación del proceso, ha potenciado el carácter dinámico y realista de la investigación; sumado a la constante interacción con el alumnado que ha supuesto la adaptación o modificación de las intervenciones de la investigadora, sin perder los objetivos de la tesis.

El hecho de haber colaborado en la presente tesis profesorado de matemáticas de educación secundaria de diferentes centros, tanto del ámbito urbano como rural, con amplia experiencia docente y formativa, ha proporcionado riqueza a la investigación. La presencia en el aula de las observadoras externas, su observación sistemática y las posteriores reflexiones globales, durante los dos primeros ciclos, ha añadido matices a ciertos aspectos valorativos desde diversos y diferentes puntos de vista que han aportado información para el análisis de cada ciclo y, además, han servido para refinar aspectos relativos a los ciclos anteriores, tanto en lo que afecta a la metodología de aula invertida como al enfoque del contenido teórico objeto de estudio. Por todo ello, el desarrollo de la investigación ha permitido una evolución del equipo investigador en todos los sentidos, entre otros relativos a, la planificación, las orientaciones en el desarrollo de la docencia, el planteamiento de cuestionarios y criterios de análisis del aprendizaje, principalmente.

Se ha utilizado el marco teórico ELOS para el diseño de los vídeos y así canalizar el proceso de enseñanza de la tendencia asintótica como una propiedad global de las funciones a través de sus gráficas que pretende mejorar el aprendizaje de todos los conceptos asociados a ese bloque temático. Este diseño también ha proporcionado información de los errores y las dificultades que se han observado en el tránsito de un estadio a otro, o el estancamiento en uno de ellos lo que ha frenado el avance hacia los siguientes para evolucionar satisfactoriamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los mismos.

Otro punto de fortaleza en la presente investigación ha sido la elaboración de un test final de conocimientos trabajado a lo largo de los ciclos de investigación y consolidado con la validación de expertos de reconocido prestigio del ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática de diferentes universidades españolas. El primer ciclo, tuvo claramente un carácter exploratorio y no se diseñó herramienta específica para validar conocimientos, en el segundo ciclo se elaboró un material inédito para trabajar simultáneamente en el aula tras la visualización de los vídeos. A partir de dichas actividades y tras el análisis, observación y reflexión de dicha experiencia, el equipo investigador seleccionó una serie de ítems de diferente formato como herramienta de validación de contenidos. Se trataba de respuestas de doble opción, respuestas múltiples y abiertas, para recorrer el mayor espectro valorativo tanto en el campo metodológico como cognitivo. La propuesta fue enviada al comité de expertos anteriormente expuesto y tras cierto refinamiento, se trasladó la versión definitiva. Dicho test fue presentado después de la experimentación al alumnado de 1º Bachillerato y se procedió a su análisis. Paralelamente, en el master de profesorado en educación Secundaria, concretamente en la asignatura de Innovación Educativa, fue presentado dicho material y los alumnos, futuros profesores de matemáticas, valoraron dicho material y también aportaron sus opiniones y consideraciones. Con la finalización de la investigación, en el último ciclo, se alojó el test final en la plataforma EdPuzzle, para asegurar que dicho test final fuese respondido por el alumnado que verdaderamente hubiese visualizado los vídeos. Por tanto, dicho cuestionario ha sido validado por diferentes colectivos implicados en el campo de la educación, ha sido llevado a cabo bajo diferentes formatos y ha sido una herramienta de análisis para la presente investigación, siendo el único punto débil cierto grado de absentismo en las respuestas de cierto sector del alumnado, en la medida de las circunstancias reales de cada ciclo.

Se ha desarrollado una exhaustiva detección y análisis cualitativo de las principales dificultades de los alumnos presentadas en relación al bloque de contenido relativo a funciones, y en especial en relación a la influencia del concepto de tendencia en el proceso de comprensión del concepto de asíntota. El conocimiento de las dificultades y errores pretende motivar estrategias didácticas para su prevención, lo que profundiza en el conocimiento del proceso de enseñanza de los conceptos. Todo ello se ha conseguido, a partir de test iniciales de conocimientos previos, diálogos de aula, entrevistas personales, cuestionarios individuales (en diferentes soportes físico y digitales) y entrevistas personales, principalmente.

VIII.4 PUNTOS DÉBILES

La investigadora ha estado durante los dos primeros ciclos de investigación trabajando en el CFIE de Valladolid como asesora de formación permanente en el ámbito científico- tecnológico, compatibilizándolo con la docencia como profesora asociada del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática en la Facultad de Educación de Valladolid; a dicho Departamento pertenece el tutor de la presente tesis. Con la finalización de dicha comisión de servicio, la investigadora se incorporó a su centro de destino, el IES María Moliner de Laguna de Duero, coincidiendo con el tercer ciclo de investigación; dónde impartió docencia al grupo experimental, entre otras funciones, en los dos últimos ciclos de la investigación.

Durante el presente curso académico, le ha sido concedida una licencia por estudios para finalizar la presente tesis, hecho que ha facilitado la materialización de la misma. Compatibilizar las funciones laborales anteriormente expuestas que suponen una dedicación plena por la elevada carga lectiva junto con otras complementarias; así como no encontrarse ni en el mismo lugar de trabajo, ni en la misma localidad que los tutores, ha supuesto dificultades extras para el seguimiento de la investigación, lo que ha condicionado la temporalización de la presente tesis, habiendo sido una dedicación parcial distribuida en más cursos académicos.

Se aprovecha para agradecer a la Junta de Castilla y León, en especial a la Consejería de Educación, su interés por fomentar y potenciar la investigación y cualificación educativa mediante la concesión de licencias por estudios; ya que estimular la realización de actividades de formación, investigación e innovación educativas, revertirá en beneficio directo de una mejor práctica educativa y del propio sistema educativo. La actualización científica y didáctica de los docentes permitirá dar respuestas más adecuadas a los diferentes contextos escolares y redundará en beneficio de toda la sociedad.

Por un lado, se puede considerar como un punto débil que el número de alumnos implicados en cada ciclo de investigación ha sido reducido, restringiéndose al grupo académico dónde la investigadora podía intervenir. Debido a ese particular, no se ha diferenciado el estudio por índole de género, ya que no se obtendrían resultados de carácter significativo. A pesar de ello, se llevó a cabo la experimentación según la planificación inicial, la investigadora se adaptó en cada ciclo a las circunstancias concretas como se ha especificado en cada uno de ellos, pero el grado de satisfacción con el desarrollo de la experimentación, en conjunto, ha sido muy positivo. La implicación del alumnado en las sesiones de docencia en el aula ha sido muy alta, no se puede decir lo mismo de su nivel de participación en cuanto a las contestaciones a los ítems propuestos por escrito; en ese sentido, ha sido muy heterogénea, como la diversidad de alumnos que se encuentran en un aula ordinaria dónde conviven múltiples intereses y capacidades; sin olvidar situaciones personales muy concretas. Valorando la calidad por encima de la cantidad, las aportaciones del alumnado han sido muy enriquecedoras y han contribuido a la consecución de los objetivos planteados en la presente tesis. Sería interesante investigar sobre los resultados que se obtendrían si se implementase la experimentación en mayor número de alumnos, así como en contextos diferentes, para asociar diferentes variables socioeconómicas, culturales o de otra índole. También se considera muy positivo ampliar los objetivos de estudio de esta tesis a otros niveles educativos, en especial al ámbito universitario, dando continuidad al estudio de los avances en contenidos matemáticos de alumnado que posteriormente estudiase grados universitarios en el ámbito científico tecnológico.

Por otro lado, no se ha podido analizar en profundidad la evolución de los errores y/o concepciones erróneas del alumnado tras su historial escolar como fruto de una intervención mantenida en el tiempo; ya que no se ha podido materializar dicha posibilidad por condicionantes espacio temporales. Pero, respecto a los dos últimos ciclos de investigación, dónde se intervino manteniéndose parte del alumnado se produjo un avance en la comprensión lo que también provocó nuevos errores o modificación de los mismos, y la perpetuación de algunos de ellos. Dicho análisis tiene un carácter de aproximación a posibles estudios futuros ya que la finalidad de la presente tesis se centraba en el descubrimiento, categorización e interpretación de los mismos.

Por otro lado, en esta investigación se ha aplicado el marco metodológico de investigación-acción durante cuatro ciclos desde una perspectiva ecológica como fue especificado en el capítulo III. En cada ciclo se ha realizado la experimentación en su contexto, con las circunstancias y condicionantes particulares. En los primeros ciclos, además, la investigadora se adaptó a las premisas establecidas por la correspondiente profesora titular de cada grupo respectivo y la estructura organizativa concreta de cada centro. En los cuatro ciclos, como nexo ecológico común, se ha llevado a cabo la investigación sin alterar el ritmo de trabajo, ni el contenido, ni otros factores propios de la docencia, manteniendo uniformidad en los criterios y acuerdos que se habían establecido dentro de las decisiones competentes del Departamento de Matemáticas de cada IES dónde se ha intervenido. No se ha priorizado el desarrollo de la investigación sobre la planificación de la programación didáctica relativa a la asignatura específica de Matemáticas según el marco normativo; primando por encima de todo el interés del alumnado y la mejora en su proceso de enseñanza –aprendizaje global en la asignatura de Matemáticas.

VIII.5 PROPUESTA DIDÁCTICA

Después de la experiencia llevada a cabo durante los cuatro ciclos de experimentación, tras el análisis y estudio globalizado se propone una propuesta didáctica que se detalla a continuación, en dicha propuesta didáctica se considera muy relevante la metodología que será la que se ha llevado a cabo en los diferentes ciclos de investigación:

VIII.5.1 Prerrequisitos

Aquí sólo se presenta de forma transversal un resumen de los contenidos curriculares relativos al concepto de asíntota y de todos los subyacentes a él:

- El sistema de representación cartesiana.

- Concepto y representación gráfica de funciones.
- Propiedades globales de las funciones.
- Modelos lineales y cuadráticos.
- Familias de modelos funcionales.
- Operaciones y composición de funciones.
- Continuidad global a partir de las gráficas.
- Representación de funciones.

VIII.5.2 Objetivos

- Discriminar aproximación y tendencia numéricas.
- Identificar y discriminar entre aproximación y tendencia sobre la curva.
- Identificar y discriminar entre aproximación y tendencia sobre los ejes coordenados.
- Caracterizar la tendencia infinita sobre la gráfica de una función.
- Discriminar entre tendencia finita e infinita.
- Identificar el comportamiento asintótico.
- Identificar, discriminar, generalizar y sistematizar las asíntotas.
- Interpretar las asíntotas desde diferentes enfoques: ciencias de la salud, tecnología, artes y contextos reales.

VIII.5.3 Contenidos

- Sucesiones. Monotonía. Aproximaciones y tendencias.
- Visualización de tendencias funcionales a través de las gráficas de las funciones. Proyecciones de la gráfica sobre los ejes coordenados. Representación y simbolización funcional.
- Tendencia infinita. Tendencia finita. Ramas infinitas.
- Idea de asíntota de una función a través de su gráfica. Concepto de asíntota.
- Posibilidades de tendencia infinita de un punto. Tendencia asintótica. Tipos de asíntotas (*AH, AV* y *AO*) y sus expresiones algebraicas.
- Caracterización de familias de funciones. Representación de funciones. Estudio analítico, gráfico, visual y contextual del comportamiento asintótico de una función.

VIII.5.4 Competencias

Desde esta propuesta didáctica se potenciará la adquisición de las siete competencias clave en el Sistema Educativo Español, ya que todas se ven implicadas en las diferentes actuaciones planificadas:

a) Comunicación lingüística.
b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
c) Competencia digital.
d) Aprender a aprender.
e) Competencias sociales y cívicas.
f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
g) Conciencia y expresiones culturales.

VIII.5.5 Nivel educativo

Dirigido a alumnado de Bachillerato, en especial para la modalidad de Ciencias, aunque también es viable para el Bachillerato de Ciencias Sociales, ya que la investigadora lo implementó en dicha modalidad; aunque la particularidad de dicho alumnado hizo que no se pudiera profundizar con la misma intensidad que con el alumnado de Ciencias.

VIII.5.6 Temporalización

Se considera adecuado dedicar alrededor de seis sesiones de docencia para 1º Bachillerato y cuatro para 2º Bachillerato, dónde se incidirá en actividades relacionadas con los estándares evaluables que previamente marque la normativa vigente y la práctica de los mismos en el aula mediante metodologías activas. Esta restricción temporal en el marco global facilitará abarcar el amplio contenido asignado a este nivel educativo, debido a las particularidades curriculares y organizativas de dicho curso académico.

VIII.5.7 Orientaciones metodológicas

Se propone iniciar en 1º Bachillerato una metodología de aula invertida mixta siguiendo el modelo de Talbert (2011), focalizando la intervención en la visualización de los vídeos en el aula, disponibles en el ANEXO X.6 o en la plataforma de Vimeo teniéndose acceso público en la siguiente URL: https://vimeo.com/manage/videos. Por otro lado, también se ha creado un "aula de acceso libre" en la plataforma EdPuzzle para poder visualizar todos los vídeos y realizar tareas para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para poder acceder es necesario identificarse, dándose de alta en dicha plataforma gratuita a partir de un correo electrónico e introducir la clave "ezoloto". Dicha plataforma EdPuzzle facilita que cada docente diseñe su propia aula virtual con materiales propios o compartidos en la red.

En las sesiones de docencia se propone trabajar con la metodología dialógica basada en *"create conflicts"* según Kidron (2011), fomentando diálogos entre alumnos ante aparentes contradicciones que ayudan a consolidar conocimientos; actuando el docente como guía/mediador de las intervenciones. También se podrán utilizar metodologías activas así como herramientas web 2.0, software educativo y animaciones web disponibles en la red. A modo de material complementario se podrán utilizar las fichas de trabajo diseñadas para el segundo ciclo de investigación que se encuentran en el ANEXO X.3.2; lo que será soporte de apoyo para trabajar individualmente o por pares, en el aula según Mazur (2010) o como refuerzo extraescolar.

Las enseñanzas de Bachillerato tienen un carácter globalizado por lo que para 2º Bachillerato se propone una metodología de aula invertida pura, de modo que el alumnado visualizará los vídeos fuera del aula cuantas veces considere necesario. A modo de control, se informará al alumnado que la visualización quedará registrada en la plataforma utilizada y será considerada como otro criterio de calificación más. En las sesiones de docencia se incidirá en la implementación de metodologías activas, principalmente resolución de problemas a partir del conocimiento del contenido teórico, aprendizaje basado en retos centrados en la representación e interpretación de funciones con la ayuda de programas informáticos, en especial GeoGebra.

VIII.5.8 Atención a la diversidad

La metodología de aula invertida posibilita atender a diferentes ritmos de aprendizaje y las metodologías activas generan relaciones que en el aula que facilitan la integración y la inclusión de todo el alumnado en las actividades propuestas.

VIII.5.9 Espacios y Recursos

Se propone la cohabitación de dos espacios: el "aula física" y el "aula virtual". Las sesiones de docencia ordinaria combinarán, en la medida de la disponibilidad del centro, las aulas estándar con aulas de informática y, en el mejor de los casos, la posibilidad de poder utilizar dispositivos móviles como tablets o smartphone.

La utilización de nuevos entornos virtuales está irrumpiendo en los centros educativos teniendo un gran impacto en el alumnado inmerso en las nuevas tecnologías, y por extensión también en el resto de la comunidad educativa. Se considera muy positiva la utilización plataformas digitales; en la actualidad hay gran variedad, por lo que se aconseja al profesorado que utilice aquellas dónde haya tenido experiencias previas o se incorpore en aquellas que el centro educativo participe de modo que facilitará el acceso al alumnado a partir de la sinergia globalizada de usar un recurso común. La página web del propio centro, plataformas educativas corporativas, Moodle, EdPuzzle, canales de Youtube,… son algunas de ellas que favorecen el fin de la metodología de invertir el aula en el sentido de ser un repositorio digital dónde alojar contenidos, en especial en vídeos, facilitando el acceso sin restricción espacio temporal. Por otro lado, se propone utilizar redes sociales o las diferentes opciones comunicativas que ofrecen las tanto las propias plataformas educativas, como los foros o chats, considerándolas como otra herramienta más de comunicación extensible fuera del aula. Esas opciones extienden el proceso de enseñanza-aprendizaje más allá del aula abriendo la posibilidad de contactar en caso de compartir dudas, requerimientos de aclaración de algún aspecto a modo de encuentros matemáticos.

Se utilizará el programa GeoGebra como recurso didáctico en cuantos dispositivos sea posible, lo más deseable sería disponer de un puesto individualizado en un aula de informática, o de tablets, pudiendo ser compartidos o bien, en su defecto, la visualización se hará mediante proyector de aula, preferentemente con las posibilidades que ofrece las pizarras digitales interactivas. Su disponibilidad puede ser tanto a modo local, previa descarga e instalación del programa de forma gratuita, como su acceso on-line. Se potenciará su uso para la visualización de las gráficas de las funciones que se proponen en las cuestiones y como apoyo en todas aquellas situaciones que se consideren de interés para el estudio de las tendencias tanto finitas como infinitas, especialmente para las tendencias asintóticas.

Por otra parte, el test validado por expertos que se encuentra en el ANEXO X.4.3 puede ser utilizado como guion de actividades de aula como una la propuesta de prueba de conocimiento final a fin de valorar el grado de comprensión del contenido teórico compatible con cualquier otro tipo de prueba de control o mecanismos de interés previamente consensuados a nivel departamental incluidos en los criterios de evaluación y calificación de la asignatura de Matemáticas correspondiente.

VIII.5.10 Criterios de evaluación

- Conocimiento de los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.
- Analiza la información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento asintótico.
- Utiliza los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función; y sobre todo el estudio y representación gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.
- Estudio e interpretación gráfica de las características de una función comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados.

- Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales.
- Calcula de las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas.
- Representa funciones y obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales y extrae conclusiones en problemas derivados de situaciones reales.
- Modeliza con ayuda de funciones, problemas planteados en las ciencias sociales y los describe mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc.

VIII.5.11 Procedimientos de Evaluación

Observación sistemática de las actividades, participación, cooperación y actitudes de los alumnos ante las actividades propuestas en el aula.

Revisión de los trabajos, cuadernos de clase, fichas y ejercicios.

Análisis de los diálogos colectivos y entrevistas individuales o grupales para conocimiento y seguimiento de los avances y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Autoevaluación de los alumnos en las actividades del cuaderno y ejercicios en la pizarra

Actividades para control o evaluación final de la propuesta didáctica, centradas en los criterios de evaluación

VIII.5.12 Instrumentos de Evaluación

Indagación de conocimientos previos

Fichas de ejercicios de control

Registro de las actividades de clase

Registro de las entrevistas mantenidas

Control/cuestionario final de la Unidad

Carpeta de trabajos de los alumnos

VIII.6 PROBLEMAS ABIERTOS

En la presente investigación los objetivos se han reformulado en términos globales para todo el alumnado implicado de los diferentes institutos, así como en sucesivos niveles educativos comenzando en 4º ESO y finalizando en 2º Bachillerato de Ciencias; por circunstancias concretas que han sido explicadas en los diferentes ciclos de investigación. Se propone plantear una investigación longitudinal para analizar en profundidad el proceso mental que experimenta cada alumno individualmente en relación a la comprensión de tendencia y extensible al estudio de las asíntotas, realizando un seguimiento personalizado a lo largo de diferentes cursos académicos.

En la presente tesis no se ha analizado la eficacia de esta nueva metodología según el modelo Talbert comparada con la metodología tradicional, podría ser interesante la implementación paralela en dos clases diferentes del mismo nivel académico, de un mismo centro educativo para partir relativamente del mismo punto de partida y mantener la variable contexto e ir valorando los diferentes grados de consecución de los objetivos planteados en la presente tesis, tanto en el grupo control como el grupo experimental; incluso implementando un sistema interactivo para comparar los diferentes niveles competenciales conseguidos por los alumnos partícipes de esta metodología con los de otras muestras de alumnos que no la hayan seguido. Otro punto valorativo es si el alumnado que proviene de dicha metodología que potencia la comprensión del concepto frente a la mecanización les facilita significativamente la comprensión de conceptos más abstractos en docencias posteriores.

Otra línea de investigación sería medir los avances de los estudiantes partiendo del sistema antiguo detectado, no sólo en la comprensión de los contenidos de la materia en sí; sino, más bien en las habilidades y actitudes matemáticas que significa avanzar en la maduración de la autorregulación de aprendizajes, sistemas de organización personal para llevar a cabo de manera más óptima esta nueva metodología de aula invertida mixta siguiendo el modelo Talbert y sus aportaciones al desarrollo multicompetencial del alumno, implicando a las siete competencias clave que marca la LOMCE, en especial la de aprender a aprender, la competencia en comunicación lingüística, la competencia digital, sin olvidar el sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor aplicado a su propio proceso de enseñanza-aprendizaje y, por supuesto, la competencia matemática y las básicas en ciencia y tecnología.

Por otra parte, sería muy interesante la planificación de nuevas actividades y propuesta de evaluación en cuyo diseño y estructura se valorasen los conceptos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las tendencias asintóticas por encima de los procedimientos mecánicos para obtener sus expresiones, de modo que se creasen preguntas teóricas o cuestiones de interpretación frente a la realización de cálculos. Se considera que sería muy positiva la inclusión del estudio de contextos reales, bien de la vida cotidiana o bien asociados a fenómenos físicos o sociales; en los que se pudiera identificar la presencia de tendencias asintóticas, la posible relación con modelizaciones matemáticas asociadas a otros bloques de contenido para conectar diferentes campos de estudios y que pudiesen aportar información desde diferentes ámbitos para fomentar su comprensión.

El modelo de aprendizaje por estadios facilita la incorporación progresiva de los contenidos y va aumentando el nivel de exigencia en torno a la profundidad de la comprensión del concepto de estudio. Se ha contrastado la disminución del porcentaje de alumnado que avanza en el aprendizaje, por lo que sería atrayente facilitar la representación gráfica de los conceptos potenciando el lenguaje visual mediante programas informáticos o animaciones. Trabajando más intensamente con los deslizadores del programa de GeoGebra, incluyendo tres posibles parámetros para dar la posibilidad de estudio de los tres tipos de asíntotas, utilizando la ecuación implícita de la recta. Es de vital importancia mostrar a los alumnos diversos ejemplos y situaciones que presenten un mismo concepto para que no presupongan ciertas característica como obligatorias en el concepto de estudio y, por el contrario, que sean capaces de reconocer la abstracción subyacente al objeto matemático implicado; es decir, potenciar al máximo y desde todos los ámbitos la variabilidad perceptiva para ayudar a comprender la variabilidad matemática en el proceso de aprendizaje de las asíntotas.

Otra línea de investigación podría ser el análisis de la epistemología del concepto de asíntota, junto con el estudio de la evolución histórica en relación al estudio de las tendencias funcionales, así como problemas históricos en los que hayan aparecido directa o indirectamente la tendencia asintótica y que hayan supuesto avances o relevancia en el campo científico y, en especial, en la Matemática.

En un nivel de concreción más cercano a docencia del aula y con el fin de acercar al alumnado los contenidos matemáticos en la vida ordinaria y la ciencia, tendría interés la recopilación de problemas o situaciones de la vida real dónde aparezcan comportamientos asintóticos conectando con especialistas en diferentes disciplinas científicas: física, química, biología,…Se podría trabajar, para facilitar la consecución de los objetivos, por proyectos interdisciplinar, implicando a cuantos más departamentos mejor, mediante la creación de actividades globalizadas para implementar metodologías activas pudiéndose aplicar en diferentes niveles educativos a partir de un contenido teórico básico mediante técnicas de aprendizaje cooperativo, colaborativo, roles, gamificación, entre otras; relacionadas con el contenido teórico de esta tesis.

IX BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, A. (1990). Diseño cultural: Una aproximación ecológica a la educación desde el paradigma histórico-cultural. *Infancia y Aprendizaje*, 51-52, 4179.

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2016). Conocimiento matemático del concepto de límite en alumnos del Máster de Secundaria (Matemáticas). En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 199-207). Granada: Comares.

Aronson, N., Arfstrom, K.M., & Tam, K. (2013). *Flipped learning in higher education*. Retrieved from http://www.flippedlearning.org.

Azcárate, C. (1995). *Sistemas de representación. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Nº 4, 13-20.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas. Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Síntesis. Madrid.

Balacheff, N. (1994). Didactique et inteligence artificielle. Recherches en Didactique des Mathematiques 14, n.º 12, 9–42.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Enviroments in Mathematics, International Handbook of Mathematics Education, Springer, pp. 469–501. N.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. Enseñanza de las Ciencias, 4(3), 199-208.

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. The United States of America: International Society for Technology in Education.

Bergmann, J., Overmyer, J., & Willie, B. (2014). *The flipped class: Myths vs. reality*. Retrieved from http://www.thedailyriff.com.

Berret, D. (2012). *How 'flipping' the classroom can improve the traditional lecture.* Retrieved from http://chronicle.com

Bishop, J.L., & Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A survey of the research. Paper presented at *ASEE Annual Conference & Exposition*. Atlanta, American Society for Engineering Education.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. pp. 331-354. México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001a). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. 4(3), 219-236. *RELIME.* México DF. CLAME.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001b). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA, 10, 117-133.* Salamanca.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. 30, 67-82.* Graó. Barcelona.

Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T.y Benegas, J. (2006): Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *RELIME*. Vol 9. Nº2, 189-210. CLAME. ISSN: 1665-2436. México DF.

Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of EducationalObjectives: The Classification of Educational Goals: *Handbook 1, Cognitive Domain*. New York: David McKay.

Bondad-Brown, B.A., Rice, R.E., & Pearce, K. E. (2012). Influences on TV viewing and online user-shared video use: Demographics, generations, contextual age, media use, motivations, and audience activity. *Journal of Broadcasting & Electronic Media, 56(4),* 471-493.

Bonwell, C.C., & Eison, J.A. (1991). *Active learning: Creating excitement in the classroom*. Washington, DC: The George Washington University, School of Education and Human Development, p iii, p. 19). p 90).

Borassi, R. (1987): Exploring Mathematics Through the Análisis of Errors. For the Learning of Mathematics, 7, 2-9.

Brandon, A.F. & All, A.C. (2010). Constructivism theory analysis and application to curricula. *Nursing Education Perspectives, 31 (2), 89-92.*

Brousseau, G.; Davis, R. & Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, A.G. ; Otte, M. (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht : Kluwer.*

Brueckner, L. & Bond, G. (1984). Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje. Madrid. Rialp.

Bruner, J. (1978). *The role of dialogue in language acquisition. The child's conception of language.* New York: Springer-Verlag.

Butt, A. (2014). Student views on the use of a flipped classroom approach: Evidence from Australia. *Business Education & Accreditations, 6*(1), 33-43.

Carr, W., & Kemmis, S. (1986). Becoming Critical: Education. *Knowledge and Action Research. London: Falmer*.

Castro, E. y Castro, E. (1997): *Representaciones y Modelización.* En Horsori (ed.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Universidad de Barcelona. pp 95-124.

Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.)(2016). *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 199-207). Granada: Comares.

Claros Mellado, F.J. Sánchez Compaña M.T. y Coriat Benarroch, M. (2013) Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: Equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 31 , 113-131

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, *D. Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior. 15*, 167-192.

Dale, E. (1969). Audiovisual Methods in Teaching. Holt, Rinehart and Winston: Austin, TX. Journal Article.

de Castilla, J. León (2015) Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, (86).

de Educación, C. (2015). ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla Y León*.

del Estado, B. O. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Madrid (3 de enero de 2015)*, 169-546.

de España, G. (2015). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín oficial del estado*, *25*, 6986-7003.

Dolores, C. (2004): Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 7, Nº 3, pp.195-218.

Dolores, C.y Cuevas, I. (2007): Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 10, Nº 1, pp.69-96.

Drew, V. & Mackie, L. (2011). Extending the constructs of active learning: implications for teachers' pedagogy and practice. *The Curriculum Journal, 22 (4), 451-467.*

Dreyfus, T. (1991). *Avanced Mathematical Processes.* Tall D. Editor

Duval, R. (1993). *Sémiosis et Noésis. Conférence* A.P.M.E.P.I.R.E.M.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173.201).* México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN-Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Eisemberg, T. (1994). *Functions and associated learning difficulties*. En Tall, D. (Ed). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht; Kluwer.

Escudero, J. M. (1987). La investigación-acción en el panorama actual de la investigación educativa: algunas tendencias. *Revista de Innovación e Investigación educativa*, *3*, 5-39.

Falk, L. K., Sockel, H., Chen, K. (2005). E-commerce and consumer's expectations: What makes a website work. *Journal of Website Promotion, 1(1),* 65-75.

Faure, P. (1981): *Enseñanza personalizada y también comunitaria*. Narcea. Madrid.

Fernandez Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Fischbein, E. (1982).“Intuition and Proof”. *For the learning of Mathematics*. 3, 2, 9-18 y 24.

Furse, C. M., Ziegenfuss, D., & Bamberg, S. (2014). Learning to teach in the flipped classroom. In *2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)* (pp. 910-911). IEEE.

Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación.* Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

García Olivares, M.A. (2008). *Educación Matemática Atendiendo a la Diversidad. Análisis de una Metodología Específica*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

García Hoz, V. (1988). *La práctica de la educación personalizada.* Ediciones Rialp, Madrid.

Garrett, L. (1997). Dewey, Dale, and Bruner: Educational philosophy, experiential learning, and library school cataloging instruction. *Journal of education for library and Information science*, 129-136.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad SUMA. N.26, 111-117

Gatica, N. (2007). *Aprendizaje del concepto de límite funcional en alumnos de ingenierías.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (3), 333-335.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. Grouws (edt.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig.* Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Hogan, K., & Pressley, M. (Eds.). (1997). Scaffolding Student Learning: Instructional Approaches and Issues. Cambridge: Brookline Books.

Howson, G. (1991): *National Curricula in Mathematics. The mathematical Association.* London.

Huang, J., Chen, R., & Wang, X. (2012). Factors influencing intention to forward short internet videos. *Social Behavior and Personality. 40(1),* 5-14.

Jacobs, G., Hurley, M., & Unite, C. (2008). How learning theory creates a foundation for SI leader training. *Journal of Peer Learning*, *1*(1), 6-12.

Janvier, C. (1987). *Traslation Processes in Mathematics Education*. En C. Janvier (edt.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kemmis, S. & McTaggart, S. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Ed. Laertes. Barcelona.

Kidron, I. (2011). Constructing knwledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279.

Kilpatrick, J. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* (Eds) J. Kilpatrick, P. Gómez, L. Rico. Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá

Lage, M.J., Platt G.J., & Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gate way to creating an inclusive learning environment. *Journal of Economic Education.* 31(1): 30-43.

Leinhardt,G., Zaslavsky, O., & Stein, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*. 60 (1), 1-64.

Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of social issues*, *2*(4), 34-46.

Martin, D.C., Arendale, D. & Blanc, R.A. (1997). Mainstreaming of Developmental Education: Supplemental Instruction and Video-based Supplemental Instruction. In H. Levin (Ed.), *Alternatives to Developmental Education*. San Fransisco: Jossey Bass.

Mazur, E. (2001). Peer Instruction: Ten years of experiences and results. *American Journal Phys*, 69(9).

Mazur, E. (2009). Comprensión o memorización: ¿Estamos enseñando lo correcto. *Memorias del LVII Taller Internacional Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Física*.

Mazur, E. (2010). Peer Instruction: A User's Manual. *New Jersey Pentice* Hall.

Miller, A. (2012). Five best practices for the flipped classroom. Retrieved from http://www.edutopia.org/blog/flipped-classroom-best-practices-andrew-miller

Ministerio de Educación (2015). *ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.* «BOE» núm. 25, de 29 de enero de 2015, pág. 6986 a 7003

Moreno de la Rosa, C. A. (2018). Educación y Psicología: Puntos de encuentro. Blog de análisis y reflexión en torno a la Educación en México. Recuperado el 27/09/18 de https://upnmonclova.wordpress.com/2011/12/10/la-propuesta-de-donald-schon-el-conocimiento-esta-en-la-accion/

Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. En Greer, B. y Mulhern, G. (Eds.). *New Directions in Mathematics Education.* Londres: Routledge.

Murillo, J. (2001). Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri Actividades, aplicado a la enseñanza de la Geometría en la E.S.O. Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Barcelona.

Ortega, T. (1999): Educación en la diversidad. Su evaluación. En *Temas Controvertidos en Educación Matemática. ESO y Bachillerato.* p. T. Ortega, editor. U. Valladolid.

Ortega, T (2011). Fundamentos de la forma y del volumen. Estrategias didácticas para su enseñanza. Universidad de Valladolid.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias,* 28(2), 215-226. Barcelona. ISSN: 0212-4521.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. *Revista de investigación en Educación. Nº 12 (2), pp. 209-221*

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias.* 28(2), 215-226. Barcelona.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. *Revista de investigación en Educación*. 12(2), pp. 209-221.

Ortega, T.; Pecharromán, C.2016. De la visualización a la demostración Contextos Educativos. 1, pp.45-64.

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la compresión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación Matemática,* 26,2

Pecharromán, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de las gráficas*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica.* Madrid: Taurus.

Pérez Serrano, G. (1990). *Investigación-acción: aplicaciones al campo social y educativo.* Ed. Dykinson. Madrid

Pérez, L.F. (2003). El aula inteligente y la educación en la diversidad. *En El aula inteligente. Nuevas perspectivas*. (Dirigido por F. Segovia). Espasa Calpe, S.A. Madrid.

Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Educaction.* 9 (3), 223-231.

Radatz, H. (1980). Students´errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics, 1(1), 1-20.

Rico, L. (1995). Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado. Granada: Universidad de Granada.

Roehl, A., Reddy, S.L., & Shannon, G.J. (2013). The flipped classroom: An opportunity to engage millennial students through active learning strategies. *Journal of Family & Consumer Sciences, 105*(2), 44-49.

Romero, L. R., Benarroch, M. C., & Martínez, E. C. (1997). Revisión teórica sobre la noción de currículo. En *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 77-150). Síntesis.

Romero, L. R., Benarroch, M. C., Martínez, E. C., Martínez, E. C., & Alex, I. S. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-317). Síntesis.

Sánchez Compaña, M.T. (2013). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Schön, D. (2011). Artículo de Reflexión. Una práctica profesional reflexiva en la universidad. *Compás empresarial. Volumen 3. Número 5. Año 2011.ISSN: 2075-8952*, pág 14-21.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona.

Socas, M. (2001). Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el lenguaje algebraico. Documento de investigación. Universidad de La Laguna.

Socas, M. (2002). Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 5, pp. 199-216. México DF.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En *Investigación en Educación Matemática XI*, pp.19-52.

Spivack, M. (1970). *Calculus. Cálculo infinitesimal.* Ed. Reverté. Barcelona.

Stenhouse, L. (1987): *La investigación como base de la enseñanza. Selección de textos por J. Rudduck y D. Hopkins.* Ediciones Morata. Madrid.

Talbert, R. (2011). Using MATLAB to teach problem-solving techniques to first-year liberal arts students. Mathworks News and Notes.

Talbert, R. (2013). Learning MATLAB in the inverted classroom. Computers in Education Journal. 23(2), 50–60.

Talbert, R. (2014). Inverting the linear algebra classroom. PRIMUS, Probl. Resour. Issues Math. Undergrad. Stud. 24(5), 361-374.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 325-338.

Verleur, R., Heuvelman, A., & Verhagen, P.W. (2011). Trigger videos on the web: Impact of audiovisual design. *British Journal of Educational Technology*. 42(4), 573-582.

Vygotsky, L. S (1978), *Pensamiento y lenguaje*, Madrid: Paidós.

Watkins, C., Carnell, E., & Lodge, C. (2007). *Effective learning in classrooms*. Paul Chapman Educational Publishing.

Yates, R., & Noyes, J.M. (2007). Web site design, self-monitoring style, and consumer preference. *Journal of Applied Social Psychology*. 37(6), 1341-1362.

Zayapragassarazan, Z. & Kumar, S. (2012). Active learning methods. *NTTC Bulletin. 19* (1), 3-5.

Zerger, S. (2008). Theoretical Frameworks That Inform the Supplemental Instruction Model. In M.E. Stone & G. Jacobs (Eds.), *Supplemental Instruction: Improving First-Year Student Success in High-Risk Courses*. 7 (21-28). University of South Carolina: National Resource Center for the First-Year Experience and Students in Transition.

X ANEXO

X.1 ANEXO MARCO METODOLÓGICO

X.1.1 Tratamiento curricular Bloque de Funciones

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, estructura la materia de Matemáticas en torno a cuatro bloques de contenido: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, Números y Álgebra, Análisis, y Estadística y Probabilidad. A continuación se expone el tratamiento que se establece respecto al bloque de funciones perteneciente al campo del Análisis, apareciendo en la primera columna los contenidos, en la segunda los criterios de evaluación y en la tercera, los estándares de aprendizaje evaluables.

1º y 2º ESO

X.1 Tabla 10.1: *Bloque 4. Funciones 1º y 2º ESO*

Bloque 4. Funciones		
Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.	1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas. 2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto. 3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales. 4. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.	1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas. 2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto. 3.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función. 3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. 4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente. 4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores. 4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa. 4.4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.

3º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

X.2 Tabla 10.2: *Bloque 4. Funciones 3º ESO Matemáticas académicas*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. Funciones		
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente. 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. 3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente. 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

4º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

X.3 Tabla 10.3: *Bloque 4. Funciones 4º ESO Matemáticas académicas*

Bloque 4. Funciones		
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.	1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.	1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso. 1.3. Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales. 1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla. 1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas. 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. 2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos. 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

3º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

X.4 Tabla 10.4: *Bloque 4. Funciones 3º ESO Matemáticas aplicadas*

Bloque 4. Funciones		
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto. 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente. 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente. 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características. 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

4º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

X.5 Tabla 10.5: *Bloque 4. Funciones 4º ESO Matemáticas aplicadas*

Bloque 4. Funciones		
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.	1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.	1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial. 1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad). 1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores. 1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. 2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos. 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión. 2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.

1º Bachillerato Matemáticas I

X.6 Tabla 10.6: *Bloque 3. Análisis. 1º Bachillerato. Matemáticas I*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
	Bloque 3. Análisis	
Funciones reales de variable real. Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos. Operaciones y composición de funciones. Función inversa. Funciones de oferta y demanda. Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones. Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal. Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena. Representación gráfica de funciones.	1. Identificar funciones elementales, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan. 2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo. 3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos. 4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	1.1. Reconoce analítica y gráficamente las funciones reales de variable real elementales. 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonada ejes, unidades, dominio y escalas, y reconoce e identifica los errores de interpretación derivados de una mala elección. 1.3. Interpreta las propiedades globales y locales de las funciones, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 1.4. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones en contextos reales. 2.1. Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones. 2.2. Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función, para extraer conclusiones en situaciones reales. 2.3. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 3.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas. 3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena. 3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto. 4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

2º Bachillerato: Matemáticas II

X.7 Tabla 10.7: *Bloque 3. Análisis. 2º Bachillerato. Matemáticas II*

	Bloque 3. Análisis	
Límite de una función en un punto y en el infinito. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad. Teorema de Bolzano. Función derivada. Teoremas de Rolle y del valor medio. La regla de L'Hôpital. Aplicación al cálculo de límites. Aplicaciones de la derivada: problemas de optimización. Primitiva de una función. La integral indefinida. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. La integral definida. Teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.	1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites y de optimización. 3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas. 4. Aplicar el cálculo de integrales definidas en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables y, en general, a la resolución de problemas.	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. 2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto. 3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. 4.1. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas. 4.2. Utiliza los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de áreas de recintos limitados por funciones conocidas.

1º Bachillerato Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.

X.8 Tabla 10.8: *Bloque 3. Análisis. 1º Bachillerato. Matemáticas aplicadas a las CCSS I*

Bloque 3. Análisis		
Resolución de problemas e interpretación de fenómenos sociales y económicos mediante funciones. Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Características de una función. Interpolación y extrapolación lineal y cuadrática. Aplicación a problemas reales. Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones reales de variable real: polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera, y racionales e irracionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos. Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Aplicación al estudio de las asíntotas. Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto. Función derivada. Reglas de derivación de funciones elementales sencillas que sean suma, producto, cociente y composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.	1. Interpretar y representar gráficas de funciones reales teniendo en cuenta sus características y su relación con fenómenos sociales. 2. Interpolar y extrapolar valores de funciones a partir de tablas y conocer la utilidad en casos reales. 3. Calcular límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias. 4. Conocer el concepto de continuidad y estudiar la continuidad en un punto en funciones polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales. 5. Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada y utilizar las regla de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones.	1.1. Analiza funciones expresadas en forma algebraica, por medio de tablas o gráficamente, y las relaciona con fenómenos cotidianos, económicos, sociales y científicos extrayendo y replicando modelos. 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonadamente ejes, unidades y escalas reconociendo e identificando los errores de interpretación derivados de una mala elección, para realizar representaciones gráficas de funciones. 1.3. Estudia e interpreta gráficamente las características de una función comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 2.1. Obtiene valores desconocidos mediante interpolación o extrapolación a partir de tablas o datos y los interpreta en un contexto. 3.1. Calcula límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función. 3.2. Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales. 4.1. Examina, analiza y determina la continuidad de la función en un punto para extraer conclusiones en situaciones reales. 5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geométricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real. 5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado.

2º Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

X.9 Tabla 10.9: *Bloque 3. Análisis. 2º Bachillerato. Matemáticas aplicadas a las CCSS II*

Bloque 3. Análisis		
Continuidad. Tipos de discontinuidad. Estudio de la continuidad en funciones elementales y definidas a trozos. Aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones polinómicas, racionales e irracionales sencillas, exponenciales y logarítmicas. Problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía. Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades locales y globales. Concepto de primitiva. Cálculo de primitivas: Propiedades básicas. Integrales inmediatas. Cálculo de áreas: La integral definida. Regla de Barrow.	1. Analizar e interpretar fenómenos habituales de las ciencias sociales de manera objetiva traduciendo la información al lenguaje de las funciones y describiéndolo mediante el estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. 2. Utilizar el cálculo de derivadas para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función, para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social y extraer conclusiones del fenómeno analizado. 3. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables utilizando técnicas de integración inmediata.	1.1. Modeliza con ayuda de funciones problemas planteados en las ciencias sociales y los describe mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc. 1.2. Calcula las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas. 1.3. Estudia la continuidad en un punto de una función elemental o definida a trozos utilizando el concepto de límite. 2.1. Representa funciones y obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales y extrae conclusiones en problemas derivados de situaciones reales. 2.2. Plantea problemas de optimización sobre fenómenos relacionados con las ciencias sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto. 3.1. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas. 3.2. Aplica el concepto de integral definida para calcular el área de recintos planos delimitados por una o dos curvas.

X.2 ANEXO PRIMER CICLO EXPLORATORIO CURSO 2014/15

X.2.1 Carta presentación a familias y tutores sobre el proyecto de investigación

Estimados padres, madres y/o tutores:

I.E.S. Condesa Eylo

Soy Marta Carazo Lores, profesora de matemáticas de 4º de la ESO opción A. Como profesional implicada en mejorar mi labor docente, me mantengo en continua actualización científico-didáctica. Dichas inquietudes las comparto con Rosa Mª Fernández Barcenilla, profesora asociada del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación y Trabajo Social de la Universidad de Valladolid.

Pretendemos llevar a cabo un Proyecto de Investigación Educativa, mediante la utilización de nuevas metodologías y recursos en el aula. También estamos interesadas en la evaluación de todo el proceso de planificación y ejecución, así como el impacto de dichos cambios en todos los agentes implicados; en especial en el alumnado, y valorar la potencial variación de sus resultados académicos.

El punto central es la implementación de la metodología inversa, la llamada “Flipped Classroom”. De una forma muy resumida, se trata de “dar la vuelta a las clases”. Por un lado, el alumno, en casa, toma el primer contacto con los contenidos teóricos básicos, visualizando videos y materiales preparados por nosotras que se encuentran alojados en la plataforma Moodle del centro. Por otro lado, en el aula el alumnado debe realizar las tareas prácticas que previamente han sido planificadas por el profesorado de manera individual o en pequeño grupo.

El alumno se convierte así en el verdadero protagonista de su aprendizaje y el profesor le acompaña resolviendo sus dudas, guiando…, en resumen, facilitando el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El Área de Programas Educativos de la Dirección Provincial de Educación, el Equipo Directivo y el Departamento de Matemáticas del centro están informados de esta propuesta de intervención. A ustedes, como padres o tutores legales, les queremos informar no solo mediante este escrito, sino también de manera personal. Para ello les convocamos a una reunión informativa el Martes 24 a las 17:00 en el centro. En ella intentaremos dar respuesta a las dudas que les puedan surgir.

También les pedimos su colaboración para el desarrollo de esta propuesta y su autorización para poder grabar las clases, ya que nos facilitaría el análisis y estudio posterior de matices, con el fin de mejorar del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria.

Agradeciendo de antemano su colaboración. Reciban un cordial saludo.

D.Dña. ____padre, madre o tutor del alumno/a____autoriz o a Dña. Marta Carazo Lores y Dña. Rosa Mª Fernández Barcenilla a utilizar material audiovisual grabado en las aulas del IES Condesa Eylo en el que pueda aparecer mi hijo/a o tutorando. También doy permiso para que mi hijo/a o tutorando sea entrevistado personalmente sobre aspectos relativos al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. He sido informado sobre el proyecto de investigación relativo a la implementación de la Metodología Flipped Classroom en el aula y que dicho material será utilizado sólo para fines educativos.

X.2.2 Guion reunión inicial con los padres IES Condesa Eylo.

1. Presentación de Rosa Mª Fernández Barcenilla, como profesora de Matemáticas en la actualidad Asesora de Formación Permanente del CFIE de Valladolid compatibilizando con la docencia como profesora asociada del Dpto. de Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la Matemática de la Facultad de Educación y Trabajo Social de Valladolid.
2. Exposición de la Metodología “Flipped Classroom” o aula invertida mediante una presentación digital prezi.
3. Objetivo de la investigación.

Valorar dicha metodología.

Valorar el aprendizaje del alumnado a través de dicha metodología

Concretar la puesta en práctica en el bloque de contenido relativo a Funciones, enfocando el aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de sus gráficas.

Analizar la interacción profesor-alumno, alumno-alumno, grupos de iguales, aprendizajes colaborativo mediante la figura de un observador externo que recoge información.

La nueva configuración de aula: dificultades y errores en el control del aula.

Validar el grado de consecución de los objetivos propuestos.

Evaluar la nueva metodología y el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado.

4. Explicación las diferentes fases de implementación de la investigación.

Presentación del proyecto al Área de Programas Educativos de la Dirección Provincial de Educación de Valladolid.

Reunión con el Equipo Directivo y Departamento de Matemáticas del IES Condesa Eylo.

Recogida información previa del profesorado que impartió docencia en el curso académico 2013/14.

Diseño de la prueba inicial como recogida de información previa para implementar la intervención educativa.

Reunión inicial con el alumnado de 4º ESO Opción A para explicarles detalladamente el cambio metodológico que se va a llevar a cabo.

Familiarización con el nuevo entorno de aprendizaje virtual y explicación de las "Prácticas guiadas" que anteceden a cada sesión de docencia en el aula.

Normas y buenas prácticas de uso de los foros virtuales.

Fuentes de información:

Cuaderno de los alumnos.

Producciones orales, escritas y gráficas que aporten información sobre el proceso mental que recorre cada alumno individualmente.

Cuestionarios inicial y final.

Diario del investigador (cuaderno físico y Blog)

Recogida de información mediante un protocolo de actuación del observador externo.

Foros virtuales en la plataforma de Moodle.

Grabaciones de vídeo y audio.

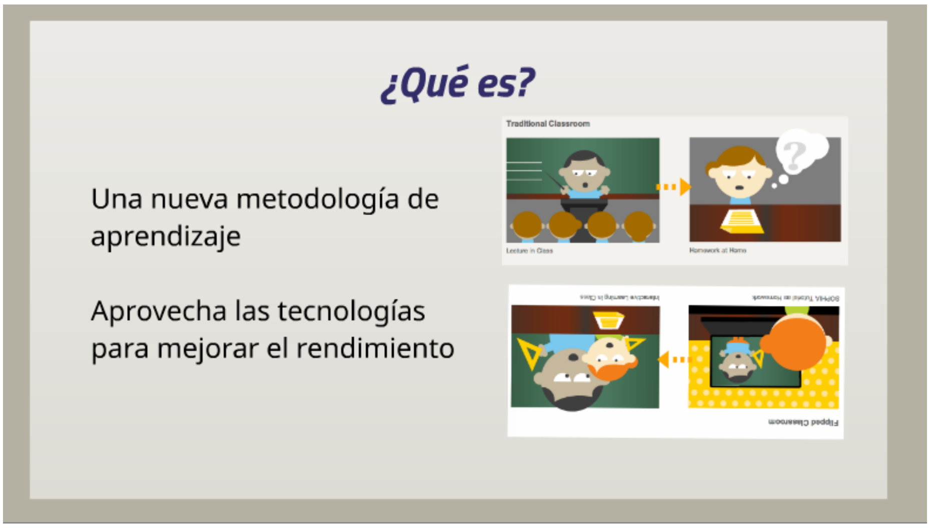
Entrevistas personales con ciertos alumnos seleccionados fuera del horario lectivo.

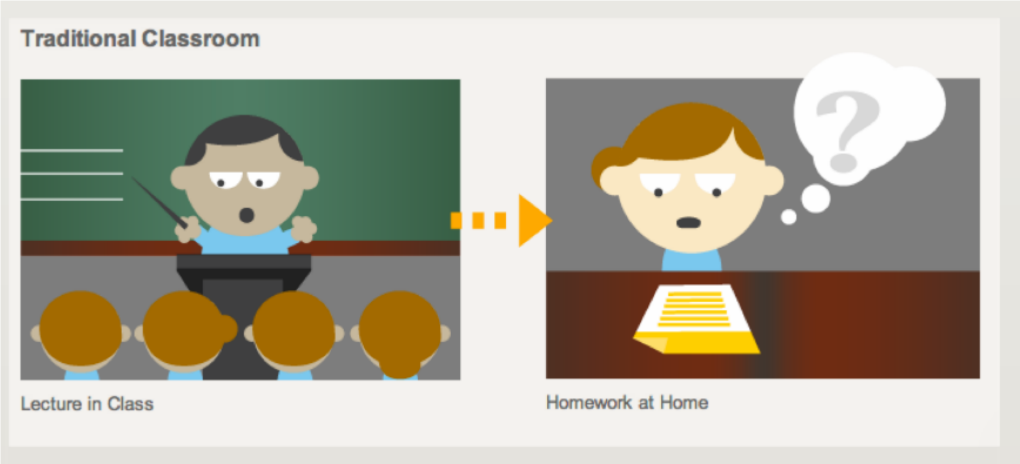
Petición de permisos para recabar información visual y auditiva.

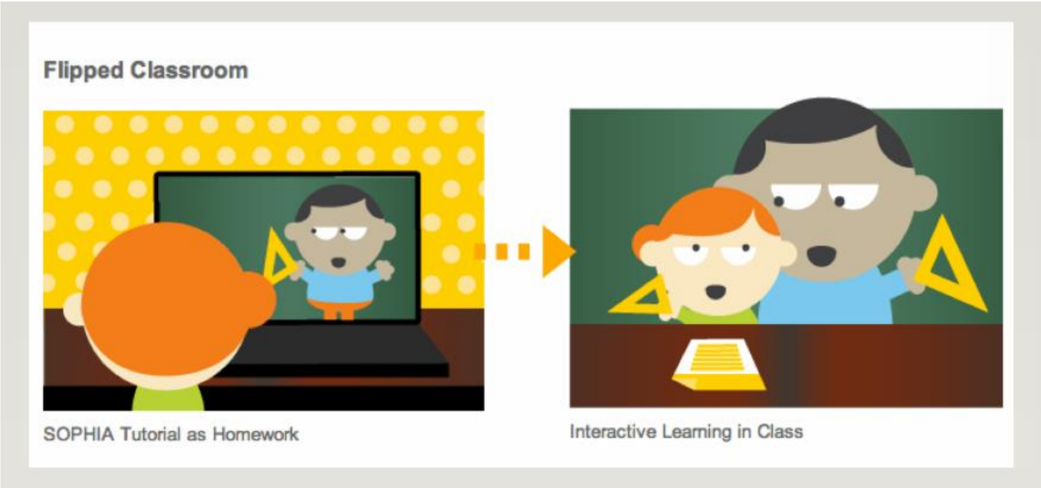
5. Petición de apoyo desde el ámbito familiar en relación a la visualización de los vídeos desde la plataforma Moodle.
6. Facilitar el correo electrónico para recabar información que consideren de interés.
7. Planificación de una reunión posterior para realizar un cuestionario para valorar la metodología y el proceso de aprendizaje del alumnado, grado de motivación y valoración global de la primera fase de exploración de la investigación.
8. Agradecimiento al IES Condesa Eylo, al Equipo Directivo, Dpto. de Matemáticas y, en especial, a Dña. Marta Carazo Lores por facilitar que su centro educativo sea un centro de investigación.

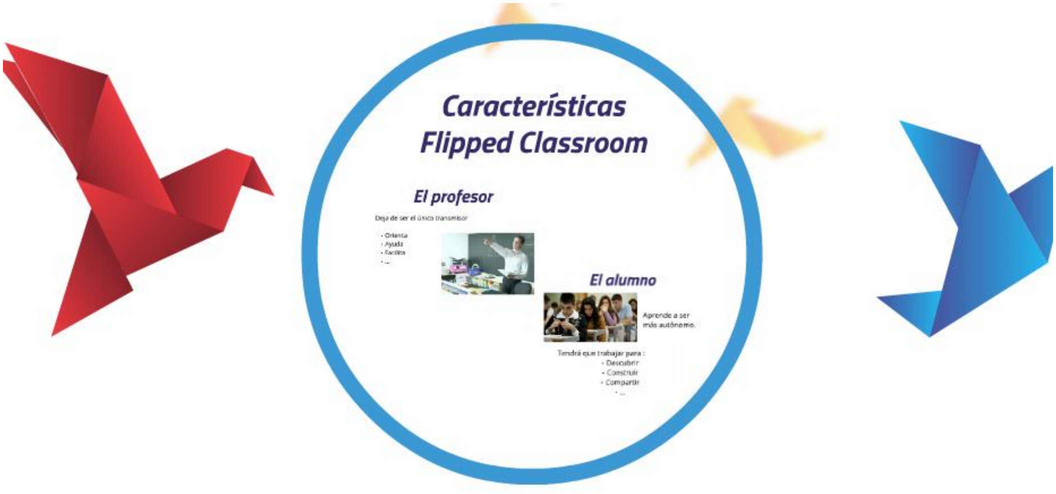
9. Aclaración de dudas, ruegos y preguntas.

X.2.3 Presentación de la investigación al alumnado y padres




Traditional Classroom
Lecture in Class
Homework at Home


Flipped Classroom
SOPHIA Tutorial as Homework
Interactive Learning in Class


Características
Flipped Classroom
El profesor
Deja de ser el único transmisor
- Orienta
- Ayuda
- Facilita
- ...
El alumno
Aprende a ser más autónomo.
Tendrá que trabajar para :
- Descubrir
- Construir
- Compartir
- ...

El profesor

Deja de ser el único transmisor

- Orienta
- Ayuda
- Facilita
- …

El alumno

Aprende a ser más autónomo.

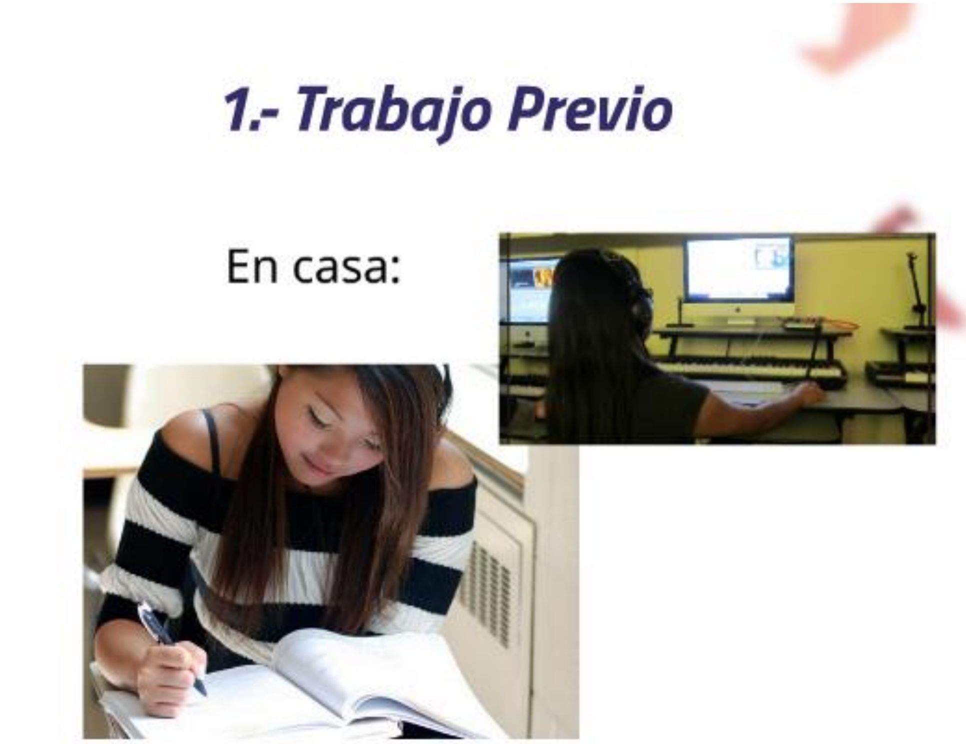
Tendrá que trabajar para :

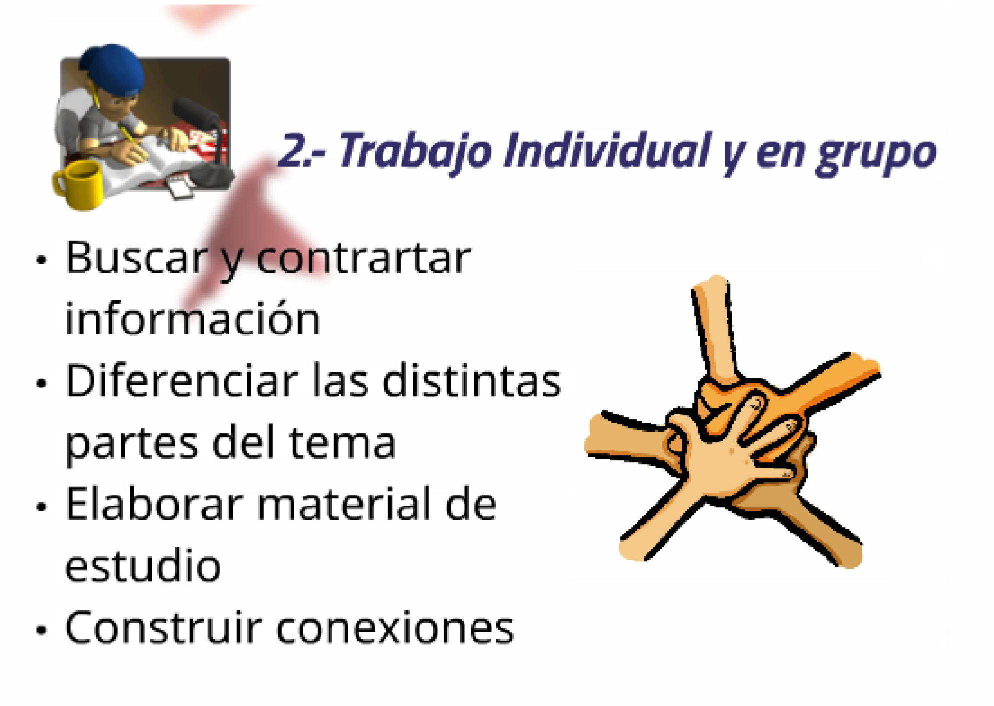
- Descubrir
- Construir
- Compartir
- …


Material que utilizaremos
You Tube

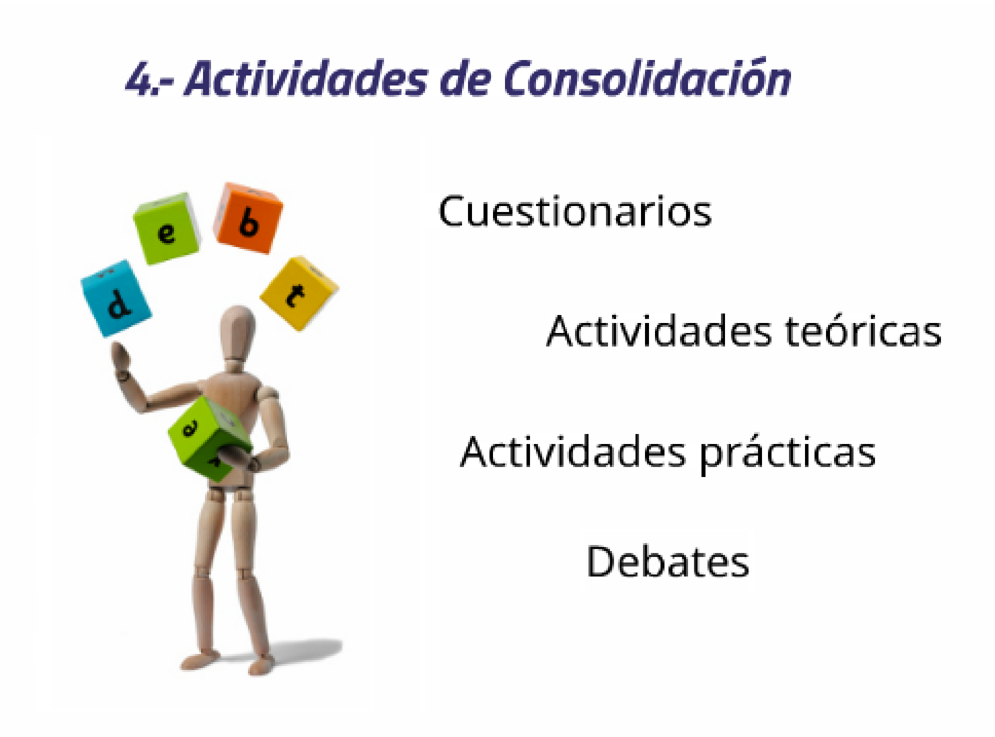

¿Qué fomenta esta metodología?
Aprendizaje por comprensión
Trabajo individual y en grupo
Creación de materiales
Colaboración con los compañeros


¿Cómo trabajaremos?
1.- Trabajo Previo
En casa:
2.- Trabajo individual y en grupo
- Buscar y contrastar información
- Diferenciar las distintas partes del tema
- Elaborar material de estudio
- Construir conexiones
3.- Exposición de Tareas
- Discutir
- Cuestionarse
- Debatir
4.- Actividades de Consolidación
Cuestionarios
Actividades prácticas
Debates


1.- Trabajo Previo
En casa:

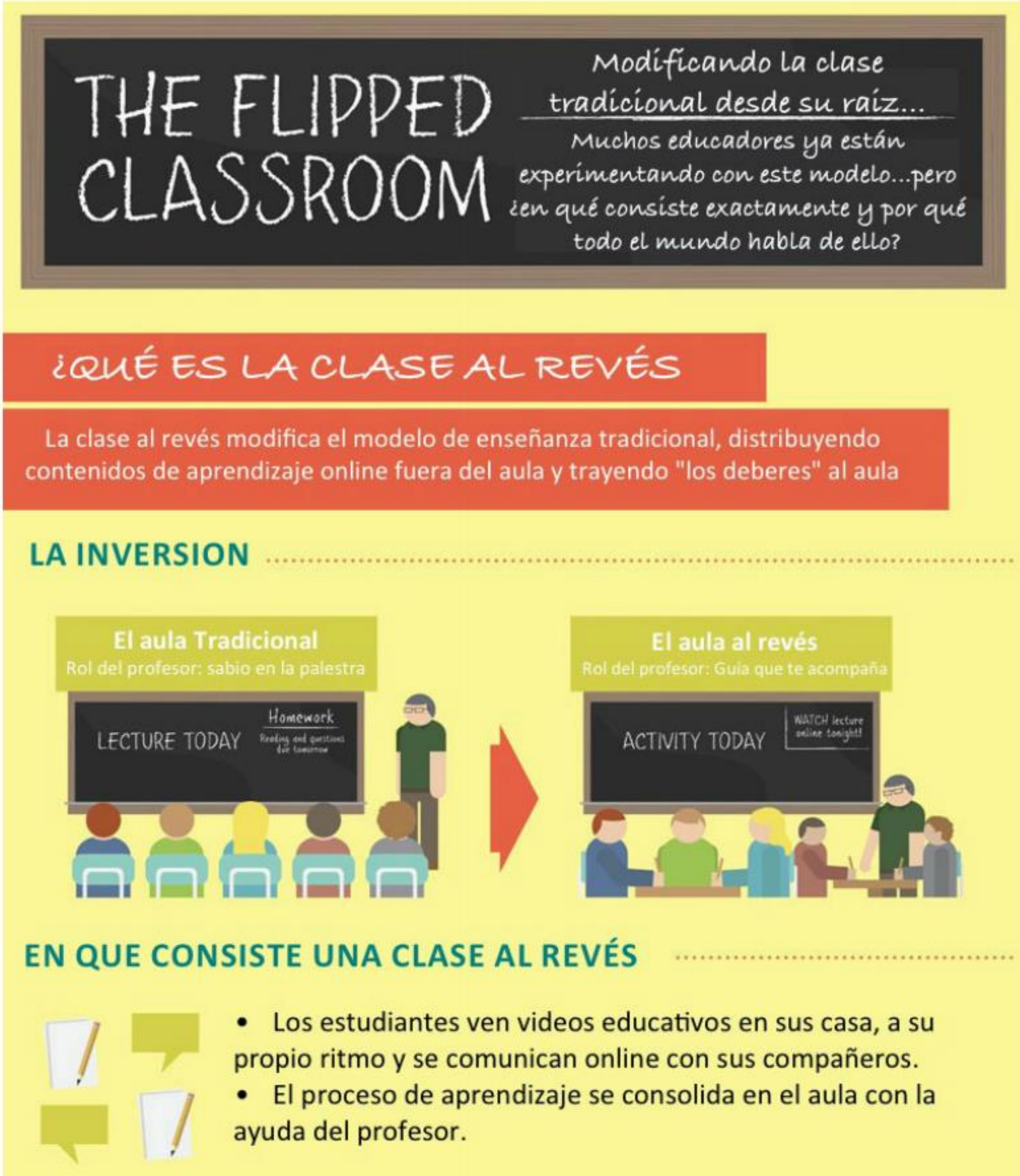

2.- Trabajo Individual y en grupo
• Buscar y contrartar información
• Diferenciar las distintas partes del tema
• Elaborar material de estudio
• Construir conexiones

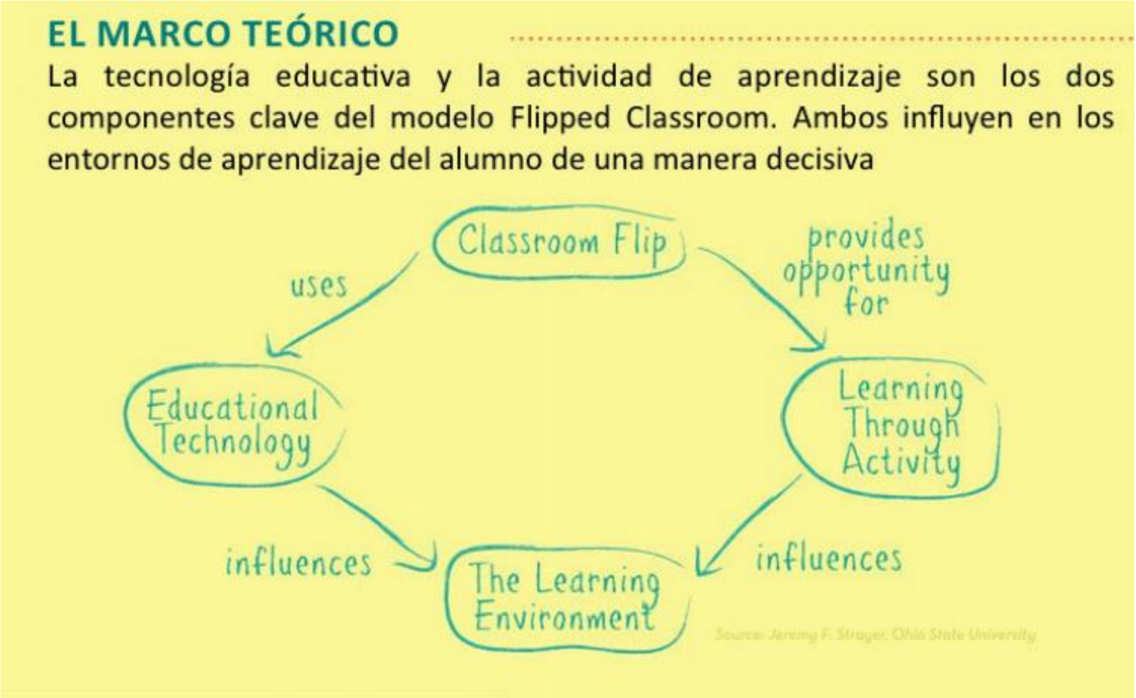

3.- Exposición de Tareas
• Discutir
• Cuestionarse
• Debatir

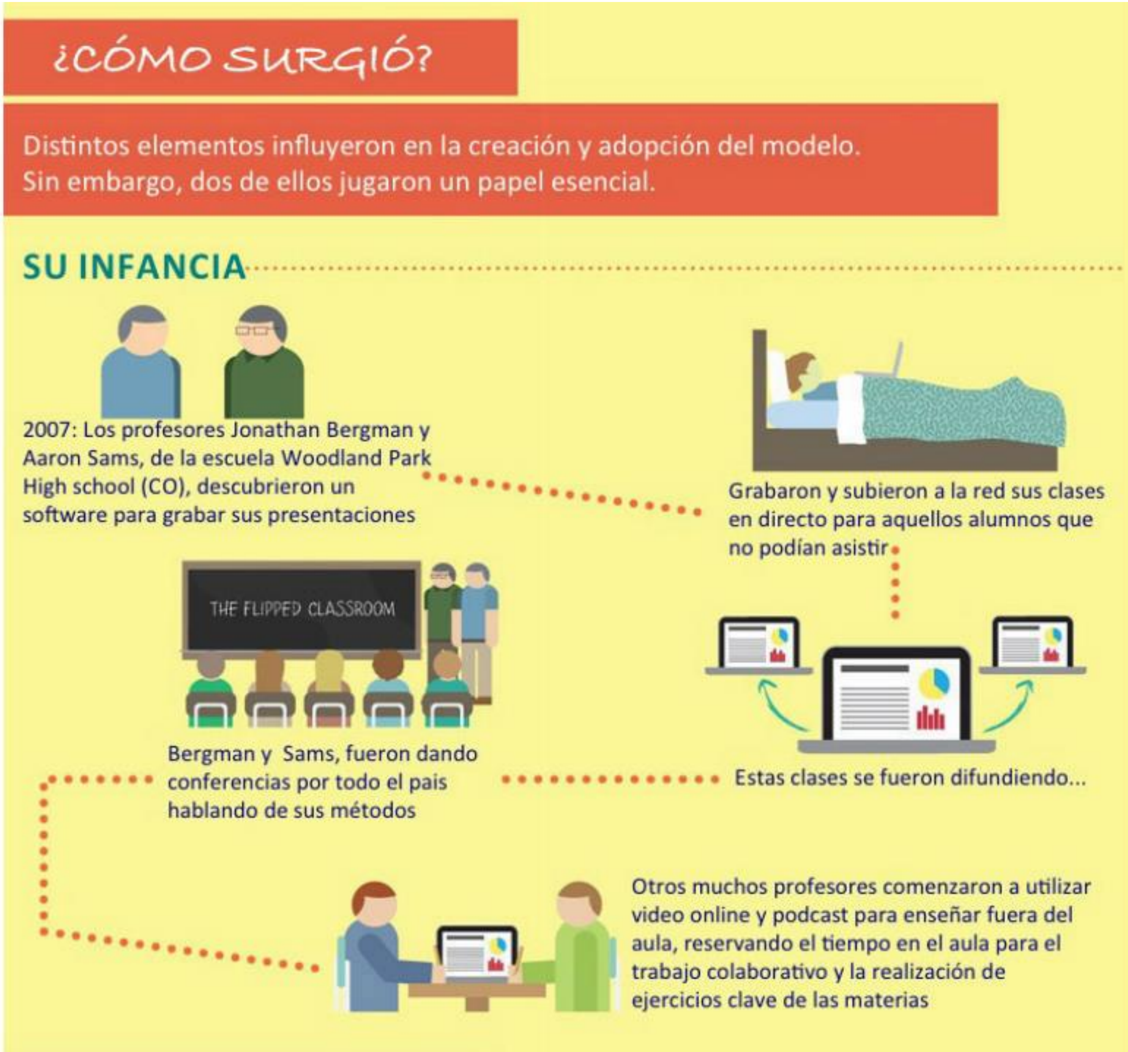

4.- Actividades de Consolidación
Cuestionarios
Actividades teóricas
Actividades prácticas
Debates


5.- Actividades de Evaluación


THE FLIPPED CLASSROOM
Modificando la clase tradicional desde su raiz...
Muchos educadores ya están experimentando con este modelo...pero ¿en qué consiste exactamente y por qué todo el mundo habla de ello?
¿QUÉ ES LA CLASE AL REVÉS
La clase al revés modifica el modelo de enseñanza tradicional, distribuyendo contenidos de aprendizaje online fuera del aula y trayendo "los deberes" al aula
LA INVERSION
El aula Tradicional
LECTURE TODAY
El aula al revés
ACTIVITY TODAY
EN QUE CONSISTE UNA CLASE AL REVÉS
• Los estudiantes ven videos educativos en sus casa, a su propio ritmo y se comunican online con sus compañeros.
• El proceso de aprendizaje se consolida en el aula con la ayuda del profesor.
EL MARCO TEÓRICO


THE FLIPPED CLASSROOM
Modificando la clase tradicional desde su raíz...
Muchos educadores ya están experimentando con este modelo...pero ¿en qué consiste exactamente y por qué todo el mundo habla de ello?
¿QUÉ ES LA CLASE AL REVÉS
La clase al revés modifica el modelo de enseñanza tradicional, distribuyendo contenidos de aprendizaje online fuera del aula y trayendo "los deberes" al aula
LA INVERSION
El aula Tradicional
Rol del profesor: sabio en la palestra
LECTURE TODAY
Homework
Reading and questions due tomorrow
El aula al revés
Rol del profesor: Guía que te acompaña
ACTIVITY TODAY
WATCH lecture online tonight!!
EN QUE CONSISTE UNA CLASE AL REVÉS
• Los estudiantes ven videos educativos en sus casa, a su propio ritmo y se comunican online con sus compañeros.
• El proceso de aprendizaje se consolida en el aula con la ayuda del profesor.


EL MARCO TEÓRICO
La tecnología educativa y la actividad de aprendizaje son los dos componentes clave del modelo Flipped Classroom. Ambos influyen en los entornos de aprendizaje del alumno de una manera decisiva
Classroom Flip
uses
provides opportunity for
Educational Technology
Learning Through Activity
influences
influences
The Learning Environment


¿CÓMO SURGIÓ?
Distintos elementos influyeron en la creación y adopción del modelo.
Sin embargo, dos de ellos jugaron un papel esencial.
SU INFANCIA
2007: Los profesores Jonathan Bergman y Aaron Sams, de la escuela Woodland Park High school (CO), descubrieron un software para grabar sus presentaciones
Grabaron y subieron a la red sus clases en directo para aquellos alumnos que no podían asistir
THE FLIPPED CLASSROOM
Bergman y Sams, fueron dando conferencias por todo el pais hablando de sus métodos
Estas clases se fueron difundiendo...
Otros muchos profesores comenzaron a utilizar video online y podcast para enseñar fuera del aula, reservando el tiempo en el aula para el trabajo colaborativo y la realización de ejercicios clave de las materias


¿QUÉ ESTÁ PASANDO?
Dos elementos clave están ayudando a la adopción de este modelo
POBRES RESULTADOS DE APRENDIZAJE
El modelo educativo tradicional "una talla vale para todos" frecuentemente arroja pobres resultados y tiene consecuencias negativas.
69% Se gradúa
31% No se gradúa
Sólo el 69% de los estudiantes que comienzan Estudios de Secundaria, la finalizan. (datos USA)
7,200 Cada día
1.3 millones cada año
7200 estudiantes abandonan al día...1,3 millones al año (datos USA)
RELEVANCIA DEL VIDEO ONLINE
La disponibilidad del video online y el incremento del acceso a la tecnología, ha allanado el terreno al desarrollo del este modelo
Adultos que han visto un video online educativo
2007
15% usuarios de internet
2010
usuarios de internet 30%
+2,400
online video lessons in Khan Academy
Que cubren materias desde las matemáticas a la física, de la economía a la historia
¿CÓMO ES?
Muchas escuelas y aulas están adoptando este modelo. Veamos que ha ocurrido en Clintondale High School, cerca de Detroit, que ha implementado el modelo Flipped Classroom con gran éxito...

X.2.4 Cuestionario inicial de conocimientos previos 4º ESO

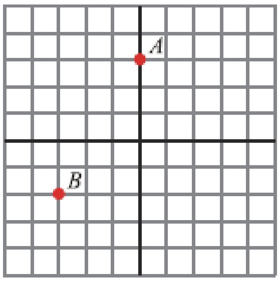
Nombre y Apellidos:____

CUESTIONARIO INICIAL. IES CONDESA EYLO. CURSO 2014/15

Escribe el razonamiento que sigues, lo que piensas para llegar a responder lo que se pide.

Indica también por escrito las dificultades que tengas o lo que no entiendes.

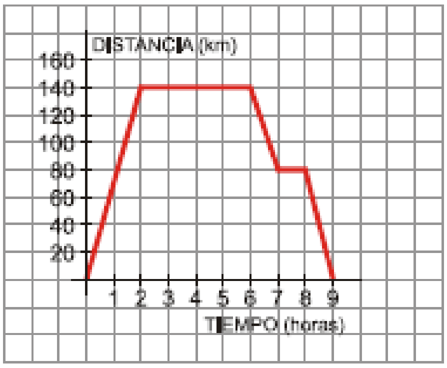
1.- Escribe las coordenadas de los puntos A y B, y sitúa en el sistema de referencia de la figura los puntos: $C = (-2, 3)$, $D = (\frac{5}{2}, -3)$ y $E = (0, 4.5)$.



Razonamiento:

Dificultades:

2.- La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de estudiantes, reflejando el tiempo (en horas) y la distancia al instituto (en kilómetros):



a) ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?

b) ¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?

c) ¿Hubo alguna parada a la ida?

d) ¿Y a la vuelta?, ¿A qué distancia del punto de partida se realizó la parada?

e) ¿Cuánto duró la excursión completa (incluyendo el viaje de ida y el de vuelta)?

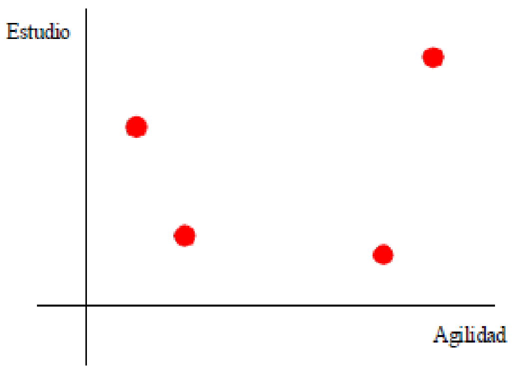
f) Indica cuál es la variable independiente y cuál la dependiente y en qué eje están representadas cada una.

g) Justifica si la gráfica corresponde a una función.

Razonamiento:

Dificultades:

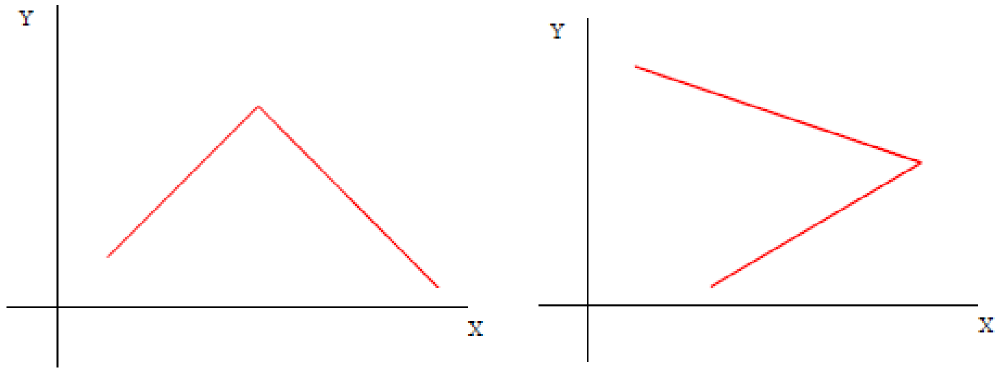
3.- Andrés saca buenas notas en Matemáticas, pero es bastante deficiente en Educación Física. Ana saca malas notas en Matemáticas, pero en Educación Física es muy buena. José saca malas notas en matemáticas y es bastante torpe. Sara es la mejor dela clase en ambas disciplinas. ¿Qué punto del diagrama cartesiano representa a cada alumno?



Razonamiento:

Dificultades:

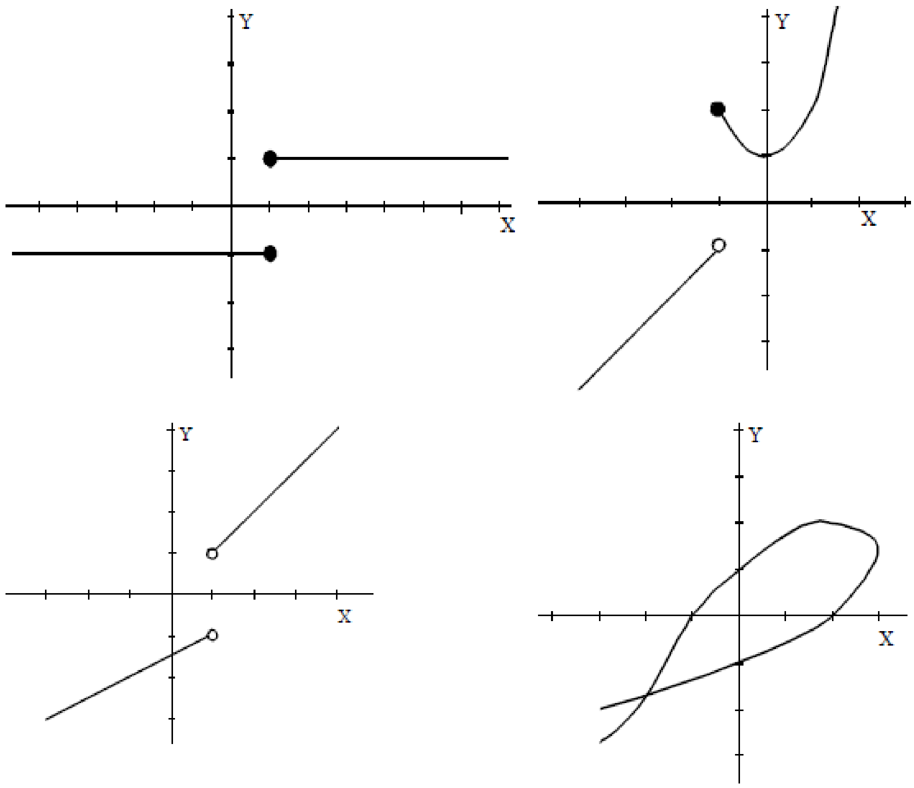
4.- Di cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función y cuál no, e indica el porqué:



Razonamiento:

Dificultades:

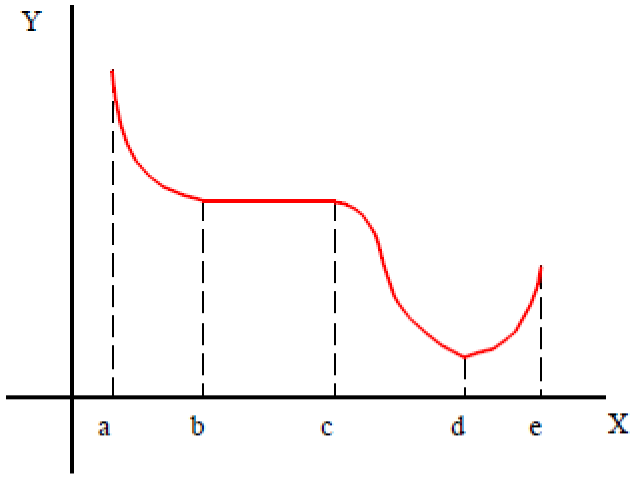
5.- De las siguientes gráficas, incida cuáles representan una función:



Razonamiento:

Dificultades:

6.- Señala en la siguiente gráfica los tramos donde la función es constante, donde es creciente y donde es decreciente:



Ahora pon por escrito la información anterior, es decir, los intervalos donde la función es constante, donde es creciente y donde es decreciente.

Razonamiento:

Dificultades:

7.- Pedro va a comprar naranjas al precio de 3 euros/kg.

a) Escribe la ecuación que relaciona la cantidad comprada x con el dinero abonado y.

Representa la función obtenida.

b) Indica cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.

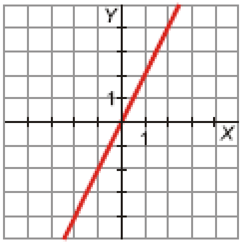
Razonamiento:

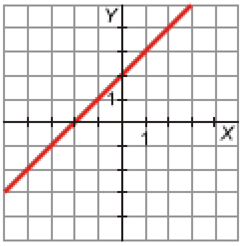
Dificultades:

8.- Representa gráficamente estas funciones e indica la pendiente de cada una:

$a)\ y = -3x + 2$ $\qquad$ $b)\ y = -3$ $\qquad$ $c)\ y = 2x$

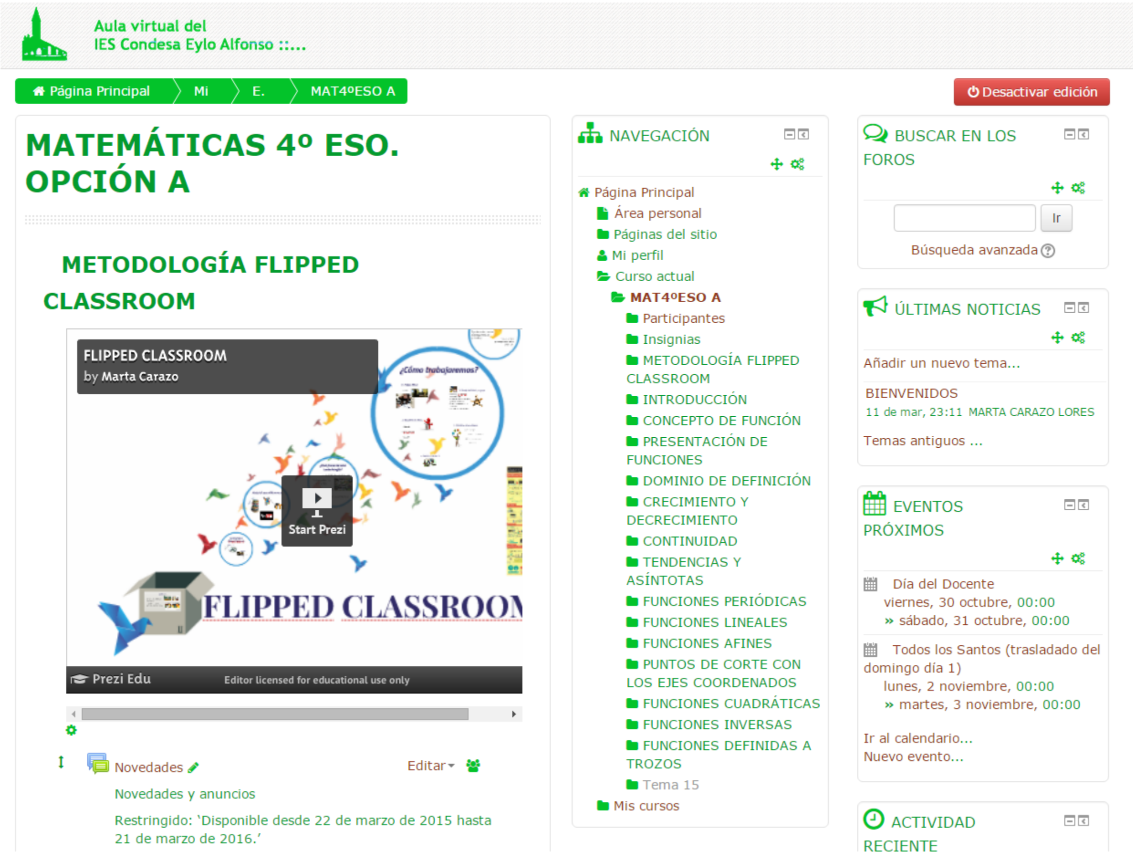
9.- Di cuál es la pendiente de cada una de estas rectas y escribe su ecuación:





10.- Señala cuál es la pendiente y el punto de corte con el eje vertical en la función: $y = 2x - 3$

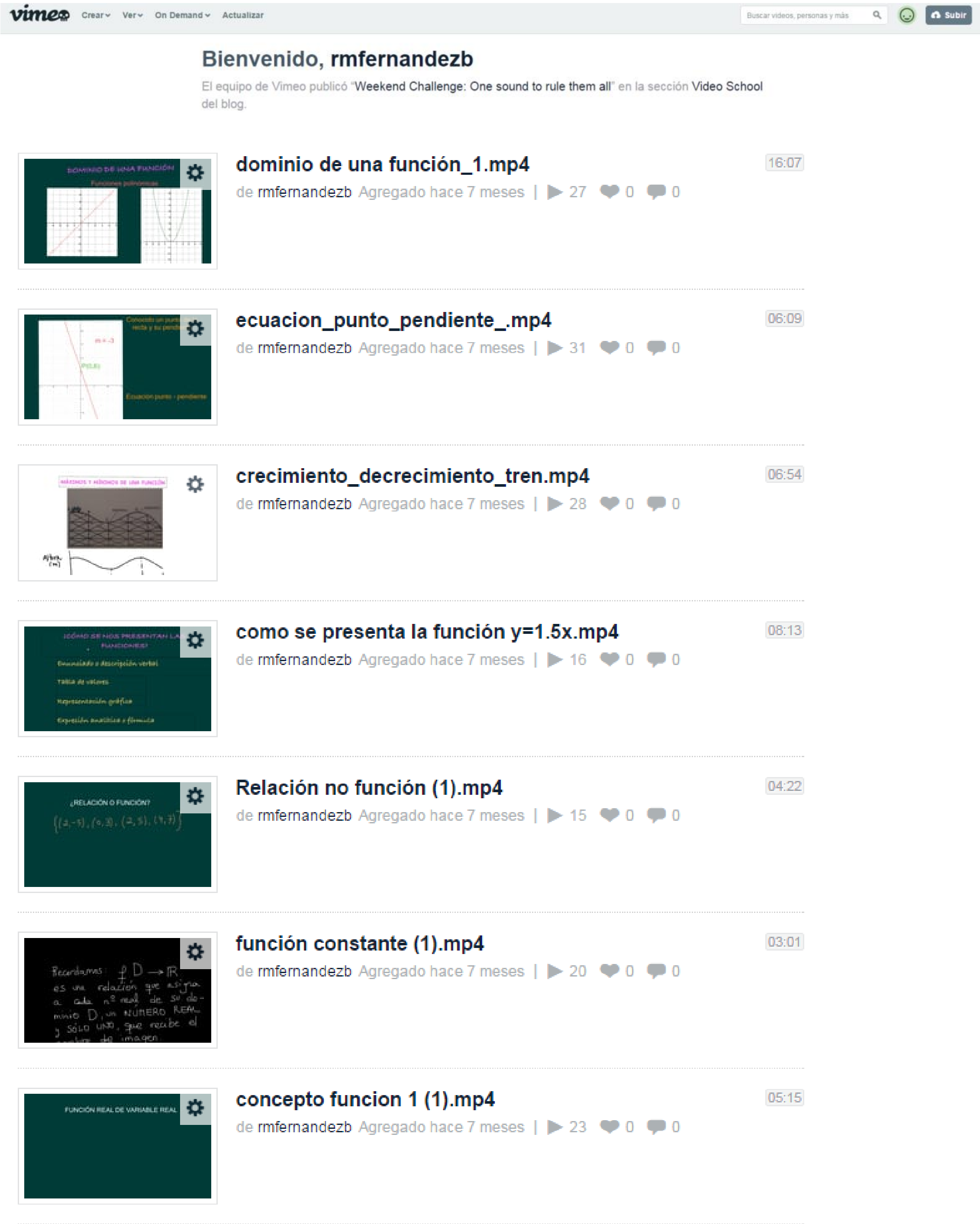
X.2.5 Esquema de la Plataforma Moodle del IES Condesa Eylo



X.1 *Figura 10.1*. Captura plataforma Moodle IES Recesvinto

X.2.6 Relación de vídeos elaborados para la experiencia del Ciclo Exploratorio

Se presenta, a modo de muestra, algunos de los vídeos elaborados durante el primer ciclo exploratorio y que fueron alojados en la plataforma Vimeo.


vimeo
Crear
Ver
On Demand
Actualizar
Subir
Bienvenido, rmfernandezb
El equipo de Vimeo publicó "Weekend Challenge: One sound to rule them all" en la sección Video School del blog.
dominio de una función_1.mp4
de rmfernandezb Agregado hace 7 meses | 27 0 0
16:07
ecuacion_punto_pendiente_.mp4
de rmfernandezb Agregado hace 7 meses | 31 0 0
06:09
crecimiento_decrecimiento_tren.mp4
de rmfernandezb Agregado hace 7 meses | 28 0 0
06:54
como se presenta la función y=1.5x.mp4
de rmfernandezb Agregado hace 7 meses | 16 0 0
08:13
Relación no función (1).mp4
de rmfernandezb Agregado hace 7 meses | 15 0 0
04:22
función constante (1).mp4
de rmfernandezb Agregado hace 7 meses | 20 0 0
03:01
concepto funcion 1 (1).mp4
de rmfernandezb Agregado hace 7 meses | 23 0 0
05:15

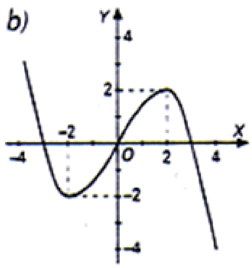
X.2 *Figura 10.2.* Captura plataforma Vimeo de vídeos elaborados

X.2.7 Trascripción diálogos del alumnado del IES Condesa Eylo

A continuación, se presenta la trascripción íntegra de los diálogos del alumnado en las sesiones de docencia correspondientes al primer ciclo de investigación

DIFICULTAD MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS

Ante el estudio de los máximos y mínimo de esta función el alumno *A1* considera que no hay máximo absoluto. La profesora pide al alumno que justifique su afirmación.



X.3 *Figura 10.3.* Función que no presenta máximo ni mínimo absoluto

P: *¿Y porque aquí no hay máximo absoluto?*

A1: *Porque llega hasta el infinito y no acabaría, entonces…no puedes calcular un máximo…No, no hay un punto final.*

P: *¿Un punto final?*[56]

A1: No tiene un fin[57]*, o sea no habría un máximo.*

P: Pero si hay unos puntos un poco singulares[58]*, ¿no?*

A1: Claro.

P: ¿Por qué esos puntos son especiales?

A1: Es el $\mathrm{x} = 2$

P: ¿Ese punto es especial?[59]

A1: (No contesta)

Otro alumno *A2: Porque es el máximo de un periodo.*

P: ¿Qué periodo?[60]

(Silencio)

P:¿Por qué has dicho la palabra periodo?

A2: De alguno

P: ¿De alguno?

Otro alumno *A3: No, no,…*

P: Podéis hablar…!Periodo!, no te entiendo

A2: De alguna secuencia

P: ¿De alguna secuencia?

(Silencio)

P: ¿Me la puedes señalar?

(Silencio)

P: Perdonad, yo no entiendo. ¿Vosotros lo entendéis?[61]

---

[56] La investigadora pregunta con la misma terminología que ha utilizado el alumno para hacerle reflexionar y que diferencie entre un valor máximo alcanzado por la función y lo que el alumno denomina "punto final".
[57] El alumno comprende que no hay un valor máximo finito alcanzable para la función por lo que no se puede hablar de un máximo.
[58] En los vídeos se presentó la definición de puntos singulares.
[59] Nuevamente la investigadora intenta que el alumno diferencie entre punto y valor.
[60] La investigadora no comprende la respuesta del alumno y le solicita que concrete a que periodo se refiere.
[61] La profesora siente que no comprende lo que el alumno le quiere trasmitir. A pesar de demandar información, se producen periodos de silencio demasiado largos y tensos, por lo que solicita la ayuda de otros alumnos; que curiosamente, si comprenden lo que quiere trasmitir el compañero.

A2: Si más o menos…

A1: Si se repitieran…en este caso no, porque llega hasta el infinito…pero si cortásemos todas en el dos que hiciesen la misma parábola, eh… pues acabaría siendo un periodo, y claro tendría un máximo y un mínimo, pero…o sea…o sea no…

P: ¿Pero, aquí veis algún periodo?

A2: No, aquí no. No se repite, si se repitieran ya sería el máximo pues ese porque llegarían todos igual. Serían iguales…(Titubeo)

P: Si, si, …Me parece curioso que introdujeseis el concepto de periodo cuando no lo hay, ¿vale? o ¿Si lo hay?[62]

A1: No, no lo hay.

A2: Es de un poco sentido común más o menos, pero no se sabe explicar muy bien[63]

P: No, pero para eso están las matemáticas para explicarlo y cuando se da una definición de un concepto, por ejemplo de lo que es un máximo, para que no haya lugar a dudas; intentamos dar una definición correcta y precisa. Entonces, estos puntos son un poco especiales ¿verdad? ¿Qué pasa en estos puntos? (silencio)

P: ¿Qué pasa en la función para $x = 2$*?*

A1: Qué en la gráfica es el punto más elevado ¿no?...o sea el máximo… (afirmación sin mucha seguridad)

P: ¿El máximo absoluto?

A1: No.

P: ¿Por qué no es absoluto?

A1: No, es que no sé explicarlo.

A2: Es relativamente más elevado.[64]

A1: ¡Claro!… !Eso es!…

P: Relativamente… ¿En qué nos fijamos para decir ese "relativo"?

A2: Primero, en ver primero si hay un máximo y un mínimo absoluto. Si no lo hay pues se mira cual es el punto máximo y el mínimo en la gráfica.

---

[62] La investigadora empieza a visualizar lo que la plantean los alumnos, pero manifiesta su dificultad de comprensión anterior porque su razonamiento sobre una periodicidad en la función no se manifiesta en el gráfico presentado.

[63] Este alumno encuentra "mucho sentido común" en los conceptos que estamos tratando, pero manifiesta que es muy difícil explicarlos. Por tanto, para él es más difícil la competencia lingüística-comunicativa, que la comprensión de los contenidos matemáticos.

[64] Este alumno muestra mayor grado de comprensión que el alumno A1.

A2: Básicamente, por descarte. Si infinito… no puede ser, entonces…

P: ¿Por qué te fijas en el $x = 2$ *y no en el* $x = 4$*?* (Silencio) *¿Por qué dices que en* $x = 2$ *hay un máximo relativo?*

A2: Porque es sobre el eje x*, entonces… hallamos…o sea…el máximo y el mínimo del eje* x *y el punto más alto en el eje* y*, de esta parte es, sin contar el absoluto porque no lo hay sería ese el* 2*, o sea el* 4 *no porque está más abajo y no sería el máximo y el mínimo tampoco podría ser porque hay otro punto más abajo todavía en el eje* x.

P: ¿Y no os habéis fijado en lo que pasa en sus alrededores? ¿Puede ser ese un criterio?[65]

A2: Hay una creciente y una decreciente.

P: Muy bien. ¿Qué hay creciente? ¿Por dónde está creciente?

A2: Creciente entre el mínimo y el máximo, y decreciente entre menos infinito y el mínimo y entre el máximo y más infinito.

P: Sin irnos tan lejos…, en este entorno alrededor de x=2 ¿Qué vemos?

A2: Decrece y crece la parábola…a la izquierda crece y a la derecha del punto decrece…

P: Crecimiento y después decrecimiento ¿Qué hay entonces?

A2: El punto más alto.

P: ¡Relativo! Al final, nos fijamos en el entorno, por eso se dice que en este punto se presenta un máximo porque en su entorno por la izquierda se crece y después por la derecha se decrece, es un tema de entornos ¿lo habéis entendido?

Los tres alumnos responden convencidos que sí.

A2: Es que profundidad tiene el valle y que altura tiene la montaña.[66]

P: ¡Me gusta el comentario que has hecho!. Me interesa saber dónde hay un valle y dónde una montaña, debo buscar su coordenada x *dónde se encuentre. Después miraremos las profundidades de todos los valles, y los pozos, y las altura de las montañas, si las hubiera.*[67]

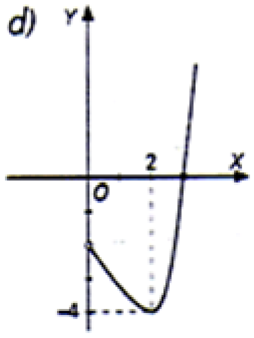
---

[65] La investigadora intenta guiarles hacia el análisis de la función en el entorno de un punto de estudio.
[66] Comparación muy ingeniosa de este alumno.
[67] La investigadora a modo de cierre, incorpora la comparativa que ha propuesto el alumno relativo a los mínimos y máximos de una función; además de reconocerle positivamente su aportación.

DIFICULTAD DE COMPRENDER LA POSIBILIDAD DE MÁXIMOS DE UNA FUNCIÓN CUANDO LA GRÁFICA SE ENCUENTRA POR DEBAJO DEL EJE DE ABSCISAS

El alumno *A4* tiene dudas sobre si en x=0 la función de la figura 10.4 presenta un máximo relativo.

A4: ¿El máximo relativo de esto es este punto[68] *…o no es?*



X.4 *Figura 10.4.* Función que presenta mínimo absoluto

P:¿Tú que crees?

A4: Qué no es.

P: ¿Por qué crees que no es?

A4: No es porque está por debajo de cero[69]*, pero aun así es el punto más alto de…*

P: ¿Cuándo está por debajo de cero no puede ser máximo?

N: Supongo,… no,… o sea, no en realidad si puede ser máximo pero está por debajo de cero y hay un máximo absoluto de este[70]*…*

P: Vamos a suponer este punto dibujado, ¿vale?[71] (Aunque $x = 0$ no pertenece al dominio, pero para intentar contestar al alumno supone que existe $f(0)$ y que la imagen es el valor que aparece en la gráfica en forma de punto vacío).

P: Tenemos esta gráfica, vamos a pensar en esta función, ¿Si?

A5: Es que no sé.

P: ¿Por qué tú preocupación? ¿Porque la función esté por debajo del cero?

---

[68]Lenguaje impreciso, "esto" es la función y el número en realidad es el valor x=0.

[69] El alumno de forma simplificada, quiere expresar que el valor de la función para $x = 0$, se encuentra entre los valores negativos.

[70] Ideas contradictorias, pero subyace que considera a los valores positivos de la imagen como máximos.

[71] La investigadora opta por considerar que $x = 0$ pertenezca al dominio de la función y por tanto, exista $f(0)$, para dar la posibilidad de que para $x = 0$ se presente un máximo. El hecho de "pintar" el hueco vacío correspondiente a la imagen de $x = 0$ para la función se hace para hacer reflexionar a la alumna sobre la afirmación: "Una función que está por debajo de cero no puede tener máximo"

A4: Es como si…o sea, sí que puede, porque aunque sea menor que cero puede tener máximo, pero no sé… a lo mejor…[72]

P: Imagínate que estás por debajo del nivel del mar, ¿dentro del mar no hay montaña? ¿Qué es lo más alto que está bajo el mar, no en la tierra de fuera?[73]

P: Yo quiero ver qué pasa en un entorno, ¡en este entorno! ¿Qué ocurre? (Silencio) *Me quedo con este cuadradito, con estos puntitos… ¿Qué pasa? ¿Cuál es el mayor valor que toma la función?* (Silencio) *¿Cómo lo intentaríais explicar eso?*

A5: ¿Qué es lo más alto que hay como en el espacio, o sea como en ese punto… alrededor de ese punto…

A6: ¿Este punto sería un máximo para el entorno del cero?

P: Si, porque es el punto más alto que hay…..alrededor… ¿Sería un máximo absoluto?

A5: Espera que tengo que pensar que es absoluto y que es relativo.[74]

P: ¿Qué diferencia hay entre relativo y absoluto? (Silencio) *¿Habría máximo absoluto en esta gráfica?* (Silencio). *No lo sé, os lo pregunto…*

A5: No.. Si…!Es verdad, es verdad! Es que se me olvida…Si hay infinito no hay máximo absoluto, pero… ¿Se podría poner como máximo el infinito?

P: ¿Tienes un punto que sería el mayor?[75]

A5: ¡Es que se me olvida![76].

P: ¿Qué quiere decir que una función crezca, crezca,….?

A5: Que no tiene un punto final.

P: Que puede haber una imagen mayor, aquello crece, crece, crece,…¿sí?

A5: ¿Se podría poner que el máximo es más infinito?[77]

P: ¡No!. (Rotundo)

A5: Pero es infinito.

P: No, porque no hay un máximo absoluto ¿Tienes un punto que es el mayor?

A5: Pues eso, hay un valor infinito.

---

[72] El alumno presenta un conflicto cognitivo, afirmando y negando a la vez.

[73] La investigadora intenta trasmitir al alumno que tenga la imagen mental del mar, el eje x suponemos que es la playa justo a nivel del mar y los valores negativos de la variable y los diferentes valores de la profundidad del mar, idea que introdujo el alumno *A2* en el diálogo anterior.

[74] Este comentario nos indica que las dificultades lingüísticas afectan a la comprensión matemática.

[75] La investigadora en vez de responder sigue proponiendo preguntas.

[76] En vez de admitir que no tiene adquirido el concepto, la alumna comenta *"que se la olvida"*.

[77] La alumna sigue con su empeño de decir que el máximo es infinito.

P: Siempre puede haber un valor mayor del que tú pienses.

A5: ¡Qué es muy difícil!

P: ¡Que no es tan difícil!

P: ¿Habéis visto el vídeo de GeoGebra? (Silencio) *¿Has visto el vídeo que hablaba de trazar una paralela?*

A5: Sí, no sé, no recuerdo.

P: Pues tenéis que volver a verlo[78]*. Os comento: Si trazo una paralela al eje de abscisas por la imagen de* $x = 0$*, tengo un máximo relativo porque me queda la gráfica por debajo, cerca de ese entorno, pero hay parte de la gráfica por arriba pero no cerca de ese trozo...en ese tramo Por eso, hay "cosas" que son locales, cerquita de un punto, y otras que son globales. O sea que en* $x = 0$ *habría un máximo relativo, pero como estaba abierto, no pertenece al dominio, entonces no hay ni máximo relativo ni absoluto, pero sí mínimo relativo, si se busca para x=2. ¿Habría un mínimo relativo?*

A5: Me he perdido otra vez…

P: Buscas en el dominio, el valor dónde visualmente en la gráfica la variable y es más pequeña que los valores de sus "vecinos", pero siempre el mínimo se busca en el eje x. (silencio) *¿Para qué* x*, su imagen alcanza el menor valor? Puedes buscar el punto de la gráfica y después, proyectar sobre el eje de abscisas, eso ocurre en x=2. (Silencio) ¿Me estáis entendiendo?*[79]

A5: No. Es mucho lio.[80]

P: ¿Por qué es mucho lío?

A5: Es muy complicado.

A3: Todas esas funciones son raras, porque tienen la x *abajo*

Aunque se expresa de esta manera, quiere decir que las imágenes de la función son valores negativos, manifestando confusión entre dominio y recorrido.

PROBLEMAS CON EL LENGUAJE MATEMÁTICO

FUNCIÓN LINEAL

---

[78] La investigadora intenta que los alumnos usen los materiales audiovisuales generados para poder ser visualizados y consultados todas las veces que lo consideren necesario.

[79] La conversación unidireccional hace pensar a la investigadora que el alumno no está siguiendo la explicación.

[80] El alumno ha entrado en un bucle de rechazo y sólo se limita a verbalizar que es muy complicado, que es muy difícil y que es mucho lío. Llegados a este punto se optó por cambiar de actividad para facilitar el desbloqueo.

P: ¿Qué tipo de función es la representada por esta gráfica?

A6: Es una función lineal porque pasa por el centro.

P: ¿Cuál es el centro?[81] (Silencio) *¿Qué quieres decir con el centro?* (Silencio) *¿El centro de la hoja?*

A6: ¡No!, me refiero a ese punto.(Señalando el origen de coordenadas).

P: ¿Recuerdas cuál es la denominación más exacta de ese punto?

A7: ¿El centro de coordenadas?.

A8: El origen de coordenadas, el punto (0,0).

P: Efectivamente, eso es más correcto. ¿Os dais cuenta de la importancia del lenguaje?[82]

PROPORCIONALIDAD

Se pretende relacionar la representación de funciones lineales con la proporcionalidad estudiada en el Bloque de Número. Se comienza con una lluvia de ideas para tener una visión de los conocimientos previos de los alumnos.

P: ¿Qué quiere decir que dos magnitudes son proporcionales?

A8: Que son equivalentes.

P: ¿Equivalentes a qué?

A8: Qué tiene la misma distancia de un lado y de otro. Son proporcionales si están a la misma distancia..

P: ¿Nos lo puedes explicar? ¿A qué distancias te refieres? (Silencio)

P: Pon un ejemplo (Silencio) *Decid o buscad algo que sea proporcional.*[83]

A8: Un pentágono…Proporcionalidad directa[84]

A5: A mí se recuerda a lo de regla de tres

A3: A mí a lo de a más más…[85]

P: ¿Os acordáis de algún ejemplo?

A5: Lo de los pintores y eso…Si tres obreros hacen la tarea en 5 horas, ¿Cuánto tardarán 8 obreros en hacerlo?

---

[81] La investigadora intuye a que se refiere el alumno pero le pide que lo especifique.
[82] La investigadora les hizo ver la importancia de denominar correctamente los elementos y conceptos matemáticos para potenciar la comprensión de las propiedades y relaciones entre los mismos.
[83] Ante la dificultad de definir la proporcionalidad se les propone que pongan ejemplos.
[84] No especifica a que magnitudes se refiere.
[85] Error didáctico.

A3: ¡Esa no nos vale!, es inversa..(Se produce revuelo entre el alumnado)

A5: ¡Qué me he confundido!

P: Intentad buscar otro ejemplo, que hay muchos…

A3: Fábricas que hacen productos. Si una fábrica produce 50 automóviles, 30 fábricas ¿cuántos automóviles construirán?

P: ¿Y cero fábricas?

A3: Cero coches

P: Luego cuando represente esos datos en una gráfica, pasará por el punto (0,0). *Se trataría de una función lineal*[86].

Confusión de las magnitudes con las unidades

Se continúa presentando un problema de proporcionalidad y se pretende ver su relación con su función de proporcionalidad asociada.

La investigadora plantea el siguiente problema:

P: Un coche en 2 h recorre 240 Km. ¿Cuánto recorrerá en 4 horas? ¿Sabríais indicarme su expresión funcional? (Silencio) *¿Qué es una magnitud?*

A1: ¿La velocidad es una magnitud?[87]

P: La magnitud es lo que estudio, lo que puedo medir… después la unidad elegida dependerá del problema.

*A5: ¿*Km/h *es la magnitud?*

P: No, la magnitud es la velocidad. En las gráficas represento las magnitudes. Es interesante reflexionar sobre estos temas. ¿Se podría resolver este problema representándolo gráficamente?[88] (Silencio) *¿Cuál sería la variable independiente?*

Ante el revuelo que se produce se recoge, a mano alzada, las diferentes opciones: 4 optan por el tiempo, 7 por el espacio y 8 abstenciones. Los argumentos que dieron para la defensa de las diferentes posibilidades fueron:

A3: Es el tiempo el independiente, porque el tiempo no va a cambiar.

A1: No, si pongo el piloto automático, la velocidad tampoco cambia. Es el espacio, según el espacio que recorro, aumento el tiempo.

---

[86] Con este ejemplo se ha concretado en una situación de la vida cotidiana la abstracción de que una función lineal pasa por el origen de coordenadas.
[87] No se tiene adquirido el concepto básico de magnitud, fundamental para varias materias del ámbito científico- tecnológico.
[88] Se pretende relacionar las resoluciones gráficas con las resoluciones analíticas para que no sean consideradas por el alumno como opciones inconexas.

Gran murmullo generalizado pero se estaba generando un interesante debate. Ante esa situación la investigadora plantea la siguiente pregunta:

P: ¿Alguna otra posibilidad? ¿Podrían ser válidas las dos? (Silencio) *¿Alguien ha pensado que nos pueden valer las dos posibilidades?*

Todos responden que no.

P: Tengo dos magnitudes directamente proporciones, espacio y tiempo, y la relación la represento en una gráfica. Si recorro el doble de espacio, tardo el doble de tiempo, ¿cierto?; pero también, por otro lado, si se duplica el tiempo, también se duplica el espacio. Suponiendo que va con velocidad constante, claro. Según las situaciones concretas, habréis visto que se elige una u otra posibilidad.

A1: Pues yo he visto siempre en las gráficas como variable independiente el tiempo.

P: Bien es cierto, que en ciertos estudios se toma el tiempo como variable independiente, pero no siempre…

A5: O sea, que depende de la situación.

P: En cada situación se puede elegir una u otra opción, pero las dos posibilidades serían válidas.

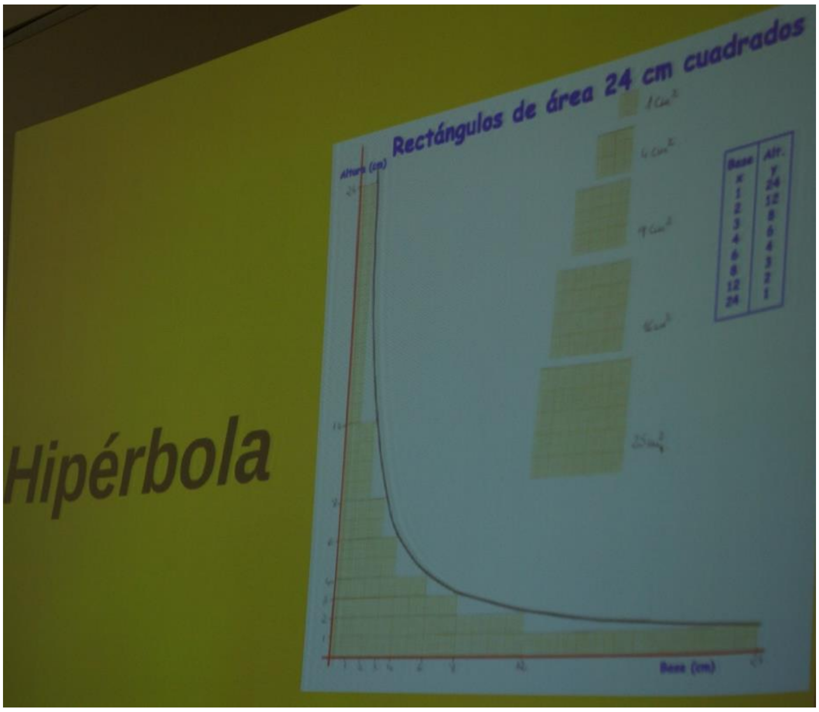
A5: ¡Ah![89]

FUNCIONES INVERSAS

Con esta actividad se pretende relacionar los bloques de contenido relativos a geometría, álgebra y funciones.

Se presenta al alumnado la siguiente actividad. Consideramos que los cuadrados de la trama de sus cuadernos tienen área $1\, u^2$. Se trata de ir reordenando *24* cuadraditos para ir formando diferentes rectángulos, pudiendo variar la orientación y haciendo coincidir un vértice de dicho rectángulo con el origen de coordenadas. Al ir superponiendo todos los rectángulos así formados sobre un plano cartesiano y fijándonos en el vértice opuesto al que coincide con el eje de coordenadas, se va visualizando la gráfica de la hipérbola; de este modo les introducimos en la comprensión de las funciones inversas. Se trata, por tanto, de la explicación de la función inversa $y = \frac{24}{x}$ a partir de la situación de buscar los rectángulos de área $24\, u^2$. A modo de apoyo, se proyectó la imagen que se muestra en la figura 10.5.

[89] Inicialmente ningún alumno contemplaba la posibilidad de que una magnitud pudiese ser variable independiente y dependiente, dependiendo de la situación. Al reflexionar en grupo, han avanzado en su comprensión respecto al concepto de función.



X.5 *Figura 10.5.* Relación entre función inversa y áreas de rectángulos

P: ¿Podría dibujar este? (se construye un rectángulo 1x24)

Si, responden unos pocos alumnos.

Ante otra colocación

P: ¿Podría dibujar esto? (se construye un rectángulo 2x12)

Si, la mayoría,

A5: Sí, pero…Si lo ha preguntado tres veces, tiene trampa

P: ¡Buena teoría! Cuando algo te lo pregunta un profesor tantas veces es que tiene trampa. (Se produce sonrisas generalizadas)

P: Dibujadme un rectángulo de lados -4 y -6, es decir, base -4 unidades y altura -6 unidades de longitud

A1: Si estamos dibujando y midiendo no se puede.

P: Si tuviéramos reglas negativas, podríamos ¿no? pero… No hay reglas negativas

A5: Se lo dejo a deber,…

Varios alumnos: ¡No se puede, no se puede,..!

P: El enunciado es importante a la hora de trabajar con funciones. Si en vez de ese enunciado yo hubiera planteado buscar los números cuyo producto de 24. ¿Es lo mismo?

A3: Tenemos que hacer los mismos cálculos

P: ¿Es lo mismo? (Silencio) ¿Es lo mismo buscar las dimensiones de rectángulos que tengan 24 unidades cuadradas de área que buscar las parejas de números cuyo producto es 24? ¿Es el mismo enunciado?

A5: Sí, pero dicho de otra manera.

A1: No, no, en el segundo podrían ser negativos, digo yo,…

En la pizarra se ponen dos tablas de doble entrada para representar las dos situaciones.

Los alumnos van diciendo parejas de números que multiplicados dan 24, 8 x3, 6 x4, todos positivos… hasta que un alumno dice la pareja -12 y -2. Ante esa respuesta pregunta la profesora

P: Muy bien, -12 por -2, su producto es 24; pero, ¿se podría dibujar el rectángulo de esas dimensiones?.

A1: En el segundo caso dibujaríamos más puntos en el plano que en el primer caso. Dibujaríamos esta parte o esta rama.(Se señala la parte cuyo dominio son los números reales negativos) ¿Cuál sería el dominio y recorrido de esas dos situaciones? Vamos a aplicar todo lo que hemos estudiado de dominio y recorrido en estos dos casos particulares. Es decir, buscar el dominio y recorrido de estas dos funciones.

Dudas…

A5: ¿Puede ser un dominio y un recorrido para cada rectángulo?[90]

P: Cada posible rectángulo está representado por un punto, o sea,… ¿No? Vamos a ver, y ese punto entonces ¿qué representa?

(Silencio)

P: ¿Qué son las longitudes del rectángulo? ¿Esos valores del rectángulo qué son de la función?

Las dimensiones del rectángulo, ¿qué son de la función?

A5: Cada uno una cosa, uno dominio y otro recorrido.

A2: Los puntos que tienes que dibujar para la función

P: Son las coordenadas del punto que representas en el plano para representar gráficamente la función, no el dominio global ¿no?

A5: Ah!!! ¿Se busca el dominio y el recorrido de la función?[91]

---

[90] Con esta pregunta el alumno manifiesta que no comprende el concepto de dominio y recorrido de la función.

A2: Eso, eso,… lo que tiene que medir el rectángulo.

P: Una vez que fijas el valor del lado, que podemos considerar la variable independiente, el otro valor que buscar para que el producto te de 24, ese es el valor dependiente, ¿Si?

A2: Eso, lo que dibujas.

Búscalo

A1: Tiene que ser por narices… infinito

A partir de las gráficas representadas, se estudió por parejas el dominio y el recorrido de dichas funciones.

RECORDANDO EL CONCEPTO DE FRACCIÓN PARA FACILITAR LA COMPRENSIÓN DE CALCULAR EL DOMINIO

Se trata de encontrar el dominio definición de la función racional $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Un pequeño sector del alumnado ve claro que $x = 2$ no pertenece al dominio *"porque no lo puedes calcular, no se puede,…",* pero no son capaces de formalizarlo mejor. Ante la dificultad de algunos alumnos que no comprenden por qué debo buscar los valores que anulan el denominador, se retoma reflexionar sobre el concepto de fracción.

P: ¿Qué es una fracción? ¿Os acordáis cómo se puede definir una fracción? Eso es de primaria ¿Eh?

A3: Un número dividido entre otro.

A1: Una división.

A5: Es a *partido de* b.

P: ¿Cómo llamábamos a a*?*

A3: Dividendo.

A5: Numerador, mejor numerador,…

P: ¿Y cómo llamábamos a b*?*

A5: Denominador.

[91] Después de la puesta en común de todas las opiniones, el alumno citado muestra alegría por comprender los conceptos que nos ocupan.

P: ¿Qué representan? (Murmullo generalizado) *Partes en las que divido una unidad y el numerador la partes que selecciono, que tomo, que cojo,…(Ante el ruido, la investigadora solicitó silencio)…¡Haced el favor de mantener silencio!*[92]

P: ¿Tendría sentido dividir 2 entre 0?

A5: No se puede hacer dos "ceroavos". Está mal dicho.[93]

A1: Si no hay, no puedo coger. No lo puedo calcular.

P: ¿Lo entendéis así mejor?

A3: No puedo dividir entre nada,… ese cociente no se puede hacer.

P: El concepto de reparto no tiene sentido, ni como razón de proporcionalidad, ni operador, ni como definición de fracción… Os tiene que quedar claro en la mente[94].

Otro alumno lo intento calcular con la calculadora y comentó que aparecía error.[95]

Se continúa dando valores a la variable independiente y con la calculadora se van escribiendo los resultados en el encerado.

ASÍNTOTA

Tras el anterior debate se argumentó que $x = 2$ no pertenece al dominio de definición de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$. A continuación se pretende avanzar hacia la comprensión del concepto de asíntota. La idea que se les trasmite es la del acercamiento hacia el valor $x = 2$, tanto por la derecha como por la izquierda. Se comenzará con una aproximación por la izquierda siguiendo el orden natural de la recta real, posteriormente se aplicarán aproximaciones por la derecha. Todo ello como actividad facilitadora del concepto de límite lateral, que se formalizaría en etapas educativas posteriores. La actividad en el aula consiste en demandar al alumnado un número que se aproxime más a 2 que el valor dado por el compañero anteriormente, e ir calculando la imagen de dicho valor para la función que estudiamos.

---

[92] Es la única ocasión en la que la investigadora recriminó a los alumnos debido a la falta de atención. A cierto sector del alumnado, hablar sobre fracciones les parecía poco atrayente, pero valorando el diálogo se puede considerar que no dominan en profundidad el concepto de fracción.
[93] El alumno centra su razonamiento en que no se puede decir como una imposición del lenguaje no como una incoherencia matemática.
[94] Se intenta consolidar que la división entre cero no tiene sentido ni como operador, ni como relación de proporcionalidad, ni reparto y la necesidad de que quede afianzado en el alumnado para sucesivas aplicaciones.
[95] Las TIC facilitan la comprobación de ciertos resultados.

P: Os dejamos calculadoras, vais a ir calculando las imágenes de los números que se van aproximando a 2 *por números más pequeños que* 2[96]*. Decidme un número entre 1 y 2.*

A5: Dos y medio[97]. (Risas de los compañeros).

P: ¡Muy bien A5*!* (con ironía la profesora, aunque el alumno no respondió por hacer una broma)

A5: 1,5

P: Ahora entre 1,5 *y* 2.

A3: 1,2[98]

P: ¿Seguro? (La investigadora está percibiendo que tienen graves dificultades en el dominio del orden de los números racionales).

A1: 1,7 por ejemplo.

P: Me voy acercando al dos, vamos dando saltos …¿ahora entre 1,7 y 2?

A3: 1,99

P: Id haciendo las imágenes con la calculadora

A2: Pero, ¿Cuántos hay? ¿De cuántos tengo que calcular?[99]

A5: A A2 *le está matando que aparezcan infinitos números por ahí* (ironiza otro alumno)[100].

A2: El infinito no existe.[101]

La investigadora opta por no contestar a la afirmación del alumno *A2* y decide seguir con la actividad programada.

P: Id situando los puntos de la función en el plano para ir intuyendo cómo es la gráfica de la función

Varios alumnos tienen un ritmo menor que el resto de la clase y comentan *"espera, espera…que no me da tiempo";* la mayoría de ellos interpreta las dos coordenadas de los puntos como valores de la función y gráficamente lo representan correctamente en el plano cartesiano. Todavía no se ha nombrado la palabra asíntota, para favorecer una metodología constructivista.

[96] Introducción al límite lateral izquierdo.
[97] Dificultades en la ordenación de números racionales.
[98] Nuevamente la dificultad anterior en un alumno diferente.
[99] Este alumno muestra angustia e inseguridad, necesita saber cuándo finaliza el proceso.
[100] Su compañero bromea con su compañero en relación al infinito.
[101] Se produce cierta tensión entre los dos compañeros, pero la investigadora opta por comenzar con el límite lateral derecho.

P: Ahora me voy a acercar por el otro lado, por la derecha, entre el 2 y el 3[102]

A5: Ahora sí, el 2,5 (responde sonriendo, nuevamente el alumno A5 que en la pregunta anterior respondió erróneamente)

P: Bien, ¿Más cerca?

A1: 2.3

P: Otro.

Los alumnos fueron diciendo sucesivamente 2.1, 2.001, 2.00001… y calculando sus correspondientes imágenes.

P: Dad más valores, más cerca, más cerca,…!Pues venga, calculando!

A5: ¡Si hombre! ¿Ya con estos ya vale?…[103]

P: Muy bien, pues el comportamiento de esta función cerca de $x = 2$ *se dice que es una tendencia asintótica; y que presenta una asíntota que tiene de ecuación* $x = 2$.

PROBLEMAS EN REPRESENTAR LA GRÁFICA SOLO EN LOS PUNTOS DEL DOMINIO

Se trata de una función definida sólo para los números negativos, para el alumno *A5* este hecho le genera dudas sobre la necesidad de calcular las imágenes entre cero y dos. Él mismo se auto responde, pero pide insistentemente la confirmación por parte de la investigadora.

A5: Solo tengo que hacer esta parte (refiriéndose a los números negativos), *o también tengo que darle valores en el* 1 *y el* 2, *porque si me tengo que fijar en menos infinito hasta cero, solo tengo que digamos…. O sea, por ejemplo, ¡darle muchos negativos hasta cero! y luego ya no seguir dándole valores positivos… que sí tendría que dar más valores a esto, a ver cómo sigue la función…Digamos, por ejemplo, y si tendría que dar algún valor positivo…*

P: ¿Tú crees que tendrías que darlo?

A5: Yo creo que no, por lo que pone aquí yo creo que no…[104]

P: Porque si sólo está definida desde menos infinito hasta cero, ¿tendría sentido dar valores mayores que cero?[105]

---

[102] Introducción al concepto de límite lateral derecho.
[103] Ciertos alumnos muestran cansancio ante este proceso reiterativo.
[104] Alumno muy inseguro y aunque verbaliza su creencia no tiene total seguridad en sus afirmaciones.
[105] La profesora no contesta al alumno, se limita a reformularle la pregunta para que sea el mismo el que intente encontrar la solución a su problema.

A5: No

(Silencio)

P: Claro.

A5: Entonces este también estaría bien ¿no? Hasta el cero ¿no? Sólo…

P: Claro

A5: Ah, vale

P: Muy bien

El alumno A5 se muestra inseguro ante las tareas que se le proponen en el aula.

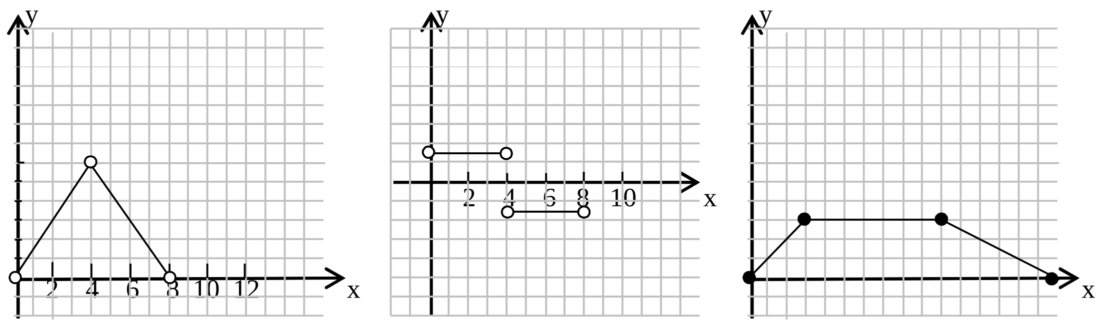
FUNCIONES PLANAS

En este ejercicio se deben relacionar las expresiones de dos funciones definidas a trozos, con tres gráficas diferentes representadas en un plano; hay funciones constantes, lineales y afines. Se pide al alumno que razone sobre la elección.

a) $f(x)=\begin{cases} 3/2 & \text{si } x\in(0,4) \\ -3/2 & \text{si } x\in(4,8) \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} x, & \text{si } 0\le x\le 3 \\ 3, & \text{si } 3\le x\le 10 \\ \frac{-1}{2}x, & \text{si } 10\le x\le 16 \end{cases}$

1 2 3



X.6 *Figura 10.6.* Ejemplos funciones definidas a trozos

A5: Yo creo que cuando aparece la x *hay inclinación*[106]*. Porque tiene tres partes, los números coinciden,… Como no tiene* x*, las fracciones, pues… no tiene pendiente. Esa función es plana.*

P: ¿Cómo se llaman esas "funciones planas"? (Silencio) *¿Recuerdas?*

A5: No

[106] No tiene adquirido el concepto de pendiente de una recta, pero relaciona la inclinación de la recta con la aparición de la variable x, pero no lo asocia con el coeficiente que acompaña a x.

P: Se llaman funciones constantes, ¿sabes por qué?

A5: Porque siguen la misma dirección[107]

P: ¿Qué ves en el intervalo (4,8)?

A5: El intervalo está abierto.

P: Eso no es criterio decisorio.

A5: Que no tiene x la fracción, entonces es constante.

P: Está muy bien, has razonado muy bien.

PROBLEMA DE TOMAR DECIMALES

La problemática se presenta al querer representar una función $f(x) = \frac{1}{x-3}$, el alumno *A9* dejaba sin representar los intervalos [2,3) y (3,4], porque nunca ha calculado las imágenes de puntos decimales para una función y duda cual o cuales elegir.

A3: ¿Qué si tengo que coger decimales?

P: ¿Decimales dónde?

A3: De entre 2 y 3, cuando se anula en el 3

P: ¿Tienes valores enteros entre 2 y 3?

A3: No

P: Porque yo me voy a ir acercando y entonces necesito saber[108]*… y la función es continua por la derecha ¿no?, tengo que acercarme dando valores y la tabla de valores lo que hace es darme puntos concretos.*(Silencio del alumno)

P: ¿Entre dos y tres tienes números enteros?[109]

A3: No

P: Pero se necesita dar valores ¿no? en forma de fracciones o decimales, te puedes ayudar de la calculadora… ¿Tú qué harías si no?

A3: En ese momento no puedo coger los puntos que quiera, ¿no? tengo que coger decimales… decimales,

P: ¿Qué puntos querías coger tú?

---

[107] Error de considerar que las únicas rectas que tienen la misma dirección son las paralelas al eje de abscisas. No se tiene adquirido que toda recta mantiene una dirección común, fijada por un vector director común. La investigadora decide continuar con el ejercicio.

[108] Incertidumbre de qué decimal o decimales del dominio elegir.

[109] La investigadora le repite la misma pregunta para que sea el propio alumno el que justifique la necesidad de utilizar números decimales entre 2 y 3 para saber cómo se comporta la función.

A3: -4,-2… 8 por ejemplo…

P: ¿Tú querías hacer sólo imágenes de enteros?

A3: Claro[110]

P: Pero si no hay enteros entre dos enteros, ¿Qué harías tú?

A3: No sé … es que luego me quedaría raro…

P: ¿Raro es que te quedaría sin dibujar?[111]

A3: Representado me quedaría mal, me quedaría mal, por eso pregunto

P: ¿Tú crees que ese hueco había que rellenarlo o no?[112]

A3: Mi duda, es porqué tengo que coger decimales, decimales

A1: Para rellenar los huecos esos que nos quedan

P: El 3 no lo puedes dar, pero ¿qué números se te ocurriría dar? (Silencio) *¡Pues próximos del que se anula! Tienes infinitos, coge los que quieras…*

A3: Ah!!!! Vale!!! Entre ese y ese, el que se anula, aproximados de los que se anulan sólo.

A1: ¿Entre 3 y 4 habría que hacer lo mismo no?

P: Cierto, se actuaría del mismo modo, pero en ese caso acercándonos por la derecha y tomando números decimales entre 3 y 4. Muy bien.

DEBATE DEL ALUMNADO EN TORNO AL INFINITO

Gran debate surgido en clase en torno a la comprensión del infinito.

A5: Por mucho espacio que tengas, va a llegar un momento en que no se pueda dividir más, porque… Decís que siempre hay algo más pequeño pero…no se puede, no va a quedar espacio. No va a quedar casi…[113]

A6: Coge la calculadora y divide y divide… que no se acaba. Si es infinito no se acaba[114].

---

[110] La problemática se presenta porque este alumno nunca ha calculado las imágenes de puntos decimales para una función.

[111] Ante el adjetivo "raro", la investigadora solicita que le clarifique dicha denominación.

[112] Es un avance que este alumno quiera buscar la gráfica de la función entre 2 y 3 porque muchos alumnos directamente no representan en la gráfica y aparecería como que (2,3) no pertenece al dominio de la función, y análogo ocurría entre intervalos (3,4).

[113] Problemática de dividir una longitud por la mitad sucesivamente, llegará un momento, según palabras del alumno que *"no va a quedar casi"*.

A1: Puedes hacer grupos de 100, 100, más 100… pero puedes hacer 101.[115]

A5: Cada vez más pequeño, más pequeño, pero el espacio no es infinito.[116]

A1: Sí, sí que lo es…

A5: No, que no es infinito.

A1: Si es infinito a lo grande y es infinito a lo pequeño, pero lo que pasa es que nuestra capacidad de imaginar eso es muy pequeña.[117]

A2: Pero si yo ahora este espacio lo veo con una lupa que parezca que es este espacio, entonces si [118]

A5: Vale pero,.. aunque,… pero... si lo sigo juntando…

A2: Entonces tomo una lupa más grande, vuelve a ser ese espacio…

P: Pensad históricamente que se pensaba que el átomo era una parte entera, que no se podía dividir…

EXPLICACIÓN DEL CONCEPTO DE ASÍNTOTA

El alumno A3 conecta las asíntotas con los programas de diseño gráfico.

A3: Pues que nunca se va a juntar la asíntota, o sea,…es que yo lo veo también como los programas de diseño por ordenador de piezas[119] *y todo eso, que son vectoriales, tú puedes ampliar, ampliar, ampliar y…no va a cambiar el grosor y de una asíntota nunca vas a ver el final*[120]*... ¿no?*

P: ¿Cómo se lo intentarías explicar a alguien que no entiende lo que es una asíntota?

A3: Pues que la función la puedes poner infinitos números, pero que o sea, que se juntan en infinito, pero como el infinito no acaba pues nunca llegan a juntarse… se aproximan muchísimo pero no llega a tocar la asíntota[121]

PROBLEMAS PARA FORMALIZAR QUE UNA FUNCIÓN ES DECRECIENTE EN TODO EL DOMINIO. El caso de la función inversa.

---

[114] El alumno *A1* entiende el concepto del infinito como el proceso infinito de dividir entre un número con la calculadora sin fin, es decir, como un proceso que se puede repetir indefinidamente.

[115] Este alumno interpreta el infinito como la infinidad de posibilidades de reagrupamiento de los números.

[116] Paradoja de una iteración infinita sobre un espacio finito presente en la historia de la humanidad.

[117] Dualidad razonamiento e imaginación.

[118] Buena idea lo de incorporar la herramienta *"lupa"* para *"comprender"* el concepto de infinito.

[119] Relaciona las funciones con los programas de diseño gráfico.

[120] Infinito definido como *"no llegar al final".*

[121] Nuevamente aparece al afirmación de que la asíntota no toca a la gráfica.

A5 plantea dudas ante el estudio global del crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 1/x$. En su esquema mental necesita fijar intervalos sobre los que indicar si la función es creciente o decreciente. Los alumnos *A1* y *A3* tienen muy claros los conceptos y le van contestando a las cuestiones que el alumno *A5* plantea.

A5: ¿Tengo que dar valores?[122]

P: No entiendo bien tu pregunta.

A5: No se puede, ¿no?

P: ¿Para qué quieres valores?

A5: Para la decreciente.

P: ¿Para ver que la hipérbola es decreciente?... ¿Globalmente no lo ves?

A5: Pero no hay que poner siempre valores en plan,… crece de no sé dónde a no sé dónde….

A1: ¡Es que no crece!

A5: Ya bueno, decrece de no sé dónde a no sé dónde…

A3: ¡Es que decrece siempre!

A: Entonces cuando decrece siempre ¿no se ponen valores?[123]

P: Sí, pero decrece en todo su dominio, en todos los números reales, salvo el cero que no pertenece al dominio. Si os parece más sencillo poner el intervalo ponlo, decreciente de $(-\infty, 0)U(0, +\infty) o\ \mathbb{R} - \{0\}$.

El alumno no se muestra totalmente convencido. Ante esta dificultad, se retoma la situación que se explicó en el estadio semiótico en el que se presentaba a una persona que caminaba sobre la gráfica avanzando siempre según el avance natural de la recta real, hacia la derecha, para que se visualizasen los intervalos de crecimiento o decrecimiento, según los ascensos o descensos, respectivamente.

P: ¿Cómo iría el hombre caminando sobre la gráfica siempre?

A5: ¿Pero aquí?.. (Señala la asíntota).

A7: Imagínate que pasa por un "agujero negro"[124] *y aparece de nuevo aquí arriba.*

P: Recordamos, ¿Qué era una función decreciente? (Silencio) *¿Cuándo una función es decreciente?*[125] *¡Venga!, ¿Cómo era una función era decreciente*

---

[122] Es frecuente en el alumnado que presenten una pregunta al profesor sin situársela en contexto por lo que el docente no tiene la información necesaria para responder.
[123] *"Poner valores"* ser refiere a concretar el (o los intervalos) para estudiar la monotonía de la función.
[124] Llama *"agujero negro"* a la discontinuidad de salto infinito.

A1: Cuando va para abajo.

P: Intentad formalizar un poquito más, eso de "cuándo va para abajo"…

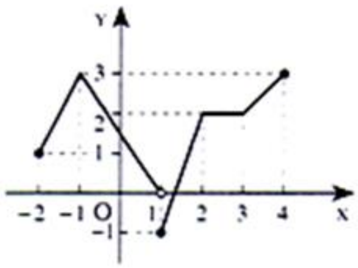
A1: Para valores de x *más grandes, los valores de* y *son más pequeños*

P: Eso es más formal que "lo de bajar". Cuando avanzan los valores de x, los valores de y se hacen más pequeños. ¿Se entiende el decrecimiento?

A5: Si.

CONFUSIÓN DE CONCEPTOS DE VALORES Y TROZOS EN UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

Ante una función definida a trozos, figura 10.7, cierto alumno no la considera función.



X.7 *Figura 10.7.* Función discontinua definida a trozos

A12: No puede ser, o sea tiene que ser uno, sólo uno de ellos, porque esta función tiene 5 valores.

P: ¿Dónde hay 5 valores?

A12: Aquí tiene 2, y otros 3 más. (Confunde valores con trozos)

P: Eso que señalas son intervalos dónde la función tiene diferente expresión analítica, por eso se denomina "función a trozos".

A12: Pero se empieza a doblar, a torcer dónde cambia de dirección, por diferentes valores, esos valores que se representan en las funciones…

P: ¿Cuál es el problema?[126]

A12: No sé.

P: ¿Una función tú crees que no puede tener gráficos diferentes?

---

[125] A la pregunta ¿qué es una función decreciente? no contesta nadie, sin embargo a ¿Cuándo se tiene una función decreciente? Si responden.
[126] La investigadora no comprendía en profundidad lo que comentaba el alumno.

A12: Es que en algunos datos coinciden y en otros no[127].

P: Porque algunos trozos están unidos, la imagen tiene el mismo valor aunque las expresiones funcionales sean distintas, pero en otros no. (Silencio). *El problema sería si tuviéramos dos imágenes para un mismo valor, pero no es el caso.*

A12: Es que hay inclinación diferente[128] *y salta.*[129]

P: Es continua en algunos trozos, pero no globalmente.

MÉTODO PARA DIBUJAR FUNCIONES A TROZOS

En las funciones definidas a trozos, la dificultad está en dibujar la gráfica próxima a los extremos de los intervalos abiertos. Para facilitar la representación gráfica, se presentó la idea de buscar la imagen de los puntos frontera, según la expresión de los dos intervalos próximos, y dibujar un círculo vacío la imagen correspondiente al intervalo que no corresponda, pero asegurar que sí dibujen los valores próximos.

P: ¿Qué te parece el método que ayer se comentó en clase para dibujar las funciones a trozos?

A2: Pues me gusta, porque he podido entender… o sea (titubea) *la tabla que tenemos en el cuadernillo está dividido entre intervalos de expresión, y tablas de valores, y se ha explicado muy bien, y me he enterado mejor que el año pasado*[130] *que…no teníamos ni esta tabla ni lo explicaba así, o sea no se explicaba como se hacía.*

P: ¿Recordabas algo del año pasado que te ha ayudado para entenderlo este año?

A2: No, recordaba que era más difícil de lo que es[131].

P: ¿O sea que has visto qué es fácil?

A2: Si.

P: ¿Lo entiendes?

A2: Ahora sí que entiendo todo, sí.

P: ¿Cuál es la mayor dificultad que encuentras al dibujar una función a trozos?

A2: Lo más difícil. La verdad es que no me parece en ningún cacho[132] *difícil.*

---

[127] El alumno señala los puntos frontera de los diferentes intervalos.
[128] Preocupación por diferentes valores de la pendiente en cada trozo.
[129] Focalización en la discontinuidad.
[130] Este alumno es repetidor.
[131] Importancia de las matemáticas emocionales.
[132] No hay *"ningún cacho difícil"* ya que la sistematización que se ha realizado facilita el tratamiento de todos los intervalos del mismo modo.

P: ¿Y vosotros, dónde veis la dificultad al dibujar la función a trozos?

A1: No lo veo ninguna dificultad, bueno un poco cuando tiene aquí la x *con la* y *eso del punto, por lo demás…*

A5: Pues yo no lo entiendo.

P: ¿No entiendes el punto de frontera?

A5: Sé cómo es esto, hacerlo, pero esta parte no,…..[133]

A2: No yo sí, pero claro,.. hay que mirar cuál es el último punto y como en las otras ya te viene hecho el intervalo en el que está la función a trozos, pues … Pues nada es más… cómo más fácil

A5: Cuando hay pparéntesis[134]*, o sea que no les tocabas… entonces cuál es el primer punto que tomas para dibujarlo…*

A1: Pues aunque no entre haces su imagen y ponen un agujero vacío.

P: O sea que quizás el mayor problemas es cuando el punto no entra, porque si el punto entra ya sé cuál es la imagen ¿No? Este que es abierto, por ejemplo en x=2, entonces le das el valor también ***pero no lo dibujas****, pero dejas el agujero vacío, porque sí que hay infinitos puntos que se acercan, que se acercan,…esa es la dificultad...*

A2: Es que es difícil de entender, que tengo infinitos puntos y no sé cuál es el primero…

X.2.8 Test final valoración experiencia IES Condesa Eylo

A continuación, se presenta el test final presentado al alumnado del IES Condesa Eylo, junto con la media aritmética de las respuestas del alumnado.

CUESTIONARIO FINAL VALORATIVO DEL PRIMER CICLO DE INVESTIGACIÓN. FASE EXPLORACIÓN.

SE DEBE VALORAR DE 1 A 5 CADA PREGUNTA	
Tras la explicación inicial, ¿comprendiste bien las características de la metodología Flipped Classroom?	3,2
¿Consideraste que era novedosa e innovadora?	3,36
¿Te parecía interesante participar en esta experiencia?	3,04
¿Te suponía ansiedad cambiar la dinámica habitual del aula?	2,44

[133] El alumno se refiere a los extremos abiertos de cada intervalo de definición de la función.
[134] Denomina paréntesis al intervalo abierto.

¿Te suscitó interés esta propuesta generándote expectativas positivas?	2,64

	SI	NO
¿Habías consultado con anterioridad tutoriales on-line?	36%	64 %

Si tu respuesta ha sido positiva, contesta a las siguientes cuestiones:

	esporádico	periódico	frecuente
Respecto al número de veces que usas este servicio	55,56%	11,11%	33,33%

Páginas visitadas:____

Contenidos en los que has precisado el uso:_________________________________

¿Respondió a tus necesidades?	2,92
¿Te ayudaron a comprender los conceptos tratados?	2,92

	SI	NO	A VECES
Prefiero un “video tutorial” a la explicación del profesor	0,00%	52,94%	47,06%

Sobre el grado de implicación personal en el proyecto

He prestado atención en clase	2,96
He obedecido a las instrucciones que se daban en el aula	2,64
He participado responsablemente en las actividades grupales del aula	2,72
He visionado los vídeos según se me indicaba en clase	2,2
Me he implicado activamente en el desarrollo de esta experiencia	2,32

Sobre el grado de implicación de los docentes

Valoro que mi profesora se ha interesado en implementar innovación educativa en el aula	2,96
Las profesoras han mostrado interés en mejorar nuestro proceso de enseñanza-aprendizaje	2,64
Se ha tratado al alumnado con respeto	2,72
Se ha intentado responsabilizar al alumnado sobre su papel activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje	2,2
Han planificado las sesiones lectivas motivantes	2,32
Dominan la materia	2,96
Facilitan la trasmisión del conocimiento	2,64

Sobre el desarrollo de la actividad

Me resulta más difícil entender la explicación del vídeo que la explicación en el aula	3,68
Prefiero hacer los “deberes clásicos” en casa que ver un vídeo explicativo	3,8
Se aprovecha más en clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas	3,8
Prefiero estudiar volviendo a visionar los vídeos que revisando mis apuntes	1,52
Conozco todas las posibilidades de la plataforma Moodle del Centro	3,52
Me gusta la plataforma Moodle del Centro	2,8
Me he divertido más en el aula más que con otras unidades didácticas	2,72

Sobre el grado de valoración de los vídeos, según su temática

Concepto de función	2,72
Dominio	2,68
Recorrido	2,88
Crecimiento/Decrecimiento	3,12
Máximos/Mínimo	2,84
Periodicidad	2,08

Funciones definidas a trozos	2,68

Sobre los resultados obtenidos

Considero que esta metodología fomenta el aprendizaje autónomo	2,36
Considero que esta metodología potencia el trabajo en grupo	3,04
Considero que esta metodología depende de la responsabilidad del alumno	3,96
Ha mejorado la convivencia en el aula	2,72
He comprendido conceptos relativos a funciones gracias al visionado de vídeos	2,29
Considero que con esta metodología he aprendido más que con la metodología habitual del aula	1,71
Ha mejorado mi actitud frente a las matemáticas	2,4
Me ha hecho reflexionar sobre la importancia del auto aprendizaje en esta época	2,72

	MENOS	IGUAL	MÁS	NS/NC
Considero que esta metodología me hace trabajar MÁS, MENOS o IGUAL que la habitual	52%	32%	12%	4%

Sobre la experiencia

¿Conoces suficientemente las características de la metodología Flipped Classroom?	2,84
¿Consideras que ha sido novedoso e innovador?	3
¿Te ha parecido interesante participar en esta experiencia?	2,72
¿Te ha supuesto ansiedad cambiar la dinámica habitual del aula?	2,08
¿Se han cumplido las expectativas positivas respecto a esta experiencia?	2,16
¿Te has divertido en el aula más que en el desarrollo de otras unidades didácticas?	2,4
Te parece positiva esta metodología	2,12
Desearías que esta metodología se utilizase más habitualmente en la materia	1,76

de Matemáticas	
Te gustaría que se implementase en otras materias	1,92
¿Consideras que has aprendido más que si se hubiera mantenido la metodología anterior?	2,32
Grado de satisfacción con la experiencia realizada	2,4

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

X.2.9 Estudio y análisis del Test final de valoración de la experiencia IES Condesa Eylo

En este apartado, se realiza el análisis de los datos obtenidos tras la implementación del cuestionario de valoración final de la experiencia realizada en la asignatura de Matemáticas Opción A de 4º ESO en el IES Condesa Eylo de Valladolid durante el segundo cuatrimestre del curso académico 2014/15.

Se han preparado 56 ítems para recabar información del alumnado, clasificados alrededor de los siguientes ejes temáticos:

- PUNTO DE PARTIDA
- GRADO DE IMPLICACIÓN PERSONAL EN EL PROYECTO
- GRADO DE IMPLICACIÓN DE LOS DOCENTES
- DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD
- LA VALORACIÓN DE LOS VÍDEOS, SEGÚN SU TEMÁTICA
- LOS RESULTADOS OBTENIDOS
- DESPUÉS DE LA EXPERIENCIA

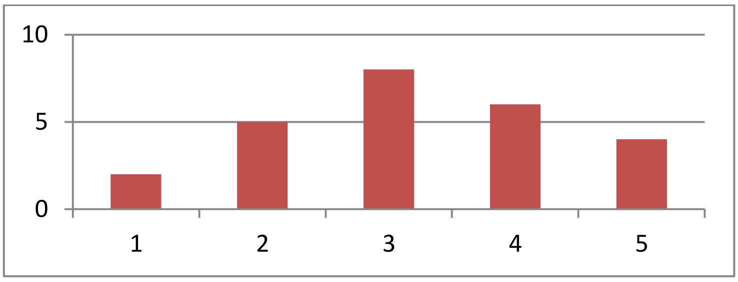
Una vez repartido el cuestionario se procedió a dar unas sencillas instrucciones previas y a la lectura de cada una de las preguntas, comentando aquellos puntos que no quedaron suficientemente claros e insistiendo en la necesidad de que justificaran al máximo sus razonamientos. Además, se hizo especial énfasis en su carácter anónimo y confidencial, ya que no se trataba de un examen y la finalidad era la valoración global de las respuestas, no habiendo interés por parte de los docentes de conocer las respuestas exactas de forma individual.

Para lleva a cabo este estudio, se presenta el enunciado de la pregunta del cuestionario, un análisis porcentual de los datos y una breve reflexión sobre el resultado observado.

De forma globalizada se presenta los resultados en el correspondiente apartado IV.3.3. de la presente tesis.

RESPECTO AL PUNTO DE PARTIDA

P1.- Tras la explicación inicial ¿Comprendiste bien las características de la metodología Flipped Classroom (AI)?



X.8 *Figura 10.8.* Frecuencias sobre comprensión de la metodología AI

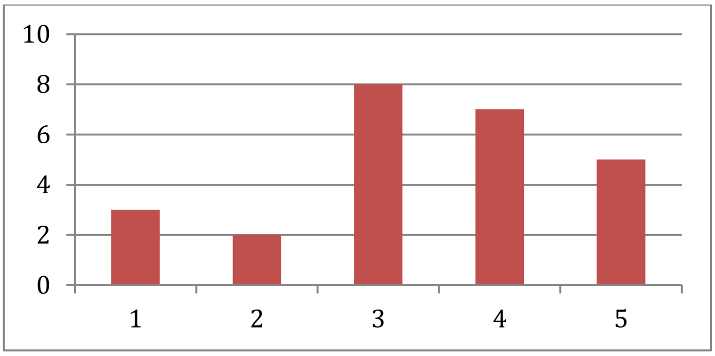
X.10 Tabla 10.10: *Valoración P1*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	2	5	8	6	4
% Alumnos	8%	20%	32%	24%	16%

Media aritmética: 3,2.

La primera sesión consistió en informar pormenorizadamente de esta nueva metodología mediante una presentación de Prezi que se adjunta en el ANEXO X.2.3. El alumnado constata con una media de 3,2 que ha comprendido las características de la metodología AI.

P2.- ¿Consideraste que era novedosa e innovadora?



X.9 *Figura 10.9.* Frecuencias sobre percepción de innovación de AI

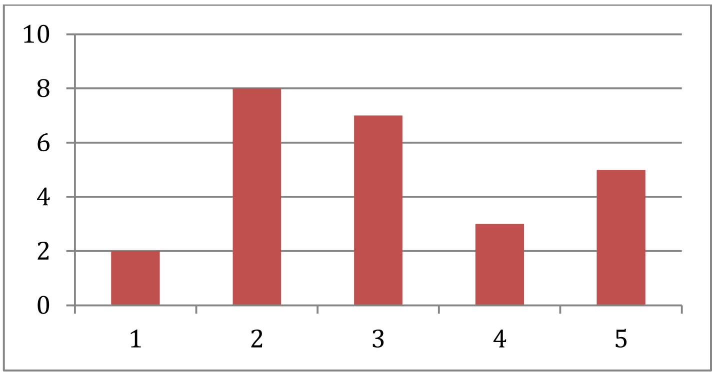
X.11 Tabla 10.11: *Valoración P2*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	3	2	8	7	5
% Alumnos	12%	8%	32%	28%	20%

Media aritmética: 3,36

Ningún alumno conocía esta nueva metodología, ni habían oído hablar de ella; por ello consideraron esta propuesta novedosa e innovadora. A grandes rasgos, aceptaron de buen grado la propuesta experimental.

P3.- ¿Te parecía interesante participar en esta experiencia?



X.10 *Figura 10.10.* Frecuencias sobre interés participación AI

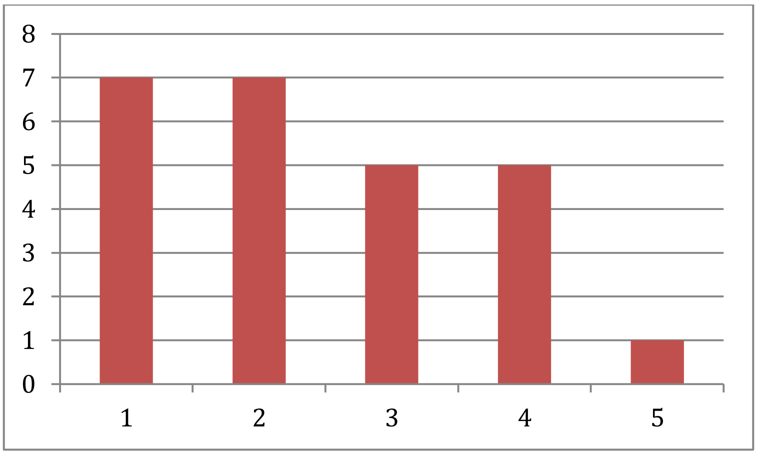
X.12 Tabla 10.12: *Valoración P3*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	2	8	7	3	5
% Alumnos	8%	32%	28%	12%	20%

Media aritmética: 3,04

Este ítem puede ser una referencia para valorar el grado de implicación inicial del alumnado en relación a la participación en esta experiencia. La mayoría del alumnado, el 60 %, puntúa 2 y 3. Estos resultados parecen estar acordes con la motivación general del alumnado de la opción A de Matemáticas, que provienen de un historial académico negativo en relación a la asignatura de Matemáticas. Por otro lado, si consideramos la puntuación 3 como una valoración que no tiene inicialmente información para decantarse hacia valores inferiores o superiores; podemos comprobar que tenemos 10 alumnos (40 %) que muestran escaso interés en esta experiencia frente a 8 alumnos (32 %) que sí muestran gran receptividad otorgando las mayores puntuaciones que se les plantean.

P4.- ¿Te suponía ansiedad cambiar la dinámica habitual del aula?



X.11 *Figura 10.11*. Frecuencias ansiedad ante el cambio

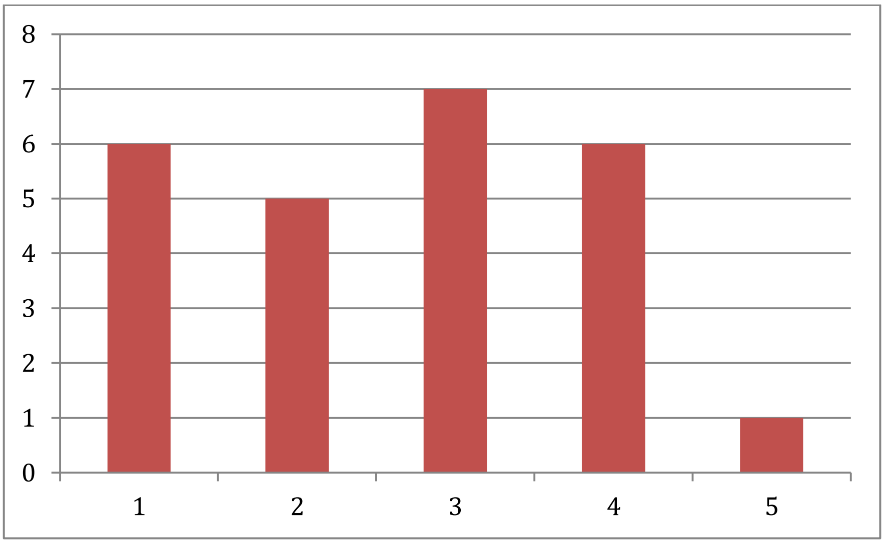
X.13 Tabla 10.13: *Valoración P4*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	7	7	5	5	1
% Alumnos	28%	28%	20%	20%	4%

Media aritmética: 3,36

Claramente al 56 % del alumnado les provocaba un bajo grado de ansiedad modificar la dinámica habitual del aula, como así lo muestran las bajas puntuaciones asignadas. Se tiene un 20% del alumnado posicionado en la puntuación central, y no se debe olvidar el 24 % de alumnos que sí manifiestan alto grado de ansiedad ante los cambios. Parte del alumnado frente al fracaso habían optado por el abandono y desinterés por la asignatura, pero otro sector, que curiosamente se podría cuantificar con la cuarta parte de ellos, eran conscientes de sus dificultades frente a las matemáticas pero intentaban luchar por superar la asignatura. No se debe olvidar la importancia que tiene la asignatura de Matemáticas en los criterios de promoción y titulación para la superación de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Durante el curso académico 2014/15, y según la normativa vigente de la LOMCE, se obtiene la titulación en la ESO con a lo sumo dos materias calificadas negativamente, salvo si se trata de las dos materias instrumentales, es decir, matemáticas y lengua; en dicha situación el equipo educativo votará sobre la posibilidad de promoción o no de dicho alumno.

P5.- ¿Te suscitó interés esta propuesta generándote expectativas positivas?



X.12 *Figura 10.12.* Frecuencias sobre expectativas positivas

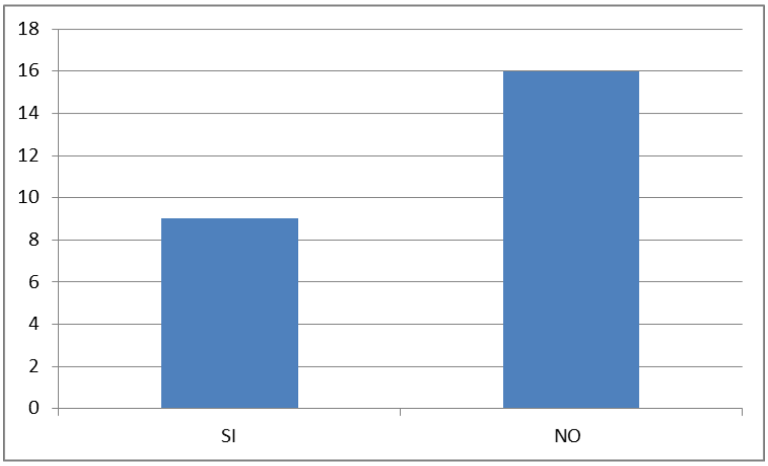
X.14 Tabla 10.14: *Valoración P5*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	6	5	7	6	1
% Alumnos	24%	20%	28%	24%	4%

Media aritmética: 2,64

Nuevamente, se pone de manifiesto que casi la mitad del alumnado muestra poca expectación ante las novedades, un 28 % que se muestra “equilibrado” tanto en sus puntuaciones, expectante ante los cambios e indeciso en avanzar en calificar sus respuestas. Por último, alrededor de la cuarta parte de los alumnos se sitúa en las calificaciones superiores, valorando su interés en 4 puntos, salvo un alumno que valora 5; por lo que se supone que tienen expectativas positivas.

P6.- ¿Habías consultado con anterioridad tutoriales on-line?



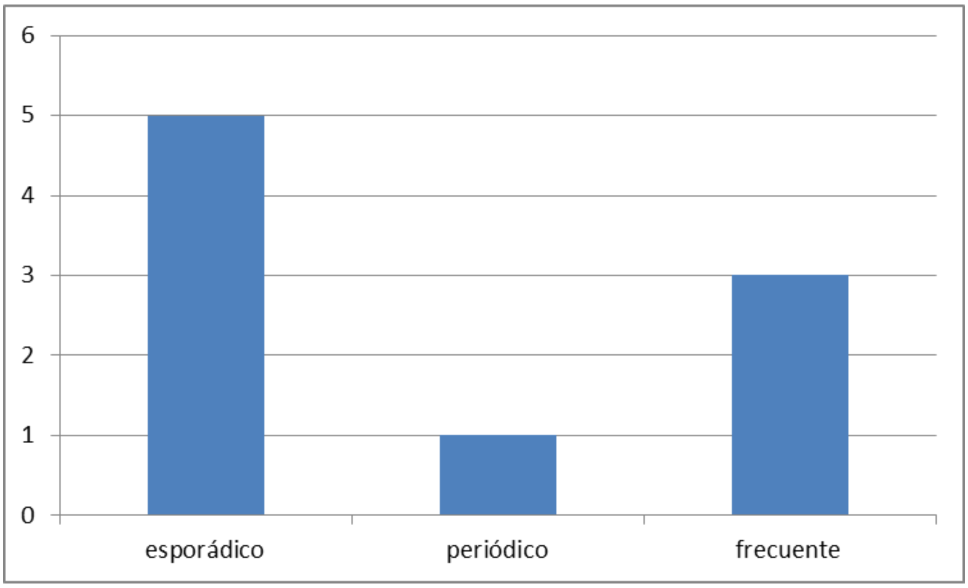
X.13 *Figura 10.13.* Frecuencias sobre utilización de tutoriales on-line

X.15 Tabla 10.15: *Valoración P6*

	SI	NO
Nº alumnos	9	16
% Alumnos	36 %	64 %

Si tu respuesta ha sido positiva, contesta a las siguientes cuestiones:

P7.- Respecto al número de veces que usas este servicio



X.14 *Figura 10.14.* Frecuencias uso tutoriales on-line

X.16 Tabla 10.16: *Valoración P7*

	esporádico	periódico	frecuente
Nº alumnos	5	1	3
% Alumnos	55,56%	11,11%	33,33%

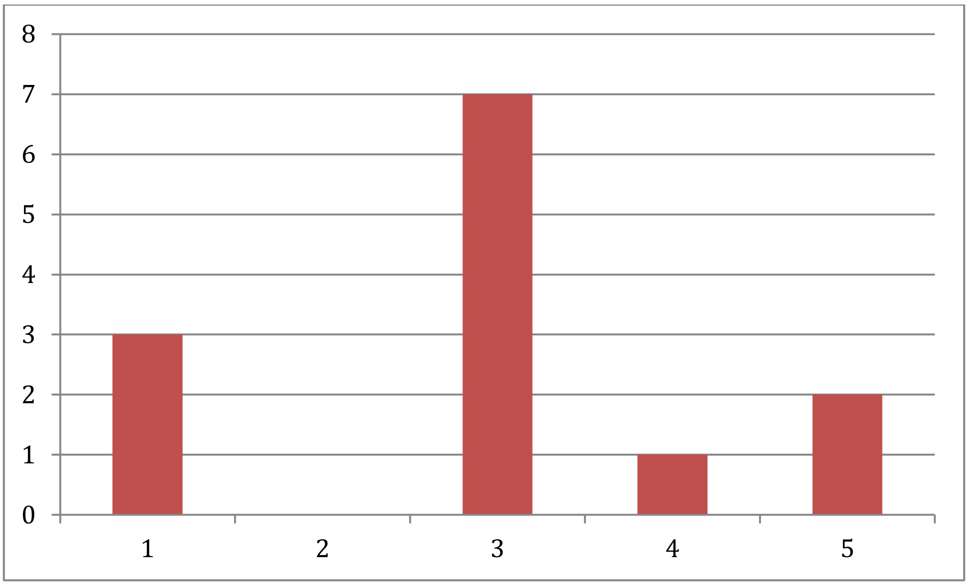
Páginas visitadas y contenidos en los que has precisado el uso:

Quince de los alumnos (51,72 %) habían utilizado vídeo-tutoriales alojados en YouTube, ante una dificultad en las asignaturas de Física-Química y Matemáticas.

No conocen páginas o canales específicos que facilitan vídeos educativos, como por ejemplo, Vitutor, Khan Academy,…

En general, consideran que han sido de ayuda e indican que la mayoría de estas emisiones están grabadas en inglés o son de canales sudamericanos y que, aunque en general se comprende, hay cambios en algunas denominaciones de ciertos conceptos, que dificultan la comprensión. Por ejemplo, la denominación de quebrados para las fracciones le produjo confusión a un alumno.

P8.- ¿Respondió a tus necesidades?



X.15 *Figura 10.15.* Frecuencias respuesta a las necesidades

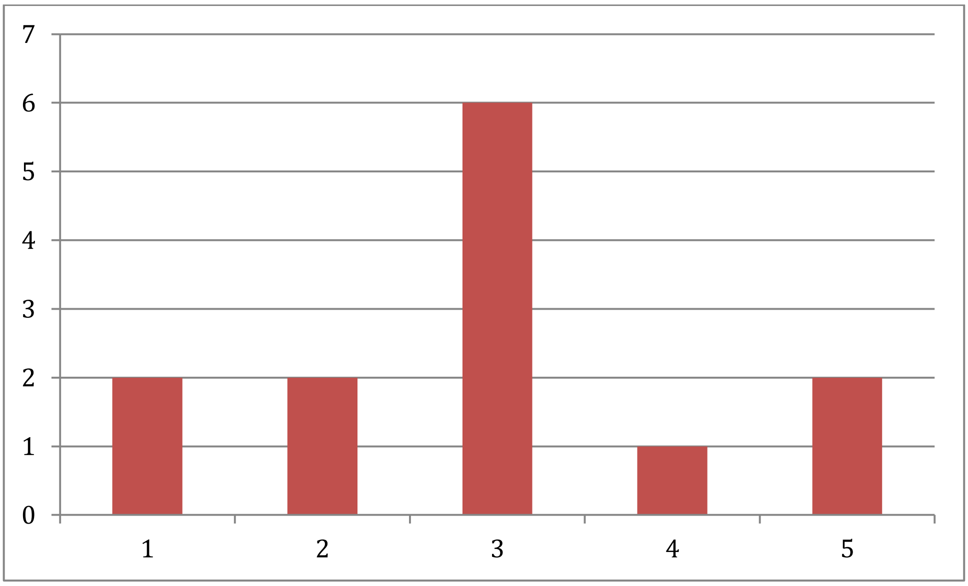
X.17 Tabla 10.17: *Valoración P8*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	3	0	7	1	2
% Alumnos	23%	0%	54%	8%	15%

Media aritmética: 2,92

Entre el alumnado que ha hecho uso de esta posibilidad, mayoritariamente muestran grado de satisfacción tras el uso.

P9.- ¿Te ayudaron a comprender los conceptos tratados?



X.16 *Figura 10.16.* Frecuencias sobre ayuda en la comprensión

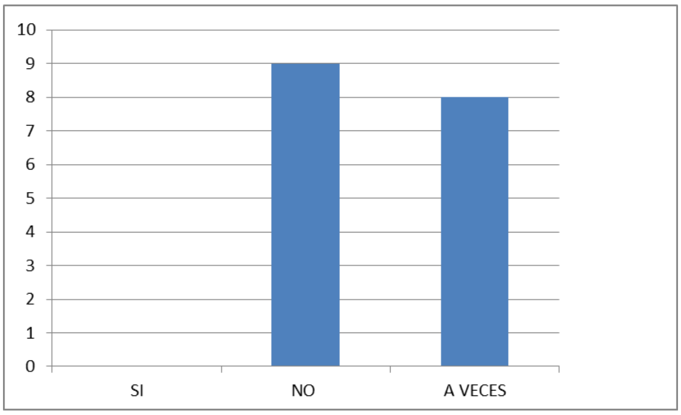
X.18 Tabla 10.18: *Valoración P9*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	2	2	6	1	2
% Alumnos	15%	15%	45%	8%	15%

Media aritmética: 2,92

Las frecuencias se distribuyen asemejando una distribución normal, centrada en el valor medio. Un alumno concreta que fue de ayuda dicho material multimedia para la resolución de ecuaciones.

P10.- Prefiero un video tutorial a la explicación del profesor



X.17 *Figura 10.17.* Frecuencias preferencia video tutorial frente explicación del profesor

X.19 Tabla 10.19: *Valoración P10*

	SI	NO	A VECES
Nº alumnos	0	9	8
% Alumnos	0,00%	52,94%	47,06%

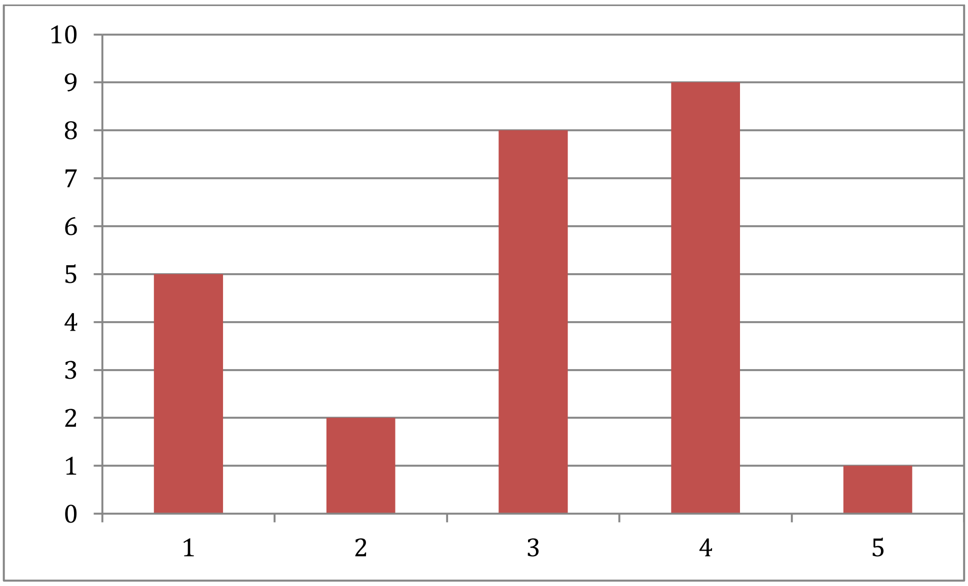
El alumnado valora positivamente la explicación del profesor frente a los vídeos tutoriales, pero casi la mitad del alumnado que hizo uso de esta posibilidad abre la posibilidad de que "a veces" se pueda preferir a la explicación tradicional.

Observaciones:

Respecto a los ítems comprendidos en el bloque de punto de partida, la mayor puntuación media es la relativa a que los alumnos consideraban esta nueva metodología como novedosa e innovadora. Por otro lado, la menor puntuación media en este bloque nos presenta que este cambio en la dinámica habitual del aula no supuso un significativo grado de ansiedad en el alumnado, como lo indica la baja puntuación asignada por los interesados en esta pregunta.

RESPECTO AL GRADO DE IMPLICACIÓN PERSONAL EN EL PROYECTO

P11.- He prestado atención en clase



X.18 *Figura 10.18.* Frecuencias sobre prestación de atención

X.20 Tabla 10.20: *Valoración P11*

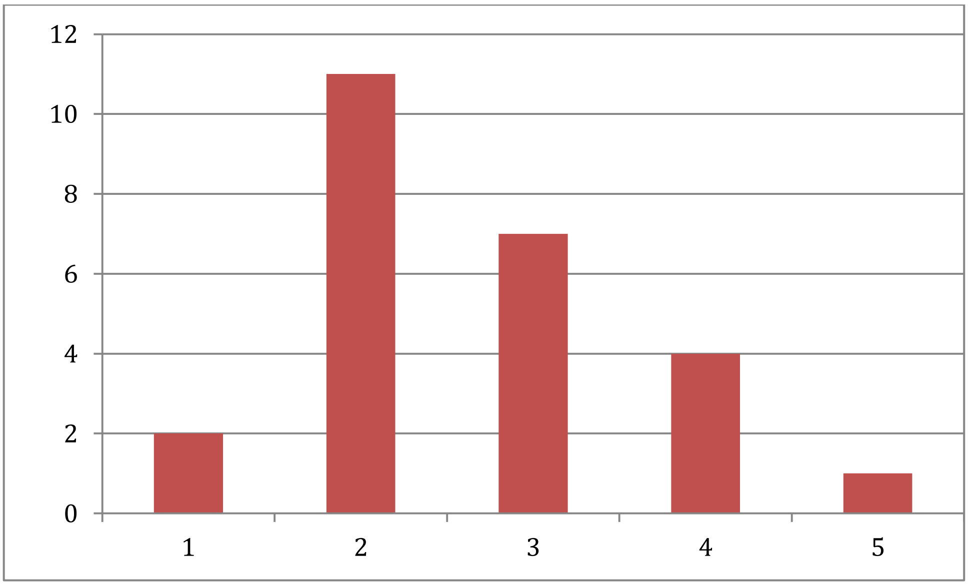
	1	2	3	4	5

Nº alumnos	5	2	8	9	1
% Alumnos	20%	8%	32%	36%	4%

Media aritmética: 2,96

La investigadora comparte el resultado de la valoración del alumnado, ya que se mostraron totalmente receptivos a todas las indicaciones que se les trasladó.

P12.- He obedecido a las instrucciones que se daban en el aula



X.19 *Figura 10.19.* Frecuencias sobre obediencia de instrucciones

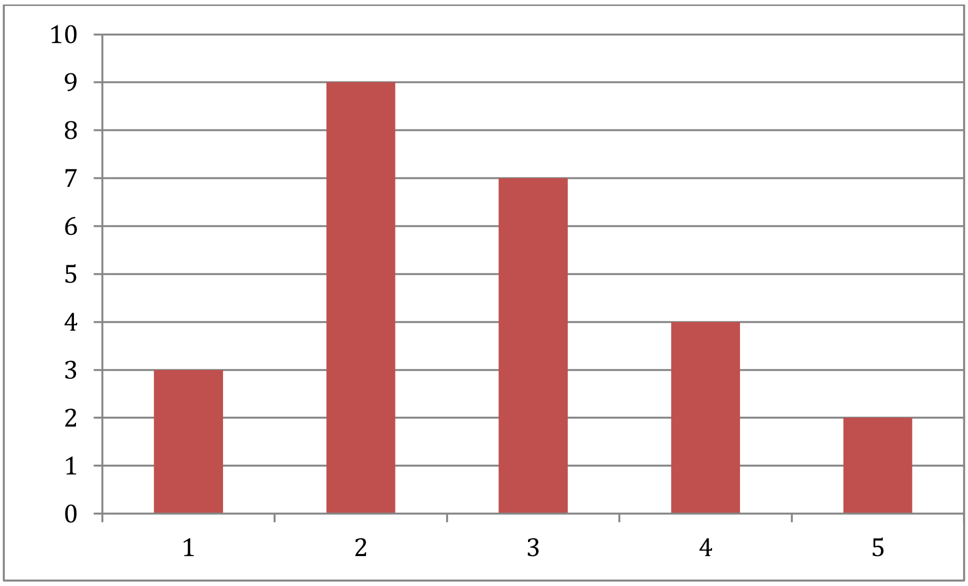
X.21 Tabla 10.21. *Valoración P12*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	2	11	7	4	1
% Alumnos	8%	44%	28%	16%	4%

Media aritmética: 2,64.

El alumnado ha sido honesto al valorar este ítem, ya que fueron activos y participativos en todas las actividades propuestas en el aula; pero no obedientes en todas las instrucciones que se les indicó, en particular no cumplieron la visualización de los vídeos en sus casas.

P13.- He participado responsablemente en las actividades grupales del aula



X.20 *Figura 10.20.* Frecuencias sobre participación responsable en el aula

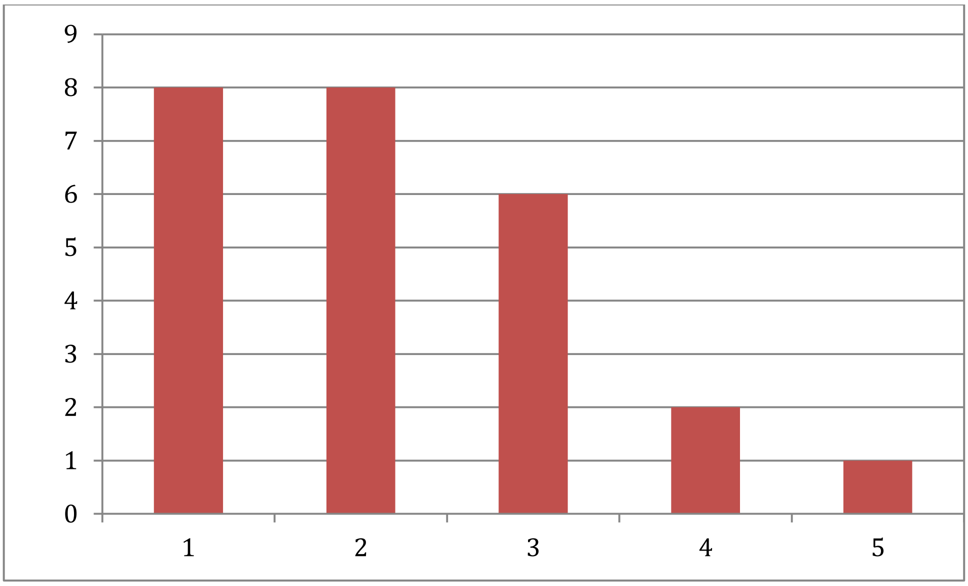
X.22 Tabla 10.22: *Valoración P13*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	3	9	7	4	2
% Alumnos	12%	36%	28%	16%	8%

Media aritmética: 2,72

Se presenta gran diversidad sobre la responsabilidad individual de cada alumno respecto a su participación en el aula.

P14.- He visionado los vídeos según se me indicaba en clase



X.21 *Figura 10.21.* Frecuencias sobre seguimiento en visionado de vídeos

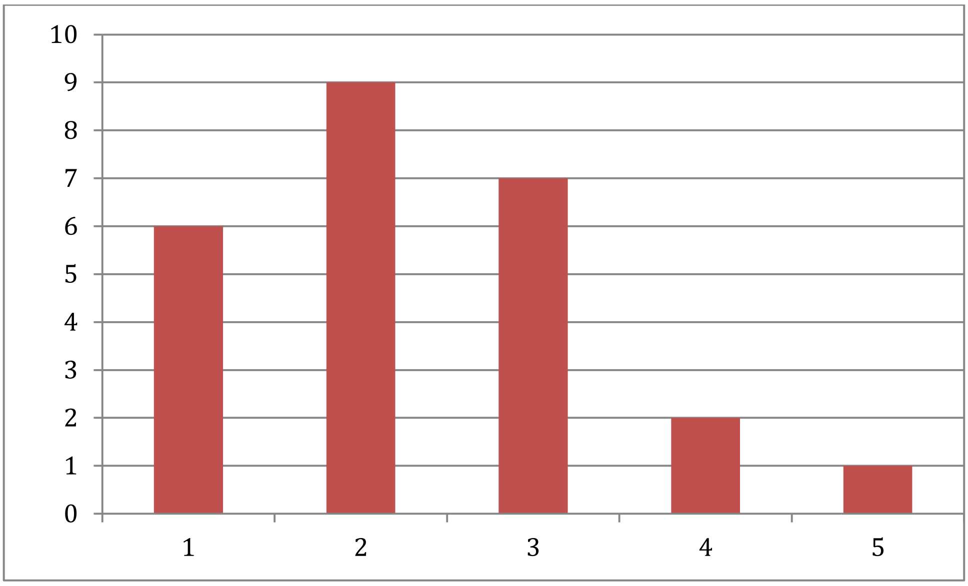
X.23 Tabla 10.23: *Valoración P14*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	8	8	6	2	1
% Alumnos	32%	32%	24%	8%	4%

Media aritmética: 2,32.

Claramente en este ítem se manifiesta que un elevado porcentaje del alumnado no visionó los vídeos en sus casas según las indicaciones de las profesoras en el aula; hecho que ha sido corroborado por la investigadora y profesora titular.

P15.- Me he implicado activamente en el desarrollo de esta experiencia



X.22 *Figura 10.22.* Frecuencias sobre implicación activa en el proyecto

X.24 Tabla 10.24: *Valoración P15*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	6	9	7	2	1
% Alumnos	24%	36%	28%	8%	4%

Media aritmética: 2,32.

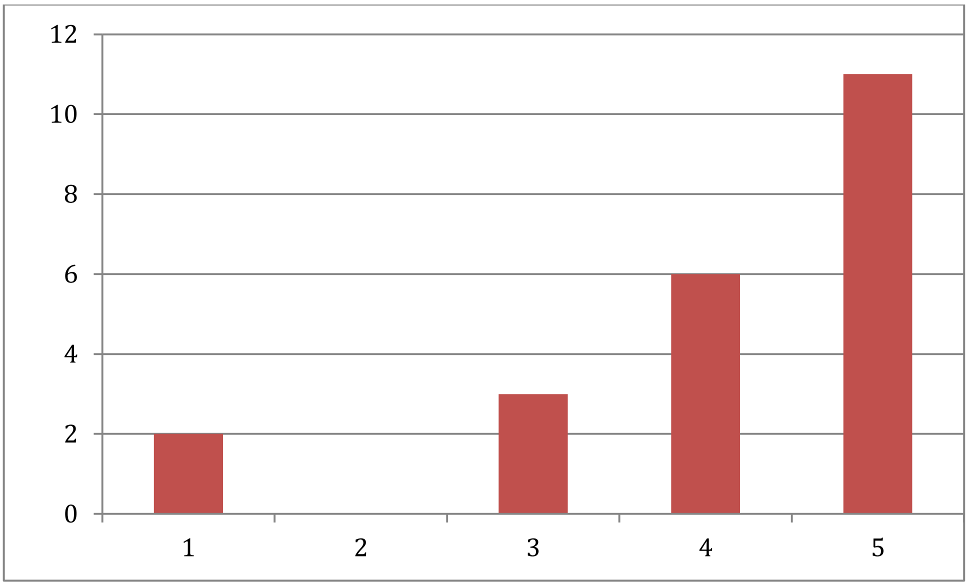
Nuevamente aparece una distribución normal, pero desplazada hacia las valoraciones inferiores; ya que, según la propia valoración del alumnado, su implicación no ha sido óptima.

Reflexión:

En clase, en general, se ha mantenido atención obedeciendo las instrucciones y se ha participado en las actividades grupales. El hecho de admitir que no se han visionado los vídeos en casa, es lo que ha justificado la baja puntuación en relación a la participación activa global en el desarrollo de esta experiencia.

RESPECTO AL GRADO DE IMPLICACIÓN DE LOS DOCENTES

P16.- Valoro que mi profesora se ha interesado en implementar innovación educativa en el aula



X.23 *Figura 10.23.* Frecuencias sobre el reconocimiento del profesorado frente a la innovación

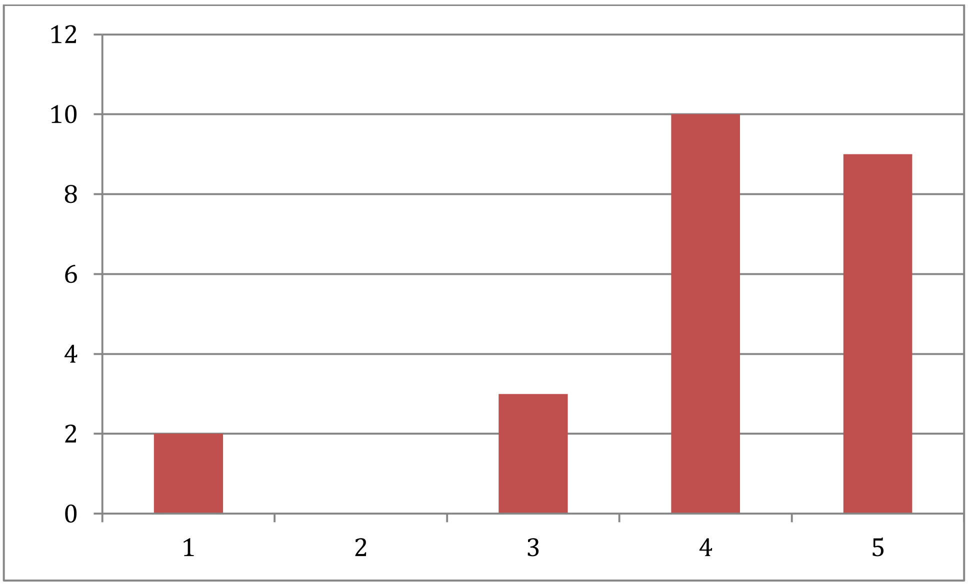
X.25 Tabla 10.25: *Valoración P16*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	2	0	3	6	11	3
% Alumnos	8%	0%	12%	24%	44%	12%

Media aritmética: 4,09

El alumnado valora mayoritariamente el interés del profesorado en introducir nuevas metodologías en el aula.

P17.- Las profesoras han mostrado interés en mejorar nuestro proceso de enseñanza-aprendizaje



X.24 *Figura 10.24.* Frecuencias sobre el interés por mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje

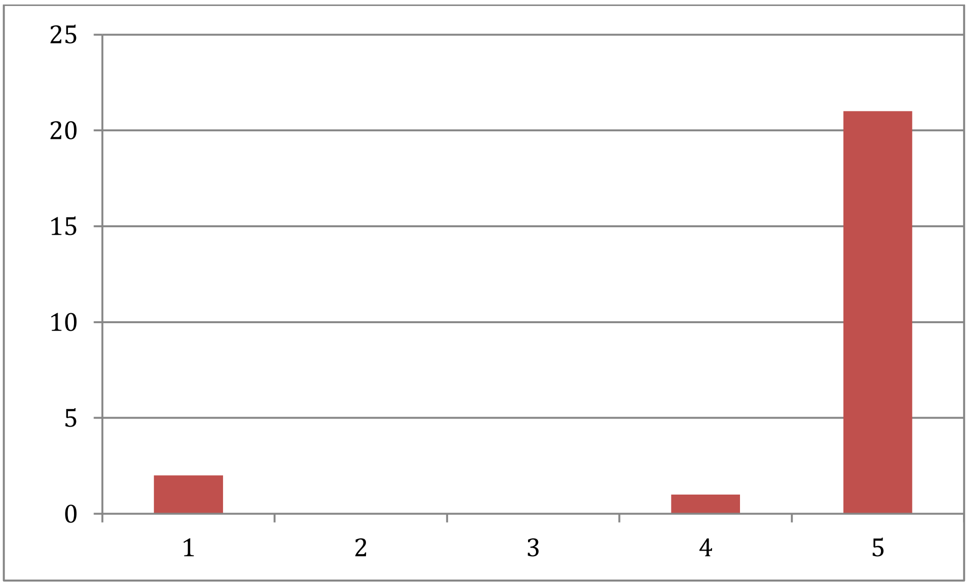
X.26 Tabla 10.26: *Valoración P17*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	2	0	3	10	9	1
% Alumnos	8%	0%	12%	40%	36%	4%

Media aritmética: 4.

Salvo un pequeño sector del alumnado, se valora positivamente que el fin de esta innovación educativa sea mejorar el proceso educativo individual de cada alumno.

P18.- Se ha tratado al alumnado con respeto



X.25 *Figura 10.25.* Frecuencias sobre respeto al alumnado

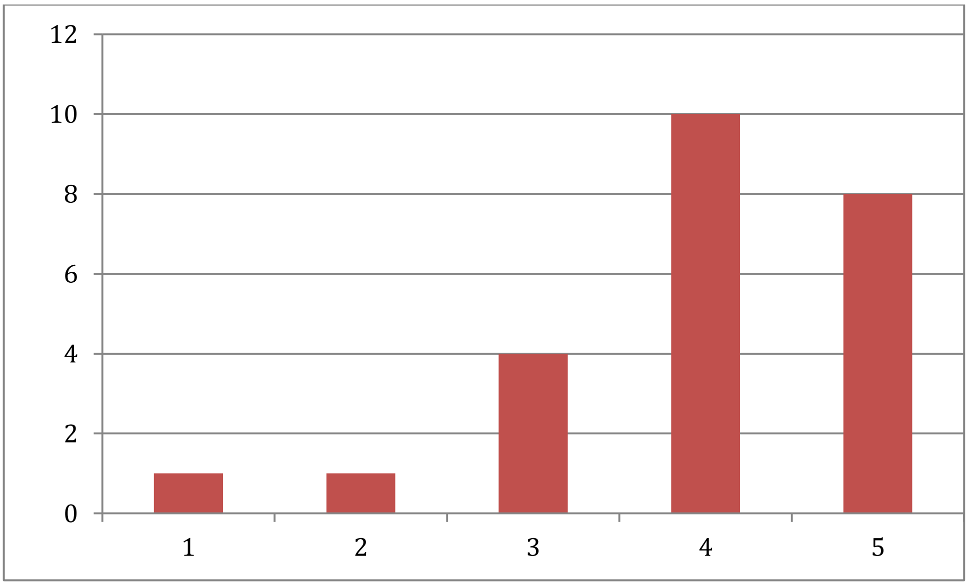
X.27 Tabla 10.27: *Valoración P18*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	2	0	0	1	21	1
% Alumnos	8%	0%	0%	4%	84%	4%

Media aritmética: 4,63.

Prácticamente la totalidad del alumnado ha valorado con la mayor puntuación este ítem, habiendo habido un clima de respeto mutuo entre todas las personas del aula.

P19.- Se ha intentado responsabilizar al alumnado sobre su papel activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje



X.26 *Figura 10.26.* Frecuencias sobre traslado de responsabilidad del alumnado

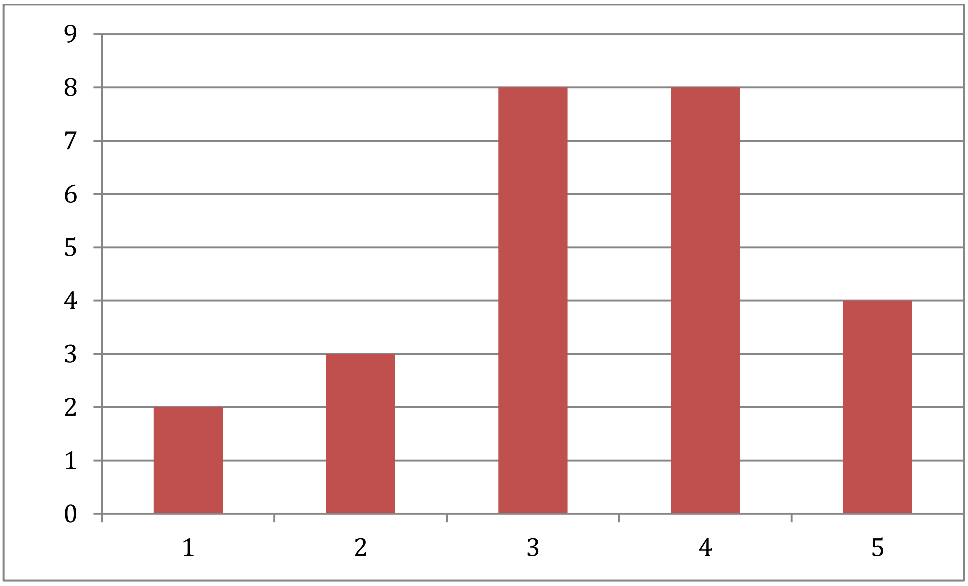
X.28 Tabla 10.28: *Valoración P19*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	1	1	4	10	8	1
% Alumnos	4%	4%	16%	40%	32%	4%

Media aritmética: 3,96

El alumnado tiene conciencia del grado de exigencia y responsabilidad que se le traslada con esta nueva metodología y de su papel decisivo en su óptima implementación, situándose la mayoría del alumnado en las puntuaciones superiores.

P20.- Han planificado las sesiones lectivas motivantes



X.27 *Figura 10.27.* Frecuencias sobre sesiones motivantes

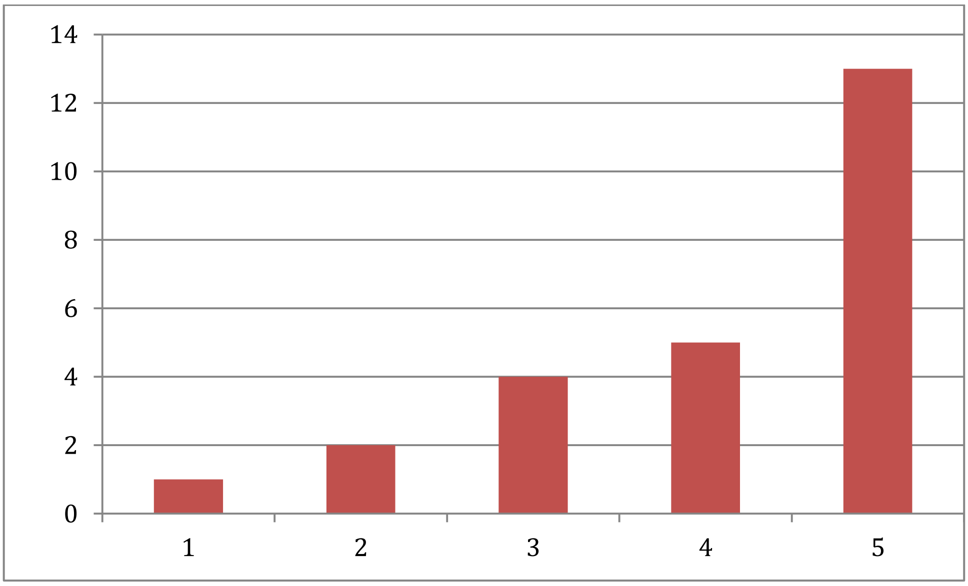
X.29 Tabla 10.29: *Valoración P20*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	2	3	8	8	4
% Alumnos	8%	12%	32%	32%	16%

Media aritmética: 3,36

A pesar de la diversidad de opiniones frente a la motivación, sentimiento muy subjetivo y dependiente de muchos factores intrínsecos y extrínsecos a cada individuo, la valoración media es moderadamente alta.

P21.- Dominan la materia



X.28 *Figura 10.28.* Frecuencias sobre dominio de la materia

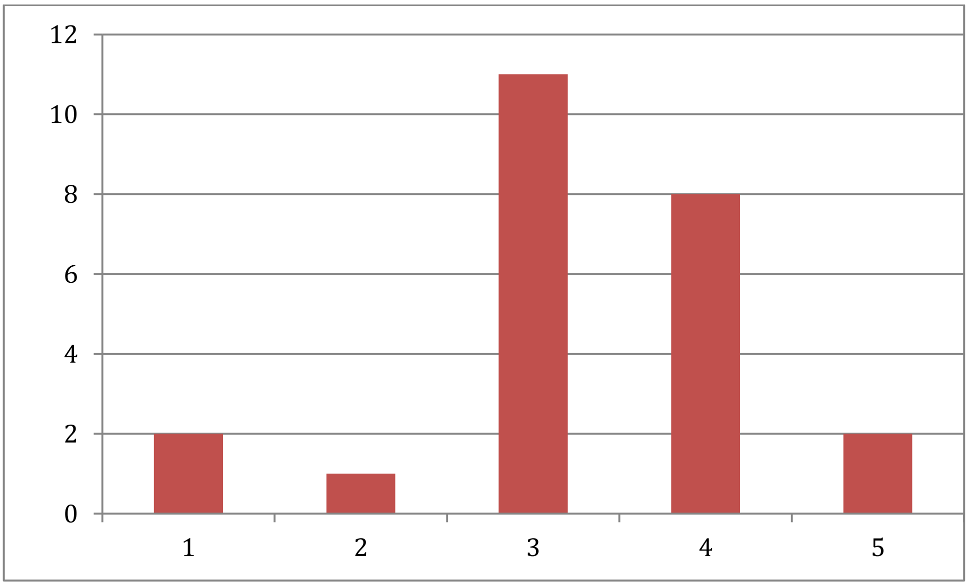
X.30 Tabla 10.30: *Valoración P21*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	1	2	4	5	13
% Alumnos	4%	8%	16%	20%	52%

Media aritmética: 4,08

El alumnado reconoce la figura del docente, desde la profesionalidad y el dominio de la materia objeto de estudio. Este hecho ha facilitado la buena disposición del alumnado frente a las instrucciones que se les traslada y la aceptación de las mismas; siendo el único fallo el no cumplimiento de la tarea encomendada relativa a la visualización de los vídeos en sus casas.

P22.- Facilitan la trasmisión del conocimiento



X.29 *Figura 10.29.* Frecuencias sobre facilitar la trasmisión del conocimiento

X.31 Tabla 10.31: *Valoración P22*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	2	1	11	8	2	1
% Alumnos	8%	4%	44%	32%	8%	4%

Media aritmética: 3,29

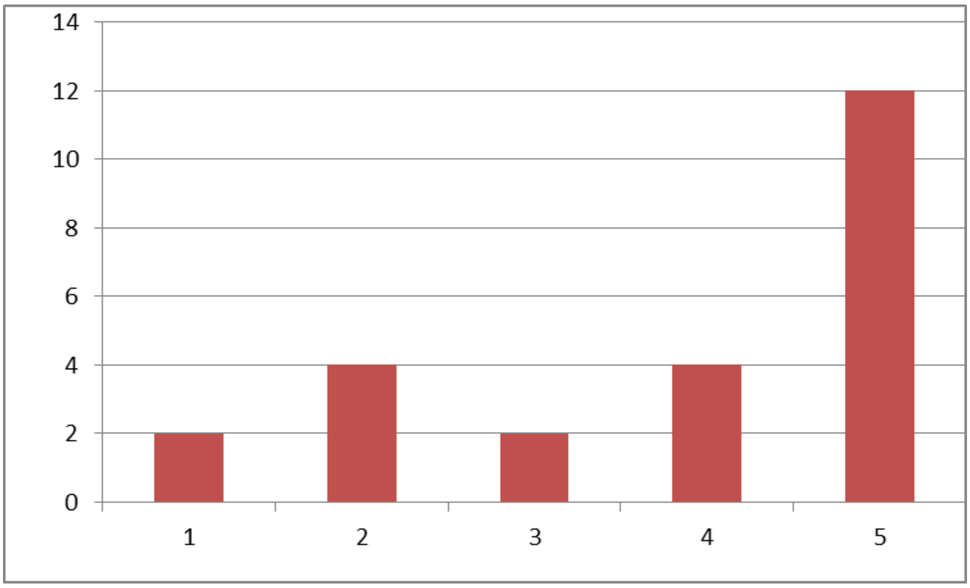
La media se sitúa ligeramente superior a la valoración media y el sector mayoritario considera que se ha potenciado la trasmisión del conocimiento valorándolo en la puntuación central.

Reflexión:

En este bloque ha aparecido un sector del alumnado que no contesta a los ítems propuestos, hecho que no había sucedido en los apartados anteriores. Puede ser debido a la pérdida de interés en relación al cuestionario o debido a la subjetividad de estas cuestiones. Hay un pequeño sector del alumnado (alrededor del 8%) que ha calificado todos los ítems con la calificación más baja, pero mayoritariamente, el resto se sitúa en los valores superiores.

RESPECTO AL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

P23.- Me resulta más difícil entender la explicación del vídeo que la explicación en el aula



X.30 *Figura 10.30.* Frecuencias sobre dificultad de la explicación en el vídeo

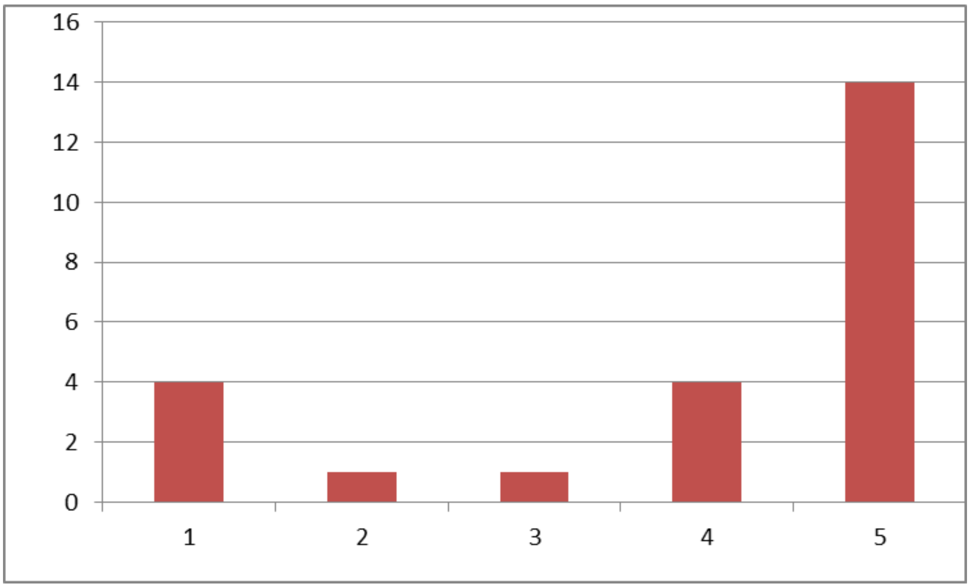
X.32 Tabla 10.32: *Valoración P23*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	2	4	2	4	12	1
% Alumnos	8%	16%	8%	16%	48%	4%

Media aritmética: 3,68

El alumnado manifiesta que la comprensión de la explicación del vídeo frente a un nuevo concepto le resulta más difícil que en el aula. La primera toma de contacto ante “algo nuevo” supone cierto grado de inquietud; y en el caso de esta experiencia el alumnado se enfrenta a doble novedad: el propio contenido matemático y el medio para llegar al dominio y comprensión del mismo. Con la experiencia docente que nos avala podemos afirmar que el alumnado presenta dificultades cuando toma el primer contacto en la explicación del aula; hecho que se puede acrecentar si no se tiene un clima de tranquilidad y buena disposición por parte de la totalidad del alumnado.

P24.- Prefiero hacer los “deberes clásicos” en casa que ver un vídeo explicativo



X.31 *Figura 10.31*. Frecuencias sobre preferencia en los “deberes”

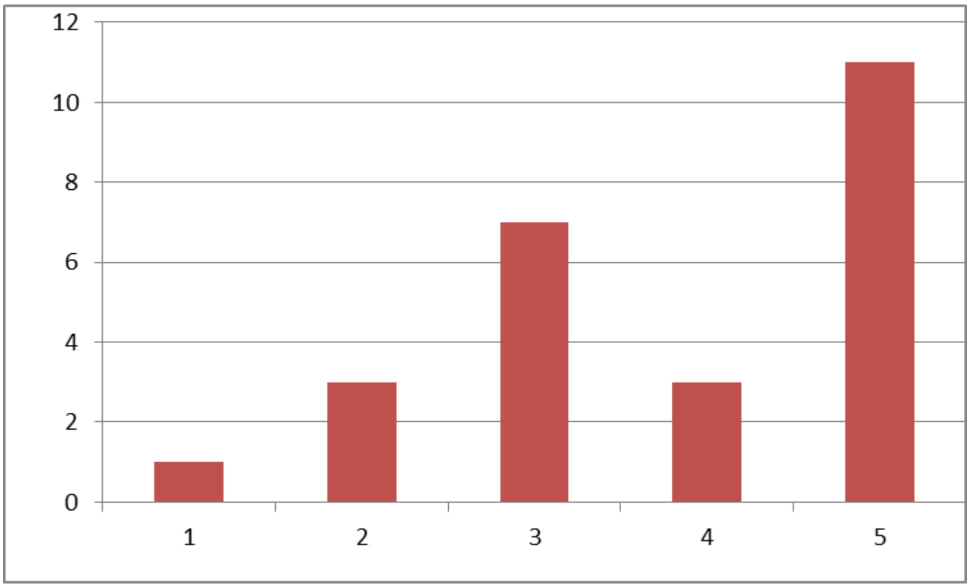
X.33 Tabla 10.33: *Valoración P24*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	4	1	1	4	14	1
% Alumnos	16%	4%	4%	16%	56%	4%

Media aritmética: 3,8

Tras esta experiencia el alumnado manifiesta preferir los “deberes tradicionales” manteniendo la estructura organizativa tradicional.

P25.- Se aprovecha más en clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas



X.32 *Figura 10.32.* Frecuencias sobre aprovechamiento en el aula

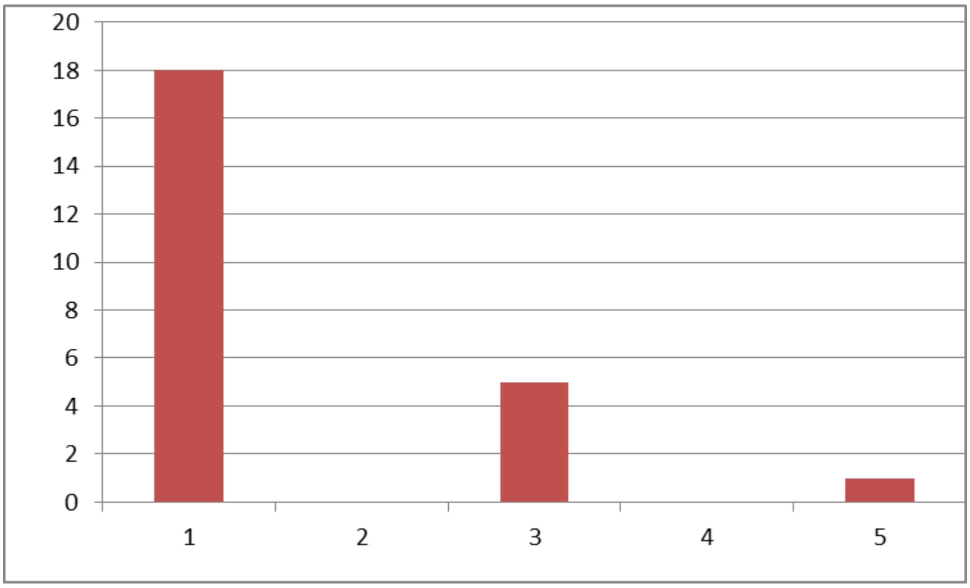
X.34 Tabla 10.34: *Valoración P25*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	1	3	7	3	11	1
% Alumnos	4%	12%	28%	12%	44%	4%

Media aritmética: 3,8

El alumnado, mayoritariamente considera que se aprovecha más escuchando a un profesor que visualizando un vídeo, puntuándolo en los valores superiores algo más de la mitad del alumnado.

P26.- Prefiero estudiar volviendo a visionar los vídeos que revisando mis apuntes



X.33 *Figura 10.33.* Frecuencias sobre preferencia en el estudio

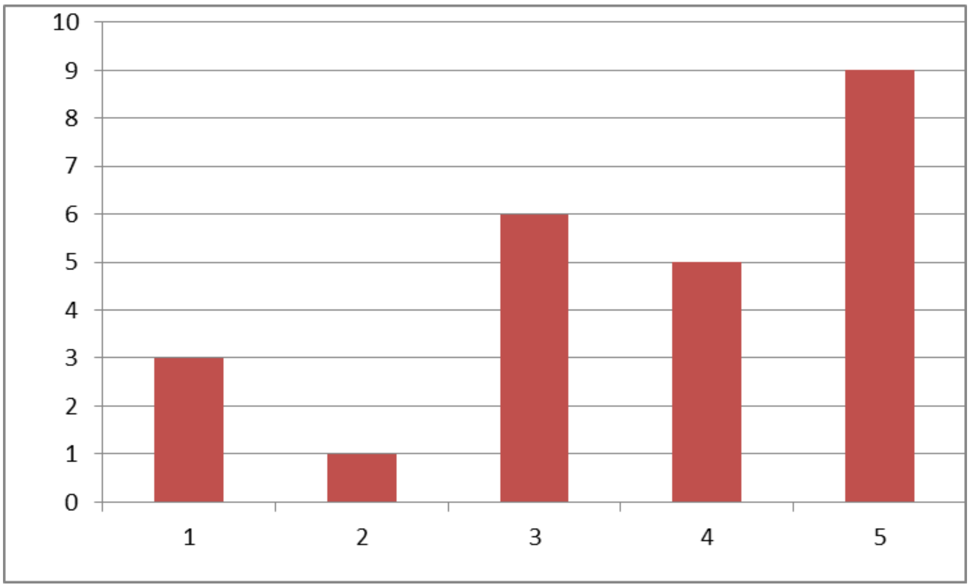
X.35 Tabla 10.35: *Valoración P26*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	18	0	5	0	1	1
% Alumnos	72%	0%	20%	0%	4%	4%

Media aritmética: 1,52

La valoración está polarizada, una quinta parte del alumnado abre la posibilidad de repasar con el visionado de los vídeos, situándose en el valor central; frente a tres cuartas partes, aproximadamente, que se opone firmemente.

P27.- Conozco todas las posibilidades de la plataforma Moodle del Centro



X.34 *Figura 10.34.* Frecuencias sobre conocimiento de la plataforma Moodle

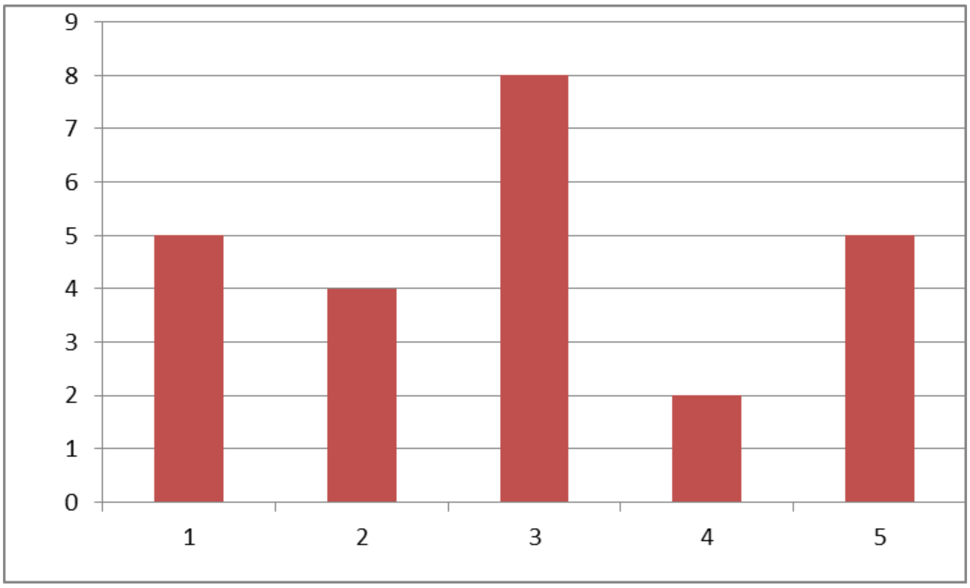
X.36 Tabla 10.36: *Valoración P27*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	7	2	6	6	3	1
% Alumnos	28%	8%	24%	24%	12%	4%

Media aritmética: 3,52

A pesar de que el alumnado manifiesta conocer todas las posibilidades de esta plataforma, la investigadora no comparte dicha valoración. Esta situación se repite cuando el alumnado se considera competente en tecnologías de la educación y en realidad ellos centran dicho dominio en la gamificación y en la navegación sobre internet.

P28.- Me gusta la plataforma Moodle del Centro



X.35 *Figura 10.35.* Frecuencias sobre gusto plataforma Moodle

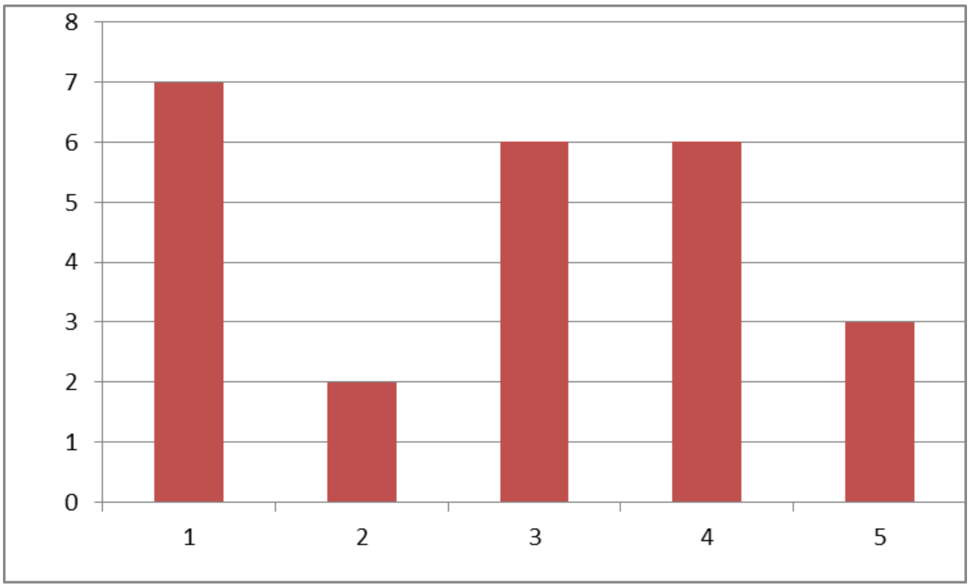
X.37 Tabla 10.37: *Valoración P28*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	5	4	8	2	5	1
% Alumnos	20%	16%	32%	8%	20%	4%

Media aritmética: 2,8

Opiniones diversas y distribución asimétrica en torno al valor central.

P29.- Me he divertido más en el aula más que con otras unidades didácticas



X.36 *Figura 10.36.* Frecuencias sobre diversión con esta unidad didáctica

X.38 Tabla 10.38: *Valoración P25*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	7	2	6	6	3	1
% Alumnos	28%	8%	24%	24%	12%	4%

Media aritmética: 2,72

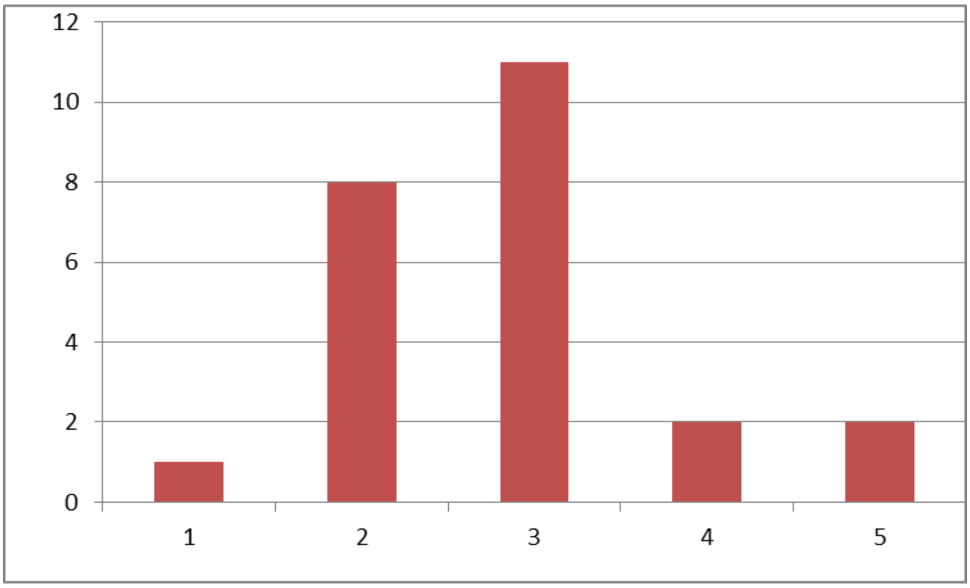
Prácticamente la mitad del alumnado se sitúa en las posiciones 3 y 4, pero también es reseñable algo más de la cuarta parte del alumnado que se sitúa en la puntuación menor.

Reflexión:

La valoración media de los ítems de este apartado es de 3,0 puntos sobre 5 y valoran más la explicación del profesor que los vídeos, dicen que aprenden más, que *"aprovechan más la clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas"* y que prefieren hacer los *"deberes clásicos"* en casa que ver un vídeo explicativo. Asimismo, prefieren estudiar revisando sus apuntes que volviendo a visionar los vídeos del tema. En otro orden de cosas, les gusta la plataforma Moodle y se han divertido más que con otras unidades didácticas.

RESPECTO A LA VALORACIÓN DE LOS VÍDEOS, SEGÚN SU TEMÁTICA

P30.- Concepto de función



X.37 *Figura 10.37.* Frecuencias valoración vídeos sobre concepto de función

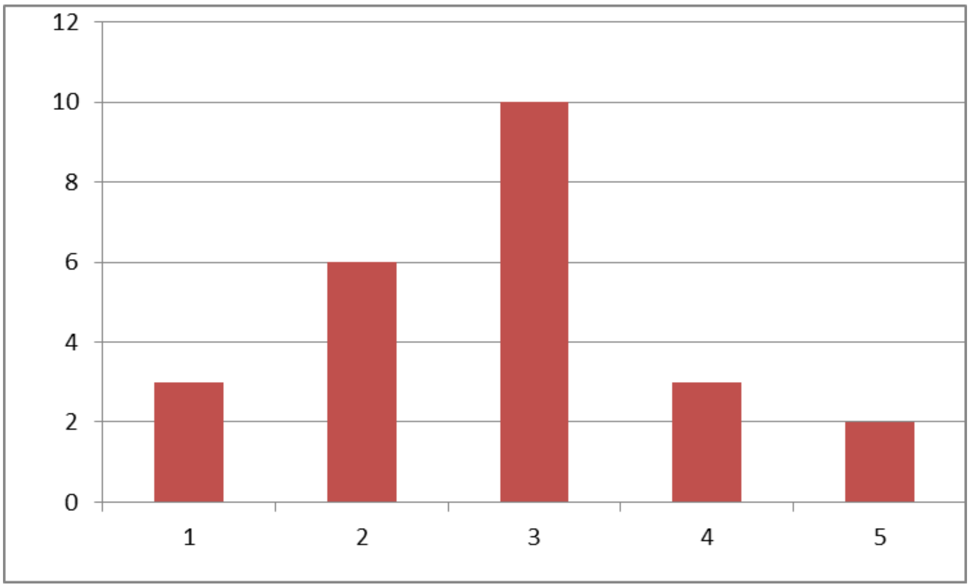
X.39 Tabla 10.39: *Valoración P30*

	1	2	3	4	5	NS/NC

Nº alumnos	1	8	11	2	2	1
% Alumnos	4%	32%	44%	8%	8%	4%

Media aritmética: 2,72

P31.- Dominio



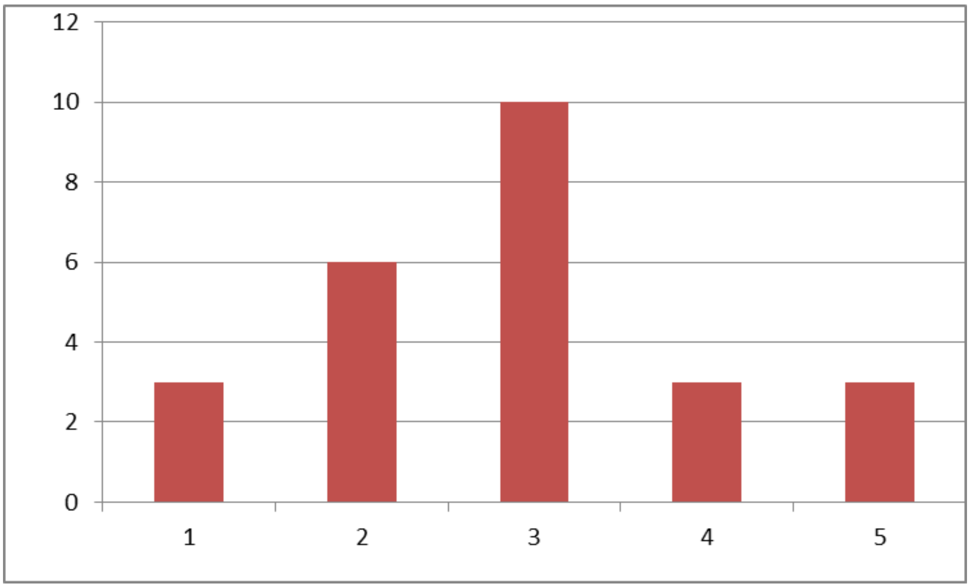
X.38 *Figura 10.38.* Frecuencias valoración vídeos sobre concepto de dominio

X.40 Tabla 10.40: *Valoración P31*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	3	6	10	3	2	1
% Alumnos	12%	24%	40%	12%	8%	4%

Media aritmética: 2,68

P32.- Recorrido



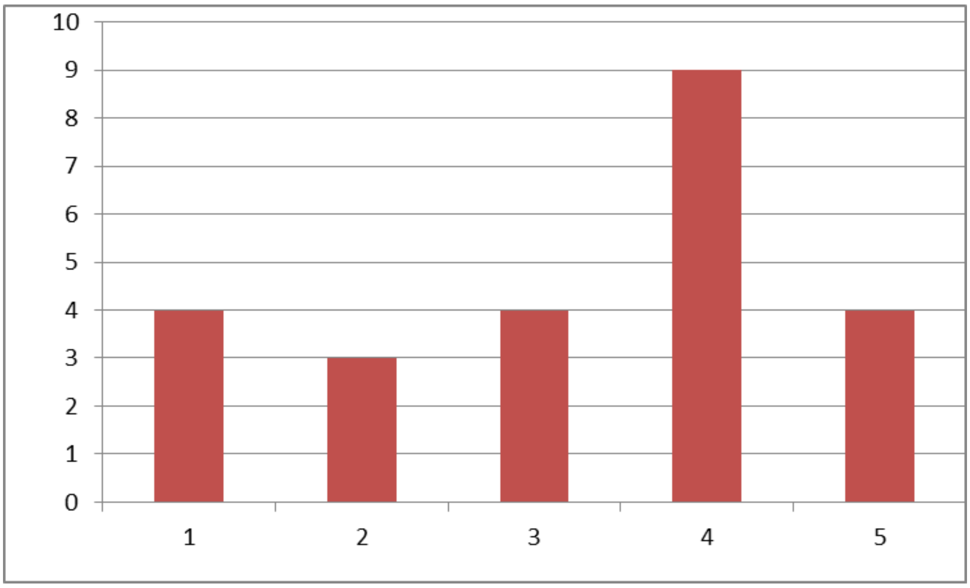
X.39 *Figura 10.39.* Frecuencias valoración vídeos sobre concepto de recorrido

X.41 Tabla 10.41: *Valoración P32*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	3	6	10	3	3
% Alumnos	12%	24%	40%	12%	12%

Media aritmética: 2,88

P33.- Crecimiento/Decrecimiento



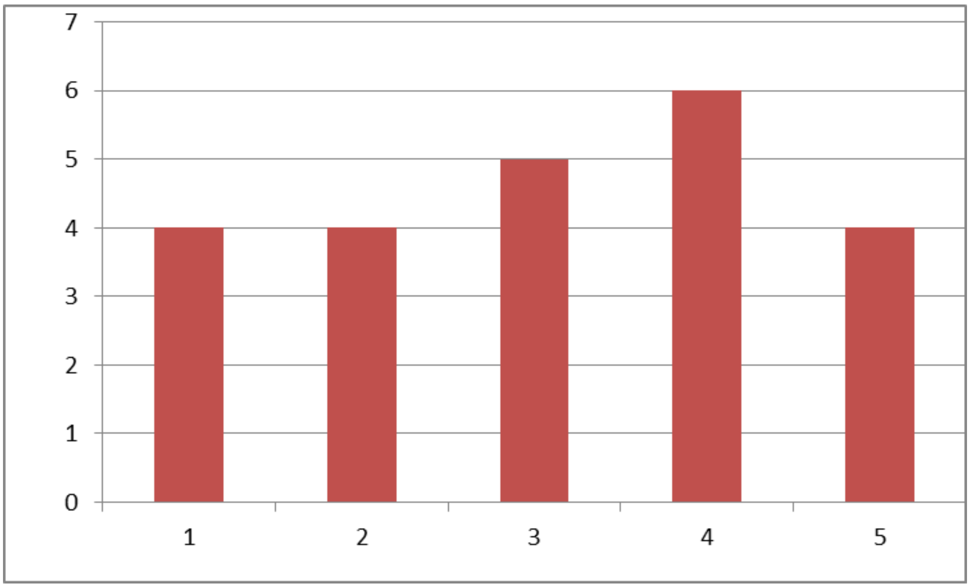
X.40 *Figura 10.40.* Frecuencias valoración vídeos sobre concepto de crecimiento/decrecimiento

X.42 Tabla 10.42: *Valoración P33*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	4	3	4	9	4	1
% Alumnos	16%	12%	16%	36%	16%	4%

Media aritmética: 3,12

P34.- Máximos/Mínimo



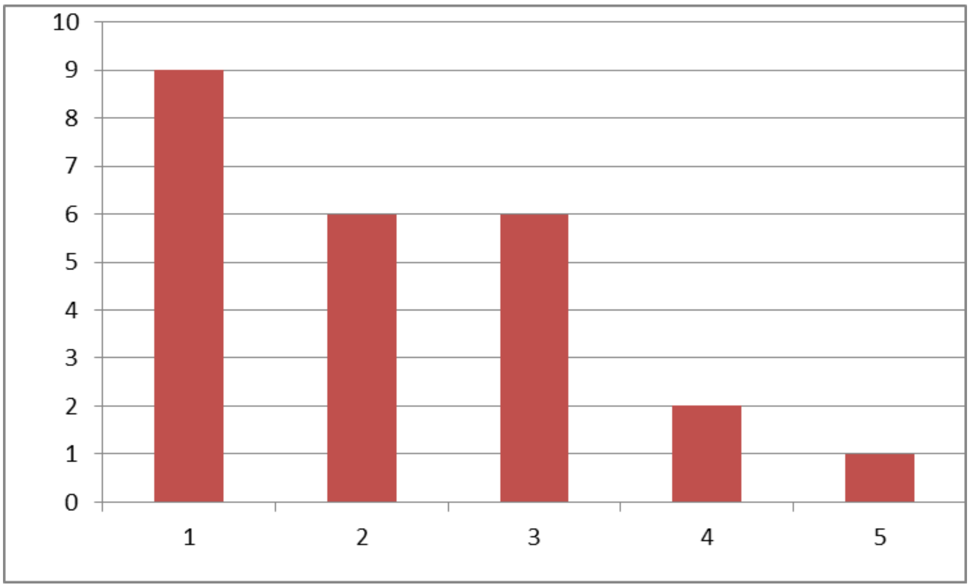
X.41 *Figura 10.41*. Frecuencias valoración vídeos sobre concepto de extremos

X.43 Tabla 10.43: *Valoración P34*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	4	4	5	6	4	2
% Alumnos	16%	16%	20%	24%	16%	8%

Media aritmética: 2,84

P35.- Periodicidad



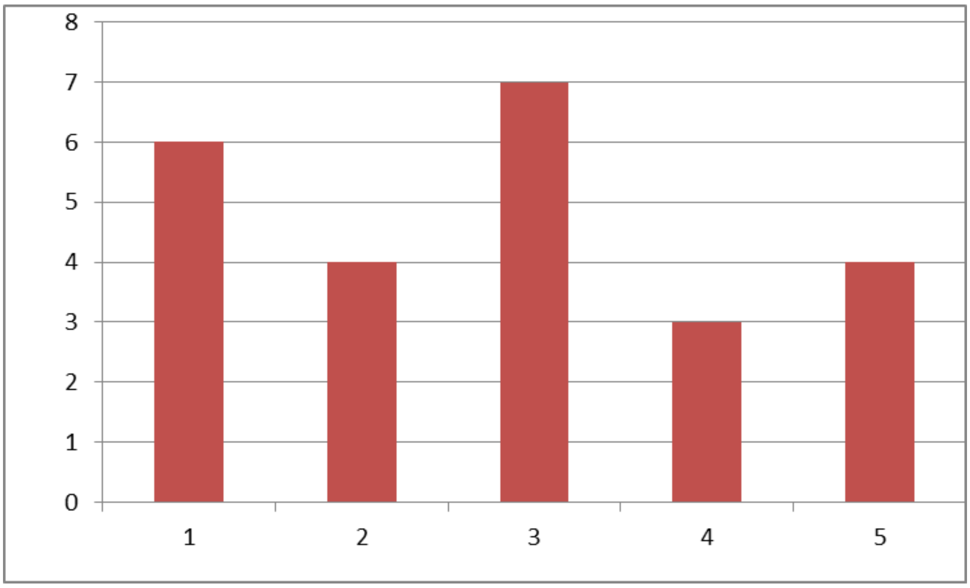
X.42 *Figura 10.42*. Frecuencias valoración vídeos sobre concepto de periodicidad

X.44 Tabla 10.44: *Valoración P35*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	9	6	6	2	1	1
% Alumnos	36%	24%	24%	8%	4%	4%

Media aritmética: 2,08

P36.- Funciones definidas a trozos



X.43 *Figura 10.43*. Frecuencias valoración vídeos sobre funciones definidas a trozos

X.45 Tabla 10.45: *Valoración P36*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	6	4	7	3	4	1
% Alumnos	24%	16%	28%	12%	16%	4%

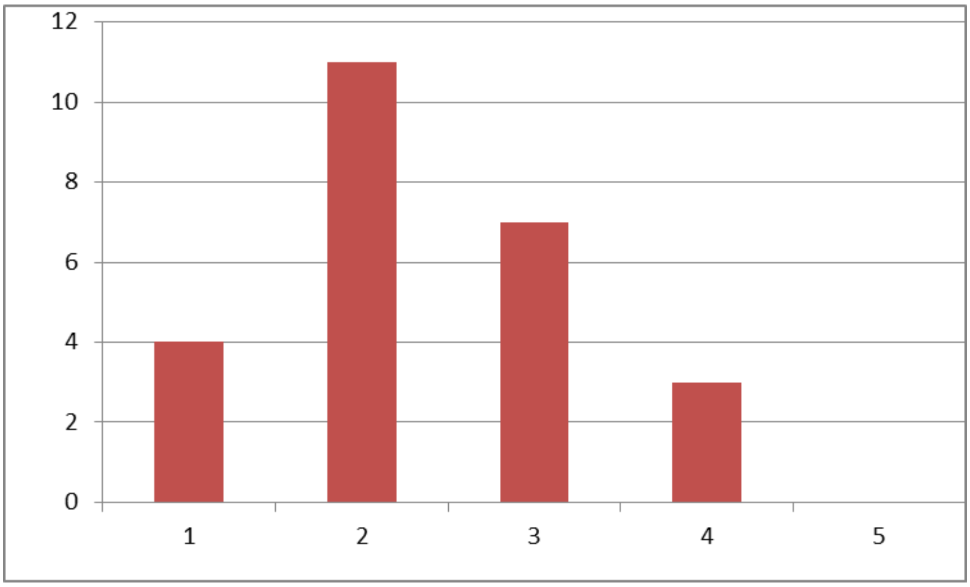
Media aritmética: 2,68

Reflexión global sobre la temática de los vídeos

Hay poca variación en el rango de valoración de los vídeos, habiendo una puntuación media de 2,7 puntos. La periodicidad es el concepto peor valorado (2,08) y el mejor valorado es el relativo al estudio de la monotonía de la función (3,12).

RESPECTO A LOS RESULTADOS OBTENIDOS

P37.- Considero que esta metodología fomenta el aprendizaje autónomo



X.44 *Figura 10.44.* Frecuencias sobre aprendizaje autónomo

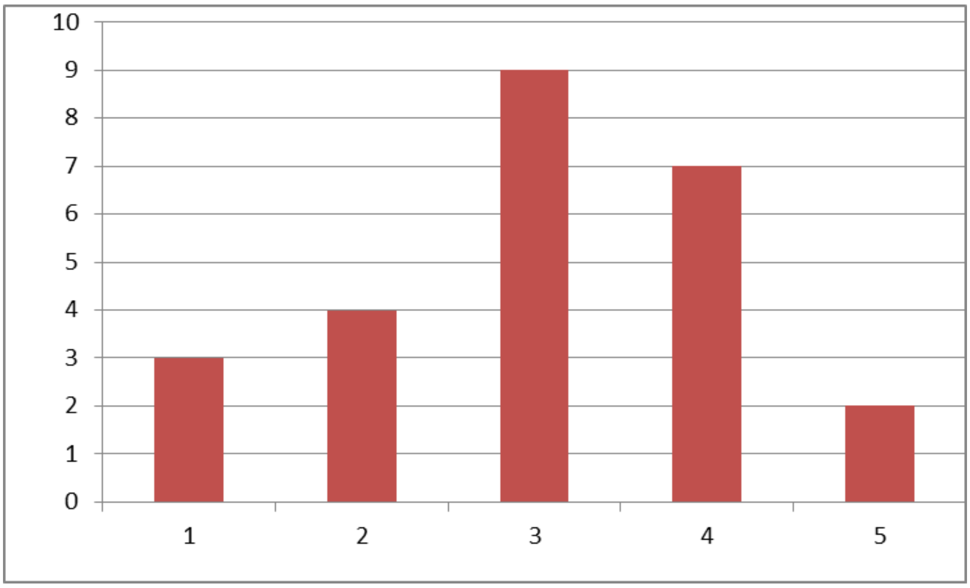
X.46 Tabla 10.46: *Valoración P37*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	4	11	7	3	0
% Alumnos	16%	44%	28%	12%	0%

Media aritmética: 2,36

El éxito en la implementación de esta metodología radica en la implicación personal del alumnado y en particular, en el aprendizaje autónomo, pero el 60% del alumnado no lo considera como tal.

P38.- Considero que esta metodología potencia el trabajo en grupo



X.45 *Figura 10.45*. Frecuencias sobre trabajo en grupo

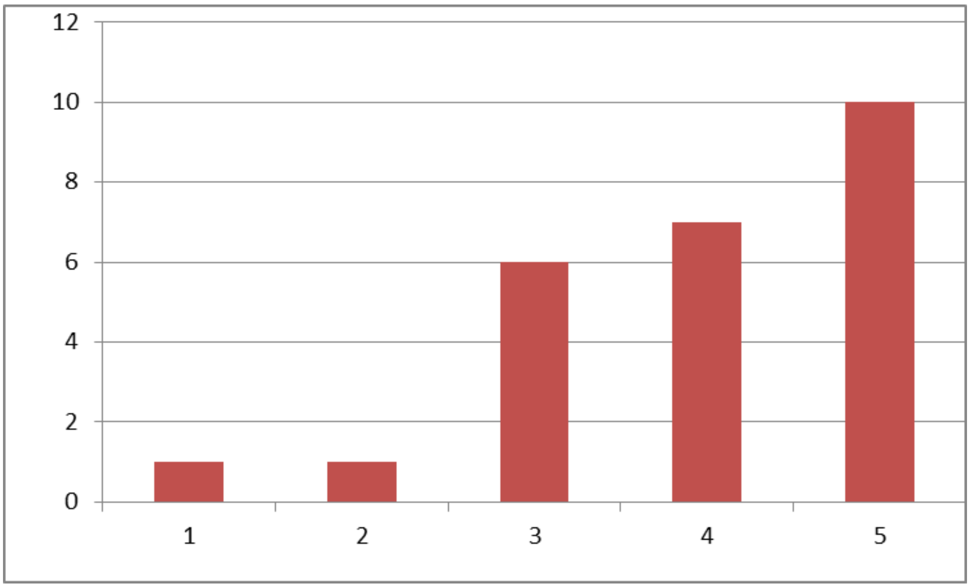
X.47 Tabla 10.47: *Valoración P38*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	3	4	9	7	2
% Alumnos	12%	16%	36%	28%	8%

Media aritmética: 2,36

En general, el alumnado ha trabajado en grupo en las diferentes metodologías activas que se han llevado a cabo en la experimentación, con diferentes grados de implicación y motivación, como muestra la distribución de las puntuaciones que se asemeja parcialmente a una normal manifestando la diversidad anteriormente expuesta.

P39.- Considero que esta metodología depende de la responsabilidad del alumno



X.46 *Figura 10.46.* Frecuencias sobre dependencia de la responsabilidad alumno

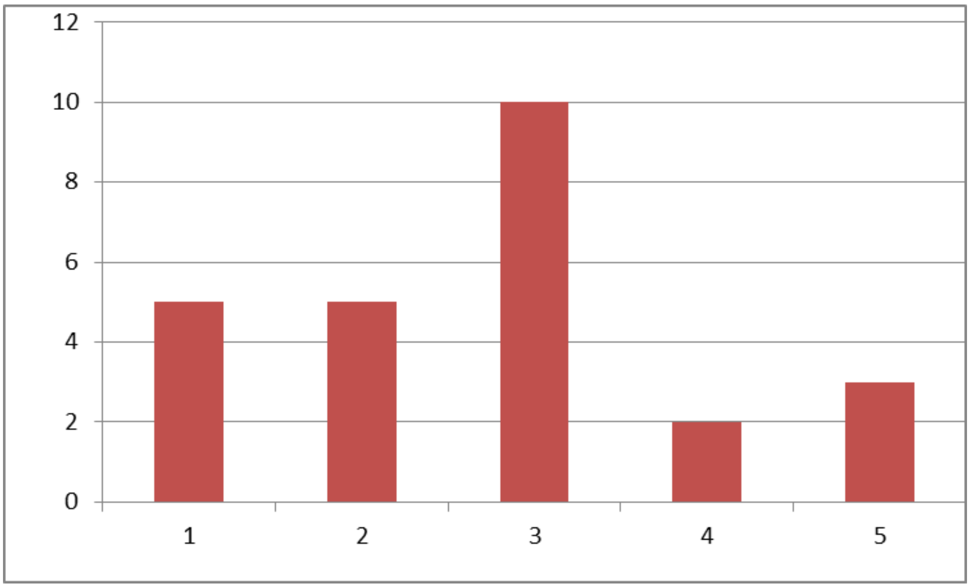
X.48 Tabla 10.48: *Valoración P39*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	1	1	6	7	10
% Alumnos	4%	4%	24%	28%	40%

Media aritmética: 3,96

Se valora con puntuaciones muy altas la dependencia entre la implementación de esta metodología con la responsabilidad del alumno, por lo que el alumnado toma cierto grado de conciencia en su protagonismo como factor decisivo en el éxito de esta nueva metodología.

P40.- Ha mejorado la convivencia en el aula



X.47 *Figura 10.47*. Frecuencias sobre mejora de la convivencia

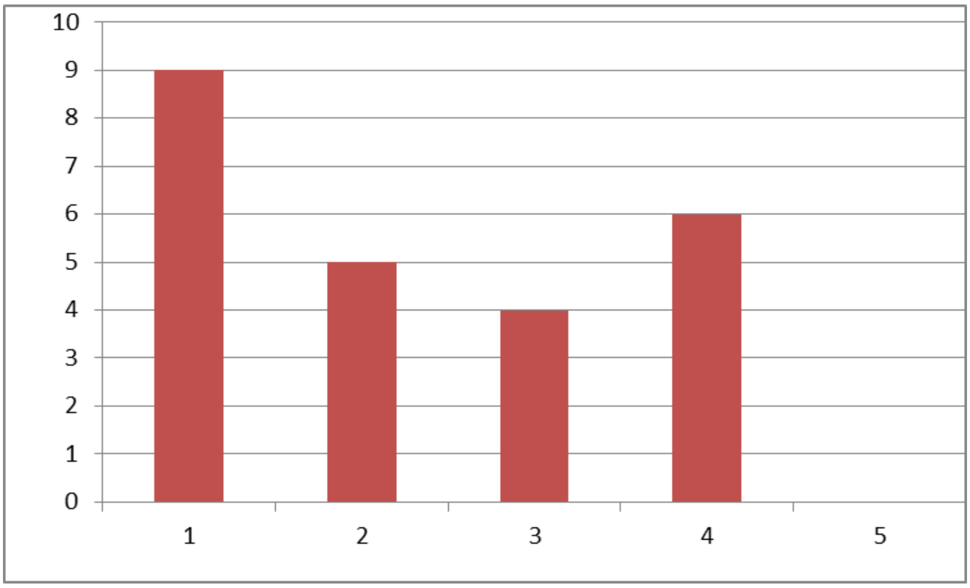
X.49 Tabla 10.49: *Valoración P40*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	5	5	10	2	3
% Alumnos	20%	20%	40%	8%	12%

Media aritmética: 2,72

Inicialmente el grupo presentaba un buen clima de trabajo y la implementación de esta metodología no ha modificado la convivencia en el aula. La mayoría del alumnado se posiciona en el valor central y el resto de forma asimétrica, con mayor peso en las valoraciones inferiores.

P41.- He comprendido conceptos relativos a funciones gracias al visionado de vídeos



X.48 *Figura 10.48.* Frecuencias sobre comprensión conceptos funcionales

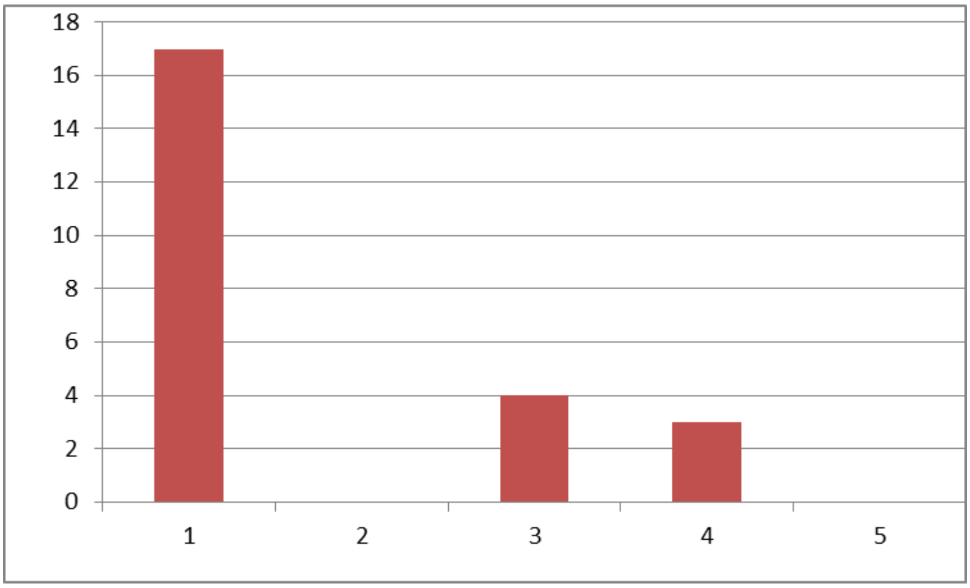
X.50 Tabla 10.50: *Valoración P41*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	9	5	4	6	0	1
% Alumnos	36%	20%	16%	24%	0%	4%

Media aritmética: 2,29

Algo más del 30% considera que los vídeos no le ha ayudado a la comprensión de conceptos funcionales, frente a una cuarta parte que lo valora con 4 puntos, el resto se distribuye en las puntuaciones 2 y 3. Se trata de una cuestión muy globalizada ante la que el alumnado puede focalizar desde las fortalezas o debilidades sobre su comprensión respecto a las funciones.

P42.- Considero que con esta metodología he aprendido más que con la metodología habitual del aula



X.49 *Figura 10.49*. Frecuencias sobre haber aprendido más con la metodología AI

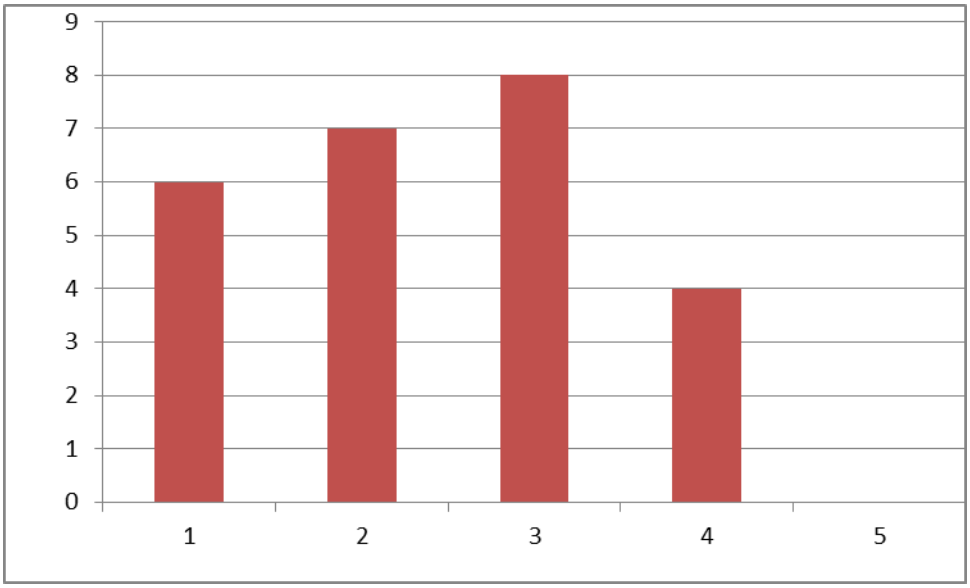
X.51 Tabla 10.51: *Valoración P42*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	17	0	4	3	0	1
% Alumnos	68%	0%	16%	12%	0%	4%

Media aritmética: 1,71

La mayoría del alumnado cree que no ha aprendido más, pero no se desprecia algo más de una cuarta parte del alumnado que valora esta nueva metodología.

P43.- Ha mejorado mi actitud frente a las matemáticas



X.50 *Figura 10.50.* Frecuencias mejora actitud ante las matemáticas

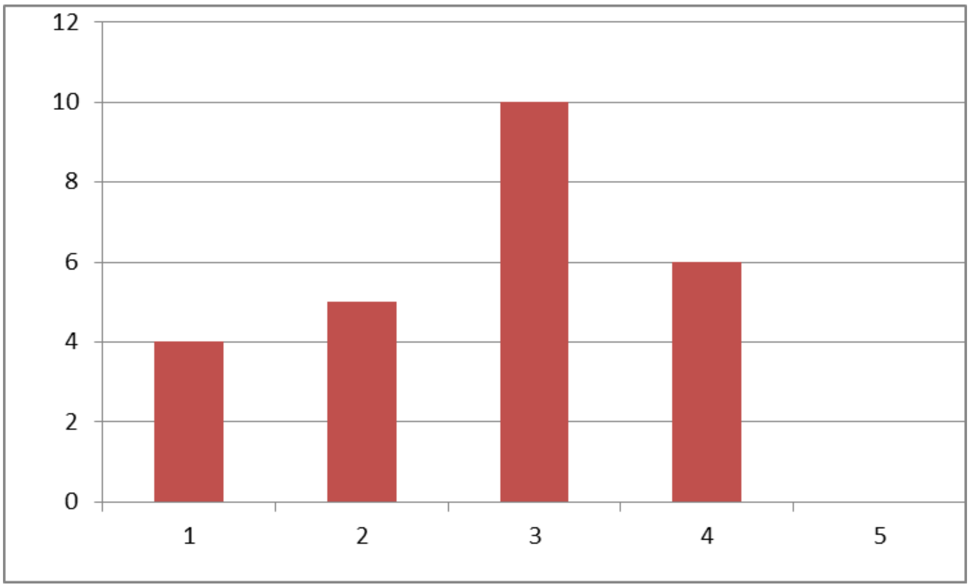
X.52 Tabla 10.52: *Valoración P43*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	6	7	8	4	0
% Alumnos	24%	28%	32%	16%	0%

Media aritmética: 2,4

Esta experimentación ha afectado en diferentes niveles de intensidad al alumnado ante su relación frente a las matemáticas.

P44.- Me ha hecho reflexionar sobre la importancia del auto aprendizaje en esta época



X.51 *Figura 10.51.* Frecuencias sobre reflexión del autoaprendizaje

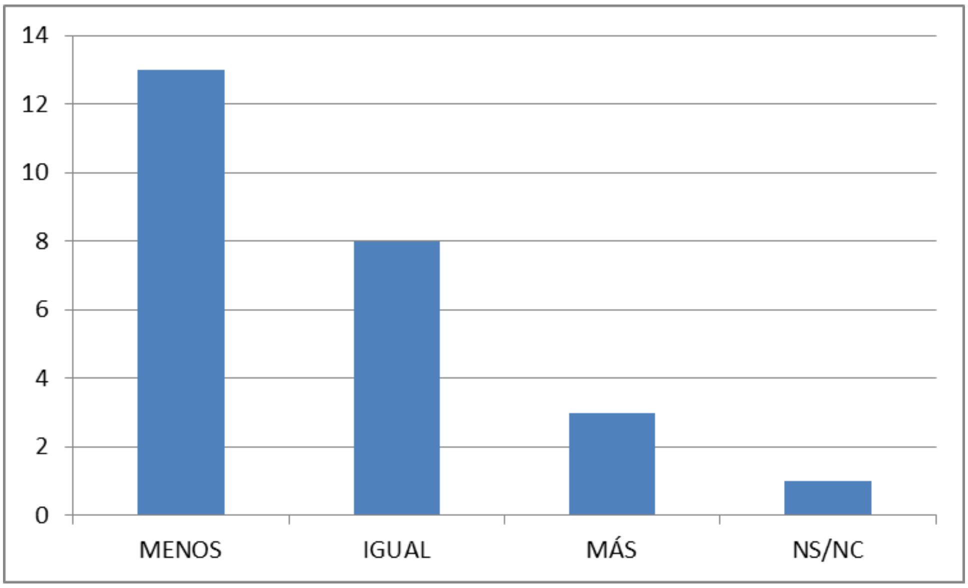
X.53 Tabla 10.53: *Valoración P44*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	4	5	10	6	0
% Alumnos	16%	20%	40%	24%	0%

Media aritmética: 2,72

En la línea de anteriores ítems, la reflexión que ha provocado en el alumno sobre la importancia del autoaprendizaje ha sido diversa distribuyéndose el alumnado en torno a la media, con mayor peso en las puntuaciones inferiores.

P45.- Considero que esta metodología me hace trabajar MÁS O MENOS o IGUAL que la habitual



X.52 *Figura 10.52*. Frecuencias sobre consideración del trabajo en AI

X.54 Tabla 10.54: *Valoración P45*

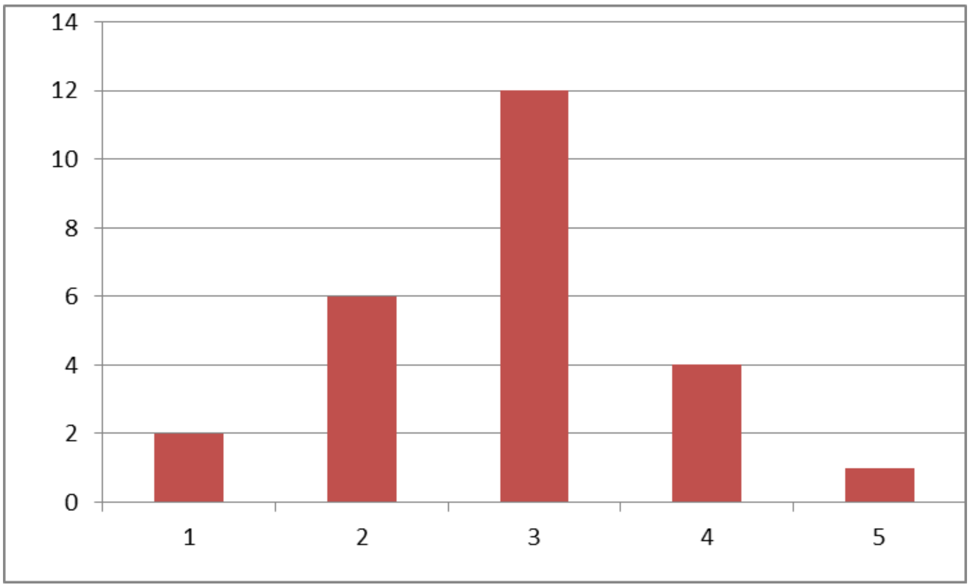
	MENOS	IGUAL	MÁS	NS/NC
Nº alumnos	13	8	3	1
% Alumnos	52%	32%	12%	4%

Reflexión:

La mayor parte de los alumnos considera que con esta metodología trabaja menos, y que con esta metodología han aprendido menos que con la metodología habitual del aula. Valoran con la puntuación más alta (3,96) *"que esta metodología depende de la responsabilidad del alumno"* y consideran que esta metodología potencia el trabajo en grupo. Sin embargo, aseguran que ha sido escasa la comprensión de conceptos relativos a funciones gracias al visionado de vídeos.

DESPUÉS DE LA EXPERIENCIA

P46.- ¿Conoces suficientemente las características de la metodología Flipped Classroom?



X.53 *Figura 10.53.* Frecuencias sobre conocimiento de la metodología AI posterior

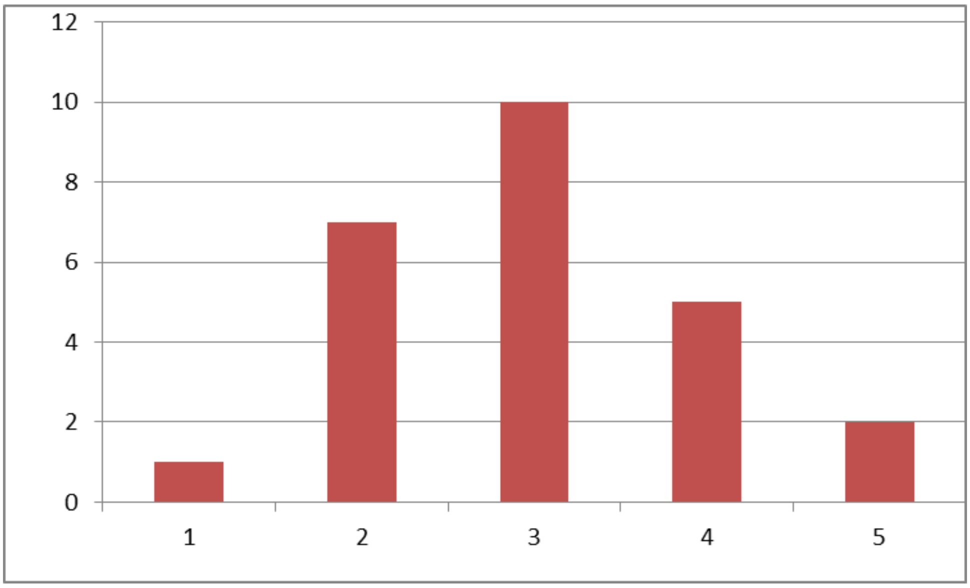
X.55 Tabla 10.55: *Valoración P46*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	2	6	12	4	1
% Alumnos	8%	24%	48%	16%	4%

Media aritmética: 2,84

Los datos se asemejan a una distribución normal sobre el valor central.

P47.- ¿Consideras que ha sido novedoso e innovador?



X.54 *Figura 10.54*. Frecuencias sobre novedad e innovación

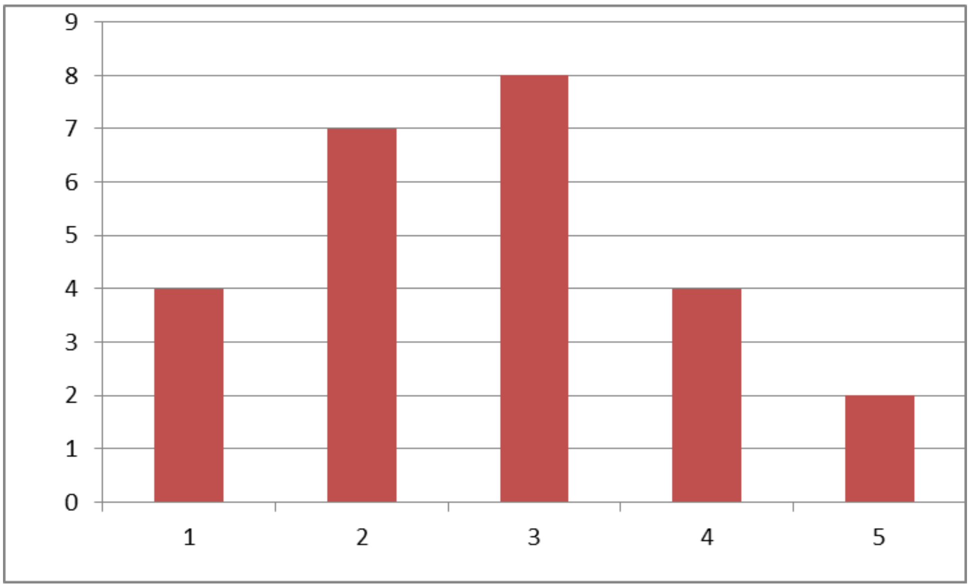
X.56 Tabla 10.56: *Valoración P47*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	1	7	10	5	2
% Alumnos	4%	28%	40%	20%	8%

Media aritmética: 3

Se presenta una análoga situación a la distribución de la pregunta anterior.

P48.- ¿Te ha parecido interesante participar en esta experiencia?



X.55 *Figura 10.55*. Frecuencias sobre interés en la participación

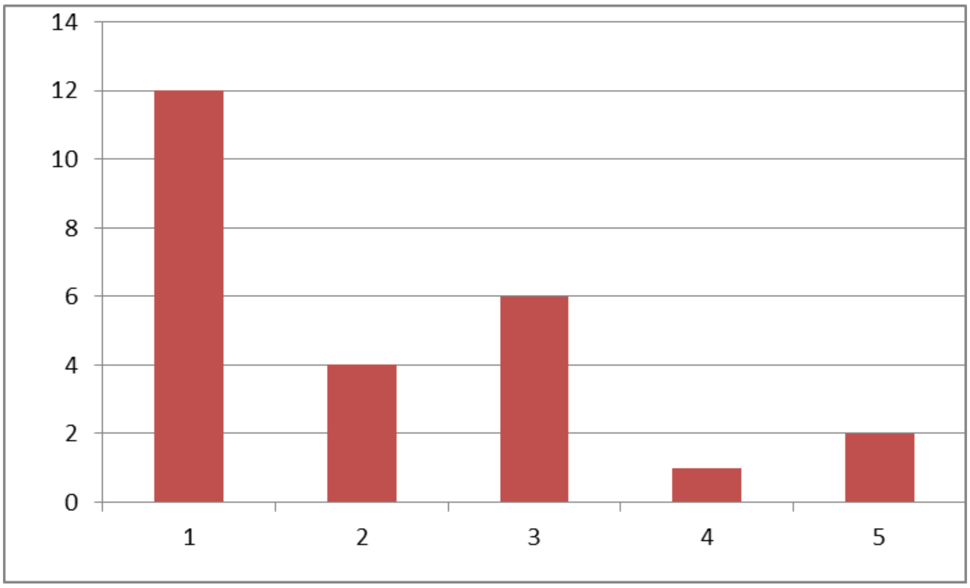
X.57 Tabla 10.57: *Valoración P48*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	4	7	8	4	2
% Alumnos	16%	28%	32%	16%	8%

Media aritmética: 2,72

El interés está muy diversificado, pero las puntuaciones se sitúan mayoritariamente en los valores inferiores y central.

P49.- ¿Te ha supuesto ansiedad cambiar la dinámica habitual del aula?



X.56 *Figura 10.56.* Frecuencias sobre ansiedad ante el cambio

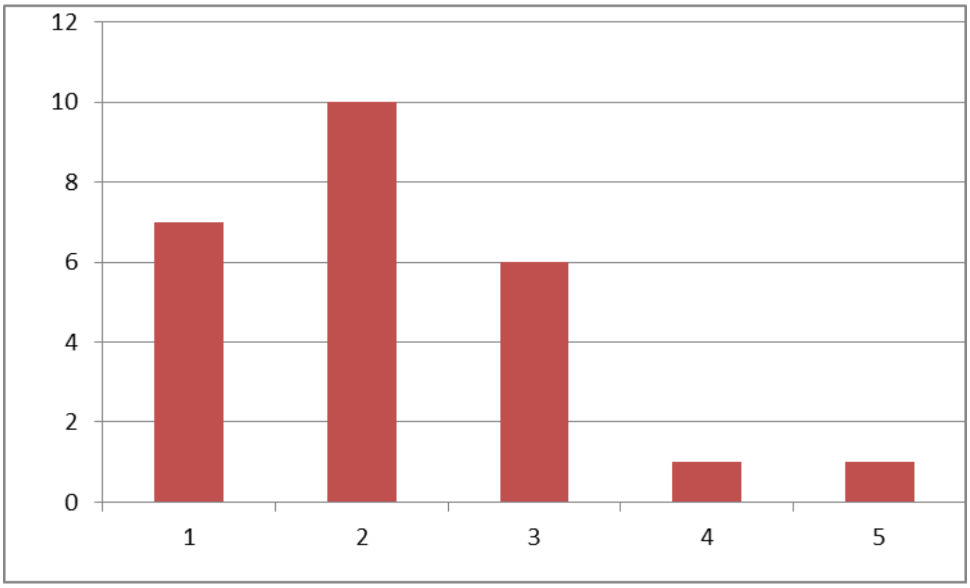
X.58 Tabla 10.58: *Valoración P49*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	12	4	6	1	2
% Alumnos	48%	16%	24%	4%	8%

Media aritmética: 2,08

Aunque prácticamente la mitad del alumnado manifiesta no haber sentido ansiedad ante el cambio, el resto se distribuye de forma asimétrica en las restantes puntuaciones; lo que muestra que toda modificación o cambio organizativo genera diferentes grados de ansiedad dependiendo del individuo.

P50.- ¿Se han cumplido las expectativas positivas respecto a esta puesta?



X.57 *Figura 10.57.* Frecuencias sobre cumplimiento de expectativas

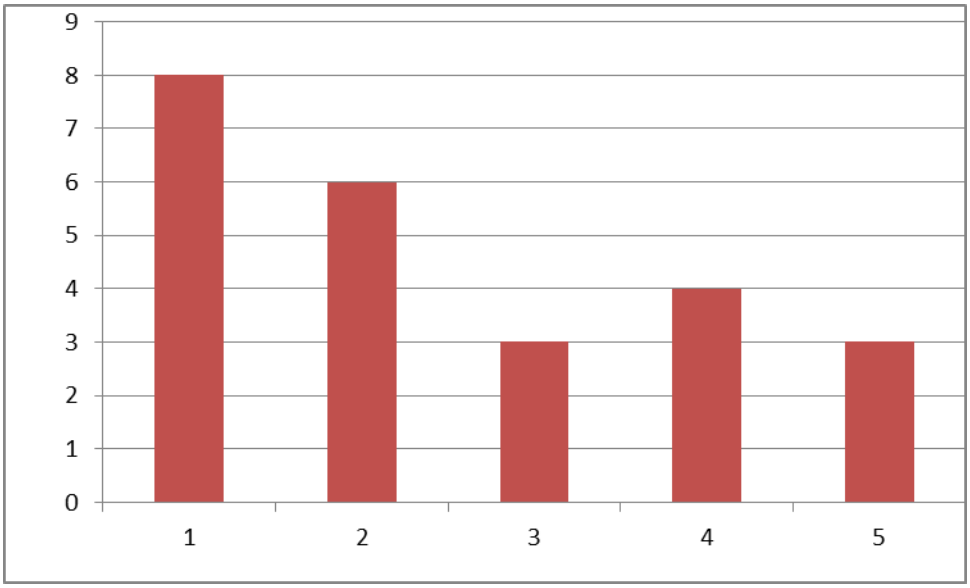
X.59 Tabla 10.59: *Valoración P50*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	7	10	6	1	1
% Alumnos	28%	40%	24%	4%	4%

Media aritmética: 2,16

El alumnado no se muestra muy optimista en relación a la materialización de su expectativas, situándose prácticamente todo el alumnado en las tres puntuaciones inferiores, centradas en el valor 2.

P51.- ¿Te has divertido en el aula más que en el desarrollo de otras unidades didácticas?



X.58 *Figura 10.58.* Frecuencias sobre diversión con la unidad didáctica

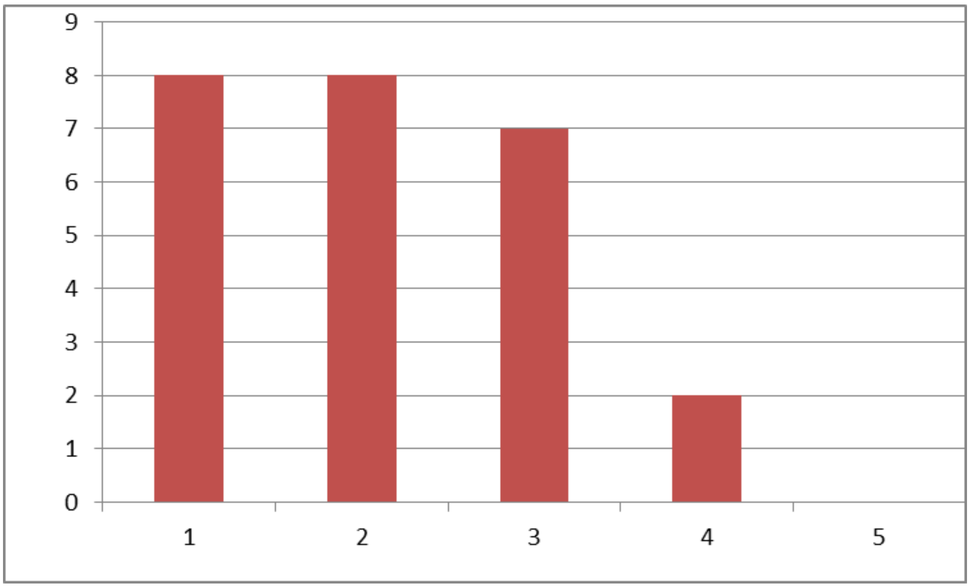
X.60 Tabla 10.60: *Valoración P51*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	8	6	3	4	3	1
% Alumnos	32%	24%	12%	16%	12%	4%

Media aritmética: 2.4

La valoración del grado de diversión frente a una tarea académica tiene cierto grado de subjetividad, pero se manifiesta que ha habido un gran espectro en las puntuaciones relativas al respecto.

P52.-Te parece positiva esta metodología



X.59 *Figura 10.59.* Frecuencias sobre positividad de la metodología AI

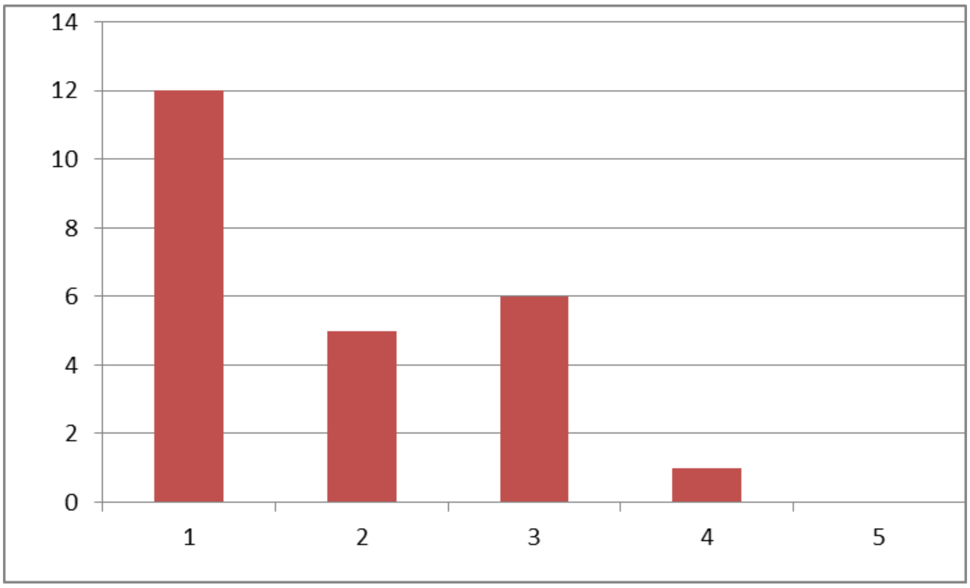
X.61 Tabla 10.61: *Valoración P52*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	8	8	7	2	0
% Alumnos	32%	32%	28%	8%	0%

Media aritmética: 2,12

Por un lado, hay un amplio sector que no manifiesta positividad ante esta metodología (64%), pero el resto puntúan entre el 3 y el 4 las potencialidades de esta nueva metodología, lo que supone una apertura hacia la innovación educativa.

P53.-Desearías que esta metodología se utilizase más habitualmente en la materia de Matemáticas



X.60 *Figura 10.60.* Frecuencias sobre deseo de mayor utilización de AI en matemáticas

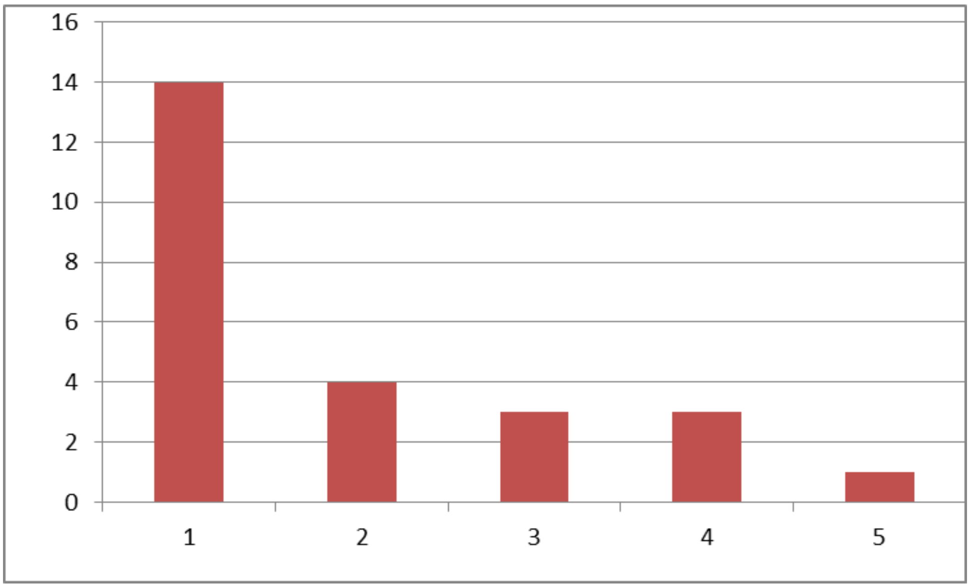
X.62 Tabla 10.62: *Valoración P53*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	12	5	6	1	0	1
% Alumnos	48%	20%	24%	4%	0%	4%

Media aritmética: 1,76

Se podría interpretar que sobre el 28% no mostraría oposición en utilizar la metodología de AI en otros bloques de contenido de Matemáticas, pero el resto muestra resistencia y lo valora con las menores puntuaciones.

P54.-Te gustaría que se implementase en otras materias



X.61 *Figura 10.61*. Frecuencias sobre deseo de mayor utilización de AI en otras materias

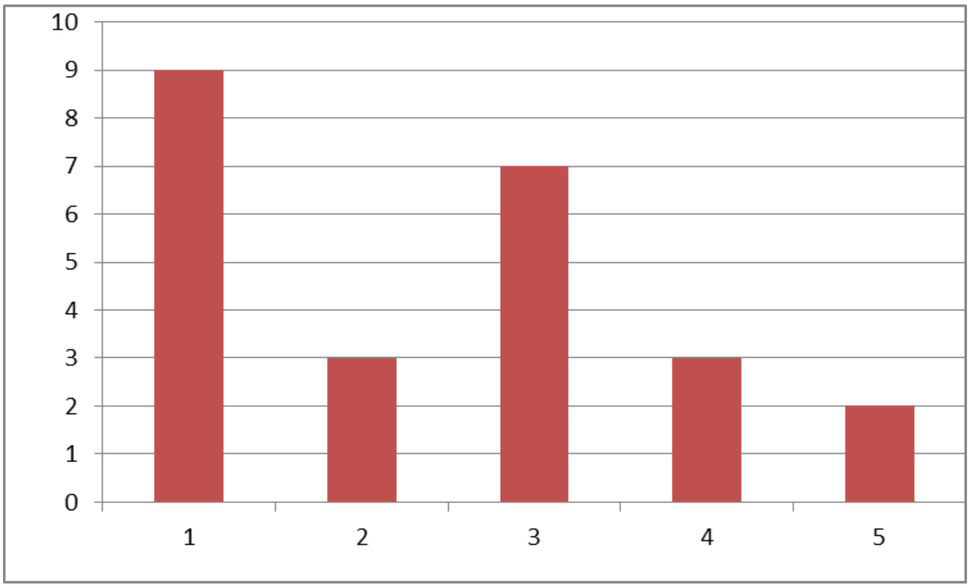
X.63 Tabla 10.63: *Valoración P54*

	1	2	3	4	5
Nº alumnos	14	4	3	3	1
% Alumnos	56%	16%	12%	12%	4%

Media aritmética: 1,92

Se mantiene una distribución parecida a la pregunta anterior, con una media ligeramente superior, ya que algunos alumnos parecen preferir que se implemente esta metodología en otras materias mejor que en matemáticas.

P55.- ¿Consideras que has aprendido más que si se hubiera mantenido la metodología anterior?



X.62 *Figura 10.62.* Frecuencias sobre comparativa de aprendizaje

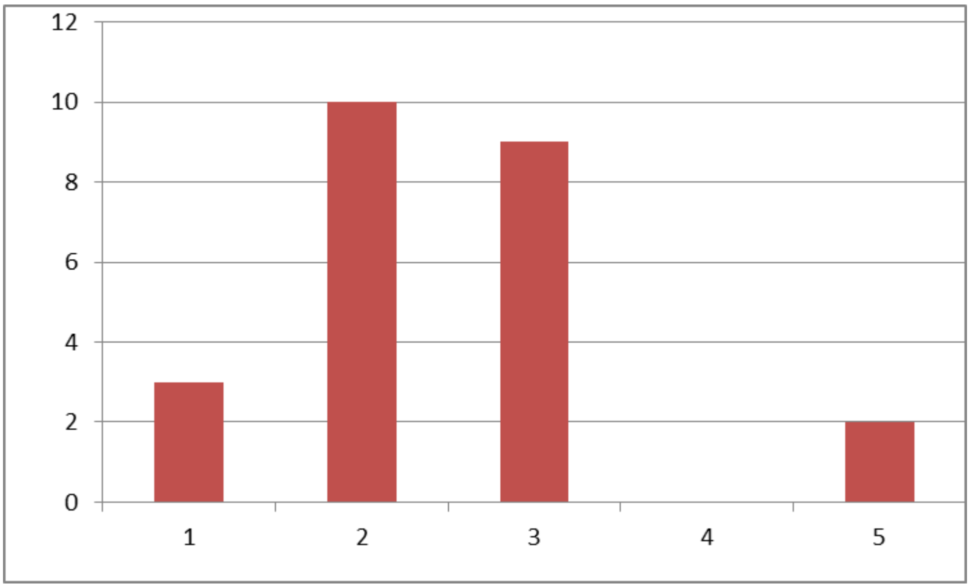
X.64. Tabla 10.64: *Valoración P55*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	9	3	7	3	2	1
% Alumnos	36%	12%	28%	12%	8%	4%

Media aritmética: 2,32

Casi la mitad del alumnado percibe que no ha aprendido más que con otras metodologías, con diferente graduación; alrededor de una tercera parte se sitúa en la puntuación central y otro tercio en las puntuaciones más altas. Las pruebas objetivas no corroboran estas percepciones pero se consideran de interés su estudio y análisis, ya que coinciden con investigaciones precedentes presentadas en los antecedentes de la presente tesis.

P56.-Grado de satisfacción con la experiencia realizada



X.63 *Figura 10.63.* Frecuencias sobre grado de satisfacción

X.65 Tabla 10.65: *Valoración P56*

	1	2	3	4	5	NS/NC
Nº alumnos	3	10	9	0	2	1
% Alumnos	12%	40%	36%	0%	8%	4%

Media aritmética: 2,4

Reflexión:

La valoración media de este apartado es de 2,34. Reconocen su carácter innovador, que conocen suficientemente las características de esta metodología y que ha sido interesante participar en dicha metodología, pero no desean que se aplique en otras unidades ni en otras materias. Declaran que no les produce ansiedad esta metodología y que se han cumplido escasamente sus expectativas de aprendizaje.

X.2.10 Protocolo del Observador Externo

A continuación, se presenta el cuestionario-protocolo completo contestado por la profesora Dña. Marta Carazo Lores en su calidad de Observadora Externa.

Puntúa de 1 a 5, según la escala de Likert, las siguientes cuestiones que permiten valorar la docencia. A continuación, escribe tu opinión por escrito, para apreciar mejor los matices de la valoración. (La opción elegida se presenta en negrita).

1	*2*	*3*	*4*	*5*

En total desacuerdo	*Poco de acuerdo*	*Ni de acuerdo ni en desacuerdo*	*Bastante de acuerdo*	*Totalmente de acuerdo*

Valoración de la programación didáctica

1. Grado de adecuación de los objetivos y contenidos de la docencia al nivel educativo de los alumnos.

Puntuación:	1	2	3	**4**	5

Opinión: Objetivos y contenidos pertenecientes al currículo de la materia

2. Valora la metodología utilizada en el desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	**4**	5

Opinión:

3. Valora la temporalización del proceso de enseñanza de los contenidos.

Puntuación:	1	2	3	**4**	5

Opinión:

6. ¿Se introducen los contenidos nuevos a partir de los conocimientos que posee el alumno? (Especialmente a partir de conceptos, lenguaje matemático,…)

Puntuación:	1	2	3	**4**	5

Opinión:

7. ¿Se refuerzan suficientemente los conceptos con los ejercicios y ejemplos propuestos?

Puntuación:	1	2	**3**	4	5

Opinión: *Depende también de lo que trabaje el alumno, no solo de la metodología*

Valoración de la actuación del Profesor

1. Dominio de los contenidos tratados.

Puntuación:	1	2	3	4	**5**

Opinión:

2. Claridad y calidad de sus intervenciones.

Puntuación:	1	2	3	**4**	5

Opinión*: Siempre se puede mejorar la claridad de las intervenciones*

3. Comportamiento y papel del profesor durante el desarrollo de la docencia:

X Motivación a los alumnos para el aprendizaje.

X Interés por el aprendizaje de los alumnos.

Valoración del conocimiento previo de los alumnos.

X Atención a la diversidad.

Resolución de dudas. Solvencia ante las preguntas de los alumnos.

Adecuación de los ejemplos y ejercicios para practicar.

Se corrigen los ejercicios.

Las pruebas escritas se corresponden con lo tratado en clase.

El profesor mantiene el orden en clase.

Alumnos

1. Grado de atención de los alumnos a las explicaciones.

Los videos deben ser cortos y muy claros para no perder la atención del alumno

2. Trabajo personal del alumno en clase (estudio, realización de ejercicios, atención a la explicación, corrección de ejercicios,…).

No varía respecto al trabajo que suelen hacer con otra metodología

3. Interacciones que se dan entre los alumnos (silencio, hablan, discuten, colaboran…)

Interesante discusiones sobre las distintas maneras de entender un concepto

4. Motivación de los alumnos hacia el aprendizaje.

Puntuación:	1	2	**3**	4	5

Opinión: *No me parece una metodología para aplicar en uno solo de los temas, debe utilizarse de manera constante, puesto que requiere mucho trabajo por parte de los alumnos.*

5. Participación de los alumnos durante el desarrollo de la docencia (salidas a la pizarra, intervenciones orales,...). Tipo de preguntas que realizan.

Los alumnos estaban ya acostumbrados a salir a la pizarra, así que cuando se desarrolló esta metodología los alumnos siguieron saliendo a ella.

Las preguntas han sido sobre dudas o conceptos que no entendían o que habían entendido mal en los libros.

Interacciones profesor-alumnos

1. Frecuencia de las interacciones: nunca, rara vez, a menudo, constantemente.

Constantemente

2. Tipo de interacción:

Ninguna interacción: monólogo del profesor.

El alumno siempre provoca las situaciones de interacción.

X El profesor crea situaciones de interacción.

Interacción individual profesor-alumno.

X Interacciones colectivas profesor-alumno.

Recursos y condiciones materiales

1. ¿Se hace uso de medios tecnológicos en el desarrollo de la docencia? ¿Son necesarios?

Siempre que se puede. Se puede dar la materia sin medios tecnológicos, pero estos siempre nos ayudaran tanto en explicaciones, como a la hora de motivar al alumno.

2. Valora la idoneidad de los recursos empleados en relación al desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	**3**	4	5

Opinión: *No ha sido una experiencia totalmente satisfactoria puesto que ha habido alumnos que no han participado de forma activa en ella.*

Incidencias especiales

1. Imprevistos observados y posibles motivos.

Algunos problemas con la plataforma Moodle, puesto que no se tiene la suficiente formación para resolver los problemas técnicos.

Que los alumnos no lleven los visionados al día para poder realizar todas las actividades previstas.

2. Cuál es tu impresión sobre lo que han aprendido los alumnos (poco 1, mucho 5).

Puntuación:	1	2	**3**	4	5

Opinión: *Las notas finales del tema no varían respecto a otras metodologías, los alumnos que estudian diariamente siguen manteniendo su trabajo y sus notas.*

3. Comentarios finales del observador externo.

Como ya he comentado anteriormente, la metodología estudiada tiene que ser utilizada de manera constante para obtener resultados mejores que con las metodologías clásicas. Es necesario que los alumnos cambien su manera de trabajar y estudiar en casa; aunque parezca una metodología que no requiere mucho esfuerzo, en el caso de los alumnos, éstos se quejan de que con ella tienen que trabajar mucho más.

X.3 ANEXO SEGUNDO CICLO INVESTIGACIÓN CURSO 2015/16

X.3.1 Test inicial de conocimientos previos IES Recesvinto. Venta de Baños. Curso 2015/16

Nombre y Apellidos:____

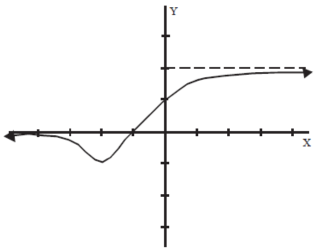
CUESTIONARIO INICIAL. IES RECESVINTO. Venta de Baños. CURSO 2015/16

TENDENCIA FUNCIONAL. ASÍNTOTAS

1.- Estudio de la tendencia de la gráfica de una función:

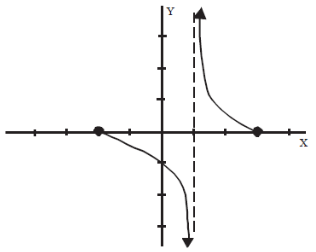
a) Señala sobre la gráfica la tendencia de la x y de la y en los lugares donde se escapa la gráfica de la función.

b) Completa las frases que acompañan al texto.



Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$

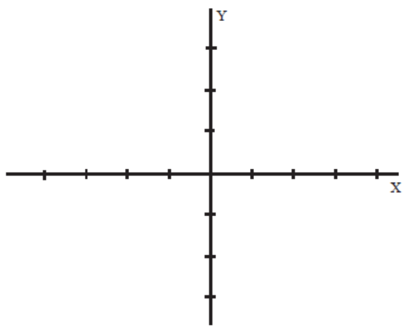
Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$



Cuando $x \to 1^{+}$, $f(x) \to$

Cuando $x \to 1^{-}$, $f(x) \to$

2.- Dibuja una función con las siguientes características:



Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 1$

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$

3.- ¿Qué se observa cuando se estudia la tendencia de una función?

X.3.2 Material fotocopiado de trabajo facilitado al alumnado

X.3.2.1 1ª Sesión (14/03/16)

ESTUDIO DE LAS ASÍNTOTAS A TRAVÉS DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN. IES RECESVINTO.

Nombre y Apellido:____

Video 1

Acabas de ver un vídeo muy sencillo. En la pantalla se aprecia como unos puntos se mueven hacia otros. Contesta a las siguientes preguntas poniendo una cruz en lo que te parezca verdadero:

1. El punto *D* respecto de *A* es: una aproximación◯, una tendencia◯
2. Los puntos *P* y *P'* llegan a estar más cerca de *A* que *D*, por tanto:

se aproximan a *A* ◯, tienden a *A* ◯

3. Las abscisas de *P* y de *P'* llegan a estar más cerca de la abscisa de *A* que la abscisa de *D*: sí ◯, no ◯
4. Si el punto *D* estuviera más cerca de *A*, *P* y *P'* no estarían más cerca de *A* que *D*: sí ◯, no ◯
5. ¿Podría situar el punto *D* tan cerca de *A*, de modo que no podría ser mejorada la proximidad a *A* por ningún punto *P* y *P'*?: sí ◯, no ◯
6. Siempre puedo encontrar ordenadas de *P* y de *P'* que están más cerca de la ordenada de *A* que la ordenada de *D*: sí ◯, no ◯

Responde a las siguientes cuestiones y valora el vídeo

¿Qué diferencia hay entre aproximar y tender?

Representa una tendencia finita de la abscisa.

¿Qué es para ti la tendencia de abscisas finita?

Representa gráficamente que la variable *x* tiende al valor *5* del eje de abscisas.

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Vídeo 2

Acabas de ver un vídeo muy sencillo. En la pantalla se aprecia como unos puntos se mueven hacia otros. Contesta a las siguientes preguntas poniendo una cruz en lo que te parezca verdadero:

1. Elige la frase o frases que consideres verdaderas y justifica tu respuesta:

◯ La tendencia infinita positiva es que el punto *P* se aleja del origen *O* sin saber hasta qué punto.

◯ Un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa es menor que la de cualquier otro punto *A* prefijado.

◯ Un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto *A* prefijado.

¿Cómo explicarías a un compañero qué es la tendencia infinita?

¿En qué se diferencia la tendencia finita de la tendencia infinita?

Escribe una situación real dónde se presente una tendencia finita.

Ídem para una tendencia infinita.

Sitúa un punto *P* en el eje de abscisas, se va acercando hacia el origen de coordenadas recorriendo en cada segundo la mitad de la distancia que le separa de dicho punto. ¿Qué tipo de tendencia presenta ese punto, finita o infinita?

Comprendo el concepto de tendencia

◯mejor la tendencia finita◯ mejor la tendencia infinita ◯ en los dos casos igual

◯ en ninguno

Observaciones:

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

VIDEO 3

Contesta a las siguientes preguntas poniendo una cruz en lo que te parezca verdadero:

Sólo es importante estudiar en la gráfica la tendencia siguiendo el orden de la recta real es decir de izquierda a derecha: sí ◯, no ◯

Representa gráficamente que un punto de una gráfica, *A*, tienda POR LA IZQUIERDA a otro punto de la gráfica, *P*, ayúdate de algún punto que esté próximo a *A*.

Explica con tus palabras que significa que un punto de una gráfica, *A*, tienda por la izquierda a otro punto *P*, ¿recuerdas que notación se utilizaba en los vídeos?

Representa gráficamente que un punto de una gráfica, *B*, tienda POR LA DERECHA a otro punto de la gráfica, *P*, ayúdate de algún punto que esté próximo a B.

Explica con tus palabras que significa que un punto de una gráfica, *B*, tienda por la DERECHA a otro punto *P*, ¿recuerdas que notación se utilizaba en los vídeos?

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

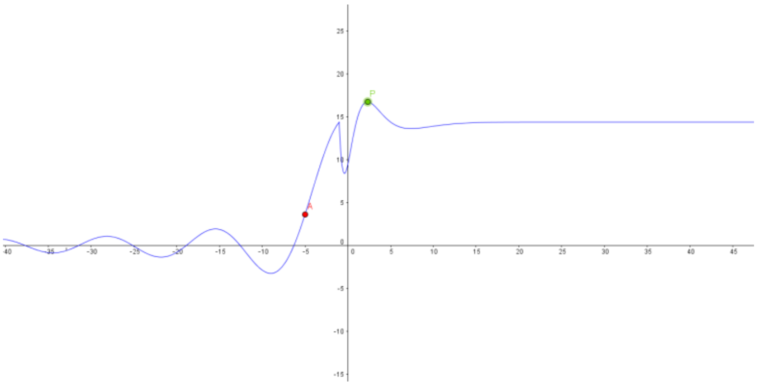
a) Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____
b) Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____
c) Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

VIDEO 4

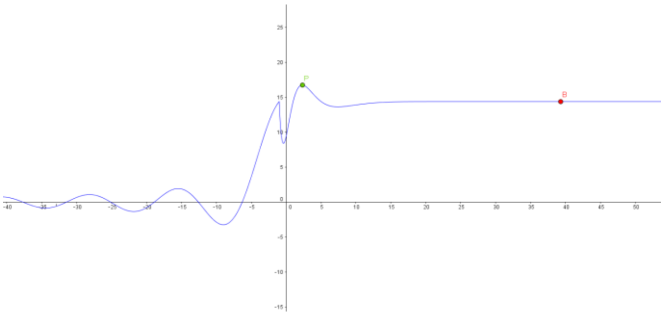
Explica con tus palabras que significa que un punto *A* de la gráfica tienda a infinito.

Explica con tus palabras que significa que un punto *B* de la gráfica tienda a menos infinito.

En la siguiente gráfica el punto de la gráfica, *A*, tiende por la izquierda a otro punto *P*. Representa las dos tendencias que lleva asociado ese movimiento, por un lado en el eje de abscisas y por otro en el de ordenadas. Explícalo con tus palabras e intentar formalizar tus ideas.



Repite lo mismo que la pregunta anterior, pero ahora, *B*, tendiendo por la derecha al punto *P*.



¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

a) Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b) Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c) Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Valoración de los vídeos:	1	2	3	4	5
Claridad en la exposición					
Interés del contenido					
El visionado de vídeos dinámicos me facilita la comprensión de los conceptos					
Me ha gustado esta nueva metodología					

Observaciones:

X.3.2.2 2ª Sesión (15/03/16)

ESTUDIO DE LAS ASÍNTOTAS A TRAVÉS DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN. IES RECESVINTO.

Nombre y Apellido:____

Video 5

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Video 6

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Video 7

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Video 8

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Contesta Verdadero o falso, justificando la respuesta:

1. Si cuando *A* tiende a infinito la distancia entre los puntos de la curva *A* y de la recta *R* tiende a cero. *(d(A,R)→0)*, en el infinito, la curva se comporta como la recta.
2. Pienso en un número cualquiera, incluso muy pequeño, siempre encontraré dos puntos, uno de la curva y otro de la recta cuya distancia es menor que ese valor. ¿Esto es posible?
3. La curva tiene una asíntota. Pienso en un valor muy pequeño ¿puedo encontrar un punto de la curva cuya distancia a recta sea menor que ese valor?
4. Toda tendencia asintótica es una tendencia infinita.
5. Toda tendencia infinita es asintótica.
6. Una función puede tener tendencias finitas e infinitas en la misma gráfica.
7. Si una función tiene tendencia infinita, ¿ocurre lo mismo en el infinito positivo que en el negativo?
8. No todas las gráficas de funciones tienen comportamientos asintóticos, no todas tienen asíntotas.

Se presentan las siguientes funciones dibujadas con el programa GeoGebra.

Debes señalar sus tendencias. Especifica si tienen tendencia infinita o tendencia asintótica.

	Tendencia infinita cuando x$\to -\infty$	Tendencia infinita cuando x$\to +\infty$	Tendencia asintótica cuando x$\to -\infty$	Tendencia asintótica cuando x$\to +\infty$	Justifica la respuesta
$\mathrm{f}(x) = 3^x$					

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$					
$f(x) = x^3$					
$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$					
$f(x) = \arctan(x)$					
$f(x) = \dfrac{2x^4-9x^3-9}{x^4+x^2+6}$					

A modo de conclusión:

¿Cuándo presenta una función un comportamiento asintótico?

Haz una representación simbólica en el siguiente plano cartesiano de las posibilidades que puede presentar una función de asíntotas horizontales.

Valoración de los vídeos:	1	2	3	4	5
Claridad en la exposición					
Interés del contenido					
El visionado de vídeos dinámicos me facilita la comprensión de los conceptos					
Me ha gustado esta nueva metodología					

X.3.2.3 3ª Sesión (17/03/16)

ESTUDIO DE LAS ASÍNTOTAS A TRAVÉS DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN. IES RECESVINTO.

Nombre y Apellido:____

3ª SESIÓN (17/03/16) **ASÍNTOTAS VERTICALES**

Responde verdadero o falso, justificando la respuesta:

1. Las funciones presentan, como mucho, dos asíntotas verticales.
2. Si $f(x)$ tiene como asíntota la recta $x = k$, entonces k no pertenece al dominio definición de la función.
3. Si k no pertenece al dominio definición de la función, entonces $x = k$ es una asíntota vertical.
4. Una función no puede presentar asíntotas horizontales y verticales.

5. La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical $x = k$, la función nunca puede cortar a la asíntota vertical.
6. Una función nunca puede cortar a las asíntotas, ni verticales ni horizontales.

Visualización de los comportamientos de las funciones utilizando los archivos de GeoGebra presentados en los vídeos grabados por parejas.

Manipulación de las diferentes opciones que presenta GeoGebra para familiarizarse con el programa y explotar todas las posibilidades que ofrece para la comprensión del concepto de asíntotas.

Se presentan 8 funciones dibujadas con el programa GeoGebra.

Debes estudiar sus tendencias, especifica si tienen tendencia asintótica. Deberá buscar la expresión algebraica de la asíntota.
Este ejercicio lo haría cada alumno individualmente en el ordenador.

	Tendencia asintótica horizontal	Tendencia asintótica vertical	Expresión de la asíntota	Justifica la respuesta
$f(x) = senx$				
$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0$				
$f(x) = \ln(x)$				
$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$				
$f(x) = \dfrac{-5}{(x+3)^2}$				
$f(x) = -\dfrac{3}{x-8}$				
$f(x) = 1/\ln(x)$				
$f(x) = \tan(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$				

A modo de conclusión:

¿Cuándo presenta una función una asíntota vertical?

Haz una representación simbólica en el plano cartesiano de las posibilidades que puede presentar una función de asíntotas verticales.

Vídeos 9-10-11

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Responde verdadero o falso, ***justificando la respuesta***:

7. La gráfica de una función puede presentar tres asíntotas horizontales.
8. Si una función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal $y = a$, entonces:

◯ Nunca puede cortar a su asíntota horizontal.

◯ Puede cortar a su asíntota horizontal pero cerca del origen de coordenadas.

◯ Puede cortarla sin limitaciones porque no está en contradicción con la propiedad que verdaderamente cumple una asíntota.

◯ La función puede cortar a la asíntota, pero un número finito de veces

◯ La gráfica de la función puede cortar a la asíntota infinitas veces, pero sin llegar a solaparse totalmente.

◯ La gráfica de la función en el infinito tiene la misma gráfica que su asíntota.

9. Si $f(x)$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = a$, entonces el valor a no pertenece al recorrido de la función.

A modo de conclusión:

¿Cuándo presenta una función una asíntota horizontal?

¿Cómo definirías que la función $f(x)$ presenta una asíntota horizontal en la recta $y = a$?

Haz una representación simbólica en el plano cartesiano de las posibilidades que puede presentar una función de asíntotas horizontales.

Vídeo 12-13-14

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

10. Las funciones presentan, como mucho, dos asíntotas verticales.
11. Si $f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta $x = k$, entonces k no pertenece al dominio definición de la función.
12. Si k no pertenece al dominio definición de la función, entonces $x = k$ es una asíntota vertical.
13. Una función no puede presentar, en su representación gráfica, asíntotas horizontales y verticales a la vez.
14. La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical $x = k$, la función nunca puede cortar a la asíntota vertical.
15. Una función nunca puede cortar a las asíntotas, ni verticales ni horizontales.

A modo de conclusión:

¿Cuándo presenta una función una asíntota vertical?

¿Cómo definirías que la función $f(x)$ presenta una asíntota vertical en la recta $x = k$?

Haz una representación simbólica en el plano cartesiano de las posibilidades que puede presentar una función de asíntotas verticales.

Visualización de los comportamientos de las funciones mediante GeoGebra, manipulando las diferentes opciones que presenta dicho programa y explotar todas las posibilidades que ofrece para la comprensión del concepto de asíntotas.

Debes estudiar sus tendencias, especificando si tienen tendencia asintótica y encontrando la expresión algebraica de la asíntota.

	AH	*AV*	*AO*	Justifica la respuesta
$f(x) = senx$				
$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0$				
$f(x) = \ln(x)$				
$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$				

$f(x) = \frac{-5}{(x+3)^2}$				
$f(x) = -\frac{3}{x-8}$				
$f(x) = 1/\ln(x)$				
$f(x) = \tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$				

X.3.2.4 4ª Sesión (18/03/16)

ESTUDIO DE LAS ASÍNTOTAS A TRAVÉS DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN. IES RECESVINTO.

Nombre y Apellido:____

Vídeos 15-16-17

¿Qué contenido te trasmite este vídeo?

¿Qué he aprendido?

¿Qué no he comprendido?

a. Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

b. Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____

c. Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Se presentan funciones dibujadas con el programa GeoGebra con el proyector. Se debe discriminar qué tipo de tendencia se tiene, asíntota horizontal, vertical u oblicua.

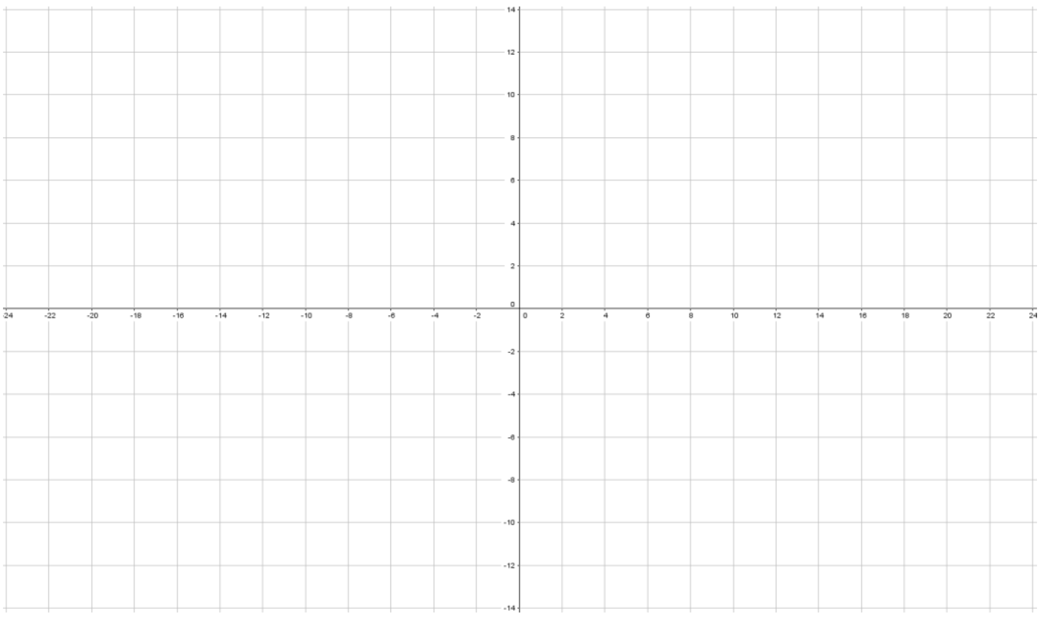
	AH x→ $-\infty$	AH x→ $+\infty$	AV x→ a^- x→ a^+	AV x→ $+\infty$	AO x→ $-\infty$	AO x→ $+\infty$	Expresión de la asíntota
$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$							
$f(x) = \frac{x^3+2x^2+5x-9}{x^2-x+1}$							

$f(x) = x^{\frac{\lvert x \rvert}{x}} + \frac{1}{x}$							
$f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}$							
$f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$							
$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x}$							
$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$							
$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ si\ x > 0$							
$f(x) = x^2$							

A modo de conclusión:

¿Cuándo presenta una función una asíntota oblicua?

Haz una representación simbólica en el siguiente plano cartesiano de las posibilidades que puede presentar una función de asíntotas oblicuas.



X.3.3 Diálogos Segundo Ciclo Investigación

A1.- Es que esta dinámica no la habíamos visto antes. Normalmente en clase se explicaba en la pizarra y la profesora hasta que no entendemos eso, no pasa a lo siguiente[135].

P.- Cuando escucháis una explicación del profesor en la pizarra, ¿Tú crees que todos llegáis al mismo momento a la comprensión de esos conceptos?

A1.- ¡Hombre!, También influye que nosotros somos una clase muy reducida y…podemos, más o menos… vamos a la vez. La profesora no pasa a lo siguiente hasta que no está segura de que lo sabemos todos

A1 es un alumno que sobresale por su capacidad y buenas calificaciones. Ante ese comentario la investigadora, quiere conocer la opinión del resto de la clase, ya que no se manifiestan de manera activa.

P.- ¿Todos estáis de acuerdo en que preferís la explicación en la pizarra tradicional?

A2.- Es que esto es muy nuevo, muy novedoso, muy directo…no es a lo que estamos "acostumbraos",…lo vemos mejor lo del movimiento así que en la pizarra[136].

A1.- Aquí se tiene la cosa que está "animao" y se ve, eso está bien…

P.- ¿Lo de la animación os parece bien?

A2.- Sí, sí, eso está bien. (El resto de compañeros asintió con la cabeza).

Después de visualizar el primer vídeo correspondiente al estadio semiótico de las asíntotas horizontales. El alumno A3 pregunta:

A3.- ¿El punto A' *siempre es constante y* A *es el que tiende a infinito*[137]*?*

P.- ¿Me quieres decir que el punto A' *es constante? ¿Que no se mueve* A'*?*

A2.- No, quiere decir que el punto que es constante, es constante respecto al eje y, *que tiene el mismo valor*[138]*…*

P.- ¿Qué A'[139] *tiene el mismo valor ese punto?*

A3.- En el eje y, *sí, sí, era la línea recta la* x *iba variando, se mueve* x, *era el movimiento* (el alumno gesticuló con las manos), *pero con la misma coordenada y, sí, sí.*

---

[135] Reconoce la novedad de la metodología y, por otra parte, la apreciación del alumno no es veraz, ya que hay algunos alumnos que no siguen el curso.
[136] Apreciación del dinamismo de la representación.
[137] A es el punto sobre la gráfica y para dicho alumno sí que tiende a infinito. Sin embargo, el punto sobre la recta no tiende a infinito A'.
[138] Ahora lo trata de aclarar y parece que quiere decir que la ordenada es constante, a pesar de su imprecisión lingüística.
[139] Ser un punto constante para este alumno es irse moviendo por la recta horizontal $y = k$.

P.- Si, pero los dos puntos tienden a infinito[140]*. ¿Algún comentario más?*

Al no haber aportaciones al respecto, se procede a visualizar el vídeo correspondiente al estadio estructural de las asíntotas horizontales.

P.- ¿Qué nos aporta nuevo este vídeo?

A5.- Que la distancia entre A *a* A' *tiende a cero.*

P.- ¿Algo más?

A1.- Que cuando A *y* A' *tienden a infinito*[141] *la distancia entre* A *a* A' *tiende a cero.*

P.- Muy bien. Pero, ¿se concreta la distancia en algún segmento? ¿Qué longitud va tendiendo a cero de A *y* A'*?*

A3.- El eje y.

P.- ¿Cuáles son las proyecciones de A *y* A' *en el eje* y*?*

A3.- Las proyecciones de A' *son las mismas*[142]*, porque "eso" está en la misma recta y las de* A*…*

P.- ¿Pero que es "eso" de A *y "eso" de* A'*?* (Silencio). *En el video se habla de sus…* (silencio) *ordenadas…*

P.- ¿Qué es la ordenada de un punto? (Nadie contesta)

P.- ¿Sabéis cuál es la ordenada y *de un punto?*

La mayoría del alumnado contesta que sí.

P.- Pues eso de las proyecciones en el eje y *son las ordenadas de dichos puntos.*

Se produjo un murmullo generalizado en la clase como consecuencia de pensar que se trataba de un concepto nuevo y cuando lo relacionaron con algo conocido, les supuso cierto alivio.

P.- Bueno, retomando con lo anterior. ¿Qué quiere decir que la diferencia entre las ordenadas de A *y* A' *tiende a cero?*

A1.- Que la diferencia entre las ordenadas de A *y* A' *tiende a cero quiere decir que los valores de y de* A *y* A' *son cada vez más parecidos. Que los valores de y de* A' *se van pareciendo más al valor y de* A*. Además el valor y de* A *es siempre el mismo, por*

---

[140] Dificultad de consideración de la tendencia infinita cuando una de las variables tiende a infinito.
[141] Aquí ya se comprende que tanto A como A´ tienden a infinito.
[142] Gran imprecisión en el lenguaje de los alumnos. Se refiere a que todos los puntos de la AH comparten la misma ordenada.

y. Los valores x son siempre los mismos porque se van moviendo pero a la par, son los mismos[143].

P.- Muy bien. En ese detalle no habíamos incidido, en que los valores x *se van moviendo pero son el mismo valor a la vez para* A *y* A' *y que es la diferencia entre las ordenadas la que va tendiendo a cero. Yo creo que lo vais comprendiendo, pero vamos a seguir avanzando con el último vídeo.*

Tras la visualización del vídeo correspondiente al último estadio autónomo, se retoma el diálogo grupal.

P.- ¿Alguien quiere comentar algo nuevo que nos ha aportado este vídeo?

A4.- Que las x *pueden tender a más infinito o menos infinito pero los valores* y *siempre van a tender a un número concreto* k*, un número finito, valor constante* k.

P.- En este caso concreto, ¿qué vale k*?*

Varios alumnos responden que vale 4.

P.- ¿Habéis comprendido el concepto de asíntota horizontal?

El alumnado asiente con la cabeza. A continuación comentamos en gran grupo las cuestiones correspondientes a las preguntas propuestas en la ficha de trabajo. La investigadora leerá las diferentes cuestiones, pero no confirmará en ningún caso si son verdaderas o falsas. Se comienza con la siguiente afirmación:

P.- "Si una función f(x) tiene una asíntota horizontal $y = a$*, entonces nunca puede cortar a su asíntota horizontal" ¿Verdadero o falso?*

Todos asienten, diciendo verdadero.

P.- ¿Verdadero?, ¿todo el mundo cree que a una asíntota nunca la puede cortar la función?

A2.- Volvemos a lo mismo que el otro día. No, porque pasaría de tender a superar[144]*, o a estar inferior, depende si está por arriba del cero o por abajo del cero, por ejemplo. Por ejemplo en este caso de* $y = 4$*, si la supera la imagen de A' sería superior a 4, dejaría de tender, sino que tendería y superaría, se aproximaría a cuatro y superaría*[145]*. No sé si me entiendes. Yo lo he entendido así…*

---

143 Se va centrando en el comportamiento asintótico a medida que va hablando.
144 Aparece la idea de alcanzar, llegar (cortar) superar.
145 Contraposición entre tender y superar, según el alumno si supera deja de tender. Este alumno no da la posibilidad de intervalos crecientes y decrecientes, sino que la función es siempre monótona creciente o decreciente.

P.- Pues la verdad es que no lo he entendido bien, pero no hay problema. A veces en la comunicación pueden surgir problemas de comprensión ¿Puedes explicármelo un poquito más?

A2.- Pues que no puede cortar la función a una asíntota horizontal, porque si la corta llega un momento que llegan a ser coincidentes y deja de tender, si la supera, entonces ya no está digamos su distancia…lo que quiere decir es que cuando crece lo suficiente para cortar en el punto cuatro del eje, por ejemplo x=4, y=4, que cuando corte, luego lo va a superar. Se pasa de acercarse a alejarse, porque si lo corta lo superaría. Porque tender es que se va acercando a cuatro, pero si llega a cuatro… Porque tender siempre está tendiendo...

P.- En el ejemplo del vídeo, la función no corta a la asíntota pero esa no es la pregunta. Lo que se plantea es si podría darse algún caso en que la función cortase a la asíntota.

A2: Pues no, en la asíntota nunca se llega a ese punto, en el infinito si llega, pero como al infinito no se llega, porque nunca se llega a alcanzar… pues tampoco, porque nunca se llega a tocar.[146]

P.- ¿En el vídeo se dice que tiene que llegar a tocarse en el infinito? ¿Se habla de ese concepto?...

A1: No (Silencio)

P.- Lo dejamos abierto y vamos a seguir razonando en las cuestiones que se plantean a continuación: ¿Puede cortar a su asíntota horizontal pero cerca del origen de coordenadas? (Silencio)

P.- ¿Os parece que esa opción no tiene sentido?

A1: Pues no para mí la pregunta no tiene sentido, o al menos yo no soy capaz de entenderlo.

La investigadora sigue leyendo el siguiente apartado.

P.- ¿Puede cortarla sin limitaciones porque no está en contradicción con la propiedad que verdaderamente cumple una asíntota?

A1.- ¡Pues falso!, porque no puede llegar a cortar a una asíntota, no sé… es lo que yo tenía entendido. Yo es lo que entendía Pero si ahora resulta que es otra cosa…

P.- ¿En tu idea está que no corta? (Silencio) *¿En vuestra idea está que no corta?*

A3.- Se va acercar tanto, tanto, pero no va a llegar a cortar.

---

[146] Dificultad de razonamiento en procesos dónde interviene el infinito.

A1.- ¡Es que volvemos a lo mismo! (el alumno muestra enfado ante esta situación que le está rompiendo sus esquemas mentales).

Se continúa con las siguientes cuestiones:

P.- ¿Puede cortarla sin limitaciones, porque no está en contradicción con la propiedad que verdaderamente cumple una asíntota?

A2.- Pues falso, porque no puede llegar a cortar a una asíntota[147], no sé… es lo que yo tenía entendido.

P.- ¿Quién te ha dicho a ti explícitamente que una función no puede cortar a su asíntota? ¿Te lo ha dicho así tu profesora del año pasado?

A2. Pues es que nos lo representaban[148]... era así... (A continuación representa la hipérbola $y = 1/x$).

El alumno se puso a dibujar en un papel una hipérbola, una función del tipo $f(x) = \frac{1}{x}$

P.- O sea que en tu idea, está que no puede cortarla nunca ¿no?

A1.- En la hipérbola, por ejemplo, no corta, se acerca mucho a cero, pero no llega a tocarla... no llega a tocar a los ejes, ahora si resulta que es otra cosa…

A5.- La asíntota es un punto de la gráfica[149]*, el cual...*

Ante esa afirmación la investigadora pregunta elevando la voz.

P.- ¿La asíntota es un punto de la gráfica?

A3: No, es una recta.

P.- Muy bien.

A5: Que la gráfica va a acercarse muchísimo, lo más que pueda[150]*, pero nunca va a llegar a cortarla…*

P.- ¿Esa afirmación se ha dicho en el vídeo?

A5: No, por lo que se ve, de que… si en una gráfica…como ha hecho el dibujo mi compañero…Se va a acercar tanto, tanto, tanto… pero no va a cortar…

Se produce cierta tensión por lo que la investigadora decide seguir leyendo el resto de opción que se proponen en la actividad.

---

[147] Para este alumno la curva y la asíntota no se pueden cortar nunca y lo mantiene en cualquier cuestión.
[148] Aquí, el alumno señala un error didáctico
[149] Confusión de la asíntota que es una recta con un punto.
[150] Relación de la tendencia con el mayor acercamiento posible, pero siguen pensando que “no puede tocarla”.

P.- *Otra opción: "La función puede cortar a la asíntota, pero un número finito de veces"*

A3.- Es que volvemos a la misma, es que yo no creo que pueda cortarla[151].

P.- ¿La gráfica de la función puede cortar a la asíntota infinitas veces, pero sin llegar a solaparse totalmente[152]*?*

A7: Eso de solaparse no lo entiendo[153].

P.- Coincidir.

A7: Si se corta, se solapa.

P.- No, no… una cosa es cortar y otra solapar. ¿Una función puede estar alrededor de su asíntota subiendo y bajando, subiendo y bajando? (Silencio)

La investigadora continúa leyendo más opciones:

P.- ¿La gráfica de la función en el infinito tiene la misma gráfica que su asíntota? (Silencio) *¿Alguna cosa más?*

La investigadora percibe que por un lado, se está produciendo cierto desánimo en el alumnado y, por otro lado, hay huellas de cansancio mental.

P.- ¿Esto os está suponiendo mucho esfuerzo mental? (El alumnado afirma con la cabeza y algunos incluso resoplan) *Os voy a mostrar unas gráficas, ¿vale?*

La investigadora mostró a los alumnos la $f(x) = sen(x)/x$ con el programa de GeoGebra. Los alumnos ven que presenta una asíntota horizontal en el propio eje de abscisas, y también pudieron ver que cortaba la función al eje de abscisas. En general, el alumnado mostró sorpresa, pero *A5* tras resoplar dijo

A5.- La gracia que tenían las asíntotas era que se acercaba la gráfica y se acercaba… pero nunca tocaba y que ahora estaba teniendo más problemas que soluciones

Debido a la planificación para esta sesión se procedió a visualizar los vídeos relativos a las asíntotas verticales. Una vez vistos los vídeos relativos a los tres estadios, semiótico, estructural y autónomo, se preguntó a los alumnos sobre la comprensión de los mismos. Todos respondieron que lo habían entendido bien y que no tenían dudas.

P.- ¿Qué tienen aquí en común los puntos A *y* A'*?* (Silencio) *¿Tienen en común algo los puntos que se van moviendo? La….* (Como no contesta ningún alumno, responde la

---

[151] Tienen muy arraigada esta creencia.
[152] La pregunta está pensada sobre si a partir de un cierto valor K en adelante, la curva de la función no puede ser recta.
[153] El alumnado no comprende todas las palabras que se utilizan en la docencia.

investigadora). *¡La ordenada! ¿Veis que los puntos se van moviendo pero tienen la misma ordenada?*

A5.- Tienen la misma x *pero de signo distinto*[154] (se está refiriendo a la asíntota vertical).

P.- No, la x *no. Las* x *de la recta sí que es fija pero las* x *de los puntos de la función no…*

Interviene otro alumno que ha comprendido el concepto y lo verbaliza al resto de la clase.

A1.- A' *tiene fija la abscisa y las abscisas de* A *se van aproximando. Es la misma idea que antes, ¿no?*

P.- ¿Y qué ocurre con las distancias?

A3.- La distancia entre A *y* A' *se va haciendo chiquitita, eso es lo mismo que la horizontal.*

P.- Efectivamente, los dos tipos de asíntota tienen en común que la distancia entre A *y* A' *tiende hacia cero, cada asíntota tiene su particularidad.*

A1.- ¡Es al revés! La distancia en las asíntotas horizontales es vertical y en las verticales horizontal.

P.- La idea es que los puntos que se comparan en la tendencia asintótica horizontal compartían la abscisa, luego se miraba la distancia en sus ordenadas y en la tendencia asintótica vertical, al revés, comparten ordenada

Por último, se pasó a ver el último vídeo correspondiente al estadio autónomo, para formalizar todo lo anterior. Una vez finalizado el visionado, la investigadora preguntó:

¿Comprendemos el concepto?

¿Alguien intenta resumir lo que es una asíntota vertical?

Ningún alumno voluntariamente accede a responder a la cuestión abierta. La investigadora intenta motivarlos en la importancia de la verbalización y la reflexión grupal.

P.- Todos nos podemos equivocar, ¿eh? estamos aprendiendo. ¿Alguien se anima? A ver, ¡Tú mismo! (señalando un alumno que parece introvertido)*, ¿Podrías resumirnos cuando una función presenta una AV, con tus palabras?…*(Silencio)

P.- Intenta explicárselo a alguien que no sabe nada de asíntotas verticales.

---

[154] Este alumno confunde la aproximación lateral de las abscisas con el signo de la ordenada.

A9.- Vamos a ver… cuando hay un valor x fijo de x y la función se va acercando[155].

P.- Te voy a intentar ayudar: Una función tiene una asíntota vertical, cuando un punto A de esa función, sus ordenadas tienden a más infinito por la curva y ¿qué ocurre con las abscisas de ese punto de la gráfica cuyas ordenadas tienden a más infinito?....¿Se van acercando a…? Los valores x *tienden a…*

A9: Tiende a la abscisa[156]

P.- Pero tender a la abscisa, se suponen que tienden, esos valores tienden a un valor…Tienden a un valor fijo en la abscisa

P.- Ahora viene el debate de antes, ¿Una función podrá cortar a una abscisa vertical? Claro, que después de lo que os he dicho de la asíntota horizontal… ¿verdad?… alguien podría pensar que….

A1.- Sí

A2.- Yo no, yo en la vertical creo que no corte[157] *…Porque en algo se tendrá que diferenciar de la otra… No sé, porque es asintótica…*

A1.- Es que es justo lo contrario una de la otra[158]*, es lo contrario, por eso sí. Yo digo que sí.*

P.- ¿Podría ocurrir lo de antes, que la función fuese oscilando en torno al eje y?

A2- No

P.- Ahora no puede ocurrir, igual que en el eje x puede ocurrir que vaya oscilando, Si corta y se aleja sería una tendencia infinita no asintótica, no se comporta como una recta. Y si corta no puede volver a cortar porque iría en contradicción con el concepto de función. ¿Lo vemos claro?

A2- No lo veo,

P.- Me encanta que si no veis algo me lo digáis.[159]

Explícaselo a tu compañera.

Si corta podría

---

[155] Es una muestra de que este alumno no identificado, tras un largo debate, sigue sin entender

[156] Confusión variable y valor.

[157] Esta creencia es la que aparece en todos los libros de texto, incluso no universitarios, pero se puede construir un contraejemplo con una función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$.

[158] Error de considerar AV "contraria" de AH.

[159] La investigadora no reprocha que no comprendan un concepto, sino todo lo contrario, valora que verbalicen sus dificultades y trasladen a la investigadora sus dificultades.

A2.-¿Puede alejarse y volver? (se refiere a la curva respecto a la asíntota vertical)

A1. Tendría que volver la x a tomar el mismo valor[160] *y eso no se puede.*

P.- ¿Sabéis en que valores solemos buscar posibles asíntotas verticales?

P.- ¿Qué pasaba en los denominadores?

Había que buscar lo que hacía cero el denominador.

¿Y ese valor era fijo que era asíntota?

P.- No, no,… había que probar.

X.4 ANEXO TERCER CICLO INVESTIGACIÓN CURSO 2016/17

X.4.1 Guion para el diálogo con el profesorado de matemáticas Análisis valoración del profesorado que impartió docencia el curso académico 2015/16

Recogida de información del profesorado que impartió docencia en 4º ESO el curso académico 2015/16 al alumnado que en el presente curso escolar cursa 1º Bachillerato, tanto de Ciencias Sociales como el Científico Tecnológico.

1. ¿Cómo introduces el concepto de asíntotas? ¿Asíntota Horizontal, Vertical y Oblicua?

- A partir de una idea intuitiva, ¿Cuál?
- A partir de un problema, una situación problemática o en un contexto de la vida real.
- Con una definición.
- A partir de la gráfica de una función, ¿Cuál?
    - ✓ Utilizando la expresión analítica de la función.
    - ✓ Presentando el esbozo en la pizarra.

---

[160] El alumno no identificado está explicando que la curva no puede cortar a la asíntota vertivcal en más de un punto

- ✓ Utilizando algún programa de geometría dinámico.
- ✓ Recursos TIC: software educativo, páginas web, proyecto Gauss, Descartes, Smartphone, tablets,…

- Siguiendo el libro de texto
- A partir de una imagen, vídeo, recurso multimedia…
- Utilizando símiles, comparaciones, algún recurso literario, plástico o visual
- Otras metodologías innovadoras…

Grado de satisfacción ante la experiencia de cursos pasados.

Planteamiento de cambio. ¿Se ha decidido cuál?

2. El alumnado manifiesta dificultad ante este concepto:

- ✓ Menos que en otros bloques (algebra, geometría, estadística)
- ✓ Igual/ No noto diferencias significativas
- ✓ Más que otros
- ✓ Dentro del bloque de funciones, lo que más les cuesta es….
- ✓ No tengo criterio.

3. ¿Recuerdas algún comentario hecho por los alumnos en relación a este concepto de las asíntotas?
4. En relación a la valoración de la comprensión del concepto de asíntota en el alumnado:

¿Qué tipo de preguntas les planteas?

Cuestiones orales

Debates grupales

Pruebas escritas

Cuestiones de exámenes: Presentación de una gráfica que presente una asíntota

Función con comportamiento asintótico

Encontrar la expresión algebraica de la asíntota horizontal, vertical y/oblicua a partir de la gráfica y/o a partir de la expresión.

Esbozo de una gráfica que presente una asíntota…

5. Se ha trabajado en 4º ESO:

- ✓ Diferencia entre aproximar y tender.
- ✓ Discriminación entre tendencia infinita y tendencia asintótica.
- ✓ Concepto de límite.

6. ¿Se ha afirmado al alumnado que una función nunca corta a una asíntota?
7. ¿Se ha afirmado al alumnado que una función nunca corta a una asíntota horizontal?
8. ¿Se ha afirmado al alumnado que una función nunca corta a una asíntota vertical?
9. ¿Se ha afirmado al alumnado que una función nunca corta a una asíntota oblicua?
10. ¿Utilizas algún tipo de notación para representar una tendencia infinita?
11. ¿Has relacionado la tendencia de una función con el estudio de las tendencias sobre las proyecciones en el eje de abscisas y/o eje de ordenadas?
12. Valoración del grado de comprensión de las asíntotas en el alumnado que este curso está en 1º Bto.
13. ¿Has percibido errores o concepciones erróneas en el alumnado en relación al concepto de asíntotas?
14. Sugerencias / Observaciones.

X.4.2 Cuestionario inicial de conocimientos previos 1º Bachillerato

Nombre y Apellidos:____

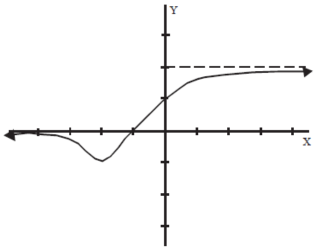
CUESTIONARIO INICIAL. IES MARÍA MOLINER. CURSO 2016/17

TENDENCIA FUNCIONAL. ASÍNTOTAS

1.- Estudio de la tendencia de la gráfica de una función:

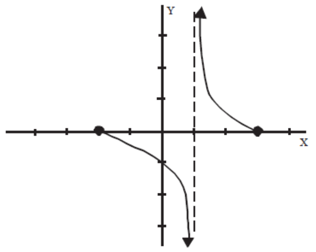
a) Señala sobre la gráfica la tendencia de la x y de la y en los lugares donde se escapa la gráfica de la función.

b) Completa las frases que acompañan al texto.



Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$

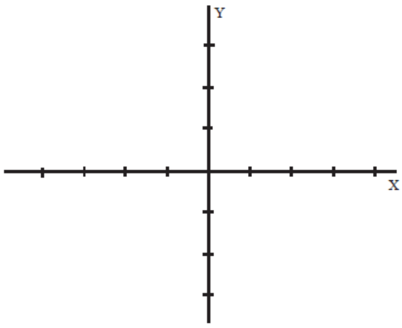
Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$



Cuando $x \to 1^{+}$, $f(x) \to$

Cuando $x \to 1^{-}$, $f(x) \to$

2.- Dibuja una función con las siguientes características:



Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 1$

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$

3.- ¿Qué se observa cuando se estudia la tendencia de una función?

4.- Escribe un ejemplo de una tendencia numérica a $x = 3$.

5.- Escribe lo que creas que es una asíntota horizontal.

6.- Escribe lo que creas que es una asíntota vertical.

7.- Escribe por qué crees que todas las funciones tienen alguna asíntota o por qué no.

8.- Escribe lo que creas que es una asíntota oblicua.

9.- Representa y clasifica en el plano los casos que se pueden dar de cada tipo de asíntota.

X.4.3 Test Valoración Final Expertos

Se considera que una sucesión a_n tiende a un número k cuando a partir de un término todas las aproximaciones de a_n a k son mejores (las diferencias positivas son menores) que cualquier aproximación H prefijada. Se escribe $a_n \to k$. La sucesión a_n tiende a $+\infty$ $(-\infty)$ cuando a partir de un término todos los que le siguen son mayores que cualquier número fijado P (son menores que cualquier número fijado Q)

Por ejemplo: 3'00001 es una aproximación de 3, pero a partir de 2'999999 todas las aproximaciones de la sucesión 2, 2'9, 2'99, 2'999… son mejores que 3'00001 (3-2'999999<3'00001-3). Lo mismo sucede para cualquier otra aproximación. Por tanto, la sucesión tiende a 3 (su límite es 3).

a. Tendencia infinita de un punto $A(x,0)$ sobre el eje de abscisas, $x \to \pm\infty$

b. Tendencia finita hacia un punto en $A(x,0)$.

c. Tendencia infinita de un punto $A(x,y)$ sobre una curva: $x \to \pm\infty$ o $y \to \pm\infty$ o ambos.

d. Tendencia finita en la curva.

e. Estadio semiótico de *AH*: $x \to \pm\infty$ e $y \to k$ y la diferencia entre las ordenadas de los puntos de la curva y de la asíntota tienden a 0 cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

f. Estadio estructural de *AH*: la diferencia entre las ordenadas de los puntos de la curva y de la asíntota tienden a 0 cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$. Los puntos de la curva tienden a identificarse con los de la asíntota. Las ordenadas de los puntos de la curva tienden a la ordenada de los puntos de la asíntota.

g. Estadio autónomo de *AH*: la asíntota tiene ecuación $y=k$.

h. Estadio semiótico de *AV*: $x \to k$ e $y \to \pm\infty$ y la diferencia entre las abscisas de los puntos de la curva y de la asíntota tienden a 0 cuando $y \to +\infty$ o cuando $y \to -\infty$.

i. Estadio estructural de *AV*: la diferencia entre las abscisas de los puntos de la curva y de la asíntota tienden a 0 cuando $y \to +\infty$ o cuando $y \to -\infty$. Los puntos de la curva tienden a identificarse con los de la asíntota. Las abscisas de los puntos de la curva tienden a la abscisa de los puntos de la asíntota.

j. Estadio autónomo de AV: la asíntota tiene ecuación $x = k$.

k. Estadio semiótico de *AO*: $x \to \pm\infty$ e $y \ \to \pm\infty$ y los puntos de la curva tienden a la asíntota.

l. Estadio estructural de *AO*: $x \to \pm\infty$ e $y \ \to \pm\infty$ y la distancia de los puntos de la curva a la asíntota tiende a 0.

m. Estadio autónomo de *AO*: la ecuación de la asíntota es $y = px + q$, siendo

$p = lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $q = lim_{x\to\infty}(f(x) - px)$.

Se han representado gráficas con el programa de GeoGebra de todos los tipos, incluso de curvas sin asíntotas, con el fin de discriminar y, a partir de esas gráficas, se han diseñado y producido 21 vídeos para la docencia. En esos vídeos las letras mayúsculas representan puntos de la curva, de los ejes coordenados o de las asíntotas y las letras minúsculas valores reales (pueden ser abscisas u ordenadas). Dichos vídeos muestran animaciones de puntos hacia infinito o hacia un punto fijo.

Este test, que fue presentado al alumnado, aparece íntegramente en el anexo ***:

TEST

MARCA CON UNA X LAS RESPUESTAS QUE CONSIDERES CORRECTAS.

1. Se considera la siguiente sucesión: 1, 1’9, 1’99, 1’999,…

   a. Se aproxima a 3, pero no tiende a 3
   b. Se aproxima a 3 y tiende a 2
   c. Se aproxima a 3, pero no tiende a 2
   d. Se aproxima a 3 y tiende a 3
   e. Se aproxima a 3 y tiende a ∞

Objetivo: Identificar y discriminar aproximación y tendencia numéricas.

2. *P* es un punto de la curva que se mueve libremente sobre ella, *A* es un punto fijo y *D* es un punto arbitrario fijo y cercano a *A*.

   a. *D* es una aproximación de *A*, pero no una tendencia a *A*___
   b. *P* es una aproximación de *A* y una tendencia a *A*__
   c. La abscisa *x* de *P* es una aproximación a la abscisa a de *A* y es una tendencia___

d. Se podría situar un punto *H* tan cerca de *A* que *P* no podría estar más cerca de *A* que *H*___

Objetivo: valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia sobre la curva.

3. *P* es un punto del eje de abscisas que se aleja hacia infinito, *A* es un punto fijo del eje y *D* es un punto cualquiera del eje fijado (próximo a *A*). Si *P* se aleja *de* A más que *D* solamente por la izquierda o solamente por la derecha.

a. El punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa es menor que la de cualquier otro punto *D* prefijado__

b. Un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto *D* prefijado___

c. El punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa tiende a la de cualquier otro punto *D* prefijado___

d. Un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa tiende a la de cualquier otro punto *D* prefijado___

Objetivo: valorar la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia en el eje *XX'*

4. **Objetivo:** valorar la caracterización de tendencia infinita sobre la gráfica de una función.

Un punto de la gráfica $P = (x, y)$ tiende a infinito cuando ocurre una de estas cosas:

a) *x* tiende a ± infinito e *y* tiende a un número fijo.

b) *y* tiende a ± infinito y *x* tiende a un número fijo.

c) *x* e *y* tienden a infinito.

d) *x* e *y* superan a cualquier número fijo.

Objetivo: valorar la identificación del comportamiento asintótico.

5.-La gráfica de la función tiene un comportamiento asintótico (La función tiene una asíntota) cuando:

a. Existe una recta que no la corta___

b. La gráfica de la curva se aproxima a la gráfica de una recta cuando $x \to \pm\infty$ o $y \to \pm\infty$ ___

c. La gráfica de la curva tiende a la gráfica de una recta cuando $x\to\pm\infty$ o $y\to\pm\infty$ ____

d. Un punto *P(x,y)* arbitrario de la curva cuando $x\to\pm\infty$ o cuando $y\to\pm\infty$ mejora la aproximación de cualquier punto fijado de la curva a la recta que es la asíntota.___

7. **Objetivo:** valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización de *AH*.

Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $y = f(x)$ con una *AH*, $P(x, y)$ es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito ($x \to -\infty$ y $x \to +\infty$).

Gráfico 1. Un punto Q de la asíntota, con la misma abscisa que P, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian las diferencias entre las ordenadas de P y de Q

Gráfico 3. Se aprecia como la ordenada de P tiende a la ordenada de la recta $y = k$

a. La *AH* tiene ecuación $y = k$, siendo k cualquier constante___

b. Entre la curva cuando $x \to \pm\infty$ y la asíntota $y = k$ (que no corta a la curva) hay más rectas horizontales ___

c. La curva no puede cortar a la AH___

d. Entre la AH (que no corta a la curva) y la curva no hay más rectas horizontales cuando $x\to\pm\infty$, la curva y la asíntota se pueden cortar y la AH tiene ecuación $y = lim_{x\to\infty} f(x)$.___

8. **Objetivo:** valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización de *AV*.

Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $y = f(x)$ con una *AV*, $P(x, y)$ es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito ($y \to -\infty$ e $y \to +\infty$).

Gráfico 1. Un punto Q de la asíntota, con la misma ordenada que P, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian las diferencias entre las abscisas de P y de Q

Gráfico 3. Se aprecia como la abscisa de P tiende a la abscisa de la recta $x = k$

a. La *AV* tiene ecuación $x = k$, siendo k cualquier constante___

b. Entre la recta $x = k$ y la curva hay más rectas verticales cuando $x \to k$___

c. La curva no puede cortar a la AV___

d. Entre la AV y la curva no hay más rectas verticales, la curva y la AV tiene ecuación $x = k,$ con k la constante para la que $lim_{x\to k^-} f(x) = \pm\infty$ *y/o* $lim_{x\to k^+} f(x) = \pm\infty$.

9. **Objetivo:** valorar la identificación, discriminación, generalización y sistematización de *AO*.

Se presenta de forma gráfica el comportamiento de una función $y = f(x)$ con una *AO*, $P(x, y)$ es un punto que se mueve sobre la curva alejándose al infinito ($x \to \pm\infty$ e $y \to \pm\infty$).

Gráfico 1. Un punto Q, intersección de la AO con la perpendicular a ésta por P, se mueve a la vez que éste.

Gráfico 2. Se aprecian el segmento determinado por P y Q (de extremos P y Q)

Gráfico 3. Se aprecia que la AO tiene ecuación $y = px + q$ con $p = lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $q = lim_{x\to\infty}(f(x) - px)$.

a. La asíntota oblicua tiene ecuación $y = kx + h$, siendo h y k ($k \neq 0$) constantes cualquiera.

b. Entre la curva y la *AO* puede haber otras rectas oblicuas más cercanas a la curva cuando $x \to \pm\infty$

c. La curva no puede cortar a la *AO*

d. Entre la *AO* y la curva no hay más rectas oblicuas, la curva y la asíntota se pueden cortar o tocar y la asíntota oblicua tiene ecuación $y = kx + h$.

10. **Objetivo:** valorar las interpretaciones (concepciones) de los alumnos acerca de las asíntotas.

Explica brevemente los siguientes apartados:

a) Escribe un ejemplo de una tendencia numérica a $x = 3$.

b) Escribe lo que creas que es una *AH*.

c) Escribe lo que creas que es una *AV*.

d) Escribe por qué crees que todas las funciones tienen alguna asíntota o por qué no.

e) Escribe lo que creas que es una asíntota oblicua.

f) Escribe la razón de por qué $y = px^2 + 3$ (p≠0) puede ser o no ser la ecuación de una asíntota.

g) Escribe por qué crees, o por qué no, $y = k$ es la ecuación de una *AV*.

h) Escribe por qué una asíntota de ecuación $y = px + q$ nunca puede ser horizontal o por qué sí

i) Escribe cuántas *AH*, *AV* y *AO* puede tener una función.

11. El objetivo de los dos ítems siguientes es valorar el uso de los videos

e. ¿Qué contenido te han trasmitido los vídeos?

f. Escribe cuánto y por qué te han ayudado los vídeos a comprender los contenidos.

g. Escribe lo que no hayas comprendido.

h. Escribe por qué prefieres disponer de videos para el estudio o por qué no.

12. Valora el aprendizaje a través de los videos de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____

Valoración de los vídeos:	1	2	3	4	5
Claridad en la exposición					
Interés del contenido					
El visionado de vídeos me facilita la comprensión de los conceptos					
Me ha gustado esta nueva metodología					
Prefiero esta metodología a la clase tradicional					

X.4.4 Diálogos Tercer Ciclo de Investigación

Con anterioridad a la docencia relativa al estudio de las asíntotas, se recogió información relativa a los conocimientos previos del alumnado mediante el test de conocimientos previos expuesto anteriormente, el día 16 de febrero de 2017 en 1º Bachillerato de Ciencias.

Una alumna al finalizar la prueba preguntó *"¿Eso de los límites va a ser siempre con asíntotas?",* como investigadora me sorprendió dicha pregunta porque el profesorado del curso anterior no había dado docencia sobre límites y en el cuestionario tampoco aparecía dicha palabra. Al ser preguntada la alumna por su conocimiento sobre dicho concepto comentó que *"lo he oído por ahí".*

X.4.4.1 Primera Sesión. Diferencia aproximación y tendencia

Miércoles 22 de febrero de 2017

Como novedad respecto al pasado curso se introduce un vídeo para aclarar las diferencias entre los conceptos de aproximación y tendencia. Tras el visionado, la investigadora pregunta a los alumnos sobre la diferencia entre aproximar y tender.

A3: "Creo que no le ha quedado claro a nadie"[161].

P: "¿A qué crees que es debido que no lo ha entendido nadie"

A3:" Porque no ha habido ninguna explicación, sólo se ha leído."

P:" ¿Qué es explicar?"[162]

A3: "Hacer ejercicios y no se ha hecho ningún ejercicio"[163].

P: "Tomo nota, pero antes de hacer ejercicios tenemos que tener claros los conceptos."

Retomando la cuestión propuesta relativa a la diferencia entre aproximar y tender otra alumna responde:

A4:" Que a lo mejor aproximar es el número más cercano al que tiende ese número pero tendencia es como al número que más se aproxima pero que sea mayor que él, por ejemplo 2.5 tiende a 4 pero se aproxima a 3, no se aproxima a 4…"[164]

P: No, vamos a intentar concretarlo más

A5: Aproximar es un punto cercano, 1.9 o 2.1; pero tender es por abajo 1.9, 1.99,….

P: ¿Siempre la tendencia será por números menores?

A5: No sé, supongo que no, pero…

A6: En la sucesión del vídeo, 1,9. 1,99….se aproxima a 3, pero tiende a 2. Pero no lo que significa ni idea...

P: Bueno, pero has sido capaz de verbalizarlo y recordarlo.

A6: "¡Hombre porque lo acabo de leer!"

---

[161] Esta alumna suele presentar cierta rebeldía propia de la edad y en varias ocasiones asume el papel de portavoz de la clase, sentenciando afirmaciones sin haber sido corroboradas previamente, como es en este caso; ya que nadie se ha pronunciado al respecto.

[162] La investigadora intenta recabar más información.

[163] Para esta alumna en la clase de matemáticas sólo se deben hacer ejercicios, lo que evidencia el aprendizaje mecánico frente al significativo (ejercicio frente a concepto).

[164] El ejemplo no corresponde con la explicación teórica.

A3:" Lo ha memorizado, porque lo ha oído, pero no tiene el concepto[165].

P: "Pero vamos avanzando… A ver la sucesión 3, 3.9, 3.99, 3.99,…. ¿tiende a 5?"

Varios alumnos contestan no y la alumna A6 con total rotundidad afirma, se aproxima a 5, pero tiende a 4.

P: "¡Muy bien! ¿Veis cómo lo estáis comprendiendo?"

A5: "La cosa es aplicarlo."

P: Efectivamente…

A4: "O sea, por ejemplo 2 se aproxima a 4, pero 3 tiende a 4"[166]

Una alumna dice "Muy bien" y otra "no".

P: "No, no hablamos ni de 2, ni 3, ni 4. En el vídeo estamos trabajando con sucesiones infinitas..."

P: "¿Pero cuál es la diferencia entre aproximar y tender?"

A6: "La aproximación es un número mayor que ese pero no tiene por qué ser el siguiente, pero la tendencia es el siguiente número mayor del que estás diciendo"[167]

P: "No."

A1: "Aproximar es como si te lo inventas, porque ahí pone que se aproxima a 4, ¿por qué a 4?, como si digo yo que se aproxima a 6, pero no tiende a 6; pero se aproxima a 3 y tiende a 3 porque es el número más cerca de 2,99…."[168]

A6: "Se trata de redondear, es algo así ¿no?"

A2:"Pues vaya, también se aproxima a mil"

P: "Pues si"

A2: "Pues entonces puede tender a infinito[169]*."*

P: "Perdona, no es lo mismo decir que la sucesión se aproxima a mil que decir que tiende a infinito. Pero como ha salido este concepto os pongo el vídeo sobre tendencia infinita."

---

[165] Continúa con su negatividad frente a nuevas metodologías, pero acepta la dificultad del concepto.

[166] Confusión entre tendencia de una sucesión a un número frente a tendencia de un número a otro número, que no tiene sentido.

[167] Introduce el concepto de número siguiente no incluido en el vídeo. No comprensión de la densidad de los números en la recta real. Sólo considera sucesiones crecientes.

[168] Este alumno que la aproximación te la puedes inventar porque todo número va a ser una aproximación a otro, frente a la tendencia que es el número más cercano.

[169] Paralelismo entre la tendencia finita e infinita.

A6: "La tendencia es el número más cercano al que se aproxima. Aproximar es estar cerca y tendencia puede ser infinito, si dices que tiende a 1000 pues también tiende a infinito.[170] "

P: "Yo he dicho que la sucesión 3.9, 3.99, 3.999… se aproxima a 1000, no que tienda a 1000, no tiende a 1000. Ni tiende a infinito."

A6: "Pero, ¿qué es el concepto tender?"

P: "Muy buena pregunta, vamos a comprender ese concepto con los vídeos que vamos a ver."

REFLEXIÓN:

A continuación se presentan aspectos interesantes relativos al análisis de los diálogos:

- Aceptación de las aproximaciones inferiores o superiores, pero sólo consideración de tendencia a aquella que es creciente por números menores al número que se tiende.
- Aparición en los diálogos del concepto de número siguiente, que tiene sentido sólo en los números naturales y enteros; lo que muestra la incomprensión de la densidad de los números en la recta real. En este caso, al igual que el anterior, sólo considera sucesiones crecientes.
- Confusión entre tendencia de una sucesión a un número frente a tendencia de un número a otro número. Varios alumnos particularizan en la aproximación y tendencia de un número, no de una sucesión. Sólo tiene sentido que un número sea una aproximación a otro (cualquier número real es una aproximación de otro) pero no se podría hablar de tendencia de un número a otro.
- Merece atención la siguiente frase expuesta por un alumno *"Aproximar es como si te lo inventas, porque ahí pone que se aproxima a 4, ¿por qué a 4?, como si digo yo que se aproxima a 6, pero no tiende a 6; pero tiende a 3 porque es el número más cerca de 2,99…."* Según él, la aproximación *"te la puedes inventar"* porque todo número va a ser una aproximación a otro, frente a la tendencia que es *"el número más cercano".*
- Paralelismo entre la tendencia finita e infinita, cierto alumno expresa, *"tender a 1000 es equivalente a tender a infinito".* Tender hacia un número suficientemente grande para él, supone tender a infinito porque en este contexto identifica números grandes con infinito.

[170] Para este alumno tender a 1000 es equivalente a tender a infinito.

Un alumno cree que no se ha hecho matemáticas en esta sesión, porque no se han resuelto problemas, respecto al visionado de los vídeos añade que no son explicaciones porque no son ejercicios y otro alumno comenta a la investigadora que lo que estamos haciendo es porque es una profesora muy moderna.

Parte del alumnado no tiene ningún espíritu crítico ni ven la necesidad de comprender los conceptos matemáticos, consideran que el fin de la asignatura es conseguir un recetario para resolver problemas.

X.4.4.2 Segunda Sesión (1/3/17). Tendencia infinita

En la segunda sesión se presenta los vídeos relativos a la tendencia infinita.

A5: "No me parece complicada la idea de que la tendencia infinita es que se supere cualquier valor."

Dicho alumno está en lo cierto, pero la investigadora percibe que la comprensión de dicho concepto no haya sido interiorizada por la totalidad del alumnado, como muestra los diálogos posteriores.

A3: "Entonces en la tendencia infinita… vale, tiende a infinito, pero ¿A qué valor se aproxima?[171]"

P: "En la tendencia infinita no tiene sentido aproximar a un valor fijo porque la idea es que se supera cualquier valor que se fije."

A3: "Pues que se aproxima a infinito y tiende a infinito.[172]"

P: "¿Pero el infinito es un valor que podemos fijar?"

Se produce murmullo generalizado.

A3: "Si desde el punto que le pasas, pues puede tender a infinito, y si no le pasas, pues puedes tender a finito."

A5: "Tendencia finita para dentro y tendencia infinita para afuera.[173]"

P: "Quizás no es todo lo preciso matemáticamente hablando… pero parece que les aclara los conceptos visualmente."

A3: "Pues yo lo entiendo mejor así."

REFLEXIÓN:

[171] Este alumno quiere relacionar tendencia y aproximación para la tendencia infinita, al igual que se hizo con la tendencia finita.
[172] Error de consideración del infinito como valor fijo alcanzable.
[173] Interesante símil propuesto por el alumno.

El alumnado va aceptando la nueva metodología de aula, no muestra oposición ante el cambio y participa más activamente.

En la fase de comprensión ante la tendencia infinita varios alumnos intentan acomodar el nuevo concepto a lo explicado en la anterior sesión relativo a la tendencia finita, como muestra la pregunta del alumno A3 "*Entonces en la tendencia infinita, vale, tiende a infinito; pero, ¿a qué valor se aproxima?"*. Al intentar responderle otro alumno, A5, aparece la concepción errónea de considerar el infinito como un valor fijo alcanzable, *"Pues que se aproxima a infinito y tiende a infinito*". A esto, el alumno A3 responde "*Si desde el punto que le pasas pues puede tender a infinito y si no le pasas pues puedes tender a finito",* y, finalmente, el alumno A5 propone "*Tendencia finita para dentro y tendencia infinita para afuera".* Sin duda, para este alumno *"para dentro",* significa que en el gráfico de GeoGebra el punto entra en la pantalla y *"para afuera",* el punto sale de la pantalla. Este alumno tiene una concepción de infinito asociada a la geometría finita de la pantalla, y asocia infinito a la no visibilidad del punto. Por otra parte, siguen considerando la tendencia a infinito como una aproximación, pero desvinculada de la superación, sin duda, por el desconocimiento de la aritmética asociada al infinito $(\infty - k)$.

X.4.4.3 Tercera Sesión (16/3/17). Discriminación asintótica. Introducción al comportamiento asintótico

En esta sesión se incide en la discriminación asintótica. Tras visualizar el comportamiento de la función exponencial $y = a^x$ para $a > 1$, se produce el siguiente diálogo:

A2: "¿Por qué las funciones pasan por las asíntotas?, ¿y si no pasan?"[174]

(La alumna se refiere a las rectas paralelas al eje y que son superadas por la función cuando x tiende a infinito).

P: "¿En el vídeo te dicen que esas rectas perpendiculares son asíntotas? (Silencio). *Lo que presenta el vídeo es que las funciones* $\mathrm{y} = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ *para* $\mathrm{a} > 1$, *no presentan comportamiento asintótico…"*[175]

A2: "¿Y cuáles tienen comportamiento asintótico?[176]

A8: "Pues cuándo tienden a infinito, ¿no? (responde con poca certeza).

---

[174] La pregunta que subyace es más profunda: ¿Por qué se presentan asíntotas o no?
[175] Ejemplo de la diferencia entre lo que se presenta al alumnado y lo que realmente interioriza.
[176] Quería saber exactamente que funciones van a tener un comportamiento asintótico.

P: "Vamos a comenzar viendo unas que no tienen comportamiento asintótico. En el caso de estas funciones exponenciales, yo fijo cualquier recta perpendicular y la función se aleja de la recta por la derecha."

La alumna *A2* responde con total seguridad: *"Porque tiene esa forma la función. Es lógico. La parábola se abre y la exponencial también se abre. Hay un punto que se va alejando… pero después se va alejando"*[177]

P: "Muy bien. Sin embargo en la misma función cuando x *tiende a infinito negativo, el comportamiento de la función es parecido al de la…"*

Varios alumnos contestan: *"al de la recta".*

P: "Por lo tanto, tiene un comportamiento asintótico, cuando x *tiende a infinito negativo."*

(La alumna *A2* que discriminaba muy bien la tendencia infinita frente a la tendencia asintótica, cuando x tendía a infinito positivo, ahora muestra desacuerdo con la afirmación que la profesora acaba de hacer. Este hecho ya fue manifestado en anteriores ciclos de investigación).

A2: "Pero cada vez es más pequeño, y también lo pasa."

A5: "No, no lo pasa. Se va haciendo más pequeño porque el denominador es más grande, pero nunca va a pasar"[178].

A2: "Si pones la recta $\mathrm{y} = 0.01$ *sí la pasa. ¡Pues ya está!"*[179]

P: "¿Y pasaría la recta $\mathrm{y} = 0$*?"*

A2 y A5: "¡No!"

A2: "!Pues eso!, depende de donde pongas la recta la puede pasar o no."

A5: "Pero en los negativos no."[180]

Se produce murmullo y comentarios que apoyan al alumno *A2* y *A5*. Finalmente, la profesora a modo de conclusión resume las dos situaciones presentadas.

P: "Efectivamente, ¡esa es la diferencia! En este caso, cuando x *tiende a infinito negativo, habrá unas rectas (*$\mathrm{y} = \mathrm{k}, \mathrm{k} > 0$*) que la función las atravesará, pero otras no. En el caso del comportamiento de la exponencial cuando* x *tiende a infinito positivo se alejará de todas."*

---

177 Esta alumna manifiesta imprecisión en los conceptos de punto y recta pero comprende la discriminación asintótica y se ayuda de movimientos de con sus brazos.
178 Se considera que dicho alumno quiere decir que no pasa a cualquier recta.
179 Nuevamente se confunde lo que pasa en un caso particular frente a la generalización.
180 Este alumno se percata de que no va a pasar a todas las rectas, hecho que ocurre cuando no hay comportamiento asintótico.

Reflexión:

El planteamiento de este vídeo es mostrar justificadamente aquellas funciones que no presentan un comportamiento asintótico, algunos alumnos se resisten a seguir este razonamiento por discriminación, y querían saber por qué se tiene el comportamiento asintótico y saber exactamente qué funciones van a presentar asíntotas.

El alumno *A2* manifiesta que comprende que las funciones presentadas en el vídeo no muestran un comportamiento asintótico en el infinito positivo porque las funciones *"se abren"* y hay un punto de la gráfica de la función que *"se va alejando"* de las rectas que aparecen en el vídeo.

Presenta más problemas comprender que $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a infinito negativo. Según el alumno A5 *"pasa la función a la recta* $\mathrm{y} = 0.01$… *Pues depende de donde pongas la recta la puede pasar o no",* y respondiendo a otro alumno, reafirma *"pero a* $\mathrm{y} = 0$ *no,… pero en los negativos no",* acercándose a la idea intuitiva del comportamiento asintótico. Nuevamente se percibe que ciertos alumnos confunden lo que pasa en algunos casos particulares frente a la generalización.

Ciertos alumnos, a pesar de manifestar imprecisiones en el vocabulario asociado al concepto de asíntota, comprenden la discriminación asintótica.

5/5/17

Tras el visionado introductorio de la tendencia asintótica:

A3': "¿La asíntota es una recta imaginaria o un punto del eje y *que se ha representado?*[181]

P: (Dirigiéndose a otro alumno) *¿Tú, qué has entendido* A9*?*

A9:" Pues no mucho.[182]

P: "Bueno, pero algo si,[183] *¿no? Vamos poco a poco… Coméntame algo que te haya sorprendido."*[184]

A9: "Pues que tiende a cero.

P: "¿Qué es lo que tiende a cero?

A9: "Pues la asíntota."

P: "La asíntota es una recta. ¿Qué es lo que tiende a cero?"

[181] Esta alumna no ha comprendido el comportamiento global de la función
[182] Cierto pesimismo en su respuesta.
[183] Siempre es más optimista pensar en el vaso medio lleno que no medio vacio.
[184] Cuando es preguntado sobre lo que ha comprendido no contesta, pero sí cuando se le pide que comente algo que le ha sorprendido.

A9: “Pues la recta.”

P: “¿Una recta puede tender a cero?...(Silencio) *Me interesa el comportamiento de la función respecto de la recta. ¿Qué ocurre? Visualmente se presentaba algo… ¿Qué has visto?”*

A3: “Se van juntando, se van acercando en el infinito.”

A1: “¿Tendríamos que dar la fórmula de la recta que es la asíntota?”[185]

P: “Para ser más exactos, lo que buscaremos será la expresión de la recta-asíntota.

A2: “¿La asíntota es la gráfica que se acerca a la recta?[186]

P: “¿Cómo dices?”[187]

A2: “Que si la asíntota es la función que se acerca a la recta.”

P: “¿Quién responde a A2?[188]

A8: “No, la asíntota es la recta…”[189]

P:…a la que se aproxima la curva.

A2: ¡Ah…! Y la curva es la función..[190]

P: “!Claro!, la curva es la gráfica de la función que estemos estudiando.”

P: “A modo de conclusión, ¿Quién me resume lo que significa un comportamiento asintótico?”

A3: Una asíntota es cuando la gráfica de una función se acerca a una recta, el comportamiento se acerca al de una recta y la distancia que hay entre la función y la recta cada vez se hace más pequeña, es decir, que tiende a cero.[191]

Reflexión:

Se han manifestado dificultades en:

- Comprender el comportamiento local y global de las funciones.
- Distinguir entre fórmula y expresión.
- Diferenciar los elementos fundamentales que caracterizan a una función, en un caso se manifiesta confusión entre asíntota y gráfica de la función.

---

[185] Confusión entre fórmula y expresión de una recta.
[186] Confusión entre asíntota y gráfica de la función.
[187] Se pide repetir la afirmación para confirmar la confusión de dichos conceptos.
[188] La investigadora invita a que se respondan unos a otros.
[189] Con la respuesta de dicho alumno y, el apoyo del resto, comprobamos que ha sido comprendido por la mayoría del alumnado.
[190] Este alumno no tenía afianzada la conexión de gráfica o curva que representa la función en el plano.
[191] Este alumno presenta un alto nivel competencial en matemáticas.

- Expresar correctamente lo que representa una situación gráfica.
- Incorporar los nuevos conceptos a los ya conocidos de otros bloques de contenido, apareciendo "invenciones de nuevos conceptos", como por ejemplo: "*Tendencia de una recta a cero*"

X.4.4.4 Cuarta Sesión (21/3/17). Asíntota Horizontal

A continuación, se presenta de forma conjunta las trascripciones de los diálogos posteriores a las visualizaciones de los vídeos correspondientes a los estadios semiótico, estructural y autónomo de las asíntotas horizontales.

Tras la visualización del primer vídeo, surge el siguiente diálogo:

A2: "Que si en las horizontales, la función llega a tocar la asíntota o simplemente tiende a ella o se aproxima…, porque las verticales, en las verticales que vimos ayer sí que las cruzaban, ¿sabes?…"[192]

P: "No eran asíntotas verticales aquellas… ¡Cuidado![193]*"*

A2: "¿Bueno, pero en éstas no toca la función la asíntota?"[194]

P: "Puede llegar a tocar la función a una asíntota horizontal… puede darse en algún caso. Pero lo del otro día era discriminación asintótica, ¿os acordáis?...era que se podía poner cualquier recta vertical y la función era capaz de superarla.

La mayoría de los alumnos asienten con la cabeza y *A2* permanece en silencio. La investigadora invita al alumnado a hacer algún otro comentario o si la visualización les ha provocado alguna duda, pero nadie aporta nada.

Tras el segundo vídeo, se solicita a un voluntario que resuma el contenido expuesto en dicho estadio estructural:

A2: "Tiene ***como una tendencia a infinito*** *se va acercando, se va acercando a lo que es la asíntota y los dos puntos no llegan a tocarse nunca y la curva nunca corta a la asíntota…, no sé si lo he dicho bien."*[195]

---

[192] El alumno se refiere a las funciones que no presentaban comportamiento asintótico que verifican que superaban cualquier recta fijada.
[193] La investigadora está percibiendo que lo que se intentó explicar en la anterior sesión fue tergiversado.
[194] El alumno no muestra interés en aclarar la anterior sesión, sino la nueva cuestión que plantea respecto a las *AH*.

P: "En el caso de la asíntota horizontal, ¿podría darse el caso que la curva cortase a la asíntota?"

A2: "Pues en la del video no llega a cortar a la asíntota."[196]

P: "En este caso no. Pero sí podría darse algún caso en que la función cortase a la asíntota…"

A3: "¿Y este tipo de funciones[197] *siempre tiene asíntota horizontal? ¿No puede haber también vertical?"*[198]

P: "Pueden darse muchas variedades de casos, en los ejemplos de discriminación asintótica había diferentes tendencias en el infinito negativo y positivo, asintótico o no…"

A3: "¿Si la asíntota es vertical, entonces cortaría la función a la asíntota?"[199]

P: "Eso os lo explicaré cuando estudiemos las asíntotas verticales".

Para finalizar el estudio particular de las asíntotas horizontales, se consolida a partir del tercer vídeo relativo al estadio autónomo:

P: "¿Qué nos ha aportado de novedoso este vídeo?"

A3: "Pues, que cuando un punto tiende a infinito, el que se está desplazando… tiende a cero, respecto del que se está desplazando… es que no sé explicarlo muy bien, pero sí que lo he entendido[200]*..*

A5: "Comparando la asíntota y la función, cada vez va disminuyendo más...[201]

P: ¿Qué disminuye?

Al no contestar ningún alumno intenta ayudar a los alumnos reformulando la pregunta en otros términos.

P: "¿Qué comparten el punto **A** *y* A'*?"*

A5: "La misma x.*"*

A7: "Es como si trazo verticales."[202]

---

[195] Los alumnos muestran inseguridad al verbalizar contenidos matemáticos y éste, en particular, nos lo quiere trasmitir especialmente.
[196] El alumno se limita a comentar lo que ha visto en el caso concreto del vídeo.
[197] En ningún momento se han clasificado o tipificado a las funciones que ser presentan en los vídeos.
[198] Búsqueda de relación entre asíntotas horizontales y verticales.
[199] Respondida la pregunta inicial sobre el posible corte de la función con la *AH*, un alumno plantea la cuestión análoga para *AV*.
[200] Dificultades lingüísticas para explicar el estudio conjunto de las dos tendencias de las variables x e y.
[201] Aunque no lo dice textualmente, se está refiriendo a que la distancia de la imagen de la función hacia la recta es lo que va tendiendo a cero.
[202] Relación con las proyecciones sobre los ejes del plano cartesiano.

A2: "Las y *van disminuyendo."*

P: "Efectivamente, la distancia de las ordenadas va tendiendo a cero porque tienden a comportarse igual[203]*."*

Reflexión

A partir del ejemplo de la sesión anterior en el que se mostraba que la función exponencial no presenta una tendencia asintótica vertical cuando x tiende a infinito positivo, fue entendido por un alumno como que la función podía cortar a la *AV*. Lo que marca las dificultades de comunicación entre los docentes y los discentes, encontrándose en muchas ocasiones compartiendo un código común, sin aparentes elementos distorsionadores o interferencias, sin embargo el mensaje no tiene la misma significación en el emisor que en algunos receptores. Si no se dedican ciertos tiempos para escuchar al alumnado, esa distorsión de la comunicación no es contrastada entre las partes implicadas, como muestra el ejemplo anteriormente expuesto y por tanto, no se puede solucionar esa situación. El lenguaje ayuda a construir y es una herramienta o recurso que se debe cuidar y utilizar en el aula, más aún cuando no es una práctica habitual en nuestra costumbre educativa, como también trasmiten los alumnos.

El alumno *A2* considera a la tendencia asintótica horizontal *"como una tendencia a infinito que se va acercando, se va acercando a lo que es la asíntota".* Sin duda, la expresión repetida de este alumno, "*se va acercando"* manifiesta que la relación entre asíntota y curva es más que una simple aproximación, y seguramente tenga en su pensamiento la idea de aproximación óptima, es decir, de tendencia.

Algunos pretenden sacar generalidades a partir de un caso concreto, afirmando que nunca la función cortará a la asíntota porque no ocurre en el ejemplo presentado. Otros quieren ir sacando conclusiones totalmente paralelas entre las *AH* y *AV*, a pesar de no haber comenzado la docencia planificada para ellas, lo que muestra que la ineficacia de la linealidad propuesta por algunos planes educativos o programaciones rígidas que chocan con los intereses o con las necesidades de conexión que se les ocurre a los alumnos. Además la evolución histórica de las matemáticas no ha sido un ejemplo de linealidad.

X.4.4.5 Quinta Sesión (22/3/17). Asíntotas Verticales

Cuando fueron presentados los vídeos relativos a las asíntotas verticales, hubo menos intervenciones verbales en el aula. Merece especial mención una alumna que afirmó:

A7: "En la curva azul ha aparecido una línea de puntos más a la derecha que la asíntota verde[204]*"*

---

[203] Se ha incidido en que la diferencia entre las ordenadas es la distancia entre la función y la asíntota.

P: "¿Visualmente te ha parecido?... (El alumno asiente con la cabeza) *Pero no."*[205]

A7: "O sea no lo puedes saber."[206]

P: "¿Alguien más ha visto una recta que ha pasado a la verde?[207]*,* (Silencio) *¿Tú también los has visto A9?*

A9: "¡Yo que voy a ver![208]*"* (Se produjeron sonrisas generalizadas). "*No, yo tampoco... no lo he visto tampoco."*

P: "No, no puede ocurrir en el caso que se presenta."

A7: "Ay, pues a mí sí."

P: Alguien más habéis visto una curva que ha superado la recta verde? No, yo no le visto tampoco

Reflexión:

Cuando fueron presentados los vídeos relativos a las asíntotas verticales, hubo menos intervenciones verbales en el aula. Merece especial mención un alumno que afirmó que la curva había sobrepasado la asíntota y que continuaba por dicho lado. Esa situación no ocurre en el vídeo presentado, ningún otro alumno visualizó este hecho, pero muestra que la percepción ocular puede ser fuente de errores o falsas interpretaciones, y también sirve para mostrar al alumnado que en matemáticas se dispone de otras herramientas para comprobar las diferentes hipótesis.

Un alumno presenta la siguiente cuestión

A8: "¿Puede una función presentar más de dos asíntotas verticales?"

P: "¿Quién le contesta a A8*?"*

Varios alumnos responden que no, imposible, eso no puede ser…

P: "¿Por qué?"

A6: "Porque no."[209]

---

[204] Lo que se plantea es que la curva azul continúa a la derecha de la asíntota verde, cortando en algún punto.
[205] Este alumno ha visualizado un hecho que no es real, lo que demuestra que el ojo humano o la percepción visual a veces puede engañar.
[206] No acepta la negativa de su propuesta e insiste en que, quizás, es porque no se puede saber.
[207] La investigadora pregunta al resto de alumnos para contrastar su percepción visual.
[208] Esa exclamación trasmite dudas sobre si lo tenía que haber visto o no, el alumno no sabe muy bien si no lo ha visto porque no existe o, por el contrario, que esa situación se ha dado y él no la ha percibido.
[209] En muchas ocasiones, los alumnos se limitan a posicionarse en una creencia pero sin justificarla y cuando se les pide que aporten razonamientos, tan siquiera responden o aparecen expresiones del tipo *"porque sí"* o *"porque no"*.

P: "Afirmas que no, pero no me das una justificación."

Dicho alumno no aporta ningún comentario y se produce cierto silencio hasta la intervención del alumno *A1*.

A1: "Bueno,…si es definida a trozos…"

A6: "¡Eso no es una función!"

P: "¿Me estáis queriendo decir que una función definida a trozos no es una función?"[210]

Varios alumnos quieren responder a la vez y se solapan las respuestas por lo que se les pide que, por favor, respondan de uno en uno para poder analizar sus respuestas.

A3: "Es una función de funciones"

A10: "Como que son varias funciones."

P: "Vamos a ver, una función puede tener diferentes expresiones en diferentes intervalos de su dominio, pero es una función… ¿estáis de acuerdo?"[211]

A1: "Es que cuando tú preguntas por una función, creíamos que tú lo querías con una sola función."[212]

Relativamente convencidos ante la argumentación de la docente y volviendo a la cuestión inicial la investigadora planteó la siguiente pregunta:

P: "¿Os acordáis de las funciones trigonométricas? ¿Recordáis la función tangente?"[213]

La investigadora analiza con detenimiento la función tangente incidiendo en su periodicidad, construyendo una tabla de valores y haciendo un esbozo en la pizarra.

A1: !Sí! La función tangente es una función periódica, cada 360 grados[214] *todo se repite.*

[210] La investigadora muestra sorpresa ante dicha afirmación ya que, en su opinión, se han trabajado las funciones definidas a trozos durante este curso y años anteriores.
[211] Se intenta trasmitir al alumnado la diferencia entre una función y su expresión algebraica, que puede ser única para todo su dominio o bien tener diferentes expresiones en ciertos intervalos de su dominio.
[212] El alumnado se autoimpone condiciones que inicialmente no son pedidas por los docentes, lo que limita sus razonamientos o impone que concluyan respuestas erróneas.
[213] El bloque de trigonometría fue estudiado en el primer trimestre, aunque se presentaron las funciones trigonométricas su estudio fue superficial.
[214] Aunque la investigadora usó los radianes como unidad de referencia para la medida angular, el alumnado se siente más cómodo con los grados, posiblemente por su mayor utilización en contextos reales.

En la pizarra estaba dibujada la función solamente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ de su dominio de definición, antes de continuar ampliando la representación en más intervalos del dominio, la investigadora preguntó:

P: "¿Entonces, cuántas asíntotas tiene la función tangente?"

A7: "!Dos! Las que están dibujadas…"[215]

Aumenta el número de alumnos que le dicen a *A7* que no está en lo cierto.

A3: "Pues infinitas ¿no?, cuando el coseno es 0*, como la función puede dar infinitas vueltas…."*[216]

A9: "Pero sólo vale cero el coseno en 90 *y* 270*, ¿hay cierta simetría no?"*

P: "Exacto, hay infinitas asíntotas verticales."

A7: "¡Pues vaya!, en las horizontales sólo podía haber dos…"[217]

A1: "¿Y un polinomio de grado 10*, tendría* 10 *asíntotas?"*

P: "No, las funciones polinómicas no presentan comportamiento asintótico…"

A1: "¿Pero si la función se anula en diez puntos en el denominador?"

P: "Vamos a ver, no es lo mismo una función polinómica…que una función racional…"[218]

A1: "Eso, eso es lo que yo digo ¡la racional!, tendría asíntotas verticales."

P: "Tendríamos que hacer un estudio completo de la función para ver si dichas raíces son reales o no, si son raíces dobles o triples… si de verdad hay tendencias asintóticas... La clave está en estudiar en profundidad la función que se nos presente y a partir de ella sacar conclusiones… ¡no antes!"

Reflexión:

Un alumno muestra preocupación por si una función puede presentar más de dos asíntotas verticales a lo que la mayoría del alumnado no ve posible, pero sin aportar justificaciones.

Este es un hecho que se presenta en diferentes situaciones en el aula, en algunas ocasiones, los alumnos se limitan a posicionarse en una creencia pero sin justificarla y

[215] Ciertos alumnos no son capaces de abstraer el concepto de función por encima de su representación.
[216] Relación de la periodicidad en un dominio infinito con *"dar infinitas vueltas"*.
[217] Le sorprende que pueda haber infinitas asíntotas verticales en comparación con las asíntotas horizontales, ya que pretende hacer analogía entre el comportamiento de ambas.
[218] Es habitual la confusión en el alumnado entre las funciones polinómicas y las racionales.

cuando se les pide que aporten razonamientos, tan siquiera responden, o aparecen comentarios del tipo *"porque sí"* o *"porque no"*.

Con cierta reticencia y duda, un alumno dice *"bueno,…si es definida a trozos…"* a lo que responde otro *"una función definida a trozos no es una función".* La investigadora muestra perplejidad, ya que, en su opinión, se ha trabajado en profundidad las funciones definidas a trozos durante este curso y años anteriores para no ser consideradas como tal.

Al aparecer expresiones del tipo *"es una función de funciones"* o *"como que son varias funciones"* la investigadora intenta trasmitir al alumnado la diferencia entre una función y su expresión algebraica, que puede ser única para todo su dominio o bien diferente en ciertos intervalos de su dominio. Curiosamente un alumno se justifica del siguiente modo *"es que, cuando tú preguntas por una función, creíamos que tú lo querías con una sola función".* A veces, el alumnado se autoimpone condiciones que inicialmente no son pedidas por los docentes, lo que limita sus razonamientos o provoca que se concluya respuestas erróneas, hecho que se corresponde con las interpretaciones que hacen los alumnos sobre los enunciados de los problemas.

Hay sorpresa por parte de algunos alumnos al visualizar en la función tangente la presencia de infinitas asíntotas verticales, pero tras el análisis de la función han sido capaces de relacionarlo con periodicidad, simetrías y el correspondiente estudio algebraico-geométrico, apareciendo expresiones muy curiosas como las siguientes: *"la función puede dar infinitas vueltas…."*, "*todo se repite", "¿hay cierta simetría no?".* Solamente un alumno fijaba el máximo de asíntotas a 2, por analogía a lo que ocurría con las horizontales y, además, coincidía con la representación gráfica que estaba en el encerado, mostrando de nuevo la dificultad que presentan ciertos alumnos de diferenciar el concepto abstracto de función con una representación concreta de la misma. Parece que el pensamiento de ciertos alumnos no trasciende de los ejemplos más sencillos propuestos y, sin duda, hay una dificultad superlativa en el proceso de generalización, no descubren que el número de asíntotas puede ser arbitrario y que depende exclusivamente de la función.

Ha aparecido también la confusión entre funciones polinómicas y racionales, algo habitual en el alumnado, llegando a preguntar uno de ellos *"¿y un polinomio de grado* 10*, tendría* 10 *asíntotas?"* cuando lo que realmente quería plantear era una función racional cuyo denominador tuviera 10 posibles raíces y distintas. Se insistió en la necesidad de hacer un estudio en profundidad de la función, y estudiar si dichas raíces son reales o imaginarias, entre otras muchas posibilidades.

Aunque la investigadora usó los radianes como unidad de referencia para la medida angular, el alumnado se siente más cómodo con los grados, posiblemente por su mayor utilización en contextos reales. Sin embargo, en un tratamiento funcional, es evidente que el radián es la medida natural y en consecuencia, es la unidad angular que se utiliza en la variable independiente.

X.4.4.6 Sexta Sesión (24/3/17). Asíntotas Oblicuas

Para finalizar el itinerario formativo se profundizó en el estudio de las asíntotas oblicuas y posteriormente surgió un interesante debate que se trascribe a continuación:

A2: "¿Qué si la asíntota oblicua se puede cortar?"[219]

P: "¿Puede cortar una función a su asíntota oblicua? ¿Habría alguna contradicción?[220]*"*

A6: "Yo creo que sí que puede… hasta infinitas veces…"

A2: "Estáis diciendo que puede cortar hasta infinitas veces… ¿Pero por qué?...Entonces no es una asíntota, oblicua, si hace lo que le da la gana..."[221]

P: "¿Qué es eso de que hace lo que le da la gana? ¿Qué hace la asíntota?"

A2: "Comportarse igual que la curva."

P: "¿La asíntota se comporta como la curva?"[222]

A2: "No, la curva se comporta igual que la asíntota."[223]

P: "¡Cuidado! No es lo mismo que la recta se comporte como la curva, a que la gráfica de la función se comporte como la recta… en el infinito"

A2: "¿La corta, pero no se desvía?"[224]

P: "El que corte y pueda separarse de la gráfica, ¿habría algún problema?"

A2: "Pues sí."

P: "¿Qué problema habría? (Silencio) *¿Cuál era la condición que se debía cumplir?"*

A2: "Que la diferencia en el infinito tiende a cero."

P: "¿Y no puede ocurrir eso en el infinito?"

---

[219] El corte entre curva y asíntota es una preocupación constante en el alumnado.

[220] La investigadora intenta hacer ver al alumnado que los posibles cortes no influyen en el comportamiento de la función en el infinito.

[221] Para este alumno la posibilidad de infinitos cortes de la curva con la asíntota lo interpreta como que *"la asíntota hace lo que le da la gana"*.

[222] La docente pide confirmación al alumno sobre la consideración de la asíntota como protagonista principal de su tendencia en el infinito.

[223] El alumno reflexiona y da a la curva el papel principal de su tendencia en el infinito.

[224] Es difícilmente imaginable *"un corte sin desviación"* pero es una duda que plantea el alumno.

A2: "No, porque en el momento que corta, llega a cero. Si se juntan en un punto la distancia ha llegado a cero, entonces ya no puede tender…"[225]

P: "La distancia ha llegado a cero en ese punto, pero ese punto me importa muy poco, es algo local, lo que a mí me verdaderamente me importa es la función cuando x *tienda a infinito, ¡en esos casos!; es decir, lo que ocurre en el infinito, para eso se pueden estudiar los límites en el infinito."*[226]

A3: "¿Dónde está el infinito?"[227]

A2: "Es que no lo sabemos."

P: "¿Te interesa buscar esos puntos de corte?[228]*¿Es imprescindible?"*

A2: "Es que la distancia no tiende a cero. Si lo corta y luego continúa pues la distancia aumenta."

P: "Pero puede volver a acercarse ¿no?"[229]

A2: "No sé…supongo que sí."

P: "¿Y si fuera una función que estaría alrededor de la asíntota oscilando?

A2: "!Pues no sería una asíntota!"

P: "¿Por qué no?"

A2: "Pues no tendería a cero. La diferencia entre la curva y la recta es mayor que en el punto dónde se corta y luego continúa, pues aumenta.."

P: "Pero puede ocurrir que pase un número finito de veces, pero después deje de pasar.."

A2: "Me estoy rayando" (El alumno no se siente cómodo con esta conversación y el resto de alumnado está perdiendo interés en la misma, algunos porque han entendido la situación y otros por aceptación de la misma aunque no con comprensión total)

P: "Aunque va oscilando, la tendencia es que se tienden a parecer y, por tanto, el límite tiende a cero. ¿Iría en contradicción con que en el infinito tuvieran un comportamiento análogo?"

A2: "No… claro… así visto"

---

[225] *"Si la distancia se ha hecho cero en un punto, ya no puede tender a cero"* que sería equivalente a asegurar que si se ha conseguido que la distancia es cero no puede tender más tarde a cero.
[226] La investigadora intenta que los alumnos distingan entre comportamientos locales y globales.
[227] Aparecen cuestiones trascendentales e incluso de profundidad filosófica.
[228] La investigadora se aleja de la pregunta sobre el infinito para profundizar en "la importancia o no" de los posibles puntos de corte de la curva con la asíntota.
[229] Se le propone al alumno la posibilidad de que pueda haber alejamientos y acercamientos entre la curva y la asíntota.

P: "¡Puede ocurrir estas situaciones! Sí, son casos especiales, y os lo mostré con GeoGebra. No es fácil, lo sé."

Reflexión:

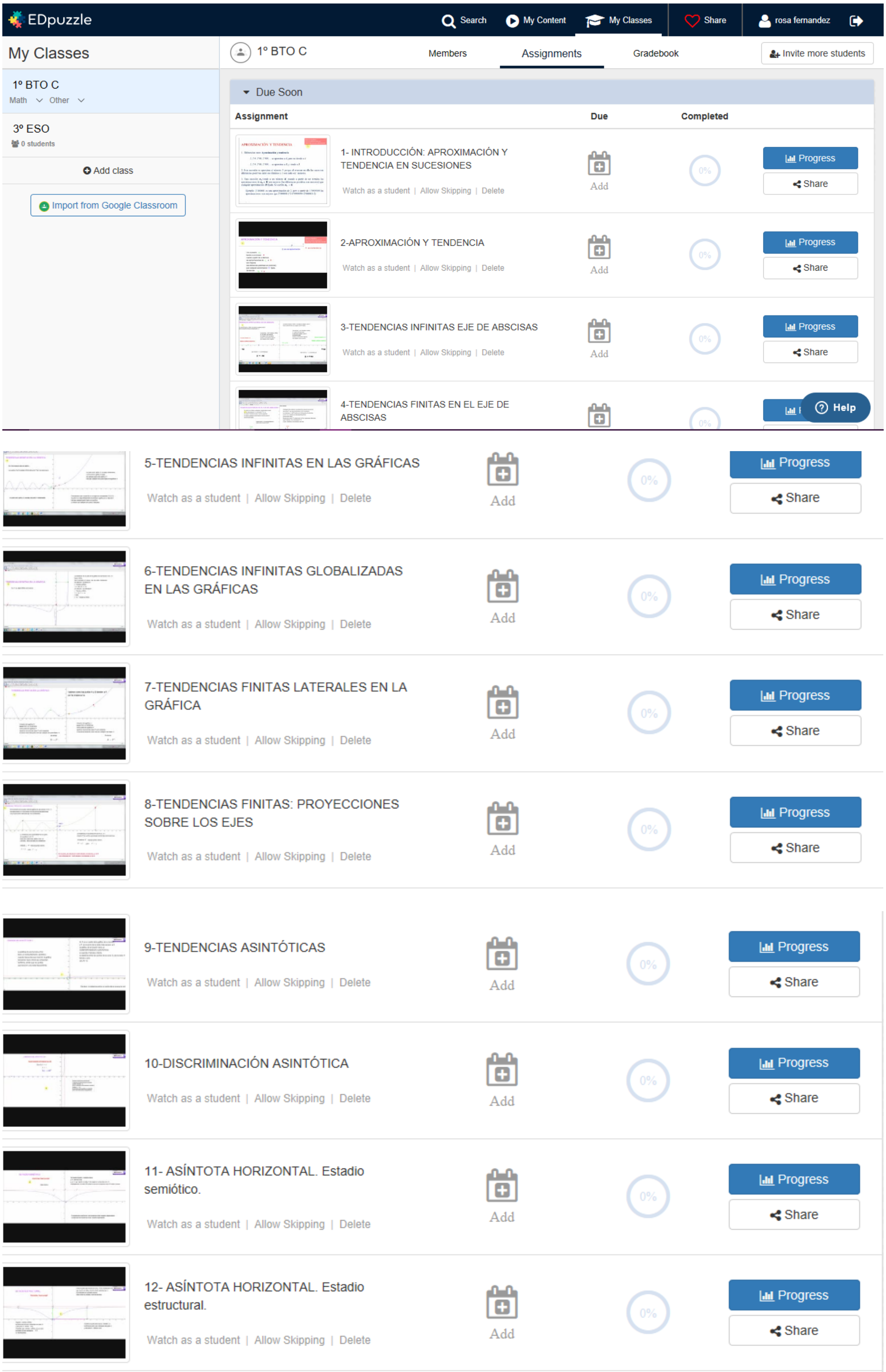
El corte entre curva y asíntota ha sido una preocupación constante en el alumnado, en todas sus variedades. La investigadora intenta hacer ver al alumnado que los posibles cortes, finitos o no, no influyen en el comportamiento de la función en el infinito.

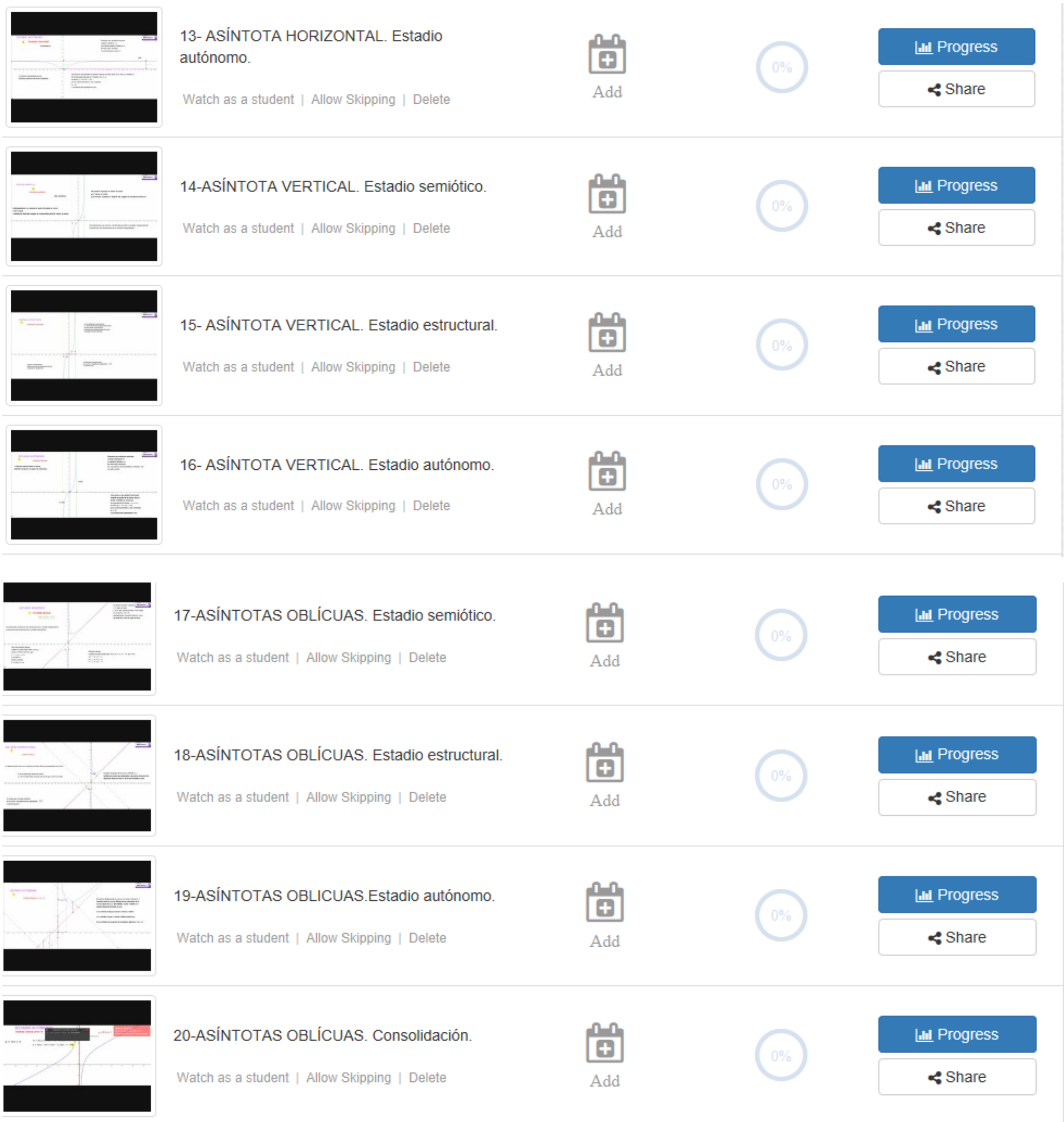
Para cierto alumno la posibilidad de infinitos cortes de la curva con la asíntota lo interpreta como que *"la asíntota hace lo que le da la gana"* y, además, dota a la asíntota el papel principal de su tendencia en el infinito frente a la curva. Ante este pensamiento, la investigadora intenta que los alumnos distingan entre comportamientos locales y globales, y ciertamente, las gráficas de las rectas responden a un modelo universal (que es siempre el mismo), mientras que se pueden crear funciones cuyas gráficas puedan comportarse como se precise o sea necesario, según los casos. Con esta interpretación el pensamiento de esta alumna no está tan alejado del posible comportamiento de las funciones cuyas gráficas se pudieran confundir (ser idénticas) con una recta en un intervalo de definición infinito.

Es difícilmente imaginable *"un corte de la curva y la asíntota sin desviación"* pero es una duda que plantea el alumno, porque "*si se juntan en un punto la distancia ha llegado a cero, entonces ya no puede tender a cero".* Sería equivalente a asegurar que si se ha conseguido cierta distancia entre la curva y la asíntota, cero en este caso particular; entonces, no puede tender la distancia a ese valor cuando la variable x tiende a infinito, según sus palabras, *"no puede pasar más tarde".* Se explica al alumno la posibilidad de que pueda haber alejamientos y acercamientos a modo de oscilación de la curva alrededor de la asíntota.

X.4.5 Plataforma EdPuzzle

A continuación, se muestran diferentes capturas de pantalla de dicha plataforma dónde se puede identificar la clase, aparecen la relación de vídeos que deben visualizar los alumnos y ventanas de control del progreso de los alumnos. La interfaz para los alumnos sólo muestra los vídeos con el acceso a las cuestiones.


EDpuzzle
Search
My Content
My Classes
Share
rosa fernandez
My Classes
1º BTO C
Math
Other
3º ESO
0 students
Add class
Import from Google Classroom
1º BTO C
Members
Assignments
Gradebook
Invite more students
Due Soon
Assignment
Due
Completed
1- INTRODUCCIÓN: APROXIMACIÓN Y TENDENCIA EN SUCESIONES
2-APROXIMACIÓN Y TENDENCIA
3-TENDENCIAS INFINITAS EJE DE ABSCISAS
4-TENDENCIAS FINITAS EN EL EJE DE ABSCISAS
5-TENDENCIAS INFINITAS EN LAS GRÁFICAS
6-TENDENCIAS INFINITAS GLOBALIZADAS EN LAS GRÁFICAS
7-TENDENCIAS FINITAS LATERALES EN LA GRÁFICA
8-TENDENCIAS FINITAS: PROYECCIONES SOBRE LOS EJES
9-TENDENCIAS ASINTÓTICAS
10-DISCRIMINACIÓN ASINTÓTICA
11- ASÍNTOTA HORIZONTAL. Estadio semiótico.
12- ASÍNTOTA HORIZONTAL. Estadio estructural.
Watch as a student | Allow Skipping | Delete
Add
0%
Progress
Share
Help



X.64 *Figura 10.64.* Interfaz Plataforma EdPuzzle

X.4.6 Respuestas del Test de Valoración Final 1º BTO Curso 2016/17

A continuación se plasman todas las respuestas de los alumnos a la primera pregunta del test de expertos.

"A1: Porque 1,999999 ***es casi lo mismo*** *que representar el 2"*

El alumno entiende que la aproximación 1,999999 es una representación del 2.

Relación con el cálculo de la fracción generatriz de un número decimal periódico. Se produce una interconexión entre el análisis y la aritmética.

"A2: Porque las ***aproximaciones son mejores****, es decir, las diferencias positivas son menores."*

"A3: Porque aproximar es ***"acercarse",*** *es decir, el número más cercano a esa sucesión o número; en cambio la* ***tendencia*** *puede tender a* ***cualquier*** *número sin que este se acerque a ese número"*

"A4: Son correctos porque una ***tendencia*** *es la* ***aproximación*** *que se puede tener de un valor."*

"A5: Porque la ***proximidad*** *puede ser* ***cualquier número*** *y la* ***tendencia*** *un número muy* ***cercano."***

"A6: Son verdaderos porque la sucesión al avanzar las diferencias entre 1'999 y 2 van siendo menores."

"A7: Se aproxima a tres porque al avanzar en ella las sucesivas diferencias positivas entre sus términos y 3 son menores." (Omite la tendencia)

"A8: Porque cada vez se ***aproximan más*** *a los términos (2 y 3 en este caso) y hay* ***menor diferencia*** *(a 2)."*

"A9: Porque nunca va a llegar a ∞ pero sí que tiende."

"A10: Porque cada vez la ***distancia*** *hacia el 3 es* ***menor*** *pero sin embargo tiende hacia 2."*

"A11: Porque la ***aproximaciones positivas son cada vez menores hacia dos****, por eso tiende a dos, y se aproxima a tres porque cada vez está más cerca."*

"A12: Porque 1,999 se aproxima a 3 porque ***queda menos*** *para 3 pero no tiende a tres ya que* ***tiende a 2 antes que a 3,*** *si fuera 2,999 ese sí que tiende a 3 y se aproxima a 3."*

A13: Porque la ***diferencia positiva entre la sucesión y el dos*** *es menor que la diferencia positiva entre la sucesión y 3, por eso podemos decir que tiende a dos y no a tres, aunque la sucesión se aproxime a ambas."*

"A14: Se aproxima a 3 porque según avanza la sucesión, el valor que se adquiere dista menos de 3, en cambio no tiende a 3 ya que no es la mejor aproximación, la mejor aproximación es 2, ya que según avanza, cada vez está más cerca de dos y ***no le sobrepasa."***

"A15: Se aproxima a 3 ya que se acerca al número pero es al 2 al que se acerca la sucesión pero ***sin llegar al propio 2****; por lo tanto decimos que se aproxima a 3 y tiende a 2."*

"A16: Se aproxima a tres porque el número se va acercando cada vez más a tres, y tiende a dos porque ***no hay una mejor aproximación*** *que la de la sucesión."*

"A17: Porque la sucesión tiende a 2 pero se puede aproximar a muchos números."

"A18: Son verdaderos porque (se aproxima a 3) debido a que las diferencias de los números de la sucesión son cada vez menores, (tiende a 2) debido a que **no existe ninguna sucesión que se aproxime mejor a 2 y por último (no tiende a 3) debido a que si existen sucesión que se aproximen a 3 mejor que esta, por ej.: 2'9, 2'99, 2'999."**

"A19: Porque cada vez es más cercano a 2 **el número de la sucesión** *pero sin llegar a tocarlo, por lo tanto tiende a 2, y a su vez se va acercando a 3.*

"A20: Porque nunca pasa del 2."

"A21: Porque 1'9, 1'99, 1'999 está más cerca de 2, por tanto tiende a 2 y se aproxima a *3, porque* **está cerca del 3, pero no tanto como el 2***."*

"A22: Porque un número se aproxima un número cercano a él, y tiende a un número porque las diferencias positivas son menores."

"A23: Porque los números que nos han planteado cada vez se acercan más al 2, **sin llegar a él***. Decimos que se aproxima cuando se acerca."*

X.5 ANEXO CUARTO CICLO INVESTIGACIÓN CURSO 2017/18

X.5.1 Respuestas del test de expertos 2º BTO Curso 2017/18

A1.- "Porque cuando el último número es > 4 *se dice que se* **aproxima** n+1 *(redondeo), por eso en este caso se aproxima a 3 y tiende a 2, porque el último número es 9 y el* n=1*." Utilización del criterio del redondeo para la aproximación pero no lo aplica para la tendencia. Tiene clara la tendencia pero no lo justifica."*

A2- "Se aproxima a 3 porque en la sucesión las **diferencias positivas** *entre sus términos y 3 son cada vez* **menores, y tiende a 2** *porque las* **aproximaciones** *de la sucesión a 2 son* **mejores** *que cualquier aproximación fijada."*

A3.- "Son verdaderos porque la sucesión según avanza se **acerca** *a 3, pero no tiende a 3 porque las* **diferencias positivas** *entre sus términos son* **más cercanas** *a 2 que a 3."*

A4- "Tiende a 2 ya que **mejora cualquier aproximación prefijada***, por lo tanto no tiende a 3. Se aproxima a 3 porque cada vez los valores estás más cerca del mismo, es decir, la diferencia positiva entre ellos cada vez es menor, pero no tiende a tres."*

A5.- "Se aproxima a 3 ya que las diferencias entre los números dados y 3 son cada vez menores. ***Tiende a 2, y por lo tanto no tiende a 3,*** *porque están más próximos los números dados a 2 que a 3." Comprensión de la unicidad del límite.*

A6.- "Porque el número con el que **tiene menos diferencias positivas es el 2 y** *es al que tendera la función, aunque como la función se hace cada vez mayor, se va a* ***aproximar a cualquier número positivo mayor que ella."***

A7.- "Porque la sucesión se va a aproximar al número 3 porque al avanzar en ella las sucesivas diferencias positivas entres sus términos y 3 son cada vez menores. Sin embargo, no tiende a 3, puesto que hay otro número, el 2, que **se aproxima más que este***."*

A8.- "Porque 1,999 y demás son números que no son dos, pero que están muy **cerca de** *dos, por lo tanto decimos que tiende a 2, y se aproxima a 3 por que está* ***próximo a*** *3."*

A9.- "La he marcado como verdadera ya que 1,999 tiende a 2 ya que cada vez las ***aproximaciones son mejores****, y la segunda he puesto que no tiende a 3 porque en todo caso sería que se aproxima, pero en realidad tiende a 2."*

A10.- "La sucesión se **aproxima** *a 3 porque al* ***avanzar,*** *la* **diferencia** *entre cada número y 3 es cada vez menor pero* **tiende** *a 2 porque además al avanzar en la sucesión, la diferencia con 2 sea cada vez menor,* ***la aproximaciones son mejores que cualquier aproximación fijada."***

A11.- "Esta sucesión se aproxima a 3 porque se va acercando, pero tiende a 2 porque ***las diferencias entre estos dos valores son cada vez menores."*** *Eso también ocurre con el 3, luego no es justificación.*

A12.- "Porque **antes del 3 va el 2,** *y va a tender primero a 2."*

*A13.- "***Por la definición***. Esa sucesión se aproxima tres porque a medida que avanza se aproxima más al tres pero* **tiende a dos por aproximación***." Sentencia que por definición como algo externo impuesto y que no precisa de más explicación.*

A14.- "Porque al avanzar en esa sucesión de 1, 1'9, 1'99,... las **sucesivas cada vez son menores** *y se van acercando a dos, que es su tendencia y se aproxima (cada vez más próximo) a 3." Economía lingüística, "sucesivas cada vez son menores" por las* **sucesivas diferencias cada vez son menores.** ***También las sucesivas diferencias a 3 también son menores***

A15.- "Porque es un número **cercano** *a tres, pero* **no tiende** *tres."*

A16.- "Se aproxima a 3 porque poco a poco la diferencia es más pequeña, y tiende a 2 ***porque no hay un número más pequeño entre la sucesión y 2."*** *Interesante, pero lo* *que quiere decir es que no hay un número entre la sucesión y el 2, lo de más pequeño sobra.*

A17.- "Porque cada vez es ***más cercano a 2*** *el número de la sucesión, pero* ***sin llegar a tocarlo,*** *por lo tanto tiende a 2, y a su vez se va acercando a 3."*

A18.- "Las ***aproximaciones son cada vez mejores*** *y por tanto, tiende a dos y se aproxima a tres."*

*A19.- "**No llega** a ser ni 2 ni 3."*

A20.- "Porque del 1 está ***más cerca*** *el 2 que el 3." (Hace referencia a la parte entera de la sucesión).*

A continuación se exponen los cuatro grupos con las respuestas de los alumnos con el tópico que comparten.

- *Grupo 0:* Confusión de representaciones.

A1.- "Porque cuando el último número es > 4 *se dice que se* ***aproxima*** $\mathrm{n}+1$ *(redondeo), por eso en este caso se aproxima a* 3 *y tiende a* 2*, porque el último número es* 9 *y el* $\mathrm{n} = 1$*."*

- *Grupo 1:* Tendencia como la mejor aproximación.

Compuesto por 6 alumnos.

A2- "Se aproxima a 3 *porque en la sucesión las diferencias positivas entre sus términos y* 3 *son cada vez menores, y tiende a* 2 *porque las* ***aproximaciones de la sucesión a 2 son mejores*** *que cualquier aproximación fijada."*

A4- "Tiende a 2 *ya que* ***mejora cualquier aproximación prefijada****, por lo tanto no tiende a* 3*. Se aproxima a* 3 *porque cada vez los valores estás más cerca del mismo, es decir, la diferencia positiva entre ellos cada vez es menor, pero no tiende a tres."*

A7.- "Porque la sucesión se va a aproximar al número 3 *porque al avanzar en ella las sucesivas diferencias positivas entres sus términos y* 3 *son cada vez menores. Sin embargo, no tiende a* 3*, puesto que hay otro número, el* 2*, que* ***se aproxima más que este****."*

A9.- "La he marcado como verdadera ya que $1{,}999$ *tiende a* 2 *ya que cada vez las* ***aproximaciones son mejores****, y la segunda he puesto que no tiende a* 3 *porque en todo caso sería que se aproxima, pero en realidad tiende a* 2*."*

A10.- "La sucesión se ***aproxima*** *a* 3 *porque al* ***avanzar,*** *la* ***diferencia*** *entre cada número y* 3 *es cada vez menor pero* ***tiende*** *a* 2 *porque además al avanzar en la sucesión, la diferencia con* 2 *sea cada vez menor,* ***la aproximaciones son mejores que cualquier aproximación fijada."***

A18.- "Las ***aproximaciones son cada vez mejores*** *y por tanto, tiende a dos y se aproxima a tres."*

- *Grupo 2:* Criterios subjetivos respecto a la diferenciación de aproximación y tendencia.

A8.- "Porque 1,999 *y demás son números que no son dos, pero que* ***están muy cerca de*** *dos, por lo tanto decimos que tiende a* 2*, y se aproxima a* 3 *por que* ***está próximo a*** 3*." (*Asociación de *"tender con estar muy cerca de…"* y *"aproximar con estar próximo a…")*

A12.- "Porque antes del 3 *va el* 2*, y va a tender primero a* 2*."*

*A13.- "****Por la definición****. Esa sucesión se aproxima tres porque a medida que avanza se aproxima más al tres pero* ***tiende a dos por aproximación****." (*Sentencia que por definición como algo externo impuesto y que no precisa de más explicación).

A16.- "Se aproxima a 3 porque poco a poco la diferencia es más pequeña, y tiende a 2 ***porque no hay un número más pequeño entre la sucesión y 2."*** (Interesante, pero lo que quiere decir es que no hay un número entre la sucesión y el 2, lo de más pequeño sobra.)

- *Grupo 3:* Focalización en el acercamiento.
    - *Grupo 3.1:* Aproximaciones mayores.

A17.- "Porque cada vez es **más cercano a 2** *el número de la sucesión, pero* **sin llegar a tocarlo,** *por lo tanto tiende a* 2*, y a su vez se va acercando a 3."*

A5.- "Se aproxima a 3 *ya que las diferencias entre los números dados y* 3 *son cada vez menores.* ***Tiende a* 2*, y por lo tanto no tiende a* 3*,*** *porque están más próximos los números dados a* 2 *que a* 3*." Comprensión de la unicidad del límite.*

-
    - *Grupo 3.2:* Criterios métricos.

A3.- "Son verdaderos porque la sucesión según avanza se acerca a 3*, pero no tiende a* 3 *porque las* **diferencias positivas** *entre sus términos son más cercanas a* 2 *que a* 3*."*

A6.- "Porque el número con el que **tiene menos diferencias positivas es el 2 *y*** *es al que tendera la función, aunque como la función se hace cada vez mayor, se va a* ***aproximar a cualquier número positivo mayor que ella."***

A11.- "Esta sucesión se aproxima a 3 *porque se va acercando, pero tiende a* 2 *porque* ***las diferencias entre estos dos valores son cada vez menores." (*Eso también ocurre con el 3, luego no es justificación.)

A14.- "Porque al avanzar en esa sucesión de 1, 1'9, 1'99,... *las* ***sucesivas cada vez son menores*** *y se van acercando a dos, que es su tendencia y se aproxima (cada vez más* *próximo) a* 3*."* (Economía lingüística, "sucesivas cada vez son menores" por las **sucesivas diferencias cada vez son menores. También las sucesivas diferencias a 3 también son menores.)**

- *Grupo 4:* Intuición sobre la diferencia entre aproximación y tendencia.

Estos 3 alumnos presentan afirmaciones ciertas, obviedades en algunos casos, pero sin ninguna justificación.

A15.- "Porque es un número ***cercano*** *a tres, pero* ***no tiende*** *tres."*

*A19.- "****No llega*** *a ser ni* 2 *ni* 3*."*

A20.- "Porque del 1 *está* ***más cerca*** *el* 2 *que el* 3*."* (Hace referencia a la parte entera de la sucesión).

X.5.2 Diálogos Cuarto Ciclo de Investigación

Presentada la función $y = 2^x$ con el programa GeoGebra, se preguntó al alumnado si presentaba algún tipo de tendencia asintótica. Todos visualizaban la tendencia asintótica horizontal por la izquierda y el 82,6% del alumnado una tendencia asintótica vertical, concretamente, según palabras textuales de un alumno, *"en plan* $\mathrm{x} = 4$*"*. Solamente 4 alumnos no estaban de acuerdo con dicha afirmación, pero sólo un alumno verbalizó que él creía que *"esa función se pasa y se va de cualquier valor"*. Cuando se utilizó la opción zoom para ver su tendencia infinita, no asintótica, varios alumnos se mostraron sorprendidos; también se tomaron diferentes valores positivos para encontrar su contraimagen por la función y, al revés, se tomaron valores k, positivos suficientemente grandes, se trazó la recta $x = k$ y se visualizó que la función se alejaba de dicha recta.

Retomando conversaciones sobre conceptos con carácter cíclico, tras la visualización de los vídeos por parte de los alumnos fuera del aula, se produjeron menos diálogos que en el ciclo anterior, pero no menos interesantes; ya que el objetivo de los mismos era obtener precisiones o apreciaciones que no se produjeron en el curso anterior.

En este primer diálogo, a modo de consolidación, se recapitula con el alumnado sobre la diferencia entre tendencia y aproximación.

P: "¿Cuál recordáis que es la diferencia entre tendencia y aproximación?"

A3':" Pues que la tendencia es hacia un punto y la aproximación hacia una recta…"[230]

P: "¿Estáis de acuerdo?"

A2': "!Pues no!, también te puedes aproximar a un punto… Se puede aproximar a un punto o a una recta."

A1': "Tender es aproximarse o acercarse."

P: "O sea que para tí es lo mismo, ¿creéis que son sinónimos simplemente…, que no hay diferencia?"

A2': "No, porque no era lo mismo[231]*, si fuera lo mismo no nos preguntarías por la diferencia."*[232]

(Se producen sonrisas generalizadas).

A10: "Yo creo que la aproximación pueden ser muchas, pero la tendencia no ¿es eso no?[233]

A1': "Pues puedes tender a infinito, pero no aproximarte a infinito, algo tiene que ver ¿no?… no sé."[234]

P: "¿Qué opinas A6*?* (Silencio) *¿Para ti en que se diferencia la aproximación y la tendencia?"*[235]

A6': "No te lo se explicar."[236]

Ante ese bloqueo mental/verbal, la investigadora opta por plantear un ejemplo y razonar a partir de él.

P: "!Tranquilo! Vamos a pensar en la sucesión 1, 1.9, 1.99,… ¿Se aproxima a mil?"

A6': "Si, pero no tiende a mil, tiende más a 3 que a 1000."[237]

P: "¿Qué ¡tiende más! a 3?

A6': "No, no,…Se aproxima a 2 y tenderá a 2; pero, si fuera a 3… sólo se aproximaría, no tendería, ¿no?[238]

P: "!Correcto! Tu afirmación es cierta."

---

[230] Tras la docencia previa durante dos cursos, relativa a límites y a asíntotas, este alumno focaliza tendencia sólo a puntos y aproximación a rectas.
[231] Recuerda que no era lo mismo, aunque no verbaliza la diferencia.
[232] Este alumno presiente que si fuera lo mismo no se insistiría en preguntar la diferencia.
[233] Acercamiento a la unicidad de la tendencia y, por extensión, también al límite.
[234] Interesante reflexión, pero todavía no se ha repasado la tendencia infinita en la docencia del presente curso, por lo que no se responde al alumno.
[235] Alumno muy introvertido que no suele hablar en público, a no ser que se le pregunte personalmente.
[236] No saberlo explicar no implica necesariamente no saberlo diferenciar.
[237] Para este alumno *"tiende más"* a una mejor aproximación que a una aproximación peor.
[238] El alumno necesita refuerzo ya que duda de sus propias afirmaciones, aunque está en lo cierto.

A10': "Pues yo creo que también tiende a 4"

Varios alumnos le contestan que no.

A10': "¿No puede tender a 4 y aproximarse a 4? Por qué… se aproxima a 4, ¿no?[239]

A7': "No, sólo se aproxima a dos."[240]

A3': "Se puede aproximar a tres y se puede aproximar a 4, ¿es posible?"

Se produce algarabío ante esa afirmación, habiendo alumnos a favor y otros en contra.

P: "Os voy a poner un ejemplo, yo cuando me voy acercando a un sitio, voy avanzando, me voy aproximando voy tendiendo hacia dónde me dirijo, pero también me voy aproximando a otros sitios ¿no?..."

A3': "¿Solamente se tiende cuando se va a llegar?"

P: "¿Solamente se tiende cuando se va a llegar?"[241]

A3': "Más cerca…Al sitio al que quieres llegar."

*P: "*1, 1.9, 1.99*,… ¿Va a llegar a* 2*?"*

Responden afirmativamente todos los que participan verbalmente.

P: "¿Estáis totalmente seguros de que va a llegar a 2?"[242]

Se rompe el consenso y comienzan a oírse voces discordantes, algunos se mantienen diciendo que sí y otros que no…, varios del último grupo estaban entre los que en la anterior pregunta permanecieron en silencio.

A6: "Va a tender, pero no va a llegar."[243]

P: "O sea, que tender, a veces, no quiere decir llegar, pero otras sí…"

A1: "Aproximarse, mucho."

A3: "Digamos, al máximo."

A1: "¡Ah! ¿Entonces tender es cuando se aproxima al máximo?"

A1 muestra alegría por estar comprendiendo lo que se le está explicando. Encuentra en la expresión *"aproximarse al máximo"* una buena definición. Este alumno se caracteriza por solicitar definiciones de los conceptos que se le presentan, se siente más cómodo ante una definición, aunque no la comprenda en su totalidad; y después la

---

[239] Por un lado, para este alumno al valor al que se aproxima también se tiende hacia él.
[240] Por otro lado, para este alumno sólo se aproxima a lo que tiende.
[241] La investigadora responde con la misma pregunta.
[242] Inicialmente, todos afirman que dicha sucesión *"va a llegar a 2"*; cuando se repite la pregunta, casi la mitad del alumnado cambia de opinión.
[243] El alumno comprende este ejemplo de tendencia hacia un valor finito no alcanzable.

aplicación mediante un ejemplo; que ser capaz de comprender el concepto matemático que subyace a la situación que se la presenta, su pensamiento no es muy constructivista.

P: "Tender es cuando mejora cualquier aproximación, no puedes tener una aproximación mejor."

A6': "Una aproximación ***es mejor cuando es menor".***[244]

P: "¡Cuidado! A una tendencia te puedes aproximar o acercar cada vez más por abajo, por la izquierda, con valores que van creciendo; pero también puedes tender por arriba, por la derecha, tendencias de números mayores que se van aproximando decreciendo. ¿Me estáis entendiendo?[245]*"*

A6':"2.01, por ejemplo, no es una tendencia de la sucesión, ¿verdad?"

A1': "Pues no. Aunque sigas así[246] *no puedes tener una aproximación mejor."*[247]

P: "Efectivamente 2.01 es peor aproximación de la sucesión que 2."

Reflexión:

A pesar de la docencia previa del curso pasado, relativa a límites y a asíntotas, un número muy reducido de alumnos sigue manifestando afirmaciones erróneas. Estos alumnos están bien identificados, y se trata de aquellos alumnos que en el curso pasado no hacían declaración alguna, porque estaban lejos de comprender los conceptos tratados o algunos de los nuevos alumnos del curso que han tenido el primer contacto con el contenido teórico mediante los vídeos. En el presente ciclo, siguen cometiendo errores, pero manifiestan sus pensamientos y de los diálogos se desprende que están en un proceso de aprendizaje:

- Discriminación entre tendencia limitada a puntos y aproximación restringida a rectas, con expresiones del tipo *"tendencia es hacia un punto y la aproximación hacia una recta"*. Posiblemente porque asocian el estudio de tendencias con el cálculo de límites cuya búsqueda es un valor y en la representación de funciones se ha trabajado la aproximación de las curvas a rectas cuando había comportamientos asintóticos.
- Consideración de tendencia y aproximación como sinónimos *"tender es aproximarse o acercarse".* Un alumno afirma que al valor al que se aproxima también se tiende hacia él y para otro, sólo se aproxima a lo que tiende. Algunos

[244] Nuevamente aparece la imposición de aproximaciones menores al valor al que se tiende.
[245] La investigadora acompañó esta explicación simulando que la recta formada por los baldosines del suelo era la recta real, fijó con la tiza un punto de la misma, haciendo diferentes desplazamientos por la derecha y por la izquierda, acompañándolo con dramatización de sus brazos.
[246] El *"seguir así"* hace referencia a ir decreciendo una vez que se ha superado la tendencia.
[247] Unos alumnos se contestan a otros lo que fomenta su autoestima y su cohesión grupal.

alumnos siguen sin discriminar aproximación y tendencia y la concepción errónea que tienen está muy arraigada en ellos.

Sin embargo, también han aparecido interesantes expresiones novedosas del tipo:

- *"tender es aproximarse al máximo"* como conexión entre dichos conceptos de tipo explicativo entre ellos, aunque también puede ser una fuente de error.
- ***"**la aproximación **es mejor cuando es menor"*** volviendo a incidir prioritariamente en las sucesiones crecientes.
- *"tender más que"* con expresiones del tipo *"tiende más a 3 que a 1000".* Con la expresión tender más a una mejor aproximación que a otra más alejada, introducen un criterio comparativo entre tendencias, lo que es erróneo porque la tendencia es única, pero es interesante entre posibles aproximaciones.
- "*la aproximación pueden ser muchas, pero la tendencia no"*, como acercamiento hacia la unicidad de la tendencia y, por extensión, también al límite y dejando a la aproximación muchas opciones, por un lado, las aproximaciones pueden ser a más de un número o valor y un número puede tener muchas aproximaciones.

A modo de consolidación, se hizo un repaso completo de los diferentes tipos de familias de las funciones, estudiando todas sus características y comentando sus particularidades. En concreto, tras el estudio completo de una función del tipo exponencial que había sido propuesto en una prueba de acceso a la universidad, se produjo el siguiente diálogo:

A2: "¿Entonces la exponencial tiende a más infinito y menos infinito… o no?[248]

P: "¿Quién responde a A2?"

A2: "¿O solamente a más o solamente a menos?"[249]

Se oyen diferentes respuestas *"a más", "a menos"* y para no dispersar la atención, la investigadora vuelve a retomar la pregunta propuesta por el alumno *A2*.

P: "A2 pregunta si la exponencial, entonces, ¿tiende solamente a más infinito o a menos infinito? (Silencio) *¿Tiene sentido esa pregunta?"*

A7: "¿No puede tender a los dos? ¿No puede pegar la vuelta?"[250]

(Varios alumnos sonríen y la investigadora, aunque intuye lo que el alumno plantea, le pide más concreción).

P: "¿Qué es pegar la vuelta?"

---

[248] No diferencia cuando *x* tienda a infinito negativo o positivo, quiere dar una tendencia genérica.
[249] Pretende dar una respuesta global y unificada a la tendencia de la función.
[250] Acercamiento al concepto de función inversa. Intercambio de dominio por recorrido, y viceversa.

A7: "Pues mirarlo al revés…cambiar eso de los ejes"

P: "No es posible "pegar la vuelta", porque dejaría de ser la función inicial."

A3: "Yo creo que puede tender a más infinito o a menos infinito."

A1: "No"

A3 (con rotundidad): *"Si yo cojo* $y = -2^x$ *va dando* -2, -4*,… y va para abajo, menos infinito y si fuera la de* $y = 2^x$*, iría a más infinito.*[251]

P: "Vamos a centrarnos y a concretar en una única función, por ejemplo $y = 2^x$ *que es muy sencilla y la conocéis de cursos pasados. Al ir dando valores, nos quedaría una gráfica de este tipo* (la investigadora se ayuda de la pizarra y hace un esbozo) *y* A2 *nos dice que si tiende a infinito o menos infinito…"*[252]

A1: "Por la derecha tiende a infinito y por la izquierda…"

(No hay unificación de criterio ante el comportamiento por la izquierda. Unos consideran que también a infinito, otros a menos infinito, otros que a cero y la mayoría no responde; la investigadora tiene interés en este último y amplio sector del alumnado).

P: "Los que no os habéis pronunciado ¿nos queréis aportar algo? ¿No estáis de acuerdo con ninguna opción, tenéis otra o no tenéis criterio?"

La respuesta mayoritaria es "*No tenemos criterio".*

P: "Pues siempre es bueno tener criterio. Vamos a ver, a veces no podemos dar una buena respuesta si no está bien formulada la pregunta. Vamos a formalizar mediante notación matemática todo lo que hemos hablado"

(Se produce cierto alboroto grupal y la investigadora explicó que se debe estudiar conjuntamente las tendencias de las dos variables, para consolidar conocimientos).

A3: "Entonces, cuando va hacia la izquierda, como tiende a cero, entonces tiene una asíntota, ¡ahí!, solamente en la parte izquierda… ¡pero solamente ahí!."[253]

Otro alumno murmulla, pero nunca llega.

P: "¿Estáis de acuerdo todos los demás? (asienten con la cabeza) *Pero, ¿Por qué tiene una asíntota horizontal?*

A5: "Se acerca mucho, mucho a cero,… pero no llega a $x = 0$."[254]

---

[251] Este alumno generaliza el comportamiento de las funciones exponenciales con las diferentes variaciones que se pueden presentar en relación a los signos, no en una función concreta, pero siempre estudiando cuando x tiende a infinito positivo.

[252] La investigadora retoma el caso particular de exponencial de base positiva mayor que 1 y exponente positivo, para ir concretando y afianzando conceptos.

[253] Esta alumna quiere confirmar la idea de un comportamiento asintótico cuando x tiende a infinito negativo, que ella lo verbaliza con *"la parte izquierda"* y repitiendo con insistencia *"¡ahí!"*

P: "¿A $x = 0$?"

Varios alumnos comentan *"*$\mathrm{y} = 0$*, a la recta* $\mathrm{y} = 0$*, eso es una asíntota".*

P: Perfecto, la función se comporta como la recta $\mathrm{y} = 0$ *cuando* x *tiende a infinito negativo !Eso es una asíntota horizontal!*

El alumno *A5,* según su expresión facial, no parece estar muy de acuerdo con lo que se está comentando, por lo que se le pregunta directamente:

P: A5, dime tus pensamientos.

A5: Si la exponencial cruza a la asíntota, deja de ser una asíntota, porque es que se acerque sin ser la misma sin llegar a pasarla.

P: ¿En el video te han dicho que tiene que no llegar a pasarla?

A1: No lo han dicho… pero la distancia tiende a cero.

A1: Insiste en que tienen el mismo comportamiento que la recta.

A4: !Pero no la puede cortar!

A3: Cortar no, pero si igualarla.

P: ¿Igualarla?

A1: Si alcanza su valor, tiene que tocarla, sino, no puede alcanzar ese valor ¿eso es así no?

(El alumno *A3* no relaciona igualar los valores de la variable y con el corte de la función con la asíntota. No visualiza que cuando dichos valores se igualan, en la gráfica se tiene un punto de corte. Se puede afirmar que no tiene una conexión entre el campo algebraico y geométrico. El alumno *A1* sí tiene dicha conexión, ante la confusión la investigadora intentó clarificar conceptos)

P: Yo os aseguro que una asíntota puede ser cortada por la función, y eso, no está en contradicción con que el comportamiento en el infinito, sea como el de la recta.

A2: ¿Por abajo o por arriba,…puede aproximarse por encima o por abajo….?[255]

P: Puede darse en ambos casos

A1: Sigue siguiendo la línea de la asíntota…[256]

P: Puede darse, son casos especiales, por ejemplo $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{senx}}{\mathrm{x}}$*, que corta a infinitos puntos de la asíntota. La idea clave es que tiene un comportamiento parecido al de la recta en*

---

[254] Confusión de variables.
[255] Aparece la preocupación sobre la posición relativa de la función respecto a la asíntota.
[256] Este alumno interpreta *"seguir la línea"* con análogo comportamiento en el infinito.

el infinito, no igual, porque no se iguala ni llega a solaparse, ni son paralelas, eso no….!Un concepto difícil!

Reflexión:

Cuando se pretende hacer un estudio completo del comportamiento global de la función exponencial, un alumno pregunta *"¿Entonces la exponencial tiende a más infinito y menos infinito… o no…o puede tender a los dos? ¿No puede pegar la vuelta?"* No siendo consciente de las dos posibles tendencias según x tienda a infinito negativo o positivo, queriendo dar una respuesta global y unificada a la tendencia de la función, cuando no tienen por qué estar conexionadas; incluso uno de ellos quería intercambiar el dominio por recorrido, y viceversa, como si fuese igual una función que su inversa.

No hay unificación de criterio ante el comportamiento de la función exponencial $y = a^x$ por la izquierda para $a > 1$. Unos consideran que tiende a menos infinito, otros a infinito, otros a cero y, la mayoría, no se pronuncia. Los dos primeros grupos se han quedado con que x tiende a infinito, importando el signo o no, los terceros se han centrado en la tendencia de y, cuando x tiende a infinito negativo, que es realmente lo que se preguntaba; y la mayoría no se manifiestan, posiblemente ante el conflicto en el estudio conjunto de las tendencias de las dos variables. La investigadora les anima a que tengan su propio criterio y que lo compartan, aunque puedan estar equivocados, para poder consolidar conocimientos.

Un alumno cree que *"si una función cruza a la asíntota, deja de ser una asíntota, porque la asíntota es que se acerque sin ser la misma, sin llegar a pasarla"* imponiendo a la circunstancia del cruce, que en caso de cumplirse deja de ser asíntota; y además, la condición que se debe cumplir obligatoriamente: acercamiento pero sin pasar.

Cierto alumno no relaciona igualar los valores de la variable y de recta y asíntota, con un posible punto de corte de la función con la asíntota. No visualiza que si dichos valores se igualasen, en la gráfica se tendría un punto de corte. Se puede afirmar que no tiene una conexión entre el campo algebraico y geométrico.

A otro alumno le preocupa si la aproximación de la curva hacia la asíntota es "*por encima o por abajo"* a lo que le responde otro alumno, que en cualquier caso, *"sigue la línea"* que es su manera particular de expresar que tengan análogo comportamiento en el infinito.

Se reproduce a continuación un interesante diálogo en relación a las asíntotas horizontales:

A2': O sea, para mí la asíntota horizontal es una recta que tiende a infinito[257]*, veo que* A *tiende a infinito, pero no veo que en* y *tienda a una constante.*[258]

P: Vale, A *es un punto y tiene dos coordenadas ¿no?*

A2': x e y

P: "Bien, ¿Qué pasa con la x*?*

A2': "Que se va.

P: "¿Y qué pasa con la y*?*

A3': Que no se va.

A4': Que tiende a un punto finito.[259]

A2': Pues no sé, ¿No se va también a infinito?[260]

P: Para ver la tendencia en el vídeo se proyectaba sobre el eje de ordenadas,..., sobre el eje de las y… (silencio, ningún alumno contesta) *¿si?*

P: ¿Se va también a infinito?

Varios alumnos niegan con la cabeza y algunos responden que no.

P: ¿Hacia dónde va entonces? (silencio)

A1: *Es que no se va"*

Varios alumnos: *No se va, no va hacia infinito.*

Reflexión:

La mayoría del alumnado de este ciclo comienza a conectar el estudio conjunto de las tendencias de las dos variables en una función, la comprensión no es fácil, pero cuando un alumno visualiza y verbaliza dificultades o dudas de comprensión de tendencias conjuntas, aunque diga no entenderlo, nos está dando pruebas del conocimiento de su existencia, de que estamos en el buen camino del itinerario formativo marcado. Dudar siempre es un buen síntoma de estar tomando el medicamento correcto. El alumnado va diferenciando entre la tendencia de x y de y. *A2'* afirmando que "*la asíntota horizontal es una recta que tiende a infinito"*, comentario inicial de una visión muy simplista de la misma, pero después continúa asociando que cuando el punto se va *"hacia infinito",* las

[257] Visión de la asíntota simplemente como una recta.
[258] Interesante exposición de este alumno que trasmite lo que entiende y lo que no. Le parece contradictorio que el punto, como *"un todo",* tienda a infinito, sin embargo, que las y "una parte" tienda a un constante.
[259] Lo más correcto sería decir que tiende a un valor finito, pero la investigadora no interrumpe el interesante diálogo que está teniendo lugar entre los alumnos.
[260] Este alumno asocia que como el punto se va *"hacia infinito"*, las dos variables también tienden a infinito.

dos variables también tienden a infinito¸ a lo que otro compañero diferencia entre una tendencia a infinito de la variable x con *"que se va"* y otra tendencia finita de la variable y con *"que no se va".* Le parece contradictorio que el punto, como *"un todo",* tienda a infinito; y sin embargo, que las *y, "una parte",* tienda a un constante. Nuevamente aparece la relación del exterior de la pantalla con el infinito, ya que manifiestan que cuando un punto se va fuera de la pantalla consideran que va al infinito.

Cuando se comienza a retomar el repaso de las *AV*, previo estudio de las horizontales, un alumno aporta la siguiente reflexión:

A3': "Asíntotas horizontales o verticales, da igual…Que esto es lo mismo que la definición de asíntota, al fin y al cabo, lo del otro día, que la distancia tiende a…,a la recta ,a la que se parece el comportamiento y la función, la propia función, ¿sabes?…tiende a cero."[261]

A3': "Yo no he visto las diferencias entre los vídeos, es lo mismo."[262]

P: "¿Qué hay de particular en la asíntota vertical?"

A2': "Que mete la distancia, pero es lo mismo."[263]

P: "Si, si, vamos a ver…Efectivamente, estamos profundizando ahora sobre el concepto de asíntota vertical. ¿Y en este caso, la función a la que tiende cuál es?"

A3': "$\mathrm{y} = \mathrm{k}$"

P': "¿$\mathrm{y} = \mathrm{k}$*?*, (Rectifica inmediatamente el alumno respondiendo, $x = k$), *¡efectivamente!, se trata de la recta* $\mathrm{x} = \mathrm{k}$*. ¿Lo entendéis mejor ahora cuando se tiende a esa recta?*[264]*, ¿si?"*

El alumnado no se manifiesta.

A2': "¿Llegan a tocarse? ¿No, verdad? Pero tienden a…"

P: "¿Llegan a tocarse? ¿Esa es tu pregunta?…"

A1': "Llega un punto en el que están tan cerca, tan cerca[265]*,…"*

A5': "Puede… es como…"[266]

---

[261] Este alumno *"reprocha"* que asíntotas horizontales o verticales sean lo mismo. A pesar de su mala expresividad, ha interiorizado las ideas de comportamiento análogo y distancia que tiende a cero, de asíntota y función.

[262] Este alumno no ve las diferencias entre los diferentes estadios presentados en la secuencia de los vídeos, quedándose con las similitudes de un proceso continuo.

[263] Insisten más en los parecidos que en las diferencias, no especifica las distancias a las que se hace referencia en cada caso, en cualquier caso *"la distancia",* no es algo único de la asíntota vertical.

[264] La investigadora les pregunta sobre si entienden mejor a las asíntotas verticales, que a las horizontales, pero no le contesta ningún alumno.

[265] En su intento de explicar el comportamiento asintótico, mezcla conceptos espacio/temporales junto con cuantificadores.

P: "¿Qué se dijo el otro día?"[267]

A5': "Cuando explicaste que si tienes una distancia y recorres la mitad de lo que te queda, al final llegas."[268]

P: "¿Yo dije que al final llegas?"[269]

Se produce cierto revuelo, los alumnos verbalizan diferentes expresiones, pero se perciben tres posicionamientos claros como muestran las respuestas de los siguientes alumnos:

A2': "Sí."

A1': "Se supone que no."

A7': "Puede llegar."

P: "Si recorro la mitad de la distancia que me queda, teóricamente no llegaría nunca, pero llego… esa es la paradoja de Zenón, pero en ese caso que lo vimos en el tema de sucesiones, hablábamos de la suma de infinitos términos de razón menor que 1, que al final la suma daba un valor finito. No es exactamente lo mismo que estamos tratando ahora."[270]

Reflexión:

Se presenta un error de simplificación al considerar que es lo mismo la asíntota horizontal que la vertical, lo que se va a traducir en interpretaciones erróneas de los comportamientos de las variables, como se ha manifestado en los diálogos anteriores.

Cierto sector del alumnado no ve las diferencias entre los diferentes estadios presentados en la secuencia de los vídeos, quedándose con las similitudes de un proceso continuo, y no captando precisamente esos matices, aunque a veces sutiles, pero importantes de percibir para la interiorización y comprensión de los conceptos que se estudian.

"¿Llegan a tocarse función y asíntota? Esa es la pregunta…" Esta es una preocupación compartida por el alumnado, según sus palabras *"llega un punto en el que están tan cerca, tan cerca,…".* En el intento de explicar el comportamiento asintótico, se mezclan conceptos espacio/temporales junto con cuantificadores.

---

[266] Intenta buscar un símil de la vida real, pero no lo encuentra en ese instante.
[267] La investigadora intenta que recuerden lo visto para asíntotas horizontales y enlazar contenidos.
[268] Este alumno confunde la tendencia de una sucesión de razón menor que uno que no es alcanzable, con la suma de sus infinitos términos que sí que es un valor finito (tiene presente la paradoja de Zenón).
[269] La investigadora pretendía que el alumnado reprodujera lo que supuestamente la docente dijo en sesiones de días anteriores relativas a asíntotas horizontales, pero recuerdan lo visto en sesiones más antiguas relativas a progresiones geométricas.
[270] La investigadora intenta que el alumno diferencie entre tendencia y suma infinita de una sucesión.

Este alumno confunde la tendencia de una sucesión geométrica de razón menor que 1, no alcanzable, con la suma de sus infinitos términos, que es un límite y, por tanto, sí que es un valor finito; así trata de justificar que podrá haber un alcance entre la función y la asíntota. La investigadora intenta que el alumno diferencie entre tendencia y suma infinita de una sucesión (que es una serie), más aún cuando no es el caso que nos ocupa.

La representación de funciones es un estándar de aprendizaje de gran importancia en 2º de Bachillerato, por lo que se incidió en ello. Se estudiaron en profundidad las propiedades locales y globales de las funciones que se presentaban con su expresión algebraica. Se trabajó con funciones que presentaban diferentes tipos de asíntotas, en concreto, ante una función que presentaba una asíntota oblicua comentó lo siguiente:

A2': "Yo lo que no entiendo es que la ecuación de la asíntota oblicua es $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$, *pero se supone que hay un trozo que no es igual."*[271]

P: "¿Qué trozo no es igual?"

A2': "No, es en plan que la curva…cuando vas subiendo x o y*, es que no lo veo…"*[272]

P: "Tendencia no es lo mismo que igualdad."

A2': "¿No es que el límite es la recta?"

A9?: "Es como que la función está acorralada"

Reflexión:

Lo importante es adquirir el concepto de que la función tenga como asíntota $y = mx + n$, cuando x e y tienden a infinito, hecho que no ocurre con todas las funciones, como se manifestó en clases anteriores que se podía tener una tendencia infinita sin ser asintótica. Parece que este alumno interpreta que la función no debe traspasar a la asíntota, y por eso, utiliza la palabra *"acorralamiento"*. Por otra parte, parece que se produce un desajuste en su percepción y que considera que la curva de la función y la asíntota deben coincidir en todo su dominio.

Los alumnos no solicitaron explicaciones complementarias, aunque bien es cierto que el grado de comprensión individual, es diverso, como se ha observado en las cuestiones individuales recogidas en la plataforma EdPuzzle.

Finalmente, se tiene una entrevista personal con una alumna que habitualmente no suele manifestarse públicamente en el aula debido a su carácter introvertido, pero que muestra

---

[271] Este alumno querría que la función en todo su dominio tuviera un comportamiento análogo al de la recta.

[272] Cuando se le pregunta concretamente por el "trozo dónde no es igual", se muestra dubitativo y, sin mucho convencimiento, dice que cuando sube o baja, siendo para él igual el paralelismo.

interés en la asignatura. Se pretende recabar información sobre su valoración global en relación a la metodología de AI y, en particular, sobre los vídeos:

P.- "¿Qué te han parecido los vídeos?"

A.-"Yo creo que son muy útiles a la hora de ver como se representan las gráficas y ayuda mucho a la hora de visualizar los conceptos como las asíntotas horizontales, verticales, oblicuas….Y como se mueven a lo largo de… de una gráfica[273]…"

P.- "¿Qué te parece mejor, la explicación de un profesor o la de un vídeo?"

A18: "Yo diría que es mejor la explicación de un profesor porque está ¡allí![274], ¿sabes? Y puedes hacerle preguntas, y…, y…,¡si!, y solucionar los problemas que tu tengas, cosa que no puedes hacer con un vídeo, porque no puedes levantar la mano y preguntar…"[275]

P.- "¿A tí qué te aporta un vídeo, a mayores, que no te pueda aportar una explicación en una clase tradicional?"

A18: "Yo diría que en un video puedes ver los conceptos de forma más rápida ya que puedes utilizar más métodos como programas y, y,… gráficas, cosa que no puedes hacer en una pizarra, por ejemplo. Y, bueno…"[276](Silencio)

P.- "El hecho de que puedas parar un vídeo cuando algo no has entendido, ¿te parece bueno?"[277]

A18.-"Si…podrías…bueno…"[278]

P.- "¿Tú lo has hecho? ¿Has parado y vuelto a rebobinar?"

A18.-"Sí, si no he entendido… algún concepto, pues si, lo he vuelto a ver otra vez."

P.-"¿Te parecería bien que esta metodología se aplicase durante todo el curso con todos los conceptos en Matemáticas?"

A.-"Depende de que conceptos, si son cosas que hemos visto años anteriores, por ejemplo… igual sí que es buena idea hacerlo con los vídeos, ya que lo sabemos, para refrescar nuestra memoria; pero si son conceptos nuevos, yo diría que es mejor que lo

---

[273] En los vídeos había puntos que se iban moviendo a lo largo de la curva y de las asíntotas, compartiendo abscisas u ordenadas, dependiendo si se estudiaban las asíntotas horizontales o verticales. Esta interacción ha sido asimilada por esta alumna.

[274] Enfatiza en la relación presencial y personalizada profesor/alumno.

[275] Prioriza la importancia de la presencia física y cercana del docente así como la relación de apoyo ante una duda que se presente y la inmediatez de *"levantar la mano"* como así lo manifiesta, aunque curiosamente ella no lo hace casi nunca; sin embargo, da importancia a tener la posibilidad de hacerlo o que algún compañero suyo lo haga.

[276] Aunque valora los vídeos positivamente, no se muestra especialmente apasionada en su defensa.

[277] La investigadora le propone una situación concreta de posible actuación.

[278] Demasiadas imprecisiones, por lo que no se sabe si nunca lo ha hecho o su uso no le ha parecido positivo.

explicase en persona profesores, ya que a lo mejor hay dudas, y pueden no entenderse los conceptos."

P.- "¿Tienes alguna sugerencia o propuesta de mejora?"

A.- "Pues, yo diría, que estaría bien que quizás, se utilizasen menos palabras…"

P.- "¿Puedes explicarmelo eso mejor?[279]"

A.- "Pues,… por ejemplo, en uno de los vídeos, que no haya tantas palabras escritas en la pantalla del vídeo, que haya más explicación con más gráficas."

Reflexión:

Un alumno asegura que los vídeos son útiles, que ayudan a la visualización de conceptos abstractos, que tienen validez como herramienta de representación y, además, que aportan dinamismo, hecho que no es posible en una pizarra tradicional. La interacción presente en los vídeos referente a los puntos que se iban moviendo a lo largo de la curva y de las correspondientes asíntotas, compartiendo abscisas u ordenadas, dependiendo si se estudiaban las asíntotas horizontales o verticales ha sido asimilada por esta alumna, lo que manifiesta que ha cumplido la finalidad para la que habían sido diseñados.

Sin embargo, *A18* prioriza la importancia de la presencia física y cercana del docente así como la relación de apoyo ante una duda que se presente y la inmediatez de *"levantar la mano"* como así lo manifiesta; aunque, curiosamente, ella no lo hace casi nunca; sin embargo, da importancia a tener la posibilidad de hacerlo o que algún compañero suyo lo haga.

Presenta una dicotomía, profesor solucionador universal de problemas presencialmente frente al vídeo como ayuda o apoyo, valorando potencialmente el amplio abanico de posibilidades de este último (variedad de software, rapidez…), pero también sus limitaciones. *A18* afirma haber parado y rebobinado la visualización del vídeo, pero aparentemente, no es lo que más aprecia, no valorándolo como lo más importante. Posiblemente, porque se trata de volver a visualizar algo, pero sin nuevas aportaciones, ya que la retroalimentación no enlaza con la visualización de otro vídeo diferente que trate el mismo concepto pero desde otro punto de vista.

Le parece buena idea utilizar los vídeos para conceptos vistos en años anteriores para *"refrescar la memoria",* pero para conceptos nuevos cree que es mejor que lo explicase el profesor en persona, porque *"a lo mejor hay dudas, y pueden no entenderse los conceptos."* Esta opinión va en contra de parte de la filosofía de la metodología Flipped Clasroom que plantea que el primer contacto con el contenido teórico sea fuera del aula.

[279] La investigadora no comprende el sentido de la frase.

A18 quiere que las dudas se resuelvan inmediatamente y con la presencia del profesor, como se hizo en el anterior ciclo de investigación con la metodología mixta propuesta basada en la experiencia de Talbert (2001).

Como propuesta de mejora, *A18* propone que haya menos palabras escritas en la pantalla del vídeo y más explicaciones con más gráficas. En las explicaciones presentadas se ha utilizado registros formales y, además, se ha intentaba trasmitir exactitud en la denominación de los conceptos, acompañando en la presentación de las situaciones a la explicación verbal con la correspondiente trascripción en la pantalla, para facilitar la doble accesibilidad, visual y auditiva, y para no dar lugar a confusión o dobles interpretaciones. Sin embargo, en la explicaciones diarias de aula, el docente incorpora diferentes variaciones de registros formales e informales, muchas veces para mantener la atención del alumnado o para relacionarlo y acercarlo con situaciones de su vida cotidiana. En los vídeos se ha priorizado en registros formales dejando el resto de registros y posibilidades para el trabajo en las sesiones de docencia del aula mediante diferentes metodologías activas.

Durante el curso escolar 2017/18 la investigadora también impartió docencia en 4º ESO, concretamente en la opción de Matemáticas académicas. Con la finalización del curso académico, se visualizaron los primeros vídeos pertenecientes a esta investigación en el aula con dichos alumnos y se tuvieron interesantes diálogos. A continuación se reproducen algunos de ellos.

P: "¿A qué tiende la sucesión 1.9, 1.99, 1.999,…?"

B1: "1.9, 1.99, 1.999,…. Tiende a dos."

B2: "Y también se aproxima a 2[280]*."*

B3: "Y a cuatro.[281]*"*

B4: "!Pues si nos ponemos así! también se aproxima a infinito."[282]

B5: ¿Dónde está el infinito?[283]

B2: "¿Puede aproximarse a más de un número?"[284]

B3: "Pues también tiende a 4."

B1: "No, yo creo que solo tiende a dos."

---

[280] Incorporación en el lenguaje de estos alumnos de los términos aproximación y tendencia.
[281] No unicidad en la aproximación de una sucesión a un número.
[282] La aproximación de una sucesión creciente a infinito ya se presentó en anteriores ciclos de investigación.
[283] El infinito ha estado presente a lo largo de la historia humana, en general, y en la evolución madurativa de los alumnos a lo largo de su etapa escolar.
[284] Este alumno se cuestiona que una sucesión concreta pueda tener más de una aproximación.

B3: "¿Y por qué no tiende también a cuatro? Si se aproxima a muchos números ¿por qué no puede tender a más números?"[285]

B1: "Pues porque no, porque solo va a uno

B3: "¿Y eso es que hay una asíntota ahí?[286]

P: "¿Ahí? ¿Dónde?"

B3: "Pues como se va acercando a dos, como cuando las gráficas, pues eso…"[287]

P:"¿Esto es una función?"

B3: "No, no sé."

P: "Es una sucesión de números, no tenemos dos variables."

B3.- *"Pero cuando la asíntota te acercabas no?"*[288]

Por otro lado, cuando se comenzó a exponer las tendencias asintóticas, concretamente las asíntotas horizontales, al visualizar el primer vídeo relativo al estadio semiótico, cierto alumno comentó:

B7.- Yo lo que digo es que el punto que va por la función va más deprisa que el punto que va por la curva.

P.- No te entiendo.

B7.- La curva es más larga que la asíntota, o sea que si van a la vez, el de la curva va más rápido

P.- ¿Más larga?

B7.- ¡Hombre!, lo más corto siempre es la recta, y si caminas por una curva se te hace más largo.

P.- Vamos despacito, estoy asociando un punto de la curva con un punto de la asíntota, ¿no?

B7.- Si

P.- O sea que hay los mismos puntos en la curva, que en la asíntota

B7.- Bueno..

P.- Si vamos desplazando a la vez ambos puntos, la velocidad es la misma ¿no?

---

[285] Razonamiento por paralelismo entre aproximación y tendencia.
[286] Confusión de tendencia de una sucesión con tendencia asintótica.
[287] Conexión entre sucesión y función, por ende tendencia de una sucesión y asíntotas.
[288] La tendencia como acercamiento.

B7.- Pues no.

P.-¿Por qué no?

B7.- Porque no es lo mismo una recta que una curva.

P.- Cierto. Pero tienen los mismos puntos.

B7.- Pues no lo entiendo.

P.- Normal que no lo entiendas, no es fácil. ¿Entiendes que tenemos los mismos puntos en dos segmentos de diferentes longitudes?

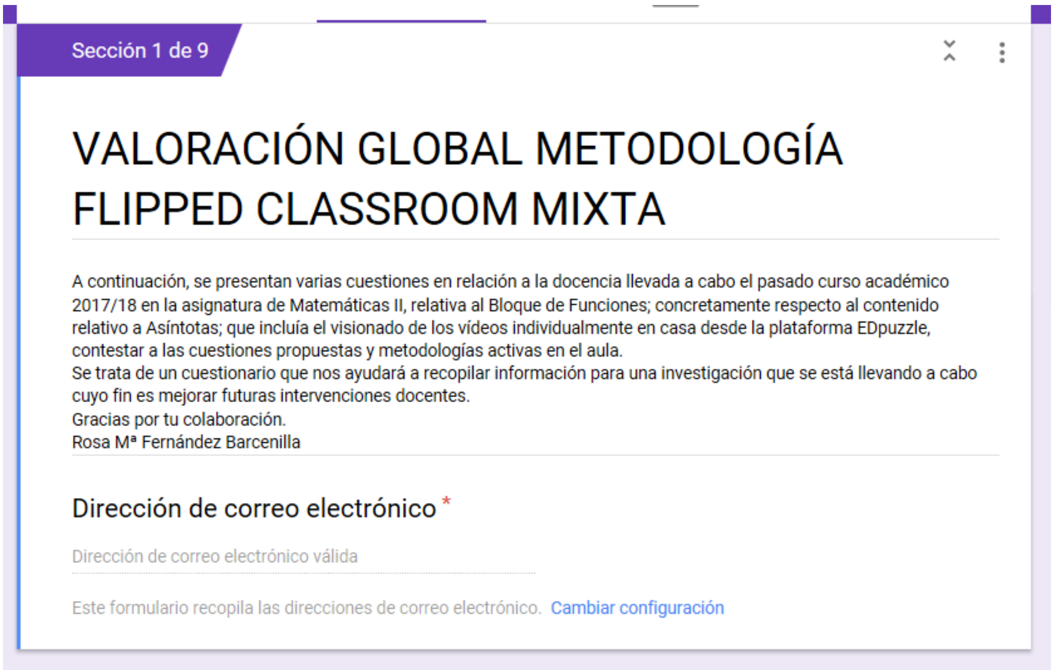
B7.- No puede ser.

*P.- ¿Veis cómo asocio un punto de la recta con un punto de la curva? (*Se hizo en la pizarra la correspondencia unívoca de ambos segmentos).

B7.-¡Vaya rayada! Me está doliendo la cabeza. Pero no usas la misma tinta del bolígrafo.

En este diálogo surge de nuevo la problemática de la densidad de $\mathbb{R}$ y la dificultad de comprender situaciones dónde aparezca el infinito.

X.5.3 Formulario Google evaluación final cuarto ciclo de investigación



Sección 1 de 9

VALORACIÓN GLOBAL METODOLOGÍA FLIPPED CLASSROOM MIXTA

A continuación, se presentan varias cuestiones en relación a la docencia llevada a cabo el pasado curso académico 2017/18 en la asignatura de Matemáticas II, relativa al Bloque de Funciones; concretamente respecto al contenido relativo a Asíntotas; que incluía el visionado de los vídeos individualmente en casa desde la plataforma EDpuzzle, contestar a las cuestiones propuestas y metodologías activas en el aula.
Se trata de un cuestionario que nos ayudará a recopilar información para una investigación que se está llevando a cabo cuyo fin es mejorar futuras intervenciones docentes.
Gracias por tu colaboración.
Rosa Mª Fernández Barcenilla

Dirección de correo electrónico *

Dirección de correo electrónico válida

Este formulario recopila las direcciones de correo electrónico. Cambiar configuración

Sección 2 de 9

Valoración global

Descripción (opcional)

Valora el aprendizaje a través de los videos *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Valora la dificultad de los contenidos de los vídeos *

	1	2	3	4	5	
Fácil	○	○	○	○	○	Difícil

Valora el interés por el aprendizaje que te han despertado los vídeos *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Observaciones

Sección 3 de 9

Valoración de los vídeos:

Descripción (opcional)

Claridad en la exposición *

	1	2	3	4	5	
Muy poca	○	○	○	○	○	Mucha

Interés del contenido *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

El visionado de vídeos dinámicos me facilita la comprensión de los conceptos *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Me ha gustado esta nueva metodología *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Observaciones

Sección 4 de 9

RESPECTO AL PUNTO DE PARTIDA

Descripción (opcional)

Consulto tutoriales on-line: *

- ☐ No
- ☐ Sí, esporádicamente
- ☐ Sí, frecuentemente
- ☐ Sí, habitualmente

¿Qué páginas has visitado y para qué materias? *

Texto de respuesta larga

En caso afirmativo ¿Respondieron a tus necesidades? *

- ☐ Sí
- ☐ No
- ☐ Parcialmente

Prefiero un videotutorial a la explicación del profesor *

- ☐ Si
- ☐ No
- ☐ Depende

Observaciones

Sección 5 de 9

RESPECTO AL GRADO DE IMPLICACIÓN PERSONAL EN EL PROYECTO

Descripción (opcional)

He visionado y he respondido las cuestiones los vídeos con atención e interés: *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Observaciones

Sección 6 de 9

RESPECTO AL GRADO DE IMPLICACIÓN DOCENTE

Descripción (opcional)

Valoro que mi profesora se ha interesado en implementar innovación educativa *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Observaciones

Sección 7 de 9

RESPECTO AL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Descripción (opcional)

Me resulta más difícil entender la explicación del vídeo que la explicación en el aula *

	1	2	3	4	5	
Total desacuerdo	○	○	○	○	○	Total acuerdo

Prefiero hacer los "deberes clásicos" en casa que ver un vídeo explicativo *

	1	2	3	4	5	
Total desacuerdo	○	○	○	○	○	Total acuerdo

Se aprovecha más en clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas *

	1	2	3	4	5	
Total desacuerdo	○	○	○	○	○	Total acuerdo

Observaciones

Me ha hecho reflexionar sobre la importancia del auto aprendizaje en esta época *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Observaciones

Sección 8 de 9

RESPECTO A LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Descripción (opcional)

He comprendido conceptos relativos a funciones gracias al visionado de vídeos

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Considero que con esta metodología he aprendido más que con la metodología expositiva habitual del aula *

	1	2	3	4	5	
Total desacuerdo	○	○	○	○	○	Total acuerdo

Me ha hecho reflexionar sobre la importancia del auto aprendizaje en esta época *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Observaciones

Sección 9 de 9

DESPUÉS DE LA EXPERIENCIA

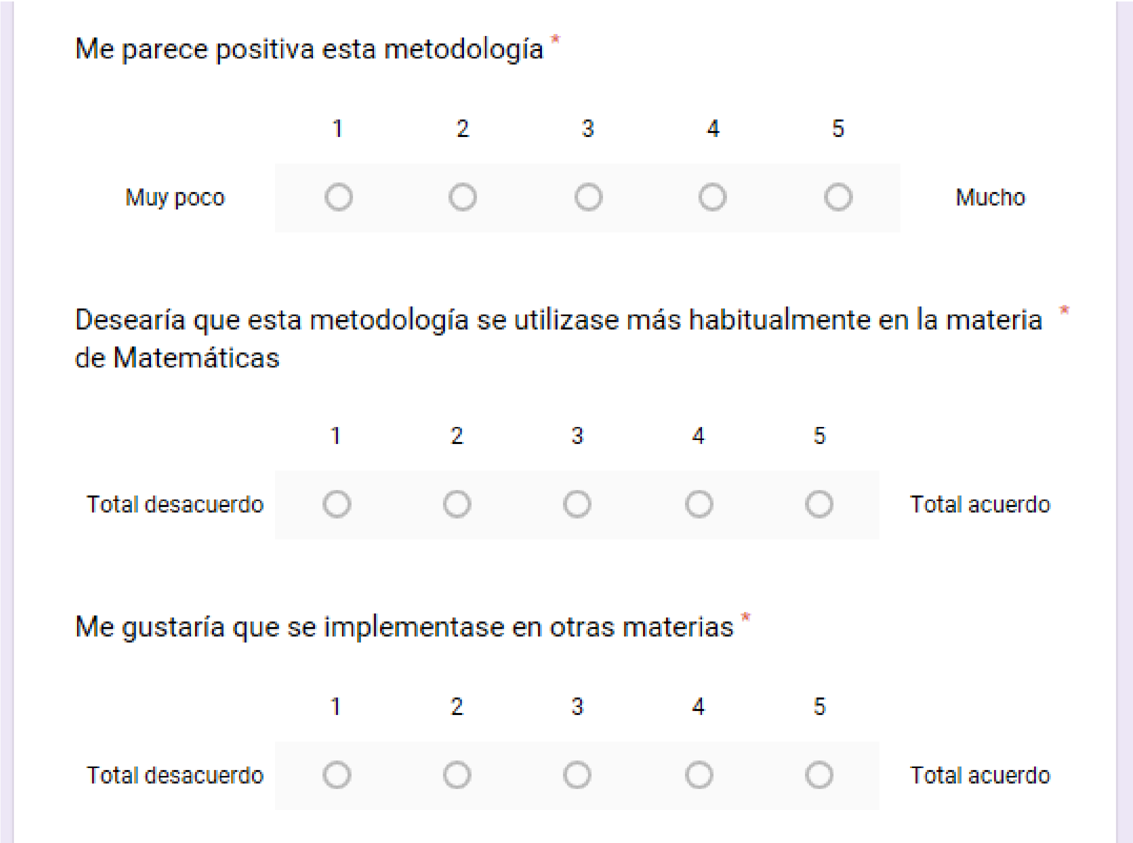
Descripción (opcional)

Considero que ha sido novedoso e innovador *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Me ha parecido interesante participar en esta experiencia *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho



Me parece positiva esta metodología *

	1	2	3	4	5	
Muy poco	○	○	○	○	○	Mucho

Desearía que esta metodología se utilizase más habitualmente en la materia de Matemáticas *

	1	2	3	4	5	
Total desacuerdo	○	○	○	○	○	Total acuerdo

Me gustaría que se implementase en otras materias *

	1	2	3	4	5	
Total desacuerdo	○	○	○	○	○	Total acuerdo

X.5.4 Resumen valoración global de la experiencia por el alumnado

VALORACIÓN GLOBAL

Valora el aprendizaje a través de los videos	3,3
Valora la dificultad de los contenidos de los vídeos	3,2
Valora el interés por el aprendizaje que te han despertado los vídeos	2.9

VALORACIÓN DE LOS VÍDEOS

Claridad en la exposición	3,62
Interés del contenido	3,62
El visionado de vídeos dinámicos me facilita la comprensión de los conceptos	3,54
Me ha gustado esta nueva metodología	3,15

RESPECTO AL PUNTO DE PARTIDA

	SI	NO
Consulto tutoriales on-line	84.61%	15.38 %

Si tu respuesta ha sido positiva, contesta a las siguientes cuestiones:

	esporádico	periódico	frecuente
Respecto al número de veces que usas este servicio	42,9%	28,6%	14.3%

Páginas visitadas y contenidos en los que se ha precisado el uso: Básicamente para las asignaturas de Matemáticas, Física y Química; entre los sitios webs más visitadas están ciertos canales de YouTube (Profesor10demates, Profemates, Química y mates, Profe10, Unicoos,…), la wikipedia y puntualmente páginas específicas para información teórica concreta de alguna otra asignatura.

En caso afirmativo ¿Respondieron a tus necesidades?

Prefiero un videotutorial a la explicación del profesor

¿Respondió a tus necesidades?	2,92
¿Te ayudaron a comprender los conceptos tratados?	2,92

	SI	NO	PARCIALMENTE
Respondieron a tus necesidades	76,9%	15,4%	7,7%

	SI	NO	DEPENDE
Prefiero un videotutorial a la explicación del profesor	7,7%	53,8%	46,2%

RESPECTO AL GRADO DE IMPLICACIÓN PERSONAL EN EL PROYECTO

He visionado y he respondido las cuestiones los vídeos con atención e interés	

RESPECTO AL GRADO DE IMPLICACIÓN DOCENTE

Valoro que mi profesora se ha interesado en implementar innovación educativa en el aula	2,96

RESPECTO AL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Me resulta más difícil entender la explicación del vídeo que la explicación en el aula	2.77
Prefiero hacer los “deberes clásicos” en casa que ver un vídeo explicativo	3.85
Se aprovecha más en clase escuchando la explicación del profesor que realizando tareas	3.46

RESPECTO A LOS RESULTADOS OBTENIDOS

He comprendido conceptos relativos a funciones gracias al visionado de vídeos	3.23
Considero que con esta metodología he aprendido más que con la metodología habitual del aula	2.31
Me ha hecho reflexionar sobre la importancia del auto aprendizaje en esta época	3.31

DESPUÉS DE LA EXPERIENCIA

Considero que ha sido novedoso e innovador	4.15
Me ha parecido interesante participar en esta experiencia	3.54
Me parece positiva esta metodología	4.00
Desearía que esta metodología se utilizase más habitualmente en la materia de Matemáticas	3.31
Me gustaría que se implementase en otras materias	3.31
Considero que he aprendido más que si se hubiera mantenido la metodología anterior	2.54

Grado de satisfacción con la experiencia realizada	3.31

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

X.6 VIDEOS DIGITALES

Relación de los títulos de los 20 vídeos elaborados

Vídeo 0.- Aproximación y Tendencia

Vídeo 1.- Tendencia finita en el eje de abscisas

Vídeo 2.- Tendencia infinita en el eje de abscisas

Vídeo 3.- Tendencia finita en la gráfica

Vídeo 4.- Tendencia infinita en la gráfica

Vídeo 5.- Tendencias finitas asociadas en la gráfica

Vídeo 6.- Tendencias infinitas asociadas en la gráfica

Vídeo 7.- Tendencia asintótica

Vídeo 8.- Discriminación asintótica

Vídeo 9.- Estadio semiótico de las Asíntotas Horizontales

Vídeo 10.- Estadio estructural de las Asíntotas Horizontales

Vídeo 11.- Estadio autónomo de las Asíntotas Horizontales

Vídeo 12.- Estadio semiótico de las Asíntotas Verticales

Vídeo 13.- Estadio estructural de las Asíntotas Verticales

Vídeo 14.- Estadio autónomo de las Asíntotas Verticales

Vídeo 15.- Estadio semiótico de las Asíntotas Oblicuas

Vídeo 16.- Estadio estructural de las Asíntotas Oblicuas

Vídeo 17.- Estadio autónomo de las Asíntotas Oblicuas I

Vídeo 18.- Estadio autónomo de las Asíntotas Oblicuas II

Vídeo 19.- Aproximación y Tendencia

Vídeo 20.- Aproximación y Tendencia en sucesiones