

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Economía Aplicada



MEDIDAS DE CONSENSO EN CONTEXTOS
PREFERENCIALES GENERADAS POR
DISTANCIAS

David Pérez Román

Valladolid – julio de 2013

Documento maquetado con T_EX_S v.1.0+.

Medidas de consenso en contextos
preferenciales generadas por
distancias

David Pérez Román

Memoria presentada para optar al grado
de Doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por el Doctor

José Luis García Lapresta

Valladolid – julio de 2013

*A Rubén, Pablo, Adelina
y a mis padres*

Agradecimientos

Llegado a este punto me doy cuenta de que muchas personas me han acompañado y apoyado en los últimos años durante el desarrollo de este trabajo. Todas ellas han contribuido de una u otra forma a los resultados que aquí se presentan, por lo que me gustaría aprovechar la oportunidad para expresarles mi gratitud.

Ante todo quiero expresar mi más sentido agradecimiento a la persona que ha hecho posible la elaboración de esta memoria de investigación, mi director de tesis, José Luis García Lapresta. Quiero darle las gracias por su dedicación, esfuerzo y la confianza depositada en mí a lo largo de todo este tiempo. Volviendo la vista atrás, recuerdo la conversación que tuvimos de forma casual y que ha tenido como consecuencia la elaboración de este trabajo.

Deseo agradecer especialmente los comentarios recibidos a lo largo de todo el proceso de desarrollo de esta tesis, en especial a Javier Martín Pelayo, quien durante una estancia en la Universidad de Valladolid sugirió la idea de introducir las distancias de Kemeny ponderadas; a Jorge Alcalde Unzu, por sus sugerencias y acertados consejos en los diferentes trabajos presentados a lo largo de estos años; a Carmen Beviá Baeza, por sus indicaciones en el comienzo de esta tesis; a Luis Cochón, quien de forma indirecta me condujo a prestar atención a las preferencias aprobatorias; a Bora Erdamar, con quien he tenido la oportunidad de compartir y debatir ideas, a pesar de la distancia; y a Bonifacio Llamazares, por sus sugerencias y comentarios, que han contribuido a mejorar algunos contenidos de esta tesis.

Deseo dar las gracias a mis compañeros del Departamento de Organización de Empresas, Comercialización e Investigación de Mercados, en especial a Óscar y Vicky, por su apoyo y la ayuda indirecta, pero muy importante, que me han permitido descargar de tareas que debiéramos haber compartido.

También quiero expresar mi gratitud a los miembros del grupo de investigación PRESAD, con quienes comparto temas de trabajo e investigación, por sus ánimos y sugerencias recibidas. Poder trabajar en un entorno agradable ayuda sobremanera a la consecución de los objetivos.

Y, por último, deseo agradecer el apoyo recibido desde mi familia, amigos y, sobre todo, a mi mujer, Adelina, por su paciencia y comprensión, ya que ha sido sufridora activa y pasiva durante el proceso de elaboración de esta tesis. Éste es el resultado final de todas las horas que hemos dejado de compartir; espero y deseo que considere que ha merecido la pena.

Gracias a todos, porque sin ellos no lo hubiera conseguido.

Índice

Agradecimientos	VII
Introducción	1
1. Preliminares	9
1.1. Distancias y métricas	10
1.2. Preferencias	11
1.2.1. Relaciones binarias	12
1.2.2. Preferencia e indiferencia	13
1.3. Permutaciones	16
2. Distancias en contextos preferenciales	19
2.1. Representación de órdenes débiles	21
2.2. Codificación de órdenes	23
2.2.1. Codificación de órdenes lineales	23
2.2.2. Codificación de órdenes débiles	24
2.3. Distancias entre órdenes débiles	35
2.3.1. Métrica de Kemeny	36
2.3.2. Distancias de Kemeny ponderadas	40
2.4. Distancias entre subconjuntos	46
2.4.1. Codificación de preferencias dicotómicas	48
2.4.2. Métrica de Hamming	49
2.4.3. Distancias dicotómicas ponderadas	52
2.5. Preferencias aprobatorias	55
2.5.1. Representación de preferencias aprobatorias	56
2.5.2. Codificación de preferencias aprobatorias	58
2.5.3. Distancias sobre preferencias aprobatorias	58

3. Medidas de consenso	69
3.1. Medidas de consenso sobre órdenes débiles	70
3.1.1. Medidas de consenso basadas en métricas	74
3.1.2. Medidas de consenso basadas en las distancias de Ke- meny ponderadas	88
3.2. Medidas de consenso sobre órdenes dicotómicos	92
3.3. Medidas de consenso sobre preferencias aprobatorias	95
4. Conglomerados jerárquicos basados en medidas de consenso en el contexto de órdenes débiles	101
4.1. Métodos jerárquicos sobre órdenes débiles	103
4.1.1. Medidas de similitud	103
4.1.2. Criterios de conglomeración	105
4.1.3. Similaridades y agrupamientos basados en medidas de consenso	106
4.1.4. Método del consenso	108
4.1.5. Un experimento de campo	117
Conclusiones y trabajos futuros	125
Bibliografía	131
Índice alfabético	140
Lista de símbolos	143

Índice de figuras

2.1. Perfil \mathbf{R} del Ejemplo 2.4.	22
2.2. Representación del perfil \mathbf{R}^{-1} del Ejemplo 2.4.	22
2.3. Representación del perfil \mathbf{R}^σ del Ejemplo 2.4.	23
2.4. Representación del orden R_1 y de su inverso R_1^{-1}	25
2.5. Comparación de los órdenes R_1 y R_1^σ	27
2.6. Órdenes R_1 y R_2 del Ejemplo 2.4.	31
2.7. Órdenes R_1^σ y R_2^σ del Ejemplo 2.38.	32
2.8. Órdenes R_1^π y R_2^π del Ejemplo 2.38.	35
2.9. Representación del perfil del Ejemplo 2.55.	39
2.10. Preferencias con alternativas elegidas como buenas o malas.	47
2.11. Perfil de preferencias dicotómicas.	50
2.12. Representación de una preferencia aprobatoria (R, D)	57
2.13. Preferencia aprobatoria inversa $(R, D)^{-1}$	57
2.14. Representación del perfil del Ejemplo 2.90.	61
3.1. Representación del perfil \mathbf{R}	74
3.2. Representación de los órdenes R_1, R_2 y sus inversos.	85
3.3. Representación del perfil del Ejemplo 3.30.	90
3.4. Representación del perfil del Ejemplo 2.90.	98
3.5. Preferencias aprobatorias de los agentes v_1, v_4 del Ejemplo 3.40.	99
4.1. Objetos similares.	104
4.2. Representación del perfil del Ejemplo 4.8.	109
4.3. Dendrograma del Ejemplo 4.8.	113
4.4. Dendrograma del Ejemplo 4.10.	114

4.5. Representación del perfil inverso del Ejemplo 4.8.	115
4.6. Dendrograma del Ejemplo 4.11.	115
4.7. Modelo de encuesta utilizado en el experimento de las III Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de Votación (JTSV3) (Cara A).	119
4.8. Modelo de encuesta utilizado en el experimento de las III Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de Votación (JTSV3) (Cara B).	120
4.9. Dendrograma del experimento de campo JTSV3 utilizando la distancia $\bar{d}_{K,w}$	122
4.10. Dendrograma del experimento de campo JTSV3 utilizando la distancia d^K	123

Índice de Tablas

2.1.	Valores de d^K y $\bar{d}_{K,w}$ en el perfil del Ejemplo 2.55 (pág. 39).	44
2.2.	Distancia de Hamming entre los órdenes de la Figura 2.10.	50
2.3.	Tabla de elección 2×2	51
2.4.	Disimilitudes asociadas a los coeficientes de similitud.	52
2.5.	Comparación de distancias entre órdenes dicotómicos.	54
2.6.	Distancias entre las preferencias aprobatorias del Ejemplo 2.90.	61
2.7.	Distancias entre las preferencias aprobatorias del Ejemplo 2.90.	63
3.1.	Propiedades de \mathcal{M}_d para las métricas y distancias analizadas.	90
3.2.	Valores de consenso al replicar los agentes del perfil del Ejemplo 3.30 para las distancias d^K y $\bar{d}_{K,w}$	91
3.3.	Valores de consenso para diferentes valores de λ	98
3.4.	Valores de consenso al replicar los agentes $\{v_1, v_4\}$ para diferentes valores de λ	100
4.1.	Valores de $\bar{d}_{K,w}$ entre los órdenes del perfil.	110
4.2.	Valores de proximidad entre los agentes, obtenidos con la medida de agrupamiento $S_{\bar{d}_{K,w}}$	111
4.3.	Valores de proximidad entre los elementos del 1-agrupamiento \mathcal{C}_1	111
4.4.	Valores de proximidad entre los elementos del 2-agrupamiento \mathcal{C}_2	112
4.5.	Perfil \mathbf{R} del experimento de campo JTSV3.	118
4.6.	Codificación de los órdenes del perfil \mathbf{R}	118
4.7.	Distancia $\bar{d}_{K,w}$ entre pares de órdenes a partir de la codificación del perfil \mathbf{R}	121
4.8.	Preferencias de los agentes v_3 , v_8 y v_{12}	123

Introducción

Cuando un grupo de agentes muestra sus preferencias sobre un conjunto de alternativas resulta interesante conocer el grado de acuerdo entre los miembros del grupo y en cada uno de los subgrupos que puedan formar. Este grado de acuerdo puede interpretarse como el nivel de consenso existente entre los agentes.

El término “consenso” tiene varios significados. Uno de ellos hace referencia a procesos iterativos en los que varios agentes deben modificar sus preferencias para conseguir el máximo acuerdo posible. En estos casos suele existir la figura del moderador, quien sugiere modificar algunas de las opiniones dadas en función del grado de acuerdo que se desee alcanzar (véase Eklund, Rusinowska y de Swart [42]). Una revisión sobre diversas nociones de consenso desde diferentes puntos de vista, como por ejemplo medidas de consenso en el contexto de Elección Social, aplicaciones prácticas en Toma de Decisiones, Biomatemáticas, etc., puede verse en Martínez Panero [72].

En esta tesis el término consenso hará referencia al grado de acuerdo existente en un comité, sin necesidad de que los agentes modifiquen sus preferencias. Desde un punto de vista técnico es interesante destacar que el problema de medir el acuerdo o el desacuerdo entre dos órdenes lineales ha sido estudiado ampliamente en la literatura. En este sentido se han considerado diferentes índices de correlación de rangos con el objeto de obtener grados de acuerdo para dos clasificaciones (véase Kendall y Gibbons [67]).

Entre los índices más utilizados dentro de este contexto se encuentran la rho de Spearman [97], la tau de Kendall [68] y el índice de Gini [53]. Por otra parte, se han considerado algunas extensiones naturales de los índices mencionados anteriormente con el objeto de medir el acuerdo o el desacuerdo entre más de dos órdenes lineales (véase Hays [55]).

En el contexto de la Elección Social, la noción de “medida de consenso” fue introducida por primera vez por Bosch [19], como una función que asigna a cada perfil de órdenes lineales un número comprendido entre 0 y 1, verificando tres propiedades: unanimidad (para cualquier subgrupo de agentes, el máximo consenso se alcanza cuando todos los individuos de ese subgrupo tienen las mismas preferencias sobre las alternativas), anonimato (el grado

de consenso alcanzado no cambia si se realiza una permutación sobre los agentes) y neutralidad (el grado de consenso alcanzado no se ve afectado si se realiza una permutación sobre las alternativas). En esta tesis se considerará, además, la posibilidad de que las medidas de consenso satisfagan las propiedades de máximo disenso (el mínimo consenso entre dos agentes sólo se alcanza cuando ambos agentes ordenan linealmente las alternativas y sus preferencias son inversas entre sí), reciprocidad (el consenso existente en un grupo de agentes no cambia si todos ellos invierten sus preferencias) y homogeneidad (si se replican las preferencias de un grupo de agentes, el consenso no varía).

Recientemente, Alcalde Unzu y Vorsatz [3, 4] han introducido varias medidas de consenso en el contexto de los órdenes lineales, relacionadas con algunos de los índices de correlación mencionados anteriormente, y han proporcionado algunas caracterizaciones axiomáticas.

Por otra parte, Alcántud, de Andrés y Cascón [5] elaboran una propuesta para medir el grado de acuerdo entre las preferencias de un conjunto de votantes respecto del resultado generado por un sistema de votación. Los mismos autores en [6] realizan un estudio del grado de similaridad en situaciones en las que los agentes expresan sus opiniones mediante preferencias dicotómicas.

García Lapresta [49] introdujo una clase de medidas de consenso en órdenes débiles (preórdenes completos) cuando los agentes clasifican un conjunto de alternativas dentro de una escala finita definida por categorías lingüísticas con puntuaciones asociadas. Esta clase de medidas de consenso constituyen el punto de partida de esta tesis, donde se introducirán y analizarán medidas de consenso sobre las preferencias de agentes que ordenan un conjunto de alternativas mediante órdenes débiles. También se extenderá el proceso al caso en el que los agentes, además de mostrar sus preferencias sobre las alternativas, dividan éstas entre aceptables y no aceptables.

Con objeto de establecer el consenso existente en cada grupo de agentes, se propondrá una clase de medidas de consenso basada en diferentes distancias y métricas entre órdenes débiles y, posteriormente, entre las estructuras preferenciales aprobatorias correspondientes. Se determinarán las propiedades más relevantes que presentan estas clases de medidas de consenso.

Las preferencias suelen representarse como órdenes o rankings sobre las posibles alternativas. A partir de estas preferencias existen diferentes métodos para agregar las preferencias individuales en una preferencia colectiva. En este sentido se ha de mencionar a Borda [17], quien propuso un método de puntuación que representa las preferencias de los votantes sobre un conjunto de candidatos y la preferencia colectiva viene dada por la suma de puntuaciones obtenidas por cada alternativa. Kendall [68] realizó una revisión de este método desde el punto de vista estadístico obteniendo la solución a par-

tir de un problema de estimación cuyo resultado es equivalente al obtenido mediante la regla de Borda. Este procedimiento suele denominarse como la regla de Borda–Kendall. A partir de estas reglas de puntuación han surgido diferentes procedimientos para la obtención de preferencias agregadas.

Otros autores han propuesto enfoques alternativos a los problemas de agregación de preferencias ordinales basados en la distancia entre las preferencias individuales y la preferencia colectiva. El objetivo consiste en determinar cuál es el orden de las alternativas que minimiza la distancia entre la preferencia agregada y las preferencias de los individuos. La regla de Kemeny [65] puede ser considerada como el punto de referencia de este tipo de procedimientos de agregación basados en distancias. La distancia propuesta calcula, para cada individuo, la suma de todos los pares de alternativas cuya posición relativa en su preferencia es diferente a la posición de la preferencia agregada. La preferencia agregada será aquélla que minimice la suma de las distancias a las preferencias individuales. Kemeny y Snell [66] formalizan la solución del problema basado en esta distancia y prueban su existencia y unicidad. Existen otras propuestas de medidas de distancia entre dos individuos, como por ejemplo en Cook y Seiford [33, 34] y más recientemente Klamler [70].

En esta tesis se propone un sistema de codificación de las preferencias representadas mediante órdenes débiles que permite calcular la distancia entre preferencias mediante métricas sobre vectores de \mathbb{R}^n .

Un caso especialmente interesante constituye el correspondiente a las distancias de Kemeny ponderadas, introducidas por García Lapresta y Pérez Roman [51], las cuales son sensibles a las posiciones en las que se producen las discrepancias entre los agentes.

Baldiga y Green [11] proponen métricas basadas en el recuento de los cambios existentes entre órdenes lineales, donde resulta relevante las posiciones donde se producen esas diferencias. Para dichos autores la distancia entre dos órdenes es la probabilidad de que éstos discrepen de la preferencia óptima de un conjunto de preferencias seleccionadas aleatoriamente. Por otra parte, Can [29] ha propuesto recientemente una clase de distancias ponderadas para el caso lineal basadas en una distribución de pesos sobre las posiciones donde se producen los desacuerdos.

A partir de los planteamientos mencionados, las correspondientes medidas de consenso permitirán estudiar las posibilidades que se presentan para establecer criterios de agrupación de los agentes en función de sus preferencias, de forma que sea posible detectar si existen estructuras de agrupamiento.

A continuación se detalla cómo está organizada la memoria.

En el **Capítulo 1** se introducen los conceptos básicos necesarios para el desarrollo posterior de la memoria. Pueden distinguirse tres partes claramente diferenciadas. Siguiendo el enfoque dado por Deza y Deza [36], se destaca la diferencia existente entre los conceptos de distancia y métrica y se enuncian algunas de las métricas utilizadas habitualmente en la literatura y que posteriormente serán analizadas en el contexto de órdenes débiles. A continuación, se abordan los conceptos de preferencia e indiferencia modelizadas por relaciones binarias indicando algunas de las propiedades que serán utilizadas a lo largo de esta memoria. Para finalizar, se introducen los conceptos de permutación y grupo simétrico. Teniendo en cuenta que estos términos no suelen aparecer en la literatura sobre Elección Social, se establece la notación que será empleada en la representación de estos conceptos, así como las propiedades necesarias para el desarrollo de la memoria.

En el **Capítulo 2** se proponen diferentes medidas de distancia sobre un conjunto de preferencias individuales. Se establece un sistema de codificación de órdenes, tanto lineales como débiles, mediante vectores de \mathbb{R}^n . A partir de este sistema de codificación se caracterizará de forma biunívoca el conjunto de órdenes débiles mediante subconjuntos de vectores, por lo que será posible obtener el orden de las alternativas mostrado en las preferencias de los individuos a partir del vector que las codifican. Este sistema de codificación permitirá el uso de las distancias habituales definidas sobre vectores y enunciadas en el capítulo anterior. A continuación se define una métrica sobre los vectores que codifican órdenes débiles y se comprueba que esta métrica coincide con la métrica de Kemeny tradicional.

Dado que la métrica de Kemeny no es sensible al hecho de dónde se producen los desacuerdos en la ordenación de las alternativas, se propone una nueva distancia en la que se pondera la posición en la que se producen desacuerdos al comparar las preferencias de dos individuos. Aunque esta distancia no verifica la desigualdad triangular, se ha de mencionar que esta propiedad no tiene por qué ser deseable en el contexto estudiado (véanse Barthélemy y Monjardet [15] y Can [29]).

La idea de distancia ponderada sobre órdenes débiles es trasladada al conjunto de órdenes dicotómicos. Si bien existen diferentes distancias sobre estos órdenes, se proponen otras nuevas que son sensibles a que los desacuerdos se produzcan en alternativas aceptadas o rechazadas.

Por último, se extienden los conceptos desarrollados anteriormente al conjunto de preferencias aprobatorias en las que los individuos no sólo ordenan un conjunto de alternativas sino que establecen cuáles son aceptadas y rechazadas. Se propone un sistema de codificación para estas preferencias así como nuevas medidas que permitan establecer una distancia entre ellas.

En el **Capítulo 3** se extiende el concepto de medida de consenso introducido por Bosch al contexto de órdenes débiles, órdenes dicotómicos y pre-

ferencias aprobatorias, y se consideran algunas propiedades adicionales que pueden verificar dichas medidas: *máximo disentiimiento*, *reciprocidad* y *homogeneidad*. También se introducen nuevas medidas de consenso basadas en la distancia entre los órdenes débiles y órdenes dicotómicos que representan las preferencias de los agentes, prestando especial atención a las distancias y métricas enunciadas en los capítulos anteriores.

En el **Capítulo 4** se propone una aplicación de las medidas de consenso definidas anteriormente para la resolución de problemas de agrupación. Dado un conjunto de individuos que muestran sus preferencias sobre un conjunto de alternativas, se plantea la posibilidad de crear grupos de agentes cuyas preferencias presenten un grado de similitud mayor que entre los agentes de grupos diferentes. El análisis de conglomerados (*cluster analysis*) ofrece métodos de conglomeración jerárquicos que determinan estos agrupamientos. Se propone un nuevo criterio de conglomeración a partir de las medidas de consenso definidas en esta memoria. Este criterio permitirá elegir la medida utilizada para determinar la distancia entre preferencias y obtener, mediante la medida de consenso asociada, el valor de similitud que determinará la formación de los conglomerados. Se exponen las ventajas que este nuevo criterio tiene sobre los criterios tradiciones y se aplica a un experimento de campo realizado recientemente.

Por último, cabe destacar que parte de los resultados de la presente memoria se han basado en las siguientes publicaciones:

- García-Lapresta, J.L., Pérez-Román, D.: “Some consensus measures and their applications in group decision making”. En: *Computational Intelligence in Decision and Control*. (eds. D. Ruan, J. Montero, J. Lu, L. Martínez, P. D’hondt, E.E. Kerre). World Scientific, pp. 611–616, 2008.
- García-Lapresta, J.L., Pérez-Román, D.: “Measuring consensus in weak orders”. En: *Consensual Processes*. (eds. E. Herrera-Viedma, J.L. García-Lapresta, J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi, S. Zadrozny). Springer-Verlag, pp. 213–234, 2011.
- Erdamar, B., García-Lapresta, J.L., Pérez-Román, D., Sanver, M.R.: “Measuring consensus in a preference-approval context”. *Information Fusion*. En prensa.

A medida que esta memoria se ha ido desarrollando, las propuestas y resultados han sido presentados, en diversas fases de su desarrollo, en diferentes congresos y reuniones científicas tanto nacionales como internacionales.

Nacionales

- III Encuentro de la Red Española de Elección Social. Valladolid, 2006.
- XXI Reunión de ASEPELT. Valladolid, 2007. [Publicado en Actas].
- XV Jornadas de ASEPUMA. Palma de Mallorca, 2007. [Publicado en Actas].
- XXX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Valladolid, 2007. [Publicado en Actas].
- XV Encuentro de Economía Pública. Salamanca, 2008.
- XIV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF). Langreo-Mieres (Asturias), 2008. [Publicado en Actas].
- Workshop on Economic Decisions. Pamplona, 2011.
- III Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de Votación. Valdeavellano de Tera (Soria), 2013.

Internacionales

- Ordinal and Symbolic Data Analysis Meeting. Gante (Bélgica), 2007.
- 5th International Conference on Logic, Game Theory and Social Choice (LGS-5). Bilbao (España), 2007.
- 9th International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare. Montreal (Canada), 2008.
- The 8th International FLINS Conference on Computational Intelligence in Decision and Control. Madrid (España), 2008. [Publicado en Proceedings].
- Third International Workshop on Computational Social Choice (COM-SOC). Düsseldorf (Alemania), 2010.
- Intelligent Systems Design and Applications (ISDA), 10th International Conference on. El Cairo (Egipto), 2010. [Publicado en Proceedings].
- Workshop Challenges of Mathematics for Games. Sevilla (España), 2011.

-
- 7th International Conference on Logic, Game Theory and Social Choice, (LGS-7). Bucarest (Rumanía), 2011.
 - The 10th International FLINS Conference on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making. Estambul (Turquía), 2012. [Publicado en Proceedings].
 - 2013 IFSA-NAFIPS Joint Congress. Edmonton (Canadá), 2013. [Publicado en Proceedings].
 - 14th Annual Meeting of the Association for Public Economic Theory. Lisboa (Portugal), 2013.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos y herramientas que serán utilizados a lo largo de esta memoria.

En la Sección 1.1 se definen los conceptos de distancia y de métrica bajo el enfoque dado por Deza y Deza [36]. Seguidamente se presentan las métricas más utilizadas en \mathbb{R}^n en las que se basarán una clase de medidas de consenso que se definirán en capítulos posteriores.

En la Sección 1.2 se definen los conceptos relativos a relaciones de preferencia e indiferencia, exponiendo las propiedades más relevantes así como la notación que será utilizada en esta memoria.

Para finalizar, en la Sección 1.3 se presentan algunos conceptos básicos acerca de las permutaciones sobre un conjunto. Se muestra la notación que será utilizada para su representación y se enuncian las propiedades básicas que irán apareciendo durante el desarrollo de esta memoria.

1.1. Distancias y métricas

1.1 Definición. Sea A un conjunto no vacío. Una función $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ es una *distancia* sobre A si para cualesquiera $a, b \in A$ se verifica:

1. $d(a, b) \geq 0$ (no negatividad),
2. $d(a, b) = d(b, a)$ (simetría),
3. $d(a, a) = 0$ (reflexividad).

Una métrica es una distancia que cumple dos propiedades adicionales: la identidad de indiscernibles y la desigualdad triangular.

1.2 Definición. Una distancia $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ es una *métrica* sobre A si para cualesquiera $a, b, c \in A$ se verifica:

1. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (identidad de indiscernibles),
2. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (desigualdad triangular).

1.3 Observación. La propiedad de identidad de indiscernibles implica reflexividad. Por otro lado, la condición de no negatividad se obtiene de las propiedades de simetría y desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c) &\Rightarrow d(a, b) \geq d(a, c) - d(b, c), \\ d(b, a) + d(a, c) \geq d(b, c) &\Rightarrow -d(b, a) \leq d(a, c) - d(b, c). \end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores y teniendo en cuenta la propiedad de simetría, se obtiene: $d(a, b) \geq |d(a, c) - d(b, c)| \geq 0$ (no negatividad).

Existe una gran variedad de distancias y métricas presentes en la literatura que son utilizadas en diversos ámbitos.

El caso más sencillo de métrica lo constituye la métrica discreta, que puede ser definida sobre cualquier conjunto no vacío.

1.4 Definición. Sea A un conjunto no vacío. Se define la *métrica discreta* sobre A como la función $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \neq b, \\ 0, & \text{si } a = b. \end{cases}$$

A lo largo de esta memoria se utilizarán habitualmente elementos del espacio \mathbb{R}^n . Con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se denotará al vector de \mathbb{R}^n de componentes (a_1, \dots, a_n) .

A continuación se presentan algunas de las métricas más utilizadas en \mathbb{R}^n y que más adelante aparecerán en la memoria.

1.5 Definición. Las siguientes funciones son métricas definidas sobre \mathbb{R}^n o $[0, \infty)^n$:

1. *Minkowski*, $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $p \geq 1$,

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = 1$ y $p = 2$ se obtienen las métricas denominadas de *Manhattan* y *euclídea*, respectivamente.

2. *Chebyshev*, $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max \{ |a_1 - b_1|, \dots, |a_n - b_n| \}.$$

3. *Coseno*, $d_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}.$$

4. *Hellinger*, $d_{Hg} : [0, \infty)^n \times [0, \infty)^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_{Hg}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i} - \sqrt{b_i})^2}.$$

1.2. Preferencias

Las nociones de preferencia e indiferencia, modelizadas por relaciones binarias sometidas a diversos axiomas, han sido empleadas en diferentes ámbitos, muy especialmente en Teoría de la Decisión, Teoría de la Elección Social, Teoría de Juegos, Microeconomía, Psicología Matemática, Investigación Operativa, etc.

El caso más conocido, y también el más simple, en el que aparecen estas nociones corresponde a la existencia de una función de utilidad $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ que valora numéricamente la utilidad proporcionada a un individuo por cada una de las alternativas de un cierto universo X . En tal caso se definen, de forma natural, las nociones de preferencia fuerte e indiferencia asociadas a la función de utilidad:

- $x P y$ (x es preferida a y) si y sólo si $u(x) > u(y)$,
- $x I y$ (x es indiferente a y) si y sólo si $u(x) = u(y)$.

1.2.1. Relaciones binarias

Para describir el comportamiento de un agente en sus manifestaciones de preferencia sobre un conjunto de alternativas es natural recurrir a las relaciones binarias. A continuación se procederá a definir formalmente este concepto.

A lo largo de la memoria, X denotará un conjunto no vacío de alternativas.

1.6 Definición. Dado un conjunto X , una *relación binaria* sobre X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$.

Si S es una relación binaria sobre un conjunto X , es decir $S \subseteq X \times X$, es habitual sustituir la notación conjuntista $(x, y) \in S$ por la predicativa xSy . Siguiendo a Roubens y Vincke [87] y García Lapresta y Rodríguez Palmero [52] se utilizarán con profusión algunas de las propiedades que se detallan a continuación.

1.7 Definición. Sea S una relación binaria sobre X .

1. S es *reflexiva* si para cualquier $x \in X$ se verifica xSx .
2. S es *irreflexiva* si para cualquier $x \in X$ se verifica $\text{no}(xSx)$ o, equivalentemente, no existe $x \in X$ tal que xSx .
3. S es *simétrica* si para cualesquiera $x, y \in X$ se verifica

$$xSy \Rightarrow ySx.$$

4. S es *asimétrica* si para cualesquiera $x, y \in X$ se verifica

$$xSy \Rightarrow \text{no}(ySx).$$

5. S es *antisimétrica* si para cualesquiera $x, y \in X$ se verifica

$$(xSy \text{ e } ySx) \Rightarrow x = y.$$

6. S es *transitiva* si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se verifica

$$(xSy \text{ e } ySz) \Rightarrow xSz.$$

7. S es *negativamente transitiva* si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se verifica

$$(\text{no}(xSy) \text{ y } \text{no}(ySz)) \Rightarrow \text{no}(xSz).$$

8. S es *completa* si para cualesquiera $x, y \in X$ se verifica

$$xSy \text{ o } ySx.$$

En la siguiente proposición se recogen varias implicaciones y equivalencias entre las propiedades antes enunciadas. Dado que todas ellas son suficientemente conocidas, se omite la demostración.

1.8 Proposición. Cualquiera que sea la relación binaria S sobre X , se verifica:

1. S completa $\Rightarrow S$ reflexiva.
2. S asimétrica $\Rightarrow S$ irreflexiva.
3. (S asimétrica y negativamente transitiva) $\Rightarrow S$ transitiva.

Ciertas relaciones binarias se denominan de forma específica atendiendo a las propiedades que verifican.

1.9 Definición. Una relación binaria S sobre X es una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva. La *clase de equivalencia* de un elemento $x \in X$ es el subconjunto $\{y \in X \mid xSy\}$.

1.10 Definición. Una relación binaria S sobre X es un *orden débil* (o *preorden completo*) si S es completa y transitiva.

1.11 Definición. Una relación binaria S sobre X es un *orden lineal* si S es completa, transitiva y antisimétrica.

1.12 Notación. Con $L(X)$ se denotará al conjunto de órdenes lineales sobre X y con $W(X)$ al conjunto de órdenes débiles sobre X .

1.2.2. Preferencia e indiferencia

Una de las formas más habituales de modelizar el concepto de preferencia e indiferencia consiste en definir como noción primitiva el concepto de preferencia fuerte o estricta mediante una relación binaria P sobre un conjunto de alternativas, de forma que xPy se interprete como “ x es preferida a y ” o “ x es mejor que y ”. Una exigencia mínima que ha de imponerse a esta relación es la asimetría, es decir, no ha de haber alternativas mutuamente preferidas. En este caso, la indiferencia I se concibe como ausencia de preferencia; en otras palabras, “ x es indiferente a y ” cuando ni x es preferida a y ni y es preferida a x . A partir de P e I se define la relación de preferencia débil como $R = P \cup I$, de forma que “ x es débilmente preferida a y ” cuando x es preferida a y o x es indiferente a y ; en otras palabras, cuando x es al menos tan buena como y .

1.13 Definición. Una relación binaria P sobre X es una *relación de preferencia fuerte* si es asimétrica.

1.14 Definición. Sea P una relación de preferencia fuerte sobre X . La *relación de indiferencia* I asociada a P está definida por

$$x I y \Leftrightarrow (\text{no}(x P y) \text{ y } \text{no}(y P x)).$$

La unión de la relación de preferencia fuerte P con la relación de indiferencia asociada I , origina la relación de preferencia débil, de modo que $x(P \cup I)y$ se interpreta como “ x es al menos tan buena como y ”.

1.15 Definición. Sean P una relación de preferencia fuerte sobre X e I la relación de indiferencia asociada a P . La *relación de preferencia débil* $R = P \cup I$ asociada a P está definida por

$$x R y \Leftrightarrow (x P y \text{ o } x I y).$$

Para un estudio exhaustivo acerca de las relaciones de preferencia fuerte, indiferencia y preferencia débil, véase García Lapresta y Rodríguez Palmero [52].

En la siguiente observación se presentan algunas consecuencias inmediatas de esta construcción.

1.16 Observación. Si P es una relación de preferencia fuerte sobre X , entonces la relación de indiferencia asociada a P es reflexiva y simétrica; además, la relación de preferencia débil asociada a P es completa y, por tanto, reflexiva.

1.17 Observación. Si P es negativamente transitiva, entonces P , I y R son transitivas, por lo que la relación de preferencia débil R es completa y transitiva y, por tanto, establece un orden débil o preorden completo sobre X .

A partir de una relación de preferencia fuerte se ha obtenido una relación de indiferencia y una relación de preferencia débil asociadas. Una segunda opción de modelizar los conceptos de preferencia e indiferencia y, quizá más extendida que la anterior, toma como noción primitiva la relación de preferencia débil, obteniendo a partir de ella las relaciones de preferencia fuerte e indiferencia asociadas.

1.18 Definición. Una relación binaria R sobre X es una *relación de preferencia débil* si es completa. Además, si R es transitiva, entonces R establece un orden débil sobre X .

A partir de una relación de preferencia débil R se puede definir el concepto de *relación de preferencia fuerte* P asociada a R .

1.19 Definición. Sea R una relación de preferencia débil sobre X . La *relación de preferencia fuerte* P asociada a R está definida por

$$x P y \Leftrightarrow \text{no}(y R x).$$

Del mismo modo, es posible definir el concepto de relación de indiferencia I asociada a R .

1.20 Definición. Sea R una relación de preferencia débil sobre X . La *relación de indiferencia* I asociada a R está definida por

$$x I y \Leftrightarrow (x R y \text{ e } y R x).$$

En la siguiente proposición se indican algunas propiedades que cumplen este tipo de relaciones.

1.21 Proposición. Sean R una relación de preferencia débil sobre X y P e I las relaciones de preferencia fuerte y de indiferencia asociadas a R , respectivamente. Entonces:

1. R es reflexiva y completa.
2. P es irreflexiva.
3. I es reflexiva y simétrica.
4. R es transitiva $\Leftrightarrow P$ es negativamente transitiva $\Leftrightarrow (P$ e I son transitivas).
5. Para cualesquiera $x, y \in X$ se verifica una, y sólo una, de las siguientes condiciones:

$$a) x P y.$$

$$b) y P x.$$

$$c) x I y.$$

1.22 Notación. Si se denota con \succsim_R la relación de preferencia débil R , entonces \succ_R representa a la relación de preferencia fuerte P , que es la parte asimétrica de R , y \sim_R representa a la relación de indiferencia I , que es la parte simétrica de R . Cuando no haya lugar a interpretaciones, el subíndice R será suprimido.

1.3. Permutaciones

1.23 Definición. Dado un conjunto no vacío X , una *permutación* sobre X es una aplicación biyectiva $\pi : X \rightarrow X$. El conjunto de todas las permutaciones sobre X se denota por S_X y se denomina *grupo simétrico* sobre X .

En el caso particular de que el conjunto X esté formado por los n primeros números naturales, $X = \{1, \dots, n\}$, al grupo simétrico sobre X se le denomina *grupo simétrico de grado n* y se denota por S_n .

1.24 Notación. Se pueden utilizar diferentes representaciones de los elementos de S_n . Una de ellas consiste en representar cada permutación $\pi \in S_n$ mediante una matriz

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix},$$

que permite identificar la imagen de cada elemento de $\{1, 2, \dots, n\}$.

1.25 Definición. Dadas dos permutaciones $\pi, \sigma \in S_n$ se define el *producto* $\pi \cdot \sigma$ como $(\pi \cdot \sigma)(i) = \pi(\sigma(i))$, $i = 1, 2, \dots, n$.

1.26 Proposición. S_n con la operación \cdot tiene estructura de grupo, esto es:

- Si $\pi, \sigma \in S_n$, entonces $\pi \cdot \sigma \in S_n$ (el conjunto S_n es cerrado para la operación producto).
- Si $\pi, \sigma, \tau \in S_n$, entonces $(\pi \cdot \sigma) \cdot \tau = \pi \cdot (\sigma \cdot \tau)$ (propiedad asociativa).
- La identidad id es la permutación que deja fijos todos los elementos. Es el elemento neutro de S_n : $id \cdot \pi = \pi \cdot id = \pi$, para cualquier $\pi \in S_n$.
- Para cada permutación $\pi \in S_n$ existe su elemento inverso, que se denominará π^{-1} , y verifica $\pi \cdot \pi^{-1} = \pi^{-1} \cdot \pi = id$.

Conviene destacar que, en general, el producto de permutaciones no verifica la propiedad conmutativa, como se puede comprobar a continuación.

1.27 Ejemplo. Sean las permutaciones $\pi, \sigma \in S_5$ definidas por

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Al calcular $\pi \cdot \sigma$ y $\sigma \cdot \pi$, se obtienen:

$$\pi \cdot \sigma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma \cdot \pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

por lo que el producto de permutaciones no es conmutativo.

Para calcular el producto $\pi \cdot \sigma$ de dos permutaciones se pueden evaluar las imágenes sucesivas (primero σ y luego π) de cada elemento; pero quizá conviene utilizar el siguiente procedimiento: se escribe una matriz donde la primera fila presenta los elementos en el orden natural, la segunda fila contiene la imagen de dichos elementos mediante la acción de σ y en la tercera fila, la acción de π sobre los elementos de la segunda fila. Se obtiene así una matriz formada por tres filas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

en la que la primera y última fila representan el producto de permutaciones:

$$\pi \cdot \sigma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.28 Definición. Si $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\sigma \in S_n$, entonces σ fija i si $\sigma(i) = i$ y σ mueve i si $\sigma(i) \neq i$.

1.29 Definición. Sean i_1, i_2, \dots, i_r enteros distintos entre 1 y n . Si $\sigma \in S_n$ fija los $n - r$ enteros restantes y si

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1,$$

entonces σ es un r -ciclo; se puede decir que σ es un ciclo de *longitud* r . Se denota σ por (i_1, i_2, \dots, i_r) .

1.30 Observación. Un 2-ciclo, el cual es simplemente el intercambio de un par de elementos, es denominado *trasposición*. Por ejemplo, la trasposición $(2, 6) \in S_7$ es la permutación que intercambia las posiciones 2 y 6 dejando invariante las 5 restantes.

1.31 Definición. Dos permutaciones σ y $\pi \in S_n$ son *disjuntas* si para cada elemento $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica

$$\sigma(i) \neq i \Rightarrow \pi(i) = i.$$

Una familia de permutaciones $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ es disjunta si cada par de ellas son disjuntas.

1.32 Proposición. Si $\sigma, \pi \in S_n$ son disjuntas, entonces σ y π conmutan, es decir, $\sigma \cdot \pi = \pi \cdot \sigma$.

Capítulo 2

Distancias en contextos preferenciales

En este capítulo se definen distancias y métricas en diferentes contextos preferenciales.

En las Secciones 2.1 y 2.2 se establece un sistema de representación y codificación de órdenes débiles mediante vectores que representan las posiciones relativas de las alternativas en el orden correspondiente.

Dado un conjunto de alternativas, no todo vector tiene por qué ser necesariamente la codificación de un orden débil sobre esas alternativas. El subconjunto de vectores que codifican órdenes ($A^W \subset \mathbb{R}^n$) queda caracterizado por una serie de condiciones que son necesarias y suficientes. Así, para un vector dado, puede determinarse si existe un orden cuya codificación venga representada por dicho vector.

Si se renombran las alternativas de un orden de acuerdo a una permutación, el vector que codifica al nuevo orden se obtiene reordenando sus componentes según la permutación inversa utilizada. Esto permitirá trabajar con aquellos órdenes cuyo vector de codificación tenga sus componentes ordenadas en orden ascendente, ya que el orden original puede obtenerse renombrando las alternativas.

En la Sección 2.3 se describen diferentes procedimientos para obtener distancias definidas sobre órdenes débiles. Cualquier distancia definida sobre \mathbb{R}^n induce de forma natural una distancia sobre órdenes.

Este sistema de codificación permite definir una métrica equivalente a la de Kemeny mediante operaciones aritméticas básicas realizadas sobre las componentes de los vectores que codifican órdenes. Ahora bien, esta métrica no es sensible a las posiciones en las que los órdenes no coinciden en la ordenación de las alternativas. Las distancias de Kemeny ponderadas tienen en cuenta las posiciones en las que se producen los desacuerdos mediante un

vector de pesos establecido previamente. En el caso de que todas las componentes del vector de pesos coincidan, la distancia de Kemeny ponderada es equivalente a la distancia de Kemeny.

En la Sección 2.4 se introduce una nueva clase de distancias sobre órdenes dicotómicos. Estas nuevas distancias difieren de las distancias utilizadas habitualmente sobre estos órdenes en que son sensibles a que los desacuerdos se produzcan en las alternativas aceptadas o en las rechazadas. Se introducen distancias en las que se tiene en cuenta las coincidencias que se produzcan en las alternativas aceptadas, en alternativas rechazadas, así como combinaciones lineales de ambas.

Finalmente, en la Sección 2.5 se establece un sistema de codificación de preferencias aprobatorias para la obtención de nuevas distancias en este contexto. Las preferencias aprobatorias (véase Brams y Sanver [28]) combinan las preferencias sobre un conjunto de alternativas mediante un orden dicotómico y un orden débil. El sistema de codificación, así como las nuevas distancias propuestas se basan en los sistemas de codificación y distancias desarrolladas en las secciones anteriores.

2.1. Representación de órdenes débiles

A continuación se describen algunos de los conceptos que se van a utilizar a lo largo de la memoria, así como la notación correspondiente.

A lo largo de esta memoria $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, con $m \geq 2$, representará un conjunto de agentes. Estos agentes pueden ser individuos de una sociedad, votantes en unas elecciones, expertos que forman un comité para la selección de uno o varios candidatos, etc.

Los agentes muestran sus preferencias sobre un conjunto finito de n alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $n \geq 2$.

Dependiendo del contexto, los agentes podrán ordenar las alternativas mediante órdenes lineales, o bien mediante órdenes débiles.

A partir de un orden R sobre X , es posible invertir dicho orden obteniendo lo que se denomina *orden inverso de R* .

2.1 Definición. Dado un orden $R \in W(X)$, el *inverso* de R es el orden R^{-1} definido por $x_i R^{-1} x_j \Leftrightarrow x_j R x_i$, para cualesquiera $x_i, x_j \in X$.

Es obvio que si R es un orden débil (resp. orden lineal), entonces R^{-1} será también un orden débil (resp. orden lineal).

2.2 Definición. Un *perfil* es un vector $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$ de relaciones de preferencia individuales, órdenes lineales u órdenes débiles, según sea el caso, donde R_i contiene las preferencias del agente v_i , con $i = 1, \dots, m$.

2.3 Definición. Dado un perfil $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$, el perfil *inverso* de \mathbf{R} , denotado con \mathbf{R}^{-1} , es el perfil que se obtiene al invertir el orden de cada una de las relaciones de preferencia que lo conforman:

$$\mathbf{R}^{-1} = (R_1^{-1}, \dots, R_m^{-1}).$$

2.4 Ejemplo. Con objeto de mostrar la notación recién introducida, sea $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto formado por cuatro agentes que muestran sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_7\}$ mediante el perfil \mathbf{R} mostrado en la Figura 2.1.

Con esta representación, las alternativas que comparten el mismo estrato son indiferentes entre sí y las que están en un nivel superior son preferidas a las que se encuentran en niveles inferiores.

Otra forma más simple de representar órdenes débiles consiste en mostrar de izquierda a derecha las alternativas según el orden de preferencia y separar

R_1			R_2			R_3			R_4		
x_1	x_4		x_2	x_3	x_5	x_2			x_3		
	x_7			x_1		x_1	x_3		x_2		
	x_2		x_4		x_7	x_5			x_1	x_4	x_7
x_3	x_5	x_6		x_6		x_4	x_6	x_7	x_5		x_6

Figura 2.1: Perfil \mathbf{R} del Ejemplo 2.4.

con el símbolo \sim las alternativas indiferentes:

$$\begin{aligned}
 R_1 &\equiv x_1 \sim x_4 \succ x_7 \succ x_2 \succ x_3 \sim x_5 \sim x_6, \\
 R_2 &\equiv x_2 \sim x_3 \sim x_5 \succ x_1 \succ x_4 \sim x_7 \succ x_6, \\
 R_3 &\equiv x_2 \succ x_1 \sim x_3 \succ x_5 \succ x_4 \sim x_6 \sim x_7, \\
 R_4 &\equiv x_3 \succ x_2 \succ x_1 \sim x_4 \sim x_7 \succ x_5 \sim x_6.
 \end{aligned}$$

Al invertir el orden de las preferencias de cada uno de los agentes se obtiene el perfil inverso $\mathbf{R}^{-1} = (R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}, R_4^{-1})$ cuya representación viene dada en la Figura 2.2.

R_1^{-1}			R_2^{-1}			R_3^{-1}			R_4^{-1}		
x_3	x_5	x_6		x_6		x_4	x_6	x_7	x_5		x_6
	x_2		x_4		x_7		x_5		x_1	x_4	x_7
	x_7			x_1		x_1		x_3		x_2	
x_1		x_4	x_2	x_3	x_5		x_2			x_3	

Figura 2.2: Representación del perfil \mathbf{R}^{-1} del Ejemplo 2.4.

2.5 Notación. Dada una permutación $\pi \in S_m$, con $\mathbf{R}_\pi = (R_{\pi(1)}, \dots, R_{\pi(m)})$ se denotará al perfil que resulta tras renombrar en el perfil \mathbf{R} a los agentes según la permutación π .

2.6 Ejemplo. Si los agentes del conjunto V del Ejemplo 2.4 (pág. 21) son renombrados según la permutación $\pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, entonces el nuevo perfil que se obtiene es $\mathbf{R}_\pi = (R_2, R_4, R_3, R_1)$.

2.7 Notación. Dada una permutación $\sigma \in S_n$, con $\mathbf{R}^\sigma = (R_1^\sigma, \dots, R_m^\sigma)$ se denotará al perfil obtenido a partir del perfil \mathbf{R} renombrando las alternativas de acuerdo con la permutación σ , es decir, para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \{1, \dots, m\}$, $x_i R_k x_j \Leftrightarrow x_{\sigma(i)} R_k^\sigma x_{\sigma(j)}$ (o, equivalentemente, $x_i R_k^\sigma x_j \Leftrightarrow x_{\sigma^{-1}(i)} R_k x_{\sigma^{-1}(j)}$).

2.8 Ejemplo. Si se renombran las alternativas del conjunto X del Ejemplo 2.4 (pág. 21) según la permutación

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

el nuevo perfil $\mathbf{R}^\sigma = (R_1^\sigma, R_2^\sigma, R_3^\sigma, R_4^\sigma)$ será el que viene representado en la Figura 2.3.

R_1^σ			R_2^σ			R_3^σ			R_4^σ		
x_2		x_6	x_1	x_5	x_7	x_1					x_5
	x_3			x_2		x_2		x_5			x_1
		x_1	x_3		x_6		x_7		x_2	x_3	x_6
x_4	x_5	x_7		x_4		x_3	x_4	x_6	x_4		x_7

Figura 2.3: Representación del perfil \mathbf{R}^σ del Ejemplo 2.4.

2.9 Observación. Dados un orden $R \in W(X)$ y $\sigma, \pi \in S_n$, el orden que se obtiene al renombrar las alternativas primero según la permutación σ y después según la permutación π , coincide con el orden obtenido al renombrarlas según la permutación $\pi \cdot \sigma$, es decir, $(R^\sigma)^\pi = R^{\pi \cdot \sigma}$.

2.2. Codificación de órdenes

En esta sección se introducirá un sistema de codificación de órdenes lineales y órdenes débiles mediante vectores que representan las posiciones relativas de las alternativas en el orden correspondiente. Procedimientos similares a los aquí expuestos han sido utilizados en la generalización de reglas de puntuación (*scoring rules*) de su concepción original sobre órdenes lineales al caso de órdenes débiles (véanse Smith [91], Black [16] y Cook y Seiford [34], entre otros).

2.2.1. Codificación de órdenes lineales

Dado $R \in L(X)$, es posible asignar a cada alternativa la posición que ocupa en dicho orden mediante la función $P_R : X \rightarrow \{1, \dots, n\}$, es decir, $P_R(x_j)$ es la posición de la alternativa x_j en R . Por tanto, el vector $(P_R(x_1), \dots, P_R(x_n)) \in \{1, \dots, n\}^n$ determina el orden lineal subyacente. En consecuencia, existe una equivalencia entre los conjuntos $L(X)$ y S_n . Por ejemplo, para $n = 4$, el vector $(3, 1, 4, 2)$ denota que la alternativa x_1 ocupa la tercera posición, x_2 la primera, x_3 la cuarta y x_4 la segunda.

2.2.2. Codificación de órdenes débiles

Para el caso de órdenes débiles no existe un único sistema de codificación. Nuestra propuesta consiste en un sistema basado en linealizar el orden débil y asignar a cada alternativa la media aritmética de las posiciones de las alternativas que pertenecen a la misma clase de equivalencia.

2.10 Definición. Dado $R \in W(X)$, la función $P_R : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P_R(x_j) = n - \# \{x_i \in X \mid x_j \succ x_i\} - \frac{1}{2} \# \{x_i \in X \setminus \{x_j\} \mid x_i \sim x_j\} \quad (2.2)$$

determina la posición de cada alternativa x_j en R , donde $\# X$ representa el cardinal de un conjunto X .

2.11 Notación. Dado un orden $R \in W(X)$, el vector de \mathbb{R}^n que codifica al orden R vendrá denotado por $\mathbf{p}_R = (P_R(x_1), \dots, P_R(x_n))$.

2.12 Ejemplo. A continuación se muestra cómo se realiza la codificación de órdenes débiles a través del perfil del Ejemplo 2.4 (pág. 21)

Para el orden R_1 se obtienen las componentes del vector que lo codifica, \mathbf{p}_{R_1} , mediante la fórmula (2.2) (pág. 24).

$$P_{R_1}(x_1) = 7 - 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.5$$

$$P_{R_1}(x_2) = 7 - 3 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 4$$

$$P_{R_1}(x_3) = 7 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 6$$

$$P_{R_1}(x_4) = 7 - 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.5$$

$$P_{R_1}(x_5) = 7 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 6$$

$$P_{R_1}(x_6) = 7 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 6$$

$$P_{R_1}(x_7) = 7 - 4 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 3$$

De este modo, el perfil de preferencias del Ejemplo 2.4 estará codificado por los siguientes vectores

$$\mathbf{p}_{R_1} = (1.5, 4, 6, 1.5, 6, 6, 3),$$

$$\mathbf{p}_{R_2} = (4, 2, 2, 5.5, 2, 7, 5.5),$$

$$\mathbf{p}_{R_3} = (2.5, 1, 2.5, 6, 4, 6, 6),$$

$$\mathbf{p}_{R_4} = (4, 2, 1, 4, 6.5, 6.5, 4).$$

2.13 Observación. A partir del vector que codifica $R \in W(X)$, es posible obtener la codificación del orden inverso R^{-1} . Si R está codificado por el vector $\mathbf{p}_R = (P_R(x_1), \dots, P_R(x_n))$, entonces la codificación de su inverso será $\mathbf{p}_{R^{-1}} = (n + 1 - P_R(x_1), \dots, n + 1 - P_R(x_n))$.

2.14 Ejemplo. El orden inverso R_1^{-1} del Ejemplo 2.4 (pág. 21) queda codificado por el vector

$$\mathbf{p}_{R_1^{-1}} = (6.5, 4, 2, 6.5, 2, 2, 5),$$

tal y como puede verse en la Figura 2.4.

R_1			R_1^{-1}		
x_1	x_4		x_3	x_5	x_6
	x_7			x_2	
	x_2			x_7	
x_3	x_5	x_6	x_1		x_4

Figura 2.4: Representación del orden R_1 y de su inverso R_1^{-1} .

2.15 Observación. Conviene indicar que no todos los vectores de \mathbb{R}^n representan una codificación de un orden $R \in W(X)$. Para cualquier $R \in W(X)$ se verifica:

1. $P_R(x_j) \in \{1, 1.5, 2, 2.5, \dots, n - 0.5, n\}$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.
2. $\sum_{j=1}^n P_R(x_j) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

lo cual establece una condición necesaria, aunque no suficiente, para que un vector de \mathbb{R}^n pueda codificar a un orden $R \in W(X)$. Por ejemplo, el vector $(1.5, 2, 2.5) \in \mathbb{R}^3$ verifica las condiciones 1 y 2 pero no puede considerarse que codifica un orden ya que si una componente tiene parte decimal, debería existir al menos otra componente del vector con el mismo valor, lo cual no ocurre en este caso.

2.2.2.1. Caracterización de órdenes débiles

2.16 Definición. Dado un conjunto de alternativas X , con $A^W \in \mathbb{R}^n$ se denotará al conjunto de todos los vectores que codifican órdenes débiles sobre X , es decir,

$$A^W = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \text{ codifica a } R \text{ para algún } R \in W(X)\}.$$

2.17 Observación. La función $\mathbf{p} : W(X) \rightarrow A^W$ que asigna \mathbf{p}_R a cada $R \in W(X)$ es una biyección.

2.18 Notación. La correspondencia entre un orden $R \in W(X)$ y el vector $\mathbf{a} \in A^W$ que lo codifica se denotará mediante el símbolo \equiv .

2.19 Definición. Dado $\mathbf{a} \equiv R \in W(X)$, con $M_i(R)$ se denotará al conjunto de los coeficientes de las componentes del vector que codifica al orden R que son iguales a la componente a_i , es decir,

$$M_i(R) = \{m \in \{1, \dots, n\} \mid a_m = a_i\},$$

para cualquier $i = 1, \dots, n$.

2.20 Ejemplo. Si se considera el orden R_1 del Ejemplo 2.4 (pág. 21), los conjuntos que se obtienen son:

$$\begin{aligned} M_1(R_1) &= M_4(R_1) = \{1, 4\}, \\ M_2(R_1) &= \{2\}, \\ M_3(R_1) &= M_5(R_1) = M_6(R_1) = \{3, 5, 6\}, \\ M_7(R_1) &= \{7\}. \end{aligned}$$

2.21 Notación. Dados un orden $R \in W(X)$, el vector $\mathbf{a} = \mathbf{p}_R$ que lo codifica y una permutación $\sigma \in S_n$, se denotará con \mathbf{a}^σ al vector que codifica al orden R^σ y de componentes $(a_1^\sigma, \dots, a_n^\sigma)$, es decir, $\mathbf{a}^\sigma = \mathbf{p}_{R^\sigma}$, siendo $a_i^\sigma = a_{\sigma^{-1}(i)}$.

2.22 Observación. Al renombrar las alternativas de un orden $R \in W(X)$ según una permutación $\sigma \in S_n$, se obtiene $\mathbf{p}_{R^\sigma} = \mathbf{p}_R^{\sigma^{-1}}$.

2.23 Ejemplo. En el Ejemplo 2.8 (pág. 23), se renombraban las alternativas de R_1 según la permutación $\sigma \in S_7$ representada en (2.1) (pág. 23) y codificado por el vector $\mathbf{p}_{R_1^\sigma} = (4, 1.5, 3, 6, 6, 1.5, 6)$. Si se reordenan las componentes del vector $\mathbf{p}_{R_1} = (1.5, 4, 6, 1.5, 6, 6, 3)$ según la permutación σ^{-1} se tiene $\mathbf{p}_{R_1^\sigma} = \mathbf{p}_{R_1}^{\sigma^{-1}}$.

La siguiente proposición proporciona una caracterización completa de los vectores que codifican órdenes débiles.

2.24 Proposición. Dados $R \in W(X)$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, el vector \mathbf{a} codifica al orden R ($\mathbf{a} = \mathbf{p}_R$) si y sólo si existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que R^σ satisface las siguientes condiciones:

1. $a_1^\sigma \leq \dots \leq a_n^\sigma$.
2. $a_1^\sigma + \dots + a_n^\sigma = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$ y $m \in M_i(R^\sigma)$ se verifica:

$$a_m^\sigma = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{j+l}{k} = j + \frac{k-1}{2},$$

donde $j = \min M_i(R^\sigma)$ y $k = \# M_i(R^\sigma)$.

Demostración.

\Rightarrow) Sea $\mathbf{a} \equiv R \in W(X)$.

1. Obviamente, siempre puede encontrarse una permutación en la que todos los elementos estén ordenados de menor a mayor.
2. Por la Observación 2.15 (pág. 25).
3. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$.
 - Si $\# M_i(R^\sigma) = k = 1$, entonces $j = \min M_i(R^\sigma) = i$ y, por tanto, $a_i^\sigma = j = i + \frac{k-1}{2}$.
 - Si $\# M_i(R^\sigma) = k > 1$, esto significa que existe al menos otra alternativa que comparte el mismo estrato que la alternativa x_i . Sea $j = \min M_i(R^\sigma)$, entonces $M_i(R^\sigma) = \{j, \dots, j + (k - 1)\}$ y $a_j^\sigma = a_{j+1}^\sigma = \dots = a_{j+(k-1)}^\sigma = a_i^\sigma$.

Teniendo en cuenta que se asigna a cada alternativa la media de las posiciones que ocupan dentro de la misma clase de equivalencia, se tiene

$$a_i^\sigma = \frac{\sum_{m \in M_i(R^\sigma)} m}{k} = \frac{j + \dots + (j + (k - 1))}{k} = j + \frac{k - 1}{2}.$$

\Leftarrow) Recíprocamente, dado $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ verificando las condiciones 1, 2 y 3, basta con considerar $\sigma = id$, verificándose entonces:

$$R \equiv \mathbf{a} = \mathbf{a}^\sigma \equiv R^\sigma. \quad \square$$

2.25 Ejemplo. Si se considera el orden R_1 del Ejemplo 2.4 (pág. 21), sea $\sigma \in S_7$ representada por

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

es decir, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 4$, \dots , $\sigma(7) = 3$.

La Figura 2.5 compara los órdenes R_1 y R_1^σ .

R_1			R_1^σ		
x_1	x_4		x_1	x_2	
	x_7			x_3	
	x_2			x_4	
x_3	x_5	x_6	x_5	x_6	x_7

Figura 2.5: Comparación de los órdenes R_1 y R_1^σ .

Si se comparan los vectores que codifican a R_1 y R_1^σ

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{R_1} &= (1.5, 4, 6, 1.5, 6, 6, 3), \\ \mathbf{p}_{R_1^\sigma} &= (1.5, 1.5, 3, 4, 6, 6, 6),\end{aligned}$$

puede comprobarse que verifican las condiciones de la Proposición 2.24:

1. $a_i^\sigma \leq a_j^\sigma$ para $1 \leq i < j \leq 7$.
2. $a_1^\sigma + \dots + a_7^\sigma = \frac{7(7+1)}{2} = 28$.
3. Por ejemplo, para $i = 7$ se tiene

$$M_7(R_1^\sigma) = \{m \in \{1, \dots, 7\} \mid a_m^\sigma = a_7^\sigma\} = \{5, 6, 7\}.$$

Por otro lado, $j = \min M_7(R_1^\sigma) = 5$, $k = \# M_7(R_1^\sigma) = 3$ y

$$a_5^\sigma = a_6^\sigma = a_7^\sigma = \sum_{l=0}^{3-1} \frac{5+l}{3} = 6 = 5 + \frac{3-1}{2} = j + \frac{k-1}{2}.$$

2.26 Observación. Conviene destacar que si para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, $\# M_i(R) = 1$, entonces $R \in L(X)$. Además, si $R \in L(X)$ está codificado por el vector \mathbf{a} , entonces existe una única permutación σ tal que $a_i^\sigma = i$, para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, es decir, si $R \in L(X)$, existe una permutación σ tal que al renombrar las alternativas según σ , el orden obtenido queda codificado por el vector $\mathbf{p}_{R^\sigma} = (1, 2, \dots, n)$.

2.27 Ejemplo. Sean $R \in L(X)$ tal que $x_1 \succ x_4 \succ x_7 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_6$ y $\sigma \in S_7$ representada en (2.3) (pág. 27). El orden que se obtiene al renombrar las alternativas según la permutación σ es $R^\sigma : x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_6 \succ x_7$, siendo el vector que lo codifica $\mathbf{p}_{R^\sigma} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

2.28 Definición. Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, se dice que A es *estable por permutaciones* si para cualquier permutación $\sigma \in S_n$ y para cualquier $\mathbf{a} \in A$, se verifica $\mathbf{a}^\sigma \in A$.

2.29 Observación. A^W es estable por permutaciones, es decir, para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $\mathbf{a} \in A^W$, entonces $\mathbf{a}^\sigma \in A^W$, lo cual, junto con la Observación 2.22 (pág. 26), garantiza que dados un vector que codifique a un orden y una permutación $\sigma \in S_n$, el vector que se obtiene al reordenar sus componentes según la permutación σ^{-1} representa al orden obtenido al renombrar las alternativas según σ , es decir, $\mathbf{p}_{R^\sigma} = \mathbf{p}_R^{\sigma^{-1}}$.

2.30 Proposición. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^W$ son tales que existen $\sigma, \pi \in S_n$ con $\mathbf{a}^\sigma = \mathbf{b}^\pi$, entonces existe $\tau \in S_n$ tal que $\mathbf{a} = \mathbf{b}^\tau$.

Demostración.

Si $\mathbf{a}^\sigma = \mathbf{b}^\pi$, entonces $(\mathbf{a}^\sigma)^{\sigma^{-1}} = (\mathbf{b}^\pi)^{\sigma^{-1}} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}^{(\sigma^{-1} \cdot \pi)}$. Si $\tau = \sigma^{-1} \cdot \pi$, entonces se verifica $\mathbf{a} = \mathbf{b}^\tau$. \square

2.31 Observación. La Proposición 2.30 establece que si al renombrar las alternativas de dos órdenes según dos permutaciones se obtiene el mismo orden, entonces ambos representan el mismo orden con diferentes nombres de las alternativas.

2.32 Definición. Dado un vector $\mathbf{a} \in A^W$, \mathbf{a} está *ordenado* si se verifica $a_1 \leq \dots \leq a_n$. Con A_{\leq}^W se denotará al conjunto de los vectores ordenados de A^W , es decir,

$$A_{\leq}^W = \{\mathbf{a} \in A^W \mid a_1 \leq \dots \leq a_n\}.$$

A partir de la Observación 2.17 (pág. 25), puede definirse el siguiente conjunto.

2.33 Definición. Con $W_{\leq}(X)$ se denotará al conjunto de órdenes débiles sobre X que están codificados por vectores ordenados, es decir,

$$W_{\leq}(X) = \{R \in W(X) \mid R \equiv \mathbf{a} \text{ y } a_1 \leq \dots \leq a_n\}.$$

2.34 Observación. Por la Proposición 2.24 (pág. 26), para cualquier orden $R \in W(X)$ existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $R^\sigma \in W_{\leq}(X)$. En la Observación 2.26 se indicó que si $R \in L(X)$, entonces σ es única, pero si $R \in W(X) \setminus L(X)$, es decir, R es un orden no lineal, entonces existe más de una permutación σ satisfaciendo $R^\sigma \in W_{\leq}(X)$.

2.35 Ejemplo. En el Ejemplo 2.25 (pág. 27), se renombraban en R_1 las alternativas según la permutación $\sigma \in S_7$ representada en (2.3) (pág. 27). R_1 y R_1^σ vienen representados por

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv x_1 \sim x_4 \succ x_7 \succ x_2 \succ x_3 \sim x_5 \sim x_6, \\ R_1^\sigma &\equiv x_1 \sim x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5 \sim x_6 \sim x_7, \end{aligned}$$

y codificados por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{R_1} &= (1.5, 4, 6, 1.5, 6, 6, 3), \\ \mathbf{p}_{R_1^\sigma} &= (1.5, 1.5, 3, 4, 6, 6, 6). \end{aligned}$$

Ahora bien, si se considera la permutación $\sigma' \in S_7$ representada por

$$\sigma' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

el orden que se obtiene renombrando las alternativas siguiendo la permutación σ' así como su codificación vuelve a ser

$$\begin{aligned} R_1^{\sigma'} &\equiv x_1 \sim x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5 \sim x_6 \sim x_7, \\ \mathbf{p}_{R_1^{\sigma'}} &= (1.5, 1.5, 3, 4, 6, 6, 6). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $R_1^\sigma = R_1^{\sigma'} \in W_{\leq}(X)$, pero $\sigma \neq \sigma'$.

A lo largo de la memoria se plantearán situaciones en las que será necesario renombrar las alternativas para la realización de ciertos cálculos. Cuando se presenten estas situaciones, se tendrán que comparar dos o más órdenes tras renombrar las alternativas según una permutación establecida. Como se ha visto en el Ejemplo 2.35, puede ocurrir que existan varias permutaciones que reordenen de la misma manera un orden, pero no todas van a ser válidas para los intereses que se persiguen.

Será necesario, a partir de un orden dado, definir un conjunto de órdenes que cumplan una condición específica que permita más adelante seleccionar las permutaciones adecuadas a la hora de renombrar las alternativas.

2.36 Definición. Dado un vector $\mathbf{a} \in A^W$, se dice que el vector $\mathbf{b} \in A^W$ está *bien ordenado respecto de \mathbf{a}* si para cualesquiera $i < j \in \{1, \dots, n\}$ con $a_i = a_j$, se verifica $b_i \geq b_j$.

Con $A_{\mathbf{a}}^W$ se denotará al conjunto de vectores de A^W bien ordenados respecto de \mathbf{a} , es decir,

$$A_{\mathbf{a}}^W = \{\mathbf{b} \in A^W \mid (a_i = a_j \text{ e } i < j) \Rightarrow b_i \geq b_j\}.$$

La definición anterior puede trasladarse al conjunto de órdenes débiles $W(X)$.

2.37 Definición. Dado $R \in W(X)$, se define el conjunto

$$\begin{aligned} W_R(X) &= \{\mathbf{b} \equiv R' \in W(X) \mid \\ &\text{para cualquier } i \in \{1, \dots, n\} (j, k \in M_i(R) \text{ y } j < k) \Rightarrow b_j \geq b_k\}. \end{aligned}$$

2.38 Ejemplo. Sean R_1 y R_2 los órdenes del Ejemplo 2.4 (pág. 21) y representados en la Figura 2.6.

Estos órdenes están codificados por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{R_1} &= (1.5, 4, 6, 1.5, 6, 6, 3), \\ \mathbf{p}_{R_2} &= (4, 2, 2, 5.5, 2, 7, 5.5). \end{aligned}$$

$M_1(R_1) = \{1, 4\}$ puesto que $P_{R_1}(x_1) = P_{R_1}(x_4) = 1.5$, sin embargo, $P_{R_2}(x_1) = 4 \not\geq 5.5 = P_{R_2}(x_4)$. Por tanto, $R_2 \notin W_{R_1}(X)$.

R_1			R_2		
x_1	x_4		x_2	x_3	x_5
	x_7			x_1	
	x_2		x_4		x_7
x_3	x_5	x_6			x_6

Figura 2.6: Órdenes R_1 y R_2 del Ejemplo 2.4.

2.39 Definición. Dado un vector $\mathbf{a} \in A^W$, se dice que el par $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in A^W \times A^W$ está bien ordenado respecto de \mathbf{a} si se verifica:

1. Existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $\mathbf{a}' = \mathbf{a}^\sigma$.
2. $\mathbf{a}' \in A_{\leq}^W$.
3. $\mathbf{b}' \in A_{\mathbf{a}'}^W$.

Con $A_{\leq \mathbf{a}}^W$ se denotará al conjunto de pares de vectores bien ordenados respecto del vector \mathbf{a} , es decir,

$$A_{\leq \mathbf{a}}^W = \{(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in A^W \times A^W \mid \mathbf{a}' = \mathbf{a}^\sigma \text{ para algún } \sigma \in S_n, \mathbf{a}' \in A_{\leq}^W \text{ y } \mathbf{b}' \in A_{\mathbf{a}'}^W\}$$

2.40 Proposición. Dado $\mathbf{a} \in A^W$, se verifica $A_{\leq \mathbf{a}}^W = A_{\leq \mathbf{a}^\sigma}^W$ para cualquier $\sigma \in S_n$.

Demostración. Sean $\mathbf{a} \in A^W$ y $\sigma \in S_n$ tales que $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\sigma$. Si $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in A_{\leq \mathbf{a}'}^W$, entonces $\mathbf{a}' = \mathbf{a}^\pi \in A_{\leq}^W$ para algún $\pi \in S_n$. Por tanto, $\mathbf{a}' = (\mathbf{a}^\sigma)^\pi$ y, en consecuencia, $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in A_{\leq \mathbf{a}^\sigma}^W$. \square

Del mismo modo se puede definir el conjunto de pares de órdenes bien ordenados respecto de un orden $R \in W(X)$.

2.41 Definición. Dado un orden $R \in W(X)$, se define el conjunto

$$W_{\leq R}(X) = \{(R^\sigma, R') \in W(X) \times W(X) \mid R^\sigma \in W_{\leq}(X) \text{ siendo } \sigma \in S_n \text{ y } R' \in W_{R^\sigma}(X)\}.$$

La Definición 2.41 agrupa, a partir de un orden $R \in W(X)$, los pares de órdenes formados por una reordenación de las alternativas, de forma que el vector que codifica al primer orden tenga sus componentes en orden ascendente, y el vector que codifica al segundo elemento tenga sus componentes en orden descendente cuando esas mismas componentes coincidan en el primer vector.

2.42 Observación. La Proposición 2.40 establece que para cualquier orden $R \in W(X)$ se verifica $W_{\leq R}(X) = W_{\leq R^\sigma}(X)$ cualquiera que sea $\sigma \in S_n$.

2.43 Ejemplo. Si se consideran los órdenes del Ejemplo 2.38 y la permutación $\sigma \in S_7$ representada en (2.3) (pág. 27), se obtienen los órdenes R_1^σ y R_2^σ de la Figura 2.7 y codificados por los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{R_1^\sigma} &= (1.5, 1.5, 3, 4, 6, 6, 6), \\ \mathbf{p}_{R_2^\sigma} &= (4, 5.5, 5.5, 2, 2, 2, 7).\end{aligned}$$

R_1^σ			R_2^σ		
x_1	x_2		x_4	x_5	x_6
	x_3			x_1	
	x_4		x_2		x_3
x_5	x_6	x_7		x_7	

Figura 2.7: Órdenes R_1^σ y R_2^σ del Ejemplo 2.38.

$R_1^\sigma \in W_{\leq}(X)$, sin embargo, la reordenación que se obtiene en las componentes de $\mathbf{p}_{R_2^\sigma}$ hace que $R_2^\sigma \notin W_{R_1^\sigma}(X)$.

Por ejemplo, para $i = 6$ se tiene $M_6(R_1^\sigma) = \{5, 6, 7\}$. Siguiendo la Definición 2.37 (pág. 30), si $j = 5 < 7 = k$, se tiene $P_{R_2^\sigma}(x_5) = 2 \not\leq 7 = P_{R_2^\sigma}(x_7)$. Por tanto, $(R_1^\sigma, R_2^\sigma) \notin W_{\leq R_1}(X)$.

2.44 Lema. Dados dos órdenes $R_1 \in W_{\leq}(X)$ y $R_2 \in W(X)$ codificados por los vectores \mathbf{p}_{R_1} y \mathbf{p}_{R_2} , respectivamente, existe $\sigma \in S_n$ tal que $R_1^\sigma = R_1$ y $(R_1^\sigma, R_2^\sigma) \in W_{\leq R_1}(X)$, es decir, $\mathbf{p}_{R_1} = \mathbf{p}_{R_1^\sigma}$ está ordenado y $\mathbf{p}_{R_2^\sigma}$ está bien ordenado respecto de \mathbf{p}_{R_1} .

Demostración. Sean los órdenes $R_1 \in W_{\leq}(X)$ y $R_2 \in W(X)$ codificados por los vectores $\mathbf{p}_{R_1} = \mathbf{a}$ y $\mathbf{p}_{R_2} = \mathbf{b}$, respectivamente.

Sean $j_1 < j_2 < \dots < j_m$ tales que $j_l = \min M_i(\mathbf{p}_{R_1})$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $\# M_{j_l}(\mathbf{p}_{R_1}) = k_l > 1$, es decir, j_l es un subíndice a partir del cual las siguientes $k_l - 1$ coordenadas de \mathbf{p}_{R_1} son iguales.

Para cada j_l , en caso de que sea necesario se reordenan las componentes $b_{j_l}, b_{j_l+1}, \dots, b_{j_l+k_l-1}$ del vector \mathbf{p}_{R_2} en orden descendente mediante una permutación $\sigma_l \in S_n$ dejando invariantes el resto de las componentes, es decir,

1. $b_s^{\sigma_l} \geq b_t^{\sigma_l}$, si $s, t \in M_{j_l}(\mathbf{p}_{R_1})$ y $s < t$.
2. $b_s^{\sigma_l} = b_s$, si $s \notin M_{j_l}(\mathbf{p}_{R_1})$.

Cada una de las permutaciones σ_l dejan invariante al vector \mathbf{p}_{R_1} ya que únicamente reordenan componentes del mismo valor en ese vector. Además, $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ son permutaciones disjuntas.

Sea $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_m$.

- $\mathbf{p}_{R_1} = \mathbf{p}_{R_1^\sigma}$. Cada una de las permutaciones σ_l reordenan componentes de \mathbf{p}_{R_1} que tienen el mismo valor, dejando el resto invariantes, por tanto, el vector \mathbf{p}_{R_1} no varía, es decir, $R_1^\sigma = R_1 \in W_{\leq}(X)$.
- Si para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, $\# M_i(\mathbf{p}_{R_1}) = k > 1$, sea $j = \text{mín } M_i(\mathbf{p}_{R_1})$.
 1. $a_j^\sigma = a_{j+1}^\sigma = \cdots = a_{j+k-1}^\sigma$,
 2. $b_j^\sigma \geq b_{j+1}^\sigma \geq \cdots \geq b_{j+k-1}^\sigma$,

lo cual determina que $R_2^\sigma \in W_{R_1}(X)$.

Por tanto, $(R_1^\sigma, R_2^\sigma) \in W_{\leq R_1}(X)$. \square

2.45 Proposición. Para cualesquiera $R_1, R_2 \in W(X)$, existe $\sigma \in S_n$ tal que $(R_1^\sigma, R_2^\sigma) \in W_{\leq R_1}(X)$.

Demostración. Sea $\sigma' \in S_n$ tal que $R_1^{\sigma'} \in W_{\leq}(X)$. Por el Lema 2.44, existe $\sigma'' \in S_n$ tal que $(R_1^{\sigma'})^{\sigma''} = R_1^{\sigma'} \in W_{\leq}(X)$ y $(R_2^{\sigma'})^{\sigma''} \in W_{R_1^{\sigma'}}(X)$.

Si $\sigma = \sigma' \cdot \sigma''$, entonces se verifica (Observación 2.9 (pág. 23))

- $R_1^\sigma = R_1^{(\sigma'' \cdot \sigma')} = (R_1^{\sigma'})^{\sigma''} = R_1^{\sigma'} \in W_{\leq}(X)$,
- $R_2^\sigma = R_2^{(\sigma'' \cdot \sigma')} = (R_2^{\sigma'})^{\sigma''} \in W_{R_1^{\sigma'}}(X)$.

Por tanto, $(R_1^\sigma, R_2^\sigma) \in W_{\leq R_1}(X)$. \square

2.46 Ejemplo. Como se vio en el Ejemplo 2.43 (pág. 32), al renombrar las alternativas de los órdenes $R_1, R_2 \in W(X)$ según la permutación σ representada en (2.3) (pág. 27), se tiene $R_1^\sigma \in W_{\leq}(X)$, pero $R_2^\sigma \notin W_{R_1^\sigma}(X)$, es decir, $(R_1^\sigma, R_2^\sigma) \notin W_{\leq R_1}(X)$.

Sin embargo, es posible encontrar una permutación π que verifique $R_1^\pi \in W_{\leq}(X)$ y $R_2^\pi \in W_{R_1^\pi}(X)$.

Se reordenan las componentes que tengan los mismos valores en $\mathbf{p}_{R_1^\pi}$ de forma que dicha reordenación haga que esas mismas componentes en $\mathbf{p}_{R_2^\pi}$ estén en orden descendente siguiendo el procedimiento mostrado en el Lema 2.44.

$$\mathbf{p}_{R_1^\sigma} = (1.5, 1.5, 3, 4, 6, 6, 6),$$

$$\mathbf{p}_{R_2^\sigma} = (4, 5.5, 5.5, 2, 2, 2, 7).$$

$$\begin{aligned}
M_1(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= M_2(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) = \{1, 2\}, & \# M_1(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= 2, \\
M_3(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= \{3\}, & \# M_3(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= 1, \\
M_4(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= \{4\}, & \# M_4(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= 1, \\
M_5(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= M_6(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) = M_7(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) = \{5, 6, 7\}, & \# M_5(\mathbf{p}_{R_1^\sigma}) &= 3.
\end{aligned}$$

Sean $j_1 = 1 = \min M_1(\mathbf{p}_{R_1^\sigma})$, $j_2 = 5 = \min M_5(\mathbf{p}_{R_1^\sigma})$ y las permutaciones $\sigma_1, \sigma_2 \in S_7$ representadas por

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

esta permutación intercambia los elementos del conjunto $M_1(\mathbf{p}_{R_1})$ dejando invariante el resto, por tanto, \mathbf{p}_{R_1} no varía y \mathbf{p}_{R_2} tiene esas componentes en orden descendente.

$$\sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

esta permutación reordena los elementos del conjunto $M_5(\mathbf{p}_{R_1})$ dejando invariante el resto. En el vector \mathbf{p}_{R_1} no se producen variaciones ya que dichas componentes son iguales, pero esa mismas componentes en el vector \mathbf{p}_{R_2} se reordenan en orden descendente.

Sea $\sigma' = \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_2 \cdot \sigma_1$ (las permutaciones σ_1 y σ_2 conmutan al ser permutaciones disjuntas)

$$\sigma' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

y sea $\pi = \sigma' \cdot \sigma$, representada por

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Al renombrar ahora las alternativas según la permutación π , se obtienen los órdenes mostrados en la Figura 2.8, los cuales están codificados por los vectores

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{R_1^\pi} &= (1.5, 1.5, 3, 4, 6, 6, 6), \\
\mathbf{p}_{R_2^\pi} &= (5.5, 4, 5.5, 2, 7, 2, 2).
\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica:

1. $R_1^\pi \in W_{\leq}(X)$.
2. $R_2^\pi \in W_{R_1^\pi}(X)$.

En consecuencia, $(R_1^\pi, R_2^\pi) \in W_{\leq R_1}(X)$.

R_1^π			R_2^π		
x_1	x_2		x_4	x_6	x_7
	x_3			x_2	
	x_4		x_1		x_3
x_5	x_6	x_7		x_5	

Figura 2.8: Órdenes R_1^π y R_2^π del Ejemplo 2.38.

2.3. Distancias entre órdenes débiles

El uso de las distancias para el diseño y el análisis de sistema de votación ha sido ampliamente considerado en la literatura. Sobre ello, pueden verse Kemeny [65], Slater [90], Nitzan [81], Baigent [10, 9], Nurmi [82, 83], Meskanen y Nurmi [75, 76], Monjardet [79], Gaertner [48] y Eckert y Klamler [41], entre otros. Un estudio general y completo sobre distancias puede verse en Deza y Deza [36].

2.47 Definición. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío estable bajo permutaciones. Una distancia (métrica) $d : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ es *neutral* si para cada permutación $\sigma \in S_n$ y para cualesquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ se verifica

$$d(\mathbf{a}^\sigma, \mathbf{b}^\sigma) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

2.48 Observación. En la Definición 1.5 (pág. 11) se definieron algunas de las métricas utilizadas habitualmente sobre \mathbb{R}^n y $[0, \infty)^n$. Puede comprobarse sin dificultad que todas ellas son neutrales.

Puede describirse un procedimiento para definir distancias sobre órdenes. Estas distancias son inducidas a partir de distancias sobre \mathbb{R}^n considerando los vectores que codifican a dichos órdenes. Conviene destacar que, atendiendo a nuestro propósito, se considerarán aquellas distancias definidas sobre subconjuntos $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $A^W \subseteq D$; es decir, aquellos subconjuntos de \mathbb{R}^n que contengan al conjunto de vectores que codifican órdenes.

2.49 Definición. Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A^W \subseteq D$ y una distancia (métrica) $d : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$. La *distancia (métrica) sobre $W(X)$ inducida por d* es la función $\bar{d} : W(X) \times W(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\bar{d}(R_1, R_2) = d(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}).$$

2.50 Observación. A partir de la Definición 2.10 (pág. 24) y de la Observación 2.17 (pág. 25), es posible definir una distancia (métrica) sobre el conjunto de órdenes débiles $W(X)$ a partir de cualquier distancia (métrica) definida sobre \mathbb{R}^n .

2.51 Notación. Dada una distancia (métrica) d definida sobre $W(X)$, con Δ_n^d se denotará la distancia máxima, es decir,

$$\Delta_n^d = \max \{d(R_i, R_j) \mid R_i, R_j \in W(X)\}.$$

2.3.1. Métrica de Kemeny

La métrica de Kemeny fue definida inicialmente sobre órdenes lineales por Kemeny [65] como la suma del número de pares donde las preferencias de los órdenes no coinciden.

Esta métrica se ha generalizado al contexto de órdenes débiles (véanse Kemeny y Snell [66], Cook, Kress y Seiford [32] y Eckert y Klamler [41], entre otros).

La métrica de *Kemeny* sobre órdenes débiles $d^K : W(X) \times W(X) \rightarrow \mathbb{R}$ se suele definir como el cardinal de la diferencia simétrica¹ entre los órdenes correspondientes.

$$d^K(R_1, R_2) = \#(R_1 \triangle R_2) = \#((R_1 \cup R_2) \setminus (R_1 \cap R_2)).$$

Kemeny y Snell [66] definieron una métrica sobre órdenes débiles y demostraron que era la única que verificaba una serie de axiomas.

Cada orden $R \in W(X)$ era representado mediante una matriz (r_{ij}) , donde

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \succ x_j, \\ -1, & \text{si } x_j \succ x_i, \\ 0, & \text{si } x_i \sim x_j, \end{cases}$$

y definieron la siguiente métrica sobre órdenes débiles

$$d^K(R, S) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |r_{ij} - s_{ij}|, \quad (2.5)$$

para cualesquiera $R, S \in W(X)$ representados por las matrices (r_{ij}) y (s_{ij}) , respectivamente.

Es posible obtener esta métrica sobre el conjunto de vectores que codifican órdenes a partir de la Definición 2.10 (pág. 24), tal y como se establece en la siguiente proposición.

¹La *diferencia simétrica* entre conjuntos se denota por \triangle , y puede reducirse a las operaciones de unión, intersección y diferencia:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

2.52 Proposición. Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^W$, la función $d_K : A^W \times A^W \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |\operatorname{sgn}(a_i - a_j) - \operatorname{sgn}(b_i - b_j)|,$$

donde sgn es la *función signo*:

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a > 0, \\ 0, & \text{si } a = 0, \\ -1, & \text{si } a < 0, \end{cases}$$

es una métrica neutral sobre A^W . Además, d^K coincide con la métrica sobre $W(X)$ inducida por d_K , es decir, $\bar{d}_K = d^K$.

Demostración. La demostración de que d_K es una métrica neutral se omite por ser rutinaria.

Sean $R_1, R_2 \in W(X)$ codificados por los vectores \mathbf{p}_{R_1} y \mathbf{p}_{R_2} y representados por las matrices (a_{ij}) y (b_{ij}) , respectivamente.

– Si $x_i \succ_{R_1} x_j$, entonces, $a_{ij} = 1$ y $P_{R_1}(x_i) < P_{R_1}(x_j)$.

1. Si $x_i \succ_{R_2} x_j$, entonces, $b_{ij} = 1$ y $P_{R_2}(x_i) < P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 0.$$

2. Si $x_j \succ_{R_2} x_i$, entonces, $b_{ij} = -1$ y $P_{R_2}(x_i) > P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 2.$$

3. Si $x_i \sim_{R_2} x_j$, entonces, $b_{ij} = 0$ y $P_{R_2}(x_i) = P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 1.$$

– Si $x_j \succ_{R_1} x_i$, entonces, $a_{ij} = -1$ y $P_{R_1}(x_i) > P_{R_1}(x_j)$.

1. Si $x_i \succ_{R_2} x_j$, entonces, $b_{ij} = 1$ y $P_{R_2}(x_i) < P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 2.$$

2. Si $x_j \succ_{R_2} x_i$, entonces, $b_{ij} = -1$ y $P_{R_2}(x_i) > P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 0.$$

3. Si $x_i \sim_{R_2} x_j$, entonces, $b_{ij} = 0$ y $P_{R_2}(x_i) = P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 1.$$

- Si $x_i \sim_{R_1} x_j$, entonces, $a_{ij} = 0$ y $P_{R_1}(x_i) = P_{R_1}(x_j)$.

1. Si $x_i \succ_{R_2} x_j$, entonces, $b_{ij} = 1$ y $P_{R_2}(x_i) < P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 1.$$

2. Si $x_j \succ_{R_2} x_i$, entonces, $b_{ij} = -1$ y $P_{R_2}(x_i) > P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 1.$$

3. Si $x_i \sim_{R_2} x_j$, entonces, $b_{ij} = 0$ y $P_{R_2}(x_i) = P_{R_2}(x_j)$. Por tanto,

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d^K(R_1, R_2) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}| = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |a_{ij} - b_{ij}| \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |\operatorname{sgn}(a_i - a_j) - \operatorname{sgn}(b_i - b_j)| \\ &= \bar{d}_K(R_1, R_2). \quad \square \end{aligned}$$

2.53 Observación. Si $R_1, R_2 \in W(X)$ están codificados por los vectores \mathbf{p}_{R_1} y \mathbf{p}_{R_2} , respectivamente, entonces

$$d_K(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}) = d^K(R_1, R_2) \text{ según la Ecuación (2.5), (pág. 36).}$$

2.54 Corolario. d^K es una métrica acotada y, si $R \in L(X)$, entonces $d^K(R, R^{-1}) = (\# X)^2 - \# X$ es la distancia máxima en $W(X)$, es decir,

$$\Delta_n^{d^K} = (\# X)^2 - \# X.$$

Demostración. d^K está acotada en $W(X)$ al ser una suma finita de elementos acotados. Por otro lado, si $R \in L(X)$, puede suponerse, sin pérdida de generalidad, $\mathbf{p}_R = (1, 2, \dots, n)$. Entonces

$$\begin{aligned} d^K(R, R^{-1}) &= d_K(\mathbf{p}_R, \mathbf{p}_{R^{-1}}) \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |\operatorname{sgn}(i-j) - \operatorname{sgn}(j-i)| = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n 2 = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n 1 \\ &= 2 \cdot ((n-1) + (n-2) + \dots + 1) = n \cdot (n-1) \\ &= (\# X)^2 - \# X. \end{aligned}$$

Sean $R_1, R_2 \in W(X)$.

$$\begin{aligned} d^K(R_1, R_2) &= d_K(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}) \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |\operatorname{sgn}(P_{R_1}(x_i) - P_{R_1}(x_j)) - \operatorname{sgn}(P_{R_2}(x_i) - P_{R_2}(x_j))| \\ &\leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n 2 = (\# X)^2 - \# X. \quad \square \end{aligned}$$

2.55 Ejemplo. Sean cuatro agentes que muestran sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mediante los órdenes mostrados en la Figura 2.9.

R_1	R_2	R_3	R_4
x_1	x_1	x_2	x_2
x_2	x_2	x_1	x_4
x_3	x_4	x_3	$x_1 \ x_3$
x_4	x_3	x_4	

Figura 2.9: Representación del perfil del Ejemplo 2.55.

Estos órdenes están codificados por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{R_1} &= (1, 2, 3, 4), \\ \mathbf{p}_{R_2} &= (1, 2, 4, 3), \\ \mathbf{p}_{R_3} &= (2, 1, 3, 4), \\ \mathbf{p}_{R_4} &= (3.5, 1, 3.5, 2). \end{aligned}$$

Puede observarse que R_1 difiere de R_2 en la posición de las dos alternativas menos preferidas, x_3 y x_4 . La diferencia simétrica entre R_1 y R_2 es el conjunto $\{(x_3, x_4), (x_4, x_3)\}$, luego $\#(R_1 \triangle R_2) = 2$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} d^K(R_1, R_2) &= d_K(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}) \\ &= d_K((1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3)) = |\operatorname{sgn}(3 - 4) - \operatorname{sgn}(4 - 3)| = 2 \\ &= d^K(R_1, R_2). \end{aligned}$$

Análogamente, R_1 y R_3 difieren en la posición de dos alternativas, pero ahora son las dos alternativas mejor valoradas, x_1 y x_2 . La diferencia simétrica entre R_1 y R_3 es ahora el conjunto $\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$, luego $\#(R_1 \triangle R_3) = 2$.

En este caso

$$\begin{aligned} d^K(R_1, R_3) &= d_K(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_3}) \\ &= d_K((1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4)) = |\operatorname{sgn}(1 - 2) - \operatorname{sgn}(2 - 1)| = 2 \\ &= d^K(R_1, R_3). \end{aligned}$$

La métrica de Kemeny asigna la misma distancia entre R_1 y R_2 que entre R_1 y R_3 . Sin embargo, las discrepancias entre R_1 y R_2 podrían considerarse menores que las existentes entre R_1 y R_3 , ya que las diferencias se producen en las últimas posiciones en el primer caso, mientras que en el segundo se presentan en las primeras posiciones.

2.3.2. Distancias de Kemeny ponderadas

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la métrica de Kemeny mide los desacuerdos que se producen en la ordenación de las alternativas, pero no es sensible al hecho de dónde se producen esos desacuerdos. No es lo mismo que dos agentes no coincidan en el orden de dos alternativas que se encuentran en las últimas posiciones de sus preferencias, a que esos desacuerdos se produzcan entre alternativas situadas en las primeras posiciones (véase Baldiga y Green [11]). A este respecto se ha de mencionar Can [29], donde se definen nuevas distancias ponderadas sobre órdenes lineales y se analizan ciertas propiedades.

En este trabajo se definirán y analizarán las propiedades de distancias ponderadas sobre órdenes débiles a partir de un vector de pesos y la distancia de Kemeny sobre dichos órdenes.

En la siguiente proposición se introducen distancias ponderadas sobre los vectores que codifican a los órdenes débiles.

2.56 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$ y $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$.

La función $d_{K,\mathbf{w}} : A^W \times A^W \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}
d_{K,w}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = & \\
& \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i \left| \operatorname{sgn}(a_i^{\sigma_1} - a_j^{\sigma_1}) - \operatorname{sgn}(b_i^{\sigma_1} - b_j^{\sigma_1}) \right| \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i \left| \operatorname{sgn}(b_i^{\sigma_2} - b_j^{\sigma_2}) - \operatorname{sgn}(a_i^{\sigma_2} - a_j^{\sigma_2}) \right| \right), \tag{2.6}
\end{aligned}$$

con $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ tales que $(\mathbf{a}^{\sigma_1}, \mathbf{b}^{\sigma_1}) \in A_{\leq \mathbf{a}}^W$ y $(\mathbf{b}^{\sigma_2}, \mathbf{a}^{\sigma_2}) \in A_{\leq \mathbf{b}}^W$, es una distancia neutral sobre A^W .

Demostración. Puede comprobarse sin dificultad que $d_{K,w}$ es una distancia.

Para comprobar la neutralidad, sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^W$ y $\sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned}
d_{K,w}(\mathbf{a}^\sigma, \mathbf{b}^\sigma) = & \\
& \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i \left| \operatorname{sgn}((a_i^\sigma)^{\sigma_1} - (a_j^\sigma)^{\sigma_1}) - \operatorname{sgn}((b_i^\sigma)^{\sigma_1} - (b_j^\sigma)^{\sigma_1}) \right| \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i \left| \operatorname{sgn}((b_i^\sigma)^{\sigma_2} - (b_j^\sigma)^{\sigma_2}) - \operatorname{sgn}((a_i^\sigma)^{\sigma_2} - (a_j^\sigma)^{\sigma_2}) \right| \right),
\end{aligned}$$

con $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ tales que $((\mathbf{a}^\sigma)^{\sigma_1}, (\mathbf{b}^\sigma)^{\sigma_1}) \in A_{\leq \mathbf{a}^\sigma}^W$ y $((\mathbf{b}^\sigma)^{\sigma_2}, (\mathbf{a}^\sigma)^{\sigma_2}) \in A_{\leq \mathbf{b}^\sigma}^W$.

Por la Proposición 2.40 (pág. 31), $(\mathbf{a}^{\sigma_1 \cdot \sigma}, \mathbf{b}^{\sigma_1 \cdot \sigma}) \in A_{\leq \mathbf{a}}^W$ y $(\mathbf{b}^{\sigma_2 \cdot \sigma}, \mathbf{a}^{\sigma_2 \cdot \sigma}) \in A_{\leq \mathbf{b}}^W$. Entonces, $d_{K,w}(\mathbf{a}^\sigma, \mathbf{b}^\sigma) = d_{K,w}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. \square

Siguiendo la Definición 2.49 (pág. 35), puede considerarse la distancia sobre $W(X)$ inducida por $d_{K,w}$.

2.57 Definición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. La *distancia de Kemeny ponderada asociada a \mathbf{w}* es la función $\bar{d}_{K,w} : W(X) \times W(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\bar{d}_{K,w}(R_1, R_2) = d_{K,w}(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}).$$

2.58 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. Entonces,

1. $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ es una distancia neutral sobre $W(X)$.
2. $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ no siempre verifica la desigualdad triangular².
3. $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ verifica la identidad de indiscernibles si y sólo si $w_{n-1} > 0$.
4. $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ es una distancia acotada y, si $R \in L(X)$, entonces

$$\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R^{-1}) = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i.$$

5. Si $R \in L(X)$, entonces $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R^{-1})$ es la distancia máxima en $W(X)$, es decir, $\Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}} = \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R^{-1})$.
6. Si $w_1 = w_2 = \dots = w_{n-1}$, entonces

$$\bar{d}_{K,\mathbf{w}} = \frac{1}{n-1} d^K.$$

Demostración.

1. Por la Proposición 2.56.
2. Véase el Ejemplo 2.59 (pág. 43).
3. Si $w_{n-1} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} d_{K,\mathbf{w}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 &\Leftrightarrow \\ d_K(\mathbf{a}^{\sigma_1}, \mathbf{b}^{\sigma_1}) = d_K(\mathbf{b}^{\sigma_2}, \mathbf{a}^{\sigma_2}) = 0 &\Leftrightarrow \\ \mathbf{a}^{\sigma_1} = \mathbf{b}^{\sigma_1} &\Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Si $w_{n-1} = 0$, considerando $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ con $\mathbf{a} = (1, 2, \dots, n-1, n)$ y $\mathbf{b} = (1, 2, \dots, n, n-1)$, se tiene $d_{K,\mathbf{w}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

4. $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ está acotada en $W(X)$ al ser una suma finita de elementos acotados. Por otro lado, si $R \in L(X)$, puede suponerse, sin pérdida de generalidad, $\mathbf{p}_R = (1, 2, \dots, n)$. Entonces

²En ciertos problemas la desigualdad triangular no es una condición natural (véase Barthelemy y Monjardet [15, p. 243]).

$$\begin{aligned} \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R^{-1}) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i |\operatorname{sgn}(i-j) - \operatorname{sgn}(j-i)| \right) \\ &= 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i. \end{aligned}$$

5. Para cualesquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^W$, $|\operatorname{sgn}(a_i - a_j) - \operatorname{sgn}(b_i - b_j)| \leq 2$.
Entonces

$$d_{K,\mathbf{w}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)w_i = \Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}.$$

6. Si $w_1 = w_2 = \dots = w_{n-1}$, entonces $w_i = \frac{1}{n-1}$, y por la Proposición 2.56 (pág. 40),

$$\begin{aligned} d_{K,\mathbf{w}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left| \operatorname{sgn}(a_i^{\sigma_1} - a_j^{\sigma_1}) - \operatorname{sgn}(b_i^{\sigma_1} - b_j^{\sigma_1}) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left| \operatorname{sgn}(b_i^{\sigma_2} - b_j^{\sigma_2}) - \operatorname{sgn}(a_i^{\sigma_2} - a_j^{\sigma_2}) \right| \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{2} \left(d_K(\mathbf{a}^{\sigma_1}, \mathbf{b}^{\sigma_1}) + d_K(\mathbf{b}^{\sigma_2}, \mathbf{a}^{\sigma_2}) \right) = \end{aligned}$$

y dado que d_K es una métrica neutral,

$$= \frac{1}{n-1} d_K(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad \square$$

2.59 Ejemplo. Sean el perfil dado en el Ejemplo 2.55 (pág. 39) y el vector de pesos $\mathbf{w} = (\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6})$. Es rutinario comprobar que $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_1, R_2) = \frac{1}{3}$ y que $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_1, R_3) = 1$. Esto demuestra la clara diferencia existente entre la métrica de Kemeny clásica d^K y la distancia de Kemeny ponderada $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$.

	R_1, R_2	R_1, R_3	R_1, R_4	R_2, R_3	R_2, R_4	R_3, R_4
d^K	2	2	7	4	5	5
$\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$	$\frac{4}{12}$	1	$\frac{32}{12}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{26}{12}$	$\frac{17}{12}$

Tabla 2.1: Valores de d^K y $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ en el perfil del Ejemplo 2.55 (pág. 39).

La Tabla 2.1 muestra las diferencias existentes entre la métrica de Kemeny d^K y la distancia de Kemeny ponderada $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$.

Puede verse que $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ no satisface la desigualdad triangular:

$$\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_1, R_4) = \frac{32}{12} > \frac{4}{12} + \frac{26}{12} = \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_1, R_2) + \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_2, R_4).$$

En la Proposición 2.58 (pág. 42) se comprobó que la distancia máxima entre dos órdenes débiles mediante cualquier distancia de Kemeny ponderada se obtenía cuando los órdenes eran lineales y uno era el inverso del otro. El siguiente resultado establece que, bajo ciertas condiciones, esta distancia máxima puede ser también alcanzada en órdenes que no son necesariamente inversos el uno del otro.

2.60 Definición. Dado un número $x \in \mathbb{R}$, se define la *parte entera de x* como el número entero inferior más próximo y se denotará por $\lfloor x \rfloor$.

2.61 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. Si $w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 0$, entonces existen $R, R' \in W(X)$, con $R' \neq R^{-1}$ tales que $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R') = \Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$.

Demostración. Si $w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 0$, sean $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $R, R' \in W(X)$ tales que $\mathbf{p}_R = (n, n-1, \dots, 2, 1)$ y $\mathbf{p}_{R'} = (1, 2, \dots, k-1, k+1, k, k+2, \dots, n-1, n)$.

Es obvio que $R' \neq R^{-1}$ y, además,

$$\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R') = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{k-1} w_i = 2 \sum_{i=1}^{k-1} (n-i) w_i = \Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}. \quad \square$$

2.62 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$.

Si $w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} > 0$, entonces

$$\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R') = \Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}} \Leftrightarrow R, R' \in L(X) \text{ y } R' = R^{-1}.$$

Demostración.

\Leftrightarrow Si $R \in L(X)$ y $R' = R^{-1}$, entonces, por la Proposición 2.58 (pág. 42),

$$\bar{d}_{K,w}(R, R') = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i = \Delta_n^{\bar{d}_{K,w}}.$$

\Rightarrow) Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} los vectores que codifican a R y R' , respectivamente, y supongamos que $\bar{d}_{K,w}(R, R') = \Delta_n^{\bar{d}_{K,w}}$.

Por la Proposición 2.45 (pág. 33), existe $\sigma \in S_n$ tal que $(R^\sigma, R'^\sigma) \in W_{\leq R}(X)$. Por tanto, dado que $\bar{d}_{K,w}$ es una distancia neutral (Proposición 2.58, pág. 42), entonces

$$\bar{d}_{K,w}(R, R') = \bar{d}_{K,w}(R^\sigma, R'^\sigma).$$

Por tanto, puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $(R, R') \in W_{\leq R}(X)$.

$$\begin{aligned} \bar{d}_{K,w}(R, R') = d_{K,w}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i,h=1 \\ i < h}}^n w_i |\operatorname{sgn}(a_i - a_h) - \operatorname{sgn}(b_i - b_h)| \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i,h=1 \\ i < h}}^n w_i |\operatorname{sgn}(b_i^\sigma - b_h^\sigma) - \operatorname{sgn}(a_i^\sigma - a_h^\sigma)| \right), \end{aligned}$$

con $\sigma \in S_n$ tal que $(R'^\sigma, R^\sigma) \in W_{\leq R'^\sigma}(X)$.

$$\Delta_n^{\bar{d}_{K,w}} = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n w_i = \bar{d}_{K,w}(R, R').$$

Veamos que para cualquier i se verifica $a_i = i$ y $b_i = n - (i - 1)$.

- Si $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $w_i > 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_n^{\bar{d}_{K,w}} = \bar{d}_{K,w}(R, R') \Rightarrow \\ |\operatorname{sgn}(a_i - a_j) - \operatorname{sgn}(b_i - b_j)| = 2 \text{ para cualquier } i < j \Leftrightarrow \\ a_i < a_j, b_i > b_j \text{ para cualquier } i < j \Leftrightarrow \\ a_i = i \text{ y } b_i = n - (i - 1). \end{aligned}$$

Además,

$$b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = n - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n+1}{2} + 2, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

- Si $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ y $b_i \leq \frac{n+1}{2} = b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1$.
Supongamos que existen $i < j$ tales que $a_i = a_j$. Entonces, $b_j \leq b_i \leq \frac{n+1}{2}$.
Sean $h < k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ tales que $\sigma^{-1}(h) = j$ y $\sigma^{-1}(k) = i$.
Puesto que $h \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $w_h > 0$. Luego

$$w_h | \operatorname{sgn}(b_h^\sigma - b_k^\sigma) - \operatorname{sgn}(a_h^\sigma - a_k^\sigma) | < 2w_h \Rightarrow \\ \bar{d}_{K,w}(R_1, R') < \Delta_n^{\bar{d}_{K,w}}.$$

Por tanto, $a_i < a_j$ si $i < j$. Luego $a_i = i$ y, en consecuencia, $R \in L(X)$ y $R \equiv (1, 2, \dots, n)$.

Análogamente, supongamos que existen $i < j$ tales que $b_i \leq b_j$, entonces, $a_i < a_j$.

Sean $h < k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ tales que $\sigma^{-1}(h) = i$ y $\sigma^{-1}(k) = j$.
Puesto que $h \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $w_h > 0$. Luego

$$w_h | \operatorname{sgn}(b_h^\sigma - b_k^\sigma) - \operatorname{sgn}(a_h^\sigma - a_k^\sigma) | = \\ w_h | \operatorname{sgn}(b_h^\sigma - b_k^\sigma) - (-1) | < 2w_h \Rightarrow \\ \bar{d}_{K,w}(R_1, R') < \Delta_n^{\bar{d}_{K,w}}.$$

Por tanto, $b_i > b_j$ si $i < j$. Luego $b_i = n - i + 1$ y, en consecuencia, $R' \in L(X)$ y $\mathbf{p}_{R'} = (n, n-1, \dots, 1)$. \square

Por tanto, para un vector de pesos dado \mathbf{w} , la distancia ponderada de Kemeny asociada a \mathbf{w} entre órdenes en los que alguno de ellos es no lineal nunca alcanza el valor máximo.

2.4. Distancias entre subconjuntos

El voto aprobatorio (*approval voting*) es un procedimiento de votación en el que cada votante aprueba o desaprueba a cada uno de los candidatos. Este sistema de votación fue propuesto independientemente por Ottewell [84], Kellet y Mott [64], Weber [101] (quien utilizó por primera vez el término “voto aprobatorio”), Brams y Fishburn [22] y Morin [80], y ha llegado a ser muy popular y utilizado en un gran número de contextos electorales (véase Brams y Fishburn [24]). Desde entonces, este sistema ha sido estudiado

profusamente en la Teoría de Elección Social (véanse Brams [20], Brams y Fishburn [23, 24], Brams y Sanver [27], Brams, Kilgour y Sanver [25, 26, 69], Fishburn y Brams [47], De Sinopoli, Dutta y Laslier [35], Alós-Ferrer [7], Weber [102], Vorsatz [99], Massó y Vorsatz [73] y Alcalde Unzu y Vorsatz [2], entre otros).

Sea un conjunto de agentes que muestran sus preferencias sobre un conjunto de alternativas para elegir un subconjunto no vacío de las mismas. Los agentes deben decidir cuáles son sus alternativas elegidas, pero en este caso no tienen que ordenar sus preferencias, únicamente deben decidir si cada alternativa es elegida o no.

Por ejemplo, las preferencias de un grupo de 4 agentes sobre un conjunto de 5 alternativas podrían representarse como muestra la Figura 2.10.

R_1	R_2	R_3	R_4
$x_1 \ x_3$	$x_1 \ x_3 \ x_4$	$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$	$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$
$x_2 \ x_4 \ x_5$	$x_2 \ x_5$		

Figura 2.10: Preferencias con alternativas elegidas como buenas o malas.

En R_1 las alternativas x_1 y x_3 son elegidas como buenas (o aceptables) y las alternativas x_2 , x_4 y x_5 como malas (o inaceptables). La línea horizontal indica la separación entre las alternativas aceptadas y las rechazadas, señalando las dos clases de indiferencia existentes en el orden débil subyacente.

Si se consideran estas preferencias como órdenes débiles en los que las alternativas aceptadas son consideradas como indiferentes entre ellas y preferidas a las alternativas rechazadas, que serían también indiferentes entre sí, entonces es posible codificar esos órdenes utilizando el procedimiento indicado en la Sección 2.2 (pág. 23). En este caso, el orden R_1 estaría codificado por el vector $\mathbf{p}_{R_1} = (1.5, 4, 1.5, 4, 4)$, que contiene toda la información mostrada en el orden.

El problema se presenta cuando un agente considera que todas las alternativas son aceptadas o todas rechazadas. En ambos casos, los órdenes estarían codificados por el mismo vector y sería imposible distinguir cuándo un agente acepta o rechaza todas las alternativas, como ocurre con los órdenes R_3 y R_4 del ejemplo anterior: $\mathbf{p}_{R_3} = \mathbf{p}_{R_4} = (3, 3, 3, 3, 3)$.

Ante esta situación, si se calcula la distancia entre órdenes según el procedimiento introducido en la Sección 2.3 (pág. 35), se obtendrían resultados del todo incongruentes, como por ejemplo, que la distancia entre los órdenes

R_1 y R_3 sería la misma que entre R_1 y R_4 , cuando puede verse claramente que son mayores las coincidencias³ entre R_1 y R_4 que entre R_1 y R_3 .

2.63 Definición. Sea $R \in W(X)$. R es *dicotómico* si la relación de indiferencia asociada a R , \sim , consta a lo sumo de dos clases de equivalencia, $g(R)$ y $b(R)$, tales que

1. Para cualesquiera $x_i, x_j \in g(R)$, se verifica $x_i \sim x_j$.
2. Para cualesquiera $x_i, x_j \in b(R)$, se verifica $x_i \sim x_j$.
3. Para cualesquiera $x_i \in g(R)$ y $x_j \in b(R)$, se verifica $x_i \succ x_j$.

Con $D(X)$ se denotará el conjunto de órdenes dicotómicos sobre X . Si $D \in D(X)$, $g(D)$ denotará el conjunto de alternativas aceptadas en D y $b(D)$ el conjunto de alternativas rechazadas en D .

2.64 Observación. Para cualquier $D \in D(X)$ se verifica $g(D) \cap b(D) = \emptyset$ y $g(D) \cup b(D) = X$, pudiendo ser vacíos $g(D)$ o $b(D)$, pero no simultáneamente. Además, $g(D) = b(D^{-1})$ y $b(D) = g(D^{-1})$.

2.4.1. Codificación de preferencias dicotómicas

En la Sección 2.2 (pág. 23) se desarrolló un sistema de codificación de órdenes débiles que permitía identificar cada orden con un vector de \mathbb{R}^n .

Ya se ha expuesto el problema que se presenta al codificar órdenes dicotómicos mediante ese sistema de codificación, por lo que se utilizará otro procedimiento mediante vectores binarios de \mathbb{R}^n . Las componentes de estos vectores indicarán para cada alternativa si es aceptada (1), o rechazada (0) por el agente.

2.65 Definición. Dado $D \in D(X)$, la función $1_D : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$1_D(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j \in g(D), \\ 0, & \text{si } x_j \notin g(D), \end{cases}$$

determina la posición de cada alternativa x_j en D . 1_D es la *función indicatriz* de $g(D)$ (o *función característica*). Con $\mathbf{i}_D = (1_D(x_1), \dots, 1_D(x_n)) \in \{0, 1\}^n$ se denotará al *vector indicador* de D (vector que codifica a $D \in D(X)$).

³ R_1 y R_4 tienen 3 coincidencias en las alternativas rechazadas y ninguna en las aceptadas. R_1 y R_3 no tienen coincidencias en las alternativas rechazadas y 2 en las aceptadas.

2.66 Observación. Los órdenes dicotómicos de la Figura 2.10 (pág. 47) están codificadas por los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{D_1} &= (1, 0, 1, 0, 0), \\ \mathbf{i}_{D_2} &= (1, 0, 1, 1, 0), \\ \mathbf{i}_{D_3} &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ \mathbf{i}_{D_4} &= (0, 0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

2.67 Observación. Si \mathbf{i}_D es el vector indicador de $D \in D(X)$, entonces $\mathbf{i}_{D^{-1}} = (1 - 1_D(x_1), \dots, 1 - 1_D(x_n))$ es el vector indicador de D^{-1} .

2.4.2. Métrica de Hamming

Richard Hamming introdujo la hoy denominada métrica de Hamming (véase Hamming [54]). Esta métrica puede utilizarse para vectores en general, de forma que la distancia entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es el número de componentes en las que difieren.

2.68 Definición. La *métrica de Hamming* sobre \mathbb{R}^n es la función $d_H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \# \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \neq b_i \}.$$

2.69 Observación. Conviene destacar que la métrica de Hamming es neutral. Además, coincide con la métrica de Manhattan sobre vectores binarios $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{0, 1\}^n$:

$$d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Es posible extender esta métrica de \mathbb{R}^n a $D(X)$ mediante la función $d^H : D(X) \times D(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d^H(D_1, D_2) = d_H(\mathbf{i}_{D_1}, \mathbf{i}_{D_2}).$$

2.70 Observación. La métrica de Hamming sobre preferencias dicotómicas puede definirse como el cardinal de la diferencia simétrica entre los conjuntos de las alternativas aceptadas:

$$\begin{aligned}d^H(D_1, D_2) &= \# (g(D_1) \triangle g(D_2)) \\ &= \# ((g(D_1) \cup g(D_2)) \setminus (g(D_1) \cap g(D_2))).\end{aligned}$$

Además, esta métrica sobre $D(X)$ es acotada y puede comprobarse sin dificultad que la distancia máxima entre dos órdenes dicotómicos es $\# X$, ($\Delta_n^{d^H} = \# X$).

2.71 Observación. La Tabla 2.2 muestra las distancias entre los órdenes dicotómicos de la Figura 2.10 (pág. 47) mediante la métrica de Hamming.

	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	0	1	3	2
D_2	1	0	2	3
D_3	3	2	0	5
D_4	2	3	5	0

Tabla 2.2: Distancia de Hamming entre los órdenes de la Figura 2.10.

Esta métrica permite medir la distancia entre órdenes dicotómicos, pero no distingue si las diferencias entre dos órdenes se producen en las alternativas aceptadas o en las rechazadas, lo cual puede ser significativo en algunas situaciones.

Por ejemplo, si se consideran las preferencias dicotómicos de la Figura 2.11, las distancias de Hamming entre D_1 y D_2 y entre D_2 y D_3 coinciden. Ahora bien, si se desea dar más importancia a las coincidencias en las alternativas aceptadas (rechazadas), la distancia entre D_1 y D_2 debería ser menor (mayor), puesto que coinciden en dos alternativas aceptadas (no coinciden en ninguna alternativa rechazada) mientras que D_2 y D_3 coinciden en una única alternativa aceptada (coinciden en una alternativa rechazada). Esto nos lleva a considerar otros tipos de distancias que puedan recoger estas consideraciones.

D_1	D_2	D_3
$\frac{x_1 \ x_2 \ x_3}{\quad}$	$\frac{x_1 \ x_2}{x_3}$	$\frac{x_1}{x_2 \ x_3}$

Figura 2.11: Perfil de preferencias dicotómicas.

En la literatura pueden encontrarse diferentes medidas del grado de similitud entre vectores binarios. Entre ellas se han de destacar los coeficientes de similitud, utilizados habitualmente, por ejemplo, en el análisis de conglomerados⁴ con datos binarios (Dillon y Goldstein [38]), Biología (Hubálek [59], Michael [77]), Etnología (Driver y Kroeber [39]), Taxonomía (Sokal y Sneath [95]), Geología (Michael [78]) y Química (Willet, Barnard y Downs [103]).

En el campo de la Elección Social, la métrica de Hamming ha sido utilizada, entre otros, por Kilgour, Brams y Sanver [69] y por Brams, Kilgour y

⁴En el Capítulo 4 se llevará a cabo este tipo de análisis en el contexto de órdenes débiles.

Sanver [25, 26], donde se desarrolla un procedimiento de elección de comités denominado *minimax*, el cual minimiza la distancia de Hamming máxima respecto de una elección basada en un procedimiento de voto aprobatorio.

La lógica que subyace en estas técnicas consiste en analizar el grado de similitud que comparten un patrón común de atributos entre variables binarias (Snijders, Dormar, van Schurr, Dijkman-Caes y Driessen [93]).

De los coeficientes de similitud existentes (puede encontrarse un análisis y las definiciones de los más habituales en Tubbs [98], Jackson, Somers y Harvey [61] y Choi, Cha y Tappert [31], entre otros), se prestará especial atención a aquéllos cuyo rango de valores se encuentra en el intervalo $[0, 1]$, puesto que a partir de estos coeficientes es posible obtener una distancia entre vectores binarios⁵. Estos coeficientes son los denominados de Jaccard (Jaccard [60]), Sørensen-Dice (Dice [37] y Sørensen [96]), Russell-Rao (Russell y Rao [88]), simple-matching (Sokal y Michener [94]) y Rogers-Tanimoto (Rogers y Tanimoto [86]).

Estos coeficientes de similitud se basan en contar el número de coincidencias y diferencias existentes sobre un grupo de características en dos observaciones dadas. Si se consideran dos agentes y su aceptación o rechazo de un conjunto de alternativas, el siguiente ejemplo muestra cómo se obtienen estos coeficientes.

2.72 Ejemplo. La Tabla 2.3 muestra las coincidencias en la aceptación o rechazo $(1, 0)$ de un conjunto de alternativas para dos agentes.

		Agente 2	
		1	0
Agente 1	1	a	b
	0	c	d

Tabla 2.3: Tabla de elección 2×2 .

En la primera fila, a representa el número de alternativas aceptadas por los dos agentes y b representa el número de alternativas que son aceptadas por el primer agente pero rechazadas por el segundo. En la segunda fila, c representa el número de alternativas rechazadas por el primer agente pero aceptadas por el segundo. Finalmente, d es el número de alternativas rechazadas por los dos agentes.

Las Tabla 2.4 muestra los coeficientes de disimilitud asociados a los coeficientes anteriores.

⁵Si S es el coeficiente de similitud, basta tomar $1 - S$ para obtener un coeficiente de disimilitud entre vectores binarios.

Coeficiente	Disimilitud
Jaccard	$\frac{b+c}{a+b+c}$
Sørensen-Dice	$\frac{b+c}{2a+b+c}$
Russell-Rao	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}$
Simple-matching	$\frac{b+c}{a+b+c+d}$
Rogers-Tanimoto	$\frac{2b+2c}{a+2b+2c+d}$

Tabla 2.4: Disimilitudes asociadas a los coeficientes de similitud.

Cada uno de estos coeficientes, considerados sobre vectores binarios, tratan las coincidencias o diferencias de forma distinta. El coeficiente de Jaccard, recoge la información entre las alternativas aceptadas sin tener en cuenta la coincidencia existente en las rechazadas. Sørensen-Dice recoge la misma información pero aplicando el doble de peso a las alternativas aceptadas por los dos agentes. Russell-Rao, a diferencia del de Jaccard, sí tiene en cuenta las alternativas rechazadas por los dos agentes, pero no tiene en cuenta el número de alternativas aceptadas (rechazadas) por un agente y rechazadas (aceptadas) por el otro. Rogers-Tanimoto aplica el doble de peso a las alternativas no coincidentes sin tener en cuenta si hay más o menos coincidencias en las alternativas aceptadas y/o rechazadas. Por último, simple-matching, tiene en cuenta las coincidencias entre las alternativas aceptadas, rechazadas y no coincidentes, pero no distingue si hay más alternativas aceptadas que rechazadas.

Este último caso puede ser de gran interés en el caso de calcular distancias sobre órdenes dicotómicos. La distancia entre dos órdenes dicotómicos puede variar en función de que las coincidencias que se produzcan sean sobre alternativas aceptadas o sobre rechazadas. De hecho, el coeficiente simple-matching es la distancia de Hamming normalizada al intervalo $[0, 1]$.

2.4.3. Distancias dicotómicas ponderadas

A continuación se introduce una nueva clase de distancias sobre órdenes dicotómicos que son sensibles a que los desacuerdos se produzcan en las alternativas aceptadas o en las rechazadas.

2.73 Definición. Se definen las funciones

1. $d^+ : D(X) \times D(X) \longrightarrow [0, 1]$

$$d^+(D_1, D_2) = \left(1 - \frac{\#(g(D_1) \cap g(D_2))}{\#X}\right) \cdot \frac{\#(g(D_1) \triangle g(D_2))}{\#X},$$

2. $d^- : D(X) \times D(X) \longrightarrow [0, 1]$

$$d^-(D_1, D_2) = \left(1 - \frac{\#(b(D_1) \cap b(D_2))}{\#X}\right) \cdot \frac{\#(b(D_1) \triangle b(D_2))}{\#X},$$

3. Dado $\lambda \in [0, 1]$, $d^{\pm\lambda} : D(X) \times D(X) \longrightarrow [0, 1]$

$$d^{\pm\lambda}(D_1, D_2) = \lambda d^+(D_1, D_2) + (1 - \lambda) d^-(D_1, D_2).$$

2.74 Proposición. Para cualquier $\lambda \in (0, 1)$ se verifica:

1. d^+ , d^- y $d^{\pm\lambda}$ son distancias neutrales sobre $D(X)$.
2. d^+ , d^- y $d^{\pm\lambda}$ verifican la identidad de indiscernibles.
3. d^+ , d^- y $d^{\pm\lambda}$ no verifican la desigualdad triangular.

Demostración.

1. La demostración de que d^+ , d^- y $d^{\pm\lambda}$ son distancias neutrales se omite por ser rutinaria.

2. $d^+(D_1, D_2) = 0 \Leftrightarrow (g(D_1) = g(D_2) = X \text{ o } g(D_1) \triangle g(D_2) = \emptyset) \Leftrightarrow D_1 = D_2$. La demostración es análoga para d^- .

$$d^{\pm\lambda}(D_1, D_2) = 0 \Leftrightarrow (d^+(D_1, D_2) = d^-(D_1, D_2) = 0) \Leftrightarrow D_1 = D_2.$$

3. Sean $D_1, D_2, D_3 \in D(\{x_1, x_2, x_3\})$ codificadas por los vectores $\mathbf{i}_{D_1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{i}_{D_2} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{i}_{D_3} = (0, 0, 0)$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} d^+(D_1, D_3) &= \\ & \left(1 - \frac{0}{3}\right) \cdot \frac{3}{3} = 1 > \frac{7}{9} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{0}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} \\ & = d^+(D_1, D_2) + d^+(D_2, D_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^-(D_1, D_3) &= \\ & \left(1 - \frac{0}{3}\right) \cdot \frac{3}{3} = 1 > \frac{7}{9} = \left(1 - \frac{0}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} \\ & = d^-(D_1, D_2) + d^-(D_2, D_3). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
d^{\pm\lambda}(D_1, D_3) &= \\
&\lambda d^+(D_1, D_3) + (1 - \lambda) d^-(D_1, D_3) > \\
&\lambda (d^+(D_1, D_2) + d^+(D_2, D_3)) \\
&+ (1 - \lambda) (d^-(D_1, D_2) + d^-(D_2, D_3)) \\
&= d^{\pm\lambda}(D_1, D_2) + d^{\pm\lambda}(D_2, D_3). \quad \square
\end{aligned}$$

2.75 Observación. Es claro que d^+ , d^- y $d^{\pm\lambda}$ están acotadas en $D(X)$, y puede comprobarse sin dificultad que la distancia máxima entre dos órdenes dicotómicos es 1.

2.76 Observación. Para cualesquiera $D_1, D_2 \in D(X)$ y $\lambda \in (0, 1)$ se verifica:

- $d^+(D_1, D_2) = d^-(D_1^{-1}, D_2^{-1})$.
- $d^{\pm\lambda}(D_1, D_2) = \lambda d^+(D_1, D_2) + (1 - \lambda) d^+(D_1^{-1}, D_2^{-1})$.

2.77 Observación. La distancia d^+ recoge el número de coincidencias que se producen en las alternativas aceptadas y lo pondera por el número de alternativas en las que los dos agentes no coinciden.

La Tabla 2.5 muestra las disimilitudes entre la preferencia $\mathbf{i}_{D_1} = (0, 1, 0)$ respecto a tres preferencias $\mathbf{i}_{D_2} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{i}_{D_3} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{i}_{D_4} = (0, 0, 0)$.

		$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_2 x_3}$	$\frac{x_1}{x_2 x_3}$	$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3}$
	Jaccard	$\frac{6}{9}$	1	1
	Simple-matching	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$
	Russell-Rao	$\frac{6}{9}$	1	1
$\frac{x_2}{x_1 x_3}$	d^+	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$
	d^-	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
	$d^{\pm 0.5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Tabla 2.5: Comparación de distancias entre órdenes dicotómicos.

Puede observarse que la distancia de Jaccard (d_J) no tiene en cuenta qué ocurre con las alternativas rechazadas, de modo que $d_J(D_1, D_3) = d_J(D_1, D_4) = 1$, a pesar de que las preferencias D_1 y D_4 coinciden en

dos alternativas rechazadas mientras que D_1 y D_3 coinciden sólo en una alternativa rechazada. En cambio, d^+ y d^- sí distinguen esas coincidencias.

Por otro lado, la distancia simple-matching, d_{SM} , trata del mismo modo las diferencias entre las alternativas aceptadas y las rechazadas. D_1 y D_2 coinciden en una alternativa aceptada, D_1 y D_3 coinciden en una rechazada y, por tanto, $d_{SM}(D_1, D_2) = d_{SM}(D_1, D_3)$. Sin embargo, d^+ y d^- sí distinguen esas coincidencias.

Por último, Russell-Rao (d_{RR}) trata del mismo modo las alternativas rechazadas que las alternativas aceptadas en un caso y rechazados en otro, obteniendo de nuevo $d_{RR}(D_1, D_3) = d_{RR}(D_1, D_4) = 1$.

2.5. Preferencias aprobatorias

Dado un conjunto de alternativas, las preferencias dicotómicas permiten a un agente elegir un subconjunto de las mismas que considere aceptables y rechazar el resto. Si los agentes tuviesen más información, podrían diferenciar estas alternativas en una escala más amplia, por ejemplo, una escala de tres valores en la que clasificasen las alternativas en buenas, medianas y malas (pueden encontrarse propuestas de estos refinamientos aplicados al voto aprobatorio en Felsenthal [46], Yilmaz [104] y Hillinger [58], entre otros), e incluso podría proponerse a los agentes que las clasificasen en escalas más refinadas con cuatro, cinco o más valores. Recientemente, Balinski y Laraki [12, 13] han propuesto un sistema de votación denominado *Majority Judgment* donde los agentes evalúan las alternativas mediante etiquetas lingüísticas, como por ejemplo *excelente*, *muy buena*, *buena*, ..., en lugar de ordenar las alternativas de la forma tradicional.

Brams y Sanver [28] proponen una forma de combinar las preferencias sobre un conjunto de alternativas mediante un orden dicotómico y un orden lineal. Proponen que los agentes elijan cada alternativa como aceptada o rechazada y, además, ordenen estrictamente sus preferencias sobre las alternativas. A este sistema híbrido, ellos lo denominan “preferencia aprobatoria” (*preference approval*).

Cada agente ordena un conjunto de alternativas mediante un orden débil y una “línea divisoria” que diferencia las alternativas aceptadas y rechazadas. Una alternativa situada por encima de la línea divisoria (respectivamente por debajo) es considerada aceptada (respectivamente rechazada).

Basados en estas preferencias aprobatorias, Brams y Sanver [28] proponen dos sistemas de votación, *preference approval voting* (PAV) y *fallback voting* (FV), y analizan propiedades que cumplen y que consideran “deseables” (Brams [21]).

2.5.1. Representación de preferencias aprobatorias

Los contenidos de esta sección se basan parcialmente en Erdamar, García Lapresta, Pérez Román y Sanver [43].

Las preferencias aprobatorias de cada agente quedan determinadas por el orden de las alternativas y las alternativas que han sido aceptadas, es decir, en una preferencia aprobatoria subyacen un orden débil y un orden dicotómico.

Si bien esta información es diferente, presenta la siguiente propiedad: dadas dos alternativas x_i y x_j , si x_j es aceptada y x_i es al menos tan buena como x_j , entonces x_i también ha de ser aceptada.

2.78 Definición. Un *preferencia aprobatoria* sobre X es un par $(R, D) \in W(X) \times D(X)$ que satisface la siguiente condición

$$(x_i R x_j \text{ y } x_j \in g(D)) \Rightarrow x_i \in g(D),$$

para cualesquiera $x_i, x_j \in X$.

Con $PA(X)$ se denotará el conjunto de las preferencias aprobatorias sobre X .

2.79 Observación. Conviene destacar que si $x_i R x_j$ y $x_i \in b(D)$, entonces $x_j \in b(D)$.

2.80 Definición. Dada $(R, D) \in PA(X)$, entonces $(R, D)^{-1} = (R^{-1}, D^{-1})$ es también una preferencia aprobatoria denominada *preferencia aprobatoria inversa* de (R, D) .

2.81 Definición. Un *perfil de preferencias aprobatorias* es un vector $\mathbf{RD} = ((R_1, D_1), \dots, (R_m, D_m))$ donde (R_i, D_i) representa las preferencias aprobatorias del agente v_i , con $i = 1, \dots, m$.

2.82 Definición. Dado un perfil $\mathbf{RD} = ((R_1, D_1), \dots, (R_m, D_m))$, el perfil *inverso* de \mathbf{RD} , denotado con $(\mathbf{RD})^{-1}$, es el perfil que se obtiene al invertir el orden de cada una de las relaciones de preferencia que lo conforman:

$$(\mathbf{RD})^{-1} = ((R_1^{-1}, D_1^{-1}), \dots, (R_m^{-1}, D_m^{-1})).$$

2.83 Notación. Dada una permutación $\pi \in S_m$, se denotará con $(\mathbf{RD})_\pi = ((R_{\pi(1)}, D_{\pi(1)}), \dots, (R_{\pi(m)}, D_{\pi(m)}))$ al perfil de preferencias aprobatorias que se obtiene al renombrar los agentes del perfil \mathbf{RD} según la permutación π .

2.84 Notación. Dada una permutación $\sigma \in S_n$, se denotará con $(\mathbf{RD})^\sigma = ((R_1^\sigma, D_1^\sigma), \dots, (R_m^\sigma, D_m^\sigma))$ al perfil obtenido a partir del perfil \mathbf{RD} renombrando las alternativas de acuerdo con la permutación σ , es decir, para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \{1, \dots, m\}$

1. $x_i R_k x_j \Leftrightarrow x_{\sigma(i)} R_k^\sigma x_{\sigma(j)}$ (o $x_i R_k^\sigma x_j \Leftrightarrow x_{\sigma^{-1}(i)} R_k x_{\sigma^{-1}(j)}$).
2. $x_i \in D_k \Leftrightarrow x_{\sigma(i)} \in D_k^\sigma$ (o $x_i \in D_k^\sigma \Leftrightarrow x_{\sigma^{-1}(i)} \in D_k$).

La representación de las preferencias aprobatorias será similar a la utilizada para representar órdenes débiles (pág. 21), añadiendo una línea horizontal que indique cuáles son las alternativas que han sido aceptadas y cuáles las rechazadas.

2.85 Ejemplo. La Figura 2.12 muestra la representación propuesta. Las alternativas situadas en la misma fila son indiferentes, las alternativas en las filas superiores son preferidas a aquéllas situadas en filas inferiores y las alternativas por encima de la línea divisoria son las alternativas aceptadas, mientras que las situadas por debajo son las alternativas rechazadas.

$$\begin{array}{c}
 x_2 \ x_3 \ x_5 \\
 \hline
 x_1 \\
 \hline
 x_4 \ x_7 \\
 x_6
 \end{array}$$

Figura 2.12: Representación de una preferencia aprobatoria (R, D) .

La preferencia aprobatoria inversa es la representada en la Figura 2.13.

$$\begin{array}{c}
 x_6 \\
 x_4 \ x_7 \\
 \hline
 x_1 \\
 x_2 \ x_3 \ x_5
 \end{array}$$

Figura 2.13: Preferencia aprobatoria inversa $(R, D)^{-1}$.

Otra forma de representar las preferencias aprobatorias (similar a la propuesta en la Sección 2.1, pág. 22) consiste en representar de izquierda a derecha el orden débil e indicar con una línea vertical la separación entre las alternativas aceptadas y las rechazadas. La preferencia aprobatoria del Ejemplo 2.85 se representa

$$(R, D) \equiv x_2 \sim x_3 \sim x_5 \succ x_1 \mid x_4 \sim x_7 \succ x_6.$$

2.5.2. Codificación de preferencias aprobatorias

Si se tiene en cuenta que una preferencia aprobatoria queda caracterizada por un orden débil y un orden dicotómico, es posible introducir un sistema de codificación sobre las preferencias aprobatorias $(R, D) \in PA(X)$ mediante los vectores (definidos en las Secciones 2.2.2, pág. 24 y 2.4.1, pág. 48), que codifican a los órdenes correspondientes.

Éstos serían los vectores $\mathbf{p}_R \in \mathbb{R}^n$ que representa el orden de las alternativas, e $\mathbf{i}_D \in \{0, 1\}^n$ que representa las alternativas aceptadas o rechazadas.

2.86 Ejemplo. Mediante este sistema de codificación, la preferencia aprobatoria (R, D) del Ejemplo 2.85 viene codificada por el par $(\mathbf{p}_R, \mathbf{i}_D) \in \mathbb{R}^n \times \{0, 1\}^n$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_R &= (4, 2, 2, 5.5, 2, 7, 5.5), \\ \mathbf{i}_D &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0).\end{aligned}$$

2.87 Observación. La condición utilizada en la Definición 2.78 (pág. 56) puede ahora basarse en los vectores que codifican la preferencia aprobatoria

$$(P_R(x_i) \geq P_R(x_j) \text{ y } 1_D(x_j) = 1) \Rightarrow 1_D(x_i) = 1.$$

2.5.3. Distancias sobre preferencias aprobatorias

Las preferencias aprobatorias vienen codificadas por dos vectores que contienen diferente tipo de información. De forma separada es posible calcular distancias entre esos vectores. Ahora bien, si se pretende obtener una distancia entre preferencias aprobatorias se presenta el problema de cómo obtener una nueva distancia mediante la agregación de distancias que tienen codominios distintos.

Diferentes autores han estudiado el problema general de combinar un conjunto de distancias para obtener una nueva. De hecho, Borsik y Doboš [18] estudiaron profundamente el problema para un conjunto de distancias no necesariamente finito. Más recientemente, Pradera y Trillas [85], siguiendo el trabajo de Borsik y Doboš, han propuesto una solución general al problema de la combinación de datos representados por medio de una familia finita de distancias generalizadas y pseudodistancias. Casasnovas y Roselló [30] han estudiado diferentes técnicas que permiten agregar un conjunto de distancias en otra. Mayor y Valero [74] proporcionan una descripción general para combinar un conjunto de distancias asimétricas (no necesariamente finito) en otra.

2.5.3.1. Métrica de Kemeny–Hamming

Las preferencias aprobatorias contienen dos tipos diferentes de información. Una primera forma de abordar la medición del grado de disimilitud consiste en medirla separadamente para cada tipo de información y posteriormente obtener una nueva medida mediante un procedimiento de agregación determinado. Este procedimiento se basará en las distancias presentadas anteriormente y permitirá obtener una nueva distancia mediante una combinación convexa de las mismas. Teniendo en cuenta que una preferencia aprobatoria queda caracterizada por un orden débil y un orden dicotómico, se utilizará la métrica de Kemeny definida sobre órdenes débiles y la métrica de Hamming sobre órdenes dicotómicos para medir la distancia respecto al orden de las alternativas en el primer caso y respecto de las alternativas aceptadas y rechazadas en el segundo. El procedimiento de agregación de estas distancias dependerá del contexto en el que se plantee el problema en concreto. El énfasis que se desee dar a los desacuerdos en la ordenación de las alternativas frente a las diferencias en las alternativas aceptadas o rechazadas va a quedar recogido por la elección de la combinación convexa escogida.

Dado que las dos métricas utilizadas tienen diferentes codominios, se normalizarán ambas a un mismo codominio, $[0, 1]$, dividiéndolas por sus distancias máximas, $(\# X)^2 - \# X$ para la métrica de Kemeny (pág. 38) y $\# X$ para la métrica de Hamming (pág. 49).

2.88 Definición. Se definen las funciones

$$1. d_{PA}^K : PA(X) \times PA(X) \longrightarrow [0, 1]$$

$$d_{PA}^K((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = \frac{d^K(R_1, R_2)}{(\# X)^2 - \# X} = \frac{\#(R_1 \triangle R_2)}{(\# X)^2 - \# X}.$$

$$2. d_{PA}^H : PA(X) \times PA(X) \longrightarrow [0, 1]$$

$$d_{PA}^H((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = \frac{d^H(D_1, D_2)}{\# X} = \frac{\#(g(D_1) \triangle g(D_2))}{\# X}.$$

Estas funciones pueden utilizarse como distancias sobre $PA(X)$ tal y como se establece en la siguiente proposición.

2.89 Proposición.

$$1. d_{PA}^K \text{ es una distancia sobre } PA(X) \text{ y para cualesquiera } (R_1, D_1), (R_2, D_2) \in PA(X)$$

$$a) d_{PA}^K((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 0 \Leftrightarrow R_1 = R_2.$$

$$b) d_{PA}^K \text{ verifica la desigualdad triangular.}$$

2. d_{PA}^H es una distancia sobre $PA(X)$ y para cualesquiera $(R_1, D_1), (R_2, D_2) \in PA(X)$
 - a) $d_{PA}^H((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 0 \Leftrightarrow D_1 = D_2$.
 - b) d_{PA}^H verifica la desigualdad triangular.
3. d_{PA}^K y d_{PA}^H no son métricas sobre $PA(X)$.

Demostración. Sean $(R_1, D_1), (R_2, D_2) \in PA(X)$.

1. Puesto que d_{PA}^K es la métrica de Kemeny normalizada, las propiedades de no negatividad, simetría y reflexividad son obvias.
 - a) $d_{PA}^K((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 0 \Leftrightarrow d^K(R_1, R_2) = 0 \Leftrightarrow R_1 = R_2$.
 - b) d_{PA}^K hereda de la métrica de Kemeny la propiedad de desigualdad triangular.
2. Puesto que d_{PA}^H es la métrica de Hamming normalizada, las propiedades de no negatividad, simetría y reflexividad son obvias.
 - a) $d_{PA}^H((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 0 \Leftrightarrow d^H(D_1, D_2) = 0 \Leftrightarrow D_1 = D_2$.
 - b) d_{PA}^H hereda de la métrica de Hamming la propiedad de desigualdad triangular.
3. Sean $(R_1, D_1), (R_1, D_2), (R_2, D_1) \in PA(X)$ tales que $R_1 \neq R_2$ y $D_1 \neq D_2$. Entonces

$$d_{PA}^K((R_1, D_1), (R_1, D_2)) = d_{PA}^H((R_1, D_1), (R_2, D_1)) = 0.$$

Consecuentemente, d_{PA}^K y d_{PA}^H no verifican la identidad de indiscernibles y, por tanto, no son métricas. \square

En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo de distancias para un perfil de preferencias aprobatorias.

2.90 Ejemplo. Se consideran cuatro agentes que muestran sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mediante las preferencias aprobatorias representadas en la Figura 2.14.

Estas preferencias vienen codificadas por los pares siguientes:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{p}_{R_1} = (1, 2, 3.5, 3.5) & \mathbf{i}_{D_1} = (1, 1, 0, 0) \\ \mathbf{p}_{R_2} = (2, 1, 3.5, 3.5) & \mathbf{i}_{D_2} = (1, 1, 0, 0) \\ \mathbf{p}_{R_3} = (1, 2, 3.5, 3.5) & \mathbf{i}_{D_3} = (1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{p}_{R_4} = (3.5, 2, 1, 3.5) & \mathbf{i}_{D_4} = (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

La Tabla 2.6 muestra las distancias d_{PA}^K y d_{PA}^H entre las preferencias aprobatorias.

(R_1, D_1)	(R_2, D_2)	(R_3, D_3)	(R_4, D_4)
x_1	x_2	x_1	x_3
x_2	x_1	x_2	x_2
$x_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_1 x_4$

Figura 2.14: Representación del perfil del Ejemplo 2.90.

	d_{PA}^K	d_{PA}^H
$(R_1, D_1), (R_2, D_2)$	$\frac{2}{12}$	0
$(R_1, D_1), (R_3, D_3)$	0	$\frac{3}{12}$
$(R_1, D_1), (R_4, D_4)$	$\frac{8}{12}$	$\frac{6}{12}$
$(R_2, D_2), (R_3, D_3)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$
$(R_2, D_2), (R_4, D_4)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$
$(R_3, D_3), (R_4, D_4)$	$\frac{8}{12}$	$\frac{3}{12}$

Tabla 2.6: Distancias entre las preferencias aprobatorias del Ejemplo 2.90.

2.91 Observación. La distancia mínima entre los órdenes débiles del ejemplo anterior se obtiene entre las preferencias aprobatorias (R_1, D_1) y (R_3, D_3) puesto que coinciden en el orden de todas las alternativas. Por otro lado, la distancia máxima se obtiene entre las preferencias aprobatorias (R_1, D_1) y (R_4, D_4) que coincide con la distancia entre (R_3, D_3) y (R_4, D_4) , ya que en ambos casos sólo hay dos alternativas (x_2 y x_4) en las que coinciden estas preferencias aprobatorias.

Análogamente, respecto de las alternativas aceptadas y rechazadas, la distancia mínima se obtiene entre (R_1, D_1) y (R_2, D_2) , al coincidir en ambos casos el conjunto de alternativas aceptadas y rechazadas. En el lado opuesto, la distancia máxima se obtiene entre (R_1, D_1) y (R_4, D_4) , que coincide con la distancia entre (R_2, D_2) y (R_4, D_4) . Existe un desacuerdo en la aceptación de dos alternativas (x_1 y x_2).

2.92 Observación. A tenor de los datos de la Tabla 2.6, se puede plantear la siguiente pregunta: para las preferencias aprobatorias (R_2, D_2) y (R_3, D_3) , ¿cuál de ellas se puede considerar más próxima a (R_4, D_4) ?, ¿y cuál a (R_1, D_1) ?

La respuesta dependerá de la importancia que se desee dar a los desacuerdos en el orden de las alternativas frente a las discrepancias en las alternativas aceptadas.

El siguiente resultado establece un procedimiento que permite, a partir de dos distancias dadas, obtener una nueva distancia mediante una combinación convexa de las mismas.

2.93 Proposición. Dadas dos distancias $d_1, d_2 : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ la combinación convexa

$$\lambda d_1 + (1 - \lambda) d_2 : A \times A \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$(\lambda d_1 + (1 - \lambda) d_2)(a, b) = \lambda d_1(a, b) + (1 - \lambda) d_2(a, b),$$

también es una distancia.

Demostración. Se omite por ser rutinaria. \square

La siguiente proposición demuestra que a partir de dos distancias que no son métricas (d_{PA}^K y d_{PA}^H), es posible obtener, mediante una combinación convexa de las mismas, una métrica definida sobre el mismo conjunto en el que estaban definidas excepto para los valores degenerados $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

2.94 Proposición. Las funciones $d_{PA}^\lambda : PA(X) \times PA(X) \rightarrow [0, 1]$, definidas por

$$d_{PA}^\lambda((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = (\lambda d_{PA}^K + (1 - \lambda) d_{PA}^H)((R_1, D_1), (R_2, D_2)),$$

son métricas neutrales para cualquier $\lambda \in (0, 1)$. Si $\lambda \in \{0, 1\}$, entonces d_{PA}^λ no es una métrica.

Demostración.

- Sea $\lambda \in (0, 1)$.
 - Por la Proposición 2.93, d_{PA}^λ es una distancia.
 - d_{PA}^λ verifica la identidad de indiscernibles:

$$\begin{aligned} d_{PA}^\lambda((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda d_{PA}^K + (1 - \lambda) d_{PA}^H)((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\ \Leftrightarrow d_{PA}^K((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = d_{PA}^H((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\text{Proposición 2.89 (pág. 59)}) R_1 = R_2 \text{ y } D_1 = D_2. \end{aligned}$$

- d_{PA}^λ es una combinación convexa de distancias que verifican la desigualdad triangular (Proposición 2.89, pág. 59), por tanto, d_{PA}^λ también lo verifica.

- Por la Proposición 2.52 (pág. 37) la métrica de Kemeny es neutral. Del mismo modo, por la Observación 2.69 (pág. 49), también lo es la métrica de Hamming y, por tanto, es obvio que la combinación convexa $\lambda d_{PA}^K + (1 - \lambda) d_{PA}^H$ también satisface dicha propiedad.
- Si $\lambda \in \{0, 1\}$, $d_{PA}^0 = d_{PA}^H$ y $d_{PA}^1 = d_{PA}^K$. Puede comprobarse fácilmente que d_{PA}^λ no verifica la propiedad de identidad de indiscernibles. \square

2.95 Observación. Conviene señalar que si se suman dos distancias que combinan diferentes tipos de información hay que tener en cuenta dos cuestiones. La primera, que tiene carácter técnico, surge del hecho de que d^K y d^H tienen diferentes codominios para la agregación; la Definición 2.88 propone una solución. La segunda se planteó en la Observación 2.92. La elección del valor del parámetro λ determinará el peso asignado a la información proporcionada por los órdenes de las alternativas frente a las discrepancias presentes en la aceptabilidad.

2.96 Ejemplo. La Tabla 2.7 muestra los cambios que se producen en las distancias totales entre las preferencias aprobatorias del Ejemplo 2.90 (pág. 60) respecto de diferentes valores de λ .

	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.75$
$d_{PA}^\lambda((R_1, D_1), (R_2, D_2))$	0.04167	0.08333	0.125
$d_{PA}^\lambda((R_1, D_1), (R_3, D_3))$	0.1875	0.125	0.0625
$d_{PA}^\lambda((R_1, D_1), (R_4, D_4))$	0.54267	0.58333	0.625
$d_{PA}^\lambda((R_2, D_2), (R_3, D_3))$	0.22917	0.20833	0.1875
$d_{PA}^\lambda((R_2, D_2), (R_4, D_4))$	0.5	0.5	0.5
$d_{PA}^\lambda((R_3, D_3), (R_4, D_4))$	0.35417	0.4583	0.5625

Tabla 2.7: Distancias entre las preferencias aprobatorias del Ejemplo 2.90.

Puede observarse que para $\lambda = 0.25$ la preferencia aprobatoria cuya distancia es mínima a (R_1, D_1) es (R_2, D_2) . Sin embargo, para $\lambda = 0.75$ el resultado cambia a (R_3, D_3) . Esto es debido a que cuando $\lambda = 0.25$ se está aplicando mayor peso a d_{PA}^H que a d_{PA}^K , por lo que los desacuerdos en el conjunto de alternativas aceptadas son más importantes que los desacuerdos en el orden de las alternativas. El efecto inverso se produce cuando $\lambda = 0.75$. Otro ejemplo donde se produce un cambio similar en la distancia, dependiendo del valor de λ , se presenta para la preferencia aprobatoria (R_4, D_4) . Cuando $\lambda = 0.25$ la preferencia aprobatoria más próxima es (R_3, D_3) , mientras que para $\lambda = 0.75$ el resultado cambia a (R_2, D_2) .

2.5.3.2. Distancias sobre preferencias aprobatorias ponderadas

Las métricas de Kemeny-Hamming sobre preferencias aprobatorias permiten establecer el peso que se asigna a las discrepancias en el orden de las alternativas frente a las discrepancias en las alternativas aceptadas, en función de un parámetro λ escogido. Estas distancias no diferencian si las discrepancias se producen entre alternativas aceptadas o rechazadas, ni tampoco en qué posición se producen las diferencias en el orden de las alternativas.

Dado que se han definido distancias entre órdenes débiles (Definición 2.57, pág. 41) y entre órdenes dicotómicos (Definición 2.73, pág. 53), que sí recogen estas circunstancias, se va a proceder a definir nuevas distancias a partir de combinaciones convexas de las mismas que sean sensibles a dónde se producen los desacuerdos.

En primer lugar, se normalizará la distancia de Kemeny ponderada para que su codominio coincida con el de las distancias dicotómicas ponderadas.

2.97 Definición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. La *distancia de Kemeny ponderada normalizada* asociada a \mathbf{w} es la función $d^{K,\mathbf{w}} : W(X) \times W(X) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$d^{K,\mathbf{w}}(R_1, R_2) = \frac{1}{\Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}} \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_1, R_2),$$

donde $\Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ es la distancia máxima entre dos órdenes débiles (Proposición 2.58, pág. 42).

La distancia de Kemeny ponderada normalizada definida sobre órdenes débiles, así como las distancias dicotómicas ponderadas, pueden extenderse a preferencias aprobatorias como puede verse a continuación.

2.98 Definición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. Se definen las siguientes funciones

1. $d_{PA}^{K,\mathbf{w}} : PA(X) \times PA(X) \rightarrow [0, 1]$

$$d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = d^{K,\mathbf{w}}(R_1, R_2).$$

2. $d_{PA}^+ : PA(X) \times PA(X) \rightarrow [0, 1]$

$$d_{PA}^+((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = d^+(D_1, D_2).$$

3. $d_{PA}^- : PA(X) \times PA(X) \rightarrow [0, 1]$

$$d_{PA}^-((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = d^-(D_1, D_2).$$

4. Dado $\lambda \in [0, 1]$, $d_{PA}^{\pm\lambda} : PA(X) \times PA(X) \longrightarrow [0, 1]$

$$d_{PA}^{\pm\lambda}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = (\lambda d_{PA}^+ + (1 - \lambda) d_{PA}^-)((R_1, D_1), (R_2, D_2)).$$

2.99 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. Para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ se verifica:

1. $d_{PA}^{K,\mathbf{w}}$, d_{PA}^+ , d_{PA}^- y $d_{PA}^{\pm\lambda}$ son distancias neutrales sobre $PA(X)$.
2. $d_{PA}^{K,\mathbf{w}}$, d_{PA}^+ , d_{PA}^- y $d_{PA}^{\pm\lambda}$ no verifican la identidad de indiscernibles.
3. $d_{PA}^{K,\mathbf{w}}$, d_{PA}^+ , d_{PA}^- y $d_{PA}^{\pm\lambda}$ no verifican la desigualdad triangular.

Demostración.

1. $d_{PA}^{K,\mathbf{w}}$ es una distancia neutral por la Proposición 2.58 (pág. 42). Por otro lado, por la Proposición 2.74 (pág. 53), d_{PA}^+ , d_{PA}^- y $d_{PA}^{\pm\lambda}$ son distancias neutrales para cualquier $\lambda \in [0, 1]$.
2. Sean $(R_1, D_1), (R_1, D_2), (R_2, D_1) \in PA(X)$ tales que $R_1 \neq R_2$ y $D_1 \neq D_2$, entonces

$$\begin{aligned} d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_1, D_2)) &= d^{K,\mathbf{w}}(R_1, R_1) = 0. \\ d_{PA}^+((R_1, D_1), (R_2, D_1)) &= d^+(D_1, D_1) = 0. \\ d_{PA}^-((R_1, D_1), (R_2, D_1)) &= d^-(D_1, D_1) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} d_{PA}^{\pm\lambda}((R_1, D_1), (R_2, D_1)) &= \\ \lambda d_{PA}^+((R_1, D_1), (R_2, D_1)) + (1 - \lambda) d_{PA}^-((R_1, D_1), (R_2, D_1)) &= 0. \end{aligned}$$

3. Por la Proposición 2.58 (pág. 42), $d_{PA}^{K,\mathbf{w}}$ no verifica la desigualdad triangular. El mismo resultado se obtiene para d_{PA}^+ , d_{PA}^- y $d_{PA}^{\pm\lambda}$ por la Proposición 2.74 (pág. 53). \square

A partir de las distancias introducidas en la Definición 2.98, y mediante una combinación convexa de las mismas, es posible obtener una distancia ponderada sobre preferencias aprobatorias que sea sensible tanto a los desacuerdos que se produzcan en el orden de las alternativas como a los que se produzcan en las alternativas aceptadas o en las rechazadas.

2.100 Definición. Sean $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$ y $\lambda, \alpha \in [0, 1]$. Se definen las siguientes funciones

1. $d_{PA}^{\lambda+\mathbf{w}} : PA(X) \times PA(X) \longrightarrow [0, 1]$

$$d_{PA}^{\lambda+\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = (\lambda d_{PA}^+ + (1-\lambda) d_{PA}^{K,\mathbf{w}})((R_1, D_1), (R_2, D_2)).$$
2. $d_{PA}^{\lambda-\mathbf{w}} : PA(X) \times PA(X) \longrightarrow [0, 1]$

$$d_{PA}^{\lambda-\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = (\lambda d_{PA}^- + (1-\lambda) d_{PA}^{K,\mathbf{w}})((R_1, D_1), (R_2, D_2)).$$
3. $d_{PA}^{\lambda\pm\alpha\mathbf{w}} : PA(X) \times PA(X) \longrightarrow [0, 1]$

$$d_{PA}^{\lambda\pm\alpha\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = (\lambda d_{PA}^{\pm\alpha} + (1-\lambda) d_{PA}^{K,\mathbf{w}})((R_1, D_1), (R_2, D_2)).$$

2.101 Proposición. Sean $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$ y $\lambda, \alpha \in [0, 1]$.

1. $d_{PA}^{\lambda+\mathbf{w}}$, $d_{PA}^{\lambda-\mathbf{w}}$ y $d_{PA}^{\lambda\pm\alpha\mathbf{w}}$ son distancias neutrales sobre $PA(X)$.
2. Si $\lambda \in (0, 1)$, entonces $d_{PA}^{\lambda+\mathbf{w}}$, $d_{PA}^{\lambda-\mathbf{w}}$ y $d_{PA}^{\lambda\pm\alpha\mathbf{w}}$ verifican la identidad de indiscernibles.
3. Si $\lambda \in \{0, 1\}$, entonces $d_{PA}^{\lambda+\mathbf{w}}$, $d_{PA}^{\lambda-\mathbf{w}}$ y $d_{PA}^{\lambda\pm\alpha\mathbf{w}}$ no verifican la identidad de indiscernibles.
4. $d_{PA}^{\lambda+\mathbf{w}}$, $d_{PA}^{\lambda-\mathbf{w}}$ y $d_{PA}^{\lambda\pm\alpha\mathbf{w}}$ no verifican la desigualdad triangular.

Demostración.

1. Por la Proposición 2.99, $d_{PA}^{K,\mathbf{w}}$, d_{PA}^+ , d_{PA}^- y $d_{PA}^{\pm\alpha}$ son distancias neutrales, y es obvio que cualquier combinación convexa de las mismas también es distancia y satisface la propiedad de neutralidad.
2. Sea $\lambda \in (0, 1)$.

a)

$$\begin{aligned} d_{PA}^{\lambda+\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda d_{PA}^+((R_1, D_1), (R_2, D_2)) \\ &\quad + (1-\lambda) d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 0 \\ \Leftrightarrow d_{PA}^+((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= \\ d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\ \Leftrightarrow R_1 = R_2 \text{ y } D_1 = D_2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
d_{PA}^{\lambda-\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\
\Leftrightarrow \lambda d_{PA}^-((R_1, D_1), (R_2, D_2)) \\
&\quad + (1 - \lambda) d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 0 \\
\Leftrightarrow d_{PA}^-((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= \\
d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\
\Leftrightarrow R_1 = R_2 \text{ y } D_1 = D_2.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
d_{PA}^{\lambda\pm\alpha\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\
\Leftrightarrow \lambda d_{PA}^{\pm\alpha}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) \\
&\quad + (1 - \lambda) d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 0 \\
\Leftrightarrow d_{PA}^{\pm\alpha}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= \\
d_{PA}^{K,\mathbf{w}}((R_1, D_1), (R_2, D_2)) &= 0 \\
\Leftrightarrow R_1 = R_2 \text{ y } D_1 = D_2.
\end{aligned}$$

3. Sea $\lambda \in \{0, 1\}$.

- Si $\lambda = 1$, entonces $d_{PA}^{1+\mathbf{w}} = d_{PA}^+$, $d_{PA}^{1-\mathbf{w}} = d_{PA}^-$ y $d_{PA}^{1\pm\alpha\mathbf{w}} = d_{PA}^{\pm\alpha}$.
- Si $\lambda = 0$, entonces $d_{PA}^{0+\mathbf{w}} = d_{PA}^{0-\mathbf{w}} = d_{PA}^{0\pm\alpha\mathbf{w}} = d_{PA}^{K,\mathbf{w}}$.

Por la Proposición 2.99 (pág. 65) no verifican la identidad de indiscernibles.

4. Por la Proposición 2.99 (pág. 65). □

Capítulo 3

Medidas de consenso

En este capítulo¹ se extiende el concepto de medida de consenso desarrollado por Bosch [19] al contexto de órdenes débiles, órdenes dicotómicos y preferencias aprobatorias, y se consideran algunas propiedades adicionales que pueden verificar dichas medidas: *máximo disenso* (en cada subconjunto de dos agentes, el mínimo consenso es alcanzado únicamente cuando las preferencias de los agentes vienen dadas por órdenes lineales y una preferencia es la inversa de la otra), *reciprocidad* (si todos los agentes invierten sus preferencias, entonces el consenso no varía) y *homogeneidad* (si se replican las preferencias de los agentes, entonces el consenso en ese nuevo grupo no varía). También se introducen nuevas medidas de consenso basadas en la distancia entre los órdenes débiles y órdenes dicotómicos que representan la elección de cada agente, prestando especial atención a las distancias y métricas enunciadas en los capítulos anteriores.

¹Puede verse un estudio preliminar en García Lapresta y Pérez Román [50].

3.1. Medidas de consenso sobre órdenes débiles

El concepto de medida de consenso ha sido introducido y analizado por Bosch [19] en el contexto de órdenes lineales. En este trabajo se extenderá al contexto de órdenes débiles.

3.1 Notación. Dado un conjunto de agentes V , con $\mathcal{P}(V)$ se denotará al conjunto potencia de V (partes de V), es decir, $I \in \mathcal{P}(V) \Leftrightarrow I \subseteq V$; y con $\mathcal{P}_2(V)$ al conjunto de todos los subconjuntos de V que contienen al menos dos elementos, es decir, $\mathcal{P}_2(V) = \{I \in \mathcal{P}(V) \mid \#I \geq 2\}$.

3.2 Observación. Nótese que si $\#V = n$, entonces $\#\mathcal{P}(V) = 2^n$ y $\#\mathcal{P}_2(V) = \#\mathcal{P}(V) - \#V - 1 = 2^n - n - 1$.

3.3 Notación. Dados un subconjunto no vacío de agentes $I \subseteq V$ y una permutación $\pi \in S_m$, con I_π se denotará al conjunto $I_\pi = \{v_{\pi^{-1}(i)} \mid v_i \in I\}$, es decir, $v_j \in I_\pi \Leftrightarrow v_{\pi(j)} \in I$.

3.4 Ejemplo. Si se considera el subconjunto de agentes $I = \{v_1, v_3\}$ y la permutación $\pi \in S_4$ del Ejemplo 2.6 (pág. 22), entonces $I_\pi = \{v_3, v_4\}$ ya que $\pi(3) = 3$ y $\pi(4) = 1$.

3.5 Definición. Una *medida de consenso* sobre $W(X)^m$ es una función

$$\mathcal{M} : W(X)^m \times \mathcal{P}_2(V) \longrightarrow [0, 1]$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. *Unanimidad.* Para cualesquiera $\mathbf{R} \in W(X)^m$ e $I \in \mathcal{P}_2(V)$, se verifica

$$\mathcal{M}(\mathbf{R}, I) = 1 \Leftrightarrow R_i = R_j \text{ para cualesquiera } v_i, v_j \in I.$$

2. *Anonimato.* Para cualesquiera $\mathbf{R} \in W(X)^m$, $I \in \mathcal{P}_2(V)$ y $\pi \in S_m$, se verifica

$$\mathcal{M}(\mathbf{R}_\pi, I_\pi) = \mathcal{M}(\mathbf{R}, I).$$

3. *Neutralidad.* Para cualesquiera $\mathbf{R} \in W(X)^m$, $I \in \mathcal{P}_2(V)$ y $\sigma \in S_n$, se verifica

$$\mathcal{M}(\mathbf{R}^\sigma, I) = \mathcal{M}(\mathbf{R}, I).$$

Unanimidad significa que el máximo consenso en cualquier subconjunto de agentes sólo es alcanzado cuando todas las opiniones coinciden.

Anonimato exige simetría respecto de los agentes, es decir, si se renombran los agentes de cualquier subconjunto $I \in \mathcal{P}_2(V)$, la medida de consenso no varía.

Neutralidad significa simetría respecto de las alternativas, es decir, si se renombran las alternativas, la medida de consenso no varía.

Las propiedades enunciadas son necesarias para que una función sea considerada medida de consenso, ahora bien, puede que una medida de consenso verifique otras propiedades que si bien no son necesarias, sí pueden tener relevancia según el contexto.

3.6 Definición. Sea $\mathcal{M} : W(X)^m \times \mathcal{P}_2(V) \rightarrow [0, 1]$ una medida de consenso.

1. \mathcal{M} satisface *máximo disentimiento* si para cualesquiera $\mathbf{R} \in W(X)^m$ y $v_i, v_j \in V$ tales que $i \neq j$, se verifica

$$\mathcal{M}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}) = 0 \Leftrightarrow (R_i, R_j \in L(X) \text{ y } R_j = R_i^{-1}).$$

2. \mathcal{M} es *recíproca* si para cualesquiera $\mathbf{R} \in W(X)^m$ e $I \in \mathcal{P}_2(V)$, se verifica

$$\mathcal{M}(\mathbf{R}^{-1}, I) = \mathcal{M}(\mathbf{R}, I).$$

3. \mathcal{M} es *homogénea* si para cualesquiera $\mathbf{R} \in W(X)^m$, $I \in \mathcal{P}_2(V)$ y $t \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\mathcal{M}^t(t\mathbf{R}, tI) = \mathcal{M}(\mathbf{R}, I),$$

donde $\mathcal{M}^t : W(X)^{tm} \times \mathcal{P}_2(tV) \rightarrow [0, 1]$, $t\mathbf{R} = (\mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}) \in W(X)^{tm}$ es el perfil de preferencias definido por t copias de \mathbf{R} y $tI = I \uplus \dots \uplus I$ es el multiconjunto de agentes² definido por t copias de I .

Máximo disentimiento significa que en cada subconjunto formado por dos agentes³, el mínimo consenso solo es alcanzado cuando las preferencias de los agentes son órdenes lineales y una es la inversa de la otra.

La reciprocidad conlleva que si todos los agentes invierten sus preferencias (se invierten los órdenes débiles que representan sus preferencias), entonces la medida de consenso no varía.

Por último, cuando se verifica homogeneidad, si se replica cualquier número de veces las preferencias de un subconjunto de agentes, entonces la medida de consenso en el nuevo grupo no varía.

Conviene destacar que reciprocidad y homogeneidad son propiedades que no tienen por qué ser deseables. Bajo reciprocidad, las discrepancias en las

²Lista de agentes donde cada agente se repite tantas veces como indique la multiplicidad. Por ejemplo, $2\{v_1, v_2\} = \{v_1, v_2\} \uplus \{v_1, v_2\} = \{v_1, v_2, v_1, v_2\}$.

³Es claro que una sociedad alcanza el máximo consenso cuando todas las opiniones coinciden. Sin embargo, en una sociedad con más de dos miembros, no es tan obvio determinar cuándo hay mínimo consenso (o máximo desacuerdo).

preferencias de las alternativas más deseadas tienen el mismo efecto que si esas discrepancias se producen en las alternativas peor valoradas. Por otra parte, si se cumple homogeneidad, en una sociedad polarizada en dos grupos del mismo número de agentes con preferencias opuestas el uno del otro el consenso es siempre nulo (véase la nota al pie 3).

La siguiente definición presenta una propuesta de medida de consenso en el ámbito de órdenes débiles.

3.7 Definición. Dada una distancia $d : W(X) \times W(X) \rightarrow \mathbb{R}$, se define la función

$$\mathcal{M}_d : W(X)^m \times \mathcal{P}_2(V) \rightarrow [0, 1]$$

$$\mathcal{M}_d(\mathbf{R}, I) = 1 - \frac{\sum_{\substack{v_i, v_j \in I \\ i < j}} d(R_i, R_j)}{\binom{\#I}{2} \cdot \Delta_n^d}, \quad (3.1)$$

donde

$$\Delta_n^d = \max \{d(R_i, R_j) \mid R_i, R_j \in W(X)\}.$$

3.8 Observación. El numerador del cociente de la expresión (3.1), es la suma de todas las distancias entre todos los órdenes débiles del conjunto I , y el denominador es el número de sumandos en el numerador multiplicado por la distancia máxima posible entre órdenes débiles. Consecuentemente, el cociente pertenece al intervalo unidad y proporciona una medida del desacuerdo existente entre los órdenes del conjunto I .

Para que la función \mathcal{M}_d sea una medida de consenso es necesario que cumpla las condiciones enunciadas en la Definición 3.5 (pág. 70). Ahora bien, puesto \mathcal{M}_d queda caracterizada por la distancia d elegida, será necesario analizar qué condiciones debe cumplir esa distancia para que \mathcal{M}_d sea una medida de consenso.

3.9 Proposición. Para cualquier distancia $d : W(X) \times W(X) \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{M}_d satisface anonimato.

Demostración. Sea $\pi \in S_m$. Si $v_i, v_j \in I_\pi$, entonces, por la Notación 3.3 (pág. 70), $v_{\pi(i)}, v_{\pi(j)} \in I$, luego

$$\sum_{\substack{v_i, v_j \in I_\pi \\ i < j}} d(R_{\pi(i)}, R_{\pi(j)}) = \sum_{\substack{v_{\pi(i)}, v_{\pi(j)} \in I \\ \pi(i) < \pi(j)}} d(R_{\pi(i)}, R_{\pi(j)}) = \sum_{\substack{v_i, v_j \in I \\ i < j}} d(R_i, R_j).$$

Por tanto, $\mathcal{M}_d(\mathbf{R}_\pi, I_\pi) = \mathcal{M}_d(\mathbf{R}, I)$.

□

3.10 Proposición. Para cualquier distancia $d : W(X) \times W(X) \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{M}_d satisface unanimidad si y sólo si d verifica la identidad de indiscernibles.

Demostración. Sean $V = \{v_1, v_2\}$ y $\mathbf{R} = (R_1, R_2) \in W(X)^2$. Si \mathcal{M}_d satisface unanimidad, entonces, por la Definición 3.5 (pág. 70),

$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbf{R}, V) = 1 \Leftrightarrow d(R_1, R_2) = 0.$$

Recíprocamente, si d verifica la identidad de indiscernibles, entonces para cualesquiera $\mathbf{R} \in W(X)^m$, $I \in \mathcal{P}_2(V)$ y $v_i, v_j \in I$,

$$\mathcal{M}_d(\mathbf{R}, I) = 1 \Leftrightarrow d(R_i, R_j) = 0 \Leftrightarrow R_i = R_j. \quad \square$$

3.11 Proposición. Si $d : W(X) \times W(X) \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia neutral y verifica la identidad de indiscernibles, entonces \mathcal{M}_d es una medida de consenso.

Demostración. Por las Proposiciones 3.9 y 3.10, \mathcal{M}_d satisface anonimato y unanimidad. Obviamente, si d es neutral, entonces \mathcal{M}_d es neutral y, por tanto, \mathcal{M}_d es una medida de consenso. \square

3.12 Observación. Los resultados anteriores establecen que a partir de cualquier distancia d definida sobre $W(X)$ que verifique neutralidad y la identidad de indiscernibles, es posible obtener una medida de consenso \mathcal{M}_d a la que se denominará *medida de consenso asociada a d* .

Dado que los órdenes débiles pueden codificarse mediante vectores de $A^W \subset \mathbb{R}^n$ (Sección 2.2.2, pág. 25), a partir de una distancia d definida sobre \mathbb{R}^n puede considerarse la función $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ asociada a la distancia \bar{d} inducida por d .

3.13 Proposición. Si $d : A^W \times A^W \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia neutral y verifica la identidad de indiscernibles, entonces $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ es una medida de consenso.

Demostración. Se omite por ser rutinaria. \square

3.14 Observación. Este resultado establece que a partir de cualquier distancia neutral definida sobre \mathbb{R}^n puede obtenerse una medida de consenso sobre $W(X)$ siempre que la distancia verifique la identidad de indiscernibles.

3.1.1. Medidas de consenso basadas en métricas

En la Sección 1.1 (pág. 10), se enunciaron las métricas utilizadas habitualmente sobre \mathbb{R}^n , las cuales verifican neutralidad y la identidad de indiscernibles. Por tanto, las funciones $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ asociadas son medidas de consenso.

El siguiente objetivo consistirá en determinar qué otras propiedades, como las enunciadas en la Definición 3.6 (pág. 71), verifican las medidas de consenso obtenidas a partir de diferentes distancias.

Máximo disentimiento

Cuando todas las preferencias coinciden, es decir, existe unanimidad, es obvio que la medida de consenso es máxima e igual a 1. Sin embargo, no resulta evidente determinar si es posible obtener la medida de consenso mínima y cuándo se obtiene.

Como se verá a continuación, la existencia de máximo disentimiento va a depender de la métrica utilizada para obtener la medida de consenso.

3.15 Proposición. Si \bar{d} es la métrica inducida por la métrica discreta (d'), Manhattan (d_1) o Chebyshev (d_∞), entonces $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ no satisface la propiedad de máximo disentimiento.

Demostración. Sea el perfil de órdenes lineales $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3) \in L(X)^3$, con $R_3 = R_1^{-1}$, representados en la Figura 3.1.

R_1	R_2	R_1^{-1}
x_1	x_3	x_3
x_2	x_1	x_2
x_3	x_2	x_1

Figura 3.1: Representación del perfil \mathbf{R} .

Estos órdenes vienen codificados por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{R_1} &= (1, 2, 3), \\ \mathbf{p}_{R_2} &= (2, 3, 1), \\ \mathbf{p}_{R_1^{-1}} &= (3, 2, 1). \end{aligned}$$

1. Caso \bar{d}' .

$$\bar{d}'(R_1, R_2) = d'(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}) = 1 = d'(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_1^{-1}}) = \bar{d}'(R_1, R_1^{-1}) = \Delta_n^{\bar{d}'},$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{d}'}(\mathbf{R}, \{v_1, v_2\}) &= \\ 1 - \frac{d'(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2})}{\binom{2}{2} \cdot 1} &= 1 - \frac{d'(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_1^{-1}})}{\binom{2}{2} \cdot 1} = 0 \\ &= \mathcal{M}_{\bar{d}'}(\mathbf{R}, \{v_1, v_3\}). \end{aligned}$$

2. Caso \bar{d}_1 .

$$\begin{aligned} \bar{d}_1(R_1, R_2) &= d_1(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}) = d_1(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_1^{-1}}) \\ &= d_1(R_1, R_1^{-1}) = 4 = \Delta_n^{\bar{d}_1}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{d}_1}(\mathbf{R}, \{v_1, v_2\}) &= \\ 1 - \frac{d_1(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2})}{\binom{2}{2} \cdot 4} &= 1 - \frac{d_1(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_1^{-1}})}{\binom{2}{2} \cdot 4} = 0 \\ &= \mathcal{M}_{\bar{d}_1}(\mathbf{R}, \{v_1, v_3\}). \end{aligned}$$

3. Caso \bar{d}_∞ .

$$\begin{aligned} \bar{d}_\infty(R_1, R_2) &= d_\infty(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2}) = d_\infty(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_1^{-1}}) \\ &= d_\infty(R_1, R_1^{-1}) = 2 = \Delta_n^{\bar{d}_\infty}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{d}_\infty}(\mathbf{R}, \{v_1, v_2\}) &= \\ 1 - \frac{d_\infty(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_2})}{\binom{2}{2} \cdot 2} &= 1 - \frac{d_\infty(\mathbf{p}_{R_1}, \mathbf{p}_{R_1^{-1}})}{\binom{2}{2} \cdot 2} = 0 \\ &= \mathcal{M}_{\bar{d}_\infty}(\mathbf{R}, \{v_1, v_3\}). \end{aligned}$$

En los tres casos existen dos preferencias cuya medida de consenso es cero a pesar de que no son inversas la una de la otra. Por tanto, las medidas de consenso asociadas a estas distancias no verifican máximo disentimiento. \square

A continuación se estudiará qué ocurre si las métricas consideradas son la euclídea (d_2), coseno (d_c), Hellinger (d_{Hg}) y Kemeny (d_K).

El siguiente resultado establece que para estas métricas nunca se alcanza la distancia máxima entre órdenes débiles cuando uno de los órdenes no es lineal.

3.16 Proposición. Sean $R_1 \in W(X) \setminus L(X)$ y $R_2 \in W(X)$. Si \bar{d} es la métrica inducida por d_2 , d_c , d_{Hg} o d_K , entonces existe $R' \in W(X)$ tal que $\bar{d}(R_1, R_2) < \bar{d}(R', R_2)$.

Demostración. Sean $R_1 \in W(X) \setminus L(X)$ y $R_2, R' \in W(X)$ codificados por los vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{a}' , respectivamente.

Si $R_1 \in W(X) \setminus L(X)$, entonces, existen al menos dos componentes de \mathbf{a} cuyos valores coinciden, es decir, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\# M_i(R_1) > 1$.

Por otro lado, por la Proposición 2.45 (pág. 33), existe $\sigma \in S_n$ tal que $(R_1^\sigma, R_2^\sigma) \in W_{\leq R_1}(X)$, es decir, el par (R_1^σ, R_2^σ) está bien ordenado respecto de R_1 (Definición 2.41, pág. 31).

Si se tiene en cuenta que todas las métricas consideradas son neutrales (Observación 2.48, pág. 35), puede suponerse sin pérdida de generalidad:

- $\mathbf{a} = (1, \dots, j-1, a_j, \dots, a_{j+k-1}, \dots, a_n) \equiv R_1 \in W_{\leq}(X)$. Además, $j = \min\{i \mid \# M_i(R_1) > 1\}$, $\# M_j(R_1) = k$ y $a_j = \dots = a_{j+k-1} = j + \frac{k-1}{2}$, es decir, \mathbf{a} está ordenado y las primeras componentes que se repiten comienzan en a_j y finalizan en a_{j+k-1} .
- $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_{j+k-1}, \dots, b_n) \equiv R_2 \in W(X)$ con $b_j \geq \dots \geq b_{j+k-1}$. (3.2)

Sean $\mathbf{a}' = (1, \dots, j-1, j, \dots, j+k-1, a_{j+k}, \dots, a_n) \equiv R_3$ y

$$t = \begin{cases} \frac{k-1}{2} - 1, & \text{si } k \text{ es impar,} \\ \frac{k-1}{2} - \frac{1}{2}, & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.3)$$

1. Caso \bar{d}_2 .

$$\begin{aligned} \bar{d}_2(R_1, R_2) < \bar{d}_2(R', R_2) &\Leftrightarrow 0 < (\bar{d}_2(R', R_2))^2 - (\bar{d}_2(R_1, R_2))^2 \Leftrightarrow \\ &0 < \sum_{i=1}^n (a'_i - b_i)^2 - (a_i - b_i)^2 = \\ &\sum_{l=0}^{k-1} (j+l - b_{j+l})^2 - \left(j + \frac{k-1}{2} - b_{j+l}\right)^2 = \\ &\sum_{l=0}^t \left((j+l - b_{j+l})^2 - \left(j + \frac{k-1}{2} - b_{j+l}\right)^2 \right) \\ &\quad + \left((j+(k-1)-l - b_{j+k-1-l})^2 - \left(j + \frac{k-1}{2} - b_{j+k-1-l}\right)^2 \right) \\ &= 2 \sum_{l=0}^t \left(l - \frac{k-1}{2} \right)^2 + (b_{j+l} - b_{j+k-1-l}) \left(\frac{k-1}{2} - l \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por (3.3), para cualquier $l \in \{0, \dots, t\}$, $\frac{k-1}{2} > l$, y $k-1-l > l$, luego $b_{j+l} - b_{j+k-1-l} \geq 0$ (por (3.2)).

Por tanto, la expresión (3.4) es positiva. En consecuencia,

$$\bar{d}_2(R_1, R_2) < \bar{d}_2(R', R_2).$$

2. Caso \bar{d}_c .

Sea $\|R\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$, con $R \equiv (a_1, \dots, a_n)$.

$$\begin{aligned} \|R'\|^2 - \|R_1\|^2 &= \sum_{i=1}^n ((a'_i)^2 - (a_i)^2) = \\ &= \sum_{l=0}^t (j+l)^2 - \left(j + \frac{k-1}{2}\right)^2 + (j + (k-1) - l)^2 - \left(j + \frac{k-1}{2}\right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{k-1}{2} - l\right)^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por tanto, $\|R'\| > \|R_1\|$.

$$\begin{aligned} \bar{d}_c(R', R_2) - \bar{d}_c(R_1, R_2) &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (a_i b_i)}{\|R_1\| \|R_2\|} - \frac{\sum_{i=1}^n (a'_i b_i)}{\|R'\| \|R_2\|} \\ &\stackrel{\text{por (3.5)}}{>} \frac{1}{\|R_1\| \|R_2\|} \left(\sum_{i=1}^n (a_i b_i - a'_i b_i) \right). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i b_i - a'_i b_i) &= \\ &= \sum_{l=0}^t \left(j + \frac{k-1}{2}\right) b_{j+l} - (j+l) b_{j+l} \\ &\quad + \left(j + \frac{k-1}{2}\right) b_{j+k-1-l} - (j + (k-1) + l) b_{j+k-1-l} \\ &= \sum_{l=0}^t b_{j+l} \left(\frac{k-1}{2} + l\right) + b_{j+k-1-l} \left(l - \frac{k-1}{2}\right). \end{aligned}$$

Por (3.3), para cualquier $l \in \{0, \dots, t\}$, $\frac{k-1}{2} > l$, y $k-1-l > l$, luego $b_{j+l} \geq b_{j+k-1-l}$ (por (3.2)).

Entonces,

$$\sum_{i=1}^n (a_i b_i - a'_i b_i) \geq 2 \sum_{l=0}^t l b_{j+k-1-l} \geq 0,$$

y, por tanto, $\bar{d}_c(R', R_2) - \bar{d}_c(R_1, R_2) > 0$. En consecuencia,

$$\bar{d}_c(R_1, R_2) < \bar{d}_c(R', R_2).$$

3. Caso \bar{d}_{Hg} .

$$\bar{d}_{Hg}(R_1, R_2) < \bar{d}_{Hg}(R', R_2) \Leftrightarrow 0 < (\bar{d}_{Hg}(R', R_2))^2 - (\bar{d}_{Hg}(R_1, R_2))^2$$

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{a'_i} - \sqrt{b_i} \right)^2 - \left(\sqrt{a_i} - \sqrt{b_i} \right)^2 &= \\ \sum_{l=0}^t \left(\sqrt{j+l} - \sqrt{b_{j+l}} \right)^2 - \left(\sqrt{j + \frac{k-1}{2}} - \sqrt{b_{j+l}} \right)^2 & \\ + \left(\sqrt{(j+k-1)-l} - \sqrt{b_{j+k-1-l}} \right)^2 & \\ - \left(\sqrt{j + \frac{k-1}{2}} - \sqrt{b_{j+k-1-l}} \right)^2 &= \\ 2 \sum_{l=0}^t \sqrt{b_{j+l}} \left(\sqrt{j + \frac{k-1}{2}} - \sqrt{j+l} \right) & \\ + \sqrt{b_{j+k-1-l}} \left(\sqrt{j+k-1} - \sqrt{j+k-1-l} \right). & \end{aligned}$$

y puesto que $l < \frac{k-1}{2}$ (por (3.3)), entonces

$$\bar{d}_{Hg}(R_1, R_2) < \bar{d}_{Hg}(R', R_2).$$

4. Caso d^K .

$$d^K(R_1, R_2) = \sum_{\substack{i,h=1 \\ i < h}}^n |\operatorname{sgn}(a_i - a_h) - \operatorname{sgn}(b_i - b_h)|.$$

$$d^K(R', R_2) = \sum_{\substack{i, h=1 \\ i < h}}^n |\operatorname{sgn}(a'_i - a'_h) - \operatorname{sgn}(b_i - b_h)|.$$

$$|\operatorname{sgn}(a_i - a_h) - \operatorname{sgn}(b_i - b_h)| =$$

$$= \begin{cases} |\operatorname{sgn}(a'_i - a'_h) - \operatorname{sgn}(b_i - b_h)|, & \text{si } \{i, h\} \not\subseteq M_j(R), \\ |-\operatorname{sgn}(b_i - b_h)|, & \text{si } \{i, h\} \subseteq M_j(R). \end{cases}$$

Ahora bien, si $\{i, h\} \subseteq M_j(R)$, se tiene $b_i \geq b_h$ y $a'_i < a'_h$, entonces $-\operatorname{sgn}(b_i - b_h) \in \{0, -1\}$, luego

$$|-\operatorname{sgn}(b_i - b_h)| < |1 - \operatorname{sgn}(b_i - b_h)| = |\operatorname{sgn}(a'_i - a'_h) - \operatorname{sgn}(b_i - b_h)|.$$

Por tanto, $d^K(R_1, R_2) < d^K(R', R_2)$. \square

En el siguiente ejemplo se muestra de forma práctica el proceso utilizado para la demostración de la Proposición 3.16.

3.17 Ejemplo. Sean $R_1, R_2 \in W(X)$ los órdenes del Ejemplo 2.38 (pág. 30) codificados por los vectores

$$\mathbf{p}_{R_1} = (1.5, 4, 6, 1.5, 6, 6, 3),$$

$$\mathbf{p}_{R_2} = (4, 2, 2, 5.5, 2, 7, 5.5).$$

En el Ejemplo 2.46 (pág. 33) se renombraron las alternativas según la permutación $\pi \in S_7$ representada en (2.4) (pág. 34) obteniendo los órdenes codificados por los vectores

$$\mathbf{p}_{R_1^\pi} = (1.5, 1.5, 3, 4, 6, 6, 6),$$

$$\mathbf{p}_{R_2^\pi} = (5.5, 4, 5.5, 2, 7, 2, 2),$$

verificando $(R_1^\pi, R_2^\pi) \in W_{\leq R_1}(X)$.

Si $\mathbf{a} = \mathbf{p}_{R_1^\pi} \in W_{\leq}(X)$, se tiene

- $j = \min\{i \mid \# M_i(R_1^\pi) > 1\} = 1.$
- $\# M_1(R_1^\pi) = 2.$
- $a_1 = a_2 = 1 + \frac{2-1}{2} = 1.5.$

Si $\mathbf{b} = \mathbf{p}_{R_2^\pi}$, se verifica $b_1 \geq b_2$.

Sea $\mathbf{a}' = (1, 2, 3, 4, 6, 6, 6) \equiv R'$, entonces

1. $\bar{d}_2(R_1^\pi, R_2^\pi) = 8.0932 < 8.2158 = \bar{d}_2(R', R_2^\pi)$.
2. $\bar{d}_c(R_1^\pi, R_2^\pi) = 0.7550 < 0.7618 = \bar{d}_c(R', R_2^\pi)$.
3. $\bar{d}_{Hg}(R_1^\pi, R_2^\pi) = 4.7577 < 5.0539 = \bar{d}_{Hg}(R', R_2^\pi)$.
4. $d^K(R_1^\pi, R_2^\pi) = 8 < 9 = d^K(R', R_2^\pi)$.

El siguiente resultado establece que para las métricas utilizadas en la Proposición 3.16, la distancia máxima entre órdenes lineales no es alcanzada cuando dichos órdenes no son el uno inverso del otro.

3.18 Proposición. Sean $R_1, R_2 \in L(X)$ tales que $R_2 \neq R_1^{-1}$. Si \bar{d} es la métrica inducida por d_2 , d_c , d_{Hg} o d_K , entonces existe $R_3 \in W(X)$ tal que $\bar{d}(R_1, R_2) < \bar{d}(R_1, R_3)$.

Demostración. Sean $R_1, R_2 \in L(X)$ tales que $R_1 \equiv (a_1, \dots, a_n)$ y $R_2 \equiv (b_1, \dots, b_n)$. Por la Proposición 2.24 (pág. 26) y la Proposición 2.45 (pág. 33), y teniendo en cuenta que las métricas consideradas son neutrales (Observación 2.48), puede suponerse sin pérdida de generalidad que $R_1 \equiv (1, 2, \dots, n)$ y, por tanto, $R_1^{-1} \equiv (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$, donde $a_i^{-1} = n - i + 1$.

Si $R_2 \neq R_1^{-1}$, sea $j = \min\{i \mid b_i \neq n - i + 1\}$.

Existe $k = j + l$ tal que $b_k = n - j + 1$. Sea ahora $R' \equiv (b'_1, \dots, b'_n)$ tal que $b'_i = b_i$ si $i \notin \{j, k\}$, $b'_j = b_k = n - j + 1$ y $b'_k = b_j < n - j + 1$, es decir, las componentes de \mathbf{p}_{R_2} coinciden con las de $\mathbf{p}_{R'}$, excepto dos de ellas, cuyas posiciones están intercambiadas.

1. Caso \bar{d}_2 .

$$\bar{d}_2(R_1, R')^2 - \bar{d}_2(R_1, R_2)^2 = |j - b'_j|^2 + |k - b'_k|^2 - \left(|j - b_j|^2 + |k - b_k|^2 \right).$$

$$\begin{aligned} |j - b'_j|^2 + |k - b'_k|^2 &= \\ (j + l - b_k - l)^2 + (j - b_j + l)^2 &= \\ (k - b_k)^2 + (j - b_j)^2 + 2l(l + (j - b_j) - (k - b_k)) &= \\ (j - b_j)^2 + (k - b_k)^2 + 2l(b_k - b_j) & \\ &> |j - b_j|^2 + |k - b_k|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{d}_2(R_1, R_2) < \bar{d}_2(R_1, R')$.

2. Caso \bar{d}_c .

Resulta evidente que $\|R_2\| = \|R'\|$, puesto que los vectores que codifican a estas preferencias tienen las mismas componentes, excepto dos de ellas, cuyas posiciones están intercambiadas.

$$\begin{aligned} \bar{d}_c(R_1, R') - \bar{d}_c(R_1, R_2) &= \frac{\sum_{i=1}^n i b_i}{\|R_1\| \|R_2\|} - \frac{\sum_{i=1}^n i b'_i}{\|R_1\| \|R'\|} = \\ &= \frac{j b_j + k b_k - (j b'_j + k b'_k)}{\|R_1\| \|R_2\|} = \frac{j b_j + k b_k - (j b_k + k b_j)}{\|R_1\| \|R_2\|} \\ &= \frac{(b_k - b_j)(k - j)}{\|R_1\| \|R_2\|} > 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{d}_c(R_1, R_2) < \bar{d}_c(R_1, R')$.

3. Caso \bar{d}_{Hg} .

$$\begin{aligned} \bar{d}_{Hg}(R_1, R')^2 - \bar{d}_{Hg}(R_1, R_2)^2 &= \\ &= \left(\sqrt{j} - \sqrt{b'_j} \right)^2 + \left(\sqrt{k} - \sqrt{b'_k} \right)^2 - \\ &= \left(\left(\sqrt{j} - \sqrt{b_j} \right)^2 + \left(\sqrt{k} - \sqrt{b_k} \right)^2 \right) = \\ &= \left(\sqrt{j} - \sqrt{b_k} \right)^2 + \left(\sqrt{k} - \sqrt{b_j} \right)^2 - \\ &= \left(\left(\sqrt{j} - \sqrt{b_j} \right)^2 + \left(\sqrt{k} - \sqrt{b_k} \right)^2 \right) = \\ &= 2 \left(\sqrt{j b_j} + \sqrt{k b_k} - \sqrt{j b_k} - \sqrt{k b_j} \right) \\ &= 2 \left((\sqrt{k} - \sqrt{j})(\sqrt{b_k} - \sqrt{b_j}) \right) > 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{d}_{Hg}(R_1, R_2) < \bar{d}_{Hg}(R_1, R')$.

4. Caso d^K .

$$\begin{aligned} d^K(R_1, R') - d^K(R_1, R_2) &= \\ &= |\operatorname{sgn}(j - k) - \operatorname{sgn}(b'_j - b'_k)| - |\operatorname{sgn}(j - k) - \operatorname{sgn}(b_j - b_k)| = \\ &= |\operatorname{sgn}(j - k) - \operatorname{sgn}(b_k - b_j)| - |\operatorname{sgn}(j - k) - \operatorname{sgn}(b_j - b_k)| \\ &= |-1 - 1| - |-1 - (-1)| = 2 > 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $d^K(R_1, R_2) < d^K(R_1, R')$. \square

Las proposiciones anteriores permiten obtener el siguiente resultado.

3.19 Proposición. Si \bar{d} es la métrica inducida por d_2 , d_c , d_{Hg} o d_K , entonces $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ satisface la propiedad de máximo disentimiento.

Demostración. Sea \bar{d} la métrica inducida por d_2 , d_c , d_{Hg} o d_K . Por las Proposiciones 3.16 y 3.18, si $R \in L(X)$, entonces se verifica

$$\Delta_n^{\bar{d}} = \max \{ \bar{d}(R_i, R_j) \mid R_i, R_j \in W(X) \} = \bar{d}(R, R^{-1}).$$

Por tanto, si $R_i, R_j \in L(X)$ y $R_j = R_i^{-1}$, entonces

$$\bar{d}(R_i, R_j) = \Delta_n^{\bar{d}} \Rightarrow 0 = 1 - \frac{\bar{d}(R_i, R_j)}{\Delta_n^{\bar{d}}} = \mathcal{M}_{\bar{d}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}).$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{d}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{\bar{d}(R_i, R_j)}{\Delta_n^{\bar{d}}} = 0 \Leftrightarrow \\ \bar{d}(R_i, R_j) &= \Delta_n^{\bar{d}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si se verifica (3.6), entonces por la Proposición 3.16 (pág. 76), ha de verificarse $R_i, R_j \in L(X)$; y, por la Proposición 3.18 (pág. 80), $R_j = R_i^{-1}$. Por tanto,

$$\mathcal{M}_{\bar{d}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}) = 0 \Leftrightarrow (R_i, R_j \in L(X) \text{ y } R_j = R_i^{-1}). \quad \square$$

Reciprocidad

Si una medida de consenso verifica la propiedad de reciprocidad significa que cuando los agentes invierten sus preferencias la medida de consenso no varía. Al igual que ocurre con la propiedad de máximo disentimiento, la distancia utilizada va a determinar si la medida de consenso asociada es o no recíproca.

3.20 Proposición. Si \bar{d} es la métrica sobre $W(X)$ inducida por d' , d_1 , d_2 , d_∞ , d_c o d_K , entonces $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ es una medida de consenso recíproca.

Demostración. Por la Observación 3.14 (pág. 73), las funciones $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ asociadas a esas métricas son medidas de consenso.

A continuación se analizará la reciprocidad para cada una de las métricas enunciadas.

1. Caso \bar{d}' .

Puesto que $R_i = R_j \Leftrightarrow R_i^{-1} = R_j^{-1}$, entonces $\bar{d}'(R_i, R_j) = \bar{d}'(R_i^{-1}, R_j^{-1})$.

Por tanto, $\mathcal{M}_{\bar{d}'}(\mathbf{R}, I) = \mathcal{M}_{\bar{d}'}(\mathbf{R}^{-1}, I)$.

2. Caso \bar{d}_p ($p \in \{1, 2\}$).

Por la Observación 2.13 (pág. 24), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{d}_p(R_i^{-1}, R_j^{-1}) &= \\ & \left(\sum_{k=1}^n |(n+1 - P_{R_i}(x_k)) - (n+1 - P_{R_j}(x_k))|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & \left(\sum_{k=1}^n |P_{R_j}(x_k) - P_{R_i}(x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \bar{d}_p(R_i, R_j). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{M}_{\bar{d}_p}(\mathbf{R}, I) = \mathcal{M}_{\bar{d}_p}(\mathbf{R}^{-1}, I)$.

3. Caso \bar{d}_∞ .

Por la Observación 2.13 (pág. 24), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{d}_\infty(R_i^{-1}, R_j^{-1}) &= \\ & \max \{ |(n+1 - P_{R_i}(x_k)) - (n+1 - P_{R_j}(x_k))| \} = \\ & \max \{ |P_{R_j}(x_k) - P_{R_i}(x_k)| \} \\ & = \bar{d}_\infty(R_i, R_j). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{M}_{\bar{d}_\infty}(\mathbf{R}^{-1}, I) = \mathcal{M}_{\bar{d}_\infty}(\mathbf{R}, I)$.

4. Caso \bar{d}_c .

$$\begin{aligned} \bar{d}_c(R_i^{-1}, R_j^{-1}) &= \\ & 1 - \frac{\sum_{k=1}^n (n+1 - P_{R_i}(x_k)) (n+1 - P_{R_j}(x_k))}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (n+1 - P_{R_i}(x_k))^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (n+1 - P_{R_j}(x_k))^2}}. \end{aligned}$$

Por la Observación 2.15 (pág. 25),

$$\sum_{k=1}^n \left((n+1) - (P_{R_i}(x_k) + P_{R_j}(x_k)) \right) = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (n+1 - P_{R_i}(x_k)) (n+1 - P_{R_j}(x_k)) &= \\ &= (n+1) \left(\sum_{k=1}^n \left((n+1) - (P_{R_i}(x_k) + P_{R_j}(x_k)) \right) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^n P_{R_i}(x_k) P_{R_j}(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P_{R_i}(x_k) P_{R_j}(x_k). \end{aligned}$$

Por la Observación 2.15 (pág. 25),

$$\sum_{k=1}^n ((n+1) - 2P_{R_i}(x_k)) = \sum_{k=1}^n ((n+1) - 2P_{R_j}(x_k)) = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (n+1 - P_{R_i}(x_k))^2 &= \\ &= (n+1) \sum_{k=1}^n ((n+1) - 2P_{R_i}(x_k)) + \sum_{k=1}^n P_{R_i}(x_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n P_{R_i}(x_k)^2, \end{aligned}$$

análogamente,

$$\sum_{k=1}^n (n+1 - P_{R_j}(x_k))^2 = \sum_{k=1}^n P_{R_j}(x_k)^2.$$

Consecuentemente,

$$\bar{d}_c(R_i^{-1}, R_j^{-1}) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n P_{R_i}(x_k) P_{R_j}(x_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (P_{R_i}(x_k))^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (P_{R_j}(x_k))^2}} = \bar{d}_c(R_i, R_j).$$

Por tanto, $\mathcal{M}_{\bar{d}_c}(\mathbf{R}, I) = \mathcal{M}_{\bar{d}_c}(\mathbf{R}^{-1}, I)$.

5. Caso d^K .

$$\begin{aligned}
d^K(R_1^{-1}, R_2^{-1}) &= \\
&\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left| \operatorname{sgn} \left((n+1 - P_{R_1}(x_i)) - (n+1 - P_{R_1}(x_j)) \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sgn} \left((n+1 - P_{R_2}(x_i)) - (n+1 - P_{R_2}(x_j)) \right) \right| = \\
&\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left| \operatorname{sgn} (P_{R_1}(x_j) - P_{R_1}(x_i)) - \operatorname{sgn} (P_{R_2}(x_j) - P_{R_2}(x_i)) \right| \\
&= d^K(R_1, R_2).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{M}_{d^K}(\mathbf{R}, I) = \mathcal{M}_{d^K}(\mathbf{R}^{-1}, I)$. \square

3.21 Proposición. $\mathcal{M}_{\bar{d}_{Hg}}$ no es recíproca.

Demostración. Sean $R_1, R_2 \in W(\{x_1, x_2, x_3\})$ y sus inversos, representados en la Figura 3.2.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} R_1 \\ \hline x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \hline x_2 \quad x_3 \end{array} &
\begin{array}{c} R_2 \\ \hline x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \hline x_2 \quad x_3 \end{array} &
\begin{array}{c} R_1^{-1} \\ \hline x_2 \quad x_3 \\ \hline x_1 \end{array} &
\begin{array}{c} R_2^{-1} \\ \hline x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \hline x_2 \quad x_3 \end{array}
\end{array}$$

Figura 3.2: Representación de los órdenes R_1, R_2 y sus inversos.

Estos órdenes vienen codificados por los vectores

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{R_1} &= (1, 2.5, 2.5) \\
\mathbf{p}_{R_1^{-1}} &= (3, 1.5, 1.5) \\
\mathbf{p}_{R_2} &= \mathbf{p}_{R_2^{-1}} = (2, 2, 2).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{Hg}(R_1, R_2) &= \\
&\left((\sqrt{1} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2.5} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2.5} - \sqrt{2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&0.476761 \neq 0.415713 = \\
&\left((\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{1.5} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{1.5} - \sqrt{2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \bar{d}_{Hg}(R_1^{-1}, R_2^{-1}).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{M}_{\bar{d}_{Hg}}(\mathbf{R}, I) \neq \mathcal{M}_{\bar{d}_{Hg}}(\mathbf{R}^{-1}, I)$. \square

Homogeneidad

El siguiente resultado nos muestra que las medidas de consenso basadas en distancias, \mathcal{M}_d , no son homogéneas.

3.22 Proposición. Las medidas de consenso \mathcal{M}_d no son homogéneas para ninguna distancia d definida sobre $W(X)$.

Demostración. Sea $\mathbf{R} = (R_1, R_2) \in W(X)^2$ tal que $R_1 \neq R_2$ e $I = \{v_1, v_2\} \in \mathcal{P}_2(V)$.

Sean $2\mathbf{R} = (R'_1, R'_2, R'_3, R'_4) \in W(X)^{2 \cdot 2}$ el perfil de preferencias definido por 2 copias de \mathbf{R} , donde $R'_1 = R'_3 = R_1$ y $R'_2 = R'_4 = R_2$ y $2I = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\}$ el conjunto de agentes definido por 2 copias de I , donde $v'_1 = v'_3 = v_1$ y $v'_2 = v'_4 = v_2$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d^t(2\mathbf{R}, 2I) &= \\ &= 1 - \frac{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 d(R'_i, R'_j)}{\binom{\#(2I)}{2} \cdot \Delta_n^d} = 1 - \frac{4 \cdot d(R_1, R_2)}{6 \cdot \Delta_n^d} = \\ &= 1 - \frac{2 \cdot d(R_1, R_2)}{3 \cdot \Delta_n^d} \neq 1 - \frac{d(R_1, R_2)}{\Delta_n^d} \\ &= \mathcal{M}_d(\mathbf{R}, I). \quad \square \end{aligned}$$

Resulta sencillo obtener el nivel de consenso existente al replicar un perfil formado por dos preferencias a partir de la distancia entre las mismas.

3.23 Proposición. Para cualquier distancia d definida sobre $W(X)$, si $\mathbf{R} = (R_1, R_2) \in W(X)^2$ es tal que $d(R_1, R_2) = \delta$, entonces

$$\mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, tI) = 1 - \frac{t \cdot \delta}{(2t-1) \cdot \Delta_n^d}$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, tI) = 1 - \frac{\delta}{2 \Delta_n^d}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{R} = (R_1, R_2) \in W(X)^2$ tal que $d(R_1, R_2) = \delta$ e $I = \{v_1, v_2\}$.

Para cualquier $t \in \mathbb{N}$, $t\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_{2t})$, donde $R_{2k-1} = R_1$ y $R_{2k} = R_2$ para cualquier $k \in \{1, 2, \dots, t\}$, por lo que

$$d(R_i, R_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i, j \text{ son pares,} \\ 0, & \text{si } i, j \text{ son impares,} \\ \delta, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{v_i, v_j \in tI \\ i < j}} d(R_i, R_j) &= \sum_{i=1}^{2t-1} \sum_{j=i+1}^{2t} d(R_i, R_j) = \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=i}^t d(R_{2i-1}, R_{2j}) + \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=i}^{t-1} d(R_{2i}, R_{2j+1}) = \\ &= \left(\frac{1}{2} t(t+1) + \frac{1}{2} t(t-1) \right) \delta \\ &= t^2 \delta. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene

$$\binom{\#(tI)}{2} = \binom{2t}{2} = 2t^2 - t.$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, tI) = 1 - \frac{\sum_{\substack{v_i, v_j \in tI \\ i < j}} d(R_i, R_j)}{\binom{\#(tI)}{2} \cdot \Delta_n^d} = 1 - \frac{t \cdot \delta}{(2t-1) \cdot \Delta_n^d}.$$

Además,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, tI) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \cdot \delta}{(2t-1) \cdot \Delta_n^d} = 1 - \frac{\delta}{2\Delta_n^d}. \quad \square$$

3.24 Observación. Bajo las hipótesis de la Proposición 3.23, si $R_1 \in L(X)$, $R_2 = R_1^{-1}$ y $\mathbf{R} = (R_1, R_2)$, entonces

1. $\mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, tI) = 1 - \frac{t}{2t-1}$.
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, tI) = \frac{1}{2}$.

3.1.2. Medidas de consenso basadas en las distancias de Kemeny ponderadas

En la Sección 3.1 (pág. 70) se ha propuesto una medida de consenso en el ámbito de los órdenes débiles basada en distancias definidas sobre $W(X)$ (Definición 3.7, pág. 72). Cuando las distancias consideradas son métricas, se obtienen medidas de consenso con propiedades adicionales dependiendo de la métrica considerada.

En esta sección, se analizará qué ocurre cuando se considera la distancia de Kemeny ponderada estudiada en la Sección 2.3.2 (pág. 40). En primer lugar se estudiarán las propiedades que debe cumplir esta distancia para obtener una medida de consenso basada en ella, a continuación, se analizará si verifica alguna propiedad adicional.

3.25 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. Entonces,

1. $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ satisface anonimato.
2. $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ satisface unanimidad si y sólo si $w_{n-1} > 0$.

Demostración.

1. Por la Proposición 3.9 (pág. 72).
2. $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ satisface unanimidad si y sólo si $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ satisface la identidad de indiscernibles (Proposición 3.10, pág. 73).

Ahora bien, $\bar{d}_{K,\mathbf{w}}$ satisface la identidad de indiscernibles si y sólo si $w_{n-1} > 0$ (Proposición 2.58, pág. 42). \square

3.26 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ es una medida de consenso si y sólo si $w_{n-1} > 0$.

Demostración. Por las Proposiciones 2.56 (pág. 40) y 3.25, $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ verifica neutralidad, anonimato y unanimidad. Por tanto, es una medida de consenso. \square

3.27 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ es una medida de consenso recíproca si y sólo si $w_1 = \dots = w_{n-1} = \frac{1}{n-1}$.

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que existe $i \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que $w_1 > w_i$. Sean $\mathbf{R} = (R_1, R_2) \in L(X)^2$, $\mathbf{p}_{R_1} = (1, 2, 3, \dots, n)$ y $\mathbf{p}_{R_2} = (2, 1, 3, \dots, n)$. Se tiene $\mathbf{p}_{R_1^{-1}} = (n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$ y $\mathbf{p}_{R_2^{-1}} = (n-1, n, \dots, 3, 2, 1)$. Entonces,

$$\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_1, R_2) = 2w_1 \neq 2w_{n-1} = \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_1^{-1}, R_2^{-1}).$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}(\mathbf{R}, \{v_1, v_2\}) \neq \mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}(\mathbf{R}^{-1}, \{v_1, v_2\}).$$

\Leftarrow) Si $w_i = w$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, entonces, por la Proposición 2.58 (pág. 42), $\bar{d}_{K,\mathbf{w}} = \frac{1}{n-1}d^K$ y, por tanto,

$$\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}(\mathbf{R}, I) = \frac{1}{n-1} \mathcal{M}_{d^K}(\mathbf{R}, I),$$

que es una medida de consenso recíproca. \square

3.28 Observación. Si $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ es una medida de consenso recíproca, entonces, $\bar{d}_{K,\mathbf{w}} = \frac{1}{n-1}d^K$.

3.29 Proposición. Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ un vector de pesos tal que $w_1 \geq \dots \geq w_{n-1}$ y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$. Si $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ es una medida de consenso, entonces verifica la propiedad de máximo disentimiento.

Demostración. Si $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}$ es una medida de consenso, entonces, por la Proposición 3.26, $w_{n-1} > 0$, por tanto, $w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} > 0$.

Si $R \in L(X)$, por la Proposición 2.62 (pág. 44), se verifica

$$\Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}} = \max \{ \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_i, R_j) \mid R_i, R_j \in W(X) \} = \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R, R^{-1}).$$

Por tanto, si $R_i, R_j \in L(X)$ y $R_j = R_i^{-1}$, entonces

$$\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_i, R_j) = \Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}} \Rightarrow 0 = 1 - \frac{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_i, R_j)}{\Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}} = \mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}).$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_i, R_j)}{\Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}} = 0 \Leftrightarrow \\ \bar{d}_{K,\mathbf{w}}(R_i, R_j) &= \Delta_n^{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si se verifica (3.7), entonces, por la Proposición 2.62 (pág. 44), ha de verificarse $R_i, R_j \in L(X)$ y $R_j = R_i^{-1}$. Por tanto,

$$\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,\mathbf{w}}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}) = 0 \Leftrightarrow (R_i, R_j \in L(X) \text{ y } R_j = R_i^{-1}). \quad \square$$

	Unanim.	Máx. disent.	Reciproc.	Medida de consenso
$\mathcal{M}_{\bar{d}}$	Sí	No	Sí	Sí
$\mathcal{M}_{\bar{d}_1}$	Sí	No	Sí	Sí
$\mathcal{M}_{\bar{d}_2}$	Sí	Sí	Sí	Sí
$\mathcal{M}_{\bar{d}_\infty}$	Sí	No	Sí	Sí
$\mathcal{M}_{\bar{d}_c}$	Sí	Sí	Sí	Sí
$\mathcal{M}_{\bar{d}_{Hg}}$	Sí	Sí	No	Sí
$\mathcal{M}_{\bar{d}^K}$	Sí	Sí	Sí	Sí
$\mathcal{M}_{\bar{d}^K, \mathbf{w}}$	–	–	–	–
$w_i = \frac{1}{n-1}$	Sí	Sí	Sí	Sí
$w_1 > w_{n-1} > 0$	Sí	Sí	No	Sí
$w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} > w_{n-1} = 0$	No	Sí	No	No
$w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 0$	No	No	No	No

Tabla 3.1: Propiedades de \mathcal{M}_d para las métricas y distancias analizadas.

La Tabla 3.1 resume las propiedades descritas anteriormente de $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ para las métricas y distancias analizadas.

3.30 Ejemplo. Sean cuatro agentes que muestran sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mediante los órdenes mostrados en la Figura 3.3, y el vector de pesos $\mathbf{w} = (\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6})$.

R_1	R_2	R_3	R_4
x_1	x_1	$x_1 \ x_2$	x_4
x_2	x_2	x_3	x_3
$x_3 \ x_4$	x_3	x_4	x_2
	x_4		x_1

Figura 3.3: Representación del perfil del Ejemplo 3.30.

Los órdenes R_2 y R_4 son órdenes lineales e inversos entre sí, por tanto, para cualquier distancia d definida sobre $W(X)$, $d(R_2, R_4) = \Delta_n^d$. Luego $\mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, t\{v_2, v_4\}) = \frac{t}{2t-1}$.

Las preferencias del agente v_1 difieren de las del agente v_2 debido a la indiferencia mostrada en las dos últimas alternativas, mientras que las preferencias del agente v_3 difieren de las del agente v_2 por la indiferencia mostrada en las dos primeras.

La Tabla 3.2 presenta para dos distancias seleccionadas, distancia de Kemeny y distancia de Kemeny ponderada por el vector de pesos \mathbf{w} , los

diferentes valores de consenso que se obtienen al aumentar las réplicas de las preferencias de dos agentes. Se observa que el consenso aumenta con el número de réplicas, si bien, como se indica en la Proposición 3.23, existe un valor límite que dependerá de la distancia seleccionada. Este límite es $\frac{1}{2}$ para los agentes v_2, v_4 , como se muestra en la última columna, debido a que sus preferencias están representadas por órdenes lineales y son inversas entre sí, tal y como se indicó en la Observación 3.24.

3.31 Observación. En la Observación 3.24 (pág. 87) se muestra el nivel de consenso existente en una sociedad totalmente polarizada en la que los individuos tienen preferencias representadas por órdenes lineales. En esta situación, el nivel de consenso se incrementa cuanto mayor sea el número de individuos de la población. La medida de consenso puede interpretarse como la probabilidad de coincidencia de la opinión de un individuo con la de otro elegido al azar (valores representados en la última columna de la Tabla 3.2). Además, dado que en este caso los órdenes son lineales e inversos entre sí, se tiene $\delta = \Delta_n^d$, por lo que el nivel de consenso es el mismo independientemente de la distancia utilizada en la medida de consenso (Proposición 3.23, pág. 86).

	$\{v_1, v_2\}$		$\{v_2, v_3\}$		$\{v_2, v_4\}$	
	d^K	$\bar{d}_{K,w}$	d^K	$\bar{d}_{K,w}$	d^K	$\bar{d}_{K,w}$
δ	1	0.1667	1	0.5	12	4.6667
$\mathcal{M}_d(\mathbf{R}, I)$	0.9167	0.9643	0.9167	0.8929	0	
$\mathcal{M}_d^2(2\mathbf{R}, 2I)$	0.9444	0.9762	0.9444	0.9286	0.3333	
$\mathcal{M}_d^5(5\mathbf{R}, 5I)$	0.9537	0.9802	0.9537	0.9405	0.4444	
$\mathcal{M}_d^{15}(15\mathbf{R}, 15I)$	0.9569	0.9815	0.9569	0.9446	0.4828	
$\mathcal{M}_d^{30}(30\mathbf{R}, 30I)$	0.9576	0.9818	0.9576	0.9455	0.4915	
$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_d^t(t\mathbf{R}, tI)$	0.9583	0.9821	0.9583	0.9464	0.5	

Tabla 3.2: Valores de consenso al replicar los agentes del perfil del Ejemplo 3.30 para las distancias d^K y $\bar{d}_{K,w}$.

3.2. Medidas de consenso sobre órdenes dicotómicos

En la Sección 3.1 (pág. 70) se introdujeron medidas de consenso basadas en distancias (métricas) definidas sobre órdenes débiles.

Es factible extender estas medidas de consenso al conjunto de órdenes dicotómicos de forma natural mediante las distancias definidas en la Sección 2.4 (pág. 46), el sistema de codificación definido en la Sección 2.4.1 (pág. 48) y en las distancias analizadas, métrica de Hamming (Sección 2.4.2, pág. 49) y distancias dicotómicas ponderadas (Sección 2.4.3, pág. 52).

En el caso de utilizar la métrica de Hamming, como ya se indicó en la Observación 2.69 (pág. 49), dicha métrica coincide con la métrica de Manhattan sobre vectores binarios. Las propiedades de neutralidad, identidad de indiscernibles y desigualdad triangular que verificaba la métrica de Manhattan se mantendrán también en la métrica d^H asociada definida sobre órdenes dicotómicos. Por tanto, por la Observación 3.14 (pág. 73), la función \mathcal{M}_{d^H} asociada es una medida de consenso.

La propiedad de máximo disentiimiento expuesta en la Definición 3.6 (pág. 71) se define ahora para órdenes dicotómicos⁴.

3.32 Definición. Sea $\mathcal{M} : D(X)^m \times \mathcal{P}_2(V) \rightarrow [0, 1]$ una medida de consenso.

\mathcal{M} satisface *máximo disentiimiento* si para cualesquiera $\mathbf{D} \in D(X)^m$ y $v_i, v_j \in V$ tales que $i \neq j$, se verifica

$$\mathcal{M}(\mathbf{D}, \{v_i, v_j\}) = 0 \Leftrightarrow D_j = D_i^{-1}.$$

3.33 Proposición. La función $\mathcal{M}_{d^H} : D(X)^m \times \mathcal{P}_2(V) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\mathcal{M}_{d^H}(\mathbf{R}, I) = 1 - \frac{\sum_{\substack{v_i, v_j \in I \\ i < j}} d^H(D_i, D_j)}{\binom{\# I}{2} \cdot \Delta_n^{d^H}},$$

es una medida de consenso que satisface máximo disentiimiento y reciprocidad.

Demostración. La métrica de Hamming sobre \mathbb{R}^n (d_H) verifica neutralidad y la identidad de indiscernibles. Por tanto, la función \mathcal{M}_{d^H} asociada es una medida de consenso.

⁴Máximo disentiimiento exigía órdenes lineales, los cuales no tienen cabida en el escenario de órdenes dicotómicos. Por tanto, se hace necesario adaptar su definición. Los conceptos de reciprocidad y homogeneidad son trasladables al contexto de los órdenes dicotómicos.

Para demostrar que satisface la propiedad de máximo disentimiento, sea $\mathbf{D} = (D, D') \in D^2(X)$.

Si $D' = D^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \#(g(D) \triangle g(D')) = \#X &\Rightarrow d^H(D, D') = \Delta_n^{d^H} \Rightarrow \\ 0 = 1 - \frac{d^H(D, D')}{\Delta_n^{d^H}} &= \mathcal{M}_{d^H}(\mathbf{D}, \{v, v'\}). \end{aligned}$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{d^H}(\mathbf{D}, \{v, v'\}) = 0 &\Rightarrow 0 = 1 - \frac{d^H(D, D')}{\Delta_n^{d^H}} \Rightarrow d^H(D, D') = \Delta_n^{d^H} \\ &\Rightarrow \#(g(D) \triangle g(D')) = \#X \Rightarrow D' = D^{-1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}(\mathbf{D}, \{v, v'\}) = 0 \Leftrightarrow D' = D^{-1}.$$

Respecto a la reciprocidad, es obvio que $d^H(D^{-1}, (D')^{-1}) = d^H(D, D')$, para cualesquiera $D, D' \in D(X)$. Por tanto,

$$\mathcal{M}_{d^H}(\mathbf{D}^{-1}, I) = \mathcal{M}_{d^H}(\mathbf{D}, I). \quad \square$$

3.34 Observación. En la Proposición 3.15 (pág. 74) se demuestra que $\mathcal{M}_{\bar{d}_1}$ no satisface máximo disentimiento. El hecho de que sí se verifique esta propiedad sobre órdenes dicotómicos se debe al sistema de codificación diferente utilizado para trabajar sobre dichos órdenes.

En la Sección 2.4.3 se definieron distancias dicotómicas ponderadas, las cuales son sensibles a que los desacuerdos se produzcan en las alternativas aceptadas o rechazadas.

A partir de esas distancias pueden definirse las funciones \mathcal{M}_{d^+} , \mathcal{M}_{d^-} y $\mathcal{M}_{d^{\pm\lambda}}$, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$, sobre $D(X)^m \times \mathcal{P}_2(V)$.

A partir de las propiedades enunciadas para las distancias dicotómicas ponderadas, se obtienen medidas de consenso con las siguientes propiedades.

3.35 Proposición. Para cualquier $\lambda \in (0, 1)$, las funciones \mathcal{M}_{d^+} , \mathcal{M}_{d^-} y $\mathcal{M}_{d^{\pm\lambda}}$ verifican:

1. \mathcal{M}_{d^+} , \mathcal{M}_{d^-} y $\mathcal{M}_{d^{\pm\lambda}}$ son medidas de consenso.
2. \mathcal{M}_{d^+} , \mathcal{M}_{d^-} y $\mathcal{M}_{d^{\pm\lambda}}$ satisfacen máximo disentimiento.
3. \mathcal{M}_{d^+} y \mathcal{M}_{d^-} no son recíprocas.

4. Si $\lambda = 0.5$, entonces $\mathcal{M}_{d^{\pm\lambda}}$ es recíproca.

Demostración.

1. Por la Proposición 2.74 (pág. 53), d^+ , d^- y $d^{\pm\lambda}$ son distancias neutrales y verifican la identidad de indiscernibles. Por tanto, las funciones \mathcal{M}_{d^+} , \mathcal{M}_{d^-} y $\mathcal{M}_{d^{\pm\lambda}}$ asociadas son medidas de consenso.
2. Sea $\mathbf{D} = (D, D') \in D^2(X)$.

Si $D' = D^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \#(g(D) \cap g(D')) = 0 \text{ y } \#(g(D) \triangle g(D')) = \#X &\Rightarrow d^+(D, D') = 1, \\ \#(b(D) \cap b(D')) = 0 \text{ y } \#(b(D) \triangle b(D')) = \#X &\Rightarrow d^-(D, D') = 1, \\ d^{\pm\lambda}(D, D') = \lambda d^+(D, D') + (1 - \lambda) d^-(D, D') &= 1. \end{aligned}$$

Por la Observación 2.75 (pág. 54), $\Delta_n^{d^+} = \Delta_n^{d^-} = \Delta_n^{d^{\pm\lambda}} = 1$. Por tanto,

$$D' = D^{-1} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{M}_{d^+}(\mathbf{D}, \{v, v'\}) = 0. \\ \mathcal{M}_{d^-}(\mathbf{D}, \{v, v'\}) = 0. \\ \mathcal{M}_{d^{\pm\lambda}}(\mathbf{D}, \{v, v'\}) = 0. \end{cases}$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} d^+(D, D') = 1 &\Rightarrow \left(1 - \frac{\#(g(D_1) \cap g(D_2))}{\#X}\right) \cdot \frac{\#(g(D_1) \triangle g(D_2))}{\#X} = 1 \\ &\Rightarrow \#(g(D) \triangle g(D')) = \#X \text{ y } \#(g(D) \cap g(D')) = 0 \\ &\Rightarrow D' = D^{-1}. \end{aligned}$$

Análogo para d^- y $d^{\pm\lambda}$.

3. Sean $\mathbf{D} = (D, D') \in D^2(X)$, $\mathbf{i}_D = (1, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{i}_{D'} = (0, 1, 1, 0)$.
 - $\mathbf{i}_{D^{-1}} = (0, 0, 1, 0)$.
 - $\mathbf{i}_{D'^{-1}} = (1, 0, 0, 1)$.
 - $\#X = 4$.
 - $\#(g(D) \cap g(D')) = 2$, $\#(g(D) \triangle g(D')) = 1$.
 - $\#(g(D^{-1}) \cap g((D')^{-1})) = 1$, $\#(g(D^{-1}) \triangle g((D')^{-1})) = 2$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{d^+}(\mathbf{D}, \{v, v'\}) &= \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2}{4}\right) \frac{1}{4} \neq 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{2}{4} \\ &= \mathcal{M}_{d^+}(\mathbf{D}^{-1}, \{v, v'\}). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\mathcal{M}_{d^-}(\mathbf{D}, \{v, v'\}) \neq \mathcal{M}_{d^-}(\mathbf{D}^{-1}, \{v, v'\}).$$

4. Por la Observación 2.76 (pág. 54), si $\lambda = 0.5$,

$$\begin{aligned} d^{\pm\lambda}(D, D') &= \lambda d^+(D, D') + (1 - \lambda) d^-(D, D') = \\ &= \lambda d^-(D^{-1}, (D')^{-1}) + (1 - \lambda) d^+(D^{-1}, (D')^{-1}) = \\ &= d^{\pm\lambda}(D^{-1}, (D')^{-1}). \end{aligned}$$

□

3.3. Medidas de consenso sobre preferencias aprobatorias

Al igual que se expuso en la Sección anterior, teniendo en cuenta el sistema de codificación de preferencias aprobatorias (Sección 2.5.2, pág. 58) y las distancias definidas sobre estas preferencias (Sección 2.5.3, pág. 58), es posible introducir medidas de consenso sobre las preferencias aprobatorias de forma análoga a como se definieron sobre órdenes débiles.

Esta Sección se basa parcialmente en Erdamar, García Lapresta, Pérez Román y Sanver [43].

3.36 Definición. Una *medida de consenso* sobre $PA(X)^m$ es una función

$$\mathcal{M} : PA(X)^m \times \mathcal{P}_2(V) \longrightarrow [0, 1]$$

que satisface las condiciones de unanimidad, anonimato y neutralidad.

3.37 Proposición. Dada una distancia $d : PA(X) \times PA(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, la función

$$\mathcal{M}_d : PA(X)^m \times \mathcal{P}_2(V) \longrightarrow [0, 1]$$

definida por

$$\mathcal{M}_d(\mathbf{RD}, I) = 1 - \frac{\sum_{\substack{v_i, v_j \in I \\ i < j}} d((R_i, D_i), (R_j, D_j))}{\binom{\# I}{2} \cdot \Delta_n^d},$$

donde

$$\Delta_n^d = \max \{d((R_i, D_i), (R_j, D_j)) \mid (R_i, D_i), (R_j, D_j) \in PA(X)\},$$

satisface unanimidad y anonimato.

Demostración. Sean $\mathbf{RD} \in PA(X)^m$ e $I \in \mathcal{P}_2(V)$.

1. Unanimidad. Para cualesquiera $v_i, v_j \in I$, se verifica

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d(\mathbf{RD}, I) = 1 &\Leftrightarrow \sum_{\substack{v_i, v_j \in I \\ i < j}} d((R_i, D_i), (R_j, D_j)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d((R_i, D_i), (R_j, D_j)) = 0 \Leftrightarrow (R_i, D_i) = (R_j, D_j) \\ &\Leftrightarrow (R_i = R_j \text{ y } D_i = D_j). \end{aligned}$$

2. Anonimato. Sea $\pi \in S_n$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{v_i, v_j \in I_\pi \\ i < j}} d((R_{\pi(i)}, D_{\pi(i)}), (R_{\pi(j)}, D_{\pi(j)})) &= \\ \sum_{\substack{v_{\pi(i)}, v_{\pi(j)} \in I \\ \pi(i) < \pi(j)}} d((R_{\pi(i)}, D_{\pi(i)}), (R_{\pi(j)}, D_{\pi(j)})) &= \\ \sum_{\substack{v_i, v_j \in I \\ i < j}} d((R_i, D_i), (R_j, D_j)) &. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{M}_d((\mathbf{RD})_\pi, I_\pi) = \mathcal{M}_d(\mathbf{RD}, I)$. \square

3.38 Proposición. Si $d : PA(X) \times PA(X) \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia neutral, entonces \mathcal{M}_d es la medida de consenso asociada a d .

Demostración. Por la Proposición 3.37, \mathcal{M}_d satisface unanimidad y anonimato. Obviamente, si d es neutral, entonces \mathcal{M}_d verifica neutralidad y, por tanto, \mathcal{M}_d es una medida de consenso. \square

En la Sección 2.5.3 (pág. 58), se introdujo la distancia de Kemeny–Hamming definida sobre preferencias aprobatorias (d_{PA}^λ), lo cual va a permitir construir medidas de consenso a partir de la misma.

3.39 Proposición. Para cualquier $\lambda \in (0, 1)$, $\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}$ es una medida de consenso que satisface máximo disenso y reciprocidad.

Demostración. Por la Proposición 2.94 (pág. 62), d_{PA}^λ son distancias neutrales para cualquier $\lambda \in (0, 1)$. Por tanto, por la Proposición 3.38, $\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}$ es una medida de consenso.

Sea $\mathbf{RD} = ((R_1, D_1), (R_2, D_2)) \in PA(X)^2$.

1. *Máximo disentimiento.*

$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}(\mathbf{RD}, \{v_1, v_2\}) = 0$ si y sólo si $d_{PA}^\lambda((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = \Delta_n^{d_{PA}^\lambda}$. Luego ha de verificarse

- a) $d_{PA}^K((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = \Delta_n^{d_{PA}^K} = 1$ y, como consecuencia,
 $d_{PA}^K((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = \Delta_n^{d_{PA}^K} \Leftrightarrow d^K(R_1, R_2) = \Delta_n^{d^K}$, y por las Proposiciones 3.16 y 3.18 (págs. 76 y 80, respectivamente), ha de cumplirse $R_1, R_2 \in L(X)$ y $R_2 = R_1^{-1}$.
- b) $d_{PA}^H((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = \Delta_n^{d_{PA}^H} = 1$ y, como consecuencia,
 $d_{PA}^H((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = 1 \Leftrightarrow g(D_1) \triangle g(D_2) = X \Leftrightarrow g(D_2) = b(D_1) = g(D_1^{-1})$. Por tanto, $D_2 = D_1^{-1}$.

En consecuencia, $(R_2, D_2) = (R_1^{-1}, D_1^{-1})$.

2. *Reciprocidad.*

- a) $d^K(R_1, R_2) = d^K(R_1^{-1}, R_2^{-1})$ (Proposición 3.20, pág. 82).
- b) En primer lugar conviene tener en cuenta $A \triangle B = A^c \triangle B^c$:

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (A \cap B)^c = \\ &= (A^c \cup B^c) \setminus (A \cap B) = \\ &= A^c \triangle B^c. \end{aligned}$$

Dado que $g(D_1) = b(D_1^{-1}) = (g(D_1^{-1}))^c$, se tiene

$$\begin{aligned} d^H(D_1, D_2) &= \#(g(D_1) \triangle g(D_2)) = \\ &= \#((g(D_1))^c \triangle (g(D_2))^c) = \\ &= \#(g(D_1^{-1}) \triangle g(D_2^{-1})) = d^H(D_1^{-1}, D_2^{-1}). \end{aligned}$$

A partir de a) y b), se tiene

$$d_{PA}^\lambda((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = d_{PA}^\lambda((R_1, D_1)^{-1}, (R_2, D_2)^{-1}).$$

Por tanto, $\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}((\mathbf{RD})^{-1}, I) = \mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}(\mathbf{RD}, I)$. \square

El siguiente ejemplo muestra la variación del consenso en función de los valores del parámetro λ utilizado.

(R_1, D_1)	(R_2, D_2)	(R_3, D_3)	(R_4, D_4)
x_1	x_2	x_1	x_3
x_2	x_1	x_2	x_2
$x_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_1 x_4$

Figura 3.4: Representación del perfil del Ejemplo 2.90.

	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.75$
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}(\mathbf{RD}, \{v_1, v_2\})$	0.95833	0.91666	0.875
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}(\mathbf{RD}, \{v_1, v_3\})$	0.8125	0.875	0.9375
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}(\mathbf{RD}, \{v_3, v_4\})$	0.64583	0.54167	0.4375
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}(\mathbf{RD}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$	0.69097	0.67361	0.65625

Tabla 3.3: Valores de consenso para diferentes valores de λ .

3.40 Ejemplo. Si se considera el perfil de preferencias aprobatorias del Ejemplo 2.90 (pág. 60).

En la Tabla 3.3 se presenta el nivel de consenso alcanzado para ciertos subconjuntos representativos de agentes en función de tres valores del parámetro λ .

La primera fila muestra el nivel de consenso para los dos primeros agentes. Recuérdese que λ es el coeficiente para d_{PA}^K y, dado que las preferencias de los agentes v_1, v_2 sólo difieren en el orden de las alternativas, un incremento en λ enfatiza ese desacuerdo, por lo que el nivel de consenso decrece al aumentar el valor de λ .

Por el contrario, el primer y el tercer agente coinciden en el orden asignado a las alternativas. Sin embargo, no coinciden en las alternativas aceptadas. Como puede verse en la segunda fila, el nivel de consenso aumenta al incrementar λ debido a que se va ponderando con mayor valor los acuerdos en el orden de las alternativas (simultáneamente, los desacuerdos en el conjunto de alternativas aceptadas van perdiendo importancia a causa del decrecimiento de $1 - \lambda$).

La tercera fila centra la atención en los agentes v_3, v_4 . Estos agentes no sólo no coinciden en el orden de las alternativas, sino que también muestran desacuerdos en las alternativas aceptadas, por lo que su nivel de consenso es el menor de todos los casos considerados en la tabla. Conviene destacar que el nivel de consenso decrece cuando el peso de d_{PA}^K aumenta, lo cual indica

que es mayor el desacuerdo en el orden que en el conjunto de alternativas aceptadas.

Finalmente, la última fila muestra el nivel de consenso del perfil. Puede observarse que cuando se incrementa λ el nivel de consenso disminuye. A partir de estos resultados puede concluirse que, para este perfil en concreto, los agentes muestran un mayor acuerdo en las alternativas que son socialmente aceptadas que en el orden de las mismas.

Los resultados obtenidos al estudiar la homogeneidad de las medidas de consenso sobre preferencias aprobatorias coinciden con las analizadas en el contexto de órdenes débiles. Es por ello que sólo serán enunciadas, omitiéndose las demostraciones por no ser relevantes.

3.41 Proposición. Las medidas de consenso \mathcal{M}_d no son homogéneas para ninguna distancia d definida sobre $PA(X)$.

3.42 Proposición. Para cualquier distancia d definida sobre $PA(X)$, si $\mathbf{RD} = ((R_1, D_1), (R_2, D_2)) \in PA(X)^2$ es tal que $d((R_1, D_1), (R_2, D_2)) = \delta$, entonces

$$\mathcal{M}_d^t(t \mathbf{RD}, tI) = 1 - \frac{t \cdot \delta}{(2t - 1) \cdot \Delta_n^d}$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_d^t(t \mathbf{RD}, tI) = 1 - \frac{\delta}{2 \Delta_n^d}.$$

En particular, si $R_1 \in L(X)$ y $(R_2, D_2) = (R_1^{-1}, D_1^{-1})$, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_d^t(t \mathbf{RD}, tI) = \frac{1}{2}.$$

3.43 Ejemplo. Sea $I = \{v_1, v_4\}$ del Ejemplo 3.40. Las preferencias aprobatorias de estos agentes vienen representadas en la Figura 3.5.

(R_1, D_1)	(R_4, D_4)
x_1	x_3
x_2	x_2
$x_3 x_4$	$x_1 x_4$

Figura 3.5: Preferencias aprobatorias de los agentes v_1, v_4 del Ejemplo 3.40.

La Tabla 3.4 presenta los cambios en los niveles de consenso cuando se replican los agentes $\{v_1, v_4\}$ para tres valores de λ .

	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.75$
$\delta = d_\lambda((R_1, A_1), (R_4, A_4))$	0.54167	0.58333	0.66250
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}(\mathbf{RD}, I)$	0.54167	0.58333	0.66250
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}^2(2 \mathbf{RD}, 2 I)$	0.63889	0.61111	0.58333
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}^5(5 \mathbf{RD}, 5 I)$	0.69907	0.67593	0.65278
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}^{15}(15 \mathbf{RD}, 15 I)$	0.71983	0.69828	0.67672
$\mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}^{30}(30 \mathbf{RD}, 30 I)$	0.72457	0.70339	0.68220
$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{d_{PA}^\lambda}^t(t \mathbf{RD}, t I)$	0.72917	0.70833	0.68750

Tabla 3.4: Valores de consenso al replicar los agentes $\{v_1, v_4\}$ para diferentes valores de λ .

La primera fila muestra la distancia entre las dos preferencias aprobatorias respecto a tres valores diferentes de λ . El nivel de consenso se presenta en la segunda fila. Conviene destacar que cuando el tamaño del perfil se duplica mediante clonaciones de las preferencias de los agentes, como se observa en la tercera fila, el nivel de consenso se incrementa para todos los valores de λ .

De acuerdo con los resultados presentados en la tabla, puede verse que cuando aumenta el número de réplicas, el nivel de consenso también se incrementa como era de esperar. Sin embargo, estos resultados también muestran que existe un límite para el incremento del nivel de homogeneidad en el grupo de agentes cuando simplemente se replican sus preferencias.

Capítulo 4

Conglomerados jerárquicos basados en medidas de consenso en el contexto de órdenes débiles

El análisis de conglomerados (*cluster analysis*) es una técnica de análisis de datos que tiene como objetivo resolver problemas de agrupación. Consiste en la formación de grupos (conglomerados) de manera que los miembros de un mismo grupo presenten un grado de similitud mayor que entre miembros de grupos diferentes. Permite descubrir asociaciones y estructuras en los datos que en un principio no son evidentes pero que pueden ser de gran utilidad una vez que se han establecido.

En el análisis de conglomerados se conoce a priori poca o ninguna información sobre la estructura de los grupos. Se dispone de una colección de observaciones y se pretende descubrir la estructura de los grupos en los que se pueden encajar las observaciones.

Los resultados de un análisis de conglomerados pueden contribuir a la definición formal de un esquema de clasificación tal como una taxonomía para un conjunto de objetos, sugerir modelos estadísticos para describir poblaciones, asignar nuevos individuos a las clases para diagnóstico e identificación, etc.

Los métodos de conglomeración han sido desarrollados a lo largo del pasado siglo. Tienen su origen en la Biología, donde el problema de clasificación de las especies tiene gran importancia. R.R. Sokal y P.H. Sneath [95, 92] inician el desarrollo de esta técnica con sus libros *Principles of Numerical Taxonomy* y *Numerical Taxonomy*, donde los autores utilizan un método de conglomeración para la creación de grupos formados por organismos consi-

derados similares. A partir de ese momento, la literatura sobre análisis de conglomerados se desarrolla de forma considerable, aplicando nuevos métodos en campos tan diferentes como bioinformática (Abu–Jamous, Fa, Roberts y Asoke [1]), minería de datos, recuperación de información y aprendizaje automático (Liu [71]), análisis de imágenes (Jain y Dubes [62]) y reconocimiento de patrones (Jain, Duin y Mao [63]), entre otros.

El objetivo en el análisis de conglomerados consiste en descubrir la agrupación natural de los objetos a partir de un conjunto de variables que los caracterizan. Un conglomerado es un conjunto de objetos similares, por tanto, es necesario desarrollar escalas cuantitativas que permitan medir la similitud entre objetos y crear algoritmos para ordenarlos en grupos.

También es posible tener una visión semejante a la descrita anteriormente pero desde el punto de vista de las variables que caracterizan a los objetos, es decir, descubrir grupos de variables cuya información es similar para el conjunto de objetos.

En este capítulo se analizará fundamentalmente la técnica de conglomerados para los objetos.

Existen diferentes métodos de conglomeración que pueden ser clasificados en dos grandes categorías: *métodos jerárquicos* y *métodos no jerárquicos*.

Los métodos jerárquicos (*hierarchical clustering*) se subdividen a su vez en aglomerativos y disociativos. Los aglomerativos se caracterizan por una serie sucesiva de agrupamientos. Parten de que cada objeto es un conglomerado y en etapas sucesivas se van agrupando mediante un criterio de similitud escogido previamente. En cada paso del proceso se obtiene un nuevo conglomerado que puede formarse a partir de dos objetos, de un objeto y un conglomerado previamente formado o de dos conglomerados ya existentes. El conglomerado resultante es indivisible a partir de ese momento, de ahí el nombre de jerárquico asignado al procedimiento. El proceso finaliza cuando se obtiene un único conglomerado constituido por todos los objetos de la muestra. Los métodos disociativos realizan el proceso inverso al anterior. Comienzan con un conglomerado que engloba a todos los objetos para, a través de sucesivas divisiones, crear conglomerados formados por grupos más pequeños de forma que el proceso finaliza cuando hay tantos conglomerados como objetos en la muestra estudiada.

En cuanto a los métodos no jerárquicos (*non-hierarchical clustering*), su objetivo consiste en realizar una sola partición de los objetos en un número de grupos fijado a priori. El proceso comienza realizando una partición al azar de los objetos en el número de grupos establecido y calculando el centroide de cada uno de ellos. En cada paso se ubica cada objeto en el conglomerado cuyo centroide esté más cercano a éste. Una vez reubicados todos los objetos, se calculan de nuevo los centroides de los conglomerados y se procede a una nueva reubicación de los mismos. El proceso finaliza cuando ningún objeto

sea reubicado a un conglomerado distinto al que pertenecía previamente. A diferencia de los métodos jerárquicos, la ubicación de un objeto en un conglomerado no es definitiva. Estos métodos están diseñados para agrupar objetos y no son válidos para agrupar variables.

4.1. Métodos jerárquicos sobre órdenes débiles

Existen numerosos algoritmos para la formación de conglomerados como consecuencia de que no se ha definido de forma precisa el concepto de conglomerado (véase, por ejemplo, Ward [100], Everitt, Landau, Leese y Stahl [45] y Estivill–Castro [44]). La mayor parte de estos procedimientos han nacido al amparo de ciertas ramas de la ciencia, por lo que, inevitablemente, están impregnados de un cierto sesgo procedente de las disciplinas correspondientes.

Para encontrar agrupaciones naturales en un conjunto de objetos, es necesario establecer qué se entiende por agrupaciones naturales y, por lo tanto, con arreglo a qué criterio puede decirse que dos grupos son más o menos similares. Esto plantea a su vez otras dos cuestiones:

- ¿Cómo puede medirse la similitud entre dos objetos de la muestra?
- ¿Cómo puede determinarse cuándo dos conglomerados pueden ser o no agrupados?

4.1.1. Medidas de similitud

Uno de los aspectos claves del análisis de conglomerados es la elección de la medida para cuantificar la distancia entre los objetos. El análisis de conglomerados jerárquico permite elegir entre un gran número de medidas y su elección dependerá del tipo de datos, cuantitativos, cualitativos, dicotómicos, etc. que se estén analizando.

Estas medidas también se diferencian dependiendo de la característica evaluada: grado de proximidad o lejanía, lo que determinará el uso de medidas de similitud o disimilitud, respectivamente.

Por ejemplo, si se tienen cuatro objetos como los que se muestran en la Figura 4.1, pueden plantearse las siguientes preguntas sobre los mismos: ¿qué objetos son más similares entre sí?, ¿qué objetos son más diferentes entre sí?, ¿son más similares (diferentes) los objetos A y B entre sí que los objetos A y C?

Las medidas de similitud evalúan el grado de proximidad o parecido existentes entre dos objetos (a mayor parecido, mayor valor de la medida). Suelen

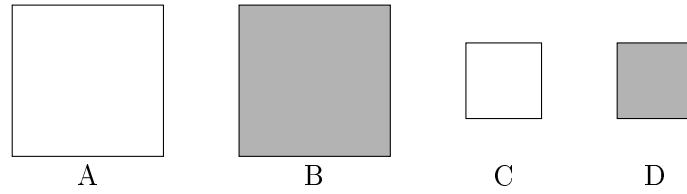


Figura 4.1: Objetos similares.

ser medidas positivas, si bien pueden encontrarse medidas de similitud cuyos valores están comprendidos¹ entre -1 y 1 y también medidas de similitud normalizadas a 0 y 1 , denominadas coeficientes de similitud.

Las medidas de disimilitud, denominadas habitualmente medidas de distancia, ponen el énfasis sobre el grado de lejanía o diferencia existente entre los objetos.

En este capítulo se considerarán medidas de similitud cuyos valores estén comprendidos entre 0 y 1 .

4.1 Definición. Sea A un conjunto no vacío. Una función $s : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ es una *similitud* sobre A si para cualesquiera $a, b \in A$ se verifica:

1. $0 \leq s(a, b) \leq 1$ (no negatividad),
2. $s(a, b) = s(b, a)$ (simetría),
3. $s(a, a) = 1$,

Resulta sencillo transformar medidas de similitud normalizadas en distancias o medidas de disimilitud.

Dada una función de similitud s sobre un conjunto A , puede obtenerse fácilmente una distancia sobre dicho conjunto mediante transformaciones de la función s . Algunas de las transformaciones más habituales sobre una similitud s de las que se obtienen una distancia d son: $d = 1 - s$, $d = \frac{1-s}{s}$, $d = \sqrt{1-s}$, $d = \sqrt{2(1-s^2)}$, $d = \arccos s$ y $d = -\ln s$, entre otras.

Análogamente, a partir de una distancia d normalizada al intervalo $[0, 1]$, es posible obtener una similitud s mediante la expresión: $s = 1 - d$.

4.2 Observación. Existe un gran número de medidas de similitud y disimilitud propuestas en la literatura², cada una de ellas con sus propias características. Conviene destacar que la elección de la medida puede condicionar

¹Estas medidas suelen estar asociadas a coeficientes de correlación, como por ejemplo el coeficiente de correlación de Pearson o los coeficientes de correlación por rangos de Kendall y Spearman.

²En las Secciones 1.1 (pág. 10), 2.3 (pág. 35) y 2.4 (pág. 46) se han expuesto y analizado algunas de las medidas más utilizadas.

de forma importante las soluciones alcanzadas, ya que en ellas se basará el criterio utilizado para la formación de conglomerados.

4.1.2. Criterios de conglomeración

Como ya se ha indicado, los métodos jerárquicos se caracterizan por un serie sucesiva de agrupamientos o divisiones. Dada la similitud de ambos procesos, únicamente se expondrán las características de los métodos aglomerativos.

El proceso se realiza paso a paso, uniendo en cada uno de ellos dos elementos que pueden ser objetos o conglomerados creados en pasos anteriores.

Durante el proceso se van generando diferentes niveles de agrupamiento denominados N -agrupamientos.

4.3 Definición. Dado un conjunto de objetos $A = \{a_1, \dots, a_r\}$, un N -agrupamiento de A , denotado con \mathcal{C}_N , es una partición en $r - N$ conjuntos C_1^N, \dots, C_{r-N}^N , denominados *conglomerados*, de forma que:

1. $C_i^N \neq \emptyset$, para cualquier $i = 1, \dots, r - N$.
2. $\bigcup_{i=1}^{r-N} C_i^N = A$.
3. $C_i^N \cap C_j^N = \emptyset$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, r - N\}$ tales que $i \neq j$.
4. Los elementos de C_i^N son similares entre ellos o disimilares a los elementos de C_j^N ($j \neq i$) de acuerdo con una cierta medida establecida de similitud/disimilitud.

4.4 Observación. Al inicio del proceso cada objeto es un conglomerado, por tanto, el primer nivel, $N = 0$, estará formado por r conglomerados, cada uno de los cuales contiene un objeto del conjunto, es decir, $\mathcal{C}_0 = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_r\}\}$. En el siguiente nivel se agruparán aquellos dos elementos que tengan mayor similitud o menor distancia, obteniendo $r - 1$ conglomerados. A continuación, y siguiendo con la misma estrategia, se agruparán en el nivel posterior aquellos dos elementos (objetos o conglomerados ya formados) con mayor similitud o menor distancia; de esta forma, el nivel N constará de $r - N$ conglomerados. Si se continúa realizando agrupaciones, se llega al nivel $N = r - 1$ en el que sólo hay un conglomerado, formado por todos los objetos de partida.

Existen diversos criterios o métodos de conglomeración que pueden ser empleados a la hora de crear nuevos conglomerados en las diversas etapas de un procedimiento jerárquico³. Ninguno de estos procedimientos proporciona una solución óptima para todos los problemas que se pueden plantear,

³Una discusión detallada de los diferentes métodos de conglomeración puede consultarse en Anderberg [8].

pudiendo llegar a diferentes resultados dependiendo del método elegido. El buen criterio del investigador, el conocimiento del problema planteado y la experiencia sugerirán el método más adecuado.

Entre los criterios utilizados, pueden destacarse:

- Método del amalgamiento simple, también denominado método del vecino más próximo (*single linkage*), en el que se considera que la similitud o distancia entre dos conglomerados viene dada por la máxima similitud o mínima distancia, respectivamente, entre un objeto de un conglomerado y un objeto del otro.
- Método del amalgamiento completo o método del vecino más lejano (*complete linkage*), donde la similitud o distancia entre dos conglomerados viene dada por la máxima similitud o mínima distancia, respectivamente, entre un objeto de un conglomerado y un objeto del otro.
- Método de la media (*group average*), donde la similitud o distancia entre conglomerados se obtiene como la media aritmética de las similitudes o distancias entre todos los pares de objetos de diferentes conglomerados.
- Método del centroide (*centroid linkage*), en el que cada conglomerado está representado por su centroide. La proximidad entre conglomerados se define como la proximidad entre sus centroides.
- Método de Ward, en el que los conglomerados también están representados por su centroide, uniéndose dos conglomerados cuando se produzca un menor incremento en el valor total de la suma de los cuadrados de las diferencias, dentro de cada conglomerado, de cada objeto al centroide del conglomerado.

4.1.3. Similaridades y agrupamientos basados en medidas de consenso

Dado un grupo de agentes que muestran sus preferencias sobre un conjunto de alternativas mediante órdenes débiles, puede interesar en ciertas situaciones tener una visión global del grado de homogeneidad de dichas preferencias.

El análisis de conglomerados permite agrupar agentes cuyas preferencias presenten un mayor grado de similitud. Ahora bien, de nuevo se presentan dos cuestiones para determinar la formación de agrupamientos. ¿Qué medida de similitud es la más adecuada para determinar la proximidad entre las preferencias? ¿Qué criterio de similitud entre los conjuntos de preferencias se utilizará para establecer la creación de agrupamientos?

Con tal motivo se propone un nuevo criterio para la creación de conglomerados dentro del método jerárquico aglomerativo, basado en las medidas de consenso sobre órdenes débiles estudiadas en el Capítulo 3. Estas medidas serán utilizadas para establecer la medida de similitud entre las preferencias de los agentes, así como para determinar el criterio utilizado para la creación de los agrupamientos.

Un planteamiento natural consiste en considerar que las preferencias de dos agentes estarán más próximas entre sí cuanto mayor sea el nivel de consenso alcanzado. Del mismo modo, dos grupos de agentes formarán un nuevo conglomerado cuando dicho grupo alcance el mayor consenso posible de entre todos los posibles conglomerados que pudieran formarse. Conviene destacar que para el cálculo del nivel de consenso no va a ser necesario que cada conglomerado tenga un elemento representativo, sino que se seguirá utilizando toda la información incluida en el mismo.

Para medir la similitud entre dos agentes será necesario determinar cómo se desea medir las discrepancias entre los agentes a la hora de ordenar las alternativas. Las distancias en contextos preferenciales analizadas en el Capítulo 2 proporcionan diferentes procedimientos para obtener la medida deseada. A partir de ella, se utilizará la medida de consenso asociada \mathcal{M}_d que determinará la medida de similitud.

4.5 Proposición. Dada una medida de consenso \mathcal{M}_d asociada a una distancia d sobre $W(X)$ y un perfil $\mathbf{R} \in W(X)^m$, la función $s_d : V \times V \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$s_d(v_i, v_j) = \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}), & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j, \end{cases}$$

es una medida de similitud.

Demostración. Resulta obvio a partir de la propia definición de medida de consenso (Definición 3.5, pág. 70). \square

Estas medidas de similitud serán las seleccionadas para medir las similitudes entre cada dos individuos de la muestra.

El siguiente paso consistirá en seleccionar el método de conglomeración empleado para crear nuevos conglomerados en las diversas etapas del procedimiento.

4.6 Definición. Dada una medida de consenso \mathcal{M}_d , se denominará *medida de agrupamiento* S_d a la función $S_d : (\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$S_d(A, B) = \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbf{R}, A \cup B), & \text{si } \#(A \cup B) \geq 2, \\ 1, & \text{si } \#(A \cup B) = 1, \end{cases}$$

para cualesquiera $A, B \in (\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\})$. $S_d(A, B)$ se denominará *valor de proximidad* entre A y B .

4.7 Observación. Conviene destacar que S_d no es una medida de similitud en el sentido de la Definición 4.1, ya que puede ocurrir $S_d(A, A) \neq 1$. Sin embargo, satisface:

- $S_d(A, B) = S_d(B, A)$ para cualesquiera $A, B \in (\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\})$,
- $S_d(\{v_i\}, \{v_j\}) = s_d(v_i, v_j)$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Esta medida de agrupamiento permitirá establecer un criterio de proximidad entre conglomerados para la creación de los sucesivos niveles de agrupamiento.

4.1.4. Método del consenso

Los métodos de conglomeración empleados en los métodos jerárquicos aglomerativos siguen un algoritmo básico mostrado en el Algoritmo 4.1.

Algoritmo 4.1 Algoritmo básico para la formación de conglomerados en los métodos jerárquicos aglomerativos.

Calcular la matriz de similitudes.

repetir

Unir los dos conglomerados más próximos según el método de conglomeración utilizado.

Actualizar la matriz de similitudes para obtener la proximidades entre los nuevos conglomerados y los originales.

hasta que Existe un único conglomerado.

La primera y principal operación del Algoritmo 4.1 consiste en calcular la proximidad entre dos conglomerados, y ésta es la definición de proximidad entre conglomerados que caracteriza los diferentes criterios enunciados anteriormente (Subsección 4.1.2, pág. 106).

El método de conglomeración que se propone para la creación de N -agrupamientos en métodos jerárquicos aglomerativos, y que se denominará *método del consenso*, consiste en un proceso secuencial establecido en la siguientes etapas:

1. El agrupamiento inicial (0-agrupamiento) es $\mathcal{C}_0 = \{\{v_1\}, \dots, \{v_m\}\}$.
2. Se calcula el valor de proximidad entre todos los pares de elementos de \mathcal{C}_0 mediante la medida de agrupamiento S_d (Definición 4.6), $S_d(\{v_i\}, \{v_j\})$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, m\}$, obteniendo una matriz de proximidades.

3. El primer conglomerado C_1 estará formado por los agentes v_p, v_q que maximicen ese valor de proximidad siguiendo un criterio lexicográfico⁴, $C_1 = \{v_p, v_q\}$.
4. Se crea el 1-agrupamiento, $\mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}_0 \setminus \{\{v_p\}, \{v_q\}\} \cup \{C_1\})$.
5. Se actualiza la matriz de proximidades calculando los valores de proximidad entre todos los pares de elementos de \mathcal{C}_1 .
6. Se seleccionan los dos elementos de \mathcal{C}_1 que minimicen esos valores de aproximación siguiendo un criterio lexicográfico, formando el segundo conglomerado C_2 .
7. Procediendo como se indica en el paso 4 se crea el 2-agrupamiento, \mathcal{C}_2 .
8. El proceso continua hasta obtener el último agrupamiento, $\mathcal{C}_{m-1} = \{V\}$.

4.8 Ejemplo. Sea $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ un conjunto formado por cinco agentes que muestran sus preferencias sobre un conjunto de seis alternativas $X = \{x_1, \dots, x_6\}$ mediante los órdenes débiles mostrados en la Figura 4.2.

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
x_1	x_2	x_2	x_1	x_1
x_2	x_1	x_1	x_2	x_4
x_3	x_4	$x_3 x_4$	$x_3 x_4$	x_2
x_4	x_3	x_6	x_6	x_3
$x_5 x_6$	x_5	x_5	x_5	x_5
	x_6			x_6

Figura 4.2: Representación del perfil del Ejemplo 4.8.

Dado que las preferencias vienen representadas por órdenes débiles, la medida de similitud para determinar la proximidad entre órdenes va a ser una de las medidas de consenso analizadas en el Capítulo 3. Por tanto, el primer paso consiste en elegir la distancia que se va a utilizar para determinar la medida de consenso.

En este ejemplo se seguirá un procedimiento jerárquico aglomerativo empleando el método del consenso y la distancia de Kemeny ponderada asociada a $\mathbf{w} = \left(\frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$.

⁴Por ejemplo, si los pares de agentes (v_1, v_4) y (v_2, v_5) verifican $S_d(\{v_1\}, \{v_4\}) = S_d(\{v_2\}, \{v_5\})$, y maximizan el valor de proximidad de todos los posibles pares, entonces el conglomerado que se forma será el compuesto por los agentes v_1 y v_4 .

La Tabla 4.1 muestra las distancias entre todos los órdenes del perfil que serán utilizadas para obtener los valores de proximidad durante todo el proceso.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	0				
R_2	1.1333	0			
R_3	0.9333	0.3333	0		
R_4	0.2667	1.0000	0.6667	0	
R_5	1.0667	1.2667	1.6333	0.9000	0

Tabla 4.1: Valores de $\bar{d}_{K,w}$ entre los órdenes del perfil.

La elección de $\bar{d}_{K,w}$ determina la medida de consenso $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}$ utilizada para obtener los valores de proximidad, tanto entre órdenes como entre conglomerados.

1. Nivel $N = 0$

El agrupamiento inicial es $\mathcal{C}_0 = \{\{v_1\}, \dots, \{v_5\}\}$. El primer paso del proceso consiste en obtener la matriz de proximidades entre todos los pares de órdenes a partir de las distancias de la Tabla 4.1.

Los valores de proximidad se obtienen mediante la medida de agrupamiento⁵ $S_{\bar{d}_{K,w}} : (\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$S_{\bar{d}_{K,w}}(v_i, v_j) = \begin{cases} \mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\}), & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, 5\}$.

La Tabla 4.2 muestra los valores de proximidad obtenidos para la formación del 0-agrupamiento.

El primer conglomerado se formará con los órdenes cuyo valor de proximidad sea máximo.

$$\max_{i \neq j} \{\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, \{v_i, v_j\})\} = 0.9636 = \mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, \{v_1, v_4\}).$$

Por tanto, el primer conglomerado que se forma es $C_1^1 = \{v_1, v_4\}$.

⁵En este nivel, la medida de agrupamiento coincide con la medida de similitud $s_{\bar{d}_{K,w}}$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0				
v_2	0.8455	0			
v_3	0.8727	0.9545	0		
v_4	0.9636	0.8636	0.9091	0	
v_5	0.8545	0.8273	0.7773	0.8773	0

Tabla 4.2: Valores de proximidad entre los agentes, obtenidos con la medida de agrupamiento $S_{\bar{d}_{K,w}}$.

2. Nivel $N = 1$

En este nivel se parte del 1-agrupamiento $\mathcal{C}_1 = \{C_1^1, C_2^1, C_3^1, C_4^1\}$, con $C_2^1 = \{v_2\}$, $C_3^1 = \{v_3\}$ y $C_4^1 = \{v_5\}$. Para la obtención de la nueva matriz de proximidades (Tabla 4.3), es necesario calcular los valores de consenso del nuevo conglomerado con el resto de los elementos de \mathcal{C}_1 , pero para ello se siguen utilizando las distancias de la Tabla 4.1, reduciendo de forma considerable el número de cálculos a realizar respecto de otros procedimientos. Además, no se pierde información sobre los objetos iniciales, ya que no es necesario obtener un elemento representativo del nuevo conglomerado.

	C_1^1	v_2	v_3	v_5
C_1^1	0			
v_2	0.8909	0		
v_3	0.9152	0.9545	0	
v_5	0.8985	0.8273	0.7773	0

Tabla 4.3: Valores de proximidad entre los elementos del 1-agrupamiento \mathcal{C}_1 .

En este caso el mayor valor de proximidad se obtiene entre los agentes v_2 y v_3 .

$$\max_{i \neq j} \{\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, C_i^1 \cup C_j^1)\} = 0.9545 = \mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, \{v_2, v_3\}).$$

Por tanto, el segundo conglomerado que se forma es $C_2^2 = \{v_2, v_3\}$.

3. Nivel $N = 2$

El 2-agrupamiento utilizado en este nivel es $\mathcal{C}_2 = \{C_1^2, C_2^2, C_3^2\}$, con $C_1^2 = C_1^1 = \{v_1, v_4\}$, $C_2^2 = \{v_2, v_3\}$ y $C_3^2 = \{v_5\}$. De nuevo hay que

actualizar la matriz de proximidades (Tabla 4.4), calculando los valores de consenso del nuevo conglomerado con el resto de elementos de \mathcal{C}_2 , pero siempre utilizando los datos iniciales de distancias de la Tabla 4.1.

El mayor valor de proximidad se obtiene entre los elementos C_1^2 y C_2^2 , formándose el conglomerado $C_1^3 = C_1^2 \cup C_2^2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$$\max_{i \neq j} \{\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, C_i^2 \cup C_j^2)\} = 0.9015 = \mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, C_1^2 \cup C_2^2).$$

	C_1^2	C_2^2	v_5
C_1^2	0		
C_2^2	0.9015	0	
v_5	0.8985	0.8530	0

Tabla 4.4: Valores de proximidad entre los elementos del 2-agrupamiento \mathcal{C}_2 .

4. Nivel $N = 3$

El nuevo 3-agrupamiento es $\mathcal{C}_3 = \{C_1^3, C_2^3\} = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}\}$. Obviamente, el último conglomerado es $C_1^4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y el proceso finaliza con el 4-agrupamiento $\mathcal{C}_4 = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\}$, formado por los cinco agentes y cuyo nivel de consenso es

$$\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, V) = 0.8745.$$

El proceso completo de agrupamiento es el siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_1 &= \{\{v_1, v_4\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_4 &= \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\}. \end{aligned}$$

4.1.4.1. Representación gráfica

Los procesos de agrupamiento en los métodos jerárquicos suelen representarse gráficamente mediante un diagrama de árbol denominado *dendrograma*. Un dendrograma es una representación gráfica en forma de árbol que resume el proceso de agrupación en un análisis de conglomerados. Los objetos similares se conectan mediante enlaces cuya posición en el diagrama está determinada por el nivel de similitud/disimilitud entre los objetos.

4.9 Ejemplo. El procedimiento jerárquico aglomerativo expuesto en el Ejemplo 4.8 (pág. 109), se representa gráficamente mediante el dendrograma de la Figura 4.3, donde puede verse claramente cómo han ido formándose los diferentes N -agrupamientos.

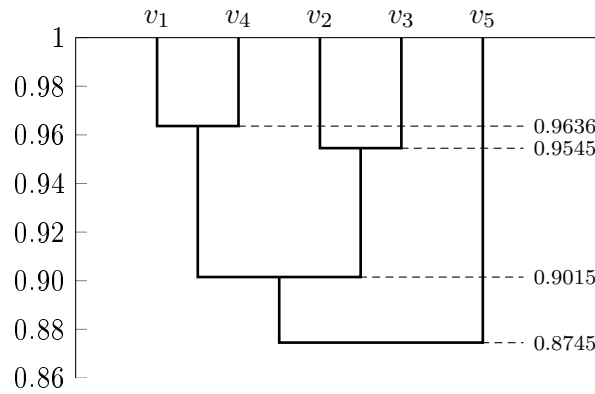


Figura 4.3: Dendrograma del Ejemplo 4.8.

Como ya se indicó en la Observación 4.2 (pág. 104), la elección de la medida de similitud/disimilitud puede condicionar las soluciones alcanzadas durante el proceso de conglomeración, como puede comprobarse en el siguiente ejemplo.

4.10 Ejemplo. La Figura 4.4 muestra el proceso completo de agrupamiento mediante el método del consenso pero utilizando la métrica de Kemeny en lugar de la distancia de Kemeny ponderada. En este caso, el proceso de agrupamiento es el siguiente

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_0 &= \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}\}, \\
 \mathcal{C}_1 &= \{\{v_1, v_4\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_5\}\}, \\
 \mathcal{C}_2 &= \{\{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2\}, \{v_5\}\}, \\
 \mathcal{C}_3 &= \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}\}, \\
 \mathcal{C}_4 &= \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\}.
 \end{aligned}$$

La notable diferencia entre los dos dendrogramas se debe al hecho de que la métrica de Kemeny no tiene en cuenta dónde se presentan los desacuerdos entre las preferencias de los agentes.

Con la métrica de Kemeny el consenso entre los agentes v_1, v_3 y v_4 es mayor que el consenso entre los agentes v_2 y v_3 . Sin embargo, si se da más importancia a lo que sucede en las alternativas mejor valoradas, lo cual es

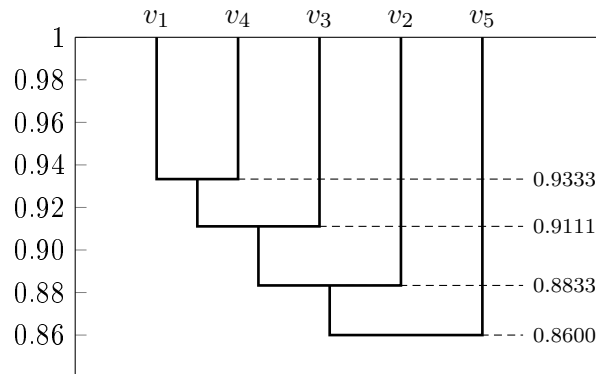


Figura 4.4: Dendrograma del Ejemplo 4.10.

recogido con la distancia de Kemeny ponderada, entonces el consenso entre los agentes puede ser diferente. Esto es lo que sucede en el Ejemplo 4.8, donde el mayor consenso se alcanza entre los agentes v_1 y v_4 (discrepan en las alternativas peor valoradas). A continuación, el mayor consenso es alcanzado entre los agentes v_2 y v_3 (coinciden en las alternativas mejor valoradas), y así sucesivamente.

Este es uno de los argumentos que justifican el motivo por el que la distancia de Kemeny ponderada obtiene valores de disimilitud más reales sobre preferencias representadas mediante órdenes débiles que la métrica de Kemeny a la hora de calcular el consenso existente entre agentes.

Por otro lado, parece razonable pensar que si se invierten las preferencias de un conjunto de agentes, los resultados obtenidos tras un proceso de agrupamiento difieran de los que se obtienen con las preferencias originales.

Las medidas de consenso sobre órdenes débiles basadas en las métricas habituales, en particular \mathcal{M}_{d_K} , son recíprocas (Proposición 3.20, pág. 82). Esto significa que los procesos de agrupamiento de un perfil de preferencias utilizando estas métricas obtienen los mismos conglomerados que con el perfil inverso. Sin embargo, esta propiedad no es satisfecha por las medidas de consenso basadas en la distancia de Kemeny ponderada, por lo que no se crearán los mismos agrupamientos partiendo de un perfil \mathbf{R} que los que se obtendrían con el perfil inverso \mathbf{R}^{-1} .

4.11 Ejemplo. La Figura 4.5 muestra el perfil inverso del Ejemplo 4.8 (pág. 109). Teniendo en cuenta que \mathcal{M}_{d_K} es recíproca, el proceso de agrupamiento es el mismo al realizado en el Ejemplo 4.10 (ver Figura 4.4).

Sin embargo, mediante $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}$, los agrupamientos que se van generando sobre el perfil inverso son diferentes a los generados sobre el perfil inicial, como puede verse en la Figura 4.6. En este caso, el proceso de agrupamiento

R_1^{-1}	R_2^{-1}	R_3^{-1}	R_4^{-1}	R_5^{-1}
$x_5 x_6$	x_6	x_5	x_5	x_6
x_4	x_5	x_6	x_6	x_5
x_3	x_3	$x_3 x_4$	$x_3 x_4$	x_3
x_2	x_4	x_1	x_2	x_2
x_1	x_1	x_2	x_1	x_4
	x_2			x_1

Figura 4.5: Representación del perfil inverso del Ejemplo 4.8.

es el siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_1 &= \{\{v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{\{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2\}, \{v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{\{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_5\}\}, \\ \mathcal{C}_4 &= \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\}. \end{aligned}$$

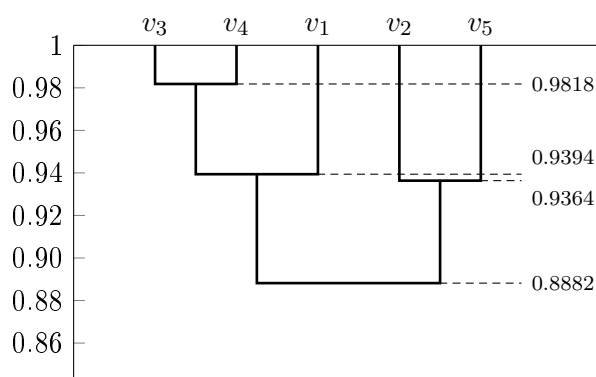


Figura 4.6: Dendrograma del Ejemplo 4.11.

4.1.4.2. Comparación con otros criterios de conglomeración

Algunos de los criterios de conglomeración utilizados habitualmente en los métodos jerárquicos aglomerativos se basan en la elección de un elemento representativo de cada conglomerado para la obtención de la correspondiente medida de similitud/disimilitud entre conglomerados o entre conglomerados y objetos.

Una de las técnicas más utilizadas para la representación de conglomerados mediante un único objeto consiste en tomar como representante el

centroide (la *media* de los objetos). Esta técnica también puede ser aplicada sobre el conjunto de órdenes débiles tomando como elemento representativo el orden débil obtenido aplicando la regla de Borda [17] sobre los órdenes pertenecientes al conglomerado que se quiere representar⁶. La similitud entre conglomerados se obtendría calculando la similitud entre los elementos que los representan mediante la medida seleccionada en el criterio de conglomeración (análogo para distancias).

La elección de un elemento representativo conlleva un aumento en el número de operaciones a realizar durante el proceso de agrupamiento, ya que tras la creación de un nuevo conglomerado es necesario calcular su elemento representativo así como los nuevos valores de proximidad entre ese elemento y el resto de los conglomerados. El método del consenso reduce sensiblemente estas operaciones. En primer lugar, debido a que no existen elementos representativos de los conglomerados, con un ahorro en el proceso de obtención de los mismos, y, en segundo lugar, debido a que para la obtención de los nuevos valores de proximidad se utilizan los datos de la matriz de proximidades inicial, necesitando únicamente operaciones sencillas con esos valores (combinaciones lineales), independientemente de la medida de similitud seleccionada para el proceso.

En el caso de que la métrica seleccionada para medir la distancia entre órdenes sea la métrica de Kemeny y sea necesario representar los conglomerados a través de un único elemento, parece recomendable seleccionar un orden proporcionado por la regla de Kemeny como representante del conglomerado (véase Heiser y D'Ambrosio [56]). Dado un conjunto de órdenes débiles, la regla de Kemeny establece como representante de ese conjunto el orden débil que minimiza la suma de las distancias de Kemeny sobre los órdenes considerados. Sin embargo, es bien conocido que encontrar el orden proporcionado por la regla de Kemeny es un problema NP-complejo⁷ (véase Barthélemy, Guénoche y Hudry [14]), incluso en el caso de cuatro agentes (véase Dwork, Kumar, Naor y Sivakumar [40]).

En este caso, el método del consenso simplifica el proceso y reduce considerablemente los cálculos necesarios para la creación de agrupamientos mediante la distancia de Kemeny e, incluso, facilita el uso de otro tipo de distancias, como la distancia de Kemeny ponderada, que como ya se ha explicado anteriormente es sensible a la posición de las alternativas en las que se producen los desacuerdos.

⁶La regla de Borda ordena las alternativas considerando la media de sus posiciones en el conjunto de órdenes débiles considerado.

⁷No es posible encontrar la solución en un tiempo polinómico, es decir, no existe una función polinómica que determine el tiempo necesario de ejecución de un algoritmo para la resolución del problema.

4.1.5. Un experimento de campo

El siguiente ejemplo muestra el procedimiento jerárquico aglomerativo empleando el método del consenso y la distancia de Kemeny ponderada a partir de los datos obtenidos en un experimento de campo llevado a cabo durante las III Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de Votación (JTSV3) celebradas en Valdeavellano de Tera (Soria), en abril de 2013.

En el experimento se solicitó a 18 participantes de las Jornadas que mostraran sus preferencias sobre siete revistas científicas relacionadas con la temática de las Jornadas:

- a. Economic Theory.
- b. Electoral Studies.
- c. Group Decision and Negotiation.
- d. Mathematical Social Sciences.
- e. Public Choice.
- f. Social Choice and Welfare.
- g. Theory and Decision.

Se pidió a los agentes que ordenaran las revistas, de mejor a peor, de acuerdo a su opinión general, teniendo en cuenta aspectos como su interés, relevancia científica, frecuencia de consulta, etc., en función de los artículos publicados sobre teoría de las votaciones.

Estaba permitido mostrar indiferencia entre dos o más revistas. En el caso de que existiesen revistas que fuesen desconocidas para el agente, se indicó a los participantes que las situasen en el mismo estrato al final de la lista con la etiqueta *unknown*.

El modelo de encuesta utilizado se muestra en las Figuras 4.7 y 4.8 (págs. 119–120).

Las preferencias de los agentes se muestran en la Tabla 4.5, donde las alternativas subrayadas indican desconocimiento reconocido por parte del agente, siendo éste el perfil \mathbf{R} sobre el que se realizará el proceso de conglomeración.

Para la obtención de la matriz de similitudes es necesario codificar previamente los órdenes que representan a las preferencias de los agentes. Siguiendo el sistema de codificación presentado en la Sección 2.2.2 (pág. 24), la Tabla 4.6 muestra los vectores que codifican a los órdenes del perfil \mathbf{R} .

$R_1 \equiv a \sim f \succ b \sim d \succ e \sim g \succ c$	$R_{10} \equiv f \succ a \sim d \succ c \succ e \sim g \succ b$
$R_2 \equiv d \sim f \succ a \succ b \sim e \succ c \sim g$	$R_{11} \equiv e \succ f \succ a \sim g \succ c \succ b \sim d$
$R_3 \equiv f \succ e \succ d \succ a \succ b \sim c \sim g$	$R_{12} \equiv f \succ d \succ e \succ g \succ b \succ a \succ c$
$R_4 \equiv f \succ a \sim g \succ e \succ d \succ b \succ c$	$R_{13} \equiv a \succ f \sim g \succ c \sim d \sim e \succ b$
$R_5 \equiv a \succ f \succ e \succ d \succ g \succ c \succ b$	$R_{14} \equiv f \succ a \sim e \succ d \sim g \succ c \succ b$
$R_6 \equiv a \succ f \succ e \succ g \succ c \sim d \succ b$	$R_{15} \equiv a \succ f \succ e \succ d \succ b \sim c \sim g$
$R_7 \equiv f \succ g \succ a \succ c \succ d \succ b \sim e$	$R_{16} \equiv a \sim f \succ d \succ b \sim e \succ c \sim g$
$R_8 \equiv f \sim a \sim e \succ g \succ b \sim c \sim d$	$R_{17} \equiv a \succ f \succ e \succ d \succ g \succ b \succ c$
$R_9 \equiv d \succ b \succ e \succ f \succ g \succ a \sim c$	$R_{18} \equiv f \succ a \sim d \sim g \succ e \succ c \succ b$

Tabla 4.5: Perfil \mathbf{R} del experimento de campo JTSV3.


$\mathbf{p}_{R_1} = (1.5, 3.5, 7, 3.5, 5.5, 1.5, 5.5)$	$\mathbf{p}_{R_{10}} = (2.5, 7, 4, 2.5, 5.5, 1, 5.5)$
$\mathbf{p}_{R_2} = (3, 4.5, 6.5, 1.5, 4.5, 1.5, 6.5)$	$\mathbf{p}_{R_{11}} = (3.5, 6.5, 5, 6.5, 1, 2, 3.5)$
$\mathbf{p}_{R_3} = (4, 6, 6, 3, 2, 1, 6)$	$\mathbf{p}_{R_{12}} = (6, 5, 7, 2, 3, 1, 4)$
$\mathbf{p}_{R_4} = (2.5, 6, 7, 5, 4, 1, 2.5)$	$\mathbf{p}_{R_{13}} = (1, 7, 5, 5, 5, 2.5, 2.5)$
$\mathbf{p}_{R_5} = (1, 7, 6, 4, 3, 2, 5)$	$\mathbf{p}_{R_{14}} = (2.5, 7, 6, 4.5, 2.5, 1, 4.5)$
$\mathbf{p}_{R_6} = (1, 7, 5.5, 5.5, 3, 2, 4)$	$\mathbf{p}_{R_{15}} = (1, 6, 6, 4, 3, 2, 6)$
$\mathbf{p}_{R_7} = (3, 6.5, 4, 4, 6.5, 1, 2)$	$\mathbf{p}_{R_{16}} = (1.5, 4.5, 6.5, 3, 4.5, 1.5, 6.5)$
$\mathbf{p}_{R_8} = (2, 6, 6, 6, 2, 2, 4)$	$\mathbf{p}_{R_{17}} = (1, 6, 7, 4, 3, 2, 5)$
$\mathbf{p}_{R_9} = (6.5, 2, 6.5, 1, 3, 4, 5)$	$\mathbf{p}_{R_{18}} = (3, 7, 6, 3, 5, 1, 3)$


Tabla 4.6: Codificación de los órdenes del perfil \mathbf{R} .


La distancia seleccionada para obtener la matriz de proximidades entre pares de órdenes fue la distancia de Kemeny ponderada asociada al vector $\mathbf{w} = (\frac{6}{21}, \frac{5}{21}, \frac{4}{21}, \frac{3}{21}, \frac{2}{21}, \frac{1}{21})$. La Tabla 4.7 muestra las distancias entre todos los órdenes del perfil \mathbf{R} que serán utilizadas para obtener los valores de proximidad durante todo el proceso.


SURVEY QUESTION: SCIENTIFIC JOURNALS ON VOTING


Please, rank order, from best to worst, the following academic journals according to your overall opinion, taking into account their interest, scientific relevance, etc., when publishing papers about voting theory.


a.  ***Economic Theory***

b.  ***Electoral Studies***

c.  ***Group Decision and Negotiation***

d.  ***Mathematical Social Sciences***

e.  ***Public Choice***

f.  ***Social Choice and Welfare***


g.  ***Theory and Decision***

Figura 4.7: Modelo de encuesta utilizado en el experimento de las III Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de votación (JTSV3) (Cara A).

For example:		
Arrange the journals by their corresponding assigned letters:	If you are indifferent among two or more journals:	If you are unable to rank some of them:
c (best)	f	b
e	b d (indifferent)	a c
g	a	e
a	e g (indifferent)	f
b	c	d g (unknown)
d		
f (worst)		

Your answer:

THANK YOU

Figura 4.8: Modelo de encuesta utilizado en el experimento de las III Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de Votación (JTSV3) (Cara B).

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	R_{17}	R_{18}
R_1	0	1.6905	2.8095	2.2857	1.8333	2.2857	2.7619	2.5238	4.1429	2.0476	3.9286	3.1667	2.6429	2.3810	1.6667	0.5476	1.5952	2.2857
R_2	1.6905	0	1.6429	2.9286	2.5000	3.2381	3.3095	3.5174	2.7619	1.5952	4.3810	1.8333	3.8810	2.4762	2.2143	1.0952	2.3095	2.1667
R_3	2.8095	1.6429	0	2.2857	1.8095	2.3571	3.5476	2.0952	3.6905	1.9762	2.2143	1.3095	3.6905	1.1190	1.5714	2.1190	1.8095	2.2619
R_4	2.2857	2.9286	2.2857	0	1.7381	1.5000	1.1667	1.7857	5.4048	2.3095	1.9762	2.6190	1.6667	1.1905	2.0238	2.3095	1.6429	0.9286
R_5	1.8333	2.5000	1.8095	1.7381	0	0.4048	2.7857	1.3810	5.5000	1.9762	2.5238	2.9524	1.5000	0.9762	0.2381	1.3333	0.0952	2.0714
R_6	2.2857	3.2381	2.3571	1.5000	0.4048	0	2.2619	0.9762	6.2143	2.5714	2.0238	3.5476	0.9762	1.0952	0.7143	1.9286	0.5476	2.2381
R_7	2.7619	3.3095	3.5476	1.1667	2.7857	2.2619	0	2.9762	5.4762	1.9286	2.9762	2.8810	1.7143	2.3095	3.2143	2.7857	2.9762	1.1667
R_8	2.5238	3.5174	2.0952	1.7857	1.3810	0.9762	2.9762	0	5.5476	3.2619	1.2143	3.3810	2.1667	0.9762	1.5238	2.3333	1.3810	2.7857
R_9	4.1429	2.7619	3.6905	5.4048	5.5000	6.2143	5.4762	5.5476	0	4.9286	4.9524	2.4286	6.7381	5.0476	5.2857	4.0238	5.2143	4.7143
R_{10}	2.0476	1.5952	1.9762	2.3095	1.9762	2.5714	1.9286	3.2619	4.9286	0	3.8095	2.3810	2.6190	1.9286	2.0476	1.5952	2.1667	1.2381
R_{11}	3.9286	4.3810	2.2143	1.9762	2.5238	2.0238	2.9762	1.2143	4.9524	3.8095	0	3.0238	3.1905	1.5476	2.8810	3.7619	2.6667	2.8810
R_{12}	3.1667	1.8333	1.3095	2.6190	2.9524	3.5476	2.8810	3.3810	2.4286	2.3810	3.0238	0	4.3095	2.1667	3.1190	2.6429	2.8095	1.9286
R_{13}	2.6429	3.8810	3.6905	1.6667	1.5000	0.9762	1.7143	2.1667	6.7381	2.6190	3.1905	4.3095	0	2.2619	1.9286	2.6667	1.6905	2.0476
R_{14}	2.3810	2.4762	1.1190	1.1905	0.9762	1.0952	2.3095	0.9762	5.0476	1.9286	1.5476	2.1667	2.2619	0	1.2619	1.9048	1.0714	1.5000
R_{15}	1.6667	2.2143	1.5714	2.0238	0.2381	0.7143	3.2143	1.5238	5.2857	2.0476	2.8810	3.1190	1.9286	1.2619	0	1.0476	0.2381	2.4524
R_{16}	0.5476	1.0952	2.1190	2.3095	1.3333	1.9286	2.7857	2.3333	4.0238	1.5952	3.7619	2.6429	2.6667	1.9048	1.0476	0	1.1429	2.1667
R_{17}	1.5952	2.3095	1.8095	1.6429	0.0952	0.5476	2.9762	1.3810	5.2143	2.1667	2.6667	2.8095	1.6905	1.0714	0.2381	1.1429	0	2.1667
R_{18}	2.2857	2.1667	2.2619	0.9286	2.0714	2.2381	1.1667	2.7857	4.7143	1.2381	2.8810	1.9286	2.0476	1.5000	2.4524	2.1667	2.1667	0

Tabla 4.7: Distancia $\bar{d}_{K,w}$ entre pares de órdenes a partir de la codificación del perfil \mathbf{R} .

Para la formación de los conglomerados se utilizó el método del consenso descrito en la Sección 4.1.4 (pág. 108). La Figura 4.9 muestra el dendrograma obtenido mediante la medida de consenso $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}$.

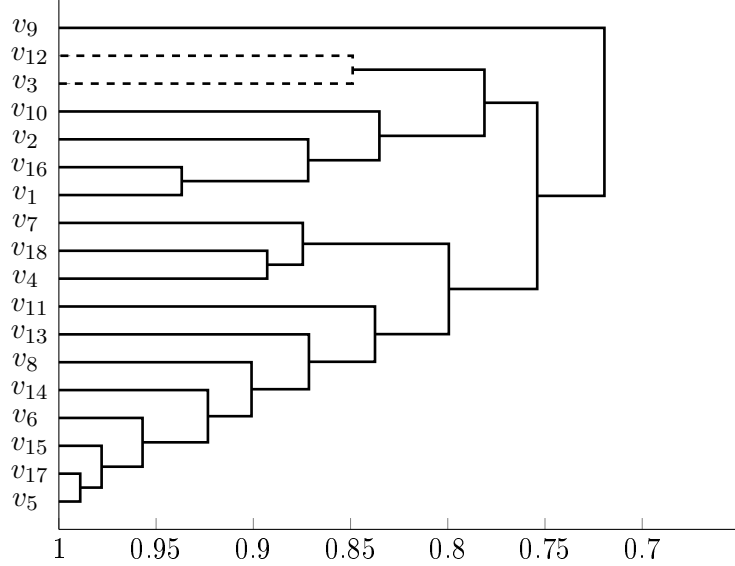


Figura 4.9: Dendrograma del experimento de campo JTSV3 utilizando la distancia $\bar{d}_{K,w}$.

Puede observarse que hay tres conglomerados claramente diferenciados obtenidos en el 15-agrupamiento $\mathcal{C}_{15} = \{C_1^{15}, C_2^{15}, \{v_9\}\}$, con

$$\begin{aligned} C_1^{15} &= \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{11}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{18}\} \\ C_2^{15} &= \{v_1, v_2, v_3, v_{12}, v_{10}, v_{16}\}. \end{aligned}$$

El agente v_9 no pasa a formar parte de ningún conglomerado hasta el último N -agrupamiento indicando que sus preferencias difieren notablemente de las del resto de agentes.

Con el objeto de comparar la formación de conglomerados en función de la distancia considerada, se realizó el proceso de conglomeración utilizando la medida de consenso asociada a la distancia de Kemeny. La Figura 4.10 muestra el dendrograma obtenido mediante la medida de consenso \mathcal{M}_{d^K} .

Las agrupaciones de los agentes son similares en los dos procedimientos excepto para los agentes v_3 y v_{12} (líneas discontinuas). Mientras que con la distancia de Kemeny ponderada estos agentes forman un agrupamiento claramente diferenciado, al considerar la distancia de Kemeny el agente v_3 pasa a formar parte de un agrupamiento mucho antes que el agente v_{12} .

Si se compara las preferencias del agente v_3 con las del agente v_{12} , se observa que tienen un alto grado de coincidencia en las alternativas mejor

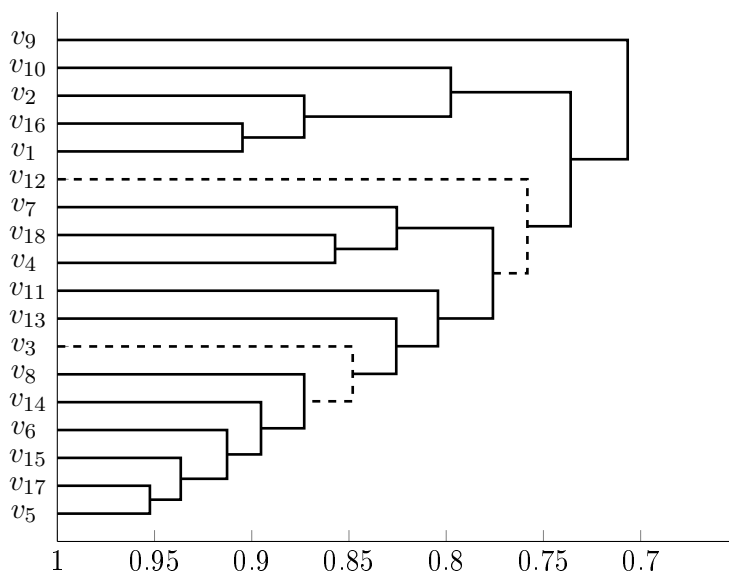


Figura 4.10: Dendrograma del experimento de campo JTSV3 utilizando la distancia d^K .

valoradas, mientras que al compararlas con las del agente v_5 , las coincidencias se producen en las alternativas peor valoradas. La Tabla 4.8 muestra las preferencias de estos agentes.

Con la distancia de Kemeny ponderada el agente más próximo a v_3 es v_{12} por lo que forman su primer agrupamiento⁸, mientras que con la distancia de Kemeny el agente v_3 pasa a formar parte del conglomerado donde está incluido el agente v_5 antes⁹ de que el agente v_{12} pase a formar parte del conglomerado al seguir el criterio lexicográfico. De hecho, v_{12} es el último agente que se incorpora a ese primer gran conglomerado.

$$\overline{R_{12} \equiv f \succ d \succ e \succ g \succ b \succ a \succ c}$$

$$R_3 \equiv f \succ e \succ d \succ a \succ b \sim c \sim g$$

$$\overline{R_5 \equiv a \succ f \succ e \succ d \succ g \succ c \succ b}$$

Tabla 4.8: Preferencias de los agentes v_3 , v_8 y v_{12} .

⁸ $\mathcal{M}_{\bar{d}_{K,w}}(\mathbf{R}, \{v_3, v_{12}\}) = 0.8489$. Los siguientes agentes más próximos a v_3 son v_5 y v_{17} donde el valor de proximidad entre los agentes es 0.7912 en ambos casos.

⁹ $\mathcal{M}_{d^K}(\mathbf{R}, \{v_3, v_5\}) = \mathcal{M}_{d^K}(\mathbf{R}, \{v_3, v_{12}\}) = \mathcal{M}_{d^K}(\mathbf{R}, \{v_3, v_{17}\}) = 0.7857$.

Conclusiones y trabajo futuro

A continuación se revisan las principales propuestas y los resultados obtenidos en esta memoria de investigación. Finalmente se exponen algunas líneas de investigación y trabajo futuro a desarrollar a partir de los resultados obtenidos.

Conclusiones y resultados obtenidos

Cuando un grupo de agentes muestra sus preferencias sobre un conjunto de alternativas resulta interesante conocer el grado de acuerdo entre los miembros del grupo y en cada uno de los subgrupos que puedan formar. Este grado de acuerdo puede interpretarse como el nivel de consenso existente entre los agentes.

Las preferencias suelen representarse como órdenes o rankings sobre las posibles alternativas a partir de los cuales se obtiene una preferencia colectiva que trata de aglutinar las preferencias de todos los agentes. Existen numerosos procedimientos para obtener una preferencia colectiva a partir de las preferencias individuales. Sin embargo, la preferencia colectiva no recoge el grado de acuerdo existente entre los agentes. Dicho grado de acuerdo es lo que en esta tesis se ha considerado con el término consenso.

Uno de los resultados obtenidos en esta tesis es la extensión del concepto de medida de consenso, introducido por Bosch para órdenes lineales, al contexto de órdenes débiles, órdenes dicotómicos y preferencias aprobatorias. Estas medidas de consenso son generadas a partir de distancias entre las preferencias individuales, estableciendo un procedimiento por el que es posible obtener, a partir de una distancia dada, la medida de consenso asociada. Para ello, se han establecido sistemas de codificación de órdenes débiles, órdenes dicotómicos y preferencias aprobatorias.

Los resultados obtenidos pueden resumirse en los siguientes puntos.

Sistemas de codificación y distancias

- Se ha establecido un sistema de codificación de órdenes débiles mediante vectores que representan las posiciones relativas de las alternativas en el orden correspondiente. A partir de este sistema de codificación se ha caracterizado de forma biunívoca el conjunto de órdenes débiles mediante subconjuntos de vectores, por lo que es posible obtener el orden de las alternativas mostrado en las preferencias de los agentes a partir del vector correspondiente.
- Una preferencia aprobatoria queda caracterizada por un orden débil y un orden dicotómico consistentes entre sí. A partir del sistema de codificación definido sobre órdenes débiles y la representación utilizada habitualmente para la representación de órdenes dicotómicos mediante vectores binarios, se ha establecido un sistema de codificación de preferencias aprobatorias que caracteriza de forma biunívoca dichas preferencias mediante un par de vectores.
- Se ha descrito un procedimiento para definir distancias sobre órdenes débiles inducidas por distancias sobre \mathbb{R}^n a partir del sistema de codificación propuesto. Además, este sistema de codificación permite obtener la métrica de Kemeny definida sobre órdenes débiles mediante cálculos sencillos.
- Se han definido distancias ponderadas sobre órdenes débiles a partir de la métrica de Kemeny. Estas distancias recogen no sólo los desacuerdos que se producen en la ordenación de las alternativas, sino que también tienen en cuenta dónde se producen dichos desacuerdos, dando mayor importancia a que se produzcan discrepancias en las alternativas mejor valoradas. Estas nuevas distancias son neutrales y no siempre verifican la desigualdad triangular. En el caso de que el vector de pesos tenga todas sus componentes iguales, la distancia obtenida es equivalente a la de Kemeny.
- En el contexto de órdenes dicotómicos se han definido nuevas distancias que son sensibles a que los desacuerdos se produzcan en las alternativas aceptadas o en las rechazadas. Estas distancias, a diferencia de los índices utilizados habitualmente, no sólo tienen en cuenta el número de coincidencias, sino que ponderan el número de alternativas en las que los agentes no coinciden.
- A partir de las distancias definidas sobre órdenes débiles y órdenes dicotómicos se han definido nuevas distancias sobre preferencias aprobatorias.

Medidas de consenso

A partir de las distancias definidas y analizadas en el Capítulo 2, se ha extendido el concepto de medida de consenso a los contextos de órdenes débiles, órdenes dicotómicos y preferencias aprobatorias. Estas medidas de consenso permiten medir el grado de acuerdo existente entre las preferencias de un grupo de agentes a partir de una distancia considerada. Las propiedades adicionales que puedan verificar dependerán de la distancia seleccionada.

- En el contexto de órdenes débiles se ha definido una función que permite obtener medidas de consenso a partir de cualquier distancia que verifique neutralidad y la identidad de indiscernibles. Además de las propiedades de unanimidad, anonimato y neutralidad necesarias para que una función pueda ser considerada medida de consenso se han analizado otras propiedades que pueden verificar en función de la distancia utilizada (máximo disentiendo, reciprocidad y homogeneidad), presentando un cuadro comparativo (Tabla 3.1, pág. 90) de las métricas y distancias analizadas a lo largo de la memoria.

Cabe destacar que a partir de las distancias de Kemeny ponderadas sólo se obtienen medidas de consenso cuando ninguna componente del vector de pesos es nula. En este caso, si existen dos componentes diferentes en el vector de pesos, la medida de consenso asociada no es recíproca.

- Se ha realizado un estudio similar en el contexto de órdenes dicotómicos y preferencias aprobatorias, analizando las propiedades que verifican las medidas de consenso asociadas a las distancias definidas previamente. De nuevo, las medidas de consenso asociadas son recíprocas cuando las distancias consideradas son métricas, propiedad que deja de verificarse al considerar distancias ponderadas.

Análisis de conglomerados

Finalmente, en esta memoria se han utilizado las medidas de consenso como medidas de similitud para la creación de conglomerados. Esto ha permitido obtener un nuevo criterio, denominado método del consenso, para la obtención de agrupamientos dentro de los métodos jerárquicos aglomerativos sobre órdenes débiles. En los criterios de conglomeración utilizados habitualmente, cada vez que se crea un nuevo conglomerado es necesario calcular su elemento representativo, así como los nuevos valores de proximidad entre ese elemento y el resto de los conglomerados. El método del consenso reduce sensiblemente estas operaciones. En primer lugar, debido a que no existen elementos representativos de los conglomerados, con un ahorro en el proceso

de obtención de los mismos y, en segundo lugar, debido a que para la obtención de los nuevos valores de proximidad se utilizan los datos de la matriz de proximidades inicial, necesitando únicamente operaciones sencillas con esos valores (combinaciones lineales).

En el caso de que la métrica seleccionada para medir la distancia entre órdenes sea la métrica de Kemeny y sea necesario representar los conglomerados a través de un único elemento, parece lógico seleccionar el orden proporcionado por la regla de Kemeny como representante del conglomerado, con la consiguiente dificultad que ello conlleva. El método del consenso simplifica el proceso y reduce considerablemente los cálculos necesarios para la creación de agrupamientos mediante la distancia de Kemeny y facilita el uso de otro tipo de distancias, como las distancias de Kemeny ponderadas.

Trabajo futuro

Las clases de medidas de consenso analizadas en esta tesis descansan sobre una idea básica: tener en cuenta la media aritmética de las distancias entre las opiniones individuales.

Una posible extensión del trabajo realizado consiste en considerar otro tipo de funciones de agregación más generales que la media aritmética, como los operadores OWA (que, junto a la media aritmética, incluyen a la mediana, las medias recortadas, el máximo, el mínimo, etc.) o las medias cuasiaritméticas (que, junto a la media aritmética, incluyen a las medias exponenciales, potenciales, armónicas, etc.). Analizar cuándo se obtienen medidas de consenso y las propiedades correspondientes en cada caso es un trabajo de interés, pendiente de llevar a cabo.

Otra tarea que se pretende realizar es analizar el consenso existente entre los agentes cuando éstos otorgan valoraciones lingüísticas a las alternativas, como en el sistema de votación Majority Judgment, así como en otros escenarios donde se permite a los agentes ser imprecisos, asignando varios términos lingüísticos consecutivos a las alternativas.

Conocer las propiedades de las medidas de consenso propuestas o pendientes de diseñar es relevante, pero no por ello se ha de renunciar a proporcionar caracterizaciones axiomáticas de ellas. Queda pendiente llevar a cabo dicha tarea.

Todo lo anterior responde al propósito de conocer el grado de homogeneidad de las opiniones de grupos de agentes. Una vez determinado el consenso existente entre los agentes, dicha información puede ser utilizada en procesos dinámicos de búsqueda del consenso. En tales casos un moderador trata de aproximar posturas entre los agentes, antes de proceder a aplicar un sistema de votación. Conocer el grado de consenso existente en cada caso y saber

cómo aumentarlo resulta fundamental para llevar a cabo dichos procesos. Una tarea pendiente consiste en elaborar algoritmos que permitan conducir estos procedimientos y aplicarlos a situaciones reales.

Otra tarea que puede llevarse a cabo, y que fue parcialmente desarrollada en varias ponencias presentadas en congresos, pero que no forma parte de esta tesis, consiste en analizar el consenso existente en un grupo de agentes respecto del resultado de aplicar un sistema de votación. En tales casos, el consenso se puede medir a través de la suma de distancias entre las opiniones individuales y el resultado de la votación.

Por otra parte, el uso de medidas de consenso como medidas de similitud para la creación de conglomerados puede extenderse a muy diversas situaciones, toda vez que las medidas de consenso analizadas en la tesis vienen definidas a través de distancias entre vectores. Así, cuando los objetos a aglomerar están caracterizados por vectores que definen sus características respecto de varios criterios o atributos, es factible aplicar las técnicas desarrolladas en el cuarto capítulo de la tesis. Analizar las posibles ventajas de los métodos de aglomeración correspondientes y aplicarlos a situaciones reales de muy diversos ámbitos es una tarea pendiente que forma parte de un proyecto de investigación.

Bibliografía

- [1] ABU-JAMOUS, B.; FA, R.; ROBERTS, D.J. y NANDI, A.K.: «Yeast gene CMR1/YDL156W is consistently co-expressed with genes participating in DNA-metabolic processes in a variety of stringent clustering experiments». *Journal of The Royal Society Interface*, 2013, **10(81)**. doi:[10.1098/rsif.2012.0990](https://doi.org/10.1098/rsif.2012.0990).
- [2] ALCALDE-UNZU, J. y VORSATZ, M.: «Size approval voting». *Journal of Economic Theory*, 2009, **144(3)**, pp. 1187–1210. doi:[10.1016/j.jet.2008.08.002](https://doi.org/10.1016/j.jet.2008.08.002).
- [3] —: «Measuring consensus: Concepts, comparisons, and properties». En: [57], pp. 195–212, 2011. doi:[10.1007/978-3-642-20533-0_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20533-0_12).
- [4] —: «Measuring the cohesiveness of preferences: an axiomatic analysis». *Social Choice and Welfare*, en prensa. doi:[10.1007/s00355-012-0716-9](https://doi.org/10.1007/s00355-012-0716-9).
- [5] ALCANTUD, J.C.R.; DE ANDRÉS CALLE, R. y CASCÓN, J.M.: «On measures of cohesiveness under dichotomous opinions: Some characterizations of approval consensus measures». *Information Sciences*, 2013, **240(0)**, pp. 45–55. doi:[10.1016/j.ins.2013.03.061](https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.03.061).
- [6] —: «A unifying model to measure consensus solutions in a society». *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, **57(7–8)**, pp. 1876–1883. doi:[10.1016/j.mcm.2011.12.020](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.12.020).
- [7] ALÓS FERRER, C: «A simple characterization of approval voting». *Social Choice and Welfare*, 2006, **27**, pp. 621–625. doi:[10.1007/s00355-006-0145-8](https://doi.org/10.1007/s00355-006-0145-8).
- [8] ANDERBERG, M.R.: *Cluster Analysis for Applications*. Series in Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, 1973.

- [9] BAIGENT, N.: «Metric rationalisation of social choice functions according to principles of social choice». *Mathematical Social Sciences*, 1987, **13**(1), pp. 59–65. doi:[10.1016/0165-4896\(87\)90059-X](https://doi.org/10.1016/0165-4896(87)90059-X).
- [10] ———: «Preference proximity and anonymous social choice». *The Quarterly Journal of Economics*, 1987, **102**(1), pp. 161–169.
- [11] BALDIGA, K. y GREEN, J.: «Assent-maximizing social choice». *Social Choice and Welfare*, 2013, **40**(2), pp. 439–460. doi:[10.1007/s00355-011-0614-6](https://doi.org/10.1007/s00355-011-0614-6).
- [12] BALINSKI, M. y LARAKI, R.: «A theory of measuring, electing, and ranking». *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2007, **104**(21), pp. 8720–8725. doi:[10.1073/pnas.0702634104](https://doi.org/10.1073/pnas.0702634104).
- [13] ———: *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing*. MIT Press, 2011.
- [14] BARTHÉLEMY, J.P.; GUÉNOCHE, A. y HUDRY, O.: «Median linear orders: Heuristics and a branch and bound algorithm». *European Journal of Operational Research*, 1989, **42**(3), pp. 313–325. doi:[10.1016/0377-2217\(89\)90442-6](https://doi.org/10.1016/0377-2217(89)90442-6).
- [15] BARTHÉLEMY, J.P. y MONJARDET, B.: «The median procedure in cluster analysis and social choice theory». *Mathematical Social Sciences*, 1981, **1**(3), pp. 235–267. doi:[10.1016/0165-4896\(81\)90041-X](https://doi.org/10.1016/0165-4896(81)90041-X).
- [16] BLACK, D.: «Partial justification of the Borda count». *Public Choice*, 1976, **28**(1), pp. 1–15. doi:[10.1007/BF01718454](https://doi.org/10.1007/BF01718454).
- [17] BORDA, J.C.: «Mémoire sur les élections au scrutin». *Histoire de l'Académie Royals des Sciences*, 1781.
- [18] BORSÍK, J. y DOBOŠ, J.: «On a product of metric spaces». *Mathematica Slovaca*, 1981, **31**, pp. 193–205.
- [19] BOSCH, R.: *Characterizations of Voting Rules and Consensus Measures*. Tesis doctoral, Tilburg University, 2005.
- [20] BRAMS, S.J.: «Approval voting in multicandidate elections». *Policy Studies Journal*, 1980, **9**(1), pp. 102–108. doi:[10.1111/j.1541-0072.1980.tb00928.x](https://doi.org/10.1111/j.1541-0072.1980.tb00928.x).
- [21] ———: *Mathematics and Democracy: Designing Better Voting and Fair-Division Procedures*. Princeton University Press, 2008.
- [22] BRAMS, S.J. y FISHBURN, P.C.: «Approval voting». *American Political Science Review*, 1978, **72**(3), pp. 831–847.

- [23] —: «Voting procedures». *Handbook of Social Choice and Welfare*, 2002, **1**, pp. 173–236. doi:[10.1016/S1574-0110\(02\)80008-X](https://doi.org/10.1016/S1574-0110(02)80008-X).
- [24] —: «Going from theory to practice: the mixed success of approval voting». *Social Choice and Welfare*, 2005, **25**, pp. 457–474. doi:[10.1007/s00355-005-0013-y](https://doi.org/10.1007/s00355-005-0013-y).
- [25] BRAMS, S.J.; KILGOUR, D. y SANVER, M.R.: «A minimax procedure for electing committees». *Public Choice*, 2007, **132**, pp. 401–420. doi:[10.1007/s11127-007-9165-x](https://doi.org/10.1007/s11127-007-9165-x).
- [26] —: «A minimax procedure for negotiating multilateral treaties». En: Avenhaus R. y I. William (Eds.), *Diplomacy Games*, Volumen XX, pp. 265–282. Springer Berlin / Heidelberg, 2007. doi:[10.1007/978-3-540-68304-9_14](https://doi.org/10.1007/978-3-540-68304-9_14).
- [27] BRAMS, S.J. y SANVER, M.R.: «Critical strategies under approval voting: Who gets ruled in and ruled out». *Electoral Studies*, 2006, **25(2)**, pp. 287–305. doi:[10.1016/j.electstud.2005.05.007](https://doi.org/10.1016/j.electstud.2005.05.007).
- [28] —: «Voting systems that combine approval and preference». En: Steven J. Brams; William V. Gehrlein y Fred S. Roberts (Eds.), *The Mathematics of Preference, Choice and Order*, Studies in Choice and Welfare, pp. 215–237. Springer Berlin / Heidelberg, 2009. doi:[10.1007/978-3-540-79128-7_12](https://doi.org/10.1007/978-3-540-79128-7_12).
- [29] CAN, B.: *Essays in Microeconomic Theory*. Tesis doctoral, Maastricht University, 2012.
- [30] CASASNOVAS, J. y ROSSELLÓ, F.: «Averaging fuzzy biopolymers». *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, **152(1)**, pp. 139–158. doi:[10.1016/j.fss.2004.10.019](https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.10.019).
- [31] CHOI, S.; CHA, S. y TAPPERT, C.C.: «A survey of binary similarity and distance measures». *Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics*, 2010, **8(1)**, pp. 43–48.
- [32] COOK, W.D.; KRESS, M. y SEIFORD, L.M.: «A general framework for distance-based consensus in ordinal ranking models». *European Journal of Operational Research*, 1996, **96(2)**, pp. 392–397. doi:[10.1016/0377-2217\(95\)00322-3](https://doi.org/10.1016/0377-2217(95)00322-3).
- [33] COOK, W.D. y SEIFORD, L.M.: «Priority ranking and consensus formation». *Management Science*, 1978, **24(16)**, pp. 1721–1732. doi:[10.1287/mnsc.24.16.1721](https://doi.org/10.1287/mnsc.24.16.1721).
- [34] —: «On the Borda-Kendall consensus method for priority ranking problems». *Management Science*, 1982, **28**, pp. 621–637. doi:[10.1287/mnsc.28.6.621](https://doi.org/10.1287/mnsc.28.6.621).

- [35] DE SINOPOLI, F.; DUTTA, B. y LASLIER, J.F.: «Approval voting: three examples». *International Journal of Game Theory*, 2006, **35**, pp. 27–38. doi:[10.1007/s00182-006-0053-2](https://doi.org/10.1007/s00182-006-0053-2).
- [36] DEZA, M.M. y DEZA, E.: *Encyclopedia of Distances*. Springer-Verlag, 2006. doi:[10.1007/978-3-642-00234-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00234-2).
- [37] DICE, L. R.: «Measures of the amount of ecologic association between species». *Ecology*, 1945, **26(3)**, pp. 297–302.
- [38] DILLON, W. R. y GOLDSTEIN, M.: *Multivariate Analysis. Methods and Applications*. John Wiley and Sons, 1984.
- [39] DRIVER, H. E. y KROEBER, A. L.: *Quantitative expression of cultural relationships*. Berkeley: University of California press, 1932.
- [40] DWORK, C.; KUMAR, R.; NAOR, M. y SIVAKUMAR, D.: «Rank aggregation methods for the Web». En: *Proceedings of the 10th International Conference on World Wide Web, WWW '01*, pp. 613–622. ACM, 2001. doi:[10.1145/371920.372165](https://doi.org/10.1145/371920.372165).
- [41] ECKERT, D. y KLAMLER, C.: «Distance-based aggregation theory». En: [57], pp. 3–23, 2011.
- [42] EKLUND, P.; RUSINOWSKA, A. y DE SWART, H.: «Consensus reaching in committees». *European Journal of Operational Research*, 2007, **178(1)**, pp. 185–193. doi:[10.1016/j.ejor.2005.11.012](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.11.012).
- [43] ERDAMAR, B.; GARCÍA-LAPRESTA, J.L.; PÉREZ-ROMÁN, D. y SANVER, M.R.: «Measuring consensus in a preference-approval context». *Information Fusion*, en prensa. doi:[10.1016/j.inffus.2012.02.004](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2012.02.004).
- [44] ESTIVILL-CASTRO, V.: «Why so many clustering algorithms: a position paper». *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 2002, **4(1)**, pp. 65–75. doi:[10.1145/568574.568575](https://doi.org/10.1145/568574.568575).
- [45] EVERITT, B.S.; LANDAU, S.; LEESE, M. y STAHL, D.: *Cluster Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, 2011.
- [46] FELSENTHAL, D.S.: «On combining approval with disapproval voting». *Behavioral Science*, 1989, **34(1)**, pp. 53–60. doi:[10.1002/bs.3830340105](https://doi.org/10.1002/bs.3830340105).
- [47] FISHBURN, P.C. y BRAMS, S.J.: «Approval voting, Condorcet's principle, and runoff elections». *Public Choice*, 1981, **36**, pp. 89–114. doi:[10.1007/BF00163773](https://doi.org/10.1007/BF00163773).

- [48] GAERTNER, W.: *A Primer in Social Choice Theory. Revised Edition*. Oxford University Press, 2009.
- [49] GARCÍA-LAPRESTA, J.L.: «Favoring consensus and penalizing disagreement in group decision making». *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 2008, **12(5)**, pp. 416–421.
- [50] GARCÍA-LAPRESTA, J.L. y PÉREZ-ROMÁN, D.: «Some consensus measures and their applications in group decision making». En: D. Ruan; J. Montero; J. Lu; L. Martínez; P. D’hondt y E.E. Kerre (Eds.), *Computational Intelligence in Decision and Control*, Volumen 1, pp. 611–616. World Scientific Pub Co Inc, 2008. doi:[10.1142/9789812799470_0100](https://doi.org/10.1142/9789812799470_0100).
- [51] —: «Consensus measures generated by weighted Kemeny distances on weak orders». En: *Intelligent Systems Design and Applications (ISDA), 2010 10th International Conference on*, pp. 463–468. IEEE, 2010. doi:[10.1109/ISDA.2010.5687220](https://doi.org/10.1109/ISDA.2010.5687220).
- [52] GARCÍA-LAPRESTA, J.L. y RODRÍGUEZ-PALMERO, C.: «Some algebraic characterizations of preference structures». *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 2004, **7(2)**, pp. 233–254. doi:[10.1080/09720502.2004.10700371](https://doi.org/10.1080/09720502.2004.10700371).
- [53] GINI, C.: *Corso di Statistica*. Virgilio Veschi, 1955.
- [54] HAMMING, R.W.: «Error detecting and error correcting codes». *Bell System Technical Journal*, 1950, **29(2)**, pp. 147–160.
- [55] HAYS, W.L.: «A note on average tau as a measure of concordance». *Journal of the American Statistical Association*, 1960, **55(290)**, pp. 331–341. doi:[10.1080/01621459.1960.10482068](https://doi.org/10.1080/01621459.1960.10482068).
- [56] HEISER, W.J. y D’AMBROSIO, A.: «Clustering and prediction of rankings within a Kemeny distance framework». En: B. Lausen; D. Van den Poel y A. Ultsch (Eds.), *Algorithms from and for Nature and Life. Classification and Data Analysis*, Springer-Verlag, 2013.
- [57] HERRERA-VIEDMA, E.; GARCÍA-LAPRESTA, J.L.; KACPRZYK, J.; NURMI, H.; FEDRIZZI, M. y ZADROŻNY, S. (Eds.): *Consensual Processes*, Volumen 267 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag, 2011.
- [58] HILLINGER, C.: «The case for utilitarian voting». *Homo Oeconomicus*, 2005, **22(3)**, pp. 295–321.
- [59] HUBÁLEK, Z.: «Coefficients of association and similarity, based on binary (presence-absence) data: An evaluation». *Biological Reviews*, 1982, **52**, pp. 669–689. doi:[10.1111/j.1469-185X.1982.tb00376.x](https://doi.org/10.1111/j.1469-185X.1982.tb00376.x).

- [60] JACCARD, P.: «Étude comparative de la distribution florale dans une portion des Alpes et des Jura». *Bulletin del la Société Vaudoise des Sciences Naturelles*, 1901, **37**, pp. 547–579.
- [61] JACKSON, D.A.; SOMERS, K.M. y HARVEY, H.H.: «Similarity coefficients: Measures of co-occurrence and association or simply measures of occurrence?» *The American Naturalist*, 1989, **133(3)**, pp. 436–453.
- [62] JAIN, A.K. y DUBES, R.C.: *Algorithms for clustering data*. Prentice-Hall, Inc., 1988.
- [63] JAIN, A.K.; DUIN, R.P.W. y MAO, J.: «Statistical pattern recognition: a review». *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 2000, **22(1)**, pp. 4–37. doi:[10.1109/34.824819](https://doi.org/10.1109/34.824819).
- [64] KELLETT, J. y MOTT, K.: «Presidential primaries: Measuring popular choice». *Polity*, 1977, **9(4)**, pp. 528–537.
- [65] KEMENY, J.G.: «Mathematics without numbers». *Daedalus*, 1959, **88**, pp. 571–591.
- [66] KEMENY, J.G. y SNELL, J.L.: «Preferences rankings. An axiomatic approach». En: *Mathematical Models in the Social Sciences*, pp. 9–23. Ginn and Company, 1962.
- [67] KENDALL, M. y GIBBONS, J.D.: *Rank Correlation Methods*. Oxford University Press, 1990.
- [68] KENDALL, M.G.: *Rank Correlation Methods*. Hafner Publishing Company, 3ª edición, 1962.
- [69] KILGOUR, D.M.; BRAMS, S.J. y SANVER, M.R.: «How to elect a representative committee using approval balloting». En: [89], pp. 83–95. doi:[10.1007/3-540-35605-3_6](https://doi.org/10.1007/3-540-35605-3_6).
- [70] KLAMLER, C.: «A distance measure for choice functions». *Social Choice and Welfare*, 2008, **30(3)**, pp. 419–425. doi:[10.1007/s00355-007-0239-y](https://doi.org/10.1007/s00355-007-0239-y).
- [71] LIU, B.: *Web Data Mining: Exploring Hyperlinks, Contents, and Usage Data (Data-Centric Systems and Applications)*. Springer-Verlag, 2006.
- [72] MARTÍNEZ-PANERO, M.: «Consensus perspectives: Glimpses into theoretical advances and applications». En: [57], pp. 179–193, 2011.
- [73] MASSÓ, J. y VORSATZ, M.: «Weighted approval voting». *Economic Theory*, 2008, **36**, pp. 129–146. doi:[10.1007/s00199-007-0263-2](https://doi.org/10.1007/s00199-007-0263-2).

- [74] MAYOR, G. y VALERO, O.: «Aggregation of asymmetric distances in Computer Science». *Information Sciences*, 2010, **180(6)**, pp. 803–812. doi:[10.1016/j.ins.2009.06.020](https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.06.020).
- [75] MESKANEN, T. y NURMI, H.: «Distance from consensus: A theme and variations». En: [89], pp. 117–132, 2006.
- [76] —: «Closeness Counts in Social Choice». En: M. Braham y F. Steffen (Eds.), *Power, Freedom and Voting: Essays in Honor of Manfred J. Holler*, pp. 289–306. Springer-Verlag, 2008.
- [77] MICHAEL, E.L.: «Marine ecology and the coefficient of association: a plea in behalf of quantitative biology». *Journal of Ecology*, 1920, **8**, pp. 54–59.
- [78] MICHAEL, H.: «Binary coefficients: A theoretical and empirical study». *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 1976, **8(2)**, pp. 137–150. doi:[10.1007/BF01079031](https://doi.org/10.1007/BF01079031).
- [79] MONJARDET, B.: «“Mathématique sociale” and mathematics. A case study: Condorcet’s effect and medians». *Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics*, 2008, **4(1)**, pp. 1–26.
- [80] MORIN, R.A.: *Structural Reform: Ballots*. Volumen 1. Vantage Press, 1980.
- [81] NITZAN, S.: «Some measures of closeness to unanimity and their implications». *Theory and Decision*, 1981, **13**, pp. 129–138. doi:[10.1007/BF00134214](https://doi.org/10.1007/BF00134214).
- [82] NURMI, H.: «A comparison of some distance-based choice rules in ranking environments». *Theory and Decision*, 2004, **57(1)**, pp. 5–24. doi:[10.1007/s11238-004-3671-9](https://doi.org/10.1007/s11238-004-3671-9).
- [83] —: «Settings of consensual processes: Candidates, verdicts, policies». En: [57], pp. 159–177, 2011.
- [84] OTTEWELL, G.: «The arithmetic of voting». *In Defense of Variety*, 1977, **4**, pp. 42–44.
- [85] PRADERA, A. y TRILLAS, E.: «A note on pseudometrics aggregation». *International Journal of General Systems*, 2002, **31(1)**, pp. 41–51. doi:[10.1080/03081070210320](https://doi.org/10.1080/03081070210320).
- [86] ROGERS, D.J. y TANIMOTO, T.T.: «A computer program for classifying plants». *Science*, 1960, **132(3434)**, pp. 1115–1118. doi:[10.1126/science.132.3434.1115](https://doi.org/10.1126/science.132.3434.1115).

- [87] ROUBENS, M. y VINCKE, P.: *Preference Modeling*. Volumen 250 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, 1985.
- [88] RUSSELL, P.F. y RAO, T.R.: «On habitat and association of species of anopheline larvae in South-Eastern Madras.» *Journal of the Malaria Institute of India*, 1940, **3**(1), pp. 153–178.
- [89] SIMEONE, B. y PUKELSHEIM, F. (Eds.): *Mathematics and Democracy: Recent Advances in Voting Systems and Collective Choice*, Volumen XII de *Studies in Choice and Welfare*. Springer-Verlag, 2006.
- [90] SLATER, P.: «Inconsistencies in a schedule of paired comparisons». *Biometrika*, 1961, **48**(3-4), pp. 303–312. doi:[10.1093/biomet/48.3-4.303](https://doi.org/10.1093/biomet/48.3-4.303).
- [91] SMITH, J.: «Aggregation of preferences with variable electorate». *Econometrica*, 1973, **41**, pp. 1027–1041.
- [92] SNEATH, P.H. y SOKAL, R.R.: *Numerical Taxonomy: The Principles and Practice of Numerical Classification*. W. H. Freeman, 1973.
- [93] SNIJDERS, T.A.; DORMAR, M.; VAN SCHURR, W.H.; DIJKMAN-CAES, C. y DRIESSEN, G.: «Distribution of some similarity coefficients for dyadic binary data in the case of associated attributes». *Journal of Classification*, 1990, **7**(1), pp. 5–31. doi:[10.1007/BF01889701](https://doi.org/10.1007/BF01889701).
- [94] SOKAL, R.R. y MICHENER, C.D.: «A statistical method for evaluating systematic relationships». *University of Kansas Scientific Bulletin*, 1958, **28**, pp. 1409–1438.
- [95] SOKAL, R.R. y SNEATH, P.H.: *Principles of Numerical Taxonomy*. Series of Books in Biology. W. H. Freeman, 1963.
- [96] SØRENSEN, T.: «A method of establishing groups of equal amplitude in plant sociology based on similarity of species content». *Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter*, 1948, **5**, pp. 341–354.
- [97] SPEARMAN, C.: «The proof and measurement of association between two things». *American Journal of Psychology*, 1904, **15**(1), pp. 72–101.
- [98] TUBBS, J.D.: «A note on binary template matching». *Pattern Recognition*, 1989, **22**(4), pp. 359–365. doi:[10.1016/0031-3203\(89\)90045-9](https://doi.org/10.1016/0031-3203(89)90045-9).
- [99] VORSATZ, M.: «Approval voting on dichotomous preferences». *Social Choice and Welfare*, 2007, **28**, pp. 127–141. doi:[10.1007/s00355-006-0149-4](https://doi.org/10.1007/s00355-006-0149-4).

-
- [100] WARD JR, J.H.: «Hierarchical grouping to optimize an objective function». *Journal of The American Statistical Association*, 1963, **58**, pp. 236–244. doi:[10.1080/01621459.1963.10500845](https://doi.org/10.1080/01621459.1963.10500845).
- [101] WEBER, R.J.: «Comparison of Voting Systems». Cowles Foundation Discussion Paper No. 498, 1978. Yale University.
- [102] —: «Approval voting». *Journal of Economic Perspectives*, 1995, **9(1)**, pp. 39–49. doi:[10.1257/jep.9.1.39](https://doi.org/10.1257/jep.9.1.39).
- [103] WILLET, P.; J.M., BARNARD y G.M., DOWNS: «Chemical similarity searching». *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 1998, **38(6)**, pp. 983–996. doi:[10.1021/ci9800211](https://doi.org/10.1021/ci9800211).
- [104] YILMAZ, M.R.: «Can we improve upon approval voting?» *European Journal of Political Economy*, 1999, **15(1)**, pp. 89–100. doi:[10.1016/S0176-2680\(98\)00043-3](https://doi.org/10.1016/S0176-2680(98)00043-3).

Índice alfabético

- anonimato, 70
- clase de equivalencia, 13
- coeficientes de similitud, 50
 - Jaccard, 51
 - Rogers-Tanimoto, 51
 - Russell-Rao, 51
 - Simple-matching, 51
 - Sørensen-Dice, 51
- conglomerado, 105
- conjunto
 - de vectores ordenados, 29
 - estable bajo permutaciones, 28
- dendrograma, 112
- desigualdad triangular, 10
- diferencia simétrica, 36
- disimilitud
 - Rogers-Tanimoto, 52
 - Russell-Rao, 52
 - Sørensen-Dice, 52
- distancia, 10
 - dicotómica ponderada, 52
 - Jaccard, 52
 - Kemeny ponderada, 41
 - Kemeny-Hamming ponderada, 66
 - neutral, 35
 - Simple-matching, 52
- función indicatriz, 48
- función signo, 37
- grupo simétrico, 16
- hierarchical clustering
 - véase métodos de conglomeración jerárquicos, 102
- identidad de indiscernibles, 10
- máximo disentimiento, 71
- métodos de conglomeración, 102
 - jerárquicos, 102
 - aglomerativos, 102
 - amalgamiento completo, 106
 - amalgamiento simple, 106
 - centroide, 106
 - disociativos, 102
 - método de Ward, 106
 - método del consenso, 108
 - media, 106
 - no jerárquicos, 102
- métrica, 10
 - Chebyshev, 11
 - coseno, 11
 - discreta, 10
 - euclídea, 11
 - Hamming, 49
 - Hellinger, 11
 - Kemeny, 36
 - Kemeny-Hamming, 62
 - Manhattan, 11
 - Minkowski, 11
 - neutral, 35
- medida de agrupamiento, 107
- medida de consenso, 70
 - homogénea, 71
 - recíproca, 71
- N -agrupamiento, 105
- neutralidad, 70
- no negatividad, 10
- non hierarchical clustering
 - véase métodos de conglomeración

- no jerárquicos, 102
- orden
 - débil, 13
 - dicotómico, 48
 - inverso, 21
 - lineal, 13
- parte entera, 44
- perfil, 21
 - inverso, 21
 - preferencias aprobatorias, 56
- permutación, 16
 - producto, 16
 - trasposición, 17
- permutaciones disjuntas, 17
- preferencia aprobatoria, 56
 - inversa, 56
- preorden completo, véase orden débil, 13
- reflexividad, 10
- relación binaria, 12
 - antisimétrica, 12
 - asimétrica, 12
 - completa, 13
 - irreflexiva, 12
 - negativamente transitiva, 12
 - reflexiva, 12
 - simétrica, 12
 - transitiva, 12
- relación de equivalencia, 13
- relación de indiferencia, 14
- relación de preferencia
 - débil, 14
 - fuerte, 14
- simetría, 10
- similitud, 104
- unanimidad, 70
- vector
 - bien ordenado, 30
 - ordenado, 29
- vector indicador, 48

Lista de símbolos

- $\#$ Cardinal de un conjunto: pág. 24.
- $[x]$ Parte entera de x : pág. 44.
- \triangle Operador diferencia simétrica: pág. 36.
- Δ_n^d Distancia máxima entre órdenes de n alternativas según la distancia d : pág. 36.
- \equiv Equivalencia entre un orden $R \in W(X)$ y el vector que lo codifica: pág. 25.
- \sim_R Relación de indiferencia asociada a R : pág. 15.
- \succ_R Relación de preferencia fuerte asociada a R : pág. 15.
- \succsim_R Relación de preferencia débil R : pág. 15.
- \mathbf{a}^σ Vector de componentes $(a_1^\sigma, \dots, a_n^\sigma)$, siendo $\sigma \in S_n$ y $a_i^\sigma = a_{\sigma^{-1}(i)}$: pág. 26.
- A^W Conjunto de vectores de \mathbb{R}^n que codifican a algún orden $R \in W(X)$: pág. 25.
- A_{\leq}^W Conjunto de los vectores ordenados de A^W : pág. 29.
- $A_{\mathbf{a}}^W$ Elementos de A^W bien ordenados respecto del vector \mathbf{a} : pág. 30.
- $A_{\leq \mathbf{a}}^W$ Pares de vectores de A^W bien ordenados respecto del vector \mathbf{a} : pág. 31.
- $b(D)$ Conjunto de alternativas rechazadas en un orden dicotómico D : pág. 48.
- \mathcal{C}_i^N Conglomerado i -ésimo de un agrupamiento de nivel N : pág. 105.
- \mathcal{C}_N Agrupamiento de nivel N : pág. 105.
- $D(X)$ Conjunto de órdenes dicotómicos sobre X : pág. 48.

- \bar{d} Distancia (métrica) sobre $W(X)$ inducida por una distancia (métrica) d : pág. 35.
- d_∞ Métrica de Chebyshev: pág. 11.
- d_c Métrica del coseno: pág. 11.
- d_H Métrica de Hamming: pág. 49.
- d_{Hg} Métrica de Hellinger: pág. 11.
- d^H Métrica de Hamming sobre órdenes dicotómicos: pág. 49.
- d_{PA}^H Distancia de Hamming normalizada sobre preferencias aprobatorias: pág. 59.
- d_J Distancia de Jaccard: pág. 54.
- d^K Métrica de Kemeny: pág. 36.
- d_{PA}^K Distancia de Kemeny normalizada sobre preferencias aprobatorias: pág. 59.
- $d_{PA}^{K,w}$ Distancia de Kemeny ponderada sobre preferencias aprobatorias: pág. 64.
- d_K Métrica de Kemeny sobre A^W : pág. 37.
- d^K Métrica de Kemeny sobre $W(X)$ inducida por d_K : pág. 37.
- $d_{K,w}$ Distancia de Kemeny ponderada sobre A^W : pág. 40.
- $\bar{d}_{K,w}$ Distancia de Kemeny ponderada sobre $W(X)$ inducida por $d_{K,w}$: pág. 41.
- $d^{K,w}$ Distancia de Kemeny ponderada normalizada sobre $W(X)$: pág. 64.
- d_{PA}^λ Métricas neutrales sobre órdenes dicotómicos: pág. 62.
- d^+ Distancia dicotómica sobre alternativas aceptadas: pág. 53.
- d^- Distancia dicotómica sobre alternativas rechazadas: pág. 53.
- $d^{\pm\lambda}$ Distancia dicotómica sobre alternativas aceptadas y rechazadas: pág. 53.
- d_{PA}^+ Distancia dicotómica ponderada sobre alternativas aceptadas en preferencias aprobatorias: pág. 64.
- d_{PA}^- Distancia dicotómica ponderada sobre alternativas rechazadas en preferencias aprobatorias: pág. 64.
- $d_{PA}^{\pm\lambda}$ Distancia dicotómica ponderada sobre alternativas aceptadas y rechazadas en preferencias aprobatorias: pág. 65.

- d_p Métricas de Minkowski: pág. 11.
- $d_{PA}^{\lambda+w}$ Distancia ponderada sobre alternativas aceptadas en preferencias aprobatorias: pág. 66.
- $d_{PA}^{\lambda-w}$ Distancia ponderada sobre alternativas rechazadas en preferencias aprobatorias: pág. 66.
- $d_{PA}^{\lambda\pm\alpha w}$ Distancia ponderada sobre alternativas aceptadas y rechazadas en preferencias aprobatorias: pág. 66.
- d_{RR} Coeficiente de disimilitud de Russell-Rao: pág. 55.
- d_{SM} Distancia simple-matching: pág. 55.
- $g(D)$ Conjunto de alternativas aceptadas en un orden dicotómico D : pág. 48.
- i_D Vector que codifica a un orden dicotómico D : pág. 48.
- $L(X)$ Conjunto de órdenes lineales sobre el conjunto X : pág. 13.
- \mathcal{M} Medida de consenso: pág. 70.
- \mathcal{M}_d Medida de consenso asociada a la distancia d : pág. 72.
- $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ Medida de consenso asociada a la distancia \bar{d} inducida por d : pág. 73.
- $M_i(R)$ Conjunto de los coeficientes de las componentes del vector que codifica al orden R que son iguales a la componente i -ésima: pág. 26.
- $\mathcal{P}(V)$ Conjunto potencia de V : pág. 70.
- $\mathcal{P}_2(V)$ Conjunto de todos los subconjuntos de V que contienen al menos dos elementos: pág. 70.
- $PA(X)$ Conjunto de preferencias aprobatorias sobre X : pág. 56.
- p_R Vector de \mathbb{R}^n que codifica a un orden R : pág. 24.
- $P_R(x_j)$ Posición de la alternativa x_j en el orden R : pág. 24.
- (p_R, i_D) Par de vectores que codifican a una preferencia aprobatoria: pág. 58.
- \mathbf{R} Perfil de órdenes: pág. 21.
- \mathbf{R}^{-1} Perfil inverso del perfil \mathbf{R} : pág. 21.
- \mathbf{R}_π Perfil que se obtiene tras renombrar a los agentes de un perfil \mathbf{R} según una permutación $\pi \in S_m$: pág. 22.
- \mathbf{R}^σ Perfil que se obtiene tras renombrar las alternativas según una permutación $\sigma \in S_n$: pág. 22.

- \mathbf{RD} Perfil de preferencias aprobatorias: pág. 56.
- $(\mathbf{RD})^{-1}$ Perfil inverso del perfil de preferencias aprobatorias \mathbf{RD} : pág. 56.
- $(\mathbf{RD})_\pi$ Perfil que se obtiene tras renombrar a los agentes de un perfil $\mathbf{RD} \in PA(X)$ según una permutación $\pi \in S_m$: pág. 56.
- $(\mathbf{RD})^\sigma$ Perfil que se obtiene tras renombrar a las alternativas de un perfil $\mathbf{RD} \in PA(X)$ según una permutación $\sigma \in S_n$: pág. 56.
- S_d Medida de agrupamiento asociada a la medida de consenso \mathcal{M}_d : pág. 107.
- s_d Medida de similitud asociada a la medida de consenso \mathcal{M}_d : pág. 107.
- S_n Grupo simétrico sobre los n primeros números naturales: pág. 16.
- S_X Conjunto de todas las permutaciones sobre X (grupo simétrico sobre X): pág. 16.
- V Conjunto de agentes: pág. 21.
- $W(X)$ Conjunto de órdenes débiles sobre X : pág. 13.
- $W_{\leq}(X)$ Conjunto de órdenes de $W(X)$ que están codificados por vectores ordenados: pág. 29.
- $W_{\leq R}(X)$ Conjunto de pares de órdenes de $W(X)$ bien ordenados respecto del orden R : pág. 31.
- $W_R(X)$ Elementos de $W(X)$ bien ordenados respecto del orden R : pág. 30.
- X Conjunto de alternativas: pág. 21.