Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA

TESIS DOCTORAL:

Sistemas de votación con valoraciones lingüísticas y su aplicación a la licitación de proyectos públicos

Voting systems with linguistic assessments and their application in the allocation of tenders

Presentada por Edurne Falcó Díaz de Cerio para optar al grado de Doctor con Mención Internacional por la Universidad de Valladolid

Año Académico 2012/2013

Dirigida por:
José Luis García Lapresta

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA

TESIS DOCTORAL:

Sistemas de votación con valoraciones lingüísticas y su aplicación a la licitación de proyectos públicos

Voting systems with linguistic assessments and their application in the allocation of tenders

Presentada por Edurne Falcó Díaz de Cerio para optar al grado de Doctor con Mención Internacional por la Universidad de Valladolid

Año Académico 2012/2013

Dirigida por:
José Luis García Lapresta

A mi padre y mi amatxi

Agradecimientos

Durante todo este tiempo ha habido muchas personas sin cuya ayuda no podría haber culminado este trabajo y a quienes debo agradecer su apoyo, ilusión y comprensión durante toda la travesía.

Ante todo debo dar las gracias a mi director, José Luis, quien ha aportado no sólo sus conocimientos, su tiempo y su paciencia para que esta tesis salga adelante, sino que además me ha dado una formación que me ha hecho crecer como persona.

Debo mucho también a Llorenç Roselló, tanto por mostrarme ideas en las que pensar y en las que poder trabajar, como por su dedicación en los trabajos conjuntos.

Me gustaría agradecer también a Jorge Alcalde toda la ayuda recibida. Debido a su auxilio académico y sobre todo moral, seguí adelante hasta alcanzar la meta. Gracias por hacerme ver la parte positiva de las cosas.

También deseo agradecer a mis compañeros de estos años, cuyo apoyo en este proceso es inestimable. A Patrizia, que me guió a Valladolid y que ha recorrido tantos caminos conmigo. Compartir experiencias, diferentes puntos de vista y momentos distendidos durante estos años ha supuesto un incalculable regalo. A María, mi alter ego, que siempre estuvo dispuesta a dejarlo todo para alentarme, darme un consejo o, simplemente, para sacarme una sonrisa.

Mi gratitud es enorme hacia los miembros de la subsección de Matemáticas del Departamento de Economía Aplicada y hacia el grupo PRESAD. Desde que llegué allí me recibieron con los brazos abiertos y me dieron un lugar acogedor que hizo que me sintiera como en casa. Aunque no lo sepan, me han aportado valiosas experiencias durante estos años. Sobre todo, quiero recalcar la asistencia prestada por Miguel que nunca cerró su puerta a cualquier pregunta que quisiera hacerle, por muy numerosas que fueran.

Quiero asimismo expresar mi consideración al grupo SEED (Social Equilibrium and Economic Decisions), que me acercó a la Microeconomía y me dio una nueva oportunidad de aprender tras acabar la carrera. Especialmente quiero expresar mi gratitud a Jorge Nieto que me ofreció todo cuanto estuvo en su mano para que pudiese prosperar. También a todos aquéllos que pasaron por la sala sólo para ver si necesitaba ayuda: Mariano, Mikel, Sara, Ricardo, Miguel Ángel, Eduardo, Emma y el resto de compañeros de Pamplona que siempre se esforzaron por brindarme todo lo necesario.

Quisiera agradecer también a todos las personas que forman la Red Española de Elección Social sus consejos y su interés en mi trabajo durante todos estos años. Poder aprender junto a ellos ha supuesto una gran suerte.

Igualmente valiosa es la atención que me prestaron todos los integrantes del proyecto europeo que me trataron con amabilidad y paciencia en todas las ocasiones que coincidimos.

No quiero olvidarme de Ton Storken y los miembros de la Universidad de Maastricht, que me acogieron durante mis tres meses de estancia e hicieron todo lo que estuvo en su mano para ayudarme.

Por último, pero no por ello menos importante, quisiera agradecer a mi madre y mi hermana que, pese a no comprender completamente qué era un doctorado en Economía, han aprendido conmigo y me han apoyado en cada paso que he dado. A Jorge, que soportó todos mis días malos con resignación y compartió las alegrías de los días buenos. Al resto de mi familia y amigos, que estuvieron siempre ahí, pasara lo que pasara. Quiero agradecer a todas y a cada una de las personas que se interesaron por lo que hacía, que me dieron un empujón cuando lo necesitaba o que, simplemente, compartieron momentos conmigo, que me han aportado y me han enseñado tanto durante este recorrido.

Muchísimas gracias a todos.

Contenido/Contents

Introducción

Los individuos se enfrentan a problemas de decisión de forma habitual. Lograr consensuar diferentes preferencias individuales en una decisión colectiva con cuyo resultado se encuentren satisfechos el mayor número de individuos posible es un problema complejo y de difícil solución.

Existen numerosos sistemas de votación que permiten tomar decisiones colectivas y su uso no se limita a elecciones políticas, sino también a concursos, competiciones deportivas, catas de alimentos o bebidas, etc. Cada contexto posee unas características propias y, por tanto, es importante elegir un sistema de votación que sea lo más adecuado posible a las singularidades de cada caso.

Los sistemas de votación cuentan con dos aspectos básicos. Por un lado está la forma en que los votantes expresan sus opinones (votando por su alternativa favorita, ordenando todas las alternativas de más a menos preferida, señalando aquéllas que consideran 'aceptables', etc.) y, por otro lado, se encuentra la forma en que se algutinan todas esas opiniones individuales para alcanzar una decisión colectiva.

Posiblemente, el sistema de votación más conocido es la *Regla de Pluralidad*, por la cual cada agente vota por su alternativa favorita y aquélla con un mayor número de votos es la ganadora. A pesar de la amplia utilización de este sistema, no por eso es el mejor. De hecho, algunos autores llegan incluso a considerarlo el peor de los existentes cuando concurren más de dos alternativas (véase Laslier [39]).

Existen otros sistemas de votación y entre ellos algunos que, a diferencia de la pluralidad que sólo requiere a los votantes que señalen su alternativa favorita, precisan de una información más detallada. Así, hay sistemas que solicitan la ordenación completa de la lista de alternativas. Uno de los sistemas más conocidos con estas características es la *Regla de Borda*, en la cual cada votante muestra su ordenación sobre el total de alternativas y se asigna una puntuación de 0 puntos a la peor valorada, 1 punto a la segunda peor valorada, y así hasta $(n-1)$ puntos a la considerada por ese votante como la mejor alternativa. A continuación se cuenta el total de puntos para cada alternativa y aquélla con una mayor puntuación resulta ganadora.

Aún existen formas diferentes de solicitar la información. Por ejemplo, el sistema del *Voto Aprobatorio* (Brams y Fishburn [16, 17]), donde los agentes deben 'aprobar' o 'desaprobar' las alternativas y aquella alternativa con un mayor número de votos aprobatorios es la ganadora.

Estos tres ejemplos son sólo una muestra de la considerable cantidad de sistemas de votación que se puede encontrar, cada uno de ellos con sus virtudes y defectos. Sin embargo, ninguno de ellos puede considerarse perfecto, ya que como demostró Arrow [8] en su célebre *teorema de imposibilidad*, no existe ningún sistema que cumpla simultáneamente varias propiedades básicas[1]. Demostrado esto, diversos autores intentaron lidiar con este desalentador resultado relajando alguno de los requisitos de Arrow. Algunos ejemplos de esta relajación de supuestos son: Wilson [60] para el principio de Pareto, Sen [51] para el principio de transitividad, Kalai *et al.* [38] para el principio de dominio no restringido, o Baigent [9] para el principio de independencia de alternativas irrelevantes. Dado que la demostración de Arrow se centra en sistemas con una ordenación completa sobre las alternativas, una de las diversas salidas propuestas para evitar el teorema de imposibilidad es trabajar en entornos donde se puedan expresar las opiniones no sólo de una manera puramente ordinal, sino que se tengan además en cuenta otros aspectos. En los siguientes capítulos se presentan tres sistemas de votación que permiten a los votantes expresarse con una información distinta a la meramente ordinal.

Esta tesis está enmarcada en el proyecto de investigación europeo *"SOCIAL SOFTWARE for elections, the allocation of tenders and coalition/alliation formation"*, perteneciente a los proyectos *LogICCC* de la *European Science Foundation*. Bajo el mencionado proyecto han trabajado miembros de universidades pertenecientes a cinco países europeos: Alemania, España, Finlandia, Francia y Países Bajos. La motivación principal de esta tesis surge como respuesta al objetivo del proyecto europeo concerniente a la parte española. Dicho objetivo se centra en considerar el sistema de votación deno-

[1] Cualquier regla de votación que respete el axioma de transitividad, el de independencia de alternativas irrelevantes y el de unanimidad es dictatorial, en tanto en cuanto la decisión se plantee, al menos, respecto de tres alternativas.

minado *Juicio Mayoritario* (*Majority Judgment*), introducido en 2007 por Balinski y Laraki y aplicarlo en un nuevo contexto. En concreto se busca encontrar una nueva forma de evaluación en las licitaciones de proyectos públicos[2] que responda a diversos problemas detectados.

El sistema de votación Juicio Mayoritario [12] trata de evitar el insatisfactorio resultado del teorema de imposibilidad de Arrow permitiendo a los votantes asignar términos lingüísticos tales como 'excelente', 'muy bueno', 'bueno', etc., en lugar de limitarse simplemente a ordenar las alternativas. Podría considerarse Juicio Mayoritario como una extensión del Voto Aprobatorio, donde los términos que pueden asignar los agentes no se limitan solamente a 'aprobado' y 'desaprobado' y existe un mayor rango de términos que los agentes pueden utilizar.

El procedimiento presentado en [12] fue desarrollado para su utilización en elecciones políticas. Balinski y Laraki proponen que la papeleta de votación incluya a todos los candidatos y que los votantes evalúen a dichos candidatos mediante términos lingüísticos pertenecientes a una escala ordenada. Posteriormente se escoge como valoración colectiva[3] de cada candidato la mediana de todas las valoraciones obtenidas y aquel candidato con una valoración colectiva mayor será el ganador. Como el procedimiento puede dar lugar a empates, éste se complementa con un proceso de desempate basado en la comparación del número de valoraciones obtenidas superiores e inferiores a dicha valoración colectiva.

Balinski y Laraki ponen a prueba su sistema en un análisis experimental llevado a cabo en la circunscripción de Orsay durante las elecciones presidenciales francesas de 2007. En [14] los autores analizan los resultados obtenidos y atribuyen varias ventajas al proceso, entre ellas, la mayor expresividad de los votantes, el estímulo ejercido sobre los votantes para que revelen sus verdaderas opiniones, su facilidad de implementación y la eliminación de la segunda ronda[4], propia de las elecciones francesas. Los autores siguen analizando y desarollando el procedimiento en diversos trabajos, libros y en una web (véanse Balinski y Laraki [11, 13, 15]).

[2]Una licitación o contrato con el Sector Público es el trámite administrativo por el que se decide qué proyecto, de todos los presentados, es aquél que llevará a cabo un contrato requerido por la Administración Pública.

[3]Balinski y Laraki denominan a esta valoración colectiva *majority-grade*, que podría traducirse como calificación mayoritaria.

[4]Si ningún candidato consigue más de la mitad de los votos, la segunda ronda consiste en votar entre los dos candidatos con el mayor número de votos en la primera ronda.

Según Balinski y Laraki, su sistema de votación posee, entre otras ventajas, la propiedad de *Independencia de Alternativas Irrelevantes*: si se selecciona un subconjunto de alternativas, la forma en que éstas quedan ordenadas debe depender solamente de las valoraciones sobre esas alternativas y no se debe ver afectado por otras alternativas, que han de ser irrelevantes. En particular, si una alternativa es eliminada, el orden entre el resto de alternativas no debe variar.

El cumplimiento de esta propiedad resulta interesante para solucionar un problema de las licitaciones públicas destacado por Chen en [18]. En dicho trabajo, enmarcado en la Teoría de la Elección Social, Chen pone de manifiesto la problemática valoración de las licitaciones públicas que provoca que si algunos de los licitantes son eliminados de la valoración por no cumplir con alguno de los requisitos exigidos, tras haberse procedido a una primera valoración, los licitantes restantes pueden variar su ordenación, llegando incluso al caso en que el nuevo ganador fuera el peor valorado según la valoración inicial. No sólo eso sino que, además, los licitantes pueden manipular la valoración en su favor mediante la introducción de varios proyectos, denominados variantes, por parte del mismo licitante.

Así pues, la valoración de licitaciones públicas mediante Juicio Mayoritario se muestra como una opción interesante. Además, ese procedimiento posee otra ventaja adicional, que resulta conveniente en su implementación en licitaciones: la evaluación mediante términos lingüísticos. Las licitaciones públicas tienen en cuenta varios criterios a la hora de evaluar los diferentes proyectos. Actualmente todos ellos se valoran de manera numérica pese a que, dada la naturaleza subjetiva de alguno de ellos como la calidad, la garantía, la facilidad para encontrar repuestos, etc., resulta complicado asignarles un valor numérico objetivo.

La valoración de esos criterios requiere de juicios de valor y, por tanto, suele ser imprecisa. Las personas se sienten más cómodas manejando la imprecisión en términos lingüísticos, en vez de hacerlo de forma numérica (Zimmer [66]). Un estudio realizado por Wallsten *et al.* [57] muestra de manera empírica que la mayoría de los evaluadores encuentra más sencillo expresar probabilidades mediante palabras que mediante números. Fruto de la evidencia y la reflexión sobre la imprecisión, existe una corriente en la literatura denominada *computación con palabras*, donde los agentes se expresan mediante términos o expresiones lingüísticas (véanse Kacprzyk y Zadrożny [37] y Zadeh [62, 63, 64], entre otros).

Por estas razones el sistema de votación de Juicio Mayoritario parecía *a priori* una opción acertada. Sin embargo, pese a sus bondades, este procedimiento presenta también numerosos inconvenientes, algunos de los cuales han sido expuestos en la literatura por diversos autores (veánse Felsenthal y Machover [24], Smith [52], García-Lapresta y Martínez-Panero [27] y Nurmi [44], entre otros).

Para paliar alguno de dichos inconvenientes aparecen trabajos como el de García-Lapresta y Martínez-Panero [27] que desarrollan su propuesta para pequeños comités y donde la información lingüística se agrega mediante *operadores OWA centrados* (Yager [61]) y *representación lingüística difusa basada en 2-tuplas* (Herrera y Martínez [33]). Otra vía para reducir los inconvenientes es la desarrollada por Zahid [65], que combina el Juicio Mayoritario con la regla de Borda [19].

Siguiendo esta dinámica que intenta aminorar los inconvenientes de Juicio Mayoritario es como surge el **capítulo 1** de esta tesis. En dicho capítulo se propone una extensión del sistema de Juicio Mayoritario mediante la introducción de distancias entre términos lingüísticos. Se considera como valoración colectiva aquel término lingüístico cuya suma de distancias a todas las valoraciones individuales sea menor[5]. Dichas distancias se calculan a través de una métrica de Minkowski parametrizada. Dependiendo del valor del parámetro, la valoración colectiva resultante puede ser: la mediana (al igual que en el Juicio Mayoritario), la media[6] (como en el sistema de votación *Range Voting* propuesto por Smith [52]), resultados intermedios entre la media y la mediana, u otros resultados. Además, se propone un proceso de desempate también basado en distancias que, en contraposición al de Juicio Mayoritario, que sólo tiene en cuenta el número de valoraciones superiores e inferiores a la asignación colectiva, contempla qué valoraciones específicas son. En concreto el desempate se resuelve mediante la distancia de todas las valoraciones cuyo término es superior a la valoración colectiva a dicha valoración colectiva, menos la distancia de todas las valoraciones cuyo término es inferior a la valoración colectiva a esa valoración colectiva.

Una vez diseñado el sistema, se advirtió que si bien el uso de términos lingüísticos se adapta mejor a la realidad que otros procedimientos y pro-

[5]Si existe más de un término que cumpla esta condición, el término escogido como valoración colectiva será aquél con una mínima suma de distancias al resto de términos que cumplan la condición inicial.

[6]Entendida la media como el término lingüístico que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias.

porciona una ventaja para los votantes, en ocasiones es necesario dar una mayor libertad a los agentes cuando éstos se encuentran indecisos y no saben qué término otorgar.

Una manera de integrar a estos agentes indecisos en el sistema de votación consiste en permitirles asignar varios términos lingüísticos consecutivos en vez de un único término. A este respecto, existen en la literatura varios trabajos que permiten a los agentes expresar sus opiniones a través de más de un término lingüístico (véanse por ejemplo Tang y Zheng [53], Ma *et al.* [40] o Rodríguez *et al.* [46]).

Puede parecer que el uso de varios términos lingüísticos se corresponde con agentes con un bajo nivel de información. Sin embargo, son muchas las ocasiones en las que los expertos utilizan también varios términos. Como puede verse en el trabajo de Agell *et al.* [6] donde se pide a expertos bien informados valorar las alternativas a través de términos lingüísticos o expresiones lingüísticas formadas por varios términos lingüísticos consecutivos, el 40 % de todas las valoraciones otorgadas por dichos expertos están compuestas por múltiples términos. Por tanto es importante recalcar que incluso los expertos pueden dudar cuando tienen que evaluar alternativas.

En los dos siguientes capítulos de la tesis se presentan dos procesos distintos de decisión, donde los agentes pueden asignar o uno o bien varios términos lingüísticos consecutivos cuando no estén seguros de qué término lingüístico otorgar. Ambos sistemas están basados en los *Espacios de Órdenes de Magnitud Absoluta*, introducidos por Travé-Massuyés y Piera [56] y Travé-Massuyés y Dague [55]; más específicamente en las extensiones desarrolladas por Roselló *et al.* [48, 49, 50]. Para ambos procedimientos se introduce un grafo donde se representan todos los términos lingüísticos que se pueden asignar, así como todas las posibles expresiones lingüísticas formadas por dos o más términos lingüísticos consecutivos.

En el **capítulo 2** se propone como procedimiento de decisión escoger aquella alternativa cuyas valoraciones se encuentren más cercanas a la valoración ‘ideal’, que es el mayor término lingüístico que se puede otorgar. La distancia a este término ‘ideal’ se calcula como la suma de las distancias de todas las valoraciones individuales. Para su cálculo se introduce una métrica basada en la distancia geodésica en el grafo, más dos componentes que penalizan la imprecisión mediante el uso de dos parámetros. El capítulo también analiza algunas de las propiedades del procedimiento y muestra un ejemplo ilustrativo.

El **capítulo 3** presenta otro sistema de votación alternativo donde, de nuevo, los agentes pueden valorar las alternativas mediante uno o varios términos lingüísticos consecutivos. Este proceso consta de tres etapas sucesivas. En la primera se calcula una opinión colectiva para cada alternativa, que es aquel término o expresión lingüística (o aquellos términos y/o expresiones) que minimiza la suma de la distancia geodésica a todas las valoraciones individuales. Posteriormente se calcula la distancia media de las expresiones lingüísticas que forman parte de la opiníon colectiva al término lingüístico 'ideal' y se genera la primera ordenación de alternativas en función de la proximidad de la opinión colectiva al término ideal. Tras esta etapa pueden existir empates, en cuyo caso se pasa a la segunda etapa donde se calcula una medida de dispersión basada en el índice de Gini [30] de forma que, cuanto menor sea la dispersión, mejor considerada está esa alternativa. Si siguen existiendo empates, se continúa con una tercera etapa donde se comparan la cantidad de mejores valoraciones, después de segundas-mejores valoraciones, etc., hasta que se rompa el empate. Además en el capítulo se lleva a cabo un análisis de algunas propiedades del sistema de votación, en el marco de la Teoría de la Elección Social.

Una vez propuestos los tres sistemas de votación de los capítulos anteriores, en el **capítulo 4** de la tesis se considera la aplicación a las licitaciones públicas. Este proceso tiene varias características particulares. Entre ellas, y la más destacada en este capítulo, es la valoración de los criterios subjetivos (aquéllos que requieren juicios de valor) por parte de un comité de expertos. Con el sistema presentado en el capítulo 2 como base, se desarrolla una propuesta para el caso concreto de la contratación pública. Tras presentar el funcionamiento de estos procedimientos, se analizan de forma paulatina según su complejidad varios casos característicos de estos procesos: cuando sólo existe un criterio a valorar y cuando se valoran varios criterios, tanto cuando éstos tienen la misma, como cuando tienen diferente importancia en la valoración final. Se presenta además un ejemplo ilustrativo del funcionamiento del sistema para cada uno de los casos considerados.

La memoria finaliza con unas **conclusiones** donde se expone la aportación general de la tesis, además de algunos problemas abiertos y el posible trabajo futuro.

A medida que la tesis se iba desarrollando, las propuestas y resultados han sido presentados en congresos nacionales e internacionales.

Nacionales:

- I Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de Votación. Valladolid, 2009.
- XV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Punta Umbría (Huelva), 2010 [Con publicación en actas].
- III Congreso Español de Informática - III Simposio sobre Lógica Fuzzy y Soft Computing. Valencia, 2010 [Con publicación en actas].
- XXXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. A Coruña, 2010 [Con publicación en actas].
- VII Encuentro de la Red Española de Elección Social. Cartagena (Murcia), 2010.
- XVIII Encuentro de Economía Pública. Málaga, 2011.
- VIII Congreso Español de la Red Española de Elección Social. Bilbao, 2011.
- XVI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Valladolid, 2012 [Con publicación en actas].

Internacionales:

- 11th International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics. Bratislava (Eslovaquia), 2010.
- SSEAC Workshop on Voting and Allocation Systems. Åland (Finlandia), 2010.
- 3rd International Conference on Agents and Artificial Intelligence. Roma (Italia), 2011 [Con publicación en actas].
- World Conference on Soft Computing. San Francisco (Estados Unidos), 2011 [Con publicación en actas].
- LogiICCC Final Conference. Berlín (Alemania), 2011.
- SSEAC Workshop on Social Choice and Social Software. Kiel (Alemania), 2012.

- 61th Congress of the French Economic Association. París (Francia), 2012.

- 11th International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare. Nueva Delhi (India), 2012.

Parte del trabajo preliminar expuesto en congresos se ha visto culminado en las siguientes publicaciones:

- E. Falcó, J.L García-Lapresta, "A distance-based extension of the Majority Judgement voting system". Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics 8, pp. 17-27, 2011.

- E. Falcó, J.L. García-Lapresta, L. Roselló, "Aggregating imprecise linguistic expressions". En: Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences (eds. W. Perdrycz, P. Guo). Springer-Verlag, Berlín. En prensa.

- E. Falcó, J.L. García-Lapresta, L. Roselló, "Allowing agents to be imprecise: A proposal using multiple linguistic terms". Information Sciences. En prensa.

Introduction

People face decision-making problems in their everyday lives. Reaching agreement on a collective decision starting from different individual preferences which satisfies as many individuals as possible is a complex problem that is difficult to solve.

There are several voting systems which enable a collective decision to be reached. Voting systems are used not only in political election but also in contests, sports competitions, food and drink tasting, etc. Each context has its own characteristic features, so it is important to choose the system that best suits those features.

Voting systems have two key aspects. The first is the way in which the agents express their opinions (choosing their best alternative, ranking the alternatives from best to worst, marking the ‘acceptable’ ones, etc.). The second is how all these individuals opinions are aggregated to reach a collective decision.

Perhaps, the best-known voting system is the *Plurality Rule*. In this rule, each agent votes for his/her best alternative and the most voted alternative is chosen as the winner. The fact that this system is widely used does not mean that it is the best one. In fact, some authors consider it to be the worst system available when more than two alternatives exist (see Laslier [39]).

There are other voting systems, including some that require voters to provide additional information, unlike the best alternative required under the Plurality system. Thus, some systems ask for a complete ranking of all alternatives. One of the best-known systems of this type is the *Borda Count*, in which each voter ranks all available alternatives and points are allocated to each one. The worst alternative receives 0 points, the second-worst receives 1 point, etc.; up to the alternative considered by that voter as his/her best, which receives $(n-1)$ points. The points awarded to each alternative are then added and the one with the highest number of points is selected as the winner.

It is also possible to ask for information in other ways. For instance, in the *Approval Voting* system (Brams and Fishburn [16, 17]), agents must 'approve' or 'disapprove' of alternatives and the alternative with the highest number of votes of approval is the winner.

These three systems are just a sample of the large number of voting systems that can be found, each with its strengths and weaknesses. Nevertheless, none of them can be considered as perfect, since Arrow [8] showed in his well-known *impossibility theorem* that there is no voting system that simultaneously satisfies several desirable properties[7]. Subsequently, various authors have tried to cope with this discouraging result by relaxing some of its assumptions. Some examples are Wilson [60] about the Pareto principle, Sen [51] about the transitivity principle, Kalai *et al.* [38] about the unrestricted domain principle, Baigent [9] about the principle of independence of irrelevant alternatives, among others. Given that Arrow's proof is defined for the complete order of the alternatives, one way out of the impossibility theorem is to work in a different setting, for instance by working with environments where opinions are expressed not just by pure ordinal assessments but by means of other kinds of information. In the following chapters three voting systems are shown which enable voters to express their information in a way that is not merely ordinal.

This thesis is set in the framework of a European research project called *"SOCIAL SOFTWARE for elections, the allocation of tenders and coalition/ alliance formation"*, which is a *LogICCC* project by the *European Science Foundation*. Researchers form Finland, France, Germany, the Netherlands and Spain have been working on this project. The motivation for this thesis arises from the main objective of this project as regards Spain, i.e. to consider the voting system known as *Majority Judgement*, which was introduced by Balinski and Laraki in 2007, and apply it in a new context. More specifically, the objective is to look for a new system of allocation of tenders[8] which deals with some problems that have been detected.

[7] Any voting rule that generates a collective weak order from every profile of weak orders and satisfies independence of irrelevant alternatives and unanimity is necessarily dictatorial, insofar as there are at least three alternatives and three agents.

[8] A public tender is the process required to establish a contract with the public sector whereby the best of the bid submitted in the procurement process is chosen.

The intention of using the Majority Judgment voting system [12] is to avoid the unsatisfactory result of Arrow's impossibility theorem allowing the voters to assess linguistic terms as 'excellent', 'very good', 'good', etc. Majority Judgment can be considered as an extension of Approval Voting where the agents can rate a broader range of terms than merely 'approve' and 'disapprove'.

The process presented in [12] was developed for the setting of political elections. Balinski and Laraki propose that the ballot should include every candidate and that voters should assign a linguistic term from an ordered scale to rate each candidate. Then a majority grade, understood as a collective rating, is chosen for every candidate, and the one with the highest collective term is selected as the winner. They propose the median term as the majority grade. After the first stage there may be a tie between candidates, so the authors present a tie-breaking process based on the number of assessments higher and lower than the majority grade.

Balinski and Laraki test their system in an experimental analysis carried out in the town of Orsay during the French presidential elections of 2007. In [14] the authors analyze the results obtained and set out some advantages of the process. Those advantages include, for example, the expressivity of the voters, the fact that voters are encouraged voters to grade sincerely, the ease of implementation and removal of the second round [9], typical of French elections. The authors continue analyzing and developing the procedure via several papers, a book and a website (see Balinski and Laraki [11, 13, 15]).

According to Balinski and Laraki, one of the advantages of their voting system is the property known as *Independence of Irrelevant Alternatives*: if a subset of alternatives is selected, the order in which they are ranked should depend only on the scores awarded to those alternatives and should not be affected by other alternatives, which are irrelevant. Particularly, if an alternative is removed, the order of the remaining alternatives should not change.

The fulfilment of the given property turns out to be useful in solving a problem in the allocation of tenders highlighted by Chen in [18]. The paper in question is set in the framework of Social Choice Theory. In it, Chen highlights the problem of allocation of tenders which means that if some bidders are removed from the procurement process after the first evaluation

[9] If no candidate obtains more than half of the votes, the two candidates with most votes in the first round go on to a second round of voting.

because they are in breach of the requirements, the allocation of the remaining tenders can change. In an extreme case, it is even possible for the bidder who was considered as the worst in the first evaluation to became the winner. Moreover, bidders can manipulate the evaluation process in their favour by introducing several projects, called variants, submitted by the same bidder.

Thus, using Majority Judgment to allocate tenders seems an interesting option. Moreover, this procedure offers a further advantage which is well suited for public tender implementation: rating in linguistic terms. Public tenders take several criteria into account when analyzing the bids submitted. Each criterion is in fact rated on a numerical scale, even though the subjective nature of some of them, e.g. quality, warranty, the ease of finding replacement parts, etc., makes assigning them an objective numerical value a complicated task.

The assessment of these criteria requires value judgment and therefore it may be imprecise. People feel more comfortable dealing with imprecision in linguistic terms rather than numerically (Zimmer [66]). A study directed by Wallsten *et al.* [57] shows empirically that most assessors find it easier to express probability through words than through numbers. As a result of this evidence and reflection concerning imprecision, a body of literature called *computing with words* has emerged. In it agents express themselves by means of linguistic terms or expressions (see Kacprzyk and Zadrożny [37] and Zadeh [62, 63, 64], among others).

The Majority Judgment voting system therefore seems *a priori* to be a suitable choice. Nevertheless, along with its virtues this procedure also has several drawbacks, some of which have been pointed out in the relevant literature by numerous authors (see Felsenthal and Machover [24], Smith [52], García-Lapresta and Martínez-Panero [27] and Nurmi [44], among others).

To relieve some of these drawbacks, paper such as García-Lapresta and Martínez-Panero [27]have emerged, in which the authors develop a proposal for small committees where the linguistic information is aggregated by means of *centered OWA operators* (Yager [61]) and a 2-*tuple fuzzy linguistic representation* (Herrera and Martínez [33]). Another way of reducing the disadvantages of Majority Judgment is developed by Zahid [65], who combines Majority Judgment with the Borda rule [19].

It was from this train of thoughts concerning ways of overcoming the drawbacks of Majority Judgment that **Chapter 1** of this thesis arose. It proposes an extension of the Majority Judgment voting system through the introduction of linguistic terms. The linguistic term whose sum of distances to all individual ratings is the lowest is taken as the collective assessment[10]. The relevant distances are calculated through a parameterized Minkowski metric. Depending on the parameter value, the resulting collective assessment may be the median (as in Majority Judgment), the mean[11] (as in *Range Voting* system, proposed by Smith [52]), halfway between the median and the mean, or elsewhere. A tie-breaking process, also based on distances, is also proposed. Unlike the one used in Majority Judgment, which only takes into account the number of ratings higher or lower than the collective assessment, our tie-breaker looks at the ratings themselves. Specifically, ties are broken as follows: the distances of all the terms other than the collective assessment that are higher than that rating are calculated and added together to give the sum of the distances from the collective assessment. The same is then done for all the terms below the collective assessment. The latter distance is then subtracted from the former.

Once the system was designed, another idea came up. Although the use of linguistic terms is better suited to reality than other procedures and provides advantages for the voters, sometimes it is necessary to supply agents with more freedom when they find themselves hesitant and do not know which term to choose.

A way to bring these hesitant agents into the system is to create a voting system where they can allocate several consecutive linguistic terms instead of a single linguistic term. In this regard, the relevant literature contains several papers on processes where agents can express their opinions through more than just one linguistic term (see, for example, Tang and Zheng [53], Ma *et al.* [40] or Rodríguez *et al.* [46]).

The use of several linguistic terms may seem to correspond to agents with a low level of information, but there are many occasions when experts also use several terms. As can be seen in the paper by Agell *et al.* [6], where highly informed experts are asked to rate the alternatives through linguistic terms or linguistic expressions consisting of several consecutive linguistic terms, 40% of all ratings given by the aforesaid experts are made

[10] If several linguistic terms fulfil this condition, the one with the lowest sum of distances to all the other terms which fulfil the previous condition is chosen as the collective assessment.

[11] Understood the mean as the linguistic term which minimizes the sum of the distances' squares.

up of multiples terms. Therefore, it is important to note that even experts may hesitate when rating alternatives.

In the next two chapters of the thesis, two different decision processes are presented in which agents can assign one or several consecutive linguistic terms when they are hesitant about which linguistic term to use. Both systems are based on the *absolute order of magnitude spaces* introduced by Travé-Massuyés and Piera [56] and Travé-Massuyés and Dague [55], and more specifically on the extensions developed in Roselló *et al.* [48, 49, 50]. In each procedure a graph is introduced, within which all possible rateable linguistic terms can be represented, as well as all linguistic expressions created by two or more consecutive linguistic terms.

In **Chapter 2** a decision process is proposed where the alternatives chosen are those which are rated as closest to the 'ideal' rating, giving that the ideal rating is the highest linguistic term that can be awarded. The distance from that 'ideal' term is calculated as the sum of distances of all the individual ratings. To work this out a metric based on the geodesic distance within the graph is introduced, plus two components that penalize the imprecision by means of two parameters. The chapter also analyzes some of the procedure's properties and presents an illustrative example.

Chapter 3 introduces another alternative voting system where, again, the agents may assess the alternatives through one or several consecutive linguistic terms. This process consists of three successive stages. In the first one, a collective opinion for each alternative is calculated. The collective opinion is the term or linguistic expression (or terms and/or linguistic expressions) that minimizes the sum of geodesic distances from every individual assessment. Then, the mean distance between the linguistic expressions which make up the collective opinion and the 'ideal' term is calculated. The first ranking of alternatives is generated by means of the closeness of the collective opinion to the 'ideal' term. After this stage there may be a tie; if so, the second stage is implemented. There, a dispersion measure based on the Gini index [30], works as follows: the smaller the dispersion is, the better the alternative is considered to be. If there are still ties, the third stage is implemented. In it, the number of best ratings is compared, then the number of second-best ratings, etc., until all ties are broken. This chapter also presents an analysis of some properties of the voting system in the Social Choice Theory framework.

Following on from the presentation of the three voting systems in the previous chapters, **Chapter 4** of the thesis considers an application to the allocation of public tenders. This process entails certain particular features, among which the chapter pays particular attention to the assessment of subjective criteria (those that require a value judgment) by a committee of experts. Taking the system presented in Chapter 2 as starting point, a proposal for the specific case of public procurement is developed. The workings of the process are presented, then some characteristic cases are analyzed step by step according to their complexity: when there is a single criterion to be assessed and when there are more than one, and when their weight in the final evaluation is the same and when they possess different weights in both cases. An illustrative example of the workings of the system is also presented for each case considered.

The report finishes with some **concluding remarks** that set out the general contributions of the thesis, along with some open problems and possible work-to-do in the future.

As the thesis has been written, the proposals and results have been presented at national and international congresses.

National congresses:

- I Jornadas de Trabajo sobre Sistemas de Votación. Valladolid, 2009.
- XV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Punta Umbría (Huelva), 2010 [With publication of proceedings].
- III Congreso Español de Informática - III Simposio sobre Lógica Fuzzy y Soft Computing. Valencia, 2010 [With publication of proceedings].
- XXXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. A Coruña, 2010 [With publication of proceedings].
- VII Encuentro de la Red Española de Elección Social. Cartagena (Murcia), 2010.
- XVIII Encuentro de Economía Pública. Málaga, 2011.
- VIII Congreso Español de la Red Española de Elección Social. Bilbao, 2011.
- XVI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Valladolid, 2012 [With publication of proceedings].

International congresses:

- 11th International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics. Bratislava (Slovakia), 2010.
- SSEAC Workshop on Voting and Allocation Systems. Åland (Finland), 2010.
- 3rd International Conference on Agents and Artificial Intelligence. Rome (Italy), 2011 [With publication of proceedings].
- World Conference on Soft Computing. San Francisco (United States), 2011 [With publication of proceedings].
- LogiICCC Final Conference. Berlin (Germany), 2011.
- SSEAC Workshop on Social Choice and Social Software. Kiel (Germany), 2012.
- 61th Congress of the French Economic Association. Paris (France), 2012.
- 11th International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare. New Delhi (India), 2012.

Part of the preliminary work presented at these congresses has resulted in the following publications:

- E. Falcó, J.L García-Lapresta, "A distance-based extension of the Majority Judgement voting system". Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics 8, pp. 17-27, 2011.
- E. Falcó, J.L. García-Lapresta, L. Roselló, "Aggregating imprecise linguistic expressions". In: Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences (eds. W. Perdrycz, P. Guo). Springer-Verlag, Berlin. Forthcoming.
- E. Falcó, J.L. García-Lapresta, L. Roselló, "Allowing agents to be imprecise: A proposal using multiple linguistic terms". Information Sciences. Forthcoming.

Chapter 1

A distance-based extension of the Majority Judgement voting system

[This chapter has been previously published (jointly with José Luis García-Lapresta) in the journal *Acta Universitatis Matthiae Belii*, series Mathematics 18, pp. 17-27, 2011.]

It is common knowledge that the political voting systems suffer inconsistencies and paradoxes such that Arrow shown in his well-known Impossibility Theorem. Recently Balinski and Laraki have introduced a new voting system called Majority Judgement (MJ) which try to solve some of these limitations. In MJ voters have to asses the candidates through linguistic terms belonging to a common language. From this information, MJ assigns as the collective assessment the lower median of the individual assessments and it considers a sequential tie-breaking method for ranking the candidates. The present chapter provides an extension of MJ focused to reduce some of the drawbacks that have been detected in MJ for several authors. The model assigns as the collective assessment a label that minimizes the distance to the individual assessments. Besides, we propose a new tie-breaking method also based on distances.

1.1 Introduction

Social Choice Theory shows that there does not exist a completely acceptable voting system for electing and ranking alternatives. So, the well-known Arrow Impossibility Theorem [8] proves with mathematic certainty that no voting system simultaneously fulfills certain desirable properties[1].

Recently Balinski and Laraki [11, 12] have proposed a voting system called Majority Judgement (MJ) which tries to avoid these unsatisfactory results and allows the voters to assess the alternatives through linguistic labels, as *Excellent*, *Very good*, *Good*, ..., instead of rank order the alternatives. Among all the individual assessments given by the voters, MJ chooses the median as the collective assessment. Balinski and Laraki also describe a tie-breaking process which compares the number of labels above the collective assessment and those below of it.

These authors also have an experimental analysis of MJ [10] carried out in Orsay during the 2007 French presidential election. In that paper the authors show some interesting properties of MJ and they advocate that this voting system is easily implemented and that it avoids to make a second voting.

Desirable properties and advantages have been attributed to MJ against the classical Arrow framework of preferences' aggregation. Among them are the possibility that voters show more faithfully and properly their opinions than in the conventional voting systems, anonymity, neutrality, independence of irrelevant alternatives, etc. However, some authors (see Felsenthal and Machover [24], García-Lapresta and Martínez-Panero [27] and Smith [52]) have shown several paradoxes and inconsistencies of MJ.

In this chapter we propose an extension of MJ which diminish some of the MJ inconveniences. The approach of the chapter is distance-based, both for generating a collective assessment to each alternative and in the tie-breaking process that provides a weak order on the set of alternatives. As in MJ we consider that individuals assess the alternatives through linguistic labels and we propose as the collective assessment a label that minimizes the distance to the individual assessments. These distances between linguistic labels are induced by a metric of the parameterized Minkowski family. Depending on

[1] Any voting rule that generates a collective weak order from every profile of weak orders, and satisfies independence of irrelevant alternatives and unanimity is necessarily dictatorial, insofar as there are at least three alternatives and three voters.

the specific metric we use, the discrepancies between the collective and the individual assessments are weighted in a different manner, and the corresponding outcome can be different.

The chapter is organized as follows. In Section 1.2, the MJ voting system is formally explained. Section 1.3 introduces our proposal, within a distance-based approach. Specifically, the election of the collective assessment for each alternative and the tie-breaking method are introduced. In Section 1.4 we include two illustrative examples showing the influence of the metric used in the proposed method and its differences with respect MJ and Range Voting (Smith [52]). Finally, in Section 1.5 we collect some conclusions.

1.2 Majority Judgement

We consider[2] a finite set of voters $V = \{1, \ldots, m\}$, with $m \geq 2$, who evaluate a finite set of alternatives $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, with $n \geq 2$. Each alternative is assessed by each voter through a linguistic term belonging to an ordered finite scale $L = \{l_1, \ldots, l_g\}$, with $l_1 < \cdots < l_g$ and granularity $g \geq 2$. Each voter assesses the alternatives in an independent way and these assessments are collected by a matrix $\left(v_j^i\right)$, where $v_j^i \in L$ is the assessment that the voter i gives to the alternative x_j.

MJ chooses for each alternative the median of the individual assessment as the collective assessment. To be precise, the single median when the number of voters is odd and the lower median in the case that the number of voters is even. We denote with $l(x_j)$ the collective assessment of the alternative x_j. Given that several alternatives might share the same collective assessment, Balinski and Laraki [12] propose a sequential tie-breaking process. This can be described through the following terms (see García-Lapresta and Martínez-Panero [27]):

$$N^+(x_j) = \#\{i \in V \mid v_j^i > l(x_j)\}\,, \quad N^-(x_j) = \#\{i \in V \mid v_j^i < l(x_j)\}$$

and

$$t(x_j) = \begin{cases} -1, & \text{if } N^+(x_j) < N^-(x_j), \\ 0, & \text{if } N^+(x_j) = N^-(x_j), \\ 1, & \text{if } N^+(x_j) > N^-(x_j). \end{cases}$$

[2]The current notation is similar to the one introduced by García-Lapresta and Martínez-Panero [27]. This allows us to describe the MJ process, presented by Balinski and Laraki [12], in a more precise way.

Taking into account the collective assessments and the previous indices, we define a weak order[3] $\succeq$ on X in the following way: $x_j \succeq x_k$ if and only if one of the following conditions holds:

1. $l(x_j) > l(x_k)$.
2. $l(x_j) = l(x_k)$ and $t(x_j) > t(x_k)$.
3. $l(x_j) = l(x_k)$, $t(x_j) = t(x_k) = 1$ and $N^+(x_j) > N^+(x_k)$.
4. $l(x_j) = l(x_k)$, $t(x_j) = t(x_k) = 1$, $N^+(x_j) = N^+(x_k)$ and $N^-(x_j) \leq N^-(x_k)$.
5. $l(x_j) = l(x_k)$, $t(x_j) = t(x_k) = 0$ and $m - N^+(x_j) - N^-(x_j) \geq m - N^+(x_k) - N^-(x_k)$.
6. $l(x_j) = l(x_k)$, $t(x_j) = t(x_k) = -1$ and $N^-(x_j) < N^-(x_k)$.
7. $l(x_j) = l(x_k)$, $t(x_j) = t(x_k) = -1$, $N^-(x_j) = N^-(x_k)$ and $N^+(x_j) \geq N^+(x_k)$.

The asymmetric and symmetric parts of $\succeq$ are defined in the usual way:

$$\begin{aligned} x_j \succ x_k &\Leftrightarrow \text{ not } x_k \succeq x_j \\ x_j \sim x_k &\Leftrightarrow (x_j \succeq x_k \text{ and } x_k \succeq x_j). \end{aligned}$$

Next an example of how MJ works is shown.

Example 1 Consider three alternatives x_1, x_2 and x_3 that are evaluated by seven voters through a set of six linguistic terms $L = \{l_1, \ldots, l_6\}$, the same set used in MJ [10], whose meaning is shown in Table 1.1.

Table 1.1: Meaning of the linguistic terms

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
To reject	*Poor*	*Acceptable*	*Good*	*Very good*	*Excellent*

The assessments obtained for each alternative are collected and ranked from the lowest to the highest in Table 1.2.

[3] A *weak order* (or *total preorder*) is a complete and transitive binary relation.

Table 1.2: Assessments of Example 1

x_1	l_1	l_1	l_3	l_5	l_5	l_5	l_6
x_2	l_1	l_4	l_4	l_4	l_4	l_5	l_6
x_3	l_1	l_3	l_4	l_4	l_5	l_5	l_5

For ranking the three alternatives, first we take the median of the individual assessments, that will be the collective assessment for each one of the mentioned alternatives: $l(x_1) = l_5$, $l(x_2) = l_4$ and $l(x_3) = l_4$. Given that x_1 has the best collective assessment, it will be the one that get the first place on the rank. However, the alternatives x_2 and x_3 share the same collective assessment, we need to turn to the tie-breaking process, where we obtain $N^+(x_2) = 2$, $N^-(x_2) = 1$ and $t(x_2) = 1$; $N^+(x_3) = 3$, $N^-(x_3) = 2$ and $t(x_3) = 1$. Since both alternatives have the same t ($t(x_2) = t(x_3) = 1$), we should compare their N^+: $N^+(x_2) = 2 < 3 = N^+(x_3)$. Therefore, the alternative x_3 defeats the alternative x_2, and the final order is $x_1 \succ x_3 \succ x_2$.

1.3 Distance-based method

In this section the alternative method to MJ that we propose through a distance-based approach is introduced. The first step for ranking the alternatives is to assign a collective assessment $l(x_j) \in L$ to each alternative $x_j \in X$. For its calculation, the vectors $(v_j^1, \ldots, v_j^m)$ that collect all the individual assessments for each alternative $x_j \in X$ are taken into account.

The proposal, that is detailed below, involves how to choose a $l(x_j) \in L$ that minimizes the distance between the vector of individual assessments $(v_j^1, \ldots, v_j^m)$ and the vector $(l(x_j), \ldots, l(x_j)) \in L^m$. The election of that term is performed on an independent way for each alternative. This guarantees the fulfillment of the *independent of irrelevant alternatives principle*[4].

Once a collective assessment $l(x_j)$ has been associated with each alternative $x_j \in X$, we rank the alternatives according to the ordering of L. Given the possible existence of ties, we also propose a sequential tie-breaking process based on the difference between the distance of $l(x_j)$ to the assess-

[4] This principle says that the relative ranking between two alternatives would only depend on the preference or assessments on these alternatives and must not be affected by other alternatives, that must be irrelevant on that comparison.

ments higher than $l(x_j)$ and the distance of $l(x_j)$ to the assessments lower than $l(x_j)$.

1.3.1 Distances

A *distance or metric* on $\mathbb{R}^m$ is a mapping $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ that fulfills the following conditions for all $(a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m), (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$:

1. $d((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \geq 0$.
2. $d((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) = 0 \;\Leftrightarrow\; (a_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_m)$.
3. $d((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) = d((b_1, \ldots, b_m), (a_1, \ldots, a_m))$.
4. $d((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \leq$
   $d((a_1, \ldots, a_m), (c_1, \ldots, c_m)) + d((c_1, \ldots, c_m), (b_1, \ldots, b_m))$.

Given a distance $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, the *distance on* L^m *induced by* d is the mapping $\bar{d} : L^m \times L^m \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\bar{d}((l_{a_1}, \ldots, l_{a_m}), ((l_{b_1}, \ldots, l_{b_m})) = d((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)).$$

An important class of distances in $\mathbb{R}^m$ is constituted by the family of *Minkowski distances* $\{d_p \mid p \geq 1\}$, which are defined by

$$d_p((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

for all $(a_1, \ldots, a_m)$, $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

We choose this family due to the fact that is parameterized and it includes from the well-known *Manhattan* ($p = 1$) and *Euclidean* ($p = 2$) distances, to the limit case, the *Chebyshev* distance ($p = \infty$). The possibility of choosing among different values of $p \in (1, \infty)$ gives us a very flexible method, and we can choose the most appropriate p according to the objectives we want to achieve with the election. Given a Minkowski distance on $\mathbb{R}^m$, we consider the induced distance on L^m which works with the assessments' vector through the subindexes of the corresponding labels:

$$\bar{d}_p((l_{a_1}, \ldots, l_{a_m}), (l_{b_1}, \ldots, l_{b_m})) = d_p((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)).$$

Clearly, this approach means that the labels that form L are equidistant. In this sense, the distance between two labels' vectors is based on the number of positions that we need to cover to go from one to another, in each of its components. To move from l_{a_i} to l_{b_i} we need to cover $|a_i - b_i|$ positions. For instance between l_5 and l_2 we need to cover $|5-2| = 3$ positions: from l_5 to l_4, from l_4 to l_3 and from l_3 to l_2.

1.3.2 Election of a collective assessment for each alternative

Our proposal is divided in several stages. First we assign a collective assessment $l(x_j) \in L$ to each alternative $x_j \in X$ such that minimizes the distance between the vector of the individual assessments, $(v_j^1, \dots, v_j^m) \in L^m$, and the vector of m replicas of the desired collective assessment, $(l(x_j), \dots, l(x_j)) \in L^m$.

For this, first we establish the set $L(x_j)$ of all the labels $l_k \in L$ satisfying

$$\bar{d}_p((v_j^1, \dots, v_j^m), (l_k, \dots, l_k)) \leq \bar{d}_p((v_j^1, \dots, v_j^m), (l_h, \dots, l_h)),$$

for each $l_h \in L$, where $(l_h, \dots, l_h)$ and $(l_k, \dots, l_k)$ are the vectors of m replicas of l_h and l_k, respectively. Thus, $L(x_j)$ consists of those labels that minimize the distance to the vector of individual assessments. Notice that $L(x_j) = \{l_r, \dots, l_{r+s}\}$ is always an interval, because it contains all the terms from l_r to l_{r+s}, where $r \in \{1, \dots, g\}$ and $0 \leq s \leq g - r$. Two different cases are possible:

1. If $s = 0$, then $L(x_j)$ contains a single label, which will automatically be the collective assessment $l(x_j)$ of the alternative x_j.

2. If $s > 0$, then $L(x_j)$ has more than one label. In order to select the most suitable label of $L(x_j)$, we now introduce $L^*(x_j)$, the set of all the labels $l_k \in L(x_j)$ that fulfill

$$\bar{d}_p((l_k, \dots, l_k), (l_r, \dots, l_{r+s})) \leq \bar{d}_p((l_h, \dots, l_h), (l_r, \dots, l_{r+s})),$$

   for all $l_h \in L(x_j)$, where $(l_k, \dots, l_k)$ and $(l_h, \dots, l_h)$ are the vectors of $s+1$ replicas of l_k and l_h, respectively.

   (a) If the cardinality of $L(x_j)$ is odd, then $L^*(x_j)$ has a unique label, the median term, that will be the collective assessment $l(x_j)$.

(b) If the cardinality of $L(x_j)$ is even, then $L^*(x_j)$ has two different labels, the two median terms. In this case, similarly to the proposal of Balinski y Laraki [12], we consider the lowest label in $L^*(x_j)$ as the collective assessment $l(x_j)$.

It is worth pointing out two different cases when we are using induced Minkowski distances.

1. If $p = 1$, we obtain the same collective assessments that those given by MJ, the median[5] of the individual assessments. However, the final results are not necessarily the same that in MJ because we use a different tie-breaking process, as is shown later.

2. If $p = 2$, each collective assessment is the closest label to the "mean" of the individual assessments[6], what is the one chosen in the *Range Voting* (RV) method[7] (see Smith [52]).

It is interesting to note that when we choose $p \in (1, 2)$, we find situations where the collective assessment is located between the median and the "mean". This allows us to avoid some of the problems associated with MJ and RV. See García-Lapresta and Martínez-Panero [27] for a different proposal based on centered OWA operators (Yager [61]).

1.3.3 Tie-breaking method

Usually there exist more alternatives than linguistic terms, so it is very common to find several alternatives sharing the same collective assessment. But irrespectively of the number of alternatives, it is clear that some of them may share the same collective assessment, even when the individual assessments are very different. For these reasons it is necessary to introduce a tie-breaking method that takes into account not only the number of individual assessments above or below the obtained collective assessment (as in

[5] It is more precise to speak about the interval of medians, because if the assessments' vector has an even number of components, then there are more than one median. See Monjardet [43].

[6] The chosen label is not exactly the arithmetic mean of the individual assessments, because we are working with a discrete spectrum of linguistic terms and not in the continuous one of the set of real numbers.

[7] RV works with a finite scale given by equidistant real numbers, and it ranks the alternatives according to the arithmetic mean of the individual assessments.

MJ), but the positions of these individual assessments in the ordered scale associated with L.

As mentioned above, we will calculate the difference between two distances: one between $l(x_j)$ and the assessments higher than $l(x_j)$ and another one between $l(x_j)$ and the assessments lower than the $l(x_j)$. Let $\boldsymbol{v}_j^+$ and $\boldsymbol{v}_j^-$ the vectors composed by the assessments v_j^i from $\left(v_j^1, \ldots, v_j^m\right)$ higher and lower than the term $l(x_j)$, respectively. First we calculate the two following distances:

$$D^+(x_j) = \bar{d}_p \left(\boldsymbol{v}_j^+, (l(x_j), \ldots, l(x_j))\right),$$
$$D^-(x_j) = \bar{d}_p \left(\boldsymbol{v}_j^-, (l(x_j), \ldots, l(x_j))\right),$$

where the number of components of $(l(x_j), \ldots, l(x_j))$ is the same that in $\boldsymbol{v}_j^+$ and in $\boldsymbol{v}_j^-$, respectively (obviously, the number of components of $\boldsymbol{v}_j^+$ and $\boldsymbol{v}_j^-$ can be different).

Once these distances have been determined, a new index $D(x_j) \in \mathbb{R}$ is calculated for each alternative $x_j \in X$: the difference between the two previous distances:

$$D(x_j) = D^+(x_j) - D^-(x_j).$$

By means of this index, we provide a kind of compensation between the individual assessments that are bigger and smaller than the collective assessment, taking into account the position of each assessment in the ordered scale associated with L.

For introducing our tie-breaking process, we finally need the distance between the individual assessments and the collective one:

$$E(x_j) = \bar{d}_p \left((v_j^1, \ldots, v_j^m), (l(x_j), \ldots, l(x_j))\right).$$

Notice that for each alternative $x_j \in X$, $E(x_j)$ minimizes the distance between the vector of individual assessments and the linguistic labels in L, such as has been considered above in the definition of $L(x_j)$.

The use of the index $E(\cdot)$ is important in the tie-breaking process because if two alternatives share the same couple $(l(\cdot), D(\cdot))$, the alternative with the lower $E(\cdot)$ is the alternative whose individual assessments are more concentrated around the collective assessment, i.e., the consensus is higher.

Summarizing, for ranking the alternatives we will consider the following triplet

$$T(x_j) = (l(x_j), D(x_j), E(x_j)) \in L \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

for each alternative $x_j \in X$.

The sequential process works in the following way:

1. We rank the alternatives through the collective assessments $l(\cdot)$. The alternatives with higher collective assessments will be preferred to those with lower collective assessments.
2. If several alternatives share the same collective assessment, then we break the ties through the $D(\cdot)$ index. The alternatives with a higher $D(\cdot)$ will be preferred.
3. If there are still ties, we break them through the $E(\cdot)$ index, in such a way such that the alternatives with a lower $E(\cdot)$ will be preferred.

Formally, the sequential process can be introduced by means of the lexicographic weak order $\succeq$ on X defined by $x_j \succeq x_k$ if and only if

1. $l(x_j) \geq l(x_k)$ or
2. $l(x_j) = l(x_k)$ and $D(x_j) > D(x_k)$ or
3. $l(x_j) = l(x_k)$, $D(x_j) = D(x_k)$ and $E(x_j) \leq E(x_k)$.

Remark 1 Although it is possible that ties still exist, whenever two or more alternatives share $T(\cdot)$, these cases are very unusual when considering metrics with $p > 1$.[8] For instance, consider seven voters that assess two alternatives x_1 and x_2 by means of the set of linguistic terms given in Table 1.1. Table 1.3 includes these assessments arranged from the lowest to the highest labels.

It is easy to see that for $p = 1$ we have $T(x_1) = T(x_2) = (l_2, 8, 8)$, then $x_1 \sim x_2$ (notice that MJ and RV also provide a tie). However, if $p > 1$, the tie disappears. So, we have $x_2 \succ x_1$, excepting for $p \in (1.179, 1.203)$, where $x_1 \succ x_2$.

[8] The Manhattan metric ($p = 1$) produces more ties than the other metrics in the Minkowski family because of the simplicity of its calculations.

Table 1.3: Individual assessments

x_1	l_2	l_2	l_2	l_2	l_4	l_4	l_6
x_2	l_2	l_2	l_2	l_2	l_3	l_5	l_6

1.4 Two illustrative examples

This section focus on how the election of the parameter p is relevant in the final ranking of the alternatives. We show this fact through two different examples. The first one considers a case where the median of the individual assessments is the same for all the alternatives. And the second one considers a situation where the mean of the individual assessments' subindexes is the same for all the alternatives. In both examples we use the set of six linguistic terms $L = \{l_1, \ldots, l_6\}$ whose meaning is shown in Table 1.1.

As mentioned above, the sequential process for ranking the alternatives is based on the triplet $T(x_j) = (l(x_j), D(x_j), E(x_j))$ for each alternative $x_j \in X$. However, by simplicity, in the following examples we only show the first two components, $(l(x_j), D(x_j))$. In these examples we also obtain the outcomes provided by MJ and RV.

Example 2 Table 1.4 includes the assessments given by six voters to four alternatives x_1, x_2, x_3 and x_4 arranged from the lowest to the highest labels.

Table 1.4: Assessments in Example 2

x_1	l_1	l_2	l_4	l_4	l_4	l_6
x_2	l_1	l_1	l_3	l_4	l_6	l_6
x_3	l_2	l_2	l_2	l_4	l_5	l_6
x_4	l_1	l_1	l_4	l_5	l_5	l_5

Notice that the mean of the individual assessments' subindexes is the same for the three alternatives, $\frac{21}{6} = 3.333$. Since RV ranks the alternatives according to this mean, it produces a tie $x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4$. However, from different points of view, this outcome could be not reasonable. This is the case of MJ, where $l(x_1) = l(x_4) = l_4 > l_3 = l(x_2) > l_2 = l(x_2)$ and, according to the MJ tie-breaking process, we have $t(x_1) = -1 < 1 = t(x_4)$.

Thus, MJ produces the outcome $x_4 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_3$. We now consider the distance-based procedure for seven values of p. In Table 1.5 we can see the influence of these values on $(l(x_j), D(x_j))$, for $j = 1, 2, 3$. The corresponding rankings are included in Table 1.6.

Table 1.5: $(l(x_j), D(x_j))$ in Example 2

	$p = 1$	$p = 1.25$	$p = 1.5$	$p = 1.75$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$
x_1	$(l_4, -3)$	$(l_4, -2.375)$	$(l_4, -2.008)$	$(l_4, -1.770)$	$(l_3, 1.228)$	$(l_3, 0.995)$	$(l_3, 0.000)$
x_2	$(l_3, 10)$	$(l_3, 2.264)$	$(l_3, 1.888)$	$(l_3, 1.669)$	$(l_3, 1.530)$	$(l_3, 1.150)$	$(l_3, 1.072)$
x_3	$(l_2, 9)$	$(l_3, 2.511)$	$(l_3, 2.254)$	$(l_3, 2.104)$	$(l_3, 2.010)$	$(l_4, -0.479)$	$(l_4, -0.232)$
x_4	$(l_4, -3)$	$(l_4, -2.815)$	$(l_4, -2.682)$	$(l_4, -2.585)$	$(l_3, 0.777)$	$(l_3, 0.199)$	$(l_3, 0.089)$

Table 1.6: Rankings in Example 2

	MJ	$p = 1$	$p = 1.25$	$p = 1.5$	$p = 1.75$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$
	x_4	x_1	x_1	x_1	x_1	x_3	x_3	x_3
	x_1	x_4	x_4	x_4	x_4	x_2	x_2	x_2
	x_2	x_2	x_3	x_3	x_3	x_1	x_1	x_1
	x_3	x_3	x_2	x_2	x_2	x_4	x_4	x_4

For $p = 1$ we have $T(x_1) = (l_4, -3, 7)$, $T(x_2) = (l_3, 10, 11)$, $T(x_3) = (l_2, 9, 9)$ and $T(x_4) = (l_4, -3, 9)$. Then, we obtain $x_1 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_3$, a different outcome that in MJ. For $p = 1.25$, $p = 1.5$ and $p = 1.75$ we obtain $x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2$; and for $p = 2$, $p = 5$ and $p = 10$ we have $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$.

Example 3 Similarly to the previous example, Table 1.7 includes the assessments given by seven voters to three alternatives x_1, x_2 and x_3 arranged from the lowest to the highest labels.

Table 1.7: Assessments in Example 3

x_1	l_1	l_1	l_2	l_3	l_6	l_6	l_6
x_2	l_2	l_3	l_3	l_3	l_6	l_6	l_6
x_3	l_3	l_3	l_3	l_3	l_4	l_4	l_4

Clearly, the individual assessments of the three alternatives share the same median, l_3. According to the MJ tie-breaking process, we have

$$\begin{aligned}
&t(x_1) = 0 < 1 = t(x_2) = t(x_3)\\
&N^+(x_1) = N^+(x_2) = N^+(x_3) = 3\\
&N^-(x_3) = 0 < 1 = N^-(x_2) < 3 = N^-(x_1).
\end{aligned}$$

Thus, MJ produces the outcome $x_3 \succ x_2 \succ x_1$.

This outcome does not seem logical, because x_2 has a clear advantage over x_3. On the other hand, RV ranks order the alternatives as follows: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$, since the mean of the individual assessments' subindexes are 3.571, 4.143 and 3.429 for x_1, x_2 and x_3, respectively. We now consider the distance-based procedure for seven values of p, the same considered in the previous example. Table 1.8 shows the influence of these values on $(l(x_j), D(x_j))$, for $j = 1, 2, 3$.

Table 1.8: $(l(x_j), D(x_j))$ in Example 3

	$p=1$	$p=1.25$	$p=1.5$	$p=1.75$	$p=2$	$p=5$	$p=10$
x_1	$(l_3, 4)$	$(l_3, 3.168)$	$(l_3, 2.702)$	$(l_4, -1.475)$	$(l_4, -1.332)$	$(l_4, -1.000)$	$(l_4, -0.986)$
x_2	$(l_3, 8)$	$(l_4, 0.975)$	$(l_4, 0.922)$	$(l_4, 0.868)$	$(l_4, 0.818)$	$(l_4, 0.455)$	$(l_4, 0.235)$
x_3	$(l_3, 3)$	$(l_3, 2.408)$	$(l_3, 2.080)$	$(l_3, 1.873)$	$(l_3, 1.732)$	$(l_3, 1.246)$	$(l_3, 1.116)$

Notice that in this example the same ranking is obtained for all the considered values of p: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$. This outcome coincides with RV, and it is more consistent than that obtained by MJ.

1.5 Concluding remarks

In this chapter we have presented an extension of the Majority Judgement voting system developed by Balinski and Laraki [10, 11, 12]. This extension is based on a distance approach but it also uses linguistic labels to evaluate the alternatives. We choose as the collective assessment for each alternative a label that minimizes the distance to the individual assessments. It is important to note that our proposal coincides in this aspect with Majority Judgement whenever the Manhattan metric is used.

We also provide a tie-breaking process through the distances between the individual assessments higher and lower than the collective one. This process is richer than the one provided by Majority Judgement, that only counts the number of alternatives above or below the collective assessment, irrespectively of what they are. We also note that our tie-breaking process is essentially different to Majority Judgement even when the Manhattan metric is considered.

It is important to note that using the distance-based approach we pay attention to all the individual assessments that have not been chosen as the collective assessment. With the election of a specific metric of the Minkowski family we are deciding how to evaluate these other assessments. This aspect provides flexibility to our extension and it allows to devise a wide class of voting systems that may avoid some of the drawbacks related to Majority Judgement and Range Voting without losing their good features. This becomes specially interesting when the value of the parameter p in the Minkowski family belongs to the open interval $(1, 2)$, since $p = 1$ and $p = 2$ correspond to the Manhattan and the Euclidean metrics, respectively, just the metrics used in Majority Judgement and Range Voting. For instance, the election of $p = 1.5$ allows us to have a kind of compromise between both methods.

As showed in the previous examples, when the value of parameter p increases, the distance-based procedure focuses more and more in the extreme assessments. However, if the individual assessments are well balanced in both sides, the outcome is not very affected by the parameter p.

In further research we will analyze the properties of the presented extension of Majority Judgement within the Social Choice framework.

Chapter 2

Aggregating imprecise linguistic expressions

[This chapter has been accepted for publication (jointly with José Luis García-Lapresta and Llorenç Roselló) as a chapter in the book *Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences* (eds. W. Pedrycz, P. Guo). Springer-Verlag, Berlin.]

In this chapter, we propose a multi-person decision making procedure where agents judge the alternatives through linguistic expressions generated by an ordered finite scale of linguistic terms (for instance, 'very good', 'good', 'acceptable', 'bad', 'very bad'). If the agents are not confident about their opinions, they might use linguistic expressions composed by several consecutive linguistic terms (for instance, 'between acceptable and good'). The procedure we propose is based on distances and it ranks order the alternatives taking into account the linguistic information provided by the agents. The main features and properties of the proposal are analyzed.

2.1 Introduction

People face a lot of decision-making problems in their everyday life. Some of these problems can be easily managed by means of numbers (How many tablespoons of sugar should I add to my coffee? How much is this computer?), but other problems are more complex and a numerical representation is more difficult to be implemented (Which mean of transportation should I choose? How much is this brand preferred to this other?). Trying to assign a number to an opinion that could be imprecise makes it even harder. Human beings usually have difficulties representing uncertainty through numbers. As Zimmer [66] suggested, people generally prefer to handle the imprecision with linguistic terms rather than with numbers, because verbal expressions and their associated rules of conversation are more naturally included in people's thoughts.

Wallsten *et al.* [57] conducted an experimental research where they showed that people are more comfortable expressing the meanings of probability through words rather than through numbers. Following this line of thought, the program *Computing with Words* arises (see Kacprzyk and Zadrożny [37] and Zadeh [63], among others). In it, the objects of computation are words drawn from the natural language and agents express themselves through linguistic terms.

Among all possible kinds of decisions, this chapter focuses on the ones concerning voting systems. In voting, agents (or voters) have to show their preferences over multiple options (candidates or alternatives). Next, the individual preferences are somehow aggregated to yield a final result.

There are several voting systems where the agents assess linguistic terms to show their preferences. One of the most simple is *Approval Voting* (Brams and Fishburn [16, 17]), where agents can either "approve of" or "not-approve of" the candidates. As an extension of Approval Voting, recently the voting system *Majority Judgment* (Balinski and Laraki [14, 12, 15]) appears. In Majority Judgement, agents can assess to each candidate a linguistic term as 'excellent', 'very good', 'good', etc., from a fixed linguistic scale, to each candidate.

Majority Judgment is a controversial method and some authors have shown several paradoxes and inconsistences (see Smith [52], Felsenthal and Machover [24], García-Lapresta and Martínez-Panero [27] and Nurmi [44], among others).

In order to solve some of these inconsistences, extensions of Majority Judgment have been developed. For instance, García-Lapresta and Martínez-Panero [27] proposed an extension for small committees where the linguistic information is aggregated by means of *centered OWA operators* (Yager [61]) and the *2-tuple fuzzy linguistic representation* (Herrera and Martínez [33]). In Falcó and García-Lapresta [20, 21], an extension based on the distances between linguistic terms is introduced. Finally, Zahid [65] proposed a combination between Majority Judgment and the *Borda Count* [19].

There are other examples of voting systems using linguistic terms, such as García-Lapresta [25], who extended *simple majority* through linguistic preferences, or García-Lapresta *et al.* [26, 28] who generalized Borda rule assessing linguistic terms to the alternatives.

The introduction of linguistic terms partially captures agent's complexity. Nevertheless, this treatment does not necessarily include all the uncertainty that agents may feel. An agent might have some doubts about which linguistic term to assess. In this regard, allowing agents to assess several consecutive linguistic terms comes out as a possible solution (see Tang and Zheng [53], Ma *et al.* [40], Rodríguez *et al.* [46]). In this sense, our proposal deals with the matter by means of the *absolute order of magnitude spaces* introduced by Travé-Massuyés and Piera [56] and Travé-Massuyés and Dague [55]. More specifically, in the extension developed in Roselló *et al.* [48, 49, 50] as a starting point.

In this chapter we introduce a decision process where agents show their assessments over the feasible alternatives either through linguistic terms or through linguistic expressions. These expressions are generated by consecutive linguistic terms, and allow individuals to express imprecise assessments when they are not confident about their opinions.

The process aggregates the individual assessments by providing a weak order on the set of alternatives, satisfying some desirable properties. This weak order ranks the alternatives according to the distance between the corresponding individual assessments and the maximal linguistic term. These distances are defined through parameterized metrics in such a way that the values of the parameters allow to consider different ways of penalization on the agents' imprecision.

The chapter is organized as follows. Section 2.2 includes some notation and basic notions. Section 2.3 is devoted to analyze how to penalize the imprecision through appropriate parameterized metrics. Section 2.4 introduces the canonical linear order on the set of linguistic expressions and shows how this order can be reached through distances to the maximal linguistic term. Section 2.5 describes the decision process and some properties. Section 2.6 includes some illustrative examples. Finally, Section 2.7 includes some concluding remarks.

2.2 Preliminaries

Let $V = \{1, \ldots, m\}$, with $m \geq 2$, be a set of agents or voters and let $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, with $n \geq 2$, be the set of alternatives or candidates that have to be evaluated.

Let $L = \{l_1, \ldots, l_g\}$ be a linguistic ordered scale, where $l_1 < l_2 < \ldots < l_g$. The *granularity* of L is its cardinal, $\# L = g \geq 2$. The elements of L are linguistic terms as 'excellent', 'very good', 'good', etc.

A binary relation $\succcurlyeq$ on a set $A \neq \emptyset$ is a *weak order* (or *complete preorder*) if it is complete ($a \succcurlyeq b$ or $b \succcurlyeq a$, for all $a, b \in A$) and transitive (if $a \succcurlyeq b$ and $b \succcurlyeq c$, then $a \succcurlyeq c$, for all $a, b, c \in A$). On the other hand, a *linear order* on $A \neq \emptyset$ is an antisymmetric[1] weak order on A. Given a weak or linear order $\succcurlyeq$ on $A \neq \emptyset$, the asymmetric and symmetric parts of $\succcurlyeq$ are denoted by $\succ$ and $\sim$, respectively; in other words, $a \succ b$ if not $b \succcurlyeq a$, and $a \sim b$ if $a \succcurlyeq b$ and $b \succcurlyeq a$.

The set of weak orders on A is denoted by $W(A)$.

Based on the *absolute order of magnitude spaces* following Travé-Massuyès and Piera [56], we define the *set of linguistic expressions* as

$$\mathbb{L} = \{[l_h, l_k] \mid l_h, l_k \in L\,,\ 1 \leq h \leq k \leq g\}\,,$$

where $[l_h, l_k] = \{l_h, l_{h+1}, \ldots, l_k\}$. Since $[l_h, l_h] = \{l_h\}$, this linguistic expression can be replaced by the linguistic term l_h. In this way, $L \subset \mathbb{L}$.

Given $\mathcal{E} = [l_h, l_k] \in \mathbb{L}$, with $\#\mathcal{E}$ we denote the number of linguistic terms of $\mathcal{E}$, i.e., $\#\mathcal{E} = k - h + 1$.

Example 4 Consider the set of linguistic terms $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ with the meanings given in Table 2.1.

[1] $\succcurlyeq$ is antisymmetric if for all $a, b \in A$ such that $a \neq b$ it holds $a \succ b$ or $b \succ a$.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
very bad	bad	acceptable	good	very good

Table 2.1: Meaning of the linguistic terms in Example 4.

Each linguistic expression has a meaning on its own. For instance, $[l_2, l_4]$ means 'between bad and good', $[l_4, l_5]$ means between 'good and very good', or 'at least good', etc.

The set of all the linguistic expressions can be represented by a graph where the lowest layer represents the linguistic terms $l_h \in L \subset \mathbb{L}$, the second layer represents the linguistic expressions formed by two consecutive linguistic terms $[l_h, l_{h+1}]$, the third layer represents the linguistic expressions formed by three consecutive linguistic terms $[l_h, l_{h+2}]$, and so on up to the last layer where the linguistic expression $[l_1, l_g]$ is located. Consequently, the higher layer a linguistic expression is located, the more imprecise is.

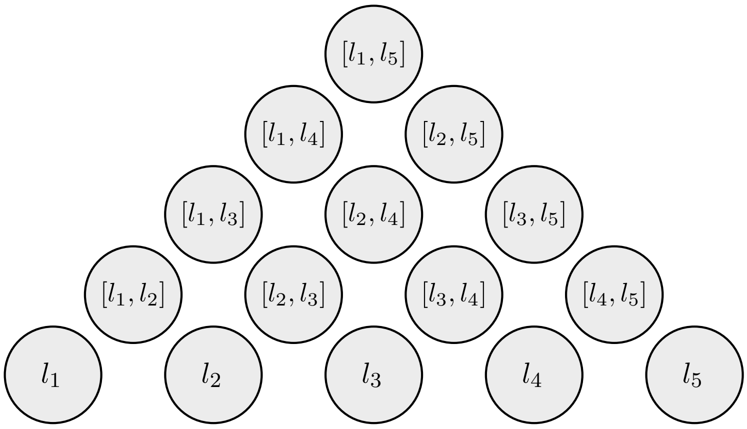

Figure 2.1: Layers in the set of linguistic expressions for $g = 5$.

Notice that $\# \mathbb{L} = g + (g-1) + \cdots + 1 = \dfrac{g(g+1)}{2}$.

Sometimes the computations in $\mathbb{L}$ will be done in $\mathbb{Z}^2$ by means of the injection $\psi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ defined as $\psi([l_h, l_k]) = (k-1, h-1)$. Trough the function ψ we can represent a linguistic expression as a point in the plane. For instance, the linguistic expression $[l_2, l_5]$ can be represented as the point $(4, 1)$ in $\mathbb{Z}^2$. This function allows us to work in an easier computational setting.

The *Manhattan metric* on $\mathbb{R}^q$ is the function $d_M : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ defined as

$$d_M((a_1,\dots,a_q),(b_1,\dots,b_q)) = \sum_{r=1}^{q} |a_r - b_r|.$$

For $q = 1$ the Manhattan and the Euclidean metrics coincide: $d_M(a,b) = |a - b|$.

To define a first metric on the set of linguistic expressions $\mathbb{L}$, we adopt the treatment introduced by Roselló *et al.* [50] in the associated graph $G_{\mathbb{L}}$. The vertices in $G_{\mathbb{L}}$ are the elements of $\mathbb{L}$ and the edges $\mathcal{E} \sim \mathcal{F}$, where $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ and $\mathcal{F} = [l_h, l_{k+1}]$, or $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ and $\mathcal{F} = [l_{h+1}, l_k]$.

The graph representation for $g = 5$ is included in Fig. 3.1.

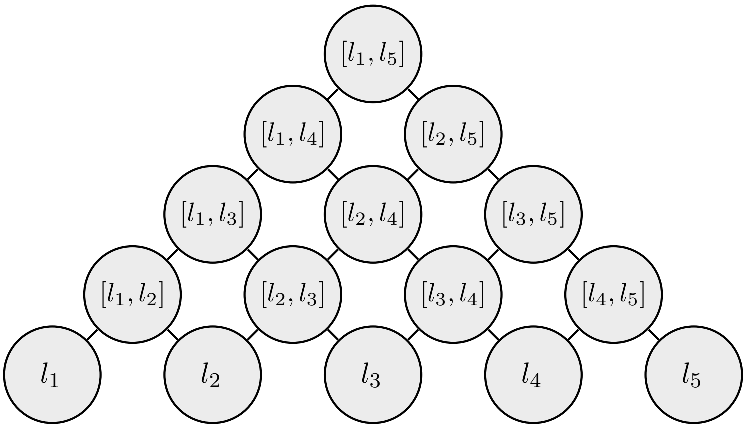

Figure 2.2: Graph representation of the linguistic expressions for $g = 5$.

Definition 1 *The* geodesic metric *on* $\mathbb{L}$ *is the function* $d_G : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ *defined as*

$$d_G(\mathcal{E},\mathcal{F}) = d_M(\psi(\mathcal{E}),\psi(\mathcal{F})).$$

Notice that $d_G(\mathcal{E},\mathcal{F})$ is the number of edges in one of the shortest paths connecting $\mathcal{E}$ and $\mathcal{F}$ in the graph associated with $\mathbb{L}$.

Example 5 The geodesic distance between the linguistic expressions $[l_1, l_4]$ and $[l_3, l_5]$ in Example 2.1 is

$$d_G([l_1,l_4],[l_3,l_5]) = d_M(\psi([l_1,l_4]),\psi([l_3,l_5])) = d_M((3,0),(4,2)) = 3,$$

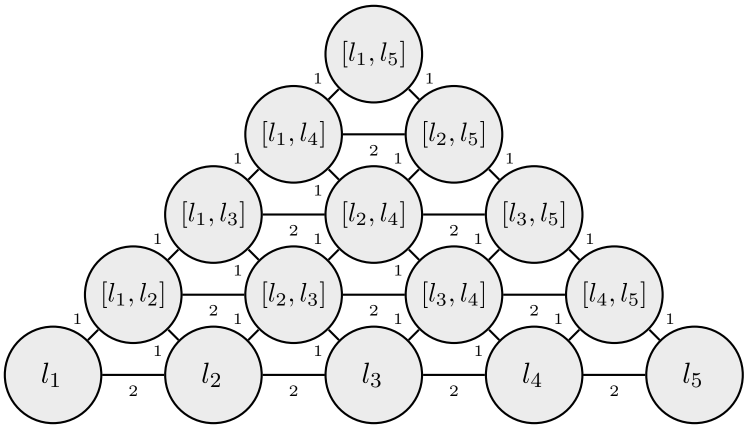

Figure 2.3: Geodesic distances between contiguous linguistic expressions for $g = 5$.

just the length of one of the shortest paths from $[l_1, l_4]$ to $[l_3, l_5]$, for instance from vertex $[l_1, l_4]$ to vertex $[l_2, l_4]$, from vertex $[l_2, l_4]$ to vertex $[l_2, l_5]$ and, finally, from vertex $[l_2, l_5]$ to vertex $[l_3, l_5]$. This path is not unique, but it is one of those shortest paths.

Fig. 2.3 shows the geodesic distances between contiguous linguistic expressions in Example 2.1. Distances between non-contiguous linguistic expressions can be obtained as the sum of distances through shortest paths between them.

2.3 Penalizing the imprecision

According to the geodesic metric d_G, the distance between two consecutive linguistic terms l_h and l_{h+1} is equal to 2. Imagine now an individual doubting about which one to choose (either l_h or l_{h+1}). If allowed, this individual may assess both of them, the linguistic expression $[l_h, l_{h+1}]$. This linguistic expression is in a geodesic distance of 1 from both l_h and l_{h+1}. In that sense, an individual confident about which linguistic term assesses is treated in the same way that an individual who assesses several linguistic terms.

In this chapter, we consider that precision in the assessments should be rewarded or, in a similar fashion, the imprecision should be penalized. That being said, we consider two kinds of penalization through two parameters α and β that must be chosen according to the penalization we want to impose.

Every time an agent assesses an additional linguistic term (i.e., the cardinality of the linguistic expression rises by 1), her level of imprecision increases. As we go up in the layers of Figure 2.1, each linguistic expression is less precise than in the previous layer. So, the bottom layer has the highest precision (a single linguistic term), the second layer is less precise (two linguistic terms), the third one is even less precise (three linguistic terms), and so on.

Taking into account that the loss of precision should be penalized, we propose two different ways of penalization. First, for each linguistic term we add up, we increase the distance with a penalization of α: the distances from l_h to $[l_h, l_{h+1}]$ or $[l_{h-1}, l_h]$ are not 1, but $1+\alpha$. This penalization can be modeled by adding up $\alpha\, d_M(\#\mathcal{E}, \#\mathcal{F})$ to $d_G(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Following this α-penalization, the distances between some linguistic expressions are as follows:

$$\begin{aligned}
&d(l_2, [l_2, l_3]) = d_G(l_2, [l_2, l_3]) + \alpha\, d_M(\#l_2, \#[l_2, l_3]) = 1 + \alpha \\
&d([l_3, l_4], [l_3, l_5]) = d_G([l_3, l_4], [l_3, l_5]) + \alpha\, d_M(\#[l_3, l_4], \#[l_3, l_5]) = 1 + \alpha \\
&d(l_1, [l_1, l_3]) = d_G(l_1, [l_1, l_3]) + \alpha\, d_M(\#l_1, \#[l_1, l_3]) = 2 + 2\alpha.
\end{aligned}$$

Until now, we have considered a penalization for the layer variation. Every additional linguistic term is penalized by α. Consequently, going from 2 linguistic terms up to 3 is the same than going from 3 up to 4. The second penalization takes into account not only how many linguistic terms the agent is using, but how far are from the maximum precision. What is the same, the higher the linguistic expression is in the layers, the more each added term should be penalized. For instance, the penalization from l_2 to $[l_2, l_3]$ should not be the same that from $[l_2, l_3]$ to $[l_2, l_4]$. In this regard, the β-penalization appears. This penalization increases as we climb the graph. That way, going up from 2 linguistic terms up to 3 is penalized by $1+\alpha+\beta$, and going up from 3 up to 4 by $1+\alpha+2\beta$. To model this β-penalization we introduce a new function $\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ defined as

$$\rho(a, b) = \frac{(a+b-3)\,|a-b|}{2}.$$

Notice that $\rho(a, a+1) = a - 1$ for every $a \in \mathbb{N}$.

If we apply the function ρ to the "linguistic expressions cardinality", we would obtain the number of times we should use the β-penalization. Taking into account that, as we climb up from the second layer to the top, we are increasing by β the penalization, the function ρ allows us to add the penalization of every layer. For instance, if we compare the linguistic expression $[l_2, l_3]$, which is on the second layer, and the linguistic expression $[l_1, l_5]$, which is on the fifth layer, we have to climb up a total of three layers. Climbing up form the second to the third layer it penalizes β, form the third to the fourth layer it penalizes 2β and from the fourth to the fifth layer it penalizes 3β. Adding all the β's we obtain $1+2+3=6$ or, similarly using the function ρ,

$$\rho(2,5) = \frac{(2+5-3)\,|2-5|}{2} = 6.$$

We now introduce a family of parameterized metrics that agglutinates the geodesic metric and the mentioned penalizations.

Proposition 1 *For all* $\alpha, \beta \geq 0$*, the function* $d : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ *defined as*

$$d(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \begin{cases} d_G(\mathcal{E},\mathcal{F}) + \alpha\, d_M(\#\mathcal{E},\#\mathcal{F}) + \beta\, \rho(\#\mathcal{E},\#\mathcal{F}), & \textit{if } \#\mathcal{E}+\#\mathcal{F} > 3 \\ d_G(\mathcal{E},\mathcal{F}) + \alpha\, d_M(\#\mathcal{E},\#\mathcal{F}), & \textit{if } \#\mathcal{E}+\#\mathcal{F} \leq 3 \end{cases}$$

is a metric, and it is called the metric associated with (α,β).

Proof: Since every linear combination of metrics is a metric, it is only necessary to check that ρ is a metric when it is restricted to $N = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b > 3\}$. Clearly, $\rho(a,b) \geq 0$, $\rho(a,b) = \rho(b,a)$, and $\rho(a,b) = 0$ if and only if $a = b$, for all $a, b \in N$. To prove the triangular inequality, $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)$ for all $a,b,c \in N$, six cases have to be considered: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ and $c \leq b \leq a$. Suppose $a \leq b \leq c$ (the other five cases are analogous). It is immediate to see that

$$\begin{aligned} \rho(a,b) &= \frac{b^2-a^2+3(a-b)}{2} \\ \rho(a,c) &= \frac{c^2-a^2+3(a-c)}{2} \\ \rho(c,b) &= \frac{c^2-b^2+3(b-c)}{2}. \end{aligned}$$

Then, $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)$ is equivalent to $(c-b)(c+b-3) \geq 0$, and it is obviously true for all $a, b, c \in N$.

Fig. 2.4 shows the distances between contiguous linguistic expressions for $g = 5$. Distances between non-contiguous linguistic expressions can be obtained as the sum of distances through shortest paths between them.

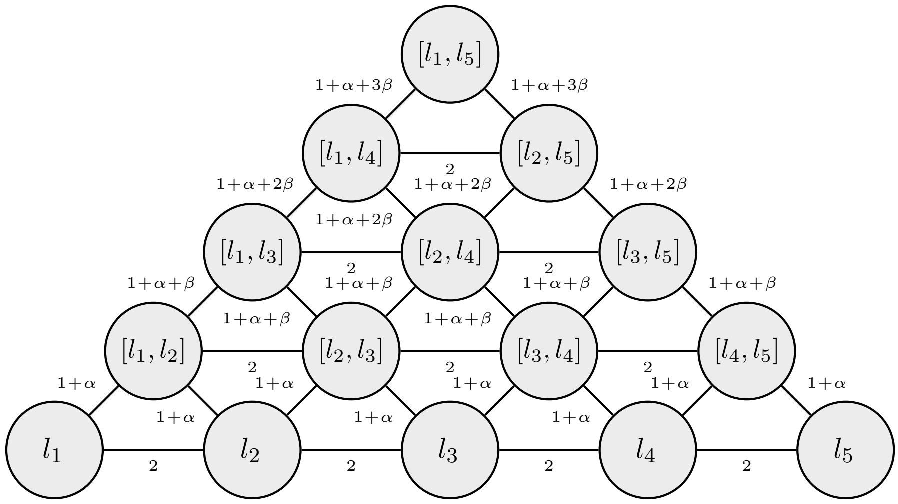

Figure 2.4: Representation of the metric associated with (α, β) for $g = 5$.

Remark 2 Some values of α and β can lead us into undesirable results. For instance, if $\alpha > 1$, we have $d(l_4, l_5) = 2 < 1+\alpha = d([l_4, l_5], l_5)$. Analogously, if $\alpha + \beta > 1$, we have $d([l_3, l_4], l_5) = 3 + \alpha < 2 + 2\alpha + \beta = d([l_3, l_5], l_5)$. To avoid these paradoxes, we should impose some conditions over the values of α and β.

2.4 Ordering linguistic expressions

In the last section we have shown that is possible to obtain some strange orders among the linguistic expression. We now introduce an intuitive order, the canonical linear order. It ranks a linguistic expression over another if the sum of the subindices of the first one is higher than the sum of second one. If both linguistic expressions have the exact same addition, we should rank ahead the more precise one.

Definition 2 *The* canonical order *on* $\mathbb{L}$ *is defined as*

$$[l_h, l_k] \succcurlyeq_{\mathbb{L}} [l_{h'}, l_{k'}] \Leftrightarrow \begin{cases} h + k > h' + k' \\ or \\ h + k = h' + k' \quad and \quad k - h \leq k' - h'. \end{cases}$$

It is easy to see that $\succcurlyeq_{\mathbb{L}}$ is a linear order. Fig. 3.5 shows this canonical linear order for $g = 5$.

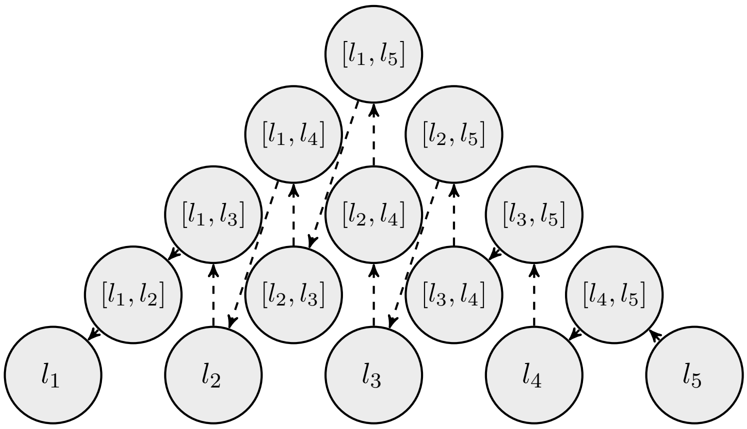

Figure 2.5: Representation of the canonical linear order $\succcurlyeq_{\mathbb{L}}$ for $g = 5$.

Proposition 2 *For every metric* $d : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}$*, the binary relation* $\succcurlyeq_d$ *on* $\mathbb{L}$ *defined as*

$$\mathcal{E} \succcurlyeq_d \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad d(\mathcal{E}, l_g) \leq d(\mathcal{F}, l_g)$$

is a weak order.

Definition 3 *Let* T_g *be the following triangles*

- *If* g *is odd*

$$T_g = \left\{ (\alpha, \beta) \in [0, \infty)^2 \mid \alpha + \frac{1}{2}\beta(g - 1) < \frac{1}{g - 2} \right\}.$$

- *If* g *is even*

$$T_g = \left\{ (\alpha, \beta) \in [0, \infty)^2 \mid \alpha + \frac{1}{2}\beta(g - 2) < \frac{1}{g - 1} \right\}.$$

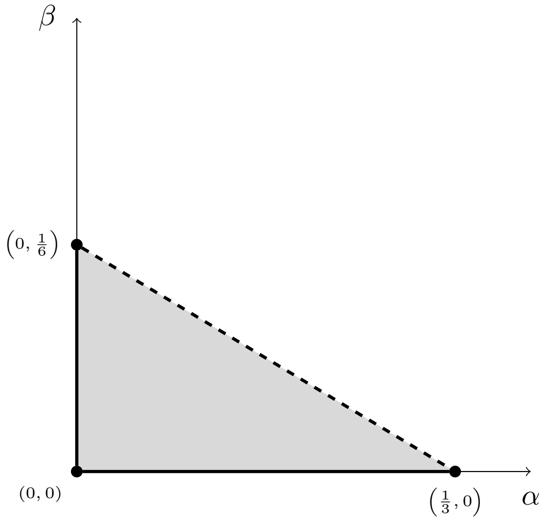

Figure 2.6: Graphical representation of T_5.

In Fig. 2.6 the triangle $T_5 = \{(\alpha, \beta) \in [0, \infty)^2 \mid \alpha + 2\beta < 1/3\}$ is showed.

Proposition 3 *If* $d : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ *is the metric associated with* (α, β)*, then* $\succcurlyeq_d \, = \, \succcurlyeq_{\mathbb{L}} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in T_g$.

PROOF: Let us consider that g is odd.

$\Rightarrow$) Suppose that $\succcurlyeq_d \, = \, \succcurlyeq_{\mathbb{L}}$. By Definition 2, we have

$$[l_1, l_g] \succ_d \left[l_{\frac{g-1}{2}}, l_{\frac{g+1}{2}}\right]$$

i.e.,

$$d\left([l_1, l_g], l_g\right) < d\left(\left[l_{\frac{g-1}{2}}, l_{\frac{g+1}{2}}\right], l_g\right).$$

Taking into account

$$\begin{aligned} d\left([l_1, l_g], l_g\right) &= d_G\left([l_1, l_g], l_g\right) + \alpha\, d_M\left(\#[l_1, l_g], \#l_g\right) + \beta\, \rho\left(\#[l_1, l_g], \#l_g\right) \\ &= d_M((g-1, 0), (g-1, g-1)) + \alpha\, d_M(g, 1) + \beta\, \rho(g, 1) \\ &= g - 1 + \alpha\,(g-1) + \frac{1}{2}\beta(g-2)(g-1) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d\left(\left[l_{\frac{g-1}{2}}, l_{\frac{g+1}{2}}\right], l_g\right) &= d_G\left(\left[l_{\frac{g-1}{2}}, l_{\frac{g+1}{2}}\right], l_g\right) + \alpha\, d_M\left(\#\left[l_{\frac{g-1}{2}}, l_{\frac{g+1}{2}}\right], \#l_g\right) \\ &= d_M\left(\left(\frac{g-1}{2}, \frac{g-3}{2}\right), (g-1, g-1)\right) + \alpha\, d_M(2,1) \\ &= g+\alpha, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} [l_1, l_g] \succ_d \left[l_{\frac{g-1}{2}}, l_{\frac{g+1}{2}}\right] &\Leftrightarrow g-1+\alpha\,(g-1)+\frac{1}{2}\beta(g-2)(g-1) < g+\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2}\beta(g-1) < \frac{1}{g-2}. \end{aligned}$$

Consequently, $(\alpha, \beta) \in T_g$.

$\Leftarrow$) If $(\alpha, \beta) \in T_g$, it is a routine to check $\succcurlyeq_d \;=\; \succcurlyeq_{\mathbb{L}}$.

Let now us consider that g is even.

$\Rightarrow$) Suppose that $\succcurlyeq_d \;=\; \succcurlyeq_{\mathbb{L}}$. By Definition 2, we have

$$l_{\frac{g}{2}} \succ_d [l_1, l_g]$$

i.e.,

$$d\left(l_{\frac{g}{2}}, l_g\right) < d\left([l_1, l_g], l_g\right).$$

Taking into account

$$\begin{aligned} d\left(l_{\frac{g}{2}}, l_g\right) &= d_G\left(l_{\frac{g}{2}}, l_g\right) + \alpha\, d_M\left(\#l_{\frac{g}{2}}, \#l_g\right) \\ &= d_M\left(\left(\frac{g-2}{2}, \frac{g-2}{2}\right), (g-1, g-1)\right) + \alpha\, d_M\,(1,1) = g+\alpha \end{aligned}$$

and

$$d\left([l_1, l_g], l_g\right) = g-1+\alpha\,(g-1)+\frac{1}{2}\beta(g-2)(g-1),$$

we have

$$\begin{aligned} l_{\frac{g}{2}} \succ_d [l_1, l_g] &\Leftrightarrow g-1+\alpha\,(g-1)+\frac{1}{2}\beta(g-2)(g-1) < g+\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2}\beta(g-2) < \frac{1}{g-1}. \end{aligned}$$

Consequently, $(\alpha, \beta) \in T_g$.

$\Leftarrow$) If $(\alpha, \beta) \in T_g$, it is a routine to check $\succcurlyeq_d \;=\; \succcurlyeq_{\mathbb{L}}$.

2.5 The decision process

Let $v_i^p \in \mathbb{L}$ be the linguistic expression assessed by voter $p \in V$ to alternative $x_i \in X$, and $\boldsymbol{v}_i = \left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \in \mathbb{L}^m$ the *assessments vector* of alternative x_i.

A *profile* is a matrix $m \times n$ with coefficients in $\mathbb{L}$ whose columns contain the assessments vectors of the alternatives

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{v}_i \mid \cdots \mid \boldsymbol{v}_n) = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_i^1 & \cdots & v_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^p & \cdots & v_i^p & \cdots & v_n^p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^m & \cdots & v_i^m & \cdots & v_n^m \end{pmatrix} = (v_i^p)\,.$$

The set of profiles is denoted by $\mathbb{V}$.

For each $i \in \{1, \ldots, m\}$, the distance between the assessments vector of x_i and l_g is defined as

$$d(\boldsymbol{v}_i, l_g) = \sum_{p=1}^{m} d\left(v_i^p, l_g\right).$$

Proposition 4 *Given $\alpha, \beta \geq 0$, let d be the metric associated with (α, β). Then, the binary relation $\succcurlyeq_F$ on X defined as*

$$x_i \succcurlyeq_F x_j \;\Leftrightarrow\; d(\boldsymbol{v}_i, l_g) \leq d(\boldsymbol{v}_j, l_g)$$

is a weak order on X.

PROOF: It is straightforward.

Definition 4 *A* decision rule *is a mapping $F : \mathbb{V} \longrightarrow W(X)$ that satisfies the following properties*

1. Anonymity*: For every permutation π on $\{1, \ldots, m\}$ and every profile $\mathbf{v} = (v_i^p) \in \mathbb{V}$, it holds*
$$F\left(\mathbf{v}^\pi\right) = F\left(\mathbf{v}\right),$$
where $\mathbf{v}^\pi = \left(v_i^{\pi(p)}\right)$.

2. Neutrality*: For every permutation σ on $\{1, \dots, n\}$ and every profile $\mathbf{v} = (v_i^p) \in \mathbb{V}$, it holds*

$$F(\mathbf{v}_\sigma) = (F(\mathbf{v}))_\sigma ,$$

where $\mathbf{v}_\sigma = \left(v_{\sigma(i)}^p\right)$ *and* $x_{\sigma(i)}\ (F(\mathbf{v}))_\sigma\ x_{\sigma(j)} \;\Leftrightarrow\; x_i\, F(\mathbf{v})\, x_j$*, i.e.,* $x_i\ (F(\mathbf{v}))_\sigma\ x_j \;\Leftrightarrow\; x_{\sigma^{-1}(i)}\, F(\mathbf{v})\, x_{\sigma^{-1}(j)}$.

3. Independence*: For all pair of alternatives $x_i, x_j \in X$ and all pair of profiles $\mathbf{v} = (v_i^p), \mathbf{w} = (w_i^p) \in \mathbb{V}$, if $v_i^p = w_i^p$ and $v_j^p = w_j^p$ for every $p \in V$, it holds*

$$x_i\, F(\mathbf{v})\, x_j \;\Leftrightarrow\; x_i\, F(\mathbf{w})\, x_j \quad \text{and} \quad x_j\, F(\mathbf{v})\, x_i \;\Leftrightarrow\; x_j\, F(\mathbf{w})\, x_i.$$

Proposition 5 *The mapping that assigns $\succcurlyeq_F$ to each profile is a decision rule.*

PROOF: The three conditions are trivially satisfied by $\succcurlyeq_F$ because of the commutativity of addition in $\mathbb{R}$ and the fact that the ranking between x_i and x_j provided by $\succcurlyeq_F$ only depends on $\boldsymbol{v}_i$ and $\boldsymbol{v}_j$.

Definition 5 *Given a weak order $\succcurlyeq$ on $\mathbb{L}$, a decision rule $F : \mathbb{V} \longrightarrow W(X)$ is* monotonic with respect to $\succcurlyeq$ *if for all pair of alternatives $x_i, x_j \in X$ and all pair of profiles $\mathbf{v} = (v_i^p), \mathbf{w} = (w_i^p) \in \mathbb{V}$, then if $w_i^p \succ v_i^p$ for some $p \in V$, $w_i^q = v_i^q$ for every $q \in V \setminus \{p\}$, and $w_j^q = v_j^q$ for every $q \in V$, it holds*

$$x_i\, F(\mathbf{v})\, x_j \;\Rightarrow\; x_i\, F(\mathbf{w})\, x_j.$$

Proposition 6 *The mapping that assigns $\succcurlyeq_F$ to each profile is monotonic with respect to $\succcurlyeq_{\mathbb{L}}$.*

PROOF:

$$x_i\, F(\boldsymbol{v})\, x_j \;\Rightarrow\; d(\boldsymbol{v}_i, l_g) \le d(\boldsymbol{v}_j, l_g) \;\Rightarrow\; \sum_{p=1}^{m} d\left(v_i^p, l_g\right) \le \sum_{p=1}^{m} d\left(v_j^p, l_g\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{q \in V \setminus \{p\}} d\left(v_i^q, l_g\right) + d\left(v_i^p, l_g\right) \le \sum_{p=1}^{m} d\left(v_j^p, l_g\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{q \in V \setminus \{p\}} d\left(w_i^q, l_g\right) + d\left(v_i^p, l_g\right) \le \sum_{p=1}^{m} d\left(w_j^p, l_g\right).$$

By means of the canonical order

$$w_i^p \succcurlyeq_{\mathbb{L}} v_i^p \ \Rightarrow \ d\left(w_i^p, l_g\right) \leq d\left(v_i^p, l_g\right).$$

Then,

$$\begin{aligned}
&\sum_{q \in V \setminus \{p\}} d\left(w_i^q, l_g\right) + d\left(w_i^p, l_g\right) \leq \sum_{p=1}^{m} d\left(w_j^p, l_g\right) \\
&\sum_{p=1}^{m} d\left(w_i^p, l_g\right) \leq \sum_{p=1}^{m} d\left(w_j^p, l_g\right) \ \Rightarrow \ x_i \, F(\boldsymbol{w}) \, x_j.
\end{aligned}$$

2.6 Illustrative examples

In this section we show different aspects of the proposed method of ranking through three toy examples. The first one shows how the method can provide the same ranking whenever imprecision is not penalized. The second example is about how different values of the parameters α and β can provide different rankings. And the third one shows that in some cases ties are obtained irrespectively of the values of the parameters α and β.

Example 6 Consider two alternatives x_1 and x_2 assessed by three voters through the set of linguistic terms $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ whose meanings are given in Table 2.1. The assessments are shown in Table 2.2.

Alternative	Voter 1	Voter 2	Voter 3
x_1	l_3	$[l_3, l_5]$	$[l_1, l_2]$
x_2	$[l_2, l_5]$	$[l_2, l_3]$	$[l_2, l_3]$

Table 2.2: Assessments in Example 6

Using the metric d associated with (α, β), with $\alpha, \beta \geq 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{v}_1, l_5) &= d(v_1^1, l_5) + d(v_1^2, l_5) + d(v_1^3, l_5) = \\
&= 4 + (2 + 2\alpha + \beta) + (7 + \alpha) = 13 + 3\alpha + \beta, \\
d(\boldsymbol{v}_2, l_5) &= d(v_2^1, l_5) + d(v_2^2, l_5) + d(v_2^3, l_5) = \\
&= (3 + 3\alpha + 3\beta) + (5 + \alpha) + (5 + \alpha) = 13 + 5\alpha + 3\beta.
\end{aligned}$$

Since $13 + 3\alpha + \beta < 13 + 5\alpha + 3\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0$, we have $x_1 \succ_F x_2 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0$ and, consequently, $x_1 \sim_F x_2 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. In other words, x_1 and x_2 are in a tie whenever imprecision is not penalized. But if it is, then x_1 always defeats x_2.

Example 7 Consider again two alternatives x_1 and x_2 now assessed by four voters through the set of linguistic terms $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ with the meanings given in Table 2.1. Taking into account the assessments provided in Table 2.3, we can see how depending on the values of α and β, these alternatives are ranked in a different way.

Alternative	Voter 1	Voter 2	Voter 3	Voter 4
x_1	$[l_1, l_5]$	$[l_1, l_5]$	l_3	l_3
x_2	$[l_1, l_4]$	$[l_2, l_5]$	$[l_1, l_3]$	$[l_3, l_5]$

Table 2.3: Assessments in Example 7

Using the metric d associated with (α, β), with $\alpha, \beta \geq 0$, we obtain

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{v}_1, l_5) &= d(v_1^1, l_5) + d(v_1^2, l_5) + d(v_1^3, l_5) + d(v_1^4, l_5) = \\ &= (4 + 4\alpha + 6\beta) + (4 + 4\alpha + 6\beta) + 4 + 4 = 16 + 8\alpha + 12\beta, \\ d(\boldsymbol{v}_2, l_5) &= d(v_2^1, l_5) + d(v_2^2, l_5) + d(v_2^3, l_5) + d(v_2^4, l_5) = \\ &= (5 + 3\alpha + 3\beta) + (3 + 3\alpha + 3\beta) + (6 + 2\alpha + \beta) + (2 + 2\alpha + \beta) = \\ &= 16 + 10\alpha + 8\beta. \end{aligned}$$

Since $16 + 8\alpha + 12\beta < 16 + 10\alpha + 8\beta \Leftrightarrow \alpha > 2\beta$, we have $x_1 \succ_F x_2 \Leftrightarrow \alpha > 2\beta$, $x_2 \succ_F x_1 \Leftrightarrow \alpha < 2\beta$, and $x_1 \sim_F x_2 \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$. Consequently, depending how imprecision is penalized, x_1 and x_2 are ordered in a different way. See Fig 2.7.

Example 8 Consider again two alternatives x_1 and x_2 assessed by three voters through the set of linguistic terms $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ with the meanings given in Table 2.1. The assessments are provided in Table 2.4.

Using the metric d associated with (α, β), with $\alpha, \beta \geq 0$, we obtain

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{v}_1, l_5) &= d(v_1^1, l_5) + d(v_1^2, l_5) + d(v_1^3, l_5) = \\ &= 4 + (5 + \alpha) + (5 + 3\alpha + 3\beta) = 14 + 4\alpha + 3\beta, \\ d(\boldsymbol{v}_2, l_5) &= d(v_2^1, l_5) + d(v_2^2, l_5) + d(v_2^3, l_5) = \\ &= 2 + (7 + \alpha) + (5 + 3\alpha + 3\beta) = 14 + 4\alpha + 3\beta. \end{aligned}$$

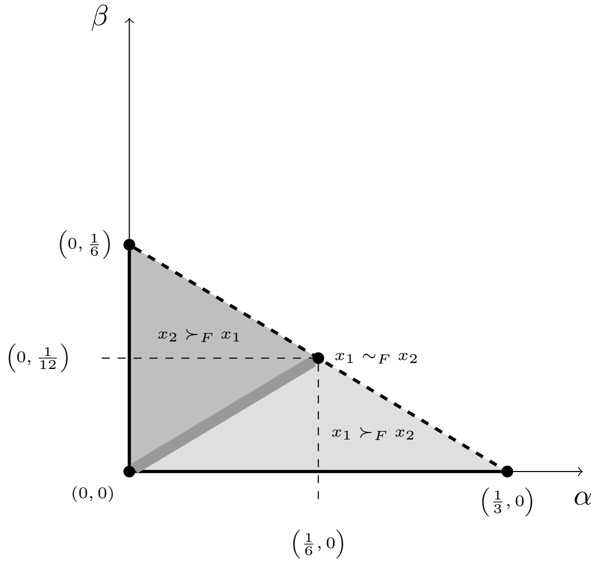

Figure 2.7: Distribution of the rankings in Example 7.

Alternative	Voter 1	Voter 2	Voter 3
x_1	l_3	$[l_2, l_3]$	$[l_1, l_4]$
x_2	l_4	$[l_1, l_2]$	$[l_1, l_4]$

Table 2.4: Assessments in Example 8

Despite of the values of α and β we choose, the result is the same for the two alternatives. Thus, $x_1 \sim_F x_2$ for all possible values of the parameters.

2.7 Concluding remarks

In this chapter, we have introduced a multi-person decision making procedure where agents may express their opinions about feasible alternatives by means of linguistic terms, if they are confident about their opinions, or through linguistic expressions composed by consecutive linguistic terms, in the case they are not confident about their opinions. The proposal allows to penalize the imprecision by means of two parameters.

As further research, it would be interesting to consider some breaking-tie processes, to analyze additional properties and advantages of the proposed method, and to apply the introduced multi-person decision making procedure to some real problems.

Chapter 3

Allowing agents to be imprecise: A proposal using multiple linguistic terms

[This chapter has been accepted for publication (jointly with José Luis García-Lapresta and Llorenç Roselló) in the journal *Information Sciences*.]

In this chapter we propose a decision-making procedure where the agents judge the alternatives through linguistic terms such as 'very good', 'good', 'acceptable', etc. If the agents are not confident about their opinions, they can use a linguistic expression formed by several consecutive linguistic terms. To obtain a ranking on the set of alternatives, the method consists of three different stages. The first stage looks for the alternatives in which the overall opinion is closer to the ideal assessment. The overall opinion is developed by a distance-based process among the individual assessments. The next two stages form a tie-breaking process. Firstly by using a dispersion index based on the Gini coefficient, and secondly by taking into account the number of best-assessments. The main characteristics of the proposed decision-making procedure are analyzed.

3.1 Introduction

Social Choice Theory shows that there is no voting system that is able to rank and choose alternatives in a completely acceptable way. In this regard, the well-known *Arrow's impossibility theorem* [8] shows, with absolute certainty, that there is no voting system that simultaneously satisfies several desirable properties[1].

Arrow's pessimistic result imposes the limits of preference aggregation, but it does not stop the search for a procedure that fulfills some properties at the expense of others. One escape route for Arrow's impossibility theorem consists in allowing the agents to show their opinions not in a strictly ordinal way, but through numerical or linguistic assessments. A short review of one of the most known linguistic decision procedures is detailed below, as well as some of their extensions. Moreover, we provide an introduction to the issue of the imprecision of the agents, upon which our process is based. Finally, we summarize the proposal of the chapter.

3.1.1 Majority Judgment

Balinski and Laraki [12, 15] have proposed a voting system called *Majority Judgment* (MJ) which tries to avoid the unsatisfactory result of the Arrow theorem and allows the voters to assess the alternatives through linguistic terms, such as 'excellent', 'very good', 'good', etc., instead of ordering the alternatives by rank. Among all the individual assessments given by the voters, MJ chooses the median as the collective assessment. Balinski and Laraki also describe a tie-breaking process which compares the number of assessments above the collective assessment with those below it.

These authors also carried out an experimental analysis of MJ [14] in Orsay during the 2007 French presidential election. In that paper the authors show some interesting properties of MJ and they argue that this voting system is easily implemented and avoids the need for a second round[2], typical of French presidential elections.

[1] Any voting rule that generates a collective weak order from every profile of weak orders, and satisfies independence of irrelevant alternatives and unanimity is necessarily dictatorial, insofar as there are at least three alternatives and three agents.

[2] If there is no candidate with more than half of the votes, the second round consists of voting on the two candidates with most votes in the first round.

Desirable properties and advantages have been attributed to MJ compared to the classical Arrow framework of preferences aggregation. Among these advantages is the possibility that voters show their opinions more faithfully and properly than in the conventional voting systems.

Besides MJ, other decision-making procedures in which the agents assess the alternatives through linguistic terms can be found in the literature. For instance in García-Lapresta [25] a general voting system that generalizes the *simple majority* through linguistic preferences is designed and studied. Similarly, in García-Lapresta *et al.* [26, 28] a system which generalizes the *Borda rule* [19] is studied.

3.1.2 Majority Judgment extensions

It is worth pointing out that some authors have shown several paradoxes and inconsistencies of MJ (see Felsenthal and Machover [24], Smith [52], García-Lapresta and Martínez-Panero [27] and Nurmi [44], among others).

In order to reduce some of the drawbacks produced by MJ in small committees, García-Lapresta and Martínez-Panero [27] developed a proposal in which the linguistic information is aggregated by means of *centered OWA operators* (Yager [61]), and a 2*-tuple fuzzy linguistic representation* (see Herrera and Martínez [33] and Martínez and Herrera [41]). Another way of thinking was proposed by Zahid [65] who combined MJ with the *Borda Count* [19] in order to avoid some other inconveniences of MJ.

Moreover, in Falcó and García-Lapresta [20, 21] an extension of MJ, based on the distances between the linguistic terms is proposed. These distances are induced by the parameterized family of Minkowski metrics and allow us to treat the problem in a more flexible way. The extension carried out in Falcó and García-Lapresta [21] chooses as the collective assessment, a linguistic term that minimizes the total distance to all the individual assessments (this would be the median, whenever the Manhattan metric is used). In addition, a method of choosing a unique collective assessment, in the case that several assessments fulfil the requirement, is provided. The contribution of Falcó and García-Lapresta [20, 21] is also a refinement of the tie-breaking process that not only counts the number of assessments above and below the collective assessment (the median in MJ), but which also takes into account the specific assessments (above and below the collective assessment) by measuring the distances between them and the collective assessment.

3.1.3 Imprecise assessments

According to Zimmer [66], people generally prefer to handle the imprecision with linguistic terms rather than with numbers. Usually opinions are imprecise, therefore, trying to represent them by using a precise term is meaningless. In addition, Wallsten *et al.* [57] have shown empirically how most people are more comfortable using words rather than numbers to describe probabilities. As a result of this evidence and reflection, the program *computing with words* has been developed, where the agents express themselves through linguistic terms instead of numbers (see Kacprzyk and Zadrożny [37] and Zadeh [63, 64], among others).

Although the use of linguistic information brings the design of decision-making procedures closer to the imprecision that agents face when judging the alternatives, occasionally, the agents may be unconfident about which linguistic term to use. For this reason, it is interesting to allow the agents to judge in a more imprecise way, giving them the option of assessing several consecutive linguistic terms. For other papers regarding this issue, see Tang and Zheng [53], Ma *et al.* [40] and Rodríguez *et al.* [46, 47].

Our proposal concerning the imprecision is based on an adaptation of the *absolute order of magnitude spaces* introduced in Travé-Massuyès and Dague [55], and Travé-Massuyès and Piera [56]; more specifically in the extensions devised by Roselló *et al.* [48, 49, 50] (see also Agell *et al.* [7]).

The authors of this chapter have previously made an attempt to deal with imprecise assessments which was also based on the absolute order of magnitude spaces (Falcó *et al.* [22]). In that paper, they used a system of penalization for the use of a linguistic expression (a linguistic expression is the combination of several consecutive linguistic terms). The penalization function worked roughly as follows: the more linguistic terms an agent uses, the more that agent should be penalized.

3.1.4 Our proposal

In this chapter we set up a decision-making procedure in which agents can express their assessments of the alternatives using a linguistic term from a predetermined linguistic scale. If they are not confident about which term to use, they can use a linguistic expression created by several consecutive linguistic terms.

We have assumed that the linguistic scale is uniform and symmetrically distributed. Thus, the distance between consecutive linguistic terms is assumed to be the same for all the agents. We have also considered that agents show their true opinions and they do not act strategically to favor or penalize any alternative.

The procedure is divided into several stages which will be presented in Section 3.3. Initially, the overall opinion for an alternative is calculated by finding the set of linguistic expressions that minimize the sum of distances to every expression given by the agents, for said alternative. Taking into account this information, the alternatives are ordered by the proximity of their overall opinions to the "ideal" assessment. Thus, the closer an overall opinion is in average to the highest linguistic term, the better the alternative would be considered. Since ties among different alternatives may appear, we present a tie-breaking process. The tie-breaking process is constructed using a dispersion index based on the Gini coefficient. The less dispersion there is among agents' assessments, the more preferred this alternative will be considered to be. After this stage, some alternatives can still be in a tie, therefore a further refinement is presented for the tie-breaking process. If the distance to the "ideal" assessment as well as the dispersion are the same, the number of highest assessments are counted. If there is still a tie, the number of second highest assessments are counted, and so on.

The chapter is organized as follows. Section 3.2 is devoted to introducing the notation and concepts needed in the rest of the chapter. Section 3.3 includes the proposed decision-making procedure. In Section 3.4, some properties of the process are analyzed. Section 3.5 contains the concluding remarks of this chapter.

3.2 Notation and basic notions

Let $I = \{1, \ldots, m\}$, with $m \geq 2$, be a set of agents and let $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, with $n \geq 2$, be the set of alternatives which are evaluated. Every agent assesses a linguistic term for each candidate within a linguistic ordered scale $L = \{l_1, \ldots, l_g\}$, where $l_1 < l_2 < \ldots < l_g$. The *granularity*[3] of L is its

[3]On the role of granularity in decision making, see Pedrycz [45].

cardinality $\#L = g \geq 2$. The linguistic scale is balanced and equispaced between consecutive terms. The terms on L can be linguistic terms as 'excellent', 'very good', 'good', etc.

A binary relation $\succcurlyeq$ on a set $A \neq \emptyset$ is a *weak order* (or *complete preorder*) if it is complete ($a \succcurlyeq b$ or $b \succcurlyeq a$, for all $a, b \in A$) and transitive (if $a \succcurlyeq b$ and $b \succcurlyeq c$, then $a \succcurlyeq c$, for all $a, b, c \in A$). On the other hand, a *linear order* on $A \neq \emptyset$ is an antisymmetric[4] weak order on A. Given a weak or linear order $\succcurlyeq$ on $A \neq \emptyset$, the asymmetric and symmetric parts of $\succcurlyeq$ are denoted by $\succ$ and $\sim$, respectively, i.e., $a \succ b$ if not $b \succcurlyeq a$, and $a \sim b$ if $a \succcurlyeq b$ and $b \succcurlyeq a$. $W(A)$ denotes the set of weak orders on A.

Given $\succcurlyeq \in W(A)$, the inverse of $\succcurlyeq$ is defined as $x_i \succcurlyeq^{-1} x_j \Leftrightarrow x_j \succcurlyeq x_i$.

3.2.1 Linguistic expressions

Based on the *absolute order of magnitude spaces* introduced by Travé-Massuyès and Piera [56], we define the *set of linguistic expressions* as follows

$$\mathbb{L} = \{[l_h, l_k] \mid l_h, l_k \in L\,,\ 1 \leq h \leq k \leq g\},$$

where $[l_h, l_k] = \{l_h, l_{h+1}, \ldots, l_k\}$ and $[l_1, l_g] = \{l_1, \ldots, l_g\}$. Given that $[l_h, l_h] = \{l_h\}$, this linguistic expression can be replaced by the linguistic term l_h. In this way, $L \subset \mathbb{L}$.

Example 9 Consider the set of linguistic terms $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ with the meanings given in Table 3.1.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
very bad	bad	acceptable	good	very good

Table 3.1: Meaning of the linguistic terms.

Each linguistic expression has a meaning on its own. For instance, $[l_2, l_4]$ means 'between bad and good', $[l_4, l_5]$ means 'between good and very good', or 'at least good', etc.

For an interpretation of the linguistic expressions based on context-free grammar, see Rodríguez *et al.* [46].

[4] $\succcurlyeq$ is antisymmetric if for all $a, b \in A$ such that $a \neq b$ it holds $a \succ b$ or $b \succ a$.

Adopting the treatment introduced in Roselló *et al.* [50], the set of all the linguistic expressions can be represented by a graph $G_{\mathbb{L}}$. In the graph, the lowest layer represents the linguistic terms $l_h \in L \subset \mathbb{L}$, the second layer represents the linguistic expressions created by two consecutive linguistic terms $[l_h, l_{h+1}]$, the third layer represents the linguistic expressions created by three consecutive linguistic terms $[l_h, l_{h+2}]$, and so on up to last layer where we represent the linguistic expression $[l_1, l_g]$. As a result, the higher an element is, the more imprecise it becomes. The vertices in $G_{\mathbb{L}}$ are the elements of $\mathbb{L}$ and the edges $\mathcal{E} - \mathcal{F}$, where $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ and $\mathcal{F} = [l_h, l_{k+1}]$, or $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ and $\mathcal{F} = [l_{h+1}, l_k]$. The graph representation of Example 9 is included in Fig. 3.1.

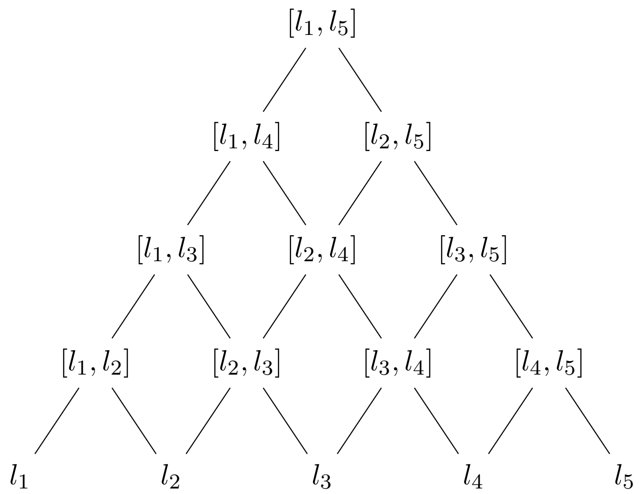

Figure 3.1: Graph representation of the linguistic expressions for $g = 5$.

When a voter is confident about his opinion on an alternative, he might use a linguistic term $l_h \in L$. Whereas if he is unconfident about his opinion, he might use a linguistic expression $[l_h, l_k] \in \mathbb{L}$, with $h < k$. For a more extensive treatment, see Roselló *et al.* [48, 49, 50].

Let us note that all the computations in $\mathbb{L}$ can be done in $\mathbb{Z}^2$ by means of the injection $\psi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, defined as $\psi([l_h, l_k]) = (k-1, h-1)$. Through the function ψ we can represent a linguistic expression as a point in the plane. This function allows us to work in an easier computational setting. For example, $l_h \in L$ is identified with $(h-1, h-1) \in \mathbb{Z}^2$, and the linguistic expression $[l_3, l_5] \in \mathbb{L}$ is identified with the point $(4, 2) \in \mathbb{Z}^2$ (see Fig. 3.2).

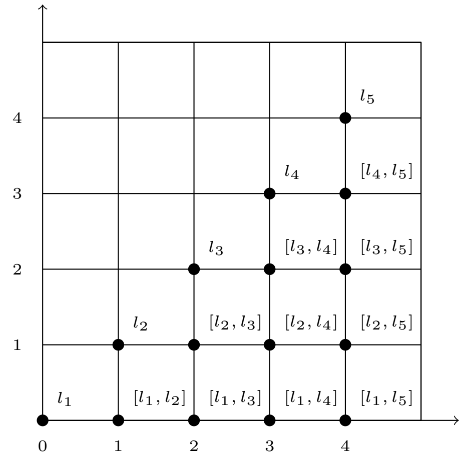

Figure 3.2: The injection from $\mathbb{L}$ into $\mathbb{Z}^2$ for $g = 5$.

3.2.2 Distances between linguistic expressions

The distance between two linguistic expressions $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathbb{L}$ is defined as the geodesic distance in the graph $G_{\mathbb{L}}$ between their associated vertices and it is denoted by $d(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. The geodesic distance between two vertices in a graph is the number of edges in one of the shortest paths connecting them.

Remark 3 Taking into account the injection $\psi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, the distance between two linguistic expressions $\mathcal{E}$ and $\mathcal{F}$ can be computed in $\mathbb{Z}^2$ as the *Manhattan distance*[5] between the corresponding points $\psi(\mathcal{E})$ and $\psi(\mathcal{F})$:

$$d(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = d_M(\psi(\mathcal{E}), \psi(\mathcal{F})). \tag{3.1}$$

Example 10 The distance between the linguistic expressions $\mathcal{E} = [l_1, l_3]$ and $\mathcal{F} = \{l_4\}$ in $\mathbb{L}$, for $g = 5$, is the length of the shortest path from one vertex to the other, $d(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 4$: from vertex $[l_1, l_3]$ to vertex $[l_2, l_3]$, from vertex $[l_2, l_3]$ to vertex l_3, from l_3 to $[l_3, l_4]$ and, finally, from $[l_3, l_4]$ to l_4.

[5]The Manhattan distance in $\mathbb{R}^q$ is the function $d_M : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ defined as $d_M((a_1, \ldots, a_q), (b_1, \ldots, b_q)) = \sum_{k=1}^{q} |a_k - b_k|$.

This path is not unique, but it is one of those shortest paths (see Fig. 3.3). Or, by means of $\mathbb{Z}^2$ as:

$$d(\mathcal{E},\mathcal{F}) = d_M(\psi(\mathcal{E}),\psi(\mathcal{F})) = d_M((2,0),(3,3)) = |2-3| + |0-3| = 4.$$

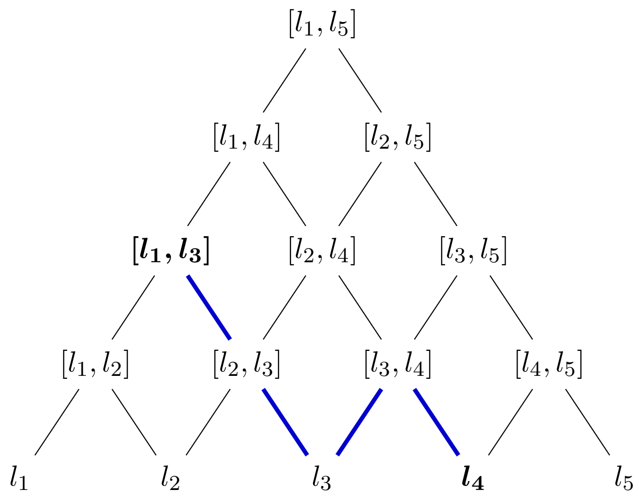

Figure 3.3: Graph representation distance between $[l_1, l_3]$ and l_4 for Example 10.

3.2.3 The potential

We are now going to introduce the potential of a linguistic expression with respect to a vector of linguistic expressions (and also with respect to a subset of linguistic expressions). It is defined as the sum of distances between the linguistic expression and the components of the vector (the elements of the subset). It will be very useful to shorten the notation.

Definition 6 *Given* $\mathcal{E} \in \mathbb{L}$ *and* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbb{L}^q$ *, the* potential of $\mathcal{E}$ with respect to $\boldsymbol{y}$ *is defined as*

$$\Phi(\mathcal{E}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{q} d(\mathcal{E}, y_k).$$

Definition 7 *Given $\mathcal{E} \in \mathbb{L}$ and $F \subseteq \mathbb{L}$, the* potential of $\mathcal{E}$ with respect to F *is defined as*

$$\Phi(\mathcal{E}, F) = \sum_{\mathcal{F} \in F} d(\mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

3.2.4 The overall opinion

The Fermat point of a triangle is a point such that the total distance from the three vertices of the triangle to the point is the minimum possible (see [59]). This Fermat point was generalized in the so-called geometric median or Fermat-Weber point by Weber [58], and it is the point that minimizes the sum of distances to the sample points in an Euclidean space. Based on these ideas, we now introduce a similar notion in the setting of linguistic expressions.

A *profile* V is a matrix (v_i^p) consisting of m rows and n columns of linguistic expressions, where the element $v_i^p \in \mathbb{L}$ represents the linguistic assessment given by the voter $p \in I$ to the alternative $x_i \in X$. The set of all possible profiles is denoted by $\mathbb{V}$. We denote by $\boldsymbol{v}_i = (v_i^1, \ldots, v_i^m) \in \mathbb{L}^m$ the *assessments vector* of x_i. Similarly, $\boldsymbol{v}^p = (v_1^p, \ldots, v_n^p) \in \mathbb{L}^n$ denotes the *assessments vector* of agent p for all the alternatives. Then,

$$V = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_i^1 & \cdots & v_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^p & \cdots & v_i^p & \cdots & v_n^p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^m & \cdots & v_i^m & \cdots & v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}^m \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n \right).$$

Definition 8 *Given a profile $V \in \mathbb{V}$ and the assessments vector of x_i, $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{L}^m$, the* Fermat set *of x_i is defined as*

$$F_i^V = \arg\min_{\mathcal{E} \in \mathbb{L}} \Phi(\mathcal{E}, \boldsymbol{v}_i).$$

In other words,

$$\mathcal{E} \in F_i^V \Leftrightarrow \forall \mathcal{F} \in \mathbb{L} \quad \Phi(\mathcal{E}, \boldsymbol{v}_i) \leq \Phi(\mathcal{F}, \boldsymbol{v}_i)$$

and, equivalently,

$$\mathcal{E} \in F_i^V \Leftrightarrow \forall \mathcal{F} \in \mathbb{L} \quad \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}, v_i^p) \leq \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{F}, v_i^p).$$

For the sake of simplicity, the superindex V is omitted whenever it is clear from the context.

The Fermat set F_i contains all the linguistic expressions that minimize the sum of the distances to all the assessments for x_i. This set somehow represents the *overall opinion* of x_i, and it may contain more than one linguistic expression. Notice that a linguistic expression can be in the Fermat set although it does not belong to the assessments vector $\boldsymbol{v}_i$.

Example 11 Consider $X = \{x_1, x_2\}$, $I = \{1, 2, 3\}$ and $g = 5$ with the assessments given in Table 3.2 and Fig. 3.4.

	x_1	x_2
1	l_4	l_3
2	$[l_3, l_4]$	$[l_3, l_4]$
3	$[l_2, l_4]$	$[l_3, l_5]$

Table 3.2: Agents' assessments in Example 11.

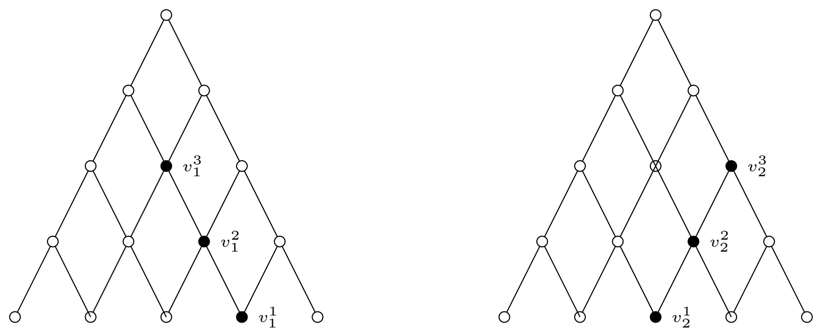

Figure 3.4: Agents's assessments for alternatives x_1 (left) and x_2 (right).

Looking the results given in Tables 3.3 and 3.4, where we can see all the potentials for every possible linguistic expression in $\mathbb{L}$, in both cases the linguistic expression with the minimal potential is $[l_3, l_4]$. Then, $F_1 = F_2 = \{[l_3, l_4]\}$.

$\mathcal{E}$	$\Phi(\mathcal{E}, \boldsymbol{v}_1)$
l_1	15
$[l_1, l_2]$	12
l_2	9
$[l_1, l_3]$	9
$[l_2, l_3]$	6
$[l_1, l_4]$	6
l_3	5
$[l_2, l_4]$	3
$[l_1, l_5]$	9
$\boldsymbol{[l_3, l_4]}$	**2**
$[l_2, l_5]$	6
l_4	3
$[l_3, l_5]$	5
$[l_4, l_5]$	6
l_5	9

Table 3.3: Potent. with respect to x_1.

$\mathcal{E}$	$\Phi(\mathcal{E}, \boldsymbol{v}_2)$
l_1	15
$[l_1, l_2]$	12
l_2	9
$[l_1, l_3]$	9
$[l_2, l_3]$	6
$[l_1, l_4]$	8
l_3	3
$[l_2, l_4]$	5
$[l_1, l_5]$	9
$\boldsymbol{[l_3, l_4]}$	**2**
$[l_2, l_5]$	6
l_4	5
$[l_3, l_5]$	3
$[l_4, l_5]$	6
l_5	9

Table 3.4: Potent. with respect to x_2.

3.3 The decision-making procedure

The proposal is divided in several stages:

1. We calculate the distances from each Fermat set F_i to the linguistic term l_g, for all the alternatives. Then, the alternatives are ordered according to their proximity to l_g. The closer to l_g, the better.

2. If ties are present after the first stage, we break them through the dispersion of the individual assessments. The lower the dispersion is, the better.

3. If still some alternatives are in a draw, then we look for the number of assessments in the best linguistic expression, then the second-best one, then the third-best one, and so on.

In next subsections we explain all these stages in depth. After every step, we show how to apply the procedure through the results in the Example 11.

3.3.1 Closeness to the "ideal" assessment

For every alternative $x_i \in X$ we calculate its overall opinion by means of the Fermat set F_i presented in the previous section. Once the overall opinions of the alternatives have been obtained, we compare it with the best possible result an alternative can get. The linguistic term l_g is always the highest assessment one alternative can achieve, hence the "ideal" assessment (the closer to the "ideal", the better).

Given $\mathcal{E} \in \mathbb{L}$ and $F \subseteq \mathbb{L}$, we denote by $\bar{d}(\mathcal{E}, F)$ the average distance between $\mathcal{E}$ and the elements of F:

$$\bar{d}(\mathcal{E}, F) = \frac{\sum\limits_{\mathcal{F} \in F} d(\mathcal{E}, \mathcal{F})}{\# F}\,.$$

Definition 9 *Given $V \in \mathbb{V}$, the binary relation $\succcurlyeq_1^V$ on X is defined as*

$$x_i \succcurlyeq_1^V x_j \;\Leftrightarrow\; \bar{d}(l_g, F_i) \leq \bar{d}(l_g, F_j),$$

i.e.,

$$x_i \succcurlyeq_1^V x_j \;\Leftrightarrow\; \frac{\Phi\,(l_g, F_i)}{\# F_i} \leq \frac{\Phi\,(l_g, F_j)}{\# F_j} \;\Leftrightarrow\; \frac{\sum\limits_{\mathcal{E} \in F_i} d(l_g, \mathcal{E})}{\# F_i} \leq \frac{\sum\limits_{\mathcal{E} \in F_j} d(l_g, \mathcal{E})}{\# F_j}\,.$$

For the sake of simplicity, the superindex V is omitted whenever it is clear from the context and we will denote the binary relation simply as $\succcurlyeq_1$.

Clearly, $\succcurlyeq_1$ is a weak order on X.

This order seems natural considering that the closer the assessments are in average to the linguistic term l_g (and thereby with a minimum average distance), the better the alternative is.

The Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) is a multi-criteria decision analysis method, originally developed by Hwang and Yoon [36]. As TOPSIS suggests, the chosen alternative should have the shortest geometric distance from the positive ideal solution and the longest geometric distance from the negative ideal solution.

The following results establishes how the minimum average distance to the best linguistic assessment implies also the maximum average distance to the worst linguistic assessment.

Lemma 1 *For all* $x_i, x_j \in X$ *and* $V \in \mathbb{V}$ *it holds*

$$x_i \succcurlyeq_1^V x_j \;\Leftrightarrow\; \bar{d}(l_1, F_i) \geq \bar{d}(l_1, F_j).$$

PROOF: Since the maximum distance in the graph is $d(l_1, l_g) = 2g - 2$, it is easy to see that $d(l_g, \mathcal{E}) = 2g - 2 - d(l_1, \mathcal{E})$, for every $\mathcal{E} \in \mathbb{L}$. Then, for a subset $E \subseteq \mathbb{L}$

$$\sum_{\mathcal{E} \in E} d(l_g, \mathcal{E}) = \#E \cdot (2g - 2) - \sum_{\mathcal{E} \in E} d(l_1, \mathcal{E}).$$

Dividing by the subset cardinality,

$$\frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in E} d(l_g, \mathcal{E})}{\#E} = \frac{\#E \cdot (2g - 2)}{\#E} - \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in E} d(l_1, \mathcal{E})}{\#E},$$

or, what it is the same,

$$\bar{d}(l_g, E) = 2g - 2 - \bar{d}(l_1, E).$$

Consequently, applying this results on the Fermat sets

$$\begin{aligned} \bar{d}(l_g, F_i) \leq \bar{d}(l_g, F_j) \quad &\Leftrightarrow \quad 2g - 2 - \bar{d}(l_1, F_i) \leq 2g - 2 - \bar{d}(l_1, F_j) \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{d}(l_1, F_i) \geq \bar{d}(l_1, F_j). \blacksquare \end{aligned}$$

As $\bar{d}(l_1, F_i) \geq \bar{d}(l_1, F_j) \;\Leftrightarrow\; \bar{d}(l_g, F_i) \leq \bar{d}(l_g, F_j)$, the relation $\succcurlyeq_1^V$ follows TOPSIS idea. Our ranking prefers the alternative whose overall opinion is closer in average to the "ideal" assessment and, simultaneously, prefers the alternative whose overall opinion is further in average of the "worst" assessment.

Example 12 Coming back to Example 11, the average distance to the best assessment would be the same in both alternatives:

$$\bar{d}(l_g, F_1) = d(l_5, [l_3, l_4]) = 3 = \bar{d}(l_g, F_2).$$

The first order does not provide a ranking between both alternatives so, the result is $x_1 \sim_1 x_2$.

In this case, both overall opinions are the same[6] and also are their average distances to the "ideal" assessment. Thus, it is necessary to introduce another step to break the ties among alternatives. We propose a method based on the Gini coefficient [30] and the consensus measures introduced by García-Lapresta and Pérez-Román in [29].

3.3.2 Dispersion of the agents' assessments

Definition 10 *Given* $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{L}^m$*, the* dispersion index *of the agents assessing the alternative* $x_i \in X$ *is defined as*

$$\delta_i = \frac{\sum_{p=1}^{m} \Phi\left(v_i^p, \boldsymbol{v}_i\right)}{2 \cdot (g-1) \cdot m \cdot (m-1)},$$

or in terms of distances,

$$\delta_i = \frac{\sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} d\left(v_i^p, v_i^q\right)}{2 \cdot (g-1) \cdot m \cdot (m-1)}.$$

The dispersion is calculated through the sum of the potentials of every agent with respect to the alternative x_i. In terms of distances first we calculate for every agent the distance from his assessment to the other agents' assessments. Then, we sum the result for every agent. The denominator role is to normalize the result.

Proposition 7 *The dispersion index* δ_i *verifies the following properties:*

1. $0 \leq \delta_i \leq 1$.

2. $\delta_i = 1 \;\Leftrightarrow\; m = 2$ *and one of the following conditions holds*

   (a) $v_i^1 = l_1$ *and* $v_i^2 = l_g$

   (b) $v_i^1 = l_g$ *and* $v_i^2 = l_1$.

[6] Notice how different overall opinions (or Fermat sets) can also provide a tie among alternatives. For instance, $F_1 = \{[l_3, l_4]\}$ and $F_2 = \{[l_2, l_4], [l_3, l_4], [l_2, l_5], [l_3, l_5]\}$ are two possible Fermat sets which have the same average distance to the best assessment. In such a way, $\bar{d}(l_5, F_1) = \frac{2+3+3+4}{4} = 3 = \bar{d}(l_5, F_2)$. Then, $x_1 \sim_1 x_2$.

3. $\delta_i = 0 \;\Leftrightarrow\; v_i^1 = v_i^2 = \cdots = v_i^m$.

PROOF:

1. Since $d(l_1, l_g) = 2 \cdot (g-1)$ is the maximum distance between elements of $\mathbb{L}$, and $m \cdot (m-1)$ is the number of eventually non-zero terms in the numerator of the formula above, then the quotient is between 0 and 1.

2. Taking into account (1) and

$$\delta_i = 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{p \in I} \Phi\left(v_i^p, \boldsymbol{v}_i\right) = 2 \cdot (g-1) \cdot m \cdot (m-1),$$

it is easy to see that if $m > 2$, the last equality is not possible. Moreover, if $m = 2$, then $\delta_i = 1$ if and only if ($v_i^1 = l_1$ and $v_i^2 = l_g$) or ($v_i^1 = l_g$ and $v_i^2 = l_1$).

3. By

$$\delta_i = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{p \in I} \Phi\left(v_i^p, \boldsymbol{v}_i\right) = 0,$$

and $\Phi\left(v_i^p, \boldsymbol{v}_i\right) \geq 0$ for all $p \in I$, $\delta_i = 0$ if and only if $\Phi\left(v_i^p, \boldsymbol{v}_i\right) = 0$ for all $p \in I$, i.e., $v_i^1 = \cdots = v_i^m$. ■

Given two alternatives $x_i, x_j \in X$ such that the average distances from their overall opinions to the highest assessment are the same, we will prefer that alternative with the greater agreement taking into account agents' assessments.

Definition 11 *Given $V \in \mathbb{V}$, the binary relation $\succcurlyeq_2^V$ is defined as*

$$x_i \succcurlyeq_2^V x_j \;\Leftrightarrow\; \delta_i \leq \delta_j.$$

For the sake of simplicity, the superindex V is omitted whenever it is clear from the context and we will denote the binary relation simply as $\succcurlyeq_2$.

Clearly, $\succcurlyeq_2$ is a weak order on X. This order represents the idea of how an alternative should be preferred if the level of agreement among the agents is high.

Example 13 Following with Example 11,

$$\delta_1 = \frac{\Phi(l_4, \boldsymbol{v}_1) + \Phi([l_3, l_4], \boldsymbol{v}_1) + \Phi([l_2, l_4], \boldsymbol{v}_1)}{2 \cdot (5-1) \cdot 3 \cdot (3-1)} = \frac{3+2+3}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{6},$$

$$\delta_2 = \frac{\Phi(l_3, \boldsymbol{v}_2) + \Phi([l_3, l_4], \boldsymbol{v}_2) + \Phi([l_3, l_5], \boldsymbol{v}_2)}{2 \cdot (5-1) \cdot 3 \cdot (3-1)} = \frac{3+2+3}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

Since $\delta_1 = \delta_2$, then $x_1 \sim_2 x_2$. Again, both alternatives are in a tie.

If there are two alternatives $x_i, x_j \in X$ in a tie, that is $x_i \sim_1 x_j$ and $x_i \sim_2 x_j$, because $\bar{d}(l_g, F_i) = \bar{d}(l_g, F_j)$ and $\delta_i = \delta_j$, we will consider a sequential process where the number of best assessments, second-best assessments, etc. obtained by the tied alternatives are taken into account.

3.3.3 Number of best assessments

The idea of best assessment, second-best assessment, etc. assumes that an order within the set $\mathbb{L}$ exists. In this way, we consider an order where we prefer linguistic expressions closer to the ideal assessment, and, if two elements of $\mathbb{L}$ have the same distance to l_g, we prefer the more precise one (with less number of linguistic terms).

Definition 12 *The binary relation $\succcurlyeq_{\mathbb{L}}$ on $\mathbb{L}$ is defined as $\mathcal{E} \succcurlyeq_{\mathbb{L}} \mathcal{F}$ if one of the following conditions holds*

1. $d(\mathcal{E}, l_g) < d(\mathcal{F}, l_g)$.
2. $d(\mathcal{E}, l_g) = d(\mathcal{F}, l_g)$ *and* $\#\mathcal{E} \leq \#\mathcal{F}$.

Proposition 8 *The binary relation $\succcurlyeq_{\mathbb{L}}$ is a linear order.*

PROOF: Clearly, $\succcurlyeq_{\mathbb{L}}$ is a weak order. For proving antisymmetry, consider $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ and $\mathcal{F} = [l_r, l_s] \in \mathbb{L}$ such that $\mathcal{E} \sim_{\mathbb{L}} \mathcal{F}$, i.e., $d(l_g, \mathcal{E}) = d(l_g, \mathcal{F})$ and $\#\mathcal{E} = \#\mathcal{F}$. Since $d(l_g, \mathcal{E}) = 2g - (h+k)$, $d(l_g, \mathcal{F}) = 2g - (r+s)$, $\#\mathcal{E} = k - h + 1$ and $\#\mathcal{F} = s - r + 1$, we have $s = k$ and $r = h$, hence, $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. ■

As an example, for $g = 5$, the linguistic expressions of $\mathbb{L}$ are ordered as follows (see also Fig. 3.5):

$$l_5 \succ_{\mathbb{L}} [l_4, l_5] \succ_{\mathbb{L}} l_4 \succ_{\mathbb{L}} [l_3, l_5] \succ_{\mathbb{L}} [l_3, l_4] \succ_{\mathbb{L}} [l_2, l_5] \succ_{\mathbb{L}} l_3 \succ_{\mathbb{L}} [l_2, l_4] \succ_{\mathbb{L}}$$
$$\succ_{\mathbb{L}} [l_1, l_5] \succ_{\mathbb{L}} [l_2, l_3] \succ_{\mathbb{L}} [l_1, l_4] \succ_{\mathbb{L}} l_2 \succ_{\mathbb{L}} [l_1, l_3] \succ_{\mathbb{L}} [l_1, l_2] \succ_{\mathbb{L}} l_1.$$

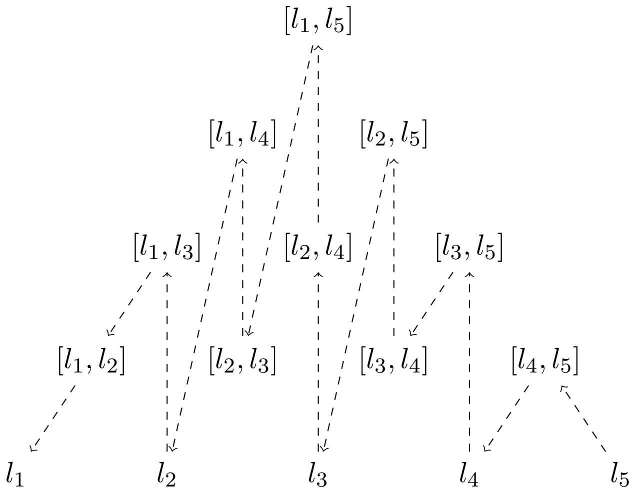

Figure 3.5: Linear order in $\mathbb{L}$ for $g = 5$.

The last step to break the tie between x_i and x_j is counting how many agents assessed the alternatives with the linguistic term l_g: if this amount of agents is bigger for x_i than for x_j, then we will say that $x_i \succcurlyeq_3^V x_j$. If we are still in a tie, then we will count how many agents assessed the alternatives with the linguistic expression $[l_{g-1}, l_g]$, and so on. It is summarized in the next definition.

Definition 13 *Given $V \in \mathbb{V}$, the binary relations $\succcurlyeq_3^V$, $\succcurlyeq_4^V$, ... are defined as*

$$x_i \succcurlyeq_3^V x_j \;\Leftrightarrow\; \#\{p \in I \mid v_i^p = l_g\} \geq \#\{q \in I \mid v_j^q = l_g\},$$
$$x_i \succcurlyeq_4^V x_j \;\Leftrightarrow\; \#\{p \in I \mid v_i^p = [l_{g-1}, l_g]\} \geq \#\{q \in I \mid v_j^q = [l_{g-1}, l_g]\},$$
$$\ldots$$

For the sake of simplicity, the superindex V is omitted whenever it is clear from the context and we will denote the binary relations simply as $\succcurlyeq_3$, $\succcurlyeq_4$, etc.

Clearly, $\succcurlyeq_3$, $\succcurlyeq_4$, etc. are weak orders on X. Summarizing, the process is conducted by the lexicographic weak order $\succcurlyeq^V$ (as until now, the subindex will be omitted if there is no possibility of confusion) on X defined as $x_i \succcurlyeq^V x_j$ if and only if one of the following conditions holds

1. $x_i \succ_1 x_j$.
2. $x_i \sim_1 x_j$ and $x_i \succ_2 x_j$.
3. $x_i \sim_1 x_j$, $x_i \sim_2 x_j$ and $x_i \succ_3 x_j$.
4. $x_i \sim_1 x_j$, $x_i \sim_2 x_j$, $x_i \sim_3 x_j$ and $x_i \succ_4 x_j$.
5. ...

First, we look for the alternative with an overall opinion closer in average to the ideal assessment. If there are alternatives with the same average distance, we look for the alternative with smaller dispersion. If still some alternatives have the same result, we would look for the one with the bigger number of "best" assessments.

Example 14 The tie-breaking process applied to Example 11 is as follows:

$x_1 \sim_3 x_2$: $\#\{p \in I \mid v_1^p = l_5\} = 0 = \#\{p \in I \mid v_2^p = l_5\}$.

$x_1 \sim_4 x_2$: $\#\{p \in I \mid v_1^p = [l_4, l_5]\} = 0 = \#\{p \in I \mid v_2^p = [l_4, l_5]\}$.

$x_1 \succ_5 x_2$: $\#\{p \in I \mid v_1^p = l_4\} = 1 > 0 = \#\{p \in I \mid v_2^p = l_4\}$.

Consequently, $x_1 \succ x_2$.

3.3.4 An illustrative example

As mentioned before, it is common for agents to be uncertain about which assessments assign to the alternatives, and sometimes they are more comfortable using a linguistic expression than a single linguistic term. However, usually agents are forced to assess a single linguistic term. Example 15 shows how taking into account the imprecision of the agents can lead to different results than when they are forced to be precise.

Example 15 Consider $I = \{1, \ldots, 4\}$, $L = \{l_1, \ldots, l_5\}$ and $X = \{x_1, x_2\}$. Table 3.5 shows two assessments for each agent: their sincere assessments which consist of linguistic expressions ($\mathbb{L}$ column), and the linguistic terms they assess when they are required to be precise (L column).

Alt.	v_i^1			v_i^2			v_i^3			v_i^4		
	$\mathbb{L}$		L	$\mathbb{L}$		L	$\mathbb{L}$		L	$\mathbb{L}$		L
x_1	l_3	$\to$	l_3	$[l_2, l_4]$	$\to$	l_3	$[l_3, l_5]$	$\to$	l_4	$[l_3, l_5]$	$\to$	l_4
x_2	$[l_2, l_4]$	$\to$	l_3	$[l_2, l_5]$	$\to$	l_4	$[l_2, l_5]$	$\to$	l_4	l_5	$\to$	l_5

Table 3.5: Agents' assessments in the Example 15.

If we evaluate the opinions in which the agents assess only one linguistic term, we obtain that the overall opinions for both alternatives are $F_1 = \{l_3, [l_3, l_4], l_4\}$ and $F_2 = \{l_4\}$. Since

$$\bar{d}(l_5, F_1) = \frac{4+3+2}{3} = 3 > 2 = \frac{2}{1} = \bar{d}(l_5, F_2),$$

we have $x_2 \succ_1 x_1$, and then, $x_2 \succ x_1$.

If we now calculate the results when considering the sincere linguistic expressions given by the agents in $\mathbb{L}$, we obtain that the overall opinions for both alternatives are $F_1 = \{[l_3, l_4], [l_3, l_5]\}$ and $F_2 = \{[l_2, l_5]\}$. Since

$$\bar{d}(l_5, F_1) = \frac{3+2}{2} = 2.5 < 3 = \frac{3}{1} = \bar{d}(l_5, F_2),$$

contrary to the outcome provided by the single-linguistic-term assessments, we now have $x_1 \succ_1 x_2$, and then, $x_1 \succ x_2$.

3.3.5 Relationship with Majority Judgment

In this subsection we are going to show the relationship between MJ and the decision-making procedure presented in this chapter. Since MJ does not use multiple linguistic terms, we will consider the special case where all voters assess a simple linguistic term to each alternative, i.e., $\boldsymbol{v}_i = (v_i^1, \ldots, v_i^m) \in L^m$ for every $i \in \{1, \ldots, n\}$. Let us denote

$$N_h(x_i) = \#\{p \in I \mid v_i^p = l_h\},$$

for every $h \in \{1, \ldots, g\}$.

Lemma 2 *If m is odd and $l_M \in L$ is the median of the data distribution given by $\boldsymbol{v}_i$, then*

$$\sum_{h=1}^{k} N_h(x_i) > \frac{m-1}{2} \geq \sum_{h=k+1}^{g} N_h(x_i),$$

for every $k \geq M$.

Proof: Trivial by the definition of median (see Fig.3.6).■

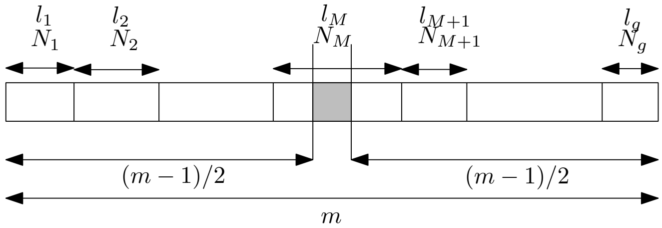

Figure 3.6: Lemma 2.

Using the definition of N_h and the expression of d in terms of $\mathbb{Z}^2$, the potential of a linguistic term with respect to $\boldsymbol{v}_i$ can be written as

$$\Phi(l_h, \boldsymbol{v}_i) = 2\sum_{k=1}^{g} N_k(x_i)|h-k|.$$

Lemma 3 *If m is odd and l_M is the median of the data distribution given by $\boldsymbol{v}_i$, then*

$$\Phi(l_M, \boldsymbol{v}_i) < \Phi(l_{M+1}, \boldsymbol{v}_i) < \cdots < \Phi(l_g, \boldsymbol{v}_i).$$

Proof: Since

$$\Phi(l_h, \boldsymbol{v}_i) - \Phi(l_{h+1}, \boldsymbol{v}_i) = 2\sum_{k=1}^{g} N_k(x_i)(|h-k| - |h-k+1|).$$

and

$$|h-k| - |h-k+1| = \begin{cases} -1, & \text{if } k \leq h, \\ 1, & \text{if } k > h, \end{cases}$$

we have

$$\Phi(l_h, \boldsymbol{v}_i) - \Phi(l_{h+1}, \boldsymbol{v}_i) = -2\sum_{k=1}^{h} N_k(x_i) + 2\sum_{k=h+1}^{g} N_k(x_i).$$

If $h \geq M$, by Lemma 2, we have

$$\Phi(l_h, \boldsymbol{v}_i) - \Phi(l_{h+1}, \boldsymbol{v}_i) \leq 0. \blacksquare$$

The previous lemma can be generalized.

Lemma 4 *For every $h \in \mathbb{N}$ and every non-negative integer h' satisfying $h + h' \leq g - 1$, it holds*

$$\Phi([l_h, l_{h+h'}], \boldsymbol{v}_i) \leq \Phi([l_h, l_{h+h'+1}], \boldsymbol{v}_i).$$

PROOF: Taking into account

$$\Phi([l_h, l_{h+h'}], \boldsymbol{v}_i) - \Phi([l_h, l_{h+h'+1}], \boldsymbol{v}_i) = \sum_{k=1}^{g} N_k(x_i)(|h+h'-k| - |h+h'-k+1|)$$

and from a similar reasoning as in Lemma 3, the result is proven. $\blacksquare$

Proposition 9 *If l_M is the median of the data distribution given by $\boldsymbol{v}_i$ and l_M is in $\boldsymbol{v}_i$, then $F_i = \{l_M\}$.*

PROOF: By Lemmas 3 and 4, it holds

$$\Phi(l_M, \boldsymbol{v}_i) \leq \Phi(l_h, \boldsymbol{v}_i) \leq \cdots \leq \Phi([l_h, l_{h+h'}], \boldsymbol{v}_i),$$

where $h = 1, \ldots, g$ and h' is an integer number satisfying $h + h' \leq g$. Then, by the definition of F_i, the proposition is proven. $\blacksquare$

Proposition 9 proves that in this special case we get the same representative linguistic term of MJ. The next results are devoted to study the case where m is even.

Lemma 5 *If m is even and l_a and l_b are the linguistic terms at positions $\frac{m}{2}$ and $\frac{m}{2}+1$ in the data distribution given by $\boldsymbol{v}_i$, respectively, then $\Phi(l_a, \boldsymbol{v}_i) = \Phi(l_b, \boldsymbol{v}_i)$.*

PROOF: By the definition of l_a and l_b, we have $\sum_{h=1}^{a} N_h(x_i) = \sum_{h=b}^{g} N_h(x_i) = \frac{m}{2}$. On the other hand,

$$\Phi(l_a, \boldsymbol{v}_i) - \Phi(l_b, \boldsymbol{v}_i) = 2 \sum_{h=1}^{g} N_h(x_i)(|h-a| - |h-b|).$$

Since

$$|h-a| - |h-b| = \begin{cases} a-b, & \text{if } h \leq a, \\ -(a-b), & \text{if } h \geq b, \end{cases}$$

then, we have

$$\Phi(l_a, \boldsymbol{v}_i) - \Phi(l_b, \boldsymbol{v}_i) = 2 \sum_{h=1}^{a} N_h(x_i)(a-b) - 2 \sum_{h=b}^{g} N_h(x_i)(a-b) = 0. \blacksquare$$

Lemma 6 *If $P = (a, 0)$, $Q = (0, b)$, $R = (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2$, with $0 \leq c_1 \leq a$ and $0 \leq c_2 \leq b$, then $d_M(P, R) + d_M(R, Q) = d_M(P, Q)$.*

PROOF: By definition of d_M, we have $d_M(P, Q) = a+b$. On the other hand, $d_M(P, R) = |a-c_1|+c_2 = a-c_1+c_2$ and $d_M(R, Q) = |b-c_2|+c_1 = b-c_2+c_1$, so $d_M(P, R) + d_M(R, Q) = d_M(P, Q)$. $\blacksquare$

The next proposition shows that if all voters assess simple linguistic terms and m is even, then F_i has not to be a singleton of $\mathbb{L}$ and the arbitrariness of choosing the median disappears. See Fig. 3.7, where the grey zone denotes F_i.

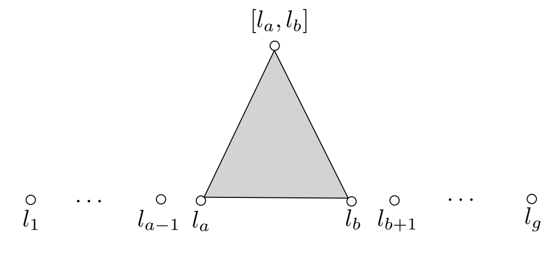

Figure 3.7: An illustration of Proposition 10.

Proposition 10 *If m is even and l_a and l_b are the linguistic terms at positions $\frac{m}{2}$ and $\frac{m}{2}+1$ in the data distribution given by $\boldsymbol{v}_i$, respectively, then*

$$F_i = \{[l_h, l_k] \mid a \leq h \leq k \leq b\}.$$

PROOF: If $a \leq h \leq k \leq b$, by Lemmas 5 and 6 we have $\Phi(l_a, \boldsymbol{v}_i) = \Phi(l_b, \boldsymbol{v}_i) = \Phi(l_h, \boldsymbol{v}_i)$. Let us write $F = \{[l_h, l_k] \mid a \leq h \leq k \leq b\}$. Since m is even, the data distribution given by $\boldsymbol{v}_i$ includes the median $l_M \in F$. From a similar reasoning as in Proposition 9, it is proven that $F_i = F$. ■

Example 16 This example shows the advantages of the symmetry of sets F_i when all voters use simple linguistic terms. Consider that two candidates x_1 and x_2 are graded by four voters with the assessments given in Table 3.6.

	x_1	x_2
1	l_2	l_2
2	l_2	l_3
3	l_5	l_3
4	l_5	l_3

Table 3.6: Agents' assessments in Example 16.

The overall opinion of x_1 is

$$F_1 = \{l_2, l_3, l_4, l_5, [l_2, l_3], [l_3, l_4], [l_4, l_5], [l_2, l_4], [l_3, l_5], [l_2, l_5]\},$$

and the overall opinion of x_2 is $F_2 = \{l_3\}$. Since $\bar{d}(l_5, F_1) = 3 < 4 = \bar{d}(l_5, F_2)$, then $x_1 \succ_1 x_2$. However, MJ declares x_2 as the winner, in spite of x_1 is better graded by the agents than x_2.

3.4 Properties

In this section, we introduce some interesting properties that are satisfied by our decision rule.

Definition 14 *A* decision rule *is a mapping $\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow W(X)$. The weak order $\varphi(V)$ will be denoted by $\succcurlyeq^V$.*

In order to introduce some properties that decision rules can satisfy, we need some pieces of notation and basic notions.

Given a permutation π on I and a profile $V = (v_i^p) \in \mathbb{V}$, we denote $\pi(V) = \left(v_i^{\pi(p)}\right)$.

Given a permutation σ on $\{1, \ldots, n\}$ and a profile $V = (v_i^p) \in \mathbb{V}$, we denote $\sigma(V) = \left(v_{\sigma(i)}^p\right)$, and $\sigma\left(\succcurlyeq^V\right)$ is the order $\succcurlyeq^V$ but taking into account the new names of the alternatives.

The inverse of a linguistic expression $\mathcal{E} = [l_h, l_k] \in \mathbb{L}$ is defined as

$$\mathcal{E}^{-1} = [l_{g-k+1}, l_{g-h+1}].$$

For $g = 5$, with the meanings given in Table 3.1, the inverse of $[l_2, l_3]$ ('between bad and acceptable') is $[l_2, l_3]^{-1} = [l_{5-3+1}, l_{5-2+1}] = [l_3, l_4]$ ('between acceptable and good'); similarly, the inverse of l_1 ('very bad') is $(l_1)^{-1} = l_5$ ('very good').

Given a profile $V = (v_i^p) \in \mathbb{V}$, its inverse is defined as $V^{-1} = \left((v_i^p)^{-1}\right)$.

Before introducing in a formal way the properties involved in the result of the section, we give a rough idea of them.

Anonymity means that if the order of the agents are changed, then the order over the alternatives should be the same.

Neutrality means that if the names of the alternatives are changed, then the new order should be the same but with the name of the alternatives changed in the same way.

Reversal symmetry means that if all the assessments are reversed, then the outcome is also reversed.

Definition 15 *Let* $\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow W(X)$ *be a decision rule.*

- φ *satisfies* Anonymity *if for every permutation* π *on* I *and every* $V \in \mathbb{V}$ *it holds* $\varphi(\pi(V)) = \varphi(V)$, *i.e.,*

$$x_i \succcurlyeq^{\pi(V)} x_j \;\Leftrightarrow\; x_i \succcurlyeq^V x_j \,,$$

  for all $x_i, x_j \in X$.

- φ *satisfies* Neutrality *if for every permutation* σ *on* $\{1,\ldots,n\}$ *and every* $V \in \mathbb{V}$ *it holds* $\varphi(\sigma(V)) = \varphi(V)$, *i.e.,*

$$x_{\sigma(i)}\,\sigma\left(\succcurlyeq^V\right)\,x_{\sigma(j)} \;\Leftrightarrow\; x_i \succcurlyeq^V x_j\,,$$

for all $x_i, x_j \in X$.

- φ *satisfies* Reversal Symmetry *if for every* $V \in \mathbb{V}$ *it holds* $\varphi(V^{-1}) = (\varphi(V))^{-1}$, *i.e.,*

$$x_i \succcurlyeq^{V^{-1}} x_j \;\Leftrightarrow\; x_j \succcurlyeq^V x_i,$$

for all $x_i, x_j \in X$.

Now, two new properties related with a non-constant number of agents or alternatives are going to be presented.

Given $V = (\boldsymbol{v}_1 \,\cdots\, \boldsymbol{v}_n) \in \mathbb{V}$ and $t \in \{1,\ldots,n\}$, with $U = V - \boldsymbol{v}_t$ we denote the reduced profile where the individual assessments over x_t are removed, i.e., $U = V - \boldsymbol{v}_t = (\boldsymbol{v}_1 \,\cdots\, \boldsymbol{v}_{t-1}\, \boldsymbol{v}_{t+1} \,\cdots\, \boldsymbol{v}_n)$, and $\boldsymbol{u}^p = (u_1^p,\ldots,u_{t-1}^p,u_{t+1}^p,\ldots,u_n^p)$ for every $p \in I$.

Given $V = (\boldsymbol{v}_1 \,\cdots\, \boldsymbol{v}_n) \in \mathbb{V}$ and $\lambda \in \mathbb{N}$, with $\lambda\, V$ we denote the replicated profile of λ copies of V, defined as $\lambda\, V = \left(\boldsymbol{v}_1 \stackrel{(\lambda \text{ times})}{\cdots} \boldsymbol{v}_1 \,\cdots\, \boldsymbol{v}_n \stackrel{(\lambda \text{ times})}{\cdots} \boldsymbol{v}_n\right)$.

Independence means that if an alternative is removed, then the order between other alternatives should remain the same.

Invariance for Replications means that if a profile is replicated, then the final order should be the same than in the original profile.

Definition 16 *Let* $\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow W(X)$ *be a decision rule.*

- *A decision rule* φ *satisfies* Independence *if for all* $x_i, x_j, x_t \in X$ *and* $U, V \in \mathbb{V}$ *such that* $U = V - \boldsymbol{v}_t$ *it holds*

$$x_i \succcurlyeq^V x_j \;\Rightarrow\; x_i \succcurlyeq^U x_j.$$

- φ *satisfies* Invariance for Replications *if for all* $x_i, x_j \in X$, $V \in \mathbb{V}$ *and* $\lambda \in \mathbb{N}$ *it holds* $\varphi(\lambda\, V) = \varphi(V)$, *i.e.,*

$$x_i \succcurlyeq^{\lambda V} x_j \;\Leftrightarrow\; x_i \succcurlyeq^V x_j.$$

In order to justify the properties of our decision rule, some technical results are needed. They are presented in the following lemmas.

Lemma 7 *For all* $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathbb{L}$ *it holds* $d\left(\mathcal{E}^{-1}, \mathcal{F}^{-1}\right) = d(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

PROOF: If $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ and $\mathcal{F} = [l_r, l_s]$, we have

$$\begin{aligned} d(\mathcal{E}^{-1}, \mathcal{F}^{-1}) &= d_M(\psi(\mathcal{E}^{-1}), \psi(\mathcal{F}^{-1})) = \\ &= d_M((g-h, g-k), (g-r, g-s)) = \|r-h\| + \|s-k\| \\ &= \|k-s\| + \|h-r\| = d_M((k-1, h-1), (s-1, r-1)) \\ &= d_M(\psi(\mathcal{E}), \psi(\mathcal{F})) = d(\mathcal{E}, \mathcal{F}). \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 8 *For every* $V \in \mathbb{V}$ *it holds* $\mathcal{E} \in F_i^V \;\Leftrightarrow\; \mathcal{E}^{-1} \in F_i^{V^{-1}}$.

PROOF: By Lemma 7, we have

$$\sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}, v_i^p) = \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}^{-1}, (v_i^p)^{-1}).$$

Substituting in the definition of Fermat set, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \in F_i^V \;\Leftrightarrow\; \forall \mathcal{F} \in \mathbb{L} \; \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}, v_i^p) &= \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}^{-1}, (v_i^p)^{-1}) \leq \\ \leq \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{F}, v_i^p) &= \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{F}^{-1}, (v_i^p)^{-1}). \end{aligned}$$

Consequently,

$$\mathcal{E} \in F_i^V \;\Leftrightarrow\; \forall \mathcal{F} \in \mathbb{L} \; \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}^{-1}, (v_i^p)^{-1}) \leq \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{F}, (v_i^p)^{-1}) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{E}^{-1} \in F_i^{V^{-1}}. \blacksquare$$

Lemma 9 *For all* $x_i \in X$, $V \in \mathbb{V}$ *and* $\lambda \in \mathbb{N}$ *it holds* $F_i^{\lambda V} = F_i^V$.

PROOF: $\mathcal{E} \in F_i^{\lambda V}$ is equivalent to

$$\sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}, v_i^p) + \overset{(\lambda \text{ times})}{\cdots} + \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}, v_i^p) \leq \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{F}, v_i^p) + \overset{(\lambda \text{ times})}{\cdots} + \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{F}, v_i^p),$$

for every $\mathcal{F} \in \mathbb{L}$, and then to $\displaystyle\sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{E}, v_i^p) \leq \sum_{p=1}^{m} d(\mathcal{F}, v_i^p)$, for every $\mathcal{F} \in \mathbb{L}$, i.e., to $\mathcal{E} \in F_i^V$. ■

Theorem 1 *The decision rule* $\varphi_1 : \mathbb{V} \longrightarrow W(X)$ *defined as* $\varphi_1(V) = \succcurlyeq_1^V$ *satisfies Anonymity, Neutrality, Reversal Symmetry, Independence and Invariance for Replications.*

PROOF:

The proof of Anonymity, Neutrality and Independence is straightforward.

For proving Reversal Symmetry, we have to justify that for all $x_i, x_j \in X$ it holds

$$x_i \succcurlyeq_1^V x_j \Leftrightarrow x_j \succcurlyeq_1^{V^{-1}} x_i.$$

By definition,

$$x_i \succcurlyeq_1^V x_j \Leftrightarrow \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in F_i} d(l_g, \mathcal{E})}{\# F_i} \leq \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in F_j} d(l_g, \mathcal{E})}{\# F_j}.$$

We know by Lemma 7 and Lemma 8 that

$$\frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in F_i} d(l_g, \mathcal{E})}{\# F_i} = \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E}^{-1} \in F_i^{-1}} d((l_g)^{-1}, \mathcal{E}^{-1})}{\# F_i^{-1}}.$$

Taking into account the fact that $(l_g)^{-1} = l_1$, we have

$$x_i \succcurlyeq_1^V x_j \Leftrightarrow \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in F_i^{-1}} d(l_1, \mathcal{E})}{\# F_i^{-1}} \leq \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in F_j^{-1}} d(l_1, \mathcal{E})}{\# F_j^{-1}}.$$

And finally, taking into account $d(l_g, \mathcal{E}) = 2g - 2 - d(l_1, \mathcal{E})$ and Lemma 1, we have

$$x_i \succcurlyeq_1^V x_j \Leftrightarrow \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in F_i^{-1}} d(l_g, \mathcal{E})}{\# F_i^{-1}} \geq \frac{\displaystyle\sum_{\mathcal{E} \in F_j^{-1}} d(l_g, \mathcal{E})}{\# F_j^{-1}} \Leftrightarrow x_j \succcurlyeq_1^{V^{-1}} x_i. \blacksquare$$

By Independence and Lemma 9, Invariance for Replications is satisfied.
■

3.5 Concluding remarks

The introduction of the new Majority Judgment voting system by Balinski and Laraki [12, 15] can be considered to be divergent to the classical Arrow approach [8]. Although in both cases, individual opinions are aggregated in order to obtain a collective weak order on the set of alternatives, the information provided by the agents is different. In the Arrow approach, agents are required to order the alternatives by rank of preference. However, in Majority Judgment, a common language composed by a small number of linguistic terms is used by the agents for assessing the candidates one by one.

Imagine two agents rank three alternatives A, B and C in the same order, for instance B C A. However, it is possible that the opinions of these agents could be different, for instance the first one could think that B is very good, C is good and A is acceptable while the second agent thinks that B is good, C is bad and A is very bad. Within the Arrow framework, this information is not considered and the opinions of both agents are taken as being equal.

It is worth mentioning that not only voters but also experts are not always confident about their opinions when they have to declare them using the fixed terms of a finite scale[7]. In this chapter we have taken the same starting point as that of Majority Judgment except that we allow agents to be imprecise in their assessments by using several consecutive linguistic terms, if necessary.

Our proposal is essentially different to that of Majority Judgment which is based on the median of the individual assessments and a tie-breaking process[8]. We have proposed a distance-based aggregation procedure in which the alternatives are ordered according to the average distances between the

[7]For instance, the reviewers of some scientific journals have to select a recommendation for a paper between the following four modalities: 'accept', 'minor revision', 'major revision' or 'rejection'. Sometimes, after choosing one of the four possibilities, some reviewers write 'between major revision and rejection' or similar sentences in the notes for the editors.

[8]We should note that our proposal coincides with Majority Judgment in the first stage when an odd number of agents assess the alternatives using linguistic terms. In this sense, our proposal can be considered to be an extension of Majority Judgment.

overall opinion and the highest possible assessment. Although our procedure generates fewer ties than Majority Judgment, they can still appear. So, we have also proposed a tie-breaking process, first by taking into account the dispersion of individual assessments, and subsequently by considering the number of best assessments, etc.

Sometimes social choice theorists advocate the principle that voters should easily understand how the voting rules work. Surely the simplest and most popular voting rule is plurality, where each agent votes for his favorite candidate and the winner(s) is/are the candidate(s) who obtain a greater number of votes. In spite of its popularity, plurality can be considered to be, in practice, the worst voting rule (see Laslier [39]). Clearly, simplicity is not the most important feature of a voting rule.

In group decision-making, it is not essential that the decision processes are simple, rather that they are flexible and that they consistently manage the information provided by the agents for generating the collective decisions. Our proposal is more complicated than plurality and other basic voting rules, but it is more faithful to the individual opinions. The properties we have proven within the social choice framework provide initial support to our proposal. The study of other properties and some comparative analyses with other group decision-making procedures, specially with Majority Judgment, would be pertinent as further research.

In numerous real decision problems, experts have to assess the alternatives through scales with more number of terms in the positive side of the scale than in the negative one. In this way, it is important to note that Herrera *et al.* [32] analyze this problem and provide a methodology based on linguistic hierarchies and the 2-tuple fuzzy linguistic representation (see Herrera and Martínez [33]). We leave for further research to deal with unbalanced linguistic term sets within the metric-based approach we have developed in the present chapter. Another worthy problem to be addressed in future research is the one where the distances between consecutive linguistic terms are not constant, irrespectively of the scale being balanced or not.

Capítulo 4

Aplicación a la licitación de proyectos públicos

En este capítulo se presenta un modelo de decisión para las licitaciones públicas, en concreto para la ordenación de los proyectos basada en aquellos criterios que requieren juicios de valor por parte de los expertos que los evalúan. Los expertos valoran los criterios mediante uno o varios términos lingüísticos consecutivos de una escala finita, como por ejemplo: 'excelente', 'muy bueno', 'entre bueno y muy bueno', etc. La ordenación de los proyectos se basa en el cálculo de la suma de distancias de las valoraciones otorgadas para un proyecto respecto al término lingüístico 'ideal'. La distancia se calcula mediante la métrica geodésica del grafo asociado y dos componentes de penalización a la imprecisión. En el capítulo se analizan paulatinamente los casos en donde sólo hay un criterio, donde se valoran varios criterios y donde se valoran varios criterios y cada uno tiene una ponderación diferente. Además, estos casos se ilustran mediante un ejemplo.

4.1 Introducción

Las Administraciones Públicas, al igual que cualquier empresa privada, necesitan adquirir suministros, bienes y servicios o ejecutar obras. El procedimiento por el cual los organismos o entidades pertenecientes al Sector Público llevan a cabo sus procesos de contratación requiere un trámite administrativo especial conocido como licitación, concurso público o contrato del Sector Público. Se puede definir concurso público como el proceso por el cual varios candidatos concurren con intención de proveer a la Administración con los bienes y/o servicios objetos del contrato, En España los contratos con el Sector Público están regulados por el Real Decreto Legislativo 3/2011, de 14 de noviembre, por el que se aprueba el Texto Refundido de la Ley de Contratos del Sector Público (TRLCPS) ([1]).

El funcionamiento de una licitación consta de varias fases. Tras el reconocimiento por parte de un ente, organismo o entidad del Sector Público de la necesidad de realizar una obra, servicio o suministro con medios externos, se pone en marcha el proceso. Se prepara un contrato donde se determinan los requisitos y la estimación del precio, y se elaboran los pliegos, que son los documentos donde se detallan todas las prescripciones técnicas y administrativas. En esta fase se deben especificar la entidad adjudicataria, el objeto del contrato (tipo, descripción, lugar, la forma de tramitación – ordinaria o extraordinaria– y el procedimiento – abierto, restringido, negociado o diálogo competitivo–), el presupuesto base de la licitación, los requisitos específicos del contratista y la forma, fecha y lugar de la presentación de ofertas o solicitudes.

Tras esto, debe publicitarse la licitación dándola a conocer en el Boletín Oficial correspondiente y, dependiendo de las características concretas, también en algún otro medio de difusión. El paso siguiente es la apertura del procedimiento. Las empresas interesadas en el contrato que cumplan los requisitos presentan toda la documentación necesaria, donde acreditan su personalidad jurídica y solvencia, así como sus ofertas, que constarán de una propuesta técnica y otra económica, en las que se describe cómo se pretende llevar a cabo el trabajo y con qué presupuesto.

Una vez finalizado el plazo para la recepción de ofertas, comienza el procedimiento de adjudicación. Para la concesión, primero se revisa que todas las ofertas presentadas cumplan los requisitos y, tras ello, se evalúa y se elige la propuesta que se considera más ventajosa que será aquélla que ofrezca una mejor relación entre el precio y los aspectos técnicos de la oferta, y no necesariamente la que presente un precio más bajo.

Los últimos pasos son la publicidad de la resolución (que deberá informar primero al proyecto ganador y el resto de candidatos y, posteriormente, se publicitará en boletines oficiales o similares), la firma del contrato y, finalmente, la realización efectiva del servicio, suministro o bien, y el pago por parte de la administración del precio convenido.

Es importante recalcar la relevancia del estudio de las licitaciones, ya que, además de su gran importancia monetaria, sus procedimientos se están haciendo cada vez más globales. Según las leyes que conciernen a la Unión Europea, determinados contratos públicos deben abrirse no sólo al territorio español, sino a todo el conjunto de los países pertenecientes a la Unión. Todos los concursantes públicos que superen unos determinados valores contractuales deben ser publicados en el Suplemento al Diario Oficial de la Unión Europea [3]. Por tanto, la concesión de proyectos públicos debe demostrar la eficiencia y justicia que se presuponen en una elección de estas magnitudes. Sin embargo, como se ha destacado anteriormente, se detectan varios problemas con sus consiguientes recursos e impugnaciones frente a tribunales de diversas magnitudes, desde Tribunales Territoriales, hasta el Tribunal Europeo. Varios ejemplos de estos recursos ante tribunales, en concreto referentes a la Jurisprudencia del Tribunal de Justicia de las Comunidades Europeas en Materia de Contratación Pública, puede encontrarse en [2].

Dada la naturaleza pública de estos contratos que busca no sólo un beneficio monetario, sino también un beneficio social, y la importancia tanto económica como política de los mismos, el proceso debe ser tratado con la cautela necesaria y debería responder a ciertos principios, entre los que cabe destacar la transparencia. La capacidad de un licitante de calcular de antemano la puntuación a obtener, si no exactamente, al menos de manera aproximada, es un ejemplo de transparencia. Sin embargo, pese a que en los pliegos aparecen detallados los criterios a evaluar y la puntuación de cada uno de ellos, en la práctica es muy difícil calcular la puntuación final que se va a conseguir.

En un trabajo de Chen [18], desde un punto de vista más económico y menos legal, se ponen de manifiesto algunos problemas que presentan las licitaciones. La puntuación de los licitantes se calcula de manera relativa, teniendo en cuenta no sólo la oferta presentada por un proyecto, sino mediante la comparación de dicha oferta con las presentadas por el resto de licitantes (comúnmente con fórmulas basadas en la mejor oferta en cada criterio). Esta práctica vulnera el principio denominado en Elección Social como *Independencia de Alternativas Irrelevantes*. Sobre la transparencia, Chen argumenta que un sistema sólo puede ser completamente transparente si las puntuaciones de los proyectos pueden calcularse de antemano. Si alguna de las puntuaciones es relativa, es decir, si la puntuación de un licitante depende de otro licitante, el sistema no puede ser completamente transparente. Además, Chen observa cómo se puede manipular el sistema mediante la introducción de variantes o mejoras[1].

El Tribunal de Cuentas Español, que revisa las contrataciones públicas celebradas, también ha puesto de manifiesto numerosas irregularidades en sus Informes de Fiscalización (véanse, por ejemplo, [4] y [5]). Algunas de esas deficiencias son: la falta de remisión de documentación obligatoria para su posterior fiscalización, omisión en los pliegos de información relevante, insuficiencia en la concreción de los criterios y la indebida utilización de los pliegos-tipo, faltos de las adaptaciones necesarias. Además se resaltan otros como la carencia de motivación del procedimiento de adjudicación y elección de los criterios, o el incumplimiento de la normativa en la constitución de un comité de expertos que valore los criterios.

Como se puede observar, la existencia de "oscuridad" en el proceso, ha sido denunciada tanto en el ámbito científico, como en el propio día a día del proceso. Este capítulo se centra en un problema concreto observado en la contratación pública, concretamente en la evaluación de las ofertas presentadas. Para ello, se va a exponer más en detalle cómo se lleva a cabo el proceso de evaluación.

En casi todos los procedimientos de adjudicación[2] el órgano competente para valorar las ofertas es una Mesa de Contratación compuesta por un presidente, un secretario y al menos cuatro vocales. De ellos, todos tienen voz y voto, excepto el secretario que sólo posee voz.

La presentación de las propuestas ha de hacerse mediante plicas, que son sobres cerrados y secretos que contienen la documentación. El sobre número 1 suele contener los documentos presentados por los licitantes para la el-

[1]Sobre Variantes en el caso español: *Art.147.1 Admisibilidad de variantes o mejoras.* Cuando en la adjudicación hayan de tenerse en cuenta criterios distintos del precio, el órgano de contratación podrá tomar en consideración las variantes o mejoras que ofrezcan los licitadores, siempre que el pliego de cláusulas administrativas particulares haya previsto expresamente tal posibilidad (TRLCSP) [1].

[2]En todos los procesos de adjudicación excepto en los porcedimentos denominados de "negociado sin publicidad".

valución de los criterios de selección. Los criterios de selección manifiestan la capacidad del licitador para ejecutar el contrato y su finalidad es excluir candidatos no elegibles. Se comprueba que la situación financiera de los candidatos (capacidad económica y financiera) es sólida, así como la capacidad técnica y profesional de sus equipos técnicos y sus recursos humanos. Los sobres número 2 y número 3 hacen referencia a los criterios de adjudicación, que sirven para determinar la oferta económica más ventajosa. El tercer sobre suele recoger las proposiciones de los licitantes relativas a los criterios objetivos, que son aquéllos cuya puntuación puede determinarse mediante la aplicación de fórmulas matemáticas (ésta es la forma común de valorar el criterio precio). El segundo sobre contiene toda la documentación relacionada con el objeto del contrato que comporta una ventaja para el poder adjudicador, pero no puede medirse de manera automática y requiere de juicios de valor; los denominados criterios subjetivos. En la valoración de estos criterios subjetivos es donde se centra este capítulo.

Puede ocurrir que sólo exista un criterio de adjudicación, en cuyo caso el criterio debe ser necesariamente el precio. De existir más de un criterio, primero se procede a la valoración de los criterios subjetivos o no evaluables automáticamente. Posteriormente se procede a valorar los criterios objetivos o evaluables de forma automática. Si la puntuación otorgada a los criterios objetivos es mayor que la otorgada a los subjetivos, la evaluación de ambos es llevada a cabo por la Mesa de Contratación[3]. Si, por el contrario, el valor de los criterios dependientes de juicios de valor es mayor, estos criterios serán valorados por un Comité formado por al menos tres expertos no integrados en el órgano de contratación o bien se encomienda a un organismo especializado. Tras la valoración del comité, que es vinculante, volverá a la Mesa de Contratación para la evaluación de los criterios objetivos.

Este capítulo se centra en la evaluación, tanto de la Mesa de Contratación, como del Comité de expertos, en aquellos criterios que suponen juicios de valor por parte de sus integrantes. Ejemplos de estos criterios son: la calidad de la propuesta, las características medioambientales, las características estéticas y funcionales, la asistencia técnica, el servicio post-venta, etc. En la actualidad, la valoración de estos criterios se hace de manera numérica, aun cuando no es sencillo valorar cuantitativamente estos criterios.

Existen numerosos sistemas de votación donde los agentes pueden expresar sus preferencias mediante términos lingüísticos. Uno de los más simples

[3]Si bien la valoración de los criterios subjetivos se efecturá por la Mesa, ésta podrá solicitar los informes técnicos que considere oportunos.

es el *voto aprobatorio* (Brams y Fishburn [16, 17]), donde los agentes pueden "aprobar" o "desaprobar" a los candidatos. Otro método más reciente, *Juicio Mayoritario* (*Majority Judgment*) (Balinski y Laraki [12, 14, 15]), puede entenderse como una extensión del voto aprobatorio, donde los agentes pueden asignar más términos lingüísticos como 'excelente', 'muy bueno', 'bueno', etc.

Juicio Mayoritario es un método bastante controvertido y varios autores han señalado cómo se ve afectado por varias paradojas e inconsistencias (véanse Smith [52], Felsenthal y Machover [24], García-Lapresta y Martínez-Panero [27] y Nurmi [44], entre otros). Para solventar algunas de estas inconsistencias, aparecen varias extensiones del método, que también trabajan con términos lingüísticos. Por ejemplo, García-Lapresta y Martínez-Panero [27] presentan una extensión para pequeños comités mediante *operadores OWA centrados* (Yager [61]) y la *representación lingüística difusa basada en 2-tuplas* (Herrera and Martínez [33]). En Falcó y García-Lapresta [20, 21], se introduce una extensión basada en distancias entre términos lingüísticos y Zahid [65] propone una combinación entre Juicio Mayoritario y la *regla de Borda* [19].

Existen otros ejemplos de sistemas de votación que usan términos lingüísticos, tales como García-Lapresta [25], que extiende la *regla de la mayoría simple* a través de preferencias lingüísticas, o García-Lapresta *et al.* [26, 28] donde se generaliza la regla de Borda expresando las preferencias entre alternativas de manera lingüística.

Aunque el uso de términos lingüísticos acerca el diseño de los procesos de decisión a la imprecisión con la que se enfrentan los agentes cuando valoran alternativas, en ocasiones un agente puede encontrarse indeciso sobre qué término lingüístico usar. Por esta razón, permitir a los agentes evaluar de una manera más imprecisa se convierte en un tema de interés. Una forma de poner en práctica esta idea consiste en permitir a los expertos asignar no sólo un único término, sino darles la posibilidad de otorgar varios términos consecutivos. Otras aportaciones sobre este tema estudiadas desde un ángulo diferente son, por ejemplo, Tang y Zheng [53], Torra [54], Ma *et al.* [40] y Rodríguez *et al.* [46].

La propuesta utilizada en este capítulo está basada en una adaptación de los *Espacios de Órdenes de Magnitud Absoluta* introducidos por Travé-Massuyès y Dague [55] y Travé-Massuyès y Piera [56]; más específicamente, en las extensiones desarrolladas por Roselló *et al.* [48, 49, 50]. En Falcó *et* *al.* [23, 22] (capítulos 2 y 3 de esta tesis) se presentan dos modelos teóricos construidos bajo las premisas presentadas: términos lingüísticos y posibilidad de asignar más de un término lingüístico. En Falcó *et al.* [22] se presenta un proceso de ordenación de las alternativas mediante la distancia de cada termino lingüístico otorgado por un agente y el máximo término lingüístico. La distancia que se utiliza está definida a través de una métrica cuya característica principal es la penalización de la imprecisión de los agentes a través de parámetros. De esta manera, cuantos más términos lingüísticos utilice un agente, mayor será su penalización. Dicho trabajo sirve como base para la aplicación al caso de los criterios subjetivos en licitaciones, presentado en el presente capítulo.

En este capítulo se introduce un modelo de decisión centrado en los criterios subjetivos de las contrataciones públicas. Se muestra un método para ordenar los proyectos presentados a una licitación cuando los expertos valoran los proyectos en cada criterio mediante uno o varios términos lingüísticos consecutivos. En la sección 4.2 se presentan la notación necesaria y algunos de los conceptos básicos utilizados durante el capítulo. En la sección 4.3 se introduce la penalización impuesta a la imprecisión a través de dos parámetros. En la sección 4.4 se aplicarán todos los conceptos en el entorno concreto de las licitaciones públicas, comenzando con un caso sencillo y aumentando su complejidad paulatinamente. La sección 4.5 presenta un ejemplo desarrollado para mostrar cómo se aplicarían los modelos en cada uno de los casos. Por último, la sección 4.6 englobará las conclusiones y el trabajo futuro.

4.2 Notación y conceptos básicos

A continuación se presenta la notación básica que se utiliza durante el capítulo. Tras esto, se introduce el concepto de expresión lingüística, necesario para el desarrollo del método propuesto. Por último se describe el cálculo de distancias entre expresiones lingüísticas.

4.2.1 Notación

Para cada licitación existe un conjunto de expertos $I = \{1, \ldots, m\}$, con $m \geq 2$, que son los encargados de valorar los proyectos. El conjunto de proyectos presentados, licitaciones o licitadores, se denota como $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, donde $n \geq 2$. Los criterios evaluados para cada una de las licitaciones se representan por el conjunto $C = \{c_1, \ldots, c_r\}$. Cada experto otorga a cada proyecto una valoración perteneciente a una escala lingüística ordenada $L = \{l_1, \ldots, l_g\}$, donde $l_1 < l_2 < \ldots < l_g$. La escala lingüística es equilibrada (contiene el mismo número de términos con contenido positivo que negativo) y equiespaciada (la distancia entre dos términos consecutivos es la misma en toda la escala). Los elementos de L son términos lingüísiticos como por ejemplo: 'excelente', 'muy bueno', 'bueno', etc.

Una relación binaria $\succcurlyeq$ sobre un conjunto $A \neq \emptyset$ es un *orden débil* (o un *preorden completo*) si es completa ($a \succcurlyeq b$ o $b \succcurlyeq a$, para cualesquiera $a, b \in A$) y transitiva (si $a \succcurlyeq b$ y $b \succcurlyeq c$, entonces $a \succcurlyeq c$, para cualesquiera $a, b, c \in A$). Por otro lado, un *orden lineal* sobre $A \neq \emptyset$ es un orden débil en A que también es antisimétrico[4]. Dado un un orden (ya sea lineal o débil) $\succcurlyeq$ en $A \neq \emptyset$, las partes antisimétrica y simétrica de $\succcurlyeq$ se denotan respectivamente como $\succ$ y $\sim$, o lo que es lo mismo, $a \succ b$ si no ocurre $b \succcurlyeq a$, y $a \sim b$ si $a \succcurlyeq b$ y $b \succcurlyeq a$.

4.2.2 Expresiones lingüísticas

Basado en *los Espacios de Órdenes de Magnitud Absoluta* introducidos por Travé-Massuyès y Piera [56], se define el *conjunto de expresiones lingüísticas* como

$$\mathbb{L} = \{[l_h, l_k] \mid l_h, l_k \in L\,,\ 1 \leq h \leq k \leq g\},$$

donde $[l_h, l_k] = \{l_h, l_{h+1}, \ldots, l_k\}$ y $[l_1, l_g] = \{l_1, \ldots, l_g\}$. Dado que $[l_h, l_h] = \{l_h\}$, esta expresión lingüística se puede remplazar por el término lingüístico l_h. De esta forma, $L \subset \mathbb{L}$.

Dado $\mathcal{E} = [l_h, l_k] \in \mathbb{L}$, con $\#\mathcal{E}$ se denota el número de términos de la expresión lingüísitica $\mathcal{E}$: $\#\mathcal{E} = k - h + 1$. Cabe resaltar que $\#\,\mathbb{L} = g + (g-1) + \cdots + 1 = \dfrac{g(g+1)}{2}$.

Ejemplo 17 Sea $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ el conjunto de términos lingüísticos cuyo el significado se presenta en el Cuadro 4.1.

Cada expresión lingüística tiene un significado asociado. Por ejemplo,

[4] $\succcurlyeq$ es antisimétrico si para cualesquiera $a, b \in A$ tales que $a \neq b$ ocurre $a \succ b$ o $b \succ a$.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
muy malo	malo	regular	bueno	muy bueno

Cuadro 4.1: Significado de los términos lingüísticos.

$[l_2, l_4]$ puede entenderse como 'entre malo y bueno', $[l_4, l_5]$ como 'entre bueno y muy bueno' o 'al menos bueno', etc.

Adoptando el tratamiento introducido en Roselló *et al.* [50], el conjunto de todas las expresiones lingüísticas se puede representar mediante un grafo $G_{\mathbb{L}}$. En el grafo, el estrato más bajo respresenta los términos lingüísticos $l_h \in L \subset \mathbb{L}$, el segundo estrato respresenta las expresiones lingüísticas creadas a partir de dos términos lingüísticos consecutivos $[l_h, l_{h+1}]$, el tercer estrato representa las expresiones lingüísticas creadas a partir de tres términos lingüísticos consecutivos $[l_h, l_{h+2}]$, y así hasta el último estrato, donde se representa la expresión lingüística $[l_1, l_g]$. Por consiguiente, cuanto más alto se encuentre un elemento en el grafo, mayor es su imprecisión.

Los vértices en $G_{\mathbb{L}}$ son los elementos de $\mathbb{L}$ y las aristas $\mathcal{E} - \mathcal{F}$, donde $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ y $\mathcal{F} = [l_h, l_{k+1}]$, o $\mathcal{E} = [l_h, l_k]$ y $\mathcal{F} = [l_{h+1}, l_k]$.

La respresentación del grafo para el Ejemplo 17 se incluye en la Figura 4.1.

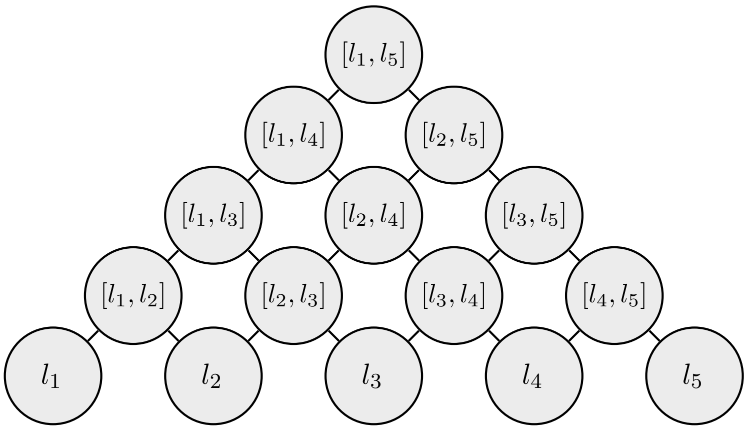

Figura 4.1: Grafo representativo de las expresiones lingüísticas para $g = 5$.

Cuando uno de los expertos tiene clara su opinión para uno de los proyectos, puede usar un término lingüístico $l_h \in L$. Si, por el contrario, no está seguro o no dispone de la información suficiente, puede usar una expresión lingüística $[l_h, l_k] \in \mathbb{L}$, con $h < k$.

Nótese que todas las computaciones realizadas en $\mathbb{L}$ pueden hacerse también en $\mathbb{Z}^2$ mediante la aplicación inyectiva $\psi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, definida como $\psi([l_h, l_k]) = (k-1, h-1)$. A través de ψ es posible trabajar en un entorno computacional más sencillo, representando cada expresión lingüística por un punto en el plano. Por ejemplo, $l_h \in L$ se identifica con $(h-1, h-1) \in \mathbb{Z}^2$, y la expresión lingüística $[l_3, l_5] \in \mathbb{L}$ se identifica con el punto $(4, 2) \in \mathbb{Z}^2$ (veáse la Fig. 4.2).

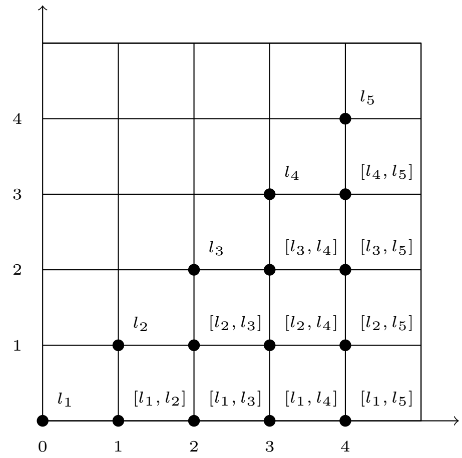

Figura 4.2: Aplicación inyectiva entre $\mathbb{L}$ y $\mathbb{Z}^2$ para $g = 5$.

4.2.3 Distancias entre expresiones lingüísticas

La distancia geodésica entre dos expresiones lingüísticas $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathbb{L}$ se define entre sus vértices asociados en el grafo correspondiente $G_{\mathbb{L}}$ y se denota como $d_G(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Se denomina distancia geodésica entre dos vértices de un grafo al número de aristas mínimo que debe recorrerse para unirlos. Puede ocurrir que existan varios recorridos diferentes que se correspondan con el número mínimo de aristas, en cuyo caso cualquiera se corresponde con la distancia que se busca.

Observación 4 Si se tiene en cuenta la aplicación inyectiva $\psi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, la distancia geodésica entre dos expresiones lingüísticas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ puede calcu-

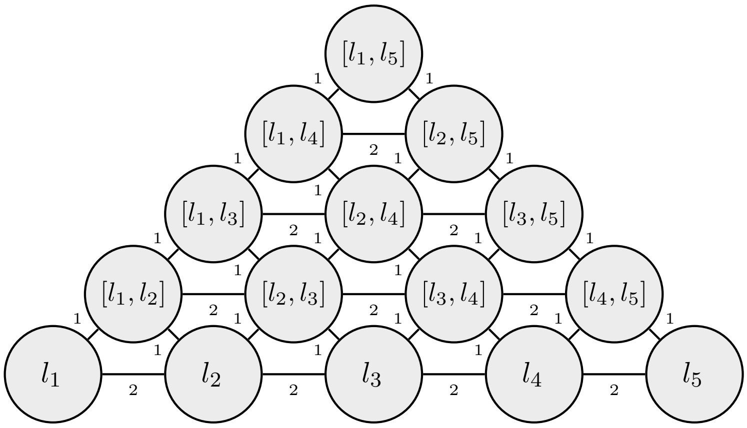

Figura 4.3: Distancias geodésicas entre expresiones lingüísticas contiguas para $g = 5$.

larse en $\mathbb{Z}^2$ como la *distancia de Manhattan*[5] entre sus puntos asociados $\psi(\mathcal{E})$ y $\psi(\mathcal{F})$:

$$d(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = d_M(\psi(\mathcal{E}), \psi(\mathcal{F})).$$

Ejemplo 18 La distancia geodésica entre las expresiones lingüísicas $[l_1, l_4]$ y $[l_3, l_5]$ en $\mathbb{L}$, para $g = 5$, es la longuitud del recorrido más corto posible desde un vértice al otro, $d_G(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 3$: desde el vértice $[l_1, l_4]$ al vértice $[l_2, l_4]$, desde el vértice $[l_2, l_4]$ al vértice $[l_2, l_5]$ y finalmente, desde el $[l_2, l_5]$ al $[l_3, l_5]$. Este recorrido no es único, pero es uno de los dos recorridos más cortos posibles. También es posible calcularlo en $\mathbb{Z}^2$ como:

$$d_G([l_1, l_4], [l_3, l_5]) = d_M(\psi([l_1, l_4]), \psi([l_3, l_5])) = d_M((3, 0), (4, 2)) = 3.$$

La Figura 4.3 representa en el grafo todas las distancias geodésicas entre expresiones lingüísticas contiguas, para $g = 5$. La distancia entre dos expresiones no contiguas se puede obtener mediante la suma de las distancias del recorrido más corto posible entre ellas.

[5]La distancia de Manhattan en $\mathbb{R}^q$ es la función $d_M : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $d_M((a_1, \ldots, a_q), (b_1, \ldots, b_q)) = \sum_{k=1}^{q} |a_k - b_k|$.

4.3 Penalizar la imprecisión

Hasta ahora se ha presentado la distancia entre dos expresiones lingüísticas aludiendo únicamente a la distancia geodésica. Este planteamiento deja de lado un concepto que debería ser destacado: la imprecisión.

Dados dos términos lingüísticos consecutivos l_h y l_{h+1}, la distancia entre ambos calculada mediante la distancia geodésica es igual a 2. Si un experto no fuese capaz de escoger entre ambos términos, puede optar por asignar la expresión lingüística $[l_h, l_{h+1}]$, combinación de ambos términos. Esta expresión se encuentra a una distancia geodésica de 1 tanto de l_h, como de l_{h+1}.

El proceso que se presentará más adelante consiste en la comparación de la suma de distancias al término lingüístico l_g. Según este método dos expertos que otorgen la expresión $[l_h, l_{h+1}]$ son tratados igual que dos expertos, uno de los cuales asigna l_h y otro l_{h+1}, pese a que el segundo par de expertos sabe con seguridad qué término lingüístico asignar. En ese sentido, un experto que tiene clara su valoración y otorga un término lingüístico es tratado de la misma forma que un experto que, al no tener suficiente información y encontrarse indeciso, asigna una expresión lingüística.

A continuación se presentan dos tipos de penalizaciones que responden a dos formas de tratar la imprecisión. Las dos penalizaciones se representan mediante dos parámetros (α y β) y deben elegirse dependiendo del nivel de penalización que se quiera imponer.

4.3.1 $\alpha-$ penalización

Esta penalización está centrada en sancionar el uso de cada término lingüístico adicional. Cada vez que un experto aumenta el cardinal de la expresión lingüísitica en 1 (pasa por ejemplo de una expresión con dos términos $[l_h, l_{h+2}]$ a una expresión con tres términos $[l_h, l_{h+3}]$), su nivel de imprecisón aumenta, y este modelo lo penaliza en consecuencia. Conforme se sube en los estratos de la Figura 4.1, cada expresión lingüística es menos precisa, desde la máxima precisión en el estrato más bajo (un solo término lingüístico), hasta la mayor imprecisión posible, el último estrato (g términos lingüísticos).

Para sancionar dicha imprecisión, la distancia, calculada hasta ahora teniendo en cuenta tan solo la distancia geodésica, aumenta mediante una penalización de α: las distancias desde l_h a $[l_h, l_{h+1}]$ o $[l_{h-1}, l_h]$ no son 1, sino $1+\alpha$. Esta penalización, $\alpha \mid \#\mathcal{E} - \#\mathcal{F} \mid$, se ha de añadir a la distancia geodésica previa $d_G(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, tal como puede verse a continuación:

$$d(l_2, [l_2, l_3]) = d_G(l_2, [l_2, l_3]) + \alpha \mid \#l_2 - \#[l_2, l_3] \mid = 1 + \alpha$$
$$d([l_3, l_4], [l_3, l_5]) = d_G([l_3, l_4], [l_3, l_5]) + \alpha \mid \#[l_3, l_4] - \#[l_3, l_5] \mid = 1 + \alpha$$
$$d(l_1, [l_1, l_3]) = d_G(l_1, [l_1, l_3]) + \alpha \mid \#l_1 - \#[l_1, l_3] \mid = 2 + 2\alpha.$$

4.3.2 $\beta-$ penalización

En la $\alpha-$penalización se ha aumentado la distancia geodésica mediante la suma de una penalización α por cada término lingüístico adicional utilizado. De esta manera, incrementar los términos lingüísticos de 2 a 3 es penalizado de la misma manera que el incremento de 3 a 4.

La segunda penalización que se va a presentar tiene en cuenta no sólo cuántos términos lingüísticos usa un experto, sino también cúan lejos se encuentran de la máxima precisión posible, o lo que es lo mismo, lo lejos que están de asignar un sólo término lingüístico. Cuanto más alto sea el estrato en el que se encuentre una expresión lingüística, cada término que se añada tendrá una penalización mayor. Por ejemplo, la penalización asignada por el paso de l_2 a $[l_2, l_3]$ no será la misma que la penalización asignada por pasar de $[l_2, l_3]$ a $[l_2, l_4]$. Pese a que en ambos casos se sube un estrato, el segundo caso está alejándose más de la precisión. Para dar forma a esta idea, aparece la β-penalización.

Aumentar de 2 a 3 términos lingüísticos se penaliza con $1+\alpha+\beta$, y aumentar de 3 a 4 términos con $1+\alpha+2\beta$. Para modelizar esta $\beta-$penalización se introduce a continuación una nueva función $\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida como

$$\rho(a, b) = \frac{(a + b - 3)\,|a - b|}{2}.$$

Téngase en cuenta que $\rho(a, a+1) = a - 1$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Si se aplica dicha función ρ a los cardinales de las expresiones lingüísticas, se obtiene el número de veces que se debe usar la $\beta-$penalización. Por ejemplo, si se compara la expresión $[l_2, l_3]$, que se encuentra en el segundo estrato, con la expresión lingüística $[l_1, l_5]$, que está en el quinto estrato, se aumenta un total de tres estratos. Subir desde el segundo al tercer estrato es penalizado mediante β, subir del tercero al cuarto estrato es penalizado 2β y subir del cuarto al quinto estrato es penalizado 3β. Sumando todas las $\beta-$penalizaciones el resultado es $\beta + 2\beta + 3\beta = 6\beta$ o, usando la función ρ,

$$\beta\rho(\#[l_2, l_3], \#[l_1, l_5]) = \beta\rho(2, 5) = \beta\frac{(2 + 5 - 3)\,|2 - 5|}{2} = 6\beta.$$

A continuación se introduce la familia de métricas parametrizadas que aglutina la métrica geodésica y las penalizaciones mencionadas.

Proposición 11 *Para cualesquiera* $\alpha, \beta \geq 0$*, la función* $d : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$d(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{cases} d_G(\mathcal{E}, \mathcal{F}) + \alpha \mid \#\mathcal{E} - \#\mathcal{F} \mid + \beta\, \rho(\#\mathcal{E}, \#\mathcal{F}), & si\ \ \#\mathcal{E} + \#\mathcal{F} > 3, \\ d_G(\mathcal{E}, \mathcal{F}) + \alpha \mid \#\mathcal{E} - \#\mathcal{F} \mid, & si\ \ \#\mathcal{E} + \#\mathcal{F} \leq 3 \end{cases}$$

es una métrica, y se denomina métrica asociada a (α, β).

Demostración: Véase Falcó *et al.* [22] o el capítulo 2 de esta tesis.

La Figura 4.4 muestra las distancias entre expresiones lingüísticas contiguas, para $g = 5$. Para calcular distancias que no sean contiguas sólo es necesario sumar las distancias entre uno de los recorridos más cortos para llegar de una a la otra.

Observación 5 Algunos valores de α y β pueden llevar a resultados no deseados. Por ejemplo, si $\alpha > 1$, se obtiene $d(l_4, l_5) = 2 < 1 + \alpha = d([l_4, l_5], l_5)$. De manera análoga, si $\alpha + \beta > 1$, el resultado es $d([l_3, l_4], l_5) = 3 + \alpha < 2 + 2\alpha + \beta = d([l_3, l_5], l_5)$. Para evitar estas paradojas, se deben imponer algunas condiciones a los valores de α y β (véase Falcó *et al.* [22] o el capítulo 2 de esta tesis).

Si $d : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la métrica asociada a (α, β), entonces los valores válidos de α y β son aquéllos que verifican $(\alpha, \beta) \in T_g$, donde el triángulo T_g viene dado por:

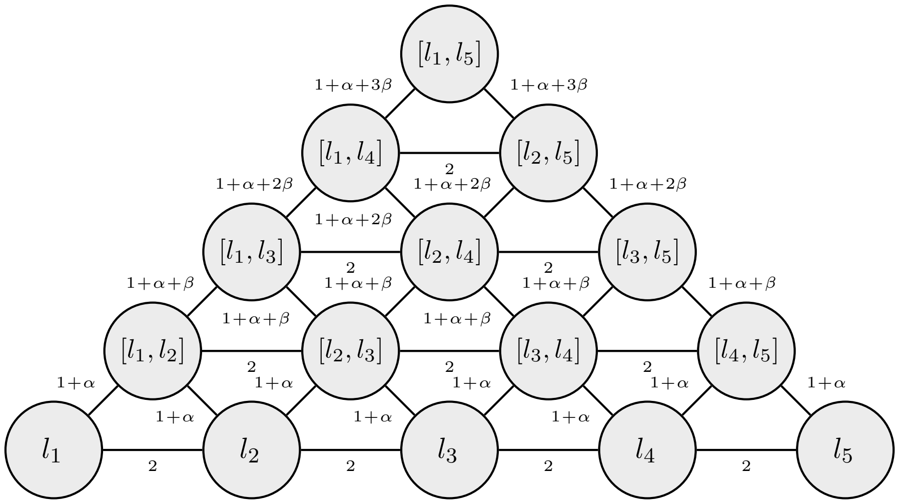

Figura 4.4: Representación de la métrica asociada a (α, β) para $g = 5$.

- Si g es impar

$$T_g = \left\{ (\alpha, \beta) \in [0, \infty)^2 \mid \alpha + \frac{1}{2}\beta(g-1) < \frac{1}{g-2} \right\}.$$

- Si g es par

$$T_g = \left\{ (\alpha, \beta) \in [0, \infty)^2 \mid \alpha + \frac{1}{2}\beta(g-2) < \frac{1}{g-1} \right\}.$$

4.4 La elección del licitante ganador

Sea $v_i^{t,p} \in \mathbb{L}$ la expresión lingüística otorgada por el evaluador $p \in I$ en el criterio $c_t \in C$ a la alternativa $x_i \in X$. Para cada uno de los criterios c_t, existe un *perfil* $\boldsymbol{v}^t$, representado por una matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{L}$

$$\boldsymbol{v}^t = \begin{pmatrix} v_1^{t,1} & \cdots & v_i^{t,1} & \cdots & v_n^{t,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{t,p} & \cdots & v_i^{t,p} & \cdots & v_n^{t,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{t,m} & \cdots & v_i^{t,m} & \cdots & v_n^{t,m} \end{pmatrix}.$$

El conjunto de todos los perfiles posibles se denota por $\mathbb{V}$.

A partir de un perfil para cada uno de los criterios, el objetivo final consiste en lograr una ordenación de los proyectos presentados a una licitación.

4.4.1 Caso 1: un solo criterio

Este primer caso hace referencia a un concurso público sencillo. Existe un conjunto de proyectos X que licitan a un contrato con la Administración. Los proyectos son valorados por un conjunto de expertos I, mediante un único criterio c_1, $C = \{c_1\}$. Cada experto otorga una única expresión lingüística a cada proyecto.

Todas las propuestas se ordenan de manera que, un proyecto será preferido a otro si la suma de distancias de todas las valoraciones otorgadas por los expertos para ese proyecto a la expresión lingüística "ideal", es menor. La etiqueta l_g es considerada como la expresión lingüística ideal, ya que es la expresión más alta y más precisa que se puede otorgar. La distancia se calcula mediante la métrica asociada a (α, β) previamente fijada.

Bajo estas condiciones es fácil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 12 *Dados $\alpha, \beta \geq 0$ y la métrica d asociada a (α, β), la relación binaria $\succcurlyeq$ en X, que se define como*

$$x_i \succcurlyeq x_j \;\Leftrightarrow\; \sum_{p=1}^{m} d\left(v_i^{1,p}, l_g\right) \leq \sum_{p=1}^{m} d\left(v_j^{1,p}, l_g\right),$$

es un orden débil sobre X.

4.4.2 Caso 2: varios criterios

A continuación se analiza el caso en el que existen varios criterios a valorar. De nuevo, existe un conjunto de expertos I valorando un conjunto de proyectos X. En esta licitación existen varios criterios ($r > 1$) que deben ser tomados en cuenta. Por tanto, cada experto evalúa el total de los proyectos asignando una expresión lingüística a cada proyecto según cada criterio. Se considera que un proyecto es preferido a otro si la suma de distancias de las valoraciones otorgadas por los expertos para ese proyecto y para cada uno de los criterios a la etiqueta "ideal" l_g es menor. Es fácil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 13 *Dados $\alpha, \beta \geq 0$ y la métrica d asociada a (α, β), la relación binaria $\succcurlyeq$ en X, que se define como*

$$x_i \succcurlyeq x_j \;\Leftrightarrow\; \sum_{t=1}^{r}\sum_{p=1}^{m} d\left(v_i^{t,p}, l_g\right) \leq \sum_{t=1}^{r}\sum_{p=1}^{m} d\left(v_j^{t,p}, l_g\right),$$

es un orden débil sobre X.

4.4.3 Caso 3: varios criterios con distinta ponderación

Las licitaciones públicas son contratos realizados para un bien o servicio concreto. Respondiendo a las necesidades de cada uno de ellos, los criterios que se valoran varían, así como también lo hace su importancia. Por tanto, es común que cada criterio posea un peso diferente en la valoración final. Por ejemplo, es posible que el criterio 'calidad' posea una importancia del $50\,\%$, el de 'garantía' del $30\,\%$ y la 'facilidad para encontrar repuestos' del $20\,\%$. Dado que cada criterio tiene un peso diferente en la valoración final, la regla de decisión debe adecuarse a esta realidad.

En este caso se considiera un conjunto de expertos I, valorando un conjunto de criterios C, con $r > 1$, para un conjunto de licitantes X. Además, el conjunto de criterios tiene asociado un vector de pesos $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_r) \in [0,1]^r$ tal que $w_1 + \cdots + w_r = 1$, que se corresponde con la ponderación de cada uno de esos criterios en la valoración final. De esta manera, al criterio c_1 le corresponde un peso w_1, al criterio c_2 le corresponde un peso w_2, y así sucesivamente hasta c_r, al que le corresponde un peso w_r. De nuevo, es sencillo demostrar la siguiente proposicion.

Proposición 14 *Dados $\alpha, \beta \geq 0$, la métrica d asociada a (α, β) y un vector de pesos $(w_1, \ldots, w_r)$ asociado a los criterios, la relación binaria $\succcurlyeq$ en X, que se define como*

$$x_i \succcurlyeq x_j \;\Leftrightarrow\; \sum_{t=1}^{r} w_t \left(\sum_{p=1}^{m} d\left(v_i^{t,p}, l_g\right)\right) \leq \sum_{t=1}^{r} w_t \left(\sum_{p=1}^{m} d\left(v_j^{t,p}, l_g\right)\right),$$

es un orden débil sobre X.

Obsérvese que, si en esta relación se otorga el mismo peso a todos los criterios, la ordenación que se obtiene es la misma que la resultante bajo el caso 2; no así los valores absolutos, que serán mayores en el caso anterior.

4.4.4 Otros casos posibles

Hasta ahora se han presentado tres casos con características propias de los contratos públicos. Aunque no se van a presentar en profundidad, existen otros dos casos que merece la pena mencionar.

Es posible que los expertos que valoran los proyectos no tengan la misma importancia en el proceso de decisón. Si se quiere dar un mayor énfasis a la valoración de algunos miembros de la comisión, se puede asignar un peso a cada experto. De esta manera, si quisiera darse una mayor importancia al presidente que a uno de los vocales, sólo sería necesario otorgar un valor mayor al peso del presidente en dicho vector.

Otro caso interesante es aquél en el que los expertos que forman la comisión lo son tan sólo en algunos de los criterios, siendo menos importante su opinión en el resto de criterios. Pese a que el proceso incluye una penalización a la imprecisión, y por tanto se espera que aquéllos que no son expertos asignen expresiones lingüísticas menos precisas, puede ser interesante combinar los procesos de ponderación de pesos en criterios y de ponderación de pesos en expertos. Para ello, se asigna un peso para cada experto en cada criterio. Esto otorga flexibilidad incluso para dar un valor nulo a algún experto para algún criterio concreto.

Supóngase, por ejemplo, una licitación en la que uno de los criterios a valorar es el 'impacto mediambiental'. Para valorar este criterio, uno de los agentes que componen la comisión es un experto en características medioambientales. Sin embargo, este experto no posee los conocimientos para valorar otros criterios como podrían ser el 'componente estético' o la 'calidad'. Por tanto, es interesante que su valoración en dicho criterio medioambiental sea muy alta y que sea baja en el resto de criterios. Así pues, para este agente, los valores en la matriz de pesos serán bajos o incluso nulos para todos los criterios, menos para el criterio medioambiental, para el que el peso será alto.

4.5 Ejemplo ilustrativo

En esta sección se muestra un ejemplo donde se calculan los tres posibles casos presentados en la sección anterior, para diferentes valores de α y β.

Ejemplo 19 Sea $I = \{1, 2, 3\}$ el conjunto de tres expertos que han de valorar dos proyectos, $X = \{x_1, x_2\}$. Cada proyecto se valora en tres criterios diferentes $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ mediante el conjunto de expresiones lingüísticas $\mathbb{L}$ asociado al conjunto de términos lingüísticos $L = \{l_1, \ldots, l_5\}$, con el significado presentado en el Cuadro 4.1.

Supóngase un contrato que tiene por objeto la ejecución del servicio de enseñanza en idiomas inglés y francés para el personal del Cuerpo General Administrativo del Ministerio de Asuntos Exteriores. Los criterios que se van a valorar se describen a continuación:

- Criterio c_1: Calidad de los profesores: titulaciones, conocimientos, años de experiencia, etc.
- Criterio c_2: Realización de actividades paralelas a la enseñanza, que favorezcan el aprendizaje.
- Criterio c_3: Calidad de los recursos informáticos: rapidez de la página, variedad de contenidos, facilidad en el manejo, entorno, viabilidad de diferentes navegadores, etc.

Los tres expertos a los que se ha encargado la evaluación de los proyectos según estos tres criterios tienen habilidades muy diferentes. El primer experto pertenece a la Dirección General de Relaciones Bilaterales con Países de la Unión Europea y posee grandes conocimientos sobre los dos primeros criterios. El segundo experto pertenece a la Subsecretaría de Asuntos Exteriores y también es competente en la valoración de los dos primeros criterios. El tercer experto pertenece al Servicio Informático y, pese a su menor conocimiento de los dos primeros criterios, es un especialista en el tercer criterio. De esta forma, los dos primeros expertos podrán ser más precisos en los primeros criterios, pudiendo ser imprecisos en el tercero; y el tercer experto podrá no asignar valores muy precisos en los primeros criterios, pero será capaz de valorar de forma precisa en el tercero.

Las valoraciones otorgadas a los proyectos para cada criterio, se incluyen en los Cuadros 4.2, 4.3 y 4.4.

	x_1	x_2
1	l_4	l_3
2	$[l_2, l_3]$	l_2
3	$[l_2, l_4]$	$[l_2, l_5]$

Cuadro 4.2: Valores c_1.

	x_1	x_2
1	$[l_3, l_4]$	l_4
2	$[l_4, l_5]$	l_5
3	$[l_1, l_5]$	$[l_1, l_4]$

Cuadro 4.3: Valores c_2.

	x_1	x_2
1	$[l_1, l_3]$	$[l_1, l_4]$
2	$[l_3, l_5]$	$[l_2, l_5]$
3	$[l_3, l_4]$	l_4

Cuadro 4.4: Valores c_3.

Ahora se analiza el ejemplo, desde los diferentes casos propuestos en la sección 4.4. Durante todo el desarrollo se proponen dos valores de α y β para que se observe cómo se ve afectado el resultado, según la penalización que se quiera otorgar. Se analizarán dos penalizaciones diferentes:

- Opción A: $\alpha = 0,1$ y $\beta = 0,1$
- Opción B: $\alpha = 0,2$ y $\beta = 0,05$.

4.5.1 Caso 1: un solo criterio

Para poder tratar este caso, se calcula cuál sería el ganador en el caso que cada uno de los criterios fuese, por separado, el único criterio a valorar.

- *Ganador bajo el criterio* c_1
  Utilizando la distancia descrita en la Proposición 12 de la sección 4.4, donde sólo se valora el primer criterio (c_1), los resultados se muestran en el Cuadro 4.5.

	Opción A	Opción B
x_1	$11,4$	$11,65$
x_2	$13,6$	$13,75$
Ganador	x_1	x_1

Cuadro 4.5: Distancia a l_g para el caso 1 en el criterio c_1.

  Como se puede observar, las distancias a l_5 en ambos proyectos son menores para x_1 que para x_2. Por consiguiente, tanto en la Opción A, como en la B, el orden resultante es $x_1 \succ x_2$.

- *Ganador bajo el criterio* c_2
  De nuevo, se considera un único criterio, en este caso c_2. Los resultados se muestran en el Cuadro 4.6. En esta ocasión, la distancia a l_5

	Opción A	Opción B
x_1	$9,2$	$9,5$
x_2	$7,6$	$7,75$
Ganador	x_2	x_2

Cuadro 4.6: Distancia a l_g para el caso 1 en el criterio c_2.

es menor para el proyecto x_2 en ambas opciones (A y B). La evaluación de los expertos, bajo estas condiciones, considera el proyecto x_2 superior al x_1.

- *Ganador bajo el criterio* c_3
  Ahora el único criterio que se va a tener en cuenta en la evaluación es el criterio c_3. Los resultados vienen descritos en el Cuadro 4.7. De nuevo, bajo los valores otorgados por los expertos, el valor de la

	Opción A	Opción B
x_1	$11,7$	$12,1$
x_2	$11,2$	$11,5$
Ganador	x_2	x_2

Cuadro 4.7: Distancia a l_g para el caso 1 en el criterio c_3.

distancia calculado para el proyecto x_2 es menor que el valor de la distancia calculado para x_1. El proyecto x_2 es preferido al proyecto x_1.

Por tanto, si sólo se utiliza un criterio como referencia para ordenar los proyectos presentados a la licitación, el proyecto x_1 es el ganador si se tiene en cuenta el primer criterio, y el proyecto x_2 es el vencedor si se evalúa mediante el segundo o el tercer criterio. Los resultados parecen razonables si se tiene en cuenta que, bajo el primer criterio, los tres expertos consideran mejor el proyecto x_1 que el x_2. En el segundo criterio dos expertos consideran mejor el proyecto x_2 y sólo un experto da una mejor valoración a x_1, y es aquél cuya precisión es menor (experto 3). Y, en el tercer criterio, dos expertos consideran mejor el proyecto x_2 al x_1 y un experto evalúa en el sentido contrario.

4.5.2 Caso 2: varios criterios

Como se ha observado hasta ahora, un proyecto es mejor en algunos criterios y el otro en otros. Ahora se van a valorar los proyectos de una forma global, teniendo en cuenta todos los criterios de manera simultánea. Para ello se utiliza la fórmula de la Proposición 13 presentada en la sección 4.4. Los resultados analizados para los valores de α y β de las opciones A y B se muestran en el Cuadro 4.8. En este caso, dependiendo de los valores de α y

	Opción A	Opción B
x_1	$32,3$	$33,25$
x_2	$32,4$	33
Ganador	x_1	x_2

Cuadro 4.8: Distancia a l_g para el caso 2.

β, el resultado varía. Eso demuestra que, dependiendo de la penalización que se quiera asignar a los valores más imprecisos, el resultado obtenido puede cambiar. Si se observa la penalización otorgada en cada proyecto, para el proyecto x_1, los expertos han asignado: en el primer estrato 1 valoración; en el segundo estrato 4 valoraciones, en el tercer estrato 3 valoraciones; y 1 valoración en el quinto estrato. Sumando la penalización total, el resultado es $13\alpha+9\beta$. Para el proyecto x_2 se han asignado 5 valoraciones en el primer estrato y 4 valoraciones en el cuarto estrato. Sumando la penalización, se obtiene $12\alpha+12\beta$. Dependiendo de los valores que se escojan, el orden puede ser distinto.

4.5.3 Caso 3: varios criterios con distinta ponderación

En el caso anterior se ha observado que tener en cuenta todos los criterios puede resultar en cualquier posible ordenación, dependiendo de los valores de α y β. Sin embargo, como se ha apuntado con anterioridad, en la realidad, algunos criterios son más importantes que otros. Se supondrá que los tres criterios tienen distinta importancia mediante tres ponderaciones diferentes.

- *Ponderación I:* $\boldsymbol{w} = (0{,}5\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}25)$.
  Esta ponderación supone que el primer criterio representa un $50\,\%$ de la calificación total y el segundo criterio y el tercer criterio representan un $25\,\%$ cada uno del valor total. La importancia que se asigna

a la calidad de los profesores es mayor que la que la licitación quiere otorgar a las actividades paralelas o a los recursos informáticos. Aplicando la Proposición 14, los resultados son los detallados en el Cuadro 4.9. En ambos casos, independientemente de la opción considerada, el

	Opción A	Opción B
x_1	$10,925$	$11,225$
x_2	$11,5$	$13,688$
Ganador	x_1	x_1

Cuadro 4.9: Distancia a l_g para el caso 3 con ponderación I.

proyecto x_1 tiene una distancia menor a la etiqueta ideal y, por tanto, se considera mejor que el proyecto x_2.

- *Ponderación II:* $\boldsymbol{w} = (0{,}25\,,\ 0{,}5\,,\ 0{,}25)$.
  Se asigna un valor del $25\,\%$ a la calidad de los profesores, un valor del $50\,\%$ a la realización de actividades paralelas y un $25\,\%$ a los recusos informáticos. Es decir, el segundo criterio tiene una importancia mayor para la elección que los otros dos criterios. El valor de las distancias calculadas a l_5 viene dado en el Cuadro 4.10. En esta ocasión, la

	Opción A	Opción B
x_1	$10,375$	$10,688$
x_2	10	$10,188$
Ganador	x_2	x_2

Cuadro 4.10: Distancia a l_g para el caso 3 con la ponderación II.

  distancia a l_5 es menor para el proyecto x_2, tanto en los valores de α y β de la Opción A, como en los de la Opción B. La evaluación de los expertos, bajo estas condiciones, considera el proyecto x_2 superior al x_1.

- *Ponderación III:* $\boldsymbol{w} = (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5)$.
  Cuando la importancia que se le quiere dar a los recursos informáticos supone un $50\,\%$ del valor total y la referente a los criterios de calidad de los profesores y las actividades paralelas suponen un $25\,\%$ del total cada uno, los resultados se pueden observar en el Cuadro 4.11. De nuevo, bajo los valores otorgados por los expertos, el valor de la distancia calculado para el proyecto x_2 es menor que el valor de la distancia calculado para x_1. Según la fórmula presentada en la Proposición 14

	Opción A	Opción B
x_1	$11,7$	$12,1$
x_2	$11,2$	$11,5$
Ganador	x_2	x_2

Cuadro 4.11: Distancia a l_g para el caso 3 con la ponderación III.

y con la ponderación sugerida, el proyecto x_2 es el vencedor, indistintamente de si los valores de α y β son los de la Opción A o los de la Opción B.

Como se ha podido observar, si el valor que se quiere establecer para cada uno de los criterios varía, el resultado también cambia en consecuencia. En este ejemplo, y comparándolo con lo obtenido en el caso 1, se puede apuntar que, dado que el valor total es similar (caso 2), cuando se da una mayor importancia al criterio c_1 (en el que el proyecto x_1 era el ganador), el resultado final es que el proyecto x_1 es mejor que el proyecto x_2. De manera análoga, cuando se da una mayor importancia a los criterios c_2 o c_3, donde el resultado favorecía al proyecto x_2, dicho proyecto es ordenado por encima del proyecto x_1.

4.6 Conclusiones y trabajo futuro

Los procesos de contratación que realizan las Administraciones Públicas mediante licitaciones es un tema de gran importancia y relevancia en la sociedad actual. Varios problemas referentes a su evaluación y adjudicación se han puesto de manifiesto en diferentes ámbitos, en las instituciones públicas que los regulan, los tribunales donde se presentan numerosos recursos o en el propio entorno científico. En este capítulo se ha propuesto un método que intenta resolver uno de los problemas detectados: la valoración de los criterios que no son evaluables de manera automática y requieren de juicios de valor.

Mediante la adecuación de trabajos previos (véanse Falcó *et al.* [23, 22]) a las características propias de la contratación pública, se desarrolla un proceso de decisión que presenta varias ventajas. El método permite la utilización de términos lingüísticos, en vez de números, que aporta una mayor comodidad a los evaluadores. Además permite la posibilidad de utilizar expresiones lingüísticas, consistentes en varios términos lingüísticos consecutivos, que da una mayor libertad a los expertos e incluye un componente de imprecisión en el modelo.

El proceso de decisión consiste en la suma de distancias al término lingüístico "ideal" de cada una de las valoraciones de los expertos, mediante una métrica que posee dos parámetros que penalizan la imprecisión de las valoraciones. El proceso se ha completado mediante diferentes casos, aplicables dependiendo de las características de la licitación: un solo criterio, varios criterios o varios criterios con ponderación diferente.

Durante todo el capítulo se ha hecho referencia a los criterios subjetivos de una licitación. No hay que olvidar, sin embargo, que los procesos de contratación pública tienen otro componente de valoración mediante criterios objetivos o, dicho de otro modo, cuya evaluación se realiza mediante una fórmula matemática. No se ha presentado una forma de aunar ambos tipos de valoraciones. Debido a que un tipo de valoración se está llevando a cabo en términos lingüísticos y el otro en términos numéricos, una forma de lidiar con esto sería llevar ambas valoraciones a un terreno común. Una vez realizado el orden de las valoraciones en los criterios subjetivos, se podría otorgar un valor numérico acorde a ese orden; o de forma contraria, se podría buscar un equivalente lingüístico de las calificaciones obtenidas en los criterios objetivos. A este respecto, los trabajos de Herrera-Viedma *et al.* [34] y Martínez *et al.* [42] sobre información heterogénea, resultan un buen punto de partida.

Debido a la compejidad del caso de las licitaciones, otros aspectos interesantes han sido dejados de lado. Entre ellos, la posibilidad de trabajar con escalas con diferente número de términos para cada criterio, se presenta como un trabajo futuro a considerar. Además, en numerosas ocasiones los expertos deben evaluar con escalas cuyos términos positivos son más numerosos que los términos negativos. En este sentido, es importante señalar que Herrera *et al.* [32] analizaron el problema de trabajar con escalas no equilibradas con un método basado en los modelos de 2-tuplas de representación lingüística difusa (Herrera y Martínez [33]).

Pese a que el método propuesto no descarta los empates, no sería necesario proponer un proceso de desempate, ya que la propia ley prevé en estos casos que los órganos de contratación pueden señalar en los pliegos la preferencia en la adjudicación para las proposiciones de empresas que tengan en su plantilla un número de trabajadores con discapacidad superior al 2 %, siempre que igualen sus términos desde el punto de vista de los criterios que sirvan de base para la adjudicación. El proceso permite también señalar la preferencia en la adjudicación en caso de subsiguientes empates (véase Disposición adicional cuarta del TRLCSP [1]).

Conclusiones

En esta tesis se han presentado tres sistemas de votación diferentes y una aplicación a las licitaciones públicas, todos ellos con una característica común: los votantes valoran las alternativas mediante términos lingüísticos tales como 'excelente', 'muy bueno', 'malo', etc. Estos sistemas permiten a los agentes expresar sus opiniones de una manera más adaptada a la forma en que las personas declaran de forma habitual su parecer.

El primer sistema presentado extiende el procedimiento de Juicio Mayoritario mediante distancias entre términos lingüísticos calculadas a traves de métricas parametrizadas de Minkowski. Así se consigue incluir, además del Juicio Mayoritario, el sistema de Range Voting y, lo más interesante, puede buscarse una valoración colectiva que se encuentre entre la mediana (resultado del Juicio Mayoritario) y la media (resultado de Range Voting). Estas valoraciones intermedias consiguen disminuir la presencia de algunos problemas causados por esos procedimientos como son la sensibilidad a los valores extremos propia de la media, o la insensibilidad hacia el resto de valores en la mediana.

En los capítulos 2 y 3 de la tesis se han presentado dos sistemas de votación que permiten a los agentes no sólo valorar las alternativas con términos lingüísticos, sino que además pueden asignar expresiones lingüísticas formadas por varios términos lingüísticos consecutivos. Dar cabida a ese tipo de evaluaciones acerca los sistemas de votación a la realidad. Cuando los agentes se ven obligados a decantarse por un único término lingüístico, los resultados pueden diferir en gran medida de aquéllos en los que se les permite expresarse con una mayor libertad.

El sistema presentado en el capítulo 2 desarrolla una forma de elección que penaliza el uso de expresiones lingüísticas frente al de términos lingüísticos. Se considera que, si bien debe permitirse la expresividad de los agentes, la opinión de un agente que es capaz de ser preciso debe ser tenida en cuenta con más importancia que la opinión de otro que no lo tiene claro a la hora de valorar. La penalización se lleva a cabo mediante dos parámetros y cada uno de ellos recoge una idea diferente de penalización. El primero considera una penalización igual por cada aumento de un término lingüístico en la expresión, mientras que el segundo tiene en cuenta que, cuantos más términos se utilicen, mayor es la penalización que debe suponer cada término adicional. Al poder escoger los valores de los parámetros, se puede adecuar el sistema a cada situación.

Por el contrario, el sistema presentado en el capítulo 3 no se preocupa del uso de un mayor o menor número de términos lingüísticos, sino que determina el conjunto de expresiones lingüísticas que representan de forma colectiva las opiniones individuales para cada alternativa. Además, el proceso de desempate consigue que no se consideren equivalentes dos alternativas a menos que posean exactamente las mismas valoraciones. En el capítulo se analizan también varias propiedades del sistema desde el marco de la Teoría de la Elección Social, que demuestran las cualidades del procedimiento.

En el último capítulo se tiene en cuenta la propuesta realizada en el capítulo 2, adaptada al caso particular de las licitaciones públicas. Como se ha comentado anteriormente, los contratos con el Sector Público poseen una gran importancia monetaria, social y política. Las buenas prácticas en su evaluación son un objetivo que debería buscarse y tenerse en cuenta. Por tanto se debe investigar para encontrar soluciones a los problemas detectados, más aún si dichos fallos se aprecian de manera recurrente. Por ese motivo se propone una forma de evaluación de los criterios subjetivos que recoge la imprecisión inherente a esos criterios, no sólo mediante el uso de términos lingüísticos, sino también mediante la posibilidad de que los expertos se expresen mediante varios términos lingüísticos consecutivos. Se ha adaptado el sistema para recoger las características propias del proceso, considerando los diferentes casos: cuando sólo se evalúa un criterio o cuando se evalúan varios, ya sea con la misma o con distinta ponderación. Por tanto, el sistema se convierte en una alternativa al modelo actual, al subsanar varios de los problemas detectados.

Dada la complejidad de los problemas analizados en esta tesis, todavía existen muchas líneas abiertas con las que trabajar.

En todos los sistemas presentados se utilizan escalas lingüísticas equilibradas (con el mismo número de términos positivos que negativos) y cuyos términos considerados son equidistantes. En un trabajo futuro puede resultar de interés proponer un modelo cuya escala tuviese un mayor número de términos positivos que negativos, como suele encontrarse a menudo en casos reales. A este respecto resulta interesante el trabajo de Herrera *et al.* [32] que analizan el problema de trabajar con escalas no equilibradas con un método basado en los modelos de representación lingüística difusa basados en 2-tuplas (Herrera y Martínez [33]).

Además, una ampliación para escalas cuyos términos no son equidistantes podría resultar provechosa, no sólo por la valoración en sí misma, sino porque sería un buen punto de partida para encontrar una valoración común en entornos que utilicen diferentes escalas para cada criterio. A este fin, se contempla la posibilidad de crear una "macro-escala" que permita representar el resto de escalas como una proyección sobre ella. En este sentido resulta de interés el tratamiento de Huynh y Nakamori [35] sobre agregación de asignaciones lingüísticas.

Otro tema que resulta de interés es permitir valoraciones cuantitativas y cualitativas y aunar ambos tipos de valoraciones. A este respecto, los trabajos de Herrera-Viedma *et al.* [34] y Martínez *et al.* [42] sobre información heterogénea resultan un buen punto de partida. En Herrera *et al.* [31] puede verse una amplia y reciente revisión de diversos métodos de tratamiento de información lingüística para la toma de decisiones.

Sería conveniente además profundizar en el estudio de los sistemas de votación presentados. En este sentido, resultaría adecuado analizar qué propiedades adicionales cumplen los sistemas y cómo pueden mejorarse, tanto en el marco de la Elección Social, como en el de los Operadores de Agregación. Además, sería lógico hacer una comparación más extensa entre éstos y otros sistemas de votación existentes, en especial, un análisis más profundo respecto al Juicio Mayoritario. Tambíen podría resultar de interés realizar análisis empíricos de diversa naturaleza.

Concluding remarks

In this thesis three different voting systems and an application to the allocation of public tenders have been presented, all of them with a common feature: voters can assess the alternatives through linguistic terms such as 'excellent', 'very bad', 'bad', etc. These systems allow agents to express their opinions in a way similar to that which they are accustomed to use in their daily lives.

The first system introduced is a Majority Judgment-extension system through distances between linguistic terms based on parameterized Minkowski metrics. Besides Majority Judgment, this means that it is also possible to include another system called Range Voting and, what it is more interestingly, a collective assessment can be sought between the median (Majority Judgment result) and the mean (Range Voting result). These intermediate assessments can reduce the problems related to the procedures in question, such as the sensitivity to outliers typical of the mean or the blindness of the remaining values typical of the median.

Chapters 2 and 3 of the thesis present two voting systems which allow agents to assess the alternatives not only through linguistic terms but through linguistic expressions created by several consecutive linguistic terms. Admitting such assessments brings voting systems closer to observed reality. When agents are forced to opt for a single linguistic term, the results may differ widely from those obtained when they are allowed to express themselves more freely.

Chapter 2 presents an election system which penalizes the use of longer expressions as opposed to single linguistic terms. It is considered that even though agents should be allowed to express themselves, the opinion of an agent who is able to be precise must be taken more into account with higher intensity than that of one who is unsure about which rating to award. The penalty is applied by means of two parameters, each of which covers a different idea of the penalization. The first applies the same penalty for each additional linguistic term in the linguistic expression, while the second applies a penalty that becomes harsher the more terms are used. Since it is possible to chose the values of the parameters, the system can be adjusted to each different situation.

By contrast, the system presented in Chapter 3 is no concerned about how many linguistic terms are used, instead, it considers the set of linguistic expressions which collectively represent the individual opinions for each alternative. Moreover, the tie-breaking process prevents two different alternatives from being considered equivalent unless they both posses exactly the same assessments. Some properties of the system are also analyzed in the context of the Social Choice framework, showing the qualities of the procedure.

The last chapter takes into account the proposal in Chapter 2 and adapts it to the particular case of public tenders. As mentioned in a previous chapter, contracts with the public sector are hugely important in monetary, social and political terms. Good assessment practices practices should be sought and taken into account as an objective. Therefore, research must be conducted to find solutions for the problems detected, especially if those problems are found recurrently. For this reason, a procedure for assessing subjective criteria that takes into account the imprecision typical of such criteria is proposed. This system not only allows agents to express themselves through linguistic terms but also offers the possibility for experts to express themselves through several consecutive linguistic terms. The system is adapted to cover the features of the process itself, considering the different cases: when a single criterion is assessed and when there are several criteria, whether the criteria possess the same weight in the final rating or if their weights differs. Hence, the system appears as an alternative to the current model which does away with some of the problems detected.

Given the complexity of the problems analyzed in this thesis, there are several lines of research where more work could be done.

In all the systems presented the linguistic scales used are balanced (with equal numbers of positive and negative terms) and the terms considered terms are equispaced. In future work it might be interesting to propose a model with different numbers of positive and negative terms in the scale, as is usually the case in reality. In this regard, the work of Herrera *et al.*

[32] could be of interest: they analyze the problem of non-balanced scales with a procedure based on linguistic hierarchies and 2-tuple fuzzy linguistic representation (see Herrera and Martínez [33]).

Moreover, an extension to scales whose terms are not equidistant could be useful, not only for the assessment itself but because it could be a good starting point for finding common assessments in environments with different scales for each criterion. To that end, the possibility of creating a 'macro-scale' which allows the remaining scales to be projected onto it is considered. In this way, the treatment introduced by Huynh and Nakamori [35] concerned with linguistic assessment aggregation, could be of interest.

Another topic of possible interest would be a system where qualitative and quantitative assessments were allowed and it could be combined. In this regard the papers by Herrera-Viedma *et al.* [34] and Martínez *et al.* [42] on heterogeneous information are a good starting point. See Herrera *et al.* [31] for a board, recent review of various methods of processing linguistic information in decision making problems.

It would be advisable to study the voting systems presented in greater depth. In this regard, it might be useful to analyze what other properties the systems fulfil and how they can be improved, in the frameworks of both Social Choice and Aggregation Operators. It would also be logical to compare these and other systems in a more extensive way, and especially to conduct an in-depth analysis comparing them with Majority Judgment. It would also be interesting to conduct empirical analyses of different kinds.

Bibliografía/Bibliography

[1] España. Real Decreto Legislativo 3/2011, de 14 de noviembre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Contratos del Sector Público. Boletín Oficial del Estado, de 16 de noviembre de 2011, no. 276, p. 117729.

[2] Jurisprudencia del Tribunal de Justicia de las Comunidades Europeas en Materia de Contratación Pública, European Institute of Public Administration. `http://www.eipa.eu/en/pages/show/&tid=114`.

[3] Tenders electronic daily, Versión en línea del "Suplemento al Diario Oficial de la Unión Europea", dedicado a la contratación pública europea. `http://www.ted.europa.eu`.

[4] España. Tribunal de Cuentas. No. 942. Informe de fiscalización de la contratación celebrada durante el ejercicio 2008 por las entidades del Sector Público Estatal sometidas a la legislación de contratos con las Administraciones Públicas. `http://www.tcu.es/uploads/I942.pdf`, 2012.

[5] España. Tribunal de Cuentas. No. 955. Informe de fiscalización de la contratación celebrada durante el ejercicio 2009 por las entidades estatales que, de acuerdo a la Ley de Contratos del Sector Público, tienen la consideración de Administraciones Públicas. `http://www.tcu.es/uploads/I955.pdf`, 2012.

[6] N. Agell, G. Sánchez, M. Sánchez, and F.J. Ruiz. Selecting the best taste: a group decision-making application to chocolates design. *Proceedings of the 2013 IFSA-NAFIPS Joint Congress, Edmonton*, pages 939–943, 2013.

[7] N. Agell, M. Sánchez, F. Prats, and L. Roselló. Ranking multi-attribute alternatives on the basis of linguistic labels in group decisions. *Information Sciences*, 209: 49–60, 2012.

[8] K.J. Arrow. *Social Choice and Individual Values.* John Wiley and Sons, Nueva York, 2 edition, 1963.

[9] N. Baigent. Twitching weak dictators. *Journal of Economics*, 47: 407–411, 1987.

[10] M. Balinski and R. Laraki. Election by Majority Judgement: Experimental Evidence. *Ecole Polytechnique – Centre National de la Recherche Scientifique*, 2007(28), 2007.

[11] M. Balinski and R. Laraki. The Majority Judgement. `http://ceco.polytechnique.fr/judgement-majoritaire.html`, 2007.

[12] M. Balinski and R. Laraki. A theory of measuring, electing and ranking. *Proceedings of the National Academy os Sciences of the United States of America*, 104: 8720–8725, 2007.

[13] M. Balinski and R. Laraki. Judge: Don't Vote! *Ecole Polytechnique – Centre National de la Recherche Scientifique*, 2010(27), 2010.

[14] M. Balinski and R. Laraki. Election by Majority judgement: Experimental evidence, in: B. Dolez, B. Grofman and A. Laurent (eds.). *In Situ and Laboratory Experiments on Electoral Law Reform: French Presidential Elections*, Springer: 13–54, 2011.

[15] M. Balinski and R. Laraki. *Majority Judgment. Measuring, Ranking, and Electing.* The MIT Press, Cambridge MA, 2011.

[16] S.J. Brams and P.C. Fishburn. Approval Voting. *American Political Science Review*, 72: 831–847, 1978.

[17] S.J. Brams and P.C. Fishburn. *Approval Voting.* Birkhäuser, 1983.

[18] T.H. Chen. An economic approach to public procurement. *Journal of Public Procurement*, 8: 407–430, 2008.

[19] J.C. de Borda. *Mémorie sur les élections au scrutin.* Historie de l' Academie Royale des Sciences, Paris, 1781.

[20] E. Falcó and J.L. García-Lapresta. Aggregating individual assessments in a finite scale. World Conference on Soft Computing. San Francisco, 2011.

[21] E. Falcó and J.L. García-Lapresta. A distance-based extension of the Majority Judgement voting system. *Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics*, 18: 17–27, 2011.

[22] E. Falcó, J.L. García-Lapresta, and L. Roselló. Aggregating imprecise linguistic expressions, in: P. Guo and W. Pedrycz (eds.). *Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences*, Springer-Verlag, Berlin: ISBN 978–3–642–39306–8, 2013.

[23] E. Falcó, J.L. García-Lapresta, and L. Roselló. Allowing agents to be imprecise: A proposal using multiple linguistic terms. *Information Sciences*, Forthcoming.

[24] D.S. Felsenthal and M. Machover. The Majority Judgement voting procedure: a critical evaluation. *Homo Oeconomicus*, 25: 319–334, 2008.

[25] J.L. García-Lapresta. A general class of simple majority decision rules based on linguistic opinions. *Information Sciences*, 176: 352–365, 2006.

[26] J.L. García-Lapresta, B. Llamazares, and M. Martínez-Panero. A social choice analysis of the Borda rule in a general linguistic framework. *International Journal of Computational Intelligent Systems*, 3: 501–513, 2010.

[27] J.L. García-Lapresta and M. Martínez-Panero. Linguistic-based voting through centered OWA operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8: 381–393, 2009.

[28] J.L. García-Lapresta, M. Martínez-Panero, and L.C. Meneses. Defining the Borda count in a linguistic framework. *Information Sciences*, 179: 2309–2316, 2009.

[29] J.L. García-Lapresta and D. Pérez-Román. Measuring consensus in weak orders, in: E. Herrera-Viedma, J.L. García-Lapresta, J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi and S. Zadròzny (eds.). *Consensual Processes, STUDFUZZ*, Springer-Verlag, Berlin: 213–234, 2011.

[30] C. Gini. *Variablilità e Mutabilitità.* Tipografia di Paolo Cuppini, Bologna, 1912.

[31] F. Herrera, S. Alonso, F. Chiclana, and E. Herrera-Viedma. Computing with words in decision making: foundations, trends and prospects. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8: 337–364, 2009.

[32] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(2): 354–370, 2008.

[33] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8: 746–752, 2000.

[34] F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166: 115–132, 2005.

[35] V.D. Huynh and Y. Nakamori. A satisfactory-oriented approach to multiexpert decision- making with linguistic assessments. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybenetics*, 35: 184–196, 2005.

[36] C.L Hwang and K. Yoon. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[37] J. Kacprzyk and S. Zadrożny. Computing with words in decision making: through individual and collective linguistic choice rules. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9 (Suppl.): 89–102, 2001.

[38] E. Kalai, E. Muller, and M.A. Satterthwaite. Social welfare functions when preferences are convex, strictly monotonic and continuous. *Public Choice*, 34: 89–97, 1979.

[39] J.F. Laslier. And the loser is... plurality voting, in: D.S. Fesenthal and M. Machover (eds.). *Electoral Systems: Paradoxes, Assumptions, and Procedures*, Springer-Verlag, Berlin: 327–351, 2012.

[40] J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, and G. Zhang. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making. *Intenational Journal of Approximate Reasoning*, 44(2): 165–181, 2007.

[41] L. Martínez and F. Herrera. An overview on the 2-tuple linguistic model for computing with words in decision making: Extensions, applications and challenges. *Information Sciences*, 207: 1–8, 2012.

[42] L. Martínez, J. Liu, D. Ruan, and J.B. Yang. Dealing with heterogeneous information in engineering evaluation processes. *Information Sciences*, 177: 1533–1542, 2007.

[43] B. Monjardet. Mathèmatique sociale and mathematics. a case study: Condorcet's effect and medians. *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, 4, 2008.

[44] H. Nurmi. Voting theory, in: D. Ríos-Insua and S. French (eds.). *e-Democracy. A Group Decision and Negotiation Perspective. Advances in Group Decision and Negotiation*, Springer, Berlin: 213–234, 2010.

[45] W. Pedrycz. *Granular Computing: Analysis and Design of Intelligent Systems.* CRC Press/Francis Taylor, Boca Raton, 2013.

[46] R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic terms sets for decision making. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 20(1): 109–119, 2012.

[47] R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets. *Information Sciences*, 241: 28–42, 2013.

[48] L. Roselló, F. Prats, N. Agell, and M. Sánchez. Measuring consensus in group decision by means of qualitative reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning*, 51: 441–452, 2010.

[49] L. Roselló, F. Prats, N. Agell, and M. Sánchez. A quality reasoning approach to measure consensus, in: E. Herrera-Viedma, J.L. García-Lapresta, J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi and S. Zadrȯzny (eds.). *Consensual Processes, STUDFUZZ*, Springer-Verlag, Berlin: 235–261, 2011.

[50] L. Roselló, F. Prats, N. Agell, M. Sánchez, and F.A. Mazaira. Using consensus and distances between generalized multi-attribute linguistic assessments for group decision-making. *Information Fusion*, in press, doi:10.1016/j.inffus.2011.09.001.

[51] A.K. Sen. Quasi-transitivity, rational choice and collective decisions. *Review of Economic Studies*, 36: 381–393, 1969.

[52] W.D. Smith. On Balinski and Laraki's Majority Judgement median-based range-like voting scheme. `http://rangevoting.org/MedianVrange.html`, 2007.

[53] Y. Tang and J. Zheng. Linguistic modelling based on semantic similarity relation among lingusitic labels. *Fuzzy Sets and Systems*, 157: 1662–1673, 2006.

[54] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6): 529–539, 2010.

[55] Y. Travé-Massuyès and P. Dague, editors. *Modèles et Raisonnements Qualitatifs Hermes Science.* Paris, 2003.

[56] Y. Travé-Massuyès and N. Piera. The orders of magnitude models as qualitative algebras. Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Detroit, 1989.

[57] T.S. Wallsten, D.V. Budescu, A. Rapoport, R. Zwick, and B. Forsyth. Measuring the vague meanings of probabaility terms. *Journal of Experimental Psychology*, 115: 348–365, 1986.

[58] A. Weber. *Äber den Standort der Industrien. Erster Teil: Reine Theorie des Standorts.* Tübingen: Verlad JCB Mohr, 1909.

[59] E.W. Weisstein. Fermat points. mathworld–a wolfram web resource. `http://mathworld.wolfram.com/FermatPoints.html`.

[60] R.B. Wilson. Social choice without the pareto principle. *Journal of Economic Theory*, 5: 14–20, 1972.

[61] R.R. Yager. Centered OWA operators. *Soft Computing*, 11: 631–639, 2007.

[62] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. part I, II, III. *Information Science*, 8-9: 199–249, 301–357, 44–80, 1975.

[63] L.A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4: 103–111, 1996.

[64] L.A. Zadeh. *Computing with Words.* Springer-Verlag, Berlin, 2012.

[65] M.A. Zahid. *A New Framework for Elections.* Ph D Dissertation, Tilburg, 2012.

[66] A.C. Zimmer. Verbal vs. numerical processing of subjective probabilities, in: R.W. scholz (ed.). *Decision Making under Uncertainty*, North-Holland, Amsterdam: 159–182, 1983.