Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Una introducción a la teoría de representaciones unitarias de grupos localmente compactos

Autor: Carles Manuel Martorell Argemí

Tutores: Fernando Gómez Cubillo, Mariano A. del Olmo, María Antonia Lledó

Resumen

Este texto forma parte del Trabajo conjunto de Fin de Grado para la doble titulación de Física y Matemáticas cuyo objetivo principal es el estudio de las representaciones unitarias del grupo de Poincaré, pilar fundamental de la Teoría Física de Campos, y centra su atención en un tipo particular de ellas, las representaciones de espín continuo.

En esta primera parte se presenta una introducción a la teoría general de representaciones unitarias de grupos localmente compactos. Se establece así el marco teórico para el estudio detallado del grupo de Poincaré que se realizará en la segunda parte.

Índice

Índice de cuadros

Este texto forma parte del Trabajo conjunto de Fin de Grado (TFG) para la doble titulación de Física y Matemáticas (UVa). A pesar de ser un trabajo conjunto la evaluación exige dividirlo en dos partes: una correspondiente a la Parte de Matemáticas, *Una introducción a la teoría de representaciones unitarias de grupos localmente compactos*, y otra a la Parte de Física, *Representaciones de espín continuo del grupo de Poincaré.*

El objetivo principal de este trabajo conjunto es el estudio de las representaciones unitarias del Grupo de Poincaré, pilar fundamental de la Relatividad Einsteiniana, la Mecánica Cuántica Relativista y las Teorías de Campos, y centra la atención en un tipo particular de ellas, las representaciones de espín continuo. La primera parte del trabajo, que se corresponde al TFG del Grado de Matemáticas, presenta una introducción a la teoría general de representaciones unitarias de grupos localmente compactos. Se establece en ella el marco teórico para el estudio detallado del grupo de Poincaré que se realizará en la segunda parte del trabajo, correspondiente al TFG del Grado de Física.

1. Introducción

1.1. Origen y caracterización del problema. La Teoría de Representaciones

El objeto de estudio de esta teoría es la noción de **representación** de un grupo. Dado un grupo, una representación no es más que un homomorfismo entre este grupo y un conjunto de operadores sobre un espacio de Hilbert. La importancia de esta teoría se basa en la conexión que ofrece entre la Teoría de Operadores y la Teoría de Grupos: permite reducir problemas con operadores a sus equivalentes en grupos. Un ejemplo de ello es la conexión del grupo de Poincaré con el conjunto de simetrías espacio-temporales, que se tratará en la segunda parte de este trabajo conjunto.

La Teoría de Representaciones es por tanto un campo de estudio de gran contenido e infinidad de aplicaciones tanto en Matemáticas como en Física. En este texto solo se introducen las nociones fundamentales para tratar la teoría de **representaciones unitarias** de **grupos localmente compactos** y particularizar los resultados a grupos **abelianos**, **compactos** y, someramente, a **grupos y álgebras de Lie**. La Teoría de Representaciones de grupos localmente compactos puede entenderse como la generalización de la teoría previa, restringida a grupos particulares (compactos o abelianos), desarrollada de manera global en 1950 por G. W. Mackey [1, 2, 3].

Para el propósito de este trabajo, interesa desarrollar los resultados que permitan obtener las representaciones unitarias del grupo de interés. Para fijar ideas, sobre grupos compactos y abelianos se tienen resultados que apuntan en esta dirección: permiten descomponer representaciones unitarias del grupo en representaciones irreducibles (Teorema de Plancherel, Teorema de Peter-Weyl, ...). Sin embargo, para grupos localmente compactos que no son ni abelianos ni compactos (como es el caso del grupo de Poincaré o del grupo Euclídeo) no se tienen resultados tan potentes y debe abordarse por otra vía. La manera de abordar dicho problema es a través de la teoría de **representaciones inducidas** debida a G.W. Mackey, y conocida modernamente como *Mackey's Machine* (o Método de Mackey), que establece una técnica constructiva para obtener las representaciones de estos grupos a través de subgrupos más simples. No obstante, solo se tiene una construcción completa para un tipo muy particular de grupos, los constituidos como *productos semidirectos.* A pesar de la apariencia restrictiva de este conjunto tan particular, los grupos de interés entran dentro de esta clasificación.

En **conclusión**, el objetivo de este trabajo es el estudio de las **representaciones unitarias** para **grupos localmente compactos** y sus particularizaciones (grupos compactos, abelianos, grupos de Lie y la técnica inductiva) con la intención de obtener resultados que ayuden a clasificar las representaciones unitarias. Todo ello establecerá la base teórica para trabajar con ejemplos particulares, y en última instancia, con el grupo de Poincaré.

Una vez cerrada la caracterización del problema conviene introducir algunas notas históricas que darán contexto y perspectiva a la teoría tratada.

Notas históricas

Los primeros esbozos de la Teoría de Representaciones datan entorno a la primera década del siglo pasado. F. G. Frobenius (1900) y F. Schur (1910) estudian los **grupos finitos** siendo esta una teoría puramente algebraica; el estudio de los grupos de Lie compactos data de la década de 1920 de la mano de H. Weyl y F. Schur. Se puede afirmar que la teoría moderna de representaciones de **grupos compactos** es debida a H. Weyl, quien obtiene las representaciones para grupos arbitrarios y su propia versión de la fórmula de Plancherel (conocido como Teorema de Peter-Weyl). No obstante, la extensión de la teoría a un conjunto más general de grupos, los **grupos localmente compactos**, no se pudo realizar hasta la demostración de A. Haar (1933) de la existencia de una medida invariante sobre este conjunto de grupos [5]. La extensión de los resultados previos se adapta de manera natural a la nueva teoría de grupos localmente compactos; sin embargo, sin la condición de compacidad la descomposición de las representaciones unitarias se produce de forma continua en representaciones irreducibles infinito-dimensionales. [3, 4].

Por otro lado, para **grupos abelianos** localmente compactos también se puede construir una teoría completa de representaciones. Las representaciones unitarias descomponen como representaciones irreducibles unidimensionales, los **carácteres de la representación**. El estudio de la Teoría de Carácteres se desarrolla de manera definitiva por L. S. Pontrjagin [6] en la década de los años 30 que toma forma como teoría análoga a la Teoría de Fourier.

Respecto a los grupos localmente compactos **no conmutativos y no compactos**, se ha de mencionar los primeros estudios importantes: el texto de 1939 de E. P. Wigner [7] y los trabajos de I. Gelfand y D. Raikov en 1947. E. P. Wigner consigue clasificar las representaciones del grupo de Poincaré a través de la construcción de representaciones inducidas para el ”grupo pequeño” o *little group* del grupo. Esta técnica utiliza la noción de **Sistema de Imprimitividad**, o *Sistem of imprimitivity*, que constituye el núcleo central del proceso inductivo. G. W. Mackey [1, 2, 3] explota esta idea y logra desarrollar una metodología para abordar la clasificación, bajo ciertas circunstancias, de las representaciones unitarias de los grupos localmente compactos (*Mackey's Machine*).

1.2. Contenido del trabajo

Este trabajo está divido en dos partes: la primera §2 *Fundamentos de la Teoría de Representaciones* introduce las nociones básicas de la teoría de representaciones para grupos localmente compactos y sus particularizaciones; en la segunda parte §3 *Aplicaciones* se dan varios ejemplos que condensan la teoría anterior. Más en concreto, dentro de la primera sección se tratan las siguientes nociones:

1. En la primera subsección §2.1 *Grupos localmente compactos: primeras definiciones*, se dan las definiciones y propiedades básicas sobre **grupos localmente compactos**, que son el objetivo de estudio durante todo el trabajo. Se introduce además la **medida de Haar**, medida invariante bajo la acción del grupo, que es pilar fundamental para el desarrollo de la teoría de representaciones. En los últimos párrafos se trabajan conceptos más técnicos que ayudarán en las siguientes secciones. Se ha seguido el texto de Folland [10, §2] y Deitmar [13, §6] para elaborar el contenido principal de la sección, apoyado con alguna anotación del texto de Varadarajan [4] para la parte de espacio homogéneos y el artículo de Pedersen [5] para la existencia y unicidad de la medida de Haar.

2. En §2.2 *Nociones básicas sobre representaciones unitarias*, se introducen las nociones básicas sobre representaciones unitarias de grupos localmente compactos. Se dan las definiciones de representaciones unitarias, representaciones irreducibles y subrepresentaciones. Se dan resultados que afirman que toda representación unitaria puede descomponerse como suma directa de representaciones unitarias e irreducibles (Proposición 2.37 y Definición 2.36). El **Lema de Schur** 2.41 será el resultado principal, que toma el papel de herramienta fundamental a la hora de trabajar con representaciones unitarias e irreducibles. En este apartado la el texto principal es el libro de Folland [10, §3] apoyado por el libro de Tung [11, §3].

3. Una vez introducida la teoría básica de representaciones unitarias de grupos localmente compactos se particulariza para distintos tipos de grupos: §2.3 *grupos abelianos localmente compactos*, §2.4 *grupos compactos* y §2.5 *grupos de Lie*.

   Los **grupos abelianos localmente compactos** se caracterizan por tener representaciones irreducibles y unitarias unidimensionales (en virtud del Lema de Schur) que son conocidas como **carácteres**. El conjunto de carácteres, el **grupo dual**, posee estructura de grupo localmente compacto. El estudio de los carácteres toca dos ideas fundamentales: la **dualidad** entre el grupo abeliano y el grupo dual (Teorema de Pontrjagin 2.50 y la dualidad compacto-discreto 2.49) y la generalización de la **Teoría de Fourier** a grupos abelianos, conocida también como Análisis Armónico. Esta subsección se apoya en el capítulo 3 de Deitmar [13, §3] y en Folland [10, §4], con alguna nota del libro de Rudin [17] para la Teoría Espectral.

   Respecto a los **grupos compactos**, se prueba que toda representación unitaria descompone como suma directa de representaciones irreducibles finito-dimensionales (Teorema 2.58). El resultado principal de este apartado es el **Teorema de Peter-Weyl** 2.66 que establece que el conjunto de representaciones unitarias e irreducibles forma base ortonormal del espacio de funciones $L^2(G)$ sobre el grupo, además da una descomposición de la representación natural por traslación por izquierda o derecha del grupo. En esta parte se ha utilizado el capítulo 7 de Deitmar [13, §7] y el capítulo 5 de Folland [10, §5].

   En el apartado dedicado a **grupos de Lie** se introduce de manera sucinta la teoría de grupos y álgebras de Lie y la vinculación entre ambas (la construcción del álgebra para un grupo de Lie a través del espacio de campo de vectores –Proposición 2.77–). Se particulariza el estudio para los **grupos matriciales de Lie**, que son subgrupos cerrados de $GL(n;\mathbb{C})$ grupo de matrices invertibles $n \times n$. Se estudian los ejemplos más comunes: $SL(n;\mathbb{C})$, $SL(n;\mathbb{R})$, $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ y $SO(n)$.

Este apartado servirá como base para tratar los grupos compactos de la sección §3, $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(2)$ y el grupo localmente compacto, grupo Euclídeo. Este apartado se ha apoyado en el texto de Hall [14] para grupos matriciales de Lie, en el libro de Lee [20] para abordar la construcción del álgebra sobre campos de vectores y el libro de Gilmore [16] para trabajar con los ejemplos particulares e introducir la conexión con la Física. Algunas anotaciones provienen del libro de Knapp [19].

4. Por último, en la subsección §2.6 *Representaciones inducidas* se introduce la **técnica de representaciones inducidas**, teoría utilizada para grupos localmente compactos que no son ni abelianos ni compactos. En un primer apartado se tratará la idea general de inducción, esto es, la obtención de representaciones unitarias del grupo a partir de subgrupos más pequeños. A continuación, se presenta un resultado fundamental sobre grupos compactos, el **Teorema de Reciprocidad de Frobenius** 2.89, que históricamente motivó la obtención de representaciones inducidas para grupos localmente compactos. Finalmente, se restringe el estudio a grupos que son *productos semidirectos*. En este caso, se puede obtener una caracterización completa de todas las representaciones unitarias e irreducibles en función de representaciones inducidas respecto al *grupo pequeño* (Teorema 2.99). Esta técnica forma parte de la teoría conocida como Método de Mackey. Conviene notar que dada la dificultad de esta teoría, que necesita del desarrollo de Sistemas de Imprimitividad, solo se enuncian los resultados sin demostración.

   El texto fundamental para este apartado es el capítulo 6 de Folland [10, §6] donde se presenta de manera extensa todos estos resultados. En particular, algunas notas del Método de Mackey han sido obtenidas del texto de Varadarajan [4]; el contenido del Teorema de Reciprocidad de Frobenius proviene de Deitmar [13, §7]. Para profundizar en el estudio de Sistemas de Imprimitividad se deja como referencia los dos primeros libros, [10] y [4], o los textos originales de Mackey [1, 2, 3].

   Este último apartado es el de mayor importancia puesto que ofrece la técnica para obtener las representaciones inducidas del grupo Euclídeo y del grupo de Poincaré. El texto de Folland [10, §6.7] trabaja sobre ambos ejemplos.

La aplicación práctica de todo ello se desarrolla en la segunda sección §3. Esta sección está ordenada en dos partes, grupos compactos ($SO(2)$, $SU(2)$ y $SO(3)$) y el grupo Euclídeo. El orden de estudio es el siguiente:

1. El grupo $SO(2)$, debido a su naturaleza abeliana, se descompone en carácteres $\{e^{im\theta} : m \in \mathbb{Z}\}$. Esta descomposición no es más que la Serie de Fourier del Análisis Real para el intervalo $[0, 2\pi]$.

2. En segundo lugar se trabaja con los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ siguiendo la metodología estándar: se obtienen las representaciones irreducibles y unitarias del grupo $SU(2)$ (*armónicos esféricos* en la literatura Física) y se llevan a $SO(3)$ bajo la acción adjunta. Esta aplicación pone de manifiesto la cualidad de $SU(2)$ como recubridor universal de $SO(3)$, hecho fundamental para la Física debido a su relación con el espín de partículas. Por otro lado, se demuestra que estas representaciones son base ortonormal de $L^2(\mathbb{S}^3)$ (aplicación del Teorema de Peter-Weyl). Esta parte se basa en las notas de Folland [10, §5.4] y Deitmar [13, §7] así como el libro de Hall [14].

3. En último lugar, y como cierre del trabajo, se clasifican todas las representaciones unitarias e irreducibles del Grupo Euclídeo a través de la Máquina de Mackey. La resolución de este

grupo es interesante por dos motivos: por un lado, sirve de ejemplo como aplicación de la técnica de representaciones inducidas a través de los grupos pequeños $SO(n)$; por otro lado, introduce la interpretación física que motiva el estudio del Grupo de Poincaré. En definitiva, será el modelo a seguir para el estudio de este grupo.

La deducción matemática de este último apartado sigue las líneas de Folland [10, §6.7] apoyado con el capítulo 9 de Tung [11, §9]. Para la interpretación física y la conexión con el grupo de Poincaré se ha consultado el segundo texto de Folland [12, §4.4], el texto de Weinberg [15] como fundamento para la física de campos y el libro de Sakurai [18] para las referencias a la Mecánica Cuántica. El artículo de Bekaert [9] introduce el papel del grupo $E(2)$ como grupo pequeño del grupo de Poincaré.

El siguiente paso se dará en el TFG del grado en Física. En él se empezará con el estudio en profundidad del grupo de Poincaré y la clasificación de sus representaciones unitarias e irreducibles. Una vez obtenida esta clasificación el objetivo pasará a ser el estudio de una de ellas, la representación de *espín continuo*. Conviene notar,

- El grupo de Poincaré se construye como producto semidirecto de traslaciones y transformaciones de Lorentz sobre el espacio de Minkowski. El estudio de las representaciones inducidas utiliza un argumento similar al del grupo Euclídeo: se clasifican las órbitas en función de la métrica. Los grupos pequeños son el grupo Euclídeo, $SO(3)$, y el grupo de Lorentz homogéneo. Por tanto, será necesario apoyar el estudio en el trabajo realizado tanto en las secciones §2 como en §3.
- Otro punto importante es la interpretación física de cada órbita y cada representación inducida; interpretación ya tratada en el grupo Euclídeo y que toma mayor profundidad en el grupo de Poincaré (como muestra en sus artículos Bekaert [9, 22] o en el artículo original de Wigner y Bargmann [8]) . En efecto, este es el motivo principal del estudio del grupo: cada representación inducida está relacionada con una ecuación de onda de partícula física. Esta relación entre Física (Relatividad Especial y Mecánica Cuántica) con la Teoría de Representaciones se tratará en este segundo trabajo.

Este trabajo se ha apoyado en gran medida en el texto de Folland [10] y Deitmar [13]. No obstante, en la introducción de cada apartado se señala convenientemente la bibliografía particular utilizada.

1.3. Notación

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotan respectivamente al conjunto de los números naturales, enteros, reales y complejos.

Para la Teoría de Grupos se utilizarán letras mayúsculas G, H para denotar los grupos y minúsculas $x, y, z, g, ...$ para los elementos de los grupos. Las letras mayúsculas $\mathcal{H}, \mathcal{M}$ denotan espacios de Hilbert; y siempre que no se diga lo contrario, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno, $\| \cdot \|$ la norma asociada y $| \cdot |$ el valor absoluto.

Espacio de funciones

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida positiva, con X conjunto y $\mathcal{B}$ σ-álgebra sobre el conjunto. Para $1 \leq p < \infty$, se define el conjunto $\mathcal{L}^p(X)$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

De la misma manera, $\mathcal{L}^\infty(X)$ es el espacio de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{c > 0 : \exists N \subset X \text{ medida nula tal que } |f(X\backslash N)| \leq c\} < \infty.$$

Si $\mathcal{N}$ denota al conjunto de funciones medibles y nulas (es decir, aquellas funciones f tales que $f(X\backslash N) = 0$, para N conjunto de medida nula), se define el espacio $L(X)^p$ como

$$L(X)^p = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{N}.$$

De este modo, $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ es espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. En particular, $L^2(X)$ es espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x),$$

donde $\overline{g}$ denota el conjugado complejo de g y μ medida sobre X.

Por otro lado, se denota el espacio vectorial de funciones continuas sobre X por $\mathcal{C}(X)$, el espacio de funciones acotadas y continuas sobre X por $\mathcal{BC}(X)$, el espacio de funciones continuas de soporte compacto, $\mathcal{C}_C(X)$; y el espacio de funciones infinitamente diferenciables por $\mathcal{C}^\infty(X)$. Sobre $\mathcal{BC}(X)$ se puede tomar la norma $\|f\|_{\text{sup}} = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, bajo el nombre de norma del supremo, que dota de estructura de Banach a $\mathcal{BC}(X)$.

2. Fundamentos de la Teoría de Representaciones.

2.1. Grupos localmente compactos: primeras definiciones

En esta subsección se introducen las nociones básicas para trabajar con los grupos localmente compactos y sus representaciones. En un primer apartado se presenta la definición y primeras propiedades de grupos topológicos y grupos localmente compactos. Posteriormente se define una medida invariante sobre los grupos topológicos, la medida de Haar, que tomará un papel fundamental en la construcción de representaciones. La función modular y la acción del grupo darán conceptos técnicos a la hora de trabajar con las representaciones inducidas.

Grupos localmente compactos

Definición 2.1. Un **grupo topológico** es un grupo G equipado con una topología bajo la cual las operaciones del grupo son continuas. Estas operaciones son

$$G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto xy$$

$$G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$$

Comentario 2.2 (**Notación**)**.** En un grupo topológico G se denota al **elemento unidad** como 1. Además, para $A, B \subset G$ y $x \in G$, se definen los siguientes conjuntos:

$$Ax = \{ax : a \in A\},\ xA = \{xa : a \in A\},\ A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\} \text{ y } AB = ab : a \in A,\ b \in B$$

Además se dice que $A \subset G$ es **simétrico** si $A = A^{-1}$.

Proposición 2.3 (**Propiedades de grupos topológicos**)**.** *Sea G un grupo topológico,*

1. *Si U es abierto, entonces xU, Ux y U^{-1} son abiertos para todo $x \in G$. Y si A es también abierto, entonces AU y UA es abierto para la topología de G.*
2. *Para todo entorno U de la unidad existe un entorno simétrico V de 1 tal que $VV \subset U$.*
3. *Si H es subgrupo de G su clausura $\overline{H}$ también lo es.*
4. *Todo subgrupo abierto de G es cerrado.*
5. *Si A, B son conjuntos compactos de G, AB también es compacto.*

Demostración. Todos los puntos anteriores se comprueban de manera inmediata bajo las definiciones previas y la continuidad de $(x, y) \mapsto xy$ y $x \mapsto x^{-1}$. $\square$

Comentario 2.4 (**Notación y definiciones sobre grupos y topología**). Las definiciones y resultados topológicos y de grupos se extienden de manera natural a grupos topológicos. Se considera G grupo topológico,

- Sea $H \subset G$ subgrupo. Entonces, se denota por G/H al **espacio cociente** de G sobre H; es decir, las clases laterales denotadas por xH con $x \in G$. De este modo, se escribe $q : G \longrightarrow G/H$ la aplicación cociente. Y se impone, además, la topología cociente sobre G/H: $U \subset G/H$ es abierto si, y solo si, $q^{-1}(U)$ es abierto en G.
- Se dice que $H \subset G$ es **subgrupo normal** si es subgrupo de G y además verifica: para todo $h \in H$, y para cualquier $x \in G$, el conjugado $x^{-1}hx \in H$.
- G es **grupo localmente compacto** si la topología asociada es localmente compacta; es decir, si para todo punto $x \in G$ y todo entorno V del punto existe un $K \subset V$ compacto que contenga al punto.

Sin pérdida de generalidad, todo grupo localmente compacto se toma además como Hausdorff. La siguiente proposición da idea de este convenio.

Proposición 2.5. *Sea G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo. Se verifica:*

1. *Si H es cerrado, G/H es Hausdorff.*
2. *Si G es localmente compacto, también lo es G/H.*
3. *Sea H normal, G/H es grupo topológico.*

Demostración. Las propiedades anteriores se demuestran con argumentos estándar de topología junto a las propiedades previas. □

Si G es grupo localmente compacto pero no es Hausdorff se puede redefinir G con la asociación con $G/\overline{\{1\}}$. Por ser $\overline{\{1\}}$ trivialmente normal a G y cerrado, $G/\overline{\{1\}}$ es grupo localmente compacto y Hausdorff.

Proposición 2.6. *Sea G un grupo localmente compacto. Existe un subgrupo $H \subset G$ que es abierto, cerrado y es unión numerable de conjuntos compactos (σ-**compacto**)*

Demostración. Por ser localmente compacto, se puede escoger U como entorno compacto y simétrico de la unidad. Se define $U_1 = U,\ U_2 = UU, ..., U_n = U...U$ (n - factores). Entonces, la unión $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ es subgrupo de G. En efecto, si $x, y \in H$, $xy \in H$ por ser cada uno producto finito de elementos de U; por otro lado, por ser U simétrico U_n también lo es y por tanto $x^{-1} \in H$ y $1 \in H$.

De manera inductiva, por ser U abierto, $U_2 = UU$ es abierto (Propiedades 2.3); y si U_n es abierto, de la misma manera es U_{n+1} abierto. Finalmente, H es abierto por ser unión numerable de abiertos. Ahora bien, ya que es subgrupo abierto es también cerrado. Con un razonamiento similar, U_n es compacto por ser U compacto. Finalmente, H es σ-compacto por ser unión numerable de compactos. □

Ejemplo 2.7 (Traslación por izquierda o derecha). Sea G grupo topológico y $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ función. Se define la **traslación por izquierda o por derecha** como, respectivamente,

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x) \text{ y } R_y f(x) = f(xy), \text{ para } x, y \in G. \tag{1}$$

Ambos son homomorfismos de grupo $y \longmapsto R_y$ y $y \longmapsto L_y$ entre G y el conjunto de operadores que trabajan sobre el espacio de funciones. Para ver este detalle basta escribir, $L_y L_z f(x) = L_y[L_z f](x) = L_z f(y^{-1}x) = f((yz)^{-1}x) = L_{yz} f(x)$. De la misma manera se prueba para R_y.

Este homomorfismo tomará el papel de una *representación* para grupos localmente compactos (Ejemplo 2.38) y será la forma natural de construir representaciones sobre el espacio de funciones del grupo.

Medida de Haar

Sea X un espacio topológico. Se considera la σ-álgebra $\mathcal{B}$ definida como la menor σ-álgebra sobre X que contiene todos los conjuntos abiertos. Este conjunto recibe el nombre de **σ-álgebra de Borel** sobre X y es la manera natural de dotar a X de estructura medible. Todo elemento de $\mathcal{B}$ se conoce como **conjunto Borel**.

Se define una **medida de Borel** como una medida en $(X, \mathcal{B})$ dada por $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$. Esta medida es **localmente finita** si para cualquier punto $x \in X$ existe un entorno $U \subset X$ tal que $\mu(U) < \infty$.

Definición 2.8. Una medida Borel μ localmente finita sobre $(X, \mathcal{B})$ es **medida de Radon** (o medida externa de Radon) si verifica,

- (*Regular exterior*): Para todo $A \in \mathcal{B}$,

$$\mu(A) = \inf_{A \subset U} \{\mu(U)\} \text{ tal que } U \in \mathcal{B}.$$

- (*Débilmente regular interior*): Para todo $A \in \mathcal{B}$ abierto o tal que $\mu(A) < \infty$,

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \{\mu(K)\} \text{ siendo } K \text{ compacto en } \mathcal{B}.$$

Los grupos localmente compactos pueden ser equipados con medidas de Radon; para ello, basta considerar la σ-álgebra Borel sobre la topología del grupo. Los párrafos siguientes se centran en un caso particular de medida sobre estos grupos, la medida invariante o medida de Haar.

Definición 2.9. Sea G grupo localmente compacto. Una **medida de Haar por izquierda (derecha)** sobre el grupo G es una medida de Radon μ no nula sobre G que verifica

$$\mu(xE) = \mu(E)$$

$$(\text{respectivamente } \mu(Ex) = \mu(E))$$

para todo $E \subset G$ conjunto Borel y cualquier $x \in G$.

Dicho de otra manera, una medida de Haar es una medida de Radon **invariante por traslación** del grupo.

Si $\mathcal{C}_C^+(G)$ es el grupo de funciones continuas de soporte compacto y positivas, la proposición siguiente da una caracterización muy útil para la medida de Haar.

Proposición 2.10. (Caracterización) *Sea μ una medida de Radon sobre G, grupo localmente compacto, y sea $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$. Entonces,*

1. *μ es una medida de Haar por la izquierda si y solo si lo es $\tilde{\mu}$ por la derecha*
2. *μ es medida de Haar por la izquierda si y solo si para todo $y \in G$ y toda función $f \in C_C^+(G)$ se verifica*
$$\int_G L_y f d\mu = \int_G f d\mu.$$

Demostración. La primera parte, (1), es inmediata: si se supone que μ es medida de Haar por la izquierda, entonces $\tilde{\mu}(Ex) = \mu(y^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \tilde{\mu}(E)$. Y se razona de la misma manera para su recíproco. Para la segunda parte, (2), si $f \in C_C^+(G)$

$$\int_G L_y f(x) d\mu(x) = \int_G f(y^{-1}x) d\mu(x) = \int_G f(z) d\mu(yz) = \int_G f d\mu_y$$

donde se ha definido $\mu_y(E) = \mu(yE)$. Esto último se puede comprobar aproximando f por funciones simples. Si la medida es medida de Haar, entonces $\mu_y = \mu$ y se obtiene el resultado. Si se tiene $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$, entonces por la unicidad del Teorema de Representación de Riesz [13, B.2.1] se verifica $\mu_y = \mu$. □

Teorema 2.11 (de existencia y unicidad de la medida de Haar). *Si G es grupo localmente compacto, entonces existe una medida de Haar sobre el grupo que es única salvo un factor multiplicativo positivo.*

Demostración. La demostración es estándar y se puede consultar en [13, Th. 1.3.4] junto a todas las notas y lemas. Debido a su extensión no se incluye en este texto. □

Comentario 2.12. En este punto hay que hacer una pequeña aclaración: en algunos textos (p. ej. [4]) se define un grupo localmente compacto como grupo dotado de una topología localmente compacta y Hausdorff (que es la condición dada en este texto) que además verifica el segundo axioma de numerabilidad. Siguiendo el libro de Folland [10] aquí no se ha añadido esta hipótesis. La razón de añadir o no dicha condición subyace en la demostración de la existencia y unicidad de la medida de Haar [5]. Se puede prescindir de este axioma si se utiliza el formalismo de la derivada de Radon-Nikodym junto con el Teorema de Fubini, válidos para espacios σ-compactos. En el caso de grupos localmente compactos se puede extender estos teoremas haciendo uso de la Proposición 2.6. Para ver los detalles consultar [10, §2.3]

Ejemplo 2.13 (**Medida de Haar sobre el grupo** $(\mathbb{R},+)$ **aditivo y el grupo** $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\times)$ **multiplicativo**)**.** Sobre el conjunto de los reales $\mathbb{R}$ se toma la integral de Lebesgue dx. Para $(\mathbb{R},+)$ la medida dx es invariante por traslación por izquierda/derecha. En efecto, para $f \in \mathcal{C}_C^+(\mathbb{R})$ e $y \in \mathbb{R}$ fijo,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y+x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(z)dz$$

donde se ha tomado el cambio de variable $z = y+x$. La demostración de la invarianza por la derecha se realiza de la misma manera. Es más, como se verá en el apartado siguiente, los grupos abelianos son *unimodulares*, y por tanto la medida de Haar por izquierda coincide con la medida invariante por derecha. Por otro lado, la medida $\frac{dx}{|x|}$ es invariante por traslaciones por izquierda/derecha del grupo $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\times)$. En efecto, para $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(yx)\frac{dx}{|x|} = \int_{\mathbb{R}} f(z)\frac{dz}{|z|}$$

donde se ha hecho el cambio de variable $z = yx$. Por ser grupo abeliano la medida invariante por derecha coincide con la medida de Haar por izquierda.

Ejemplo 2.14 (**Medida de Haar sobre un grupo equipado con variedad diferenciable**)**.** En este ejemplo se quiere tratar un caso muy particular de grupo topológico sobre el cual se puede definir una medida de Haar. En efecto, sea G un grupo topológico equipado con una variedad diferenciable (en §2.5 se tratará el caso particular de grupos de Lie). Si la variedad subyacente es un abierto de $\mathbb{R}^n$ la traslación por la izquierda puede darse como la aplicación afín

$$x \cdot y = A(x)y + b(x)$$

con $A(x)$ transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ y $b(x) \in \mathbb{R}^n$. La medida de Haar por la izquierda sobre el grupo se define como $|\det A(x)|^{-1}dx$, con dx medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$.

La demostración es sencilla, basta aplicar la caracterización anterior (Proposición 2.10) para la medida de Haar con esta traslación por la izquierda y utilizar el cambio de variable multidimensional para la integral.

Función modular

Sea G un grupo localmente compacto y sea μ una medida de Haar por izquierda. Para $x \in G$ se define la medida

$$\mu_x(E) = \mu(Ex), \text{ para todo } E \subset G \text{ conjunto Borel.}$$

Esta nueva medida es invariante por izquierda: $\mu_x(yE) = \mu([yE]x) = \mu(y[Ex]) = \mu_x(E)$ donde se ha utilizado la asociatividad del producto del grupo. No obstante, por la unicidad de la medida de Haar debe existir un número $\Delta(x) > 0$ tal que $\mu_x = \Delta(x)\mu$ y que además no depende de la elección inicial de la medida μ.

Definición 2.15. La función $\Delta : G \longrightarrow (0, \infty)$ se denomina **función modular** de G y verifica

$$\mu_x = \Delta(x)\mu.$$

Lema 2.16. *Sea G grupo localmente compacto. Para $p \in [1, \infty)$ y $f \in L^p(G)$ se tiene que las aplicaciones $f \mapsto L_y f$ y $f \mapsto R_y f$ son continuas de G a $L^p(G)$.*

Demostración. Se prueba primero para $f \in C_c(G)$, funciones continuas sobre G y de soporte compacto. Sea $\epsilon > 0$ y $K \subset G$ soporte compacto de f. Se escoge U_0 entorno de la unidad, simétrico y compacto. De este modo, para cada $y \in U_0$, el soporte de $L_y f$ está contenido en $U_0 K$. Para ello basta ver que si y es fijo, entonces $\text{sop}(L_y f) \subset yK$.

Sea $\delta > 0$, por ser f continua de soporte compacto existe un entorno de la unidad $U \subset U_0$ tal que para $xy^{-1} \in U$, $|f(x) - f(y)| < \delta$. Ahora bien,

$$|L_y f(x) - f(x)| = |f(y^{-1}x) - f(x)| < \infty$$

si $y^{-1} \in U$, o $y \in U$ debido a la simetría del conjunto. Se concluye que $\|L_y f - f\|_{\sup} < \delta$ para $y \in U$ bajo la norma del supremo en G. En particular, para la norma $\|\cdot\|_p$ en $L^p(G)$,

$$\|f - L_y f\|_p = \left(\int_G |f(y^{-1}x) - f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \delta \ \mu(U_0 K)^{1/p}$$

y basta tomar $\delta \equiv \epsilon/\mu(U_0 K)^{1/p}$ para probar el resultado para $f \in C_C(G)$. Para $f \in L^p(G)$ se puede escoger una función $g \in C_C(G)$ tal que $\|g - f\|_p < \epsilon/3$ (por la densidad de $C_C(G)$ en $L^p(G)$, [13, B.4.7], que sigue de manera sencilla a través del Lema de Uryshon para grupos localmente compactos [13, A.8.1]).

Sea U entorno de la unidad tal que $\|g - L_y g\|_p < \epsilon/3$, $\forall y \in U$. Entonces,

$$\|f - L_y f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - L_y g\|_p + \|L_y g - L_y f\|_p < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3.$$

La última acotación se consigue a través de la invarianza de la medida de Haar por la izquierda: $\|L_y f - L_y g\|_p = \|f - g\|_p$. De este modo se tiene demostrada la continuidad para la traslación L_y. Para probarlo para R_y se utilizaría el mismo argumento hasta llegar a la última desigualdad. En ella habría que hacer uso de la continuidad de la función modular, demostrada en la proposición siguiente a partir de la continuidad de L_y. $\square$

Proposición 2.17. *La función modular Δ es homomorfismo continuo de G en $(\mathbb{R}_+, \times)$, grupo multiplicativo de números reales y positivos. Es más, para una función f integrable en G,*

$$\int_G R_y f d\mu = \Delta(y^{-1}) \int_G f d\mu.$$

Demostración. Para ver que es homomorfismo se considera $x, y \in G$ y E conjunto Borel de G. Entonces,

$$\Delta(xy)\mu(E) = \mu(Exy) = \Delta(y)\mu(Ex) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(E).$$

Para probar la igualdad en la integral primero se demuestra para la función indicadora de un conjunto $E \subset G$, χ_E (χ_E verifica: $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$; y $\chi_E(x) = 0$ si no).

$$\int_G \chi_E(xy) d\mu(x) = \int_G \chi_{Ey^{-1}}(x) d\mu(x),$$

pero por definición de la medida de un conjunto, la integral anterior es igual a

$$= \mu(Ey^{-1}) = \Delta(y^{-1})\mu(E) = \Delta(y^{-1}) \int_G \chi_E(x)\mu(x).$$

Una vez demostrado para la función indicadora se puede extender el resultado para funciones f integrables. Bastaría con aproximar la función f por funciones simples.

Para la continuidad, se utiliza el lema previo 2.16: ya que la función $f \longrightarrow L_y f$ es continua, entonces la aplicación $G \longrightarrow \mathbb{C}: \ y \mapsto \int R_y f d\mu$ es continua deduciéndose así la continuidad de Δ debido a la igualdad de las integrales del enunciado. □

Corolario 2.18. *Sea G grupo localmente compacto. Si μ es medida de Haar por la izquierda y Δ función modular asociada, entonces*

$$\mu_r(E) = \int_E \Delta(z)^{-1} d\mu(z), \ \textit{para } E \subset G \textit{ Borel},$$

es medida de Haar por la izquierda de G.

Demostración. Sea χ_E la función indicatriz del conjunto E. Dado $x \in G$ fijo, a través de la proposición anterior, se verifica

$$\int_G \chi_E(zx)\Delta(z)^{-1} d\mu(z) = \int_G \chi_E(z)\Delta(z)^{-1} d\mu(z).$$

Esto no es más que $\int_E \Delta(z)^{-1} d\mu(z) = \int_{Ex^{-1}} \Delta(z)^{-1} d\mu(z)$. Por la definición de μ_r se tiene que $\mu_r(Ex) = \mu_r(E)$. □

Se dice que G es **grupo unimodular** si verifica que $\Delta \equiv 1$. Dicho de otra manera, si la medida de Haar por la izquierda coincide con la medida de Haar por la derecha: puesto que $\mu_x(E) = \mu(Ex) = \mu(E)$, la medida de Haar μ es invariante tanto por izquierda como por derecha.

Proposición 2.19 (Grupos unimodulares). *Los grupos localmente compactos y abelianos, los grupos discretos y los grupos compactos son unimodulares.*

Demostración. Un grupo localmente compacto y abeliano es unimodular de forma trivial: debido a la conmutación la medida de Haar por la izquierda coincide con la medida de Haar por la derecha. En segundo lugar, un grupo discreto G es localmente compacto y Hausdorff bajo la topología discreta. Además, dada una medida de Haar μ, $\mu(x) = 1 \; \forall x \in G$. Por la invarianza bajo traslación por la izquierda debe asignar a cada elemento del grupo la misma medida, además esta medida es única salvo por factor multiplicativo, por tanto, se puede asignar el valor 1 a cada elemento. Por tanto, definiendo la medida $\mu_x(y) = \mu(yx)$ esta asigna el mismo valor 1 a todos los elementos; basta aplicar el mismo argumento que antes. Luego $\mu_x = \mu$. Por último, para un grupo compacto G, por la continuidad de la función modular, $\Delta(G)$ es subgrupo compacto en $(\mathbb{R}_+, \times)$. Ahora bien, el único subgrupo compacto es $\{1\} \subset \mathbb{R}_+$. $\square$

Acción de un grupo

Definición 2.20. Sea G grupo localmente compacto y S espacio localmente compacto y Hausdorff. Se define una **acción** de G sobre S (por la izquierda) como una aplicación continua

$$\phi : G \times S \longrightarrow S : (x, s) \mapsto xs$$

y que verifica,

1. $\phi(x, \cdot\,) : S \longrightarrow S : s \mapsto xs$ es homeomorfismo de S para todo $x \in G$ fijo.
2. $x(ys) = (xy)s$, $\forall x, y \in G$ y $s \in S$.

Un espacio topológico S equipado con una acción del grupo G se llama **G-espacio**. Se dice que es **transitivo** si para todo $s, t \in S$ existe un $x \in G$ tal que $xs = t$.

El espacio cociente G/H, con $H \subset G$ subgrupo cerrado, representa un ejemplo estándar de un G-espacio transitivo donde la acción se define como multiplicación por la izquierda sobre las clases laterales. Es decir, la acción de $x \in G$ sobre un elemento $yH \in G/H$ está dada como $(xy)H$.

Definición 2.21. Un **espacio homogéneo** S es un G-espacio transitivo e isomorfo a un espacio cociente G/H para $H \subset G$ subgrupo cerrado.

Comentario 2.22. Los espacios homogéneos son el objeto de estudio en los párrafos que siguen. Cabe mencionar que la condición sobre estos espacios, que sean isomorfos a un espacio cociente, les concede una estructura muy rica en propiedades; no obstante, esta condición es muy restrictiva. Pese a ello, los grupos de interés como el grupo Euclídeo o el grupo de Poincaré poseen de forma natural espacios homogéneos (cocientes sobre el grupo de rotaciones o grupo de Lorentz, respectivamente).

Dado S un espacio homogéneo, se define una **medida de Radon G-invariante** sobre S como una medida μ de Radon que es invariante bajo la acción del grupo: para $E \subset S$ conjunto de Borel,

$$\mu(xE) = \mu(E), \quad \forall x \in G.$$

La cuestión es: ¿bajo qué condiciones se puede definir una medida G-invariante sobre S homogéneo? No siempre se podrá dotar de esta medida, a continuación se da un contraejemplo.

Ejemplo 2.23 (**Contraejemplo**)**.** Se considera la recta real $\mathbb{R}$ como espacio homogéneo respecto del grupo de transformaciones afines,

$$(a, b) : x \mapsto ax + b, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

No se puede dotar a $\mathbb{R}$ de una medida invariante por la acción del grupo.

Demostración. Demostrar que es espacio homogéneo es un ejercicio sencillo y estándar. Para ello se fija un elemento $x_0 \in \mathbb{R}$ y se define el estabilizador H como el conjunto de elementos del grupo que dejan invariante al elemento x_0. La peculiaridad de H reside en que es subgrupo cerrado del grupo. Por tanto, define un espacio cociente que presumiblemente es isomorfo al espacio homogéneo. Trabajando con las clases laterales se llega al isomorfismo.

Por otro lado, la medida de Lebesgue es la única medida sobre $\mathbb{R}$, salvo factor multiplicativo positivo, que es invariante por traslaciones $x \mapsto x+b$ (resultado del teorema de existencia y unicidad para la medida de Haar sobre $\mathbb{R}$ como grupo aditivo). Sin embargo, esta medida no es invariante por dilataciones de tipo $x \mapsto rx$ con $r \neq 0$. Para ello,

$$\int_{\mathbb{R}} f(rx)dx = \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}} f(y)dy$$

donde se ha utilizado el cambio de variable $y = rx$. Se concluye que no existe medida invariante en $\mathbb{R}$ bajo la acción del grupo de transformaciones afines. □

Aunque no se puede obtener una medida G-invariante para todo espacio homogéneo, sí que se puede dar una condición necesaria y suficiente para ello. En los demás casos, se puede dar un sustituto cuando la condición falla.

Para ver el primer caso, se considera G grupo localmente compacto, sea $H \subset G$ subgrupo cerrado con medida de Haar $d\xi$ por la izquierda. Se considera además $q : G \longrightarrow G/H$ aplicación cociente donde se denota $q(x) = xH$ como clase lateral perteneciente a G/H. Con la notación del apartado anterior, Δ_G y Δ_H denotan las funciones modulares para G y H.

Proposición 2.24. *Se define la aplicación* $P : C_C(G) \longrightarrow C_C(G/H)$ *dada por,*

$$[Pf](xH) = \int_H f(x\xi)d\xi$$

que es continua y sobreyectiva. Es decir, para $\phi \in C_C(G/H)$ *existe* $f \in C_C(G)$ *tal que* $Pf = \phi$ *y* $q(\mathrm{sop} f) = \mathrm{sop}\phi$*. Además, si* $\phi \geq 0$ *entonces* $f \geq 0$*. (Donde* $\mathrm{sop}(f)$ *denota el soporte de* f*).*

Demostración. Esta función está bien definida y no depende del representante de la clase: para $y = x\eta$, $\eta \in H$, entonces $\int_H f(y\xi)d\xi = \int_H f(x\eta)d\eta$ debido a la invarianza por traslación por la izquierda.

Por otro lado, la continuidad es evidente y $\mathrm{sop}(Pf) \subset q(\mathrm{sop} f)$. Además, si $\phi \in C(G/H)$, $P[(\phi \circ q)\ f] = \phi\ Pf$. En efecto,

$$\int_H (\phi \circ q)(x\xi)\ f(x\xi)d\xi = \phi(xH) \int_H f(x\xi)d\xi = (\phi\ [Pf])\,(xH).$$

Para probar la segunda parte hay que utilizar unos lemas previos.

Lema 2.25. *Sea* $E \subset G/H$ *compacto, entonces existe un compacto* $K \subset G$ *tal que* $q(K) = E$*.*

Demostración. Se escoge V entorno de la unidad en G con clausura compacta. Puesto que q es aplicación abierta $q(xV)$ para todo $x \in G$ es recubrimiento abierto de E. Por ser E compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{q(x_jV) : j = 1, ..., n\}$. De este modo, se define $K = q^{-1}(E) \cap \bigcup_{j=1}^n x_j\overline{V}$. $q^{-1}(E)$ es un cerrado que intersecciona con un compacto $\bigcup_{j=1}^n x_j\overline{V}$, luego K es compacto. □

Lema 2.26. *Sea* $F \subset G/H$ *compacto, entonces existe una función* $f \geq 0$ *en* $C_C(G)$ *tal que* $Pf = 1$ *en* F*.*

Demostración. Sea E entorno compacto de F en G/H, y sea $K \subset G$ compacto tal que $q(K) = E$ por el lema anterior. Ahora se escoge $g \in C_C(G)$ que sea $g > 0$ en K y $\phi \in C_C(G/H)$ cuyo soporte esté contenido en E y tal que $\phi = 1$ en F. Así pues, se define la función,

$$f = \frac{\phi \circ q}{Pg \circ q} g$$

sobrentendiendo que la fracción es nula ahí donde el numerador sea nulo. Entonces, f es continua debido a que $Pg > 0$ dentro de $\mathrm{sop}(\phi)$. Por otro lado, el soporte de f está contenido en $\mathrm{sop}(g)$ y por tanto es compacto, y $Pf = \frac{\phi}{Pg}Pg = \phi$. □

Ahora se puede probar la segunda parte de la proposición. Si $\phi \in C_C(G/H)$, por el lema anterior, existe una función $g \in C_C(G)$ tal que $g \geq 0$ y $Pg = 1$ en $\text{sop}(\phi)$. Entonces, basta definir $f = (\phi \circ q)g$. En efecto, por la primera parte de la proposición, $Pf = \phi(Pg) = \phi$, además $f \in C_C(G)$. Y de forma evidente si $\phi \geq 0$ se verifica que $f \geq 0$.

□

Teorema 2.27. *Sea G es grupo localmente compacto y $H \subset G$ subgrupo cerrado. Entonces, existe una medida μ medida de Radon G-invariante si y solo si $\Delta_G|_H = \Delta_H$.*

En este caso, μ es única salvo factor multiplicativo. Si se escoge bien, para $f \in C_C(G)$ y dx medida de Haar en G,

$$\int_G f(x)dx = \int_{G/H} Pf d\mu = \int_{G/H} \left[\int_H f(x\xi)d\xi \right] d\mu. \tag{2}$$

Demostración. La segunda parte es sencilla una vez se ha demostrado la existencia de la medida μ G-invariante. En efecto, si se considera el funcional $C_C(G) \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \mapsto \int_{G/H} Pf d\mu$, este es lineal, no nulo e invariante por traslación por la izquierda debido a la invarianza de la medida. Entonces, por el Teorema de Representación de Riesz [13, B.2.1] existe una única medida de Radon invariante asociada. Por esto mismo, debe ser $\int_{G/H} Pf d\mu = c \int_G f(x)dx$, con $c > 0$ y dx medida de Haar sobre G. Es más, por la proposición 2.24 anterior, esta caracterización determina de manera única a μ salvo el factor multiplicativo c. Si se redefine la medida de Haar como $\frac{d\mu}{c}$ entonces se tiene la igualdad de la integral (2).

Para probar la existencia, si se supone que existe μ medida G-invariante, basta considerar

$$\Delta_G(\eta) \int_G f(x)dx = \int_G f(x\eta^{-1})dx$$

con $\eta \in H$. Utilizando la fórmula (2) se llega a la igualdad

$$\Delta_G(\eta) \int_G f(x)dx = \Delta_H(\eta) \int_G f(x)dx.$$

Luego, $\Delta_G(\eta) = \Delta_H(\eta)$ para todo $\eta \in H$. Recíprocamente, sea $\Delta_G|_H = \Delta_H$. Se puede demostrar que para $f \in C_C(G)$ tal que $Pf = 0$ entonces $\int_f(x)dx = 0$. Esto supone que la aplicación $Pf \mapsto \int_G f$ está bien definida, pues si $Pf = Pg$ entonces $\int_G f = \int_G g$. Entonces, esta aplicación define un funcional $C_C(G/H) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal, positivo y G-invariante. Por tanto, igual que antes, define una medida de Radon μ G-invariante.

Para probar la afirmación previa basta considerar una función $\psi \in C_C(G)$ tal que $P\phi = 1$ en $q(\text{sop} f)$, y

$$0 = Pf(xH) = \int_H f(x\xi)d\xi = \int_H f(x\xi^{-1})\Delta_H(\xi^{-1})d\xi = \int_H f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})d\xi$$

donde se ha utilizado la invarianza de la medida ξ y la igualdad de las funciones modulares en H. De este modo, se puede multiplicar por ψ e integrar en G,

$$0 = \int_G \int_H \psi(x) f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})d\xi dx = \int_H \int_G \psi(x\xi)f(x)dxd\xi = \int_G P\psi(xH)f(x)dx = \int_G f(x)dx$$

□

Corolario 2.28. *Si H es compacto, entonces G/H admite medida de Radon G-invariante.*

Demostración. Por la Proposición 2.19, $\Delta_H = 1 = \Delta_G|_H$ y se aplica el Teorema anterior. □

En caso de que no se verifique dicha condición, se puede trabajar con una medida *casi-invariante* que cumple una función similar, pero más débil. Si μ es medida de Radon sobre G/H, se define $\mu_x(E) = \mu(xE)$. Se dice que μ es **casi-invariante** si todas las medidas μ_x son absolutamente continuas entre sí, esto es, si para cualquier conjunto $E \subset G$ tal que $\mu(E) = 0$ se tiene que $\mu_x(E) = \mu(Es) = 0$ para todo $x \in G$. Nótese que de esta manera verifica las condiciones para definir la derivada de Radon-Nikodym [13, B.5.1]. Se puede ver que esta medida existe y se puede modificar la demostración de Teorema 2.27 para obtener un resultado similar [10].

Ejemplo 2.29. El ejemplo más sencillo está dado cuando G actúa sobre sí mismo bajo la acción de traslación $y \mapsto L_y x = yx$. La transitividad del grupo es sencilla, pues basta ver que $G = 1G$. Si μ es medida de Haar sobre G y μ_r medida de Haar por la derecha según la definición del Corolario 2.18, la medida de Haar μ_r no es invariante bajo la traslación por la izquierda del grupo, de manera general, pero sí es absolutamente continua respecto a μ. Luego, define una medida casi-invariante.

2.2. Nociones básicas sobre representaciones unitarias

Se introducen los conceptos fundamentales de la teoría de representaciones unitarias de grupos localmente compactos. Al final de la subsección se enuncia el resultado más importante, el Lema de Schur, que es una herramienta imprescindible para la teoría posterior.

Definición 2.30. Sea G grupo localmente compacto, $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $U(\mathcal{H})$ grupo de operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$. La aplicación $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ es **representación unitaria** de G en $\mathcal{H}$ siempre que verifique:

1. $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ y $\pi(x)^{-1} = \pi(x)^+$ (donde π^+ denota al operador adjunto de π).
2. $G \longrightarrow \mathcal{H}$: $x \longmapsto \pi(x)u$ es continua, para cualquier vector $u \in \mathcal{H}$.

Comentario 2.31. En la definición anterior, la propiedad 1. establece que π sea homomorfismo de grupos, la propiedad 2. que π sea continua respecto de la topología fuerte en $U(\mathcal{H})$ (topología fuerte de operadores, o *strong operator topology*).

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se conoce como **espacio de representación**. Si se quiere reflejar la dependencia del espacio con la representación π se denota por $\mathcal{H}_\pi$. Se llama **dimensión de**

la representación a la dimensión de $\mathcal{H}$, no necesariamente finita. Por otro lado, se dice que la representación es **fiel** si el homomorfismo π es inyectivo; si no, se dice que es **degenerada**.

Definición 2.32. Dos representaciones unitarias π' y π de un grupo G localmente compacto son **unitariamente equivalentes** si existe un operador unitario S sobre $\mathcal{H}$ tal que, para cualquier $x \in G$:

$$\pi'(x) = S\pi(x)S^{-1}$$

Comentario 2.33. Se puede dar la siguiente interpretación: dos representaciones equivalentes son de hecho la misma representación en distinta base del espacio (siendo S el cambio de base). La transformación que lleva una representación π a otra equivalente $S\pi S^{-1}$ es una **transformación de semejanza**.

En vista de lo anterior, se justifica que a la hora de identificar representaciones unitarias se consideren *salvo equivalencias*; es decir, se identifiquen todas las representaciones unitariamente equivalentes como clase de equivalencia.

Definición 2.34.

1. Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ subespacio cerrado. Se dice que $\mathcal{M}$ es **subespacio invariante respecto a** π si para todo $x \in G$ se tiene $\pi(x)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Además, se dice que $\mathcal{M}$ es **irreducible** o **propio** si no posee subespacios invariantes, no triviales, respecto a π.

2. Una representación π sobre $\mathcal{H}$ es **reducible** si admite un subespacio invariante $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ no trivial. Si no, se dice que la representación es **irreducible**.

La restricción de la representación π a un subespacio invariante $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ se conoce como **subrepresentación** y se denota como $\pi^{\mathcal{M}}$, esto es

$$\pi^{\mathcal{M}} : G \longrightarrow \mathcal{M} \text{ y tal que } \pi^{\mathcal{M}}(x) = \pi|_{\mathcal{M}}(x) \text{ para } x \in G.$$

Comentario 2.35. Si existe un subespacio invariante $\mathcal{M}$ respecto de la representación, y además, el complemento ortogonal de $\mathcal{M}$ es también espacio invariante entonces se dice que la representación es **completamente reducible**. Puesto que se trabaja con representaciones unitarias, se verifica que toda representación reducible lo es completamente.

Definición 2.36. Sea $\{\pi_i : i \in I\}$ familia de representaciones de G grupo localmente compacto sobre $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ familia de espacios de representación con $\pi_i : G \longrightarrow \mathcal{H}_i$. Entonces, se define la representación $\pi = \bigoplus \pi_i$ llamada **suma directa** como representación sobre el espacio $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_i$ tal que

$$\pi(x)(\sum v_i) = \sum \pi_i(x)v_i \text{ donde } v_i \in \mathcal{H}_i.$$

Proposición 2.37. *Si π posee un subespacio $\mathcal{M}$ invariante y no trivial, entonces π es suma directa de las subrepresentaciones $\pi^{\mathcal{M}}$ y $\pi^{\mathcal{M}^\perp}$.*

Demostración. $\mathcal{M}$ subespacio cerrado no trivial, entonces se verifica que $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ por ser $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. Por otro lado, para $u \in \mathcal{M}^\perp$ y $v \in \mathcal{M}$ se tiene que $\langle \pi(x)u, v\rangle = \langle u, \pi(x^{-1})v\rangle = 0$, donde se ha aplicado la condición de operador unitario de $\pi(x)$ en la primera igualdad y $\pi(x)v \in \mathcal{M}$ en la segunda. De este modo, se pueden construir dos subrepresentaciones

$$\pi^{\mathcal{M}} : G \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$\pi^{\mathcal{M}^\perp} : G \longrightarrow \mathcal{M}^\perp$$

y la descomposición en suma directa $\pi = \pi^{\mathcal{M}} \oplus \pi^{\mathcal{M}^\perp}$ sobre $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, que da idea del significado de que toda representación unitaria y reducible es totalmente reducible. □

Ejemplo 2.38 (**Representación regular por izquierda**)**.** Sea S un G-espacio con G grupo localmente compacto. Entonces, se puede definir la siguiente aplicación, para $x \in G$ y $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$[\pi(x)f](s) = f(x^{-1}s)$$

Si S posee una medida μ de Radon G-invariante entonces π define una representación unitaria sobre $L^2(S)$, espacio de funciones cuadrado integrables sobre S.

En el caso particular de que G actúe sobre sí mismo se recupera la aplicación de traslación por la izquierda,

$$[\pi(x)f](s) = f(x^{-1}y) = L_x f(y).$$

Si se toma la medida de Haar sobre G, entonces la aplicación anterior define una representación unitaria llamada **representación regular por la izquierda**. Se puede construir de la misma manera la representación regular por la derecha con la medida de Haar invariante por la derecha.

Comentario 2.39 (**Acción contragradiente**)**.** Sea $\pi : G \longrightarrow \mathcal{H}$ representación unitaria de un grupo localmente compacto. Esta representación determina una representación unitaria sobre el espacio de Hilbert dual de $\mathcal{H}$, denotado como $\mathcal{H}'$,

$$\overline{\pi} : G \longrightarrow \mathcal{H}' : \ \overline{\pi}(x) = \pi(x^{-1})^t$$

donde el superíndice "t" indica la trasposición del operador. Esta representación se conoce como **representación contragradiente** (*contragradient representation*) de G asociada π.

Para entender la definición hay que recordar que la identificación del espacio Hilbert con su dual, $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{H}'$, es antiunitaria. Si se escoge una base ortonormal del espacio $\mathcal{H}$, $\pi(x)$ se escribe como matriz $M(x)$; de la misma manera, $\overline{\pi}(x)$ se escribe como la matriz inversa y traspuesta de $M(x)$. Ahora bien, por la naturaleza unitaria de la representación, esta matriz será la conjugada compleja de $M(x)$.

Definición 2.40. Sean π_1 y π_2 representaciones unitarias de G, grupo localmente compacto. Se define un **operador de entrelazamiento** (*intertwining operator*) como una aplicación lineal y acotada $T: \mathcal{H}_{\pi_1} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_2}$ que verifica para todo $x \in G$,

$$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T.$$

El conjunto de estos operadores se representa por $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$. Como caso particular, $\mathcal{C}(\pi) \equiv \mathcal{C}(\pi, \pi)$, que es el conjunto de los operadores que conmutan con π. Además, π y π' son dos representaciones unitariamente equivalentes si y solo si existe un operador unitario $S \in \mathcal{C}(\pi)$ tal que $\pi' = S\pi S^{-1}$.

Teorema 2.41 (Lema de Schur). *Sea G grupo localmente compacto, se verifica:*

1. *Una representación unitaria π de G es irreducible si y solo si $\mathcal{C}(\pi)$ solo contiene operadores de la forma λI, es decir, múltiplos de la identidad.*
2. *Sean π_1 y π_2 representaciones irreducibles y unitarias de G. Si ambas representaciones son equivalentes entonces $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ es unidimensional; si no, entonces $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$.*

Demostración. La demostración se corresponde al Teorema [10, Th. 3.5]. $\square$

Corolario 2.42. *Las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son unidimensionales.*

Demostración. La demostración es inmediata a partir del Teorema previo. $\square$

2.3. Grupos abelianos localmente compactos y sus representaciones

En estas líneas se introduce someramente la Teoría del Grupo Dual con sus principales teoremas y la Transformada de Fourier. Puesto que el interés recae en dar las nociones básicas sobre grupos localmente compactos y abelianos para trabajar con ellos posteriormente, no se pretende dar una explicación profunda del tema pues necesitaría de la introducción de la Teoría de Álgebras de Banach que alargarían sin añadir elementos imprescindibles el tamaño del texto. Para ello se deja como referencia las notas de [10] y [13].

Grupo dual

Como ya se mencionó, toda representación irreducible y unitaria de un grupo localmente compacto y abeliano es unidimensional, es decir, $\pi : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Se suele representar el operador de la siguiente manera,

$$\pi(x)(z) = \xi(x)z$$

siendo $\xi : G \longrightarrow \mathbb{T}$, homomorfismo continuo del grupo G al grupo circular $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, con la operación producto.

Definición 2.43. El homomorfismo ξ se denomina **carácter** de G. El conjunto de todos los carácteres de G se denota por $\hat{G}$ y se le llama **grupo dual**.

El grupo dual $\hat{G}$ puede dotarse de estructura topológica localmente compacta. El siguiente párrafo profundiza en esta idea.

Sea X espacio topológico y $\mathcal{C}(X)$ espacio de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas. Si $K \subset X$ es conjunto compacto y $U \subset \mathbb{C}$ es conjunto abierto, se define

$$L(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(K) \subset U\}$$

De este modo, se define la **topología compacto-abierto** sobre $\mathcal{C}(X)$ como la topología generada por los conjuntos $L(K, U)$, con K y U arbitrarios. Es decir, como la topología dada por las funciones continuas que envían compactos dentro de abiertos.

Por tanto, el grupo dual $\hat{G}$ es grupo localmente compacto y abeliano cuando se dota con la topología compacto-abierto [13, §3].

Comentario 2.44 (Notación). En estas líneas, siguiendo la bibliografía, se denotará al carácter como $\langle x, \xi\rangle \equiv \xi(x)$ para $\xi \in \hat{G}$ y $x \in G$. Por otro lado, el elemento inverso del grupo dual se denota como $\overline{\xi} \equiv \xi^{-1}$; y con la notación anterior, $\overline{\langle x, \xi\rangle} \equiv \overline{\xi}(x)$.

El término "dual" tiene una connotación muy profunda dentro de la Teoría de Grupos Abelianos. Dos ideas claves son: **dualidad compacto - discreto**, por la cual el grupo dual de un grupo compacto es discreto y viceversa; y **dualidad de Pontrjagin**, que establece un isomorfismo entre el grupo dual del dual, $\hat{\hat{G}}$, y G. Los ejemplos siguientes dan una idea de ambas dualidades.

Ejemplo 2.45 (Dual de $\mathbb{R}$). Se tiene que $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ con $\langle x, \xi\rangle = e^{2\pi i\xi x}$

Demostración. Sea $\phi \in \hat{\mathbb{R}}$, por ser homomorfismo $\phi(0) = 1$ y por tanto existe un $a > 0$ tal que

$$A \equiv \int_0^a \phi(t)dt \neq 0$$

Donde se ha definido la integral anterior como constante A. Se tiene además,

$$A\phi(x) = \int_0^a \phi(x + t)dt = \int_x^{a+x} \phi(t)dt$$

En un entorno de a se puede definir la derivada,

$$\phi'(x) = A^{-1}\left(\phi(a+x) - \phi(x)\right) = A^{-1}\left(\phi(a) - 1\right)\phi(x) = c\phi(x)$$

Resolviendo la ecuación diferencial: $\phi(t) = e^{c\,t}$. Y como $|\phi| = 1$ entonces, $c = 2\pi i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$ $\square$

Se hace notar que la construcción anterior es de sobra conocida en el Análisis Real, pues esta se corresponde con la Teoría de Fourier sobre $\mathbb{R}$. En concreto, esta no es más que la transformada de Fouier, la aplicación que relaciona funciones sobre $\mathbb{R}$ con funciones sobre $\mathbb{R}$,

$$f(x) \mapsto \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i x t}dx$$

En el próximo apartado se generaliza dicha aplicación al caso de grupos localmente compactos y abelianos.

Ejemplo 2.46 (**Grupo dual de** $\mathbb{T}$ y $\mathbb{Z}$)**.** El grupo dual de $\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{T}$; y viceversa. Además, para $\alpha \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}$, $\langle \alpha, n \rangle = \alpha^n$. Este hecho es un ejemplo de la primera dualidad: discreto-compacto.

Demostración. Primero se quiere demostrar $\hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$. Para ello, se identifica $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como $\alpha = e^{2\pi i x} \in \mathbb{T}$. Es fácil ver que los carácteres de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son los carácteres de $\mathbb{R}$ triviales en $\mathbb{Z}$. Utilizando el ejemplo anterior, se concluye que el grupo dual debe ser $\mathbb{Z}$ y si se denota por n a un carácter se tiene que $\langle \alpha, n \rangle = \alpha^n$.

Por otro lado, para ver $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$, se escoge $\phi \in \hat{\mathbb{Z}}$ entonces $\alpha = \phi(1) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Tomando el producto, $\phi(n) = \phi(1)^n = \alpha^n$. $\square$

Transformada de Fourier, dualidad y Teorema de Plancherel

Definición 2.47. La **transformada de Fourier** sobre G grupo localmente compacto y abeliano se define como la aplicación $L^1(G) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{G})$, que envía funciones integrable a funciones continuas sobre el dual, dada por

$$f \mapsto \hat{f}(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x)dx. \tag{3}$$

Comentario 2.48. La transformada de Fourier (3) puede relacionarse con la transformación de Gelfand [10]. De esta manera se denota la transformación de Fourier como

$$\left[\mathcal{F}f\right](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x)dx$$

donde $\mathcal{F}$ actúa como operador sobre las funciones integrables en G.

Proposición 2.49 (**Dualidad compacto-discreto**). *El grupo dual de un grupo compacto es discreto y el grupo dual de un grupo discreto es compacto.*

Demostración. Sea G grupo compacto. Se define $L \subset \hat{G}$ como el conjunto de carácteres tales que $\eta(G) \subset \{\mathrm{Re}(\cdot) > 0\}$; entendiendo $\{\mathrm{Re}(\cdot) > 0\}$ como semiplano en $\mathbb{C}$ de puntos con parte real estrictamente positiva. Además, $1 \in L$ y por la topología compacto-abierto L es abierto; concluyendo con que L es entorno de la unidad en $\hat{G}$. Por otro lado, para $\eta \in L$ $\eta(G)$ debe ser subgrupo en $\{\mathrm{Re}(\cdot) > 0\} \cap \mathbb{T}$. Sin embargo, solo existe el subgrupo trivial en dicha restricción. Luego, $L = \{1\}$, que es abierto. Por ser $\hat{G}$ grupo topológico, $\{\eta\}$, para todo $\eta \in \hat{G}$, es también abierto por ser traslación del abierto $\{1\}$. Se concluye que $\hat{G}$ debe ser discreto.

Si G es discreto, $\eta \in \hat{G}$ es homomorfismo $\eta : G \longrightarrow \mathbb{T}$. Ahora bien, por ser G discreto se puede asociar cada carácter η con un elemento de $\prod_{x \in G} \mathbb{T}$. Por el Teorema de Tychonov [13, A.7.2] $\prod_{x \in G} \mathbb{T}$ es espacio de Hausdorff y compacto bajo la topología del producto. Puesto que $\hat{G}$ es espacio cerrado, la inclusión $\hat{G} \longrightarrow \prod_{x \in G} \mathbb{T}$ induce un un homeomorfismo entre ambos espacios topológicos y se concluye que $\hat{G}$ es compacto. □

Para la segunda dualidad basta ver que, de la misma manera que los elementos de $\hat{G}$ son carácteres de G, los elementos de G actúan a su vez como carácteres de $\hat{G}$. Es decir, cada elemento $x \in G$ define un carácter $\Phi(x)$ sobre el dual $\hat{G}$, tal que

$$\langle \xi, \Phi(x) \rangle \equiv \langle x, \xi \rangle$$

La condición de que Φ sea isomorfismo pone de manifiesto que todo grupo localmente compacto y abeliano es *reflexivo*, en el sentido de que $G \cong \hat{\hat{G}}$. La formalización de esta idea se inscribe en el teorema siguiente.

Teorema 2.50 (**Teorema de Pontrjagin**). *La aplicación $\Phi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo de grupos topológicos.*

Demostración. La demostración se puede ver en [10, Th. 4.31] □

Siguiendo la idea de reflexivilidad, se identifica $\hat{\hat{G}}$ con G sin escribir la dependencia de Φ. Así pues, se denotará por $\langle x, \xi \rangle$ para identificar los carácteres sobre el dual $\hat{G}$; y $\langle \xi, x \rangle$ para los carácteres sobre el grupo G. Una aplicación directa del Teorema de Pontrjagin es la siguiente,

Teorema 2.51 (**Fórmula de inversión de Fourier**). *Si $f \in L^1(G)$ y $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$, entonces $f(x) = \hat{\hat{f}}(x^{-1})$ para casi todo $x \in G$. Y esto es,*

$$f(x) = \int \langle x, \xi \rangle \hat{f}(\xi) d\xi, \qquad \textit{para casi todo } x \in G. \tag{4}$$

En caso de que f sea continua, se verifica para todo $x \in G$.

Demostración. La demostración se puede ver en [10, Th. 4.33] $\square$

Por último, cabe decir que la transformación de Fourier no solo es isomorfismo sobre espacios L^1 sino que extiende de forma natural a L^2.

Teorema 2.52 (Teorema de Plancherel). *Dada una medida de Haar sobre G grupo localmente compacto y abeliano, existe una única medida de Haar sobre $\hat{G}$, determinada por la primera, tal que para $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ se tiene,*

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \tag{5}$$

Equivalentemente, la transformación de Fourier sobre $L^1(G) \cap L^2(G)$ se extiende de forma única como isometría de $L^2(G)$ a $L^2(\hat{G})$.

Demostración. La demostración puede verse en [13, Th. 3.4.8] $\square$

Comentario 2.53. Dada una medida de Haar dx sobre G, la medida de Haar inducida $d\xi$ sobre $\hat{G}$ es conocida como **medida dual** o **medida de Plancherel**. Si la medida dual de dx es $d\xi$, entonces la medida dual de $c\,dx$ es $c^{-1}\,d\xi$ para c constante. A este hecho de reparametrización, o adaptación de la medida dual por cambio de escala, se le suele llamar **normalización**. Es importante conocer la normalización de la medida a la hora de trabajar con un grupo concreto.

Ejemplo 2.54. Si se identifica $\hat{\mathbb{R}}$ con $\mathbb{R}$, la medida dual de Lebesgue coincide con ella misma. Con la relación $\langle x, \xi \rangle = e^{2\pi i x \xi}$ la transformada de Fourier y la fórmula de inversión se escriben respectivamente como,

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \qquad f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

siendo dx y $d\xi$ medidas de Lebesgue.

Si por el contrario se toma la identificación $\langle x, \xi \rangle = e^{ix\xi}$ entonces la normalización de la medida quedaría como $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ y $\frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}$.

Corolario 2.55. *Sea G grupo abeliano y compacto. Si se escoge una medida de Haar tal que la medida de G esté normalizada, $|G| = 1$, entonces $\hat{G}$ es una base ortonormal de $L^2(G)$.*

Demostración. En primer lugar se prueba que para G compacto y dx medida de Haar tal que $\mu(G) = 1$, entonces $\hat{G}$ es un conjunto ortonormal de $L^2(G)$. Para ello, en primer lugar, si $\eta \in \hat{G}$

entonces $|\eta| \equiv 1$ como función $G \longrightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ y por tanto $\|\eta\|_2 = 1$. Sean $\eta \neq \xi$ carácteres de G, existe $x_0 \in G$ tal que $\langle x_0, \xi\eta^{-1}\rangle \neq 1$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \int \xi\overline{\eta} &= \int_G \langle x, \xi\eta^{-1}\rangle dx &&= \langle x_0, \xi\eta^{-1}\rangle \int_G \langle x_0^{-1}x, \xi\eta^{-1}\rangle dx \\ &= \langle x_0, \xi\eta^{-1}\rangle \int_G \langle x, \xi\eta^{-1}\rangle dx &&= \langle x_0^{-1}, \xi\eta^{-1}\rangle \int \xi\overline{\eta}. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que $\int \xi\overline{\eta} = 0$ para cualquier $\eta, \xi \in \hat{G}$ distintos, que implica la ortogonalidad del conjunto $\hat{G} \subset L^2(G)$.

Ahora queda ver que este conjunto es completo y por tanto define una base ortonormal. Si $f \in L^2(G)$ y es ortogonal a todo $\xi \in \hat{G}$ entonces $\displaystyle\int f\overline{\xi} = \hat{f}(\xi) = 0$ para todo carácter. Aplicando el Teorema de Plancharel 2.52 se concluye que $f = 0$. Esto demuestra que $\hat{G}$ es conjunto completo (y ortonormal por el párrafo anterior) en $L^2(G)$. □

Representaciones

En este apartado se modifica la notación y se toma la identificación $L^1(G) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{G})$ como

$$f \mapsto \xi(f) = \hat{f}(\xi^{-1})$$

En la siguiente proposición se utiliza la noción de medida espectral (*projection-valued measure*), elemento importante de la Teoría Espectral [10, §1] [17]. La intención de este apartado es reflejar el hecho de que toda representción unitaria de un grupo localmente compacto y abeliano puede escribirse como "integral directa" respecto a sus carácteres.

Proposición 2.56. *Sea π una representación unitaria de un grupo localmente compacto y abeliano G, entonces solo existe una única medida espectral P sobre $\hat{G}$, valuada en la familia de proyecciones definidas en $\mathcal{H}_\pi$, tal que si $x \in G$ y $f \in L^1(G)$*

$$\pi(x) = \int \langle x, \xi\rangle dP(\xi)$$

$$\pi(f) = \int \xi(f) dP(\xi)$$

Demostración. Este resultado puede consultarse en [10, §4.4] con todos los detalles. □

Una forma sencilla de entender la proposición anterior es restringir la medida P a una medida discreta. De esta manera, para $E \subset \hat{G}$ Borel, se tiene que $P(E) = \sum_{\xi\in E} P(\{\xi\})$. Si A es el conjunto de elementos de E cuya medida no es nula, entonces se tiene una escisión "discreta" del espacio de Hilbert, $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus \mathcal{H}_\xi$. Con $\mathcal{H}_\xi$ rango de $P(\{\xi\})$. Además, estos subespacios son invariantes por π y se verifica que

$$\pi(x) = \sum_{\xi\in A} \langle x, \xi\rangle P(\{\xi\})$$

Por tanto, se obtiene la representación π como suma directa de carácteres.

2.4. Grupos compactos y sus representaciones

Se hace una pequeña introducción a la teoría de representaciones unitarias de un grupo G compacto, entendiéndose como grupo equipado con una topología compacta y Hausdorff. Se probará que toda representación unitaria del grupo G es suma directa de representaciones irreducibles, y que toda representación irreducible y unitaria es finito-dimensional. Por último, se presenta el Teorema de Peter-Weyl. Se sigue el desarrollo de [10, §5] apoyado con [13, §7].

Representaciones irreducibles finito-dimensionales

Lema 2.57. *Sea π representación unitaria del grupo compacto G sobre el espacio $\mathcal{H}$. Se fija un vector unitario $u \in \mathcal{H}$ y se define el operador $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dado por,*

$$Tv = \int_G \langle v, \pi(x)u\rangle \pi(x)udx. \tag{6}$$

Entonces, T es positivo, no nulo y compacto. Además, $T \in \mathcal{C}(\pi)$ (espacio de operadores que conmutan con π).

Demostración. Para todo $v \in \mathcal{H}$, se tiene $\langle Tv, v\rangle = \int_G \langle v, \pi(x)v\rangle\langle \pi(x)v, v\rangle dx = \int_G |\langle v, \pi(x)u\rangle|^2 dx$ Luego, T es positivo. Es más, si $v = u$, $|\langle u, \pi(x)u\rangle|^2$ es estrictamente positiva en un entorno de $\pi(1) \equiv 1$ por ser u unitario; por ser $x \mapsto \pi(x)u$ continua se tiene un entorno de 1 donde es estrictamente positiva. Por tanto, $\langle Tu, u\rangle > 0$ y $T \neq 0$.

Por otro lado, puesto que G es compacto, $x \mapsto \pi(x)u$ es uniformemente continua. Entonces, dado $\epsilon > 0$, se puede hacer una partición de G en conjuntos disjuntos $E_1, ..., E_n$ y puntos $x_j \in E_j$ tal que $\|\pi(x)u - \pi(x_j)u\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in E_j$. Entonces, $x \in E_j$

$$\|\langle v, \pi(x)u\rangle\pi(x)u - \langle v, \pi(x_j)u\rangle\pi(x_j)u\| < \epsilon\|v\|$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Schwarz para la norma.

Ahora se define el operador

$$T_\epsilon v = \sum_{j=1}^{n} |E_j|\langle v, \pi(x_j)u\rangle\pi(x_j)u = \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} \langle v, \pi(x_j)u\rangle\pi(x_j)udx$$

Por la desigualdad anterior, $\|Tv - T_\epsilon v\| < \epsilon\|v\|$ para cualquier v, que implica la convergencia $T_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \longrightarrow 0} T$ en la topología de la norma. Ahora bien, T_ϵ tiene imagen finito-dimensional, pues esta cae en el subespacio generado por $\{\pi(x_j)u : j = 1, ..., n\}$; de este modo, T_ϵ es compacto. Por otro lado, por la convergencia $T_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \longrightarrow 0} T$, se tiene que T compacto.

Por último, queda ver la conmutación con π. En efecto

$$\begin{aligned}\pi(y)Tv &= \pi(y)Tv = \int_G \langle v, \pi(x)u\rangle \pi(yx)udx = \int_G \langle v, \pi(y^{-1}x)u\rangle \pi(x)udx \\ &= \int_G \langle \pi(y)v, \pi(x)u\rangle \pi(x)udx = T\pi(y)v\end{aligned}$$

□

Teorema 2.58. *Si G es grupo compacto, entonces toda representación irreducible de G es finito-dimensional y toda representación unitaria de G es suma directa de representaciones irreducibles.*

Demostración.

1. Si π es representación unitaria e irreducible, se considera el operador T del Lema (2.57). Puesto que $T \in \mathcal{C}(\pi)$, se aplica el Lema de Schur (2.41) y se llega a que $T = \lambda I$ con $\lambda \neq 0$. Puesto que T es operador compacto, lo es la identidad I concluyendo que la dimensión de $\mathcal{H}_\pi$ es finita.

2. Queda ver que toda representación unitaria es suma directa de representaciones irreducibles. Sea π representación unitaria arbitraria de G y sea T el operador del Lema (2.57). Por ser compacto, no nulo y autoadjunto se puede garantizar que posee un autovalor no nulo cuyo subespacio asociado (*eigenspace*) $\mathcal{M}$ es finito - dimensional. (Es un resultado de la Teoría Espectral, [10, Teorema 1.52]), de tal modo que $\mathcal{M}$ es invariante por π, pues $T \in \mathcal{C}(\pi)$. La subrepresentación sobre el subespacio invariante $\mathcal{M}$, denotada por ρ, es finito-dimensional.

   Ahora se quiere ver que ρ es suma directa de subrepresentaciones irreducibles. Se procede por inducción sobre la dimensión de $\mathcal{M}$. Si la dimensión es 0 no hay nada que demostrar. Si la dimensión de $\mathcal{M}$ es no nula, se supone que la afirmación es cierta para dimensiones inferiores. Entonces, si ρ es irreducible entonces ya está demostrado. Si no, existe un subespacio $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ invariante por ρ que es no trivial. El complemento ortogonal de $\mathcal{N}$ también es invariante por ρ (Proposición (2.37)) y $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$. Por tanto, se ha descompuesto ρ en subrepresentaciones sobre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^\perp$ que por tener dimensión menor que $\mathcal{M}$ son irreducibles por hipótesis de inducción.

   Por último, si $\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in A\}$ representa una familia de subespacios invariantes e irreducibles por π y ortogonales dos a dos, se puede tomar como maximal por el Lema de Zorn. Por tanto, si se considera $\mathcal{N}$ complemento ortogonal a $\bigoplus_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha$, y debe ser $\mathcal{N}$ invariante por π. Ahora bien, repitiendo el argumento de los párrafos anteriores, la subrepresentación $\pi^{\mathcal{N}}$ posee un subespacio irreducible en $\mathcal{N}$; hecho que entra en contradicción con que la familia $\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in A\}$ sea maximal siempre y cuando $\mathcal{N}$ no sea trivial, es decir, $\{0\}$.

   Por tanto, uniendo todas las piezas se tiene que $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus \mathcal{M}_\alpha$ siendo $\{\mathcal{M}_\alpha\}$ familia de de subespacios invariantes e irreducibles por π. Además, las subrepresentación $\pi^{\mathcal{M}_\alpha}$ asociadas a cada subespacio son finito-dimensionales. Es decir, la representación π descompone en suma directa de subrepresentaciones finito-dimensionales.

□

Comentario 2.59. La descomposición de una representación ρ en representaciones irreducibles no es única. De este modo, conviene trabajar con un concepto más laxo, con clases de equivalencia de representaciones irreducibles. De este modo sí que se puede dar resultados que apuntan en esta dirección.

Se denota por $\hat{G}$ al **conjunto de clases de representaciones irreducibles y unitarias** de G que están relacionadas por una equivalencia unitaria, es decir,

$$\pi(x) = S\pi'(x)S^{-1}, \text{ para } \forall x \in G \text{ y } S \text{ unitaria}$$

Las clases de equivalencia se denotan por $[\pi] \in G$. Además, sea $\rho : G \longrightarrow \mathcal{H}_\rho$ representación, para cada $[\pi]$ se define $\mathcal{M}_\pi$ como el subespacio cerrado generado por todos los subespacios irreducibles de $\mathcal{H}_\rho$ en los cuales ρ es equivalente unitariamente a π . El primer resultado importante es el siguiente,

Proposición 2.60. *Con la notación anterior, sea ρ representación unitaria sobre el grupo compacto G y sea $[\pi], [\pi'] \in \hat{G}$.*

1. *Si $[\pi] \neq [\pi']$ entonces $\mathcal{M}_\pi \perp \mathcal{M}_{\pi'}$.*
2. *Si $\mathcal{N}$ es subespacio irreducible de $\mathcal{M}_\pi$ respecto a π entonces la subrepresentación $\rho^{\mathcal{N}}$ es unitariamente equivalente a π.*

Demostración. (1) Sean $\mathcal{L}_\pi$ y $\mathcal{L}_{\pi'}$ subespacios irreducibles en los cuales ρ es equivalente unitariamente a π y a π', respectivamente. Sea $P : \mathcal{H}_\rho \longrightarrow \mathcal{L}_\pi$ proyección sobre $\mathcal{L}_\pi$. Entonces, $P|_{\pi'} \in \mathcal{C}(\rho^{\mathcal{L}_\pi}, \rho^{\mathcal{L}_{\pi'}})$ y por el Lema de Schur 2.41, $P|_{\mathcal{L}_{\pi'}} = 0$ (pues π y π' no pertenecen a la misma clase, y por tanto, $\rho^{\mathcal{L}_\pi}$ y $\rho^{\mathcal{L}_{\pi'}}$ no pueden ser unitariamente equivalentes). Se concluye que $\mathcal{L}_\pi \perp \mathcal{L}_{\pi'}$, y por tanto, $\mathcal{M}_\pi \perp \mathcal{M}_{\pi'}$.

(2) Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_\pi$ es irreducible, por definición de $\mathcal{M}_\pi$, existe un subespacio $\mathcal{L}$ tal que $\rho^{\mathcal{L}}$ es equivalente unitariamente a π y, si $P : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{L}$ proyección sobre $\mathcal{L}$, $P(\mathcal{N}) \neq \{0\}$. Igual que antes, $P|_{\mathcal{N}} \in \mathcal{C}(\rho^{\mathcal{N}}, \rho^{\mathcal{L}})$ y por el lema de Schur 2.41 ambas representaciones son unitariamente equivalentes. □

Comentario 2.61. Sea ρ representación unitaria del grupo compacto G, con la notación anterior, se tiene que $\mathcal{H}_\rho = \bigoplus_{[\pi]\in\hat{G}} \mathcal{M}_\pi$. Pero cada subespacio $\mathcal{M}_\pi$ puede descomponer como $\mathcal{M}_\pi = \bigoplus_{\alpha\in A} \mathcal{L}_\alpha$ donde la subrepresentación $\rho^{\mathcal{L}_\alpha}$ es equivalente unitariamente a π para cada $\alpha \in A$. Si $\mathcal{M}_\pi$ es no irreducible entonces la descomposición anterior no es única. No obstante, el cardinal de A es igual para todas las descomposiciones. A este cardinal se le llama **multiplicidad** de $[\pi]$ para ρ y se denota por $\operatorname{mult}(\pi, \rho)$.

Proposición 2.62. *Sea ρ representación unitaria del grupo compacto G, sea $[\pi] \in \hat{G}$. Se verifica la igualdad*

$$\operatorname{mult}(\pi, \rho) = \dim(\mathcal{C}(\pi, \rho)).$$

Demostración. Sea $\mathcal{M}_\pi = \bigoplus_{\alpha\in A}\mathcal{L}_\alpha$ como en el comentario previo. Para cada $\alpha \in A$ se define $T_\alpha : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{L}_\alpha$ equivalencia unitaria. Si se fija $u \in \mathcal{H}$ se define $v_\alpha = T_\alpha u$. $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ es conjunto ortonormal en $\mathcal{M}_\pi$ por definición de $\mathcal{L}_\alpha$. Sea $\mathcal{V}$ el espacio generado por dicha base. Se quiere ver, por tanto, que

$$\mathcal{C}(\pi,\rho) \longrightarrow \mathcal{V} : \ T \longmapsto Tu$$

es isomorfismo.

Por el lema de Schur 2.41, todo T no nulo y tal que $T \in \mathcal{C}(\pi,\rho)$ es inyectivo. Luego, $T \mapsto Tu$ es inyectivo. Por otro lado, la imagen de T es el subespacio de $\mathcal{H}_\pi$ en el cual ρ es equivalente a π; luego, está en $\mathcal{M}_\pi$. De esta manera, $Tu = \sum u_\alpha$ con $u_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$. Si P_α indica la proyección ortogonal en $\mathcal{L}_\alpha$, $P_\alpha T \in \mathcal{C}(\pi, \rho^{\mathcal{L}_\alpha})$ y debido al lema de Schur, $P_\alpha T = c_\alpha T_\alpha$. Por tanto, $u_\alpha = P_\alpha Tu = c_\alpha v_\alpha$ y $Tu \in \mathcal{V}$.

Por último, si $v = \sum c_\alpha v_\alpha \in \mathcal{V}$, se puede construir $T = \sum c_\alpha T_\alpha$ que está en $\mathcal{C}(\pi,\rho)$ pues las imágenes T_α son mutuamente ortogonales y la suma $\sum |c_\alpha| < \infty$. Y además, $Tu = v$. □

Hasta ahora se ha supuesto que ρ era representación unitaria sobre el grupo compacto G. Se puede prescindir de esta condición siempre y cuando la representación ρ esté definida en $\mathcal{V}_\rho$ espacio de Hilbert finito-dimensional. En este caso, se puede garantizar que para ρ representación sobre G se puede construir un producto interno en $\mathcal{V}_\rho$ que convierta a ρ en unitaria. Se obtiene, por tanto, que toda representación finito-dimensional sobre un grupo compacto G descompone como suma directa de subrepresentaciones irreducibles y unitarias.

Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ producto interno sobre $\mathcal{V}_\rho$. Se define el producto interno

$$\langle v, u\rangle = \int_G \langle \rho(x)v, \rho(x)u\rangle_0 \, dx$$

Bajo este producto interno la representación ρ es unitaria; es más, si ρ es irreducible está determinado de forma única salvo por un factor positivo. La prueba se recoge en [13, Lemma 7.1.1.].

Teorema de Peter-Weyl

Definición 2.63. Sea G grupo compacto, sea π representación irreducible y unitaria de G y $\mathcal{H}_\pi$ espacio de representación. Se definen los **elementos de matriz** de π como las funciones

$$\phi_{u,v}(x) = \langle \pi(x)u, v\rangle, \text{para } u, v \in \mathcal{H}_\pi. \tag{7}$$

Si $\{e_i\}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}_\pi$ entonces los elementos de matriz para dicha base se denotan por $\pi_{ji}(x) \equiv \phi_{e_j,e_i}(x) = \langle \pi(x)e_j, e_i\rangle$.

Se define $\mathcal{E}_\pi$ como el espacio generado por las combinaciones lineales de los elementos de matriz $\phi_{u,v}(x)$. Este espacio es subespacio de las funciones continuas sobre G, y por ser compacto, se verifica que $\mathcal{E}_\pi \subset L^p(G)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Comentario 2.64.

1. El espacio $\mathcal{E}_\pi$ solo depende de la clase $[\pi] \in \hat{G}$. Además, es invariante bajo traslaciones por derecha e izquierda.

   Para ello, basta ver que si $\pi'(x) = U\pi(x)U^{-1}$, entonces se verifica la igualdad $\langle \pi(x)u, v\rangle = \langle \pi'(x)Uu, Uv\rangle$ por ser U unitaria. Por tanto, $\mathcal{E}_\pi \cong \mathcal{E}_{\pi'}$. Por otro lado, $\phi_{u,v}(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1}x)u, v\rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)v\rangle = \phi_{u,\pi(x)v}(x)$. De la misma manera, $\phi_{u,v}(xy) = \phi_{\pi(x)u,v}(x)$.

2. Si la dimensión de $\mathcal{H}_\pi$ es $n < \infty$ entonces $\dim(\mathcal{E}_\pi) \leq n^2$.

   En efecto, si $\dim(\mathcal{H}_\pi) = n$, entonces el espacio $\mathcal{E}_\pi$ está generado por las n^2 funciones $\pi_{i,j}$.

3. Si $\pi = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i$, entonces $\mathcal{E}_\pi = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_{\pi_i}$ (no necesariamente suma directa). Sin embargo, se puede precisar más este resultado con la siguiente proposición.

Proposición 2.65 (Relación de ortogonalidad de Schur). *Sea π y π' representaciones unitarias e irreducibles del grupo compacto G, sea $d_\pi = \dim(\mathcal{H}_\pi)$. Se consideran $\mathcal{E}_\pi$ y $\mathcal{E}_{\pi'}$ como subespacios de $L^2(G)$, entonces:*

1. *Si $[\pi] \neq [\pi']$, se tiene que $\mathcal{E}_\pi \perp \mathcal{E}_{\pi'}$.*
2. *Si $\{e_j\}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}_\pi$, $\{d_\pi \pi_{ij} : i, j = 1, ..., d_\pi\}$ es base ortonormal de $\mathcal{E}_\pi$.*

Demostración. La idea es utilizar el Lema de Schur (2.41) para probar ambos enunciados. Para ello se define la aplicación lineal $A : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi'}$: fijados $v \in \mathcal{H}_\pi$ y $v' \in \mathcal{H}_{\pi'}$ entonces para $u \in \mathcal{H}_\pi$ se da la imagen de la aplicación como $Au = \langle u, v\rangle v'$. A través de esta aplicación se construye,

$$\tilde{A} = \int_G \pi'(x^{-1})A\pi(x)\, dx$$

Bastaría ver que $\tilde{A} \in \mathcal{C}(\pi, \pi')$, y se tendría que la primera parte del Lema implica (1), y la segunda parte demuestra (2). La demostración se puede consultar en [10, Th. 5.8]. □

Sea $\mathcal{E}$ el espacio generado por combinación lineal de elementos de $\bigcup_{[\pi]\in\hat{G}} \mathcal{E}_\pi$.

Teorema 2.66 (Teorema de Peter-Weyl). *Sea G grupo compacto. Entonces, $\mathcal{E}$ es denso uniformemente en $\mathcal{C}(G)$ (i.e. bajo la norma infinito o del supremo) y $L^2(G) = \bigoplus_{[\pi]\in\hat{G}} \mathcal{E}_\pi$. Si π_{ij} está dada respecto a una base ortonormal, entonces*

$$\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} : i, j = 1, ..., d_\pi,\ [\pi] \in \hat{G}\}$$

es base ortonormal para $L^2(G)$.

Por otro lado, cada $[\pi] \in \hat{G}$ ocurre en la representación regular por derecha (o por izquierda) de G con multiplicidad d_π. Es decir, para $i = 1, ..., d_\pi$ los subespacios de $\mathcal{E}_\pi$ (resp. $\mathcal{E}_{\overline{\pi}}$) generados *por la fila i-ésima (resp. la columna i-ésima) de la matriz $(\pi)_{ij}$ (resp. $(\overline{\pi})_{ij}$) es invariante bajo la representación regular por derecha (resp. izquierda), y y esta última representación es equivalente a π en este subespacio.*

Demostración. La demostración del Teorema se deja referenciada a [10], donde el resultado se recoge en varios resultados previos. □

Como aplicación del teorema anterior se enuncia la siguiente proposición cuya demostración se deja en la bibliografía [10, Th. 5.13]

Proposición 2.67. *Sea G grupo compacto. Entonces, G es un grupo de Lie si y solo si G posee una representación fiel finito-dimensional.*

Comentario 2.68. La proposición anterior será relevante en el estudio de grupos de Lie compactos pues lleva a la existencia de representaciones irreducibles y unitarias finito-dimensionales. Sin embargo, para grupos no compactos no se podrá garantizar, es el caso del grupo Euclídeo, grupo de Lorentz o grupo de Poincaré. En estos casos las representaciones unitarias e irreducibles suelen ser infinitas.

2.5. Grupos de Lie y sus representaciones

De forma somera, un grupo de Lie es una variedad diferenciable equipada con estructura de grupo. Como grupo topológico hereda propiedades muy interesantes debido a su naturaleza “suave”. Riqueza que ha hecho de la Teoría de Lie una rama útil y fecunda en una gran variedad de campos tanto en Física como en Matemáticas; ejemplo de ello son los grupos compactos $SU(2)$, $SO(3)$ que aparecen en la Mecánica Cuántica, el grupo Euclídeo $E(3)$ o el grupo de Galileo, dentro de la Mecánica Clásica; o el grupo de Lorentz homogéneo y el grupo de Poincaré como grupos asociados a las partículas relativistas.

En las líneas siguientes se introducirán las nociones básicas de la Teoría de Lie, sin profundizar en sus demostraciones, y particularizando para los grupos matriciales de Lie (puesto que muchos grupos de los utilizados, como los anteriormente mencionados, tienen una representación matricial y son subgrupos de $GL(n;\mathbb{R})$ o $GL(n;\mathbb{C})$). La exposición será superficial con la única intención de asentar nociones básicas que servirán de ayuda en las secciones prácticas. Los libros de referencia son [14] y [20] apoyado en [16].

Grupo matricial de Lie

Definición 2.69. Un **grupo de Lie** es una variedad G diferenciable con estructura de grupo y tal que las operaciones de grupo son diferenciables,

$$G \times G \longrightarrow G : (x, y) \mapsto xy$$

$$G \longrightarrow G : x \mapsto x^{-1}$$

Las propiedades de grupo se extienden de manera natural: un **homomorfismo** entre grupos de Lie $\phi : G \longrightarrow F$ se define como homomorfismo diferenciable entre grupos.

Comentario 2.70.

1. El espacio de matrices de dimensión $n \times n$ sobre el cuerpo de los complejos se denota por $M_n(\mathbb{C})$. A la hora de trabajar con matrices se hace la identificación $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$.
2. El grupo de matrices complejas invertibles de dimensión $n \times n$ se denota por $GL(n;\mathbb{C})$ y se conoce como **grupo lineal general** sobre $\mathbb{C}$. Se puede denotar como $GL(\mathbb{C})$ prescindiendo de la dimensión.

Definición 2.71. $G \subset GL(n;\mathbb{C})$ es **grupo matricial de Lie** si es subgrupo de $GL(n;\mathbb{C})$ y además verifica que, para toda sucesión de matrices $\{A_n\}$ de G y tal que converja en A, entonces o $A \in G$ o A es no invertible (y por tanto, $A \notin GL(n;\mathbb{C})$).

De forma sintética se dice que "un grupo matricial de Lie es un **subgrupo cerrado** de $GL(n;\mathbb{C})$".

Nota. Como se mencionó en el Comentario anterior, las propiedades matriciales se dan bajo la identificación con $\mathbb{C}^{n^2}$. Por tanto, la *convergencia* de matrices se sobrentiende como convergencia término a término: $(A_n)_{ij} \to (A)_{ij}$.

Definición 2.72.

1. Un grupo matricial de Lie es **compacto** si es compacto en el sentido usual de la Topología como subconjunto de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Un grupo matricial de Lie es **conexo** si para cada par de matrices $A, B \in G$ existe un camino continuo $A(t)$, con $0 \leq t \leq 1$ y tal que $A(0) = A$ y $A(1) = B$.

Comentario 2.73. En la segunda definición se ha introducido la noción de conexión como *conexión por caminos* y no como *conexión* en su sentido topológico.

Ejemplo 2.74 (**Grupos clásicos de Lie compactos**).

- **Grupo unitario** $U(n)$: es el subgrupo de matrices unitarias sobre $GL(n;\mathbb{C})$. Para la matriz $A \in U(n)$, la condición unitaria equivale a que los vectores columna son ortonormales entre sí, esto es:

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{A_{lj}} A_{lk} = \delta_{jk}$$

  donde $\overline{A}_{lj}$ denota la conjugación compleja de A_{lj} y δ_{jk} la *delta de Kronecker* ($\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ o $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$).

  Si A^+ denota la matriz adjunta de A, entonces $(A^+)_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Por tanto, para $A \in U(n)$ se verifica $A^+ A = I$ o $A^+ = A^{-1}$.

- **Grupo unitario especial** $SU(n)$: es el subgrupo de matrices unitarias con determinante 1.

Tanto $SU(n)$ como $U(n)$ son subgrupos cerrados de $GL(n;\mathbb{C})$, y por tanto, grupos matriciales de Lie.

- **Grupo ortogonal** $O(n)$: es el subgrupo de matrices ortogonales sobre $GL(n;\mathbb{R})$. En este caso la matriz adjunta se traduce como matriz traspuesta: $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. De este modo, $A^t = A^{-1}$.

  Por otro lado, $\det(A^t A) = \det(A)^2 = \det(I) = 1$. Es decir, las matrices ortogonales poseen determinante ± 1.

- **Grupo ortogonal especial** $SO(n)$: Es el subgrupo de matrices ortogonales y con determinante 1 sobre $GL(n;\mathbb{R})$

Igual que para el caso complejo, tanto $SO(n)$ como $O(n)$ son subgrupos cerrados de $GL(n;\mathbb{R})$ y por tanto son grupos matriciales de Lie.

Todos estos grupos son **compactos**. En primer lugar, un grupo matricial de Lie es compacto si, y solo si, es cerrado como conjunto en $M_n(\mathbb{C})$ o $M_n(\mathbb{R})$ y es acotado (en virtud del Teorema de Heine-Borel). En este caso, es sencillo probar que cada subgrupo es cerrado y satisfacen la cota $|A_{jk}| \leq 1$.

Estos grupos también son **conexos** a excepción de $O(n)$: basta considerar que por ser matrices unitarias se pueden diagonalizar y se puede construir de manera sencilla un camino $U(t)$ tal que para cada $t \in [0, 1]$ $U(t)$ sea matriz diagonal y unitaria (y con determinante 1) que conecte el la matriz identidad con cualquier otra matriz diagonal. [14].

Álgebra de Lie

La variedad de un grupo de Lie suele tener una estructura complicada que se aleja de la forma lineal; sin embargo, se puede restringir el trabajo sobre el espacio tangente en un entorno de la identidad. Debido a la estructura diferenciable, el espacio tangente contiene suficiente información respecto al grupo como para suponer una buena aproximación. Esta idea se conoce como **linealización** [16] y motiva la definición siguiente, de álgebra de Lie.

Definición 2.75. Un **algebra de Lie compleja finita-dimensional** es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ complejo de dimensión finita junto a una aplicación $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, conocida como **corchete de Lie**, que verifica:

1. $[\cdot,\cdot]$ es bilineal.
2. $[\cdot,\cdot]$ es antisimétrica (*skew-symmetric*): $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo elemento $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. y verifica la identidad de Jacobi, para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Un **homomorfismo de álgebras de Lie** es una aplicación lineal $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ entre dos álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ y $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ tal que respeta la estructura de corchete, es decir, $[\Phi(X), \Phi(Y)]_{\mathfrak{h}} = \Phi([X, Y]_{\mathfrak{g}})$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ejemplo 2.76 (**Álgebra de Lie sobre un espacio matricial**)**.** Sobre el espacio $GL(n; \mathbb{C})$ se puede definir el corchete de Lie como $[X, Y] = XY - YX$ **conmutador** para las matrices X e Y. El espacio de matrices equipado con este corchete tiene estructura de álgebra de Lie.

Álgebra de Lie de un grupo de Lie

Para dotar de estructura de álgebra de Lie al espacio tangente se puede proceder de la siguiente manera. Sea M variedad diferenciable y T_pM el espacio tangente de M en el punto $p \in M$. Entonces, los **vectores** del espacio tangente, $v \in T_pM$, se pueden ver como operadores de derivación sobre funciones diferenciables sobre la variedad (denotadas como $\mathcal{C}^\infty(M)$). Esto es,

$$v : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto df_p(v)$$

que es lineal y verifica la regla de derivación para el producto. Por otro lado, se define un **campo de vectores** como una aplicación X sobre la variedad que lleva puntos en vectores del espacio tangente, $X(p) \in T_pM$. Otra interpretación, más útil para el propósito de esta sección, es interpretar el campo de vectores como una aplicación $X : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $f \longmapsto X(f)(p) = X_p(f)$ donde actúa como derivación sobre f en el punto p de la variedad.

El siguiente paso es construir una estructura de álgebra de Lie sobre la variedad M. Para ello, si se denota por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de campos de vectores sobre la variedad M, se define el **corchete sobre campos** como $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ que verifica las propiedades del corchete de Lie [20, §2.8].

Por otro lado, si G es grupo de Lie, se toma la aplicación de traslación por izquierda como G $L_z : G \longrightarrow G : \ x \longmapsto zx$. De esta forma, se puede inducir una aplicación lineal en el espacio tangente como $D_xL_z : T_xG \longrightarrow T_{zx}G$, diferencial de L_z en el punto x. Bajo estas consideraciones, si G denota un grupo de Lie, entonces se construye el conjunto $\mathfrak{X}^L(G)$ de **campos de vectores**

invariantes por traslación por la izquierda como aquel conjunto de elementos $X \in \mathfrak{X}(G)$ tales que $(D_y L_z)X(y) = X(zy)$ para $y, z \in G$.

Este conjunto equipado con el corchete anterior define una buena estructura de álgebra de Lie. Es más, si se considera la aplicación de evaluación $\mathfrak{X}^L(G) \longrightarrow T_1G : \; X \longmapsto X_1$, donde 1 denota al elemento unidad de G, entonces esta aplicación define un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{X}^L(G)$ y el espacio tangente en la identidad T_1G. [20, §5.4]. Se concluye que,

Proposición 2.77. *Sea G grupo de Lie de dimensión n, entonces $\mathfrak{X}^L(G)$ es un álgebra de Lie de dimensión n con el corchete sobre campos de vectores. Este álgebra se denota por $\mathfrak{g}$.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en los comentarios de [20, §5.4] □

Se ha obtenido un álgebra de Lie a través del campo de vectores asociado al grupo de Lie G; sin embargo, aún no se ha establecido una conexión directa entre álgebra y grupo. Esta conexión existe y es conocida como **aplicación exponencial**.

Sea $\alpha : (a, b) \longrightarrow G$ curva diferenciable sobre el grupo de Lie G. Para $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice que α es curva integral de X si verifica $X_{\alpha(t)} = \alpha'(t)$, $\forall t \in (a, b)$. Estas curvas existen siempre y son únicas. Si se escoge $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ entonces se denota a la curva integral por $\gamma_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$ que es homomorfismo de grupos, con $(\mathbb{R}, +)$ grupo aditivo. Al conjunto de estas curvas integrales se las conoce como **grupo uniparamétrico** asociado a $\mathfrak{X}^L(G)$. Esta definición y sus propiedades motiva la definición siguiente,

Definición 2.78. Para γ_X curva integral asociada a $X \in \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{X}^L(G)$, tal que pasa por $1 \in G$ en tiempo $t = 0$ se define la **aplicación exponencial** como,

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G : \; X \longmapsto \gamma_X(1).$$

Si se define la **exponencial matricial** como la aplicación $\exp : GL(n; \mathbb{C}) \longrightarrow GL(n; \mathbb{C})$ tal que $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$, entonces se puede vincular la aplicación exponencial de la definición 2.78 con la exponencial matricial sobre los grupos matriciales de Lie, subgrupos de $GL(n; \mathbb{C})$. Todos estos detalles están en [20, §5.4].

Proposición 2.79. *Sea G grupo matricial de Lie. El álgebra de Lie de G, denotada por $\mathfrak{g}$, es el conjunto de matrices X tal que $e^{tX} \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. La demostración es sencilla a través de los comentarios previos para álgebras de Lie sobre grupos matriciales. Se pueden encontrar más detalles en [14, §3.3]. □

Ejemplo 2.80. Se considera el grupo $U(n) \subset GL(n;\mathbb{C})$. Si $Q(t)$ denota una curva de matrices unitarias con $Q(0) = I$ y $\left.\frac{d}{dt}Q(t)\right|_{t=0} = A$, diferenciando la ecuación $I = Q^+Q$ se obtiene,

$$0 = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q^+\right) Q(0) + Q^+(0)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q\right) = A^+ + A.$$

De este modo se puede identificar el álgebra de Lie de $U(n)$ con las matrices antihermíticas (*skew-Hermitian*), $A^+ = -A$, junto con el conmutador matricial.

Ejemplo 2.81. Con un argumento similar se puede obtener el álgebra de Lie respecto a cada grupo matricial. Véase el Cuadro 1. (La traza de la matriz A se denota por $\mathrm{tr}(A)$)

Grupo	**Álgebra de Lie asociada**	**Condiciones sobre el álgebra**
$SL(n;\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$	$\mathrm{tr}(A) = 0$
$SL(n;\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$	$\mathrm{tr}(A) = 0$
$O(n)$	$\mathfrak{o}(n)$	$A^t = -A$
$SO(n)$	$\mathfrak{so}(n)$	$A^t = -A$
$U(n)$	$\mathfrak{u}(n)$	$A^+ = -A$
$SU(n)$	$\mathfrak{su}(n)$	$A^+ = -A$ y $\mathrm{tr}(A) = 0$

Cuadro 1: Clasificación de álgebras y grupos de Lie para los grupos más comunes

Comentario 2.82 (Generadores del álgebra). Puesto que el álgebra $\mathfrak{g}$ asociada al grupo de Lie G posee dimensión finita n se puede tomar una base finita de este espacio vectorial. Esta base se conoce como un **generador infinitesimal** del álgebra. Como ejemplo,

- **Generador de** $SO(2)$: El grupo está parametrizado por un único valor (quedará más claro en §3.1.1)), por tanto, la dimensión del álgebra será 1. Por las condiciones impuestas sobre el álgebra $\mathfrak{so}(2)$ el generador más sencillo solo puede ser

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  No obstante, se puede demostrar que para un grupo de Lie compacto y conexo la aplicación exponencial es sobreyectiva; de este modo, los elementos del grupo $SO(2)$ pueden expresarse en función de este generador según $A = e^{\theta J}$, para $\theta \in [0, 2\pi)$. Un cálculo sencillo sobre las potencias del generador demuestra que,

$$e^{\theta J} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

  Y por tanto se recupera el elemento del grupo como matriz de rotación. Esta idea de "generar" elementos del grupo con el generador es la que subyace al nombre de *generador infinitesimal.*

- **Generadores del grupo** $SO(3)$: el grupo se puede parametrizar con tres valores (θ, ϕ, ψ), conocidos por *ángulos de Euler* que miden rotaciones entorno a cada eje [11, §7]. Su comprobación es sencilla cuando se asocia el grupo con las rotaciones tridimensionales (§3.1.3). Así pues, el álgebra tiene dimensión 3 y estará dada por los siguientes generadores,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Es fácil de ver que dichos generadores verifican las condiciones del álgebra, son antisimétricos, independientes y por tanto constituyen una base de $SO(3)$.

Otro hecho importante de los generadores es que establecen las reglas de conmutación de todo elemento. Es decir, conocidas las conmutaciones de los generadores se obtienen todas las conmutaciones de elementos del álgebra. Como ejemplo, las relaciones de conmutación para el grupo $SO(3)$ son

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$$

donde ϵ_{ijk} denota el tensor de *Levi-Civita*.

Comentario 2.83. Los generadores infinitesimales ocupan una posición importante dentro de la Física, y en particular, de la Mecánica Cuántica. Como ejemplo, los generadores anteriores, J para $\mathfrak{so}(2)$ y $\{J_i \,:\, i = 1, 2, 3\}$ para $\mathfrak{so}(3)$, son llamados **operadores de momento angular** por su relación con las rotaciones en el plano y en el espacio, respectivamente. Otros generadores importantes son el **operador hamiltoniano** o energía, asociado al desplazamiento temporal a través de la ecuación de Schrödinger, y el **operador momento**, asociado con las traslaciones [18]. Estos generadores aparecen en el grupo de Poincaré y en el grupo Euclídeo cuando se le añade el desplazamiento temporal (grupo de Galileo). Conviene notar que la forma más común de expresar los operadores en la bibliografía Física es junto a un factor i, unidad imaginaria (está relacionado con la necesidad de definir operadores hermíticos o antihermíticos dentro del marco de la Mecánica Cuántica [11]).

Representaciones

Se puede definir una **representación** sobre un grupo matricial de Lie como un homomorfismo $G \longrightarrow GL(V)$ con V espacio vectorial de dimensión $\dim(V) = m < \infty$. De la misma manera, se puede definir una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $GL(V)$. Las propiedades de representaciones descritas en subsecciones anteriores se aplican de manera natural sobre los grupos de Lie y álgebras de Lie.

Es de interés la siguiente proposición que identifica de manera única la representación del grupo matricial de Lie con la representación del álgebra de Lie asociada.

Proposición 2.84. *Sea G grupo matricial de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, $\Pi : G \longrightarrow GL(V)$ representación de G de dimensión finito-dimensional. Entonces, existe una única representación $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow GL(V)$, que actúa sobre el mismo espacio V, dada por*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$$

para todo elemento $X \in \mathfrak{g}$. Además, la representación π puede obtenerse según

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\Big|_{t=0}$$

que verifica

$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$$

para $X \in \mathfrak{g}$ y $A \in G$.

Demostración. Esta proposición se corresponde con [14, Proposition 4.4] y se deja la demostración en este texto. □

Para finalizar el apartado se mencionan varios resultados de interés sobre representaciones,

Proposición 2.85.

1. *Si G es grupo matricial de Lie conexo, la representación Π del grupo es irreducible si y solo si π es irreducible.*
2. *Si G es grupo matricial de Lie compacto entonces toda representación finito-dimensional es completamente reducible.*

Demostración. Estas dos proposiciones se corresponden con [14, Proposition 4.5] y [14, Proposition 4.28]. □

2.6. Técnica de representaciones inducidas.

Esta técnica se centra en la construcción de representaciones unitarias en grupos localmente compactos a través de representaciones irreducibles de subgrupos cerrados. Por tanto, se dirá que se induce la representación en el grupo a partir de estos últimos.

En un primer apartado se introducirán las ideas generales sobre la construcción de representaciones inducidas; posteriormente se enunciará el Teorema de Reciprocidad de Frobenius, que establece un resultado importante sobre representaciones inducidas en grupos compactos. Por último se aborda una técnica particular conocida como *Método de Mackey* debido a G. W. Mackey [1, 2] . En ella se restringe el análisis a aquellos grupos que poseen subgrupos normales y abelianos. Las líneas siguientes siguen [10, §6].

Construcción inductiva

Sea G grupo localmente compacto equipado con medida de Haar η por la izquierda. Sea $H \subset G$ subgrupo cerrado y σ una representación unitaria de H sobre $\mathcal{H}_\sigma$ espacio de representación. Sobre este espacio se denota el producto interno por $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$. Se define además $q : G \longrightarrow G/H$ como la aplicación cociente.

En las líneas que siguen, el espacio de trabajo será $\mathcal{F}_0$ dado por

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{C}(G, \mathcal{H}_\sigma) : \ q(\mathrm{sop}(f)) \text{ compacto y } f(x\xi) = \sigma(\xi^{-1})f(x) \text{ con } x \in G, \ \xi \in H\} \tag{9}$$

Nota. Recuérdese que $\mathcal{C}(G, \mathcal{H}_\sigma)$ es el espacio de funciones continuas $f : G \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$; y $\mathcal{C}_C(G, \mathcal{H}_\sigma)$ denota al conjunto de funciones continuas de soporte compacto. Además, se introduce la notación $\mathrm{sop}(f)$ que hace referencia al soporte de la función f.

Proposición 2.86 (**Caracterización**). *Sea* $\alpha : G \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ *continua de soporte compacto, entonces*

$$f_\alpha(x) = \int_H \sigma(\eta)\alpha(x\eta)\, d\eta$$

está en $\mathcal{F}_0$ *y es uniformemente continua en* G. *Recíprocamente, para todo elemento* $f \in \mathcal{F}_0$ *existe una función* $\alpha \in C_C(G, \mathcal{H}_\sigma)$ *tal que* $f = f_\alpha$.

Demostración. Es fácil ver que $q(\text{sop}(f)) \subset q(\text{sop}(\alpha))$ y además,

$$f_\alpha(x\xi) = \int_H \sigma(\eta)\alpha(x\xi\eta)\, d\eta = \int_H \sigma(\xi^{-1}\eta)\alpha(x\eta)\, d\eta = \sigma(\xi^{-1})f_\alpha(x)$$

donde se ha utilizado la invarianza por traslación de la medida de Haar. Por tanto, para tener la primera parte bastaría ver la continuidad uniforme sobre G.

Sea N entorno compacto de 1 en G, sea $K \subset G$ compacto tal que $q(K) = q(\text{sop}(\alpha))$ ([10, Lema 2.46]). Se define, $J = K^{-1}N(\text{sop}(\alpha)) \cap H$, compacto en H y no nulo. Ahora, debido a la continuidad de α, fijado $\epsilon > 0$ existe un entorno $N_\epsilon \subset N$ de 1 tal que $\|\alpha(x) - \alpha(y)\|_\sigma < \epsilon$ siempre y cuando $xy^{-1} \in N_\epsilon$. De esta manera, se tiene que para $x \in K$ y $xy^{-1} \in N_\epsilon$,

$$\|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)\|_\sigma = \left\| \int_J \sigma(\eta)\left(\alpha(x\eta) - \alpha(y\eta)\right)\, d\eta \right\|_\sigma \leq \epsilon \left\| \int_J \sigma(\eta)\, d\eta \right\| \leq \epsilon\kappa(J)$$

Donde $\kappa(J)$ es constante positiva: puesto que J es compacto, la integral está bien definida y es finita. Se concluye que f es uniformemente continua en K debido a la compacidad de K. Pero, ya que $f(x\xi) = \sigma(\xi^{-1})f(x)$, para $\xi \in H$, se tiene la compacidad en KH; y puesto que $f_\alpha = 0$ fuera de él, se consigue la continuidad uniforme en todo G.

Queda ver la unicidad, para ello se supone $f \in \mathcal{F}_0$, se puede encontrar $\phi \in \mathcal{C}(G)$ con soporte compacto ([10, Lema 2.47]) tal que $\int_H \phi(x\xi)\, d\xi = 1$ para $x \in \text{sop}(f)$. Entonces, definiendo $\alpha = \phi f$,

$$f_\alpha(x) = \int_H \phi(x\eta)\alpha(x\eta)\, d\eta = \int_H \phi(x\eta)\sigma(\eta)f(x\eta)d\eta = \int_H \phi(x\eta)f(x)d\eta = f(x)$$

Y por tanto, se tiene la igualdad $f = f_\alpha$ para todo $x \in \text{sop}(f)$. Puesto que $\text{sop}(f_\alpha) \subset \text{sop}(\alpha)$, se tiene la igualdad en todo G. □

Se considera la acción del grupo G sobre $\mathcal{F}_0$ por **traslación por la izquierda**: $f \longrightarrow L_x f$. (Ejemplo 2.38). Esto define una representación unitaria de G siempre y cuando se construya un producto interno en $\mathcal{F}_0$ que convierta a L_x en isometría. Si G/H admite una medida μ de Radon G-invariante, entonces se puede obtener con facilidad: si $f, g \in \mathcal{F}_0$ entonces para $x \in G$ y $\xi \in H$,

$$\langle f(x\xi), g(x\xi)\rangle_\sigma = \langle \sigma(\xi^{-1})f(x), \sigma(\xi^{-1})g(x)\rangle_\sigma = \langle f(x), g(x)\rangle_\sigma$$

ya que σ es unitaria. Por tanto, $\langle f(x), g(x)\rangle_\sigma$ solo depende de las clases laterales $q(x) \in G/H$ y consecuentemente es función $\mathcal{C}(G/H)$ de soporte compacto. De este modo, se define

$$\langle f, g\rangle = \int_{G/H} \langle f(x), g(x)\rangle_\sigma d\mu(xH) \tag{10}$$

Es producto interno en $\mathcal{F}_0$. De esta manera, se puede extender $\mathcal{F}_0$ a un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ (*completion of* $\mathcal{F}_0$). De la misma manera, L_x se extiende a un operador unitario en $\mathcal{F}$ que hace el papel de representación unitaria de G. A esta representación construida de esta manera se la conoce por **representación inducida** y se denota por $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ y actúa como traslación por la izquierda,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) : G \longrightarrow U(\mathcal{F}) : \ g \longmapsto \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)(g) \text{ y tal que } [\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)(g)]f(x) = f(g^{-1}x) \tag{11}$$

Por otro lado, si G/H no acepta una medida G-invariante se puede optar por otra construcción de la representación inducida. Sin embargo, la idea es la misma: extender la representación de $\mathcal{F}_0$ a $\mathcal{F}$ [10, §6.1].

Ejemplo 2.87 (**Inducción a través de la representación trivial**)**.** Con las hipótesis anteriores, si $\sigma : H \longrightarrow \mathbb{C}$ es representación trivial entonces las funciones de $\mathcal{F}_0$ son constantes dentro de cada clase lateral; esto es, para $x \in G$ y $\forall \xi \in H$, $f(x\xi) = \sigma(\xi)^{-1} f(x) = f(x)$. Por tanto, se puede tomar la identificación $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{C}_C(G/H)$. Por la construcción inductiva, es fácil ver que $\mathcal{F} \cong L^2(G/H)$ y $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ es la representación natural de G por traslación por la izquierda sobre $L^2(G/H)$.

Para terminar este apartado se enuncia la siguiente proposición que juega un papel relevante a la hora de clasificar las representaciones.

Proposición 2.88. *Si σ y σ' son representaciones unitariamente equivalentes de H, entonces $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ y $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma')$ son representaciones unitariamente equivalentes de G. Si $\{\sigma_i\}$ es familia de representaciones de H, $\mathrm{Ind}_H^G(\bigoplus \sigma_i)$ es unitariamente equivalente a $\bigoplus \mathrm{Ind}_H^G(\sigma_i)$.*

Demostración. Se corresponde con [10, Proposition 6.9] □

Teorema de Reciprocidad de Frobenius

Teorema 2.89 (**Teorema de Reciprocidad de Frobenius**)**.** *Sea G grupo compacto, H subgrupo cerrado y π representación irreducible y unitaria de G. Sea σ representación irreducible y unitaria de H. Entonces,*

$$\mathcal{C}(\pi, \mathrm{ind}_H^G(\sigma)) \cong \mathcal{C}(\pi|_H, \sigma), \ \textit{ y además } \mathrm{mult}(\pi, \mathrm{ind}_H^G(\sigma)) = \mathrm{mult}(\sigma, \pi|_H).$$

Demostración. Bastaría con probar $\mathcal{C}(\pi, \mathrm{ind}_H^G(\sigma)) \cong \mathcal{C}(\pi|_H, \sigma)$ pues la segunda parte se establece de manera directa a través de la Proposición 2.62 sobre grupos compactos. Los detalles están en [10, Th. 6. 10]. □

El Teorema de Reciprocidad de Frobenius junto a la proposición (2.88) ofrecen una manera de clasificar todas las componentes irreducibles de una representación inducida del grupo compacto. Históricamente este hecho motivó la generalización de esta técnica de representaciones [4].

Quedará más claro su significado en §3.1.3 *Grupo SO(3)* en el Corolario 3.11. En él se utiliza el Teorema de Reciprocidad para dar una descomposición de la representación de traslación del grupo como suma directa de funciones unitarias e irreducibles con multiplicidad 1.

Método de Mackey

Los **Sistemas de Imprimitividad** (*Imprimitivity Systems*) son la herramienta fundamental para construir las representaciones inducidas. No obstante, en este texto no se profundizará en ella y se darán únicamente los resultados. Para profundizar, [10, §§6.4, 6.5], [4, §6].

Sea G grupo localmente compacto y N un subgrupo normal, abeliano y cerrado de G. Se toma la acción de G sobre N como acción por conjugación

$$G \times N \longrightarrow N : (x, n) \longmapsto x^{-1}nx$$

Esta aplicación induce una acción de G sobre el grupo dual $\hat{N}$,

$$G \times \hat{N} \longrightarrow \hat{N} : (x, \nu) \longmapsto x\nu, \text{ dada por } \langle n, x\nu\rangle \equiv \langle x^{-1}nx, \nu\rangle \tag{12}$$

Definición 2.90.

1. Para cada $\nu \in \hat{N}$, se llama **estabilizador** de ν a

$$G_\nu = \{x \in G : x\nu = \nu\}.$$

2. Se denota por O_ν a la **órbita** de ν por G,

$$O_\nu = \{x\nu : x \in G\}.$$

Comentario 2.91.

1. El estabilizador G_ν es el conjunto de elementos de G que dejan invariante a $\nu \in \hat{N}$ a través de la acción anterior. Es subgrupo cerrado de G y se verifica que $N \subset G_\nu$
2. La acción de G no es transitiva, para ello basta ver que $O_1 = \{1\}$ o equivalentemente $G_1 = G$. De este modo, las órbitas pueden tomar una forma muy compleja.

Definición 2.92. Se dice que la acción de G es **regular** en $\hat{N}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El espacio de órbitas es numerablemente separable. Esto es, si existe una familia numerable $\{E_j\}$ de conjuntos Borel G-invariantes de $\hat{N}$ tal que cada órbita se puede escribir como intersección de estos conjuntos.
2. Para cada $\nu \in \hat{N}$ la aplicación $G/G_\nu \longrightarrow O_\nu : xG_\nu \longmapsto x\nu$ es homeomorfismo.

Los resultado principales para este apartado son,

Teorema 2.93. *Sea G grupo localmente compacto y N subgrupo cerrado, abeliano y normal de G. Se supone además que G actúa regularmente sobre $\hat{\mathrm{N}}$, grupo dual de N.*

1. *Si π es representación unitaria e irreducible de G, entonces existe un $\nu \in \hat{N}$ y σ representación irreducible de G_ν que verifica $\sigma(n) = \langle n, \nu \rangle I$ para $n \in N$ y tal que π es unitariamente equivalente a $\mathrm{Ind}_{G_\nu}^G(\sigma)$.*
2. *Recíprocamente, si $\nu \in \hat{N}$ y σ es representación irreducible de G_ν tal que $\sigma(n) = \langle n, \nu \rangle I$ para $n \in N$, entonces $\pi = \mathrm{Ind}_{G_\nu}^G(\sigma)$ es irreducible. Si σ' es otra representación de G_ν de este tipo tal que $\mathrm{Ind}_{G_\nu}^G(\sigma)$ y $\mathrm{Ind}_{G_\nu}^G(\sigma')$ son unitariamente equivalentes, entonces σ y σ' son unitariamente equivalentes.*

Demostración. La demostración de cada parte se corresponde, respectivamente, a [10, Th. 6.38 y Th. 6.39]. Estos resultados necesitan los resultados previos de [10, §6.5]. □

Proposición 2.94. *Dado $\nu \in \hat{N}$ y un homomorfismo continuo $\tilde{\nu} : G_\nu \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $\tilde{\nu}|_N = \nu$. Si ρ es una representación irreducible de G_ν/N, entonces se puede construir una representación irreducible de G_ν en H_ρ*

$$\sigma(y) = \tilde{\nu}(y)\rho(yN)$$

cuya restricción a N es $\sigma(n) = \langle n, \nu \rangle I$. Es más, todas las representaciones irreducibles de G_ν son de esta forma.

Demostración. Este resultado se corresponde a [10, Proposition 6.40]. □

Método de Mackey de productos semidirectos

Un caso particular y de gran relevancia se da cuando G se escribe como producto semidirecto de un subgrupo N normal y abeliano y otro subgrupo H. Los grupos Euclídeo y de Poincaré son de este tipo, como productos de traslaciones y rotaciones.

Definición 2.95. Un grupo topológico G se dice que es **producto semidirecto** de N y H subgrupos cerrados, si N es normal en G y la aplicación $N \times H \longrightarrow G : \quad (n, h) \longmapsto nh$ es un homeomorfismo. Se denota como

$$G = N \rtimes H.$$

De este modo, cada elemento de G puede escribirse de forma única como nh y la ley del grupo toma la forma de

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1[h_1 n_2 h_1^{-1}], h_1 h_2). \tag{13}$$

Comentario 2.96. Conviene notar el papel que juega cada subgrupo, H y N, en el grupo G. En profundidad, bajo la definición anterior H actúa sobre N a través de $n \longmapsto hnh^{-1}$ para cada $h \in H$; y por tanto, la regla del grupo (13) se ve mediada por esta aplicación. En comparación, para un grupo A formado por producto directo $B \times C$ esta acción es trivial,

$$(b_1, b_1)(c_2, c_2) = (b_1 b_2, c_1 c_2).$$

En este caso los subgrupos B y C toman un papel simétrico mientras que en el caso anterior H y N toman un papel distinto. El nombre "semidirecto" alude a esta comparación con el producto directo.

Definición 2.97. Sea $G = N \rtimes H$ con N abeliano y normal en G y sea $\nu \in \hat{N}$ fijo. Se define el **grupo pequeño** (*little group*) H_ν como

$$H_\nu = G_\nu \cap H.$$

Comentario 2.98. Nótese que el grupo pequeño H_ν se constituye por los elementos de H que dejan invariante a $\nu \in \hat{N}$. Se puede ver que $G_\nu = N \rtimes H_\nu$, o equivalentemente, $H_\nu \cong G_\nu / N$.

Bajo la caracterización anterior, se puede extender el carácter ν como homomorfismo en G_ν

$$\tilde{\nu} : G_\nu \longrightarrow \mathbb{T} : (n, h) \longmapsto \tilde{\nu}(n, h) \equiv \nu(n) = \langle n, \nu \rangle$$

En profundidad, la extensión está bien definida por la condición de producto semidirecto. Esto es, dado un elemento cualquiera de G_ν siempre se podrá escribir como (n, h); es más,

$$\tilde{\nu}((n_1, h_1)(n_2, h_2)) = \tilde{\nu}((n_1[h_1 n_2 h_1^{-1}], h_1 h_2)) = \langle n_1[h_1 n_2 h_1^{-1}], \nu \rangle = \langle n_1, \nu \rangle \langle h_1 n_2 h_1^{-1}, \nu \rangle$$

Por otro lado, $\tilde{\nu}((n_1, h_1)(n_2, h_2)) = \langle n_1, \nu \rangle \langle n_2, \nu \rangle = \tilde{\nu}(n_1, h_1)\tilde{\nu}(n_2, h_2)$ que confirma que es homomorfismo.

De esta manera, si ρ es una representación irreducible de H_ν, se obtiene la siguiente representación de G_ν por la aplicación del teorema previo,

$$(\nu\rho)(nh) = \langle n, \nu \rangle \rho(h).$$

Por último, los teoremas anteriores quedan como:

Teorema 2.99 (de Mackey). *Sea $G = N \rtimes H$, con N abeliano, y tal que G que actúa regularmente sobre $\hat{N}$. Entonces, si se escoge un carácter del grupo dual, $\nu \in \hat{N}$, y se toma ρ representación irreducible y unitaria del grupo pequeño H_ν, se construye la representación inducida $\mathrm{Ind}_{G_\nu}^{G}(\nu\rho)$ sobre G que es unitaria e irreducible. Y toda representación unitaria e irreducible de G es unitariamente equivalente a una representación de este tipo.*

Es más, se verifica que $\mathrm{Ind}_{G_\nu}^{G}(\nu\rho)$ y $\mathrm{Ind}_{G_\nu}^{G}(\nu'\rho')$ son unitariamente equivalentes si, y solo si, ν y ν' pertenecen a la misma órbita (esto es, si $\nu' = x\nu$) y para $x \in G$, $h \longmapsto \rho(h)$ y $h \longmapsto \rho'(x^{-1}hx)$ son representaciones equivalentes de H_ν.

Este es el teorema principal de esta sección. Con él se establece una clasificación completa de todas las representaciones irreducibles de G en términos de las representaciones irreducibles de N y las representaciones irreducibles del grupo pequeño. Es más, toda representación unitaria e irreducible de G se puede escribir como $\rho_{\nu,\sigma}$; y para dos puntos de la misma órbita las representaciones inducidas son equivalentes.

3. Aplicaciones

En esta sección se aplicará la teoría desarrollada en §2 para obtener las representaciones de ciertos grupos, unos compactos y otros localmente compactos, relacionados con el grupo de Poincaré.

Con respecto a los grupos compactos, se calculan las representaciones de los grupos de rotaciones del plano y del espacio tridimensional, $SO(2)$ y $SO(3)$ respectivamente, así como la del recubridor universal, $SU(2)$. Conviene notar la importancia de este último, que está relacionado con el espín de partículas.

El primer grupo a tratar será $SO(2)$, el grupo más sencillo que motiva el inicio de esta sección. La obtención de las representaciones de este grupo es inmediata debido a su estructura abeliana y compacta. El análisis de los demás grupos seguirá el desarrollo estándar, esto es, obtener las representaciones irreducibles y unitarias de $SU(2)$ para luego vincular este grupo con $SO(3)$ (como se puede ver en las notas de Folland [10, §5.4] y Deitmar [13, §7.4]). La vinculación entre ambos grupos pondrá de manifiesto la naturaleza de $SU(2)$ como *grupo recubridor* de $SO(3)$.

En último lugar se presenta al grupo Euclídeo, $E(n)$, grupo localmente compacto. El estudio de este grupo tendrá mayor profundidad por dos motivos: primero, servirá de ejemplo práctico para la inducción de representaciones a través del contenido en §2.6 *Método de Mackey*; en segundo lugar, tomará el papel de grupo pequeño para las órbitas de *tipo luz* en el grupo de Poincaré (trabajo que se apoyará en las notas de Folland [10, §6.7]).

Los libros de Folland [10, 12] y Deitmar [13] son los textos fundamentales para el desarrollo de esta sección. No obstante, también se utilizará el libro de Hall [14] y Gilmore [16] debido a la estructura de Lie de estos grupos, así como el libro de Tung [11] para ver el contenido físico de cada grupo.

3.1. Grupos compactos

3.1.1. Grupo SO(2)

Es el grupo de matrices 2×2 invertibles, ortogonales y unitarias (Ejemplo 2.74). Se puede caracterizar matricialmente vinculándolo con las rotaciones en el plano. Esta caracterización está dada por

$$SO(2) = \{R(\theta) : \ \theta \in [0, 2\pi)\} \quad \text{con } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

El razonamiento es el siguiente: se escoge un elemento de $SO(2)$, una matriz 2×2, y se le impone la ortogonalidad de las columnas. Esto es, para la matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

se obtiene la restricción

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

La solución al sistema es $a = d$ y $b = -c$ Se le pide además que el determinante valga 1: $a^2 + b^2 = 1$. Esta condición permite parametrizar por la variable $\theta \in [0, 2\pi)$ con $a = \cos\theta$ y $b = \sin\theta$ y obtener la caracterización matricial anterior.

Comentario 3.1. Las rotaciones en el plano definen un grupo. El elemento neutro es $R(0)$; y el inverso es $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$ debido a la propiedad $R^{-1} = R^t$ y la paridad de las funciones trigonométricas. Por otro lado, la operación del grupo está dada como $R(\theta)R(\phi) = R(\theta + \phi)$, ejercicio sencillo de multiplicación de matrices y reglas trigonométricas. Se concluye además que el grupo es **abeliano**.

La **acción** natural del grupo $SO(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$ está dada como: para $R(\theta) \in SO(2)$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$R(\theta)(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

No es más que la rotación del elemento (x, y) por la matriz $R(\theta)$. Esta acción permite identificar $SO(2)$ con $\mathbb{T}$, grupo circular definido como $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Para ello, basta escoger la acción sobre el punto $(1, 0)$ que caracteriza de manera unívoca a $R(\theta)$:

$$R(\theta) \longmapsto R(\theta)(1, 0) = (\cos\theta, \sin\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$$

Representaciones

Con la identificación anterior, y bajo la naturaleza abeliana del grupo, el grupo dual de $SO(2) \cong \mathbb{T}$ es $\mathbb{Z}$ aditivo (Ejemplo 2.46). Y si $m \in \mathbb{Z}$ es elemento de $\widehat{SO(2)}$ y $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, entonces $\langle e^{i\theta}, m\rangle = e^{im\theta}$. Este hecho queda enunciado en la siguiente proposición,

Proposición 3.2. *Las representaciones irreducibles y unitarias del grupo $SO(2)$ están dadas como*

$$R(\theta) \in SO(2) \mapsto \pi_m(\theta) = e^{im\theta},\ m \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

Si se trabaja un poco más con la teoría abeliana sobre el grupo $SO(2)$ puede obtenerse un resultado curioso vinculado con la Teoría de Fourier. Para ello, primero se define una **medida** sobre $\mathbb{T}$,

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)d\mu(z) \equiv \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}, \tag{15}$$

con $d\theta$ medida de Lebesgue sobre $[0, 2\pi]$ y $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ función medible sobre el grupo circular. En particular, se define la medida de un conjunto $A \subset \mathbb{T}$ como

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{T}} \chi_A(z)d\mu(z).$$

donde χ_A es la función indicadora del conjunto A. Es decir, $\chi_A(z) = 1$ si $z \in A$ y $\chi_A(z) = 0$ si no. De esta manera queda normalizado el grupo en el sentido de $\mu(\mathbb{T}) = 1$.

La medida es invariante debido a su vinculación con la medida de Lebesgue sobre $[0, 2\pi]$; por tanto, por la caracterización de la proposición 2.10, esta medida define una medida de Haar sobre el grupo $\mathbb{T}$. Con la vinculación $SO(2) \cong \mathbb{T}$ esta medida se identifica con la medida de Haar sobre $SO(2)$. Para ver esto, si $x \in \mathbb{T}$ y L_x es traslación por la izquierda,

$$\int_{\mathbb{T}} L_x f(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} f(x^{-1}z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} f(x^{-1}e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Y si se escribe $x^{-1} = e^{-i\phi}$ y se hace el cambio de variable $\psi = \theta - \phi$, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) \frac{d\psi}{2\pi} = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z).$$

De este modo, se puede aplicar el Corolario 2.55 y concluir que $\{e^{im\theta},\ m \in \mathbb{Z}\}$ es **base ortonormal** de $L^2(\mathbb{T})$; o bajo la identificación $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{T} : \theta \mapsto e^{i\theta}$, base ortonormal de $L^2([0, 2\pi])$..

Comentario 3.3. Este último punto ya es conocido; no es más que la Teoría clásica de Fourier sobre el conjunto $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ [21]. En efecto, bajo la identificación anterior se puede definir la transformada de Fourier de una función $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ integrable como

$$\hat{f}_m \equiv \hat{f}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{im\theta} d\theta.$$

Y además, bajo esta teoría se verifica la fórmula de la serie de Fourier que descompone las funciones en suma de la base ortonormal, o base de representaciones irreducibles del grupo,

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_m \, e^{im\theta}.$$

3.1.2. Grupo SU(2)

Sea $T \in U(2)$ con la forma $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y coeficientes en $\mathbb{C}$. Por lo visto en el Ejemplo 2.74 cada columna debe ser ortonormal, esto es

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\overline{b} + c\overline{d} = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es $(c, d) = e^{i\theta}(-\overline{b}, \overline{a})$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$; de tal modo que, $\det(T) = e^{i\theta}$. Si se exige que $T \in SU(2)$ entonces debe ser $e^{i\theta} = 1$. Por tanto, se establece la siguiente caracterización del grupo unitario y especial,

$$SU(2) = \{U_{a,b} :\ a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1\} \quad \text{con } U_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Comentario 3.4. El elemento **inverso** de $U_{a,b}$ toma la forma de $(U_{a,b})^{-1} = (U_{a,b})^{+} = U_{\overline{a},-b}$. La **unidad** se denota como $U_{1,0}$.

La **acción** del grupo $SU(2)$ sobre $\mathbb{C}^2$ se establece de manera natural de la siguiente forma: sea $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, la acción de $U_{a,b}$ sobre el punto está dada por

$$U_{a,b}(z, w) = (az - \bar{b}w, bz + \bar{a}w) \tag{17}$$

Comentario 3.5. Con la acción anterior se puede definir una identificación entre el grupo $SU(2)$ y la esfera unidad $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ de la siguiente manera: $U_{a,b} \mapsto (a, b) = U_{a,b}(1, 0)$.

Tres subgrupos muy particulares son $F(\theta)$, $G(\phi)$ y $H(\psi)$ descritos a continuación. Son grupos uniparamétricos y mutuamente ortogonales.

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad G(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad H(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & i\sin\psi \\ i\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{18}$$

Representaciones

La construcción de las representaciones de $SU(2)$ que sigue se realiza de la manera estándar, como en [10, §5.4], [13, §7.4].

Se define $\mathcal{P}$ el espacio de polinomios $P(z, w)$ sobre dos variables complejas, es decir, $P(z, w) = \sum c_{jk} z^j w^k$. Sobre $\mathcal{P}$ se define el subespacio de polinomios homogéneos de grado m como

$$\mathcal{P}_m = \{P(z, w) = \sum_{j=0}^{m} c_j z^j w^{m-j} : a_j \in \mathbb{C}\}.$$

Por otro lado, sobre la esfera $\mathbb{S}^3$ se puede construir una medida $d\sigma$ que normalice a la esfera (i.e. $\sigma(\mathbb{S}^3) = 1$) y que bajo la vinculación $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ se identifique con la medida de Haar sobre $SU(2)$. [13, Lemma 7.5.1 - 7.5.2]. Con todo ello se llega al siguiente resultado,

Proposición 3.6. *Los espacios $\mathcal{P}_m$ son mutuamente ortogonales en $L^2(\sigma)$ y la familia siguiente de monomios forma base ortonormal en cada $\mathcal{P}_m$*

$$\left\{ \sqrt{\frac{(m+1)!}{j!(m-j)!}} z^j w^{m-j} : 0 \leq j \leq m \right\}. \tag{19}$$

Demostración. Puesto que $\mathcal{P} \subset L^2(\sigma)$, se define el producto interno,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{S}^3} P(z, w)\overline{Q(z, w)} d\sigma(z, w).$$

Con este producto interno y [13, lemma 7.5.3] se puede demostrar que el conjunto dado en (19) es ortogonal para cualquier m y $0 \leq j \leq m$. Puesto que la dimensión de cada espacio $\mathcal{P}_m$ es finita e igual a $(m+1)$, (19) forma base para cada m. La ortogonalidad entre distintos espacio $\mathcal{P}_m$ y $\mathcal{P}_n$ se establece de manera inmediata. $\square$

Se puede construir una **acción** de $SU(2)$ sobre $\mathcal{P}$ a través de la acción natural sobre $\mathbb{C}^2$, esto es,

$$[\pi(U_{a,b})P](z,w) = P(U_{a,b}^{-1}(z,w)). \tag{20}$$

$\mathcal{P}_m$ es subespacio invariante por la acción para cada m (si se escoge un elemento de la base ortogonal, el grado no puede variar por transformaciones unitarias). De este modo, se representa la **subrepresentación** de π en $\mathcal{P}_m$ como π_m. Por tanto, π_m es representación unitaria de $SU(2)$ sobre $\mathcal{P}_m$ respecto al producto interno de $L^2(\sigma)$, pues la medida σ debe ser invariante por rotaciones por la vinculación con la medida de Haar de $SU(2)$.

Teorema 3.7. *Para cada $m \geq 0$ la representación π_m es unitaria e irreducible. Además se tiene que*

$$\widehat{SU(2)} = \{[\pi_m : m \geq 0]\}.$$

Demostración. La primera parte corresponde a la demostración de [10, Th. 5.37] que se prueba de manera sencilla con un lema técnico previo. La segunda parte se corresponde con[10, Th. 5.39] que hace uso de un resultado sobre carácteres en grupos compactos. □

A continuación se quiere establecer un corolario del Teorema anterior que es además aplicación directa del Teorema 2.66 de Peter-Weyl. En primer lugar, se denotan los elementos de matriz de la representación π_m bajo la base ortonormal $\{e_j : 0 \leq j \leq m\}$ de $L^2(\sigma)$, escrita como (19),

$$\pi_m^{jk}(a,b) = \langle \pi_m(U_{a,b})e_k, e_j \rangle.$$

Corolario 3.8. *Con la identificación $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$, y bajo la notación del Teorema (2.66) de Peter-Weyl, se tiene la descomposición*

$$L^2(\mathbb{S}^3) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}_{\pi_m} \tag{21}$$

que además, refinando la descomposición, si $\mathcal{H}_{p,q}$ denota el espacio generado por combinaciones lineales de $\{\pi_{p+q}^{j,q} : 0 \leq j \leq p+q\}$,

$$\mathcal{E}_{\pi_m} = \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{H}_{p,q}, \tag{22}$$

Se puede probar que, bajo un cálculo sencillo [10], los elementos de matriz toman la forma de

$$\pi_m^{jk}(a,b) = \sqrt{\frac{j!(m-j)!}{k!(m-k)!}} \int_0^1 (\overline{a}e^{2\pi it} + \overline{b})^k (-be^{2\pi it} + a)^{m-k} e^{-2\pi ijt} dt.$$

Comentario 3.9.

1. En la literatura Física las representaciones π_m se suelen indexar con $\frac{1}{2}m$ en vez de m debido a su conexión con las partículas de espín $\frac{1}{2}m$.

2. La descomposición (21) no es más que la descomposición de las funciones sobre la esfera en armónicos esféricos. El refinamiento (22) es la agrupación de los armónicos esféricos en subespacios según su bigrado (p, q).

3.1.3. Grupo SO(3)

$SO(3)$ es el grupo de matrices 3×3 reales, ortogonales y unitarias cuyo determinante es 1. Se puede identificar con el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$. Si se establece el vínculo entre $SO(3)$ y $SU(2)$ las representaciones irreducibles y unitarias del primer grupo aparecen de forma directa a partir del Teorema (3.7).

Se consideran los generadores infinitesimales de los subgrupos dados en (18),

$$F'(0) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad G'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H'(0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

El espacio generado por $F'(0)$, $G'(0)$ y $H'(0)$ se denota por $\mathfrak{gu}(2)$ y es el espacio vectorial de matrices antihermíticas (*skew-hermitian*) que verifican: (i) su traza es cero, (ii) $A^{+} = -A$. Este espacio no es más que el álgebra de Lie de $SU(2)$ (Ejemplo 2.81). De esta manera, se quiere identificar $\mathfrak{su}(2)$ con $\mathbb{R}^3$. Para ello,

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{su}(2): \ (t, u, v) \mapsto tF'(0) + uG'(0) + vH'(0) = \begin{pmatrix} it & -u + iv \\ u + iv & -it \end{pmatrix} \tag{23}$$

Por otro lado, se define la aplicación **adjunta** del grupo $SU(2)$ como aplicación $Ad_U : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ para $U \in SU(2)$ como $Ad_U(X) = UXU^{-1}$. Esta aplicación define una representación de $SU(2)$ sobre $\mathfrak{su}(2)$ llamada **representación adjunta**.

En este punto, interesa ver la forma de $Ad_{U_{a,b}} X(t, u, v) = X(t', u', v')$:

$$\begin{cases} t' & = (|a|^2 - |b|^2)t + 2(\mathrm{Im}(ab))u - 2(\mathrm{Re}(ab))v \\ u' + iv' & = 2ia\overline{b}t - (\overline{a}^2 + \overline{b}^2)u + i(\overline{a}^2 - b^2)v \end{cases}$$

Si se quiere calcular el núcleo de la aplicación: $Ad_{U_{a,b}} = I$ que implica la condición,

$$\begin{cases} \overline{a}^2 + \overline{b}^2 = 1 \\ \overline{a}^2 - \overline{b}^2 = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $b = 0$ y $a^2 = 1$. De este modo, el núcleo de la aplicación verifica $\mathrm{Ker}(Ad) = \pm I$.

Por otro lado, cuando la representación actúa sobre los subgrupos de $SU(2)$ se puede identificar cada una con una rotación en $\mathbb{R}^3$ [10, §5.4],

$$Ad_{F(\theta)} \mapsto \text{Rotación en el plano YZ}$$
$$Ad_{G(\phi)} \mapsto \text{Rotación en el plano XZ}$$
$$Ad_{H(\psi)} \mapsto \text{Rotación en el plano XY}$$

Trabajando con todo ello se tiene el siguiente teorema,

Teorema 3.10. *Con las definiciones anteriores, $Ad(SU(2)) = SO(3)$ y por tanto,*

$$SO(3) \cong SU(2)/\{\pm I\}.$$

Demostración. Por las aclaraciones previas, bastaría con probar que $SO(3)$ se construye a partir de rotaciones en torno a cada uno de los tres ejes [10, Th. 5.41]. $\square$

Corolario 3.11. *Se define la representación ρ_k de $SO(3)$ como $\rho_k(\mathrm{Ad}(U)) = \pi_{2k}(U)$ que es irreducible y unitaria. Además, la representación natural, traslación por la izquierda, de $SU(2)$ en $L^2(\mathbb{S}^2)$ se escribe como suma directa $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \pi_{2k}$.*

Demostración. Puesto que $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm I\}$ las representaciones de $SO(3)$ son las representaciones de $SU(2)$ que son triviales en $\{\pm I\}$. Sea $m = 0, 1, 2, ...$ fijo, y $P \in \mathcal{P}_m$ entonces

$$[\pi_m(-I)P](z, w) = P(-z, -w) = (-1)^m P(z, w)$$

por la naturaleza homogénea del polinomio P. De este modo, puesto a que debe ser trivial, $m = 2k$ con $k = 0, 1, 2, 3, ...$ Y $\rho(Ad(U)) = \pi_{2k}(U)$ obteniéndose la primera parte del enunciado.

Para la segunda parte, se considera $SO(3)$ y H subespacio del grupo que deja invariante al punto $(1, 0, 0)$. Por tanto, se corresponde con las rotaciones en el plano YZ. Se considera además la representación $\sigma : H \longrightarrow \mathbb{C}$ representación trivial. Entonces, por un lado, se puede identificar $SO(3)/H \cong \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (a través de la *fibración de Hopf* [13, Lemma 7.5.6]); por otro lado, por el Ejemplo 2.87, la representación inducida $\mathrm{Ind}_H^{SO(3)}$ es la representación por traslación por la izquierda del grupo $SO(3)$ sobre el espacio $L^2(\mathbb{S}^2)$.

A través de la aplicación adjunta se identifica $Ad(\{F(\theta)\}) \cong H$ donde $\{F(\theta)\}$ está definida por la ecuación (18). Además, se tiene

$$[\pi_m(F(\theta))](z^j w^{m-j}) = e^{i\theta(m-2j)} z^j w^{m-j}.$$

Entonces, $\{F(\theta)\}$ como grupo abeliano es equivalente a $\mathbb{T}$ con carácteres $\pi|_H = e^{i\theta(m-2j)}$ con $0 \geq j \geq m$. Ahora bien, la representación trivial ocurre en $\pi|_H$ una vez si m es par y cero veces si m es impar. En virtud del Teorema de Reciprocidad de Frobenius (2.89), se tiene que la representación por traslación por la izquierda de $SU(2)$ en $L^2(\mathbb{S}^2)$ es la suma directa de representaciones π_{2k}, con $k = 0, 1, 2, ...$, cada una con multiplicidad 1.

$\square$

Comentario 3.12. $SU(2)$ actúa como recubrimiento universal de $SO(3)$; además, dada la naturaleza $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm I\}$, se dice que el $SU(2)$ **recubre doblemente** a $SO(3)$. Este hecho tiene relevancia física ya que se identifica con la diferenciación de partículas bosónicas y fermiónicas. En detalle, bajo la notación de espín del Comentario 3.9, para cada $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, ...$ existen dos representaciones π_{2s} y π_{2s+1} de $SU(2)$ que se corresponden con la representación indexada por el espín s en $SO(3)$. La representaciones de espín s entero son llamadas **bosónicas** y están relacionadas con partículas del mismo nombre (fotón, bosones gauge, ...); las representaciones de espín s semientero son llamadas **fermiónicas** (electrón, quarks, ...).

3.2. Grupo localmente compacto: el grupo Euclídeo $E(n)$

En primer lugar se aborda la definición general para el grupo Euclídeo sobre $\mathbb{R}^n$, $E(n)$ y sus caracterización como producto semidirecto de las rotaciones $SO(n)$ y de las traslaciones en $\mathbb{R}^n$ que actúan como subgrupo cerrado, normal y abeliano. En un segundo apartado se calculan las órbitas y los grupos pequeños asociados que caracterizan y clasifican todas las representaciones unitarias e irreducibles.

Definición del grupo Euclídeo $E(n)$

Definición 3.13. El **grupo euclídeo** $E(n)$ se define como el grupo de movimientos rígidos en $\mathbb{R}^n$, es decir, el grupo formado por traslaciones y rotaciones en este espacio.

Comentario 3.14.

1. La notación utilizada para el grupo Euclídeo, $E(n)$, se corresponde a la notación seguida comúnmente en la literatura física. En textos sobre Teoría de Grupos [14] se le denomina *grupo inhomogéneo de* $SO(n)$ denotado como $ISO(n)$.

2. Dentro del grupo Euclídeo conviene destacar dos grupos particulares, $E(3)$ y $E(2)$, debido a su relevancia física. El espacio Euclídeo $E(3)$ está asociado con las simetrías propias del espacio *newtoniano*, marco de referencia de la Mecánica Clásica, que presupone un espacio homogéneo e isótropo. De la misma manera, el grupo $E(2)$ está relacionado con las rotaciones espaciales restringidas al plano [11, §9].

3. Si se considera la traslación temporal entonces el grupo de simetrías es conocido como **grupo de Galileo**. Este grupo está asociado con las transformaciones galileanas [16].

Los elementos del grupo Euclídeo se **denotan** con el par (R, a), donde $R \in SO(n)$ y a traslación en $\mathbb{R}^n$. La **acción** del grupo sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ se toma de la siguiente manera: si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(R, a)x = Rx + a, \ R \in SO(n) \text{ y } a \in \mathbb{R}^n. \tag{24}$$

Nótese que el grupo de traslaciones se está identificando con el grupo $(\mathbb{R}^n, +)$ aditivo. De esta manera, el grupo Euclídeo puede representarse de forma natural como subgrupo cerrado del $GL(n+1, \mathbb{R})$, espacio de matrices $(n+1) \times (n+1)$ invertibles y reales. En efecto, la fórmula (24) anterior sugiere la identificación con el **espacio afín** sobre $\mathbb{R}^n$. De este modo, los elementos de $E(n)$ quedan identificados como,

$$(R, a) \equiv \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & R & & \vdots \\ & & & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in SO(n) \text{ y } a \in \mathbb{R}^n. \tag{25}$$

Proposición 3.15. Ley del Grupo *Para el grupo euclídeo $E(n)$ se verifican las siguientes leyes:*

$$\begin{cases} (R, a)(T, b) = (RT, a + Rb) \\ (R, a)^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}a) \end{cases}$$

Demostración. La demostración se basa en la identificación de cada elemento con las matrices del espacio afín. Cada fórmula surge de manera sencilla al trabajar con el producto e inversión de matrices de $GL(n + 1; \mathbb{R})$. □

Comentario 3.16. Se puede identificar de manera sencilla los dos subgrupos principales del grupo Euclídeo; con la notación anterior,

- Las traslaciones forman un subgrupo, $\{(I, a)\}$, denotado como **grupo de traslaciones**. Este grupo se corresponde con el grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$.
- Por otro lado, las rotaciones $\{(R, 0)\}$ también son subgrupo de $E(n)$ identificándose con $SO(n)$, **grupo de traslaciones**.

La proposición siguiente profundiza en la relación de ambos grupos con la estructura del grupo Euclídeo.

Proposición 3.17. *El grupo euclídeo $E(n)$ es producto semidirecto del grupo de rotaciones $SO(n)$ y el grupo de traslaciones $\mathbb{R}^n$, siendo este abeliano y normal a $E(n)$. Por tanto,*

$$E(n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Demostración. De forma sencilla se prueba que el subgrupo de traslaciones es abeliano y normal en $E(n)$: puesto que $(\mathbb{R}^n, +)$ es abeliano, el grupo de traslaciones lo es bajo la identificación con el grupo aditivo. Por otro lado, si $a \in \mathbb{R}^n$, para cualquier elemento $(R, b) \in E(n)$ se tiene

$$(R, b)^{-1}(I, a)(R, b)) = (R^{-1}, -R^{-1}b)(R, a + b) = (I, R^{-1}a)$$

que es traslación. Así se demuestra la normalidad.

Por otro lado, por construcción del grupo euclídeo se establece una biyección $SO(n) \times \mathbb{R}^n \longleftrightarrow E(n)$. Dada la naturaleza del grupo de traslaciones como grupo abeliano y subgrupo normal, se concluye de forma sencilla que $E(n)$ es producto semidirecto.

$\square$

Álgebra de Lie del grupo Euclídeo

Es subgrupo cerrado de $GL(n+1, \mathbb{R})$ bajo la identificación con el espacio de matrices afines, ecuación (24). De este modo, toma estructura de grupo matricial de Lie. En particular, el álgebra de Lie para $E(2)$ y $E(3)$ es:

- **Álgebra de Lie de E(2)** : la dimensión de $E(2)$ como grupo de Lie es 3. El álgebra estará construida por el generador del subgrupo uniparamétrico de rotaciones

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  y los generadores del subgrupo de traslaciones,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por tanto, los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$ verifican la siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{cases} [P_1, P_2] &= 0 \\ [J\ , P_k] &= \epsilon^{km} P_m \end{cases} \tag{26}$$

  con ϵ^{km} el tensor antiunitario de dimensión 2.

- **Álgebra de Lie de E(3)** La dimensión del álgebra es 4 por la identificación afín. De la misma manera, los generadores de este álgebra serán $J_i:\ i = 1, 2, 3$ generadores del subgrupo $SO(3)$ y $\{P_i:\ i = 1, 2, 3\}$ generadores de las traslaciones.

  Las reglas de conmutación son para $\mathfrak{e}(3)$

$$\begin{cases} [P_k, P_l] &= 0 \\ [J_k, J_l] &= \epsilon^{klm} J_m \\ [P_k, J_l] &= \epsilon^{klm} P_m \end{cases} \tag{27}$$

Representaciones para el grupo Euclídeo

El grupo Euclídeo es producto semidirecto $E(n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$, Proposición (3.17). El grupo dual del grupo de traslaciones está dado como $\hat{\mathbb{R}}^n \cong \mathbb{R}^n$ (Ejemplo 2.45), denotado como **espacio**

de momentos. Si los elementos del espacio dual se escriben como $p \in \mathbb{R}^n$, la función característica puede tomarse como

$$\langle b, p\rangle = e^{-ip\cdot b}$$

donde $p \cdot b$ denota el producto interno euclídeo sobre $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.18. *Las órbitas del espacio dual están caracterizadas por $r \in [0, \infty)$ y toman la forma de*

$$O_r = \{p : \|p\| = r\}.$$

Demostración. Se divide la demostración en tres partes marcando distintos objetivos,

(I): En primer lugar hay que ver la acción del grupo sobre el grupo dual $\mathbb{R}^n$. Si $a \in \mathbb{R}^n$, la acción de (R, b) sobre el elemento p está dada por la regla,

$$\langle a, (R, b)p\rangle = \langle (R, b)^{-1}a(R, b), p\rangle = \langle (R, b)^{-1}a(R, b), p\rangle = \langle (R, b)^{-1}(I, a)(R, b), p\rangle.$$

Y con la ley del grupo,

$$\langle (I, R^{-1}a), p\rangle = \langle R^{-1}a, p\rangle = \langle a, Rp\rangle.$$

En la última igualdad se ha utilizado el formalismo de la acción contragradiente (Comentario 2.39) como inducción de la acción sobre el grupo en su grupo dual. La acción queda descrita como:

$$(R, b)p = Rp.$$

(II): En segundo lugar, las órbitas están definidas como

$$O_p = \{Rp : (R, b) \in E(n)\}.$$

Ya que las rotaciones preservan la norma, $\|Rp\| = \|p\| = r$ para $r \geq 0$. De esta manera, se pueden identificar las órbitas como

$$O_r = \{p : \|p\| \ = r\},\ r \geq 0.$$

(III): Por último, se quiere demostrar que G actúa regularmente sobre el grupo dual, Definición 2.92.

a) Para la primera parte, basta escoger los anillos $A_{s,t} = \{p : s < \|p\| < t\}$ tal que $s, t \in \mathbb{Q}$; que son familia numerable de conjuntos de Borel y G-invariantes por el párrafo anterior. Si $r > 0$, se pueden escoger dos sucesiones positivas $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ de $\mathbb{Q}$ que sean crecientes y decrecientes, respectivamente, y que converjan $s_n \uparrow r$ y $t_n \downarrow r$. La existencia de estas sucesiones y su convergencia va ligada a la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. De esta manera, se construye una sucesión de anillos $\{A_{s_n,t_n}\}$ con $A_{s_{n+1},t_{n+1}} \subset A_{s_n,t_n}$.
De forma natural, se tiene que

$$O_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{s_n,t_n}$$

Como la órbita siempre está contenida en un anillo de la sucesión, la contención hacia la derecha se tiene probada. Por otro lado, dado un elemento $p \in \bigcap_n^\infty A_{s_n,t_n}$, su norma debe estar acotada por la sucesión: $s_n < \|p\| < t_n$. Por continuidad de la norma, y por ser la órbita un conjunto cerrado, $\|p\| = r$

b) Para ello, se toma la aplicación $\phi : G \longrightarrow O_p : (R,a) \longmapsto Rp$ cuyo núcleo coincide con el estabilizador de p, es decir, $\ker(\phi) = G_p$. Esta aplicación induce una biyección $G/G_p \longrightarrow O_p$. Para probar la continuidad basta considerar la condición de producto semidirecto de G y trabajar con la aplicación anterior. Se pueden seguir las notas de [10, §6].

$\square$

La proposición anterior **clasifica** las posibles órbitas en función del parámetro $r \geq 0$ que en virtud del Teorema 2.99 permite caracterizar de forma sencilla las representaciones unitarias e irreducibles para cada órbita en función de este parámetro.

Con mayor detalle, si se fija $r \geq 0$ y $p \in O_r$, y si se escoge σ representación del grupo pequeño H_p sobre el espacio de representación $\mathcal{H}_\sigma$, entonces se puede construir una representación unitaria e irreducible sobre el estabilizador de p dada como

$$\rho_{r,\sigma} : G_p \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma : \ \rho_{r,\sigma}(R,a) = e^{-ip\cdot a}\sigma(R).$$

Esta representación induce una representación unitaria e irreducible del grupo $E(n)$, denotada por $\pi_{r,\sigma} \equiv \mathrm{ind}_{G_p}^{E(n)}(\rho_{r,\sigma})$, como traslación por la izquierda sobre el espacio $\mathcal{F}$ de funciones $f : E(n) \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ continuas que satisfacen

$$f((R,a)(T,b)) = \rho_{r,\sigma}^{-1}(T,b)f(R,a) = e^{ip\cdot b}\sigma(T^{-1})f(R,a), \ a,b \in \mathbb{R}, \ R \in SO(n) \text{ y } T \in H_p.$$

La acción de la representación inducida está dada como,

$$[\pi_{r,\sigma}(A,a)]f(B,b) = f((A,a)^{-1}(B,b)). \tag{28}$$

Toda representación unitaria e irreducible de $E(n)$ es unitariamente equivalente a una representación de este tipo. Es más, para dos carácteres $p, p' \in \mathbb{R}^n$ pertenencientes a la misma órbita O_r su representación inducida es unitariamente equivalente. De este modo, se obtienen dos tipos de representaciones inducidas atendiendo a la tipología de la órbita asociada: (i) órbitas con $r > 0$ y (ii) la órbita degenerada con $r = 0$. Como elemento estándar del espacio de momentos se escoge $p = (r, 0, ..., 0)$. En el Cuadro 2 se recoge un resumen.

(i) Para $r > 0$. Los elementos de $SO(n)$ que dejan invariante al elemento estándar p serán aquellas rotaciones de $SO(n-1)$ que actúan como subgrupo sobre el plano $(x_2, ..., x_n)$. Por tanto, el grupo pequeño H_p se corresponde con $SO(n-1)$. Las representaciones inducidas $\pi_{r,\sigma}$ son productos no triviales de representaciones irreducibles de $SO(n-1)$ y carácteres de $\mathbb{R}^n$. Estas representaciones son infinito-dimensionales.

(ii) Para $r = 0$. El elemento estándar es invariante por todo el grupo de rotaciones $SO(n)$, luego este es su grupo pequeño. De este modo, la representación inducida se confunde con una representación irreducible y unitaria de $SO(n)$. En este caso las representaciones son finitas-dimensionales.

Tipo de órbita	grupos pequeños asociado	Representación inducida
Esfera de radio $r > 0$	$SO(n-1)$	Infinito-dimensionales
Origen, con $r = 0$	$SO(n)$	Finito-dimensionales

Cuadro 2: Clasificación de los grupos pequeños del Grupo Euclídeo y de sus representaciones inducidas

Casos particulares: $E(3)$ y $E(2)$

Con los grupos $E(2)$ y $E(3)$ se puede hacer una descripción física de cada representación. Para ver la vinculación se puede tomar el siguiente argumento[1] [12, §4.4]. Sea (I, a) un elemento del grupo de traslaciones, se verifica que

$$[\pi_{r,\sigma}(I,a)]f(R,b) = f((I,-a)(R,b)) = f((R,b)(I,-R^{-1}a)) = e^{(R^{-1}p)\cdot a}f(R,b).$$

Por otro lado, el operador momento se representa como traslación infinitesimal del espacio [18, §1.6]; debido a ello, se expresará como producto por la función $(R,b) \longmapsto R^{-1}p$. Puesto que $\|R^{-1}p\| = \|p\| = r$, se concluye que cada órbita se puede identificar con una **partícula** cuyo momento lineal posee valor absoluto r.

En vista de lo anterior, las representaciones irreducibles y unitarias para el grupo Euclídeo tridimensional $E(3)$ son

- Para la órbita degenerada $r = 0$, su grupo pequeño es $SO(3)$ e induce representaciones finito-dimensionales. Las representaciones inducidas se denotan por $\pi_{0,k}$ donde $k = 0, 1, 2, ..$ identifica la representación irreducible y unitaria de $SO(3)$ (Corolario 3.11).

  Esta órbita está asociada con partículas con momento lineal $r = 0$; es decir, partículas que no se desplazan. De forma equivalente, se corresponde a un sistema de referencia inercial sobre el centro de masas. Por tanto, la acción del grupo de traslaciones no afecta al sistema de referencia.

- Para las órbitas esféricas con $r > 0$, su grupo pequeño es $SO(2)$ e induce representaciones infinito-dimensionales. Las representaciones inducidas se denotan por $\pi_{r,m}$ con $m \in \mathbb{Z}$ que está relacionado con las representaciones unitarias e irreducibles de $SO(2)$ (Proposición 3.2).

  Estas representaciones se identifican con partículas que se desplazan con momento lineal $p^2 = r$ constante.

Para el grupo $E(2)$ el análisis es parecido, restringiendo el movimiento al plano.

- Para la órbita $r = 0$ el grupo pequeño es $SO(2)$, grupo abeliano. Las representaciones inducidas se identifican como $\pi_{0,m}$ con $m \in \mathbb{Z}$ dada su vinculación con las representaciones irreducibles y unitarias de $SO(2)$. Son finito-dimensionales debido a la naturaleza del grupo pequeño.

[1] A pesar de que en la referencia se utilice para el grupo de Poincaré se traslada de manera natural al grupo Euclídeo. Basta restringir la descripción relativista del primero a la descripción newtoniana del segundo.

- Para las órbitas $r > 0$ el grupo pequeño es $SO(1) = \{I\}$, conjunto trivial. La representación σ del grupo pequeño solo puede ser la trivial y $\rho_{r,\sigma}(I, b) = e^{-ip\cdot b}I$ es la representación del estabilizador G_p. De este modo, el espacio $\mathcal{F}$ de funciones continuas está dado por aquellas que verifican,
$$f((R, a)(I, b)) = f(R, a + Rb) = e^{ip\cdot b}f(R, a).$$
La representación inducida se denota por $\pi_{p,I}$ identificada solo con el punto p.

Comentario 3.19 (**E(2) como grupo pequeño del grupo de Poincaré**)**.** En estas líneas conviene notar que el grupo $E(2)$ tomará un papel importante dentro del grupo de Poincaré, inducirá como grupo pequeño las representaciones de *masa nula*. Atendiendo a qué representación de $E(2)$ se escoge para la inducción se diferenciarán dos tipos particulares de representaciones: (i) las representaciones con órbita $r = 0$ dan lugar a las representaciones de **espín discreto o finito** relacionadas con partículas físicas de masa nula, como son los fotones; (ii) las representaciones con órbitas $r > 0$ originan las representaciones de **espín continuo**, que serán el objeto de estudio para el trabajo de Física.

Referencias

[1] MACKEY, G. W. *Induced Representations of Locally Compact Groups I.* The Annals of Mathematics. Vol. 55. Nº1 (January, 1952). pp. 101 - 139.

[2] MACKEY, G. W. *Induced Representations of Locally Compact Groups II. The Frobenius Reciprocity Theorem.* The Annals of Mathematics. Vol. 58. Nº2 (January, 1953). pp. 193 - 221.

[3] MACKEY, G. W. *Infinite - dimensional Group Representations.* Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), no. 5, 628–686.

[4] VARADARAJAN, V.S. *Geometry of Quantum Theory.* Springer, NY (2006)

[5] PEDERSEN, G. K. *The existence and uniqueness of the Haar integral on a locally compact topological group.* (2000).

[6] PONTRJAGIN, L. *Topological Groups.* Princeton Math. Series, 2, (Princeton: Princeton Univ. Press,1946)

[7] WIGNER, E. *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorenntz Group.* The Annals of Mathematics. Vol. 40. Nº1 (January, 1939). pp. 149 - 204.

[8] BARGMANN, V. WIGNER, E. *Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equation.* Proc. Nat. Acad. Sci (U.S.A.) 34, 211 (1948).

[9] BEKAERT, X. SKVORTSOV, E. D. *Elementary particles with continuous spin.* Int. J. Modern Physics. A 32, (2017) 1730019/31.

[10] FOLLAND, G. B. *A course in abstract harmonic analysis.* DCRC Press, Boca Raton - Florida (1995).

[11] TUNG, WU-KI *Group theory in pshysics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA (2003).

[12] FOLLAND, G. B. *Quantum Field Theory: a tourist guide for mathematicians.* American Mathematical Society, Providence - Rode Island (2008).

[13] DEITMAR, A. ECHTERNHOFF, S. *Principles of Harmonic Analysis.* Springer (2008).

[14] HALL, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations. An elementary introduction.* Springer (2015).

[15] WEINBERG, S. *The quantum theory of fields. I Foundations.* Cambridge University Press (1995).

[16] GILMORE, R. *Lie Groups, Physics, and Geometry. An introduction for Physicist, Engineers and Chemists.* Cambridge University Press. (2008)

[17] RUDIN, W. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, Inc. NY (1991)

[18] SAKURAI, J.J. y NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics.* Addison - Wesley (1995).

[19] KNAPP, A. W. *Representation Theory of Semisimple Groups.* Princeton University Press (1986)

[20] Lee, M. L. *Manifolds and Differential Geometry.* American Mathematical Society (2009)

[21] Celeghini, E. Gadella, M. del Olmo, M. A. *Lie Algebra Representations and Rigged Hilbert Spaces: The SO(2) case.* Acta Polytechinca. Vol 57, No 6 (2017).

[22] Bekaert, X. Boulanger, N. *The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension*, in the proceedings of the 2nd Modave Summer School in Theoretical Physics (6-12 Aug 2006, Modave, Belgium) [hep-th/0611263].

[23] Kirillov, A. A. *Elements of the Theory of Representations.* Springer Heidelberg New York (1976)

[24] Stegeman, J. D. *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups.* Oxford University Press, Second Edition (2000).