Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

La Conjetura Jacobiana. Algunos enfoques y enunciados equivalentes

Autor: Beatriz Peñín Franco

Tutor: Antonio Campillo López

Índice general

Introducción

En esta Memoria se presenta un survey parcial sobre algunos de los enfoques y enunciados alternativos de la Conjetura Jacobiana, un problema formulado por Keller en 1939 que aún permanece abierto en la actualidad.

Si K es un cuerpo de característica 0, $X_1, \ldots, X_n$ variables y $F_1, \ldots, F_n$ polinomios de $K[X_1, \ldots, X_n]$, entonces se tiene el endomorfismo algebraico $F = (F_1, \ldots, F_n) : K^n \to K^n$ definido por los F_i. El endomorfismo tiene su matriz jacobiana $J(F)$ cuyo determinante $j(F)$ es el jacobiano del endomorfismo. Las entradas de la matriz jacobiana y el jacobiano son polinomios de $K[X_1, \ldots, X_n]$.

El endomorfismo F es un automorfismo algebraico cuando tiene un endomorfismo inverso $G = (G_1, \ldots, G_n)$, es decir, tal que las composiciones $F \circ G \quad y \quad G \circ F$ son ambas la identidad. La regla de la cadena del cálculo diferencial permite deducir que si F es un automorfismo, entonces la matriz $J(F)$ es invertible, con inversa $J(G)$. Por cálculo matricial se sabe que la condición de que $J(F)$ sea invertible es equivalente a decir que su determinante es una unidad de $K[X_1, \ldots, X_n]$, es decir, que $j(F)$ es un elemento de $K[X_1, \ldots, X_n]^* = K^*$.

Sin embargo, no se conocen argumentos para concluir la afirmación de que si $J(F)$ es una matriz invertible entonces F es un automorfismo. Dicha afirmación es precisamente la Conjetura Jacobiana. En concreto, la Conjetura afirma que si $j(F)$ es un polinomio constante no nulo de K^* entonces F es un automorfismo. Hasta la fecha sólo se conoce que es cierta para $n = 1$.

El caso de polinomios contrasta con el caso particular en el que las F_i son formas lineales, o series de potencias sin término independiente, en los cuales es un hecho bien conocido que, si $j(F)$ es un elemento de K^* o de $K[[X_1, \ldots, X_n]]^*$ respectivamente, entonces el endomorfismo lineal o formal que define F es un automorfismo en su respectiva clase de endomorfismos.

No se pierde generalidad para estudiar la Conjetura, si se supone que $F_i = X_i - H_i$ para todo i, donde el polinomio H_i sólo tiene monomios de grado mayor o igual a 2. Con esta preparación la hipótesis de la Conjetura se simplifica también, ya que es $j(F) = 1$. Esta hipótesis implica que el endomorfismo algebraico $F = (F_1, \ldots, F_n)$ tiene una inversa formal $G = (G_1, \ldots, G_n)$, donde las G_i son series de potencias, también teniendo G_i a X_i como parte lineal.

Puesto que G está determinado por F, lo que afirma la Conjetura Jacobiana es que las series de potencias G_i son, de hecho, polinomios. La fama de este problema se debe a que esta afirmación es sencilla de comprender, pero no se ha encontrado una demostración a lo largo de ya más de 80 años. En otras palabras, se trata de un problema muy fácil de plantear y muy difícil de resolver.

El survey de esta Memoria está basado en los tres trabajos de [BCW], [F], [E] y muy especialmente en las ideas que Hyman Bass ha aportado al estudio de la Conjetura Jacobiana. Debido a la dificultad del problema, se ha optado por no incluir las demostraciones, excepto en pocos casos en los que su sencillez y su significado lo recomendaban. Se ha preferido comprender otros enfoques y enunciados alternativos, de otros problemas matemáticos relacionados o equivalentes que, por consiguiente, también han de ser fáciles de plantear y difćiles de resolver.

El primer capítulo está dedicado a unificar los conceptos de endomorfismo y automorfismo lineal, algebraico y formal, proponiendo la misma notación $F = (F_1, \ldots, F_n)$ para todos ellos, siendo F_i una forma lineal, un polinomio o una serie de potencias sin término independiente según el caso. Se plantea la Conjetura Jacobiana y se reduce su estudio al caso $F_i = X_i - H_i$. El grado de F, $grad(F)$, se define como el máximo grado de los polinomios F_i, o de los H_i cuando alguno de ellos es no nulo.

En el segundo capítulo se exponen diversos enfoques con enunciados equivalentes a la Conjetura, todos ellos de naturaleza algebraica. En primer lugar, en <u>álgebra abstracta</u>, la tesis de la Conjetura es equivalente a que la extensión de anillos $K[X]/K[F]$ sea finita generada, a que la del cuerpo $K(X)/K(F)$ sea de Galois, y a que el propio endomorfismo algebraico F sea inyectivo como transformación del espacio afín K^n. En contraste, en <u>álgebra computacional</u>, la tesis de la Conjetura es equivalente a la igualdad de ideales de $K[Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n]$ dada por

$$< F_1(Y) - F_1(Z), \ldots, F_n(Y) - F_n(Z) >=< Y_1 - Z_1, \ldots, Y_n - Z_n > .$$

También se muestra, y se demuestra en este caso, cómo la Conjetura Jacobiana es equivalente a que se cumpla el teorema de Rolle, para endomorfismos algebraicos F en varias variables, cuando K es algebraicamente cerrado y el papel de la derivada lo juega el jacobiano $j(F)$. En <u>álgebra conmutativa</u>, la Conjetura es equivalente a otra que afirma que dado $d > 0$ existe una constante $c > 0$ que depende de K, n y d, tal que si $K \to K'$ es una K-álgebra conmutativa y $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un automorfismo algebraico de K'^n tal que $grad(F) \leq d$, para su inverso G se tiene $grad(G) \leq c$. Este enfoque está motivado por el hecho de que para $K = K'$, para un automorfismo algebraico F se tiene $grad(G) \leq (grad(F))^{(n-1)}$. El enunciado anterior, tiene dos características especiales. Una es que no requiere la hipótesis $j(F) = 1$ sino la condición más fuerte de ser F un automorfismo. Otra es que necesitaría ser probado, no sólo para K, sino para toda K-álgebra conmutativa K'.

En <u>álgebra diferencial</u>, la Conjetura es equivalente a otra, también muy famosa, en términos de K-álgebras no conmutativas, en concretro hablamos del álgebra de Weyl. Recordamos que para el cuerpo K, una K'-álgebra es un anillo K' conmutativo o no, provisto de un homomorfismo de anillos $K \to K'$. En K', por tanto, además de la suma y el producto, se dispone de un producto por escalares de K vía el homomorfismo estructural, y derivando de todas estas operaciones se tiene también el corchete de Lie definido por $[a, b] = ab - ba$, y que dota a K' de la estructura adicional de álgebra de Lie. En estos términos que K' sea conmutativa significa que $[a,b]=0$ para todo par $a,b\in K'$. Si $K\to K'$, $\quad K\to K''$ son dos K-álgebras, un homomorfismo de K-álgebras es un homomorfimo de anillos $K'\to K''$ tal que $K\to K''$ es igual a la composición de $K\to K'$ $\quad y \quad$ $K'\to K''$. Los isomorfismos de K-álgebras son aquellos $K\to K'$ que son biyectivos.

La K-álgebra de polinomios $K[X_1,\ldots,X_n]$ es conmutativa y, salvo isomorfismo de K-álgebras, puede entenderse también como aquella, provista de sus n elementos distinguidos $X_1,\ldots,X_n$, que satisface la siguiente propiedad universal:
Si $K\to K'$ es otro álgebra y $b_1,\ldots,b_n$ son elementos de K' tales que $[b_i,b_j]=0 \quad \forall i,j$, entonces existe un único homomorfismo de K-álgebras $h: K[X_1,\ldots,X_n]\to K'$ tal que $h(X_i)=b_i \quad \forall i$.

El álgebra de Weyl es una K-álgebra no conmutativa, denotada por $A=K[X_1,\ldots,X_n,D_1,\ldots,D_n]$ provista de sus dos grupos de elementos distinguidos $X_1,\ldots,X_n;D_1,\ldots,D_n$ que, salvo isomorfismo de K-álgebras, puede entenderse como aquella que satisface la siguiente propiedad universal:
Si $K\to K'$ es otro álgebra y $b_1,\ldots,b_n;e_1,\ldots,e_n$ son elementos de K' tales que $[b_i,b_j]=0$, $[e_i,e_j]=0$, $[e_i,b_j]=\delta_{ij}$, entonces existe un único homomorfismo de K-álgebras $h: A\to K'$ tal que $h(X_i)=b_i$, $h(D_i)=e_i \quad \forall i$. Pero en concreto, el álgebra de Weyl A es también la K-álgebra de operadores diferenciales, es decir, operadores del tipo

$$D=\sum\left(P_\alpha\cdot D^\alpha\right)$$

donde la suma es finita y está extendida a multiíndices α. Los P_α son polinomios de $K[X_1,\ldots,X_n]$ y los D^α las derivaciones parciales respecto a los multiíndices α. Así, los D_i son las derivaciones parciales con respecto a las variables X_i, y las operaciones suma y producto son las de los operadores diferenciales.

El orden de D se define como el máximo valor de $|\alpha|$, con P_α no nulo, que aparece en la expresión de D. Se tiene una filtración natural sobre A, que es la sucesión expansiva de subespacios vectoriales de A, cuyo q-ésimo subespacio es el formado por los operadores D de orden menor o igual a q. En estos términos la Conjetura Jacobiana es equivalente a la Conjetura débil de Dixmier, que afirma que todo endomorfismo de la K-álgebra A que preserva la filtración natural de A es un automorfismo. En la Memoria se incluye la demostración de esta equivalencia.

El capítulo 3 se dedica a extraer consecuencias de la hipótesis $j(F)=1$, en concreto a la reducción del grado en la Conjetura y a las fórmulas explícitas para la inversa formal G de F bajo dicha hipótesis. En la práctica bastará considerar el caso "homogéneo", es decir, cuando $F_i=X_i-H_i$ y los H_i son todos polinomios homogéneos de grado $\delta\geq 2$ quizá nulo alguno de ellos. En primer lugar, se incluye la prueba de que la hipótesis $j(F)=1$ en este caso equivale a que la matriz $J(H)$ sea nilpotente, es decir, que exista $m>0$ tal que $J(H)^m=0$. En segundo lugar, también se incluye la prueba de que si $\delta=2$, entonces la Conjetura Jacobiana es cierta. En tercer lugar, el resultado de reducción afirma que la Conjetura Jacobiana es cierta para todo $n>1$ si, y sólo si, es cierta la Cojetura para todo $n>1$ en el caso homogéneo con $\delta=3$. La prueba de este resultado consiste en añadir suficientes variables aumentando n para mostrar que entonces se puede reducir el grado a 3. Al intentar probar la Conjetura para $\delta=3$, se aprecia especialmente la dificultad del problema; de hecho sólo se ha podido establecer para $n = 2, 3, 4$ y, en el último caso, usando computación.

En el caso homogéneo con $j(F) = 1$, la inversa formal G de F tiene sólo componentes homogéneas de ciertos grados, en concreto para todo i, G_i es la suma extendida a $d \geq 0$ de polinomios homogéneos G_i^d de grado $(\delta - 1)d + 1$. En los años 70, Abhyankar había obtenido la siguiente expresión explícita, llamada fórmula de inversión :

$$G_i^d = \sum_{|\alpha|=d} D^{[\alpha]}(X_i \cdot H^\alpha),$$

donde $D^{[\alpha]} = \dfrac{1}{\alpha!} D^\alpha$. Posteriormente, en los años 80, Bass la transformó en otra fórmula combinatoria. En concreto, a una expresión de G_i^d como una doble suma, la primera extendida a todos los posibles árboles T con raíz r y d vértices, y para cada (T, r), la segunda extendida a todas las funciones $f : T \to \{1, \ldots, n\}$ con $f(r) = i$; en concreto a la siguiente fórmula de inversión:

$$G_i^d = \sum_T \frac{1}{\alpha(T)} \cdot \sum_f P_{T,f}.$$

donde $\alpha(T)$ es el número de automorfismos del árbol con raíz (T, r) y

$$P_{T,f} = \prod_{v \text{ vértice de T}} D_{f_{v^+}} H_{f_v},$$

donde v^+ al conjunto de vértices del nivel justamente superior al de v y que están conectados por una arista con v y $D_{f_{v^+}}$ la derivación con respecto al multiíndice (f_{v^+}) cuya j-ésima componente es el número de vértices de v^+ cuya imagen por f sea precisamente j.

La aplicación de estas fórmulas de inversión ha proporcionado resultados positivos sobre la Conjetura Jacobiana, aunque no de tanta intensidad como se esperaba. El más avanzado afirma que si n es arbitrario, $\delta = 3$ y $J(H)^2 = 0$ (es decir, $m = 2$ en la definición de nilpotencia) entonces la Conjetura Jacobiana es cierta.

Capítulo 1

Endomorfismos y automorfismos algebraicos y sus jacobianos.

En este primer capítulo vamos a introducir conceptos y detallar los tipos de automorfismos y endomorfismos sobre los que desarrollaremos la mayor parte del trabajo. También iremos introduciendo parte de la notación que vamos a utilizar.

A partir de ahora, si no da lugar a confusión cuando estemos trabajando en el espacio K^n denotaremos a los vectores por X o $\underline{X}$.

Consideraremos el cuerpo K de característica cero. Para $n > 0$ tomamos el espacio afín K^n, su origen $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ y los tipos de aplicaciones que a continuación explicamos:

1. **Aplicaciones lineales.**
   Consideramos las aplicaciones lineales $L : K^n \to K^n$ con $L(\underline{0}) = \underline{0}$ y $\underline{0} = (0, \dots, 0)$,es decir, aplicaciones dadas por $L(\underline{X}) = M\underline{X}^t$ donde $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, y $M = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de tamaño n con coeficientes en K. Estas aplicaciones lineales en las que coinciden el espacio vectorial inicial y final son endomorfismos lineales de K^n.

   Los automorfismos lineales del espacio vectorial K^n son aquellas aplicaciones lineales $L : K^n \to K^n$ para las que existe otra aplicación también lineal $L' : K^n \to K^n$ tales que $L \circ L' = Id$ y $L' \circ L = Id$. Los automorfismos se caracterizan por la condición de que $det(M) \neq 0$. Siendo M la matriz anteriormente definida.

   Llamamos **forma lineal** al polinomio homogéneo de grado uno en las variables $X_1, \dots, X_n$.

   Algebraicamente, un endomorfismo lineal está dado por una n-upla de formas lineales $(L_1, \dots, L_n)$. En concreto, si M es la matriz de L tenemos $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$.

2. **Aplicaciones algebraicas.**
   Consideramos las aplicaciones algebraicas $F : K^n \to K^n$ con $F(\underline{0}) = \underline{0}$ y $\underline{0} = (0, \dots, 0)$, que son aplicaciones dadas por una n-upla de polinomios $F_1, \dots, F_n$ en las variables $X_1, \dots, X_n$ con $F_i(\underline{0}) = 0 \quad \forall i$, es decir, los F_i no tienen término independiente. Estas aplicaciones algebraicas se llaman también endomorfismos algebraicos.

Un endomorfismo algebraico $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es un automorfismo algebraico si existe otro endomorfismo algebraico $G : K^n \to K^n$ dado por $G = (G_1, \ldots, G_n)$ siendo G_j polinomios en $X_1, \ldots, X_n$ tales que $F \circ G = Id$ y $G \circ F = Id$.

Los endomorfismos y automorfismos lineales son un caso particular de endomorfismos y automorfismos algebraicos. En el caso algebraico los polinomios que las definen no son necesariamente "formas", es decir, polinomios homogéneos de grado arbitrario.

Nota 1: Geométricamente, los endomorfismos y los automorfismos algebraicos son respectivamente los endomorfismos y automorfismos del espacio afín K^n visto como "variedad algebraica sobre el cuerpo K"que dejan invariante el origen $0 = (0, \ldots, 0)$. El caso particular de los automorfismos lineales es el de las afinidades que dejan invariante el origen 0. La Conjetura Jacobiana trata de formular una caracterización de los automorfismos algebraicos en términos sencillos, similares a los del caso de aplicaciones lineales.

3. **Aplicaciones formales.**
Las aplicaciones formales $\Phi = K[[X_1, \ldots, X_n]] \to K[[X_1, \ldots, X_n]]$ son aplicaciones que están dadas por una n-upla $(S_1, \ldots, S_n)$ de series S_j de $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ todas ellas sin término independiente. Estas aplicaciones formales se llaman endomorfismos formales. Los automorfismos formales son los endomorfismos Φ para los que existe otro endomorfismo formal Φ' con $(S'_1, \ldots, S'_n)$ tal que $\Phi \circ \Phi' = Id$ y $\Phi' \circ \Phi = Id$.

Los endomorfismos y automorfismos algebraicos son un caso particular de endomorfismos y automorfismos formales. Esto es cierto porque, de la condición $F(o) = 0$ que tienen los endomorfismos algebraicos F, se deduce que las componentes F_i de F son polinomios sin término independiente, y lo mismo sucede con su aplicación algebraica inversa, en caso de ser un automorfismo. Por tanto, sus desarrollos de Taylor en el origen de los F_i, y también de los G_j si se trata de un automorfismo, tienen esa misma propiedad y definen un endomorfismo formal, que es un automorfismo formal si F lo es como aplicación algebraica.

Nota 2. Algebraicamente, el endomorfismo formal dado por la n-upla $(S_1, \ldots, S_n)$ es el único endomorfismo de la K-álgebra de series de potencias formales $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ que envía x_i en S_i para todo $i = 1, \ldots, n$, y además es continua para la convergencia débil de series de potencias. Esta propiedad de continuidad, lo que formula es que la imagen de las series de potencias en las variables $x_1, \ldots, x_n$ son las series obtenidas por sustitución de las variables x_i por las respectivas series S_i. En concreto, proporciona la condición apropiada para que las sustituciones estén bien definidas, es decir, que puedan realizarse, y den lugar a series de potencias precisas.

La continuidad se expresa con el concepto de suceción débilmente convergente, que es aquella sucesión de series de potencias cuyas sucesiones de coeficientes de los monomios son estacionarias, siendo entonces la serie límite, aquella cuyos coeficientes son los de estacionamiento de las correspondientes sucesiones de K. Es claro así que, cuando una sucesión de series es convergente, el límite es único.

Que las aplicaciones formales sean continuas significa exactamente que las imágenes de sucesiones de series convergentes son también convergentes y convergen hacia la imagen de sus límites.

1.1. Unificación de los tres tipos de aplicaciones.

Utilizaremos la misma notación $F = (F_1, \ldots, F_n)$ para los tres tipos de aplicaciones que hemos formulado anteriormente. En el caso de los automorfismos, cuando exista el inverso lo denotaremos por $G = (G_1, \ldots, G_n)$. Es decir, $F_1, \ldots, F_n$ son, en el caso más general, series de potencias sin término independiente, y también lo son $G_1, \ldots, G_n$ cuando nos referimos al inverso. El caso más general corresponde al caso formal. Si los F_i son polinomios, se trata de endomorfismo algebraicos, y si son formas lineales, se trata de endomorfismos lineales.

Siempre se tiene la matriz Jacobiana $J(F)$ que tiene tamaño $n \times n$ y se define la matriz Jacobiana J y el jacobiano j de la siguient forma:

$$J(F) = J = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right); \quad j(F) = j = det(J).$$

La matriz jacobiana J tiene tamaño $n \times n$, y sus entradas son, en el caso más general, series de potencias en las variables consideradas, y j es otra serie de potencias de dichas variables.

En el caso formal, lo que sabemos es que J es una matriz de series de potencias y j también es una serie de potencias. En el caso algebraico, J es una matriz de polinomios y j un polinomio y, por último, en el caso lineal J es una matriz de escalares de K, concretamente la matriz M que nombramos al principio del capítulo, y j es un escalar.

En cada caso es caracterizable cuando J es una matriz invertible, en concreto, es invertible cuando el jacobiano j es una unidad en cada uno de los respectivos anillos, $K[[x_1, \ldots, x_n]]$, $K[x_1, \ldots, x_n]$ o K.

Esta caracterización es una propiedad general de álgebra conmutativa.

Si A es un anillo conmutativo con unidad 1, sus unidades son los elementos del conjunto

$$A^* = \{a \in A| \quad \exists a' \in A \quad \text{tal que} \quad a \cdot a' = 1\}$$

que es un grupo abeliano para la multiplicación. Entonces, se tiene que una matriz cuadrada M con entradas en A, es invertible si, y sólo si, su determinante es una unidad de A^*. En efecto, si M es invertible, existe otra matriz cuadrada M' del mismo tamaño con entradas en A tal que $M \cdot M'$ es la matriz identidad, entonces tomando determinantes se deduce que $det(M) \cdot det(M') = 1$ y, por tanto, $det(M)$ pertenece a A^*. Recíprocamente, si $det(M)$ es una unidad en A, entonces la inversa M' existe, porque es la matriz cuyas entradas son el producto del inverso de $det(M)$ por los menores adjuntos de las entradas de M.

Para los tres casos considerados se tiene respectivamente:

$$K\left[[x_1,\ldots,x_n]\right]^* = \{\text{u serie} \quad | \quad u_0 \neq 0, u_0 \quad \text{el término independiente de u}\}$$
$$K[x_1,\ldots,x_n] = K^* = K \setminus \{0\} = \{\text{u polinomio constante distinto de cero}\}$$
$$K^* = K \setminus \{0\}.$$

Por tanto, se deduce la equivalencia

$$\text{J es una matriz inversible} \Leftrightarrow j \in A^*$$

donde $A = K[[x_1,\ldots,x_n]], K[x_1,\ldots,x_n], K$ según el caso.

Sin embargo, que un endomorfismo de esos tres casos sea un automorfismo es, a priori, una condición más fuerte que la de ser J una matriz invertible. En efecto, si F, E son endomorfismos de cada uno de los tipos, la composición $E \circ F$ es otro endomorfismo del mismo tipo y se tiene, por la regla de la cadena,

$$J(E \circ F) = J(E) \cdot J(F).$$

Es decir, la matriz jacobiana de la composición es el producto de las matrices jacobianas. Entonces si F es un automorfismo, como existe G tal que $F \circ G = Id$ se tiene que $J(F) \cdot J(G) = Id$, ya que la aplicación identidad es una aplicación lineal cuya matriz jacobiana es la matriz identidad. Se deduce que $J(F)$ tiene que ser invertible y, por tanto, $j(F) \in A^*$ para el correspondiente anillo A en cada caso.

La pregunta general es: ¿hasta qué punto el recíproco de la última afirmación es también cierto? Es decir, ¿hasta qué punto $j(F) \in A^*$ también implica que F es un automorfismo en cada uno de los casos? Al estudio de esta pregunta está dedicada esta memoria.

La situación es la siguiente:

i) Cuando F es lineal, como $J = M$, está claro que la condición de ser $M = J$ invertible (y por tanto, $j \neq 0$) es equivalente a que F sea un automorfismo.

ii) Cuando F es algebraica, no se sabe si la condición de ser $J(F)$ invertible caracteriza a los automorfismos. Esto es justamente lo que pregunta la Conjetura Jacobiana. Que $J(F)$ sea invertible, significa que j es un polinomio constante no nulo. La Conjetura Jacobiana se formula solo para polinomios con coeficientes en cuerpos K que son de característica 0. Si la característica de K es un número primo $p > 0$, la pregunta no tiene solución afirmativa incluso para $n = 1$, por ejemplo si $F = X + X^p$, se tiene $j = 1$ pero F no es un automorfismo algebraico de K. En efecto, si F fuese automorfismo algebraico, entonces se tendría un inverso $G = Y + r(Y)$ donde $r(Y)$ es un polinomio de característica cero.

iii) Cuando F es formal, se tiene que la condición de que $J(F)$ es invertible (es decir, que j tenga término independiente no nulo) si caracteriza a los automorfismos formales.

Nota 3. Si F es algebraico y $j(F) \in K^*$ existe el inverso formal, es decir, existe la aplicación formal inversa $G = (G_1,\ldots,G_n)$ siendo $G_i \in K[[X_1,\ldots,x_n]]$ series de potencias, tales que

$F \circ G = Id$ y $G \circ F = Id$.

Como consecuencia, se tiene que si F es algebraico y $j(F) \in K^*$ entonces la Conjetura Jacobiana afirma, en una formulación equivalente, que las series G_i son todas ellas polinomios y que, por tanto, F es un automorfismo porque satisface $G_i(F) = X_i$.

Otra consecuencia de la condición $j(F) \in K^*$ es que la parte lineal de la aplicación algebraica F es un automorfismo lineal, ya que la evaluación de la constante no nula $j(F)$ en el origen es dicha constante no nula.

Entonces la composición (por cualquier lado) de F con el inverso de dicho automorfismo lineal, sigue siendo un endomorfismo algebraico con jacobiano en K^* cuya componente lineal es la identidad. Por ello, a efecto de probar la Conjetura Jacobiana, basta considerar el caso en el que $F_i = X_i + H_i$ siendo H_i un polinomio de orden mayor o igual a 2 para todo i. Por orden de un polinomio entendemos el menor grado de todos sus monomios si el polinomio no es nulo, y por infinito si es nulo.

Nota 4. Como consecuencia de todo lo anterior se puede formular la Conjetura Jacobiana de la siguiente forma:
Si $F = (X_1 + H_1, \ldots, X_n + H_n)$ con orden$(H_i) \geqslant 2$ $\forall i$, y tal que $j = 1$ (no queda otra opción porque j ha de ser constante y 1 es el valor que toma en $(0, \ldots, 0)$), entonces F es un automorfismo algebraico, es decir, existe $G = (X_1 + R_1, \ldots, X_n + R_n)$ con orden$(R_i) \geqslant 2$ $\forall i$ tal que $G \circ F = Id$ o $F \circ G = Id$.

A partir de ahora, se considerarán endomorfismos algebraicos con la forma, $F = (X_1 + H_1, \ldots, X_n + H_n)$, es decir, están dados por $H = (H_1, \ldots, H_n)$ y se puede escribir, $H = T_2 + T_3 + \cdots + T_d$ donde $T_k = (H_{1k}, \ldots, H_{nk})$ siendo H_{ik} la componente homogénea de grado k del polinomio H_i y $T_d \neq 0$ si $H \neq 0$.
Al elemento d se le llama **grado** de F, y se define $d = 1$ si $H = 0$.

Capítulo 2

Formulaciones algebraicas.

En este capítulo se muestran varias formulaciones algebraicas equivalentes de la Conjetura Jacobiana y se presentan algunos de los resultados que se han obtenido para la Conjetura a partir de dichas formulaciones.

En primer lugar, se han obtenido resultados abstractos en términos de las extensiones de anillos y de cuerpos y por las aplicaciones polinómicas dadas por las hipótesis de la Conjetura Jacobiana.

En concreto, si K un cuerpo de característica 0, y $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un endomorfismo algebraico. Se denota por $K[F]$ el mínimo subanillo del anillo de polinomios $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$ que contiene a K y a los polinomios $F_1, \ldots, F_n$. Se denota también por $K(F) = K(F_1, \ldots, F_n)$ el mínimo subcuerpo del cuerpo de funciones racionales $K(X) = K(X_1, \ldots, X_n)$ que contiene a K y a los polinomios $F_1, \ldots, F_n$. Asociados con el dato F se tienen, por tanto, la extensión de cuerpos $K(X)/K(F)$ y la extensión de anillos $K[X]/K[F]$, de hecho todos son álgebras sobre K. Recordamos que por extensión se entiende el par formado por un cuerpo y un subcuerpo suyo, o un anillo y un subanillo suyo.

Si además para el dato F se tiene $j(F) = 1$, se puede mostrar que la extensión de cuerpos $K(X)/K(F)$ es finita, sin embargo, no se sabe si necesariamente es de Galois. Para la extensión de anillos $K[X]/K[F]$ lo que no se sabe es si $K[X]$ tiene que ser necesariamente de generación finita como módulo sobre $K[X]$ cuando $j(F) = 1$.

Se dispone del siguiente teorema, que relaciona estos objetos con la Conjetura Jacobiana mostrando que esta es equivalente a esas propiedades que no se conocen, y cuya prueba se encuentra en trabajos de diversos autores, entre ellos Abhyankar, Bass, Connell y Wright, y que puede consultarse en el artículo de 1982 de los 3 últimos autores.

Teorema 1 *Si K es un cuerpo de característica 0 y $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un endomorfismo algebraico con la propiedad $j(F)$, entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

(1) F es un automorfismo algebraico, es decir, la Conjetura Jacobiana es válida para F.

(2) $K[F] = K[X]$.

(3) $K[X]$ es un módulo sobre $K[F]$ de generación finita.

(4) $K(F) = K(G)$.

(5) La extensión finita de cuerpos $K(X)/K(F)$ *es de Galois.*

(6) La aplicación polinómica $F : K^n \to K^n$ *es inyectiva.*

Observación. Cuando las condiciones (1) a (6) se cumplen, la aplicación polinómica del apartado (6) es también suprayectiva; sin embargo, la suprayectividad de dicha aplicación no es, en general, otra condición equivalente a las anteriores.

2.1. Teorema de Rolle en varias variables

En el caso del cuerpo de los números reales, es decir, $K = \mathbb{R}$, y de un polinomio $F(X) \in \mathbb{R}[X]$ en una variable, el teorema de Rolle afirma que si a y b son números reales con $a \neq b$ y $F(a) = F(b)$ entonces existe otro número real X tal que $F'(X) = 0$. De hecho, siempre existe un X en el intervalo abierto cuyos extremos son a y b.

El teorema de Rolle no es cierto en general para cuerpos de característica 0.
Por ejemplo, si $K = \mathbb{Q}$ y $F(X) = X^3 - 3X^2 + X$, se tiene $F(0) = F(1) = 0$, pero el polinomio derivado $F'(X) = 3X^2 - 6X + 2$ no tiene ninguna raíz racional ya que su discriminante es 12 y su raíz cuadrada no es racional.

Sin embargo, el teorema de Rolle en una variable es cierto si K es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0. En efecto, si $F(X) \in K[X]$, a y b dos elementos de K distintos y $F(a) = F(b)$, entonces el grado de F no puede ser 1, ya que las aplicaciones $K \to K$ del tipo $cX + d$ con $c \neq 0$ son inyectivas. Si el grado de F es 0, entonces $F' = 0$. Si el grado de F es mayor o igual que 2, entonces el grado de F' es mayor o igual que 1 (aquí se utiliza que K tiene característica 0) y por tanto, F' tiene raíces en K ya que es algebraicamente cerrado.

Puede plantearse, por tanto, el enunciado del teorema de Rolle para $n > 1$ variables sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0 en los siguientes términos:
Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y, $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un endomorfismo algebraico tal que los $F(a) = F(b)$ para dos n-uplas $a, b \in K^n$, con $a \neq b$ entonces, ¿existe una n-upla $X \in K^n$ tal que $j(X) = 0$?
Aquí el papel de la derivada F' lo juega el jacobiano j del endomorfismo.

Teorema 2 *Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, la validez de la conjetura jacobiana sobre K para n variables es equivalente a la validez del teorema de Rolle en n variables.*

Demostración.
Esta demostración se apoya en un resultado no trivial de Bialymcki-Bisula y Rosenlicht de 1962, que afirma (bajo las hipótesis de ser K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0) que si el endomorfismo algebraico $F = (F_1, \ldots, F_n)$ define una aplicación polinómica inyectiva $F : K^n \to K^n$ entonces el endomorfismo es un automorfismo. Este resultado no es otra cosa que la equivalencia entre (1) y (6) del teorema inical de este capítulo.

Este resultado implica que si j es una constante no nula entonces la aplicación polinómica $F : K^n \to K^n$ tiene que ser inyectiva, ya que en otro caso j tendría alguna raíz. Esto demuestra la condición suficiente en el teorema 1.

La condición necesaria también se deduce fácilmente, ya que si la Conjetura Jacobiana fuese cierta y para un endomorfismo algebraico F se tuviera $F(a) = F(b)$ para $a \neq b$ entonces el jacobiano j no podría ser una constante no nula, ya que en ese caso el endomorfismo sería un automorfismo algebraico y, por consiguiente, F sería inyectiva (habrá otra aplicación polinómica $G : K^n \to K^n$ tal que $G \circ F = F \circ G = Id$). Entonces como j no es constante no nula y K es algebraicamente cerrado, se deduce del teorema de los ceros de Hilbert que j tiene algún cero en K^n, es decir, que existe X en K^n tal que $j(X) = 0$. Por tanto, el teorema de Rolle es cierto.

Observaciones. 1) Se ha denotado también por $F : K^n \to K^n$ la aplicación polinómica definida por un endomorfismo algebraico $F = (F_1, \ldots, F_n)$.
2) El teorema de Rolle necesita, para ser cierto, que la característica sea 0, además de que el cuerpo K sea algebraicamente cerrado. En efecto, si K es algebraicamente cerrado de característica $p > 0$, entonces el polinomio $F(x) = X - X^p$ satisface que $F(a) = 0$ para todos los elementos a del cuerpo primo de K, que es isomorfo a $\mathbb{Z}/(p)$, y por tanto, tiene p elementos distintos, sin embargo, $F'(X) = 1$ para todo X en K.
Para $n > 1$ variables, sucede lo mismo;
Por ejemplo, $F = (X_1 - X_1^p, \ldots, X_n - X_n^p)$ satisface $F = (a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todas las n-uplas con a_j en el cuerpo primo, pero el jacobiano j satisface $j = 1$ y no tiene ceros en K^n.
3) La observación 2 muesta también como en característica $p > 0$, la Conjetura Jacobiana no es cierta ya que la aplicación polinómica $F : K^n \to K^n$ satisface $F = (0, \ldots, 0) = F(1, \ldots, 1)$ y por tanto no es inyectiva.

2.2. Desarrollos formales de Taylor.

Dado un cuerpo K y las variables $X_1, \ldots, X_n$ consideramos otros dos juegos de n variables $Y_1, \ldots, Y_n$ y $Z_1, \ldots, Z_n$ y las álgebras de polinomios $A = K[X_1, \ldots, X_n]$, $B = [Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n]$. Entonces cada polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$ de A da lugar al polinomio $P(Y_1, \ldots, Y_n)$ de B, sustituyendo en su expresión las variables X_i por las variables Y_i.

Ahora bien, B también puede entenderse como $B = K[Z_1, \ldots, Z_n][Y_1, \ldots, Y_n]$, es decir, como el álgebra de polinomios en las variables Y_i con coeficientes en $K[Z_1, \ldots, Z_n]$. Por tanto, para todo $P(X_1, \ldots, X_n)$ se tiene una expresión (que podemos entender como un desarrollo en serie) del tipo

$$P(Y_1, \ldots, Y_n) = P(Z_1, \ldots, Z_n) + (D_1 P)(Z_1, \ldots, Z_n)(Y_1 - Z_1) + \cdots + (D_n P)(Z_1, \ldots, Z_n)(Y_n - Z_n)$$

$$+ \sum_{i \leqslant j} (D_{ij} P)(Z_1, \ldots, Z_n)(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j) + \sum_{i \leqslant j \leqslant k} (D_{ijk} P)(Z_1, \ldots, Z_n)(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j)(Y_k - Z_k) + \ldots$$

Cuando K es de característica 0, como sucede en esta memoria,

$$D_iP = \frac{\partial P}{\partial x_i},\ D_{ii}P = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2},\ D_{ij}P = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j},\ \text{si } i < j, \dots$$

Con caracteríatica $p > 0$, sigue teniéndose $D_iP = \dfrac{\partial P}{\partial x_i}$. Pero, en general, para casos de más de dos índices ya no se trata de las derivadas del polinomio P sino de otras derivadas que se llaman **derivadas de Hasse** que son las derivadas parciales cuando la característica es 0.

Se deduce una expresión más organizada como un desarrollo en serie formal, es decir, como la exprexión

$$P(Y_1, \dots, Y_n) - P(Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i}(Z_1, \dots, Z_n)(Y_i - Z_i) +$$

$$+ \quad \text{términos de orden superior a 2 en las} \quad (Y_i - Z_i).$$

De esta expresión se deduce que si denotamos por $\triangle$ el ideal de $B = K[Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n]$ generado por $Y_1 - Z_1, \dots, Y_n - Z_n$, es decir, si $\triangle = \langle Y_1 - Z_1, \dots, Y_n - Z_n \rangle$ entonces $P(Y_1, \dots, Y_n) - P(Z_1, \dots, Z_n)$ pertenece al ideal $\triangle$.

Consideramos ahora un endomorfismo algebraico $F = (F_1, \dots, F_n)$ de n variables, con $F_i(X_1, \dots, X_n) \in A$ y consideramos el ideal $\triangle_F$ de B generado por los polinomios $F_i(Y_1, \dots, Y_n) - F_i(Z_1, \dots, Z_n)$ para $i = 1, \dots, n$, es decir, el ideal $\triangle_F = \langle F_i(Y_1, \dots, Y_n) - F_i(Z_1, \dots, Z_n) \rangle$ de B. Entonces se tiene $\triangle_F \subset \triangle$ por la propiedad anterior y el teorema siguiente.

Teorema 3 *Si K es un cuerpo de característica 0. Entonces un endomorfismo algebraico $F = (F_1, \dots, F_n)$ es un automorfismo algebraico si, y sólo si, se tiene $\triangle_F = \triangle$.*

Proposición 4 *En particular, la Conjetura Jacobiana afirma en estos términos que para un endomorfismo algebraico F son equivalentes las dos condiciones siguientes:*
a) $j = j(F) \in K^*$.
b) $\triangle_F = \triangle$.

Esta equivalencia permite, a través de *b*) formular la Conjetura Jacobiana en términos de una igualdad de ideales generados por polinomios a partir de la hipótesis $j \in K^*$. Verificar una igualdad de ideales generados por polinomios concretos es un problema típico de álgebra computacional. En términos de bases de Gröbner, se trataría de encontrar una base de Gröbner para el ideal $\triangle_F$ y entonces verificar que los $Y_i - Z_i$ pertenecen a $\triangle_F$ mostrando que el resto de su división por los polinomios de la base de Gröbner es 0 para $i = 1, \dots, n$. Sin embargo, dado que la Conjetura Jacobiana es un problema abierto, el problema de álgebra computacional anterior es un problema de gran dificultad para F en general. Los resultados de este apartado se deben a Russell en 1982.

2.3. Grados inversos

El grado de un endomorfismo algebraico $F = (F_1, \dots, F_n)$ donde $F_i(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ siendo K un cuerpo, se define como el máximo de los grados de los F_i, es decir, como el entero $d(F) = d = \text{máx}\,(grad(F_1), \ldots, grad(F_n))$.

El grado $d(F) = d$ no varía si F se compone con un automorfismo lineal, es decir, si se tiene $d(F \circ L) = d(F)$ si $L : K^n \to K^n$ es un automorfismo lineal. En particular, si $F = (X_1 + H_1, \ldots, X_n + H_n)$ con H_i de orden mayor o igual a 2, como en el capítulo 1, entonces se tiene $d(F) = d = \text{máx}\,(grad(H_1), \ldots, grad(H_n))$ si algún H_i es distinto de 0 y $d = 1$ si $H_1 = \cdots = H_n$, es decir, si F es un endomorfismo lineal no nulo. El grado coincide con el ya definido en el capítulo 1.

Sin embargo, no hay una fórmula general para expresar el grado de un endomorfismo compuesto en términos de los grados de los endomorfismos de que se componen. Es decir, si F, F' son dos endomorfismos entonces no existe una relación general entre $grado(F' \circ F), grado(F \circ F'), grado(F)$ y $grado(F')$. Esta nueva dificultad es esencial para el problema jabobiano, es decir, el problema que plantea la Conjetura Jacobiana. De hecho, si F es un automorfismo algebraico, su grado puede ser arbitrario, por ejemplo, si $n > 1$ y $d > 1$, el automorfismo algebraico dado por $F = (X_1 + (X_2)^d, X_2, \ldots, X_n)$ y su inverso $G = (X_1 - (X_2)^d, X_2, \ldots, X_n)$ tienen ambos grado d, sin embargo su composición $G \circ F$ que es la identidad tiene grado 1.

Si existe un resultado importante para los automorfismos algebraicos, es el siguiente:

Proposición 5 *Si K es un cuerpo y $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un automorfismo algebraico con $F_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$, entonces se tiene que $grad(G) \leq (grad(F))^{(n-1)}$, siendo G el inverso del automorfismo algebraico de F.*

Este resultado de 1982 se debe a Bass, Connell y Wright. En su enunciado general, tiene también relevancia en relación con la Conjetura Jacobiana.

Un caso particular para este es el siguiente:

Nota. Para $n = 2$ se tiene la aplicación polinómica $F = (F_1, F_2)$ de K_2 con $J(F)$ invertible y sea d el grado de una extensión de cuerpos $K(F_1, F_2) \subseteq K(X_1, X_2)$. Entonces, $d \leq \text{máx}\,\{grad(F_1), grad(F_2)\}$, es decir, el grado de la aplicación polinómica es menor o igual que el del endomorfismo algebraico, con la definición de grado para los endomorfismos algebraicos dada anteriormente.

Para ello, se tiene en cuenta que el concepto de endomorfismo y de automorfismo algebraicos (también los lineales y los formales pero no se necesitan aquí) existe, cuando K no es necesariamente un cuerpo. Es decir, en lugar de K, podemos tener un anillo conmutativo K' y con unidad. Un endomorfismo algebraico está dado por $F = (F_1, \ldots, F_n)$ donde los F_i están en $K'[X_1, \ldots, X_n]$ y un automorfismo algebraico es un endomorfismo algebraico que tiene un inverso que también lo es.

Cuando K es un cuerpo, tenemos también K-álgebras K', es decir, anillos K' provistos de un homomorfismo de anillos $K \to K'$ que de la estructura de K-álgebra sobre dichos anillos K'. Las K-álgebras que consideramos son también conmutativas y con unidad, es decir, K' es un anillo conmutativo y con anillo unidad 1 a la fuerza, la imagen del 1 de K por el homomorfismo estructural $K \to K'$).

Para un endomorfismo F, su grado $d(F)$ se define igual como el máximo de los grados de los F_i, y lo mismo sucede con el grado de la inversa si el endomorfismo es automorfismo. La matriz jacobiana J y el jacobiano j del endomorfismo F también se define igual que en el caso de cuerpos.

Por razones prácticas, consideramos ya endomorfismos escritos de la forma $F = (X_1 + H_1, \ldots, X_n + H_n)$ con H_i polinomios de orden mayor o igual a 2 como al final del primer capítulo. Aunque K y K' no sean un cuerpo, el grado está bien definido para endomorfismos algebraicos dados por polinomios con coeficientes en K o K', y no se pierde generalidad al considerar esta escritura particular para los endomorfismos, que se llama **normalizada**.

El resultado sobre la Conjetura Jacobiana que se debe a Bass es el siguiente:

Teorema 6 *Fijado el anillo conmutativo K y los enteros $n, d > 0$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*
a) Si K' es una K-álgebra y $F = (F_1, \ldots, F_n)$ con $F_i(X_1, \ldots, X_n) \in K'[X_1, \ldots, X_n]$ es un endomorfismo algebraico normalizado de $(K')^n$ con $grad(F) \leq d$ y $j = 1$, entonces F es un automorfismo algebraico de $(K')^n$.
b) Existe un entero c, que depende de K, n y d, tal que si K' es una K-álgebra y $F = (F_1, \ldots, F_n)$ con $F_i(X_1, \ldots, X_n) \in K'[X_1, \ldots, X_n]$ es un automorfismo algebraico normalizado de $(K')^n$ con $grad(G) \leq c$, siendo G el endomorfismo inverso de F.

Podemos probar la implicación $a) \Rightarrow b)$.

Fijados n, d y K un anillo conmutativo, y sea $K[y(i,\mu)]$ un anillo de polinomios sobre K con variables independientes $Y(i,\mu)$, donde $i = 1, \ldots, n$ y μ varían sobre los monimios finitos $X_1, \ldots, X_n$ para los que $2 \leq grado(\mu) \leq d$. Sea $F = (F_1, \ldots, F_n)$ la aplicación polinómica normalizada genérica de grado d, definido por $F_i = X_i + Y(i,\mu)\mu$ y sea J el ideal de $K[Y(i,\mu)]$ generado por los coeficientes de los monomios en $j(F) - 1$, donde $j(F) - 1$ es considerado como un polinomio en $X_1, \ldots, X_n$ con coeficiente en $K[y(i,\mu)]$. Finalmente, sea $\overline{K} = K[y(i,\mu)]/J$ y denotamos por $\overline{F}$ a F módulo reducido J. Entonces $\overline{F}$ tiene una propiedad universal evidente que implica que si $\overline{F}$ es inversible y $grado(\overline{F^{-1}}) = c$ entonces, la condición $b)$ del teorema se satisface.

No parece haber habido desarrollos posteriores utilizando grados inversos. Esto es comprensible ya que, dado este teorema, es difícil ir más allá sin resolver la Conjetura Jacobiana.

Observación 1: El teorema 3 muestra que si K es un cuerpo de característica cero y F un endomorfismo algebraico con $j = 1$ de K^n, para probar la Conjetura Jacobiana no bastará con mostrar que el grado de la inversa G es menor o igual que un cierto valor c (por ejemplo, $c = (gradoF)^{n-1}$) sino que hace falta probar eso mismo para todos los automorfismos de todos los $(K')^n$ siendo K' un álgebra sobre K.

Hay que tener en cuenta que las K-álgebras de un cuerpo no son cuerpos la mayoría, por ejemplo, una K-álgebra de polinomios o un cociente por un ideal de una K-álgebra de polinomios.

Observación 2: Aunque la mayoría de los resultados sobre la Conjetura Jacobiana de este trabajo son abstractos y conceptuales, la investigación para intentar probar la Conjetura Jacobiana se realiza con fórmulas explícitas y algoritmos computacionales. El grado juega frecuentemente un papel importante, de hecho no sólo el grado del endomorfismo F, sino los grados d_i de las componentes F_i, sobre todo en el caso $n = 2$. Para este caso, por ejemplo, Moh en 1982, probó que la Conjetura Jacobiana es cierta cuando el grado del endomorfismo es menor o igual que 100. Nakai y Baba en 1977, utilizando un resultado previo de Magnus de 1955, probó que la Conjetura Jacobiana es cierta cuando alguno de los enteros d_1 o d_2 es un número primo, o alguno de ellos es igual a 4, o $d_2 \leq d_1$ y d_1 es el doble de un número primo impar. El resultado de Magnus, afirma que si d_1 y d_2 son primos entre sí, entonces la Conjetura Jacobiana es cierta para $F = (F_1, F_2)$, y de este resultado se deduce como el resultado ya mencionado que afirma la validez de la Conjetura Jacobiana cuando alguno de los grados d_i es un número primo.

2.4. Operadores diferenciales.

Vamos a introducir en esta sección otros enunciados, también muy conocidos, que de ser ciertos implicarían o serían equivalentes ala Conjetura Jacobiana. Se trata de las conjeturas de Dixmier.

Sea K un cuerpo de característica cero y denotamos por A_n el n-ésima álgebra de Weyl, es decir, $A_n = K[X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_n]$.

Álgebra de Weyl

El álgebra de Weyl de n variables de un álgebra no conmutativa A_n sobre el cuerpo K determinada por n variables $X_1, \dots, X_n$ y sus derivadas asociadas $D_1, \dots, D_n$, donde las D_i son las derivadas parciales de las variables X_i respectivamente. En dicho álgebra, el producto de las variables X_i entre sí es conmutativo e igualmente el producto de las derivadas D_i entre si conmutan. Quedan así definidos para cada multiíndice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, el monomio $X^\beta = X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}$, y para cada multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la derivación parcial de orden superior D^α que es el producto ${D_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {D_n}^{\alpha_n}$. Al entero $\mid \beta \mid= \beta_1 + \ldots + \beta_n$ se denomina grado del monomio X^β, mientras que al entero $\mid \alpha \mid= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ se le denomina orden de la derivada D^α.

La K-álgebra A_n contiene como elementos particulares a los monimios X^α y a las derivadas parciales D^α. En general, los elementos del álgebra A_n son, por definición, las sumas formales finitas, cuyos términos que se suman son expresiones producto del tipo $aX^\beta D^\alpha$ donde a es un escalar de K, y α y β son dos multiíndices. No se excluye que $\alpha = \beta = (0, \dots, 0)$, en cuyo caso los sumandos son simplemente escalares de K, y por tanto el cuerpo K es un subconjunto de A_n, en particular, se tiene la inclusión $K \hookrightarrow A_n$, que proporciona la estructura de K-álgebra al anillo A_n.

En efecto, el conjunto A_n tiene una estructura de anillo no conmutativo con el escalar 1 como elemento unidad, para la cual la inclusión $K \hookrightarrow A_n$ es un homomorfismo de anillos. La suma de dos de sus elementos de A_n se define sumando término a término los coeficientes de las expresiones que comparten ambos exponentes β y α.

A_n con la suma es un grupo abeliano. Sin embargo definir el producto en A_n es laborioso, pero puede hacerse teniendo en cuenta dos de sus propiedades:
i) El produto es distributivo con respecto de la suma y de los productos por escalares de K, por tanto, para definirlo es suficiente describir el siguiente producto

$$(X^\delta \cdot D^\gamma) \cdot (X^\beta \cdot D^\alpha).$$

ii) Puesto que X^δ es un producto de variables X_i, y D^γ es un producto de derivadas parciales D_i, para describir cual es el producto de $i)$ es suficiente describir cuales son los productos del tipo

$$X_i(X^\beta \cdot D^\alpha) \quad y \quad D_i(X^\beta \cdot D^\alpha)$$

y aplicar esta descripción sucesivamente $\mid \delta \mid + \mid \gamma \mid$ veces.
iii) Si $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ es el multiíndice cuya i-ésima componente es 1 y el resto de componentes es 0, la descripción de los productos de $ii)$ es la siguiente:

$$X_i(X^\beta \cdot D^\alpha) = X^{\beta+e_i} \cdot D^\alpha$$

$$D_i(X^\beta \cdot D^\alpha) = X^\beta \cdot D^{\alpha+e_i} + \beta_i \cdot X^{\beta-e_i} \cdot D^\alpha$$

Teniendo en cuenta las sumas y las multiplicaciones por escalares, también quedan definidos dentro de A_n los polinomios las variables X_i, que son los polinomios usuales, y que forman un subanillo conmutativo $K[X_1, \ldots, X_n]$ de A_n. Análogamente, quedan definidas, para las derivadas D_i, los operadores diferenciales de orden superior con coeficientes constantes, es decir, las sumas finitas formales D cuyos sumandos son productos de una constante de K. Los operadores diferenciales de orden superior con coeficientes constantes forman otro anillo de polinomios $K[D_1, \ldots, D_n]$ de A_n. La laboriosidad en los cálculos se produce cuando se multiplica un elemento de uno de estos subanillos de polinomios por el otro.

Por esta razón, dado que los cálculos conducen a expresiones largas, en la práctica se utiliza otro producto derivado de la suma y el producto anteriores, el producto de Lie, dado por $[P, Q] = PQ - QP$ siendo P, Q dos elementos de A_n y PQ, QP los productos en A_n definidos anteriormente. El producto de Lie es bilineal con respecto a los escalares de K,y satisface, para cada terna de elementos $P, Q, R \in A_n$ la conocida propiedad circular

$$[P, [Q, R]] + [Q, [R, P]] + [R, [P, Q]] = 0$$

.
Por tanto, con la suma, el producto por escalares de K y el producto de Lie, A_n tiene otra estructura adicional: la del álgebra de Lie sobre K. Esta estructura de álgebra de Lie se deduce, por la definición del producto de Lie, de la estructura de álgebra como anillo no conmutativo con el producto definido anteriormente. No conviene olvidar esto, porque la suma y el producto de Lie en A_n no es un anillo.

Por ejemplo, la propiedad circular muestra que el producto de Lie no cumple la propiedad asociativa.

Ahora, se deducen para las variables X_i y las derivadas parciales D_i fórmulas sencillas para sus productos de Lie, en concreto las siguientes:

(1) $[X_i, X_j] = 0 \ \forall i, j$.

(2) $[D_i, D_j] = 0$ para todo par de índices i, j.

(3) $[D_i, X_j] = \delta_{i,j}$ para todo par de índices i, j.

Las fórmulas $(1), (2)$ se deducen de los respectivos hechos de que las X_i conmutan entre sí y que las D_i conmutan entre sí también. La fórmula (3), sin embargo, enfatiza que D_i y X_j no conmutan. En efecto, utilizando el apartado *iii*) de la definición del producto se tiene:

$$[D_i, X_j] = D_i X_j - X_j D_i = X_j D_i + \delta_{i,j} - X_j D_i = \delta_{i,j}.$$

Observación 1. Se suele expresar habitualmente A_n de la forma $A_n = K[X_1, \ldots, X_n, D_1, \ldots, D_n]$ junto a las fórmulas $(1), (2), (3)$. Esto quiere decir que, dentro del álgebra A_n, el menor subanillo que contiene a las constantes de K, a las X_i y a las derivadas D_i es precisamente la propia A_n. Esta propiedad suele expresarse diciendo que A_n está generada como álgebra sobre K por las X_i y las D_i con $i = 1, \ldots, n$ y que estos generadores cumplen las relaciones $(1), (2), (3)$.

Observación 2. También es fácil de comprobar que A_n puede definirse, salvo isomorfismo, como el álgebra sobre K.
$K \to A_n$, satisface la siguiente propiedad universal: Si B es otra K-álgebra, es decir B es otro anillo no necesariamente conmutativo junto con un homomorfismo de anillos $K \to B$, tal que en B existen dos conjuntos de n elementos $b_1, \ldots, b_n$ y $e_1, \ldots, e_n$ tales que $[b_i, b_j] = [e_i, e_j] = 0$, $[e_i, b_j] = \delta_{i,j}$ para todo par de índices i, j, entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : A_n \to B$ tal que $\phi(X_i) = b_i$, $\phi(D_i) = e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
Si B, C son dos K-álgebras, dadas por un homomorfismo de álgebras $\phi : B \to C$ se entiende una aplicación $\phi : B \to C$ que conserva las sumas, los productos y deja invariantes a todos los elementos a de K, en particular a 1. Como consecuencia, los homomorfismos de álgebras conservan también los productos de Lie, ya que el producto de Lie se expresa en términos de sumas y productos.
Como siempre, si $C = B$, los homomorfismos de K-álgebras se llaman endomorfismos y automorfismos de K-álgebras, y juegan un papel importante en las conjeturas de Dixmier, que se tratarán a continuación.

Cada elemento P en el álgebra de Weyl se puede escribir de forma única como $P = \sum a_\alpha \cdot D^\alpha$ y A_n es un anillo con una filtración $F = \{A_n(v)\}_{v \geq 0}$, donde $A_n(v)$ es el subespacio vectorial de los operadores $\sum a_\alpha \cdot D^\alpha$ con $|\alpha| \leq v$.
Una **filtración** en el anillo A_n es una sucesión creciente de subespacios vectoriales cuya unión es A_n.

Sea $\varphi : A_n \to A_n$ un endomorfismo de K-álgebras. Entonces, por la propiedad universal, φ está completamente determindado por las imágenes de X_i y D_j. Dado que estas imágenes satisfacen las mismas relaciones $(1), (2)$ y (3) que X_i y D_j, se deduce facilmente:

Proposición 7 *Cada endomorfismo del álgebra de Weyl es inyectivo.*

Conjetura Dixmier generalizada.

Cada endomorfisimo del álgebra de Weyl es sobreyectivo y por tanto, un automorfismo.
El caso $n = 1$ de esta Conjetura fue formulado en 1968 por Dixmier. El caso $n \geq 1$ de dicha Conjetura todavía está abierto.

Proposición 8 *La Conjetura Dixmier implica la Conjetura Jacobiana.*

Demostración. 1. Sean $F_1, \ldots, F_n$ con $det(JF) \in K^*$. Entonces como JF es una matriz inversible de polinomios, podemos considerar los elementos de A_n, $\dfrac{\partial}{\partial F_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial F_n}$ definidos de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial F_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial F_n} \end{pmatrix} = ((JF)^{-1})^T \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

Si tomamos $b_i = F_i$ y $e_i = \dfrac{\partial}{\partial F_i}$, es fácil comprobar que se cumplen las condiciones $[b_i, b_j] = [e_i, e_j] = 0$, $[e_i, b_j] = \delta_{i,j}\ \forall i, j$.
Ahora, por la propiedad universal, definimos el endomorfismo de álgebras $\phi : A_n \to A_n$ dado por $\phi(X_i) = F_i \quad y \quad \phi(D_j) = \dfrac{\partial}{\partial F_j}$. Entonces asumiendo la Conjetura Dixmier generalizada ϕ es sobreyectiva.

2. Sea $g \in K[X] \subset A_n$. Entonces existe $P \in A_n$ con $g = \phi(P)$. Entonces, $g = \sum a_\alpha(F) \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial F}\right)^\alpha$. Ahora aplicamos el operador g al elemento $1 \in K[X]$. Esto da $g = a_0(F) \in K[F]$. Entonces $K[X] \subset K[F]$, lo que implica $K[X] = K[F]$, es decir, F es un automorfismo algebraico. $\square$

Conjetura Débil Dixmier.

Observando la demostración anterior, observamos que el endomorfismo φ construido preserva la filtración, es decir, $\varphi(A_n(v)) \subset A_n(v)\ \forall v \geq 0$; llamamos a tal endomorfismo preservador de la filtración. Entonces,

Conjetura Débil Dixmier. Cada endomorfismo preservador de la filtración de la K-álgebra de Weyl A_n es sobreyectivo y, por tanto, es un automorfismo.
Luego, la misma demostración de la proposición anterior nos da también la prueba del siguiente resultado:

Proposición 9 *La Conjetura débil de Dixmier implica la Conjetura Jacobiana.*

En efecto, tenemos,

Teorema 10 *La Conjetura Jacobiana es equivalente a la Conjetura débil de Dixmier.*

Demostración.

La proposición anterior demuestra que la Conjetura débil de Dixmier implica la Conjetura Jacobiana, luego queda por demostrar que la Conjetura Jacobiana implica la Conjetura débil de Dixmier.

Así que supongamos que la Conjetura Jacobiana es cierta. Sea φ un endomorfismo preservador de la filtración de A_n. Entonces,

$$\varphi(D_j) = \sum_k a_{ij} \cdot D_k + b_j$$

para algunos polinomios a_{jk}, b_j de $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$.

De $[\varphi(D_j), \varphi(X_i)] = \delta_{ij}$ obtenemos $\sum a_{ij} \cdot D_k(F_i) = \delta ij$, de ahí $a_{ij} \cdot (JF)^T = I_n$.

Entonces $det(JF) \in K^*$, de donde $K[X] = K[F] = K[X_1, \ldots, X_n]$ por nuesta hipótesis. Definimos $B_j := \varphi(D_j) - b_j$ y escribimos D, B, b en lugar de $D_1, \ldots, D_n$, $B_1, \ldots, B_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ respectivamente.

Tenemos que demostrar que φ es sobreyectivo, es decir, $\varphi(K[X, D]) = K[X, D]$. Entonces debemos demostrar que $K[F, B + b] = K[X, D]$.

De $K[X] = K[F]$ deducimos $K[F, B + b] = K[X, B + b] = K[X, D]$.

Finalmente, $B_j = \sum a_{jk} \cdot D_j \ \forall i, j$. Como $(a_{jk} \cdot (JF)^T) = I_n$ implica que $a_{ij} \in GL_n(K[X])$. Y deducimos que

$$D_i \in \sum_k K[X] \cdot D_k \quad \forall i.$$

Por lo tanto, $K[X, B] = K[X, D]$ que da $K[F, B + b] = K[X, D]$ como se desea. □

Capítulo 3

Reducción del grado e inversa formal

3.1. Reducción del grado

En este capítulo vamos a considerar $F_i = X_i - H_i$, donde los H_i son homogéneos de grado $\delta \geq 2$. Obviamente algún H_i puede ser 0. Hemos cambiado el signo $+$ por el $-$ en los términos H_i, sin perder generalidad, para facilitar una escritura más cómoda para que no aparezcan excesivos signos $-$ en las fórmulas que aparecerán en lo sucesivo.

Proposición 11 *La condición $j(F) = 1$ es equivalente a que $J(H)$ es nilpotente, es decir, existe $m > 0$ tal que $J(H)^m = 0$.*

Demostración.

$\Rightarrow$ / $J(F)$ tiene inversa formal, es decir, una inversa tal que sus entradas son series formales de $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ esta inversa es necesariamente

$$Id + J(H) + J(H)^2 + J(H)^3 + \ldots$$

ya que, por cálculos matriciales se tiene

$$(Id - J(H))(Id + J(H) + J(H)^2 + \ldots) = Id$$

Las entradas de $J(H)^2$ son de grado $2(\delta - 1)$, las de $J(H)^3$ de grado $3(\delta - 1)$, por tanto, la suma $(Id + J(H) + J(H)^2 + \ldots)$ con débilmente a una matriz de series de potencias.
Ahora si $det(Id - J(H)) = j(F) = 1$, sabemos que $J(F)$ es una matriz invertible como matriz de polinomios, entonces su inversa tiene que ser una matriz de polinomios y por tanto, existe $m > 0$ tal que $J(H)^m = 0$ y $J(H)^{m+1} = J(H)^{m+2} = \ldots = 0$.

$\Leftarrow$ / Recíprocamente, si $J(H)^m = 0$ para algún $m > 0$, entonces $J(H)^{m+1} = J(H)^{m+2} = \ldots = 0$ y por tanto, la inversa de $(Id - J(H))$, que es $(Id + J(H))(Id + J(H) + J(H)^2 + \ldots)$ es una matriz de polinomios. □

Definición 12 *Se llama índice de nilpotencia de $J(H)$ al menor entero $m > 0$ tal que $J(H)^m = 0$.*

El índice de nilpotencia es siempre $m \leq n$ (si la matriz es $n \times n$, como es en algún caso). Esto se deduce de la existencia de la forma canónica de Jordan, sobre la clausura algebraica del cuerpo $K(X_1, \ldots, X_n)$, que es triangular con ceros en las posiciones de la diagonal, y esto implica que la condición necesaria y suficiente para $J(H)^n = 0$ todos los autovalores de $J(H)$ en dicha clausura algebraica son iguales a 0. También se deduce que $J(H)$ es nilpotente sí, y solo sí, su polinomio característico $det(\lambda Id - J(H))$ es igual a λ^n.

Teorema 13 *(Wang, 1980) Si $grado(F) \leq 2$ entonces la Conjetura Jacobiana es cierta.*

Demostración.
Por el teorema 1 es suficiente con demostrar que F es inyectiva.
Supongamos $F(a) = F(b)$ para algún $a, b \in K$ con $a \neq b$. Definimos $G_i(X) = F_i(X + a) - F_i(a)$. Luego, $G(0) = G(c) = 0$ con $c = b - a \neq 0$, tenemos que $grado(G) \leq 2$ y $j(G) = 1$. Tenemos que $JG(X) = JF(X + a)$ entonces $det(JC) \in K^*$.
Escribiendo $G_i = G_{i1} + G_{i2}$, que es su descomposición en componentes homogéneas. Consideremos la variable t y la función $h : K \to K^n$ dada por

$$h(t) = G(tc) = (G_1(tc), \ldots, G_n(tc)) = (tG_{1,1}(c) + t^2G_{1,2}(c), \ldots, tG_{n,1}(c) + t^2G_{n,2}(c)).$$

La derivada $h'(t)$ es el vector,

$$h'(t) = (G_{1,1}(c) + 2tG_{1,2}, \ldots, G_{n,1}(c) + 2tG_{n,2}(c))$$

Para $t = \frac{1}{2}$ se obtiene $h'(\frac{1}{2}) = G(c) = 0$.
La diferencial de h, para cada valor de t, es la aplicación lineal cuya matriz es la matriz fila dada por el vector $h'(t)$. Esta diferencial puede calcularse también, aplicando la regla de la cadena, a la primera expresión de la función $h(t)$ como la compuesta de las funciones $K \to K^n$ dada por $c \to tc$ y la función $K^n \to K^n$ dada por $X \to G(X)$, cuyas diferenciales respectivas, para cada valor de t, son las aplicaciones lineales cuyas respectivas matrices son $c = (c_1, \ldots, c_n)$ y $(JG)(tc)$, siendo c un vector no nulo y JG la matriz jacobiana del endomorfismo algebraico G. El resultado es $h'(t) = (c_1, \ldots, c_n) \cdot (JG)(tc)$. Por hipótesis, la matriz jacobiana JG tiene determinante igual a 1 evaluando en toda n-upla, en particular en la n-upla tc. Por hipótesis, la matriz jacobiana JG tiene determinante igual a 1 evaluado en toda la n-upla, en particular, en la n-upla tc. Por tanto, para todo t, la matriz $JG(tc)$ invertible de escalares de K, y como c es un vector no nulo, se deduce que el vector $h'(t) \neq 0 \quad \forall t$.

Con esto, se llega a una contradicción, ya que para $t = \frac{1}{2}$, el primer cálculo $h'(\frac{1}{2})$ nos da el vector 0, mientras que el segundo cálculo nos da un vector distinto 0. Por tanto, G y F no pueden no ser inyectivas, luego este argumento demuestra la Conjetura Jacobiana en este caso. □

Teorema 14 *(Bass, Connell, Wright, Yagzhev, 1982) La Conjetura Jacobiana es cierta para todo $n \geq 2$, si es cierta para todo $n \geq 2$ cuando $F = X_i - H_i$ y los H_i son homogéneos de grado 3 (es decir, $\delta = 3$). Además $J(H)$ es nilpotente necesariamente para estos H_i.*

Nota. Para probar este resultado hay que añadir variables al sumando, por eso hace falta que se enuncie para todo $n \geq 2$ a ambos lados de la equivalencia. Wright en 1993 demostró la Conjetura Jacobiana para H homogéneo de grado $\delta = 3$ y $n = 3$,y en 1994 Hubbers la demostró para H homogéneo de grado $\delta = 3$ y $n = 4$ utilizando computación de altas prestaciones. Para H homogéneo de grado $\delta = 3$ y $n > 4$ no se ha probado aún la Conjetura.

La demostración del teorema anterior tiene en cuenta que, dado el endomorfismo algebraico $F = (F_1, \ldots, F_n)$ de K^n con $j(F) = 1$, y variables adicionales $X_{n+1}, \ldots, X_{n+n'}$, entonces el endomorfismo algebraico $F' = (F_1, \ldots, F_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+n'})$ *de* $K^{n+n'}$ también satisface $j(F') = 1$ y se tiene que F es un automorfismo algebraico de K^n sí, y solo sí F' es un automorfismo algebraico de $K^{n+n'}$. También tiene en cuenta que además de los automorfismos algebraicos de $K^{n+n'}$ que son del tipo F' para un automorfismo algebraico F, hay muchos otros automorfismos algebraicos adicionales de $K^{n+n'}$, que podemos denotar por $T, Q, \ldots$ Entonces, dado F, en la demostración del teorema anterior lo que se prueba es que existe $m > 0$ y dos de estos muchos automorfismos algebraicos T, Q *de* $K^{n+n'}$ tales que la composición $F'' = T \circ F' \circ Q$ es un endomorfismo algebraico de $K^{n+n'}$ de grado menor o igual que 3, que naturalmente conserva la propiedad $j(F'') = 1$. Después, se refina más esta prueba para precisar que dicho F'' puede encontrarse con la propiedad adicional $F''_i = X_i - H_i$ siendo H_i un polinomio homogéneo de grado 3 para todo $i = 1, 2 \ldots, n + n'$

Teorema 15 *(Druzkowski, 1983). La Conjetura Jacobiana es cierta para todo $n \geq 2$ sí, y solo si lo es para el caso $F_i = X_i + L_i^3 \quad \forall i = 1, \ldots, n$ donde L_i es una forma lineal. Además, $J(L)$, que es una matriz de escalares, tiene que ser nilpotente, como consecuencia de la hipótesis jacobiana $j(F) = 1$.*

3.2. Inversa formal y fórmulas de árboles con raíces.

Como vimos en el capítulo anterior $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es una aplicación polinómica y consideramos $D_1, \ldots, D_n$ las derivadas $\dfrac{\partial}{\partial X_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial X_n}$.

Llamamos $D^\alpha = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}$ con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y

$D^{[\alpha]} = \dfrac{1}{\alpha!} D^\alpha$ donde $\alpha! = (\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!)$ y $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$.

Sea $F = (F_1, \ldots, F_n) = (X_1 - H_1, \ldots, X_n - H_n)$ con H_i series de orden mayor o igual a 2 y $U \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$, entonces se tiene el siguiente resultado probado por Abhyankar en 1974:

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\alpha \geq 0} D^{[\alpha]}(U(F_1, \ldots, F_n) \cdot j(F) \cdot H^\alpha)$$

donde $H^\alpha = H_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot H_n^{\alpha_n}$.

Para el caso particular $j(F) = 1$ existen inversas formales del endomorfismo dado por F como hemos mostrado en el capítulo 1. Es decir, existen series $G_1, \ldots, G_n$ tales que

$$G_i(F_1, \ldots, F_n) = X_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Se deduce la fórmula de inversión de Abhyankar, tomando $U = G_i$

$$G_i = \sum_{\alpha \geq 0} D^{[\alpha]}(X_i \cdot H^\alpha)$$

Volviendo al caso particular $j(F) = 1$ y H_i homogéneo de grado $\delta \geq 2$ se tiene que $D^{[\alpha]}(X_i \cdot H^\alpha)$ es homogéneo de grado $((\delta - 1) \mid \alpha \mid +1)$. Por tanto, el término de descomposición de la inversa G_i es suma de componentes homogéneos

$$G_i = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=d} D^{[\alpha]}(X_i H^\alpha) \right).$$

Las componentes tienen grados $((\delta-1)d+1)$. Para $d=0$, la componente es X_i, para $d=1$ la componente es H_i. Para $\delta=3$ los grados de las componentes son impares. A la componente homogénea de la serie G_i de grado $((\delta-1)d+1)$ la denotamos por G_i^d. Con la notación del final del capítulo 1, se tiene que para la expresión de F como suma de sus componentes homogéneas tenemos $T_k = 0 \quad \forall k \neq \delta$, y $T_\delta = -H = (-H_1, \ldots, -H_n)$. Para la expresión de la inversa g de F como suma de sus componentes homogéneas, se tiene $R_k = 0$, si k no es de la forma $(\delta-1)d+1$, mientras que $R_{(\delta-1)d+1} = (G_1^d, \ldots, G_n^d) \quad \forall d \geq 0$.

La Conjetura Jacobiana se enuncia en estos términos de la forma siguiente:

Conjetura Jacobiana. Si $j(F)=1$ y $\delta=3$, en particular, $J(H)$ es nilpotente. Entonces existe $l>0$ tal que $G_i^d = 0 \quad \forall d \geq l$.

Observación. Como sabemos que, en caso de ser invertible, el grado de G_i tiene que ser menor o igual que δ^{n-1}, si la Conjetura Jacobiana es cierta para $F = X_i - H_i$ con H_i homogéneo de grado δ, entonces tiene que ser $G_i^d = 0$ cuando $((\delta-1)d > \delta^{n-1})$, es decir, cuando $d > \dfrac{\delta^{n-1}}{\delta-1}$.

Como consecuencia no trivial del teorema de inversión de Abhyankar, y con un análisis meticuloso de esta fórmula, en 1982 Bass, Connell, Wright descubrieron otra fórmula para expresar las series inversas G_i^d en términos de árboles T con raíz en la forma siguiente.

Un árbol es un grafo conexo simple (es decir, sin lazos ni aristas múltiples) que no tiene ciclos, es decir, secuencias consecutivas de aristas con origen y llegada en el mismo vértice. Un árbol con raíz T es un árbol en el que se ha señalado como raíz a uno de sus vértices, es decir, es un par formado por un árbol y uno de sus vértices. Un automorfismo de un grafo con raíz T es un automorfismo del grafo que deja invariante a la raíz. Cada árbol con raíz T tiene un número de automorfismos $\alpha(T) > 0$.

En un árbol con raíz, la raíz se considera de nivel 1 y los demás vértices a nivel igual al número de aristas necesarias para conectar el vértice con la raíz más 1. Para cada vértice v, se denota por v^+ al conjunto de vértices del nivel justamente superior al de v y que están conectados por una arista con v. Para los vértices maximales se tiene $v^+ = \emptyset$.

Para cada árbol T con raíz r y cada $i = 1, \ldots, n$, consideramos aplicaciones $f : T \to \{1, \ldots, n\}$ con la propiedad $f(r) = i$. Para cada vértice v se denota por f_v a $f(v)$, y por $D^{f_{v^+}}$ la derivación con respecto al multiíndice f_{v^+} cuya j-ésima componente es el número de vértices de v^+ cuya imagen por f sea precisamente j. En particular, si v es maximal, el multiíndice es $(0, \ldots, 0)$ y la correspondiente derivación es la identidad.

Se define entonces $P_{T,f}$ por

$$P_{T,f} = \prod_{v \text{ vértice de T}} \left(D_{f_{v^+}} \cdot H_{f_v} \right)$$

La fórmula de inversión descubierta por Bass, Connell, Wright en 1982 es el resultado del siguiente teorema.

Teorema 16 *Si $F_i = X_i - H_i$, con H_i homogéneo de grado $\delta \geq 2$ y $j(F) = 1$, por tanto $J(H)$ nilpotente. Entonces se tiene,*

$$G_i^d = \sum_T \frac{1}{\alpha(T)} \cdot \sum_f P_{T,f}$$

donde la primera suma está extendida a todos los árboles T (salvo isomorfismo) con raíz r y d vértices, y para cada uno de tales T, la segunda suma está extendida a aquellas aplicaciones $f\colon T \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $f(r) = i$.

Hay un número alto de T y de f en esta fórmula, pero conceptualmente es bastante sencilla.

El resultado anterior debido a Bass, Connell y Wright se pensó que sería relevante para probar la Conjetura Jacobiana cuando se aplica al caso $\delta = 3$. Sin embargo, la investigación con esta premisa solo ha dado resultados parciales. El más avanzado es debido a los tres anteriores y que afirma lo siguiente:

Teorema 17 *Si $F_i = X_i - H_i$ con H_i homogéneo de grado $\delta = 3$, $j(F) = 1$ y el índice de nilpotencia de $J(H)$ es menor o igual a 2, es decir, si $J(H)^2 = 0$. Entonces, para $F_i = X_i - H_i$ con $(F_1, \ldots, F_n)$ es un automorfismo algebraico.*

Bibliografía

[A] S. S. Abhyankar, Expansion techniques in algebraic geometry, Tata Inst. Fundamental Research, Bombay, 1977.

[BCW] H. Bass, E. H. Connell, D. Wright. The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion on the inverse. Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 7, 2, (1982), 287-330.

[BR] A. Bialynicki-Birula and M. Rosenlicht, Injective morphism ofreal algebraic varieties, Proceedings of the American Mathematical Society 13 (1962), 200-203.

[Di] J. Dixmier, Sur les algebrès de Weyl, Bull. Soc. Math. France 96 (1968), 209-242.

[Dr] L. M. Druzkowski, An Effective Approach to Keller's Jacobian Conjecture, Math. Ann. 264 (1983), 303-313.

[DL] W. Dicks, J. Lewin. A Jacobian criterion for free associative algebras. Comm. Alg. 10 (1982), 1285-1306.

[E] A.v.d. Essen. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. The Mathematical Gazette. Soc. Math. France 85, 504 (2001) 55-78.

[F] E. Formanek. Bass work on the Jacobian Conjecture. Contemporary Math. Amer. Math. Soc. Vol. 243 Hyman Bass 65 Birthday (1999), 37-44.

[H] E. Hubbers. The Jacobian Conjecture. Master Thesis. University of Nijmegen, 1994.

[K] O. H. Keller. Ganze Cremona- Transformationen, Monats. Math. Physik 47 (1939), 299-306.

[Ma] A. Magnus, On polynomial solutions of a differential equation, Math. Scand. 3 (1955), 255-260.

[Mo] T. T. Moh, On the Jacobian Conjecture and the configuration of roots, J. Reine Angew. Math, (to appear).

[NB] Y. Nakai and K. Baba, A generalization of Magnus theorem, Osaka J. Math. 14 (1977), 403-409.

[W] D. Wright. On the Jacobian Conjecture, Illinois J. Math. 25 (1981), 423-440.

[Y] A. V. Yagzhev. On Keller's problem. Siberian Math. J. 21 (1981), 747-754.