



---

**Universidad de Valladolid**

E. U. de Informática (Segovia)

Departamento de Matemática Aplicada

TESIS DOCTORAL:

**Sobre la definición y construcción  
sistemática de variables canónicas de tipo  
focal. Aplicación a sistemas keplerianos  
perturbados.**

Presentada por Ignacio Aparicio Morgado para optar al  
grado de  
doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:  
Luis Floría Gimeno y  
José Fernando Pascual Sánchez



---

## Agradecimientos

Quiero mostrar mi agradecimiento a los directores de esta Tesis, en especial al Dr. Luis Floría por su orientación, apoyo y paciencia.

A mi mujer, por su continua comprensión y ayuda en los momentos difíciles.

A las personas que, aunque no aparecen aquí con nombres y apellidos, han estado presentes de alguna forma durante el desarrollo de esta Memoria.

## Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto y antecedentes. Mecánica Celeste Lineal y Regular. . .	1
1.2. Comentarios adicionales sobre algunos precedentes. . . . .	8
1.3. Objetivos. . . . .	21
<b>2. Potencial zonal e intermediarios de tipo Deprit</b>	<b>27</b>
2.1. Potencial zonal . . . . .	27
2.2. Intermediarios de tipo Deprit . . . . .	29
2.3. Intermediario de Deprit . . . . .	31
2.4. Intermediario de Alfriend–Coffey . . . . .	32
<b>3. Idea de los métodos central y focal</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	35
3.2. Método central de Izsák–Sperling–Burdet . . . . .	36
3.3. Método focal de Burdet . . . . .	39
<b>4. Transformación canónica a variables redundantes</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. Formas diferenciales y transformaciones . . . . .	44
4.3. Extensión de una transformación puntual . . . . .	47
4.4. Transformación que aumenta el número de variables . . . . .	49
4.5. Conclusiones . . . . .	55
<b>5. Transformación del tiempo en variables BF</b>	<b>57</b>
5.1. Introducción . . . . .	57

---

5.2.	Ecuaciones diferenciales de segundo orden en variables BF . . .	59
5.3.	Interpretación de los resultados . . . . .	65
<b>6.</b>	<b>Familia biparamétrica de transformaciones</b>	<b>67</b>
6.1.	Introducción . . . . .	67
6.2.	Una nueva familia de variables focales canónicas . . . . .	69
6.3.	Aplicación al problema de Kepler . . . . .	72
6.4.	Transformación del tiempo y ecuaciones canónicas del movimiento . . . . .	74
6.5.	Ecuaciones del oscilador armónico . . . . .	77
6.6.	Algunos Ejemplos . . . . .	81
6.6.1.	Transformación BF [Versión de 44, §§4.4] . . . . .	81
6.6.2.	Transformación D [44, §§4.3] . . . . .	84
6.6.3.	Transformación DEF [44, §§4.1] . . . . .	85
6.7.	Conclusiones . . . . .	85
<b>7.</b>	<b>Familia bipolarétrica y potenciales perturbadores</b>	<b>87</b>
7.1.	Introducción . . . . .	87
7.2.	Transformación del tiempo y ecuaciones canónicas del movimiento . . . . .	88
7.2.1.	Primera variante . . . . .	89
7.2.2.	Segunda variante . . . . .	92
7.3.	Conclusiones . . . . .	94
7.3.1.	Primera Variante . . . . .	94
7.3.2.	Segunda Variante . . . . .	95
<b>8.</b>	<b>Linealización exacta de intermediarios</b>	<b>97</b>
8.1.	Intermediario de Deprit en variables D . . . . .	97
8.2.	Intermediario de Alfried–Coffey en las variables DEF . . . . .	102
8.3.	Intermediario de Alfried–Coffey en las variables BF . . . . .	107
8.4.	Conclusiones . . . . .	109
<b>9.</b>	<b>Desarrollo del potencial zonal en elementos regulares DEF</b>	<b>111</b>
9.1.	Introducción . . . . .	111
9.2.	Transformación DEF: Linealización de un tipo de sistema kepleriano perturbado . . . . .	113
9.3.	Introducción de elementos focales . . . . .	114
9.4.	El desarrollo del potencial zonal . . . . .	115

<b>10.El Problema Principal en elementos regulares DEF</b>	<b>121</b>
10.1. Introducción . . . . .	121
10.2. La transformación DEF y sus elementos . . . . .	122
10.3. El Problema Principal del Satélite Artificial . . . . .	124
 <b>Conclusiones finales: resultados y futuro trabajo</b>	 <b>130</b>
 <b>Apéndices</b>	 <b>133</b>
 <b>A. El sistema de dos cuerpos con fuerzas internas.</b>	 <b>135</b>
A.1. Planteamiento del problema y separación entre movimiento del centro de masas y movimiento relativo. . . . .	135
A.2. Problema del movimiento relativo. Movimiento en un campo central. . . . .	144
A.3. Caso de campos centrales conservativos. Método de Binet. . .	152
A.4. Aplicación al problema gravitatorio de dos cuerpos. . . . .	161
A.5. Campos centrales conservativos. Resolución alternativa del pro- blema de Kepler. . . . .	163
A.6. Formulación lagrangiana del caso de fuerza central conservativa	172
A.7. Formulación hamiltoniana del caso de fuerza central conservativa	176
A.8. Vector de Laplace–Runge–Lenz o vector excentricidad. . . . .	178
A.9. Posición a lo largo de la órbita. Ley horaria del movimiento kepleriano. Anomalías. . . . .	183
A.9.1. Órbitas elípticas. . . . .	186
A.9.2. Órbitas parabólicas. . . . .	191
A.9.3. Órbitas hiperbólicas. . . . .	193
A.10.Sobre el formalismo canónico y las variables polares nodales. .	197
 <b>B. Sobre la transformación a elementos</b>	 <b>205</b>
B.1. Transformaciones de ecuaciones diferenciales . . . . .	205
B.2. Funciones casi–periódicas . . . . .	207
B.3. Transformación a elementos . . . . .	211
 <b>Referencias</b>	 <b>217</b>

---

## 1.1. Contexto y antecedentes. Mecánica Celeste Lineal y Regular.

Como idea de carácter general (*Stiefel y Scheifele* (1971) [94], Capítulo I, §4; *Boccaletti y Pucacco* (1996) [18], Capítulo 2, §2.6), la *regularización* se define como la eliminación de singularidades presentes en las ecuaciones diferenciales (que, en nuestro caso y para nuestros propósitos, consideraremos como las ecuaciones que gobiernan el movimiento de ciertos sistemas mecánicos). A este respecto, hay que distinguir entre “*singularidades de una ecuación diferencial*” y “*singularidades de sus soluciones*”, pues la existencia de singularidades de una ecuación no necesariamente entraña la existencia de singularidades de sus soluciones (que pueden ser funciones perfectamente regulares). Se trata, pues, de *transformar* ecuaciones diferenciales singulares en ecuaciones regulares, es decir, de obtener ecuaciones diferenciales libres de singularidades, más que de obtener funciones regulares que sean soluciones de la ecuación en cuestión.

Por regla general, los métodos de regularización de las ecuaciones del movimiento suelen combinar el uso de *transformaciones de variables* (tanto de la variable independiente que parametriza las soluciones como de las variables dependientes o funciones incógnita del problema) con el recurso a *integrales primeras* (y, en su caso, incluso a *ligaduras geométricas y dinámicas*) del sistema diferencial objeto de estudio.

En algunos casos, como resultado del propio proceso de regularización de las ecuaciones, se llega a obtener también *linealización* de las mismas: las ecuaciones de partida, tras las transformaciones y manipulaciones llevadas a cabo, se convierten en *ecuaciones lineales* que –en la situación más favorable– son además *de coeficientes constantes* (por lo tanto, exentas de singularidades), y para las cuales se dispone ya desde Euler y Laplace de una teoría completamente desarrollada y perfectamente conocida para su resolución y el análisis de sus propiedades fundamentales. En particular, de ahí la importancia de la ecuación diferencial lineal de segundo orden y coeficientes constantes para la función incógnita  $y$  de la variable independiente  $x$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \Xi y = 0,$$

independientemente del valor y signo del parámetro  $\Xi$ . No hay que olvidar que las ecuaciones diferenciales del movimiento del *problema de Kepler* puede transformarse (tras unos cambios adecuados de variables dependientes y con una reparametrización del movimiento por medio de una nueva variable independiente) en este tipo de ecuaciones lineales, donde el parámetro  $\Xi$  está relacionado con la *energía* del sistema kepleriano (en el caso de los métodos de tipo central<sup>1</sup>) o con la norma del vector *momento angular* orbital (si se procede mediante un método de tipo focal<sup>2</sup>).

A lo largo del tiempo ha habido numerosos intentos de reducir las ecuaciones de movimiento del problema de Kepler perturbado a ecuaciones de osciladores (lineales o no) perturbados. Esta reducción es un aspecto esencial de la *formulación lineal y regular de los problemas de Mecánica Celeste y Astrodinámica*. Una referencia ya clásica en esta materia es el libro de *Stiefel y Scheifele* (1971) [94]. Más recientemente, *Deprit, Elife y Ferrer* (1994) [44] han refinado este enfoque y han tratado con detalle y profundidad esta cuestión en un contexto matemático más riguroso, moderno y avanzado. Por otra parte, en el tratamiento de diversos problemas que surgen en diferentes campos de las Matemáticas y de la Física (por ejemplo, Física Atómica, Química Cuántica, problemas de interacciones moleculares) también se han aplicado técnicas de regularización y linealización.

Algunas de las ideas básicas relacionadas con la regularización y linealización de ecuaciones diferenciales en el campo de la Mecánica Celeste se remontan al siglo XVIII (véase *Deprit, Elife y Ferrer* (1994) [44], “Introduction”, pp. 151–156, y §1, pp. 156–162), y pueden rastrearse en trabajos de

---

<sup>1</sup>Véase más adelante la definición de *método central*.

<sup>2</sup>Véase más abajo el concepto y distinción entre *métodos centrales y focales*.

Clairaut, D'Alembert, Euler y Laplace. El primero en proponer una regularización de unas ecuaciones de movimiento fue *Euler*, en su tratamiento de una colisión rectilínea en el marco del problema del movimiento unidimensional de dos masas puntuales bajo su mutua atracción gravitatoria según la Ley de Gravitación Universal de Newton ([94], Capítulo I, §5, pp.13–17). Desde entonces las ideas de regularización, linealización y estabilización (analítica y numérica) de las ecuaciones diferenciales del movimiento que gobiernan el comportamiento de los sistemas dinámicos perturbados ha motivado la construcción de numerosas transformaciones de las variables dependientes y/o independientes.

Esta estrategia de los cambios de variables se ha combinado a menudo con la introducción de integrales primeras y ligaduras geométricas y/o dinámicas en las ecuaciones de movimiento. En este sentido, el estudio de los sistemas keplerianos perturbados constituye un fecundo campo en el cual se han podido aplicar y poner a prueba estas técnicas.

De entre los métodos más utilizados para regularizar las ecuaciones de movimiento que se presentan en el estudio de diversos sistemas keplerianos (a menudo, perturbados) que aparecen en problemas de movimiento orbital de la Mecánica Celeste y de la Astrodinámica, destacaremos (*Burdet* (1969) [28], §1, pp. 71–73; §2, pp. 73–75) los que pueden denominarse como *métodos centrales* y los llamados *métodos focales*. En el trabajo citado Burdet describe dos tipos de procedimientos basados en transformaciones, asociado cada uno de ellos al correspondiente tipo de cada uno de los métodos que se acaban de mencionar.

Los primeros (*métodos centrales*) utilizan sistemas de coordenadas con origen en el *centro* de la cónica solución del problema considerado, y parametrizan el movimiento por medio de variables independientes que en esencia son iguales o proporcionales a la *anomalía excéntrica*.

En cuanto a los segundos (*métodos focales*), parten del empleo de sistemas de coordenadas con origen en un *foco* de la cónica (el foco que ocupa el cuerpo atractor) y para la representación paramétrica del movimiento utilizan variables independientes esencialmente iguales o proporcionales a la *anomalía verdadera*.

Por ejemplo (véase *Cid y Camarena* (1979) [34], Capítulo V, §V.7, pp. 124–126, y §V.8, pp. 126–128; *Boccaletti y Pucacco* (1996) [18], Capítulo 2,

§2.1, pp. 134–136; *Goldstein* (1980) [59], Capítulo 3, §3.5, pp. 85–86, y §3.7, p. 94), en el caso del movimiento de una partícula en el seno de un campo de fuerzas central conservativo, formulando el problema en un sistema de coordenadas polares planas  $(r, \phi)$  en el plano del movimiento con origen en el centro de fuerzas, el conocido como *método de Binet* (en definitiva, un método de tipo focal) permite regularizar la componente radial de las ecuaciones de movimiento, dando lugar a una ecuación escalar de segundo orden para la variable radial  $r$  utilizando la conservación de la norma del momento angular orbital, reemplazando la función incógnita  $r$  por  $1/r$ , y cambiando la variable independiente  $t$  por el ángulo polar  $\phi$  del sistema de coordenadas polares planas (con origen en el centro de fuerzas) en el plano orbital. Como consecuencia de este tratamiento, es inmediato identificar modelos de fuerza central conservativa que además permiten obtener ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes para la función incógnita  $1/r$ , con  $\phi$  como variable independiente.

*Bohlin* 1911 [19] propone un método (de tipo central) para la resolución del problema gravitatorio de dos cuerpos (caso de órbitas ligadas) en el plano orbital, con la anomalía excéntrica como variable independiente (introducida a partir de la anomalía media). Partiendo de coordenadas cartesianas rectangulares  $(x, y)$  en el plano del movimiento, considera una transformación de las variables dependientes  $x, y \rightarrow \xi(x, y), \eta(x, y)$ , reformula las ecuaciones de la integral de la ley de las áreas y de la integral de la energía en términos de las funciones  $(\xi, \eta)$  con la anomalía excéntrica como variable independiente, y convierte las ecuaciones diferenciales originales en ecuaciones lineales con coeficientes constantes correspondientes a dos osciladores armónicos independientes (es decir, desacoplados), pero con la misma frecuencia, para las nuevas coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  (respecto de la anomalía excéntrica).

Por su parte, los métodos basados en las transformaciones de *Levi-Civita* (1906) ([74], §2, pp. 311–314; *Kustaanheimo y Stiefel* (1965) [71], §1, pp. 204–205; *Stiefel y Scheifele* (1971) [94], Capítulo II, §8, pp. 20–23; *Boccaletti y Pucacco* (1996) [18], Capítulo 2, §2.6, pp. 164–167) y de *Kustaanheimo y Stiefel* ([71]; [94], Capítulo II, §9, pp. 23–35; [18], Capítulo 4, §4.7, pp. 289–291), también métodos de tipo central, regularizan las ecuaciones vectoriales de movimiento y la ecuación escalar para la distancia  $r$  del problema gravitatorio de dos cuerpos plano y espacial (respectivamente), combinando un cambio de variable independiente (*transformación de Sundman* (1912–1913), [95], §V, p. 127, que introduce un pseudo-tiempo proporcional a una anomalía de tipo excéntrico) con un cambio de variables dependientes, e introduciendo

la integral de la energía en las ecuaciones.

A su vez *Izsák* (1955) [64] regulariza las ecuaciones vectoriales del mismo problema (tanto en el plano como en el espacio tridimensional) utilizando la transformación de Sundman, *sin* efectuar cambio de función incógnita (es decir, sin transformaciones de coordenadas), pero a costa de tener que introducir la integral primera del vector de Laplace (y no sólo la de la energía) en las ecuaciones de movimiento<sup>3</sup>.

Diversos autores (*Burdet* (1967) [26]; *Silver* (1975) [91]; *Jezewski* (1975) [66]; *Bond y Allman* (1996) [24], §9.2, p. 148, y §9.3, pp. 151–154) suelen atribuir a *Sperling* (1961) [92] la idea de una regularización, también conocida como “regularización de Sperling–Burdet”, que en realidad ya se encuentra en *Izsák* (1955). Lo que *Burdet* (1969) [28, §1] denomina “método central” recoge esencialmente los contenidos presentados por *Izsák* (1955) [64]. Por lo tanto, y atendiendo sólo a los autores mencionados, nos parece que la secuencia cronológica (en cuanto a la atribución de esta técnica) debería ser: *Izsák* (1955) [64], *Sperling* (1961) [92], *Burdet* (1967, 1968 y 1969) [26–28].

Por otra parte, *Deprit, Elípe y Ferrer* (1994) [44], §1, p. 162, atribuyen a *Bohlin* (1911) [19] la idea del procedimiento presentado por *Izsák*.

Para describir el movimiento orbital de una partícula en el espacio bajo la influencia de otro cuerpo (llamado *primario*) o en el seno de un campo de fuerzas, la posición de la partícula respecto de un sistema de referencia con origen en el primario (o en algún otro punto del espacio seleccionado con algún criterio dado de antemano) se representa por medio de un vector de tres componentes. Pero dicha posición también puede ser caracterizada mediante un conjunto *redundante* de cuatro coordenadas (*Burdet* (1969) [28], §2, pp. 73–75; *Ferránadiz* (1986, 1986, 1988, 1991, 1992 y 1994) [45, 47–49, 51, 52]; *Deprit, Elípe y Ferrer* (1994) [44]), dando en cada instante la *distancia* de la partícula al origen de coordenadas y el *vector unitario* en la dirección de la partícula móvil (o, lo que es lo mismo, el vector de los *cosenos directores* del vector de posición en cada instante, referido al sistema de coordenadas

---

<sup>3</sup>*Szebehely* (1976) [97] considera, de manera más general, bajo qué condiciones pueden linealizarse las ecuaciones del movimiento kepleriano por medio de transformaciones  $t \rightarrow s$  de la variable independiente de la forma  $dt = g(r)ds$ , sin recurrir a cambios de la variable dependiente pero utilizando integrales primeras del movimiento.

prefijado).

Ésta es la *decomposición proyectiva* del vector tridimensional de posición como producto de la distancia y el vector unitario en la dirección radial. Introducido por medio de una *transformación puntual de rango máximo que aumenta la dimensión del espacio de coordenadas*, el conjunto de estas cuatro variables que permiten localizar la posición de la partícula en el espacio puede interpretarse (*Ferrándiz* (1986) [45], §1, p. 361; *Ferrándiz* (1988) [47], §1, p. 345; §2, p. 346) como las *coordenadas* (cartesianas) homogéneas *proyectivas* del móvil en un espacio proyectivo.

En función de estas coordenadas el movimiento de la partícula puede entonces contemplarse (*Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44], p. 151) como la *composición* de un desplazamiento radial y de una rotación de la dirección radial sobre la esfera unidad. Tras un cambio de variable independiente (que introduce un tiempo ficticio que es del tipo de la anomalía verdadera) y reemplazando la distancia radial por su recíproco, esto permite transformar las ecuaciones diferenciales del movimiento del *problema de Kepler* (en el espacio ordinario de tres dimensiones) en un sistema de ecuaciones diferenciales (lineales y regulares, es decir, exentas de singularidades) que adoptan la forma de las ecuaciones que gobiernan un oscilador armónico en 4 dimensiones. Más en concreto, se trata de cuatro osciladores armónicos desacoplados que ejecutan sus oscilaciones de manera independiente y con la misma frecuencia. El centro de oscilación se encuentra situado en el centro de atracción gravitatoria, que a su vez coincide con un foco de las cónicas solución del problema gravitatorio de dos cuerpos.

Una ventaja de este *método focal* consiste en que una función del tipo  $1/r$ , donde  $r$  es la distancia al origen de coordenadas, se puede representar como una sencilla expresión trigonométrica. En consecuencia, para sistemas keplerianos perturbados con perturbaciones proporcionales a potencias negativas  $1/r^n$  de la distancia, dichas perturbaciones pueden ser expresadas como *polinomios trigonométricos*, es decir, como *desarrollos finitos de Fourier con respecto al pseudo-tiempo focal*.

Como se acaba de comentar, en ausencia de perturbaciones, las ecuaciones de movimiento del problema de Kepler, una vez regularizadas por medio de transformaciones correspondientes al *método focal* anterior, formulan un oscilador armónico en 4 dimensiones con una frecuencia independiente del tiempo pero relacionada con la magnitud del vector momento angular. Esta

descripción del movimiento no está restringida al caso de las órbitas elípticas, por lo que la mayor parte de los resultados obtenidos son *uniformemente válidos para todos los tipos de cónicas* solución del problema gravitatorio de dos cuerpos.

*Deprit, Elife y Ferrer* (1994) [44] ofrecen una visión teórica general sobre la regularización por linealización de sistemas keplerianos, analizan diversas maneras de extender la descomposición proyectiva tridimensional del vector de posición de una partícula en un espacio tridimensional a una transformación de coordenadas en cuatro dimensiones, y proponen (*Deprit, Elife y Ferrer* (1994) [44], §4, pp. 187–198) para cada una de ellas una *extensión de la transformación puntual de coordenadas* a una transformación *canónica o débilmente canónica*<sup>4</sup>, completando el cambio de coordenadas mediante los correspondientes momentos conjugados. Este enfoque les permite no sólo recuperar el cambio de variables **BF** (de Burdet-Ferrándiz; véase el cambio de coordenadas en Burdet<sup>5</sup> [28], §2, p. 73; y la extensión a momentos canónicos en [45], [47], [48], [51], [52]), transformación que introduce variables canónicas redundantes de tipo focal, sino también construir nuevas transformaciones del mismo tipo que producen nuevos conjuntos de variables canónicas de la misma naturaleza focal: las llamadas transformaciones **D** (Deprit) y **DEF** (Deprit-Elife-Ferrer).

Nótese que todos estos cambios de coordenadas (incluso tras ser completados mediante las pertinentes ecuaciones que describen las transformaciones de momentos canónicos), para que puedan linealizar el problema de Kepler requieren también de un adecuado *cambio de la variable independiente*, que convierta el tiempo físico en una nueva variable independiente o tiempo ficticio (que, en los métodos de tipo focal, es proporcional a la anomalía verdadera del movimiento kepleriano). Desde el punto de vista de los tratamientos analíticos, el uso de este pseudo-tiempo tiene el efecto de *regularizar la singularidad de tipo polo* en el origen del campo de fuerzas de la atracción gravitatoria.

---

<sup>4</sup>Acerca de la pertinencia e importancia de esta distinción en relación con *transformaciones que aumentan el número de variables* (y, en particular, transformaciones puntuales que aumentan la dimensión del espacio de coordenadas), véase *Deprit, Elife y Ferrer* (1994) [44], p. 153. El concepto de “transformación débilmente canónica” o “transformación canónica en sentido débil” se define y analiza en [44], §§4.2, pp. 191–193. Véase también [44], Appendix, p. 199.

<sup>5</sup>Burdet realizó su estudio del problema de Kepler en el marco de la Mecánica Newtoniana, no en el de la Mecánica Hamiltoniana.

## 1.2. Comentarios adicionales sobre algunos precedentes.

Tras los rasgos generales que acabamos de exponer, detallaremos a continuación algunos aspectos que consideramos relevantes para terminar de presentar el contexto en el que se enmarca nuestro trabajo.

Para fijar ideas, recordemos que *Burdet* (1969) [28], §1, p. 71, establece que

“el *método central* consiste en determinar las órbitas (cónicas) [soluciones del problema de Kepler no perturbado] con ayuda de un oscilador armónico fijado al centro de la cónica”.

Hay que hacer notar que, por conveniencia en el uso de la terminología y en aras de la brevedad en la expresión, *Burdet* interpreta (*ibídem*, p. 71) como “osciladores armónicos” las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes de la forma

$$(d^2y/dx^2) + \Xi y = \text{cte.}, \tag{1.1}$$

y clasifica (*ibídem*, p. 72) las cónicas según el valor y signo del parámetro  $\Xi$ , que considera como el cuadrado de la “frecuencia”. Para transformar las ecuaciones de movimiento de Newton de un sistema kepleriano perturbado en las ecuaciones de un “oscilador” (tridimensional) perturbado, *Burdet* recurre como nueva variable independiente a un *tiempo ficticio central*, introducido por medio de la transformación de Sundman  $dt = r ds$ , y utiliza las integrales primeras de la energía y del vector de Laplace–Runge–Lenz del movimiento kepleriano puro para obtener los coeficientes de las ecuaciones lineales deseadas <sup>6</sup>. Con notaciones parecidas a las de *Burdet*, las ecuaciones son de la forma

$$(d^2y/ds^2) + \omega^2 y = \text{Función del vector de Laplace} + \mathcal{O}(\text{perturbación}),$$

En lenguaje de osciladores, el cuadrado de la “frecuencia” está asociado al opuesto del valor de la energía kepleriana, y el segundo miembro de la ecuación de tipo oscilador (que representaría a las fuerzas externas que actúan

---

<sup>6</sup>Cf. *Izsák* (1955) [64].

sobre el oscilador) depende del vector de Laplace–Runge–Lenz y de la fuerza perturbadora.

En particular, en ausencia de perturbaciones, las ecuaciones de Newton del problema de Kepler se llevan a la forma de un oscilador armónico tridimensional forzado, en el que el forzamiento es constante y viene dado por el opuesto del vector de Laplace–Runge–Lenz. Incluyendo la transformación de la variable independiente, la resolución del problema de Kepler presupone la resolución de un sistema diferencial de orden siete.

Para el tratamiento de sistemas keplerianos perturbados, Burdet adjunta las ecuaciones de primer orden (respecto del tiempo ficticio central) que gobiernan las variaciones del cuadrado de la “frecuencia” y del vector de Laplace por efecto de la perturbación considerada. En consecuencia, esta formulación del problema perturbado de dos cuerpos conduce a un sistema diferencial de orden once. Burdet señala que esta aparente desventaja (el elevado orden del problema) queda compensada por la naturaleza lineal de una parte de las ecuaciones.

Finalmente Burdet presenta asimismo una ecuación diferencial escalar

$$\left(d^2r/ds^2\right) + \omega^2 r = 1 + \mathcal{O}(\text{perturbación}), \quad (1.2)$$

de tipo oscilador forzado perturbado, a la que obedece la distancia  $r$  entre la partícula móvil y el origen de coordenadas (que se supone coincidente con el centro atractor del campo de fuerzas de la atracción newtoniana).

A diferencia del método central, en el *método focal* (Burdet (1969) [28], §2, p. 73) se trata de obtener las soluciones de un sistema kepleriano en el espacio ordinario de tres dimensiones por medio de un oscilador armónico 4–dimensional (tres componentes para el vector unitario en la dirección de la posición instantánea de la partícula móvil, y una componente para el recíproco de la distancia entre el origen y la partícula en cada instante) cuyo centro de oscilación se sitúa no ya en el centro geométrico de la cónica, sino en un foco de las cónicas soluciones (a saber, el ocupado por el centro de fuerzas de la atracción gravitatoria, que a su vez servía también como origen de coordenadas).

En esta ocasión, para convertir las ecuaciones de movimiento del problema de dos cuerpos (en forma newtoniana) en *cuatro* ecuaciones escalares lineales

de segundo orden con coeficientes constantes,

$$(d^2y/ds^2) + py = \text{cte.} + \mathcal{O}(\text{perturbación}), \quad (1.3)$$

Burdet combina un cambio de coordenadas (variables dependientes de tipo “posición”) con una transformación de la variable independiente que introduce un *tiempo ficticio focal* a través de una transformación de Sundman generalizada del tipo  $dt = r^2 ds$ . Una peculiaridad de la transformación de las variables dependientes utilizada es que *aumenta en número de variables de tres a cuatro*, por lo que hay *redundancia* en el conjunto de las nuevas variables; además, reemplaza la distancia  $r$  por su recíproco. El cuadrado de la “frecuencia” en la ecuaciones lineales obtenidas está relacionado con el cuadrado de la norma del momento angular orbital de la partícula móvil (que es una integral primera del sistema diferencial de las ecuaciones de movimiento del problema de Kepler). En esta ocasión, el signo de esta cantidad  $p$  (que es siempre no negativa) no permite clasificar las cónicas soluciones del problema de Kepler; únicamente permite discriminar el caso de movimiento rectilíneo, que corresponde a  $p = 0$ .

En definitiva, considerando las cuatro ecuaciones de tipo oscilador para las variables redundantes de posición, y la relación diferencial que introduce el pseudo-tiempo focal, el problema de Kepler aparece ahora formulado por medio de un sistema diferencial de orden nueve.

De cara al estudio de sistemas keplerianos perturbados, Burdet añade la ecuación escalar de primer orden (respecto del pseudo-tiempo focal) que da cuenta del ritmo de variación del cuadrado de la frecuencia frente a perturbaciones, con lo que el problema perturbado de dos cuerpos queda ahora descrito por un sistema de orden diez. Hay que tener en cuenta que las redundancias del nuevo sistema de variables, formalizadas a través de ciertas identidades que pueden interpretarse como restricciones o ligaduras (geométricas o dinámicas), podrían permitir rebajar este orden, pero a costa de perder la forma obtenida para las ecuaciones y su comportamiento y buenas propiedades (analíticas, numéricas, en cuanto a estabilidad, etc.) debidas a su carácter lineal.

Como una de las ventajas de la aplicación del método focal para el estudio de sistemas keplerianos perturbados, Burdet señala que cuando las fuerzas perturbadoras son expresiones de tipo polinómico en  $1/r$  (es decir, combinaciones de potencias de  $r^{-1}$ ), los segundos miembros de las ecuaciones de los osciladores perturbados adoptan la forma de polinomios trigonométricos (es decir, series de Fourier finitas) respecto del pseudo-tiempo focal  $s$ .

A continuación propone tratamientos alternativos del problema de Kepler perturbado, por medio de “*elementos*” del movimiento kepleriano puro correspondientes a cada uno de los dos métodos (central y focal), y el estudio de su comportamiento frente a las perturbaciones con ayuda del método de variación de las constantes. En el contexto de estas teorías, se entiende que los “*elementos*”<sup>7</sup> son cantidades que en un problema no perturbado se mantienen constantes o varían como funciones lineales de la variable independiente; en problemas perturbados, si las fuerzas perturbadoras son de pequeña magnitud, dichas cantidades estarían únicamente sometidas a variaciones “suaves”.

Tras esta descripción general de los métodos central y focal a partir de las consideraciones del propio Burdet, revisaremos ahora el contenido de sus trabajos anteriores (*Burdet* (1967), (1968) [26, 27]).

A la vista de la singularidad de la que, para  $r = 0$ , adolecen las ecuaciones de movimiento del problema de dos cuerpos en su formulación newtoniana en coordenadas cartesianas, y de la indeseable influencia de dicha singularidad sobre la estabilidad de las órbitas integradas numéricamente, Burdet (1967) propuso y discutió nuevas ecuaciones de movimiento que resultan ser regulares y permiten una propagación del error suave y relativamente inocua a lo largo de las integraciones numéricas.

El sistema de ecuaciones de movimiento del problema de Kepler, en forma newtoniana y en coordenadas cartesianas, presenta una *singularidad* para  $r = 0$ , y está formado por ecuaciones diferenciales *no lineales y acopladas*, lo cual afecta a la integración numérica de las trayectorias y a la estabilidad numérica de las soluciones. Estos inconvenientes pueden salvarse introduciendo en las ecuaciones de movimiento las *integrales primeras* de la energía (o el semieje mayor, en el caso de movimiento elíptico) y del vector de Laplace–Runge–Lenz, que son *elementos* del movimiento kepleriano (de hecho, se mantienen constantes a lo largo del movimiento kepleriano puro).

En este artículo Burdet únicamente considera órbitas de tipo elíptico, y pospone para un trabajo posterior (*Burdet* (1968) [27]; pero también *Burdet* (1969) [28]) un tratamiento más general de todos los tipos de órbitas del problema de dos cuerpos.

Una vez fijado el tipo de órbita considerada, procede a sustituir el tiempo

---

<sup>7</sup>*Stiefel y Scheifele* (1971) [94], §18, pp. 83–84.

físico  $t$  por la anomalía excéntrica  $E$  (salvo una constante aditiva) como nueva variable independiente, sirviéndose para ello de una transformación diferencial de tipo Sundman.

De este modo <sup>8</sup>, *sin necesidad de efectuar transformaciones de coordenadas de la partícula móvil* y recurriendo únicamente a integrales primeras y a una variable independiente “regularizadora”, se obtienen para las componentes cartesianas de las ecuaciones de movimiento del problema espacial de Kepler, y con la anomalía excéntrica como variable independiente, tres ecuaciones *lineales, no homogéneas*, de segundo orden, *con coeficientes constantes* (por lo tanto, también *regulares*; es decir, exentas de singularidades) y *desacopladas* (por lo que cada componente del vector de posición evoluciona independientemente sin influir en, ni ser influida por, las restantes componentes de dicho vector).

Estas ecuaciones corresponden a tres osciladores armónicos desacoplados, con frecuencia unidad, y forzados, sometidos a forzamientos constantes (que dependen de las integrales primeras previamente introducidas en las ecuaciones de movimiento). La resolución de este sistema diferencial (respecto de la anomalía excéntrica) es inmediata, y las constantes de integración que intervienen en su solución general como coeficientes arbitrarios en combinaciones lineales del sistema fundamental de soluciones formado por las funciones circulares  $\sin E$  y  $\cos E$  pueden adoptarse como *nuevos elementos* del movimiento kepleriano, a los que Burdet denomina (*Burdet* (1967) [26], §2, p. 436) *elementos naturales*.

La resolución completa del problema de Kepler presupone ahora la integración de la relación diferencial de tipo Sundman que formaliza el cambio de variable independiente, para obtener en términos finitos una relación entre el tiempo físico  $t$  y la anomalía excéntrica elíptica, cuestión que (en presencia de la solución anteriormente mencionada para las variables de tipo espacial) se reduce a una mera cuadratura en términos de funciones circulares, y que en definitiva da lugar a la ecuación de Kepler del movimiento elíptico.

En suma, con este planteamiento el estudio de un sistema kepleriano puro equivale a la resolución de un sistema diferencial de orden siete (si bien la naturaleza lineal de algunas de las ecuaciones implicadas en el procedimiento compensa con creces el aumento del orden diferencial del problema).

---

<sup>8</sup>Véanse comentarios anteriores en relación con el trabajo de *Izsák* (1955) [64].

El tratamiento, por este método, de sistemas keplerianos perturbados conduce a ecuaciones que corresponden a osciladores perturbados y forzados, en los que pueden aparecer términos no lineales que son del orden de la fuerza perturbadora considerada. Además, para una completa descripción del movimiento, el sistema formado por estas ecuaciones de tipo oscilador debe ser suplementado con las ecuaciones de primer orden que gobiernan las variaciones de los elementos (semieje mayor y vector de Laplace, que eran constantes en el movimiento kepleriano puro) debidas a las perturbaciones consideradas, sin olvidar la relación diferencial de tipo Sundman que relaciona la anomalía excéntrica con el tiempo físico. Todo ello conduce a que el problema perturbado de dos cuerpos aparezca ahora formulado por medio de un sistema diferencial de orden 11 respecto de la anomalía excéntrica, si bien  $r = 0$  ya no es una singularidad para este sistema, y algunas de las ecuaciones son lineales en las componentes cartesianas del vector de posición.

Un planteamiento alternativo para la resolución de sistemas keplerianos perturbados puede formularse bajo la forma del *método de perturbación de los elementos*, por medio de las ecuaciones de primer orden para las variaciones de los “elementos naturales” por efecto de las fuerzas perturbadoras (variaciones descritas como derivadas de dichos “elementos” respecto de la anomalía excéntrica), junto con las ecuaciones para los elementos elípticos “semieje mayor” y “vector de Laplace” y la relación diferencial de la transformación de tipo Sundman, conjunto de ecuaciones que de nuevo constituye un sistema de ecuaciones *regulares* (respecto de la inclinación y para  $r = 0$ ).

Como reelaboración y extensión del trabajo expuesto en el artículo anterior, *Burdet* (1968) [27] presenta una teoría regularizada del movimiento kepleriano en la que unifica el tratamiento de los diversos tipos de órbitas (cónicas) solución de problema de Kepler e introduce lo que –como en su trabajo anterior– denomina “*elementos naturales*”, lo cual le permite a continuación un cálculo regularizado de perturbaciones para sistemas keplerianos perturbados en el espacio tridimensional por medio de las ecuaciones diferenciales regulares que describen los cambios experimentados por esos elementos por efecto de perturbaciones.

Gracias al empleo de *funciones universales* (*Stiefel y Scheifele* (1971) [94], Capítulo III, §11 pp. 42–51; *Bond y Allman* (1996) [24], Capítulo 5, §5.4, pp. 71–78, y Apéndice E, pp. 236–238; *Schneider* (1992) [88], Capítulo 3, §3.7, pp. 94–97; *Abad* (2012) [1], Capítulo 10, pp. 163–173), este enfoque es aplicable a cualquier tipo de movimiento (elíptico, parabólico o hiperbólico)

sin tener que modificar las fórmulas o los procedimientos de integración.

Los “elementos naturales” considerados por Burdet en este artículo están siempre bien definidos, con lo que queda garantizado el cálculo de cualquier órbita; además, en esta formulación no aparecen singularidades ni para  $r = 0$ , ni para excentricidad  $e = 1$  (transición de elipse a hipérbola) ni para ningún valor de la inclinación.

La integración del tiempo físico (pp. 367–368) se obtiene a partir de la variación de un elemento.

Un hecho crucial en estas teorías es que la variable independiente respecto de la que se forman las derivadas y se calculan las integrales ya no es el tiempo físico  $t$ , sino que se introduce como nueva variable independiente “regularizadora” un tiempo ficticio  $s$ , que –en este caso concreto– viene definido de una manera uniforme para todos los tipos de órbitas por medio de la transformación de Sundman,  $dt = r ds$ . Debido a esta elección, las ecuaciones de tipo oscilador ya no aparecerán (como en *Burdet* (1967)) [26] con frecuencia unidad, sino con una frecuencia que dependerá de la energía de la órbita.

Por lo demás, las ecuaciones obtenidas mantienen un gran parecido formal con las correspondientes expresiones de Burdet (1967) [26], y el modo de proceder es ahora análogo al seguido en dicho artículo, si bien en esta ocasión se efectúa un tratamiento unificado de los casos de movimiento de tipo elíptico, parabólico e hiperbólico. Aparte de esto, Burdet también incluye en este trabajo la ecuación diferencial de tipo oscilador a la que obedece la distancia  $r$ , tanto en el problema de Kepler puro como en problemas perturbados de dos cuerpos, y su resolución por medio de funciones universales.

Partiendo de las consideraciones efectuadas por Burdet (1967) [26] en relación con el conjunto redundante constituido por sus elementos focales, Flury y Janin (1975) [57] presentan expresiones que relacionan a dichos elementos con los vectores posición y velocidad del móvil, y con los elementos orbitales keplerianos clásicos; asimismo, con vistas a la formulación de problemas de valores iniciales a partir de las ecuaciones de Gauss que gobiernan las variaciones de los elementos focales debidas a perturbaciones, proponen fórmulas para las condiciones iniciales de los elementos focales, y aplican sus planteamientos al caso de órbitas de satélites geoestacionarios.

Los elementos focales están bien definidos para pequeños valores de la excentricidad y de la inclinación, y no introducen singularidades ni indeterminaciones en las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento frente a perturbaciones. Aunque estos autores sólo utilizan esta clase de elementos para órbitas de tipo elíptico, subrayan (en línea con algunos comentarios anteriores de Burdet –(1969), [28] §3, p. 77– acerca de dichos elementos, que gozan de propiedades geométricas y mecánicas comunes a todos los tipos de órbitas keplerianas, incluyendo casos degenerados) que los mismos permiten una “transición suave” entre el movimiento elíptico y los movimientos parabólico e hiperbólico; Flury y Janin ((1975) [57] §1, p. 495) formalizan esta circunstancia afirmando que “los elementos focales constituyen un conjunto uniformemente válido de elementos orbitales. El único tipo de movimiento para cuya descripción caen en defecto es el movimiento rectilíneo”.

Cabe mencionar que estos autores también parten de la forma newtoniana de las ecuaciones de movimiento del problema perturbado de dos cuerpos en coordenadas cartesianas, y que la nueva variable independiente que introducen es (salvo una constante aditiva) la anomalía verdadera del movimiento kepleriano, que es proporcional al tiempo ficticio focal utilizado por Burdet. Esto les permite obtener ecuaciones de osciladores con *frecuencia unidad*<sup>9</sup>, en lugar de frecuencias que pudieran depender de elementos orbitales o de integrales primeras del problema de Kepler (y que, por lo tanto, podrían estar sujetas a variaciones debidas a los efectos de las fuerzas perturbadoras); por este motivo, completan el sistema diferencial transformado (ecuaciones de segundo orden de tipo oscilador perturbado), y las ecuaciones en forma de Gauss para los elementos focales, con la ecuación de primer orden para la variación del semilado recto (que, como es bien sabido, es función de la norma del vector momento angular orbital). Junto con la relación diferencial que introduce el tiempo ficticio por medio de una transformación de Sundman generalizada, ambos conjuntos de ecuaciones diferenciales (osciladores perturbados para las variables de posición, y ecuaciones variacionales para los elementos focales) son, pues, de orden diez.

Vitins (1978 [102]) dedujo una relación entre las ecuaciones de tipo oscilador y el movimiento de un giróscopo.

---

<sup>9</sup>En consecuencia (Vitins (1978) [102], §2, p. 176–177), las ecuaciones de osciladores correspondientes al caso del movimiento kepleriano no perturbado son estables en el sentido de Liapunov, pues la frecuencia de las oscilaciones es *a priori* una constante numérica que no depende de la elección de las condiciones iniciales. Esto no ocurría con las ecuaciones originales de Burdet (1969) [28], §2, p. 74, Ecs. (17), pero sí en Flury y Janin (1975) [57], §2, p. 497, Ecs. (2).

Para intentar eludir los inconvenientes debidos a la inestabilidad (en el sentido de Liapunov) de las ecuaciones de Newton correspondientes al movimiento de los sistemas keplerianos (puros o perturbados), y en un intento de mejorar la teoría de *Burdet* (1969) [28] de osciladores 4–dimensionales (para el vector unitario en la dirección de la posición instantánea y para el recíproco de la distancia) basada en el uso de tiempos ficticios focales del tipo de la anomalía verdadera para reparametrizar el movimiento, *Vitins* (1978) [102] se propuso sustituir dichas ecuaciones, convirtiéndolas en un *sistema estable de ecuaciones diferenciales* obtenidas tras efectuar unas transformaciones adecuadas, tanto de las variables dependientes (funciones incógnita) como de la variable independiente, y deducir a continuación un conjunto de *elementos regulares* (entendiendo por tales un conjunto de cantidades que, en el movimiento kepleriano puro, sean constantes o varíen linealmente con la variable independiente, y cuyo ritmo de variación en el movimiento perturbado venga regido por ecuaciones diferenciales regulares, exentas de singularidades). Como ventaja adicional, sus elementos resultan apropiados para la aplicación de técnicas analíticas de perturbaciones, como el método de promedios o transformaciones de Lie.

En su artículo *Vitins* reduce en dos unidades (de diez a ocho) el orden del sistema de ecuaciones de *Burdet*, y ello sin introducir ninguna nueva singularidad (es decir, el sistema resultante sigue siendo válido para cualquier tipo de órbita, excepto las rectilíneas). Para este propósito se sirve de las identidades que expresan la redundancia de las variables de la teoría de *Burdet*, las cuales permiten considerar un sistema rotante de coordenadas basado en un triedro ortonormal (sistema de referencia orbital) que gira alrededor del vector momento angular orbital, y cuyo movimiento puede estudiarse aplicando los métodos de la Dinámica del sólido rígido. Con este fin, este autor recurre a parámetros de Euler, para describir el movimiento de este sistema rotante, y deduce un conjunto de ecuaciones diferenciales que, en el caso del movimiento kepleriano puro, resultan ser lineales y estables en sentido de Liapunov. En general, para sistemas keplerianos perturbados, el sistema de orden ocho ( $= 4 + 2 + 1 + 1$ ) obtenido está formado por la ecuación “giroscópica” (23) de la página 180 del artículo, y las ecuaciones (7.2), (8.1) y (8.2) de la página 176 de dicho trabajo.

Otra contribución interesante de *Vitins* en esta publicación, que su autor presenta como otra mejora de la teoría focal de *Burdet*, consiste en la estabilización de la integración de la variable temporal, empleando un *elemento de tiempo* adecuado (una cantidad que en el movimiento kepleriano puro

se expresa mediante una función lineal de la variable independiente y que está relacionada con la evolución del tiempo físico). Como en otras teorías de estabilización de las ecuaciones de movimiento (véanse, por ejemplo, las referencias citadas por Vitins), la idea básica consiste en introducir en dichas ecuaciones la integral de la energía.

Con anterioridad, en su Tesis Doctoral, y teniendo en cuenta la observación de que las teorías de perturbaciones de la Mecánica Analítica (como las que se basan en el método de promedios) suelen utilizar *elementos* (es decir, variables que en el problema no perturbado varían linealmente con la variable independiente), Vitins (1973) [101] había propuesto conjuntos de elementos regulares para la descripción del movimiento kepleriano en el problema de los dos cuerpos, y para estudio del movimiento libre de un sólido rígido simétrico (se entiende que se trata de un sólido con simetría dinámica) en rotación.

Con el propósito de que dichos elementos estén bien adaptados para la aplicación de métodos de promedios al resolver ciertos tipos de problemas perturbados, Vitins exige que deberían cumplirse los dos requisitos siguientes:

- I. Los elementos son *regulares*, en el sentido de que ni las ecuaciones diferenciales para los elementos perturbados ni las fórmulas para el cálculo de las coordenadas a partir de los elementos presenten singularidades “topológicas”.<sup>10</sup>
- II. Las ecuaciones diferenciales del sistema promediado, obtenidas tras promediar las ecuaciones de las perturbaciones de los elementos, deben poder resolverse de manera elemental. Tales variables están bien adaptadas al problema en cuestión, y se dice de ellas que son “apropiadas”, “adecuadas” o “idóneas”.<sup>11</sup>

---

<sup>10</sup>Singularidades que no son debidas a la naturaleza del problema físico considerado, sino que vienen introducidas por la elección y naturaleza geométrica de las coordenadas utilizadas. Otros autores las denominan singularidades “espúreas” o singularidades “virtuales”. Vitins (1973) [101], Parte I, §3, p. 16, llama “topológicamente regulares” a los elementos cuyas ecuaciones diferenciales en el movimiento perturbado están exentas de singularidades matemáticas (introducidas en el proceso de transformación del problema original en las ecuaciones de perturbación de los elementos), aunque no necesariamente estén libres de singularidades “físicas”, también denominadas “reales” o “esenciales” (y que se manifiestan independientemente del sistema de variables en el que se formule el problema).

<sup>11</sup>“*Suitable*” en el original en Inglés: Vitins (1973) [101], “Introduction”. También en el resumen redactado en Alemán este autor conserva el término “*suitable*” en Inglés: Vitins (1973) [101], “Zusammenfassung”; además, adapta al alemán el término inglés *suitability*

En particular, para el tratamiento del movimiento orbital no perturbado en un sistema kepleriano puro, y basándose en el método focal de *Burdet* (1969) [28], pero con la anomalía verdadera (salvo una constante aditiva) como variable independiente, dedujo un conjunto de elementos “regulares y adecuados”; este conjunto contiene un “elemento de tiempo” que permite calcular el tiempo físico en función de la anomalía verdadera por medio de expresiones explícitas.

Como a menudo el número de grados de libertad de un sistema mecánico dado tiene que aumentarse de una manera artificial, e incluso un tanto rebuscada, para obtener variables regulares, por lo general los elementos regulares verifican alguna relación de redundancia. Vitins demuestra que estas restricciones deben tener una cierta forma especial para que el conjunto resulte “idóneo”, lo cual proporciona una nueva definición de “idoneidad” y –por lo tanto– una condición necesaria que puede servir como criterio para detectar y descartar *a priori* (sin necesidad de llevar a cabo el proceso de un método de promedios) conjuntos de elementos que son regulares pero no pueden llegar a ser “idóneos”. Es decir, que el concepto de “idoneidad” no siempre resulta compatible con la exigencia de “regularidad” de un sistema de elementos.

Se acaba de mencionar que la construcción de sistemas de variables regulares suele involucrar un aumento del número de variables implicadas. Se puede citar otro precedente de este procedimiento, formalizado desde unos planteamientos bastante distintos a los descritos hasta ahora: Utilizando pfaffianos, ecuaciones de Pfaff e invariantes integrales de Cartan, Bilimović (*Bilimovitch* (1943) [17]) dedujo para el problema de Kepler diversos conjuntos de elementos orbitales y obtuvo las ecuaciones de las perturbaciones de dichos elementos, eludiendo las complicaciones de cálculo que surgen en otros métodos que recurren a paréntesis de Lagrange o a paréntesis de Poisson para establecer la teoría de la variación de las constantes. Siguiendo el planteamiento de Bilimović, *Musen* (1964) [81] adopta también el invariante integral de Cartan como fundamento para la teoría de la variación de los parámetros, y considera la introducción de *variables y elementos redundantes* imponiendo restricciones (o ligaduras) y tratándolas por medio de multiplicadores de Lagrange.

Por su parte, *Scheifele* (1970) [87] introduce algunas generalizaciones en la teoría canónica de la Dinámica. Por una parte, considera transformaciones

---

en la forma *Suitabilität*.

que aumentan el número de variables canónicas; por otra, transformaciones diferenciales de la variable independiente. Combinando ambos planteamientos, obtiene (en espacios de fases de mayor dimensión) sistemas canónicos de ecuaciones de movimiento con variables independientes distintas del tiempo físico  $t$ . Su objetivo, aparte de los desarrollos de carácter teórico, es la aplicación de este tipo de tratamientos a problemas perturbados de dos cuerpos en el seno de un marco conceptual de tipo canónico, de manera que las transformaciones generalizadas que propone respeten la forma canónica de las ecuaciones diferenciales de movimiento, y que las soluciones del sistema diferencial transformado proporcionen las soluciones del sistema original sin necesidad de tener que resolver otras ecuaciones no canónicas adicionales.

En particular, Scheifele establece un criterio, por medio de paréntesis de Poisson, para caracterizar las transformaciones que aumentan el número de variables canónicas. Dichas transformaciones no pueden ser canónicas en el sentido estricto y original del término, ya que no pueden invertirse. Pero reemplazando en un hamiltoniano dado unas variables por otras por medio de las ecuaciones de la transformación en cuestión, se obtiene una nueva función que puede considerarse como el hamiltoniano en las nuevas variables; de él se deducen unas ecuaciones canónicas cuyas soluciones se corresponden con las del sistema hamiltoniano en las variables originales si se cumplen ciertas condiciones y se eligen de manera adecuada las condiciones iniciales.

Los conceptos, métodos y resultados de este artículo aparecen también, expuestos con mayor detalle, en *Stiefel y Scheifele* (1971) [94], Parte II.

Motivada principalmente por la regularización del problema espacial de dos cuerpos obtenida a partir de la transformación de coordenadas (que aumenta el número de variables de posición de tres a cuatro) propuesta por *Kustaanheimo y Stiefel* (1965) [71], y por los intentos de dar para este tipo de cambios de coordenadas un tratamiento adecuado en el marco de una teoría canónica de la Mecánica Analítica y Celeste (*Scheifele* (1970) [87]; *Stiefel y Scheifele* (1971) [94], Parte II) por medio de una extensión canónica de la transformación puntual que relaciona las coordenadas cartesianas con las coordenadas KS de *Kustaanheimo y Stiefel*, *Kurcheeva* (1977) [70] presenta un método para construir una transformación de coordenadas (que aumenta el número de coordenadas en una unidad) en el espacio de fases de dimensión  $2n$  que, para elecciones adecuadas de ciertas funciones, permite obtener un sistema canónico de ecuaciones de movimiento en el espacio de fases de dimensión  $2n + 2$ , si bien la correspondencia entre las soluciones del

sistema original y del sistema transformado ya no es unívoca (como ocurriría en el caso de la teoría canónica clásica, en el que las transformaciones operan entre espacios de la misma dimensión).

Una generalización de los resultados teóricos de Kurcheeva aparece en *Cid y Sansaturio* (1988) [36], quienes proponen condiciones para obtener transformaciones que aumenten las variables canónicas en un número arbitrario.

Tras diversos trabajos anteriores de Ferrándiz (acerca de la obtención, justificación teórica y aplicación a sistemas keplerianos perturbados) de conjuntos canónicos de variables de tipo focal, a través de la que se conoce como transformación **BF** (Burdet–Ferrándiz) y algunas variantes de la misma, *Ferrándiz y Sansaturio* (1994) [52] proponen un método general para extender una transformación puntual que aumenta el número de coordenadas y obtener una transformación canónica (que aumenta el número de variables). Para establecer el resultado principal en relación con esta cuestión elaboran una nueva demostración de canonicidad, que constituye una alternativa mejorada a la ya publicada por Ferrándiz en 1988 [48], para extensiones de transformaciones puntuales que aumentan el número de variables; en particular, el resultado se aplica al caso de la transformación **BF** que introduce su conjunto canónico de variables focales como extensión de la transformación puntual de *Burdet* (1969) [28], y a la transformación **D** de *Deprit* (*Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44], §§4.3) que también proporciona variables canónicas de tipo focal.

Más recientemente, *Ferrer y Pérez* (2002) [53] consideran ciertas generalizaciones de transformaciones puntuales clásicas en  $\mathbf{R}^n$  y sus extensiones canónicas. En concreto, estudian dos tipos de transformaciones

$$(y_0, y_1, \dots, y_n) \longrightarrow (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

dadas, respectivamente, por

- **a)**  $x_i = g(y_0) x_i(y_1, \dots, y_n), \quad 0 \leq i \leq n;$
- **b)**  $x_0 = f(y_0, y_1, \dots, y_n), \quad x_i = g(y_0) x_i(y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq i \leq n.$

En ambos tipos de transformaciones las funciones  $x_i$  se especifican en cada caso, mientras que las funciones  $f$  y  $g$  se consideran arbitrarias, con la única condición de que la correspondiente transformación sea inversible.

Estos autores ponen de manifiesto que el interés de estas transformaciones reside en que, eligiendo convenientemente las funciones  $f$  y  $g$ , permiten establecer una relación con las “transformaciones canónicas no clásicas que aumentan el número de variables” en el contexto de *Kurcheva* (1977) [70], como ocurre –en particular– con la transformación **BF** (de Burdet–Ferrándiz).

En el ámbito del trabajo considerado en esta Tesis, cabe destacar el caso de las transformaciones **b**) de tipo proyectivo, cuya relación con la transformación **BF** de *Ferrándiz* (1988) [47] (véase también *Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44], §§4.4) presentan estos autores (*Ferrer y Pérez* (2002) [53], §3, p. 133).

Ya fuera del contexto de los métodos focales, y aunque sólo sea a título de mera anécdota, concluiremos estas notas reivindicando, una vez más, el trabajo pionero de *Izsák* (1955) [64] en relación con la idea de *método central* expuesta por *Burdet* (1969) [28], §1, y anteriormente en *Burdet* (1967) [26]. *Bond y Allman* (1996) [24], Capítulo 9, §9.3, pp. 151–154, describen una regularización del problema de dos cuerpos publicada por H. Sperling. Dicha regularización no recurre a transformaciones de las variables dependientes, y el procedimiento utilizado y los resultados finales son, en esencia, los mismos que los de *Izsák* (1955) [64] para la obtención de una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden y coeficientes constantes para el vector de posición, usando como variable independiente el pseudo–tiempo  $s$  definido por la transformación de Sundman  $dt = r ds$ . A diferencia de *Izsák*, estos autores (como ya hace *Burdet* (1969) [28], §1) aportan además la ecuación lineal para la distancia radial. Para la reducción de las ecuaciones del movimiento del problema de Kepler a ecuaciones lineales se requiere la introducción de la integral (escalar) de la energía y de la integral (vectorial) de Laplace–Runge–Lenz, como ya había hecho *Izsák*. *Schneider* (1992) [88], Capítulo 3, §3.7, pp. 92–94, presenta asimismo esta regularización por linealización, pero sin atribuirle a ningún autor.

### 1.3. Objetivos.

Los principales objetivos que nos hemos planteado en este trabajo pueden resumirse de la siguiente manera:

Deducción general y sistemática de variables canónicas focales en el marco

de un esquema unificado, y su aplicación para la reducción de sistemas keplerianos perturbados a osciladores perturbados; introducción de “elementos focales” asociados a variables focales, y deducción de “ecuaciones de elementos” en una teoría focal.

El propósito general de este trabajo consiste en continuar avanzando en el desarrollo de una **Mecánica Celeste Lineal y Regular basada en métodos focales**. A este respecto, el libro de STIEFEL Y SCHEIFELE (1971) [94] (dedicado en su mayor parte a elaborar resultados y presentar consideraciones basadas en las transformaciones de Levi-Civita y KS [de Kustaanheimo y Stiefel], para proponer desarrollos avanzados en el marco de una teoría “de tipo central”) nos proporciona una pauta o guía en cuanto a una serie de aspectos esenciales que habría que empezar a tratar y a formular “en lenguaje focal”.

Otra referencia esencial en la que se inspira este trabajo es el artículo de DEPRIT, ELIPE Y FERRER (1994) [44], y muy especialmente su Sección §4 (pp. 187–198), en la que se proponen algunas extensiones de la transformación puntual (de coordenadas) que representa la factorización (o descomposición) proyectiva del vector de posición de una partícula en el espacio, lo que permite obtener algunos conjuntos de variables canónicas de tipo focal.

Las contribuciones de BURDET y de FERRÁNDIZ (algunas de las cuales se mencionan en la sección de referencias bibliográficas al final de esta Tesis, aunque sin ánimo de exhaustividad) son también piezas cruciales de especial interés para el desarrollo de este trabajo.

Se presentan a continuación algunos comentarios para aportar más detalles concretos acerca del propósito y metodología de este trabajo, y se citan publicaciones en las que hemos presentado algunos resultados ya obtenidos.

- **1.** Uno de los objetivos de esta Tesis consiste en intentar establecer alguna relación entre las transformaciones que conducen a los diversos conjuntos canónicos de variables focales conocidas hasta ahora y, en su caso, tratar de hallar otros posibles nuevos sistemas de variables canónicas de tipo focal que no se hayan considerado hasta el momento.

Con este propósito, se propone una nueva *familia de transformaciones canónicas (en sentido pleno)* que generalice las anteriores extensiones canónicas o débilmente canónicas de la transformación puntual que (siguiendo a

*Ferrándiz* (1988) [47] y a *Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44]) hemos denominado *descomposición proyectiva* del vector de posición. Hemos comprobado que esta generalización puede conseguirse a través de una nueva familia de transformaciones que *depende de dos parámetros numéricos y de una función arbitraria de clase  $C^2$  de las coordenadas*. Estas transformaciones son canónicas en el sentido genuino y convencional del término (operan entre espacios de fases de la misma dimensión, y las condiciones de canonicidad pueden demostrarse siguiendo los procedimientos habituales que se exponen en los libros de Mecánica; por ejemplo, por medio de paréntesis de Poisson. Véase *Goldstein* (1980) [59], Capítulo 9; *Boccaletti y Pucacco* (1996) [18], Capítulo 1, §1.12, pp. 76–82; *Stiefel y Scheifele* (1971) [94], Capítulo VIII, §31, pp. 186–191), y consiguen los mismos objetivos de regularización y linealización de las ecuaciones de movimiento de sistemas keplerianos tridimensionales que las transformaciones originalmente propuestas por Ferrándiz, Deprit, Elipe y Ferrer, las cuales aparecen ahora como *casos particulares para elecciones adecuadas de los valores de los parámetros*.

- **2.** A partir de sistemas keplerianos perturbados, aplicando la técnica del método focal anterior, se obtienen ecuaciones quasi-lineales que corresponden a sistemas de osciladores perturbados (en general, acoplados a través de términos no lineales que son del orden de la perturbación incorporada en el modelo en cuestión). Se considerarán algunos sistemas keplerianos perturbados que surgen en el estudio del problema del movimiento orbital de satélites artificiales de la Tierra; en concreto, algunos modelos de *“intermediarios radiales”* (*Deprit* (1981) [43]) que proporcionan aproximaciones integrables para el *Problema Fundamental de la Teoría de Satélites Artificiales*, así como el propio Problema Fundamental (en el que se tiene en cuenta el efecto del achatamiento del cuerpo central, caracterizado por el término correspondiente al polinomio de Legendre de segundo grado en el desarrollo multipolar del potencial gravitatorio creado en un punto exterior por un sólido rígido de forma y distribución de masa arbitrarias).

*Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49] demostraron que las ecuaciones de movimiento correspondientes al sistema kepleriano perturbado representado por un hamiltoniano que presente una dependencia funcional como la de cualquier miembro de la cadena de *intermediarios radiales de Deprit* (*Deprit* (1981) [43], §3, pp. 119–124, Ecuación (20); §5, pp. 129–135, Ecuación (51) y Tabla I; §7, pp. 137–139, Ecuaciones (57) y (58), y Tabla II; y §9, pp. 147–151) pueden linealizarse exactamente por medio de un conjunto canónico de variables redundantes de tipo focal introducido por una trans-

formación **BF**, obteniéndose cuatro osciladores armónicos, dos de los cuales están acoplados, y cuyas frecuencias contienen las variaciones seculares del Problema Fundamental de la Teoría de Satélites Artificiales hasta el orden de perturbación del intermediario considerado

En un intento de seguir estudiando, con un planteamiento canónico del método focal, el comportamiento analítico y la eficacia de las transformaciones **BF**, **DEF** y **D** para el tratamiento de sistemas hamiltonianos keplerianos perturbados, hemos *generalizado* algunas de las conclusiones del artículo (*Ferrándiz y Fernández-Ferreirós (1991) [49]*), demostrando que los *únicos* hamiltonianos keplerianos *perturbados* con la dependencia funcional de un *sistema quasi-kepleriano*<sup>12</sup> *generalizado* (como la considerada en *Floría (1993) [55]*, §2) que admiten linealización exacta en variables focales redundantes son precisamente los que contienen perturbaciones proporcionales a  $r^{-2}$ . Con ello *hemos identificado y caracterizado en el espacio fásico ampliado la clase de potenciales de perturbación que son compatibles con la linealización exacta por medio de transformaciones de variables canónicas que definen variables de tipo focal*. La contribución de los efectos perturbadores recogida en la parte no kepleriana del potencial queda absorbida por las *frecuencias modificadas* de los osciladores y por los *términos de acoplamiento* entre los mismos. Algunos resultados en este sentido se han publicado en [3, 4, 6].

Un caso de sistema kepleriano perturbado que no permite reducción exacta a osciladores lineales en formulación focal se ha considerado en [9].

- **3.** De acuerdo con la definición general de Stiefel y Scheifele (1971 [94], §18, p. 83), un “*elemento del movimiento kepleriano*” es cualquier cantidad que, a lo largo de un movimiento kepleriano puro (es decir, no perturbado), es una *función lineal de la variable independiente*. En particular, un elemento puede permanecer constante (como ocurre, por ejemplo, con el semieje mayor o con la excentricidad de una órbita kepleriana). Una ventaja de la introducción de elementos (*Stiefel y Scheifele (1971) [94]*, §18, p. 84) es que éstos varían de una manera casi lineal si el movimiento está sometido a perturbaciones débiles; por el contrario, cualquier otra cantidad relacionada con el movimiento puede variar de una manera bastante complicada. Así pues, frente a perturbaciones los elementos experimentan variaciones lentas, por lo que sus propiedades analíticas y numéricas y su comportamiento deberían ser

---

<sup>12</sup>La definición de “sistema quasi-kepleriano” y algunos procedimientos para su reducción canónica y contracción a sistemas keplerianos puros pueden consultarse en Deprit (1981) [43], §4, pp. 124–128.

mejores y más ventajosos que los de las coordenadas. Las ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la variación de los elementos debida a la presencia de perturbaciones se denominan (*Stiefel y Scheifele* (1971) [94], §19, pp. 89–90) *ecuaciones de los elementos*.

Motivados por algunos estudios basados en la aplicación de *elementos KS regulares* (*Stiefel y Scheifele* (1971) [94], §19, pp. 87–99; *Sharaf y Saad* (1997) [89]), y siguiendo un tratamiento analítico parecido al del libro de *Stiefel y Scheifele* en esa misma Sección 19, nos proponemos *reformular, en el marco de un formalismo basado en técnicas focales, las consideraciones de dichos estudios*. Para ello hemos deducido *ecuaciones de elementos keplerianos regulares correspondientes a una formulación focal en variables DEF* (es decir, ecuaciones diferenciales para la variación de los elementos asociados a un problema de Kepler no perturbado descrito en variables DEF), y a continuación hemos particularizado el estudio al caso del Problema Fundamental de la Teoría de Satélites Artificiales de la Tierra, con el propósito de desarrollar, en función de elementos DEF, una teoría analítica *no singular* para el movimiento orbital de un satélite artificial considerado como un sistema kepleriano perturbado en el que la perturbación es la debida al segundo armónico zonal del desarrollo del geopotencial en serie de armónicos esféricos (por medio de funciones de Legendre).

En este contexto, *los elementos focales del movimiento kepleriano* son constantes de integración que figuran en la solución general de las ecuaciones armónicas no perturbadas a las que se reduce el problema de Kepler puro en variables focales, mientras que para un problema perturbado verificarán un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. (Recuérdese que las ecuaciones de elementos dan cuenta de la variación –causada por las perturbaciones consideradas– de los elementos asociados a un problema no perturbado).

La elaboración de la teoría analítica no singular mencionada más arriba presupone una aplicación del método focal para construir la expresión analítica (en función de elementos asociados a las variables DEF) del segundo armónico zonal del potencial gravitatorio, y deducir a continuación las correspondientes ecuaciones diferenciales quasi-lineales de segundo orden del movimiento para cualquier valor de la excentricidad orbital<sup>13</sup>. Estas

---

<sup>13</sup>*Sharaf y Saad* (1997) [89] limitan su estudio al caso de órbitas con excentricidad menor que la unidad, y en sus desarrollos de los armónicos zonales del potencial gravitatorio de la Tierra en función de elementos KS regulares (con la anomalía excéntrica como variable

ecuaciones gobiernan el movimiento de un conjunto de osciladores perturbados y acoplados, cuyo tratamiento por medio del método de variación de las constantes permite obtener el sistema de ecuaciones diferenciales de los elementos para el Problema Fundamental de la Teoría del Satélite. Una resolución analítica aproximada de las ecuaciones así obtenidas puede abordarse siguiendo el procedimiento expuesto en *Stiefel y Scheifele* (1971) [94], §28, pp. 160–177, como se indica en *Aparicio y Floría* (1999) [7].

---

independiente) presentan sus expresiones para las funciones  $(a/r)^n$  –siendo  $a$  el semieje mayor de la elipse kepleriana elegida como solución del problema no perturbado– *truncando las series* en un número finito de términos (*Sharaf y Saad* (1997) [89], §3, p. 184). Por medio de elementos focales, las potencias negativas de  $r$  se expresan directamente como *polinomios de Fourier* respecto del pseudo-tiempo focal, sin necesidad de truncación.

## Potencial zonal e intermediarios de tipo Deprit

### 2.1. Potencial zonal

El potencial gravitatorio creado por una esfera homogénea o una esfera con distribución esférica de densidad, desde el punto de vista dinámico (ver *Newton* (2011) [82], proposición 74, *Cid y Ferrer* (1997) [35], §§7.2.2, Capítulo 7; *Taff* (1985) [98]), equivale a considerar toda la masa del cuerpo concentrada puntualmente en su centro de masas. Sin embargo, el potencial creado por un sólido de figura y de distribución de masa arbitrarias en un punto exterior suficientemente alejado de él se puede aproximar mediante una superposición de armónicos esféricos (*Cid y Ferrer* (1997) [35], § 7.4, § 7.6; *Roy* (2005) [85], §7.5. pp. 201–206, §11.3. §11.7; *Beutler* (2005) [16], §3.4).

El potencial gravitatorio creado por un cuerpo cualquiera en el exterior (donde la densidad de materia se supone idénticamente nula) verifica la ecuación de Laplace

$$\Delta V = 0 .$$

Gran parte de los cuerpos celestes suelen presentar simetría sensiblemente esférica, tanto por su forma y figura (sentido geométrico), como por lo que a su distribución de materia se refiere (sentido dinámico). Por lo tanto, es conveniente expresar la solución de la ecuación de Laplace, que puede representarse como una serie convergente de armónicos esféricos, en un sistema de

## CAPÍTULO 2. POTENCIAL ZONAL E INTERMEDIARIOS DE TIPO DEPRIT

coordenadas esféricas  $(r, \phi, \lambda)$ , donde  $r$  es la norma del vector de posición,  $\phi$  es la latitud planetocéntrica y  $\lambda$  denota la longitud planetocéntrica. Teniendo en cuenta la relación entre la latitud y la colatitud,  $\vartheta = \pi/2 - \phi$ , se obtiene  $\text{sen } \vartheta = \text{cos } \phi$ . Entonces, en notación compacta el potencial adopta la forma (Deprit (1981) [43], p. 129; ver también Beutler (2005) [16], §3.4. pp. 102–109)

$$V = -\frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{0 \leq m \leq n} P_{nm}(\text{cos } \vartheta) [C_{nm} \text{cos}(m\lambda) + S_{nm} \text{sen}(m\lambda)], \quad (2.1)$$

donde  $R$  es el radio ecuatorial del cuerpo central y  $P_{nm}$  son los polinomios asociados de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$ ; y si  $m = 0$ , o sea  $P_{n0}(\text{sen } \vartheta) = P_n(\text{sen } \vartheta)$  son polinomios de Legendre. Las constantes  $C_{nm}$  así como  $S_{nm}$  son adimensionales, pero para cada cuerpo son diferentes y, en general, difíciles de determinar. Sin embargo, si el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de masas del cuerpo central, entonces  $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$  y  $C_{00} = 1$ ; si además los ejes de coordenadas coinciden con los ejes principales de inercia del cuerpo central, las constantes  $C_{21}, S_{21}$  y  $S_{22}$  son idénticas a cero (Beutler (2005) [16], pp. 103–108). El resto de las constantes se suelen obtener de forma indirecta. La notación habitual para dichas constantes es  $C_{n0} = -J_n$ ,  $C_{nm} = -J_{nm}$ , si  $m \neq 0$  y  $S_{nm} = -K_{nm}$  (Torge (1991) [100], p. 26; Portilla (1996) [84], p. 17).

El término  $\mu/r$ , que corresponde al grado  $n = 0$ , representa el potencial del problema de Kepler puro. El resto de términos describen la perturbación generada por un cuerpo sólido de distribución de masa arbitraria. Como es obvio, habría que añadir en los casos reales – como, por ejemplo, el de un satélite artificial – otras perturbaciones y no sólo la que proviene de un cuerpo central que no sea dinámicamente equivalente a una masa puntual.

Los armónicos esféricos se dividen en tres tipos, que se caracterizan por medio de los valores  $n$  y  $m$ :

- Los términos con  $m = 0$  se denominan *armónicos zonales* y no dependen de la longitud, de forma que dividen el cuerpo en bandas de latitud que representan las variaciones respecto a la latitud.
- Para  $n = m$  se tienen los *armónicos sectoriales*, que dividen la esfera en sectores limitados por  $2m$  meridianos.

- El resto de casos ( $m \neq 0$  y  $n \neq m$ ) se denominan *armónicos teserales* y recubren la esfera con un mosaico de baldosas, que están limitadas por  $2m$  meridianos y  $n - m$  paralelos de latitud.

Es conveniente separar la parte del potencial que está asociada al problema de Kepler puro del resto de términos, lo que se suele denominar como *perturbación*. Para hacerse una idea del orden de magnitud del potencial perturbador, en el caso de la Tierra, si su centro coincide con el origen del sistema de coordenadas de referencia del problema, su primer término se obtiene para  $n = 2$  y  $m = 0$ , y entonces  $J_2 = 1,082 \times 10^{-3}$  (Kozai (1966) [69]); véanse también las constantes normalizadas en Beutler (2005) [16]. El resto de las constantes son de orden  $10^{-5}$  o inferior. Si al estudiar el movimiento de un satélite artificial en torno a la Tierra sólo se tiene en cuenta el término  $J_2$ , que es el de mayor magnitud del potencial perturbador, se dice que se trata del *Problema Fundamental de la Teoría del Satélites Artificiales de la Tierra*.

Ahora el potencial perturbador (prescindiendo del término asociado al problema de Kepler puro) es

$$V = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\cos \vartheta) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] , \quad (2.2)$$

y si se considera sólo la parte zonal se obtiene

$$V_{\text{zonal}} = \frac{\mu}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} J_n P_n(\cos \vartheta) . \quad (2.3)$$

## 2.2. Intermediarios de tipo Deprit

El *Problema Fundamental del Satélite Artificial* no es integrable (ver Irigoyen y Simó (1993) [63]), de modo que la solución sólo se puede aproximar numérica o analíticamente. En la era espacial se impone la necesidad de poder calcular las órbitas de los satélites con una precisión mayor y además ponerlos en órbitas concretas. Da ahí surge la importancia de desarrollar nuevas técnicas para simplificar los cálculos de las órbitas perturbadas, y entre ellas la introducción de potenciales intermediarios. Estos potenciales constituyen un modelo matemático simplificado de la perturbación originada

## CAPÍTULO 2. POTENCIAL ZONAL E INTERMEDIARIOS DE TIPO DEPRIT

---

por el achatamiento de un esferoide que representa al cuerpo central, y bajo cuya atracción gravitatoria tiene lugar el movimiento de un satélite natural o artificial.

La idea de los intermediarios consiste en desarrollar unos potenciales perturbadores del problema de Kepler que recogen la mayor parte del potencial zonal del término del  $J_2$  (preferiblemente su parte secular), y que al mismo tiempo sean integrables. Esto permite obtener *órbitas de referencia* que aproximen, mejor que la elipse kepleriana, el problema principal del satélite artificial.

Una revisión y sistematización de las definiciones de los principales intermediarios para el problema principal de la teoría del satélite artificial se puede encontrar en el artículo de *Deprit* (1981) [43, p. 137, p. 139], donde se clasifican los intermediarios en dos tipos diferentes: *intermediarios comunes* e *intermediarios naturales*.

En este trabajo se van a considerar los intermediarios radiales (véanse también las Fórmulas (5.1)–(5.3) con  $j = 2$ , o las expresiones (A.228) y (A.229) de la Sección A.10 del Apéndice sobre el problema de dos cuerpos) que fueron introducidos por *Deprit* (1981) [43] y por *Alfriend y Coffey* (1984) [2], quienes parten de formulaciones en las variables polares nodales de Hill–Whittaker. A partir del problema principal del satélite artificial se realiza la *eliminación de la paralaje*, una transformación de tipo de Lie que transforma una perturbación proporcional a  $r^{-n}$  con  $n \geq 3$  en una proporcional a  $r^{-2}$ , eliminando los términos de corto periodo hasta el factor  $r^{-2}$ . En el siguiente paso se realiza una transformación canónica de Lie para eliminar el argumento del perigeo.

Con este procedimiento, el argumento del perigeo se desacopla de la anomalía verdadera. Este proceso se realiza en las variables de Hill-Whittaker, lo que conduce a un hamiltoniano, también denominado intermediario radial, de sólo un grado de libertad expresado en las variables canónicas  $(r, p_r)$ , es decir, que finalmente se obtiene una aproximación completamente integrable para el problema principal del satélite. Las perturbaciones asociadas a estos intermediarios incluyen unos términos proporcionales a  $r^{-2}$  que están expresados por un desarrollo en potencias del pequeño parámetro  $\varepsilon$  del orden de  $J_2$ , que da constancia del achatamiento del cuerpo central. Los coeficientes de este desarrollo – hablando en términos generales – son funciones racionales de ciertos momentos canónicos.

Los hamiltonianos intermediarios generan órbitas de referencia que son más generales que las que se obtiene como solución del problema de Kepler puro, y sirven de punto de partida para el estudio de perturbaciones. El trabajo presentado más adelante se basa en los intermediarios de Deprit y de Alfried y Coffey. Estos potenciales permiten absorber en la órbita de referencia la parte secular debida al achatamiento incluida en el intermediario, lo cual debería ser una ventaja para el desarrollo de un análisis de perturbaciones.

### 2.3. Intermediario de Deprit

El primer intermediario que se va a presentar aquí es un intermediario radial de *Deprit* (1981) [43, §7 y §9] (véase la Fórmula (A.228) de la Sección A.10 del Apéndice sobre el problema de dos cuerpos), que ha sido tratado también por *Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49].

A título de ejemplo, en el conjunto de *variables polares nodales de Hill-Whittaker*  $(r, \theta, \nu; p_r, p_\theta, p_\nu)$  (*Deprit* (1981) [43], §2; *Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49], §2), un caso que encaja en este esquema general es el del hamiltoniano del problema perturbado de dos cuerpos dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(r, p_r, p_\theta) + V(r; p_\theta^2, I; \varepsilon), \quad (2.4a)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r}, \quad (2.4b)$$

$$V = \varepsilon \frac{p_\theta^2}{r^2} \left( \frac{R}{p} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} s^2 \right) = \varepsilon \frac{p_\theta^2}{r^2} \left( \frac{R}{p} \right)^2 \left( \frac{3}{4} c^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (2.4c)$$

donde  $\mathcal{H}_0$  es un hamiltoniano kepleriano,  $V$  es el *potencial de la perturbación*,  $\varepsilon = J_2$  es el parámetro de perturbación,  $R$  es el radio del cuerpo central (en este caso, la Tierra),  $p$  es el *semilado recto*, e  $I$  es la inclinación de la órbita respecto al ecuador, dada por

$$c \equiv \cos I = \frac{p_\nu}{p_\theta}, \quad s \equiv \sin I. \quad (2.5)$$

El vector de posición, en coordenadas cartesianas habituales, está dado por  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ , y el vector  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  corresponde a los momentos

conjugados. Se utilizarán las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} p_\nu &= q_1 p_2 - q_2 p_1, \\ p_\theta^2 &= \|\mathbf{q} \times \mathbf{p}\|^2, \end{aligned}$$

y el operador binario  $\times$  es el producto vectorial en el espacio ordinario. Entonces, con estas variables canónicas cartesianas, el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  anterior se puede expresar como

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \varepsilon) = \mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + V(r; p_\theta^2, I; \varepsilon), \quad (2.6a)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\mu}{r}. \quad (2.6b)$$

## 2.4. Intermediario de Alfriend–Coffey

Se va a presentar a continuación el intermediario de *Alfriend y Coffey* (1984) (véase también *Aparicio y Floría* (1996) y (1997) [3, 4]) en el conjunto de variables canónicas polares nodales.

Después de transformar los términos en  $s^2$  (véase *Cid et al.* (1986) [37]) en términos en  $c^2$  usando algunos cálculos trigonométricos elementales, el intermediario radial de segundo orden propuesto por Alfriend y Coffey se puede formular mediante el siguiente hamiltoniano homogéneo en el sistema ampliado de variables polares nodales:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h = p_0 + \mathcal{H}_0(r; p_r, p_\theta) + \varepsilon \frac{\mu^2 R^2}{4 p_\theta^2 r^2} (3c^2 - 1) \\ + \varepsilon^2 \frac{3 \mu^4 R^4}{16 p_\theta^6 r^2} \left[ \frac{1}{12} (27c^4 - 138c^2 + 71) \right. \\ \left. + \frac{e_k^2}{8} (5c^4 - 18c^2 + 5) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $e_k$  es la “excentricidad kepleriana” correspondiente a la órbita no perturbada asociada a  $\mathcal{H}_0$ .

Como ya se ha mencionado (y realizado en *Floría* (1993) [55], pp. 219–220) la función hamiltoniana se presentará, por conveniencia, en términos de potencias de  $c^2$ , en vez de usar potencias de  $s^2$ .

Tal y como deducen *Alfriend y Coffey* (1984) este intermediario, su parte de primer orden es formalmente el intermediario radial descrito por *Deprit* (1981) [43, p. 138]. Además, de acuerdo con un comentario de *Cid et al.* (1986) [37, p. 202] y *Franco y Palacios* (1990) [58, p. 183], un término de segundo orden independiente de la inclinación está presente en este hamiltoniano.

Resulta necesario expresar la “excentricidad kepleriana”  $e_k$  en variables canónicas de Hill–Whittaker, lo que se consigue con la fórmula

$$e_k^2 \equiv 1 + \frac{2 h_k p_\theta^2}{\mu^2},$$

donde  $h_k$  denota la energía kepleriana; y sabiendo que

$$h_k = -p_0 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

el hamiltoniano se puede reescribir de la siguiente manera en el espacio de fases ampliado

$$\mathcal{H}(r; p_r, p_\theta, p_\nu, p_0; \varepsilon) = p_0 + \mathcal{H}_0(r; p_r, p_\theta) + \frac{1}{r^2} V_2(p_\theta, p_\nu, p_0; \varepsilon),$$

donde, después de despreciar términos de tercer orden en  $\varepsilon$ ,

$$V_2 = \varepsilon \mathcal{V}_1(p_\theta, p_\nu) + \varepsilon^2 \mathcal{V}_2(p_\theta, p_\nu, p_0), \quad (2.8a)$$

con

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\mu^2 R^2}{4 p_\theta^2} [3c^2 - 1], \quad (2.8b)$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\mu^4 R^4}{128 p_\theta^6} [69c^4 - 330c^2 + 157] - \frac{3\mu^2 R^4}{64 p_\theta^4} [5c^4 - 18c^2 + 5] p_0. \quad (2.8c)$$

Este hamiltoniano homogéneo es un caso particular del sistema kepleriano perturbado caracterizado por la función dada en la Fórmula (A.229) del Apéndice A sobre el problema de dos cuerpos.

Para valores pequeños de la excentricidad, y después de omitir los términos de orden de  $\varepsilon^2 e^2$ , este intermediario se caracteriza por el potencial perturbador

$$\varepsilon \frac{\mu^2 R^2}{4 p_\theta^2} [3c^2 - 1] + \varepsilon^2 \frac{\mu^4 R^4}{64 p_\theta^6} [27c^4 - 138c^2 + 71]. \quad (2.9)$$

## CAPÍTULO 2. POTENCIAL ZONAL E INTERMEDIARIOS DE TIPO DEPRIT

---

Esta expresión se adapta al tratamiento considerado por *Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49] o *Aparicio y Floría* (1996) [3].

El caso de valores pequeños de la excentricidad permite despreciar los términos de  $\varepsilon^2 e_k^2$ , situación que también fue estudiada por *Franco y Palacios* (1990) [58] desde el punto de vista de la teoría de Hamilton–Jacobi y en un espacio de fase de 6 dimensiones.

## Idea de los métodos central y focal

### 3.1. Introducción

Bohlin en el artículo [19] regulariza y linealiza el problema de Kepler en el plano, con la ayuda de coordenadas parabólicas y usando como variable independiente la anomalía excéntrica. En el año 1955 Izsák [64] obtiene un resultado similar en el espacio tridimensional, como ya se ha explicado en el Capítulo 1. Transformaciones que utilizan un cambio similar de la variable independiente se describen en los artículos de Burdet [26–28]; las variables reciben el nombre de *variables centrales*.

En este último artículo [28] se desarrolla también otro cambio de variables que permite regularizar y linealizar el problema de Kepler, pero en este caso la variable independiente es la anomalía verdadera. Estas variables se denominan *variables focales*, pues el centro de oscilación del oscilador armónico al que se reducen las ecuaciones del movimiento kepleriano es el foco de la cónica.

## 3.2. Método central de Izsák–Sperling–Burdet

Siguiendo el artículo de *Izsák* (1955) [64], y usando notaciones similares, se parte de la ecuación

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mu}{q^3}\mathbf{q}. \quad (3.1)$$

A continuación las integrales del movimiento del problema de Kepler de las que nos serviremos para el desarrollo de este método central son la integral de la energía y la integral del momento angular

$$h = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 - \frac{\mu}{q}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.2a)$$

y la integral del vector de Laplace–Runge–Lenz

$$\mathbf{A} = \left( \dot{\mathbf{q}}^2 - \frac{\mu}{q} \right) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \mid \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.2b)$$

o en la forma

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\mu}{q} + 2h \right) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \mid \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.2c)$$

o bien

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{c} - \frac{\mu}{q}\mathbf{q}. \quad (3.2d)$$

Está claro que estas integrales primeras no son funcionalmente independientes, pues satisfacen las siguientes relaciones

$$(\mathbf{c} \mid \mathbf{A}) = 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{A} \mid \mathbf{A}) = 2h(\mathbf{c} \mid \mathbf{c}) + \mu^2. \quad (3.3)$$

Se efectúa a continuación el cambio de variable independiente  $t \rightarrow u$  definido por la transformación de Sundman mediante la relación diferencial

$$dt = q \, du, \quad (\cdot)' \equiv \frac{d}{du}, \quad (3.4a)$$

y entonces

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{q} \mathbf{q}' , \quad \ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{q^2} \left( \mathbf{q}'' - \frac{(\mathbf{q} | \mathbf{q}')}{q^2} \mathbf{q}' \right) . \quad (3.4b)$$

Para  $q \neq 0$  la Ecuación (3.1) se transforma en

$$\frac{\mu}{q} \mathbf{q} = \mathbf{q}'' - (\mathbf{q} | \mathbf{q}') \frac{\mathbf{q}}{q} . \quad (3.4c)$$

En la nueva variable independiente la integral de movimiento (3.2c) viene dada por

$$-\frac{\mu}{q} \mathbf{q} + (\mathbf{q} | \mathbf{q}') \frac{\mathbf{q}}{q} = 2h\mathbf{q} - \mathbf{A} . \quad (3.5)$$

Para cualesquiera  $h$  y  $\mathbf{A}$  fijos, y con la ayuda de la relación (3.5), la ecuación de movimiento del problema de Kepler (3.4c) se reduce a

$$\mathbf{q}'' = 2h\mathbf{q} - \mathbf{A} , \quad (3.6)$$

que es una ecuación lineal no homogénea de segundo orden y con coeficientes constantes. La ecuación describe una cónica en la que en el caso elíptico  $a = -\mu/(2h)$  es el semieje mayor,  $-\mathbf{A}/(2h)$  es el centro de oscilación, y  $e = \|\mathbf{A}\|/\mu$  la excentricidad (ver *Burdet* (1969) [28], Ecuación (7)).

Siguiendo el artículo de *Izsák* (1955) [64], sólo se tendrá en cuenta el caso de la solución elíptica ( $h < 0$ ,  $0 < e < 1$ ). Se introduce una nueva variable independiente  $s = \sqrt{-2h} u = \sqrt{\mu/a} u$ , que es la anomalía excéntrica. Sea  $\mathbf{i}$  un vector unitario en la misma dirección que  $\mathbf{A}$ ; y  $\mathbf{j}$  otro vector unitario en la dirección  $\mathbf{c} \times \mathbf{A}$ . Entonces,  $\mathbf{A} = \mu e \mathbf{i}$  y la ecuación de movimiento en la nueva variable independiente será:

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{ds^2} + \mathbf{q} = -ae \mathbf{i} . \quad (3.7)$$

Se establece como condición inicial que el cuerpo se encuentre en el pericentro para  $s = 0$ , y por lo tanto el vector velocidad es ortogonal al vector de posición. También hay que tener en cuenta que el movimiento está confinado al plano ortogonal al vector  $\mathbf{c}$ . En estas condiciones se deduce

$$\mathbf{q}(s) = a (\cos s - e) \mathbf{i} + a \sqrt{1 - e^2} \sin s \mathbf{j} , \quad (3.8)$$

### CAPÍTULO 3. IDEA DE LOS MÉTODOS CENTRAL Y FOCAL

---

Para la distancia radial se obtiene la conocida expresión

$$q = a(1 - e \cos s) , \quad (3.9)$$

e integrando la ecuación

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} q = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (1 - e \cos s) , \quad (3.10)$$

se obtiene la ecuación de Kepler

$$n(t - t_p) = s - e \operatorname{sen} s , \quad (3.11)$$

donde  $t_p$  es el instante en el que la partícula efectúa su paso por el pericentro, y  $n$  es el movimiento medio dado por

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} . \quad (3.12)$$

Si  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , entonces se anula el vector  $\mathbf{j}$ , pero las fórmulas siguen siendo válidas para  $h < 0$  ( $e < 1$ ).

Esta contribución de Izsák prueba que obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y coeficientes constantes, es decir, que linealiza y regulariza el problema de Kepler. Para lo cual, utiliza un cambio de la variable independiente proporcional a la anomalía excéntrica. El resto del tratamiento se basa en usar integrales primeras.

En el artículo de *Burdet* (1969) [28] se desarrolla la ecuación diferencial de segundo orden para la distancia  $q$ , usando el cambio de la variable independiente que se describe en (3.4a), es decir, aplica la misma transformación del tiempo.

Las dos siguientes igualdades se comprueban fácilmente:

$$q\dot{q} = (\mathbf{q} \mid \dot{\mathbf{q}}) , \quad (\ddot{\mathbf{q}} \mid \mathbf{q}) = \dot{q}^2 - v^2 + q\ddot{q} , \quad (3.13a)$$

donde

$$v^2 = (\dot{\mathbf{q}} \mid \dot{\mathbf{q}}) . \quad (3.13b)$$

Entonces, partiendo de la ecuación (3.1) se tiene

$$(\ddot{\mathbf{q}} \mid \mathbf{q}) + \frac{\mu}{q^3} (\mathbf{q} \mid \mathbf{q}) = 0 , \quad (3.14)$$

y por lo tanto

$$\dot{q}^2 - v^2 + q\ddot{q} + \frac{\mu}{q} = 0 . \quad (3.15)$$

Tras aplicar el cambio de la variable independiente (3.4a) la ecuación anterior se transforma en

$$\left(\frac{1}{q}q'\right)^2 - v^2 + \frac{q''}{q} + \frac{1}{q} \left(-\frac{(q')^2}{q}\right) + \frac{\mu}{q} = 0 , \quad (3.16)$$

es decir

$$\frac{1}{q}q'' + \frac{\mu}{q} - v^2 = 0 , \quad (3.17)$$

y con la ayuda de la integral de la energía (3.2a) y  $q \neq 0$ ,

$$q'' - 2hq = \mu . \quad (3.18)$$

Resumiendo, *Burdet* (1969) [28] obtiene un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden y una de primer orden:

$$\mathbf{q}'' = 2h\mathbf{q} - \mathbf{A} , \quad (3.19a)$$

$$q'' = 2hq + \mu , \quad (3.19b)$$

$$t' = q . \quad (3.19c)$$

### 3.3. Método focal de Burdet

Las variables focales se describen en el artículo de *Burdet* (1969) [28, § 2], y, como ya se ha mencionado anteriormente, se basan en el cambio

### CAPÍTULO 3. IDEA DE LOS MÉTODOS CENTRAL Y FOCAL

---

de la variable independiente proporcional a la anomalía verdadera y en una transformación de las variables dependientes; además, se introduce una nueva variable dependiente redundante.

El cambio de las variables de posición es

$$\mathbf{x} = \frac{1}{q} \mathbf{q} . \quad (3.20)$$

El vector  $\mathbf{x}$  de las nuevas variables corresponde al vector unitario que apunta en la dirección de la partícula. Se trata, pues, del vector de cosenos directores de la posición de la partícula. Para poder describir la posición del móvil es necesario añadir una nueva variable dependiente que indique su distancia al cuerpo central; o, también, su recíproco, es decir, la nueva variable es  $\sigma = 1/q$ . Entonces la ecuación del movimiento kepleriano se transforma en

$$\ddot{\mathbf{x}}q + 2\dot{q}\dot{\mathbf{x}} + \ddot{q}\mathbf{x} + \mu\frac{\mathbf{x}}{q^2} = 0 . \quad (3.21)$$

El cambio de la variable independiente introduce un nuevo parámetro temporal que es proporcional a la anomalía verdadera:

$$\frac{dt}{df} = q^2 , \quad (\cdot)' = \frac{d}{df} , \quad (3.22a)$$

y

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{q^2} \frac{d}{df} , \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{q^4} \left( \frac{d^2}{df^2} - \frac{2q'}{q} \frac{d}{df} \right) . \quad (3.22b)$$

La ecuación (3.21) con el nuevo tiempo ficticio es

$$\mathbf{x}'' - 2\frac{q'}{q}\mathbf{x}' + \left\{ \frac{q''}{q} - 2\left(\frac{q'}{q}\right)^2 + \mu q \right\} \mathbf{x} + 2\frac{q'}{q}\mathbf{x}' = 0 , \quad (3.23)$$

que es equivalente a

$$\mathbf{x}'' + \left\{ \frac{q''}{q} - 2\left(\frac{q'}{q}\right)^2 + \mu q \right\} \mathbf{x} = 0 . \quad (3.24)$$

Partiendo de las ecuaciones (3.15) y (3.13) se tiene

$$q \left( \frac{1}{q^4} q'' - 2 \frac{(q')^2}{q^5} \right) + \dot{q}^2 - v^2 + \frac{\mu}{q} = 0, \quad (3.25)$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{q''}{q} - 2 \left( \frac{q'}{q^2} \right)^2 + q^2 (\dot{q}^2 - v^2) + \mu q = 0. \quad (3.26)$$

Para simplificar esta última ecuación conviene manipular la integral de las áreas (3.2a) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \mid \mathbf{c}) &= (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \mid \mathbf{c}) = (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c} \mid \mathbf{x}) = \mu q + (\mathbf{A} \mid \mathbf{x}) \\ &= \mu q + \left( v^2 - \frac{\mu}{q} \right) q^2 - q^2 \dot{q}^2 \\ &= q^2 (v^2 - \dot{q}^2). \end{aligned}$$

La ecuación (3.24) se puede expresar como un oscilador armónico tridimensional

$$\mathbf{x}'' + \|\mathbf{c}\|^2 \mathbf{x} = 0, \quad (3.27)$$

y para el recíproco de la distancia se obtiene un oscilador armónico unidimensional forzado

$$\sigma'' + \|\mathbf{c}\|^2 \sigma = \mu, \quad (3.28)$$

y por último

$$t' = \frac{1}{\sigma^2}. \quad (3.29)$$

Se llegaría de esta forma a un sistema de tres ecuaciones escalares de osciladores armónicos lineales con el centro en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  y frecuencia  $\|\mathbf{c}\|$ , y un oscilador unidimensional forzado con la misma frecuencia que los anteriores, mientras que para el tiempo físico se tiene una ecuación diferencial ordinaria primer orden.

En este caso las ecuaciones, así como sus soluciones, son válidas para todos los valores de la excentricidad.

### CAPÍTULO 3. IDEA DE LOS MÉTODOS CENTRAL Y FOCAL

---

## Transformación canónica a variables redundantes

### 4.1. Introducción

Las variables canónicas focales no se pueden obtener a través de una transformación canónica clásica, pues las dimensiones del espacio de salida y del de llegada no son iguales. En este caso se requiere una técnica que incremente el número de variables, que es precisamente lo contrario de la idea habitual de reducir el número de variables de un sistema hamiltoniano.

En este Capítulo se tratará la forma de incrementar el número de variables partiendo de una transformación puntual, extendiéndola a una transformación canónica, garantizando que el nuevo sistema de ecuaciones canónicas del movimiento sea equivalente al de partida. El primero en presentar una técnica para realizar este tipo de transformación fue *Lidov* (1982) [76], donde las dimensiones del espacio de salida y del de llegada no son iguales. En el artículo de *Ferrándiz y Sansaturio* (1994) [52] se describe otra forma de incrementar el número de variables de la transformación puntual, pero en este caso se introducen nuevas variables en el espacio de salida, y que, como se verá, son variables cíclicas. Se demuestra que esta transformación es canónica, y satisfaciendo ciertas condiciones el nuevo sistema hamiltoniano es equivalente al de partida.

A continuación, presentamos una generalización de la técnica de Ferrándiz

## CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN CANÓNICA A VARIABLES REDUNDANTES

y Sansaturio, pero utilizando formas diferenciales y la estructura simpléctica (ver *von Westenholz* (1986) [103]; *Flanders* (1989) [54]; *Meyer y Hall* (1992) [78] y *Barner y Flohr* (1983) [12, Cap. 17]) para construir el cambio de variables.

Con la ayuda de formas diferenciales se podrá construir este tipo de transformaciones definidas sobre variedades diferenciables, que se denotarán por  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{M}$ . Sus dimensiones, si no se menciona lo contrario, serán  $n$  y  $m$ , respectivamente. Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathcal{N}$  y  $\mathbf{x} \in U \subset \mathcal{N}$ ; entonces  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{N}$  es el espacio tangente en el punto  $\mathbf{x}$ .

El fibrado tangente de la variedad  $\mathcal{N}$  es la unión de los espacios tangentes en cada punto de la variedad, o sea  $T\mathcal{N} := \cup_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}} T_{\mathbf{x}}\mathcal{N}$ , y  $T^*\mathcal{N} := \cup_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}} T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{N}$  se denomina el fibrado cotangente.

### 4.2. Formas diferenciales y transformaciones

Una *forma diferencial de grado  $k$*  es una función del producto cartesiano de  $k$  copias del espacio tangente en  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$  en  $\mathbb{R}$  que, además, es  $k$ -lineal alternada:

$$\omega : U \times \overbrace{T_{\mathbf{x}}\mathcal{N} \times \dots \times T_{\mathbf{x}}\mathcal{N}}^{k\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (4.1)$$

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k) \longmapsto \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k) .$$

Una forma diferencial de grado  $k$  también se denomina  $k$ -forma diferencial.

La base natural del espacio de las formas diferenciales de grado  $k$  viene dada por

$$\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} , \quad (4.2)$$

que se compone de  $\binom{n}{k}$  elementos, y su expresión canónica es

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 < \dots < i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} , \quad (4.3)$$

donde  $a_{i_1 < \dots < i_k}(\mathbf{x})$  son sus coeficientes, también denominados componentes. Dependiendo de si estas componentes son continuas o diferenciables respecto a las cartas de un atlas, se dirá lo mismo de la forma diferencial.

Una forma diferencial de grado 0 es precisamente una función de  $\mathcal{N}$  en  $\mathbb{R}$ . Se supondrá que las formas diferenciales son suficientemente diferenciables, y por lo tanto se puede obviar la referencia a su diferenciabilidad siempre que no cause confusión.

Para  $k = 0, 1, \dots, n$  se define  $\mathfrak{F}^k(\mathcal{N})$  como el conjunto de las  $k$ -formas sobre  $\mathcal{N}$ , que se puede considerar un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . La dimensión de  $\mathfrak{F}^k(\mathcal{N})$  es  $\binom{n}{k}$ , lo que implica que no existen formas diferenciales de grado  $k > n$ . El espacio  $\mathfrak{F}^0(\mathcal{N})$  es el conjunto de las funciones diferenciables de  $\mathcal{N}$  en  $\mathbb{R}$ , mientras que  $\mathfrak{F}^1(\mathcal{N}) = T^*\mathcal{N}$ .

Para lo que se quiere tratar aquí sólo será necesario trabajar con formas diferenciales de grados 0, 1 y 2. Empezando por una 1-forma, que se expresa de manera habitual como

$$\theta = a_1(\mathbf{x}) dx_1 + \dots + a_n(\mathbf{x}) dx_n, \quad (4.4)$$

donde los coeficientes  $a_i(\mathbf{x})$  son 0-formas, y la 2-forma genérica es

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j. \quad (4.5)$$

Se define una aplicación suficientemente diferenciable de  $\mathcal{N}$  en  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} \psi &: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{q} = \psi(\mathbf{x}) \end{aligned}, \quad (4.6)$$

y con ella queda determinada la aplicación dual

$$\psi^* : \mathfrak{F}^k(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{F}^k(\mathcal{N}), \quad (4.7)$$

que también se suele denominar "pull-back". Es fácil comprobar que es lineal.

Más adelante serán necesarias las siguientes propiedades:

$$\psi^*(\nu \wedge \eta) = \psi^*\nu \wedge \psi^*\eta, \quad (4.8)$$

$$d \circ \psi^* = \psi^* \circ d, \quad \text{o sea} \quad d(\psi^*\nu) = \psi^*(d\nu), \quad (4.9)$$

donde  $\nu$  y  $\eta$  son formas diferenciales de grado arbitrario.

Si se aplica  $\psi^*$  a  $b(\mathbf{q}) \in \mathfrak{F}^0(\mathcal{M})$ , entonces

$$b(\mathbf{q}) = b(\psi(\mathbf{x})) = (\psi^*b)(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}), \quad (4.10)$$

CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN CANÓNICA A VARIABLES  
REDUNDANTES

con  $a(\mathbf{x}) \in \mathfrak{F}^0(\mathcal{N})$ , y esto implica que para cualquier función real  $f$  definida en  $\mathcal{M}$  se tiene

$$\psi^* f = f \circ \psi . \quad (4.11)$$

La transformación de  $dq_i$  a  $dx_j$  se obtiene con la ayuda de (4.9) y (4.10):

$$\psi^* dq_i = d\psi^* q_i = d(q_i \circ \psi) = d\psi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx_j . \quad (4.12)$$

Sea  $\nu \in \mathfrak{F}^1(\mathcal{M})$  dada por

$$\nu = \sum_{i=1}^m b_i(\mathbf{q}) dq_i ;$$

entonces, en virtud de (4.10) y (4.12),

$$\begin{aligned} \psi^* \nu &= \sum_{i=1}^m \psi^* b_i(\mathbf{q}) \psi^* dq_i \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^m b_i(\psi(\mathbf{x})) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right\}}_{= a_j(\mathbf{x})} dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_j(\psi(\mathbf{x})) dx_j \\ &= \eta , \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde  $\eta \in \mathfrak{F}^1(\mathcal{N})$  es la forma diferencial transformada de  $\nu$  (ver *von Westenholtz* (1986) [103, Cap. 7 § 2.3., pp. 158–159] y *Flanders* (1989) [54, § 3.4.]).

### Variedades simplécticas

Una *forma simpléctica*  $\Omega$  es una forma diferencial de grado 2, cerrada y no degenerada, definida en una variedad diferenciable. El par  $(\mathcal{M}, \Omega)$  se denomina *variedad simpléctica* (ver *von Westenholtz* (1986) [103, Cap. 12 §2.] y *Meyer y Hall* (1992) [78, Cap. III y Cap. IV]). En las coordenadas canónicas la forma simpléctica adopta la expresión

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i . \quad (4.14)$$

Que una 2-forma sea no degenerada implica que sólo puede estar definida en una variedad de dimensión par.

Toda forma diferencial cerrada en un entorno abierto contraíble a un punto es exacta, según el lema de Poincaré. Entonces para todo  $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$  existe un entorno abierto  $U \subset \mathcal{M}$  tal que  $\Omega$  en  $U$  es exacta, o sea, que en  $U$  se verifica  $d\theta = \Omega$  para alguna  $\theta$ .

Si la variedad  $\mathcal{M}$  es de dimensión  $n$ , entonces la dimensión de  $T^*\mathcal{M}$ , que se denomina *espacio de fases*, es  $2n$ . Una de las propiedades de este espacio es que posee una forma diferencial de grado 1 sobre  $T^*\mathcal{M}$ , que se conoce como *forma de Cartan* (o potencial simpléctico),

$$\theta = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n, \quad (4.15)$$

que es un campo vectorial covariante sobre  $\mathcal{N}$ . Se puede demostrar que esta forma diferencial está globalmente definida, lo cual implica que existe una estructura simpléctica en  $T^*\mathcal{M}$ . Aplicando la derivada exterior  $d\theta = \Omega$  se obtiene la forma simpléctica canónica de grado 2, o sea

$$d\theta = \Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i. \quad (4.16)$$

La forma de Cartan no está unívocamente determinada, pues si  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  es una función arbitraria, las dos formas diferenciales  $\theta$  y  $\theta + d\varphi$  definen la misma estructura simpléctica.

### 4.3. Extensión de una transformación puntual

Se parte ahora de  $\mathcal{M}$  una variedad de dimensión  $n$  (que se denominará *espacio de configuración*), y del fibrado cotangente  $T^*\mathcal{M}$ , que es el espacio de fases, y que como se acaba de mencionar posee una estructura simpléctica dada por una forma de Cartan  $\theta$ . Al no estar unívocamente determinado el potencial simpléctico, se utilizará la siguiente 1-forma:

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{q}) dq_i. \quad (4.17)$$

CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN CANÓNICA A VARIABLES  
REDUNDANTES

---

Una transformación puntual está definida en el espacio de configuración y se denotará por  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , que suele ser un difeomorfismo, aunque en ocasiones basta con que sea simplemente una aplicación diferenciable. Este cambio de variables viene definido por

$$\psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{q} = \psi(\mathbf{x}) , \tag{4.19}$$

su aplicación dual es  $\psi^*$ , y el potencial simpléctico en las variables  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T^*\mathcal{M}$  se expresa como

$$\psi^*\theta = \theta' = \sum_{i=1}^n y_i(\mathbf{x}) dx_i . \tag{4.20}$$

Sean  $\theta$  y  $\theta'$  dos formas de Cartan que determinan dos formas simplécticas  $\Omega = d\theta$  y  $\Omega' = d\theta'$ . Si la aplicación  $\psi^*$  corresponde a una transformación canónica, entonces se cumple  $\Omega' = \psi^*\Omega$ , que también se puede expresar como  $d(\theta' - \theta) = 0$ , y entonces existe una función  $\varphi$ , que al menos es de clase  $\mathcal{C}^2$ , tal que

$$d\varphi = \theta' - \theta . \tag{4.21}$$

Se dice que  $\theta$  y  $\theta'$  difieren en una diferencial exacta.

Con la ayuda de esta última 1-forma diferencial y los resultados (4.10, p. 45), (4.13, p. 46), se puede extender la transformación puntual  $\psi$  a una canónica; y como consecuencia se obtiene una fórmula para el cambio de las variables canónicas:

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j &= \sum_j y_j(\mathbf{x}) dx_j - \sum_i p_i(\mathbf{q}) dq_i \\ &= \sum_j y_j(\mathbf{x}) dx_j - \sum_i p_i(\psi(\mathbf{x})) d\psi_i(\mathbf{x}) \\ &= \sum_j y_j(\mathbf{x}) dx_j - \sum_i p_i(\psi(\mathbf{x})) \sum_j \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_j \left\{ y_j(\mathbf{x}) - \sum_i p_i(\psi(\mathbf{x})) \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right\} dx_j . \end{aligned}$$

De esta igualdad se deducen las relaciones

$$y_j = \sum_i p_i(\psi(\mathbf{x})) \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j} \tag{4.22}$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Estas ecuaciones pueden expresarse en notación matricial:

$$\mathbf{y} = A^t \mathbf{p} + \nabla \varphi, \quad (4.23)$$

donde

$$A = [\alpha_{ij}] = \left[ \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] \quad \text{y} \quad \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

La aplicación  $\psi$  es un difeomorfismo, y por eso  $\det(A) \neq 0$ ; por tanto, con  $C = A^{-1}$  se puede invertir la ecuación (4.23), de manera que

$$\mathbf{p} = C^t (\mathbf{y} - \nabla \varphi). \quad (4.24)$$

#### 4.4. Transformación que aumenta el número de variables

Sean  $\mathcal{M}$  y  $\widehat{\mathcal{N}}$  dos variedades de dimensiones respectivas  $m$  y  $n$ , con  $m > n$ . Estas dos variedades son los espacios de configuración, y los correspondientes fibrados cotangentes ( $T^*\mathcal{M}$ ,  $T^*\widehat{\mathcal{N}}$ ) están dotados de una estructura simpléctica.

Se consideran los vectores:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in T_{\mathbf{x}}^* \mathcal{M}, \quad (4.25)$$

$$\widehat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \in \widehat{\mathcal{N}}, \quad \widehat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \in T_{\widehat{\mathbf{q}}}^* \widehat{\mathcal{N}}, \quad (4.26)$$

y la aplicación

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}: \mathcal{M} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{N}} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \widehat{\mathbf{q}} = \widehat{\psi}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

que es de rango  $n$  y de clase  $\mathcal{C}^2$ .

CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN CANÓNICA A VARIABLES  
REDUNDANTES

Los espacios  $\mathcal{M}$  y  $\widehat{\mathcal{N}}$  poseen dimensiones distintas. En consecuencia la aplicación no se puede extender a una transformación canónica siguiendo el proceso que se ha visto en la Sección anterior. Así que a continuación se buscará la manera de construir una transformación canónica asociada a la aplicación  $\widehat{\psi}$ , basándose en el desarrollo de los apartados anteriores, pero incrementando el número de variables.

Para simplificar los cálculos se introduce la siguiente notación

$$\widehat{A} = [\alpha_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \left[ \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial x_j} \right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad (4.28)$$

donde los  $\alpha_{ij}$  dependen de  $\mathbf{x}$ .

Para obtener la fórmula de la transformación canónica se partirá de nuevo de la Ecuación (4.21, p. 48), donde  $\varphi$  es un función arbitraria que deberá ser al menos de clase  $\mathcal{C}^2$ . En este caso hay que tener en cuenta las dimensiones diferentes de las dos variedades en cuestión, de forma que los cálculos son del siguiente tenor

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j &= \sum_{j=1}^m y_j(\mathbf{x}) dx_j - \sum_{i=1}^n p_i(\widehat{\mathbf{q}}) dq_i \\ &= \sum_{j=1}^m y_j(\mathbf{x}) dx_j - \sum_{i=1}^n p_i(\widehat{\psi}(\mathbf{x})) \sum_{j=1}^m \frac{\partial \widehat{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ y_j(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n p_i(\widehat{\psi}(\mathbf{x})) \alpha_{ij} \right\} dx_j. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Esto permite de nuevo obtener una expresión matricial similar a la (4.23) presentada en la sección anterior:

$$\mathbf{y} = \widehat{A}^t \widehat{\mathbf{p}} + \nabla \varphi, \quad (4.30)$$

donde

$$\nabla \varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]^t \quad (4.31)$$

es el gradiente de  $\varphi$ , con  $\varphi_j = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ .

Necesitamos que la matriz  $\widehat{A}$  sea de rango  $m$ , aunque eso no es suficiente para poder despejar  $\widehat{\mathbf{p}}$  en la ecuación (4.30). Esto requiere aumentar el tamaño de la matriz y la dimensión del vector  $\widehat{\mathbf{p}}$ , lo cual se consigue añadiendo

$m - n$  filas a la matriz, de modo que la nueva matriz sea regular, siendo su definición

$$A = [\alpha_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} , \quad \text{con} \quad \det A \neq 0 .$$

Además al vector  $\widehat{\mathbf{p}}$  se añaden las componentes  $p_i = 0$  con  $i = n + 1, \dots, m$ , para que la transformación definida en (4.30) coincida con la nueva expresión matricial, es decir,

$$\mathbf{y} = \widehat{A}^t \widehat{\mathbf{p}} + \nabla \varphi = A^t \mathbf{p} + \nabla \varphi . \quad (4.32)$$

Sea  $C = [\gamma_{ij}] = A^{-1}$ ; entonces

$$\mathbf{p} = C^t (\mathbf{y} - \nabla \varphi) , \quad (4.33)$$

es la transformación de los momentos conjugados que hemos deducido a partir de la transformación puntual  $\widehat{\psi}$  de (4.27).

A continuación se comprobará cómo afecta esta ampliación de la transformación de los momentos conjugados correspondientes a las coordenadas involucradas en la transformación puntual de partida. A tal efecto calculamos la diferencial de  $\widehat{\psi}$ , que podemos expresar en forma matricial:

$$d\widehat{\mathbf{q}} = \widehat{A} d\mathbf{x} .$$

Basándose en los elementos que se han añadido a la matriz  $\widehat{A}$  anterior, se pueden definir las siguientes formas diferenciales de grado 1

$$\nu_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(\mathbf{x}) dx_j , \quad i = n + 1, \dots, m . \quad (4.34)$$

Si existen funciones  $f_i$  con  $i = n + 1, \dots, m$ , tales que  $df_i = \nu_i$ , entonces se dice que las formas diferenciales son integrables, o también exactas, y definen ligaduras holónomas. De lo contrario las ligaduras definidas por  $\nu_i$  se denominan no holónomas (veáse *Arnold et al.* (1997) [11], p. 18, p. 38 y *Lánczos* (1997) [72], pp. 24–27).

En el caso de ligaduras holónomas se puede incrementar el número de variables de la transformación puntual  $\widehat{\psi}$  de la siguiente manera:

$$\psi := [\widehat{\mathbf{q}}, q_{n+1}, \dots, q_m]^t = [\widehat{\psi}, f_{n+1}, \dots, f_m]^t , \quad (4.35)$$

CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN CANÓNICA A VARIABLES  
REDUNDANTES

---

lo cual permite definir el siguiente cambio de variables

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ C^t(\mathbf{y} - \nabla\varphi) \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

que también se denotará por  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ .

Si las ligaduras son no holónomas, entonces la transformación viene dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\psi}(\mathbf{x}) \\ C^t(\mathbf{y} - \nabla\varphi) \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

o  $(\widehat{\mathbf{q}}, \mathbf{p}) = (\widehat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ , donde todavía hay que añadir las formas diferenciales definidas en (4.34).

**Teorema.** *Sea  $\mathcal{K}(\widehat{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$  un hamiltoniano  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{K}(\widehat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ . Si se satisfacen todas las condiciones mencionadas en esta sección, entonces son válidas las siguientes afirmaciones:*

- I. *La transformación (4.37) es débilmente canónica (en el sentido de Scheifele (1970) [87] o Deprit, Elpe y Ferrer (1994) [44]). Para todas las soluciones del nuevo hamiltoniano  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{K}(\widehat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  se satisfacen las relaciones*

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_j}{dt} = 0 \quad , \quad i = n+1, \dots, m, \quad (4.38)$$

donde  $t$  es la variable independiente del sistema hamiltoniano, y además

$$\sum_{j=1}^m \gamma_{ji}(y_j - \varphi_j) = 0 \quad , \quad i = n+1, \dots, m, \quad (4.39)$$

que se pueden considerar integrales primeras del sistema.

- II. *El cambio de variables (4.36) es una transformación canónica. A lo largo de todas las trayectorias solución del sistema dinámico dado por el hamiltoniano  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  se verifican las siguientes ligaduras, que también se pueden interpretar como integrales primeras,*

$$f_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^m \gamma_{ji}(y_j - \varphi_j) = 0 \quad , \quad i = n+1, \dots, m. \quad (4.40)$$

*Demostración.* Como ya se ha mencionado anteriormente (ver 4.32), para todo  $i \in \{n+1, \dots, m\}$  se cumplen las igualdades

$$p_i = \sum_{j=1}^m \gamma_{ji} (y_j - \varphi_j) = 0 .$$

Los puntos  $p_i = 0$ , ( $i = n+1, \dots, m$ ) definen una subvariedad, y forman un conjunto de puntos críticos o estacionarios del sistema dado por el hamiltoniano. Si las condiciones iniciales contienen a los puntos críticos, entonces la solución permanecerá a lo largo de toda su trayectoria en la subvariedad definida por esos mismos puntos estacionarios.

A continuación se demostrará que las transformaciones del teorema son débilmente canónicas (ver *Deprit, Eliepe y Ferrer* (1994) [44]; *Scheifele* (1970) [87, p. 296–298] y *Stiefel y Scheifele* (1971) [94, ver §31]), para lo que bastará comprobar la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^m dy_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i . \quad (4.41)$$

Antes de demostrar esta igualdad, se calculará la derivada exterior de las  $y_j$  dadas por la expresión matricial (4.23)

$$\begin{aligned} dy_j &= d \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} p_i + \varphi_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ p_i d\alpha_{ij} + \alpha_{ij} dp_i \right] + d\varphi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ p_i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} dx_k + \alpha_{ij} dp_i \right] + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k \\ &= \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} p_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right] dx_k + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} dp_i , \end{aligned} \quad (4.42)$$

y teniendo en cuenta las igualdades entre las derivadas cruzadas de  $\hat{\psi}$  se

obtiene

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m dy_j \wedge dx_j \\
 &= \underbrace{\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j}_{=0} + \sum_{j,k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} p_i dx_k \wedge dx_j + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} dp_i \wedge dx_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{1 \leq k < j \leq m} \left( \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_j} \right) p_i dx_k \wedge dx_j \right] + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n dp_i \wedge \underbrace{(\alpha_{ij} dx_j)}_{=dq_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i .
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Este proceso es válido para las transformaciones consideradas en el teorema, independientemente de si las 1-formas  $\nu_i$  (4.34) son holónomas o no holónomas. El caso en que sean holónomas se puede tratar como una transformación canónica en sentido pleno, teniendo en cuenta que estas formas diferenciales son exactas y sus integrales son  $f_i$  ( $i = n + 1, \dots, m$ ), que se denotarán con  $q_i$ . Entonces el desarrollo (4.42) está dado por

$$\begin{aligned}
 dy_j &= d \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} p_i + \varphi_j \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} p_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right] dx_k + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} dp_i ,
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

y (4.43) se transforma con ayuda de la igualdad de las derivadas cruzadas de  $\psi$  en

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m dy_j \wedge dx_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{1 \leq k < j \leq m} \left( \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_j} \right) p_i dx_k \wedge dx_j \right] + \sum_{i,j=1}^m dp_i \wedge \underbrace{(\alpha_{ij} dx_j)}_{=dq_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i .
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Queda por demostrar que las relaciones dadas por (4.38), o sea para el caso no holónimo, se cumplen a lo largo de las trayectorias solución del sistema dinámico hamiltoniano. Utilizando la función de Hamilton  $\mathcal{H}$  se establecen las siguientes igualdades

$$dx_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_j} dt, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

que se insertan en las 1-formas diferenciales  $\nu_i$  (4.34) ( $i = n + 1, \dots, m$ ), sustituyendo a  $dx_j$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} dx_j &= \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_j} dt &&= \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial y_j} dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_k} \gamma_{jk} dt \right) &&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ij} \gamma_{jk} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_k} dt \quad (4.46) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esto último se deduce inmediatamente que las  $f_i$  son integrales primeras del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  y que su valor numérico tiene que ser igual a cero, para asegurarse de que las soluciones del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  son equivalentes a las de  $\mathcal{K}$  (ver *Ferrández y Sansaturio* (1994) [52, p. 364]). **q.e.d.**

## 4.5. Conclusiones

La transformación (4.36) es canónica en sentido pleno. Para conseguirlo ha sido necesario aumentar el número de variables añadiendo ligaduras (4.34) holónomas, y a partir de ahí se obtienen  $2(n - m)$  integrales primeras del nuevo sistema hamiltoniano. Si las ligaduras (4.34) son no holónomas, sólo se tiene  $n - m$ , integrales primeras a las cuales hay que añadir las ligaduras (4.38).

Si las ligaduras son holónomas, puede obtenerse la inversa de la transformación canónica, si bien eso siempre es posible para la transformación de los momentos conjugados.

Si las ligaduras son integrables, entonces se puede construir la función generatriz

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \psi(\mathbf{x})^t \mathbf{p} + \varphi(\mathbf{x}), \quad (4.47)$$

## CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN CANÓNICA A VARIABLES REDUNDANTES

---

o, expresada por medio de componentes,

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^m \psi_k(\mathbf{x}) p_k + \varphi(\mathbf{x}) . \quad (4.48)$$

Se obtienen inmediatamente las ecuaciones implícitas de la transformación canónica generada por  $S$ :

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{\partial S}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \psi_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} p_k + \varphi_i , \\ q_i &= \frac{\partial S}{\partial p_i} = \psi_i(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

La diferencia de este teorema, con respecto al teorema presentado en el artículo de *Ferrández y Sansaturio* (1994), es la función arbitraria  $\varphi$  que se añade a la transformación canónica.

## Transformación del tiempo en variables BF

### 5.1. Introducción

En este Capítulo consideremos perturbaciones que generalizan cierto tipo de potenciales intermediarios radiales, y en particular potenciales proporcionales a una potencia negativa de la distancia, o sea  $r^{-j}$  con  $j = 0, 1, 2$ . Este tipo de perturbaciones representa a algunos *intermediarios radiales* para el *Problema Fundamental de la Teoría de Satélites Artificiales de la Tierra*.

Consideramos el conjunto de *variables polares nodales de Hill-Whittaker*  $(r, \theta, \nu; p_r, p_\theta, p_\nu)$  (Hill (1913) [62]; Deprit (1981) [43, §2]; y Ferrándiz y Fernández-Ferreirós (1991) [49, §2]), y el tiempo físico  $t$ . El objetivo es linealizar las ecuaciones de movimiento deducidas de esta *clase de hamiltonianos* para problemas perturbados de dos cuerpos, es decir, funciones de Hamilton del tipo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(r, p_r, p_\theta) + U(r; p_\theta^2, p_\nu^2; \varepsilon), \quad (5.1)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r}, \quad (5.2)$$

$$U = \sum_{j=0}^2 \frac{1}{r^j} U_j(p_\theta^2, p_\nu^2; \varepsilon) = \sum_{j=0}^2 \frac{1}{r^j} \left[ \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l U_{j,l}(p_\theta^2, p_\nu^2) \right], \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{H}_0$  es el hamiltoniano kepleriano,  $U$  es el *potencial perturbador*, y  $\varepsilon$  es el parámetro de perturbación respecto al cual se desarrolla  $U$  en potencias de

$\varepsilon$ . Este parámetro permite identificar adecuadamente el orden de magnitud de los términos de perturbación, y en consecuencia podemos separarlos según su magnitud. Puesto que  $\cos I = p_\nu/p_\theta$ , la expresión  $U_j(p_\theta^2, p_\nu^2; \varepsilon)$  puede expresarse como  $U_j^*(p_\theta^2, I; \varepsilon)$  (*Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49, Fórmula (1)]). Estos sistemas perturbados gozan de algunas propiedades analíticas interesantes (*Floría* (1993 y 1994) [55, 56]): comparten una estructura de tipo kepleriano compatible con (y muy próxima a) la kepleriana propiamente dicha, lo que permite encontrar soluciones analíticas sencillas en términos de funciones elementales. También caracterizan a ciertos *intermediarios radiales* para el Problema Fundamental en la Teoría de Satélites.

El caso linealizado por *Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49] es un caso particular del potencial  $U$  (5.3), donde  $j$  es igual 2, es decir, sólo tiene en cuenta el término  $U_2$ . Otra reducción de este tipo de hamiltonianos se puede encontrar en *Floría* (1994) [56]. En la Teoría de Satélites Artificiales,  $U_2$  describe potenciales vinculados a los *intermediarios radiales* de *Deprit* (1981) [43, Fórmula (58)]. Los sistemas cuasi-keplerianos (*ibid.*, §4; *Baxter* (1980) [14]; *Caballero y Elipe* (2001) [30]) y el problema de *Manev* (*Mioc y Stoica* (1995) y (1995) [79, 80]) también comparten estructuras sencillas del tipo  $U_2$ . A este respecto, véase también en esta Tesis la Sección A.3 del Apéndice sobre el problema de dos cuerpos, especialmente los comentarios tras la Ecuación (A.65).

*Deprit* (1981) [43, §9] resuelve su intermediario de *primer orden* mediante una técnica de tipo focal, considerándolo como un sistema de un grado de libertad en las variables radiales  $(r, p_r)$ . Partiendo de las ecuaciones canónicas en las variables polares nodales, linealiza una de ellas; y lleva la ecuación para  $r$  a una ecuación armónica para una variable  $u$  proporcional a  $1/r$ , con un tiempo ficticio proporcional al ángulo polar  $\theta$ . Esta ecuación lineal posee la frecuencia unidad, y el forzamiento viene dado por un término constante.

Nosotros adoptaremos un planteamiento *canónico focal*, similar al de *Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49], para estudiar la *posibilidad de linealizar* un tipo de sistemas keplerianos perturbados. Daremos la forma explícita de las *ecuaciones* y estableceremos las condiciones para la linealización. En caso contrario, cuando no se consigue linealizar, estas fórmulas nos permiten calcular los *términos no lineales* que aparecen en las ecuaciones.

Las únicas perturbaciones (5.3) que son *linealizadas exactamente* por este método son precisamente aquéllas que pertenecen al tipo de hamiltonianos de *Deprit* (1981) [43, p. 138]. Otros potenciales nos conducen a ecuaciones de movimiento correspondientes a osciladores forzados no linealmente. Nuestros resultados muestran algunas razones por las cuales el método focal fracasa al intentar linealizar sistemas keplerianos perturbados.

El vector de posición, en coordenadas cartesianas, está dado por  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ , y el vector  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  corresponde a los momentos conjugados. Utilizaremos las siguientes igualdades :

$$\begin{aligned} p_\nu &= q_1 p_2 - q_2 p_1, \\ p_\theta^2 &= \|\mathbf{q} \times \mathbf{p}\|^2, \end{aligned}$$

donde  $\times$  denotará al producto vectorial habitual. Con estas notaciones el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \varepsilon) = \mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + U^*(r; p_\theta^2, I; \varepsilon), \quad (5.4)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\mu}{r}, \quad (5.5)$$

donde  $r$  es la distancia radial.

## 5.2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden en variables BF

Basándonos en *Ferrándiz y Fernández-Ferreirós* (1991) [49], usaremos la *transformación BF* (véase también *Deprit, Elise y Ferrer* (1994) [44], §4.4), que define las variables canónicas focales  $(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$ , para obtener **condiciones** que permitan reducir los sistemas (5.1)–(5.3) a ecuaciones lineales (a cuatro osciladores lineales). De este modo, quedarán identificados los potenciales que puedan ser reducidos a ecuaciones de osciladores, en función del parámetro  $\alpha$  que aparece en la Ecuación (5.9).

Sea  $(- | -)$  el producto escalar usual en un espacio vectorial real  $\mathbb{R}^n$ . Las ecuaciones de la transformación son

$$q_i = \frac{x_i}{x_4}, \quad p_i = y_i x_4 - x_i \frac{x_4}{\|\mathbf{x}\|^2} \{ (\mathbf{x} | \mathbf{y}) + x_4 y_4 \},$$

que también se podrían expresar en forma vectorial

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}}{x_4}, \quad \mathbf{p} = \frac{x_4}{\|\mathbf{x}\|^2} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} - \frac{x_4^2 y_4}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x}.$$

Se usarán las siguientes relaciones para las normas euclídeas de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$

$$\|\mathbf{q}\|^2 = r^2 = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{x_4^2}, \quad (5.6a)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}\|^2 &= \sum_{i=1}^3 y_i^2 x_4^2 + x_i^2 x_4^2 \frac{(\mathbf{x} | \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^4} + \frac{x_i^2 x_4^4 y_4^2}{\|\mathbf{x}\|^4} \\ &\quad + \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2} \left[ x_i^2 x_4^3 y_4 \frac{(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2} - x_i y_i x_4^2 (\mathbf{x} | \mathbf{y}) - x_i y_i x_4^3 y_4 \right] \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 x_4^2 + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} [x_4^4 y_4^2 - x_4^2 (\mathbf{x} | \mathbf{y})^2], \end{aligned} \quad (5.6b)$$

o, utilizando el producto vectorial,

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2} [x_4^2 y_4^2 + \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2]. \quad (5.6c)$$

Sea

$$\mathbf{Q} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \quad (5.6d)$$

entonces

$$Q^2 = \|\mathbf{Q}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} | \mathbf{y})^2 = p_\theta^2. \quad (5.6e)$$

El hamiltoniano  $\mathcal{H}$  (5.4) en las nuevas variables, usando las fórmulas (5.6), se transforma en

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 x_4^2 + \frac{1}{2} \frac{x_4^4 y_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{x} | \mathbf{y})^2 x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2} - \mu \frac{x_4}{\|\mathbf{x}\|} \\ &\quad + V(Q^2; I), \end{aligned} \quad (5.7a)$$

o también

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{x_4^2}{2 \|\mathbf{x}\|^2} (x_4^2 y_4^2 + Q^2) - \mu \frac{x_4}{\|\mathbf{x}\|} + V(Q^2; I), \quad (5.7b)$$

con

$$V(Q^2; I) = \sum_{j=0}^2 \frac{x_4^j}{\|\mathbf{x}\|^j} V_j(Q^2; I), \quad (5.8a)$$

$$V_j(Q^2; I) = U_j^*(p_\theta^2; I; \varepsilon), \quad (5.8b)$$

y además

$$\cos I = N/Q, \quad (5.8c)$$

$$N = x_1 y_2 - x_2 y_1. \quad (5.8d)$$

Por comodidad hemos omitido el parámetro  $\varepsilon$  en las expresiones de  $V$  y  $V_j$ .

Recurrimos ahora al *formalismo canónico homogéneo* (Poincaré (1905) [83], vol. I, §12; Stiefel y Scheifele (1971) [94], §30, §34 y §37): tomamos la variable independiente  $t$  como una coordenada canónica, que tiene asociado el momento conjugado  $p_0$ , y consideramos el nuevo hamiltoniano homogéneo  $\tilde{\mathcal{H}}_h = \tilde{\mathcal{H}} + p_0$ . El espacio fásico ampliado facilita la introducción de nuevas variables independientes distintas del tiempo físico  $t$  (véase la Sección A.10 del Apéndice sobre el problema de dos cuerpos).

Consideramos el cambio de la variable independiente  $t$  a un nuevo tiempo ficticio  $f$ . Introducimos el pseudo tiempo con la ayuda de una *transformación generalizada de tipo Sundman* que viene definida por la relación diferencial

$$t \mapsto f : dt/df = \tilde{f}(\mathbf{x}, x_4; \alpha) = \frac{\|\mathbf{x}\|^\alpha}{x_4^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

Veremos más adelante cómo, al imponer la linealización de las ecuaciones del movimiento, el exponente  $\alpha$  quedará determinado. El *nuevo hamiltoniano homogéneo*, con  $f$  como parámetro temporal, es

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \tilde{\mathcal{H}}_h \tilde{f} \\ &= \frac{c^2 \|\mathbf{x}\|^{\alpha-2}}{2 x_4^{\alpha-2}} + \frac{y_4^2 x_4^{4-\alpha}}{2 \|\mathbf{x}\|^{2-\alpha}} - \frac{\mu x_4^{1-\alpha}}{\|\mathbf{x}\|^{1-\alpha}} + \frac{\|\mathbf{x}\|^\alpha}{x_4^\alpha} V(Q^2; I) \\ &\quad + \frac{p_0 \|\mathbf{x}\|^\alpha}{x_4^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Este hamiltoniano no presenta la dependencia funcional de un hamiltoniano convencional que represente a un oscilador en cuatro dimensiones. Partiendo de las ocho ecuaciones canónicas de movimiento, analizaremos cómo se puede llegar a un conjunto de cuatro ecuaciones lineales (probablemente forzadas no linealmente). Nuestros siguientes pasos nos conducen a cuatro ecuaciones de segundo orden para  $(\mathbf{x}, x_4)$ , con  $f$  como variable independiente. Este tipo de ecuaciones nos revelará las condiciones bajo las cuales estas ecuaciones representan osciladores lineales. Para este fin, es necesario calcular las ecuaciones canónicas de primer orden generadas por  $\mathcal{K}$ , y utilizar las relaciones

$$\|\mathbf{x}\|^2 = 1, \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})^2 = y_4^2 x_4^2. \quad (5.11)$$

Estas ligaduras holónomas, que se añaden para obtener una transformación canónica en el sentido pleno (cf. *Ferrández y Sansaturio* (1994) [52], p. 464, Remark 1; *Deprit, Elípe y Ferrer* (1994) [44], §§ 4.3, §§ 4.4; Capítulo 6 de esta Memoria), son satisfechas a lo largo de las trayectorias solución del problema.

Introducimos las siguientes abreviaturas,

$$W_1 = \sum_{j=0}^2 \frac{j x_4^j}{\|\mathbf{x}\|^{j+2}} V_j(Q^2; I), \quad W_2 = \sum_{j=0}^2 \frac{j x_4^{j-1}}{\|\mathbf{x}\|^j} V_j(Q^2; I), \quad (5.12a)$$

$$A = 1 + \frac{2}{x_4^2} \frac{\partial V}{\partial Q^2}, \quad B = \frac{1}{x_4^2} \frac{\partial V}{\partial N}, \quad (5.12b)$$

para hacer más legibles los resultados; además, se introduce la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

y se definen los vectores

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{P} \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathcal{P} \mathbf{y}. \quad (5.14)$$

Con la ayuda de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} Q \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} &= \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{x} - (\mathbf{x} | \mathbf{y}) \mathbf{y} \\ &= -\mathbf{Q} \times \mathbf{y} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{y}} &= \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{y} - (\mathbf{x} | \mathbf{y}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{Q} \times \mathbf{x} . \end{aligned}$$

y usando la notación  $()'$ , que representa a la derivada respecto del tiempo ficticio  $f$ , las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$\mathbf{x}' = x_4^{2-\alpha} (A \mathbf{Q} \times \mathbf{x} + B \tilde{\mathbf{x}}) , \quad (5.16a)$$

$$x_4' = x_4^{4-\alpha} y_4 , \quad (5.16b)$$

$$\mathbf{y}' = x_4^{2-\alpha} (A \mathbf{Q} \times \mathbf{y} + B \tilde{\mathbf{y}}) + 2 x_4^{-\alpha} L \mathbf{x} , \quad (5.16c)$$

$$y_4' = -x_4^{-\alpha} (Q^2 x_4 + 2x_4^3 y_4^2 - \mu + W_2) , \quad (5.16d)$$

donde

$$L = \tilde{\mathcal{H}}_h - V - p_0 + \frac{1}{2} \mu x_4 + \frac{1}{2} W_1 . \quad (5.16e)$$

Por medio de estas ecuaciones se puede calcular la ecuación diferencial ordinaria que determina las variaciones del momento angular

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &= \frac{1}{x_4^\alpha} \frac{\partial V}{\partial N} [\tilde{\mathbf{x}} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \tilde{\mathbf{y}}] \\ &= \frac{1}{x_4^\alpha} \frac{\partial V}{\partial N} [(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{y})] . \end{aligned}$$

Aplicando la *identidad de Jacobi* para el producto vectorial se reduce la ecuación anterior a:

$$\mathbf{Q}' = \frac{1}{x_4^\alpha} \frac{\partial V}{\partial N} \tilde{\mathbf{Q}} ,$$

lo que implica que para  $N$  (5.8d) se verifica

$$N' = 0 \quad \implies \quad N \equiv \text{cte.} ,$$

o sea que la tercera componente del momento angular es una integral primera.

Es fácil comprobar que para cualquier vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$(\mathbf{a} \mid \tilde{\mathbf{a}}) = 0 ,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\|' &= \frac{1}{Q} (\mathbf{Q} \mid \mathbf{Q}') \\ &= 0 , \end{aligned}$$

con lo cual la norma del momento angular también es una integral del movimiento. Estas dos últimas constantes de movimiento se pueden deducir directamente del hamiltoniano (5.1), pues las coordenadas  $\nu$  y  $\theta$  son variables cíclicas en dicho hamiltoniano.

Se define a continuación una matriz cuadrada de orden 3 que será útil para cálculos posteriores:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\mathcal{P}^2 . \quad (5.17)$$

El siguiente paso consiste ahora en derivar respecto de  $f$  las ecuaciones canónicas del movimiento (5.16a) y (5.16b), simplificando los cálculos con la ayuda de las relaciones que han sido establecidas hasta el momento. El resultado final es el conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales de segundo orden a las que obedecen las variables de tipo posición:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' + \frac{1}{x_4^{2\alpha-4}} (A^2 Q^2 - B^2 E_2) \mathbf{x} &= \frac{1}{x_4^{\alpha-2}} [2B\tilde{\mathbf{x}}' + A'\mathbf{Q} \times \mathbf{x} + B'\tilde{\mathbf{x}}] \\ &+ \frac{2-\alpha}{x_4} x_4' \mathbf{x}' , \end{aligned} \quad (5.18a)$$

$$x_4'' + x_4^{4-2\alpha} Q^2 x_4 = x_4^{4-2\alpha} [\mu - W_2 + (2-\alpha) x_4^3 y_4^2] , \quad (5.18b)$$

pudiendo esta última reescribirse en la forma

$$x_4'' + x_4^{4-2\alpha} (Q^2 + 2V_2) x_4 = x_4^{4-2\alpha} [\mu - V_1 + (2-\alpha) x_4^3 y_4^2] , \quad (5.18c)$$

donde

$$A' = \frac{-1}{x_4^2} \left( \frac{2}{x_4} \frac{\partial V_0}{\partial Q^2} + \frac{\partial V_1}{\partial Q^2} \right) x_4' , \quad B' = \frac{-1}{x_4^2} \left( \frac{2}{x_4} \frac{\partial V_0}{\partial N} + \frac{\partial V_1}{\partial N} \right) x_4' .$$

### 5.3. Interpretación de los resultados

Los resultados anteriores nos permiten extraer las siguientes *conclusiones*:

- Estas expresiones se convierten en ecuaciones diferenciales *lineales* de segundo orden *con coeficientes constantes*, que corresponden a *osciladores lineales acoplados*, si  $\alpha = 2$  y además las funciones  $V_0$  y  $V_1$  son idénticamente nulas, lo cual concuerda con los resultados presentados por Ferrándiz y Fernández–Ferreirós en [49, p. 6, Fórmulas (17)]. Véase también el Capítulo 2 de esta Tesis. En tales condiciones, las ecuaciones de movimiento presentan la forma:

$$x_1'' + \left[ \left( 1 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial Q^2} \right)^2 Q^2 - \left( \frac{\partial V_2}{\partial N} \right)^2 \right] x_1 = -2 \frac{\partial V_2}{\partial N} x_2', \quad (5.19a)$$

$$x_2'' + \left[ \left( 1 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial Q^2} \right)^2 Q^2 - \left( \frac{\partial V_2}{\partial N} \right)^2 \right] x_2 = +2 \frac{\partial V_2}{\partial N} x_1', \quad (5.19b)$$

$$x_3'' + \left( 1 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial Q^2} \right)^2 Q^2 x_3 = 0, \quad (5.19c)$$

$$x_4'' + (Q^2 + 2V_2) x_4 = \mu. \quad (5.19d)$$

y para el momento angular se tiene

$$\mathcal{Q}' = \frac{\partial V_2}{\partial N} \tilde{\mathcal{Q}}, \quad (5.19e)$$

que también es un oscilador armónico, pues en componentes:

$$\begin{aligned} Q_1' &= -\frac{\partial V_2}{\partial N} Q_2 \\ Q_2' &= \frac{\partial V_2}{\partial N} Q_1 \\ Q_3' &= 0. \end{aligned}$$

- Independientemente de la perturbación, no existe valor  $\alpha \neq 2$  que permita linealizar las ecuaciones.

- Para  $\alpha = 2$ , las funciones  $V_0$  y  $V_1$  nos conduce a un oscilador no lineal perturbado, con los términos no lineales del orden de la perturbación:

$$\mathbf{x}'' + (A^2Q^2 - B^2E_2) \mathbf{x} = 2B\tilde{\mathbf{x}}' + A'\mathbf{Q} \times \mathbf{x} + B'\tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.20a)$$

$$x_4'' + (Q^2 + 2V_2) x_4 = \mu - V_1, \quad (5.20b)$$

junto con la ecuación del momento angular

$$\mathbf{Q}' = \frac{1}{x_4^2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{N}} \tilde{\mathbf{Q}} \quad (5.20c)$$

- Una ilustración de la situación anterior sería el caso del problema ecuatorial del  $J_2$  en la Teoría de Satélites (*Jezewski* (1983) [67]), aunque el potencial no pertenece a la clase considerada aquí, pues se trataría de una perturbación de la forma  $U_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \varepsilon)/r^3$ .

## Familia biparamétrica de transformaciones

### 6.1. Introducción

En cuanto a su canonicidad, las transformaciones que incrementan el número de variables pueden clasificarse en dos tipos: *canónicas en sentido pleno*, y *débilmente canónicas* (o canónicas en sentido débil). A este respecto, véase *Scheifele* (1970) [87]; *Stiefel y Scheifele* (1971) [94], § 31; *Kurcheeva* (1977) [70]; *Cid y Sansaturio* (1988) [36]; *Ferrándiz y Sansaturio* (1994) [52], Remark 2 y Remark 3 de la Sección 2; *Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44].

En el primer caso, el número de variables se aumenta de forma apropiada en el espacio de salida para generar la transformación, como se describe en el artículo de *Ferrándiz y Sansaturio* (1994) [52] o en el Capítulo 4 de esta Tesis. Pero también con la técnica del “embedding” usada en el artículo de *Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44, §§4.2]. En consecuencia, la transformación opera sobre espacios de la misma dimensión; se puede comprobar con los procedimientos habituales si es canónica (como se explica en los libros de texto, por ejemplo en *Goldstein* (1980) [59, Cap. 9]).

Las transformaciones *débilmente canónicas* tienen que aumentar el número de variables, de forma que las dimensiones de los espacios son diferentes:

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) \quad \text{con } n < m,$$

donde  $q_i, x_j$  son las coordenadas generalizadas y  $p_i, y_j$  sus momentos conjugados. Para comprobar si el cambio de variables es débilmente canónico

CAPÍTULO 6. FAMILIA BIPARAMÉTRICA DE  
TRANSFORMACIONES

se usa el criterio de canonicidad mediante los corchetes de Poisson (como se describe en *Stiefel y Scheifele* (1971) [94, §31]; y *Deprit, Eliepe y Ferrer* (1994) [44, §4 y Apéndice]):

$$[q_k; p_\ell] = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial p_\ell}{\partial y_j} - \frac{\partial q_k}{\partial y_j} \frac{\partial p_\ell}{\partial x_j} \right) = \delta_{k\ell} \quad [q_k; q_\ell] = 0, \quad [p_k; p_\ell] = 0,$$

$$(k, \ell = 1, \dots, n),$$

y  $\delta_{k\ell}$  es el símbolo de Kronecker.

La factorización proyectiva clásica del vector de la posición relativa  $\mathbf{q}$  da como resultado un conjunto de cuatro coordenadas generalizadas  $(r, \mathbf{x})$ , que puede ser extendido a un conjunto de ocho variables canónicas con la elección apropiada.

Las variables canónicas **BF** de Burdet–Ferrándiz fueron originalmente introducidas por Ferrándiz (por ejemplo [47, 48, 50]), y en principio las correspondientes transformaciones eran débilmente canónicas. Con posterioridad se describen extensiones que son canónicas en el sentido pleno de la palabra (véase *Ferrándiz y Sansaturio* (1994) [52]; *Deprit, Eliepe y Ferrer* (1994) [44]).

Todos estos autores proponen diferentes conjuntos de variables focales. Esto sugiere que puede haber alguna generalización de estas transformaciones focales canónicas, lo cual podría permitir unificarlas, pues todas ellas siguen más o menos un esquema común, que es aproximadamente el siguiente.

Sea  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  el vector de la posición relativa en coordenadas cartesianas, y  $r = \|\mathbf{q}\|$  la distancia entre las dos partículas. Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  el vector de los momentos canónicos conjugados correspondientes a las coordenadas cartesianas  $\mathbf{q}$ . A continuación se introducen las *coordenadas proyectivas*  $(r, \mathbf{x})$  de la posición relativa

$$r = \|\mathbf{q}\|, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{r} \mathbf{q},$$

y entonces  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

Una vez que se obtiene el nuevo hamiltoniano se calculan las ecuaciones del movimiento. Los siguientes pasos son realizar una transformación de la variable independiente, que introduce un tiempo ficticio del tipo de la anomalía verdadera

$$t \longrightarrow f : \quad dt = r^2 df,$$

y el cambio de la variable dependiente  $r \longrightarrow \sigma = 1/r$ .

De estas ecuaciones del movimiento del problema de Kepler, sólo las de posición y la de la nueva variable  $\sigma$  se derivan respecto del tiempo ficticio  $f$ , de manera que se obtiene

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} + \Omega^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \Omega^2\sigma = \text{cte.}$$

Estas ecuaciones diferenciales de segundo orden corresponden a un conjunto de cuatro osciladores armónicos no acoplados con una frecuencia común  $\Omega$ , relacionada con la norma del vector momento angular del sistema.

En este Capítulo se presenta una nueva familia de transformaciones canónicas focales que generará gran parte de las transformaciones conocidas. Esta transformación, que consigue regularizar y linealizar el problema de Kepler, depende de dos parámetros y de una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^2$ .

## 6.2. Una nueva familia de variables focales canónicas

Un par  $(q_4, p_4)$  de variables canónicas conjugadas (cuyo significado se explicará más adelante) se añade al conjunto de coordenadas cartesianas y sus correspondientes momentos canónicos  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

Basándonos en la transformación puntual de la descomposición proyectiva, introducimos nuevas variables  $(\mathbf{x}, x_4)$  que son de tipo coordenada de posición. Estas variables de tipo espacial se definen por medio de la relación

$$\mathbf{q} = x_4^m \mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{q}\| = r = x_4^m \|\mathbf{x}\|, \quad (6.1)$$

y una restricción geométrica dada por

$$q_4 = \frac{x_4^n}{2} (1 - \|\mathbf{x}\|^2), \quad (6.2)$$

donde  $n \in \mathbb{R}$  y  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Esta última expresión representa una ligadura holónoma y puede ser interpretada como una integral primera (como se indica en *Ferrándiz y Sansaturio* (1994) [52] p. 464, Remark 3; o también en el

CAPÍTULO 6. FAMILIA BIPARAMÉTRICA DE  
TRANSFORMACIONES

Teorema p. 52 de la Sección 4.4 de esta Tesis). Sabemos que para mantener las *características focales* de la transformación esta expresión debe satisfacer

$$q_4 \equiv 0 \quad \implies \quad \|\mathbf{x}\| \equiv 1. \quad (6.3)$$

Esta transformación está bien definida siempre y cuando  $x_4 \neq 0$ . En caso contrario el cambio de variables (6.1) carece de sentido, pues si  $m > 0$  se tiene una colisión, o sea la distancia entre los dos cuerpos es 0, y si  $m < 0$  la aplicación no está definida.

Con el propósito de extender la transformación puntual a una transformación canónica, se introduce como herramienta auxiliar la matriz

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_4} \\ \nabla_{\mathbf{x}} q_4 & \frac{\partial q_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}^t \\ &= \begin{bmatrix} x_4^m & 0 & 0 & mx_1 x_4^{m-1} \\ 0 & x_4^m & 0 & mx_2 x_4^{m-1} \\ 0 & 0 & x_4^m & mx_3 x_4^{m-1} \\ -x_1 x_4^n & -x_2 x_4^n & -x_3 x_4^n & \frac{n}{2} x_4^{n-1} (1 - \|\mathbf{x}\|^2) \end{bmatrix}^t. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como ya se ha dicho anteriormente,  $x_4 \neq 0$ ; entonces podemos afirmar que el determinante de  $B$  es distinto de cero, y su valor viene dado por

$$\det B = \frac{1}{2} x_4^{n+3m-1} \alpha \neq 0, \quad ,$$

donde

$$\alpha \equiv \alpha(n, m) = n + (2m - n) \|\mathbf{x}\|^2 = n(1 - \|\mathbf{x}\|^2) + 2m \|\mathbf{x}\|^2 \neq 0. \quad (6.5)$$

Esto implica que la matriz  $B$  es inversible, y su inversa es

$$C^t = B^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha - x_1^2 & -\frac{2m}{x_4^m} x_1 x_2 & -\frac{2m}{x_4^m} x_1 x_3 & \frac{2}{x_4^{m-1}} x_1 \\ -\frac{2m}{x_4^m} x_1 x_2 & \alpha - x_1^2 & -\frac{2m}{x_4^m} x_2 x_3 & \frac{2}{x_4^{m-1}} x_2 \\ -\frac{2m}{x_4^m} x_1 x_3 & -\frac{2m}{x_4^m} x_2 x_3 & \alpha - x_1^2 & \frac{2}{x_4^{m-1}} x_3 \\ -\frac{2m}{x_4^n} x_1 & -\frac{2m}{x_4^n} x_2 & -\frac{2m}{x_4^n} x_3 & 2x_4^{1-n} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Se considera una función arbitraria  $\varphi(\mathbf{x}, x_4) \in \mathcal{C}^2$  de las nuevas coordenadas, y se introducen las siguientes notaciones

$$\mathbf{\Phi} := \nabla_{\mathbf{x}} \varphi = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right]^t, \quad \Phi_i := \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (6.7)$$

$$\Phi_{ij} := \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}, \quad (i, j = 1, \dots, 4), \quad \mathcal{J}_{\mathbf{\Phi}} := [\Phi_{ij}]_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}. \quad (6.8)$$

Aquí  $\mathcal{J}_{\mathbf{\Phi}}$  es la matriz jacobiana de  $\mathbf{\Phi}$ , es decir, la matriz de las derivadas parciales de la función vectorial  $\nabla_{\mathbf{x}} \varphi$ .

Ahora se puede extender fácilmente la transformación puntual a una canónica, y los momentos conjugados se calculan mediante la fórmula (4.33):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ p_4 \end{bmatrix} = C \left( \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \\ \Phi_4 \end{bmatrix} \right). \quad (6.9)$$

Al desarrollar la fórmula anterior se obtienen las siguientes expresiones

$$\mathbf{p} = \frac{2}{\alpha} \left( x_4^{1-m} Y_4 \mathbf{x} + m x_4^{-m} (\mathbf{x} \times \mathbf{Y}) \times \mathbf{x} \right) + \frac{nb}{\alpha} x_4^{-m} \mathbf{Y}, \quad (6.10)$$

$$p_4 = \frac{2}{\alpha} \frac{x_4 Y_4 - m (\mathbf{x} | \mathbf{Y})}{x_4^n}, \quad (6.11)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{y} - \mathbf{\Phi}, \\ Y_4 &= y_4 - \Phi_4, \\ b &= 1 - \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Según el Teorema de la Sección 4.4,  $p_4$  es una integral primera, y para garantizar la equivalencia entre los dos sistemas su valor numérico debe ser igual a cero:  $p_4 \equiv 0$ .

Esta transformación canónica extiende el espacio de fases de 6 dimensiones a 8. Este cambio de variables es biyectivo para  $x_4 \neq 0$  gracias a la ligadura (6.3) y a la integral primera (6.11), que acabamos de mencionar.

Resumiendo, el cambio a variables focales dado por la familia biparamétrica se define como

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ (\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4)^t &\longmapsto (\mathbf{q}, q_4, \mathbf{p}, p_4)^t = \psi(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4), \end{aligned} \quad (6.12)$$

y las componentes de esta aplicación son

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4) &:= \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}, x_4) \\ \Psi_4(\mathbf{x}, x_4) \\ \Theta(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4) \\ \Theta_4(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_4^m \mathbf{x} \\ \frac{x_4^n}{2} (1 - \|\mathbf{x}\|^2) \\ \frac{2}{\alpha x_4^m} (x_4 Y_4 \mathbf{x} + m (\mathbf{x} \times \mathbf{Y}) \times \mathbf{x}) + \frac{nb}{\alpha x_4^m} \mathbf{Y} \\ \frac{2}{\alpha} \frac{x_4 Y_4 - m (\mathbf{x} \cdot \mathbf{Y})}{x_4^n} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

### 6.3. Aplicación al problema de Kepler

En esta sección se tratará el problema de Kepler, en su formulación hamiltoniana en las nuevas variables generadas por la transformación descrita por la familia biparamétrica que se ha definido en este Capítulo. Esto permitirá calcular las ecuaciones canónicas del movimiento, y a partir de estas expresiones se obtendrá un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales de segundo orden respecto del tiempo ficticio del tipo de la anomalía verdadera como variable independiente, que describen un sistema de cuatro osciladores armónicos desacoplados.

El movimiento relativo del sistema kepleriano convencional con el parámetro de acoplamiento gravitatorio  $\mu$  está caracterizado en variables cartesianas por la función hamiltoniana

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{r}.$$

Tras aplicar la transformación que se ha mencionado anteriormente se

obtiene el nuevo hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &= \frac{2}{\alpha^2} \|\mathbf{x}\|^2 \left( x_4^{2(1-m)} Y_4^2 + m^2 \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{x_4^{2m}} \right) - \frac{\mu}{x_4^m \|\mathbf{x}\|} \\ &+ 2n \frac{b}{\alpha^2} \left[ x_4^{1-2m} y_4 (\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}) + m x_4^{-2m} \|\mathbf{N}\|^2 \right] + \frac{n^2}{2} x_4^{-2m} \frac{b^2}{\alpha^2} \|\mathbf{Y}\|^2, \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde la notación  $(\cdot \mid \cdot)$  corresponde al producto escalar euclídeo y  $\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{Y}$  está relacionado con el momento angular a través de la fórmula

$$\mathbf{M} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} = \left\{ \frac{2}{\alpha} m \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{n}{\alpha} b \right\} \mathbf{N}. \quad (6.15)$$

Se puede comprobar que para los valores  $n = 0$ ,  $m = \pm 1$  y  $\varphi \equiv 0$  se obtienen expresiones más sencillas del hamiltoniano  $\mathcal{K}_0$ ; y además corresponde al hamiltoniano generado por la *transformación BF* (ver más adelante la Subsección 6.6.1).

Denotando como  $[\cdot; \cdot]$  los corchetes de Poisson, las ecuaciones de movimiento en las nuevas variables canónicas  $(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4)$  son

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= [\mathbf{x}; \mathcal{K}_0] \\ &= \frac{4m^2 \|\mathbf{x}\|^2}{\alpha^2 x_4^{2m}} \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \frac{2nb}{\alpha^2 x_4^{2m}} [x_4 Y_4 \mathbf{x} + 2m \mathbf{N} \times \mathbf{x}] + \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \frac{b^2}{x_4^{2m}} \mathbf{Y}, \\ \frac{dx_4}{dt} &= [x_4; \mathcal{K}_0] \\ &= \frac{4\|\mathbf{x}\|}{\alpha^2 x_4^{2(m-1)}} Y_4 + 2 \frac{nb}{\alpha^2 x_4^{2m-1}} (\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}), \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= [\mathbf{y}; \mathcal{K}_0] \\ &= \frac{4\|\mathbf{x}\|^2}{\alpha^2 x_4^{2m}} \left\{ x_4^2 Y_4 \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 + m^2 [\mathbf{N} \times \mathbf{Y} + \mathcal{J}_{\Phi}(\mathbf{N} \times \mathbf{x})] \right\} - \Omega_1 \mathbf{x} - nb \Omega_2, \\ \frac{dy_4}{dt} &= [y_4; \mathcal{K}_0] \\ &= \frac{4m \|\mathbf{x}\|^2}{\alpha^2 x_4^{2m+1}} (x_4^2 Y_4^2 + m^2 \|\mathbf{N}\|^2) - \frac{\mu m}{\|\mathbf{x}\| x_4^{m+1}} \\ &- \frac{4\|\mathbf{x}\|^2}{\alpha^2 x_4^{2m}} \left\{ x_4 Y_4^2 - x_4^2 Y_4 \Phi_{44} - m^2 (\mathbf{N} \mid \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4) \right\} - nb \Omega_3, \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde se han utilizado las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &:= \frac{4(2n - \alpha)}{\alpha^3 x_4^{2m}} (x_4^2 Y_4^2 + m^2 \|\mathbf{N}\|^2) + \frac{4n(\alpha - 4m)}{x_4^{2m} \alpha^3} [x_4 Y_4(\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}) + m\|\mathbf{N}\|^2] \\
 &\quad + \frac{\mu}{x_4^m \|\mathbf{x}\|^3}, \\
 \Omega_2 &:= \frac{2}{x_4^{2m} \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [x_4 Y_4(\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}) + m\|\mathbf{N}\|^2] - \frac{4n}{x_4^{2m} \alpha^3} \|\mathbf{Y}\|^2 \mathbf{x} + \frac{nb}{2x_4^{2m} \alpha^2} \frac{\partial \|\mathbf{Y}\|^2}{\partial \mathbf{x}}, \\
 \Omega_3 &:= \frac{2}{\alpha^2 x_4^{2m}} \frac{\partial}{\partial x_4} [x_4 Y_4(\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}) + m\|\mathbf{N}\|^2] - \frac{4m}{\alpha^2 x_4^{2m+1}} [x_4 Y_4(\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}) + m\|\mathbf{N}\|^2] \\
 &\quad + \frac{nb}{2\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_4} \left( \frac{\|\mathbf{Y}\|^2}{x_4^{2m}} \right).
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

## 6.4. Transformación del tiempo y ecuaciones canónicas del movimiento

Para regularizar y linealizar el problema de Kepler, normalmente se recurre a transformaciones de la variable independiente que generalizan la bien conocida transformación del tiempo de Sundman (véase *Sundman* (1912–1913) [95], p. 127). A menudo se realiza un cambio diferencial  $t \rightarrow f$  de la variable independiente del tipo  $dt \propto r^v df$ ,  $v \in \mathbb{R}$ .

En el marco del método focal, el único valor del exponente  $v$  que permite alcanzar la regularización por linealización en variables **BF** es  $v = 2$  (cf. *Aparicio y Floría* (1996) [3]; y Capítulo 5 de esta Tesis), lo que nos lleva a la introducción de una nueva variable independiente proporcional a la anomalía verdadera.

Para nuestros propósitos consideramos la transformación del tiempo dada por

$$dt = \frac{1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} df = \frac{\alpha^2}{4m^2} \frac{r^2}{\|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{N}\|} df = \frac{\alpha^2}{4m^2} \frac{x_4^{2m}}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} df, \tag{6.18}$$

donde

$$\gamma = \frac{2m \|\mathbf{x}\|}{\alpha x_4^m} = \frac{2m \|\mathbf{x}\|^2}{\alpha r}.$$

Con respecto a este pseudo-tiempo  $f$ , las ecuaciones canónicas del movimiento deducidas del hamiltoniano  $\mathcal{K}_0$  son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} \\ &+ \frac{nb}{m \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \left( \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \frac{x_4 Y_4}{2m} \mathbf{x} \right) + \frac{n^2 b^2}{4m^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$x_4' = \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} + \frac{nb x_4}{2m^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} (\mathbf{x} | \mathbf{Y}), \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{Y}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 + \mathcal{J}_{\Phi} \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} - \frac{\Omega_1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \\ &- \frac{nb}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \Omega_2, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} y_4' &= \frac{m-1}{m^2 \|\mathbf{N}\|} x_4 Y_4^2 + m \frac{\|\mathbf{N}\|}{x_4} + \frac{x_4^2 Y_4 \Phi_{44}}{m^2 \|\mathbf{N}\|} + \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4)}{\|\mathbf{N}\|} \\ &- \frac{\mu \alpha^2 x_4^{m-1}}{4m \|\mathbf{x}\|^3 \|\mathbf{N}\|} - \frac{nb \Omega_3}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde, como de costumbre,  $(\ )' \equiv d/df$ , y

$$\frac{\partial \|\mathbf{N}\|^2}{\partial \mathbf{x}} = -2(\mathbf{N} \times \mathbf{Y} + \mathcal{J}_{\Phi} \mathbf{N} \times \mathbf{x}).$$

Para que este nuevo sistema de ecuaciones del movimiento sea equivalente al sistema canónico que se obtiene a partir del hamiltoniano kepleriano  $\mathcal{H}_0$ , es necesario que a lo largo de las soluciones se cumplan las siguientes condiciones (ligaduras)

$$q_4 = \frac{x_4^n}{2} (1 - \|\mathbf{x}\|^2) \equiv 0, \quad (6.23)$$

$$p_4 = \frac{2}{\alpha} \frac{x_4 Y_4 - m(\mathbf{x} | \mathbf{Y})}{x_4^n} \equiv 0. \quad (6.24)$$

Puesto que  $x_4 \neq 0$ , estas últimas condiciones pueden formularse como

$$x_4 Y_4 \equiv m(\mathbf{x} | \mathbf{Y}), \quad (6.25)$$

$$b = 1 - \|\mathbf{x}\|^2 \equiv 0. \quad (6.26)$$

La expresión  $\Omega_1$  puede simplificarse con ayuda de la restricción (6.25), aunque lo importante es que al desarrollar la derivada primera de  $\mathbf{N}$  ese

CAPÍTULO 6. FAMILIA BIPARAMÉTRICA DE  
TRANSFORMACIONES

término se anulará, pues el producto vectorial del vector  $\mathbf{x}$  por sí mismo es igual al vector cero, y de esta manera no influirá en el resultado final. Los términos correspondientes a  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  están afectados por el factor  $1 - \|\mathbf{x}\|^2$ , que como bien se sabe es una constante del movimiento y su valor a lo largo de las soluciones es igual a cero, y como consecuencia pueden ser igualados a cero para el resto del cálculo.

Partiendo de estas observaciones, las ecuaciones del movimiento pasan a tener las siguientes expresiones:

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|}, \quad (6.27)$$

$$x_4' = \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|}, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{y}' = \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{Y}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 + \mathcal{J}_{\Phi} \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} - \frac{\Omega_1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x}, \quad (6.29)$$

$$y_4' = \frac{mx_4 - 1}{m^2 \|\mathbf{N}\|} x_4 Y_4^2 + m \frac{\|\mathbf{N}\|}{x_4} + \frac{x_4^2 Y_4 \Phi_{44}}{m^2 \|\mathbf{N}\|} + \frac{(\mathbf{N} \mid \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4)}{\|\mathbf{N}\|} - \frac{\mu \alpha^2 x_4^{m-1}}{4m \|\mathbf{x}\|^3 \|\mathbf{N}\|}, \quad (6.30)$$

*En el caso particular* de que  $\varphi$  sea idénticamente igual a cero, la transformación depende solamente de los dos parámetros numéricos  $m$  y  $n$ , y el sistema kepleriano está gobernado por el hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 = & \frac{2}{\alpha^2} \|\mathbf{x}\|^2 \left( x_4^{2(1-m)} y_4^2 + m^2 \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{x_4^{2m}} \right) - \frac{\mu}{x_4^m \|\mathbf{x}\|} \\ & + 2n \frac{b}{\alpha^2} \left( x_4^{1-2m} y_4 (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) + mx_4^{-2m} \|\mathbf{N}\|^2 \right) + \frac{n^2}{2} x_4^{-2m} \frac{b^2}{\alpha^2} \|\mathbf{y}\|^2, \end{aligned}$$

donde el vector  $\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$  es proporcional al momento angular  $\mathbf{M}$ . La transformación diferencial del tiempo (6.18) conserva su forma, teniendo en cuenta que se ha cambiado la definición del vector  $\mathbf{N}$ .

Las ecuaciones canónicas del movimiento, tras estas consideraciones, se

escriben como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{nb}{m \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \left( \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \frac{x_4 y_4}{2m} \mathbf{x} \right) + \frac{n^2 b^2}{4m^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{y}, \\ x_4' &= \frac{x_4^2 y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} + \frac{nb x_4}{2m^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} (\mathbf{x} | \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{y}}{\|\mathbf{N}\|} - \frac{\Omega_1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} - \frac{nb}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \Omega_2, \\ y_4' &= \frac{m x_4 - 1}{m^2 \|\mathbf{N}\|} x_4 y_4^2 + m \frac{\|\mathbf{N}\|}{x_4} - \frac{\mu \alpha^2 x_4^{m-1}}{4m \|\mathbf{x}\|^3 \|\mathbf{N}\|} - \frac{nb \Omega_3}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|},\end{aligned}$$

donde, en este caso,

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \frac{4(2n - \alpha)}{\alpha^3 x_4^{2m}} (x_4^2 y_4^2 + m^2 \|\mathbf{N}\|^2) + \frac{4n(\alpha - 4m)}{x_4^{2m} \alpha^3} [x_4 y_4 (\mathbf{x} | \mathbf{y}) + m \|\mathbf{N}\|^2] \\ &\quad + \frac{\mu}{x_4^m \|\mathbf{x}\|^3}, \\ \Omega_2 &:= \frac{2}{x_4^{2m} \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [x_4 y_4 (\mathbf{x} | \mathbf{y}) + m \|\mathbf{N}\|^2] - \frac{4n}{x_4^{2m} \alpha^3} \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{x} + \frac{nb}{2x_4^{2m} \alpha^2} \frac{\partial \|\mathbf{y}\|^2}{\partial \mathbf{x}}, \\ \Omega_3 &:= \frac{2}{\alpha^2 x_4^{2m}} \frac{\partial}{\partial x_4} [x_4 y_4 (\mathbf{x} | \mathbf{y}) + m \|\mathbf{N}\|^2] - \frac{4m}{\alpha^2 x_4^{2m+1}} [x_4 y_4 (\mathbf{x} | \mathbf{y}) + m \|\mathbf{N}\|^2] \\ &\quad + \frac{nb}{2\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_4} \left( \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{x_4^{2m}} \right).\end{aligned}$$

Los comentarios acerca del caso general (realizados tras las ecuaciones (6.25) y (6.26)) son también pertinentes en este punto.

## 6.5. Ecuaciones del oscilador armónico

Para obtener los osciladores armónicos son necesarios todavía dos pasos. El primero de ellos consiste en calcular la derivada segunda de la ecuación del movimiento (6.19).

Pero en lugar de partir de la ecuación vectorial (6.19) utilizaremos (6.27), que ya está simplificada con la ayuda de las restricciones introducidas a través de la transformación canónica.

CAPÍTULO 6. FAMILIA BIPARAMÉTRICA DE  
TRANSFORMACIONES

---

Es conveniente empezar comprobando que

$$\mathbf{N}' \equiv \mathbf{0}, \quad (6.31)$$

para simplificar el cálculo que finalmente conduzca a los osciladores armónicos.

Se deriva el vector  $\mathbf{N}$  y se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= (\mathbf{x} \times \mathbf{Y})' = \mathbf{x}' \times \mathbf{Y} + \mathbf{x} \times \mathbf{Y}' \\ &= \mathbf{x}' \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}' - \mathbf{x}' \times \Phi - \mathbf{x} \times \Phi'. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Se descompone esta suma en tres partes, para que el proceso de cálculo resulte más claro, y se aplicarán las ecuaciones (6.28, 6.29, 6.30).

1) Los dos primeros términos de la suma (6.32) conforman la primera parte del cálculo:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}' \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}' \\ &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \left( \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{Y}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 + \mathcal{J}_{\Phi} \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} - \frac{\Omega_1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \right) \\ &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{Y}}{\|\mathbf{N}\|} + \mathbf{x} \times \frac{\mathcal{J}_{\Phi} (\mathbf{N} \times \mathbf{x})}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \{ (\mathbf{N} | \mathbf{y}) \mathbf{x} - (\mathbf{x} | \mathbf{y}) \mathbf{N} + (\mathbf{x} | \mathbf{Y}) \mathbf{N} + \mathbf{x} \times [\mathcal{J}_{\Phi} (\mathbf{N} \times \mathbf{x})] \} \\ &\quad + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \{ (\mathbf{N} | \mathbf{y}) \mathbf{x} - (\mathbf{x} | \Phi) \mathbf{N} + \mathbf{x} \times [\mathcal{J}_{\Phi} (\mathbf{N} \times \mathbf{x})] \} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4. \end{aligned} \quad (6.33)$$

2) A continuación se desarrollará el tercer sumando de la expresión (6.32):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \times \Phi &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} \times \Phi \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \{ (\mathbf{N} | \Phi) \mathbf{x} - (\mathbf{x} | \Phi) \mathbf{N} \}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

3) El cuarto sumando de (6.32) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \Phi' &= \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi \mathbf{x}' + x_4' \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \{ \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi [\mathbf{N} \times \mathbf{x}] \} + \frac{x_4'^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4.\end{aligned}\quad (6.35)$$

Finalmente, el último paso consiste en sumar estas tres expresiones:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}' &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \{ (\mathbf{N} \mid \mathbf{y}) \mathbf{x} - (\mathbf{x} \mid \Phi) \mathbf{N} + \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi [\mathbf{N} \times \mathbf{x}] \} + \frac{q_4^2 P_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} f_4 \\ &- \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \{ (\mathbf{N} \mid \Phi) \mathbf{x} - (\mathbf{x} \mid \Phi) \mathbf{N} \} - \frac{x_4'^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 - \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \{ \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi [\mathbf{N} \times \mathbf{x}] \} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \underbrace{(\mathbf{N} \mid \mathbf{y} - \Phi)}_{=0} \mathbf{x} = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (6.36)$$

Se deduce, pues, que  $\mathbf{N}$  es un vector constante, por lo que su norma también será constante. Todo esto, en cualquier caso, es consecuencia de la bien conocida conservación del vector momento angular en sistemas keplerianos y de (6.15).

Con este resultado auxiliar puede calcularse fácilmente la derivada segunda del vector  $\mathbf{x}$  (ver 6.27)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= \left( \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} \right)' \\ &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}'}{\|\mathbf{N}\|} \\ &= \frac{\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{x})}{\|\mathbf{N}\|^2} \\ &= -\mathbf{x}.\end{aligned}\quad (6.37)$$

Con esto se concluye que el vector unitario en la dirección de la partícula móvil ejecuta una oscilación armónica de acuerdo con la ecuación diferencial vectorial

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{df^2} + \mathbf{x} = \mathbf{0}.\quad (6.38)$$

CAPÍTULO 6. FAMILIA BIPARAMÉTRICA DE  
TRANSFORMACIONES

Se introduce ahora una nueva variable dependiente escalar  $\sigma$  para completar el conjunto de ecuaciones diferenciales del movimiento. Dicha variable se define como

$$\sigma = \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{\mu x_4^m}. \quad (6.39)$$

Esta nueva variable es, esencialmente, proporcional al recíproco de la distancia radial entre los dos cuerpos ( $\sigma \propto 1/r$ ).

El objetivo final es obtener la derivada segunda de esta nueva variable respecto del tiempo ficticio. Así que la derivada primera de  $\sigma$  es

$$\sigma' = \left( \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{\mu x_4^m} \right)' = - \frac{m \|\mathbf{N}\|^2}{\mu x_4^{m+1}} x_4' \quad (6.40)$$

$$= - \frac{m \|\mathbf{N}\|^2}{\mu x_4^{m+1}} \left( \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \right) = - \frac{\|\mathbf{N}\| Y_4}{m \mu x_4^{m-1}}, \quad (6.41)$$

y su derivada segunda

$$\begin{aligned} \sigma'' &= - \frac{\|\mathbf{N}\|}{m \mu} \left( \frac{Y_4}{x_4^{m-1}} \right)' \\ &= - \frac{\|\mathbf{N}\|}{m \mu x_4^m} (x_4 Y_4' + (1-m) Y_4 x_4') \\ &= - \frac{\|\mathbf{N}\|}{m \mu x_4^m} \left( x_4 [y_4' - \Phi_4'] + (1-m) \frac{x_4^2 Y_4^2}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \right) \\ &= - \frac{\|\mathbf{N}\|}{\mu x_4^m} - \frac{x_4^3 Y_4 \Phi_{44}}{m^3 \mu x_4^m} - \frac{x_4 (\mathbf{N} \mid \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4)}{m \mu x_4} + \frac{x_4 \|\mathbf{N}\|}{m \mu x_4^m} [(\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 \mid \mathbf{x}') + \Phi_{44} x_4'] \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2m^2 \|\mathbf{x}\|^3}. \end{aligned}$$

Queda sólo utilizar la definición de  $\sigma$  y simplificar esta última expresión para obtener

$$\frac{d^2 \sigma}{d f^2} + \sigma = \frac{\alpha^2}{4m^2 \|\mathbf{x}\|^3}, \quad (6.42)$$

que describe un oscilador armónico unidimensional forzado.

En resumen: A la vista de los ecuaciones (6.38) y (6.42) se concluye que este tratamiento del movimiento kepleriano conduce a un sistema de cuatro osciladores armónicos desacoplados con frecuencia unidad. Usando otros

valores para los parámetros de la transformación (6.18) de la variable independiente se pueden obtener conjuntos alternativos de osciladores armónicos no acoplados con la misma frecuencia, la cual puede depender de la norma del momento angular.

## 6.6. Algunos Ejemplos

A modo de ilustración de nuestro planteamiento, mostraremos cómo ciertas elecciones concretas de los parámetros numéricos  $n$  y  $m$  y de la función  $\varphi$  nos permiten recuperar algunos casos *importantes* de transformaciones (junto con sus correspondientes conjuntos de variables canónicas) propuestas por diferentes autores. Todas ellas parten de la elección  $\varphi \equiv 0$ .

### 6.6.1. Transformación BF [Versión de 44, §§4.4]

Sean  $m = 1$  y  $n = 0$ . Entonces  $\alpha = 2$ , y las ecuaciones que definen la transformación son

$$\mathbf{q} = x_4 \mathbf{x} , \quad (6.43)$$

$$q_4 = \frac{1}{2} (1 - \|\mathbf{x}\|^2) , \quad (6.44)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} (y_4 \mathbf{x} + x_4^{-1} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x}) , \quad (6.45)$$

$$p_4 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} (x_4 y_4 - (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})) . \quad (6.46)$$

Esta aplicación constituye una variante de las transformaciones del tipo BF, y el hamiltoniano del problema de Kepler se convierte en

$$\mathcal{K}_0 = \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|^2} \left( y_4^2 + \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{x_4^2} \right) - \frac{\mu}{x_4 \|\mathbf{x}\|} .$$

Después de la transformación diferencial del tiempo

$$dt = \frac{r^2}{\|\mathbf{N}\|} df = \frac{x_4^2 \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{N}\|} df , \quad (6.47)$$

las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|}, \\ x_4' &= \frac{x_4^2 y_4}{\|\mathbf{N}\|}, \\ \mathbf{y}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{y}}{\|\mathbf{N}\|} - \left( \frac{-1}{\|\mathbf{N}\| \|\mathbf{x}\|^2} (x_4^2 y_4^2 + \|\mathbf{N}\|^2) + \frac{x_4}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\mu}{\|\mathbf{N}\|} \right) \mathbf{x}, \\ y_4' &= -\frac{\|\mathbf{N}\|}{x_4} - \frac{\mu \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{N}\|}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de los osciladores (6.38) y (6.42) se obtienen de la misma forma que se ha descrito anteriormente.

### Observaciones

- I. Los cambios canónicos de variables focales publicados antes del año 1992 en los diferentes trabajos de Ferrándiz (véanse por ejemplo *Ferrándiz* (1986), (1988) y (1991) [46, 47, 49]) corresponden a la elección  $m = -1$ ,  $n = 0$  y  $\varphi \equiv 0$  en la familia biparamétrica.
- II. En 1992 se publica el artículo *Ferrándiz, Sansaturio y Pojman* (1992) [51], en el cual aparece una nueva transformación focal canónica, que no se puede obtener a partir de la familia biparamétrica que hemos presentado en este Capítulo. Lo mismo ocurre con el cambio de variables propuesto en el artículo *Ferrándiz y Sansaturio* (1994) [52]. Esto es debido a la presencia de  $\|\mathbf{x}\|$  en el denominador de las ecuaciones de la transformación puntual

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} x_4^\kappa; \quad (6.48)$$

la elección de  $\kappa = 1$  se considera en el artículo [51], mientras que en [52] se utiliza  $\kappa = -1$ . La ecuación (6.48) escapa al esquema contemplado en nuestra ecuación (6.1).

- III. En el trabajo de *Ferrer y Pérez* (2002) [53] se presentan dos tipos de transformaciones puntuales y sus extensiones canónicas, que son generalizaciones de algunas transformaciones clásicas. De estas dos aplicaciones, la segunda [53, p. 129, Fórmula b)] es para nuestros propósitos la de mayor interés. Dicha transformación depende de dos funciones

arbitrarias, que denotaremos como  $g$  y  $F$ ; la única condición que deben cumplir es que la correspondiente transformación sea inversible. Estas funciones elegidas convenientemente permiten establecer una relación con las “transformaciones canónicas no clásicas que aumentan el número de variables”.

Esta transformación  $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \rightarrow (q_1, \dots, q_k, q_{k+1})$ , con las notaciones de este Capítulo, está dada por

$$q_i = g(x_{k+1})q_i(x_1, \dots, x_k) \quad i = 1, \dots, k, \quad (6.49)$$

$$q_{k+1} = F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}), \quad (6.50)$$

donde las funciones  $q_i$  están determinadas para cada caso.

La familia biparamétrica presentada en este Capítulo encaja perfectamente con la transformación introducida por *Ferrer y Pérez* (2002) ([53], Sección 3, p. 133, Ejemplo ii), Fórmulas (11) y (12)), que viene dada de la siguiente manera

$$q_i = x_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.51a)$$

$$g(x_4) = \frac{1}{x_4^m}, \quad (6.51b)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_4^n}{2}(1 - x_1^2 + x_3^2 + x_3^2). \quad (6.51c)$$

Comparando estas expresiones con las Ecuaciones (6.1) y (6.2) se tiene que la función  $F$  proporciona precisamente la ligadura o integral primera (6.2) que se añade a la transformación puntual de tipo proyectivo, como en el caso de la familia biparamétrica.

Otros hechos que se pueden constatar fácilmente son:

- a) El factor numérico  $1/2$  sólo está presente por cuestiones cosméticas, es decir, para evitar que aparezca un factor numérico en la extensión de la transformación, pero no afecta al resultado final.
- b) La relación (6.51c) admite otras expresiones, como  $F = (1/2)x_4^n(x_1^2 + x_3^2 + x_3^2 - 1)$ . Esto sólo afecta al signo en algunas fórmulas, pero sin influir en el resultado final.
- c) Otra posible elección sería  $F = (1/2)x_4^n(x_1^2 + x_3^2 + x_3^2)$ , lo cual sólo tendría sentido si la norma de  $\mathbf{x}$  es igual a uno, y volveríamos a obtener la familia biparamétrica.

### 6.6.2. Transformación D [44, §§4.3]

En este caso, poniendo  $m = 1$  y  $n = 2$ , entonces  $\alpha = 2$ , y las ecuaciones del cambio de variables se reducen a

$$\mathbf{q} = x_4 \mathbf{x}, \quad (6.52)$$

$$q_4 = \frac{x_4^2}{2} (1 - \|\mathbf{x}\|^2), \quad (6.53)$$

$$\mathbf{p} = y_4 \mathbf{x} + x_4^{-1} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} + x_4^{-1} (1 - \|\mathbf{x}\|^2) \mathbf{y}, \quad (6.54)$$

$$p_4 = \frac{x_4 y_4 - (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})}{x_4^2}, \quad (6.55)$$

y el hamiltoniano transformado es

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 = & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \left( y_4^2 + \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{x_4^2} \right) - \frac{\mu}{x_4 \|\mathbf{x}\|} \\ & + (1 - \|\mathbf{x}\|^2) (x_4^{-1} y_4 (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) + x_4^{-2} \|\mathbf{N}\|^2) + \frac{(1 - \|\mathbf{x}\|^2)^2}{2x_4^2} \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Con el cambio de la variable independiente

$$dt = \frac{r^2}{\|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{N}\|} \frac{df}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \frac{df}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|}, \quad (6.57)$$

las ecuaciones canónicas del movimiento son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \left( 1 + 2 \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + x_4 y_4 \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} + \frac{(1 - \|\mathbf{x}\|^2)^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{y}, \\ x_4' &= \frac{x_4^2 y_4}{\|\mathbf{N}\|} + x_4 \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}' &= \left( 1 + 2 \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{y}}{\|\mathbf{N}\|} - \Omega \mathbf{x} - \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \frac{x_4 y_4}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{y}, \\ y_4' &= -1 \frac{\|\mathbf{N}\|}{x_4} - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\|^3 \|\mathbf{N}\|} + \frac{(1 - \|\mathbf{x}\|^2)^2 \|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2 x_4} \\ &+ 2 \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \left( \frac{\|\mathbf{N}\|}{x_4} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})}{\|\mathbf{N}\|} y_4 \right), \end{aligned}$$

donde

$$\Omega = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|\|\mathbf{x}\|^2} (x_4^2 y_4^2 + \|\mathbf{N}\|^2) + \frac{x_4}{\|\mathbf{x}\|^5} \frac{\mu}{\|\mathbf{N}\|} - 2 \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{N}\|} - \frac{4}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} (x_4 y_4 (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) + \|\mathbf{N}\|^2) .$$

Al igual que en el ejemplo anterior, las ecuaciones de osciladores armónicos que se obtienen finalmente son las ecuaciones (6.38) y (6.42).

### 6.6.3. Transformación DEF [44, §§4.1]

A diferencia de los anteriores cambios de variables, la transformación **DEF** no puede obtenerse eligiendo simplemente valores de los parámetros numéricos. Además, todavía deberíamos comprobar las condiciones para la canonicidad débil. Por otra parte, la transformación no es inversible (*cf. Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44], §§4.1), pues la matriz jacobiana de la transformación no es cuadrada, ya que la aplicación actúa entre dominios de espacios de dimensiones distintas.

Sin embargo, una ligera variante de nuestro tratamiento nos permite deducir la transformación **DEF** simplemente recurriendo a la ecuación (6.1) para la elección de  $m = 1$ . La extensión al espacio de los momentos viene dada por la fórmula

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ p_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} B^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ y_4 \end{pmatrix} ,$$

en donde la matriz  $B$  es la obtenida en la ecuación (6.4) para  $n = 0$ .

## 6.7. Conclusiones

Hemos descrito un procedimiento general para obtener, a partir de transformaciones puntuales, *transformaciones canónicas* (en sentido pleno) que conducen a la introducción de conjuntos de variables canónicas del tipo focal.

## CAPÍTULO 6. FAMILIA BIPARAMÉTRICA DE TRANSFORMACIONES

---

Este enfoque nos permite englobar las extensiones canónicas focales conocidas dentro de un esquema unificado formalizado mediante una familia de transformaciones canónicas, si bien en algunos casos puede ser necesario introducir un factor de escala adecuado (véase como ejemplo la Subsección 6.6.3).

Las transformaciones **BF** y **D** son canónicas en sentido pleno y pueden ser fácilmente deducidas a partir de la transformación puntual basada en la descomposición proyectiva con ayuda de la matriz dada en la Ecuación (6.4). En particular, la transformación de la Sección 6.6.1 conduce a la forma más sencilla del hamiltoniano del problema de Kepler y sus correspondientes ecuaciones canónicas del movimiento.

## Familia bipolarétrica y potenciales perturbadores

### 7.1. Introducción

Los desarrollos y consideraciones que se han realizado en el Capítulo anterior se aplicarán ahora al problema de Kepler perturbado por un potencial del tipo  $U(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Por tanto, el hamiltoniano en las variables cartesianas es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + U(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ &= \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{r} + U(\mathbf{q}, \mathbf{p}) . \end{aligned}$$

Siguiendo los pasos del Capítulo 6, se transforma la función de Hamilton con ayuda de la familia bipolarétrica descrita en (6.13) y sus correspondientes ligaduras (6.3, 6.23) y (6.11, 6.24), que siguen siendo válidas al ser propiedades de la transformación, y que no dependen del sistema dinámico que se vaya a analizar.

Una vez realizada la transformación dada por (6.13), el hamiltoniano en

las nuevas variables focales es

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{2}{\alpha^2} \|\mathbf{x}\|^2 \left( x_4^{2(1-m)} Y_4^2 + m^2 \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{x_4^{2m}} \right) - \frac{\mu}{x_4^m \|\mathbf{x}\|} \\ &+ 2n \frac{b}{\alpha^2} \left[ x_4^{1-2m} y_4 (\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}) + m x_4^{-2m} \|\mathbf{N}\|^2 \right] + \frac{n^2}{2} x_4^{-2m} \frac{b^2}{\alpha^2} \|\mathbf{Y}\|^2 + V, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} V &:= V(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4) \\ &\equiv U(\Psi(\mathbf{x}, x_4), \Theta(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4)). \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones (6.16) y las notaciones (6.17), se pueden ahora expresar las ecuaciones canónicas del movimiento del sistema perturbado con respecto del tiempo físico  $t$  en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= [\mathbf{x}; \mathcal{K}] = [\mathbf{x}; \mathcal{K}_0] + \nabla_{\mathbf{y}} V, \\ \frac{dx_4}{dt} &= [x_4; \mathcal{K}] = [x_4; \mathcal{K}_0] + \frac{\partial V}{\partial y_4}, \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= [\mathbf{y}; \mathcal{K}] = [\mathbf{y}; \mathcal{K}_0] - \nabla_{\mathbf{x}} V, \\ \frac{dy_4}{dt} &= [y_4; \mathcal{K}] = [y_4; \mathcal{K}_0] - \frac{\partial V}{\partial x_4}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde  $\mathcal{K}_0$  es el hamiltoniano de Kepler puro (6.14).

## 7.2. Transformación del tiempo y ecuaciones canónicas del movimiento

En el caso del problema de Kepler no perturbado, el cambio de la variable independiente que se empleó es el que se describe en (6.18), y se comprueba que la frecuencia de los osciladores armónicos es constante.

Para el problema de Kepler perturbado se desarrollarán dos variantes, que se deben a dos transformaciones del tiempo diferentes, aunque siempre en función de  $r^2$  (pues de lo contrario no se podrá linealizar el problema). Sin embargo, sí que se puede eliminar el factor  $\|\mathbf{N}\|$  en el cambio de tiempo de

(6.18), lo que tendrá como consecuencia que la frecuencia de los osciladores perturbados es  $\|\mathbf{N}\|$  (en el caso no perturbado ocurre lo mismo). Además la expresión de los osciladores perturbados será más sencilla y se reducirá el número términos en las ecuaciones. Es obvio que la frecuencia en este caso ya no será constante, sino que variará según la norma del vector  $\mathbf{N}$ .

### 7.2.1. Primera variante

El siguiente paso consiste en realizar el cambio de variable independiente (6.18) definido en el capítulo anterior, y usa la notación  $(\ )' \equiv d/df$ . Las ecuaciones del movimiento con el nuevo tiempo ficticio  $f$  corresponden a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + \hat{V}_y \\
 &+ \frac{nb}{m \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \left( \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \frac{x_4 Y_4}{2m} \mathbf{x} \right) + \frac{n^2 b^2}{4m^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{Y}, \\
 x_4' &= \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} + \hat{V}_{y_4} + \frac{nb x_4}{2m^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{N}\|} (\mathbf{x} | \mathbf{Y}), \\
 \mathbf{y}' &= \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{Y}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 + \mathcal{J}_{\Phi} \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} - \frac{\Omega_1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} - \hat{V}_x \\
 &- \frac{nb}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \Omega_2, \\
 y_4' &= \frac{m-1}{m^2 \|\mathbf{N}\|} x_4 Y_4^2 + m \frac{\|\mathbf{N}\|}{x_4} + \frac{x_4^2 Y_4 \Phi_{44}}{m^2 \|\mathbf{N}\|} + \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4)}{\|\mathbf{N}\|} \\
 &- \frac{\mu \alpha^2 x_4^{m-1}}{4m \|\mathbf{x}\|^3 \|\mathbf{N}\|} - \hat{V}_{x_4} - \frac{nb \Omega_3}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|},
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \hat{V}_x &:= \frac{1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \nabla_{\mathbf{x}} V, & \hat{V}_{x_4} &:= \frac{1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \frac{\partial V}{\partial x_4}, \\
 \hat{V}_y &:= \frac{1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \nabla_{\mathbf{y}} V, & \hat{V}_{y_4} &:= \frac{1}{\gamma^2 \|\mathbf{N}\|} \frac{\partial V}{\partial y_4}.
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Siguiendo la pauta del capítulo anterior, el primer paso será calcular la derivada segunda de  $\mathbf{x}$  respecto del tiempo ficticio, pero antes es conveniente desarrollar la derivada primera de  $\mathbf{N}$ , que por lo general (a diferencia del caso no perturbado) ya no será igual a cero.

CAPÍTULO 7. FAMILIA BIPARÁMETRICA Y POTENCIALES  
PERTURBADORES

Para determinar la derivada de  $\mathbf{N}$  se empleará el planteamiento utilizado en (6.32), (6.33), (6.34), (6.35) y (6.36): partiendo de

$$\begin{aligned}\mathbf{N}' &= (\mathbf{x} \times \mathbf{Y})' = \mathbf{x}' \times \mathbf{Y} + \mathbf{x} \times \mathbf{Y}' \\ &= \mathbf{x}' \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}' - \mathbf{x}' \times \Phi - \mathbf{x} \times \Phi',\end{aligned}\quad (7.4)$$

se descompondrá esta expresión en tres partes, empezando por

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}' \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}' \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \left\{ (\mathbf{N} | \mathbf{y}) \mathbf{x} - (\mathbf{x} | \Phi) \mathbf{N} + \mathbf{x} \times [\mathcal{J}_\Phi (\mathbf{N} \times \mathbf{x})] \right\} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 \\ &\quad + \hat{V}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_{\mathbf{x}},\end{aligned}\quad (7.5)$$

seguido de

$$\mathbf{x}' \times \Phi = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \left\{ (\mathbf{N} | \Phi) \mathbf{x} - (\mathbf{x} | \Phi) \mathbf{N} \right\} + \hat{V}_{\mathbf{y}} \times \Phi, \quad (7.6)$$

y terminando con

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \Phi' &= \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \left\{ \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi [\mathbf{N} \times \mathbf{x}] \right\} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 \\ &\quad + \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi \hat{V}_{\mathbf{y}} + \hat{V}_{y_4} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Ahora sólo falta sumar estos tres resultados parciales:

$$\mathbf{N}' = \hat{V}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_{\mathbf{x}} - \hat{V}_{\mathbf{y}} \times \Phi - \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi \hat{V}_{\mathbf{y}} - \hat{V}_{y_4} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4, \quad (7.8)$$

expresión que, como se puede comprobar, ya no es una integral primera. Incluso eligiendo  $\varphi \equiv 0$ , sólo se consigue simplificar la expresión.

La derivada segunda del vector  $\mathbf{x}$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= \left( \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} \right)' + (\hat{V}_{\mathbf{y}})' \\ &= -\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^3} \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \frac{\mathbf{N}' \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{\mathbf{N} \times \hat{V}_{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{N}\|} + (\hat{V}_{\mathbf{y}})' \\ &= -\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} (\mathbf{x}' - \hat{V}_{\mathbf{y}}) + \frac{\mathbf{N}' \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{\mathbf{N} \times \hat{V}_{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{N}\|} + (\hat{V}_{\mathbf{y}})',\end{aligned}\quad (7.9)$$

que corresponde a tres osciladores perturbados.

Basándose en lo expuesto en el capítulo anterior, se introduce una nueva variable escalar (ver 6.39), que se diferencia de aquélla en el numerador, el cual es ahora igual a 1, evitando así que aparezca la derivada segunda de  $\|\mathbf{N}\|$ . La variable que se utilizará en esta ocasión es

$$\sigma = \frac{1}{\mu x_4^m}. \quad (7.10)$$

Igual que en el caso no perturbado, hay que derivar dos veces  $\sigma$  respecto del tiempo ficticio  $f$  para obtener una ecuación diferencial de segundo orden.

Empezando por la derivada primera se tiene

$$\sigma' = \left( \frac{1}{\mu x_4^m} \right)' = - \frac{m}{\mu x_4^{m+1}} x_4' \quad (7.11)$$

$$= - \frac{m}{\mu x_4^{m+1}} \left( \frac{x_4^2 Y_4}{m^2 \|\mathbf{N}\|} + \hat{V}_{y_4} \right) = - \frac{Y_4}{m \mu \|\mathbf{N}\| x_4^{m-1}} - \frac{m \hat{V}_{y_4}}{\mu x_4^{m+1}}. \quad (7.12)$$

El segundo paso consiste en derivar esta última expresión respecto de  $f$ :

$$\begin{aligned} \sigma'' &= - \frac{1}{m \mu \|\mathbf{N}\|} \left( \frac{Y_4}{x_4^{m-1}} \right)' - \frac{Y_4}{m \mu x_4^{m-1}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \right)' - \left( \frac{m \hat{V}_{y_4}}{\mu x_4^{m+1}} \right)' \\ &= - \frac{(x_4 [y_4' - \Phi_4'] + (1-m) Y_4 x_4')}{m \mu \|\mathbf{N}\| x_4^m} + \frac{Y_4}{m \mu x_4^{m-1}} \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^3} - \left( \frac{m \hat{V}_{y_4}}{\mu x_4^{m+1}} \right)'. \end{aligned}$$

Después de unos cálculos análogos a los realizados en el caso no perturbado se llega a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned} \sigma'' &= -\sigma - \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} \sigma' + \frac{\alpha^2}{4m^2 \|\mathbf{N}\|^2} + \frac{1}{m \mu x_4^{m-1} \|\mathbf{N}\|} \hat{V}_{x_4} - \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \hat{V}^* \\ &\quad + \frac{\sigma}{m \|\mathbf{N}\|} \left[ x_4 \left( \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 | \hat{V}_{\mathbf{y}} \right) + x_4 \Phi_{44} \hat{V}_{y_4} + (m-1) Y_4 \hat{V}_{y_4} \right], \end{aligned} \quad (7.13)$$

que como era de esperar describe un oscilador perturbado, y donde

$$\hat{V}^* := \left( \frac{\alpha^2 x_4^{m-1}}{4m \mu \|\mathbf{x}\|^2} \frac{\partial V}{\partial y_4} \right)' = \left( \frac{m}{\mu \gamma^2 x_4^{m+1}} \frac{\partial V}{\partial y_4} \right)'.$$

CAPÍTULO 7. FAMILIA BIPARÁMETRICA Y POTENCIALES  
PERTURBADORES

---

Finalmente se ha obtenido un sistema de cuatro osciladores perturbados (7.9, 7.13) y tres ecuaciones diferenciales escalares de primer orden (7.8) que corresponden a  $\mathbf{N}'$ , y que son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}'' &= -\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} (\mathbf{x}' - \hat{V}_y) + \frac{\mathbf{N}' \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{\mathbf{N} \times \hat{V}_y}{\|\mathbf{N}\|} + (\hat{V}_y)', \\
 \sigma'' &= -\sigma - \frac{(\mathbf{N} | \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} \sigma' + \frac{\alpha^2}{4m^2 \|\mathbf{N}\|^2} + \frac{1}{m\mu x_4^{m-1} \|\mathbf{N}\|} \hat{V}_{x_4} - \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \dot{V} \\
 &\quad + \frac{\sigma}{m \|\mathbf{N}\|} \left[ x_4 (\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 | \hat{V}_y) + x_4 \Phi_{44} \hat{V}_{y_4} + (m-1) Y_4 \hat{V}_{y_4} \right], \\
 \mathbf{N}' &= \hat{V}_y \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_x - \hat{V}_y \times \Phi - \mathbf{x} \times \mathcal{J}_\Phi \hat{V}_y - \hat{V}_{y_4} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

### 7.2.2. Segunda variante

Según lo comentado anteriormente, se modifica el cambio de la variable independiente, y se aplica a las ecuaciones del movimiento. En esta ocasión será

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{2m \|\mathbf{x}\|}{\alpha x_4^m} &= \frac{2m \|\mathbf{x}\|^2}{\alpha r}, \\
 dt &= \frac{1}{\gamma^2} df &= \frac{\alpha^2}{4m^2} \frac{r^2}{\|\mathbf{x}\|^4} df &= \frac{\alpha^2}{4m^2} \frac{x_4^{2m}}{\|\mathbf{x}\|^2} df.
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Se realizan los cálculos como en la variante anterior. Las ecuaciones del

movimiento con el nuevo tiempo ficticio  $f$  son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \hat{V}_{\mathbf{y}} \\
 &+ \frac{nb}{m \|\mathbf{x}\|^2} \left( \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \frac{x_4 Y_4}{2m} \mathbf{x} \right) + \frac{n^2 b^2}{4m^2 \|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{Y}, \\
 x_4' &= \frac{x_4^2 Y_4}{m^2} + \hat{V}_{y_4} + \frac{nb x_4}{2m^2 \|\mathbf{x}\|^2} (\mathbf{x} \mid \mathbf{Y}), \\
 \mathbf{y}' &= \mathbf{N} \times \mathbf{Y} + \frac{x_4^2 Y_4}{m^2} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 + \mathcal{J}_{\Phi}(\mathbf{N} \times \mathbf{x}) - \frac{\Omega_1}{\gamma^2} \mathbf{x} - \hat{V}_{\mathbf{x}} \\
 &- \frac{nb}{\gamma^2} \Omega_2, \\
 y_4' &= \frac{m-1}{m^2} x_4 Y_4^2 + m \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{x_4} + \frac{x_4^2 Y_4 \Phi_{44}}{m^2} + (\mathbf{N} \mid \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4) \\
 &- \frac{\mu \alpha^2 x_4^{m-1}}{4m \|\mathbf{x}\|^3} - \hat{V}_{x_4} - \frac{nb \Omega_3}{\gamma^2},
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

donde  $(\ )' \equiv d/df$  y

$$\begin{aligned}
 \hat{V}_{\mathbf{x}} &:= \frac{1}{\gamma^2} \nabla_{\mathbf{x}} V, & \hat{V}_{x_4} &:= \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x_4}, \\
 \hat{V}_{\mathbf{y}} &:= \frac{1}{\gamma^2} \nabla_{\mathbf{y}} V, & \hat{V}_{y_4} &:= \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial y_4}.
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

Se comprueba que el resultado para  $\mathbf{N}'$  es idéntico al que se ha obtenido en (7.8):

$$\mathbf{N}' = \hat{V}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_{\mathbf{x}} - \hat{V}_{\mathbf{y}} \times \Phi - \mathbf{x} \times \mathcal{J}_{\Phi} \hat{V}_{\mathbf{y}} - \hat{V}_{y_4} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4.$$

La derivada segunda de  $\mathbf{x}$  se obtiene ya de forma inmediata, y es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}'' &= (\mathbf{N} \times \mathbf{x})' + (\hat{V}_{\mathbf{y}})' \\
 &= -\|\mathbf{N}\|^2 \mathbf{x} + \mathbf{N}' \times \mathbf{x} + \mathbf{N} \times \hat{V}_{\mathbf{y}} + (\hat{V}_{\mathbf{y}})'.
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Se introduce como en los casos anteriores una nueva variable dependiente escalar  $\sigma$ , que está definida igual que en (7.10). La derivada primera de esta

nueva variable es

$$\sigma' = \left( \frac{1}{\mu x_4^m} \right)' \quad (7.19)$$

$$= -\frac{Y_4}{m\mu x_4^{m-1}} - \frac{m\hat{V}_{y_4}}{\mu x_4^{m+1}}, \quad (7.20)$$

y la segunda

$$\begin{aligned} \sigma'' = & -\|\mathbf{N}\|^2 \sigma + \frac{\alpha^2}{4m^2} + \frac{1}{m\mu x_4^{m-1}} \hat{V}_{x_4} - \hat{V} \\ & + \frac{\sigma}{m} \left[ x_4 \left( \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 \mid \hat{V}_{\mathbf{y}} \right) + x_4 \Phi_{44} \hat{V}_{y_4} + (m-1) Y_4 \hat{V}_{y_4} \right], \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde

$$\hat{V} := \left( \frac{\alpha^2 x_4^{m-1}}{4m\mu \|\mathbf{x}\|^2} \frac{\partial V}{\partial y_4} \right)' = \left( \frac{m}{\mu \gamma^2 x_4^{m+1}} \frac{\partial V}{\partial y_4} \right)' = \left( \frac{m}{\mu x_4^{m+1}} \hat{V}_{y_4} \right)'.$$

## 7.3. Conclusiones

### 7.3.1. Primera Variante

Restringiendo a algunos casos concretos la transformación biparamétrica (6.13), se puede apreciar que se simplifican las ecuaciones diferenciales (7.14).

Eligiendo  $\varphi \equiv 0$ , se simplifica especialmente la ecuación diferencial vectorial de la variable  $\mathbf{N}$ , y el sistema resultante es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' = & -\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{N} \mid \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} (\mathbf{x}' - \hat{V}_{\mathbf{y}}) + \frac{\mathbf{N}' \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{\mathbf{N} \times \hat{V}_{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{N}\|} + (\hat{V}_{\mathbf{y}})', \\ \sigma'' = & -\sigma - \frac{(\mathbf{N} \mid \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} \sigma' + \frac{\alpha^2}{4m^2 \|\mathbf{N}\|^2} + \frac{1}{m\mu x_4^{m-1} \|\mathbf{N}\|} \hat{V}_{x_4} - \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \hat{V} \\ & + \frac{\sigma}{m\|\mathbf{N}\|} \left[ (m-1) y_4 \hat{V}_{y_4} \right], \\ \mathbf{N}' = & \hat{V}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Si además al caso anterior se añade la elección  $m = 1$ , el sistema se reduce a

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= -\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{N} \mid \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} (\mathbf{x}' - \hat{V}_y) + \frac{\mathbf{N}' \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{N}\|} + \frac{\mathbf{N} \times \hat{V}_y}{\|\mathbf{N}\|} + (\hat{V}_y)' , \\ \sigma'' &= -\sigma - \frac{(\mathbf{N} \mid \mathbf{N}')}{\|\mathbf{N}\|^2} \sigma' + \frac{1}{\|\mathbf{N}\|^2} + \frac{1}{\mu \|\mathbf{N}\|} \hat{V}_{x_4} - \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \hat{V}^* , \\ \mathbf{N}' &= \hat{V}_y \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_x .\end{aligned}\quad (7.23)$$

### 7.3.2. Segunda Variante

Las fórmulas obtenidas en el caso de la segunda variante son formalmente algo más sencillas, pues no se requiere derivar la expresión  $1/\|\mathbf{N}\|$  respecto del tiempo ficticio, pero en cambio la frecuencia ya no es constante, sino que varía con  $\|\mathbf{N}\|$ .

Para  $\varphi \equiv 0$  tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= -\|\mathbf{N}\|^2 \mathbf{x} + \mathbf{N}' \times \mathbf{x} + \mathbf{N} \times \hat{V}_y + (\hat{V}_y)' , \\ \sigma'' &= -\|\mathbf{N}\|^2 \sigma + \frac{\alpha^2}{4m^2} + \frac{1}{m\mu x_4^{m-1}} \hat{V}_{x_4} - \hat{V}^* + \frac{\sigma}{m} [(m-1) y_4 \hat{V}_{y_4}] , \\ \mathbf{N}' &= \hat{V}_y \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_x ,\end{aligned}\quad (7.24)$$

y para  $m = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= -\|\mathbf{N}\|^2 \mathbf{x} + \mathbf{N}' \times \mathbf{x} + \mathbf{N} \times \hat{V}_y + (\hat{V}_y)' , \\ \sigma'' &= -\|\mathbf{N}\|^2 \sigma + 1 + \frac{1}{\mu} \hat{V}_{x_4} - \hat{V}^* , \\ \mathbf{N}' &= \hat{V}_y \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_x .\end{aligned}\quad (7.25)$$

De estos resultados se deduce que el vector  $\mathbf{N}$  es constante si se verifica que

$$\hat{V}_y \times \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \hat{V}_x = \mathbf{0} .\quad (7.26)$$

Esta expresión describe tres ecuaciones en derivadas parciales, que la mayoría de las perturbaciones no satisfacen.

Si el potencial  $U$  depende sólo de las coordenadas de posición,

$$\begin{aligned}V &:= V(\mathbf{x}, x_4) \\ &\equiv U(\Psi(\mathbf{x}, x_4)) ,\end{aligned}$$

CAPÍTULO 7. FAMILIA BIPARÁMETRICA Y POTENCIALES  
PERTURBADORES

---

y además  $m = 1$  y  $\varphi \equiv 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= -\|\mathbf{N}\|^2 \mathbf{x} - \left( \mathbf{x} \mid \hat{V}_{\mathbf{x}} \right) \mathbf{x} + \hat{V}_{\mathbf{x}} , \\ \sigma'' &= -\|\mathbf{N}\|^2 \sigma + 1 + \frac{1}{\mu} \hat{V}_{x_4} , \\ \mathbf{N}' &= -\mathbf{x} \times \hat{V}_{\mathbf{x}} . \end{aligned} \tag{7.27}$$

Podemos reencontrar estas ecuaciones en *Aparicio y Floría* (2000) [9], donde se consideran dos transformaciones focales (**BF** y **D**) aplicadas a un potencial de perturbación polinómico en las componentes de las coordenadas.

Otra conclusión es que los resultados de todos estos casos no dependen del parámetro  $n$ , como se puede comprobar.

## Linealización exacta de intermediarios

En este Capítulo se considerará la aplicación de algunos conjuntos de variables canónicas de tipo focal para la linealización exacta de ciertos intermediarios radiales, es decir, la obtención del sistema de osciladores acoplados al que es posible reducir esa clase de sistemas keplerianos perturbados en los casos cuya dependencia funcional es del tipo de los hamiltonianos intermediarios introducidos por Deprit y Alfried y Coffey.

De entre la diversidad de posibles combinaciones ente conjuntos de variables focales y hamiltonianos, nos limitaremos a presentar una pequeña selección de casos.

### 8.1. Intermediario de Deprit en variables $\mathbf{D}$

Como ya se ha mencionado anteriormente, la transformación  $\mathbf{D}$  se puede hallar en *Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44, § 4.3], o también en esta Memoria en la Subsección 6.6.2, en la que se dan las notaciones usadas de aquí en adelante.

Sean  $(\mathbf{x}, x_4, \mathbf{y}, y_4) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$  las variables canónicas

---

CAPÍTULO 8. LINEALIZACIÓN EXACTA DE INTERMEDIARIOS

---

focales. La transformación  $\mathbf{D}$  se define como

$$\mathbf{q} = x_4 \mathbf{x} , \quad (8.1a)$$

$$q_4 = \frac{x_4^2}{2} (1 - \|\mathbf{x}\|^2) , \quad (8.1b)$$

$$\mathbf{p} = y_4 \mathbf{x} + \frac{1}{x_4} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} + \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{x_4} \mathbf{y} , \quad (8.1c)$$

$$p_4 = \frac{x_4 y_4 - (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})}{x_4^2} . \quad (8.1d)$$

Según el Teorema de la Sección 4.4, y como también se comprueba en la Sección 6.2, este conjunto de variables redundantes posee dos ligaduras que responden a las condiciones  $q_4 = 0$  y  $p_4 = 0$ .

Sea  $\mathbf{Q}$  el vector del momento angular y  $N$  su componente polar; se establecen las siguientes relaciones entre las variables cartesianas y las focales:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} , \quad (8.2a)$$

$$N = q_1 p_2 - q_2 p_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 , \quad (8.2b)$$

$$p_\theta^2 = \|\mathbf{q} \times \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = Q^2 , \quad (8.2c)$$

o también

$$Q^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})^2 . \quad (8.2d)$$

La relación (2.5) es ahora

$$\cos I = N/Q . \quad (8.2e)$$

El hamiltoniano  $\mathcal{H}$  (véase (5.1)–(5.3) con  $j=2$ ; o también (A.229) del Apéndice A) en las nuevas variables, usando las relaciones (8.2) y la expresión (6.56), se transforma en el hamiltoniano homogéneo

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \left( y_4^2 + \frac{Q^2}{x_4^2} \right) \frac{\mu}{x_4 \|\mathbf{x}\|} + \frac{(1 - \|\mathbf{x}\|^2)^2}{2x_4^2} \|\mathbf{y}\|^2 \\ & + (1 - \|\mathbf{x}\|^2) \left( \frac{y_4}{x_4} (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) + \frac{Q^2}{x_4^2} \right) + V(r; Q^2, N) + p_0 , \end{aligned} \quad (8.3)$$

donde  $V$  es un potencial de Deprit; para simplificar se ha omitido el parámetro  $\varepsilon$  en las expresión de  $V$ .

A continuación se realiza el cambio de la variable independiente  $t \rightarrow f$  dado por una relación diferencial

$$dt = g(\mathbf{x}, x_4) df = \frac{x_4^2 \|\mathbf{x}\|^2}{Q} df, \quad (8.4)$$

que es de tipo Sundman con la función de reparametrización proporcional a  $r^2$ . El nuevo tiempo ficticio es  $f$ , que responde al tipo de una anomalía verdadera generalizada. Entonces el correspondiente hamiltoniano con esta nueva variable independiente es  $\tilde{\mathcal{K}} = g\mathcal{K}$ , y las ecuaciones canónicas de movimiento respecto a  $f$  son

$$\frac{d\mathbf{x}}{df} = \frac{a}{Q} (\mathbf{Q} \times \mathbf{x}) + k\mathcal{P}\mathbf{x}, \quad (8.5a)$$

$$\frac{dx_4}{df} = \frac{x_4^2 y_4}{Q}, \quad (8.5b)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{df} = \frac{a}{Q} (\mathbf{Q} \times \mathbf{y}) - A\mathbf{x} + k\mathcal{P}\mathbf{y}, \quad (8.5c)$$

$$\frac{dy_4}{df} = \frac{1}{Q} \left( \frac{Q^2}{x_4} - \mu + \frac{2}{x_4} V \right), \quad (8.5d)$$

donde se han introducido las siguientes abreviaturas:

$$a = \left( 1 + 2 \frac{\partial V}{\partial Q^2} \right), \quad (8.6a)$$

$$k = \frac{1}{Q} \frac{\partial V}{\partial N}, \quad (8.6b)$$

$$A = \frac{1}{Q} \left( 2x_4 y_4 (\mathbf{x} | \mathbf{y}) - (\mathbf{x} | \mathbf{y})^2 - 2\|\mathbf{y}\|^2 \frac{\partial V}{\partial Q^2} + 2V - x_4^2 y_4^2 - x_4 \mu \right), \quad (8.6c)$$

y la matriz constante (ver (5.13))

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.6d)$$

## CAPÍTULO 8. LINEALIZACIÓN EXACTA DE INTERMEDIARIOS

---

Se define, como en la ecuación (5.17), la matriz  $E_2 = -\mathcal{P}^2$ , que es diagonal.

El siguiente paso es el cambio de la variable dependiente  $x_4$ , que está definido por

$$\sigma = \frac{Q^2}{\mu x_4} . \quad (8.7)$$

Si la matriz  $T$  es una matriz real, antisimétrica y de orden 3, entonces para dos vectores cualesquiera  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  se tiene que

$$T(\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = (T\mathbf{z}) \times \mathbf{w} + \mathbf{z} \times (T\mathbf{w}) . \quad (8.8)$$

Antes de empezar a calcular las derivadas segundas de las variables de tipo posición, a partir de las ecuaciones (8.5a) para el vector  $\mathbf{x}$  y (8.7) para  $\sigma$ , se desarrollará la ecuación que describe la variación del vector del momento angular:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &= \mathbf{x}' \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}' \\ &= k [(\mathcal{P}\mathbf{x}) \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times (\mathcal{P}\mathbf{y})] \\ &= k\mathcal{P}\mathbf{Q} \quad (\mathcal{P} \text{ es antisimétrica}) , \end{aligned} \quad (8.9)$$

donde  $' = \frac{d}{df}$ . Como ya se ha visto en el Capítulo 5, Ecuaciones (5.14) y (5.19e), esto implica, en primer lugar, que las dos primeras componentes de la ecuación anterior representan un oscilador armónico ( $k$  es una constante); y en segundo, que la componente polar  $N$  del vector del momento angular es constante; por último, también es fácil comprobar que el norma  $\|\mathbf{Q}\|$  es constante. Resumiendo

$$N' = 0 \quad \implies \quad N \equiv \text{cte.} ,$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\|' &= \frac{1}{Q} (\mathbf{Q} \mid \mathbf{Q}') \\ &= 0 \quad \implies \quad Q \equiv \text{cte.} , \end{aligned}$$

como, por otra parte, ya era de esperar a la vista del carácter cíclico de los ángulos  $\theta$  y  $\nu$  en los intermediarios de tipo de Deprit.

Para los siguientes cálculos, es de gran utilidad multiplicar a izquierdas la ecuación (8.5a) por la matriz  $\mathcal{P}$  y despejar el primer término del segundo

miembro de la ecuación obtenida, resultando

$$\frac{a}{Q} \mathcal{P}(\mathbf{Q} \times \mathbf{x}) = \mathcal{P}\mathbf{x}' - k\mathcal{P}^2\mathbf{x}. \quad (8.10)$$

Entonces, la derivada segunda de  $\mathbf{x}$ , obtenida a partir de la ecuación (8.5a), es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= \frac{a}{Q} [\mathbf{Q}' \times \mathbf{x} + \mathbf{Q} \times \mathbf{x}'] + k\mathcal{P}\mathbf{x}' \\ &= \frac{a}{Q} \left[ \frac{a}{Q} \mathbf{Q} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{x}) + k \underbrace{\{(\mathcal{P}\mathbf{Q}) \times \mathbf{x} + \mathbf{Q} \times (\mathcal{P}\mathbf{x})\}}_{= \mathcal{P}(\mathbf{Q} \times \mathbf{x})} \right] + k\mathcal{P}\mathbf{x}' \quad (8.11) \\ &= -a^2\mathbf{x} + k^2 E_2 \mathbf{x} + 2\mathcal{P}\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

Finalmente se obtienen las ecuaciones de osciladores lineales y acoplados

$$x_1'' + \left[ \left( 1 + 2 \frac{\partial V}{\partial Q^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial N} \right)^2 \right] x_1 = -2 \frac{\partial V}{\partial N} x_2', \quad (8.12a)$$

$$x_2'' + \left[ \left( 1 + 2 \frac{\partial V}{\partial Q^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial N} \right)^2 \right] x_2 = +2 \frac{\partial V}{\partial N} x_1', \quad (8.12b)$$

$$x_3'' + \left( 1 + 2 \frac{\partial V}{\partial Q^2} \right)^2 x_3 = 0, \quad (8.12c)$$

$$x_4'' + \left( 1 + \frac{2}{Q^2} V \right) x_4 = 1. \quad (8.12d)$$

Comparando este resultado con las ecuaciones (5.19) del Capítulo 5, se observa que describen el mismo sistema de osciladores y que sólo difieren en la constante  $Q^2$  debido a los cambios de la variable independiente y de la variable dependiente  $x_4$ .

## 8.2. Intermediario de Alfriend–Coffey en las variables DEF

En esta Sección se aplicará la transformación **DEF** (*Deprit, Elife y Ferrer* (1994) [44], §4.1) a la función hamiltoniana del problema de Kepler perturbado por el potencial propuesto por *Alfriend y Coffey* (1984) [2]. En el artículo ya mencionado (*Deprit, Elife y Ferrer* (1994) [44]), se ha demostrado que este cambio de variables linealiza exactamente las ecuaciones de movimiento asociadas al problema de Kepler puro. En esta Sección se seguirá la secuencia de pasos de estos autores, aunque con la contribución del potencial perturbador, para lo cual se introducirán notaciones adecuadas para mantener la analogía con el caso no perturbado.

Recordemos que en el espacio de fases ampliado de las variables canónicas cartesianas el intermediario de Alfriend y Coffey obedece a una expresión general del tipo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\mu}{r} + \frac{1}{r^2} V_2(p_\theta^2, N, p_0; \varepsilon) + p_0,$$

donde las expresiones en esta fórmula, desarrolladas en variables cartesianas, son, una vez más,

$$r = \|\mathbf{q}\|, \quad p_\theta^2 = \|\mathbf{q} \times \mathbf{p}\|^2 = \Theta^2, \quad p_\nu = q_1 p_2 - q_2 p_1 = N, \quad (8.13)$$

con la notación habitual del producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ . Nótese que  $\Theta$  es la norma del vector momento angular.

El intermediario de Alfriend y Coffey se ha definido en la Sección 2.4 en la expresión (2.8). En esta Sección, como en la siguiente, se requiere de las

derivadas parciales de este potencial, que son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial \Theta^2} &= \varepsilon \frac{\mu^2 R^2}{4 p_\theta^4} [1 - 6c^2] \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{3\mu^4 R^4}{128 p_\theta^8} [115c^4 - 440c^2 + 157] \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{3\mu^2 R^4}{32 p_\theta^6} [10c^4 - 27c^2 + 5] p_0, \end{aligned} \quad (8.14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial p_\nu} &= \varepsilon \frac{3\mu^2 R^2 p_\nu}{2 p_\theta^4} + \varepsilon^2 \frac{3\mu^4 R^4}{32 p_\theta^7} [23c^3 - 55c] \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{3\mu^2 R^4}{16 p_\theta^5} [5c^3 - 9c] p_0, \end{aligned} \quad (8.14b)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial p_0} = - \varepsilon^2 \frac{3\mu^2 R^4}{64 p_\theta^4} [5c^4 - 18c^2 + 5]. \quad (8.14c)$$

Para pequeños valores de la excentricidad, como ya se comentó en la Sección 2.4, basta con considerar el potencial descrito en la expresión (2.9). En este caso, las derivadas parciales del potencial están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial \Theta^2} &= \varepsilon \frac{\mu^2 R^2}{4 p_\theta^4} [1 - 6c^2] \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{3\mu^4 R^4}{64 p_\theta^8} [45c^4 - 184c^2 + 71], \end{aligned} \quad (8.15a)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial p_\nu} = \varepsilon \frac{3\mu^2 R^2 p_\nu}{2 p_\theta^4} + \varepsilon^2 \frac{3\mu^4 R^4}{16 p_\theta^7} [9c^3 - 23c]. \quad (8.15b)$$

Como se puede apreciar sólo hemos calculado dos derivadas parciales, pues la tercera respecto del momento conjugado  $p_0$  es igual a cero.

## CAPÍTULO 8. LINEALIZACIÓN EXACTA DE INTERMEDIARIOS

---

La *transformación DEF* está definida por las ecuaciones

$$\mathbf{q} = x_4 \mathbf{x} , \quad x_4 \in \mathbb{R}_+ , \quad (8.16a)$$

$$\mathbf{p} = y_4 \mathbf{x} + \frac{1}{x_4} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} , \quad (8.16b)$$

$$r = \|\mathbf{q}\| = x_4 \|\mathbf{x}\| . \quad (8.16c)$$

Este cambio de variables dependientes puede ser fácilmente extendido a un espacio de fases ampliado. Antes de seguir con la aplicación de este cambio de variables es oportuno reescribir algunas de las notaciones anteriores e introducir algunas relaciones entre las diferentes variables que involucran al momento angular,

$$p_\theta^2 = \|\mathbf{q} \times \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{Q}\|^2 = \Theta^2 , \quad (8.17a)$$

$$p_\nu = N = q_1 p_2 - q_2 p_1 = \|\mathbf{x}\|^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = \|\mathbf{x}\|^2 Q_3 , \quad (8.17b)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} , \quad (8.17c)$$

$$Q_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 , \quad (8.17d)$$

con lo que el hamiltoniano del intermediario radial formulado en las variables **DEF** es

$$\mathcal{K} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2} \left( y_4^2 + \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{x_4^2} \right) - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\| x_4} + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2 x_4^2} V_2 (\Theta^2, N, p_0; \epsilon) + p_0 \equiv 0 .$$

Dejando aparte el par de variables canónicas  $(t, p_0)$ , las ecuaciones de

movimiento generadas por  $\mathcal{K}$  son:

$$\frac{dx_4}{dt} = \|\mathbf{x}\|^2 y_4,$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{x_4^2} a(\mathbf{Q} \times \mathbf{y}) + \frac{1}{x_4^2} \frac{\partial V_2}{\partial N} \tilde{\mathbf{x}},$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{Q}\|^2}{x_4^3} \left( 1 + \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^4} \frac{V_2}{\|\mathbf{Q}\|^2} \right) - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\| x_4^2},$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{x_4^2} a(\mathbf{Q} \times \mathbf{y}) - \frac{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{Q}\|}{x_4^2} (A + B) \mathbf{x} + \frac{1}{x_4^2} \frac{\partial V_2}{\partial N} \tilde{\mathbf{y}},$$

donde ahora el significado de las notaciones y abreviaturas es

$$a = \left( 1 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial \Theta^2} \right), \quad (8.18)$$

$$A = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{Q}\|} \left( 2\mathcal{K} + \frac{3\mu}{\|\mathbf{x}\| x_4} - \frac{4}{\|\mathbf{x}\|^2 x_4^2} V_2 \right),$$

$$B = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{Q}\|} \left( 4\|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{Q}\|^2 \frac{\partial V_2}{\partial \Theta^2} + 2Q_3 \frac{\partial V_2}{\partial N} \right),$$

y se ha aplicado la definición (5.14)

$$\tilde{\mathbf{x}} = [-x_2, x_1, 0]^t, \quad \tilde{\mathbf{y}} = [-y_2, y_1, 0]^t.$$

El siguiente paso consiste en realizar el cambio de la variable independiente, es decir, del tiempo físico  $t$  a un tiempo ficticio  $f$ , que es del tipo de la anomalía verdadera. Esta transformación está dada por la relación diferencial

$$t \longrightarrow f : \quad dt = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{Q}\|} df.$$

Con este tiempo ficticio como variable independiente, las ecuaciones canóni-

cas se transforman en:

$$\frac{dx_4}{df} = \frac{x_4^2 y_4}{\|\mathbf{Q}\|},$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{df} = \frac{a}{\|\mathbf{Q}\|} (\mathbf{Q} \times \mathbf{x}) + k\tilde{\mathbf{x}},$$

$$\frac{dy_4}{df} = \frac{1}{\|\mathbf{Q}\|} \left( \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{x_4} - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\|^3} + \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^4 x_4} V_2 \right),$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{df} = \frac{a}{\|\mathbf{Q}\|} (\mathbf{Q} \times \mathbf{y}) - (A + B)\mathbf{x} + k\tilde{\mathbf{y}},$$

donde en esta ocasión

$$k = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{Q}\|} \frac{\partial V_2}{\partial N}. \quad (8.19)$$

Con la ayuda de las siguientes notaciones para las dos matrices cuadradas de orden 3 (véase 5.17),

$$E_2 = \text{diag}(1, 1, 0), \quad I_3 = \text{diag}(1, 1, 1), \quad (8.20)$$

y la nueva variable adimensional  $\sigma$  para reemplazar a  $x_4$ ,

$$\sigma = \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{\mu x_4},$$

las ecuaciones del movimiento para las variables dependientes  $(\sigma, \mathbf{x})$  con respecto al nuevo pseudo-tiempo son

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{df^2} = - (a^2 I_3 - k^2 E_2) \mathbf{x} + 2k \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{df},$$

$$\frac{d^2\sigma}{df^2} = - \left( 1 + \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{Q}\|^2} V_2 \right) \sigma + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

Estas ecuaciones de segundo orden son lineales con coeficientes constantes, por lo que están libres de singularidades, y representan un conjunto de cuatro

osciladores con frecuencias que incluyen los efectos debidos al potencial del intermediario radial de *Alfriend y Coffey* (1984) [2]. Hay que tener en cuenta que la presencia de la componente vertical  $p_\nu = N$  del vector del momento angular en el potencial de la perturbación genera un acoplamiento entre las variables  $x_1$  y  $x_2$ , como reflejan las ecuaciones anteriores.

### 8.3. Intermediario de Alfriend–Coffey en las variables BF

Las siguientes consideraciones están inspiradas en el tratamiento de un cierto sistema kepleriano perturbado llevado a cabo por *Ferrándiz y Fernández–Ferreirós* (1991) [49]. En particular, ellos consiguieron reducir las ecuaciones del movimiento de dicho sistema a unos osciladores armónicos partiendo de potenciales del tipo descrito por *Deprit* (1981) [43, p. 138]. Véase también, en esta Tesis, las fórmulas (5.1)–(5.3), para  $j = 2$ , y la (A.229) de la Sección A.10 del Apéndice sobre el problema de dos cuerpos.

La transformación **BF** está descrita en el artículo de *Ferrándiz* (1988) [47, §2] (ver también *Ferrándiz y Fernández–Ferreirós* (1991) [49], p. 4 y *Deprit, Elise y Ferrer* (1994) [44] §§ 4.4). Asimismo, en la Subsección 6.6.1 de esta Tesis. Pero en esta ocasión se va a trabajar en el espacio fásico ampliado, tomando  $x_0 = t$  como una coordenada adicional cuyo momento conjugado será  $p_0$ . Dejando aparte este par de variables  $(t, p_0)$ , se considera el cambio de variables canónicas

$$q_i = \frac{x_i}{x_4}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$p_i = x_4 y_i - \frac{x_i x_4}{\|\mathbf{x}\|^2} [(\mathbf{x} | \mathbf{y}) + x_4 y_4], \quad (i = 1, 2, 3).$$

Como en la Sección anterior, se presentan a continuación ciertas relaciones dinámicas de interés y notaciones en variables **BF**:

$$\Theta^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} | \mathbf{y})^2 = p_\theta^2, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1 = p_\nu,$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = [-x_2, x_1, 0]^t, \quad \tilde{\mathbf{y}} = [-y_2, y_1, 0]^t.$$

Si ahora se lleva a cabo el cambio de la variable independiente  $t \rightarrow f$ , para introducir el tiempo ficticio proporcional a la anomalía verdadera, que se

---

CAPÍTULO 8. LINEALIZACIÓN EXACTA DE INTERMEDIARIOS

---

describe a través de la relación diferencial

$$dt = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{x_4^2} df = r^2 df,$$

el hamiltoniano que se obtiene después de aplicar la transformación **BF** de variables dependientes y la del tiempo es

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \Theta^2 + \frac{1}{2} x_4^2 y_4^2 - \mu \frac{\|\mathbf{x}\|}{x_4} + V_2 + p_0 \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{x_4^2} \equiv 0.$$

En notación vectorial, las ecuaciones canónicas de movimiento deducidas de  $\mathcal{K}$  responden a las siguientes expresiones compactas

$$\mathbf{x}' = a\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial V_2}{\partial N} \tilde{\mathbf{x}},$$

$$x_4' = x_4^2 y_4,$$

$$\mathbf{y}' = -a\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mu}{x_4} \mathbf{x} - 2 \frac{p_0}{x_4^2} \mathbf{x} + \frac{\partial V_2}{\partial N} \tilde{\mathbf{y}},$$

$$y_4' = -x_4 y_4^2 - \frac{\mu}{x_4^2} + 2 \frac{p_0}{x_4^3},$$

donde  $a$  ha sido definida en (8.18).

Si se manipulan estas ecuaciones de acuerdo con el procedimiento descrito por *Ferrández y Fernández-Ferreirós* (1991) [49, §2 y §3], así como por *Aparicio y Floría* (1996) [3] y en las secciones anteriores, el resultado es

$$\mathbf{x}'' = - \left( a^2 \Theta^2 I_3 - \left( \frac{\partial V_2}{\partial N} \right)^2 E_2 \right) \mathbf{x} + 2 \frac{\partial V_2}{\partial N} \tilde{\mathbf{x}}',$$

$$x_4'' = - (\Theta^2 + 2V_2) x_4 + \mu,$$

donde las matrices  $I_3$  y  $E_2$  son las mismas que se han definido en la Sección anterior (véase (8.20)).

Como en el caso anterior, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, que responden a un oscilador lineal en cuatro dimensiones; sin olvidar que las dos primeras

componentes están acopladas. De nuevo, la perturbación del intermediario ha sido incorporada en la frecuencia de los osciladores. Aunque es evidente, al utilizar en este caso un cambio de la variable independiente diferente al usado con la transformación **DEF**, se ve que las frecuencias no son exactamente las mismas. Pero, aún así, las ecuaciones son regulares como en el caso de las variables **DEF**.

## 8.4. Conclusiones

Se ha estudiado la regularización usando el método de linealización de las ecuaciones de movimiento deducidas de un hamiltoniano genérico de la familia de intermediario radiales de Deprit (1981), y del intermediario radial de segundo orden propuesto por *Alfriend y Coffey* (1984) para el Problema Principal de la Teoría del Satélites Artificial.

La combinación apropiada de *transformaciones* – de las variables dependientes así como de la variable independiente – con la ayuda de *integrales primeras* y *ligaduras* (geométricas y/o dinámicas) permite regularizar las ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento partiendo del sistema canónico generado por el intermediario.

En este Capítulo se ha verificado el comportamiento analítico respecto a la reducción exacta a osciladores armónicos de ciertas transformaciones (**D**, **DEF** y **BF**), que son capaces de linealizar el problema de Kepler puro, cuando se aplican al potencial correspondiente a los intermediarios radiales considerados.

Concluyendo, este tratamiento regulariza los intermediarios de forma satisfactoria, independientemente de qué variables redundantes **D**, **DEF** o **BF** se utilicen en combinación de la introducción del tiempo ficticio proporcional a la anomalía verdadera.

## CAPÍTULO 8. LINEALIZACIÓN EXACTA DE INTERMEDIARIOS

## Desarrollo del potencial zonal en elementos regulares DEF

### 9.1. Introducción

Como ya se ha comentado en diversas partes de esta Memoria, las cuestiones relativas a la regularización y linealización de las ecuaciones de movimiento que gobiernan la evolución de los sistemas keplerianos han alcanzado gran relevancia en el ámbito de la Mecánica Celeste.

*Sharaf y Saad* (1997) propusieron un desarrollo analítico de la parte zonal del potencial gravitatorio de la Tierra, y lo hicieron por medio de elementos regulares **KS** de Kustaanheimo–Stiefel (1971), poniendo el acento en el estudio de las órbitas de tipo elíptico del problema de dos cuerpos, lo que se refleja en el uso de una variable independiente del tipo de la anomalía excéntrica del movimiento elíptico. El desarrollo de los armónicos zonales en función de esas variables y elementos no conduce a una formulación exacta y en forma cerrada por medio de funciones conocidas y fácilmente manejables, ya que no se obtienen series finitas debido al empleo de la anomalía elegida para representar paramétricamente las cónicas de interés. El tratamiento propuesto por estos autores conduce, de hecho, a un desarrollo en serie infinita (con la consiguiente necesidad de que –de cara a su uso práctico– haya que recurrir a truncarlo en un cierto término), y constituye un ejemplo de la aplicación de un método de tipo central (según la terminología acuñada por *Burdet* (1969)) para el análisis de un sistema kepleriano perturbado.

## CAPÍTULO 9. DESARROLLO DEL POTENCIAL ZONAL EN ELEMENTOS REGULARES DEF

---

Las técnicas de linealización que ofrece el método focal canónico (cf. *Deprit, Elife y Ferrer* (1994); véase también el Capítulo 6 de esta Memoria, y más en concreto la Sección 6.6) se basan en la construcción adecuada de extensiones (canónicas o débilmente canónicas) para la transformación puntual correspondiente a la descomposición proyectiva del vector de posición, para –a partir de coordenadas cartesianas– pasar a variables focales redundantes (*Burdet* (1969) [28], §2). Según los resultados obtenidos en nuestro Capítulo 6, las ecuaciones canónicas del movimiento deducidas de un hamiltoniano kepleriano –expresado en cualquier conjunto de variables canónicas focales– pueden ser convertidas en un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (respecto de una variable independiente que es del tipo de la anomalía verdadera) asociadas a un conjunto de cuatro osciladores armónicos no acoplados cuyo centro de oscilación es precisamente el foco de la cónica kepleriana ocupado por el cuerpo atractor (primario).

En este Capítulo se usará un método de tipo focal (*Burdet* (1969), §2); en concreto, el basado en las variables **DEF** (*Deprit, Elife y Ferrer* (1994), §§4.1; Subsección 6.6.3 de esta Tesis). El problema de dos cuerpos perturbado por el potencial zonal se transformará, por medio de estas variables, en un sistema de ecuaciones de segundo orden casi-lineales. Se introducirán a continuación *elementos* (según la definición de *Kirchgraber y Stiefel* (1978), §1.3; o Apéndice B, § B.3), que en este caso serán elementos focales asociados a las variables **DEF**; dichos elementos pueden ser contemplados como elementos orbitales keplerianos (en el sentido de *Stiefel y Scheifele* (1971), §18) con la variable independiente de tipo anomalía verdadera como variable regularizadora.

El desarrollo que se presentará a continuación es una aplicación de los elementos focales al problema del movimiento orbital perturbado de satélites artificiales de la Tierra. Para cumplir con ese propósito es necesario, en primer lugar, poder representar analíticamente un armónico zonal cualquiera en función de las variables focales.

Al contrario que en el caso de *Sharaf y Saad* (1997) con los elementos **KS** y un tiempo ficticio del tipo de la anomalía excéntrica, por medio de las variables **DEF** se obtiene un desarrollo de los armónicos zonales como una expresión en polinomios trigonométricos (es decir, en forma de series de Fourier finitas) respecto de la variable independiente de tipo anomalía verdadera.

## 9.2. Transformación DEF: Linealización de un tipo de sistema kepleriano perturbado

Siguiendo el proceso descrito en el Capítulo 6, se procede a regularizar el sistema sustituyendo la variable independiente  $t$ , que representa al tiempo físico, por un tiempo ficticio  $f$  proporcional a la anomalía verdadera. Esta transformación es una generalización de la transformación diferencial de tipo de Sundman

$$t \longrightarrow f : \quad dt = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2 Q} df . \quad (9.1)$$

Antes de calcular las ecuaciones de segundo orden se realizará el cambio de la variable escalar  $x_4$  a la variable adimensional  $\sigma$ :

$$x_4 \longrightarrow \sigma : \quad \sigma = \frac{Q^2}{\mu x_4} . \quad (9.2)$$

Un sistema kepleriano perturbado al que se aplica la transformación **DEF** (véase Capítulo 7),

$$\begin{array}{r} \mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + V(\mathbf{q}) \\ \downarrow \text{DEF} \\ \mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + V(\mathbf{x}, x_4) , \end{array} \quad (9.3)$$

conduce a las ecuaciones canónicas de movimiento en las variables focales y en el tiempo ficticio  $f$  dadas por

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{Q} (\mathbf{Q} \times \mathbf{x}) , \quad (9.4a)$$

$$x_4' = \frac{x_4^2 y_4}{Q} , \quad (9.4b)$$

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{Q} (\mathbf{Q} \times \mathbf{y}) - \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^4 Q} \left( 2\mathcal{K}_0 + \frac{3\mu}{\|\mathbf{x}\| x_4} \right) \mathbf{x} - \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2 Q} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} , \quad (9.4c)$$

$$y_4' = \frac{1}{Q} \left( \frac{Q^2}{x_4} - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\|^3} \right) - \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2 Q} \frac{\partial V}{\partial x_4} . \quad (9.4d)$$

CAPÍTULO 9. DESARROLLO DEL POTENCIAL ZONAL EN  
ELEMENTOS REGULARES DEF

---

Calculando la derivada segunda de  $\mathbf{x}$  a partir de la ecuación vectorial (9.4a), y de la variable  $\sigma$  según el cambio de variable (9.2), se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales casi-lineales dado por

$$\mathbf{x}'' + \mathbf{x} = \left[ \frac{\mathbf{Q}'}{Q} - (\mathbf{Q} | \mathbf{Q}') \frac{\mathbf{Q}}{Q^3} \right] \times \mathbf{x}, \quad (9.5a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'' + \sigma = 1 + \frac{2}{Q^2} \left[ \|\mathbf{Q}'\|^2 + (\mathbf{Q} | \mathbf{Q}'') - 3(Q')^2 \right] \sigma \\ + 3 \frac{Q'}{Q} \sigma' - \frac{Q^2}{\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (9.5b)$$

que describen un conjunto de osciladores no lineales forzados. Este sistema se completa con

$$\mathbf{Q}' = \frac{x_4^2}{Q} (\nabla_{\mathbf{x}} V \times \mathbf{x}) = \frac{Q^3}{\mu^2 \sigma^2} (\nabla_{\mathbf{x}} V \times \mathbf{x}), \quad (9.5c)$$

$$Q' = \frac{(\mathbf{Q} | \mathbf{Q}')}{Q}, \quad (9.5d)$$

$$t' = \frac{Q^3}{\mu^2 \sigma^2}. \quad (9.5e)$$

En el caso de la presencia de perturbaciones caracterizadas por el potencial  $V$ , en la Ecuación (9.5c)  $\mathbf{Q}'$  da cuenta de posibles variaciones del momento angular orbital.

### 9.3. Introducción de elementos focales

La solución de las ecuaciones de osciladores armónicos de 4 dimensiones (9.5) generadas por la función hamiltoniana del problema de Kepler puro puede representarse como

$$x_j = \alpha_j \cos f + \beta_j \sin f, \quad j = 1, 2, 3; \quad (9.6a)$$

$$\sigma = \alpha_4 \cos f + \beta_4 \sin f + 1. \quad (9.6b)$$

Los escalares  $\alpha_k, \beta_k$  son constantes de integración de la solución del problema de Kepler no perturbado, que responden a osciladores armónicos. En el caso del problema perturbado estos escalares no suelen ser constantes, y las ecuaciones que dan cuenta de sus variaciones se establecen con el método de la variación de las constantes, como llevan a cabo *Stiefel y Scheifele* (1971)

([94], § 19; véase también *Burdet, Rössler, Stiefel y Waldvogel* (1967) [29], p. 18).

Este proceso requiere añadir las ecuaciones diferenciales de otras variables (por ejemplo la energía o la norma del vector del momento angular) para completar el sistema. Esto se puede deducir por medio de una transformación que *Kirchgraber y Stiefel* (1978) [68, §§ 1.3] denominan “*transformación a elementos*” (véase también Sección B.3 de esta Memoria). Este cambio de variables viene dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi} : \quad \mathbb{R}^8 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho})^t &\longmapsto (\boldsymbol{x}, x_4)^t = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (9.7)$$

donde  $\boldsymbol{\psi}$  es una función  $2\pi$ -periódica en las variables  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\boldsymbol{\theta}$ . En cambio el vector  $\boldsymbol{\rho}$  está compuesto por las amplitudes. Basándose en *Kirchgraber y Stiefel* (1978) [68, §§ 1.3] (o la Definición 7 en la Sección B.3 de nuestro Apéndice B), las variables  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\boldsymbol{\theta}$  se denominan, respectivamente, los ángulos rápidos y los lentos (en el caso no perturbado todas ellas son constantes o varían linealmente). Estas nuevas variables también reciben el nombre de “*elementos del movimiento*”. Para el problema que se está tratando en esta sección, las ecuaciones (9.6) definen los siguientes elementos:  $\phi_1 := f$ , mientras que  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) son las variables de tipo amplitud, y no hay variables lentas.

## 9.4. El desarrollo del potencial zonal

La perturbación gravitatoria que se deduce de la parte zonal del desarrollo multipolar del potencial se presenta en las variables polares esféricas. Describimos este potencial según el Sección § 2.1 y la fórmula (2.3), es decir,

$$V = (\mu/R) \sum_{n \geq 2} J_n (R/r)^{n+1} P_n(\cos \vartheta), \quad (9.8)$$

donde  $\mu$  es el parámetro kepleriano del cuerpo central,  $R$  es el valor medio del radio ecuatorial,  $J_n$  ( $n \geq 2$ ) son los coeficientes adimensionales de los armónicos zonales,  $\vartheta$  es la colatitud del punto en movimiento,  $P_n(z)$  es el polinomio de Legendre de grado  $n$  en la variable  $z \in [-1, 1]$ ,

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} z^{n-2k}, \quad (9.9)$$

CAPÍTULO 9. DESARROLLO DEL POTENCIAL ZONAL EN  
ELEMENTOS REGULARES DEF

---

siendo

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}, \quad (9.10)$$

con  $n \geq 0$ , y

$$(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1), \quad (2m)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m. \quad (9.11)$$

Sea  $p$  el *semilado recto*, y  $e$  la *excentricidad*, entonces se tienen las siguientes igualdades

$$\cos \vartheta = \frac{q_3}{r} \quad (9.12a)$$

$$= x_3 \quad (9.12b)$$

$$= \alpha_3 \cos f + \beta_3 \sin f, \quad (9.12c)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}. \quad (9.12d)$$

El desarrollo de  $V$  en una serie de Fourier en la variable de tipo de la anomalía verdadera  $f$ , con coeficientes que son funciones de los elementos keplerianos  $(p, e, \alpha_k, \beta_k)$ , está dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu}{R} \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{J_n}{2^n} R^{n+1} \frac{(2n-2k-1)!!}{k!(n-2k)!} \frac{q_3^{n-2k}}{r^{2n-2k+1}} \\ &= \frac{\mu}{R} \sum_{n \geq 2} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{J_n}{2^n} \frac{R^{n+1}}{p^{n+1}} \frac{(2n-2k-1)!!}{k!(n-2k)!} \left(\frac{p}{r}\right)^N x_3^M, \end{aligned} \quad (9.13)$$

donde  $M = n - 2k$ ,  $N = n + 1$ ,  $N > M$ .

Con la siguiente abreviatura  $A = \beta_3 \sin f$  se deduce que  $x_3^M = (A + \alpha_3 \cos f)^M$ . Entonces

$$x_3^M = \sum_{j=0}^M \binom{M}{j} A^{M-j} \alpha_3^j \cos^j f, \quad \left(\frac{p}{r}\right)^N = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} e^j \cos^j f, \quad (9.14)$$

⇓

$$\left(\frac{p}{r}\right)^N x_3^M = \sum_{h=0}^{M+N} \left( \sum_{j=0}^h \binom{M}{j} \binom{N}{h-j} \alpha_3^j e^{h-j} A^{M-j} \right) \cos^h f. \quad (9.15)$$

Con el fin de desarrollar la expresión  $A^{M-j} \cos^h f = \beta_3^{M-j} \sin^{M-j} f \cos^h f$ , se usará la fórmula

$$\begin{aligned} \sin^l f \cos^m f &= \frac{(-j)^l}{2^{l+m}} (\exp(jf) - \exp(-jf))^l (\exp(jf) - \exp(-jf))^m \\ &= \frac{(-j)^l}{2^{l+m}} \sum_{c=0}^{l+m} G_c^{(l,m)} \{ \cos(l+m-2c)f + j \sin(l+m-2c)f \}, \end{aligned} \quad (9.16)$$

donde

$$G_c^{(l,m)} = \sum_{i=0}^c (-1)^i \binom{l}{i} \binom{m}{c-i}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (9.17)$$

y las identidades  $\left( \text{con } c = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{l+m}{2} \rfloor \right)$

$$G_c^{(l,m)} = G_{l+m-c}^{(l,m)}, \quad \text{si } l \text{ es par}, \quad (9.18)$$

$$G_c^{(l,m)} = -G_{l+m-c}^{(l,m)}, \quad \text{si } l \text{ es impar}. \quad (9.19)$$

Se introducen también las notaciones

$$S^{(l,m)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{l/2}}{2^{l+m}} G_{(l+m)/2}^{(l,m)} & \text{si } l \text{ y } m \text{ son pares,} \\ 0 & \text{si } l \text{ par y } m \text{ impar,} \end{cases} \quad (9.20)$$

y

$$\Delta^{(l,m)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{l/2}}{2^{l+m-1}} \sum_{c=0}^{\lfloor \frac{l+m-1}{2} \rfloor} G_c^{(l,m)} \cos(l+m-2c)f + S^{(l,m)} & (l \text{ par}), \\ -\frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+m-1}} \sum_{c=0}^{\lfloor \frac{l+m}{2} \rfloor} G_c^{(l,m)} \sin(l+m-2c)f & (l \text{ impar}). \end{cases} \quad (9.21)$$

Por consiguiente uniendo todas estas piezas se llega a

$$\left(\frac{p}{r}\right)^N x_3^M = \sum_{h=0}^{M+N} \sum_{j=0}^h \binom{M}{j} \binom{N}{h-j} \alpha_3^j e^{h-j} \beta_3^{M-j} \Delta^{(M-j,h)}, \quad (9.22)$$

CAPÍTULO 9. DESARROLLO DEL POTENCIAL ZONAL EN  
ELEMENTOS REGULARES DEF

y el potencial zonal  $V$  dado en las ecuaciones (9.8) y (9.13) puede reescribirse como

$$V = \frac{\mu}{R} \sum_{n \geq 2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{J_n}{2^n} \frac{R^{n+1}}{p^{n+1}} \frac{(2n-2k-1)!!}{k!(n-2k)!} \times \sum_{h=0}^{N+M} \sum_{j=0}^h \binom{M}{j} \binom{N}{h-j} \alpha_3^j e^{h-j} \beta_3^{M-j} \Delta^{(M-j,h)}. \quad (9.23)$$

Por lo tanto cada armónico zonal está representado de manera exacta por una expresión en forma cerrada (*sin truncación*) y tiene la forma de un polinomio trigonométrico (o sea, un desarrollo finito en serie de Fourier) en el pseudo-tiempo focal  $f$ . Justo lo contrario que el resultado de *Sharaf y Saad* (1997) [89, p. 184, Fórmulas (3.1)], donde se usan los elementos **KS** y una variable independiente del tipo de la anomalía excéntrica. La expresión que se obtiene es una serie infinita, haciendo necesaria una truncación en esa aproximación para cada armónico zonal.

Finalmente, se exponen a continuación algunos de los primeros términos del desarrollo. Así, el *segundo armónico zonal* da cuenta del achatamiento dinámico del cuerpo central (o primario), y responde a la expresión

$$\begin{aligned} & \frac{\mu R^2 J_2}{16 p^3} \left\{ \frac{3}{4} (4\alpha_3^2 + 4\beta_3^2 - 8e^2 + 9\alpha_3^2 e^2 + 3\beta_3^2 e^2 - 16) \right. \\ & + \frac{3}{4} (18\alpha_3^2 + 6\beta_3^2 - 4e^2 + 5\alpha_3^2 e^2 + \beta_3^2 e^2 - 16) e \cos f + \frac{3}{2} (e^2 + 6) \alpha_3 \beta_3 e \sin f \\ & + 3(\alpha_3^2 - \beta_3^2 - 2e^2 + 3\alpha_3^2 e^2) \cos 2f + 3(3e^2 + 2) \alpha_3 \beta_3 \sin 2f \\ & + \frac{(36\alpha_3^2 - 36\beta_3^2 - 8e^2 + 15\alpha_3^2 e^2 - 3\beta_3^2 e^2)}{8} e \cos 3f + \frac{9}{4} (e^2 + 4) \alpha_3 \beta_3 e \sin 3f \\ & + \frac{9}{4} (\alpha_3^2 - \beta_3^2) e^2 \cos 4f + \frac{9}{2} \alpha_3 \beta_3 e^2 \sin 4f \\ & \left. + \frac{3}{8} (\alpha_3^2 - \beta_3^2) e^3 \cos 5f + \frac{3}{4} \alpha_3 \beta_3 e^3 \sin 5f \right\}. \end{aligned}$$

El *tercer armónico zonal*, que se debe a la forma de “pera” del cuerpo

central, está dado por

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu R^3 J_3}{16 p^4} \left\{ \frac{1}{4} (30\alpha_3^2 + 30\beta_3^2 - 36e^2 + 25\alpha_3^2 e^2 + 15\beta_3^2 e^2 - 48) \alpha_3 e \right. \\
 & + \left[ \frac{3}{4} (5\alpha_3^2 + 5\beta_3^2 - 36e^2 - 5e^4 + 25\alpha_3^2 e^2 + 15\beta_3^2 e^2 - 8) \right. \\
 & + \left. \frac{25}{64} (7\alpha_3^2 + 3\beta_3^2) e^4 \right] \alpha_3 \cos f \\
 & + \left[ \frac{3}{4} (5\alpha_3^2 + 5\beta_3^2 - 12e^2 - e^4 + 15\alpha_3^2 e^2 + 5\beta_3^2 e^2 - 8) \right. \\
 & + \left. \frac{15}{64} (5\alpha_3^2 + \beta_3^2) e^4 \right] \beta_3 \operatorname{sen} f \\
 & + \frac{(80\alpha_3^2 - 96e^2 + 75\alpha_3^2 e^2 + 15\beta_3^2 e^2 - 96)}{8} \alpha_3 e \cos 2f \\
 & + \frac{(120\alpha_3^2 + 40\beta_3^2 - 48e^2 + 75\alpha_3^2 e^2 + 15\beta_3^2 e^2 - 96)}{8} \beta_3 e \operatorname{sen} 2f \\
 & + \left[ \frac{1}{8} (10\alpha_3^2 - 30\beta_3^2 - 72e^2 - 15e^4 + 75\alpha_3^2 e^2 - 45\beta_3^2 e^2) \right. \\
 & + \left. \frac{15}{64} (7\alpha_3^2 - \beta_3^2) e^4 \right] \alpha_3 \cos 3f \\
 & + \left[ \frac{1}{8} (30\alpha_3^2 - 10\beta_3^2 - 72e^2 - 9e^4 + 135\alpha_3^2 e^2 + 15\beta_3^2 e^2) \right. \\
 & + \left. \frac{15}{64} (9\alpha_3^2 + \beta_3^2) e^4 \right] \beta_3 \operatorname{sen} 3f \\
 & + \frac{(10\alpha_3^2 - 30\beta_3^2 - 12e^2 + 15\alpha_3^2 e^2 - 15\beta_3^2 e^2)}{4} \alpha_3 e \cos 4f \\
 & + \frac{(15\alpha_3^2 - 5\beta_3^2 - 6e^2 + 15\alpha_3^2 e^2)}{2} \beta_3 e \operatorname{sen} 4f \\
 & + \frac{(120\alpha_3^2 - 360\beta_3^2 - 24e^2 + 35\alpha_3^2 e^2 - 45\beta_3^2 e^2)}{64} \alpha_3 e^2 \cos 5f \\
 & + \frac{(360\alpha_3^2 - 120\beta_3^2 - 24e^2 + 75\alpha_3^2 e^2 - 5\beta_3^2 e^2)}{64} \beta_3 e^2 \operatorname{sen} 5f \\
 & + \frac{5}{8} (\alpha_3^2 - 3\beta_3^2) \alpha_3 e^3 \cos 6f + \frac{5}{8} (3\alpha_3^2 - \beta_3^2) \beta_3 e^3 \operatorname{sen} 6f \\
 & + \left. \frac{5}{64} (\alpha_3^2 - 3\beta_3^2) \alpha_3 e^4 \cos 7f + \frac{5}{64} (3\alpha_3^2 - \beta_3^2) \beta_3 e^4 \operatorname{sen} 7f \right\}.
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 9. DESARROLLO DEL POTENCIAL ZONAL EN  
ELEMENTOS REGULARES DEF

---

## El Problema Principal en elementos regulares DEF

### 10.1. Introducción

Motivados por el tratamiento analítico de los *elementos regulares* en las variables **KS** descrito por *Stiefel y Scheifele* (1971) [94, § 19], presentamos a continuación un desarrollo similar basándonos en las variables focales **DEF**. En esta técnica se aplica la transformación a elementos definida en el Apéndice B.3 (véase *Kirchgraber y Stiefel* (1978) [68, § 1.3]) a un sistema de osciladores perturbados; en nuestro caso la perturbación viene dada por el primer término del potencial zonal. El siguiente paso será resolver el problema mediante la variación de las constantes. Siguiendo las notaciones de *Sharaf y Saad* (1997) [89] y las empleadas en la Sección 9.4 (véase también la Sección 2.1), el potencial gravitatorio zonal de la Tierra (9.8) está dado por

$$V_{zonal} = \frac{\mu}{R} \sum_{n \geq 2} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta), \quad (10.1)$$

y el *segundo armónico zonal* del geopotencial es:

$$V = \frac{\mu}{R} J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^3 P_2(\cos \vartheta) = \frac{\mu}{R} J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left[ \frac{1}{2} \left( 3 \left( \frac{q_3}{r} \right)^2 - 1 \right) \right].$$

La última expresión está formulada en las variables cartesianas, donde  $r$  es la distancia radial entre los dos cuerpos.

## 10.2. La transformación DEF y sus elementos

El cambio de variables **DEF** transforma el hamiltoniano de Kepler puro, con la ayuda de las fórmulas (8.16) y (8.17), en la función hamiltoniana  $\mathcal{K}_0$ :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\mu}{r} \longrightarrow \mathcal{K}_0 = \frac{\eta^2}{2} \left( y_4^2 + \frac{Q^2}{x_4^2} \right) - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\| x_4}. \quad (10.2)$$

Considerando los contenidos de los Capítulos 4, 6 y 7, y *Deprit, Elise y Ferrer* (1994) [44, §§ 4.1], además de la transformación **DEF** se requiere realizar un cambio de la variable independiente, que tiene que ser proporcional a la anomalía verdadera:

$$t \longrightarrow f : \quad dt = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2 Q} df. \quad (10.3)$$

Las ecuaciones canónicas de movimiento en la nueva variable independiente dan lugar al sistema diferencial

$$\frac{dx_4}{df} = \frac{x_4^2 y_4}{Q}, \quad (10.4a)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{df} = \frac{1}{Q} (\mathbf{Q} \times \mathbf{x}), \quad (10.4b)$$

$$\frac{dy_4}{df} = \frac{1}{Q} \left( \frac{Q^2}{x_4} - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\|^3} \right), \quad (10.4c)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{df} = \frac{1}{Q} (\mathbf{Q} \times \mathbf{y}) - A\mathbf{x}, \quad (10.4d)$$

donde

$$A = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^4 Q} \left( 2\mathcal{K}_0 + \frac{3\mu}{\|\mathbf{x}\| x_4} \right).$$

Derivamos la ecuación (10.4b) de la variable  $\mathbf{x}$  respecto de  $f$ , con la ayuda de las expresiones (10.4). Por último se efectúa el cambio de la variable dependiente dado por

$$\sigma = \frac{Q^2}{\mu x_4}, \quad (10.5)$$

que se deriva dos veces respecto del tiempo ficticio.

Basándonos en los cálculos y resultados del Capítulo 6 (en especial las ecuaciones (6.38) y (6.42) y véase también *Deprit, Elipe y Ferrer* (1994) [44, § 4.1, pp. 189–190]) y el comentario de la Subsección 6.6.3, podemos inmediatamente expresar el sistema de *ecuaciones diferenciales de segundo orden* en las variables **DEF**  $(\sigma, \mathbf{x})$

$$\mathbf{x}'' + \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3 \text{ osciladores lineales no acoplados, no perturbados}),$$

$$\sigma'' + \sigma = 1 \quad (\text{oscilador lineal perturbado por una fuerza externa}).$$

Nótese, en particular, que la fuerza externa que actúa sobre el oscilador de la variable  $\sigma$  es una fuerza constante. En el problema de Kepler la dirección radial del vector  $\mathbf{x}$  describe una rotación libre alrededor del origen. Entonces la solución del problema no perturbado es

$$x_j = \alpha_j \cos f + \beta_j \sin f, \quad j = 1, 2, 3, \quad (10.6)$$

$$\sigma = \alpha_0 \cos f + \beta_0 \sin f + 1, \quad (10.7)$$

donde los  $\alpha_k, \beta_k$  son las constantes de integración, que también se denominan “elementos del movimiento”. Esta solución es la que utilizaremos para definir la transformación a elementos que se aplicará al problema perturbado. Entonces los elementos de movimiento satisfarán un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por consiguiente, los elementos varían de forma casi lineal si el movimiento está sometido a una perturbación de pequeña magnitud.

Las ecuaciones de movimiento correspondientes al problema perturbado de dos cuerpos pueden tratarse por medio del método de la *variación de las constantes*, que da como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones  $\alpha_k(f), \beta_k(f)$ . No siempre basta con esto, pues a veces se hace necesario añadir ecuaciones de variación de otras cantidades dinámicas de interés (por ejemplo la ley de variación del momento angular o la ley de energía). Todas estas relaciones constituyen las *ecuaciones de elementos*.

Destaquemos que, hasta ahora, la descripción presentada no está restringida a órbitas elípticas, es decir, sigue siendo válida para cualquier órbita, sea parabólica o hiperbólica.

El conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden para el problema de Kepler perturbado por el segundo armónico zonal en las variables **DEF**,

CAPÍTULO 10. EL PROBLEMA PRINCIPAL EN ELEMENTOS  
REGULARES DEF

---

como ya se ha presentado en el Capítulo anterior (véanse las Ecuaciones (9.5)), está dado por

$$\mathbf{x}'' + \mathbf{x} = \left[ \frac{1}{Q} \mathbf{Q}' - \frac{1}{Q^3} (\mathbf{Q} | \mathbf{Q}') \mathbf{Q} \right] \times \mathbf{x}, \quad (10.8a)$$

$$\sigma'' + \sigma = 1 + \left[ \frac{2}{Q^2} \{ \|\mathbf{Q}'\|^2 + (\mathbf{Q} | \mathbf{Q}'') \} - \frac{6}{Q^2} (Q')^2 \right] \sigma \quad (10.8b)$$

$$+ \frac{3Q'}{Q} \sigma' - \frac{Q^2}{\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad (10.8c)$$

$$\mathbf{Q}' = \frac{x_4^2}{Q} (\nabla_{\mathbf{x}} V \times \mathbf{x}) = \frac{Q^3}{\mu^2 \sigma^2} (\nabla_{\mathbf{x}} V \times \mathbf{x}), \quad (10.8d)$$

$$Q' = \frac{(\mathbf{Q} | \mathbf{Q}')}{Q}, \quad (10.8e)$$

$$t' = \frac{Q^3}{\mu^2 \sigma^2}, \quad (10.8f)$$

donde  $\nabla_{\mathbf{x}} V$  denota el gradiente de la función escalar  $V$  con respecto al vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

### 10.3. El Problema Principal del Satélite Artificial

El interés de este Capítulo se centra, especialmente, en el tratamiento del problema de la perturbación debida al achatamiento del primario, problema al cual se va a aplicar el cambio de variables **DEF**. Conviene recordar ahora las notaciones del Capítulo 9 y la Ecuación (9.12), donde ya se han puesto de manifiesto ciertas relaciones entre las coordenadas cartesianas y las nuevas variables, como  $q_3 = x_4 x_3$  y  $\cos \vartheta = q_3/r = x_3 = \alpha_3 \cos f + \beta_3 \sin f$ , y la relación clásica del problema de dos cuerpos  $r = p/(1 + e \cos f)$ . En las variables **DEF**, la perturbación del problema de Kepler puro debida al segundo armónico zonal del geopotencial es

$$V \equiv V(x_4, x_3) = \frac{\mu}{2R} J_2 \left( \frac{R}{x_4} \right)^3 [3x_3^2 - 1]. \quad (10.9)$$

Para simplificar las expresiones en los cálculos, se va a definir a continuación la abreviatura  $C_v = \mu R^2 J_2$ , que representa al factor constante en el potencial  $V$ . Entonces, las derivadas parciales de la perturbación son:

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = 3C_v \frac{x_3}{x_4^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_4} = -\frac{3}{2}C_v \frac{3x_3^2 - 1}{x_4^4}. \quad (10.10)$$

El siguiente paso consiste en desarrollar  $V$  en forma de serie de Fourier en la anomalía verdadera  $f$ , cuyos coeficientes son funciones de elementos **DEF**.

Como en ocasiones anteriores, la siguiente notación vectorial permitirá obtener fórmulas más compactas

$$\tilde{\mathbf{x}} = [-x_2, x_1, 0]^t. \quad (10.11)$$

Entonces, las ecuaciones de segundo orden que gobiernan el movimiento en el problema principal son

$$\mathbf{x}'' + \mathbf{x} = \frac{x_4^2}{\|\mathbf{x}\|^2 Q^2} \frac{\partial V}{\partial x_3} [x_3' \mathbf{x}' + (\tilde{\mathbf{x}} \times \mathbf{x})], \quad (10.12a)$$

$$\sigma'' + \sigma - 1 = 2 \left[ \frac{Q''}{Q} - 2 \frac{(Q')^2}{Q^2} \right] \sigma + 3 \frac{Q''}{Q} \sigma' - \frac{Q^2}{\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \quad (10.12b)$$

Para poder desarrollar una aproximación de la solución de este último sistema diferencial, se partirá ahora de la solución del problema de Kepler puro como solución de referencia. Recordemos que dicha solución estaba representada por las oscilaciones armónicas (10.6), (10.7). En consecuencia, para el problema perturbado se buscará una solución de la forma.

$$\mathbf{x}(f) = \boldsymbol{\alpha}(f) \cos f + \boldsymbol{\beta}(f) \sin f, \quad (10.13a)$$

$$\sigma(f) = \alpha_0(f) \cos f + \beta_0(f) \sin f + 1, \quad (10.13b)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}(f) = (\alpha_1(f), \alpha_2(f), \alpha_3(f))$  y  $\boldsymbol{\beta}(f) = (\beta_1(f), \beta_2(f), \beta_3(f))$ .

Estas ecuaciones de movimiento serán tratadas de acuerdo con el método de la variación de las constantes, que en el caso de las ecuaciones de elementos

CAPÍTULO 10. EL PROBLEMA PRINCIPAL EN ELEMENTOS  
REGULARES DEF

---

se expresan como

$$\boldsymbol{\alpha}' = - \left( \frac{1}{\mu^2 \sigma^2} \frac{\partial V}{\partial x_3} [x'_3 \boldsymbol{x}' + (\tilde{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{x})] \right) \text{sen } f, \quad (10.14a)$$

$$\boldsymbol{\beta}' = \left( \frac{1}{\mu^2 \sigma^2} \frac{\partial V}{\partial x_3} [x'_3 \boldsymbol{x}' + (\tilde{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{x})] \right) \text{cos } f, \quad (10.14b)$$

$$\alpha'_0 = - \left[ 2 \left( \frac{Q''}{Q} - 2 \frac{(Q')^2}{Q^2} \right) \sigma + 3 \frac{Q'}{Q} \sigma' - \frac{Q^2}{\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right] \text{sen } f, \quad (10.14c)$$

$$\beta'_0 = \left[ 2 \left( \frac{Q''}{Q} - 2 \frac{(Q')^2}{Q^2} \right) \sigma + 3 \frac{Q'}{Q} \sigma' - \frac{Q^2}{\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right] \text{cos } f, \quad (10.14d)$$

mientras que la variación de la norma del momento angular viene dada por

$$Q' = - \frac{Q}{\mu^2 \sigma^2} \frac{\partial V}{\partial x_3} x'_3. \quad (10.15)$$

Antes de expresar los segundos miembros de las ecuaciones de elementos como unos desarrollos de Fourier en la variable  $f$ , se utilizará la siguiente notación

$$A_{i,j} = \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j, \quad \bar{A}_{i,j} = \alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j, \quad (10.16)$$

$$B_{i,j} = \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i, \quad \bar{B}_{i,j} = \alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i. \quad (10.17)$$

donde  $(i, j = 0, 1, 2, 3)$  y  $\delta$  es la delta de Kronecker. Entonces los desarrollos en serie de Fourier para las ecuaciones de elementos correspondiente a los índices  $i = 1, 2, 3$  son

$$\begin{aligned} \alpha'_i = & -3C_v \frac{\mu}{4Q^2} (A_{i3} - \delta_{i3}) [2\beta_3 - B_{0i} \text{cos } f + (2A_{0i} - \bar{A}_{0i}) \text{sen } f - \\ & 2\beta_3 \text{cos } 2f + 2\alpha_3 \text{sen } 2f - B_{0i} \text{cos } 3f + \bar{A}_{0i} \text{sen } 3f], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta'_i = & 3C_v \frac{\mu}{4Q^2} (A_{i3} - \delta_{i3}) [2\alpha_3 + (2A_{0i} + \bar{A}_{0i}) \text{cos } f + \\ & B_{0i} \text{sen } f + 2\alpha_3 \text{cos } 2f + 2\beta_3 \text{sen } 2f + \bar{A}_{0i} \text{cos } 3f + B_{0i} \text{sen } 3f]. \end{aligned}$$

Para simplificar las expresiones de la ecuación asociada a  $\sigma$  se definen a continuación las siguientes notaciones auxiliares:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= k_1 + \frac{3\mu^2}{2Q^4} + 3C_v \frac{\mu^2}{16Q^4} \left( 4A_{00} - 12A_{33} - 9A_{03}^2 - 3\overline{B}_{03}^2 \right) , \\
 c_1 &= (\alpha_0 k_1 + \beta_0 k_2) - C_v \frac{3\mu^2}{4Q^4} \left( 3\beta_3 B_{03} + 3\alpha_3 \overline{A}_{03} + 4\alpha_0 (\alpha_3^2 - 1) \right) , \\
 d_1 &= (\beta_0 k_1 - \alpha_0 k_2) - C_v \frac{3\mu^2}{4Q^4} \left( 3\alpha_3 B_{03} + 3\beta_3 \overline{A}_{03} + 4\beta_0 (\beta_3^2 - 1) \right) , \\
 c_2 &= -C_v \frac{3\mu^2}{4Q^4} \left( 3\overline{A}_{33} + 3A_{03} \overline{A}_{03} - \overline{A}_{00} \right) , \\
 d_2 &= -C_v \frac{3\mu^2}{4Q^4} \left( 3A_{03} B_{03} + 6\alpha_3 \beta_3 - 2\alpha_0 \beta_0 \right) , \\
 c_3 &= -C_v \frac{3\mu^2}{4Q^4} \left( 3\alpha_3 \overline{A}_{03} - 3\beta_3 B_{03} \right) , \\
 d_3 &= -C_v \frac{3\mu^2}{4Q^4} \left( 3\alpha_3 B_{03} + 3\beta_3 \overline{A}_{03} \right) , \\
 c_4 &= -C_v \frac{9\mu^2}{16Q^4} \left( A_{03}^2 - B_{03}^2 \right) , \\
 d_4 &= -C_v \frac{9\mu^2}{16Q^4} \left( \overline{A}_{03} B_{03} \right) ,
 \end{aligned}$$

donde

$$k_1 = 2 \left( \frac{Q''}{Q} - 2 \frac{(Q')^2}{Q^2} \right), \quad k_2 = 3 \frac{Q'}{Q} .$$

Entonces las ecuaciones diferenciales de elementos asociadas a la variable  $\sigma$  toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \alpha'_0 &= \frac{1}{2} \left[ -d_1 - d_2 \cos f + (c_2 - 2c_0) \operatorname{sen} f + (d_1 - d_3) \cos 2f \right. \\
 &\quad \left. + (c_3 - c_1) \operatorname{sen} 2f + (d_2 - d_4) \cos 3f + (c_4 - c_2) \operatorname{sen} 3f + d_3 \cos 4f \right. \\
 &\quad \left. - c_3 \operatorname{sen} 4f + d_4 \cos 5f - c_4 \operatorname{sen} 5f \right] , \\
 \beta'_0 &= \frac{1}{2} \left[ c_1 + (2c_0 + c_2) \cos f + d_2 \operatorname{sen} f + (c_1 + c_3) \cos 2f + (d_3 + d_1) \operatorname{sen} 2f \right. \\
 &\quad \left. + (c_2 + c_4) \cos 3f + (d_4 + d_2) \operatorname{sen} 3f + c_3 \cos 4f + d_3 \operatorname{sen} 4f \right. \\
 &\quad \left. + c_4 \cos 5f + d_4 \operatorname{sen} 5f \right] .
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 10. EL PROBLEMA PRINCIPAL EN ELEMENTOS  
REGULARES DEF

---

La ecuación diferencial para la norma del momento angular es

$$\begin{aligned}
 Q' &= 3C_v \frac{\mu}{4Q^3} \left[ -(\alpha_3 \bar{B}_{03} + \beta_3 A_{03}) \cos f + (\alpha_3 A_{03} - \beta_3 \bar{B}_{03}) \sin f \right. \\
 &\quad - 2B_{33} \cos 2f + 2\bar{A}_{33} \sin 2f - (\alpha_3 B_{03} + \beta_3 \bar{A}_{03}) \cos 3f \\
 &\quad \left. + (\alpha_3 \bar{A}_{03} - \beta_3 B_{03}) \sin 3f \right]. \quad (10.18)
 \end{aligned}$$

Las variaciones de primer orden de los elementos bajo la influencia del término  $J_2$  son

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^{(1)}(f) &= -3C_v \frac{\mu}{4Q^2} (A_{i3} - \delta_{i3}) \left[ 2\beta_3 f - (2A_{0i} - \bar{A}_{0i}) \cos f + B_{0i} \sin f \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_3 \cos 2f - \beta_3 \sin 2f - \frac{\bar{A}_{0i}}{3} \cos 3f - \frac{B_{0i}}{3} \sin 3f \right], \quad (10.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_i^{(1)}(f) &= 3C_v \frac{\mu}{4Q^2} (A_{i3} - \delta_{i3}) \left[ 2\alpha_3 f - B_{0i} \cos f + (2A_{0i} + \bar{A}_{0i}) \sin f \right. \\
 &\quad \left. - \beta_3 \cos 2f + \alpha_3 \sin 2f - \frac{B_{0i}}{3} \cos 3f + \frac{\bar{A}_{0i}}{3} \sin 3f \right], \quad (10.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_0^{(1)}(f) &= \frac{1}{2} \left[ -d_1 f - (c_2 - 2c_0) \cos f - d_2 \sin f - \frac{1}{2} (c_3 - c_1) \cos 2f \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} (d_1 - d_3) \sin 2f - \frac{1}{3} (c_4 - c_2) \cos 3f + \frac{1}{3} (d_2 - d_4) \sin 3f \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} c_3 \cos 4f + \frac{1}{4} d_3 \sin 4f + \frac{1}{5} c_4 \cos 5f + \frac{1}{5} d_4 \sin 5f \right] \quad (10.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_0^{(1)}(f) &= \frac{1}{2} \left[ c_1 f - d_2 \cos f + (2c_0 + c_2) \sin f - \frac{1}{2} (d_3 + d_1) \cos 2f \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} (c_1 + c_3) \sin 2f - \frac{1}{3} (d_4 + d_2) \cos 3f + \frac{1}{3} (c_2 + c_4) \sin 3f \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} d_3 \cos 4f + \frac{1}{4} c_3 \sin 4f - \frac{1}{5} d_4 \cos 5f + \frac{1}{5} c_4 \sin 5f \right] \quad (10.22)
 \end{aligned}$$

Y por último se calcula la corrección de primer orden para la norma del

momento angular

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)}(f) = & 3C_v \frac{\mu}{4Q^3} \left[ (\alpha_3 A_{03} - \beta_3 \bar{B}_{03}) \cos f - (\alpha_3 \bar{B}_{03} + \beta_3 A_{03}) \operatorname{sen} f \right. \\
 & - \bar{A}_{33} \cos 2f - B_{33} \operatorname{sen} 2f - \frac{1}{3} (\alpha_3 \bar{A}_{03} - \beta_3 B_{03}) \cos 3f \\
 & \left. - \frac{1}{3} (\alpha_3 B_{03} + \beta_3 \bar{A}_{03}) \operatorname{sen} 3f \right].
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 10. EL PROBLEMA PRINCIPAL EN ELEMENTOS  
REGULARES DEF

---

## Conclusiones finales: resultados y futuro trabajo

Los *principales resultados* presentados en esta Memoria pueden resumirse en los siguientes puntos:

- I. Reelaboración y generalización del teorema de Ferrándiz y Sansaturio (1994) y de los resultados de Deprit, Elipe y Ferrer (1994) sobre canonicidad de extensiones de transformaciones puntuales que introducen coordenadas redundantes en el espacio de configuración (Capítulo 4, Sección 4.4).
- II. Caracterización de un tipo de potenciales perturbadores compatibles con la linealización exacta en variables focales, ejemplificado con el uso de unas variables canónicas de tipo Burdet–Ferrándiz; es decir: transformación de las ecuaciones de movimiento de una clase de sistemas keplerianos perturbados en las ecuaciones lineales de segundo orden y coeficientes constantes correspondientes a un conjunto de cuatro osciladores lineales acoplados (Capítulo 5 de la Tesis).
- III. Construcción de una familia biparamétrica de transformaciones canónicas (cuya canonicidad se basa en los resultados del Capítulo 4) que permiten introducir variables canónicas genéricas de tipo focal; formulación del problema de Kepler en dichas variables focales no especificadas, y reducción al correspondiente conjunto de ecuaciones de osciladores armónicos; obtención de algunas de las transformaciones conocidas

## CAPÍTULO 10. EL PROBLEMA PRINCIPAL EN ELEMENTOS REGULARES DEF

---

(Burdet–Ferrándiz, Deprit, etc.) como casos particulares a partir de este esquema general (Capítulo 6).

- iv. Aplicación de este procedimiento general a sistemas keplerianos perturbados, con un potencial perturbador genérico que, formulado inicialmente en variables canónicas cartesianas, dependa de coordenadas y momentos conjugados; deducción de las ecuaciones de osciladores perturbados en las que se convierte las ecuaciones de movimiento del sistema kepleriano perturbado de partida (Capítulo 7).
- v. Estudio de algunos casos de problemas perturbados de dos cuerpos (relacionados con ciertos intermediarios radiales y con el Problema Fundamental de la Teoría de Satélites Artificiales) en función de variables y elementos de tipo focal (Capítulos 8, 9 y 10).

Entre posibles trabajos futuros mencionaremos la aplicación de estas técnicas de regularización basadas en variables focales a otros tipos de problemas perturbados (por ejemplo, con perturbaciones que derivan de potenciales de tipo polinómico, sistemas no conservativos, problema lunar de Hill) y tratamiento de las ecuaciones resultantes por medio de métodos de perturbaciones especialmente adaptados para sistemas de tipo oscilatorio.

# Apéndices





## **El sistema de dos cuerpos con fuerzas internas.**

### **A.1. Planteamiento del problema y separación entre movimiento del centro de masas y movimiento relativo.**

La mayor parte de los libros de Mecánica Clásica y Mecánica Celeste tratan de manera bastante parecida el problema del movimiento de una masa puntual en el seno de un campo de fuerzas central, y el problema del movimiento de dos cuerpos puntuales sometidos exclusivamente a su influencia mutua (problema este último que, bajo ciertas condiciones, se reduce al del movimiento de una partícula auxiliar o ficticia bajo el efecto de una fuerza central). Si bien la mayoría de los textos abordan este estudio en el marco de la formulación newtoniana de la Mecánica, algunos otros (por ejemplo, Goldstein, 1980; Thiry, 1970) parten ya desde un principio de una formulación conceptualmente más elaborada y avanzada, sea lagrangiana o hamiltoniana.

A este respecto, de entre la enorme cantidad de referencias bibliográficas que podrían citarse, nos limitaremos a mencionar sólo unas pocas: aquéllas con las que más hemos trabajado, y más hemos consultado, durante la preparación de alguna de las partes de este trabajo. Nos referimos, en concreto, a libros (detallamos los capítulos, secciones o apartados que nos parecen más relevantes para nuestros propósitos) como

## APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS INTERNAS.

---

- Abad (2012), Parte II, Capítulos 6–10, pp. 95–173;
- Arnold, Kozlov y Neishtadt (1997), Capítulo 1, §1, pp. 1–8; Capítulo 2, §1, pp. 49–58.
- Boccaletti y Pucacco (1996), Capítulo 1, §1.5, pp. 41–42, §1.11, pp. 75–76, §1.14, pp. 85–90, Capítulo 2, §2.1, pp. 126–136, §2.4, pp. 147–156.
- Bond y Allman (1996), Capítulos 2–5, pp. 12–80; Apéndices B, pp. 225–229, y E, pp. 236–238.
- Cid y Camarena (1979), Capítulo II, §1–§6, pp. 41–49; Capítulo V, §6–§8, pp. 123–128; Capítulo VIII, §8, pp. 220–222.
- Cid y Ferrer (1997), Capítulo 13, §13.4, §§13.4.1, pp. 343–349.
- Goldstein (1980), Capítulo 1, §1.1 y §1.2, pp. 1–11; Capítulo 3, pp. 70–127.
- Heil y Kitzka (1984), Capítulo 1, pp. 15–96.
- Scheck (2005), Capítulo 1, §1.1–§1.7, pp. 1–20, §1.15, pp. 29–30, §1.22, pp. 42–44, §1.24, pp. 47–54; Apéndice del Capítulo 1, pp. 81–86; Capítulo 2, §2.16, Ejemplo (i), pp. 109–110; y algunos ejercicios correspondientes a estos capítulos.
- Schneider (1992), Capítulos 2 y 3, pp. 14–107;
- Stiefel y Scheifele (1971), Capítulos I, II, y III, pp. 6–51; Capítulo VIII, pp. 181–212; Capítulo X, §37, pp. 230–231.
- Szebehely (1967), Capítulo 6, §6.4–§6.6, pp. 327–340.
- Thiry (1970), Capítulo II, §1–§15, pp. 44–68; Capítulo III, §10–§11, pp. 93–99, §18, pp. 117–118; Capítulo IV, §6, §§6.3, pp. 132–135; Capítulo V, §10–§11, pp. 187–190.

En esta exposición de algunos aspectos del problema del movimiento de dos masas puntuales, sometidas únicamente a su mutua influencia y en ausencia de cualquier otro efecto externo al propio sistema de los dos cuerpos, plantearemos la cuestión desde una *formulación newtoniana* de la Dinámica. Más adelante consideraremos las versiones lagrangiana y hamiltoniana de algunos detalles del problema.

Para un sistema de  $n$  partículas (cuerpos puntuales, sin dimensiones, es decir, sin extensión espacial, pero dotados de masa), con masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , se denotará como  $\mathbf{F}_{ij}$  la fuerza que la  $i$ -ésima partícula ejerce sobre la  $j$ -ésima. En relación con esta notación, se ha adoptado el *convenio* de Goldstein (1980), Capítulo 1, §1.2, p. 5, de Schneider (1992), Capítulo 3, §3.4, §§3.4.1, p. 48, o de Scheck (2005), Capítulo 1, §1.4, p. 7, y §1.5, p. 8, en el sentido de que el primer subíndice se refiere a la partícula “activa” (que crea un efecto, acción o influencia sobre el resto del espacio), mientras que el segundo subíndice hace mención a la partícula “pasiva” (que detecta o experimenta el efecto o la influencia debidos a la presencia de la otra masa)<sup>1</sup>.

Siguiendo asimismo la definición de Scheck (2005), §1.4, p. 7, o Goldstein (1980), Capítulo 1, §1.2, p. 5, se considerará que las fuerzas  $\mathbf{F}_{ij}$  que actúan entre dichas masas puntuales son *fuerzas internas del sistema* de  $n$  partículas si dichas fuerzas verifican que  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , es decir, cumplen la Tercera Ley de Newton de la Dinámica, y son por lo tanto *fuerzas de acción y reacción*<sup>2</sup>.

Dado un sistema de referencia inercial rectangular cartesiano  $\mathcal{O}x_1x_2x_3$ , con origen en un punto  $\mathcal{O}$  del espacio ordinario  $\mathbf{R}^3$  y ejes orientados según las direcciones de una base ortonormal directa  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  del espacio vectorial euclídeo  $\mathbf{R}^3$ , se trata de estudiar el movimiento de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  bajo la influencia de su mutua interacción a través de *fuerzas internas*. Se parte, pues, de la hipótesis de que en este caso  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ .

El vector de posición de cada partícula  $m_k$  respecto del sistema de referencia  $\mathcal{O}x_1x_2x_3$  es  $\mathbf{r}_k = \overrightarrow{\mathcal{O}m_k}$  ( $k = 1, 2$ ). En virtud de la Segunda Ley de Newton de la Dinámica, el problema del movimiento de estas dos masas puntuales queda formulado mediante el sistema de dos ecuaciones diferenciales

---

<sup>1</sup>Otros autores optan por el criterio opuesto: el primer subíndice alude a la masa “pasiva” de prueba, y el segundo remite a la masa “activa”; por ejemplo, Arnold, Kozlov y Neishtadt (1997), Capítulo 1, §1, §§1.2, Ejemplo c), pp. 3–4, y §1.3, p. 5; Heil y Kitzka (1984), Capítulo 1, §1.3, §§1.3.3.1, p. 39.

<sup>2</sup> Arnold, Kozlov y Neishtadt (1997), Capítulo 1, §1, §§1.3, p. 5, llaman *fuerzas de interacción* a este tipo de fuerzas, lo que les conduce a la definición de “sistema cerrado” o “sistema aislado”.

## APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS INTERNAS.

---

de segundo orden

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2), \quad (\text{A.1})$$

donde, en aras de la generalidad de nuestro planteamiento, por el momento se supone que la fuerza que actúa sobre cada una de las partículas es una función vectorial que depende del tiempo  $t$  (que será –por ahora– la variable independiente o parámetro respecto de la que se efectúa el cálculo de derivadas y de integrales en este problema), de las posiciones  $\mathbf{r}_k$  de ambas partículas en cada instante, y de sus velocidades instantáneas  $\dot{\mathbf{r}}_k$ . Se entiende que, como de costumbre, la “notación de puntos” indica “derivadas respecto de  $t$ ”.

Las ecuaciones diferenciales (A.1) pueden completarse con información adicional acerca del conocimiento que pudiera tenerse en cuanto a las posiciones y velocidades de las partículas en un instante dado, o en instantes distintos, dando así lugar (respectivamente) a “problemas de valores iniciales” o a “problemas de contorno” asociados al sistema diferencial (A.1).

Para los propósitos de este trabajo bastará con considerar problemas de valor inicial, dando como *condiciones iniciales en un instante*  $t_0$  los vectores posición y velocidad de ambas partículas correspondientes a un valor  $t = t_0$  de la variable independiente:

$$\mathbf{r}_k(t_0) = \mathbf{r}_k^{(0)}, \quad \dot{\mathbf{r}}_k(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_k^{(0)} = \mathbf{v}_k^{(0)}, \quad (k = 1, 2). \quad (\text{A.2})$$

A la vista de la dependencia funcional que se ha supuesto para las fuerzas que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones (A.1) anteriores, se ve que se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden para las funciones vectoriales incógnita  $\mathbf{r}_1(t)$  y  $\mathbf{r}_2(t)$ , con  $t$  como variable independiente. En general, dichas ecuaciones serán *no lineales*, y además estarán *acopladas* a través de la presencia de las funciones  $\mathbf{r}_k$  y  $\dot{\mathbf{r}}_k$  en sus segundos miembros (quiere decirse que el movimiento de cada una de las partículas dependerá en cada instante del movimiento de la otra). Por estas razones, salvo en casos muy particulares, la resolución analítica de estas ecuaciones (para obtener soluciones “teóricas” exactas) será difícil –o, incluso, imposible–, si a lo que se aspira es a hallar soluciones exactas en forma cerrada por medio funciones conocidas.

Leyendo las funciones incógnita como vectores de  $\mathbf{R}^3$ , el orden diferencial total de este problema es cuatro. Si se descompone este sistema en sus componentes escalares, se obtienen seis ecuaciones diferenciales de segundo orden (para las componentes cartesianas de los vectores  $\mathbf{r}_1(t)$  y  $\mathbf{r}_2(t)$  como funciones incógnita), por lo que se puede considerar sin más que el *orden* diferencial de este problema es *doce*. Así pues, por lo que a su *solución general* atañe, este problema requiere cuatro constantes vectoriales arbitrarias de integración, o doce constantes escalares arbitrarias.

En lugar de abordar directamente la resolución del sistema diferencial anterior, se procederá a continuación a su transformación por medio de un *cambio de funciones incógnita*. Para ello se efectúa un cambio lineal de las coordenadas

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \longrightarrow \mathbf{r}_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \mathbf{r}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (\text{A.3})$$

transformación en la que las nuevas funciones incógnita quedan definidas por medio de unas combinaciones lineales sencillas de las funciones incógnita de partida, a través de las ecuaciones

$$\mathbf{r}_c(t) := \frac{m_1 \mathbf{r}_1(t) + m_2 \mathbf{r}_2(t)}{M}, \quad \mathbf{r}(t) := \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t), \quad M := m_1 + m_2, \quad (\text{A.4})$$

y cuya transformación inversa,  $\mathbf{r}_c, \mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}), \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_c, \mathbf{r})$ , es

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_c(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_c(t) - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t). \quad (\text{A.5})$$

Nótese que  $M$  es la *masa total* del sistema de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$ . Formando las derivadas de primer y segundo orden en estas ecuaciones, se obtienen inmediatamente las correspondientes relaciones para las velocidades y las aceleraciones.

Las condiciones iniciales (A.2) permiten evaluar estos vectores, y sus derivadas, en  $t = t_0$ , para lo que se utilizarán las notaciones

$$\mathbf{r}_c(t_0) = \mathbf{r}_c^{(0)}, \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}^{(0)}, \quad \dot{\mathbf{r}}_c(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_c^{(0)} = \mathbf{v}_c^{(0)}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}^{(0)} = \mathbf{v}^{(0)}. \quad (\text{A.6})$$

El punto  $C$  del espacio cuya posición queda caracterizada por el vector  $\mathbf{r}_c(t) \equiv \overrightarrow{OC}$  se denomina CENTRO DE MASAS del sistema de partículas  $m_1$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

y  $m_2$ . Por su parte, el vector  $\mathbf{r}(t) \equiv \overrightarrow{m_2 m_1}$  caracteriza en cada instante la POSICIÓN RELATIVA de  $m_1$  respecto de  $m_2$  (es decir, en un sistema de referencia  $m_2 x_1 x_2 x_3$  con origen de coordenadas en  $m_2$  y ejes paralelos a los de partida). Como  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , se denotará con  $r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$  la distancia euclídea entre las partículas  $m_1$  y  $m_2$ , con la definición habitual por medio del producto escalar usual:

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r}|\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|^2 = r^2.$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (A.1) se observa que

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) + \mathbf{F}_{12}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.7})$$

mientras que a partir de la definición (A.4) del vector de posición del centro de masas se tiene

$$M \mathbf{r}_c(t) = m_1 \mathbf{r}_1(t) + m_2 \mathbf{r}_2(t) \implies M \ddot{\mathbf{r}}_c(t) = \mathbf{0} \iff \ddot{\mathbf{r}}_c(t) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.8})$$

expresión que –en virtud de la Segunda Ley de Newton– puede interpretarse como la ecuación del movimiento libre (es decir, en ausencia de fuerzas externas) de una partícula de masa  $M$  situada en cada instante en la posición del centro de masas del sistema, por lo que –según la Primera Ley de Newton, o Principio de Inercia– dicha partícula o bien estaría animada de un movimiento rectilíneo y uniforme, o bien permanecería en reposo (dependiendo de las condiciones iniciales). En efecto, la integración de esta ecuación conduce a la solución general

$$\dot{\mathbf{r}}_c(t; \mathbf{A}) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{r}_c(t; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \quad (\text{A.9})$$

siendo los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos constantes (vectoriales) de integración, que aportan seis constantes escalares arbitrarias. Las expresiones que figuran en la solución general que se acaba de obtener puede reinterpretarse como dos relaciones funcionales vectoriales de la forma<sup>3</sup>

$$\overrightarrow{\Phi}_1(-, -, -, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \overrightarrow{\mathcal{A}}, \quad \overrightarrow{\Phi}_2(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, -, -) = \overrightarrow{\mathcal{B}}, \quad (\text{A.10})$$

que son dos integrales primeras (vectoriales) funcionalmente independientes del sistema diferencial (A.1) de partida. Con ello se dispone ya de seis constantes de integración, por lo que puede pensarse que –al menos formalmente– el orden diferencial del problema original ha pasado de 12 a  $12 - 6 = 6$ .

<sup>3</sup>Se ha usado un guión para indicar la ausencia explícita de la variable que, en la dependencia funcional considerada, aparecería en esa posición.

Bajo cualquiera de las formas anteriores, (A.9) o (A.10), estas integrales primeras se conocen como *las integrales del centro de masas* del sistema de dos cuerpos considerado.

En ocasiones se utiliza el *momento lineal del centro de masas*, definido como  $\mathbf{p}_c = M \dot{\mathbf{r}}_c$ , y que a la vista de (A.8) es una constante del movimiento, como también se deduce de manera inmediata a la vista de la primera relación de (A.9).

La solución particular de (A.8) correspondiente a las condiciones iniciales (A.6) será

$$\dot{\mathbf{r}}_c(t) = \mathbf{v}_c^{(0)}, \quad \mathbf{r}_c(t) = \mathbf{v}_c^{(0)} t + (\mathbf{r}_c^{(0)} - \mathbf{v}_c^{(0)} t_0) = \mathbf{v}_c^{(0)} (t - t_0) + \mathbf{r}_c^{(0)}. \quad (\text{A.11})$$

Se comprobará a continuación cómo se puede hacer efectiva la reducción de orden que se acaba de mencionar. Llevando las expresiones de (A.5) y sus derivadas a las ecuaciones (A.1), éstas se transforman en

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_c + \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}^*(t, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.12})$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_c - \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}^*(t, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}}) = -\mathbf{F}_{21}^*(t, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.13})$$

donde las funciones  $\mathbf{F}_{ij}^*$  se obtienen a partir de las correspondientes  $\mathbf{F}_{ij}$  tras efectuar el cambio dado en (A.5). Teniendo en cuenta que  $\ddot{\mathbf{r}}_c(t) = \mathbf{0}$ , ambas expresiones se reducen a una única ecuación

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}^*(t, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}}), \quad \text{siendo} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (\text{A.14})$$

Esta nueva cantidad  $\mu$  es la *masa reducida* del sistema de las dos partículas, y la ecuación diferencial obtenida puede interpretarse como la ecuación de movimiento de una partícula auxiliar de masa  $\mu$  en el seno del campo de fuerzas  $\mathbf{F}_{21}^*(t, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}})$ . Pero teniendo en cuenta que ahora, a la vista de (A.9), ya se sabe cómo son las funciones  $\mathbf{r}_c(t)$  y  $\dot{\mathbf{r}}_c(t)$ , la fuerza que actúa sobre  $\mu$  puede expresarse en la forma

$$\mathbf{F}_{21}^*(t, \mathbf{r}_c(t), \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c(t), \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}_{21}^\sharp(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.15})$$

notación que se mantendrá en lo sucesivo.

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

De manera que, mediante el cambio de variables dependientes dado por (A.4)–(A.5), el sistema diferencial de ecuaciones acopladas (A.1) se ha transformado en un *sistema equivalente*

$$M \ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{0}, \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.16})$$

en el que cada una de las ecuaciones (vectoriales) sólo contiene a una de las funciones incógnita (y a sus derivadas). El problema (A.1) de partida, que era de orden 12, ha quedado, pues, descompuesto en *dos subproblemas independientes* (es decir, desacoplados) de orden 6, para las funciones incógnita  $\mathbf{r}_c$  y  $\mathbf{r}$ , respectivamente; además, el primero de estos subproblemas se ha resuelto de manera inmediata, y ahora basta con estudiar el segundo subproblema, por lo que –tras todo lo anterior– queda de manifiesto cómo se ha procedido a sacar partido de las integrales del centro de masas para conseguir reducir el orden diferencial del problema original hasta orden 6.

En componentes respecto del sistema de coordenadas  $m_2x_1x_2x_3$ , con  $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \equiv (x_1, x_2, x_3)$  y  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3 \equiv (F_1, F_2, F_3)$ , la segunda de las ecuaciones vectoriales de (A.16) da lugar a tres ecuaciones escalares de segundo orden,

$$\mu \ddot{x}_i = F_i(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{A.17})$$

para las funciones incógnita  $x_1, x_2$  y  $x_3$ .

A continuación, recordando el enunciado de la Tercera Ley de Newton (Scheck, (2005), §1.1, p. 2),

*“Para toda acción existe siempre una reacción igual y opuesta; o bien, las acciones mutuas de dos cuerpos cualesquiera son siempre iguales y orientadas de manera opuesta a lo largo de la misma recta”*,

las fuerzas  $\mathbf{F}_{21}$  y  $\mathbf{F}_{12}$  actúan en cada instante según la dirección de la recta que en dicho instante pasa por ambas partículas, pero en sentidos opuestos. Es decir, estas fuerzas son en todo instante colineales con el vector  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$ , por lo que –en definitiva– se concluye que  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  es colineal con  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{donde } \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad (\text{A.18})$$

es el vector unitario en la dirección del vector de la posición relativa de una de las masas respecto de la otra, es decir, el vector unitario en la “dirección radial”; por lo tanto la fuerza que actúa sobre la partícula de masa  $\mu$  pasa siempre por un punto fijo (que en este caso, debido a la elección del sistema de referencia  $m_2 x_1 x_2 x_3$ , coincide con el origen de coordenadas, origen del vector  $\mathbf{r}$ ). Esto significa que la función vectorial  $\mathbf{F}$  dada en (A.18), y que en general puede depender de la posición de la partícula, de su velocidad y del tiempo, es una *fuerza central*<sup>4</sup> (Thiry 1970, Capítulo II, §1, p. 45; Heil y Kitzka 1984, Capítulo 1, §1.3, §§§1.3.2.4, p. 35; Schneider 1992, Capítulo 2, §2.3, §§2.3.3, Ec. (2.35), p. 24). Se dice que esta fuerza central es *atractiva* cuando  $f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) < 0$ , y *repulsiva* cuando  $f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) > 0$  (Schneider 1992, Capítulo 2, §2.3, §§2.3.4, pp. 27–28). La intensidad o magnitud de esa fuerza viene caracterizada por la norma del vector  $\mathbf{F}$ , que en este caso general es

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\| = |f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})|. \quad (\text{A.19})$$

De este modo, **el problema de resolver el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales del movimiento (A.1) para el sistema de dos cuerpos bajo fuerzas internas se reduce a dos problemas desacoplados, equivalente cada uno de ellos a un problema de un solo cuerpo**, a saber:

- **PROBLEMA DEL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS:** movimiento (respecto de la referencia inercial  $\mathcal{O}_{x_1 x_2 x_3}$ ) de una partícula de masa  $M = m_1 + m_2$  (MASA TOTAL DEL SISTEMA) cuya posición en cada instante queda localizada por medio del vector  $\mathbf{r}_c(t)$ , velocidad instantánea  $\dot{\mathbf{r}}_c(t)$  y aceleración  $\ddot{\mathbf{r}}_c(t)$ . Su movimiento es solución de la ecuación lineal y homogénea  $M \ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{0}$  para la función incógnita

---

<sup>4</sup>No hemos encontrado en la literatura acuerdo unánime en cuanto al uso de la terminología. La mayoría de los autores se limita a considerar para la definición de “FUERZA CENTRAL” el caso particular de *fuerzas centrales conservativas*, en las que la dependencia funcional del campo vectorial se reduce a  $\mathbf{F}(-, \mathbf{r}, -) = f(-, \|\mathbf{r}\|, -) \hat{\mathbf{r}} = f(r) \hat{\mathbf{r}}$ .

Schneider (1992), Capítulo 2, §2.3, §§2.3.3, p. 27, Ec. (2.62), utiliza para esta situación de fuerzas centrales conservativas la denominación de *fuerzas centrales en el sentido más restringido del término (Zentralkräfte im engeren Sinne)*.

Heil y Kitzka (1984), p. 35, Ec. (1.58), denominan *leyes de fuerzas centrales (Zentralkraftgesetze)* a la clase de leyes de fuerzas que responden a la expresión general (A.18), y reservan el nombre de *campos de fuerzas centrales (Zentralkraftfelder)*, Ec. (1.65), p. 37 para los de la forma  $\mathbf{F}(-, \mathbf{r}, -) = f(-, \mathbf{r}, -) \hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}$ , que en general son no conservativos.

Véase más adelante el tratamiento más detallado del caso conservativo.

$\mathbf{r}_c(t)$ , por lo que –dependiendo de las condiciones iniciales– el centro de masas se desplaza en el espacio a lo largo de una recta y con velocidad constante (MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME) o permanece en REPOSO. Se trata del **movimiento libre (en ausencia de fuerzas externas) de un solo cuerpo en el espacio**.

- PROBLEMA DEL MOVIMIENTO RELATIVO: movimiento de una partícula de masa  $\mu$  (MASA REDUCIDA DEL SISTEMA) cuya posición (contemplada desde la masa  $m_2$ ) viene caracterizada en cada instante por medio del vector  $\mathbf{r}(t)$ , que marcaba la posición relativa de  $m_1$  vista desde  $m_2$ ; su velocidad instantánea es  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , y su aceleración es  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ . El movimiento relativo se obtiene como solución de la ecuación diferencial  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}$  para la función incógnita  $\mathbf{r}(t)$ , situación que aparece como un caso particular de **movimiento de una masa puntual en el seno de un campo de fuerzas central**. En el caso concreto en el que las masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  originales están únicamente sometidas a la fuerza de su mutua atracción gravitatoria (regida por la Ley de Gravitación Universal de Newton), se verá que LAS ÓRBITAS SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE KEPLER SON CÓNICAS, CON  $m_2$  EN UNO DE SUS FOCOS, parametrizadas por medio de variables auxiliares (anomalías) de tipo angular; la posición de la partícula móvil de masa  $\mu$  a lo largo de la órbita (cónica con foco en  $m_2$ ) se determina a través de la correspondiente *ley horaria del movimiento*, que recoge la relación entre un parámetro de tipo angular (del tipo de una anomalía excéntrica) y el tiempo  $t$ : *ecuación de Kepler* en el caso de órbitas elípticas o hiperbólicas, o *ecuación de Barker* en las órbitas parabólicas.

## A.2. Problema del movimiento relativo. Movimiento en un campo central.

Se acaba de ver que el problema del movimiento del centro de masas ha quedado completamente resuelto, y ahora se abordará el estudio detallado del problema del movimiento relativo, que se ha llevado a la forma del problema del movimiento de una masa puntual ficticia, de masa  $\mu$ , en el seno de un campo de fuerzas central:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{A.20})$$

Esta ecuación vectorial es equivalente al sistema de tres ecuaciones diferenciales escalares

$$\begin{aligned}\mu \ddot{x}_i &= F_i(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \\ &= f(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.21})\end{aligned}$$

Para realizar dicho estudio se considera a continuación el sistema de referencia con origen coincidente con el centro de fuerzas (en este caso, el punto ocupado por la partícula  $m_2$ , origen del vector  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ), y ejes paralelos a los del sistema  $\mathcal{O}x_1x_2x_3$  de partida. Se entiende, pues, que se trata de un sistema de coordenadas con origen en  $m_2$ , cuya posición sirve de apoyo a una base de  $\mathbf{R}^3$ , ortonormal y positivamente orientada,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

Se introduce el vector *momento angular*  $\mathbf{G}$  de  $\mu$  (respecto de dicho origen) como el momento (respecto del origen elegido<sup>5</sup>) de su momento lineal  $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$ , es decir,

$$\mathbf{G} := \mathbf{G}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} = \mu (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (\text{A.22})$$

La variación temporal de este vector viene descrita por la derivada

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (\text{A.23})$$

donde se ha supuesto masa constante y se ha utilizado la Segunda Ley de Newton en la forma dada en la segunda ecuación de (A.16), o en (A.20). Esto indica que la causa que gobierna el cambio del momento angular de  $\mu$  a lo largo del tiempo es el momento de la fuerza (externa, debida al campo central) que actúa sobre dicha partícula.

Pero en el caso de fuerzas centrales, ecuación (A.18) o (A.20), como los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$  son colineales, dicho momento es nulo, por lo que el vector momento angular permanece constante a lo largo del movimiento:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{r} \times \{ f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \} = \mathbf{0} \implies \mathbf{G}(t) = \overrightarrow{\text{cte}}. \quad (\text{A.24})$$

Dicho vector constante puede determinarse a partir de las condiciones iniciales (A.6):

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(t_0) = \mu (\mathbf{r}^{(0)} \times \dot{\mathbf{r}}^{(0)}) = \mu (\mathbf{r}^{(0)} \times \mathbf{v}^{(0)}) \equiv \mathbf{G}^{(0)}, \quad (\text{A.25})$$

<sup>5</sup>En lo sucesivo se omitirá, en general, la mención explícita al origen de momentos, si dicha omisión no causa confusión o ambigüedad.

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

o bien, en componentes respecto de la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ,

$$G_\ell(t) = G_\ell(t_0) = G_\ell^{(0)}, \quad \ell = 1, 2, 3. \quad (\text{A.26})$$

Esto significa que el vector momento angular es una integral primera (vectorial) de la ecuación diferencial que en (A.16), o en (A.20), rige el movimiento relativo. Gracias a las tres integrales primeras escalares aportadas por las tres componentes de  $\mathbf{G}$ , el problema puede reducirse ahora de orden 6 a orden 3.

Otra consecuencia importante de esta conservación del momento angular es que *el movimiento transcurre siempre en un mismo plano*. Nótese que los vectores posición  $\mathbf{r}(t)$  y velocidad  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , si no son colineales, generan en cada instante un plano (que pasa por el origen de coordenadas)  $\Pi(t) = \langle \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle$ , llamado *plano instantáneo del movimiento*, o *plano orbital instantáneo*. Por su propia definición,  $\mathbf{G}(t)$  es ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  y a  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , y por lo tanto es ortogonal a todo vector del plano subtendido por dichos vectores, que es precisamente  $\Pi(t)$ . En consecuencia,  $\mathbf{G}(t)$  es un vector normal al plano  $\Pi(t)$ . Pero si  $\mathbf{G}(t) \equiv \overrightarrow{\text{cte.}}$ , esto significa que el plano ortogonal a  $\mathbf{G}(t)$  que pasa por el origen es el mismo en todo instante, los vectores posición y velocidad están siempre contenidos en el mismo plano, y el plano del movimiento es un plano fijo.

La ecuación implícita de este plano fijo se deduce del hecho de que se trata del plano de todos los vectores ortogonales al vector constante  $\mathbf{G}$ , cuyas componentes en el sistema de coordenadas  $m_2x_1x_2x_3$  se han denotado (véase (A.26) más arriba) como  $(G_1^{(0)}, G_2^{(0)}, G_3^{(0)})$ . Si  $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \equiv (x_1, x_2, x_3)$  ha de ser un vector que yace en el plano del movimiento, deberá cumplir la condición de ortogonalidad

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{r} = 0 \iff \Pi \equiv G_1^{(0)}x_1 + G_2^{(0)}x_2 + G_3^{(0)}x_3 = 0. \quad (\text{A.27})$$

Por lo tanto, el estudio del movimiento relativo puede reducirse a su estudio en el seno del plano orbital. Esta ecuación de  $\Pi$  permite despejar una de las variables  $x_\ell$  en función de las otras dos, quedando así eliminada esa variable durante el resto del tratamiento del problema.

En lugar de proceder de esta manera, parece preferible pasar a considerar el estudio del movimiento relativo por medio de unas variables conveniente-

mente elegidas *dentro del propio plano orbital*, obviando por el momento su referencia a coordenadas ajenas al plano.

Con este propósito se elige en el plano fijo del movimiento un sistema rectangular cartesiano  $m_2xy$ , con ejes orientados según las direcciones de unos vectores unitarios y ortogonales  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  sobre cuyas direcciones y sentidos no se impone por ahora ninguna condición, salvo la de que formen un sistema dextrógiro.

Referidos a esta base, los vectores contenidos en este plano (como, por ejemplo, los vectores posición, velocidad, aceleración, momento lineal, fuerza, etc.) se pueden representar como

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \equiv (x, y), \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \equiv (\dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \equiv (\ddot{x}, \ddot{y}), \\ \mathbf{p} &= p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} \equiv (p_x, p_y), \quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \equiv (F_x, F_y), \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Por otra parte, el sistema de vectores  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  se puede completar hasta una base de  $\mathbf{R}^3$ , adjuntando cualquier vector de  $\mathbf{R}^3$  que no pertenezca al plano  $\Pi$  (y que, por lo tanto, será linealmente independiente con  $\mathbf{i}$  y con  $\mathbf{j}$ ). Si se desea que la base así obtenida sea una base ortonormal directa de  $\mathbf{R}^3$ , como  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  ya eran ortonormales y formaban un sistema dextrógiro, bastará con adjuntarles un tercer vector unitario que sea ortogonal al plano del movimiento y que, junto con  $\mathbf{i}$  y con  $\mathbf{j}$ , complete un triedro positivamente orientado. Pero ya se sabe que el vector momento angular  $\mathbf{G}$  es perpendicular a  $\Pi$ , por lo que normalizándolo quedará definiendo un tercer vector unitario

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\|\mathbf{G}\|} \mathbf{G} = \frac{1}{G} \mathbf{G} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad (\text{A.29})$$

de manera que  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  constituye ahora una base ortonormal directa del espacio ordinario, respecto de la cual los vectores del plano  $\Pi$  tiene nula su tercera componente,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \equiv (x, y, 0), \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, 0), \\ \mathbf{F} &= F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \equiv (F_x, F_y, 0), \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

mientras que los vectores  $\mathbf{D}$  que no pertenecen a  $\Pi$  obedecen en general a expresiones del tipo

$$\mathbf{D} = D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k} \equiv (D_x, D_y, D_z). \quad (\text{A.31})$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

En particular, para el vector momento angular se tiene ahora

$$\mathbf{G} = (0, 0, G_z), \text{ con } G_z = \mu (x \dot{y} - y \dot{x}), \text{ y } \|\mathbf{G}\| = G = |G_z|. \quad (\text{A.32})$$

Por tratarse de un vector constante, sus tres componentes escalares deberán ser constantes. Las dos primeras,  $G_x = 0$ ,  $G_y = 0$ , evidentemente lo son, y el valor numérico de esas constantes es –precisamente– cero; para la tercera se tiene  $G_z = \mu (x \dot{y} - y \dot{x}) = \text{cte.}$ , cuyo valor está relacionado con el valor de la norma de  $\mathbf{G}$ ; pero dicho valor ya es conocido a partir de las condiciones iniciales, que permiten evaluar  $G(t) = \|\mathbf{G}(t)\| = \|\mathbf{G}(t_0)\| = \|\mathbf{G}^{(0)}\| \equiv G = \text{cte.}$

Formulado el problema del movimiento relativo, ecuaciones (A.16), (A.20) o (A.21), en las coordenadas cartesianas  $xy$  tomadas en el plano orbital, la ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\mu \ddot{x} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \mu \ddot{y} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (\text{A.33})$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para las funciones incógnita  $x$  e  $y$ . A primera vista podría pensarse que se trata de un sistema diferencial de orden 4; pero entre las cuatro variables  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  se verifica la relación  $x \dot{y} - y \dot{x} = \text{constante}$ , que era consecuencia de la conservación del momento angular orbital  $\mathbf{G}$  y de (A.32). Esto permite eliminar alguna de estas cuatro variables en función de las otras tres, y rebajar el orden diferencial del problema en una unidad. En conclusión, en esta versión del problema se recupera de nuevo el resultado, ya conocido y anteriormente mencionado, de que la integral (vectorial) del momento angular permite llevar –al menos formalmente– el problema del movimiento relativo a un problema diferencial de orden 3.

Para intentar alcanzar un mejor conocimiento de este problema, manteniendo todavía el grado de generalidad con el que se ha procedido hasta ahora, conviene reformularlo en coordenadas polares planas tomadas en el plano del movimiento. Con el mismo origen en  $m_2$  que las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , se introduce un sistema de coordenadas polares  $(r, \varphi)$  en el plano orbital, a través de las ecuaciones del cambio de variables dependientes

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (\text{A.34})$$

cuya transformación inversa viene dada por las expresiones

$$r = + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x). \quad (\text{A.35})$$

Estas coordenadas tienen asociadas en cada punto del plano las direcciones *radial*, según el vector unitario  $\mathbf{e}_r \equiv \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ , y *transversal*, según la dirección del vector unitario  $\mathbf{e}_\varphi$  obtenido al hacer rotar al vector  $\mathbf{e}_r$  un ángulo de  $\pi/2$  radianes en sentido positivo (es decir, en sentido antihorario, o contrario al del movimiento de las agujas de un reloj). Por lo tanto, a cada punto del plano se puede asociar una base móvil ortonormal y directa formada por los vectores  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\varphi$ , que puede completarse hasta una base ortonormal directa del espacio ordinario  $\mathbf{R}^3$  por medio del vector  $\mathbf{k} = \mathbf{G}/G$  anteriormente considerado en (A.29).

En coordenadas polares, algunas de las variables cinemáticas y dinámicas, ecuaciones (A.28) y (A.30), utilizadas hasta ahora, adoptan la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = f(t, r, \dot{r}) \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Para vectores  $\mathbf{D}$ , ecuación (A.31), que no estén contenidos en el plano  $\Pi$  del movimiento, su expresión en la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k})$  será

$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r + D_\varphi \mathbf{e}_\varphi + D_z \mathbf{k}. \quad (\text{A.37})$$

En particular, para el vector momento angular, ecuación (A.32), se tiene ahora

$$\mathbf{G} = G_z \mathbf{k}, \quad \text{con } G_z = \mu r^2 \dot{\varphi}, \quad \text{y } \|\mathbf{G}\| = G = |G_z|. \quad (\text{A.38})$$

A partir de las ecuaciones (A.16), (A.20) o (A.21), se habían obtenido las ecuaciones de Newton (A.33) para el problema del movimiento relativo, que –en coordenadas polares planas– serán ahora

$$\begin{aligned} \mu (\ddot{\mathbf{r}})_{radial} &= \mathbf{F}_{radial} \implies \mu (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = f(t, r, \dot{r}) = \\ &= f_{polares}(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\mu (\ddot{\mathbf{r}})_{transversal} = \mathbf{F}_{transversal} \implies \mu (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) = 0, \quad (\text{A.40})$$

que en apariencia forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para las funciones incógnita  $(r, \varphi)$ , y el problema es de orden cuatro. Pero multiplicando ambos miembros de la última ecuación por  $r$ , se tiene

$$\mu (2 r \dot{r} \dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi}) = 0 \implies \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0 \implies \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{cte.}, \quad (\text{A.41})$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

relación que representa una integral primera del sistema diferencial anterior (inmediatamente reconocible, a la vista de (A.38), como la tercera componente,  $G_z$ , del vector momento angular, o como la norma,  $G$ , de dicho vector), por lo que en realidad se ha llevado el problema a orden tres. De manera que ahora el sistema (A.39)–(A.40) puede reescribirse en la forma

$$\mu (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = f_{polares}(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \quad \mu r^2 \dot{\varphi} = G = \text{cte.}, \quad (\text{A.42})$$

claramente de orden tres. Esta última ecuación, que en coordenadas polares planas representa la conservación del momento angular, permite despejar  $\dot{\varphi}$  en función de  $r$ ,

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(r) = \frac{G}{\mu r^2}, \quad (\text{A.43})$$

gracias a lo cual la variable  $\dot{\varphi}$  puede eliminarse de la formulación del problema, con lo que se obtiene el sistema diferencial

$$\mu \left( \ddot{r} - \frac{G^2}{\mu^2 r^3} \right) = \widehat{f}_{polares}(t, r, \varphi, \dot{r}, -), \quad \dot{\varphi} = \frac{G}{\mu r^2}, \quad \text{con } G = \text{cte.} \quad (\text{A.44})$$

Además, las ecuaciones (A.41) o (A.43) permiten considerar la transformación diferencial de la variable independiente  $t \rightarrow \varphi$  dada por la relación diferencial

$$dt = \frac{\mu r^2}{G} d\varphi, \quad (\text{A.45})$$

cambio de variable independiente que reemplaza el tiempo físico  $t$  por el ángulo polar  $\varphi$  a través de lo que se conoce como una transformación generalizada de tipo Sundman.

Otra consecuencia importante de la conservación del momento angular en el caso del movimiento en campos de fuerzas centrales es la *ley de la áreas*, generalización del resultado originalmente establecido por Kepler para el movimiento de los planetas en el seno del Sistema Solar bajo la forma de la *Segunda Ley de Kepler*, pero cuya validez queda ahora justificada *para cualquier fuerza central* (no necesariamente conservativa ni descrita por la Ley de atracción gravitatoria de Newton).

A la vista de la definición (A.22) del vector momento angular y de los resultados de las ecuaciones (A.24), (A.32), (A.38), (A.41) se concluye que la cantidad

$$\|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = |x\dot{y} - \dot{x}y| = r^2 \dot{\varphi} = G/\mu \quad (\text{A.46})$$

es constante. Pero precisamente esta cantidad está relacionada con la *velocidad areolar instantánea* del movimiento,

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\|, \quad (\text{A.47})$$

que mide el área barrida por el vector de posición en la unidad de tiempo (Abad 2012, Capítulo 6, §6.2, p. 99, y §6.4, p. 103; Boccaletti y Pucacco 1996, Capítulo 2, §2.1, p. 129; Cid y Camarena 1979, Capítulo II, §6, pp. 47–48; Goldstein 1980, Capítulo 3, §3.2, p. 73 y Capítulo 3, §3.8, p. 100; Arnold, Kozlov y Neishtadt 1997, Capítulo 2, §2.1, pp. 49–50; Bond y Allman 1996, Capítulo 3, §3.2, pp. 34–36; Heil y Kitzka 1984, Capítulo 1, §1.3, §§1.3.2.4, p. 36; Schneider 1992, Capítulo 2, §§2.3.2, p. 23), con lo que queda establecido que “el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales”, “las áreas barridas por el vector de posición son proporcionales a los tiempos empleados para hacerlo”, o cualquier enunciado equivalente:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \frac{G}{2\mu} = \text{cte.} \quad (\text{A.48})$$

Por este motivo, en muchas ocasiones se habla de la integral primera del momento angular como de *la integral de las áreas* o *la constante de las áreas*.

En el caso particular del *problema gravitatorio de dos cuerpos*, en el que la interacción entre las partículas viene descrita por la Ley de Gravitación Universal de Newton, al considerar las soluciones de dicho problema que sean *elipses*, la integración de esta última ecuación a lo largo de una revolución completa de la partícula en torno al centro atractor permite deducir la *Tercera Ley de Kepler*.

### A.3. Caso de campos centrales conservativos. Método de Binet.

El caso de fuerza central que con mayor frecuencia aparece tratado en los libros de Mecánica, el de *fuerzas centrales conservativas*, es aquél en el que la dependencia funcional del campo vectorial se reduce a una forma particularmente sencilla:

$$\mathbf{F}(-, \mathbf{r}, -) = f(-, \|\mathbf{r}\|, -) \hat{\mathbf{r}} = f(r) \hat{\mathbf{r}} = f(r) \mathbf{e}_r. \quad (\text{A.49})$$

Se demuestra (Scheck, 2005, Capítulo 1, §1.7, p. 13, y §1.15, Ejemplo (i), p. 31; Heil y Kitzka (1984), Capítulo 1, §1.3, §§§1.3.2.4, p. 37) que entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (f(r) \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.50})$$

con lo que, en efecto, el campo vectorial  $\mathbf{F}$  es *conservativo*<sup>6</sup>, y (de acuerdo con los resultados del Análisis Vectorial) existe un campo escalar  $V$  de la variable escalar  $r$  tal que<sup>7</sup>

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V(\|\mathbf{r}\|)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{A.51})$$

El *potencial*  $V$  es, salvo una constante aditiva,

$$V(r) = -\int f(r) dr. \quad (\text{A.52})$$

Equivalentemente,

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}. \quad (\text{A.53})$$

En virtud de la ecuación (A.49), estos campos centrales presentan “simetría central” (también se usan como sinónimos las expresiones “simetría radial”, “simetría esférica” o “simetría bajo rotaciones”): a efectos de determinar la intensidad de la fuerza que actúa sobre un punto a una distancia

<sup>6</sup>Goldstein (1980), Capítulo 1, §1.1, pp. 3–5; Heil y Kitzka (1984), Capítulo 1, §1.3, §§§1.3.2.3, pp. 33–35; Scheck (2005), Capítulo 1, §1.15, pp. 29–30.

<sup>7</sup>En Mecánica se dice que la fuerza es “el ‘menos’ gradiente de un potencial”, o “el opuesto del gradiente de un potencial”, por conveniencia en el uso de las notaciones al establecer el Teorema de Conservación de la Energía. En Análisis Vectorial se dice que un campo vectorial es conservativo si existe un campo escalar  $\Phi$  cuyo gradiente permite reconstruir el campo vectorial:  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ .

dada del centro de fuerzas, *todas las direcciones del espacio son equivalentes*. En este sentido se dice que estos campos son *isótopos* (no hay en el espacio ninguna dirección privilegiada), y todos los puntos del espacio que equidistan del centro de fuerzas (y, por lo tanto, están situados sobre una superficie esférica de radio dado y con centro en el centro de fuerzas) están sometidos a una fuerza de la misma intensidad (sólo difiere la dirección a lo largo de la cual actúa dicha fuerza en cada punto).

Recordando cómo se ha llegado a un problema de fuerzas centrales a partir del estudio del movimiento de *dos partículas libres* (no sometidas a ninguna fuerza externa, ajena al propio sistema de las dos partículas) *en interacción* (sólo sometidas a sus influencias mutuas a través de fuerzas de acción y reacción), se está suponiendo ahora que la intensidad de dicha interacción no depende más que de la distancia  $r$  entre las masas puntuales en cada instante; es decir, “sólo depende de la configuración del sistema de las dos partículas, y no de la posición del mismo en el espacio” (Thiry 1970, Capítulo II, §14, p. 65.).

En esta situación, veremos que el problema puede tratarse por medio del *método de Binet* (Boccaletti y Pucacco 1996, Capítulo 2, §2.1, pp. 134–136; D’Eliseo 2007, §II, p. 353; Goldstein 1980, Capítulo 3, §3.5, pp. 85–86, y §3.7, p. 94; Cid y Camarena 1979, Capítulo V, §7, pp. 124–126, y §8, pp. 126–128; Schneider 1992, Capítulo 2, §§2.3.3, pp. 26–27; Thiry 1970, Capítulo II, §1, pp. 44–46, y §7, pp. 52–53; Arnold, Kozlov y Neishtadt 1997, Capítulo 2, §2.1, pp. 50–52, aunque estos autores atribuyen la técnica a Clairaut).

Antes de proceder a aplicar dicho método, conviene hacer algunas consideraciones y cálculos preliminares. Las ecuaciones de movimiento (A.42) quedan como

$$\mu (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = f(r), \quad \mu r^2 \dot{\varphi} = G = \text{cte.}, \quad (\text{A.54})$$

ecuaciones que pueden desacoplarse utilizando (A.43) para eliminar  $\dot{\varphi}$  en la primera de ellas y convertirla en una ecuación diferencial de segundo orden para la variable radial  $r$  como función incógnita de la variable independiente  $t$ :

$$\mu \left( \ddot{r} - \frac{G^2}{\mu^2 r^3} \right) = f(r) \implies \mu \ddot{r} = f(r) + \frac{G^2}{\mu r^3} = f_{ef}(r), \quad (\text{A.55})$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

donde  $f_{ef}$  es la “*fuerza efectiva*”, resultado de superponer a la fuerza “real”  $f$  una fuerza “ficticia” (de naturaleza no inercial y de magnitud  $G^2/\mu r^3$ ) introducida por el uso de un sistema rotante de coordenadas asociado a la base móvil formada por los vectores  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\varphi$ .

Esta última ecuación (A.55) puede ahora interpretarse como la ecuación del movimiento unidimensional de una partícula de masa  $\mu$ , a lo largo de una recta en la cual la posición de  $\mu$  en cada instante (su distancia al origen) queda caracterizada por la coordenada  $r$ , bajo la acción de una fuerza externa  $f_{ef}(r)$ .

La resolución de este “*problema unidimensional equivalente*” para la variable radial  $r$ , si fuese posible, permitiría obtener la solución general de (A.55) como una familia biparamétrica de funciones de  $t$  dependiente de dos constantes arbitrarias de integración,

$$r = r(t; C_1, C_2), \quad (\text{A.56})$$

por lo que el problema del movimiento relativo habría quedado reducido a un problema diferencial de orden uno que, en realidad, se resolvería formalmente por cuadratura a partir de (A.43):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{\mu [r(t; C_1, C_2)]^2} \implies \varphi = \varphi(t; C_1, C_2, C_3). \quad (\text{A.57})$$

En conclusión, si fuese posible completar con éxito este procedimiento, el problema del movimiento de la partícula de masa  $\mu$  en el seno del campo central conservativo considerado habría quedado resuelto, pues se dispondría en coordenadas polares planas de una representación paramétrica de las soluciones dada por las expresiones (A.56) y (A.57), con  $t$  como parámetro de la representación. Invirtiendo los sucesivos cambios de variables dependientes que se han ido efectuando anteriormente, se obtendría la solución del problema del movimiento relativo en los diferentes sistemas de coordenadas (en el plano  $\Pi$  del movimiento y en el espacio tridimensional) utilizados hasta ahora.

La ecuación (A.55) será, en general, no lineal y presenta, además, una singularidad para  $r = 0$  (salvo que, en algunos casos particulares, el término en  $r^{-3}$  se vea compensado por un término análogo en la función  $f(r)$ , sin

que esa función sea a su vez fuente de otras posibles singularidades).

El *método de Binet* consiste en transformar esta ecuación diferencial (A.55) por medio de un cambio de variable dependiente  $r \rightarrow u$  y un cambio de variable independiente  $t \rightarrow \phi$ . La nueva función incógnita  $u$  suele elegirse como el recíproco de la distancia  $r$ ; y es habitual utilizar como nueva variable independiente  $\phi$  el propio ángulo polar  $\varphi$  (u otro que sólo difiera de éste a través de una constante aditiva), aprovechando para ello las expresiones (A.41) o (A.43):

$$r \rightarrow u : r = \frac{1}{u}, \quad t \rightarrow \varphi : \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi} = \frac{G}{\mu} u^2 \frac{d}{d\varphi}, \quad (\text{A.58})$$

con lo que para los operadores diferenciales de segundo orden se tendrá la relación

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{2G^2}{\mu^2} u^3 u' \frac{d}{d\varphi} + \frac{G^2}{\mu^2} u^4 \frac{d^2}{d\varphi^2}, \quad \text{donde } ( )' \equiv \frac{d}{d\varphi}, \quad (\text{A.59})$$

es decir, se ha usado la “notación de primas” para las “derivadas respecto de la nueva variable independiente”.

Aplicando estos operadores a la función  $r$ , y teniendo en cuenta el cambio de función incógnita  $r = 1/u$ ,

$$\dot{r} = -\frac{G}{\mu} u', \quad \ddot{r} = -\frac{G^2}{\mu^2} u^2 u'', \quad (\text{A.60})$$

y la ecuación (A.55) se transforma en

$$u'' + u = -\frac{\mu}{G^2} \left\{ \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \right\}, \quad (\text{A.61})$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden para la función incógnita  $u$  de la variable independiente  $\varphi$ . Se suele decir que es la *ecuación diferencial de la órbita*. También se llama *ecuación de Binet*.

El primer miembro de esta ecuación tiene la forma correspondiente a una ecuación diferencial lineal de segundo orden y coeficientes constantes que describe oscilaciones armónicas con frecuencia unidad.

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

A la vista de la expresión del segundo miembro de (A.61), ciertas elecciones de la función  $f(r) = f(1/u)$  permiten ahora obtener, efectivamente, la ecuación de un oscilador. Para detectar los posibles casos favorables, se considera

$$f(r) = \frac{B_n}{r^{-n}} \implies f\left(\frac{1}{u}\right) = B_n u^n \implies u'' + u = -\frac{\mu B_n}{G^2} u^{n-2}, \quad (\text{A.62})$$

donde  $B_n$  es una constante. Esta ecuación diferencial será lineal y de coeficientes constantes si el exponente de  $u$  en el segundo miembro es  $n - 2 = 0$  o  $n - 2 = 1$ ; es decir,  $n = 2$  o  $n = 3$ . De manera que se tiene

$$n = 2 \implies u'' + u = -\frac{\mu B_2}{G^2}, \quad (\text{A.63})$$

$$n = 3 \implies u'' + u = -\frac{\mu B_3}{G^2} u \implies u'' + \left(1 + \frac{\mu B_3}{G^2}\right) u = 0. \quad (\text{A.64})$$

En el primer caso la variable  $u$  ejecuta oscilaciones forzadas con frecuencia unidad, siendo el forzamiento constante el representado por el término no homogéneo de la ecuación. El segundo caso es el de una ecuación homogénea, pero la frecuencia ya no es la unidad, sino  $\sqrt{1 + \frac{\mu B_3}{G^2}}$ .

Nótese ahora que una combinación de ambos casos también da lugar a una ecuación lineal con coeficientes constantes; pero entonces la ecuación es no homogénea (por efecto del exponente  $n = 2$ ), y se modifica la frecuencia unidad (debido al término con  $n = 3$ ):

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{B_2}{r^{-2}} + \frac{B_3}{r^{-3}} \implies f\left(\frac{1}{u}\right) = B_2 u^2 + B_3 u^3 \implies \\ &\implies u'' + \left(1 + \frac{\mu B_3}{G^2}\right) u = -\frac{\mu B_2}{G^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Dentro de este esquema de combinación de los casos con  $n = 2$  y  $n = 3$  encajan algunos modelos notables de campos centrales conservativos estudiados con detalle en la literatura: lo que Deprit denomina *sistemas cuasi-keplerianos* (Deprit 1981, §4, pp. 124–128; Baxter 1980; Caballero y Elife, 2001), o el *problema de Manev* (Bertrand 1921; Maneff 1930; Mioc y Stoica 1995, I y II). El *modelo de Manev* de fuerza gravitatoria (o de su potencial) constituye una modificación post-newtoniana no relativista de la Ley de Gravitación de Newton que se ha usado con éxito para explicar con gran precisión el movimiento secular del pericentro de las órbitas de algunos cuerpos celestes, al menos en el seno del Sistema Solar (por ejemplo, el avance del perihelio

de los planetas interiores, o el movimiento del perigeo de la Luna). En realidad ya Clairaut propuso para la Ley de atracción de Newton correcciones de este tipo para justificar las desviaciones observadas en el aparentemente anómalo movimiento secular del perigeo de la Luna, e incluso el propio Newton (*Principia*, Libro I, Sección IX, Proposición XLIV) abordó esta cuestión en su teorema sobre órbitas en precesión (véase, por ejemplo, D'Eliseo 2007, §III; Goldstein 1980, Capítulo 3, p. 123, Ejercicio 14, y Capítulo 11, §11.3, Ejemplo B, final de la página 510; Scheck 2005, Apéndice del Capítulo 1, Ejemplo Práctico 3, pp. 82–83, y Ejercicios del Capítulo 1, Ejercicio 1.15, p. 441, con resolución en las páginas 471–472).

En resumidas cuentas, el método de Binet ha permitido identificar casos de fuerzas centrales conservativas para las cuales el problema del movimiento puede tratarse por medio de la teoría de las *ecuaciones lineales de coeficientes constantes (homogéneas o no)* para la función incógnita  $u = 1/r$  de la variable independiente  $\varphi$ .

Estas conclusiones son consistentes con los resultados (véanse capítulos anteriores en esta Tesis) obtenidos empleando conjuntos canónicos de variables focales, y ya anticipados por algunos trabajos acerca de la linealización exacta de ciertos sistemas keplerianos perturbados (Ferrándiz y Fernández-Ferreirós 1991; Aparicio y Floría 1996, 1997, 1998, 2000).

Si para exponentes naturales  $n \geq 4$  y  $B_n$  de pequeña magnitud (en comparación con el término dominante correspondiente a  $n = 2$ ) se considerasen modelos de campos de fuerza central conservativa de la forma

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{B_2}{r^{-2}} + \frac{B_n}{r^{-n}} \implies f\left(\frac{1}{u}\right) = B_2 u^2 + B_n u^n \implies \\ \implies u'' + u &= -\frac{\mu B_2}{G^2} - \frac{\mu B_n}{G^2} u^{n-2}, \end{aligned} \tag{A.66}$$

podría interpretarse esta última ecuación como la de un oscilador sometido a pequeños efectos no lineales del orden de  $B_n u^{n-2}$ . Un tratamiento alternativo, en el marco de una teoría canónica de perturbaciones, puede encontrarse en Goldstein (1980), Capítulo 11, §11.3, Ejemplos B, pp. 509–512, y C, pp. 512–515 (este último, con  $n = 4$ , inspirado en el Problema Fundamental de la Teoría de Satélites Artificiales de la Tierra, una versión del cual aparece en este mismo libro de Goldstein, Capítulo 5, §5.8, pp. 225–229 y pp. 231–232).

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

Cabe destacar que el modelo

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{B_2}{r^{-2}} + \frac{B_4}{r^{-4}} \implies f\left(\frac{1}{u}\right) = B_2 u^2 + B_4 u^4 \implies \\ \implies u'' + u &= -\frac{\mu B_2}{G^2} - \frac{\mu B_4}{G^2} u^2, \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

también engloba el del problema del movimiento orbital perturbado de un satélite artificial en el plano ecuatorial de la Tierra, cuando la única perturbación que actúa sobre él es la debida al segundo armónico zonal del desarrollo del geopotencial en serie de armónicos esféricos (polinomios de Legendre). Véase, a este respecto, Jezewski (1983), p. 365, Ecuación (3), quien (a partir de una integral primera<sup>8</sup> de dicha ecuación (3) –la integral de la energía en formulación  $(u, \varphi)$ – y procediendo por separación de variables) resuelve este problema ecuatorial del  $J_2$  obteniendo –para el caso de órbitas ligadas– una solución analítica por medio de funciones e integrales elípticas. Este mismo modelo de ley de fuerzas se usa también para el estudio del movimiento del pericentro de órbitas elípticas en Relatividad General (Goldstein 1980, Capítulo 11, §11.3, Ejemplo B, pp. 511–512; D’Eliseo 2007, §IV).

Una clasificación de casos de campos centrales basados en leyes de fuerzas proporcionales a potencias *enteras* de la distancia  $r$  y que pueden resolverse por medio de *funciones circulares o elípticas* puede consultarse, por ejemplo, en Thiry (1970), Capítulo II, §5, pp. 50–51; o en Goldstein (1980), Capítulo 3, §3.5, pp. 88–90; en el Ejercicio 7, p. 122, de ese mismo Capítulo 3 se presentan exponentes *racionales* para los cuales las correspondientes leyes de fuerzas permiten la resolución del problema del movimiento en un campo central por medio de *integrales elípticas*.

Este método de Binet, aplicado con otros cambios de escala en la transformación de la variable independiente, conduce a resultados parecidos, pero cambian los coeficientes de la ecuación transformada. Los coeficientes pasan a depender de la constante de la norma del momento angular y/o de parámetros del problema (por ejemplo, la masa reducida). En efecto, si se efectuase una transformación diferencial de la variable independiente  $t \rightarrow \tau$  de la forma

$$dt = k_2 r^2 d\tau, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{k_2 r^2} \quad (\text{A.68})$$

---

<sup>8</sup>Cf. nuestra ecuación (A.76) más adelante.

donde  $k_2$  puede ser una constante numérica o una función de constantes del movimiento (integrales primeras) y/o de parámetros del sistema, y –como anteriormente– se cambiase  $r$  por  $1/u$ , los resultados serían

$$\dot{r} = -\frac{1}{k_2} u', \quad \ddot{r} = -\frac{1}{k_2^2} u^2 u'', \quad (\text{A.69})$$

donde ahora la “notación de primas” se refiere a “derivadas respecto de  $\tau$ ”, y la ecuación (A.55) se convertiría en

$$u'' + \frac{k_2^2 G^2}{\mu^2} u = -\frac{k_2^2}{\mu} \left\{ \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \right\}. \quad (\text{A.70})$$

En esta ocasión el primer miembro de la ecuación recuerda al de la ecuación de un oscilador cuya frecuencia está relacionada con la cantidad

$$\omega^2 \equiv \omega^2(k_2, G, \mu) = \frac{k_2^2 G^2}{\mu^2}. \quad (\text{A.71})$$

La ecuación de Binet (A.61) admite una integral primera, cuya deducción se presentará a continuación. Como paso preliminar, nótese que la ecuación (A.53), sometida al cambio de variable dependiente  $r \rightarrow u$  dado en (A.58), se convierte en

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = u^2 \frac{dV(1/u)}{du} \implies \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{dV(1/u)}{du}, \quad (\text{A.72})$$

por lo que ahora la ecuación de Binet puede reformularse en función del potencial  $V$  (cf. Boccaletti y Pucacco 1996, Capítulo 2, §2.1, Ecuación (2.24) de la página 135; Goldstein 1980, Capítulo 3, §3.5, Ecuación (3–34b) de la página 86):

$$u'' + u = -\frac{\mu}{G^2} \left\{ \frac{dV(1/u)}{du} \right\}. \quad (\text{A.73})$$

Para obtener una integral primera de (A.61) puede procederse del siguiente modo: multiplicando ambos miembros de (A.61) por el factor  $2u'$ ,

$$\begin{aligned} 2u'u'' + 2uu' &= -\frac{2\mu}{G^2} \left\{ \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \right\} u' \implies \\ \frac{d}{d\varphi} \left( (u')^2 + u^2 \right) &= \frac{2\mu}{G^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{d(1/u)}{d\varphi} \implies \\ (u')^2 + u^2 &= \frac{2\mu}{G^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right) d\left(\frac{1}{u}\right) + \text{cte.} \quad (\text{A.74}) \end{aligned}$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

Pero al transformar (A.52) de acuerdo con el cambio de función incógnita de (A.58) resulta que

$$V(1/u) = - \int f(1/u) d(1/u) , \quad (\text{A.75})$$

por lo que finalmente se llega a

$$(u')^2 + u^2 = - \frac{2\mu}{G^2} V(1/u) + \text{cte.}, \quad (\text{A.76})$$

que puede interpretarse (Thiry 1970, Capítulo II, §2, p. 47) como la “*integral de la energía*” del problema dado por (A.61), con  $\varphi$  como variable independiente. De este modo, gracias a esta integral primera, el problema del movimiento relativo habría quedado reducido a una ecuación diferencial de primer orden. A continuación se podría intentar resolver finalmente el problema por separación de variables y cálculo de primitivas a partir de (A.76), lo cual no necesariamente significa que esas cuadraturas puedan efectuarse por medio de funciones elementales. Tal es, precisamente, la opción de Jezewski (1983), p. 365, en su resolución (por medio de integrales elípticas) del caso ecuatorial del Problema Fundamental de la teoría del movimiento de un satélite artificial de la Tierra.

Tanto la ecuación de Binet, sea en su forma (A.61) o (A.73), como su integral primera (A.76), pueden utilizarse en un doble sentido, para tratar dos tipos de problemas (Cid y Camarena 1979, Capítulo V, §7, pp. 124–126):

- Conocido el modelo de fuerza central conservativa (sea a través de  $f(r) = f(1/u)$  o gracias a su potencial  $V(r) = V(1/u)$ ), determinar las órbitas solución  $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$  del problema del movimiento considerado, resolviendo (integrando) la ecuación diferencial en cuestión.
- Dada una curva  $r = r(\varphi) = 1/u(\varphi)$  en coordenadas polares, introduciendo la función  $u(\varphi)$  y sus derivadas respecto de  $\varphi$  en la ecuación deseada y despejando la función  $f$  o la función  $V$ , obtener los posibles campos centrales que admiten a dicha curva como solución.

Recordemos, finalmente, que –para un movimiento sometido a la ley de las áreas– las que en general se conocen como *fórmulas de Binet* expresan las

componentes radial y transversal (es decir, en el sistema de ejes móviles con vectores direccionales  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\varphi$ ) de los vectores velocidad y aceleración en función de  $u = 1/r$  y de sus derivadas respecto del ángulo polar  $\varphi$  (Thiry 1970, Capítulo II, §1, p. 45). Con las notaciones que se han venido usando hasta ahora, serán

$$\begin{aligned} \text{PRIMERA FÓRMULA DE BINET: } \quad \dot{\mathbf{r}} &= -\frac{G}{\mu} u' \mathbf{e}_r + \frac{G}{\mu} u \mathbf{e}_\varphi = \\ &= \frac{G}{\mu} (-u' \mathbf{e}_r + u \mathbf{e}_\varphi), \quad (\text{A.77}) \end{aligned}$$

$$\text{SEGUNDA FÓRMULA DE BINET: } \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G^2}{\mu^2} u^2 (u'' + u) \mathbf{e}_r. \quad (\text{A.78})$$

De la Primera Fórmula de Binet se deduce que

$$v^2 = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \frac{G^2}{\mu^2} \left( (u')^2 + u^2 \right), \quad (\text{A.79})$$

lo que, en su caso, y con ayuda del potencial  $V(r)$  de (A.52) expresado en la forma  $V(1/u)$ , permitiría establecer la correspondiente ecuación de la energía (véase (A.94) más adelante), resultando, precisamente, la ecuación (A.76) anterior.

La Segunda Fórmula de Binet proporciona directamente la ecuación diferencial de la órbita en su forma (A.61).

## A.4. Aplicación al problema gravitatorio de dos cuerpos.

Es claro ahora que, en particular, el problema gravitatorio de dos cuerpos (partículas puntuales de masas  $m_1$  y  $m_2$ ) encaja en el esquema del caso  $n = 2$  anterior, con  $B_2 = -\mathcal{G} m_1 m_2$ , siendo  $\mathcal{G}$  la constante de gravitación universal. Denotando ahora (Scheck 2005, §§1.7.2, p. 13)  $A \equiv \mathcal{G} m_1 m_2$  y recordando que  $f(r) = -A/r^2$ , la *ecuación diferencial de la órbita* (A.61) o, ya en concreto en este caso, (A.63) adopta la forma

$$u'' + u = \frac{\mu A}{G^2}. \quad (\text{A.80})$$

Un sistema fundamental de soluciones reales de la ecuación homogénea  $u'' + u = 0$  está formado por las funciones  $\cos \varphi$  y  $\sin \varphi$ , y la solución general es

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

combinación lineal de estas soluciones con coeficientes reales arbitrarios (las dos constantes arbitrarias de integración):

$$u_h(\varphi; c_1, c_2) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sen \varphi. \quad (\text{A.81})$$

Reemplazando las constantes  $c_1$  y  $c_2$  por unas nuevas constantes arbitrarias  $\mathcal{A}$  y  $\beta$  tales que

$$\mathcal{A} = + \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \cos \beta = \frac{c_1}{\mathcal{A}}, \quad \sen \beta = \frac{c_2}{\mathcal{A}}, \quad (\text{A.82})$$

dicha solución general puede escribirse como

$$u_h(\varphi; \mathcal{A}, \beta) = \mathcal{A} \cos(\varphi + \beta), \quad (\text{A.83})$$

con lo que las nuevas constantes  $\mathcal{A}$  y  $\beta$  aparecen asociadas, respectivamente, a la amplitud y a la fase inicial de un movimiento oscilatorio regido por la ecuación homogénea  $u'' + u = 0$ .

Una solución particular de la ecuación completa (A.80) es la solución constante  $u_p(\varphi) = \mu A/G^2$ , y así la solución general de (A.80) es

$$u(\varphi; \mathcal{A}, \beta) = \mathcal{A} \cos(\varphi + \beta) + \frac{\mu A}{G^2}. \quad (\text{A.84})$$

Deshaciendo ahora el cambio de función incógnita,  $u = 1/r$ , se tiene

$$r(\varphi; \mathcal{A}, \beta) = \frac{1}{\frac{\mu A}{G^2} + \mathcal{A} \cos(\varphi + \beta)} = \frac{G^2/\mu A}{1 + \left(\frac{\mathcal{A} G^2}{\mu A}\right) \cos(\varphi + \beta)}. \quad (\text{A.85})$$

A partir de esta expresión, introduciendo unas notaciones

$$p \equiv p(G) = \frac{G^2}{\mu A}, \quad e \equiv e(\mathcal{A}, G) = \frac{\mathcal{A} G^2}{\mu A}, \quad (\text{A.86})$$

esta solución se escribe como

$$r(\varphi; p, e, \beta) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \beta)}, \quad (\text{A.87})$$

que puede interpretarse como la *ecuación focal de una cónica en coordenadas polares planas, con  $\varphi$  como parámetro de la representación*. Geométricamente,  $p$  es el *semilado recto* (o parámetro) de esta cónica, y  $e$  su *excentricidad*

numérica.

De este modo se ha obtenido la *ecuación de la órbita en forma finita*, y la ecuación (A.87) constituye el enunciado de la *Primera Ley de Kepler* en su versión más general.

Como es natural, todas las relaciones geométricas de la teoría de las cónicas son ahora de aplicación para el estudio de las órbitas del problema de Kepler.

## A.5. Campos centrales conservativos. Resolución alternativa del problema de Kepler.

Se expondrá a continuación un tratamiento alternativo para el problema del movimiento de una masa puntual en el seno de un campo de fuerzas central conservativo. En esta ocasión se procederá a plantear la resolución del problema por medio de la *conservación de energía* mecánica (o energía total) del sistema.

A la vista de las ecuaciones (A.49), (A.51), (A.52), (A.53), la ecuación del movimiento puede reescribirse como

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V(\|\mathbf{r}\|)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{A.88})$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros por  $\dot{\mathbf{r}}$ ,

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= -\nabla V(r) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right) \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) \\ &= -\sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_\ell} \frac{dx_\ell}{dt} = -\frac{dV(r)}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Pero como

$$\frac{d(\|\dot{\mathbf{r}}\|^2)}{dt} = \frac{d(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{dt} = 2\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (\text{A.90})$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

llevando este resultado a la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 \right) = - \frac{dV(r)}{dt} \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + V(r) \right) = 0, \quad (\text{A.91})$$

por lo que la expresión entre paréntesis deberá ser una constante escalar (cuyo valor podrá determinarse a partir de las condiciones iniciales (A.6) consideradas anteriormente).

Se define la *energía cinética*  $T$  de la partícula de masa  $\mu$  (una propiedad que posee la partícula por razón de su estado de movimiento) mediante la fórmula

$$T = \frac{1}{2} \mu \|\dot{\mathbf{r}}\|^2, \quad (\text{A.92})$$

mientras que  $V(r)$  se interpretará como su *energía potencial* (que la partícula posee por razón de su posición en el espacio en el seno del campo de fuerzas en cuestión). Finalmente se define su *energía mecánica* o *energía total*  $\mathcal{E}$  como la suma de ambas magnitudes:

$$\mathcal{E} = T + V(r) = \frac{1}{2} \mu \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + V(r), \quad (\text{A.93})$$

con lo que la conclusión establecida en (A.91) se expresa ahora como

$$\mathcal{E} = T + V(r) = \frac{1}{2} \mu \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + V(r) = \text{constante}, \quad (\text{A.94})$$

que constituye una integral primera del sistema, conocida como *integral de la energía*, y permitirá a continuación reducir en una unidad (desde orden tres hasta orden dos) el orden diferencial en el problema del movimiento relativo.

En función de los distintos sistemas de coordenadas utilizados hasta ahora, la expresión de esa integral primera es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + V(r(x_1, x_2, x_3)) = \text{constante}, \quad (\text{A.95})$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(r(x, y)) = \text{constante}, \quad (\text{A.96})$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{constante}. \quad (\text{A.97})$$

En cualquiera de estas ecuaciones es posible despejar una de las variables o su derivada en términos de las restantes variables (y derivadas), con lo que se puede eliminar dicha función y efectuar (al menos formalmente) la reducción de orden que se acaba de mencionar.

Si embargo, a la vista de la integral del momento angular,

$$G = \mu r^2 \dot{\varphi} \implies \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{\mu r^2}, \quad dt = \frac{\mu r^2}{G} d\varphi, \quad (\text{A.98})$$

y de la forma funcional de la integral de la energía (A.97) en coordenadas polares planas, tras eliminar  $\dot{\varphi}$  en el término

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = r^2 \frac{G^2}{\mu^2 r^4} = \frac{G^2}{\mu^2 r^2}, \quad (\text{A.99})$$

la integral de la energía (A.97) puede reescribirse en la forma

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \{ \mathcal{E} - V(r) \} - \frac{G^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (\text{A.100})$$

Es habitual agrupar algunos de los términos que figuran en la función subradical de esta fórmula, y definir (cf. ecuación (A.55) más arriba) el *potencial efectivo*<sup>9</sup>

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{G^2}{2\mu r^2}, \quad (\text{A.101})$$

lo cual permite presentar la ecuación anterior bajo el siguiente aspecto:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \{ \mathcal{E} - V_{ef}(r) \}}. \quad (\text{A.102})$$

Podría pensarse que esta ecuación se corresponde con la ecuación de la conservación de la energía de un sistema de un solo grado de libertad, a saber: el movimiento unidimensional de una partícula de masa  $\mu$  bajo la influencia de una fuerza conservativa que derive del potencial efectivo  $V_{ef}(r)$ :

$$-\frac{dV_{ef}(r)}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( V(r) + \frac{G^2}{2\mu r^2} \right) = f(r) + \frac{G^2}{\mu r^3}, \quad (\text{A.103})$$

---

<sup>9</sup>También llamado *pseudo-potencial*, *potencial aparente*, *potencial reducido*, *corregido* o *modificado*. Arnold, Kozlov y Neishtadt (1997), Capítulo 2, §1, p. 50; Boccaletti y Pucacco (1996), Capítulo 1, §1.5, p. 40;

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

resultado que coincide con la expresión  $f_{ef}(r)$  de la *fuerza efectiva* introducida en (A.55).

La ecuación (A.100), al igual que (A.102), puede interpretarse como una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para la función incógnita  $r$  de la variable independiente  $t$ , y que junto con (A.98) constituye un sistema diferencial de orden dos (formado por dos ecuaciones de primer orden) para las incógnitas  $(r, \varphi)$ . Nótese además que (al menos formalmente) una vez obtenida la solución para  $r(t)$  el ángulo polar  $\varphi(t)$  se obtendría a partir de (A.98) por cuadratura.

Pero también puede procederse de otro modo, utilizando de nuevo la integral del momento angular (A.98) para eliminar  $t$  como variable independiente y reemplazarla por  $\varphi$ , lo que conduce a una nueva reescritura de la integral de la energía según su forma (A.100):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \{ \mathcal{E} - V(r) \} - \frac{G^2}{\mu^2 r^2}},$$

es decir,

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu}{G^2} \{ \mathcal{E} - V(r) \} - \frac{1}{r^2}}, \quad (\text{A.104})$$

ecuación diferencial<sup>10</sup> de primer orden para la función incógnita  $r$  con el ángulo polar  $\varphi$  como variable independiente. También se dice que ésta es la *ecuación diferencial de la órbita*. A diferencia de la ecuación de segundo orden (A.61) deducida por el método de Binet, y a la que también es habitual referirse con esta misma denominación de “ecuación de la órbita”, ahora se trata de una ecuación de primer orden.

Si se resolviese esta ecuación para obtener su solución general  $r$  en función de  $\varphi$ , a continuación se podría intentar obtener  $t$  como función de  $\varphi$ , por medio de una cuadratura a partir de (A.98), y luego invertir la relación para expresar  $\varphi$  como función de  $t$ , con el propósito de llegar finalmente a la expresión de  $r$  como función de  $t$ .

En lugar de seguir trabajando con la variable dependiente  $r$ , se efec-

---

<sup>10</sup>En ocasiones recibe el nombre de *ecuación de Clairaut*.

tuará un cambio de función incógnita  $r \rightarrow \sigma$  de la forma

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} \implies \frac{d\sigma}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (\text{A.105})$$

con lo que la ecuación de la órbita se transformará en una ecuación diferencial de primer orden para la función incógnita  $\sigma$ , con  $\varphi$  como variable independiente, y que también recibe el nombre de *ecuación diferencial de la órbita*:

$$-\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu}{G^2} \{ \mathcal{E} - V(1/\sigma) \} - \sigma^2}. \quad (\text{A.106})$$

Llegados a este punto, particularizaremos el estudio para el caso del *problema gravitatorio de dos cuerpos, regido por la Ley de Gravitación Universal de Newton*, y que en notaciones de Scheck (1905) Capítulo 1, §1.7, §§1.7.2, p. 13 y p. 15, admite el potencial

$$V(r) = -\frac{A}{r} \implies V(1/\sigma) = -A\sigma, \quad \text{con } A = \mathcal{G} m_1 m_2, \quad (\text{A.107})$$

en cuyo caso la ecuación diferencial de la órbita adopta la forma

$$\left( \frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\mu}{G^2} \{ \mathcal{E} + A\sigma \} - \sigma^2. \quad (\text{A.108})$$

Por conveniencia de escritura, para facilitar los cálculos intermedios y, *a posteriori*, darles una interpretación geométrica y dinámica adecuada, se introducen como notaciones (cf. (A.86) más arriba) unas cantidades  $p$  y  $e$  (que son funciones de las integrales primeras  $G$  y  $\mathcal{E}$ ) mediante las relaciones

$$p \equiv p(G) = \frac{G^2}{\mu A}, \quad e \equiv e(G, \mathcal{E}) = +\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}G^2}{\mu A^2}}. \quad (\text{A.109})$$

Nótese que  $p$  tiene dimensiones de longitud, mientras que  $e$  es adimensional. Gracias a estas notaciones, la expresión de la ecuación diferencial de la órbita se escribe

$$\left( \frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 + \left( \sigma - \frac{1}{p} \right)^2 = \frac{e^2}{p^2} \implies \frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left( \sigma - \frac{1}{p} \right)^2}. \quad (\text{A.110})$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

Por separación de variables y cálculo de primitivas, y recordando que el coseno es una función par, se obtiene

$$\varphi + \mathcal{C} = - \arccos \left( \frac{p}{e} \left( \sigma - \frac{1}{p} \right) \right) \implies \sigma(\varphi, \mathcal{C}) = \frac{1 + e \cos(\varphi + \mathcal{C})}{p}. \quad (\text{A.111})$$

Deshaciendo el cambio de variable dependiente resulta

$$r(\varphi; p, e, \mathcal{C}) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \mathcal{C})}, \quad (\text{A.112})$$

expresión que de nuevo puede interpretarse como la *ecuación focal de una cónica en coordenadas polares planas, con  $\varphi$  como parámetro de la representación*. En cuanto al significado geométrico de las notaciones  $p$  y  $e$  de (A.109), al igual que en el caso de (A.86) en relación con la ecuación (A.87), se ve que  $p$  es el *semilado recto* (o parámetro) de esta cónica, y que  $e$  representa su *excentricidad numérica*.

Si se estudian los *extremos* de la función  $r = r(\varphi; p, e, \mathcal{C})$  que representa a la cónica (por ejemplo, por medio de la condición necesaria de extremo,  $dr(\varphi)/d\varphi = 0$ ; o, también, analizando los valores extremos del denominador, ya que el numerador es constante), se concluye que  $r$  alcanza su valor mínimo para  $\varphi + \mathcal{C} = 0$  (módulo  $2\pi$ ), siendo el valor de dicho mínimo

$$r_{min} = r(\varphi + \mathcal{C} = 0) = \frac{p}{1 + e}, \quad \forall e \geq 0. \quad (\text{A.113})$$

Por otra parte, como la distancia entre el origen de coordenadas (que está ocupado por uno de los focos de la cónica) y la partícula móvil es una cantidad no negativa,  $r = \|\mathbf{r}\| \geq 0$ , y además  $p = G^2/\mu A \geq 0$ , la condición de máximo, que es precisamente  $\varphi + \mathcal{C} = \pi$  (módulo  $2\pi$ ) sólo tendrá sentido cuando el denominador sea positivo, y por lo tanto deberá ser  $e < 1$ , de manera que se obtiene que

$$r_{max} = r(\varphi + \mathcal{C} = \pi) = \frac{p}{1 - e}, \quad \forall e \in [0, 1). \quad (\text{A.114})$$

En otro caso, de la condición de anulación del denominador de (A.112), a saber,  $1 + e \cos(\varphi + \mathcal{C}) = 0$ , se deduce que  $\cos(\varphi + \mathcal{C}) = -1/e$ , y  $r \rightarrow +\infty$ , cosa que sólo ocurre para órbitas abiertas (es decir, no ligadas o no acotadas: parábolas o hipérbolas).

El punto de la órbita situado a mínima distancia, (A.113), del foco se denomina *pericentro* o *periastro*, y está bien definido para cualquier cónica (salvo para las circunferencias, en cuyo caso cualquier punto puede considerarse pericentro). Según cuál sea el cuerpo atractor central, también se usan términos como *perihelio* para órbitas en torno al Sol, *perigeo* cuando el cuerpo central es la Tierra, *perilunio* en el caso de serlo la Luna, *perijovio* para movimientos alrededor de Júpiter, etc.

A su vez, y caso de existir (lo cual sólo ocurrirá para cónicas con  $0 \leq e < 1$ , es decir, órbitas elípticas), el punto situado a distancia (A.114), máxima pero finita, del foco se llama *apocentro* o *apoastro*; como es de esperar, en las órbitas circulares cualquier punto puede considerarse apocentro. En ocasiones, teniendo en cuenta qué cuerpo celeste actúa como origen de coordenadas y foco de la cónica, se usan denominaciones particulares, como *afelio* para órbitas alrededor del Sol, *apogeo* para órbitas en torno a la Tierra, etc.

Conocida, pues, por medio de la ecuación (A.112), la dependencia explícita de  $r$  respecto de  $\varphi$ , la integral de la ley de las áreas (A.98) permitiría, al menos formalmente, determinar la relación entre el ángulo polar y el tiempo físico  $t$ , proceso que asimismo introduciría la última constante arbitraria que exige la resolución completa del sistema para llegar a obtener su solución general. Pero es bien sabido que, en la práctica, el problema de Kepler no puede resolverse de manera elemental en forma cerrada por medio de funciones explícitas del tiempo  $t$ .

En virtud de la fórmula dada en (A.109), la clasificación geométrica de las cónicas según los valores de la excentricidad numérica  $e$  se traduce en su clasificación según el valor y signo de la energía  $\mathcal{E}$ . Además, las relaciones métricas habituales entre los elementos geométricos notables de las cónicas se traducen en relaciones de dichos elementos geométricos con variables dinámicas o con integrales primeras (como la energía  $\mathcal{E}$  de la órbita o el momento angular orbital  $G$ ).

- Para *órbitas elípticas* (incluyendo entre ellas las órbitas circulares),  $0 \leq e < 1 \implies \mathcal{E} < 0$ , y a partir de las relaciones métricas  $p = a(1 - e^2) = b^2/a$  se obtienen para los semiejes mayor  $a$  y menor  $b$  las fórmulas que los

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

ligan con las integrales primeras:

$$a \equiv a(\mathcal{E}) = \frac{A}{(-2\mathcal{E})}, \quad b \equiv b(G, \mathcal{E}) = \frac{G}{\sqrt{(-2\mu\mathcal{E})}}. \quad (\text{A.115})$$

Las distancias (A.113) y (A.114), desde el foco hasta el pericentro y el apocentro (respectivamente), se pueden expresar ahora en la forma

$$r_{min} = a(1 - e), \quad r_{max} = a(1 + e). \quad (\text{A.116})$$

Ya se ha mencionado anteriormente que, en el caso de las elipses keplerianas como soluciones del *problema gravitatorio de dos cuerpos*, la ley de las áreas permite establecer la *Tercera Ley de Kepler*. En efecto, a partir de (A.48), integrando a lo largo de una revolución completa de la masa móvil que haya sido descrita en su recorrido desde un instante  $t$  hasta el instante  $t + P$  (es decir,  $P$  es el tiempo –llamado *periodo de revolución*– invertido por la masa móvil para recorrer una vez toda la elipse), se llega a que

$$\int_{elipse} dS = \int_t^{t+P} \frac{G}{2\mu} d\hat{t} = \frac{G}{2\mu} \int_t^{t+P} d\hat{t} \implies S_{elipse} = \frac{G}{2\mu} P. \quad (\text{A.117})$$

Teniendo en cuenta que el área encerrada por la elipse es  $S_{elipse} = \pi a b = \pi a \sqrt{a p}$ , y que de (A.109) se deduce que  $G = \sqrt{\mu A p}$ , se concluye que

$$\frac{a^2}{P^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{A}{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{G}(m_1 + m_2), \quad (\text{A.118})$$

ecuación que recoge un contenido algo más general que el enunciado original de la *Tercera Ley de Kepler*, según fue presentado por dicho autor.

A la vista de (A.118), es posible despejar el periodo  $P$  en función del semieje mayor  $a$  de la elipse:

$$P^2 = (2\pi)^2 \frac{\mu}{A} a^3 = \frac{(2\pi)^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} a^3, \quad (\text{A.119})$$

lo que permite concluir que el periodo de una órbita kepleriana elíptica, al igual que su semieje mayor, depende de la energía de dicha órbita. Sin embargo, es independiente de la excentricidad de la misma. Estas conclusiones

pueden resumirse diciendo que “el periodo depende del tamaño de la elipse, pero es independiente de su forma”.

En el caso de las elipses keplerianas es habitual introducir una nueva magnitud, llamada *movimiento medio* elíptico: se trata (Abad 2012, Capítulo 8, §8.5, §§8.5.3, p. 135; Thiry 1970, Capítulo II, §10, p. 59) de la velocidad angular con la que la masa móvil recorrería la órbita, si fuese la circunferencia directriz de la elipse en cuestión, con un movimiento uniforme ficticio (es decir, con velocidad angular constante). Considerando una revolución completa (correspondiente a un recorrido angular de  $2\pi$  radianes), descrita durante un intervalo de tiempo igual al periodo  $P$ , el movimiento medio, denotado como  $n$ , sería

$$n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{A}{\mu}} a^{-3/2} \iff n^2 a^3 = \frac{A}{\mu} = \mathcal{G}(m_1 + m_2), \quad (\text{A.120})$$

expresión esta última que algunos autores proponen como definición del concepto de “movimiento medio”, mientras que otros<sup>11</sup> la consideran como una expresión analítica (alternativa) de la Tercera Ley de Kepler. Debido a su relación con el semieje mayor  $a = a(\mathcal{E})$  y con el periodo  $P = P(\mathcal{E})$ , el movimiento medio  $n$  en una órbita elíptica es también función de la energía  $\mathcal{E}$  de la órbita en cuestión.

- Para *órbitas parabólicas*,  $e = 1 \implies \mathcal{E} = 0$ , y el elemento geométrico fundamental es el semilado recto  $p$ , cuya relación con integrales del movimiento ya se ha dado en (A.109). La mínima distancia (A.113) de separación entre el foco y la masa móvil será ahora  $r_{min} = p/2$

A la vista de la expresión  $n^2 a^3 = A/\mu$  en (A.120), y dado que tanto  $a$  como  $p$  tienen dimensiones de longitud, se generaliza la noción de *movimiento medio* al caso de órbitas parabólicas por medio de la definición

$$n^2 p^3 = \frac{A}{\mu} = \mathcal{G}(m_1 + m_2), \quad (\text{A.121})$$

si bien ahora este concepto de movimiento medio parabólico ya no tiene asociada la idea de “velocidad angular media” que inspiraba su introducción en el caso del movimiento elíptico. Por su relación con el semilado recto  $p$ , el movimiento medio parabólico depende de la norma  $G$  del vector momento angular.

---

<sup>11</sup>Boccaletti y Pucacco (1996), Capítulo 2, §2.1, p. 134; Abad 2012, Capítulo 8, §8.5, §§8.5.3, p. 135.

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

• Para *órbitas hiperbólicas*,  $e > 1 \implies \mathcal{E} > 0$ ; las relaciones métricas  $p = a(e^2 - 1) = b^2/a$  dan, para los semiejes real  $a$  y transverso  $b$  las relaciones con las integrales primeras en la forma:

$$a \equiv a(\mathcal{E}) = \frac{A}{2\mathcal{E}}, \quad b \equiv b(G, \mathcal{E}) = \frac{G}{\sqrt{2\mu\mathcal{E}}}. \quad (\text{A.122})$$

En el movimiento kepleriano hiperbólico el mínimo (A.113) de  $r = r(\varphi)$  toma el valor

$$r_{min} = a(e - 1). \quad (\text{A.123})$$

Como en el caso anterior, se considera una generalización del concepto de *movimiento medio* hiperbólico a través de una expresión que, en apariencia, coincide con la del caso elíptico,

$$n^2 a^3 = \frac{A}{\mu} = \mathcal{G}(m_1 + m_2), \quad (\text{A.124})$$

donde ahora  $a$  es el semieje real de la hipérbola, por lo que el movimiento medio hiperbólico depende de la energía de la órbita. También en este caso el movimiento medio está desprovisto de toda idea de “velocidad angular media”. En ocasiones se usa la notación  $\nu$  para referirse al movimiento medio hiperbólico. Podría considerarse (Abad 2012, Capítulo 8, §8.5, §§8.5.5, p. 138) que la relación (A.124) “extiende al movimiento hiperbólico la Tercera Ley de Kepler”.

## A.6. Formulación lagrangiana del caso de fuerza central conservativa

Tomando  $\mathbf{r}_1(t)$  y  $\mathbf{r}_2(t)$  como *coordenadas generalizadas* (o coordenadas *lagrangianas*), y  $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$  y  $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$  como las correspondientes *velocidades generalizadas*, el LAGRANGIANO del problema del movimiento de estas dos partículas bajo su mutua interacción de acuerdo con una ley de fuerzas que deriva de un potencial  $V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|)$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathcal{L}(-, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \\ &= T(-, -, -, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) - V(-, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, -, -) = \\ &= \frac{1}{2}m_1 \|\dot{\mathbf{r}}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2 \|\dot{\mathbf{r}}_2\|^2 - V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|). \quad (\text{A.125}) \end{aligned}$$

Nótese que este lagrangiano no depende explícitamente del tiempo  $t$ .

Los momentos conjugados correspondientes a estas coordenadas generalizadas son

$$\mathbf{p}_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} = m_k \dot{\mathbf{r}}_k \quad (k = 1, 2), \quad (\text{A.126})$$

y las ecuaciones de Euler–Lagrange, para  $k = 1, 2$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_k} = \mathbf{0} \implies m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = - \frac{\partial V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|)}{\partial \mathbf{r}_k}, \quad (\text{A.127})$$

se reescriben finalmente en la forma de las ecuaciones de movimiento en forma newtoniana (A.1). Estas ecuaciones están acopladas a través de la dependencia funcional de  $V$  respecto de  $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ .

El lagrangiano transformado  $\mathcal{L}^* \equiv \mathcal{L}^*(t, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}})$  que resulta al aplicar el cambio de variables (A.4)-(A.5), para reemplazar las coordenadas generalizadas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  por las nuevas coordenadas  $\mathbf{r}_c$  y  $\mathbf{r}$ , adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &\equiv \mathcal{L}^*(-, -, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}}) = \left( \frac{1}{2} M \|\dot{\mathbf{r}}_c\|^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \mu \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - V(\|\mathbf{r}\|) \right) \\ &= \mathcal{L}_c^*(-, -, -, \dot{\mathbf{r}}_c, -) + \mathcal{L}_r^*(-, -, \mathbf{r}, -, \dot{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

donde los subíndices “c” y “r” aluden, respectivamente, a “movimiento del centro de masas” y “movimiento relativo”. Se observa, pues, que el lagrangiano  $\mathcal{L}_c^*$  sólo depende de variables correspondientes al centro de masas (siendo, además,  $\mathbf{r}_c$  una coordenada ignorable), mientras que  $\mathcal{L}_r^*$  únicamente contiene variables que pertenecen al problema del movimiento relativo, por lo que el lagrangiano del problema original ha quedado descompuesto en la suma de dos lagrangianos que describen problemas independientes o desacoplados.

En particular, a la vista de los lagrangianos (A.125) y (A.128) se concluye (Thiry, Capítulo II, §14, p. 66; Scheck 2005, Capítulo 1, §1.7, §§1.7.3, p. 19) que la energía cinética del sistema de las dos partículas es igual a la suma de la energía cinética de la masa total  $M = m_1 + m_2$  (situada en el centro de masas del sistema) más la energía cinética de la masa reducida  $\mu$  (situada en la posición de  $m_1$  en su movimiento relativo en torno a  $m_2$ ).

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

Los momentos canónicos conjugados de estas coordenadas lagrangianas  $\mathbf{r}_c$  y  $\mathbf{r}$  son

$$\mathbf{p}_c := \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{\mathbf{r}}_c} = M \dot{\mathbf{r}}_c, \quad \mathbf{p} := \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mu \dot{\mathbf{r}}. \quad (\text{A.129})$$

Las ecuaciones de Euler—Lagrange deducidas de (A.128) conducen a las ecuaciones de movimiento (A.16):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{\mathbf{r}}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{r}_c} = \mathbf{0} \implies M \ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{0}, \quad (\text{A.130})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{0} \implies \mu \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\partial V(\|\mathbf{r}\|)}{\partial \mathbf{r}}, \quad (\text{A.131})$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales independientes (desacopaldas) para las funciones incógnita  $\mathbf{r}_c$  y  $\mathbf{r}$ .

Las integrales del centro de masas (A.9) son ahora una consecuencia inmediata del carácter ignorable de la variable de posición  $\mathbf{r}_c$  en el lagrangiano  $\mathcal{L}^*$  dado en (A.128). Por su parte, el lagrangiano  $\mathcal{L}_r^*$  del problema del movimiento relativo describe el movimiento, en el espacio tridimensional, de una partícula ficticia de masa  $\mu$  en el campo central conservativo caracterizado por el potencial  $V(\|\mathbf{r}\|)$ .

Si se formula el problema del movimiento relativo en coordenadas polares planas  $(r, \varphi)$  como coordenadas lagrangianas en el plano del movimiento, con  $(\dot{r}, \dot{\varphi})$  como velocidades generalizadas, y teniendo en cuenta la expresión del vector velocidad en (A.36), la función de Lagrange  $\mathcal{L}_r^*$  correspondiente será

$$\mathcal{L}_r^*(-, r, -, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r), \quad (\text{A.132})$$

a partir de la cual los momentos conjugados asociados a estas coordenadas son

$$p_r := \frac{\partial \mathcal{L}_r^*}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r}, \quad p_\varphi := \frac{\partial \mathcal{L}_r^*}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi}, \quad (\text{A.133})$$

y las ecuaciones de Euler–Lagrange adoptan la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_r^*}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_r^*}{\partial r} = 0 \implies \mu \ddot{r} - \left( \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{dV(r)}{dr} \right) = 0, \quad (\text{A.134})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_r^*}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_r^*}{\partial \varphi} = 0 \implies \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0 \implies \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{cte}. \quad (\text{A.135})$$

La primera de estas ecuaciones, sacando  $\mu$  como factor común y recordando la relación (A.53) entre la intensidad  $f(r)$  de una fuerza central conservativa y la función potencial  $V(r)$  de la que deriva, puede reescribirse como

$$\mu (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = f(r), \quad (\text{A.136})$$

y, comparando con (A.36), se comprueba que se ha reconstruido la componente radial del vector aceleración, y también la ecuación del movimiento en la dirección radial (A.39) o (A.54).

En cuanto a la segunda ecuación de Euler–Lagrange, (A.135), recoge de nuevo el enunciado de la conservación del momento angular, ahora consecuencia de que la coordenada angular  $\varphi$  sea ignorable o cíclica en el lagrangiano (A.132) del problema del movimiento relativo:  $p_\varphi \equiv \text{cte}$ .

Recordando las ecuaciones (A.40), (A.41), o (A.54), se puede despejar

$$\dot{\varphi} = \frac{G^2}{\mu r^2}, \quad (\text{A.137})$$

y eliminar  $\dot{\varphi}$  en la ecuación correspondiente a la dirección radial, obteniéndose resultados ya conocidos, véase (A.55), en función de la “fuerza efectiva” o del “potencial efectivo” del problema unidimensional equivalente:

$$\mu \ddot{r} = - \frac{dV(r)}{dr} + \frac{G^2}{\mu r^3} = f(r) + \frac{G^2}{\mu r^3} = - \frac{d}{dr} \left( V(r) + \frac{G^2}{2\mu r^2} \right), \quad (\text{A.138})$$

lo que sugiere la definición de

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{G^2}{2\mu r^2}. \quad (\text{A.139})$$

La introducción del potencial efectivo ha permitido reducir el problema de dos cuerpos en el espacio tridimensional al movimiento unidimensional de

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

una partícula ficticia de masa  $\mu$  bajo la influencia de un campo de fuerzas externo, que es central y conservativo, y admite como potencial a  $V_{ef}(r)$ .

Contemplado desde otro punto de vista, y expresado en otros términos (Boccaletti y Pucacco 1996, Capítulo 2, §2.1 nota 5 al pie de la página 130), “lo que hemos hecho corresponde, en el formalismo lagrangiano, a la construcción de la función de Routh en el caso de una variable ignorable ( $\varphi$  en nuestro caso)”.

## A.7. Formulación hamiltoniana del caso de fuerza central conservativa

Sean  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$ , dados en (A.126), los momentos canónicamente conjugados correspondientes a las coordenadas generalizadas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ . Por medio de la transformación de Legendre se construye la función hamiltoniana  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  del problema en el conjunto de variables canónicas  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \mathcal{H}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathcal{H}(-, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \\ &= T(-, -, -, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + V(-, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, -, -) = \\ &= \frac{1}{2m_1} \|\mathbf{p}_1\|^2 + \frac{1}{2m_2} \|\mathbf{p}_2\|^2 + V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|). \end{aligned} \quad (\text{A.140})$$

Las ecuaciones canónicas del movimiento constituyen un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales (vectoriales) de primer orden

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_k}, \quad \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_k} \quad (k = 1, 2), \quad (\text{A.141})$$

para las funciones incógnita  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . En este caso,

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \frac{\mathbf{p}_k}{m_k} \implies \mathbf{p}_k = m_k \dot{\mathbf{r}}_k; \quad \dot{\mathbf{p}}_k = -\frac{\partial V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|)}{\partial \mathbf{r}_k}. \quad (\text{A.142})$$

Como  $\dot{\mathbf{p}}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ , estas ecuaciones son equivalentes al sistema (A.1).

Sean ahora, como en (A.129),  $\mathbf{p}_c$  y  $\mathbf{p}$  los momentos canónicos asociados a las nuevas coordenadas lagrangianas  $\mathbf{r}_c$  y  $\mathbf{r}$ . La función de Hamilton

$\mathcal{H}^* \equiv \mathcal{H}^*(t, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \mathbf{p}_c, \mathbf{p})$  del problema en el conjunto de variables canónicas  $(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \mathbf{p}_c, \mathbf{p})$  se obtendrá aplicando la transformación de Legendre al lagrangiano  $\mathcal{L}^*$  de (A.128), con el resultado de que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* &\equiv \mathcal{H}^*(-, -, \mathbf{r}, \mathbf{p}_c, \mathbf{p}) = \\ &= \left( \frac{1}{2M} \|\mathbf{p}_c\|^2 \right) + \left( \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{p}\|^2 + V(\|\mathbf{r}\|) \right) \\ &= \mathcal{H}_c^*(-, -, -, \mathbf{p}_c, -) + \mathcal{H}_r^*(-, -, \mathbf{r}, -, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{A.143})$$

De nuevo, los subíndices “c” y “r” hacen, respectivamente, referencia a “movimiento del centro de masas” y “movimiento relativo”. El hamiltoniano  $\mathcal{H}_c^*$  tan sólo involucra a variables correspondientes al centro de masas (y  $\mathbf{r}_c$  es una variable canónica ignorable), en tanto que  $\mathcal{H}_r^*$  depende exclusivamente de variables implicadas en el problema del movimiento relativo, quedando por lo tanto el hamiltoniano del problema original descompuesto en la suma de dos hamiltonianos que corresponden a problemas independientes o desacoplados. Las ecuaciones canónicas de Hamilton generadas por (A.143), para las funciones incógnita  $(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \mathbf{p}_c, \mathbf{p})$ , se llevan finalmente a la forma (A.16):

$$\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \mathbf{p}_c} = \frac{1}{M} \mathbf{p}_c \implies \mathbf{p}_c = M \dot{\mathbf{r}}_c, \quad (\text{A.144})$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \implies \mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}, \quad (\text{A.145})$$

$$\frac{d\mathbf{p}_c}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \mathbf{r}_c} = \mathbf{0} \implies M \ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{0}, \quad (\text{A.146})$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \implies \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V(\|\mathbf{r}\|)}{\partial \mathbf{r}}. \quad (\text{A.147})$$

Como era de esperar, las integrales (A.9) del centro de masas aparecen de manera natural, a la vista del hamiltoniano (A.143), que no contiene a  $\mathbf{r}_c$ . Y, como ya ocurría en el caso de la formulación lagrangiana anteriormente expuesta, el hamiltoniano  $\mathcal{H}_r^*$  del problema del movimiento relativo corresponde al movimiento de una partícula auxiliar de masa  $\mu$  en el seno de un campo de fuerzas central conservativo que deriva del potencial  $V(\|\mathbf{r}\|)$ .

En variables canónicas polares en el plano del movimiento,  $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$ , con los momentos canónicos definidos en (A.133), el hamiltoniano del problema del movimiento relativo, obtenido a partir del lagrangiano (A.132) por

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

medio de la transformación de Legendre, es:

$$\mathcal{H}_r^*(-, r, -, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2\mu} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r), \quad (\text{A.148})$$

y las ecuaciones canónicas del movimiento aparecen en la forma

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_r^*}{\partial p_r} = \frac{1}{\mu} p_r \implies p_r = \mu \dot{r}, \quad (\text{A.149})$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_r^*}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{\mu} \frac{p_\varphi}{r^2} \implies p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi}, \quad (\text{A.150})$$

$$\frac{dp_r}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}_r^*}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{\mu r^3} - \frac{dV(r)}{dr} \implies \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{dV(r)}{dr}, \quad (\text{A.151})$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}_r^*}{\partial \varphi} = 0 \implies p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{cte.} \quad (\text{A.152})$$

Comparando con resultados anteriores se comprueba que  $p_\varphi \equiv G$  es la norma del vector momento angular, y que es una magnitud que se conserva a lo largo del movimiento, como era de esperar a la vista de que el ángulo  $\varphi$  es una coordenada cíclica en este problema.

A partir de las dos últimas ecuaciones anteriores podría efectuarse una discusión análoga a la realizada más arriba en el caso de la formulación lagrangiana.

## A.8. Vector de Laplace–Runge–Lenz o vector excentricidad.

Recordemos que en el caso del problema gravitatorio de dos cuerpos el movimiento relativo se corresponde con el de una partícula de masa  $\mu$  bajo la acción de una fuerza central conservativa atractiva con  $f(r) = -\mathcal{G} m_1 m_2 / r^2 = -A/r^2$ . En estas condiciones el problema del movimiento relativo queda descrito por la ecuación diferencial vectorial

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{A}{r^3} \mathbf{r}, \quad (\text{A.153})$$

para la cual el vector momento angular de la partícula,  $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times (\mu \dot{\mathbf{r}})$ , proporciona una integral primera vectorial que permite reducir el orden diferencial desde orden 6 hasta orden 3.

Se trata ahora de plantear la resolución del problema de Kepler con ayuda de otra u otras nuevas integrales primeras (distintas de la integral de la energía) que, además, aporten información con un significado geométrico y físico fácilmente interpretable y útil desde el punto de vista del tratamiento matemático del problema.

Como referencias bibliográficas para lo que sigue hemos recurrido a Abad (2012), Capítulo 8, §8.2, pp. 124–126; Boccaletti y Pucacco (1996), Capítulo 2, §2.1, pp. 132–134; Bond y Allman (1996), Capítulo 2, §2.4, §§2.4.3, pp. 23–26, y Capítulo 8, §8.4, p. 126; Cid y Ferrer (1997), Capítulo 13, §13.4, §§13.4.1, pp. 345–347; Goldstein (1980), Capítulo 3, §3.9, pp. 102–105, y Capítulo 9, §9.7, p. 421; Heil y Kitzka (1984), Capítulo 1, §1.3, §§1.3.6.2, pp. 79–80; Schneider (1992) Capítulo 3, §3.6, §§3.6.2.3, pp. 64–68; Thiry (1970), Capítulo II, §9, pp. 55–58.

Con este propósito de obtener nuevas integrales del problema de Kepler, utilizando la ecuación del movimiento y la definición del vector momento angular, y formando el producto vectorial

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} &= \ddot{\mathbf{r}} \times \{\mathbf{r} \times (\mu \dot{\mathbf{r}})\} = \mu \ddot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \left[ -\frac{A}{r^3} \mathbf{r} \right] \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \\ &= -A \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

se desea reescribir de otra manera las expresiones del principio y del final de esta cadena de igualdades. Para ello, como  $\mathbf{G}$  es un vector constante,

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{G}} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}. \quad (\text{A.155})$$

Esta misma conclusión puede alcanzarse por cálculo directo, sin usar de manera explícita la constancia del vector  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) &= \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{G}} = \\ &= \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} + \dot{\mathbf{r}} \times \{\dot{\mathbf{r}} \times (\mu \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r} \times (\mu \ddot{\mathbf{r}})\} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}, \end{aligned}$$

ya que los productos vectoriales de las expresiones entre llaves dan como resultado el vector cero, por tratarse de productos vectoriales de vectores colineales.

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

Por otra parte, para un vector unitario variable se verifica que su ritmo de variación viene descrito por la fórmula (Boccaletti y Pucacco 1996, Capítulo 2, §2.1, p. 129 y p. 132; Abad 2012, Capítulo 8, §8.2, p. 124–125)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{b}(t)}{\|\mathbf{b}(t)\|} \right) = \frac{(\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}) \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^3}. \quad (\text{A.156})$$

Gracias a estos resultados auxiliares, (A.154) se convierte en

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) = A \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right), \quad (\text{A.157})$$

con lo cual

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} = A \frac{\mathbf{r}}{r} + \overrightarrow{\text{cte.}} = A \left( \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right), \quad (\text{A.158})$$

donde  $\mathbf{e}$  es una constante (vectorial) de integración que aporta tres constantes escalares. Este nuevo vector así introducido,

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(-, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{A} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\text{A.159})$$

se suele denominar *vector de Laplace–Runge–Lenz*<sup>12</sup> o *vector excentricidad* (pues se verá más adelante que, con la elección de notaciones y por el modo en que se ha definido, su norma coincide con el valor  $e$  de la excentricidad numérica de las cónicas solución del problema de Kepler. Cf. (A.86) y (A.109) más arriba).

Nótese que en el caso particular de que  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$  (que correspondería a un movimiento rectilíneo) se deduce que  $\mathbf{e} = -\mathbf{r}/r$ : el vector  $\mathbf{e}$  está contenido en el plano orbital, y se encuentra en todo instante en la recta (que pasa por el origen de coordenadas, punto que coincide con el centro de fuerzas) a lo largo de la cual tiene lugar el movimiento, y  $\|\mathbf{e}\| = 1$ . En suma:  $\mathbf{r}(t) = -r(t) \mathbf{e}$ .

---

<sup>12</sup>Existe una vasta lista de referencias en relación con esta controvertida denominación. Aquí nos limitaremos a mencionar algunos de los trabajos que hemos incluido en esta Memoria y que en alguno de sus pasajes aluden a esta circunstancia: Bartnik, Heberzettel y Sandhas (1988), §1, p. 517, donde se remite al lector a otras referencias; Goldstein (1980), Capítulo 3, §3.9, nota al pie de la página 103; Scheck (2005), Capítulo 1, §1.24, p. 54, y Ejercicios del Capítulo 2, Ejercicio 2.22. p. 450 y su resolución en la página 491, se refiere a esta constante del movimiento como *vector de Hermann–Bernoulli–Laplace* o *vector de Lenz*.

Si  $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$ , por su propia definición (A.22),  $\mathbf{G}$  es ortogonal a  $\mathbf{r}$  y a  $\dot{\mathbf{r}}$ , es decir:  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{r} = 0$  y  $\mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ . Además, las seis componentes de los vectores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{e}$  no proporcionan seis integrales primeras funcionalmente independientes, ya que un sencillo cálculo a partir de (A.159) demuestra que dichos vectores son ortogonales:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{G} = 0, \quad (\text{A.160})$$

y el vector  $\mathbf{e}$  está contenido en el plano orbital. De modo que con estos dos vectores sólo se dispone de cinco integrales primeras escalares funcionalmente independientes.

En realidad las integrales del vector momento angular, del vector de Laplace–Runge–Lenz y de la energía, siete cantidades escalares en total, sólo aportan cinco constantes del movimiento funcionalmente independientes, ya que (aparte de la ortogonalidad entre  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{e}$ ) se verifica además *otra relación* entre las cantidades  $G$ ,  $e$  y  $\mathcal{E}$ . Para obtenerla, se forma el cuadrado de la norma de ambos miembros de (A.158),

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}\|^2 &= \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 \|\mathbf{G}\|^2 = A^2 \left( \frac{\|\mathbf{r}\|^2}{r^2} + \|\mathbf{e}\|^2 + \frac{2\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \implies \\ \implies v^2 G^2 &= A^2 \left( 1 + e^2 + \frac{2\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.161})$$

donde se ha utilizado la ortogonalidad entre  $\mathbf{G}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$ ; a continuación, usando la ecuación de la energía (A.94) para despejar  $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$ ,

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = v^2 = \frac{2\mathcal{E}}{\mu} - \frac{2V(r)}{\mu} = \frac{2\mathcal{E}}{\mu} + \frac{2A}{\mu r}, \quad (\text{A.162})$$

y la propiedad del vector  $\mathbf{e}$  (que se deduce inmediatamente a partir de la definición (A.159) de dicho vector) de que

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = \frac{G^2}{\mu A} - r, \quad (\text{A.163})$$

se concluye que

$$2\mathcal{E}G^2 = \mu A^2 (e^2 - 1) \implies e^2 = e^2(G, \mathcal{E}) = 1 + \frac{2\mathcal{E}G^2}{\mu A^2}, \quad (\text{A.164})$$

que es, finalmente, la relación buscada entre  $G$ ,  $e$  y  $\mathcal{E}$ . Aunque no se ha propuesto todavía ninguna interpretación para este vector de Laplace–Runge–Lenz, se observa que esta relación entre las integrales primeras del problema

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

de Kepler había aparecido ya con anterioridad en la fórmula (A.109), si bien entonces se había introducido como una mera notación para simplificar la escritura de las fórmulas.

Analizando el proceso seguido hasta ahora, se ha visto que para un sistema diferencial de orden seis (que gobierna el problema de Kepler) se han encontrado siete integrales primeras escalares, contenidas en las expresiones  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(-, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(-, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  y  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(-, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , de entre las cuales sólo cinco son funcionalmente independientes. Puede considerarse que, con todo lo anterior, el sistema original ha quedado formalmente reducido a orden uno, y por lo tanto es resoluble por cuadratura. Como la variable independiente  $t$  no figura explícitamente en la forma funcional de esas expresiones, no es posible todavía utilizarlas para relacionar ninguna de las variables de posición y velocidad con el parámetro temporal  $t$ .

Para seguir avanzando en esa dirección, se verá ahora cómo se puede sacar partido de esta integral vectorial de Laplace–Runge–Lenz para (sin recurrir a la integral de la energía) llegar a determinar las órbitas del problema gravitatorio de dos cuerpos. Multiplicando escalarmente los dos miembros de la ecuación (A.158) por el vector de posición  $\mathbf{r}$ ,

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) = A \left( \frac{\|\mathbf{r}\|^2}{r} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} \right) = A(r + er \cos f), \quad (\text{A.165})$$

donde se ha puesto  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = er \cos f$ , siendo  $f$  el ángulo entre el vector de Laplace y el vector de posición  $\mathbf{r}$ . Este ángulo recibirá el nombre de *anomalía verdadera*.

Utilizando la propiedad acerca del comportamiento del producto mixto bajo permutaciones circulares de los vectores implicados, se deduce que

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{G} \cdot (\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{G} \cdot \mathbf{G} = \frac{G^2}{\mu}, \quad (\text{A.166})$$

y así

$$\frac{G^2}{\mu} = Ar(1 + e \cos f) \implies r(f) = \frac{G^2/\mu A}{1 + e \cos f}. \quad (\text{A.167})$$

Comparando esta expresión con las ecuaciones (A.87) y (A.112), y recordando las notaciones (A.86) y (A.109), se ve que también ahora se puede tomar  $p = G^2/\mu A$ , y en consecuencia (A.167) admite una interpretación geométrica análoga a la que ya se ha propuesto anteriormente para (A.87),

(A.112): *ecuación focal de una cónica en coordenadas polares planas, con  $f$  como parámetro de la representación, y  $p$  como semilado recto; pero en esta ocasión la cantidad  $e$ , que desempeña el papel de la excentricidad numérica de dicha cónica, adquiere un nuevo significado (y no simplemente el de una notación o una abreviatura introducida por conveniencia de escritura): se trata, precisamente, de la norma del vector  $\mathbf{e}$  de Laplace–Runge–Lenz.*

En definitiva, se ha llegado a una descripción del movimiento como la de las situaciones caracterizadas por las ecuaciones (A.87) y (A.112) anteriores, pero ahora *se ha rotado el sistema de coordenadas polares* de manera que, en esas coordenadas  $(r, f)$ , *el ángulo polar es cero en el pericentro de la órbita* (cf. (A.113) más arriba).

Se ha dado así otra demostración de que *en el problema de Kepler las órbitas son cónicas*, y comparando las diferentes soluciones obtenidas a través de los diferentes procedimientos se comprueba que  $\|\mathbf{e}\|$  es la excentricidad numérica de dichas cónicas. Se comprueba también que *el vector de Laplace–Runge–Lenz apunta, desde el foco (que coincide con el origen de coordenadas y con el centro del campo de fuerzas), en la dirección del pericentro.*

Bartnik, Haberzettl y Sandhas (1988) han utilizado la evolución dinámica de un vector (no necesariamente constante) de tipo Laplace–Runge–Lenz para estudiar movimientos en campos de fuerza (ni centrales ni conservativos) de la forma  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}(-, \mathbf{r}, -)$ . Leach, Goringe y sus colaboradores también han recurrido a vectores de este tipo para el estudio de diversos sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden con una forma funcional más complicada que la del problema de Kepler.

## A.9. Posición a lo largo de la órbita. Ley horaria del movimiento kepleriano. Anomalías.

Ya se ha comentado más arriba que las integrales del momento angular, de la energía y del vector excentricidad sólo aportan cinco constantes del movimiento funcionalmente independientes; además, el tiempo  $t$  no interviene

## APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS INTERNAS.

---

explícitamente en las expresiones funcionales de esas integrales primeras, por lo que no es posible, a partir de ellas, relacionar el tiempo con variables de tipo posición o velocidad.

Recordemos el significado de cada una de esas integrales primeras y su papel en relación con la resolución del problema de Kepler:

- El momento angular  $\mathbf{G}$  informa acerca de la orientación (posición) del plano orbital en el espacio tridimensional; se trata del plano que pasa por el origen y admite a  $\mathbf{G}$  como un vector normal; si este vector es nulo a lo largo del movimiento, se trata de un movimiento rectilíneo sobre una recta que pasa por el origen. Además, la norma  $G$  del vector momento angular está relacionada con un elemento métrico bien definido en todo tipo de cónicas no degeneradas: la longitud del semilado recto.

- La energía  $\mathcal{E}$  indica el tipo de cónica (elipse, parábola, hipérbola) solución del problema en cuestión. En los casos de órbitas con energía no nula, esta cantidad está relacionada con el “tamaño” de la órbita (con la longitud del semieje mayor si es una elipse, o con la del semieje real si se trata de una hipérbola).

- El vector  $\mathbf{e}$  de Laplace–Runge–Lenz marca la orientación de la cónica en el plano del movimiento: según el tipo de órbita, como este vector lleva la dirección Foco–Pericentro, informa acerca de la dirección del eje mayor de la elipse, del eje real de la hipérbola, o del eje de la parábola. Además, su norma  $e$  coincide con el valor de la excentricidad numérica de la cónica considerada (lo cual proporciona otro criterio para la clasificación del tipo de cónica).

En resumidas cuentas, las integrales primeras  $\mathbf{G}$ ,  $\mathcal{E}$  y  $\mathbf{e}$  permiten determinar la órbita en su *aspecto geométrico*, pues proporcionan la *curva* que recorre la partícula a lo largo del tiempo, en tanto que la “ley horaria” proporciona la posición del móvil en dicha órbita.

En definitiva, para poder considerar completamente resuelto el problema de Kepler, sólo falta poder dar, en cada instante, la posición concreta de la masa móvil a lo largo de su órbita: es decir, establecer una relación tiempo–posición en cada instante. Esto se consigue estableciendo la que recibe el nombre de *ley horaria del movimiento* (Abad 2012, Capítulo 8, §8.5, pp.

130–139; Boccaletti y Pucacco 1996, Capítulo 2, §2.4, pp. 147–156; Bond y Allman 1996, Capítulo 2, §2.4, §§2.4.7, pp. 27–30, Apéndice B, pp. 225–229; Goldstein 1980, Capítulo 3, §3.8, pp. 98–102, y Ejercicio 17, p. 123; Schneider 1992, Capítulo 3, §3.3, §§3.3.1, pp. 42–46, §3.6, §§3.6.3, pp. 71–78; Thiry 1970, Capítulo II, §10–§12, pp. 58–64)

Con este propósito, en esta Memoria procederemos a estudiar por separado cada uno de los casos de cónica no degenerada que pueden aparecer como solución de un problema de Kepler, aunque numerosos autores presentan formulaciones universales y tratamientos uniformes del problema de los dos cuerpos que permiten desarrollar la teoría y resolver el problema de manera compacta y unificada, sin necesidad de tener que distinguir entre los diversos posibles casos. De cara a este planteamiento y tratamiento de la cuestión, las llamadas *funciones universales* constituyen una herramienta matemática esencial; a este respecto, véase, por ejemplo, Stiefel y Scheifele (1971), Capítulo III, §11, pp. 42–51; Schneider (1992), Capítulo 3, §3.7, pp. 94–97; Bond y Allman (1996), Capítulo 5, §5.4, pp. 71–77, Apéndice E, pp. 236–238; Abad (2012), Capítulo 10, pp. 163–173; Burdet (1968, 1969).

Antes de entrar en los detalles de cada uno de los tres casos concretos, conviene recordar o presentar algunos resultados preliminares de carácter general, válidos para todos los tipos de órbitas keplerianas.

Considerando en el plano orbital el sistema ortogonal de coordenadas polares planas  $(r, f)$ , y recordando (A.36), para la norma del vector velocidad se tiene la relación

$$v^2 = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 \implies \dot{r} = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - r^2 \dot{f}^2 \quad (\text{A.168})$$

Por otra parte, la integral de la ley de las áreas en este sistema de coordenadas, bajo cualquiera de las formas (A.41), (A.42) o (A.43), permite despejar la velocidad angular  $\dot{f}$ :

$$G = \mu r^2 \dot{f} \implies \dot{f} = \frac{G}{\mu r^2}, \quad (\text{A.169})$$

y a partir de ahí eliminar  $\dot{f}$  y dar otra expresión para el término  $r^2 \dot{f}^2$  (véase más adelante).

Además, en virtud de (A.86) o de (A.109), el semilado recto de cualquier cónica kepleriana verifica que  $p \equiv p(G) = G^2/(\mu A) \iff G^2 = \mu A p$ .

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

Finalmente, utilizando la conservación de la energía (A.94) en campos centrales conservativos, se deduce una relación que expresa la norma del vector velocidad de la masa móvil en función de la distancia  $r$  que en cada instante la separa del origen de coordenadas (y, por lo tanto, del centro de fuerzas):

$$v^2 \equiv v^2(r) = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \frac{2}{\mu} \{ \mathcal{E} - V(r) \} , \quad (\text{A.170})$$

relación que en el caso particular del movimiento kepleriano, es decir, en presencia del potencial  $V(r) = -A/r$ , adopta la forma

$$v^2 \equiv v^2(r) = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \frac{2}{\mu} \left( \mathcal{E} + \frac{A}{r} \right) . \quad (\text{A.171})$$

Tras estas consideraciones previas, pasaremos a estudiar a continuación los tres casos de cónicas keplerianas no degeneradas.

### A.9.1. Órbitas elípticas.

Recordando que en una elipse el semieje mayor y la energía cumplen que  $a(\mathcal{E}) = A/(-2\mathcal{E}) \iff \mathcal{E} = A/(-2a)$ , que el semilado recto es  $p = a(1 - e^2)$ , y que para el movimiento medio  $n$  se tiene que  $n^2 a^3 = A/\mu$ , la norma del vector velocidad dada en (A.171) se reescribe como

$$v^2 = \frac{2}{\mu} \left( \mathcal{E} + \frac{A}{r} \right) = \frac{A}{\mu} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) . (\text{A.172})$$

Eliminando  $\dot{f}$  de la formulación, el término  $r^2 \dot{f}^2$  se convierte en

$$\begin{aligned} r^2 \dot{f}^2 &= \frac{G^2}{\mu^2 r^2} = \frac{\mu A p}{\mu^2 r^2} = \frac{A}{\mu} \frac{p}{r^2} = \\ &= n^2 a^3 \frac{a(1 - e^2)}{r^2} = \frac{n^2 a^4 (1 - e^2)}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.173})$$

Introduciendo los resultados de (A.172) y de (A.173) en (A.168), y sa-

cando factor común  $n^2 a^2 / r^2$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{n^2 a^2}{r^2} (2 a r - r^2 - a^2 + a^2 e^2) = \\ &= \frac{n^2 a^2}{r^2} ((a e)^2 - (a - r)^2), \end{aligned} \quad (\text{A.174})$$

de donde

$$\dot{r} = \frac{d r}{d t} = \frac{n a}{r} \sqrt{(a e)^2 - (a - r)^2}, \quad (\text{A.175})$$

que por separación de variables conduce a

$$n a d t = \frac{r d r}{\sqrt{(a e)^2 - (a - r)^2}} = \frac{r d r}{a e \sqrt{1 - \frac{(a - r)^2}{a^2 e^2}}}. \quad (\text{A.176})$$

Como el semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $e$  son constantes en la elipse kepleriana, y la expresión  $(a - r) / (a e)$  depende linealmente de la variable  $r$ , el rango de variación de dicha expresión puede determinarse fácilmente a partir del rango de variación de la distancia  $r$ , que en el movimiento elíptico –y a la vista de (A.113), (A.114) y (A.116)– es  $r_{\min} = a(1 - e) \leq r \leq r_{\max} = a(1 + e)$ . Se observa que

$$\frac{a - r_{\max}}{a e} = -1, \quad \frac{a - r_{\min}}{a e} = 1 \quad \implies \quad \left| \frac{a - r}{a e} \right| \leq 1, \quad (\text{A.177})$$

por lo que se puede pensar que existe algún número real entre cero y  $2\pi$  cuyo seno o cuyo coseno sea, precisamente,  $(a - r) / a e$ . Esto sugiere que se puede realizar un cambio de variable de integración  $r \rightarrow E$  de manera que, por ejemplo, se verifique que

$$\frac{a - r}{a e} = \cos E \quad \implies \quad r(E) = a(1 - e \cos E), \quad (\text{A.178})$$

con lo que

$$d r = a e \sin E d E, \quad (\text{A.179})$$

y, en función de la nueva variable de integración, la relación (A.176) se reduce a

$$n d t = (1 - e \cos E) d E, \quad (\text{A.180})$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

cuya integración ahora es inmediata por mera cuadratura,

$$\int n dt = \int (1 - e \cos E) dE \implies nt = E - e \operatorname{sen} E + \text{cte.} \quad (\text{A.181})$$

De este modo se dispone, al menos formalmente, de una relación (aunque sea *trascendente*) entre el tiempo físico  $t$  y la variable auxiliar  $E$ , y de una relación (A.178) entre esta variable intermedia  $E$  y la distancia  $r$ . Además, en este último paso se ha introducido la sexta (y última) constante (funcionalmente independiente de las ya obtenidas anteriormente, pues en esta ocasión el tiempo  $t$  sí que interviene explícitamente en la fórmula (A.181) anterior) necesaria para poder considerar –al menos desde un punto de vista puramente teórico– completamente resuelto este caso del problema del movimiento relativo en un sistema gravitatorio de dos cuerpos.

La variable auxiliar de integración  $E$ , introducida por la ecuación (A.178), se llama *anomalía excéntrica del movimiento kepleriano elíptico*. La propia expresión  $r(E) = a(1 - e \cos E)$  puede interpretarse como una *representación paramétrica de la elipse*, con la anomalía excéntrica  $E$  como parámetro de la representación.

En lugar de considerar integración indefinida, también puede procederse por integración definida a partir de (A.180):

$$\int_{t_*}^t n d\hat{t} = \int_{E_*}^E (1 - e \cos \hat{E}) d\hat{E}, \quad (\text{A.182})$$

habiendo elegido un instante de referencia  $t_*$  para el cual el valor de la variable auxiliar de integración fuese  $E_*$ . Se tendría entonces

$$n(t - t_*) = (E - e \operatorname{sen} E) - (E_* - e \operatorname{sen} E_*). \quad (\text{A.183})$$

Cabría esperar que alguna elección particular especialmente adecuada del valor  $t_*$  condujese a alguna simplificación de esta expresión. Así, por ejemplo, si se eligiese como  $t_*$  el instante  $t_p$  en el que la partícula móvil se encuentra en el pericentro de su órbita elíptica, y sabiendo –véase (A.113) o (A.116)– que entonces  $r(t_p) = r_{\min} = a(1 - e) = r(E_p)$ , de la ecuación (A.178) se deduce

$$r(E_p) = r_{\min} \iff a(1 - e \cos E_p) = a(1 - e) \implies E_p = 0, \quad (\text{A.184})$$

y en consecuencia (A.183) se reduce a

$$n(t - t_p) = E - e \operatorname{sen} E, \quad (\text{A.185})$$

conocida como *ecuación de Kepler del movimiento elíptico*, aunque también las fórmulas (A.181) y (A.183) anteriores pueden recibir este mismo nombre.

Por su parte, la expresión del primer miembro de la ecuación de Kepler se denomina *anomalía media*, y suele representarse con los símbolos  $\ell$  o  $M$ . Recordando el significado original del movimiento medio  $n$  como una velocidad angular promedio con la que la masa móvil recorrería idealmente la órbita elíptica (en realidad, su circunferencia directriz) con un movimiento uniforme ficticio, la anomalía media en un instante dado sería el ángulo descrito por la partícula en dicho movimiento ficticio durante el intervalo de tiempo transcurrido entre el instante de su paso por el pericentro y el instante en cuestión.

Con las notaciones anteriores, la *ecuación de Kepler* (A.185) puede escribirse como

$$\ell = M = n(t - t_p) = E - e \operatorname{sen} E. \quad (\text{A.186})$$

A la vista de las ecuaciones (A.167), (A.178) y (A.186), se observa que, en un movimiento kepleriano elíptico, las tres variables de tipo angular que hasta ahora hemos denominado *anomalías* (la anomalía verdadera  $f$ , la anomalía excéntrica  $E$ , y la anomalía media  $\ell$ ) toman el valor cero en el pericentro, y el valor  $\pi$  en el apocentro:

$$\begin{aligned} f = E = \ell = 0 & \text{ en el pericentro,} \\ f = E = \ell = \pi & \text{ en el apocentro.} \end{aligned}$$

Se trata ahora de poder relacionar estas anomalías entre sí y con el tiempo físico  $t$ . Nótese que, por una parte, se dispone de dos representaciones paramétricas de la elipse: una de ellas, (A.167), con la anomalía verdadera  $f$  como parámetro de la representación; la otra, (A.178), en función de la anomalía excéntrica  $E$  como parámetro:

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad r(E) = a(1 - e \cos E); \quad (\text{A.187})$$

por otra, de la ecuación (trascendente) de Kepler, (A.186), que en aras de la completitud en la exposición volvemos a presentar:

$$\ell = M = n(t - t_p) = E - e \operatorname{sen} E. \quad (\text{A.188})$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

En esta ecuación, conocido el valor de la anomalía excéntrica correspondiente a una cierta posición de la partícula en la elipse, la determinación del instante de tiempo  $t$  en el que la partícula ocupa dicha posición supone la resolución de una ecuación algebraica (en realidad, polinómica) de primer grado. Sin embargo el problema inverso, cuando se conoce el valor de  $t$  para una posición dada y se desea hallar el valor de la anomalía excéntrica que a través de (A.178) genera tal posición, conlleva la resolución de una ecuación trascendente para la cual no es posible –en general– encontrar en términos finitos soluciones en forma cerrada por medio de funciones explícitas y conocidas del tiempo. Algunas estrategias para abordar esta cuestión aparecen descritas (con mayor o menor detalle) en, por ejemplo, Abad 2012, Capítulo 8, §8.5, §§8.5.4, pp. 136–138; Arnold, Kozlov y Neishtadt (1997), Capítulo 2, §1, pp. 54–55; Boccaletti y Pucacco, (1996), Capítulo 2, §2.4, pp. 151–156; Bond y Allman (1996), Capítulo 4, §4.4, pp. 45–46, §4.5, §§4.5.2, pp. 48–49, Capítulo 5, §5.4, §§5.4.2, p. 77; Goldstein (1980), Capítulo 3, Ejercicios 18, 19 y 29, pp. 123–124; Schneider (1992), Capítulo 3, §3.3, §§3.3.1, pp. 45–46, §§3.6, §§3.6.5, pp. 87–92; Stiefel y Scheifele (1971), Capítulo III, §10, p. 42;

Se presentan a continuación algunas de las relaciones fundamentales entre las anomalías verdadera y excéntrica:

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{a (\cos E - e)}{r(E)}, \quad (\text{A.189})$$

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} = \frac{b \sin E}{r(E)}, \quad (\text{A.190})$$

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}, \quad \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f}. \quad (\text{A.191})$$

Para evitar posibles dificultades en cuanto a la determinación del cuadrante al que pudieran pertenecer los valores de  $E$  y  $f$  resultantes de la aplicación de estas fórmulas, suele recurrirse a la siguiente *Fórmula de Gauss*, ya que el cuadrante de  $f/2$  es el mismo que el de  $E/2$ , debido a que (como se ha indicado más arriba) las anomalías  $f$  y  $E$  recorren simultáneamente el intervalo  $[0, \pi]$  mientras la partícula describe el arco de elipse comprendido entre el pericentro y el apocentro. En concreto, la fórmula de Gauss es

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{E}{2}, \quad (\text{A.192})$$

donde  $\alpha$  tiene el siguiente significado: Como  $0 \leq e < 1$ , existe algún número real  $\alpha \in [0, \pi/2)$  tal que  $e = \sin \alpha$ . Dicho número  $\alpha$  se llama

*excentricidad angular* o *excentricidad trigonométrica* de la elipse considerada, y es, por lo tanto, el ángulo para el cual el valor de la función seno coincide con la excentricidad numérica  $e$ . La última expresión de la fórmula de Gauss, bajo la forma de un producto de tangentes, fue propuesta en su día para facilitar el cálculo manual mediante el empleo de tablas de logaritmos y de tangentes.

### A.9.2. Órbitas parabólicas.

En el caso de una parábola, como  $e = 1$ , la ecuación focal (A.167) será

$$r(f) = \frac{p}{1 + \cos f} = \frac{p/2}{\cos^2(f/2)} = \frac{p}{2} (1 + \tan^2(f/2)) = \frac{p}{2} \sec^2(f/2) . \quad (\text{A.193})$$

La ley horaria para una órbita parabólica se obtendrá directamente a partir de la conservación del momento angular, en la forma (A.41), (A.42) o (A.43), y utilizando la fórmula del semilado recto (A.86) o (A.109):

$$\mu r^2 \dot{f} = G = \sqrt{\mu A p} \iff \mu [r(f)]^2 \frac{df}{dt} = \sqrt{\mu A p} . \quad (\text{A.194})$$

Introduciendo la expresión (A.193) de  $r(f)$  y separando variables resulta

$$\mu \frac{p^2}{4} \sec^4\left(\frac{f}{2}\right) df = \sqrt{\mu A p} dt , \quad (\text{A.195})$$

y recordando la definición (A.121) del movimiento medio parabólico,  $n^2 p^3 = A/\mu$ , esta ecuación puede reescribirse como

$$2 \sec^4\left(\frac{f}{2}\right) d\left(\frac{f}{2}\right) = 4n dt \implies 2n \int dt = \int \sec^4\left(\frac{f}{2}\right) d\left(\frac{f}{2}\right) , \quad (\text{A.196})$$

de donde, por integración elemental, se llega a

$$2nt = \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} + \tan \frac{f}{2} + \text{cte.} \quad (\text{A.197})$$

Como ya ocurría con la ecuación (A.181) en el caso de órbitas elípticas, también ahora se dispone de una relación entre el tiempo físico  $t$  y una

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

anomalía, aunque en esta ocasión se trata de la anomalía verdadera  $f$ , y de una relación (A.193) entre dicha anomalía y la distancia  $r$ . Asimismo, en este cálculo de primitivas se ha introducido la sexta (y última) constante (funcionalmente independiente de las ya obtenidas anteriormente, pues también ahora el tiempo  $t$  figura explícitamente en la fórmula (A.197) anterior) imprescindible para poder considerar –al menos desde un punto de vista puramente formal y teórico– completamente resuelto el problema del movimiento kepleriano a lo largo de una órbita parabólica.

Si se optase por una integración definida, a partir de un instante de referencia  $t_*$  para el cual el valor de la anomalía verdadera fuese  $f_*$ ,

$$2n \int_{t_*}^t d\hat{t} = \int_{f_*}^f \sec^4 \left( \frac{\tilde{f}}{2} \right) d \left( \frac{\tilde{f}}{2} \right), \quad (\text{A.198})$$

resultaría

$$2n(t - t_*) = \left( \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} + \tan \frac{f}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f_*}{2} + \tan \frac{f_*}{2} \right). \quad (\text{A.199})$$

De nuevo, alguna elección particularmente conveniente del valor  $t_*$  puede producir alguna simplificación significativa de esta expresión: tomando como referencia  $t_*$  el instante  $t_p$  en el que la partícula pasa por el pericentro de su órbita parabólica, y sabiendo –véase (A.113)– que entonces  $r(t_p) = r_{min} = p/2 = r(f=0)$ , será  $f_p = 0$ , con lo que finalmente (A.199) se simplifica, quedando en la forma

$$2n(t - t_p) = \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} + \tan \frac{f}{2}, \quad (\text{A.200})$$

llamada *ecuación de Barker del movimiento parabólico o ley horaria del movimiento parabólico*. . Nótese que también las expresiones (A.197) y (A.199) merecen, en principio, esta denominación.

También ahora, por analogía con el caso del movimiento kepleriano elíptico, puede introducirse el concepto de *anomalía media* del movimiento parabólico, en la forma  $\ell = M = n(t - t_p)$ . Esto permite reescribir la ecuación de Barker como

$$\ell = M = n(t - t_p) = \frac{1}{6} \tan^3 \frac{f}{2} + \frac{1}{2} \tan \frac{f}{2}. \quad (\text{A.201})$$

En un movimiento kepleriano parabólico, la anomalía verdadera  $f$  y la anomalía media  $\ell$  valen cero en el pericentro.

En esta ocasión, la ley horaria representada por la ecuación de Barker puede llevarse a forma algebraica (a diferencia de la ecuación de Kepler del movimiento elíptico que –como ya se ha indicado– es una ecuación trascendente). En efecto, introduciendo la notación  $\tan(f/2) = X$ , la ecuación de Barker se convierte en una cúbica en la variable  $X$ , lo cual da lugar a una ecuación polinómica de grado tres que es resoluble por radicales.

### A.9.3. Órbitas hiperbólicas.

La deducción de la ley horaria en el caso del movimiento kepleriano hiperbólico puede tratarse de una manera muy parecida a la del caso de las órbitas elípticas, aprovechando (con las debidas precauciones) las analogías que presentan las fórmulas de la Geometría Analítica, de la Cinemática y de la Dinámica para estos dos tipos de cónicas.

En una hipérbola el semieje real y la energía mantienen la relación  $a(\mathcal{E}) = A/(2\mathcal{E}) \iff \mathcal{E} = A/(2a)$ , el semilado recto obedece a la expresión  $p = a(e^2 - 1)$ , y para el movimiento medio hiperbólico  $n$  se tiene que  $n^2 a^3 = A/\mu$ . En estas condiciones, la norma del vector velocidad dada en (A.171) adopta la forma<sup>13</sup>

$$v^2 = \frac{2}{\mu} \left( \mathcal{E} + \frac{A}{r} \right) = \frac{A}{\mu} \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) = n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (\text{A.202})$$

---

<sup>13</sup>A la vista de la fórmula (A.172) para el movimiento elíptico, y de la que se establece ahora para el hiperbólico, y teniendo en cuenta la expresión del semilado recto en cada uno de esos dos casos, además de la forma que adopta la integral de la energía (A.94) con  $\mathcal{E} = 0$  y  $e = 1$  en las órbitas parabólicas, se puede proponer una versión unificada que engloba las tres situaciones de las cónicas keplerianas no degeneradas en una única fórmula que relaciona en cada instante la norma de la velocidad con la distancia (Abad 2012, Capítulo 8, §8.3, Ecuación (8.11) de la página 128; Cid y Ferrer 1997, Capítulo 13, §13.4, §§13.4.1, Ecuación (13.4.12) de la página 347):

$$v^2 = \frac{A}{\mu} \left( \frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p} \right).$$

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

Eliminando  $\dot{f}$ , el término  $r^2 \dot{f}^2$  será ahora

$$\begin{aligned} r^2 \dot{f}^2 &= \frac{G^2}{\mu^2 r^2} = \frac{\mu A p}{\mu^2 r^2} = \frac{A}{\mu} \frac{p}{r^2} = \\ &= n^2 a^3 \frac{a (e^2 - 1)}{r^2} = \frac{n^2 a^4 (e^2 - 1)}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.203})$$

Introduciendo estos resultados de (A.202) y de (A.203) en (A.168), y sacando factor común  $n^2 a^2 / r^2$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{n^2 a^2}{r^2} (2 a r + r^2 + a^2 - a^2 e^2) = \\ &= \frac{n^2 a^2}{r^2} ((a + r)^2 - (a e)^2), \end{aligned} \quad (\text{A.204})$$

y despejando la componente radial de la velocidad,

$$\dot{r} = \frac{d r}{d t} = \frac{n a}{r} \sqrt{(a + r)^2 - (a e)^2}. \quad (\text{A.205})$$

Separando variables,

$$n a dt = \frac{r dr}{\sqrt{(a + r)^2 - (a e)^2}} = \frac{r dr}{a e \sqrt{\frac{(a + r)^2}{a^2 e^2} - 1}} \quad (\text{A.206})$$

Como el semieje real  $a$  y la excentricidad  $e$  son constantes en la hipérbola kepleriana, y la expresión  $(a + r) / (a e)$  depende linealmente de la variable  $r$ , el rango de variación de dicha expresión puede calcularse a partir del rango de variación de la distancia  $r$ , que en el movimiento hiperbólico –y a la vista de (A.113) y (A.123)– es  $r_{min} = a(e - 1) \leq r < +\infty$ . Se observa que

$$\frac{a + r_{min}}{a e} = 1 \implies 1 \leq \frac{a + r}{a e} < +\infty. \quad (\text{A.207})$$

Se efectúa ahora un cambio de variable de integración  $r \rightarrow F$  tal que

$$\frac{a + r}{a e} = \cosh F \implies r(F) = a (e \cosh F - 1), \quad (\text{A.208})$$

con lo que la relación entre diferenciales es

$$d r = a e \sinh F d F, \quad (\text{A.209})$$

y, en función de la variable auxiliar de integración, la relación (A.206) se transforma en

$$n dt = (e \cosh F - 1) dF, \quad (\text{A.210})$$

cuya integración es inmediata, resultando

$$\int n dt = \int (e \cosh F - 1) dF \implies nt = e \sinh F - F + \text{cte.}, \quad (\text{A.211})$$

lo cual proporciona una relación (también ahora *trascendente*) entre el tiempo físico  $t$  y la variable auxiliar  $F$ , y una relación (A.208) entre esta variable intermedia  $F$  y la distancia  $r$ . Como en los casos anteriores, también en este último paso se ha introducido la sexta (y última) constante (funcionalmente independiente de las ya obtenidas anteriormente, pues el tiempo  $t$  aparece explícitamente en la fórmula (A.211) anterior) requerida para poder considerar –al menos desde un punto de vista teórico– completamente resuelto este último caso del problema del movimiento relativo en un sistema gravitatorio de dos cuerpos.

La variable auxiliar de integración  $F$ , introducida a través de la ecuación (A.208), es la *anomalía excéntrica del movimiento kepleriano hiperbólico*. La ecuación  $r(F) = a(e \cosh F - 1)$  se interpreta como una *representación paramétrica de la hipérbola*, con la anomalía excéntrica  $F$  como parámetro de dicha representación.

Al igual que en los casos anteriores, y con el mismo criterio, procediendo por integración definida a partir de (A.210),

$$\int_{t_*}^t n d\hat{t} = \int_{F_*}^F (e \cosh \hat{F} - 1) d\hat{F}, \quad (\text{A.212})$$

con  $t_*$  un instante de referencia para el cual el correspondiente valor de la variable auxiliar de integración sea  $F_*$ , se llegaría a

$$n(t - t_*) = (e \sinh F - F) - (e \sinh F_* - F_*). \quad (\text{A.213})$$

Para simplificar esta expresión, eligiendo como  $t_*$  el instante  $t_p$  en el que la partícula pasa por el pericentro de su órbita hiperbólica, y recordando –véase (A.113) o (A.123)– que entonces  $r(t_p) = r_{min} = a(e - 1) = r(F_p)$ ,

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

a partir de la ecuación (A.208) se obtiene

$$r(F_p) = r_{min} \iff a(e \cosh F_p - 1) = a(e - 1) \implies F_p = 0, \quad (\text{A.214})$$

gracias a lo cual (A.213) se reduce a

$$n(t - t_p) = e \sinh F - F, \quad (\text{A.215})$$

que es la *ecuación de Kepler del movimiento hiperbólico*; también las fórmulas (A.211) y (A.213) se denominan así.

La expresión del primer miembro de la ecuación de Kepler se llama también ahora *anomalía media*, y se denota con las letras  $\ell$  o  $M$ . Con estas notaciones, la *ecuación de Kepler* (A.215) se escribe como

$$\ell = M = n(t - t_p) = e \sinh F - F. \quad (\text{A.216})$$

De las ecuaciones (A.167), (A.208) y (A.216) se concluye que, en una hipérbola kepleriana, las tres variables de tipo *anomalía* que hemos considerado (la anomalía verdadera  $f$ , la anomalía excéntrica  $F$ , y la anomalía media  $\ell$ ) toman el valor cero en el pericentro.

A continuación, se desea establecer un conjunto de relaciones que ligen a estas anomalías entre sí y con el tiempo físico  $t$ . Es claro que, por una parte, se dispone de dos representaciones paramétricas de la hipérbola: una de ellas, (A.167), en función de la anomalía verdadera  $f$  como parámetro de la representación; la otra, (A.208), por medio de la anomalía excéntrica  $F$  como parámetro:

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad r(F) = a(e \cos F - 1); \quad (\text{A.217})$$

por otra, de la ecuación (trascendente) de Kepler, (A.216):

$$\ell = M = n(t - t_p) = e \sinh F - F. \quad (\text{A.218})$$

En esta ecuación, dado el valor de la anomalía excéntrica correspondiente a una posición de la partícula en la hipérbola, la determinación del instante de tiempo  $t$  en el que la partícula pasa por dicha posición implica la resolución de una ecuación polinómica de primer grado en la incógnita  $t$ . Sin embargo el problema inverso, cuando se conoce el valor de  $t$  para una posición dada y

se desea encontrar el valor de la anomalía excéntrica que a través de (A.208) genera tal posición, conlleva la resolución de una ecuación trascendente para la cual no es posible –en general– encontrar en términos finitos soluciones en forma cerrada por medio de funciones explícitas y conocidas del tiempo.

Finalmente se dan a continuación algunas de las relaciones fundamentales entre las anomalías verdadera y excéntrica en el movimiento hiperbólico:

$$\cos f = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1} = \frac{a (e - \cosh F)}{r(F)}, \quad (\text{A.219})$$

$$\sin f = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh F}{e \cosh F - 1} = \frac{b \sinh F}{r(F)}, \quad (\text{A.220})$$

$$\cosh F = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}, \quad \sinh F = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin f}{1 + e \cos f}. \quad (\text{A.221})$$

La versión de la *Fórmula de Gauss* para el caso hiperbólico es ahora

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2} = \coth \left( \frac{\alpha_H}{2} \right) \tanh \frac{F}{2}, \quad (\text{A.222})$$

si se introduce un número real  $\alpha_H$  tal que  $e = \cosh \alpha_H > 1$ .

## A.10. Sobre el formalismo canónico y las variables polares nodales.

En este apartado, y sin ninguna pretensión de ofrecer una exposición completa y formalmente rigurosa de los contenidos, comentaremos brevemente algunas ventajas que conlleva la utilización del formalismo canónico, e introduciremos el conjunto canónico de las variables polares nodales o de Hill–Whittaker.

En el marco de la Mecánica Canónica queda facilitada la introducción de *nuevas variables auxiliares* con fines de regularización, linealización y estabilización de las ecuaciones de movimiento. Además, la inclusión del parámetro temporal  $t$  como una dimensión adicional en pie de igualdad con las restantes coordenadas en el *espacio de configuración ampliado* (Lánczos, 1986,

## APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS INTERNAS.

Capítulo V, §2, nota al pie de la página 115, atribuye la idea a Lagrange en su *Mécanique Analytique* de 1788) tiene su traducción inmediata en la construcción del *espacio de fases ampliado*<sup>14</sup> y, a partir de ahí, en el desarrollo del correspondiente *formalismo canónico homogéneo* o *formalismo canónico ampliado*.

De hecho, el uso de este artificio en el marco del formalismo hamiltoniano se remonta a Poincaré (1905), Capítulo I, §12, pp. 13–16. Considerado como una variable canónica más, el tiempo físico puede también ser sometido a transformaciones canónicas; sin embargo la correspondiente variable canónica transformada ya no conserva en general el significado físico distintivo del que goza  $t$ : tras efectuar un cambio de variable independiente, por conveniencia en el uso de la terminología, se suele seguir hablando de la nueva variable independiente como de la “variable temporal”, el “parámetro temporal”, el “tiempo ficticio” o “pseudo-tiempo”, aunque en realidad estas denominaciones ya no acarreen un significado físico especial (Scheifele 1970, §§1.2, pp. 298–301; Stiefel y Scheifele 1971, Capítulo VIII, §30, §31, §32, §34, Capítulo X, §37; Thiry, 1970, Capítulo III, §10, pp. 93–95, §11, pp. 95–99; Capítulo V, §10, pp. 187–188, y §11, pp. 189–190; Cid y Camarena 1979, Capítulo VIII, §8, pp. 220–222; Boccaletti y Pucacco 1996, Capítulo 1, §1.5, pp. 41–42, §1.11, p. 75–76, §1.14, pp. 85–90; Lánzos 1986, Capítulo V, §6, y Capítulo VI, §10; Szebehely 1967, Capítulo 6, §6.4, §6.5 y §6.6, pp. 327–340; Schneider 1992, Capítulo 11, §11.7, pp. 340–341).

Es habitual combinar el formalismo canónico con la introducción de *nuevas variables independientes* distintas del tiempo físico  $t$ . Un artificio muy usado consiste en considerar transformaciones de tiempo  $t \rightarrow \tau$  en las que el nuevo tiempo ficticio  $\tau$  viene definido a través de una relación diferencial de la forma  $dt = \tilde{f} d\tau$ , donde la función  $\tilde{f}$  se toma proporcional a una potencia de la distancia  $r$  a través de un coeficiente que sea una constante o una función de elementos orbitales, de integrales primeras y/o de variables canónicas, es decir, de la forma  $\tilde{f} = k_v r^v$ , aunque también se han utilizado dependencias funcionales más generales. Estas transformaciones diferenciales de la variable independiente son generalizaciones de la *transformación regularizadora de Sundman* (1912–1913, p. 127 y p. 174).

En estas condiciones, dado un sistema mecánico gobernado por un hamiltoniano  $\mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  formulado en un conjunto de variables canónicas

<sup>14</sup>Szebehely 1967, Capítulo 6, §6.7, p. 341, imputa a Lánzos el haber acuñado la expresión “*espacio físico ampliado*” o “*espacio físico extendido*” (“extended phase space”).

$(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  con  $t$  como variable independiente, tras efectuar una reparametrización del movimiento por medio de un cambio de variable independiente  $dt = \tilde{f} d\tau$ , las ecuaciones canónicas del movimiento (respecto del pseudo-tiempo  $\tau$  como nueva variable independiente) se deducen del hamiltoniano transformado  $\mathcal{K} = \tilde{f}\mathcal{H}$ .

Para el conjunto canónico de *variables polares nodales de Hill y Whittaker* se usarán ahora las notaciones  $(r, \theta, \nu; p_r, p_\theta, p_\nu)$ , cuyo significado es el siguiente (véase, por ejemplo, Hill 1913, pp. 173–174; Thiry 1970, Capítulo III, §18, pp. 117–118, Capítulo IV, §6, §§6.3, pp. 132–135; Deprit 1981, §2, pp. 113–115; Ferrándiz y Fernández–Ferreirós, 1991, §2, p. 3; Cid y Ferrer 1997, Capítulo 13, §13.3, §§13.3.2, pp. 341–343; Abad 2012, Capítulo 9, §9.8, pp. 158–159):

- $r \geq 0$  es la norma euclídea del vector de posición, que representa la distancia radial desde el origen de coordenadas hasta la partícula móvil;
- $\theta$  designa al argumento de latitud del móvil (distancia angular al punto móvil desde su nodo ascendente), y está definido módulo  $2\pi$ ;
- $\nu$  representa al argumento de longitud del nodo ascendente;

y en cuanto a los momentos canónicos conjugados de estas estas coordenadas,

- $p_r$  es la componente radial de la velocidad de la masa en movimiento;
- $p_\theta$  designa a la norma del vector momento angular orbital, y
- $p_\nu$  denota a la componente polar (o vertical) del vector momento angular.

La relación entre variables canónicas cartesianas y variables polares nodales puede consultarse, por ejemplo, en Hill (1913), p. 173; Cid y Calvo (1973), §2; Cid y Ferrer (1997), p. 343.

En función de estas variables, la inclinación  $I$  del plano instantáneo de movimiento (respecto del plano fundamental  $x_1x_2$ ) depende de los momentos

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

$p_\theta$  y  $p_\nu$  a través de las relaciones

$$c \equiv \cos I = p_\nu/p_\theta, \quad s \equiv \operatorname{sen} I = \sqrt{1 - (p_\nu/p_\theta)^2}, \quad (\text{A.223})$$

donde, de paso, se han introducido las notaciones  $c \equiv \cos I$  y  $s \equiv \operatorname{sen} I$  que, en muchas ocasiones, se utilizan para abreviar la escritura de ciertas fórmulas (por ejemplo, en el estudio del movimiento de satélites artificiales).

En Thiry (1970), Capítulo IV, §6, §§6.3, pp. 132–135, se obtienen estas variables canónicas como resultado de una transformación de Mathieu a partir de las variables cartesianas habituales. Una deducción similar puede encontrarse en Cid y Calvo (1973), §2, pp. 16–18, bajo la forma de una *extensión canónica* a partir de coordenadas cartesianas rectangulares.

El hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$  de un *problema de Kepler* en estas variables polares nodales es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &\equiv \mathcal{H}_0(t, r, \theta, \nu, p_r, p_\theta, p_\nu) = \mathcal{H}_0(-, r, -, -, p_r, p_\theta, -) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.224})$$

donde ahora (a diferencia de párrafos anteriores) la letra  $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$  se ha usado para representar el parámetro gravitatorio del sistema de dos cuerpos. Cuando una de las masas (por ejemplo,  $m_1$ ) es considerablemente mayor que la otra ( $m_2 \ll m_1$ ), se suele utilizar la aproximación  $\mu \approx \mathcal{G}m_1$ , y se habla del “parámetro gravitatorio (o constante gravitatoria) de cuerpo de masa  $m_1$ ”. Así, por ejemplo, para el estudio del movimiento en torno al Sol de planetas, cometas, asteroides y otros cuerpos celestes en el seno del Sistema Solar, se considera el “parámetro gravitatorio heliocéntrico”  $\mu \approx \mathcal{G}M_{\text{Sol}}$ ; en el caso del movimiento de satélites artificiales de la Tierra se usa el “parámetro gravitatorio geocéntrico”  $\mu \approx \mathcal{G}M_{\text{Tierra}}$ ; para sondas espaciales que orbitasen alrededor de la Luna se tendría el “parámetro gravitatorio selenocéntrico”  $\mu \approx \mathcal{G}M_{\text{Luna}}$ , etc.

El conjunto de *variables canónicas de Hill y Whittaker* goza de algunas propiedades que se exponen a continuación de manera resumida, según la descripción que de ellas se ofrece en Cui y Mareyen (1992).

A diferencia de los elementos orbitales keplerianos clásicos, su aplicabilidad *no* depende de la forma de la órbita considerada (en última instancia, de su excentricidad), son regulares incluso para órbitas circulares y permiten

establecer una clara distinción entre las coordenadas de posición y las velocidades. Además, estas variables comparen con aquellos elementos la propiedad de que sus *variaciones temporales* son matemáticamente más sencillas y cuantitativamente más suaves que las correspondientes a las coordenadas cartesianas rectangulares, lo que las hace más adecuadas para el estudio de perturbaciones.

Para el movimiento kepleriano no perturbado los momentos  $p_\theta$  y  $p_\nu$  y la longitud del nodo ascendente  $\nu$  son constantes (pues sus variables conjugadas son ignorables en el hamiltoniano kepleriano); el radio vector  $r$  varía periódicamente en torno al valor medio constante  $p_\theta^2/\mu$  con una amplitud  $e p_\theta^2/\mu$ , donde  $\mu$  es el parámetro gravitatorio del sistema de dos cuerpos; la velocidad radial  $p_r$  varía periódicamente en torno al valor cero con amplitud  $e\mu/p_\theta$ ; el argumento de latitud  $\theta$  es la superposición de una función lineal del tiempo y un término periódico. Las amplitudes de los términos periódicos anteriores son pequeñas (proporcionales a la excentricidad).

Por otra parte, al ser canónicas, estas variables polares nodales permiten el tratamiento analítico de las ecuaciones diferenciales del movimiento por medio de transformaciones canónicas. En relación con su comportamiento y adecuación para la integración numérica de órbitas, puede consultarse el citado artículo de Cui y Mareyen (1992). Estos mismos autores (§I, p. 155) atribuyen a Izsák (1963) el mérito de haber sido el primero en introducir las variables de Hill en la Teoría del Satélite Artificial; con anterioridad, la mayor parte de las investigaciones sobre el movimiento orbital de satélites artificiales se efectuaba a partir de variables polares esféricas o en función de elementos de Delaunay.

Se considera a continuación el espacio de fases ampliado de dimensión ocho, dotado de la extensión o ampliación del conjunto de variables de Hill–Whittaker obtenida al adjuntar al conjunto canónico clásico un par conjugado  $(t, p_0)$  de variables canónicas constituido por el tiempo físico  $t$  (interpretado como una coordenada adicional) y el momento canónico asociado  $p_0$  (que, salvo por un cambio de signo, será igual al hamiltoniano del problema al que se apliquen las variables en el espacio de fases de dimensión 6; véase Lánzos 1986, Capítulo V, §2, pp. 115–119, y Capítulo VI, §10, pp. 185–192; también, el artículo de Scheifele 1970, §§1.2, y los pasajes del libro de Stiefel y Scheifele 1971, §30, §32, §34, §37).

En estas condiciones, el *hamiltoniano homogéneo*  $\mathcal{H}_{0,h}$  de un *problema*

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

*de Kepler*, expresado en este conjunto ampliado de variables polares nodales, es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{0,h} &\equiv \mathcal{H}_{0,h}(t, r, \theta, \nu, p_0, p_r, p_\theta, p_\nu) = \\
 &= \mathcal{H}_0(-, r, -, -, -, p_r, p_\theta, -) + p_0 \equiv \\
 &\equiv \mathcal{H}_{0,h}(-, r, -, -, p_0, p_r, p_\theta, -) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} + p_0. \tag{A.225}
 \end{aligned}$$

Cui y Lelgemann (1995), Apéndice A, Subapéndice A.1, p. 92, presentan un conjunto ampliado de variables canónicas de Hill–Whittaker en el que “la energía total” (según su denominación) desempeña el papel de lo que aquí se ha denotado como  $p_0$ ; pero es que, a su vez, el concepto de hamiltoniano que consideran estos autores (al igual que Hill 1913, p. 174; Izsák 1963, p. 559) difiere del nuestro en el signo, pues se trata del opuesto del que (siguiendo la práctica habitual <sup>15</sup>) utilizamos en esta Memoria.

Para uso posterior, se supondrá que un problema perturbado de dos cuerpos, o *sistema kepleriano perturbado*, en su formulación canónica en variables polares nodales, vendrá descrito por medio de un hamiltoniano de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &\equiv \mathcal{H}(t, r, \theta, \nu, p_r, p_\theta, p_\nu) = \mathcal{H}_0(-, r, -, -, p_r, p_\theta, -) + V \\
 &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} + V(-, r, \theta, \nu, p_r, p_\theta, p_\nu), \tag{A.226}
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}_0$  es el hamiltoniano correspondiente a un sistema kepleriano puro, y  $V$  representa al potencial de las fuerzas perturbadoras que actúan en el problema en cuestión.

En el espacio de fases ampliado a ocho dimensiones se considerarán también *hamiltonianos homogéneos de problemas de Kepler perturbados* que obe-

---

<sup>15</sup>Cf. §2 de A. Deprit, “A Note Concerning the TR–Transformation”, *Celestial Mechanics* **23**, (4), 299–305, 1981.

decen a expresiones de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_h &\equiv \mathcal{H}_h(t, r, \theta, \nu, p_0, p_r, p_\theta, p_\nu) = \\
 &= \mathcal{H}_0(-, r, -, -, -, p_r, p_\theta, -) + V + p_0 = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} \\
 &\quad + V(-, r, \theta, \nu, p_0, p_r, p_\theta, p_\nu) + p_0. \tag{A.227}
 \end{aligned}$$

De especial interés en esta Memoria serán los sistemas keplerianos perturbados que comparten una dependencia funcional del tipo que caracteriza a la familia de intermediarios radiales que Deprit introdujo en la Teoría de Satélites Artificiales (Deprit, 1981, §7, p. 138, Fórmulas [57] y [58], y Tabla II; Alfriend y Coffey, 1984; Ferrándiz y Fernández-Ferreirós, 1991; Floría, 1993):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_D &\equiv \mathcal{H}_D(-, r, -, -, -, p_r, p_\theta, p_\nu) = \\
 &= \mathcal{H}_0(-, r, -, -, -, p_r, p_\theta, -) + \mathcal{V}_D(-, r, -, -, -, p_\theta, p_\nu) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} + \frac{1}{r^2} V_D(-, -, -, -, -, p_\theta, p_\nu), \tag{A.228}
 \end{aligned}$$

o, más en general, en el espacio de fases ampliado,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{D,h} &\equiv \mathcal{H}_{D,h}(-, r, -, -, p_0, p_r, p_\theta, p_\nu) = \\
 &= \mathcal{H}_0(-, r, -, -, -, p_r, p_\theta, -) \\
 &\quad + \mathcal{V}_D(-, r, -, -, p_0, -, p_\theta, p_\nu) + p_0 \\
 &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} V_D(-, -, -, -, p_0, -, p_\theta, p_\nu) + p_0. \tag{A.229}
 \end{aligned}$$

El *Problema Fundamental* o *Problema Principal* de la teoría del movimiento de satélites artificiales queda caracterizado por el hamiltoniano (Deprit 1981, §5, pp. 129–130; Cid y Ferrer 1997, Capítulo 13, §13.3, §§13.3.2, p. 343; Abad 2012, Capítulo 17, §17.2, pp. 278–279) que, por ahora, denotaremos

APÉNDICE A. EL SISTEMA DE DOS CUERPOS CON FUERZAS  
INTERNAS.

---

como

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\equiv \mathcal{M}(-, r, \theta, -, p_r, p_\theta, p_\nu) = \mathcal{H}_0(-, r, -, -, p_r, p_\theta, -) + V \\ &= \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} + \varepsilon \mathcal{M}_1(-, r, \theta, -, -, p_\theta, p_\nu),\end{aligned}\quad (\text{A.230})$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{\mu R_e^2}{4r^3} \{ (3c^2 - 1) + 3s^2 \cos 2\theta \}, \quad (\text{A.231})$$

donde  $\varepsilon$  es un pequeño parámetro relacionado con el coeficiente  $J_2$  (Abad 2012, Capítulo 14, §14.3, pp. 225–226, Ec. (14.20); Cid y Ferrer 1997, Capítulo 7, §7.6, §§7.6.1, p. 207 y p. 209) que da cuenta del achatamiento dinámico del cuerpo central (en este caso, la Tierra),  $R_e$  es su radio ecuatorial medio, y las cantidades  $c$  y  $s$ , introducidas en (A.223), son funciones de la inclinación instantánea  $I \equiv I(p_\nu, p_\theta)$  del plano orbital,

$$c \equiv \cos I = p_\nu/p_\theta, \quad s \equiv \text{sen } I. \quad (\text{A.232})$$



## Sobre la transformación a elementos

### B.1. Transformaciones de ecuaciones diferenciales

Siguiendo el libro de *Kirchgraber y Stiefel* (1978) [68] se introducen las transformaciones de ecuaciones diferenciales tal y como viene explicado en la mayoría de libros de texto, pero con una pequeña variación que no es habitual. En este caso se van a admitir cambios de variables entre dominios de diferente dimensión.

En principio se considerará el caso de sistemas *autónomos*, y se dejará de lado el caso no autónomo, que, como bien se sabe, se puede fácilmente transformar en autónomo. Así que bastará con tratar el siguiente tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) , \quad (\text{B.1})$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f}$  es una función vectorial *suficientemente regular* de dimensión  $n \in \mathbb{N}$ ; además se establece que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}$  son las condiciones iniciales del sistema.

Uno de los instrumentos principales para la construcción analítica de soluciones aproximadas es el cambio de variables en las ecuaciones diferenciales. Pueden considerarse varios de ellos. El primero será una transformación a elementos.

## APÉNDICE B. SOBRE LA TRANSFORMACIÓN A ELEMENTOS

Como ya se ha mencionado, se define aquí una versión más general del cambio de variables para ecuaciones diferenciales.

Sea  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$  una función vectorial de dimensión  $n$ , con el vector  $\mathbf{y}$  de dimensión  $m$  como argumento, es decir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi} &: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y} &\longmapsto \mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) ,\end{aligned}$$

y no es necesario que  $m$  sea igual a  $n$ .

La matriz jacobiana de la función vectorial  $\boldsymbol{\psi}$  está definida como la matriz de las derivadas parciales:

$$J_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\psi}) := \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} .$$

**Definición 1:** La función vectorial  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$  se denomina transformación del sistema (B.1) si existe una función vectorial  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  de dimensión  $m$  tal que se verifique

$$J_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\psi}) \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})) . \quad (\text{B.2})$$

(La igualdad significa aquí igualdad entre funciones).

Como se puede comprobar, se define así una transformación en la que el espacio de salida y el de llegada no poseen la misma dimensión. A continuación se establece el siguiente Lema

**Lema 1.** Si  $\mathbf{y}(t)$  es una solución del sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) ,$$

donde  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  verifica la ecuación (B.2), entonces

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}(t)) ,$$

es solución de (B.1).

La demostración se obtiene de forma inmediata aplicando la regla de la cadena.

Si la matriz jacobiana es cuadrada, o sea  $n = m$ , y además regular, entonces

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = J_{\mathbf{y}}^{-1}(\boldsymbol{\psi}) \mathbf{f}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})) . \quad (\text{B.3})$$

Sea la función  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$  inversible; entonces existe una función vectorial de dimensión  $n$ , que se denotará por  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})$ , tal que cumple las siguientes propiedades

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})) , \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})) . \quad (\text{B.5})$$

Derivando la segunda expresión respecto de  $\mathbf{x}$  se obtiene

$$J_{\mathbf{y}}^{-1}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} , \quad \mathbf{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) ,$$

y se concluye que

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} , \quad \mathbf{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) ,$$

donde la flecha  $\rightsquigarrow$  significa que se sustituirá  $\mathbf{x}$  por  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$  una vez calculadas todas las derivadas parciales.

## B.2. Funciones casi–periódicas

El primero en desarrollar una teoría de las funciones casi–periódicas fue el matemático *Bohr* (1924), (1925) y (1926) [20–22]. En este resumen sólo se tratarán funciones complejas de variable real, aunque los resultados básicos son fáciles de extender a funciones vectoriales reales (véase, por ejemplo, *Arguedas y Castro* (2000) [10]).

Siguiendo el libro de *Bohr* (1947) [23] se considera la suma finita

$$s(t) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n t} , \quad \forall t \in \mathbb{R} , \quad (\text{B.6})$$

donde los coeficientes  $a_n$  son números complejos y los exponentes  $\lambda_n$  son números reales.

## APÉNDICE B. SOBRE LA TRANSFORMACIÓN A ELEMENTOS

---

Realmente para muchos propósitos basta con partir del conjunto dado por las funciones (B.6), aunque para proporcionar una visión algo más amplia se presentará un pequeño resumen de algunos de los conceptos fundamentales de la teoría de Bohr.

Un ejemplo ilustrará las ideas de la teoría de Bohr: sea

$$s(t) = e^{i\lambda_1 t} + e^{i\lambda_2 t},$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son distintos de cero. Como es obvio, cada término de esta suma es una función periódica con los períodos respectivos  $p_1 = 2\pi / |\lambda_1|$  y  $p_2 = 2\pi / |\lambda_2|$ .

Si  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}$ , entonces existen dos enteros  $n_1$  y  $n_2$  distintos de cero tales que  $P := n_1 p_1 = n_2 p_2$  es el período de  $s(t)$ .

En el caso de que  $\lambda_1/\lambda_2$  sea un número irracional no existen dos números enteros distintos de cero tales que  $n_1 p_1 = n_2 p_2$  (se dice entonces que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son inconmensurables; también se dice que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son linealmente independientes sobre el anillo  $\mathbb{Z}$  de los números enteros), y como consecuencia no existe período de  $s(t)$ . Sin embargo, para cualquier  $\delta > 0$  existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tales que

$$|n_1 p_1 - n_2 p_2| < \delta,$$

lo cual se deduce como un caso particular del teorema general de la aproximación diofántica (*Bohr* (1947) [23], §40 p. 31).

Un ejemplo sencillo de una función no periódica formada por funciones trigonométricas:

$$s(t) = \sin 2\pi t + \cos 2\pi\sqrt{2} t.$$

Es obvio que esta función no posee período  $T$  tal que  $f(t+T) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Pero para cualquier  $\delta > 0$  se pueden encontrar dos números  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tales que  $|2n_1 - \sqrt{2}n_2| < \delta$ .

De ahí que se necesite una definición que no sólo abarque a las funciones periódicas, sino también a este tipo de funciones, y a su clausura respecto de la norma uniforme.

Es posible obtener otros conjuntos de funciones casi-periódicas usando sumas finitas e infinitas de funciones trigonométricas y completar el conjunto (véanse, por ejemplo los libros de Corduneanu (1989) y (2009) [38, 39]).

En el libro *Sternberg* (1969) [93, p. 3 y p. 11] se definen las funciones “almost periodic” y “quasi-periodic”, mientras que Corduneanu (1989) y (2009) no hace esa distinción, pero clasifica las funciones casi-periódicas dependiendo del conjunto de polinomios trigonométricos (finito o infinito) y de la norma utilizada para completar el espacio compuesto por el conjunto en cuestión.

Nosotros utilizaremos la definición de las funciones casi-periódicas de *Bohr* (1947) presentada por *Sternberg* (1969).

**Definición 2:** Una función  $f$  compleja de variable real se denomina **uniformemente casi-periódica** si

- I.  $f$  es continua y
- II. dado  $\varepsilon > 0$  existe un  $L(\varepsilon) > 0$  de tal manera que cualquier intervalo  $(a, a + L(\varepsilon))$  con longitud  $L(\varepsilon)$  contiene al menos un número  $\tau := \tau_f(\varepsilon) \in \mathbb{R}$  tal que

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (\text{B.7})$$

El valor  $\tau$  se denomina **número de traslación**, o también **casi-período**, de  $f$  correspondiente a  $\varepsilon > 0$ .

El conjunto constituido por estas funciones es la clausura del conjunto formado por los polinomios trigonométricos (B.6) respecto de la norma uniforme, y se denotará por  $H$ . Así que la casi-periodicidad es precisamente la propiedad estructural que caracteriza a las funciones  $f$  que pertenecen a  $H$ .

Entonces para cualquier función  $f \in H$  y para cada  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio trigonométrico  $s(t)$  tal que

$$|f(t) - s(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Dicho de otra manera, cualquier función  $f \in H$  puede ser aproximada por un polinomio trigonométrico tanto como se quiera. Y además toda función de tipo (B.6) es una función uniformemente casi-periódica.

**Definición 3:** Se dice que un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  es **relativamente denso** en  $\mathbb{R}$  si existe una longitud  $L > 0$  tal que cualquier intervalo  $(\alpha, \alpha + L)$  de longitud  $L$  contiene al menos un elemento  $\tau \in A$ .

## APÉNDICE B. SOBRE LA TRANSFORMACIÓN A ELEMENTOS

---

Un ejemplo de un conjunto relativamente denso es el conjunto  $\{np \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } p > 0\}$  (ver por ejemplo *Levitán y Zhikov* (1982) [75, p. 1]).

Sea  $\{\tau_f(\varepsilon)\}$  el conjunto de los números de traslación de  $f$  correspondiente a  $\varepsilon$ ; entonces se puede afirmar que dicho conjunto es relativamente denso en  $\mathbb{R}$ .

A continuación se presentan algunos resultados relativos a las funciones casi-periódicas, sin entrar en las demostraciones.

**Teorema 2.** *Toda función uniformemente casi-periódica es acotada y además es uniformemente continua.*

Otro resultado importante (ver *Corduneanu* (2009) [39]) es que  $H$  es un álgebra de Banach.

**Corolario 3.** *Sea  $F$  una función de  $k$  argumentos uniformemente continua respecto a todos ellos. Entonces la función  $F(f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot))$  es uniformemente casi-periódica si las funciones  $f_1, \dots, f_k$  son uniformemente casi-periódicas.*

Este corolario brinda la posibilidad de introducir una nueva clase de funciones, que se denominarán simplemente casi-periódicas, usando la misma nomenclatura que *Sternberg* (1969) [93, p. 11–12]:

**Definición 4:** *Una función  $f(t)$  se denomina **casi-periódica** si se puede expresar como*

$$f(t) = F(e^{2\pi i \lambda_1 t}, \dots, e^{2\pi i \lambda_k t}) , \quad (\text{B.8})$$

donde  $F$  es una función continua y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son números reales.

Estas funciones son un subconjunto del conjunto de las funciones uniformemente casi-periódicas.

En el libro de *Kirchgraber y Stiefel* (1978) [68], p. 17, se encuentra una definición equivalente, pero aplicada a una función vectorial:

**Definición 5:** *Una función  $\mathbf{x}(t)$  es **casi-periódica** si existe una función  $\mathbf{X}(t_1, \dots, t_k)$  periódica de período  $2\pi$  en todos sus argumentos y existen  $k$  números reales  $\omega_1, \dots, \omega_k$  tales que*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\omega_1 t, \dots, \omega_k t) .$$

Se puede considerar a  $(\omega_1 t, \dots, \omega_k t)$  como un grupo uniparamétrico (una línea recta) sobre un toro  $k$ -dimensional, y a  $\mathbf{X}$  como una función continua sobre ese toro.

### B.3. Transformación a elementos

En primer lugar es necesario definir qué tipo de problemas pueden resultar de interés en las aplicaciones, y para eso se propone la siguiente definición:

**Definición 6:** *El problema planteado por la ecuación diferencial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{f}^1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{f}^2(\mathbf{x}) + \dots \quad (\text{B.9})$$

se llamará **problema perturbado** si:

- I. el parámetro  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, y
- II. el problema no perturbado asociado,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{B.10})$$

posee sólo soluciones periódicas o casi-periódicas.

La segunda propiedad del problema perturbado permite en general definir un cambio de variables tal que (B.9) se transforme en un sistema que será especialmente apropiado para su ulterior análisis por medio de diversas técnicas. Esta transformación se denominará *transformación a elementos*, y las nuevas variables se llamarán *elementos*. Los elementos son cantidades o funciones que en el sistema no perturbado son constantes o varían linealmente con la variable independiente.

Para comprender mejor los conceptos de una “transformación a elementos” y “elementos” se desarrollarán algunos ejemplos.

**Ejemplo 1:** *Se considera un par de osciladores acoplados*

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \varepsilon f_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2; \varepsilon) \quad , \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \varepsilon f_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2; \varepsilon) \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

donde  $\omega_1, \omega_2$  son inconmensurables, es decir, que la única solución de la ecuación

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = 0$$

---

APÉNDICE B. SOBRE LA TRANSFORMACIÓN A ELEMENTOS

---

sea la solución trivial  $m_1 = 0$  y  $m_2 = 0$ . También se suele decir que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son linealmente independientes sobre el anillo  $\mathbb{Z}$  de los enteros.

A continuación se transforma el problema en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & \dot{x}_3 = -\omega_1^2 x_1 + \varepsilon f_1, \\ \dot{x}_2 = x_4, & \dot{x}_4 = -\omega_2^2 x_2 + \varepsilon f_2. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

La solución del problema no perturbado es

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0 \cos \omega_1 t + x_3^0 \sin \omega_1 t, \\ x_2(t) = x_2^0 \cos \omega_2 t + x_4^0 \sin \omega_2 t, \\ x_3(t) = -\omega_1 x_1^0 \sin \omega_1 t + \omega_1 x_3^0 \cos \omega_1 t \\ x_4(t) = -\omega_2 x_2^0 \sin \omega_2 t + \omega_2 x_4^0 \cos \omega_2 t, \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

donde  $x_i^0$  representan a las condiciones iniciales, que se van a convertir en las nuevas variables (elementos)  $\sigma_i$ , de manera que en el sistema perturbado ya no tendrán por qué ser constantes.

Además se añaden las siguientes nuevas variables  $\phi_j$ , que corresponden a las expresiones  $\omega_j t$ , que en este caso varían linealmente con la variable independiente  $t$ . Así que la nueva transformación  $\psi$ , denominada transformación a elementos, está dada por

$$\begin{cases} \psi_1 := x_1 = \sigma_1 \cos \phi_1 + \sigma_3 \sin \phi_1, \\ \psi_2 := x_2 = \sigma_2 \cos \phi_2 + \sigma_4 \sin \phi_2, \\ \psi_3 := x_3 = -\omega_1 \sigma_1 \sin \phi_1 + \omega_1 \sigma_3 \cos \phi_1, \\ \psi_4 := x_4 = -\omega_2 \sigma_2 \sin \phi_2 + \omega_2 \sigma_4 \cos \phi_2. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Esta transformación proporciona cuatro ecuaciones y seis variables. Se calcula la matriz jacobiana de  $\psi$  y resulta

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\psi_3}{\omega_1} & 0 & \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\psi_4}{\omega_2} & 0 & 0 & \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ -\psi_1 \omega_1 & 0 & -\omega_1 \sin \phi_1 & \omega_1 \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\psi_2 \omega_2 & 0 & 0 & -\omega_2 \sin \phi_2 & \omega_2 \cos \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Sea  $\mathbf{g} := (\mathbf{R}, \mathbf{T})^t := (R_1, R_2, T_1, T_2, T_3, T_4)^t$ , usando la misma notación que en la Definición 1. Entonces la ecuación (B.2) adopta la siguiente forma

$$J \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \\ -\omega_1^2 \psi_1 + \varepsilon f_1 \\ -\omega_2^2 \psi_2 + \varepsilon f_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

Este sistema no posee solución única, es decir, no todas las funciones incógnita están determinadas de modo único, lo cual permite efectuar la siguiente elección,

$$R_1 = \omega_1, \quad R_2 = \omega_2,$$

y obtener su solución

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = R_1 = \omega_1, \\ \dot{\phi}_2 = R_2 = \omega_2, \\ \dot{\sigma}_1 = T_1 = -\varepsilon \frac{1}{\omega_1} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \sin \phi_1, \\ \dot{\sigma}_2 = T_2 = \varepsilon \frac{1}{\omega_1} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \cos \phi_1, \\ \dot{\sigma}_3 = T_3 = -\varepsilon \frac{1}{\omega_2} f_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \sin \phi_2, \\ \dot{\sigma}_4 = T_4 = \varepsilon \frac{1}{\omega_2} f_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \cos \phi_2, \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

donde las variables  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  deben ser sustituidas por las expresiones (B.14).

**Ejemplo 2:** Se parte del mismo sistema (B.11) o (B.12) del ejemplo anterior, pero proponiendo una solución diferente para el problema no perturbado:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos(\omega_1 t + c_3), & x_3(t) = -c_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + c_3), \\ x_2(t) = c_2 \sin(\omega_2 t + c_4), & x_4(t) = -c_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + c_4), \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

donde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  son las constantes arbitrarias de integración.

Los elementos se definen ahora de la siguiente manera:  $\phi_1 := \omega_1 t + c_3$ ,  $\phi_2 := \omega_2 t + c_4$ ,  $\sigma_1 := c_1$  y  $\sigma_2 := c_2$ . Como se puede comprobar, en la solución no perturbada los elementos son constantes o funciones lineales de la variable independiente.

La transformación a elementos está definida por

$$\begin{cases} x_1(t) = \psi_1 = \sigma_1 \cos \phi_1 & , & x_3(t) = \psi_3 = -\sigma_1 \omega_1 \cos \phi_1 & , \\ x_2(t) = \psi_2 = \sigma_2 \operatorname{sen} \phi_2 & , & x_4(t) = \psi_4 = -\sigma_2 \omega_2 \operatorname{sen} \phi_2 & . \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Este cambio de variables posee la matriz jacobiana  $J$  que corresponde al caso particular en el que el número de ecuaciones es igual al número de variables. Si  $\sigma_1 \neq 0$  y  $\sigma_2 \neq 0$ , entonces  $J$  es una matriz regular, como se puede comprobar.

Basándose en la fórmula (B.3) y la Definición 1 se determina la función  $g$ . Finalmente se obtiene el sistema transformado

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \omega_1 - \varepsilon \frac{1}{\omega_1 a_1} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \cos \phi_1 & , \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2 - \varepsilon \frac{1}{\omega_2 a_2} f_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \operatorname{sen} \phi_2 & , \\ \dot{\sigma}_1 = -\varepsilon \frac{1}{\omega_1} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \operatorname{sen} \phi_1 & , \\ \dot{\sigma}_2 = -\varepsilon \frac{1}{\omega_2} f_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \varepsilon) \operatorname{sen} \phi_2 & , \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

donde las variables  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  deben ser sustituidas por las expresiones (B.18).

**Ejemplo 3:** El siguiente ejemplo, que también está extraído del libro de Kirchgraber y Stiefel (1978) [68, pp. 19], mostrará un sistema de ecuaciones de elementos algo diferente a los hallados en los dos ejemplos anteriores.

Sea

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{2}\varepsilon f_2 & , & \dot{x}_3 = x_4 + \frac{1}{2}\varepsilon f_2 & , \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{2}\varepsilon f_1 & , & \dot{x}_4 = -x_3 - \frac{1}{2}\varepsilon f_1 & , \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

el sistema perturbado. La solución general del sistema no perturbado viene dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos(t + c_3 + c_4) & , & x_3(t) = c_2 \cos(t + c_3 - c_4) & , \\ x_2(t) = -c_1 \operatorname{sen}(t + c_4 + c_4) & , & x_4(t) = -c_2 \operatorname{sen}(t + c_4 - c_3) & , \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

donde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  son las constantes de integración.

Como en los anteriores ejemplos, se propone un cambio de variables

$$\begin{cases} x_1(t) = \psi_1 = \sigma_1 \cos(\phi + \Omega) & , \\ x_2(t) = \psi_2 = -\sigma_1 \operatorname{sen}(\phi + \Omega) & , \\ x_3(t) = \psi_3 = \sigma_2 \cos(\phi - \Omega) & , \\ x_4(t) = \psi_4 = -\sigma_2 \operatorname{sen}(\phi - \Omega) & , \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

donde  $\sigma_1 := c_1$ ,  $\sigma_2 := c_2$ ,  $\phi := t + c_3$  y  $\Omega := c_4$ .

La matriz jacobiana asociada a este cambio de variables es regular siempre que  $\sigma_1 \neq 0$  y  $\sigma_2 \neq 0$ . En este caso el sistema transformado está dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = 1 - \frac{\varepsilon}{4\sigma_1} [f_2 \operatorname{sen}(\phi + \Omega) + f_1 \cos(\phi + \Omega)] \\ \quad - \frac{\varepsilon}{4\sigma_2} [f_2 \operatorname{sen}(\phi - \Omega) - f_1 \cos(\phi - \Omega)] , \\ \dot{\Omega} = -\frac{\varepsilon}{4\sigma_1} [f_2 \operatorname{sen}(\phi + \Omega) + f_1 \cos(\phi + \Omega)] \\ \quad + \frac{\varepsilon}{4\sigma_2} [f_2 \operatorname{sen}(\phi - \Omega) - f_1 \cos(\phi - \Omega)] , \\ \dot{\sigma}_1 = -\frac{\varepsilon}{2} [f_1 \operatorname{sen}(\phi + \Omega) - f_2 \cos(\phi + \Omega)] , \\ \dot{\sigma}_2 = \frac{\varepsilon}{2} [f_1 \operatorname{sen}(\phi - \Omega) + f_2 \cos(\phi - \Omega)] , \end{array} \right. \quad (\text{B.23})$$

y como en los ejemplos anteriores las variables  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  se substituyen por las expresiones (B.22).

Estos tres ejemplos ilustran la situación general que se describe a continuación:

El cambio que convierte a la variable vectorial  $\mathbf{x}$  en el nuevo conjunto de variables  $\phi, \boldsymbol{\sigma}$  (o  $\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}$ ) se denotará por  $\boldsymbol{\psi}(\phi, \boldsymbol{\sigma})$  (o  $\boldsymbol{\psi}(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma})$ ). Esto es lo que se denomina *la introducción de elementos* si se cumplen las siguientes condiciones:

- I.  $\boldsymbol{\psi}(\phi, \boldsymbol{\sigma})$  es una función periódica de período  $2\pi$  en las componentes del vector  $\phi$ , y en el caso  $\boldsymbol{\psi}(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma})$  es  $2\pi$ -periódica respecto de los vectores  $\phi$  y  $\boldsymbol{\theta}$ .
- II. El sistema transformado (B.9), en el primer y segundo ejemplo, es

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon \mathbf{R}^1(\phi, \boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon^2 \mathbf{R}^2(\phi, \boldsymbol{\sigma}) + \cdots , \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \varepsilon \mathbf{T}^1(\phi, \boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon^2 \mathbf{T}^2(\phi, \boldsymbol{\sigma}) + \cdots , \end{array} \right. \quad (\text{B.24})$$

y en el tercer ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon \mathbf{R}^1(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon^2 \mathbf{R}^2(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) + \cdots , \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \varepsilon \mathbf{S}^1(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon^2 \mathbf{S}^2(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) + \cdots , \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \varepsilon \mathbf{T}^1(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon^2 \mathbf{T}^2(\phi, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) + \cdots , \end{array} \right. \quad (\text{B.25})$$

donde las funciones  $\mathbf{R}^i, \mathbf{S}^i, \mathbf{T}^i$  poseen las mismas propiedades de periodicidad que la transformación  $\psi$ .

- III. Sea  $\mathcal{G}$  la región de interés para la variable  $\sigma$  y  $\kappa_3 =$  número de componentes de  $\sigma$ . Entonces se cumple: para todo conjunto no vacío y finito  $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}^{\kappa_3}$  existe un valor  $k(\mathcal{N}, \mathcal{G})$  tal que:

$$|\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}(\sigma)| \geq k(\mathcal{N}, \mathcal{G}) > 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{N} \text{ y } \forall \sigma \in \mathcal{G} .$$

*Comentario.* La condición (III) garantiza la ausencia de divisores nulos en expresiones del tipo

$$\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}(\sigma)} ,$$

aunque  $\mathbf{n}$  pertenece a un conjunto  $\mathcal{N}$  que en principio no se podrá determinar ahora, a la espera de un análisis posterior del sistema. Esta condición garantiza que la transformación esté bien definida.

**Definición 7:**

- *La variable  $\sigma$  se denomina variable de amplitud, o simplemente amplitud.*
- *En el caso del problema no perturbado  $\phi$  varía linealmente con la variable independiente y  $\theta$  es constante. Las variables del vector  $\phi$  son las variables rápidas, y las del vector  $\theta$  son las lentas; además estas variables se denominan variables angulares.*
- *Si se consigue introducir los elementos sin necesidad de las variables lentas, entonces se dice que el sistema es no degenerado, y degenerado en el caso contrario.*  
*En muchos casos un sistema degenerado surge a partir de un sistema no degenerado, al modificarlo añadiendo una simetría.*
- *La propiedad (III) anterior se denomina condición de no resonancia. También se suele decir que el vector de frecuencias  $\boldsymbol{\omega}(\sigma)$  es linealmente independiente sobre el anillo  $\mathbb{Z}$ .*

Un sistema del tipo (B.9) que permita introducir los elementos en el sentido que ha sido descrito se llamará un *sistema oscilante (oscilatorio) perturbado*.

## Bibliografía

- [1] Abad, A. Astrodinámica. *Bubok Publishing, S.L.*, 2012. URL [www.bubok.es//libro/detalles/219952/Astrodinamica](http://www.bubok.es//libro/detalles/219952/Astrodinamica).
- [2] Alfriend, K. T. y Coffey, S. L. Elimination of the perigee in the satellite problem. *Celestial Mechanics*, 32(2):163–172, 1984.
- [3] Aparicio, I. y Floría, L. On perturbed two–body problems y harmonic oscillators (Série II b). *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 323(1):71–76, 1996.
- [4] Aparicio, I. y Floría, L. Regularized equations of motion for the Alfriend–Coffey Hamiltonian. *Advances in the Astronautical Sciences*, 95(I):383–395, 1997.
- [5] Aparicio, I. y Floría, L. On reduction of the nonstationary two-body problem to oscillator form. In J. A. Docobo, A. Elipe y H. McAlister, (Editores), *Visual Double Stars: Formation, Dynamics y Evolutionary Tracks*, volume 223 of *Astrophysics y Space Science Library*, pages 361–366. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [6] Aparicio, I. y Floría, L. Harmonic oscillator solutions to linearizable perturbations of two-body problems. *Advances in the Astronautical Sciences*, 99(I):409–428, 9-11, 1998.
- [7] Aparicio, I. y Floría, L. The main oblatness perturbation problem in def-regular elements. *Advances in the Astronautical Sciences*, 102(II): 875–990, 7-10, 1999.

- [8] Aparicio, I. y Floría, L. Focal-type elements based on quasi-keplerian systems. an application to satellite motion. *Advances in the Astronautical Sciences*, 105(II):901–912, 2000.
- [9] Aparicio, I. y Floría, L. On polynomial perturbations of Keplerian Hamiltonian systems y canonical linearization techniques. *International Journal of Applied Science & Computations*, 7(3):155–160, 2000.
- [10] Arguedas, Vernor y Castro, Edwin. Algunos aspectos teóricos de las funciones casi periódicas n-dimensionales. *REVISTA DE MATEMÁTICA: Teoría y aplicaciones*, 7(1–2):165–174, 2000.
- [11] Arnold, V. I., Kozlov, V. V., y Neishtadt, A. I. *Dynamical Systems III. Mathematical Aspects of Classical y Celestial Mechanics.*, volume 3 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2 edition, 1997.
- [12] Barner, M. y Flohr, F.. *Analysis II*, volume II of *De-Gruyter-Lehrbuch*. Walter de Gruyter & Co., 1983.
- [13] Bartnik, E. A., Haberzettl, H. y Sandhas, W. Equations of Motion Using the Dynamical Evolution of the Runge-Lenz Vector. *The Astrophysical Journal*, 334:517–526, 1988.
- [14] Baxter, B. E. Keplerian Representation of a Non-Keplerian Orbit. *Journal of Guidance y Control*, 3(2):151–153, 1980.
- [15] Bertrand, G. La loi de Newton et la formule d’Einstein pour le périhélie des planètes. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 173: 438–440, 1921.
- [16] Beutler, G. *Methods of Celestial Mechanics (Vol. I: Physical, Mathematical and Numerical Principles)*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, 2005.
- [17] Bilimovitch, A. Über die Anwendung der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. *Astronomische Nachrichten*, 273:161–178, 1943.
- [18] Boccaletti, D. y Pucacco, G. *Theory of Orbits (Vol. I: InIntegrable Systems and Non-perturbative Methods)*. Astronomy y Astrophysics Library. Springer-Verlag, 1996.
- [19] Bohlin, K. Note sur le problème des deux corps et sur une intégration nouvelle dans le problème des trois corps. *Bulletin Astronomique, Série I*, 28:113–119, 1911.

- [20] Bohr, H. Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen I. *Acta Mathematica*, 45:29–127, 1924.
- [21] Bohr, H. Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen II. *Acta Mathematica*, 46:101–214, 1925.
- [22] Bohr, H. Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen III. *Acta Mathematica*, 47:237–281, 1926.
- [23] Bohr, H. *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company, 1947.
- [24] Bond, V. R. y Allman, M. C. *Modern Astrodynamics. Fundamentals and Perturbation Methods*. Princeton University Press, 1996.
- [25] Broucke, R., Lass, H. y Ananda, M. Redundant Variables in Celestial Mechanics. *Astronomy & Astrophysics*, 13:390–398, 8 1971.
- [26] Burdet, C. A. Regularization of the two–body problem. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 18(3):434–438, 1967.
- [27] Burdet, C. A. Theory of Kepler motion: The general perturbed two body problem. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 19 (2):345–368, 1968.
- [28] Burdet, C. A. Le mouvement képlérien et les oscillateurs harmoniques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 238:71–84, 1969.
- [29] Burdet, C. A. y Rössler, M. y Stiefel, E. y Waldvogel, J. Methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics. Technical report, NASA, Jun 1967.
- [30] Caballero, J. A. y Elipe, A. Universal Solution for Motions in a Central Force Field. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 19:869–874, 2001.
- [31] Campbell, J. A. y Jefferys, W. H. Equivalence of the Perturbation Theories of Hori and Deprit. *Celestial Mechanics*, 2:467–473, 1970.
- [32] Choi, J. S. y Tapley, B. D. An extended canonical perturbation method. *Celestial Mechanics*, 7(1):77–90, 1973.
- [33] Cid, R y Calvo, M. Extensiones canónicas y su aplicación a problemas de la Mecánica Celeste. *Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, 2.ª Serie*, 28:13–21, 1973.

- [34] Cid, R. y Camarena, V. *Curso de Mecánica*. Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 1979.
- [35] Cid, R. y Ferrer, S. *Geodesia (Geométrica, Física y por Satélites)*. Instituto Geográfico Nacional, Ministerio de Fomento, 1997.
- [36] Cid, R. y Sansaturio, M. E. Motion of Rigid Bodies in a Set of Redundant Variables. *Celestial Mechanics*, 42(1–4):263–277, 1988.
- [37] Cid, R., Ferrer, S., y Sein-Echaluce, M. L. On the radial intermediaries and the time transformation in satellite theory. *Celestial Mechanics*, 38:191–205, 1986.
- [38] Corduneanu, C. *Almost Periodic Functions*. AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society, 2nd edition, 1989.
- [39] Corduneanu, C. *Almost Periodic Oscillations and Waves*. Springer–Verlag, 2009.
- [40] Cui, Ch. y Lelgemann, D. Analytical dynamic orbit improvement for the evaluation of geodic–geodynamic satellite data. *Journal of Geodesy*, 70:83–97, 1995.
- [41] Cui, Ch. y Mareyen, M. Gauss’s equations of motion in terms of Hill variables and first application to numerical integration of satellite orbits. *Manuscripta Geodaetica*, 17(3):155–163, 1992.
- [42] D’Eliseo, M. M. The First–Order Orbital Equation. *American Journal of Physics*, 75(4):352–355, 2007.
- [43] Deprit, A. The Elimination of the Parallax In Satellite Theory. *Celestial Mechanics*, 24(2):111–153, 1981.
- [44] Deprit, A, Elipe, A, y Ferrer, S. Linearization: Laplace vs. Stiefel. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 58(2):151–201, 1994.
- [45] Ferrándiz, J. M. A new set of canonical variables for orbit calculation. In *Second International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics*, volume SP-255, pages 361–364. European Space Agency, 1986.
- [46] Ferrándiz, J. M. Linearization in special cases of perturbed Keplerian motions. *Celestial Mechanics*, 39:23–31, 1986.
- [47] Ferrándiz, J. M. A general canonical transformation increasing the number of variables with application to the two–body problem. *Celestial Mechanics*, 41(1–4):343–357, 1988.

- [48] Ferrándiz, J. M. Extended canonical transformations increasing the number of variables. In A.E. Roy, (Editor), *Long-Term Dynamical Behavior of Natural and Artificial N-Body Systems*, pages 377–383. NATO, Kluwer Academic Publisher, 1988.
- [49] Ferrándiz, J. M. y Fernández-Ferreirós, A. Exact linearization of non-planar intermediary orbits in the satellite theory. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 52(1):1–12, 1991.
- [50] Ferrándiz, J. M. y Ferrer, S. A new integrated, general time transformation in the Kepler problem. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, 37:226–229, 1986.
- [51] Ferrándiz, J. M., Sansaturio, M. E. y Pojman, J. R. Increased accuracy of computations in the main satellite problem through linearization methods. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 53:347–363, 1992.
- [52] Ferrándiz, J. M. y Sansaturio, M. E. Extended canonical transformations with redundant variables: Hamiltonian and lagrangean formulations and degeneration. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 45:458–477, 1994.
- [53] Ferrer, S. y Pérez, J. M. Extensiones canónicas y sistemas de variables redundantes. In T. López Moratalla, S. Ferrer y A. Viguera, (Editores), *Métodos de dinámica orbital y rotacional*, pages 129–136. Murcia, 2002.
- [54] Flanders, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications, Inc., 1989.
- [55] Floría, L. Canonical elements and Keplerian-like solutions for intermediary orbits of satellites of an oblate planet. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 57(1–2):203–223, 1993.
- [56] Floría, L. Delaunay-like transformations. In Kurzyńska, K., Barlier, F., Seidelmann, P. K. & Wytrzyszczak, I., (Editores), *Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies.*, pages 175–180, Astronomical Observatory of A. Mickiewicz University, Poznań, Poland., 1994.
- [57] Flury, W. y Janin, G. Accurate Integration of Geostationary Orbits with Burdet’s Focal Elements. *Astrophysics and Space Science*, 36: 495–503, 1975.

- [58] Franco, J. M. y Palacios, M. Analytical Solutions for Some Second-Order Radial Intermediaries. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, 41(3):180–192, 1990.
- [59] Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Addison–Wesley Series in Physics. Addison–Wesley Publishing Company, 2 edition, 1980. World Student Series.
- [60] Gröbner, W. *Die Lie–Reihen und Ihre Anwendungen*. Mathematische Monographien. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967.
- [61] Heil, M. y Kitzka, F.,. *Grundkurs Theoretische Mechanik*. B.G. Teubner, 1984.
- [62] Hill, G. W. Motion of a system of material points under the action of gravitation. *The Astronomical Journal*, 27:171–182, 1913.
- [63] Irigoyen, M. y Simó, C. Non integrability of the  $J_2$  problem. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 55(3):281–287, 1993.
- [64] Izsák, I. Zur Regularisierung des Einzentrumproblems. *Communications of the Konkoly Observatory (Mitteilungen der Sternwarte)*, 39 (III):3–5, 1955.
- [65] Izsák, I. A Note on Perturbation Theory. *The Astronomical Journal*, 68(8):559–561, 1963.
- [66] Jezewski, D. J. A Comparative Study of Newtonian, Kustaanheimo/Stiefel, and Sperling/Burdet Optimal Trajectories. *Celestial Mechanics*, 12:297–315, 1975.
- [67] Jezewski, D. J. An Analytical Solution for the  $J_2$  Perturbed Equatorial Orbit. *Celestial Mechanics*, 30:363–371, 1983.
- [68] Kirchgraber, U. y Stiefel, E. *Methoden der analytischen Störungsrechnung und ihre Anwendungen*, volume 44 of *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1 edition, 1978.
- [69] Kozai, Y. The Earth Gravitational Potential Derived from Satellite Motion. *Space Science Reviews.*, 5(6):818–879, 1966.
- [70] Kurcheeva, I. V. Kustaanheimo–Stiefel Regularization and Nonclassical Canonical Transformations. *Celestial Mechanics*, 15:353–365, 1977.

- [71] Kustaanheimo, P. y Stiefel, E. Perturbation Theory of Kepler Motion based on Spinor Regularization. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 218:204–219, 1965.
- [72] Lánčzos, C. *The Variational Principles of Mechanics*. University of Bangalore Press, 5 edition, 1997.
- [73] Landau, L. D. y Lifschitz, E. M. *Mechanik*, volume I of *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Akademie–Verlag, 1981.
- [74] Levi–Civita, T. Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. *Acta Mathematica*, 30:305–327, 1906.
- [75] Levitan, B. M. y Zhikov, V. V. *Almost periodic functions and differential equations*. Cambridge University Press, 1982.
- [76] Lidov, M. L. Increase of the dimensionality of Hamiltonian systems, the KS transformation, and the utilization of particular integrals. *Kosmicheskie Issledovaniia*, 20:163–176, 1982.
- [77] Maneff, G. La gravitation et l'énergie au zéro. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 190:1374–1377, 1930.
- [78] Meyer, K.R. y Hall, G.R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer–Verlag, 1992.
- [79] Mioc, V. y Stoica, A. Discussion et résolution complète du problème des deux corps dans le champ gravitationnel de Maneff I. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I.*, 320:645–648, 1995.
- [80] Mioc, V. y Stoica, A. Discussion et résolution complète du problème des deux corps dans le champ gravitationnel de Maneff II. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I.*, 321:961–964, 1995.
- [81] Musen, P. On the Application of Pfaff's Method in the Theory of Variation of Astronomical Constants. Technical report, NASA Technical Note. NASA TN D–2301, 1964.
- [82] Newton, I. *Principios matemáticos de la Filosofía Natural*. Alianza Editorial, Madrid, 2011.
- [83] Poincaré, H. *Leçons de Mécanique Céleste.*, volume I. Gauthier–Villars, Paris, 1905.

- [84] Portilla, J. G. Integración analítica de las ecuaciones de movimiento de un satélite perturbado por los armónicos sectoriales  $j_{22}$  y  $k_{22}$  en términos de la transformación KS. *REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 20(76):15–23, 1996.
- [85] Roy, A. E. *Orbital Motion*. Institut of Physics Publishing, fourth Edition edition, 2005.
- [86] Scheck, F. *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Springer–Verlag, Fourth Edition edition, 2005.
- [87] Scheifele, G. On Nonclassical Canonical systems. *Celestial Mechanics*, 2(3):296–310, 1970.
- [88] Schneider, M. *Himmelsmechanik (Band I: Grundlagen, Determinierung)*. Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Tercera edición, revisada y ampliada. edition, 1992.
- [89] Sharaf, M. A. y Saad, A. S. Analytical Expansion of the Earth's Zonal Potential in Terms of KS Regular Elements. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 66(2):181–190, 1997.
- [90] Shniad, H. The Equivalence of Von Zeipel Mappings and Lie Transforms. *Celestial Mechanics*, 2:114–120, 1970.
- [91] Silver, M. A Short Derivation of the Sperling–Burdet Equations. *Celestial Mechanics*, 11(1):39–41, 1975.
- [92] Sperling, H. Computation of Keplerian Conic Sections (Technical Note). *American Rocket Society (ARS) Journal*, 31(5):660–661, 1961.
- [93] Sternberg, S. *Celestial Mechanics I*, volume I. W.A. Benjamin Inc., 1969.
- [94] Stiefel, E.L. y Scheifele, G. *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer–Verlag, 1971.
- [95] Sundman, K. F. Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica*, 36:105–179, 1912–1913.
- [96] Szebehely, V. *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, 1967.

- [97] Szebehely, V. Linearization of Dynamical Systems Using Integrals of the Motion. *Celestial Mechanics*, 14:499–508, 1976.
- [98] Taff, L. G. *Celestial Mechanics*. John Wiley & Sons, 1985.
- [99] Thiry, Y. *Les Fondements de la Mécanique Céleste*. Gordon & Breach, 1970.
- [100] Torge, W. *Geodesy*. Walter de Gruyter & Co., 2nd edition, 1991.
- [101] Vitins, M. *Regular Orbital and Rotational Elements for Artificial Satellites*. PhD thesis, ETH Zürich, 1973. Diss. Nr./Thesis No. 5174.
- [102] Vitins, M. Keplerian Motion and Gyration. *Celestial Mechanics*, 17 (2):173–192, 1978.
- [103] von Westenholz, C. *Differential Forms in Mathematical Physics*, volume 3 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Company, 2 edition, 1986.