UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

GENERALIZACIONES Y EXTENSIONES DE LA REGLA DE VOTACIÓN DE BORDA

Miguel Martínez Panero

Valladolid, 2004

Generalizaciones y Extensiones de la Regla de Votación de Borda

Miguel Martínez Panero

Memoria presentada para optar al grado de doctor en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Valladolid

Director: José Luis García Lapresta
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Valladolid

Valladolid, mayo de 2004

La Tesis Doctoral titulada *Generalizaciones y Extensiones de la Regla de Votación de Borda*, dirigida por el Prof. Dr. José Luis García Lapresta, fue defendida en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid el 28 de junio de 2004.

El tribunal de la Tesis estuvo constituido por los siguientes miembros:

Presidente:

Dr. Javier de Lorenzo Martínez, Catedrático de Lógica y Filosofía de la Ciencia (Universidad de Valladolid).

Secretario:

Dr. Juan Pablo Rincón Zapatero, Profesor Titular de Economía Aplicada (Universidad de Valladolid).

Vocales:

Dr. Carlos Romero López, Catedrático de Economía, Sociología y .Política Agraria (Universidad Politécnica de Madrid).

Dr. Juan Carlos García-Bermejo Ochoa, Catedrático de Fundamentos del Análisis Económico (Universidad Autónoma de Madrid).

Dra. Mª Victoria Rodríguez Uría, Catedrática de Economía Financiera y Contabilidad (Universidad de Oviedo).

Calificación otorgada: Sobresaliente *cum laude* (10).

Contados son los hijos que se asemejan a sus padres;

los más salen peores, y tan solamente algunos los aventajan

Homero (*Odisea* II, 276 – 277)

Yo no podría desear nada mejor que parecerme a ellos

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi gratitud a José Luis García Lapresta, director de esta tesis, la cual no se hubiera hecho nunca realidad sin su paciencia conmigo, sabio consejo y ánimo constante.

A continuación, me gustaría agradecer el apoyo recibido de mis compañeros del que hasta hace poco tiempo fue el Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas) de la Universidad de Valladolid. En especial, quisiera mencionar a Carlos Rodríguez Palmero, a quien siempre reconoceré su generosa disposición; a Bonifacio Llamazares, que me ha alentado y ayudado desinteresadamente en todo momento; a Juan Pablo Rincón Zapatero, de quien he recibido numerosas y pertinentes sugerencias para mejorar la tesis; y a Luis Carlos Meneses, sin cuya indispensable cooperación simplemente no hubiera existido su capítulo cuarto, y que me ha asistido, además, en la minuciosa tarea del tratamiento del texto.

Por último, quisiera señalar también que son muchas las personas que han hecho posible que el capítulo primero haya tomado carta de naturaleza. En las distintas publicaciones que lo han precedido ya se ha dado cumplida nómina de ellas, pero no puedo dejar de nombrar aquí a Iain McLean, de la Universidad de Oxford, cuyos recursos puso a mi disposición durante una estancia en el Nuffield College subvencionada por la Universidad de Valladolid, y a Juan Helguera Quijada, de esta última Universidad, cuyo buen hacer histórico ha guiado e impulsado parte de este trabajo que ahora cristaliza.

Índice

Introducción

En la primera parte del *Quijote*, cuya edición príncipe obtenía licencia de impresión por orden real otorgada en Valladolid hace justamente 400 años, Cervantes confesaba que si algún trabajo le había costado el componer la obra, ninguno tuvo por mayor que hacer su prefacio. Tanto es así, que hubiera querido presentar la historia del famoso caballero “monda y desnuda, sin el ornato de prólogo […] que al principio de los libros suele ponerse”.

Tal declaración, que bien pudiera ser un recurso literario, pone de manifiesto la dificultad que puede entrañar el redactar cualquier introducción. Por eso es significativo que ciertos autores, una vez pasado el trance de haberla escrito, animen, nada más comenzada su lectura, a que se salte ésta impunemente por anticipar lo que vendrá después. El lector avisado suele seguir la indicación al pie de la letra, dirigiéndose de inmediato al texto principal; pero, a veces, la llaneza del autor consigue el efecto contrario (y acaso íntimamente deseado) de ser leído al completo.

En nuestro caso, creemos sinceramente que adentrarse, sin más, en el **Capítulo 1** de la presente memoria, *Génesis y desarrollo de la regla de Borda*, es la mejor manera de conseguir una visión sinóptica, con perspectiva histórica, del método de votación al que alude el título de la misma: la regla propuesta en 1770 por el físico y oficial de marina francés Jean Charles de Borda, de quien toma el nombre. En dicho capítulo, que es auto-contenido, y como todos demás, lleva adjunta su propia bibliografía, se describe dicho procedimiento, de implementación muy directa y sencilla. También, y sobre todo, se despliega la historia de la regla de Borda, inmersa en la de la disciplina que, entre otros temas, estudia sistemáticamente éste y otros procedimientos de votación: la Teoría de la Elección Social.

En lo relativo a la elaboración de esta parte histórica de la memoria, siempre nos preocuparon ciertos aspectos metodológicos a tener en cuenta, ya que este tipo de investigación requiere una formación que, somos conscientes, no se puede suplir. Hemos tratado de cubrir esta laguna, en la medida de lo posible, con muy diversas lecturas; pero a lo largo del proceso ha sido fundamental y mucho más enriquecedora la asistencia personal e inestimable de algunos historiadores profesionales, nacionales y extranjeros, de la más alta cualificación. El esquema que hemos seguido para articular la evolución de la regla de Borda sigue la línea directriz trazada por uno de ellos, Iain McLean, relevante autoridad en la historia de la Teoría de la Elección Social.

Además de los precursores medievales del procedimiento que nos ocupa (entre los que se encuentra el mallorquín Ramón Llull), en el siglo XVIII tratamos, entre otros, las aportaciones de su principal propulsor, Borda, y de su antagonista, el marqués de Condorcet. Pero principalmente nos ocupamos del matemático ilustrado español José Isidoro Morales pues, aunque su talla intelectual no se puede comparar con la de Condorcet (un adelantado a su tiempo), fue capaz de realizar un análisis crítico que le llevó a adherirse a los ideales progresistas y liberales de su época, sobrepasando el estrecho marco que le ofrecía una España aislada que, finalmente, se vio obligado a abandonar.

Morales puso de manifiesto los defectos del método de pluralidad, consagrado por su uso inveterado, en favor de la entonces innovadora regla de Borda, de la que fue firme defensor y publicista, con dos importantes obras al respecto. Nuestra investigación ha establecido en buena parte su ejecutoria, descartando falsos datos e interpretaciones erróneas, tanto de su trayectoria vital, en parte aún desconocida, como de su obra matemática. Por los motivos expuestos, Morales vehicula nuestro enfoque del desarrollo de la regla de Borda en el siglo XVIII, la "Edad Dorada" de la Teoría de la Elección Social, en la que ésta comienza su andadura, aún titubeante, como disciplina científica. De hecho, las referencias al autor español son constantes a lo largo de todo el capítulo, y aún de toda la memoria. Aunque esta apreciación peque de simplista, Morales ha sido el hilo del que, tirando desde hace unos años, ha salido este ovillo.

La regla de Borda reaparece, bien entrado el siglo XIX, con Charles L. Dodgson, un matemático del *Christ Church College* de Oxford que tuvo desavenencias personales e institucionales con su deán, lo que le llevó a preocuparse por los sistemas de votación a emplear en alguno de los comités universitarios a los que perteneció, y a redescubrir *ex novo* la regla de Borda. Tal vez sus relevantes trabajos hubiesen pasado desapercibidos de no haber alcanzado la fama por haber escrito varios libros infantiles (que, en ocasiones, ocultan claves para adultos) con el nombre de pluma de Lewis Carroll. Mucho más oscura resulta, sin embargo, otra figura que tratamos relativa a este periodo, Edward J. Nanson, quien propuso una interesante regla de Borda iterada con eliminación de las alternativas peor valoradas en cada etapa. De este autor sí podemos asegurar que asumió parte de la tradición anterior a la que nos hemos referido, pero su propio trabajo sólo llamó la atención ya sobrepasada la primera mitad del siglo XX.

En la última sección del primer capítulo exponemos el desarrollo ulterior de la regla de Borda. Por la importancia incuestionable que tiene en el estudio que nos ocupa, hemos desarrollado con detalle las aportaciones de Duncan Black, quien propuso un método en dos etapas que tienen en cuenta, por este orden, los criterios de Condorcet y Borda sobre las alternativas que deberían ser proclamadas ganadoras en una votación. Además, este autor realizó un interesante estudio histórico sobre “la teoría matemática de comités y elecciones” (en el que se recuperan, entre otros, los trabajos de Carroll y Nanson). La obra de Black es básica para cualquier desarrollo posterior sobre el tema y, en lo relativo a la regla de Borda, la hemos tenido como referencia constante, tanto en este primer capítulo (en lo que a su parte histórica se refiere), como en los dos siguientes.

Los trabajos más significativos de Black (publicados a partir de 1948) enlazan en buena medida con los de Kenneth J. Arrow, pero ha sido éste quien, con su obra fundamental, *Social Choice and Individual Values*, publicada en 1951, marca el punto de partida de la moderna Teoría de la Elección Social y orienta la evolución posterior de la disciplina. Integrada en ella, la investigación en torno a la regla de Borda se ha incrementado de modo muy considerable hasta llegar a nuestros días. A este respecto, damos cumplida referencia del amplio desarrollo llevado a cabo: distintas caracterizaciones, variantes y otros métodos de votación inspirados o relacionados con ella, aplicaciones, etc.

El análisis de la regla de Borda y de las extensiones y generalizaciones que constituyen el objeto de la memoria requieren inexcusablemente un lenguaje formalizado con el que llevar a cabo el consiguiente desarrollo matemático. Esto conlleva un cambio de registro respecto de la metodología empleada en el primer capítulo, aunque en todo momento hemos tratado que el sustrato histórico previo penetrase comprensivamente el tratamiento realizado.

El capítulo segundo y cada una de las dos mitades del tercero tienen una estructura bastante similar entre sí, y los entendemos como etapas sucesivas de una evolución natural. El **Capítulo 2**, *La regla de Borda clásica y sus extensiones discretas*, comienza con una sección de carácter instrumental, y asienta los fundamentos (relaciones binarias y de preferencia usuales) a partir de los cuales formulamos, en la segunda sección, el método de Borda tal como fue concebido originalmente, hace ya más de dos siglos. Esta fase inicial del procedimiento (a la que alude el adjetivo "clásica"), no permite, por su propia construcción, que los agentes puedan manifestar indiferencia entre alternativas distintas. Ahora bien, como esta posibilidad es, de hecho, usual en la práctica de la toma de decisiones, las primeras extensiones consideradas en la presente memoria, analizadas en la tercera sección, sí contemplan tal eventualidad. En este último caso, sería deseable que las asignaciones numéricas otorgadas por los agentes mediante los contadores de Borda individuales fueran acordes con sus preferencias. Para ello, en la cuarta sección hemos estudiado una propiedad, que hemos denominado de *representatividad* de tales contadores, y hemos dado una condición suficiente para su cumplimiento en conexión con los supuestos de racionalidad de los agentes.

La sección quinta del capítulo alberga una parte significativa de nuestro trabajo, que ha consistido en un análisis crítico, desde un punto de vista condorcetiano del voto, tanto de la regla de Borda como de las generalizaciones hasta ahora introducidas. Además, se han considerado diversas fórmulas de compromiso entre los enfoques de Borda y Condorcet. Hemos de resaltar que, si bien se acepta comúnmente la primacía del enfoque de Condorcet, éste no está libre de algunos inconvenientes, tales como la carencia de algunas propiedades deseables (decisividad, inhibición de la abstención, etc.), que sí verifica la regla de Borda y que, entre otras más, se presentan en la última sección del segundo capítulo.

Como ya hemos indicado, el **Capítulo 3**, *Extensiones graduales y variantes lingüísticas de la regla de Borda*, sigue un discurso paralelo al del capítulo anterior, y querría constituir un nuevo avance en la evolución del método. Aquí, el punto de partida viene dado al constatar que las extensiones discretas hasta ahora introducidas son poco flexibles, por serlo también las preferencias individuales en las que se basan. Más explícitamente, el rango de puntuaciones otorgadas, si se sigue el tratamiento del capítulo anterior, es un espectro de valores en correspondencia con la codificación de las preferencias (usuales) mediante ceros y unos en el caso clásico, y además 0.5 en el caso extendido que tiene en cuenta las indiferencias.

Para superar tales constricciones, esta nueva etapa de nuestro tratamiento permite, en primera instancia, el que cada agente no sólo se decante por una alternativa (o por ninguna) al compararlas por pares, sino que, además, cuando prefiera una alternativa a otra, pueda mostrar con detalle cuánto la prefiere, a través de cualquier número entre 0 y 1. Por ello, la primera sección del tercer capítulo, introduce la herramienta teórica (relaciones de preferencia difusas) a partir de la cual se consideran, en la segunda sección, dos variantes del procedimiento de Borda que hemos denominado *en sentidos amplio y* *restringido*, según la base informacional que se considere relevante en cada caso. También aquí se estudia la representatividad de tales contadores graduales en conexión con sendos catálogos de propiedades de transitividad difusa, dándose así mismo condiciones suficientes para la verificación de esta deseable propiedad, y se realiza, de modo análogo al del capítulo anterior, un análisis de tipo Condorcet en el nuevo marco gradual y en la doble vertiente apuntada. Además, se realizan ciertas consideraciones comparativas acerca de la sensibilidad de los contadores tratados.

El último estadio de evolución de la regla de Borda que hemos considerado en la memoria asume que los agentes, al comparar entre pares de alternativas, tienden a expresar sus preferencias mediante expresiones un tanto vagas (mucho, regular, poco, etc.), más que con valores numéricos exactos. Esta idea se formaliza en la tercera sección, al considerar etiquetas lingüísticas sobre las que se basan las preferencias del mismo nombre. Para poder operar con tales elementos, hemos representado las etiquetas mediante números difusos trapeciales, que consiguen capturar la vaguedad a la que hacíamos referencia, y mediante los que, en la sección cuarta, se diseñan contadores de Borda lingüísticos, de nuevo en dos sentidos, de un modo similar a los hasta ahora expuestos. Una vez más, y siguiendo la doble vía apuntada, se realiza un estudio de la representatividad de los contadores individuales y se proporcionan condiciones para el cumplimiento de dicha propiedad bajo ciertas hipótesis de transitividad lingüística. Además, se hace un análisis de tipo Condorcet, ahora en un contexto lingüístico-decisional, y se concluye la sección con algunas consideraciones tanto recapituladoras como prospectivas.

En el **Capítulo 4** y último, *Contraste empírico*, se aplican los contadores de Borda lingüísticos considerados a un caso real. En la primera sección se describe el trabajo de campo previo que nos ha proporcionado los datos en los que nos hemos basado. A continuación, en la segunda sección se cuantifica el cumplimiento de las transitividades lingüísticas tratadas en el capítulo anterior. En conexión con este aspecto, y ya en la tercera sección, se analiza la idoneidad de la asignación de calificaciones atendiendo a la representatividad de los contadores individuales. Además, en la sección cuarta, se comparan entre sí los resultados totales obtenidos mediante los correspondientes contadores colectivos, y en la última sección se confrontan las alternativas ganadoras y perdedoras de Borda con las correspondientes de Condorcet para los casos estudiados.

Para concluir, consignamos las publicaciones, todas ellas en colaboración con José Luis García Lapresta, en las que se ha basado fundamentalmente la memoria. Se omite aquí la relación de trabajos presentados en congresos, para lo cual remitimos a las bibliografías de los capítulos correspondientes.

1. "El matemático ilustrado José Isidoro Morales y sus aportaciones a la Teoría de la Elección Social", publicado en 1999 en el número 22 de la revista *Llull*.

2. "Análisis de algunos sistemas de votación a partir de la obra del ilustrado José Isidoro Morales", publicado en 2000 en el número 154 de la revista *Hacienda Pública Española*.

3. "A group decision making method using fuzzy triangular numbers", capítulo del libro *Fuzzy Sets in Management, Economics and Marketing*, publicado en 2001 por la editorial World Scientific Publishers.

4. "Borda count *versus* approval voting: A fuzzy approach", publicado en 2002 en el número 112 de la revista *Public Choice*.

5. "A fuzzy Borda count in multi-person decisión making", capítulo del libro *Multiple Objective and Goal Programming. Recent Developments*, publicado en 2002 en la serie Advances in Soft Computing de la editorial Springer Verlag.

6. *José Isidoro Morales, Precursor Ilustrado de la Teoría de la Elección Social: Edición Facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones (1797) y Apéndice (1805)*, publicado en 2003 por el Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial de la Universidad de Valladolid y prologado por Salvador Barberà.

Capítulo 1

Génesis y desarrollo de la regla de Borda

En este capítulo daremos una visión panorámica de la historia de la regla de Borda, un procedimiento de votación por el que los agentes han de ordenar linealmente a los distintos candidatos, según el mérito que éstos les merecen en cada caso, y asignarles correlativamente puntuaciones escalonadas, decidiendo el mayor cómputo total obtenido cuál es el candidato ganador. Centraremos especialmente nuestra atención en el matemático ilustrado español José Isidoro Morales, firme defensor y propulsor del citado procedimiento en su *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones* y en el *Apéndice* a la obra anterior, obras publicadas respectivamente en 1797 y 1805. Como constataremos, aunque Morales (1797) ha merecido atención crítica, desde la fecha misma de su publicación hasta nuestros días, si bien de modo intermitente, no ha ocurrido lo mismo con Morales (1805), obra que completa la anterior incorporando además interesantes ideas[1] y de la que puede decirse que ha pasado casi inadvertida hasta la publicación de nuestros trabajos: García Lapresta – Martínez Panero (2000, 2002a y 2002b), Martínez Panero (2001) y Martínez Panero – García Lapresta (1999 y 2003).

---

[1] Massó (2003, p. 635) afirma: "la *Memoria* y en mi opinión, sobre todo el *Apéndice*, muestran muy bien el contenido de la Elección Social moderna".

Este enfoque histórico tiene un interés añadido al puramente informativo, y una aspiración que sobrepasa la mera perspectiva sobre el tema. De hecho, su principal línea directriz es heurística: como veremos, muchas de las ideas vertidas por Morales y sus contemporáneos franceses constituyen el embrión de ulteriores desarrollos de la regla de Borda clásica y métodos afines, que se detallarán en los siguientes capítulos[2].

1.1 Precursores de la regla de Borda

La Teoría de la Elección Social (TES) tiene un largo pasado, pero una historia reciente. Arrow (1993, p. 78) ha manifestado conocer muy pocos temas de investigación de interés que hayan tenido un desarrollo tan a saltos e intermitente como el de la TES, uno de cuyos objetivos es el estudio sistemático de los distintos procedimientos de votación. En tal desarrollo la regla de Borda ha desempeñado y desempeña un papel relevante. Ambos aspectos (la discontinuidad de la disciplina y la importancia que en su desarrollo ha tenido de forma recurrente el método de Borda) se ponen de manifiesto, por ejemplo, en McLean – Urken (1995), donde aparecen personajes tan dispares como (citamos cronológicamente): Plinio el Joven, Ramón Llull, Nicolás de Cusa, el marqués de Condorcet y Jean Charles de Borda (sin duda las figuras punteras de la TES antes de Arrow), el propio José Isidoro Morales, Pierre Claude François Daunou y Charles Lutwidge Dodgson (alias Lewis Carroll), entre otros[3]. Como veremos, muchos de los autores

---

[2] De la misma manera, ideas seminales de Borda (1784) sobre la cardinalización equidistante de un ordenamiento se recogen en Sen (1998). Este trabajo sobre índices de pobreza, que revisa Sen (1976), cita literalmente y apoya su argumento en las siguientes palabras de Borda (1784): "digo que el grado de superioridad que el elector ha dado a A sobre B se debe considerar idéntico al que ha dado a B sobre C".

[3] Llama la atención la ausencia de autores griegos, precursores de casi todo, en la lista citada. Y es que, aunque en la democrática Atenas se tiene constancia de votaciones con dos alternativas o binarias (juicios de ostracismo o incluso muerte, como el célebre proceso de Sócrates), apenas se hallan referencias a escritos teóricos de tema electoral en Platón, Aristóteles u otros autores griegos preocupados por temas políticos. La razón es que la selección de miembros integrantes de las distintas instituciones democráticas griegas, en las que solía haber más dos

citados (y otros a los que no aludiremos ahora) preconizaron o desarrollaron el procedimiento de Borda. En cuanto a la discontinuidad de la disciplina a la que hace referencia Arrow, su causa estribaría, a juicio de Tullock, en que "en un periodo en el cual la democracia era casi una religión, no es extraño que la mayoría de los investigadores le diera la espalda"[4].

En plena Edad Media, una época en que la problemática electoral se circunscribía casi exclusivamente al ámbito monástico[5], la regla de Borda fue anticipada por dos de los precursores citados, varios siglos antes de que el autor francés diseñara el método que hoy lleva su nombre y lo defendiera públicamente en 1770 ante la Real Academia de Ciencias de París. Efectivamente, el mallorquín Ramón Llull (*circa* 1232 – 1316) describe en su novela *Blanquerna*, que data de 1283, la elección de una abadesa en un convento de monjas[6]. Aunque la exposición de Llull es oscura, McLean – Urken (1995, p. 18) conjeturan que el procedimiento en cuestión pudiera ser el método de Borda[7]. Lo que ya es incuestionable es el hecho de que Llull, en un opúsculo titulado *De Arte Electionis*, fechado en 1299, fue el primero que tuvo en cuenta que la decisión final en una elección debe emerger de todas las posibles comparaciones entre parejas de candidatos, algo que juega un importante papel en Condorcet y, más recientemente, en la moderna TES a

alternativas o candidatos, se realizaba por sorteo. Sobre aspectos electorales de la democracia griega, véase Forrest (1966).

[4] Véase el Apéndice II, del que es autor Tullock, en Buchanan – Tullock [1962] (1980, pp. 368 – 392). La cita de Tullock, quien hace un resumen de Black (1958, Part II), aparece en p. 374.

[5] Véanse a este respecto McLean –London (1990), Colomer – McLean (1998) y McLean – Urken (1995). Excepción a este ámbito eclesiástico de las elecciones durante la Edad Media es la designación del dogo o dux de Venecia mediante un procedimiento de votación que es antecesor del que modernamente se ha denominado "voto aprobatorio". A este respecto, véase Lines (1986). En García Lapresta – Martínez Panero (2002a) hemos estudiado la conexión de este método de votación con el de Borda.

[6] También trató Llull de la elección de un rey en *El Libro de las Bestias*, aunque en este caso en un contexto fabulístico.

[7] Sin embargo, Felsenthal – Machover (1992) ponen en tela de juicio esta interpretación, y Colomer (2001, p. 100) sugiere, por su parte, que el método al que alude Llull sería la regla de Copeland, de la que trataremos más adelante en conexión con la regla de Borda.

partir de Arrow[8]. A pesar de que tales comparaciones por pares no aparecen explícitamente en la formulación de la regla de Borda, Morales (1805, pp. 18 y ss.), al parecer sin conocimiento manifiesto de Borda (1784), hizo patente el hecho de que los agentes tienen en cuenta tácitamente dichas comparaciones a la hora de otorgar las puntuaciones a los candidatos y, como veremos, esgrimió este argumento en su defensa a ultranza del citado procedimiento de votación.

Significativamente, el otro pionero del método de Borda fue conocedor (y acaso autor) de la transcripción de la única copia que se conoce de la obra de Llull *De Arte Electionis*. Se trata del cardenal Nicolás de Cusa (1401 – 1465), quien en el libro III de su obra *De Concordantia Catolica*, publicada en 1434, discute varios procedimientos de votación en un contexto de elección papal. Cusa describe en el capítulo 37 de la citada obra un método que es justamente el de Borda, con puntuaciones individuales escalonadas, desde la unidad hasta el número total de candidatos, asignadas a los mismos. Ésta es la razón por la que McLean – Urken (1995, pp. 24) han reivindicado su prioridad y sugerido que debería hablarse de “regla de Cusa”[9], en vez de “regla de Borda”.

En suma, tanto Llull como Cusa realizaron importantes avances en lo relativo a elecciones con más de dos candidatos u opciones[10] en conexión con lo que, siglos después, se denominaría “regla de Borda”. La eclosión de este

---

[8] La figura de Llull en cuanto que precursora de la TES es tratada en *The Augsburg Web Edition of Llull's Electoral Writings* (http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/llull/), con interesantes reproducciones facsímiles en edición digital, McLean – London (1990), así como en McLean – Urken (1995, pp. 16 – 19 y 71 – 75), donde se reproducen (en este caso en inglés) algunas de las obras citadas. En los dos últimos trabajos se conjetura que, tal vez, como ocurre con la Aritmética, la introducción de la TES en Occidente tenga sus orígenes en el mundo árabe, siendo Llull, experto conocedor de las dos culturas, el eslabón entre ambas. Sin embargo, no se han encontrado hasta la fecha avales que respalden tal suposición.

[9] Sobre el papel de Cusa en los orígenes de la TES, véase también McLean – London (1990). Por otra parte, el capítulo en el que Cusa expone su versión de la regla de Borda aparece traducido al inglés en McLean – Urken (1995, pp. 77 – 78).

[10] El hecho de que el paso de elecciones binarias a elecciones con más dos alternativas supone una transición radical no fue un descubrimiento griego, por las razones que hemos indicado, pero sí fue entrevisto por Plinio el Joven (62 – *circa* 113). A este respecto, véanse Farquharson (1969), Riker (1986, pp. 78 – 88) y McLean – Urken (1995, pp. 14 – 16 y 67 – 70). Es mérito importante de Morales (1797, pp. 16 y ss.) el haber justificado matemáticamente la diferencia

procedimiento, ya fuera como método de votación ideal (en el caso del propio Borda, Daunou en sus comienzos y Morales), o bien como objeto de crítica (caso de Condorcet y Daunou a partir de la llegada al poder de Napoleón), tuvo lugar en el periodo histórico con el que comienza la denominada Edad Contemporánea. Pero, como ha ocurrido a menudo en el desarrollo histórico de la TES, se hubo de comenzar desde el principio, pues se hizo *tabula rasa* de los progresos de los autores medievales citados, que fueron desconocidos o dejados de lado con una autosuficiencia típicamente ilustrada.

1.2 La regla de Borda en la "Edad de Oro" de la TES

La situación a la que aludía Tullock, en que la democracia era una pretensión ideal, cambia sustancialmente a partir de Rousseau (1712 – 1778) quien, pese a su negación del progreso y antipatía por la civilización (que no por el ser humano), comienza a difundir la doctrina de la soberanía del pueblo, dándole una atractiva apariencia de precisión matemática. La cristalización histórica de estas ideas se da en la Revolución Francesa. Según Bury (1971, p. 188) "los revolucionarios imaginaban que podían romper bruscamente con el pasado y que un nuevo método de gobierno, construido sobre moldes matemáticos [...] llegaría a crear las condiciones para una felicidad idílica en Francia". En este ambiente de ideas preconizado por el filósofo de Ginebra debemos enmarcar la llamada "Edad de Oro" de la TES[11], con nombres como los de Condorcet[12], Borda o el propio Morales[13], entre otros, con quienes la citada disciplina adquiere categoría de ciencia.

---

crucial entre los votos de propuestas (dos alternativas) y las "elecciones numerosas" (más de dos alternativas).

[11] Este es el nombre dado por McLean (1995a) a una de las épocas de desarrollo de la TES, concretamente al periodo 1794 – 1803. Véase también McLean – Urken (1995, pp. 23 – 41).

[12] Sobre la influencia de Rousseau en Condorcet, véase Grofman – Feld (1988).

[13] Se acusa la influencia de Rousseau en el autor español, por ejemplo, en Morales (1805, p. 15), donde se alude literalmente al concepto de "voluntad general".

1.2.1 Los contemporáneos de Morales

Como veremos, aun dentro de la nómina antes citada de autores tan diversos que preconizaron la TES, Morales fue un caso bastante atípico. Desde luego, la España de su época resultó ser un marco muy estrecho para muchas de sus facetas y aspiraciones, por lo que él mismo trató por todos los medios de buscar interlocutores a su mismo nivel en Francia. Por eso, antes de estudiar la vida y obra de Morales, y para valorar en su justa medida la originalidad y validez de sus aportaciones, debemos verlas inmersas en la fecunda corriente de ideas que se gestaron en ese periodo en el que Francia fue crisol de la cultura europea.

Figura emblemática de esta eclosión intelectual, y sin duda alguna la más importante en el desarrollo de la TES antes de Arrow, fue el marqués de Condorcet (1743 − 1794). Su obra es menos conocida y estudiada que la de Rousseau y otros enciclopedistas franceses, aunque su relevancia e influencia de pensamiento cada vez merece más atención crítica. Matemático, filósofo, pedagogo, político y economista, de ideas liberales, feministas, antiesclavistas y anticlericales, es conocido sobre todo por el optimista *Esquisse d'un Tableau Historique des Progrès de l'Esprit Humain*[14], obra escrita en la clandestinidad, poco antes de su suicidio durante el Terror, en 1794, y publicada póstumamente. No parece, sin embargo, haber alcanzado tanta difusión su fundamental *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix* (Condorcet (1785)), a pesar del impulso que supuso en la matematización de las ciencias sociales. La razón de que esta obra no obtuviera inicialmente mucha comprensión, ni tan siquiera en Francia (exceptuando tal vez a Laplace), se debe al estilo un tanto oscuro de su

[14] Condorcet [1795] (1980), obra en la que se hace un repaso histórico hasta los tiempos de la Revolución Francesa, a la que el autor, sin acritud, no reprochó los excesos de los que él mismo fue víctima. Esta obra de Condorcet se registró en 1797 en el Índice de libros prohibidos de la Inquisición. Cf. Kamen [1979] (1985, p. 357).

autor, y al enfoque probabilístico que le dio[15]. Esta situación es extensiva hasta Todhunter (1865), quien malinterpretó algunas de las ideas de Condorcet, aunque simultáneamente les dio una difusión que ha posibilitado, ya desde una perspectiva actual, que a partir de Guilbaud (1952), Black (1958), Arrow (1963) [1974], Young (1977, 1986, 1988, 1995) y Young – Levenglick (1978) podamos afirmar que Concorcet fue un visionario, cuyas profundas intuiciones lo colocan muy por delante de su propia época.

La conexión Condorcet – Morales, si existió, hubo de ser indirecta. Bien es cierto que Condorcet fue autor en 1792 de un subversivo *Avis aux espagnols*, y que ilustrados españoles relacionados con Morales, como Quintana y Jovellanos, fueron lectores de Condorcet, aunque sólo en su vertiente pedagógica. Ahora bien, a pesar de ciertas similitudes que señalaremos, no nos consta que Morales tuviera conocimiento de primera mano de los trabajos de tema electoral de Condorcet. En cualquier caso, el autor francés no aparece citado ni en su *Memoria*[16] ni en el *Apéndice*, aunque tal vez ello se debiera a que, como se ha señalado, se trataba de un autor prohibido por la Inquisición española[17].

No es éste el caso de Jean Charles de Borda (1733 – 1799), quien sí aparece citado un par de veces por Morales en su *Apéndice* aunque, como veremos, no debe verse en ello una mera filiación o simple adaptación de ideas recibidas de Francia. Borda fue tan polifacético como su contemporáneo y antagonista

---

[15] Tal enfoque se debe, como ha señalado Arrow [1963] (1972, p. 203), a que "según Condorcet, los votantes actúan como jueces de alguna verdad más bien que como personas que expresan sus propias preferencias".

[16] Así, resumidamente, nos referiremos en ocasiones a Morales (1797). Bien es cierto, como veremos, que Morales escribió otras memorias sobre temas políticos, pedagógicos, etc. Entendemos, no obstante, que la *Memoria Matemática* fue su *magnum opus*, por lo que omitiremos el calificativo cuando no dé lugar a ambigüedad.

[17] Sobre las múltiples facetas de la figura de Condorcet son de interés Rashed (1990), McLean – Hewitt (1994) y el estudio preliminar de Antonio Torres del Moral en Condorcet [1795] (1980). Acerca de la conexión de Condorcet con España, véanse Lluch (1989) y las obras citadas en Martínez Panero – García Lapresta (1999), especialmente en este último caso para su posible influencia en Morales en aspectos tanto propios como ajenos a la TES.

Condorcet[18] o el mismo Morales, ya que fue físico (contribuyó a la dinámica de fluidos y desarrolló un péndulo, que lleva su nombre, para medir la intensidad del campo gravitatorio terrestre), ingeniero (destacó en el perfeccionamiento de instrumentos náuticos y astronómicos, singularmente el que denominó "círculo repetidor") y oficial de marina (capitaneó importantes expediciones cartográficas, y de hecho fue Borda quien por vez primera realizó una triangulación precisa del Teide). Como reconocimiento a ello, Borda ha dado su nombre a un cráter de la Luna y a un buque hidrográfico de la marina francesa. Pero aquí nos interesa reseñar su trabajo sobre las elecciones que, si bien ocupa una porción (en cuanto a extensión) muy pequeña en relación con los de Condorcet, es de gran densidad y también de gran importancia[19]. Ambos autores señalaron inconsistencias de los principales procedimientos de votación al uso. Por una parte, Condorcet denunció que, en una elección llevada a cabo por el método de mayoría simple, los individuos pueden manifestar sus preferencias racionalmente, pero perderse esta racionalidad en el agregado (lo que se conoce como paradoja del voto, efecto Condorcet o existencia de mayorías cíclicas). Por su parte, Borda constató que los métodos de elección tradicionales impiden que la consulta electoral alcance una deseable representatividad. Para subsanar este defecto propuso, en una Memoria leída ante la Real Academia de Ciencias de París en 1770, el procedimiento de voto ponderado[20] que desde entonces, en su honor, se denomina "regla de Borda". Este método mereció especial atención por parte de Condorcet[21], quien señaló

[18] Las de Borda y Condorcet fueron "vidas paralelas" que coincidieron ocasionalmente en distintos campos. Por ejemplo, además de sus intereses por la TES, ambos tuvieron una destacada labor en la introducción del sistema métrico decimal en Francia (véase Alder (2003)). Ahora bien, aunque Black (1958, pp. 166 y ss.) ha señalado que entre ellos había amistad mutua, lo cierto es que su relación era de auténtica rivalidad, no exenta de respeto.

[19] En Mascart [1919] (2000), pormenorizada biografía de más de 800 páginas dedicadas a Borda, su aportación a la TES se desarrolla en 7 páginas, concretamente pp. 128 – 134.

[20] Consignamos aquí una analogía que nos ha llamado la atención: así como una idea fundamental del método de Borda es la de que las puntuaciones deben emitirse en progresión aritmética, la clave del círculo repetidor de Borda es la de que las mediciones geodésicas deben realizarse en progresión geométrica. Sobre este último aspecto puede consultarse Alder (2003).

[21] De hecho, no fue sino Condorcet quien editó, con comentarios propios, la Memoria presentada por Borda ante la Real Academia de Ciencias de París en 1770, catorce años antes de que se publicara finalmente, tras algunas vicisitudes editoriales, en 1784. Traducida al

su manipulabilidad (estrategias de voto mediante las cuales los electores consiguen resultados más cercanos a sus propósitos falseando sus preferencias que si se manifestaran sinceramente). Borda contestó lacónicamente que su procedimiento sólo era válido para ser utilizado por hombres honrados[22]. En cualquier caso, en 1796 se aprobó su uso en la elección de miembros del Institut National de France[23], y éste fue el mecanismo de selección de miembros empleado en las distintas secciones hasta 1804, año en el que, por intervención expresa de Napoleón[24], se sustituyó la regla de Borda por un procedimiento en el que los candidatos debían obtener la mayoría absoluta de votos, permaneciendo las plazas vacantes de no ser cumplido este requisito[25].

Se puede hablar, pues, de una cierta polémica intelectual. Borda, de carácter pragmático (al igual que Morales), se preocupó de ciertos aspectos de idoneidad de los principales procedimientos de votación y postuló el suyo propio con fines exclusivos de puesta en práctica. Condorcet, de formación más filosófica, trató de diseñar un modelo matemático general del *homo suffragans*. Tal confrontación se sustancia en el hecho de que Borda y Condorcet entendieron de distinta forma quién debería ser ganador en unas elecciones. Aunque la explicación que sigue puede pecar de simplista (será desarrollada y explicitada a lo largo de este mismo capítulo y del siguiente), bastará señalar por ahora que para Borda debería ganar el candidato que

---

inglés, se reproduce parcialmente a partir de los manuscritos de Condorcet, pues no se conserva íntegra, en McLean – Urken (1995, pp. 81 – 89) y en Grazia (1953). También aparece citada casi literalmente como apostilla a la edición que realizó Condorcet de las *Cartas a una Princesa de Alemania sobre diversos Temas de Física y Filosofía,* de Euler, y como tal aparece en López de Peñalver [1799] (1992, pp. 56 – 59), quien tradujo esta obra de divulgación del matemático suizo al castellano a partir de la edición de Condorcet.

[22] Sobre la denuncia de Condorcet de la manipulabilidad del método de Borda, véase Moulin – Young (1987). Véanse también McLean – Urken (1995, p. 40) y Black (1958, pp. 156 y ss.).

[23] Como se detallará más adelante, éste es el hilo conductor que une a Borda y su método con Morales, quien leyó un acta de votación del citado organismo en un periódico de la época.

[24] Curiosamente Napoleón fue elegido mediante el método de Borda como miembro de la sección de Ciencias Físicas y Matemáticas, subsección de Artes Mecánicas, en 1797, año de la publicación de la *Memoria* de Morales.

[25] Cf. Black (1958, p. 180) y McLean – Urken (1995, pp. 39 – 40). Sin embargo, en Mclean – Hewitt (1994, p. 51) se señala que el nuevo método implantado en el Institut National conllevaba descartes sucesivos de los candidatos.

puntuase más mediante la aplicación de su método, mientras que Condorcet postuló que debería ser seleccionado (caso de existir) aquél que venciese por mayoría simple al resto de candidatos al enfrentarse con cada uno de ellos[26]. Lejos de ser estéril, la dualidad Borda *versus* Condorcet aún se deja ver en lo que los anglosajones denominan "positionalist" y "non-positionalist voting theory", respectivamente[27].

La dicotomía a la que hacemos referencia la ejemplificó con su propia trayectoria el historiador y crítico literario Pierre Claude François Daunou (1761 – 1840). Él fue uno de los académicos por cuya mediación se introdujo la regla de Borda en el Institut National de France en 1796. Sin embargo, hacia 1803 ya había variado su posición inicial y derivado hacia una línea condorcetiana, tal vez influido por el propio marqués, con quien tuvo estrecha vinculación política e intelectual. Como afirman McLean – Urken (1995, p. 40), las razones de este cambio se explicitan en Daunou (1803), donde se critica la justificación que Laplace había hecho del espectro de puntuaciones en el método de Borda, atendiendo a razones de equiprobabilidad que ya estaban implícitas en la propia Memoria de Borda[28]. Por otra parte, también Daunou arguye motivos de manipulabilidad a los que ya hemos aludido. Cabe señalar, no obstante, que tras estas críticas Daunou deja traslucir la adhesión al poder emergente de Napoleón, detractor del uso de la regla de Borda.

Un aspecto interesante de Daunou (1803) es que recoge de forma explícita la idea de "intensidades de preferencia" entre pares de candidatos por parte de los agentes, que jugará un papel fundamental en nuestro Capítulo 3: "Incluso si este votante intentase expresar de forma clara y positivamente sus opiniones

---

[26] A este respecto pueden consultarse, entre otros, Black (1958, pp. 178 – 180) y Rashed (1990, pp. 63 y ss.). Es así mismo conveniente señalar, como hace Nurmi (1999, p. 22) que "el ganador de Condorcet no es un método, sino una alternativa". Como veremos, existen muy diversos métodos que seleccionan al ganador de Condorcet cuando éste existe.
[27] A este respecto véanse, entre otros, Gärdenfors (1973) y Pattanaik (2002).
[28] Sobre la justificación de Laplace del rango de puntuaciones Borda y las críticas a la misma, véase Black (1958, pp. 180 – 183). Por otro lado la argumentación de Laplace, que también

con religiosa integridad, ¿qué magnitudes reflejarían clara y exactamente los grados de intensidad de sus votos?"[29]. Esta noción aparecía ya prefigurada en los trabajos de Borda y Condorcet. Por ejemplo, cuando este último, citando a Borda, supone que "los grados de mérito ó de preferencia entre los Candidatos son iguales y reputados por iguales en la opinion de los Censores"[30], dando a entender implícitamente, por tanto, que podrían ser distintos. También Morales (1797, p. 8), quien afirma no tener conocimiento de los trabajos de los franceses, había sostenido que "no hay mas que un método exâcto, y por consiguiente justo de elegir, y es el método que podemos llamar de *compensacion*, el qual compara y pesa los grados de opinion del mismo modo que en una balanza se comparan diferentes pesos para conocer aun la mas pequeña diferencia que haya entre ellos". Más adelante, Morales (1797, p. 49) llama "eleccion *justa* á [...] aquella en que cada elector haya asignado á cada candidato el grado de aprecio, que *segun su juicio* le merece en comparacion con los demas". Y todavía Morales (1805, p. 9), que recoge las críticas que había merecido su *Memoria*, cita entre ellas la poca permisividad en las puntuaciones del método de Borda, ya que con un mayor rango de valores "[...] cada elector podrá asignar y expresar con mas exâctitud la razón en que halla á un candidato respecto á otro".

En su replanteamiento y abandono final de su fe en la regla de Borda, Daunou (1803) hace referencia y critica a Morales (1797), ya que el autor español, ajeno a cualquier tipo de polémica, había tomado partido decididamente por el procedimiento recusado por el citado autor francés. Daunou (1803), en cambio, no aparece citado en Morales (1805). Sin embargo, como veremos, la reseña que Daunou hizo de Morales ha sido determinante en la recuperación de la figura del español tras casi dos siglos de olvido.

---

toca interesantes ideas de intensidad en las preferencias de los agentes, ha sido modernamente retomada por Tanguiane (1991, pp. 80 y ss.), Basset Jr. – Persky (1999) y Tangian (2000).

[29] Véase McLean – Urken (1995, p. 247).

[30] Cf. López de Peñalver [1799] (1992, p. 59) donde, como se ha indicado, se recogen comentarios de Condorcet sobre Borda (1784). Sobre esta obra y su posible conocimiento por parte de Morales, véase 1.2.3.

1.2.2 Vida y obra de José Isidoro Morales

La información que tenemos acerca de José Isidoro Morales, a diferencia de los casos de Condorcet y los autores franceses citados, ha sido hasta ahora incompleta (de hecho lo sigue siendo en lo que respecta a su exilio en Francia), dispersa y a veces contradictoria. Por tanto, hemos creído necesario perfilar una semblanza biográfica lo más cerrada posible, conscientes de que en muchas de sus facetas vitales se deja traslucir su interés por el tema electoral, y más concretamente por la regla de Borda. En cuanto a la obra de Morales, muy diversa, ésta ha sido estudiada hasta ahora de forma parcial y fragmentaria. Particularmente, esto se hace patente en lo que respecta a sus trabajos matemáticos relativos al citado método de votación. Así, aunque con discontinuidad, Morales (1797) ha recibido desde su misma publicación hasta nuestros días la atención crítica que esta obra merece. Sin embargo Morales (1805), con aspectos no menos importantes, como ya se ha señalado, ha pasado casi desapercibido. Creemos oportuno, por tanto, recuperar a Morales en su conjunto y situarlo en el contexto histórico en el que está inscrito, como etapa previa a la valoración ecuánime de su relevancia en la génesis de la moderna TES[31].

Según los datos del Archivo Universitario de Sevilla, José Isidoro Morales Rodríguez nació en Huelva el 4 de abril de 1758. Siempre estuvo vinculado a su patria chica, pero su trayectoria vital estuvo especialmente adscrita a Sevilla, una “Atenas española” de la época ilustrada, ciudad por la que pasaron en diversos momentos de sus vidas figuras de la talla intelectual de Olavide, Forner o Jovellanos, entre otros. En el aspecto meramente académico, Morales alcanzó el grado de Bachiller en Filosofía en 1771 y obtuvo la licenciatura en Artes en 1776. Llegó a ser Diputado (un cargo universitario en Junta de Gobierno) en la época que siguió a la reforma de Olavide. Y, como ilustrado

[31] Los detalles históricos y biográficos expuestos a continuación, así como las fuentes bibliográficas y documentales acerca de Morales en los que se basan, se pueden completar en Martínez Panero – García Lapresta (1999 y 2003) y en Lara Ródenas (2001).

que fue, perteneció a la Academia de Buenas Letras y de la Sociedad Económica de Sevilla, y frecuentó la compañía de algunos integrantes célebres de la Academia de Letras Humanas[32]: Lista, Reinoso, Arjona, Blanco White[33], etc., todos ellos eclesiásticos, como el propio Morales o Miñano, también afín a dicho círculo de relevantes intelectuales.

Hay también constancia de que Morales asistió, como oyente voluntario, a alguno de los cursos impartidos en los Reales Estudios de San Isidro de Madrid, centro reconvertido tras la expulsión de los jesuitas. Allí estuvo interesado en la Historia Literaria y desarrolló en 1790 el tema de la *Historia de la educacion pública de las naciones antiguas y de sus escuelas hasta el establecimiento de la de Alexandría.* Posteriormente estuvo vinculado a este centro como miembro de diversos tribunales de oposición.

Llegó a ser profesor de Matemáticas de los Pajes del rey Carlos IV y, desde 1796, Teniente de Ayo de los mismos, aunque ignoramos de qué centros o instituciones citados pudo provenir su cultura matemática, o incluso si en alguna medida su formación fue autodidacta[34]. Por lo que podemos observar en su *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*, y en

---

[32] En relación con el ambiente intelectual de esta Academia pueden consultase Juretschke (1951, pp. 19 y ss.) y Aguilar Piñal (1989, pp. 266 – 267). Este último cita el siguiente párrafo de Alberto Lista: “Ya se juntaban [sus miembros] para leer a nuestros clásicos y hacer observaciones sobre el lenguaje; unos suplicaban a un compañero que sabía matemáticas que los iniciase en esta ciencia; [...] allá, mientras se daba un paseo, explicaba otro los principios de la geografía a la vista de los astros, o si era de día se leían, haciendo reflexiones sobre ellas, algunas piezas de nuestro teatro... En fin, no se hacía más que ser aplicados, virtuosos y felices dando y recibiendo instruccion”.

[33] Precisamente Blanco White [1822] (1983, pp. 75 – 122), en la tercera de sus *Cartas de España*, publicadas originalmente en inglés, pinta un vivo cuadro del ambiente espiritual de esta comunidad. Blanco, que no era dado a citar explícitamente los nombres concretos de sus colegas, alude entre ellos a “uno de los hombres más dignos y mejor dotados que la tiranía y la superstición hayan condenado a vegetar en la oscuridad”, calificativos que, como veremos, bien pudieran referirse a Morales a la luz de la trayectoria vital de éste.

[34] Aceptando nuestras hipótesis sobre la influencia de Lista y la Academia de Letras Humanas o la Sociedad Patriótica de Amigos del País hispalense en la formación científica de Morales, Lara Ródenas (2001, pp. 15 y ss.) conjetura que también pudo haber adquirido conocimientos de su pariente José Rebollo Morales, catedrático de Matemáticas del Real Colegio de San Telmo de Sevilla. Así mismo, Lara Ródenas (2001, pp. 42 y ss.) ha puesto de manifiesto que los intereses matemáticos de Morales no se restringían al tema electoral, abarcando aspectos como la edición de tablas astronómicas o la introducción del sistema métrico decimal en España.

el *Apéndice* a dicha obra, aunque las herramientas técnicas empleadas en las mismas van poco más allá de la combinatoria y las progresiones aritméticas, Morales da buena muestra de rigor y madurez científica. Así, Ochoa [1870] (1965, p. 604), de la generación siguiente a la de Morales, lo consideraba "uno de los más insignes matemáticos que ha tenido España", si bien el transcurso del tiempo fue atenuando esta apreciación. Tanto es así que la literatura sobre la historia de la ciencia en nuestro país no recoge referencia alguna sobre Morales, ni tan siquiera al especializarse en un periodo tan fecundamente estudiado en este campo como el ilustrado. Sólo en fechas recientes el interés por Morales como precursor de la TES ha dado pie a para reivindicar su figura con sentido de perspectiva histórica (cf. especialmente Martínez Panero – García Lapresta (1999 y 2003), Martínez Panero (2001) y Lara Ródenas (2001) a este respecto).

En terreno político Morales fue decididamente liberal[35]. Participó en una comisión constituida por profesores de la Universidad de Sevilla, en la que también se encontraba Lista, para "arreglar y sostener un ejército permanente y conservar una marina". Fue vocal de la Junta de Instrucción Pública, organismo que en la época de Jovellanos como ministro de Gracia y Justicia (1797 – 1798) elaboró un proyecto de organización de los estudios para la Casa de Pajes del Rey, en el que se introducían ideas de Locke y Rousseau que fueron muy mal vistas desde Palacio. Estuvo así mismo en una comisión de Cortes que, de nuevo bajo la dirección de Jovellanos, preparaba la reforma de la enseñanza propugnando su gratuidad, y en la que también figuraba Lista, quien compartía con Morales intereses diversos[36]. En 1809 defendió una Memoria a favor de la libertad política de imprenta ante la Junta de Instrucción Pública, presidida una vez más por Jovellanos. Tras la intervención de Morales se consiguió la aprobación de la moción de libertad de prensa por dicha

[35] Como tal, Elorza (1970, pp. 189 y ss.) le dedica un importante lugar en su estudio de la ideología liberal en la Ilustración española.

institución, si bien no de manera unánime. El debate, sin embargo, no pasó a instancias superiores, ante el devenir de los acontecimientos bélicos. Por fin, en el mismo año, aparece Morales como miembro de la Junta de Medios y Recursos.

La carrera eclesiástica de Morales sigue un curso ascendente. De simple presbítero, como acredita en la portada de su *Memoria*, pasaría a ser canónigo en la Catedral de Sevilla, desde donde se hizo patente su afrancesamiento durante la dominación napoleónica[37]. Predicó en ceremonias de los franceses, como en la onomástica del emperador, y escribió panfletos en los que propugnaba que se dotasen las plazas vacantes por proscripción en el cabildo catedralicio, suscitando la consiguiente polémica. Prueba de su prestigio es el hecho de que Miñano, único miembro del cabildo de Sevilla que no juró lealtad al rey José, agradeciera por mediación de Ochoa “la tierna solicitud de su amigo don Joseph Isidoro Morales, que gozaba entre los primeros jefes franceses de la alta consideracion que siempre debió merecer del gobierno español”. Por intercesión de Morales, Miñano, que había sido detenido en 1810, consiguió ser excarcelado.

En el transcurso del mismo año y ya claramente afecto al bando francés, Morales actúa como emisario del rey “intruso” para el sometimiento de la escuadra española en Cádiz, lo que le hace blanco de la sátira de Arriaza (1810), en su *Desenfado Patriótico*[38]. Es ésta una obra acerba donde tiene lugar un chispeante diálogo entre un lenguaraz “Patriota” y un “emisario del rey Pepe” que es portador de todas las indignidades de “los que vendieron al

[36] Entre éstos, las Matemáticas fueron sin duda el vínculo más relevante entre ambos. De hecho, en el ámbito nacional, Lista sería, como veremos, de los que más estimaron la labor de Morales en este campo.
[37] Moreno Alonso (1995, p. 256) considera a Morales “afrancesado por razones eminentemente intelectuales antes que políticas o canónicas, que de todo hubo en su biografía”, y anuncia en el mismo lugar una memoria sobre el personaje, aún no publicada, como “paradigma del intelectual afrancesado”.
[38] Sobre esta sátira, que le valió a Arriaza la enemistad de Quintana, cf. Suárez (1982, p. 212) y Gil Novales (en curso), parte de cuya información aparece también en la voz “Arriaza” en www.enciclonet.com y en la Enciclopedia Universal Micronet (1999, edición en CD-ROM).

enemigo la libertad de su patria". Este último personaje, al que se denomina indistintamente "Doctor Jarabes" o "Padre Jarabes" por su aire halagüeño y palabras blandas, no es otro que una caricatura cruelmente distorsionada de Morales. Efectivamente, aunque su nombre no aparece citado en ningún momento, diversos rasgos lo identifican con el "abate rubicundo" que departe con el Patriota ya que, como él, es doctor (así lo acredita Morales en la portada de su *Memoria*), canónigo, autor de una Memoria sobre la libertad política de prensa y poseedor de la "Orden de la Berenjena", el nombre con el que desenfadadamente se conocía a la Real Orden Española por el color de su cinta. Y también este último detalle coincide, ya que, por los servicios prestados, esa distinción le había sido concedida a Morales por decreto de 3 de febrero de 1810.

En 1811, como culminación de su ascenso en la escala eclesiástica, Morales consigue el rango de deán del cabildo catedralicio de Sevilla, máxima dignidad después de la obispal, tomando parte destacada durante el mismo año en la instalación definitiva de los restos de Arias Montano en la Iglesia Patriarcal de dicha ciudad. No abandona su faceta política e integra una Junta Provisional ordenada en 1812 por el conde de Montarco, comisario de las Andalucías por el rey José, donde con él figuran Miñano, Reinoso y Lista, con el cometido de examinar las cuentas de los hospitales y asilos de indigentes y preparar sus presupuestos. Estos datos en su conjunto nos muestran que, aunque de raíz intelectual, el colaboracionismo de Morales no fue, como en el caso de otros afrancesados, meramente pasivo.

Con la retirada de los franceses en 1813 comienza el exilio de Morales y otros afrancesados. Su nombre aparece en una lista de 1657 emigrados con el ejército galo, distribuidos por ministerios, en la que se especifica el sueldo, lugar de residencia asignado y observaciones sobre los familiares que acompañan a cada refugiado. A Morales se le asignó asilo en la población francesa de Oloron, no muy lejana de la frontera española. En esta ultima etapa de su vida escasean los datos biográficos de que disponemos: todavía figura como canónigo en la *Guía Eclesiástica* de 1816, y aparece citado en la correspondencia intercambiada entre Reinoso, Miñano y Lista, quien lo supone residente en París en 1817.

El último capítulo de la vida de Morales está documentado en la biblioteca del Servicio Histórico Militar de Madrid, donde se encuentra el importante fondo bibliográfico conocido como *Colección del Fraile*, un conjunto de 1008 volúmenes que contienen libros, folletos, periódicos y material escrito de carácter diverso desde 1738 a 1824, reunido por fray Joaquín de Sevilla. Entre estos papeles se encuentra una hoja que contiene *Copia de la inscripción sepulcral dedicada a memoria del Doctor y Maestro D. José Isidoro Morales, natural de Huelva, en el arzobispado de Sevilla*, que mandaron grabar sus amigos en el jaspe que cubre su sepulcro en París. El emotivo texto, que da idea de la penuria y desarraigo de Morales en sus últimos años, reza así:

> "Aquí yace José Isidoro Morales, español, canónigo de la Iglesia Metropolitana y Patriarcal de Sevilla, de sobresaliente ingenio; quien empleó su vida en tareas útiles y continuas, cultivando con suceso las ciencias sublimes y las bellas letras, y enseñando con la mayor perfección las matemáticas. Verdaderamente sabio; tan austero para consigo como indulgente para con los demás; observó con esmero los preceptos de la religión y de la virtud, sin que la pobreza, el destierro ni la muerte alterasen su apacibilidad. Tierno amigo. Murió en París el 29 de octubre de 1818 a los sesenta años de edad. Sus amigos le erigieron este monumento. Descanse en paz" (versión castellana del original en latín[39]).

[39] Cf. Moreno Alonso (1995, p. 258), quien transcribe el texto en latín y castellano, documentándolo en la citada Colección del Fraile, vol. 652 (núm. 2485). Sin embargo, en el índice bibliográfico consultado por nosotros (Freire López, 1983) la transcripción del epitafio de Morales figura en vol. 630 (núm. 2343). Este precioso documento corrige la fecha de muerte Morales dada en Martínez Panero – García Lapresta (1999), tomada entonces "con las debidas reservas" de una reseña biográfica de Morales en Berazaluce (1983, p. 34).

La postergación y oscurecimiento final que traslucen estas líneas fueron también el destino al que se vieron abocados muchos otros intelectuales españoles en los años de desastre que siguieron a la Guerra de la Independencia.

A la luz de la trayectoria vital de Morales, podemos situarlo en la que Vicens Vives (1972, p. 432) ha denominado “generación de Jovellanos, de hombres inteligentes pero escépticos, que no creen ni en la estructura importada ni en el reformismo dictado desde arriba. Estiman que España debe evolucionar poco a poco y que es peor la operación (al estilo de la Revolución Francesa) que la enfermedad. Una generación desengañada, moderada; pero en el fondo, una generación liberal, que prepara el futuro del siglo XIX español”. Vicens Vives data esta generación a partir de 1790. Más recientemente, Moreno Alonso (1989) ha estudiado con detalle la que denomina “generación española de 1808”, una generación escindida a partir de la cuál pudiera comenzar a hablarse de “las dos Españas”. Tal ruptura interna, en la época y persona que nos ocupa, debe contemplar lo que Artola (1989, pp. 36 y ss.) denomina “fenómeno afrancesado”. Méndez Bejarano [1922] (1994, v. Reinoso) afirma que los afrancesados, “colocados entre dos dinastías, ambas extranjeras, preferían la que brindaba expresión a sus anhelos progresivos, a su verdadero patriotismo que ansiaba emancipar la nación del vergonzoso atraso en que yacía”. Estas aspiraciones de cambio se reflejan en la actitud personal y se traslucen en la obra de Morales, incluso en sus trabajos matemáticos sobre la regla de Borda, plenamente representativos de los ideales del Siglo de las Luces[40].

A pesar del tiempo transcurrido desde la muerte de Morales, y de la diversidad de sus vertientes intelectuales, su posteridad y vigencia se funda en gran medida en su *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones,* que mereció ser impresa en 1797 por Real Orden y bajo la protección de Godoy, a quien Morales dedicó la obra. En el transcurso de ese mismo año, crucial en muchos aspectos para la Ilustración española, Morales presentó también la *Memoria Matemática* ante la Real Academia de Buenas Letras de Sevilla. Y con posterioridad, en 1805, publicó ya sin ayuda oficial un *Apéndice á la Memoria Matemática sobre el Cálculo de Opinion en las Elecciones*, en el que daba nueva luz sobre alguno de los resultados y rebatía las críticas recibidas de la obra anterior.

El interés de Morales por el tema electoral puede haber sido suscitado, como hemos visto, por su participación en diversas juntas, comisiones, cuerpos universitarios y tribunales de oposición, así como por su condición de canónigo del cabildo catedralicio de Sevilla, lugares éstos donde presumiblemente se trataría a menudo de votar candidatos o propuestas. De hecho Morales (1797, prólogo y p. 22) insta repetidamente a estas instituciones a abandonar los métodos al uso por el defendido en dicha obra.

Aunque nosotros centraremos nuestra atención en sus obras de matemática electoral, no fue ésta la única faceta intelectual de Morales[41]. Los datos consignados nos lo muestran como un auténtico ilustrado y, como tal, un hombre preocupado por los problemas y realidades de su tiempo. Así, fue autor en 1789 de un *Discurso sobre la educacion*, leído en la Real Sociedad Patriótica de Sevilla, en el que recogía ideas de Adam Smith sobre el crecimiento de la población, donde, sin citar al autor de *The Wealth of Nations*[42], mantenía que las clases productoras crean un fondo que sostiene al clero, la milicia y los funcionarios del Estado, útiles al mismo por ser el "depósito de las luces de la nacion". La Sociedad Patriótica de Sevilla no sólo

---

[40] Sobre las ideas ilustradas que aparecen en Morales (1797 y 1805), véase Martínez Panero (2001).
[41] Respecto a las referencias bibliográficas de la obra no matemática de Morales, véase Aguilar Piñal (1989, pp. 820 – 821).
[42] Adam Smith era un autor prohibido por la Inquisición. Cf. Defourneaux [1963] (1973, p. 230) y Sidney Smith [1957] (1973, p. 244). Sobre la recepción de la obra de Adam Smith en España, en particular en relación con la obra de Morales, véanse Lluch (1989), así como los comentarios y bibliografía proporcionada en García Lapresta – Martínez Panero (2000, p. 95).

trataba estos problemas de forma abstracta, sino que instaba a sus miembros a interesarse por las condiciones de los jornaleros, informándose de sus hijos, destino y ocupación.

Obra también de carácter pedagógico es su *Comentario al Exc. Señor D. Joseph de Mazarredo sobre la enseñanza de su hija*, impresa en latín y castellano en 1796, donde expuso sus ideas de lo que debía ser la educación de la mujer, un tema que interesó particularmente a los ilustrados y en el que Morales, salvo en algún aspecto que hay que entender en el contexto de la época, se manifestó claramente progresista. Del mismo signo, trasluciendo ideas enciclopedistas, es su *Memoria sobre la libertad política de imprenta*, que mereció ser impresa en 1809 y de la que ya citamos su elogio por parte de Jovellanos [1810] (1992, p. 209), consignado en su *Memoria en Defensa de la Junta Central*. Existen así mismo algunos discursos de Morales con motivo de la apertura de los ejercicios literarios de los Caballeros Pajes que tuvieron lugar en 1794 y, muy significativo para nosotros, un manuscrito fechado en 1798 que contiene una *Memoria sobre el objeto de las conferencias del Instituto Nacional de Francia, a que combida el Govierno de aquella Nacion*. Esta obra nos indica que Morales estaba muy al tanto de los actos organizados por la prestigiosa institución francesa, aunque la obra citada no trata sobre votaciones, sino acerca de la introducción del sistema métrico decimal[43].

1.2.3 La *Memoria Matemática* y el *Apéndice* de Morales: exposición crítica

Sólo desde hace relativamente poco tiempo, la obra de Morales dedicada a los sistemas de votación ha merecido una atención crítica contrastada. Tanto es así que, salvando un par de menciones tangenciales, en el lapso de tiempo que va desde la época inmediatamente posterior a la muerte de Morales a la actual, sólo conocemos una referencia a Morales (1797) en una edición de principios del siglo XX de la enciclopedia Espasa, que no es en absoluto fiel al contenido

[43] Véase Lara Ródenas (2001, pp. 42 y ss.).

de dicha obra. La situación ha cambiado de manera radical, y ahora Morales se ha visto de nuevo publicado tanto en inglés (McLean – Urken (1995, pp. 197 – 235), sólo la *Memoria*) como reeditado en español (Lara Ródenas (2001) y Martínez Panero – García Lapresta (2003), tanto la *Memoria* como el *Apéndice*).

En lo que se refiere a su propia época, Morales (1797) se había traducido al francés de manera privada por el propio Borda, poco antes de la muerte de éste en 1799, para informar al Institut National de France[44]. De ello da buena cuenta Morales (1805, p. 5), con justa satisfacción. Por otro lado, también la *Memoria* del español había sido reseñada por Daunou (1803) al criticar éste la regla de Borda, aunque Morales no cita esta referencia en su *Apéndice*. Por fin, en 1829, algunos años después de la muerte de su autor, la *Memoria* de Morales fue traducida al idioma galo, y esta vez publicada simultáneamente en París y Dole[45] con el título *Essai sur le Calcul de l'Opinion dans les Élections*. Esta versión (o más bien adaptación) de Morales (1797) fue llevada a cabo por D.A. Bourgeois, quien advierte en una nota preliminar que la *Memoria* no ha recibido la acogida que se merece y reconoce que la descubrió por azar en 1811. Así mismo, aclara que Morales (1829) no es una traducción literal, y con objeto de que la obra pueda ser entendida por el mayor número de personas, sitúa en notas separadas las expresiones en donde aparece lenguaje matemático. Además, con un afán notorio de clarificar aún más las ideas de Morales, realiza algunas modificaciones al texto original.

Paradójicamente, fue la breve reseña de Daunou (quien cita circunstancialmente a Morales por defender la regla de Borda que él critica) y no la traducción de Bourgeois (con manifiesta pretensión de difundir la obra de

---

[44] Como hemos señalado, el autor español ya había tenido un contacto previo con dicha entidad, por lo que no es de extrañar que al ver publicada su *Memoria Matemática*, y orgulloso de la misma, se la remitiese para su consideración, máxime cuando se trataba en ella acerca del procedimiento de votación recientemente implantado en la institución francesa.

[45] Hemos tenido conocimiento de esta doble edición gracias a la Bibliothèque Nationale de France, que nos remitió copia de ambas.

Morales) el hilo conductor de la recuperación de la *Memoria* tras casi dos siglos de semiolvido. Efectivamente, el moderno (re)descubridor de la obra de Morales en lo relativo a la TES, Iain McLean, de la Universidad de Oxford, menciona a nuestro autor por vez primera[46] en un documento de trabajo (McLean – Sommerlad, 1991), que recoge la versión al inglés de los principales textos políticos de Condorcet[47]. Es en esta obra donde se hace referencia (p. 233) al citado Daunou, por cuanto que fue éste quien promovió la implantación en 1796 del método de Borda en las elecciones de miembros al *Institut de France* (el hecho que motivó la *Memoria* de Morales); y por mediación de Daunou se alude incidentalmente al matemático español y a su *Memoria* remitida a dicha institución[48]. Por otro lado, Daunou (1803) aparece como anexo a los trabajos de Condorcet vertidos al inglés en McLean – Sommerlad (1991), donde el autor francés dedica parte de su texto a reseñar y analizar la *Memoria* de Morales, como ya se ha indicado[49]. La profusión de materiales sobre los fundamentos de la TES en esta época a caballo de los siglos XVIII y XIX (denominada por McLean "edad de oro de la TES") motiva el que, en compañía de A.B. Urken y tras trabajos de transición (McLean (1995a y 1995b)), se publique McLean – Urken (1995). En esta obra fundamental se recogen de forma comprensiva todos los textos conocidos de los precursores de la TES, entre ellos la *Memoria* de Morales (pp. 197 – 235), aunque no el *Apéndice*, desconocido por los investigadores anglosajones. De hecho, nosotros conocimos la traducción inglesa de la *Memoria* de Morales,

[46] Bien es cierto que Mascart [1919] (2000, p. 131) cita la *Memoria* de Morales sin indicar su autoría, que sí es señalada, si bien marginalmente, en Grazia (1953).
[47] Tanto esta obra, como con posterioridad (McLean – Hewitt, 1994), no se reducen a una mera traducción; son importantes por poner de manifiesto sus editores las principales aportaciones de Condorcet a la TES, fundamentalmente en lo referente al principio de independencia de alternativas irrelevantes considerado por Arrow, del que el autor francés fue precursor, tal y como ya se ha señalado.
[48] Se cita explícitamente a Morales en McLean – Sommerlad (1991, pp. 233 y 248). Es muy importante esta referencia, primera relativa a Morales tras mucho tiempo, aunque le asigna unas fechas de nacimiento y muerte (1760 – 1840) que dan a la vida de Morales un error de 20 años.
[49] También se reproduce la Memoria de Daunou en McLean – Urken (1995, pp. 237 – 276).

contenida en McLean – Urken (1995, pp. 197 – 235), antes que la obra original, de relativo difícil acceso[50].

No fue éste el caso de Fernández García – Fernández Chirino (1999), quienes habiendo tenido noticia de la existencia de la *Memoria* de Morales, al localizar un ejemplar en el Observatorio de la Marina de San Fernando (Cádiz), realizan un estudio de su trabajo en relación con los orígenes de la teoría de las votaciones y muestran los principales resultados e ideas contenidos en la *Memoria.* Los citados autores son también, sin embargo, desconocedores del *Apéndice* del que cabe decir que ha sido recuperado por nuestros trabajos, habida cuenta de la escasez[51] hasta ahora de referencias al mismo en la literatura y de que, por tanto, éste había pasado casi inadvertido.

Asumidas las prioridades, por nuestra parte hemos tratado en primera instancia de dar a conocer la obra matemática de Morales y situarla en su lugar, tanto en el ámbito de la ciencia española como en el de los orígenes de la TES. En esta línea, Martínez Panero – García Lapresta (1999) contiene un estudio sobre las aportaciones de la *Memoria* y el *Apéndice* de Morales, con amplias referencias al contexto y la época. El ambiente espiritual de la misma se estudia con más detalle, en Martínez Panero (2001), donde se lleva a cabo un análisis de las ideas ilustradas que Morales incorpora en su obra matemática, y que en parte la conforman. Por fin, en Martínez Panero – García Lapresta (2003) hemos visto cumplido el deseo, largamente perseguido, de editar (y difundir, por tanto) la obra electoral de Morales.

[50] McLean – Urken (1995, p. 63), consiguieron su copia de Morales (1797) de la *New York Public Library.* El *Apéndice* les era desconocido en la fecha de redacción de dicho libro; de haber tenido constancia de dicha obra, la "Edad de Oro" de la TES se hubiera ampliado dos años más: los que van de Daunou (1803) a Morales (1805). Nosotros conseguimos la *Memoria* gracias a la Biblioteca Nacional, y el *Apéndice* por mediación de la Biblioteca Universitaria de Sevilla. En Aguilar Piñal (1989, p. 821) se indica la localización parcial de ejemplares en otras bibliotecas españolas.

[51] Sólo conocemos Elorza (1970, p. 190), Berazaluce (1983, p. 34) y Aguilar Piñal (1989, p. 821).

Resulta muy interesante la génesis de la *Memoria* de Morales, por conjugar la gran independencia de espíritu del autor español con su siempre atenta mirada a las corrientes de pensamiento propiciadas por la Ilustración francesa. Además, Morales (1797) ve la luz bajo signo propicio[52], pues la tirante relación de España con el país galo, enturbiada por la propaganda revolucionaria y la actuación de la Inquisición, había ya quedado superada a partir de 1795, con la firma de la Paz de Basilea entre ambos países. Desde esa fecha, la prensa periódica del país vecino alcanza bastante difusión en España, y es así como Morales entra en contacto con las ideas de vanguardia intelectual, a las que por trayectoria y personalidad estaba favorablemente predispuesto. La lectura de un artículo fechado el 7 de agosto de 1796 en el periódico *La Décade Philosophique*[53] sobre las elecciones de miembros del Institut National de France le puso en conocimiento del procedimiento de Borda (aunque no es denominado en la nota de prensa por este nombre), y Morales, convencido de la eficacia e idoneidad del método, acomete de manera entusiasta la tarea de realizar una justificación matemática del mismo.

El periodo de tiempo del que dispuso Morales en la composición de su *Memoria* hubo de ser necesariamente breve, pues la dedicatoria a Godoy que la precede está fechada en marzo de 1797. Sabemos también que en noviembre del mismo año se hizo una presentación de las ideas que contenía dicha obra ante la Real Academia de Buenas Letras de Sevilla, y que para entonces ya estaba impresa por Real Orden, con respaldo y financiación oficial[54]. Sin embargo, Morales no se conformó con este interés en el ámbito nacional,

---

[52] El año 1797, aparte de ser el *annus mirabilis* de Morales, fue muy fecundo intelectualmente en España: Goya estaba en plena gestación de sus *Caprichos*, se publicó el *Poemario* de la Academia de Sevilla, *El Evangelio en Triunfo* de Olavide, etc. Significativamente, fue también el año de nombramiento de Jovellanos como ministro de Gracia y Justicia, y el del primer decreto de tolerancia hasta entonces conocido en España. Se pueden consultar más detalles en Aguilar Piñal (1996, pp. 105 y ss.) y Kamen [1979] (1985, p. 357).

[53] Esta publicación, muy vinculada al Institut National y principal órgano difusor del grupo denominado de los "ideólogos", estuvo prohibida durante algún tiempo por la Inquisición, aunque con posterioridad a la época en que Morales la leyó. Cf. Defourneaux [1963] (1973, p. 258).

necesariamente reducido, por lo que quiso buscar interlocutores a su mismo nivel en la institución que había motivado su investigación, el Institut National de France, cuya biblioteca aún conserva un ejemplar de Morales (1797).

Ya en la misma dedicatoria de la obra, además de la obligada lisonja para Godoy, se aprecia la gran amplitud de miras en Morales. Éste, con unos presupuestos parejos a los de Condorcet[55], hace profesión de fe en la aplicación de las Matemáticas a las Ciencias Sociales, algo que sobrepasaba de largo los estrechos límites de la matemática nacional[56]: “La invencion de aplicar el Álgebra á la medida de la extension hizo mudar enteramente de semblante todas las ciencias físico-matemáticas. Pero despues que se conoció que ese mismo cálculo era aplicable con igual exâctitud á qualquiera otro objeto capaz de ser valuado por el entendimiento, hemos visto refundirse y crearse de nuevo las ciencias políticas y morales”. Este planteamiento se ajusta plenamente a los ideales ilustrados de entender una ciencia de modo ancilar, esto es, al servicio del hombre y no como mero fin en sí misma.

En el prólogo de su *Memoria*, Morales reconoce que su trabajo fue suscitado por la lectura de un artículo del periódico francés al que hemos aludido, que traduce en su totalidad, y le sirve para presentar el método de elección que va a estudiar y justificar en su *Memoria*: “El Instituto Nacional acaba de hacer el nombramiento de cinco plazas vacantes. El modo de la eleccion es *simple* y *cómodo*, y por tal merece ser conocido y aun imitado en las *elecciones numerosas*[57]. Cada miembro escribe en una lista los tres nombres de los propuestos por la clase donde se ha verificado la vacante. Añade cada uno al nombre que prefiere el número 3; y al que le merece el segundo grado de

---

[54] La obra fue expedida con censura de Juan Justo García y Pedro Luis Blanco (AHN, *Estado*, 3242 (2)).
[55] Cf. Condorcet [1794] (1980, pp. 246 y ss.) y Rashed (1990, p. 15).
[56] Hemos desarrollado este aspecto en Martínez Panero – García Lapresta (1999, pp. 170 – 171), donde se cita, además, la pertinente bibliografía sobre las Matemáticas en la España ilustrada.

aprecio, añade el 2; y pone 1 al que le parece menos digno. Se suman despues las unidades que cada candidato ha reunido en su favor, y la mayor suma decide la eleccion". Se dan a continuación las puntuaciones obtenidas por los diversos candidatos a las plazas de Mecánica, Astronomía, Arquitectura, etc., que Morales, de forma muy didáctica, utilizará como ejemplos para las fórmulas que deducirá en el transcurso de su obra. Pero Morales (1797, p. 9) no deja recaer la descripción de este método de elección en un simple ejemplo, sino que después de precisar los instrumentos matemáticos necesarios en la teoría de las elecciones (permutaciones y progresiones aritméticas), lo define con exactitud y generalidad al afirmar: "Que cada elector tiene á su disposicion, para calificar el mérito que haya en los candidatos, tantos valores ó unidades de opinion quantos expresa la suma de una progresion de los números naturales ÷1. 2. 3. 4. 5 &c., cuyo número de términos es igual al de los candidatos. [...] Que estas unidades de opinion, de que puede disponer cada elector, las ha de distribuir entre los candidatos en progresión aritmética ÷1. 2. 3. 4. 5 &c.; bien que colocando los términos de ella á su arbitrio, segun el juicio comparativo que forma del mérito de aquellos".

Para visualizar estas puntuaciones, Morales (1797, p. 4) introduce una notación de tipo matricial análoga a la de Borda y Condorcet, donde "cada columna vertical de números denota los grados de opinion que cada elector ha asignado á cada candidato. Sumando luego las filas horizontales de los números, se tendrá la respectiva suma de valores que ha obtenido cada uno de ellos". Este formulismo algebraico de Morales (1797) es técnico sólo en la medida de lo necesario, pues, como se ha indicado, se conjuga en todo momento con ejemplos que hacen más accesible el texto, lo cual da buena medida del afán de difusión pedagógica del autor.

[57] Como ya se ha indicado, para Morales el adjetivo "numerosas" no es absoluto vago en el contexto electoral en el que aparece; concretamente, tal cuantificador hace referencia a votaciones entre más de dos candidatos o alternativas.

El núcleo de la *Memoria* está constituido por lo que Morales (1797, p. 9) denomina genéricamente "Teoría de las elecciones", pero este epígrafe tan ambicioso es equívoco, ya que nuestro autor se ciñe exclusivamente a la defensa razonada del método de voto ponderado reseñado anteriormente, denominado por él "de compensacion y suma". Se equivoca, por tanto, la Enciclopedia Espasa cuando carga sobre sus espaldas la ingente tarea de "[resolver] algébricamente la proporcionalidad de los distintos sistemas de sufragio". Bien es cierto que Morales estudia los procedimientos de votación tradicionales de mayoría cualificada de dos tercios y pluralidad[58] en una sola votación con más de dos opciones, pero no como un fin en sí mismo, sino de forma auxiliar para señalar sus desventajas frente al propugnado por Borda.

Morales (1797, pp. 2 y ss.) se apercibe de que, en elecciones con más de dos candidatos, los votos absolutos en cuyo recuento se basa el método de pluralidad conducen a "vicios y errores", y aduce ejemplos para ratificar tal denuncia. La razón de ello es que, según Morales, al emitir los agentes sus respectivos votos de la forma en que lo hacen, resulta truncada la información relativa a los candidatos y queda sesgado así el resultado final. Efectivamente, los electores sólo manifiestan el candidato al que otorgan su voto, mientras que los restantes, a los que se lo deniegan, son relegados en bloque. Por el contrario, el método de voto ponderado que Morales defiende no tiene en cuenta votos absolutos, sino puntuaciones otorgadas a todos los candidatos o "cantidades de opinion"[59] favorables a cada uno de ellos. Tal como señalaremos al tratar del *Apéndice* y aunque no es evidente a primera vista, Morales (1805, pp. 26 y ss.) muestra que tales calificaciones son las que

[58] A su vez, Morales distingue entre "respectiva pluralidad de votos", donde el ganador es el candidato más votado, y "absoluta o rigorosa pluralidad de votos", donde el ganador, debe estar respaldado por más de la mitad del total de votantes.

[59] En su Memoria, Borda también señala significativamente que "las formas convencionales de elección son altamente insatisfactorias, porque los votantes no pueden dar cuenta de sus opiniones acerca de los candidatos de forma suficientemente completa. Cf. McLean – Urken (1995, p. 84). La expresión "cantidad de opinion" aparece también literalmente en López de Peñalver [1799] (1992, p. 57).

resultan al confrontar los agentes las alternativas por parejas, ya sea explícita o tácitamente.

Hay que insistir en que las consideraciones anteriores son válidas para elecciones con más de dos candidatos ("elecciones numerosas" en la terminología de la época) y es para éstas para las que se propone el nuevo método. Morales lo anunciaba ya en el mismo prólogo de la *Memoria*: "se verá demostrado analíticamente que los métodos empleados hasta ahora en las elecciones son erroneos y falsos, porque estriban principalmente sobre la suposicion de que *elegir* (esto es, designar entre muchos candidatos quál tiene á su favor mayor cantidad de opinion) es lo mismo que decidir la alternativa ó negativa de una proposicion, como sucede en las decisiones y en las sentencias. En estas es tan justo el método de la pluralidad absoluta de sufragios, como dexa de serlo en las *elecciones* [numerosas]"[60]. En suma, como ya señalaba Morales (1797, prólogo) sólo cuando concurren dos candidatos, o se trata de decidir sobre una propuesta, es perfectamente válido el método de pluralidad, el cual, únicamente en este caso, equivale al de mayoría simple y al de Borda, que es el que nuestro autor postula para su aplicación general.

Para clarificar los argumentos expuestos, Morales (1797, pp. 28, 29 y 36) introduce argumentos que, haciendo abstracción del contexto en que se presentan, preconizan interesantes ideas sobre la intensidad en las preferencias por parte de los agentes. Es particularmente persuasivo el siguiente símil con que Morales trata de convencer a su lector: "la injusticia[61] que embeben todos los métodos de elegir por medio de votos absolutos de una sola calificacion; donde cada elector no enuncia su opinion mas que respecto de un solo candidato por quien vota. Contar semejantes votos, y decidir por ellos la

[60] En estas líneas del prólogo de Morales (1797) se resume lo que para McLean (1995, p. 28) es la principal aportación de nuestro autor.
[61] Significativamente, Morales había citado a Cicerón al comienzo de su *Memoria*, aludiendo de forma tácita al conocido principio del derecho "Summum ius, summa iniuria", que refleja de forma elocuente su opinión de que llevar lo legalmente establecido a sus extremos puede llegar a "metodizar la injusticia". Cf. Morales (1797, pp. 7, 8, 22, 32 y 33).

eleccion (sea el que fuere su número) es emplear la balanza mas grosera y mas falsa para apreciar una qualidad ó ente moral, qual es la opinion, y es quererla valuar quando no está pronunciada sino á medias, y aun apenas expresada por cada elector una sola y pequeña parte de ella [ya que] cada uno de ellos dexa sin ninguna calificación á todos los candidatos menos á uno [...] Lo que equivale á lo mismo que si cada elector estimase rigorosamente *en nada* á todos los candidatos menos á uno: y en fuerza de ello expresase la opinion que tiene de este con la nota ó signo superior, y la de los otros (á quienes algunos ó muchos electores asignan superior nota) con un cero". Tal como hemos señalado, nosotros retomaremos este enfoque sugerido por Borda, aunque desde un punto de vista más general, en el Capítulo 3.

Siguiendo con la figura de la balanza, tan visual, sostiene Morales (1797, pp. 8 y 32) que "la opinion no es cosa que se numera ó cuenta, sino que se pesa"[62], y que "la mayoría respectiva de opinion" de un candidato frente a sus oponentes es la que da la medida fiel para que aquél pueda resultar elegido, por lo que propugna: "*Votar* es lo mismo que enunciar la opinion que se tiene de todos los candidatos. Enunciada aquella, hacer el *escrutinio* no es otra cosa que exâminar y valuar la cantidad de opinion que ha obtenido cada candidato. Hecho esto, el *elegir* no es más que declarar quién la ha tenido o tiene mayor en su favor". Además procura que estas ideas no se queden en un plano meramente teórico, y trata persuasivamente de darles viabilidad en la práctica. Así, por ejemplo, Morales (1797, p. 38) se preocupa por la forma concreta en que pueden realizarse las votaciones por el método que propugna: "Si la votacion ha de ser secreta, entreguense á cada elector en bolitas, en cuños ó en cedulitas los números que han de servir á las calificaciones. Luego en jarras ó vasos (según

[62] Aquí Morales parece tener en cuenta, otro conocido proverbio latino, que cita Lucio Anneo Séneca: "Aestimes iudicia, non numeres" (sopesa las opiniones, no las cuentes). Sin embargo, el significado original de la sentencia tiene un matiz de elitismo intelectual ajeno al que Morales le da en su contexto, tal como queda de manifiesto en Plinio el Joven, epist. 2, 12, 5: "Ese fue el parecer de la mayoría, pues los votos se cuentan, no se pesan. No puede suceder de otro modo en una asamblea pública, en la que no hay nada tan desigual como la absoluta igualdad. Ya que, aunque es diverso el discernimiento, el derecho de voto es idéntico para todos".

se acostumbre) que tengan cada una escrito encima el nombre de cada candidato, ponga cada elector su bolita ó cédula: y hagase despues el escrutinio de cada vaso, para sumar segun se ha dicho".

Hay que constatar que también Borda había desarrollado en su *Memoria* de 1770 ideas similares a las de Morales. De hecho, el análisis teórico así como las fórmulas matemáticas con las que Morales (1797) apoya sus tesis coinciden en esencia, aunque con distinta notación, con los de la obra del autor francés[63]. Y en esta línea de similitudes cabe también indicar que Condorcet, al comienzo de su comentario a la Memoria de Borda, había hecho, como Morales, un repaso de los métodos de votación entonces más usados[64]. Estos indicios, así como el hecho de que Morales (1797) utilice expresiones recurrentes en torno a la noción de "opinion" que, como se ha señalado, aparece también en los autores franceses, pudieran cuestionar en cierto modo la originalidad del español. Sin embargo, no desconfiamos de Morales (1797, pp. 59 y ss.) cuando se postula a sí mismo como pionero en el estudio de la regla de Borda. En primer lugar, es lógico y natural que en la defensa de una regla de votación se haga un repaso crítico de las antagonistas a ella que se quieren recusar. De otro lado, la idea de una "pública opinion", entonces emergente, circuló en ámbitos ilustrados a ambos lados de los Pirineos, por lo que no debe parecer extraño su aplicación, de forma independiente, en este contexto[65].

Una diferencia fundamental entre Borda y Morales se observa en lo referente al tratamiento de la manipulabilidad del procedimiento por el que ambos abogaban. El autor francés apenas fue consciente de que su método no era inmune a estrategias de voto, y cuando se le señaló este hecho trató de eludir la cuestión haciendo un llamamiento a una ideal nobleza de espíritu de los votantes que, por desgracia, la realidad suele desmentir. Por el contrario, Morales sí se percató de esta debilidad de la regla de Borda de la que se pueden

63 Cf. McLean – Urken (1995, pp. 88 – 89).
64 Cf. McLean – Urken (1995, p. 81).
65 A este respecto, véase Martínez Panero (2001, p. 1129).

aprovechar los “injustos electores”, y una buena parte de la *Memoria* está dedicada a analizarla. Para ello, Morales (1797, p. 49) habla de “deserción” como un tipo de voto insincero por parte de un agente, que consiste en que éste rebaje de forma interesada la puntuación de algún candidato, para beneficiar con ello a algún otro candidato más deseado por él que el posible ganador si emitiera su verdadera opinión. Morales (1797, pp. 42 y ss.) observa que el efecto de estos cambios de orientación de voto en el resultado final es menos relevante si el método de elección es la regla de Borda que si se emplea el procedimiento de pluralidad. La razón de ello es precisamente la flexibilidad del método que Morales defiende, ya que al disponer de toda una gama de puntuaciones, un votante falaz no está forzado a rebajarlas de forma absoluta. Por el contrario, si la votación se hace por el método de pluralidad, el sesgo ha de consistir necesariamente en negar el voto a un candidato para dárselo a otro, alterándose la elección final de forma más drástica. Introduciendo notación adecuada y tras prolijos razonamientos, Morales llega incluso a cuantificar el número de deserciones necesarias para favorecer a un candidato y, cuanto menos, situarlo a la par del que sería ganador si las puntuaciones fuesen emitidas sinceramente.

Con un paternalismo típicamente ilustrado, Morales (1797, pp. 59 y ss.) concluye señalando que la utilidad y la pública felicidad han sido su norte. Y es en el epílogo, y como de paso, sin arrogarse mérito de ningún tipo, donde añade una nota que da cuenta de lo que él cree la originalidad de su trabajo, ya que cita diferentes elecciones recientes llevadas a cabo por los métodos criticados, aunque también menciona un caso en el que fue derogado el sistema de mayoría simple en elecciones con más de dos opciones, lo que es ya indicativo de una incipiente y atinada crítica a los métodos clásicos de votación.

Hay que señalar que en los años de transición hasta la publicación del *Apéndice* de Morales, más concretamente entre 1798 y 1799, se editaron, en la misma Imprenta Real en la que Morales había publicado su *Memoria*, las *Cartas a una*

Princesa de Alemania sobre diversos Temas de Física y Filosofía, obra de divulgación de Leonhard Euler, en traducción de López de Peñalver. Esta versión al castellano incorpora la apostilla, que Condorcet incluyó en su edición de la obra de Euler, en la que el autor francés reseña la Memoria que Borda presentó ante la Real Academia de Ciencias de París, donde defendía su método de votación con puntuaciones[66]. Morales pudo así haber tenido acceso a esta información antes de redactar su *Apéndice*, y tal vez, el no citar a Condorcet (aunque, por otra parte, tampoco lo hace López de Peñalver) fuera para evitar posibles problemas de censura inquisitorial, como ya señalamos. En cambio, sí hace referencia en dicha obra a Borda, aludiendo explícitamente a la Memoria de éste.

Aunque, como hemos señalado, Morales (1797) recibió una favorable acogida, no se vio libre de críticas, por lo que, para rebatirlas, elaboró un *Apéndice* publicado siete años después que la obra que lo motivó, esta vez sin apoyo oficial. En este breve opúsculo, Morales (1805, p. 6) da cuenta de todas las dudas suscitadas por el método de Borda, que para él se pueden aglutinar en una sóla: la falta de justificación del rango de puntuaciones que utiliza el citado procedimiento. Y es que, como se le había denunciado desde diversas instancias, una escala fija de puntuaciones correlativas, números naturales al fin y al cabo, no tiene por qué reflejar fielmente el grado de aprecio o mérito de las alternativas por parte de los agentes, siendo éste libre. A estas objeciones, de las que también fue objeto el propio Borda, se han dado distintas respuestas. Y una vez más, la proporcionada por Morales (1805, pp. 18 y ss.) para justificar su espectro coincide en buena parte con la de Borda (cf. McLean – Urken (1995, pp. 86 y ss.)): las puntuaciones obtenidas por cada candidato indicarían el número de veces que éste supera al resto de sus oponentes en una

---

[66] Véanse López de Peñalver [1799] (1992, pp. 56 – 59) y Euler [1768 y 1772] (1990, pp. 67 y 337).

confrontación por pares[67], constituyendo así un reflejo válido del mérito u opinión favorable que se trata de evaluar.

A pesar de los avances de Morales, singularmente en lo relativo a la recién señalada comparación entre pares de alternativas por parte de los agentes, nuestro autor no parece haber sido plenamente consciente de que pudiera existir un candidato que venciera a todos los demás contendientes por mayoría simple en confrontaciones por parejas (y que sería ganador según el criterio de Condorcet, como ya hemos señalado), pero no ser el más puntuado según Borda, y no resultar por tanto vencedor si se emplea este último método. En cambio, McLean – Hewitt (1994, p. 51) creen que, al menos indirectamente, sí apreció esta diferencia, ya que Morales (1797, pp. 16 y ss.) demostró que un candidato, aún ganando por "rigorosa pluralidad" o mayoría absoluta (y siendo por tanto ganador de Condorcet), pudiera no ser vencedor mediante la regla de Borda.

De lo que hay plena seguridad es de que Morales no supo ver que el método de Borda violaba el principio de alternativas irrelevantes considerado por Arrow [1963] (1974): mediante este procedimiento puede haber lugar a cambios en la puntuación colectiva de dos candidatos, motivados por la modificación de las consideraciones sobre candidatos "irrelevantes", esto es, que no interfieran en las preferencias individuales de los agentes sobre el par de candidatos en cuestión. En cambio, como han demostrado McLean – Hewitt (1994, pp. 43 – 44, 75 – 76 y 152) y McLean (1995b), este hecho sí fue puesto de manifiesto por Condorcet, y constituye una de sus más profundas intuiciones.

A la luz de los comentarios anteriores y a modo de resumen crítico por nuestra parte, creemos que se deben evitar dos valoraciones extremas de las que ha

---

[67] Aunque en la *Memoria*, Morales (1797) puntúa a los candidatos: 1, 2,..., c-1, c, donde c es el número de candidatos, en el *Apéndice* (1805) les asigna valores: 0, 1,..., c-2, c-1; es en este último caso en el que la puntuación de cada candidato coincide con el número de victorias sobre sus oponentes. También se dio cuenta Morales de que estas puntuaciones no tenían por

sido objeto Morales en el pasado: por una parte, la que lo consideraba descubridor de nuevos territorios del pensamiento y pionero en aspectos electorales[68]; de otro lado, la que le suponía un mero receptor de ideas ajenas[69]. A lo largo de esta exposición, nuestra opinión se ha decantado por una originalidad y valía que creemos legítima; pero constatando a la vez ciertas reservas: consideramos sincera la perplejidad de Morales ante lo que él creía carencia de trabajos anteriores al suyo, pero es claro que Borda y Condorcet se le anticiparon en muchos de sus resultados.

Sin embargo, la prioridad cronológica no implica causalidad. Como ya hemos indicado, la coincidencia en muchos casos entre los argumentos de Morales y los citados autores franceses puede deberse a la permeabilidad del ambiente espiritual de la época; a que, por así decirlo, estas ideas comunes ya estaban maduras para su eclosión[70]. En cualquier caso, sería mérito de Morales, vinculado por su pensamiento e ideales a la Francia posrevolucionaria, el ser parte activa en esta corriente ilustrada de vanguardia[71].

De hecho, como ha afirmado Maravall (1991, p. 426), Morales incluso "desborda la mentalidad ilustrada". Su contemporaneidad y vigencia actual debe ser reivindicada desde el agudo sentido crítico y la modernidad de su obra matemática sobre votaciones. No es exagerada nuestra apreciación, toda vez

---

qué ser correlativas: bastaba con que fuesen escalonadas. Ambos argumentos ya están en Borda. Cf. McLean – Urken (1995, pp. 85 y ss.).

[68] Así, la enciclopedia Espasa también cree equivocadamente a Morales (1797) como "quizá el primer trabajo científico sobre esta interesante cuestión".

[69] Este es el parecer de Moreno Alonso (1995, p. 257).

[70] Se ha utilizado en ocasiones este argumento para justificar descubrimientos de un mismo hecho científico debidos a distintos autores sin que haya habido influencia o plagio. Pensamos, por citar algún ejemplo, en el desarrollo del cálculo infinitesimal, llevado a cabo independientemente por Newton y Leibniz, o en la teoría evolucionista, obra paralela de Darwin y Wallace.

[71] La conexión de Morales con Francia fue no sólo espiritual, sino física, a partir de su exilio en el país vecino en 1813. Desconocemos, sin embargo, posibles desarrollos ulteriores de sus trabajos matemáticos, ni los contactos que allí pudo haber tenido.

que, aún hoy en día, no han sido corregidos ciertos errores, dos siglos después de que Morales los denunciase y propusiese cauces de solución[72].

1.3 La regla de Borda en el siglo XIX

Tras la eclosión de la TES en su denominada "Edad de Oro" y el relativo auge que en particular tuvo la regla de Borda tanto desde un punto de vista de investigación teórica como de puesta en práctica, se hace aún más acusado el vacío existente en este campo tras la época de Morales. McLean – Urken (1995, pp. 41 y ss.) han juzgado las causas de este receso de la TES en la primera parte del siglo XIX hasta bien entrada la segunda. El veredicto recae en la inadecuada difusión de las ideas de su principal teórico hasta entonces, el marqués de Condorcet; y también, cuando de una u otra forma se logró la toma de contacto con tales ideas, en la incomprensión de las mismas. Al tratar de este autor, ya expusimos algunas de las causas de tal situación que, como allí señalábamos, sólo se subsanaría en el siglo XX.

Con tan desoladores supuestos[73], sólo trataremos en la presente sección acerca de dos autores. El primero tras Morales (1805) de quien se sabe que investigó acerca de sistemas de votación (con especial énfasis en la regla de Borda, que reinventó) fue Charles Lutwidge Dodgson, ya en la segunda parte del siglo XIX. Una vez más, su desarrollo del tema lo realiza de manera independiente, sin conocimiento previo de sus antecesores. Y tal vez la identidad de Lewis Carroll, su *alter ego*, fuese un lastre en la difusión de sus ideas sobre métodos de votación, de indiscutible valía independientemente de la posible extravagancia del personaje.

[72] Algunos de estos errores en los que se ha incurrido en elecciones recientes, y comentarios sobre los mismos a la luz de los trabajos de Morales, se consignan en García Lapresta – Martínez Panero (2000, pp. 98 – 99).
[73] McLean – Urken (1995, p. 41), atentos rastreadores de las fuentes de la TES, han encontrado en el interregno al que nos referimos (de Daunou a Carroll) "un único escritor que se aproximó a la teoría del voto de una manera axiomática [del que] no sabemos ni siquiera de quién se trata, pues contamos únicamente con una reseña de segunda mano sobre las críticas realizadas por este autor".

Fue mucho más gris la personalidad del otro autor al que haremos referencia, Edward John Nanson, también profesor de Matemáticas como Carroll y autor de un tratado de métodos de elección que sí bebió en su caso de las fuentes originales, desarrollando algunas interesantes implicaciones que, como veremos, tampoco encontraron el merecido reconocimiento hasta bien entrado el siglo XX.

1.3.1 Lewis Carroll y el redescubrimiento de la regla de Borda

> –¿Qué es una carrera electoral? –preguntó Alicia, al ver que el Dodo se había quedado callado esperando que alguien le hiciera aquella pregunta que *nadie* le hacía.
>
> –Bueno, dijo el Dodo–, ¡es más fácil de hacer que de decir!
>
> (Y como me imagino que a alguno de vosotros os gustaría aprender de qué se trata, sobre todo si estáis aburridos alguna tarde de invierno, os explicaré qué hizo el Dodo).
>
> En primer lugar, trazó el recorrido de la carrera en forma de círculo [...] y, a continuación, situó a todos los participantes aquí y allá a lo largo del recorrido. Nadie dio la orden de salida (eso de "a la una, a las dos y a las tres, ¡ya!"), sino que cada uno empezó a correr a su aire y se retiró cuando le vino en gana, de manera que era bastante difícil saber cuándo se acababa la carrera. Después de una media hora [...] el Dodo dio la orden de llegada: "¡Fin de la prueba!"
>
> Los participantes, resoplando todavía, se congregaron en torno al Dodo para preguntarle:
>
> –¿Pero, ¿quién ha ganado?
>
> Cuestión peliaguda, que el Dodo no supo contestar sin haberse entregado, durante algunos momentos, a la reflexión. [...] Por fin, tras profundas cavilaciones, sentenció el Dodo:
>
> –*Todo el mundo* ha ganado y por tanto *todos* deben recibir premios.

El texto anterior está tomado del capítulo tercero de *Alicia en el País de las Maravillas*, de Lewis Carroll (seudónimo de Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898)), uno de los más curiosos y polifacéticos personajes (y, como hemos visto, ha habido varios) en el desarrollo de la TES. Ya nos hemos referido repetidamente a la discontinuidad histórica de esta disciplina que, desde los tiempos de Morales y sus coetáneos franceses hasta el autor que ahora nos ocupa, había quedado en un punto muerto. Es obvio, no obstante, que la celebridad de Carroll se asienta no en sus trabajos sobre votaciones, casi desconocidos excepto por los especialistas en la TES, sino en su obra literaria, y más concretamente en el libro al que hemos aludido, publicado en 1865. Se trata de un cuento infantil (aunque, de hecho, es mucho más que eso) compuesto por su autor a partir de un manuscrito[74], titulado *Las Aventuras Subterráneas de Alicia*, que Dodgson había ofrecido un año antes como presente navideño a Alicia Liddell. Esta niña, que jugó un importantísimo papel en su vida, era una de las hijas del deán del Christ Church College de Oxford, centro al que Carroll estuvo vinculado, primero como alumno y luego como profesor de matemáticas, desde 1850 hasta el final de su vida.

Con posterioridad al primer libro de *Alicia,* Carroll escribiría aún otro con la misma protagonista, *A Través del Espejo y lo que Alicia Encontró Allí*; una novela pretendidamente seria, *Sylvia y Bruno*; y diversos poemas en forma de charada, el más conocido de los cuales es *La Caza del Snark*. Y paralelamente, en una especie de esquizofrenia creativa[75], Dodgson fue autor de diversos libros de tema lógico-matemático (por ejemplo *El Juego de la Lógica* y *Euclides y sus Rivales Modernos*), así como de varios opúsculos sobre temas diversos (entre ellos el electoral) por los que estuvo interesado en alguna etapa de su vida.

Trataremos de justificar la inserción de la cita que figura como epígrafe de esta sección, ya que a simple vista pudiera parecer fuera de lugar en el contexto de la presente memoria. Para ello, señalemos en primer lugar, que el pájaro Dodo, artífice de la singular carrera que se ha descrito, no es sino una contrafigura del propio Dodgson que, tartamudo como era, duplicaba la primera sílaba de su apellido al pronunciarlo. Por otra parte, el nombre de la competición, en inglés “caucus race” (que también se ha traducido al castellano por “carrera en comité”), es muy significativo. Diversos anotadores de los libros de *Alicia*

[74] Cabe señalar, sin embargo, que el libro amplía sustancialmente el contenido del manuscrito original, en el que no aparece el pasaje citado, que hemos tomado de Carroll [1865 y 1871] (1988, pp. 30 – 31).
[75] Podríamos citar por el nombre de Dodgson al autor de libros de Matemáticas y mediante Carroll al autor literario (incluso Alfredo Deaño, prologuista de Carroll [1896] (1986) propone un híbrido para las obras de Lógica). Sin embargo, es tal la preeminencia de la faceta literaria que el nombre de Carroll “canibaliza” al primero y, siguiendo a Black (1958, 1996), usaremos ambos indistintamente, incluso en las referencias bibliográficas.

(Gardner, Buckley, Stilman, etc.) han señalado que Carroll pretendía hacer una sátira de la ineficacia de los comités. Sin embargo, habida cuenta de que en los libros de Alicia se subliman y aparecen en forma solapada muchos aspectos por los que Carroll estaba interesado[76], y siendo uno de éstos la teoría de las votaciones, resulta una hipótesis plausible que, con tal "carrera electoral", Carroll quisiera sugerir en clave literaria la existencia de "mayorías cíclicas" en la decisión colectiva; en otras palabras, la "paradoja del voto" de Condorcet. En tal situación, como también ocurre en el pasaje citado, se da el caso de que cada candidato vence por mayoría a uno inmediato (siendo, a su vez, vencido por otro) de forma cíclica, de modo que es imposible determinar un ganador.

Los términos "ciclo" y "mayorías cíclicas" fueron acuñados con éxito por el propio Dodgson (1786) quien, como veremos, redescubrió la posibilidad de esta situación en la toma de decisiones colectivas sin tener conocimiento previo de los trabajos de Condorcet. También hacia 1942 Duncan Black, quien con posterioridad se convertiría en el moderno vindicador de los trabajos de Carroll dedicados a temas electorales, llegó a ser, de forma independiente a las de Condorcet y Carroll, consciente de tal paradójica situación. Según confesión propia (Black (1991, p. 262)), sintió al verificarla "algo semejante a un dolor físico". A pesar de ello Black (1958 y 1996), atento descodificador de claves ocultas en las obras literarias de Carroll, parece haber pasado por alto en su fino y pormenorizado análisis[77] las resonancias del pasaje citado por nosotros. Así, de ser aceptada nuestra conjetura, y ante la desaparición (o destrucción) de parte de los diarios de Carroll que databan de esta época, se podría anticipar el interés de Dodgson por el tema electoral bastantes años antes de la publicación de sus panfletos sobre votaciones, que vieron la luz (aunque no todos ellos se difundieron públicamente) a partir de 1873.

---

[76] Para una lectura de los temas lógico-matemáticos que aparecen en los libros de Alicia, la referencia obligada es *The Annotated Alicia. The Definitive Edition* (Carroll, L. – Gardner, M. (2000)). Véase también Black (1958 y 1996).

[77] Como veremos, la labor de Black en el desarrollo de la TES es de una importancia incuestionable. Sin embargo, alguno de sus trabajos sobre Carroll no se han visto libres de crítica.

Según indica Cohen [1995] (1998, p. 508) en su biografía de Carroll, ya desde 1872 (o antes incluso, tal como hemos señalado) “su arraigado sentido de equidad le llevó a buscar fórmulas para mejorar los sistemas de votación, primero en su propio College, luego en el Parlamento, y finalmente en el mundo, y publicó sobre el tema al menos ocho artículos sueltos, así como varias cartas a los periódicos”. Habida cuenta de que, en este corpus, los últimos trabajos hacen referencia al tema de la representación proporcional, centraremos nuestra atención en los primeros opúsculos, a saber: “A discussion of the various methods of procedure in conducting elections” (Dodgson, 1873), “Suggestions as to the best method of taking votes, where more than two issues are to be voted on” (Dodsgon, 1874) y “A method of taking votes on more than two issues” (Dodgson, 1876).

El primero de estos trabajos, de estilo un tanto apresurado, contiene secciones al completo que podrían haber suscrito Morales, Borda o el mismo Condorcet, pero que Carroll desarrolló independientemente[78]. Como los autores anteriores, también hace un repaso de los distintos métodos de votación y analiza sus virtudes y defectos. Se manifiesta claramente en contra de los métodos tradicionales (particularmente de pluralidad con o sin eliminación) y, es al proponer otros sistemas cuando aparece de nuevo, si bien de forma aún latente y no explícita, la vieja polémica entre los autores franceses (Dodgson, 1873, case ß). Es así como Carroll redescubre tanto la paradoja del voto como el método de Borda (sin denominarlo con este nombre, claro está). Y es este procedimiento, al que Dodgson se refiere como una variante del “method of marks”[79], el propugnado por su idoneidad al concluir el opúsculo, si bien

[78] Black (1958, pp. 193 – 194) comprobó que los ejemplares donde se encontraban los textos de Borda y Condorcet en la Universidad de Oxford no habían podido ser consultados por Carroll, pues permanecían intonsos. De hecho, tal como señalan McLean – McMillan – Monroe (1995, p.112), aún hoy en día las páginas de estos ejemplares se preservan sin haber sido cortadas, a modo de reliquia carrolliana.

[79] En Dodgson (1873) “method of marks” es lo que modernamente se conoce como “cumulative voting”: cada agente dispone de un número de votos igual al de candidatos, que puede repartir entre éstos como desee.

nuestro autor incorpora una sutil variante: tratar el caso de “no elección” como si de un candidato más se tratara.

Es interesante señalar que también Carroll, como en su día Morales, se manifiesta con casi idénticas palabras, desconocedor de si ha tenido predecesores: “Concluyo describiendo un método (si es o no nuevo, lo ignoro) [...].” Así mismo, en lo referente a la aceptación de este opúsculo, parece ser que Dodgson tuvo un éxito parcial: tal sistema de votación fue utilizado al menos una vez en el Christ Church College, pero fue pronto abandonado. Tal vez ello se debiera a que Carroll constató algo a lo que ya aludimos al tratar la polémica Borda *versus* Condorcet: que puede darse el caso de que la regla de Borda no seleccione el ganador de Condorcet aun cuando éste exista[80].

El segundo panfleto es apenas un esbozo en el que Dodgson (1874), como anteriormente Daunou (1803), también fue derivando desde su recomendación a favor del método de Borda hacia un método que seleccione al ganador de Condorcet, caso de existir. Para ello, Dodgson (1874) propone un procedimiento híbrido que preconiza el que años después postularía Black (1958, p. 66): se trataría de elegir el ganador de Condorcet, cuando lo haya; y únicamente en caso contrario aplicar la variante del método de Borda que Carroll introdujo en su anterior opúsculo.

El último panfleto al que haremos referencia (Dodgson (1876)) constituye una revisión del trabajo anterior. Carroll, quien como el Dodo de *Alicia* habría hecho “profundas cavilaciones” en torno a un tema que, según Cohen [1995] (1997, p. 509) “lo tenía esclavizado”, ya habla explícitamente de “ciclos” y “mayorías cíclicas”, tal como hemos señalado. Y explicita un nuevo método, al que hoy en día se refiere la literatura como método de Dodgson: de nuevo, si hay un ganador de Condorcet, elíjase éste. Pero ahora, si existen ciclos, Dodgson (1876) propone que se seleccione el candidato que más se aproxime,

[80] Como es usual en la literatura, nos referiremos a este hecho como “inconsistencia de Condorcet” del método de Borda.

para una cierta métrica que no detallaremos aquí, a ese candidato ideal inexistente.

La propuesta de Carroll, muy parecida a la de Kemeny (1959), ha sido recientemente analizada en relación con esta última por Ratliff (2001). No obstante, en su propia época, el trabajo sobre votaciones en comités de Carroll parece haber alcanzado un interés sólo restringido, salvo alguna excepción, a su círculo de Oxford (tal vez debido a su peculiar idiosincrasia), por lo que fue abandonándolo progresivamente. No ocurrió así, sin embargo, en lo referente a los sistemas de representación proporcional, o a la organización de torneos, temas en los que también hizo significativos avances en la década de los 80 del siglo XIX, aunque son ajenos al tema específico de esta memoria.

Por nuestra parte, a pesar de que la cita que hemos traído a colación de forma recurrente pudiera sugerir lo contrario, estamos lejos de caer en la tentación de reafirmar el carácter excéntrico de Carroll a expensas de minusvalorar el mérito intrínseco de la obra electoral de Dodgson. Desde una perspectiva actual, tras los trabajos de Black (1958 y 1996) y McLean – Urken (1995), Carroll merece algo más que un lugar anecdótico en la historia de la TES prearrowiana. De hecho, en tal contexto, Black (1958, p. 212) no ha dudado en situar la importancia de Dodgson en un lugar que sólo cede en importancia al de Condorcet.

1.3.2 Edward John Nanson y la regla de Borda con eliminación

El arraigado aislacionismo de los británicos ha tenido en ocasiones consecuencias perniciosas en la evolución del pensamiento científico. Así, por ejemplo, en la génesis del cálculo infinitesimal la postura de secretismo de Newton respecto de sus colegas continentales (que contrasta singularmente con la actitud más comunicativa de Leibniz) supuso una rémora en el desarrollo de la Matemática. Algo parecido ha ocurrido con la TES: tal vez si las fecundas intuiciones de Carroll acerca de las mayorías cíclicas hubiesen contado con más difusión por parte de su autor, no se habría producido un nuevo punto muerto en la historia de esta disciplina, en la que, como hemos visto hasta ahora y comprobaremos también en la presente sección, han existido redescubrimientos y desarrollos independientes, atribuibles en buena medida a la incomunicación de sus ideas seminales. Sin duda, tal situación se hubiera evitado si los problemas surgidos se hubieran debatido en el seno de una "comunidad científica internacional"[81].

Históricamente, uno de estos problemas de la TES relativo a la idoneidad de los procedimientos de votación ha sido (y tal vez siga siendo) el de encontrar un compromiso entre la incontestabilidad del enfoque de Condorcet (empañada, no obstante, por la posible presencia de ciclos) y la decisividad del método de Borda (que sortea tal situación mediante su mecanismo de puntuaciones). El conflicto es radical: tal como fue señalado por Condorcet (1785), puede darse el caso de existir un candidato que venza a todos sus oponentes en duelos por parejas, pero que no sea elegido mediante el método de Borda.

Ya el propio Condorcet trató de proponer métodos de votación que eludieran el problema de las mayorías cíclicas en aras de una deseable decisividad[82]. Así, por ejemplo, la denominada "regla de máximo acuerdo" ("maximum likelihood rule") fue formulada tácitamente por Condorcet, y ha sido modernamente retomada, de forma independiente, por Kemeny (1959), tal como ha puesto de manifiesto Young (1986). El matemático suizo Simon Lhulier (1750 – 1840) también hizo avances significativos al implementar de forma efectiva el enfoque de Condorcet (un procedimiento inspirado en las ideas de éste fue utilizado durante algún tiempo en Ginebra). Por su parte, como hemos expuesto en la sección anterior, Carroll trató en un principio de conciliar los enfoques de Borda y Condorcet mediante un método híbrido, con criterio lexicográfico, antes de diseñar el método de Dodgson que, como hemos

[81] A esta misma conclusión llegan McLean – Urken (1995) tras su exhaustiva exposición de la intermitente historia de la TES.
[82] A este respecto, véase Nurmi (1999, pp. 15 y ss.).

señalado, está también muy relacionado con el de Kemeny (y por tanto con ideas originales de Condorcet). En esta línea, el siguiente paso se debe a Edward John Nanson (1850 – 1936), nacido y educado en Inglaterra, que llegó a ser fellow del Trinity College de Cambridge, pero que en 1875 emigró a Australia, donde fue profesor de Matemáticas en la Universidad de Melbourne y escribió el notable ensayo "Methods of election" (Nanson (1882)). Fue de nuevo Black (1958, pp. 186 – 188) quien llamó la atención sobre este trabajo, aunque un análisis más detallado, así como una edición comentada del mismo, se pueden encontrar en McLean – Urken (1995, pp. 57 – 60 y 321 – 359).

Nanson (1882), quien había leído directamente algunos de los escritos de Condorcet, da por supuesto el criterio de éste como *desideratum* de una elección idónea, lo que le lleva a rechazar, entre otros, los procedimientos de pluralidad, Borda, y el método de segundas vueltas ("french runoff system"), si bien estos dos últimos nunca seleccionarían un "perdedor de Condorcet" (candidato que es vencido por todos sus oponentes en duelos por parejas).

Así mismo, Nanson (1882) se arroga como mérito el descubrimiento la inconsistencia de Condorcet de la regla de Borda (algo de lo que, además de Condorcet y Daunou, tal vez Carroll fue consciente, como ya hemos señalado). También apunta un hecho del que ya Borda y Morales tenían constancia: si el número de candidatos es al menos tan grande como el de votantes, el método de pluralidad sólo garantiza la selección del ganador de Borda en el caso de unanimidad. Y de la misma manera que Daunou (1803), Nanson (1882) comenta que este hecho debiera haber llevado a Borda a cuestionar su propio método. Así mismo, también señala (como Morales (1797)) la posibilidad de voto estratégico en el método de Borda, extendiendo este análisis al método de segundas vueltas.

Nanson (1882) trata también en su ensayo el problema de la existencia de ciclos y el problema de indecisividad que suponen. En este sentido, su mayor aportación consiste en el diseño de un procedimiento de Borda con eliminación recursiva, que en cada fase de su aplicación elimina la(s) alternativas(s) peor puntuada(s) (o, equivalentemente, las alternativas que no alcanzan la puntuación media total). Con esta simple variante del procedimiento clásico de Borda, la regla de Nanson adquiere un carácter Condorcet-consistente[83] del que carece el procedimiento que era entonces (y en buena medida sigue siendo) regularmente empleado: el de pluralidad (Nanson incluye también en su estudio la variante de pluralidad con eliminación o método de Hare[84], al que recusa por la misma razón).

Aunque el relevante ensayo de Nanson fue integrado en 1907, años después de su redacción, en un informe comisionado por el gobierno británico sobre los métodos de votación empleados en las colonias bajo su influencia, pasó prácticamente desapercibido y no alcanzó la resonancia que sin duda merece, hasta la reseña de Black (1958). McLean – Urken (1995, p. 60) han visto en este hecho una muestra de la profunda brecha existente entre la discusión teórica de la TES y la práctica política. Esta falta de entendimiento es vigente aún en nuestros días, toda vez que algunas de las denuncias de los autores cuyas ideas hemos venido exponiendo sobre los sistemas de votación al uso, a pesar de su palmaria evidencia, no han sido aún asumidas[85].

1.4 La regla de Borda en el siglo XX

A partir del trabajo de Nanson, que cierra el libro de McLean – Urken sobre los “clásicos de la elección social”, se abre otra brecha (menos profunda que las anteriores) de unos 50 años en la evolución de la TES, que se cierra definitivamente con el despegue de la disciplina debido a los trabajos de Black

[83] Con esta expresión, sobre la que incidiremos en el Capítulo 2, se indica que el método de Nanson, a diferencia de la regla de Borda, selecciona al ganador de Condorcet, caso de existir. La razón de ello estriba en que el perdedor por el método de Borda (que es eliminado en cada una de las etapas sucesivas) no puede ser ganador de Condorcet, algo que ya aparece en Daunou (1803).

[84] Sobre el método de Hare (o de pluralidad con eliminaciones sucesivas), véase, por ejemplo, Nurmi (1987, pp. 54 y ss.).

[85] A este respecto, véase García Lapresta – Martínez Panero (2000, pp. 94 – 95), trabajo al que ya hemos aludido en conexión con las críticas de Morales a los procedimientos usuales de votación.

y Arrow[86], a mediados de los años 50 del siglo pasado. Más concretamente, es usual considerar como año 0 de la TES en un sentido moderno el de publicación de la obra seminal de Kenneth J. Arrow (nacido en 1921 y aún hoy en activo) *Social Choice and Individual Values*, cuya primera edición data de 1951.

En lo que a la regla de Borda se refiere, ha sido fundamental como referencia recurrente, Grazia (1953), traducción al inglés, comentada, de Borda (1784). A partir de este artículo muchos autores tuvieron un conocimiento de primera mano acerca de la regla de Borda, lo que sin duda ha propiciado la extensa literatura sobre el método desde entonces hasta nuestros días.

1.4.1 Duncan Black y el criterio de Condorcet complementado con la regla de Borda

Buena parte de la investigación dispersa que conforma la historia de la TES antes de Arrow, a la que nos hemos referido parcialmente en conexión con la regla de Borda, nos es hoy conocida gracias a Duncan Black (1908 – 1991). Se dice a veces, a manera de *boutade*, que la única forma de ser original es volver a los orígenes. En cierta forma la figura de Black constituye un ejemplo que ilustra dicho principio, ya que los temas clave de su propia investigación estuvieron penetrados de aspectos históricos que Black redescubrió y asumió en una síntesis unificadora. Por tales razones, Black es a menudo considerado co-fundador de la moderna TES junto con Arrow, siendo unánimemente aceptado que fue este último, no obstante, quien impulsó la disciplina de manera más firme y radical.

Black recibió una sólida formación en una doble vertiente, físico-matemática y político-económica, en la Universidad de Glasgow, desempeñando posteriormente el núcleo de su carrera académica (1934 – 1968) en el

[86] Un interesante enfoque de este arranque en el entorno de los años de publicación de las obras de Black y Arrow, con un hálito optimista de lo que sería la evolución posterior de la TES,

University College of North Walles, en Bangor. Desde los años 40 del pasado siglo, su objetivo prioritario fue desarrollar una “Ciencia Pura de la Política” (“Pure Science of Politics”), que modelizase la actuación de los votantes en comités de la misma manera que la Ciencia Económica lo hace con los consumidores en los mercados. Ésta es también la idea directriz de *An Economic Theory of Democracy* de Downs (1957), que popularizó el principal logro de Black en esta época, el teorema del votante mediano, por lo que a veces el resultado se atribuye, injustamente, a Downs.

El teorema del votante mediano (Black (1948, 1958, pp. 14 y ss.)) establece que, si las preferencias de los agentes son unimodales (es decir, con un tipo de ordenación de las alternativas para cada agente análogo al modelo izquierda-derecha en las opciones políticas), entonces la alternativa más preferida en media por los votantes (“the median of the voters’ most preferred alternatives”) es siempre ganadora de Condorcet y existe un votante mediano (“median voter”) que representa a todo el comité en el que está integrado (del mismo modo que, en la Física, el centro de gravedad de un cuerpo representa toda su masa como si estuviese concentrada en un punto). De esta manera, Black retomaba casi doscientos años después de Condorcet la paradoja del voto como algo más que una mera curiosidad matemática y conseguía establecer pautas para eludirla, aunque quedaba pendiente el tema de la indecisividad propiciado por el criterio de Condorcet bajo preferencias de los agentes más generales. Tal como afirman Campbell – Tullock (1965, p. 853) “aunque Black no fue el primero en descubrir este fenómeno [la paradoja del voto], su trabajo es fundacional de toda la investigación posterior sobre el problema. En cuanto a la de sus principales predecesores, Condorcet y Carroll, ésta no tuvo impacto alguno en la comunidad intelectual de su tiempo y había sido completamente olvidada. El trabajo de estos autores es hoy conocido únicamente porque Black, después de descubrir el fenómeno mismo, también hizo lo propio con sus predecesores.”

puede verse en Riker (1961).

Las ideas que Black fue desarrollando y publicando (a veces con fortuna adversa[87]) durante los años 40 y 50 del siglo pasado cristalizaron en *The Theory of Committees and Elections* (Black (1958)). Tampoco esta obra, hoy unánimemente reconocida como clásica, se vio libre de críticas iniciales hasta el artículo reivindicador de Riker (1961). El libro de Black consta de dos secciones: una primera, que lleva como epígrafe el título del propio libro, y la segunda, con investigación de tipo histórico. En ambas partes (así como en algún artículo posterior, con enfoque utilitarista[88] (Black, 1976)) se trata acerca de la regla de Borda, que Black utilizará como piedra de toque cuando el criterio de Condorcet no se muestre decisivo.

Black (1958, pp. 59 y ss.) extiende el método clásico de Borda a un procedimiento "ajustado" al caso en que haya indiferencia entre alternativas por parte de los votantes. Justifica el criterio de Borda por elegir la alternativa que, en media, ocupa el lugar más alto en las preferencias de los agentes, y concluye declarando su propio criterio (Black (1958, p. 66), tal vez inspirado por Carroll, que no es otro que dar primacía a Condorcet frente a Borda: "el criterio de Condorcet debería ser el primero en ser usado para seleccionar el candidato de la mayoría, si éste existe; y si no existe tal candidato de la mayoría, ese candidato debería ser escogido como aquél que recibe una mayor puntuación Borda".

En cuanto a las aportaciones de Black a la historia de los orígenes de la TES y de la regla de Borda en particular, no cabe hacer alusión por nuestra parte más allá de las consignadas recurrentemente en las secciones anteriores del presente capítulo, en el que Black ha sido una referencia fundamental.

[87] Sobre las vicisitudes editoriales de Black y sus problemas para ser reconocido, así como acerca de la polémica Black – Arrow (que fue para los orígenes de la TES el análogo a la polémica Newton – Leibniz para los del Cálculo Infinitesimal), véase el prólogo de McLean – McMillan – Monroe (1998), obra que incorpora una segunda edición, revisada, de Black (1958).

[88] Este utilitarismo de la regla de Borda, que ya estaba implícito en los trabajos fundacionales sobre el método, ha sido modernamente retomado en Black (1958 y 1976), Sugden (1981, pp. 140 – 145) y Marchant (2000).

Citaremos a Grofman (1981 y 1987) para concluir esta reseña de la vida y obra de Black, quien afirma que “la gran fuerza de Black radica en su doble labor de sintetizador y pionero. Redescubrió y reinterpretó para la ciencia social contemporánea las atractivas intuiciones, con implicaciones probabilísticas y en la moderna teoría de juegos, de teóricos del pasado tales como Dodgson (Lewis Carroll). Borda y Condorcet [...]; a la vez, él mismo desarrolló ideas seminales, como la de unimodalidad, la importancia del votante mediano supuestas preferencias ordinales y la noción de equilibro en un juego espacial de votación.[...]. El trabajo de lo que, después de Black se ha denominado teoría de comités y elecciones ha sido uno de los pilares sobre los que descansa la teoría contemporánea de la elección pública”.

1.4.2 Desarrollos ulteriores de la regla de Borda hasta la actualidad

Como hemos puesto de manifiesto hasta ahora, la regla de Borda ha sido un constante *leitmotiv* en el desarrollo de la TES. La vigencia del método no ha decaído en absoluto, y en esta sección constataremos su pujanza desde un punto de vista de investigación teórica durante la segunda mitad del siglo XX. Paralelamente veremos también que, desde una vertiente más pragmática, la implementación del método de Borda no ha estado todo lo extendida que pudiera pensarse a la vista de todos los avales teóricos existentes a su favor. Esta situación contrasta con el uso recurrente de otros métodos manifiestamente peores y de larga tradición, cuyo paradigma es el de pluralidad; o con la puesta en práctica cada vez más extendida de métodos emergentes, como el de voto aprobatorio, en pugna con el de Borda por conseguir el marchamo de “mejor procedimiento de votación” [89].

[89] Empleamos esta expresión, que Saari (1995, p. 12) adjudica a la regla de Borda, con las debidas reservas, ya que los teoremas de imposibilidad de Arrow y de Gibbard – Satterhwaite implican la inexistencia de un procedimiento de votación ideal en todos los sentidos. Ésta es la razón por la que se ha hablado de la búsqueda del método de votación óptimo como el “Santo Grial” de la TES. Sobre estos aspectos véase Niemi – Riker [1976] (1991).

A diferencia del célebre teorema de Arrow, de carácter negativo[90], uno de los primeros resultados con los que se consolidó la moderna TES, éste con un cariz constructivo, fue el teorema de May (1952) de caracterización axiomática de la mayoría simple. No es extraño que se tratara de conseguir algo semejante para la regla de Borda. Fueron Gärdenfors (1973), Young (1974) y Fine – Fine (1974) los primeros en hacerlo, abriendo el camino de otros resultados similares (y en ocasiones más accesibles) debidos a Hansson – Sahlquist (1976), Fishburn – Geherlein (1976), Nitzan – Rubinstein (1981), Saari (1990), Debord (1992) y Van Newenhizen (1992), entre otros. Es necesario constatar que Nitzan – Rubinstein (1981) señalan explícitamente en su caracterización que las preferencias de los agentes no tienen por qué ser necesariamente transitivas. Como veremos, ello entraña un diseño del método de Borda cuestionable en un sentido que se detallará en el siguiente capítulo, por lo que se considerarán diversas formas de transitividad como hipótesis de coherencia individual que nosotros sí asumiremos en nuestro enfoque de la regla de Borda y sus extensiones.

También desde los orígenes mismos de la moderna TES, la regla de Borda ha inspirado otros procedimientos de votación que, a su vez, vienen contando desde entonces con una extensa literatura propia. Así, por ejemplo, Copeland (1951), suponiendo que los agentes ordenaban linealmente las alternativas, consideró un procedimiento de votación con puntuaciones tipo Borda que asignaba a cada alternativa el número de las que son mejores menos el de las que son peores para el colectivo de dichos agentes (véase Saari – Merlin (1996)). Por otro lado, también Kemeny (1959) formuló una regla con argumentos similares a los de Borda (y, tal como hemos señalado, con ideas que ya aparecían en Condorcet; cf. Young (1995, pp. 61 y ss.)).

[90] En su discurso de recepción del Premio Nobel de Economía, Sen [1998] (2000) alude al “pesimismo constructivo” del teorema y señala que es un resultado “de una elegancia y energía asombrosas”.

Se han diseñado así mismo variantes de la regla de Borda que tratan de conjurar ciertas debilidades del método, como son su vulnerabilidad a estrategias de voto (señalada desde los tiempos de Borda y Morales) y el incumplimiento del principio de independencia de alternativas irrelevantes considerado por Arrow (algo que, como ya hemos indicado, fue puesto de manifiesto ya por Condorcet). Para penalizar la manipulabilidad, Dummett (1998) ha introducido dos variantes al método de Borda clásico, denominados métodos de Borda revisado y ajustado[91] y, en esta misma vía, muy recientemente, Heckelman (2003) ha postulado una "regla de Borda probabilística". Por su parte, Sen (1977) consideró unas reglas de Borda en sentido amplio y restringido ("narrow and broad Borda count") en conexión con el hecho de que el método de Borda, como todos los procedimientos basados en puntuaciones derivadas de las ordenaciones individuales de las alternativas por parte de los agentes ("scoring rules"), es necesariamente vulnerable a la inserción o eliminación de "alternativas irrelevantes" que no debieran interferir cuando se tratase sola y exclusivamente de la consideración entre dos alternativas dadas.

A comienzos del siglo XX salieron a la luz algunas paradojas que provocaron una importante crisis de los fundamentos de las Matemáticas. Ante esta situación, Russell [1959] (1976, p. 78) señala que "Poincaré, a quien desagradaba la lógica matemática, y que la había acusado de estéril, exclamó con regocijo: *ya no es estéril; engendra contradicciones*"[92]. Sin embargo, la controversia suscitada, a la que se unieron otros matemáticos, filósofos y lógicos, ha resultado ser fértil y, en buena medida, orientadora de la evolución de las Matemáticas desde entonces. Como hemos visto, algo parecido ocurrió

[91] Sobre la manipulabilidad del método de Borda y reglas afines, véase también Sen (1984).

[92] "La logistique n'est plus stérile; elle engendre la contradiction". Así aparece la cita de Poincaré en el prólogo a la segunda edición de *The Principles of Mathematics* (Russell [1937] (1973)), donde se describen algunas de las paradojas a las que nos referimos, relacionadas con la entonces emergente Teoría de Conjuntos y debidas a Burali-Forti, Cantor y al propio Russell.

en los orígenes de la TES. También en este contexto hubo paradojas[93] (además de la célebre paradoja del voto, a la que ya nos hemos referido) y un antagonismo Borda – Condorcet. Así mismo, lejos de estar agotada la polémica, los resultados derivados de ella han conformado en gran parte la trayectoria de la TES hasta nuestros días. Como han señalado Young – Levenglick (1978), "el desafío de combinar la regularidad del enfoque de Borda con el respeto al principio de Condorcet [constituye] un problema de larga tradición en la teoría de las elecciones". En la búsqueda de este compromiso se han propuesto diversas vías de aproximación entre ambos enfoques: Fishburn (1977), Young (1977 y 1988), Van Newenhizen (1992) y Truchon – Le Breton (1997), entre otros.

Otra polémica a la que ya hemos aludido, abierta ésta desde hace relativamente poco tiempo en comparación con la anterior, es acerca de la primacía del método de Borda (posición defendida por Saari y Dummett, entre otros) frente a la idoneidad del procedimiento de voto aprobatorio[94] (postura defendida por sus máximos impulsores, Brams y Fishburn). Una exposición argumentada del conflicto y una propuesta de conciliación mediante un enfoque "fuzzy" puede verse en García Lapresta – Martínez Panero (2002a). Es oportuno señalar que una regla de Borda basada en preferencias graduales similar a la considerada en el trabajo anterior (y retomada en el Capítulo 3 de la presente memoria) ya había sido propuesta por Marchant (1996a, 1996b y 2000) en conexión con el método de decisión multicriterio PROMETHEE. Nuestro ámbito, sin embargo, ha sido el de la toma de decisiones colectivas, y trascendiendo el estrecho marco que impone la regla de Borda en su enfoque clásico, hemos tratado de llevar más allá, si cabe, alguna de las profundas intuiciones de Morales a las que ya nos hemos referido, como su idea de que más que contar la opinión, hay

[93] Véase Nurmi (1999, pp. 11 – 30).

[94] Este procedimiento, en el que los agentes votan o "aprueban" a tantas alternativas como consideren oportuno, es de reciente tradición (desde finales de los años 70 del siglo pasado) aunque, como la regla de Borda, también este sistema tuvo antecedentes en el pasado, pues fue esencialmente el usado para elegir al Dux de Venecia. Véanse a este respecto Lines (1986) y McLean – Urken (1995, p. 22).

que pesarla (Morales (1797, p. 8)). Tal idea está en el espíritu de las variantes de la regla de Borda de las que hemos tratado, además de en el trabajo citado, en García Lapresta – Martínez Panero (2000 y 2002b), así como en García Lapresta – Lazzari – Martínez Panero (2001).

Los citados Saari y Dummett no han escatimado elogios acerca de las bondades de la regla de Borda en lo que a su aplicabilidad de refiere. Así, ya se ha indicado que Saari (1995, p. 19) la considera óptima y ha dedicado a su estudio relevantes trabajos (véase, por ejemplo, Saari (1990)). Por su parte Dummett (1998, p. 290) considera la regla de Borda como la mejor herramienta para reconciliar diferentes juicios y como el método más equitativo para determinar un resultado a partir de deseos divergentes[95]. Además, Black (1958, 1976), Mueller [1979] (1984) y Straffin Jr. (1980), entre otros, han señalado que la regla de Borda selecciona la alternativa que, en promedio, ocupa una más alta consideración en las preferencias de los agentes. En ocasiones, este hecho se ha interpretado como un argumento en contra de la regla de Borda, por permitir la elección de "candidatos mediocres", acusación de la que se defiende Dummett (1984, pp. 176 y ss.). Cabe señalar que el método de Borda se ve también avalado por lo que Pattanaik (2002, pp. 384 y 385) denomina "una justificación bayesiana" del mismo, debida a Young (1988).

A la vista de las consideraciones anteriores, resulta extraña la diferencia sustancial que existe entre la difusión cada vez más extendida del procedimiento de voto aprobatorio en relación con la relativamente poco utilizada regla de Borda. Bien es cierto que existe un "De Borda Institute" con una serie de publicaciones, software y página web (www.deborda.com) dedicados a la promoción del método. Puestos en contacto con dicho organismo para consultar acerca de la puesta en práctica del procedimiento (más allá de la variante que se emplea en el conocido concurso musical de

[95] Estas ideas de Dummett (1998) tienen su correlato en el enfoque métrico que aparece en Cook – Seiford (1982), donde la noción básica es la de consenso obtenido mediante la

Eurovisión) fuimos informados por Peter Emerson, presidente del citado organismo y autor de un libro militante en pro de la regla de Borda (Emerson (1998)), de que salvo en alguna entidad privada, sólo ha habido constancia de su uso en política por parte del Partido Verde irlandés. Por nuestra parte, hemos tenido noticia de que se utiliza para elegir algunos de los miembros del parlamento en Eslovenia. Tal vez estas escasas muestras preconicen el deseo de Young (1997, p. 200): "I predict that the time will come when […] Borda's rule will be considered a standard tool for legislative and committee decisión making".

minimización del desacuerdo. Por otro lado, Biswas (1994) ha argumentado razones de consistencia y eficiencia en relación con el método de Borda.

Bibliografía del Capítulo 1

Aguilar Piñal, F. (1989): *Bibliografía de Autores Españoles del Siglo XVIII*, Tomo V. Instituto de Filología – CSIC, Madrid.

Aguilar Piñal, F. (ed.) (1996): *Historia Literaria de España en el Siglo XVIII*. Editorial Trotta – CSIC, Madrid.

Alder, K. (2003): *La Medida de Todas las Cosas.* Taurus, Madrid.

Arriaza, J.B de (1810): *Poesías Patrióticas*. Imprenta de T. Bensley, Londres. [Edición en microficha publicada por Pentalfa Ediciones, Oviedo, 1989].

Arrow, K.J. (1974): *Elección Social y Valores Individuales*. Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Traducción de Eusebio Aparicio Auñón de la segunda edición, corregida, en inglés, 1963: *Social Choice and Individual Values*. Introducción de Andreu Mas Colell. Primera edición, 1951].

Arrow, K.J. (1993): "Mi vida como economista", en Breit, W. – Spencer, R.W. (eds.): *Mi vida como Economista*. Colegio de Economistas de Madrid – Celeste Ediciones, Madrid, pp. 69 – 87. [Traducción de Antonio Merino y Carmen Vara de la segunda edición en inglés, 1990].

Artola, M. (1989): *Los Afrancesados*. Alianza Editorial, Madrid.

Basset Jr., G.W. – Perski, J. (1999): "Robust voting". *Public Choice* 99, pp. 299 – 310.

Berazaluce, A.M. (1983): *Sebastián de Miñano y Bedoya (1779 – 1845)*. EUNSA, Pamplona.

Biswas, T. (1994): "Efficiency and consistency in group decisions". *Public Choice* 80, pp. 23 – 34.

Black, D. (1948): "On the rationale of group decision-making". *Journal of Political Economy* 56, pp. 23 – 34.

Black, D. (1958): *The Theory of Committees and Elections*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Black, D. (1976): "Partial justification of the Borda count". *Public Choice* 28, pp. 1 – 16.

Black, D. (1991): "Arrow's work and the normative theory of committees". *Journal of Theoretical Politics* 3, pp. 259 – 276.

Black, D. (1996): "The Life and Logic of Lewis Carroll", en McLean, I. – Mcmillan, A. – Monroe, B.L. (eds.): *A Mathematical Approach to Proportional Representation. Duncan Black on Lewis Carroll*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts.

Blanco White, J. (1983): *Cartas de España*. Alianza Editorial, Madrid. [Traducción de Antonio Garnica de la obra original publicada en inglés, 1822. Introducción de Vicente Llorens].

Borda, J.C. de (1784): "Mémoire sur les élections au scrutin", *Historie de l'Academie Royale des Sciences*, París. [Se reproduce, en inglés, en Grazia (1953) y en McLean – Urken (1995, pp. 81 – 89)].

Buchanan, J.M. – Tullock, G. (1980): *El Cálculo del Consenso*. Espasa – Calpe, Madrid. [Traducción de Javier Salinas de la primera edición en inglés, 1962].

Bury, J. (1971): *La Idea de Progreso*. Alianza Editorial, Madrid. [Traducción de Elías Díaz y Julio Rodríguez Aramberri de la edición original en inglés, 1920].

Campbell, C.D. – Tullock, G. (1965): "A measure of the importance of cyclical majorities". *Economic Journal* 75, pp. 853 – 857.

Carroll, L. (1986): *El Juego de la Lógica*. Alianza Editorial, Madrid. [Traducción y prólogo de Alfredo Deaño de la obra original en inglés, 1896].

Carroll, L. (1988): *Las Aventuras de Alicia (Alicia en el País de las Maravillas. A través del Espejo y lo que Alicia Encontró Allí).* Editorial Anaya, Madrid. [Traducción y notas de Ramón Buckley de las ediciones originales, 1865 y 1871].

Carroll, L. – Gardner, M. (2000): *The Annotated Alicia. The Definitive Edition.* Allen Lane – The Penguin Press, Londres. [Una edición anterior de esta obra ha sido traducida al castellano por Francisco Torres Oliver para editorial Akal, 1999].

Cohen, (1998): *Lewis Carroll*. Anagrama, Barcelona. [Traducción de Juan Antonio Molina Foix de la obra original en inglés, 1995].

Colomer, J.M. (2001): *Instituciones Políticas.* Ariel, Barcelona.

Colomer, J.M. – McLean, I. (1998): "Electing popes: approval balloting and qualified-majority rule". *Journal of Interdisciplinary History* 1, pp. 1 – 22.

Condorcet, J.A.M.N.C., marqués de (1785): *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix,* L'Imprimierie Royale, París. [Se reproducen fragmentos escogidos, en inglés, en McLean – Sommerlad (1991) y en McLean – Urken (1995, pp. 91 – 112)].

Condorcet, J.A.M.N.C., marqués de (1980): *Bosquejo de un Cuadro Histórico de los Progresos del Espíritu Humano*. Editora Nacional, Madrid.

[Traducción de Marcial Suárez de la edición original en francés, 1795. Edición de Andrés Torres del Moral].

Cook, W.D. – Seiford, L.M. (1982): "On the Borda – Kendall consensus method for priority ranking problems". *Management Science* 28, pp. 621 – 637.

Copeland, A.H. (1951): "A 'reasonable' social welfare function", *University of Michigan Seminar on Applications of Mathematics to the Social Sciences*. University of Muchigan, Ann Arbor.

Daunou, P.C.F. (1803): *Mémoire sur les Élections au Scrutin*. Baudouin, imprimeur de l'Institut National. París. [Se reproduce, en inglés, en McLean – Urken (1995, pp. 237 –276)].

Debord, B. (1992): "An axiomatic characterization of Borda's *k*-choice function". *Social Choice and Welfare* 9, pp. 337 – 343.

Defourneaux, M. (1973): *Inquisición y Censura de Libros en la España del Siglo XVIII*. Taurus, Madrid. [Traducción de J. Ignacio Tellechea de la edición original en francés, 1963].

Dodgson C.L. (1873): "A discussion of the various methods of procedure in conducting elections". Edición privada, Oxford. [Se reproduce en Black (1958, pp. 214 – 222) y también en McLean – Urken (1995, pp. 279 – 286)].

Dodgson C.L. (1874): "Suggestions as to the best method of taking votes, where more than two issues are to be voted on". Edición privada, Oxford. [Se reproduce en Black (1958, pp. 222 – 224) y también en McLean – Urken (1995, pp. 287 – 288)].

Dodgson, C.L. (1876): "A method of taking votes on more than two issues". Edición privada, Oxford. [Se reproduce en Black (1958, pp. 224 – 234) y también en McLean – Urken (1995, pp. 288 – 297)].

Downs, A. (1973): *Teoría Económica de la Democracia*. Aguilar, Madrid. [Traducción del inglés de Luis Adolfo Martín Merino de la edición publicada en Nueva York, 1971; edición original, 1957].

Dummett, M. (1984): *Voting Procedures*. Clarendon Press, Oxford.

Dummett, M. (1998): "The Borda count and agenda manipulation". *Social Choice and Welfare* 15, pp. 289 – 296.

Elorza, A. (1970): *La Ideología Liberal en la Ilustración Española*. Tecnos, Madrid.

Emerson, P.J. (1998): *Beyond the Tiranny of the Majority. Voting Methodologies in Decision-Making and Electoral Systems.* The De Borda Institute, Belfast.

Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo – Americana (Espasa), tomo XXXVI. Hijos de J. Espasa, Editores, Barcelona. [No figura fecha de impresión].

Enciclopedia Universal Micronet (1999). Edición en CD-ROM. [Parte de su información figura en www.enciclonet.com].

Euler, L. (1990): *Cartas a una Princesa de Alemania sobre diversos Temas de Física y Filosofía*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza. [Edición y traducción del francés de Carlos Mínguez Pérez, a partir de la *Opera Omnia* de Euler, que recoge los textos originales, 1768 y 1772].

Farquharson, R. (1969): *Theory of Voting*. Blackwell, Oxford.

Felsenthal, D.S. – Machover, M. (1992): "After two centuries, should Condorcet's voting procedure be implemented?". *Behavioral Science* 4, pp. 250 – 274.

Fernández García, F.R. – Fernández Chirino, E. (1999): "La teoría de votación y la 'Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las

Elecciones' del Dr. D. Joseph Isidoro Morales". *Epsilon* 45, pp. 295 – 310.

Fine, B. – Fine, K. (1974): "Social choice and individual ranking I". *Review of Economic Studies* 41, pp. 459 – 475.

Fishburn, P.C. (1977): "Condorcet social choice functions". *SIAM Journal on Applied Mathematics* 33, pp. 469 – 489.

Fishburn, P.C. – Gehrlein, W.V. (1976): "Borda's rule, positional voting and Condorcet's simple majority principle". *Public Choice* 28, pp. 79 – 88.

Forrest (1966): *La Democracia Griega. Trayectoria Política del 800 al 400 a. de J.C.* Ediciones Guadarrama, Madrid. [Traducción de Luis Gil de la edición original en inglés, 1966].

Freire López, A.M. (1983): *Índice Bibliográfico de la Colección Documental del Fraile.* Servicio Histórico Militar, Madrid.

García Lapresta, J.L. – Lazzari, L.L. – Martínez Panero, M. (2001): "A group decision making method using fuzzy triangular numbers", en Zopounidis, C. – Pardalos, P.M. – Baourakis, G.: *Fuzzy Sets in Management, Economics and Marketing*. World Scientific Publishers, Singapur, pp. 35 – 50.

García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2000): "Análisis de algunos sistemas de votación a partir de la obra del ilustrado José Isidoro Morales". *Hacienda Pública Española* 154, pp. 93 – 103.

García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2002a): "Borda count *versus* approval voting: A fuzzy approach". *Public Choice* 112, pp. 167 – 184.

García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2002b): "A fuzzy Borda count in multi-person decisión making", en Trzaskalik, T. – Michnik, J. (eds.):

Multiple Objective and Goal Programming. Recent Developments. Advances in Soft Computing, Springer Verlag, Berlín, pp. 46 – 60.

Gärdenfors, P. (1973): "Positionalist voting functions". *Theory and Decision* 4, pp. 1 – 24.

Gil Novales, A. (ed.) (en curso): *Diccionario Biográfico Español (1808 – 1833).*

Grazia, A. de (1953): "Mathematical derivation of an election system". *Isis* 44, pp. 42 – 51.

Grofman, B. (1981): "The Theory of Committees and Elections: The legacy of Duncan Black", en Tullock, G. (ed.): *Towards a Science of Politics: Essays in Honor of Duncan Black.* Public Choice Center – Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg.

Grofman, B. (1987): "Black, Duncan", en Eattwell, J. – Milgate, M. – Newman, P. (eds.): *The New Palgrave. A Dictionary of Economics.* McMillan Press, Londres – Stockton Press, Nueva York – Maruzen Company, Tokio.

Grofman B. – Feld, S. (1988): "Rousseau's General Will: a Condorcetian perspective". *American Political Science Review* 82, pp. 567 – 578.

Guilbaud, G.T. (1952): "Les théories de l'íntérêt général et le problème logique de l'agrégation. *Economie Appliquée* 5, pp. 501 – 584.

Hansson, B. – Sahlquist, H. (1976): "A proof technique for social choice with variable electorate". *Journal of Economic Theory* 13, pp. 193 – 300.

Heckelman, J.C. (2003): "Probabilistic Borda rule voting". *Social Choice and Welfare* 21, pp. 455 – 468.

Jovellanos, G.M. de (1992): *Memoria en Defensa de la Junta Central*, tomo I. Junta General del Principado de Asturias, Oviedo. [Edición anotada de José Miguel Caso a partir del original de 1810].

Juretschke, H. (1951): *Vida, Obra y Pensamiento de Alberto Lista*. Escuela de Historia Moderna – CSIC, Madrid.

Kamen, H. (1985): *La Inquisición Española*. Crítica, Barcelona. [Traducción de Gabriela Zayas de la segunda edición en inglés, 1979; existe tercera edición en inglés, 1998, editada en castellano por la misma editorial, 1999].

Kemeny, J. (1959): "Mathematics without numbers" *Daedalus* 88, pp. 571 – 591.

Lara Ródenas, M.J. de (2001): *José Isidoro Morales, un Matemático en la Corte de Carlos IV. Con la Edición Facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinión en las Elecciones y su Apéndice.* Universidad de Huelva, Huelva.

Lines, M. (1986): "Approval voting and strategic analysis: A Venetian example". *Theory and Decision* 20, pp. 155 – 172.

Lluch, E. (1989): "Condorcet et la diffusion de la 'Richesse des nations' en Espagne", en Crépel, P. – Gilain, C. (eds.): *Condorcet: Mathématicien, Économiste, Philosophe, Homme Politique.* Minerve, París.

López de Peñalver, J. (1992): *Escritos.* Instituto de Cooperación Iberoamericana – Quinto Centenario – Antoni Bosch, editor – Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Edición de Ernest Lluch de la obra original, 1799].

Maravall, J.A. (1991): *Estudios de la Historia del Pensamiento Español. Siglo XVIII.* Mondadori, Madrid.

Marchant, T (1996a): *Agrégation de relations valuées par la méthode de Borda en vue d'un rangement. Considérations axiomatiques.* Ph. D. Thesis, Université Libre de Bruxelles, Bruselas.

Marchant, T. (1996b): "Valued relations aggregation with the Borda method". *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 5, pp. 127 – 132.

Marchant, T. (2000): Does the Borda rule provide more than a ranking? *Social Choice and Welfare* 17, pp. 381 – 391.

Martínez Panero, M. (2001): "Las ideas ilustradas en la obra matemática de José Isidoro Morales", en Álvarez Lires, M. – Bugallo Rodríguez, A. – Fernández Álvarez, J.M. – Sisto Edreira, R. – Valle Pérez, X.C. (coords.): *Estudios de Historia das Ciencias e das Técnicas*, tomo II, pp. 1123 – 1131, Diputación Provincial da Pontevedra, Pontevedra.

Martínez Panero, M. – García Lapresta, J.L. (1999): "El matemático ilustrado José Isidoro Morales y sus aportaciones a la Teoría de la Elección Social". *Llull* 22, pp. 165–191.

Martínez Panero, M. – García Lapresta, J.L. (2003): *José Isidoro Morales, Precursor Ilustrado de la Teoría de la Elección Social: Edición Facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones (1797) y Apéndice (1805).* Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial. Universidad de Valladolid, Valladolid. Prólogo de Salvador Barberà.

Mascart, J. (2000): *La vie et les travaux du chevalier Jean-Charles de Borda (1733 – 1799). Épisodes de la vie scientifique au XVIII^e^ siècle.* Presses de l'Université de Paris – Sorbonne, París. [Edición facsímil de la obra original, Annales de l'Université de Lyon 2, 1919].

Massó, J. (2003): "Teoría de la Elección Social". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 3, pp. 633 – 636.

May, K.O. (1952): “A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision”. *Econometrica* 20, pp. 680 – 684.

McLean, I. (1995a): “The first golden age of social choice, 1784 – 1803”, en Barnett, W.A. – Moulin, H. – Salles, M. – Schofield, N.J. (eds.): *Social Choice, Welfare, and Ethics*. Cambridge University Press, Nueva York, pp. 13 – 33.

McLean, I. (1995b): “Independence of irrelevant alternatives before Arrow”. *Mathematical Social Sciences* 30, pp. 107 – 126.

McLean, I. – Hewitt, F. (eds.) (1994): *Condorcet: Foundations of Social Choice and Political Theory*. Edward Elgar, Aldershot – Brookfield.

McLean, I. – London, J. (1990): “The Borda and Condorcet principles: Three medieval applications”. *Social Choice and Welfare* 7, pp. 99 – 108.

McLean, I. – McMillan, A. – Monroe, B.L. (1995): “Duncan Black and Lewis Carroll”. *Journal of Theoretical Politics* 7, pp. 107 – 123.

McLean, I. – McMillan, A. – Monroe, B.L. (1998): *The Theory of Committees and Elections by Duncan Black. Committee Decisions with Complementary Valuation by Duncan Black and R.A. Newing*. *Revised Second Editions.* Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts. Prólogo de Ronald H. Coase.

McLean, I. – Sommerlad, F. (eds.) (1991): *The Political Theory of Condorcet, II.* University of Oxford Social Studies Faculty Centre. Working Paper 1, Oxford.

McLean, I. – Urken, A.B. (eds.) (1995): *Classics of Social Choice*. The University of Michigan Press, Ann Arbor.

Méndez Bejarano, M. (1994): *Diccionario de Escritores, Maestros y Oradores de Sevilla y su Actual Provincia*. Facsímil del original, 1922, editado por las librerías París-Valencia, Valencia.

Morales, J.I. (1797): *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta Real, Madrid.

Morales, J.I. (1805): *Apéndice á la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta de Sancha, Madrid.

Morales, J.I. (1829): *Essai sur le Calcul de l'Opinion dans les Élections*. Bachellier y Charles Béchet, libraires, París. [Traducción de D.A. Bourgeois de la obra original de 1797. Existe otra edición del mismo año: Imprimerie de J.B. Joly, Dole].

Moreno Alonso, M. (1989): *La Generación Española de 1808*. Alianza Editorial, Madrid.

Moreno Alonso, M. (1995): *Sevilla Napoleónica.* Alfar, Sevilla.

Moulin, H. – Young, H.P. (1987): "Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de", en Eattwell, J. – Milgate, M. – Newman, P. (eds.): *The New Palgrave. A Dictionary of Economics.* McMillan Press, Londres – Stockton Press, Nueva York – Maruzen Company, Tokio.

Mueller, D.C. (1979): *Public Choice.* Cambridge University Press, Londres. [Existe traducción al castellano de Juan Carlos Zapatero en Alianza Editorial, Madrid, 1984].

Nanson, E.J. (1883): "Methods of election". *Transactions and Proceedings of Royal Society of Victoria* 19, pp. 197 – 240. [Se reproduce en McLean – Urken (1995, pp. 321 – 359)].

Niemi, R.G. – Riker, W.H. (1991): "La elección de los sistemas de votación", en Colomer, J.M. (ed.): *Lecturas de Economía Política Positiva*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Traducción del artículo original en inglés, 1976].

Nitzan, S. – Rubinstein, A. (1981): "A further characterization of Borda ranking method". *Public Choice* 36, pp. 153 – 158.

Nurmi, H. (1987): *Comparing Voting Systems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Nurmi, H. (1999): *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*. Springer Verlag, Berlín – Heidelberg.

Ochoa, E. de (comp.) (1965): *Epistolario Español*, tomo 2. Atlas, Madrid. [Reimpresión de la edición original, 1870].

Pattanaik, P.K. (2002): "Positional rules of collective decision-making", en Arrow, K.J. – Sen, A.K. – Suzumura, K. (eds.): *Handbook of Social Choice and Welfare,* vol. 1, Elsevier Science, Amsterdam.

Rashed R. (comp.) (1990): *Condorcet: Matemáticas y Sociedad*. Fondo de Cultura Económica, Méjico. [Traducción de José Antonio Robles García de la edición original en francés, 1974].

Ratliff, T.C. (2001): "A comparison of Dodgson's method and Kemeny's rule". *Social Choice and Welfare* 18, pp. 79 – 89.

Riker, W.H. (1961): "Voting and the summation of preferences: an interpretive bibliographical review of selected developments during the last decade". *American Political Science Review* 55, pp. 900 – 911.

Riker, W.H. (1986): *The Art of Political Manipulation.* Yale University Press, New Haven.

Russell, B. (1973): *Los Principios de la Matemática*, en *Ciencia y Filosofía 1897 – 1919 (Obras Completas, tomo II).* Aguilar, Madrid. [Traducción de José Barrio Gutiérrez de la segunda edición en inglés, 1937. Primera edición, 1903].

Russell, B. (1976): *La Evolución de mi Pensamiento Filosófico.* Alianza Editorial, Madrid. [Traducción de Juan Novella Domingo de la edición original en inglés, 1959].

Saari, D.G. (1990): "The Borda dictionary". *Social Choice and Welfare* 7, pp. 279 – 317.

Saari, D.G. (1995): *Basic Geometry of Voting*. Springer – Verlag, Berlín.

Saari, D.G. – Merlin, V.R. (1996): "The Copeland method I: Relationships and the dictionary". *Economic Theory* 8, pp. 51 – 76.

Sen, A.K. (1976): "Poverty: An ordinal approach to measurement". *Econometrica* 44, pp. 219 – 223.

Sen, A.K. (1977): "Social Choice Theory: A re-examination". *Econometrica* 45, pp. 53 – 89.

Sen. A. (1984): "Strategy-proofness of a class of Borda rules". *Public Choice* 43, pp. 251 – 285.

Sen, A.K. (1998): "Un enfoque ordinal para medir la pobreza". *Cuadernos de Economía* (Bogotá) XII 29, pp. 36 – 65. [Disponible en http://ladb.unm.edu/aux/econ/cuadeco/1998/july/enfoque.html].

Sen, A. [1998] (2000): "La posibilidad de la elección social". *Revista BCV* 14, pp. 9 – 60. [Disponible en www.bcv.org.ve/publica/rbcv/rbcv100b.pdf].

Sidney Smith, R. (1973): "La Riqueza de las Naciones en España e Hispanoamérica". *Hacienda Pública Española* 23, pp. 240 – 256. [Traducción de Juan Plaza Prieto del artículo original en inglés, 1957].

Straffin Jr., P.D. (1980): *Topics in the Theory of Voting*. Birkhäuser, Boston.

Suárez, F. (1982): *El Proceso de Convocatoria a Cortes (1808 – 1810).* EUNSA, Pamplona.

Sugden, R. (1981): *The Political Economy of Public Choice: An Introduction to Welfare Economics*. Martin Robertson, Oxford.

Tangian, A.S. (2000): "Unlikelihood of Condorcet's paradox in a large society". *Social Choice and Welfare* 17, pp. 337 – 365.

Tanguiane, A.S. (1991): *Aggregation and Representation of Preferences. Introduction to Mathematical Theory of Democracy*. Springer – Verlag, Berlín.

Todhunter, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Macmillan, Londres.

Truchon, M. – Le Breton, M. (1997): "A Borda measure for social choice functions". *Mathematical Social Sciences* 34, pp. 249 – 272.

Van Newenhizen, J. (1992): "The Borda method is most likely to respect the Condorcet principle". *Economic Theory* 2, pp. 69 – 83.

Vicens Vives, J. (1972): *Historia Económica de España.* Editorial Vicens Vives, Barcelona.

Young, H.P. (1974): "An axiomatization of Borda's rule". *Journal of Economic Theory* 9, pp. 43 – 52.

Young, H.P. (1977): "Extending Condorcet's rule". *Journal of Economic Theory* 16, pp. 335 – 353.

Young, H.P. (1986): "Optimal ranking and choice from pairwise comparisons", en Grofman, B. – Owen, G. (eds): *Information Pooling and Group Decision Making*, JAI Press, Greenwich, pp. 113 – 122.

Young, H.P. (1988): "Condorcet's theory of voting". *American Political Science Review* 82, pp. 1231 – 1244.

Young, H.P. (1995): "Optimal voting rules". *Journal of Economic Perspectives* 9, pp. 51 – 64.

Young, H. P. (1997): "Group choice and individual judgements", en Mueller, D. (ed.): *Perspectives on Public Choice: A Handbook*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 181 – 200.

Young, H.P. – Levenglick, A. (1978): "A consistent extension of Condorcet's election principle". *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35, pp. 285 – 300.

Capítulo 2

La regla de Borda clásica y sus extensiones discretas

En el capítulo anterior hemos señalado cómo el diseño original de la regla de Borda (1784) contempla únicamente el supuesto teórico de que los votantes se manifiesten sobre los candidatos en litigio mediante órdenes lineales. De hecho, la implementación del método de Borda, tal como fue concebido, fuerza a los votantes a pronunciarse de esta manera, o lo que es lo mismo, a que éstos asignen puntuaciones correlativas y escalonadas: a, $a+b$, $a+2b$, etc., a los candidatos, de menor a mayor mérito[1]. Así, por ejemplo, Morales (1797) toma como valores más naturales $a=b=1$, mientras que, de manera equivalente, Morales (1805) los cambia por $a=0$, $b=1$, a fin de mostrar cómo las puntuaciones Borda otorgadas de este modo derivan de las comparaciones entre todas las parejas de candidatos por parte de los agentes. Es en este último caso cuando la puntuación individual otorgada a una alternativa coincide con el número de las que son peores que ella. Conviene señalar, no obstante, que cualquiera que sea la escala empleada, las preferencias individuales han de ser fuertes: en las confrontaciones por parejas, los agentes han de decantarse por una de las alternativas. Una vez fijado uno de estos contadores se introducirá uno colectivo como suma de los individuales, de forma que las alternativas

[1] Véanse Black (1958 y 1976), Sugden (1981, pp. 140 – 145) y Marchant (2000) acerca de esta forma utilitarista de enfocar el método de Borda.

quedarán ordenadas por la puntuación total obtenida. En lo que sigue aludiremos a este procedimiento como "regla de Borda clásica".

Sin embargo, en la práctica, a menudo los electores se muestran indiferentes entre ciertos candidatos. Ahora bien, tal como señala Sen [1970] (1976, pp. 17 y 18) "es importante distinguir entre indiferencia y falta de completitud. El lenguaje cotidiano es a menudo lo bastante libre para no distinguir entre ambas. Si yo 'no sé' cuál [alternativa] escoger, esto podría significar posiblemente que soy indiferente, aunque una significación más natural es que no acabo de decidirme. La diferencia lógica entre ambas es bastante sencilla. Consideremos estos dos enunciados:

1. x es al menos tan buena como y,
2. y es al menos tan buena como x.

En el caso de 'indiferencia' se afirman las dos, y en el caso de falta de completitud, ninguna".

Así pues, el enfoque original de Borda debería ser modificado para contemplar la situación de indiferencia *sensu stricto* entre alternativas. En este capítulo se propone un tratamiento sistemático, aunque no exhaustivo, de estas posibles generalizaciones. Introduciremos para ello cuatro contadores individuales que generalizan el original. El primero de ellos, que aparece en Gärdenfors (1973) bajo el nombre de *restricted Borda function* y fue también utilizado por Nitzan – Rubinstein (1981) en su caracterización axiomática de la regla de Borda, no tiene en cuenta las alternativas que los agentes declaran indiferentes a la que se valora y considera, de forma análoga a la regla clásica de Borda, que los agentes asignan a cada alternativa tantos puntos como alternativas consideran peores que la que se juzga. En cambio, los contadores segundo y tercero tienen en cuenta las alternativas indiferentes a la que se valora, asignando a cada una de éstas 0.5 puntos, con un matiz diferenciador: el considerar o no la indiferencia de la alternativa en cuestión consigo misma. El cuarto contador individual, utilizado por Young (1974) en su caracterización axiomática de la regla de Borda, asigna a cada alternativa una puntuación consistente en la diferencia entre el número de alternativas mejores y peores que la que se valora. Estos dos últimos contadores fueron introducidos por Black (1958) y la ventaja del último frente al anterior es, como veremos, un tratamiento menos prolijo, y por ende, más elegante, de la regla de Borda. Se justificará que los tres últimos contadores individuales originan siempre la misma ordenación colectiva de las alternativas, la cual no coincide necesariamente con la proveniente del primer contador.

Con objeto de garantizar la adecuación de los contadores individuales a las correspondientes preferencias de los agentes, consideraremos una propiedad de representatividad[2] que ya fue introducida para el primer contador en García Lapresta – Martínez Panero (2002). Esta propiedad exige que si un individuo prefiere una alternativa a otra, el contador ha de asignar mayor puntuación a la que es preferida que a la otra. De aquí se deduce que los contadores representativos sólo asignan la misma puntuación a las alternativas que son indiferentes para los agentes. No obstante, cuando la relación de indiferencia de un agente no es transitiva puede ocurrir que el contador, aún siendo representativo, otorgue puntuaciones distintas a alternativas indiferentes. Justificamos que la representatividad queda asegurada para los cuatro contadores analizados en este trabajo si se supone que las relaciones de preferencia fuerte de los agentes son transitivas.

Otro aspecto a analizar es la relación existente entre las alternativas mejor o peor puntuadas por las reglas de Borda asociadas a los contadores utilizados y las alternativas ganadoras o perdedoras de Condorcet (aquéllas que vencen o son derrotadas en comparaciones por pares mediante la regla de la mayoría simple). Es bien conocido que la regla de Borda clásica no es Condorcet-consistente, es decir, puede existir una alternativa ganadora de Condorcet que

[2] Ya hemos señalado que el método de Borda admite un enfoque utilitarista. Por ello, y tal como se verá al definir formalmente esta propiedad, el nombre que le damos deriva de la teoría de "representación" numérica de preferencias mediante funciones de utilidad.

no obtenga la máxima puntuación por la regla de Borda. No obstante, justificamos que con la regla de Borda generalizada a cualquier tipo de preferencias individuales, utilizando los tres últimos contadores, ninguna alternativa que sea ganadora de Condorcet puede tener la peor puntuación con la regla de Borda, así como que ninguna alternativa que sea perdedora de Condorcet puede tener la mejor puntuación con la regla de Borda. Sin embargo estas propiedades dejan de cumplirse cuando se considera la regla de Borda asociada al primer contador, tal como se justifica con los correspondientes contraejemplos.

El capítulo concluye señalando las principales propiedades, ya sean o no deseables, del método de Borda, algunas de las cuales se han utilizado en las diversas caracterizaciones a las que ya hemos aludido. Prestaremos especial atención, entre otras, a propiedades tipo media y de consistencia ("reinforcement"), esta última señalada por Young – Levenglick (1978) como típicamente característica de la regla de Borda. Así mismo, presentaremos como aval para el empleo de la regla de Borda su inmunidad a la denominada paradoja de la abstención ("no show paradox"), un aspecto que desde los últimos años merece cada vez más atención en la literatura sobre la TES.

A la vista de la exposición anterior, se hace necesario introducir, como soporte teórico, un bagaje básico sobre preferencias ordinarias, a saber: los conceptos de preferencia fuerte o estricta y de preferencia débil o de preferencia-indiferencia que, tal como hemos señalado, jugarán papeles relevantes en los métodos de Borda clásico y extendidos. La formalización y análisis de los contadores individuales y colectivos correspondientes, en los que se basan tales procedimientos, constituye el núcleo del capítulo. Así mismo, se estudiarán las hipótesis de racionalidad individual (aciclicidad, transitividad, etc.) que, como se verá, han de ser tomadas como cuestión de principio si se desea que los procedimientos diseñados sean internamente coherentes en el sentido que se ha detallado (representatividad de los contadores Borda individuales) y que se formalizará más adelante. Por otro lado, toda vez que el criterio de Condorcet requiere, tal como se ha señalado, un conteo por mayoría simple, se introducirá un breve apartado sobre este procedimiento de decisión siguiendo los enfoques clásicos de May (1952) y Fishburn (1973).

2.1 Prerrequisitos teóricos

A continuación se exponen los principales conceptos a partir de los cuales se modelizan las preferencias de los agentes o votantes y con los que es posible formular distintos procedimientos de votación.

2.1.1 Relaciones binarias

El concepto básico que nos ocupará en el presente apartado es el de relación binaria, detallándose a continuación alguna de las propiedades que tales relaciones son susceptibles de cumplir. Aquéllas que tienen que ver con la concatenación entre más de dos elementos serán retomadas en la siguiente subsección, ya en un contexto preferencial, en conexión con la racionalidad de los agentes. Estas propiedades tendrán una especial relevancia en nuestro tratamiento de la regla de Borda.

Consideraremos que un agente se encuentra ante un conjunto finito X sobre cuyos elementos debe decidirse. Supondremos además $\operatorname{card} X \geq 2$ en lo que sigue.

Definición 2.1. Una *relación binaria S* sobre un conjunto no vacío X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Como es usual, si S es una relación binaria sobre X se denotará xSy ("x se relaciona con y mediante S") para significar $(x, y) \in S$.

A continuación se da una lista de propiedades susceptibles de ser satisfechas por las relaciones binarias. No es exhaustiva, pues sólo se recogen las que utilizaremos en el desarrollo posterior.

Definición 2.2. Sea S una relación binaria sobre X.

1. S es *reflexiva* si xSx para todo $x \in X$.

2. S es *irreflexiva* si para ningún $x \in X$ ocurre xSx.

3. S es *simétrica* si de xSy se sigue ySx, para cualesquiera $x, y \in X$.

4. S es *asimétrica* si cuando ocurre xSy entonces no ocurre ySx, para cualesquiera $x, y \in X$.

5. S es *antisimétrica* si cuando ocurre xSy así como ySx, entonces $x = y$, para cualesquiera $x, y \in X$.

6. S es *completa* si se verifica xSy o bien ySx, para cualesquiera $x, y \in X$.

7. S es *transitiva* si cuando ocurre xSy así como ySz, entonces también ocurre xSz, para cualesquiera $x, y, z \in X$.

8. S es *negativamente transitiva* si cuando no ocurre xSy ni ySz, entonces tampoco ocurre xSz, para cualesquiera $x,y,z \in X$.

9. S es *triple acíclica* si cuando ocurre xSy así como ySz, entonces no ocurre zSx, para cualesquiera $x, y, z \in X$.

10. S es *acíclica* si para cualesquiera $x_1, \ldots, x_i, x_{i+1} \in X$, cuando ocurre $x_j S x_{j+1}$ para cada $j = 1, \ldots, i$, entonces no ocurre $x_{i+1} S x_1$.

Observación 2.1. Resulta inmediato comprobar las siguientes implicaciones.

1. S completa $\Rightarrow$ S reflexiva.

2. S reflexiva $\Rightarrow$ S no asimétrica.

3. S asimétrica $\Rightarrow$ S irreflexiva.

Definición 2.3. Sea S una relación binaria sobre X.

1. *S* es un *preorden* si *S* es reflexiva y transitiva.

2. *S* es un *preorden completo* si *S* es transitiva y completa.

3. *S* es un *orden parcial* si *S* es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

4. *S* es un *orden lineal* si *S* es antisimétrica, transitiva y completa.

Observación 2.2. Como señala Sen [1970] (1976, p. 24), en la literatura aparecen nombres diversos, y a veces ambiguos, que se aplican a un mismo concepto. Así, a los preórdenes tambien se los denomina a veces cuasiórdenes, los preórdenes completos aparecen a veces como órdenes débiles, y los órdenes lineales como órdenes simples. Así mismo, el término orden (que preferimos aquí al de "ordenación" que aparece en la versión al castellano de Sen [1970] (1976)), sin ningún calificativo, ha sido empleado a la vez como sinónimo de preorden completo y de orden parcial.

2.1.2 Preferencias ordinarias fuertes y débiles

Existen en la modelización de preferencias ordinarias dos tradiciones extendidas. Ambas utilizan como nociones primarias relaciones binarias a las que se impone de partida ciertas exigencias. La primera de ellas interpreta "*x* es preferido a *y*" en sentido fuerte, a saber: "*x* es mejor que *y*" por lo que no puede darse a la vez "*y* es mejor que *x*". Esto corresponde a la definición que sigue.

Definición 2.4. Una relación de *preferencia fuerte* (o *estricta*) *P* es una relación binaria asimétrica.

Un segundo enfoque considera la preferencia en un sentido débil, contemplando también la indiferencia, de manera que xRy se interpreta como "*x* es al menos tan buena como *y*". A diferencia de Roubens – Vincke (1985, pp. 6 y ss.) y de Sen [1970] (1976, pp. 17 y 18) en el comentario que ya hemos citado al comenzar el capítulo, se acepta como cuestión de principio para cualesquiera dos alternativas *x*,*y*, que, o bien *x* es al menos tan buena como *y*, o bien *y* es al menos tan buena como *x*. En la siguiente definición se recogen los comentarios anteriores.

Definición 2.5. Una relación de *preferencia débil* (o de *preferencia-indiferencia*) *R* es una relación binaria completa.

Observación 2.3. Ambos enfoques son, de hecho, equivalentes:

- Si a la relación de preferencia fuerte *P* se le asocia la relación de indiferencia *I*, entendida ésta como ausencia de preferencia (xIy si no ocurre xPy ni yPx), entonces $R=P\cup I$ (xRy si xPy o xIy) resulta completa.

- Recíprocamente, a partir de *R* completa se puede obtener *P* asimétrica como xPy si xRy pero no ocurre yRx (es decir, con la interpretación señalada, habría preferencia fuerte cuando *x* es al menos tan buena como *y*, pero *y* no es al menos tan buena como *x*).

Las dos posibilidades indicadas se pueden aglutinar en el concepto de *estructura preferencial*. Sobre estos aspectos véanse Roubens – Vincke (1985, pp. 6 y ss.) con la observación señalada sobre la completitud.

Conviene indicar que si se tiene una relación de preferencia débil *R* sobre *X*, para cada par de alternativas $x, y \in X$ no caben más que tres situaciones, mutuamente excluyentes: xPy, yPx o xIy. Así, si no ocurre xPy debe suceder alguna de las otras dos posibilidades, o lo que es lo mismo, yRx.

Habida cuenta de la equivalencia señalada, en lo que sigue, conjugaremos ambos enfoques, respetando en la medida de lo posible la notación introducida: *R*, preferencia débil (completa); *P*, preferencia fuerte asociada (también denominada parte asimétrica de *R*); *I*, indiferencia asociada (también llamada parte simétrica de *R*). A modo de recapitulación, señalemos que *R* es completa, *P* es asimétrica e *I* es reflexiva y simétrica.

Definición 2.6. Sea *R* una relación de preferencia débil sobre *X*. Un elemento $x \in X$ es un *maximal* respecto de R si para todo $y \in X$ se cumple xRy; o equivalentemente, si no existe $y \in X$ tal que yPx.

En vista de la equivalencia anterior se dirá también que *x* es un maximal respecto de *P*.

Observación 2.4. Hemos de señalar que los elementos maximales[3] no tienen por qué existir. Ahora bien, si *X* es finito (como es el caso) una condición necesaria y suficiente para asegurar la existencia de maximales es que *P* sea acíclica (véase Sen [1970] (1976, Lema 1*1)). Así, supuestas las condiciones anteriores, ante un problema de selección de alternativas siempre sería posible asignar a cada subconjunto de *X* sus elementos maximales. Es éste un ejemplo de un concepto ya anticipado por Condorcet (1785), el de *función de elección* (véase Sen [1970] (1976, Definición 1*8)), que resuelve el problema decisional planteado, si bien no unívocamente, pues podría darse la existencia de más de un elemento maximal.

2.1.3 Propiedades de racionalidad en las preferencias

Las siguientes proposiciones explicitan la jerarquía de las relaciones de preferencia bajo ciertas hipótesis de coherencia comúnmente contempladas en la literatura. En lo que sigue, la conclusión de las demostraciones se señalará mediante ■. El mismo signo se utilizará para indicar ausencia de demostración, cuando ésta sea trivial o común en la literatura.

[3] Sen [1970] (1976, p. 25), quien, como Roubens – Vincke (1985), no impone que *R* sea completa, distingue entre elementos *x maximales* como aquéllos que no son dominados por ninguna otra alternativa (no existe $y \in X$ tal que yPx), y *mejores elementos x*, aquellos que son al menos tan buenos como el resto (para todo $y \in X$ se cumple xRy). En nuestro contexto, al ser *R* completa, ambos conceptos coinciden, tal como se ha señalado, y en los resultados de Sen [1970] (1976) citados a continuación convendrá tener en cuenta esta observación.

Proposición 2.1. P negativamente transitiva $\Rightarrow$ P transitiva $\Rightarrow$ P acíclica $\Rightarrow$ P triple acíclica. ■

Proposición 2.2. P negativamente transitiva $\Leftrightarrow$ R transitiva $\Leftrightarrow P, I$ transitivas. ■

Mas Colell – Whinston – Green (1995, p. 6) denominan *racionales* a las relaciones de preferencia que verifican las condiciones de la proposición anterior.

Observación 2.5. Tal como se ha señalado en la Introducción, la regla de Borda clásica se plantea en un contexto preferencial muy restrictivo en el que la relación de preferencia R de cada uno de los agentes es un orden lineal (lo cual equivale a que P sea negativamente transitiva e I sea antisimétrica). Sin embargo, como veremos, nosotros supondremos una situación más general, en la que sólo se exigirá inicialmente que la relación de preferencia débil de cada uno de los agentes R sea completa (o, equivalentemente, que las relaciones de preferencia fuerte de los agentes sean asimétricas), permitiendo en cualquier caso a los agentes declarar indiferencia entre alternativas. Posteriormente, la transitividad de P será requerida para garantizar la representatividad de los contadores Borda introducidos.

Observación 2.6. Se puede comprobar que la mera transitividad de P no garantiza que la relación de indiferencia asociada I sea transitiva. Ahora bien, a la vista de la proposición anterior, cuando P es negativamente transitiva resultan ser necesariamente transitivas tanto P como I.

Observación 2.7. Es así mismo interesante notar que si P es negativamente transitiva (R preorden completo) y existen tres alternativas $x, y, z \in X$ tales que xPy, yIz (o bien xIy, yPz), entonces también se verifica xPz. Sin embargo la mera transitividad de P no asegura tal propiedad de concatenación de P, I. (Cf. García Lapresta – Rodríguez Palmero (en prensa)).

La concatenación, en diversas formas, de P e I (en donde P es transitiva pero, como se ha apuntado, I no tiene porqué serlo), ha conducido a la formulación de nuevas clases de relaciones de preferencia fuerte (véanse a este respecto Roubens – Vincke (1985) y Pirlot – Vincke (1997), entre otros). A continuación se introducen tres de estas clases de relaciones de preferencia fuerte.

Definición 2.7. Sea P una relación de preferencia fuerte sobre X.

1. P es *semitransitiva* si cuando ocurre $xPy,\ yPz,\ zIw,$ entonces también ocurre $xPw,$ para cualesquiera $x,y,z,w \in X$.

2. P es un *orden de intervalo* si cuando ocurre $xPy,\ yIz,\ zPw,$ entonces también ocurre $xPw,$ para cualesquiera $x,y,z,w \in X$.

3. P es un *semiorden* si es un orden de intervalo y semitransitiva.

La jerarquía entre estas relaciones de preferencia y la transitividad viene dada por:

$$\begin{array}{ccc} P \text{ semiorden} & \rightarrow & P \text{ orden de intervalo} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P \text{ semitransitiva} & \rightarrow & P \text{ transitiva} \end{array}$$

Con estas nuevas estructuras preferenciales y su conexión con las ya introducidas, se puede matizar aún más el grado de coherencia en las preferencias individuales consignada desde la linealidad hasta la triple aciclicidad. Esto queda de manifiesto en el siguiente esquema de implicaciones, que incorpora el anterior:

R orden lineal

$\downarrow$

P negativamente transitiva

(R preorden completo)

$\downarrow$

P semiorden

$\swarrow \quad \searrow$

P orden de intervalo $\qquad$ P semitransitiva

$\searrow \quad \swarrow$

P transitiva

$\downarrow$

P acíclica

$\downarrow$

P triple acíclica

2.1.4 Mayoría simple

Cuando únicamente hay dos alternativas en litigio, el uso del procedimiento de votación por mayoría simple ha sido desde siempre incuestionable. May (1952) caracterizó tal método mediante unas propiedades que avalan la bondad del procedimiento y justifican por tanto su uso en el caso indicado. No es así extraño que, cuando hay más de dos alternativas, otros métodos de votación tengan a éste como referente (de hecho, esta es la filosofía subyacente al principio de Condorcet y la crítica de éste a la regla de Borda), razón por la cual incluimos la presente subsección. Como ya señalamos, el tratamiento de la misma es deudor del citado May (1952), así como de Fishburn (1973), aunque también este enfoque ha sido modernamente retomado por García Lapresta (en prensa) en un contexto de preferencias lingüísticas que nosotros seguiremos más adelante.

Supónganse ahora que existen m agentes o votantes, $m \geq 2$, y $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de alternativas o candidatos. En tal contexto, los agentes deben manifestar sus preferencias sobre un par genérico de alternativas o candidatos

$x_i, x_j \in X$. Sean $P^k, k = 1, \ldots, m,$ las relaciones de preferencia fuerte sobre X de los votantes e $I^k, R^k,\ k = 1, \ldots, m,$ sus relaciones de indiferencia y preferencia débil asociadas, respectivamente. La situación decisional anterior se puede codificar mediante índices $d_{ij}^k,\quad k = 1, \ldots, m,$ introducidos por May (1952) y Fishburn (1973), definidos como sigue:

$$d_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i P^k x_j, \\ 0, & \text{si } x_i I^k x_j, \\ -1, & \text{si } x_j P^k x_i. \end{cases}$$

Notemos que para cualesquiera $x_i, x_j \in X,\quad k = 1, \ldots, m,$ se cumple $d_{ij}^k + d_{ji}^k = 0.$

Definición 2.8. La regla de votación por *mayoría simple* viene dada por la relación binaria P^S definida como:

$$x_i P^S x_j \Leftrightarrow \operatorname{card}\{k \mid x_i P^k x_j\} > \operatorname{card}\{k \mid x_j P^k x_i\} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m d_{ij}^k > 0,$$

para cualesquiera $x_i, x_j \in X,\quad k = 1, \ldots, m.$

Observación 2.8. P^S es una relación binaria asimétrica, y por tanto una relación de preferencia. Denotaremos por I^S la correspondiente relación de indiferencia, que corresponde al empate entre las alternativas:

$$x_i I^S x_j \Leftrightarrow \operatorname{card}\{k \mid x_i P^k x_j\} = \operatorname{card}\{k \mid x_j P^k x_i\} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m d_{ij}^k = 0,$$

para cualesquiera $x_i, x_j \in X,\quad k = 1, \ldots, m.$

Otra forma de codificación, equivalente a la anterior, es posible mediante índices r_{ij}^k , definidos como sigue:

$$r_{ij}^{k} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x_i P^k x_j, \\ 0.5, & \text{si} \quad x_i I^k x_j, \\ 0, & \text{si} \quad x_j P^k x_i. \end{cases}$$

La relación entre estos índices y los anteriores viene dada por $d_{ij}^{k} = 2r_{ij}^{k} - 1.$ Teniendo en cuenta, además, que $d_{ij}^{k} = r_{ij}^{k} - r_{ji}^{k},$ la mayoría simple vendría también dada alternativamente por:

$$x_i P^S x_j \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^{k} > \sum_{k=1}^{m} r_{ji}^{k}.$$

Es usual disponer los coeficientes recién introducidos matricialmente como sigue[4].

Definición 2.9. La matriz

$$\left(r_{ij}^{k}\right) = \begin{pmatrix} r_{11}^{k} & r_{12}^{k} & \dots & r_{1n}^{k} \\ r_{21}^{k} & r_{22}^{k} & \dots & r_{2n}^{k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^{k} & r_{n2}^{k} & \dots & r_{nn}^{k} \end{pmatrix}$$

se denomina *matriz de preferencia individual del agente k.*

Las preferencias individuales pueden aglutinarse también de manera matricial como se indica a continuación.

Definición 2.10. Denominaremos *matriz agregada*

$$\left(r_{ij}\right) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

a la obtenida como suma de las matrices de preferencia individuales, es decir,

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^{k} \ .$$

Definición 2.11. La diferencia $r_{ij} - r_{ji} = \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^{k} - \sum_{k=1}^{m} r_{ji}^{k}$, que cuantifica la preeminencia de la alternativa x_i sobre x_j, se denomina *margen* de la alternativa x_i respecto de la alternativa x_j, y se denotará por $\mathrm{mg}(i, j)$.

Obviamente, $\mathrm{mg}(i, j) = -\mathrm{mg}(j, i)$.

2.2 Formulación de la regla de Borda clásica

Desde un punto de vista formal, supuestos órdenes lineales sobre las alternativas, el método de Borda clásico se debe implementar en dos etapas, la primera de las cuales consiste en asignar puntuaciones Borda individuales a las alternativas. Si σ es una permutación de los n primeros números naturales, de manera que $x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)}$ es la ordenación de mejor a peor alternativa de un agente, entonces la puntuación otorgada por tal agente a la alternativa $x_{\sigma(i)}$ viene dada por $n - i$.

Cabe considerar lo siguiente: en primer lugar que originalmente Borda asignó, acaso de manera más natural que la anteriormente expuesta, puntuaciones individuales $n - i + 1$ que recorren el espectro $\{1, \ldots, n\}$. Las propuestas, que restan una unidad a las dichas cantidades son igualmente válidas y fueron consideradas por Borda (1784) y Morales (1805) por una razón metodológica, a saber: las puntuaciones Borda individuales así definidas, con la sustracción de una unidad respecto de las originalmente dadas por Borda, admiten una

[4] En este capítulo, a diferencia de los siguientes, se consideran ésta y otras matrices que aparecerán a continuación principalmente como base teórica más que a efectos prácticos de cálculo.

expresión equivalente en términos preferenciales que se detalla y formaliza a continuación.

Supongamos un escenario decisional en el que m agentes (electores o votantes) deben mostrar sus preferencias entre un conjunto finito de alternativas (o candidatos) $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Supondremos además $n, m \geq 2$, y que la relación de preferencia R^k de cada uno de los agentes es un orden lineal (lo cual equivale, recordemos, a que P^k sea negativamente transitiva e I^k sea antisimétrica)[5].

Definición 2.12. Dada una alternativa $x_i \in X$, el *contador de Borda clásico individual* mediante el cual el agente *k* asigna una puntuación a la alternativa x_i, viene dado por:

$$r_k(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i P^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} r_{ij}^k,$$

lo que corresponde a la suma de los coeficientes de la fila i-ésima de la matriz de preferencia individual del agente *k* a excepción del que ocupa la diagonal principal (cuyo valor es siempre 0.5). Alternativamente,

$$r_k(x_i) = \text{card } \{x_j \mid x_i P^k x_j\},$$

por lo que este contador individual refleja la idea de Borda (explicitada por Morales (1805)) de que a cada alternativa x_i el agente *k* le asigna como puntuación el número de alternativas que para él son peores. Es así mismo

---

5 En la formulación de la regla de Borda clásica a veces se suele exigir $n \geq 3$, pues cuando $n = 2$ es fácil verificar que este procedimiento coincide con el de mayoría simple del que ya hemos hablado (y también, pero únicamente en este caso, con los mayoría absoluta y pluralidad). A este respecto es interesante el agudo análisis de Morales (1797, pp. 16 y ss.), en donde se explicita la diferencia radical que en la toma de decisiones colectivas supone el paso de 2 a 3 o más alternativas.

interesante señalar que el posible rango de valores se encuentra entre los del conjunto $\{0,1,\ldots,n-1\}$.

La segunda etapa consiste en definir una puntuación colectiva asignada a cada alternativa como suma de las individuales.

Definición 2.13. El *contador total* (o *agregado*) *de Borda clásico* los agentes asigna a la alternativa x_i una puntuación colectiva dada por:

$$\boldsymbol{r}(x_i)=\sum_{k=1}^{m} r_k\,(x_i).$$

Otra forma de calcular la puntuación total de Borda anterior se basa en el concepto de matriz agregada introducido anteriormente. La suma de los coeficientes de la fila *i*-ésima de esa matriz, exceptuando el que ocupa la diagonal principal, es la puntuación Borda colectiva de la alternativa *i*:

$$\boldsymbol{r}(x_i)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} r_{ij}\,.$$

Entonces, la(s) alternativa(s) que resulta(n) ganadora(s) por el método de Borda clásico viene(n) determinada(s) por la mayor puntuación recibida.

Definición 2.14. La relación de preferencia agregada P^B correspondiente a la regla de Borda clásica viene dada por:

$$x_i P^B x_j \Leftrightarrow \boldsymbol{r}(x_i) > \boldsymbol{r}(x_j),$$

para cualesquiera $x_i, x_j \in X$. Como es usual, denotaremos por I^B a su relación de indiferencia asociada.

Resulta inmediato comprobar que P^B es negativamente transitiva, luego acíclica. Tal como se ha indicado, de acuerdo con Sen [1970] (1976), al ser el conjunto X es finito, hay garantía de existencia (no así de unicidad) de elementos maximales para P^B, que sería(n) ganador(es) por la regla de Borda clásica.

A modo de ejemplo, se detalla el propuesto por el propio Borda (1784) para justificar su método frente al de pluralidad. En nuestra exposición usamos el tratamiento matricial que hemos introducido.

Ejemplo 2.1. Supongamos que se realiza una elección entre 3 sujetos y que el número de electores sea 21. En el siguiente diagrama se presentan sus ordenaciones (lineales) sobre los candidatos.

6 votantes	7 votantes	7 votantes	1 votante
x_3	x_2	x_1	x_1
x_2	x_3	x_3	x_2
x_1	x_1	x_2	x_3

Borda argumenta que x_1 tiene la pluralidad de los votos ya que, si se votase mediante este procedimiento, sus 8 primeras posiciones le darían como vencedor frente a los 7 votos obtenidos por x_2 y los 6 de x_3. Ahora bien, según apunta Borda, x_1 no tiene a su favor la opinión de los electores, ya que es considerado como el peor por 13 de los 21 votantes.

Para computar entonces qué candidato tiene a su favor la mayor "cantidad de opinión" aplicamos el método propugnado por Borda. Como ya se ha indicado, para cada alternativa hay que contabilizar las que son peores que ella. Así, las puntuaciones, ponderadas según el número de votantes, resultan:

$$\boldsymbol{r}(x_1)=7\cdot 2+2=16, \quad \boldsymbol{r}(x_2)=6+7\cdot 2+1=21, \quad \boldsymbol{r}(x_3)=6\cdot 2+7+7=26,$$

y el ganador sería entonces x_3. De hecho, en este ejemplo, el método de Borda invierte la ordenación proporcionada por el método de pluralidad.

Observación 2.9. A continuación se consignan unos sencillos cómputos acerca de los contadores de Borda clásicos, tanto individuales como colectivos, utilizados recurrentemente en los argumentos que aparecen en Morales (1797).

La suma de puntuaciones emitidas por cada uno de los agentes es:

$$\sum_{i=1}^{n} r_k(x_i) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

La suma total de puntuaciones emitidas por el colectivo agentes es:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} r_k(x_i) = m\big((n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0\big) = m\frac{(n-1)n}{2}.$$

2.3 Extensiones de la regla de Borda

Aunque ya se ha señalado que la regla de Borda fue inicialmente diseñada para aquellos casos en los que los agentes ordenan linealmente las alternativas, en esta sección se extenderá el procedimiento a situaciones mucho más generales, de manera que las relaciones de preferencia fuerte de los agentes, $P^1, \ldots, P^m$ son simplemente asimétricas, sin necesidad de que sean inicialmente transitivas ni siquiera triple acíclicas. Así mismo, los agentes podrán manifestar indiferencia entre las alternativas que comparan, de modo que las relaciones de indiferencia de los agentes, $I^1, \ldots, I^m$, son reflexivas y simétricas, pero no necesariamente transitivas. No obstante, como ya se ha indicado, en la próxima sección se demostrará que para conseguir representatividad en la asignación de puntuaciones de los contadores individuales habrá que exigir que las relaciones de preferencia fuerte de los agentes sean transitivas.

Definición 2.15. Dada una alternativa $x_i \in X$, se definen los *contadores de Borda individuales* $r_k^v(x_i),\ v = 1, \ldots, 4$, con los que el agente k asigna una puntuación a la alternativa x_i de la forma que sigue:

- $r_k^1(x_i) = \sum_{x_i P^k x_j} r_{ij}^k = \text{card } \{x_j \mid x_i P^k x_j\}$.

- $r_k^2(x_i) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k = \sum_{x_i R^k x_j} r_{ij}^k = \sum_{x_i P^k x_j} r_{ij}^k + \sum_{x_i I^k x_j} r_{ij}^k =$

  $= \text{card } \{x_j \mid x_i P^k x_j\} + \frac{1}{2} \text{card } \{x_j \mid x_i I^k x_j\}$.

- $r_k^3(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{x_i P^k x_j} r_{ij}^k + \sum_{\substack{x_i I^k x_j \\ j \neq i}} r_{ij}^k =$

  $= \text{card } \{x_j \mid x_i P^k x_j\} + \frac{1}{2}\left(\text{card } \{x_j \mid x_i I^k x_j\} - 1\right)$.

- $r_k^4(x_i) = \sum_{x_i P^k x_j} r_{ij}^k - \sum_{x_j P^k x_i} r_{ji}^k = \text{card } \{x_j \mid x_i P^k x_j\} - \text{card } \{x_j \mid x_j P^k x_i\}$.

El primer contador individual replica exactamente la definición homóloga de la regla de Borda clásica. Como ya hemos hecho notar, aparece en Gärdenfors (1973) y también ha sido utilizado por Nitzan – Rubinstein (1981). Respecto de la matriz de preferencia individual del agente *k*, se puede entender como la suma de los coeficientes que superan el valor 0.5 de de su fila *i*-ésima:

$$r_k^1(x_i) = \sum_{r_{ij}^k > 0.5} r_{ij}^k .$$

El segundo y el tercer contador suman a la puntuación dada por el contador anterior 0.5 puntos a cada alternativa que sea indiferente con la que se valora, considerando o no la propia alternativa que se valora, respectivamente. De nuevo, teniendo en cuenta la matriz de preferencia individual del agente *k*, el segundo contador corresponde a sumar todos los coeficientes de la fila i-ésima, mientras que en el tercer contador, por lo que acabamos de señalar, resta 0.5 unidades a la cantidad anterior.

El último contador indica, para cada alternativa, el número de victorias (puntos a favor) menos el de derrotas (puntos en contra) sobre sus oponentes[6] para el agente *k*. Ya hemos comentado que ha sido usado, entre otros, por Young (1974), y no debe confundirse con los contadores Copeland que, como se detallará más adelante, aplican la misma filosofía a las preferencias colectivas originadas por la mayoría simple, para evitar la paradoja del voto (ciclos en las preferencias colectivas). En términos matriciales corresponde a la suma de coeficientes de la fila *i*-ésima menos la suma de coeficientes de la columna *i*-ésima de la matriz de preferencias individuales del agente *k*.

Es usual en la literatura denominar a los dos últimos contadores como *primer* y *segundo contador de Borda individuales ajustados según Black*, (*Black's first* and *second Borda counts*), o más brevemente, *Black I* y *Black II.* Mediante estos contadores, Black (1976) justificó la regla de Borda en conexión con las nociones de "mayoría" y "cercanía a la unanimidad".

Observación 2.10. Es claro que, en ausencia de indiferencia, los tres primeros contadores introducidos coinciden con el clásico (de hecho la definición del primero no es sino una réplica de la de éste). El cuarto contador (Black II) no constituye una extensión "natural" del clásico, pero se justificará su incorporación ya que, tal como señaló el propio Black (1976), el tratamiento de Black I (al que, como veremos, Black II es equivalente) "es más torpe, y requiere mucho más trabajo". Efectivamente, también nosostros en algunos de los argumentos que siguen hemos usado este contador que simplifica sensiblemente las demostraciones.

Observación 2.11. Existen conexiones entre algunos de los contadores individuales introducidos. Resulta evidente la siguiente relación:

$$r_k^2(x_i) = r_k^3(x_i) + \frac{1}{2}.$$

[6] Citando a Black (1958, p. 64): "the appropriate form of the Borda count is the net surplus of

Así mismo, aunque en este caso no es inmediato, Black (1976) y Coughlin (1979) demostraron que Black I y Black II difieren en una transformación lineal afín; más concretamente:

$$r_k^4(x_i) = 2\,r_k^3(x_i) - (n-1)\,.$$

En consecuencia tenemos las siguientes relaciones, que permiten definir los dos últimos contadores en función del segundo:

$$r_k^3(x_i) = r_k^2(x_i) - \frac{1}{2} \;\; \text{y} \;\; r_k^4(x_i) = 2r_k^2(x_i) - n\,.$$

Por otro lado, tal como señala Gärdenfors (1973), Black I admite una formulación equivalente bajo la hipótesis de que P^k, I^k sean transitivas (lo que equivale, según hemos visto, a que R^k sea un preorden completo), que consiste en aplicar como patrón la regla de Borda clásica, pero en caso de indiferencia entre alternativas, las puntuaciones individuales otorgadas a las que son indiferentes se determinarían asignando a cada una de ellas el número resultante de realizar la media aritmética de las puntuaciones que se obtendrían si el agente "linealizara" su ordenación de preferencias[7]. Por ejemplo, un agente *k* cuyas preferencias sobre 4 alternativas fuesen $x_1, (x_2, x_3), x_4,$ donde el paréntesis indica indiferencia entre alternativas, podría linealizar así su disposición de alternativas: x_1, x_3, x_2, x_4. A continuación asignaría puntuaciones provisionales 3, 2, 1, 0, respectivamente, conforme a la regla de Borda clásica. Por fin, en el cómputo definitivo, las puntuaciones otorgadas a las alternativas indiferentes, x_2 y x_3, deberían ser equidistribuidas entre ellas, por lo que Black I asignaría las siguientes puntuaciones:

---

the *plus* over the *minus* votes for each candidate".

[7] Con las mismas hipótesis sobre las preferencias individuales, Gärdenfors (1973) introduce también otro contador que, en su contexto, denomina *ranking-level function*, y que identifica alternativas al mismo nivel de preferencia, aplicando entonces el contador de Borda clásico a los "estratos" resultantes, que nosotros no incluiremos en nuestro estudio.

$$r_k^3(x_1) = 3,\ r_k^3(x_3) = r_k^3(x_2) = \frac{3}{2},\ r_k^3(x_4) = 0.$$

A la luz de este comentario, la suma de puntuaciones emitidas por cada uno de los agentes con el tercer contador es, como en el caso clásico:

$$\sum_{i=1}^{n} r_k^3(x_i) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

En cambio, aunque el primer contador reproduce exactamente la definición dada en el caso clásico, hay ahora una diferencia fundamental: si el agente k manifiesta indiferencia entre cualesquiera dos alternativas distintas, alguno de los valores del espectro anterior deja de ser alcanzado, ocupando su lugar alguno de los valores inferiores, por lo que el cómputo total de las puntuaciones otorgadas por ese agente sería estrictamente menor. Únicamente se daría la igualdad en el caso de linealidad de R^k; en resumen:

$$\sum_{i=1}^{n} r_k^1(x_i) \leq \frac{(n-1)n}{2}.$$

En cuanto al segundo contador, habida cuenta de la relación recién señalada con el tercero, se tiene como cómputo individual total:

$$\sum_{i=1}^{n} r_k^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(r_k^3(x_i) + \frac{1}{2}\right) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 + \frac{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Por fin, una interesante propiedad del contador r_k^4 (Black II) es que la suma de todas las puntuaciones otorgadas por cada agente es nula, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} r_k^4(x_i) = 0\,.$$

Tal como ocurre con su patrón clásico, puede definirse un contador colectivo como suma de los individuales en cada caso.

Definición 2.16. La *puntuación* (o *contador*) *total de Borda* del colectivo de agentes a la alternativa x_i se calcula como:

$$\boldsymbol{r}^v(x_i) = \sum_{k=1}^{m} r_k^v(x_i), \; v = 1, \ldots, 4.$$

Observación 2.12. Teniendo en cuenta la Observación 2.11, se deduce:

- $\boldsymbol{r}^1(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{x_i P^k x_j} r_{ij}^k$.

- $\boldsymbol{r}^2(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k$.

- $\boldsymbol{r}^3(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \left(r_k^2(x_i) - \frac{1}{2} \right) = \boldsymbol{r}^2(x_i) - \frac{m}{2}$.

- $\boldsymbol{r}^4(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \left(2r_k^2(x_i) - n \right) = 2\boldsymbol{r}^2(x_i) - mn$.

Y entonces, cualquiera que sea la forma de cálculo utilizada, la(s) alternativa(s) que resulta(n) ganadora(s) por el método de Borda de contador *v*-ésimo, $v = 1, \ldots, 4$ viene(n) determinada(s) por la mayor puntuación recibida.

Definición 2.17. La relación de preferencia agregada P_v^B correspondiente a la regla de Borda con contador *v*-ésimo, $v = 1, \ldots, 4$, viene dada por:

$$x_i P_v^B x_j \Leftrightarrow \boldsymbol{r}^v(x_i) > \boldsymbol{r}^v(x_j),$$

para cualesquiera $x_i, x_j \in X$. Como es usual, denotaremos por I_v^B, $v = 1, \ldots, 4$, a las correspondientes relaciones de indiferencia asociadas.

De nuevo, como en el caso clásico, P_v^B resulta ser es negativamente transitiva para cualquiera de los cuatro contadores introducidos, luego acíclica. Este hecho, junto con la finitud del conjunto de alternativas, garantizan la decisividad de las extensiones de la regla de Borda clásica. Efectivamente, teniendo en cuenta una vez más los argumentos de Sen [1970] (1976), se puede garantizar de existencia (aunque no la unicidad) de elementos maximales para P_v^B, que sería(n) ganador(es) por la regla de Borda asociada al contador *v*-ésimo.

Cabe preguntarse si, para una misma situación decisional por parte de los agentes, los diferentes contadores proporcionan o no una misma preferencia agregada.

Observación 2.13. De acuerdo con la Observación 2.11, los contadores Borda colectivos $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$ son una transformación afín de $\boldsymbol{r}^2$. Por tanto, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$ son equivalentes, es decir, originan la misma preferencia colectiva: $P_2^B = P_3^B = P_4^B$.

Ahora bien, $\boldsymbol{r}^1$ no es equivalente a ninguno de los otros tres contadores, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$, como se pone de manifiesto a continuación.

Ejemplo 2.2. Considérense 6 votantes cuyas preferencias (negativamente transitivas) sobre tres alternativas vienen dadas por:

1 votante	2 votantes	3 votantes
x_1 x_2	x_1	x_2 x_3
x_3	x_2 x_3	x_1

De aquí en adelante se entenderá que alternativas situadas en un mismo nivel son indiferentes para los agentes y las que están en un determinado nivel son preferidas a todas aquéllas que están en un nivel inferior. Con ello se supone de forma implícita que las relaciones de preferencia (fuerte y débil) e indiferencia de los agentes son transitivas.

Resulta inmediato comprobar que el primer contador de Borda individual otorga las siguientes puntuaciones $\boldsymbol{r}^1(x_1) = 5,\ \ \boldsymbol{r}^1(x_2) = 4,\ \ \boldsymbol{r}^1(x_3) = 3,$ luego $x_1 P_1^B x_2 P_1^B x_3$. Sin embargo, mediante Black I se tiene $\boldsymbol{r}^3(x_1) = 5.5,$ $\boldsymbol{r}^3(x_2) = 7,\ \ \boldsymbol{r}^3(x_3) = 5.5,$ por lo que en el agregado se obtiene $x_2 P_3^B x_1 I_3^B x_3.$ Dado que las ordenaciones colectivas son esencialmente distintas, los contadores $\boldsymbol{r}^1$ y $\boldsymbol{r}^3$ no son equivalentes. Por tanto, disponemos propiamente de dos reglas de Borda distintas que generalizan a la clásica en situaciones en las que los agentes no necesitan ordenar linealmente las alternativas: por un lado la correspondiente al contador individual $\boldsymbol{r}^1$ y, por otro, las definidas por los contadores equivalentes $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$.

Obviamente, si los agentes ordenan linealmente las alternativas, los cuatro contadores individuales resultan equivalentes: basta observar que en tal caso $\boldsymbol{r}^3 = \boldsymbol{r}^1$.

2.4 Representatividad de los contadores individuales

Parece lógico exigir, como cuestión de principio, que al puntuar cualesquiera dos alternativas a distinto nivel de preferencia los contadores individuales de Borda asignen mayor puntuación a aquélla que es mejor que la otra para el agente en cuestión. Sería deseable, por tanto, el cumplimiento de la siguiente propiedad de representatividad[8].

Definición 2.18. El contador de Borda individual $r_k^v,\ v = 1, \ldots, 4,$ es *representativo de* P^k si se verifica:

---

[8] Una función real $u : X \to \mathbb{R}$ es una utilidad débil para la relación de preferencia P si $xPy \Rightarrow u(x) > u(y)$. Se dice en este caso que u es una representación numérica débil de *P*. Es esta noción, si tenemos en cuenta la interpretación utilitarista del método de Borda, la que nos ha sugerido denominar "representatividad" del contador individual a la propiedad que aparece en la siguiente definición.

$$x_i P^k x_j \quad \Rightarrow \quad r_k^v(x_i) > r_k^v(x_j)\,,$$

para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Normalmente aludiremos a contadores individuales representativos sobreentendiéndose que lo son de las correspondientes preferencias individuales de los agentes.

Hemos de observar que Gärdenfors (1973) introdujo una propiedad análoga a la de la definición anterior (en su caso con una condición si y sólo si) en el contexto de las funciones de voto representables (*representable voting functions*).

A continuación justificamos que de la representatividad se deriva que las alternativas que reciben la misma puntuación han de ser necesariamente indiferentes.

Proposición 2.3. Si el contador r_k^v es representativo, entonces se verifica:

$$r_k^v(x_i) = r_k^v(x_j) \quad \Rightarrow \quad x_i I^k x_j\,,$$

para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Demostración. Utilizando la implicación contrarrecíproca en la definición de la representatividad de r_k^v para las alternativas x_i y x_j, se tiene $r_k^v(x_i) \leq r_k^v(x_j) \Rightarrow x_j R^k x_i$ y $r_k^v(x_j) \leq r_k^v(x_i) \Rightarrow x_i R^k x_j$; de aquí se deduce $r_k^v(x_j) = r_k^v(x_i) \quad \Rightarrow \quad x_i I^k x_j$. ■

Observación 2.14. De la representatividad de r_k^v no se sigue la implicación recíproca de la proposición anterior, esto es, de $x_i I^k x_j$ no se deriva $r_k^v(x_j) = r_k^v(x_i)$. En el caso en que I^k no fuera transitiva (y, como hemos señalado, esto puede suceder aún siéndolo P^k), se tendrían tres alternativas x_i,

x_j y x_l verificando $x_i I^k x_j$, $x_j I^k x_l$ y $x_i P^k x_l$. Entonces, si la implicación fuera cierta, debería ocurrir $r_k^v(x_i) = r_k^v(x_j)$, $r_k^v(x_j) = r_k^v(x_l)$ y $r_k^v(x_i) > r_k^v(x_l)$, lo que es absurdo. Por tanto, los contadores individuales r_k^v pueden asignar distintas puntuaciones a alternativas indiferentes, incluso cuando éstos sean representativos.

A continuación demostramos que los cuatro contadores introducidos son representativos cuando las relaciones de preferencia fuerte de los agentes son transitivas. Como existen dos clases de equivalencia de contadores respecto de la preferencia colectiva inducida, bastará con probarlo para un representante de cada clase.

Proposición 2.4. Si la relación de preferencia fuerte P^k es transitiva, entonces los contadores de Borda r_k^v, $v = 1, \ldots, 4$, son representativos.

Demostración: Para el contador r_k^1 supongamos $x_i P^k x_j$. Al ser P^k transitiva, si ocurriera $x_j P^k x_l$, se tendría $x_i P^k x_l$. Por tanto,

$$\{x_l \mid x_j P^k x_l\} \subset \{x_l \mid x_i P^k x_l\}.$$

Nótese que la inclusión es estricta, ya que la alternativa x_j pertenece al segundo conjunto, pero no al primero. En consecuencia,

$$r_k^1(x_i) = \text{card}\,\{x_l \mid x_i P^k x_l\} > \text{card}\,\{x_l \mid x_j P^k x_l\} = r_k^1(x_j).$$

Habida cuenta de la equivalencia existente entre los restantes contadores, basta con probar la representatividad para uno de ellos. Lo haremos, por su mayor sencillez, para r_k^4. Supongamos $x_i P^k x_j$. Al ser P^k transitiva, si ocurriera $x_j P^k x_l$, entonces también se verificaría $x_i P^k x_l$. Por tanto,

$$\{x_l \mid x_j P^k x_l\} \subset \{x_l \mid x_i P^k x_l\}.$$

De nuevo la inclusión es estricta, ya que la alternativa x_j pertenece al segundo conjunto, pero no al primero. Análogamente, si ocurriera $x_l P^k x_i$, por transitividad también se tendría $x_l P^k x_j$. Por tanto,

$$\{x_l \,|\, x_l P^k x_i\} \subset \{x_l \,|\, x_l P^k x_j\}.$$

Y de nuevo aquí el contenido es estricto, ya que la alternativa x_i pertenece al segundo conjunto, pero no al primero. En consecuencia,

$$\text{card}\,\{x_l \mid x_i P^k x_l\} > \text{card}\,\{x_l \mid x_j P^k x_l\},$$

$$\text{card}\,\{x_l \,|\, x_l P^k x_j\} > \text{card}\,\{x_l \,|\, x_l P^k x_i\}.$$

Sumando ambas expresiones se obtiene:

$$\text{card}\,\{x_l \mid x_i P^k x_l\} + \text{card}\,\{x_l \mid x_l P^k x_j\} > \text{card}\,\{x_l \mid x_j P^k x_l\} + \text{card}\,\{x_l \,|\, x_l P^k x_i\}.$$

Operando, tenemos:

$$\text{card}\,\{x_l \mid x_i P^k x_l\} - \text{card}\,\{x_l \,|\, x_l P^k x_i\} > \text{card}\,\{x_l \mid x_j P^k x_l\} - \text{card}\,\{x_l \mid x_l P^k x_j\},$$

esto es, $r_k^4(x_i) > r_k^4(x_j)$. ■

Observación 2.15. Si P^k no es transitiva, entonces el contador r_k^v puede no ser representativo, como se pone de manifiesto a continuación. Supóngase la relación de preferencia individual P^k sobre $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, dada explícitamente por $x_1 P^k x_2$, $x_2 P^k x_3$, $x_3 P^k x_4$, $x_2 P^k x_4$. Entonces $r_k^1(x_1) = 1 < 2 = r_k^1(x_2)$, a pesar de que $x_1 P^k x_2$.

Más aún, si suponemos no sólo uno, sino todo un electorado de *m* agentes con las mismas preferencias, se tendría una situación en la que todos y cada uno de ellos preferirían x_1 a x_2, mientras que la preferencia colectiva dada por la regla de Borda sería $x_2 P_1^B x_1$, pues $\boldsymbol{r}^1(x_1) = m < 2m = \boldsymbol{r}^1(x_2)$. Se observa, pues, que el incumplimiento de la transitividad de los agentes puede desencadenar que se vulnere el principio de unanimidad.

Como ya hemos comentado anteriormente, en la caracterización de la regla de Borda, Nitzan – Rubinstein (1981) no contemplan como hipótesis de racionalidad individual necesaria la transitividad de los agentes, a pesar de las implicaciones que, como hemos visto, supone esta permisividad.

2.5 Borda *versus* Condorcet

Condorcet (1785) postuló, a partir de presupuestos filosóficos generales más que con fines pragmáticos, que el ganador en una votación debería vencer por mayoría simple al resto de oponentes en duelos por parejas. Este es el denominado *principio de Condorcet*, que formalizamos a continuación.

Definición 2.19. La alternativa x_i es *ganadora de Condorcet* si para cualquier alternativa $x_j \neq x_i$ se verifica:

$$\text{card}\,\{\, k \mid x_i P^k x_j \} > \text{card}\,\{\, k \mid x_j P^k x_i \},$$

es decir x_i derrota por mayoría simple a cada una de sus oponentes.

Conviene señalar, como hace Nurmi (1999, p. 22), que en la filosofía del ganador de Condorcet lo importante es el diseño del método que lo seleccione en el caso de que exista. Tal propiedad de que la alternativa ganadora mediante un determinado método de votación coincida la alternativa ganadora de Condorcet, cuando ésta exista, se denomina *consistencia de Condorcet*, y se dirá, caso de que se cumpla, que el método es *Condorcet-consistente.*

A pesar de que, como puso de manifiesto Morales (1805), las puntuaciones Borda derivan de comparaciones por pares (tácitas o explícitas) entre los candidatos o alternativas por parte de los agentes, el método de Borda clásico no es Condorcet-consistente (y por tanto tampoco lo son las extensiones introducidas). A continuación se propone el ejemplo con el que Condorcet (1785) puso de manifiesto que el método de Borda no cumple su criterio.

Ejemplo 2.3. Considérese una comisión de 30 votantes, donde existen dos coaliciones cuyas preferencias vienen dadas como sigue:

19 votantes	11 votantes
x_1	x_2
x_2	x_3
x_3	x_1

En este caso x_1 es ganadora de Condorcet, ya que vence a x_2 y a x_3 por 19 votos frente a 11. Sin embargo, las puntuaciones Borda colectivas, según el contador de Borda clásico, son $\boldsymbol{r}(x_1) = 38$, $\boldsymbol{r}(x_2) = 41$, $\boldsymbol{r}(x_3) = 11$. Por tanto, x_2 es la alternativa ganadora según la regla de Borda clásica (y cualquiera de sus extensiones, no importa qué contador se utilice, ya que, como se ha mencionado anteriormente, éstos originan la misma ordenación colectiva cuando las preferencias de los agentes son órdenes lineales).

De hecho, Condorcet fue más allá en su crítica y constató que cualquier regla de puntuación conduce a la misma inconsistencia objetable a la regla de Borda[9]. Una regla de puntuación (*scoring rule*) se define mediante un vector de pesos con tantas componentes como alternativas $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de manera que cada agente asigna la puntuación s_1 a la alternativa que ocupe el primer puesto, s_2 al segundo, y así sucesivamente. De este modo, la regla de Borda no es sino una regla de puntuación de pesos $s_i = n - i$. A su vez, la regla de Borda así definida es equivalente a cualquier regla de puntuación con pesos en

[9] Una prueba de este aserto puede verse en Gärdenfors (1973).

progresión aritmética de diferencia común positiva, esto es, tales que $s_i - s_{i+1} = d > 0,\ \ i = 1, \dots, n-1.$

De la definición de alternativa ganadora de Condorcet se sigue su unicidad, supuesta su existencia. Pero tal alternativa ideal no tiene por qué existir, un hecho éste que en parte vulnera el sólido razonamiento de Condorcet y del que fue plenamente consciente, sin que por ello variasen sus posiciones. El ejemplo clásico de inexistencia de ganador de Condorcet, conocido como *terna de Condorcet*, es una simplificación del propuesto por dicho autor.

Ejemplo 2.4. Considérense tres agentes cuyas preferencias sobre las alternativas x_1, x_2, x_3 vienen dadas por:

1 votante	1 votante	1 votante
x_1	x_2	x_3
x_2	x_3	x_1
x_3	x_1	x_2

En este caso ninguna alternativa vence a sus oponentes al ser comparadas por parejas. De hecho, aunque los agentes son transitivos, en este caso la preferencia colectiva entre pares de alternativas definida a partir de la mayoría simple no es siquiera triple acíclica, pues dos de cada tres agentes prefieren en cada caso x_1 a x_2, x_2 a x_3 y ¡x_3 a x_1! Este ejemplo ilustra la denominada *paradoja del voto*, *efecto Condorcet*, o *existencia de mayorías cíclicas.*

En ningún caso ocurriría esto si se emplease la regla de Borda que, como hemos visto, origina siempre una relación de preferencia colectiva negativamente transitiva, por tanto transitiva y acíclica. Ahora bien, aunque la regla de Borda siempre selecciona alguna alternativa ganadora, aquélla(s) que obtenga(n) la máxima puntuación, puede haber más de una, incluso todas, tal como ocurriría en la terna de Condorcet. Así, la ausencia de inconsistencias colectivas en la regla de Borda puede ir acompañada de falta de decisividad.

A continuación analizaremos algunas relaciones existentes entre los resultados obtenidos por la regla de Borda, según los contadores individuales utilizados, y las alternativas ganadoras Condorcet. Smith (1973) y Fishburn – Gehrlein (1976) demostraron que cuando los agentes ordenan linealmente las alternativas, una alternativa que sea ganadora de Condorcet nunca resultaría la peor puntuada por la regla de Borda (esta idea aparece ya en Daunou (1803)). A continuación demostramos este mismo resultado para los contadores equivalentes $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$, sin necesidad de exigir hipótesis alguna a las relaciones de preferencia individuales. Sin embargo, como veremos, este resultado no es cierto si se considera el contador $\boldsymbol{r}^1$.

Proposición 2.5. Una alternativa ganadora de Condorcet, caso de existir, nunca será la peor puntuada por la regla de Borda si se emplean los contadores $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$.

Demostración. Supongamos que la alternativa x_i es ganadora de Condorcet, es decir, para cualquier alternativa $x_j \neq x_i$ se verifica:

$$\text{card}\,\{\, k \mid x_i P^k x_j \} > \text{card}\,\{\, k \mid x_j P^k x_i \}\,.$$

Teniendo en cuenta la equivalencia entre los contadores $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$, consideremos la regla de Borda asociada a $\boldsymbol{r}^4$ y utilizaremos, por tanto, los contadores individuales r_k^4, $k = 1,\ldots,m$. Para justificar que x_i no puede obtener la peor puntuación con $\boldsymbol{r}^4$, basta demostrar que $\boldsymbol{r}^4(x_i) = \sum_{k=1}^{m} r_k^4(x_i) > 0$, ya que como ha sido comentado en la Observación 2.11, se cumple $\sum_{j=1}^{n} r_k^4(x_j) = 0$ y, en consecuencia, la puntuación total media es:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}^4(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} r_k^4(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_k^4(x_j) = 0\,.$$

El hecho de que $\boldsymbol{r}^4(x_i)$ fuera positiva obligaría a que existiera alguna alternativa con puntuación negativa, luego peor puntuada que x_i.

Para demostrar esto, tenemos en cuenta que, por ser x_i ganadora de Condorcet, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \text{card}\,\{\,k \mid x_i P^k x_j\} > \sum_{j=1}^{n} \text{card}\,\{\,k \mid x_j P^k x_i\}\,,$$

es decir el número total de victorias de x_i es mayor que el número total de sus derrotas, lo que equivale a que se satisfaga:

$$\sum_{k=1}^{m} \text{card}\left\{x_j \mid x_i P^k x_j\right\} > \sum_{k=1}^{m} \text{card}\left\{x_j \mid x_j P^k x_i\right\},$$

es decir a que se cumpla $\boldsymbol{r}^4(x_i) > 0$. ■

De la proposición anterior se deriva el hecho de que ninguna alternativa que alcance la peor puntuación con la regla de Borda asociada a los contadores $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$ puede ser ganadora de Condorcet. Esto no ocurre, si se utiliza el contador $\boldsymbol{r}^1$, tal como se justifica a continuación.

Observación 2.16. La regla de Borda asociada al contador $\boldsymbol{r}^1$ puede asignar la peor puntuación a una alternativa ganadora de Condorcet. Supongamos 10 votantes que disponen tres alternativas de la siguiente forma:

2 votantes	3 votantes	3 votantes	2 votantes
x_1	$x_2 \quad x_3$	$x_1 \quad x_2$	x_3
$x_2 \quad x_3$	x_1	x_3	$x_1 \quad x_2$

Resulta inmediato comprobar que la alternativa x_2 es ganadora de Condorcet, ya que tres votantes prefieren x_2 a x_1 y x_3, frente a sólo dos que prefieren x_1 y

x_3 a x_2. No obstante, $\boldsymbol{r}^1(x_2) = 6 < 7 = \boldsymbol{r}^1(x_1) = \boldsymbol{r}^1(x_3)$. En este aspecto, el contador $\boldsymbol{r}^1$ tiene peor comportamiento que los otros tres equivalentes, ya que como se ha visto en la proposición anterior esta situación no puede ocurrir con los contadores $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$.

Un resultado en cierta forma dual del proporcionado por la Proposición 2.5 consiste en que toda alternativa que obtenga la máxima puntuación colectiva con la regla de Borda puede perder por mayoría simple en confrontaciones por pares con alguna de sus oponentes, pero no con todas ellas; en otras palabras, un ganador de Borda no puede ser perdedor de Condorcet, concepto éste que formalizamos a continuación La demostración de tal resultado en el marco clásico puede verse, por ejemplo, en Gärdenfors (1973). Nosotros la hemos adaptado al caso en que eventualmente los agentes declaren indiferencia entre alternativas distintas y operen usando cualquiera de los contadores equivalentes $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$.

Definición 2.20. La alternativa x_i es *perdedora de Condorcet* si para cualquier alternativa $x_j \neq x_i$ se verifica:

$$\text{card}\,\{\,k \mid x_i\,P^k x_j\} < \text{card}\,\{\,k \mid x_j\,P^k x_i\}\,,$$

es decir x_i es derrotada por cada una de sus oponentes a través de la regla de mayoría simple.

Proposición 2.6. Una alternativa perdedora de Condorcet, caso de existir, nunca puede resultar ganadora por la regla de Borda si se emplean los contadores $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$.

Demostración. Considerando razonamientos similares a los utilizados en la Proposición 2.5, supongamos que la alternativa x_i es perdedora de Condorcet, es decir, para cualquier alternativa $x_j \neq x_i$ se verifica:

$$\text{card } \{ k \mid x_i P^k x_j \} < \text{ card } \{ k \mid x_j P^k x_i \} .$$

De nuevo consideraremos la regla de Borda asociada a $\boldsymbol{r}^4$. Para justificar que x_i no puede obtener la mejor puntuación con $\boldsymbol{r}^4$, bastará demostrar que $\boldsymbol{r}^4(x_i) = \sum_{k=1}^{m} r_k^4(x_i) < 0$, ya que como ha sido justificado en la demostración de la Proposición 2.5, la puntuación total media es 0. El hecho de que $\boldsymbol{r}^4(x_i)$ fuera negativa obligaría a que existiera alguna alternativa con puntuación positiva, luego mejor puntuada que x_i. Para demostrar esto, tenemos en cuenta que, por ser x_i perdedora de Condorcet, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \text{ card } \{ k \mid x_i P^k x_j \} < \sum_{j=1}^{n} \text{ card } \{ k \mid x_j P^k x_i \} ,$$

es decir el número total de victorias de x_i es menor que el número total de sus derrotas, lo que equivale a que se satisfaga:

$$\sum_{k=1}^{m} \text{ card}\left\{ x_j \mid x_i P^k x_j \right\} < \sum_{k=1}^{m} \text{ card}\left\{ x_j \mid x_j P^k x_i \right\},$$

es decir a que se cumpla $\boldsymbol{r}^4(x_i) < 0$. ■

Queda, pues, probado el hecho de que ninguna alternativa que alcance la mejor puntuación con la regla de Borda asociada a los contadores $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$ puede ser perdedora de Condorcet[10]. Esto no ocurre, si se utiliza el contador $\boldsymbol{r}^1$, tal como se pone de manifiesto a continuación.

Observación 2.17. La regla de Borda asociada al contador $\boldsymbol{r}^1$ puede asignar la mejor puntuación a una alternativa perdedora de Condorcet. Supongamos 5 votantes que disponen tres alternativas de la siguiente forma:

2 votantes	3 votantes
x_1	$x_2 \quad x_3$
$x_2 \quad x_3$	x_1

Resulta inmediato comprobar que la alternativa x_1 es perdedora de Condorcet, ya que tres votantes prefieren x_2 y x_3 a x_1, frente a sólo dos que prefieren x_1 a x_2 y x_3. Sin embargo, $\boldsymbol{r}^1(x_1) = 4 > 3 = \boldsymbol{r}^1(x_2) = \boldsymbol{r}^1(x_3)$. De nuevo, el contador $\boldsymbol{r}^1$ tiene peor comportamiento que los otros tres equivalentes, ya que como se ha visto en la proposición anterior esta situación no puede ocurrir con los contadores $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ y $\boldsymbol{r}^4$.

Este hecho no es excepcional. También que la "regla de Borda probabilística" (Heckelman (2003)), que mencionamos ya en el primer capítulo, es susceptible de seleccionar a la alternativa perdedora de Condorcet.

A pesar de las desventajas señaladas de la regla de Borda (en cualquiera de sus versiones) en relación con el criterio de Condorcet, Van Newenhizen (1992) y Saari (2000) han probado, en el caso clásico, que este método es la regla de puntuación ("scoring rule") menos susceptible de vulnerar el criterio de Condorcet. Aún más, recientemente Baharad – Nitzan (2003) han probado que si se introduce un principio de Condorcet generalizado (usando mayorías cualificadas en vez de la simple), entonces la regla de Borda clásica es Condorcet-consistente en el sentido indicado cuando el umbral de cualificación guarda una cierta relación con el número de alternativas.

No obstante el aval que en parte proporcionan los anteriores resultados a la regla de Borda, se mantiene el conflicto de base entre la decisividad de este

[10] Nurmi (1999, pp. 11 – 30) conjetura que esta exclusión del perdedor de Condorcet pudiera estar ya latente en el diseño original del método de Borda.

método, y la incontestabilidad[11] del principio de Condorcet. Esta es la vieja polémica Borda – Condorcet a la que ya hemos aludido, que enfrenta los enfoques posicional y no posicional de la teoría del voto, respectivamente. Ante planteamientos tan opuestos de raíz, una fértil línea de investigación en el campo de la TES la ha proporcionado "el desafío de combinar la regularidad del enfoque de Borda con el respeto al principio de Condorcet en un método unificado", tal como señalan Young – Levenglick (1978). Por su conexión con el tema que nos ocupa, a continuación damos un repaso siguiendo un criterio cronológico, de algunas de las soluciones de compromiso, todas ellas Condorcet-consistentes, que este problema, de larga tradición en la teoría de las elecciones, ha suscitado[12].

1. Nanson (1883) propuso una regla de Borda iterada con eliminación, en la que en cada etapa se elimina(n) la(s) alternativas con peor puntuación, y se repite el cómputo de Borda hasta que sólo quede una o un grupo de ellas empatadas (véase Straffin Jr. (1980, pp. 31 y ss.)).

2. Copeland (1951) propuso un contador tipo Borda que, para *n* candidatos y *m* votantes, viene dado por:

$$c(x_i) = \sum_{j \neq i} \mathrm{sgn}(\mathrm{mg}(i, j)) ,$$

   donde

[11] A pesar de su consistencia interna, el principio de Condorcet también ha sido motivo de crítica. Así, por ejemplo, se ha indicado que el ganador de Condorcet puede presentar alguna duda de idoneidad en ciertas situaciones muy particulares (véase a este respecto Fishburn (1977), quien exhibe un ejemplo *ad hoc* a este respecto). También se ha señalado que no importa el margen por el que vence a cada uno de sus oponentes, idea que está latente en el diseño del método de Copeland (1951), del que ya hemos hablado y que formalizaremos a continuación. Además, como se verá con más detalle en 2.6.7, Moulin (1988) probó que el principio de Condorcet implica la denominada "paradoja de la abstención". Todo ello no obsta para que, aun con ciertas reservas, se acepte de forma extendida el criterio de Condorcet como *desideratum* en una votación.

[12] Una exposición más detallada puede verse en Martínez Panero (2002).

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Como en el método de Borda, la mayor puntuación decide la votación, pero nótese que, a diferencia de Black II, que computa individualmente puntos a favor menos puntos en contra, el método de Copeland contabiliza colectivamente victorias menos derrotas. Por ello, si existe un ganador de Condorcet, x_i, lo es también mediante este procedimiento, con la puntuación máxima posible, $c(x_i) = n - 1$.

No obstante, en ausencia de ganador de Condorcet, Niemi – Riker (1976) mostraron que el ganador de Copeland puede perder por mayoría simple frente al ganador de Borda, por lo que Straffin Jr. (1980, pp. 33 y 34) ha sugerido un procedimiento híbrido definido como sigue: selecciónese el ganador de Copeland, a menos que éste sea derrotado por el ganador de Borda, en cuyo caso este último será el ganador.

3. Tal vez la solución más natural presentada al problema que nos ocupa sea la de Black (1958, pp. 46 – 66), quien también diseñó un procedimiento híbrido de votación con criterio lexicográfico, a saber: elíjase el ganador de Condorcet, caso de existir; en caso contrario, selecciónese el ganador de Borda. Black señala la ventaja que supone el hecho de que de forma unificada (en nuestro caso, mediante la que hemos denominado matriz agregada) se puedan realizar los cómputos relativos al criterio de Condorcet y a las puntuaciones Borda.

4. Kemeny (1959) propuso un método de votación inspirado en la idea de “mejor aproximación” en el tratamiento de datos estadísticos que, según Young (1986, 1988 y 1995), se encuentra ya, aunque de forma un tanto

vaga, en los escritos dejados por Condorcet[13]. El método de Kemeny, caracterizado por Young – Levenglick (1978), se puede entender también como una especie de "híbrido axiomático", ya que es el único procedimiento que se obtiene al serle impuestas ciertas propiedades deseables de los enfoques posicional y no posicional. (Véase Saari – Merlin (2000)).

Otras vías de aproximación más recientes entre los enfoques de Borda y Condorcet pueden verse en Fishburn (1977), Young (1977 y 1988) y Truchon – Le Breton (1997), entre otros.

2.6 Otras propiedades de la regla de Borda

Además de las estudiadas hasta ahora, a continuación se presentan otras propiedades que consideramos las más significativas de entre las que aparecen en la literatura. En este tipo de análisis, se consignan las bondades de la regla de Borda, pero se señalan también algunos de sus rasgos menos deseables, por lo que, para paliarlos en la medida de lo posible, se han propuesto nuevas variantes respecto del patrón original que consignamos en cada caso.

2.6.1 Respeto por la media

Straffin Jr. (1980) y Mueller [1979] (1984, pp. 73 y 74), entre otros, han señalado que la regla de Borda selecciona como ganador al candidato (o candidatos) que, "como media" ocupa(n) un lugar elevado en las ordenaciones de las preferencias de los votantes. De hecho, tal como señala este último, "Black comienza su examen de los distintos procedimientos de votación con el siguiente postulado normativo: 'el candidato que debe ser elegido es el mejor

---

[13] Más recientemente, Nurmi (1999) expone varios métodos prácticos concebidos por Condorcet para evitar el problema de falta de decisividad que supone la presencia de ciclos en la preferencia colectiva. El denominado "método de máximo acuerdo" es, de hecho, una formulación alternativa del método de Kemeny.

situado, por término medio[14], en las relaciones de preferencias de los votantes' (cf. Black (1958, p. 56))". El mismo espíritu es el que hizo que Morales (1797, p. 8) denominase la regla de Borda como "método de compensacion y suma" y que Black (1976) retomase literalmente (y, por supuesto, de modo independiente) este argumento de compensación en su "justificación parcial de la regla de Borda".

Tal justificación en aras de un deseable "respeto por la media" recae en dos ideas básicas: primera, la de puntuación de Borda individual otorgada a una alternativa por un agente como número de las que son peores valoradas que ella; y segunda, una noción de "normalización" basada en el tratamiento igualitario de los agentes. Con estos prerrequisitos, Straffin Jr. (1980, p. 27) señala que "la puntuación de Borda colectiva de una alternativa x_i dividida por el número de votantes es justamente el promedio de alternativas valoradas peor que x_i".

Por su parte, Bassett Jr. – Persky (1999) afirman que los métodos como el de Borda, que están basados en la noción de media, son notoriamente no robustos[15]. Esta característica de la regla de Borda ya fue señalada por Morales (1797, pp. 16 y ss.) ya que incluso cuando una amplia mayoría considerase como más deseada una misma alternativa al ser comparada con el resto, podría darse el caso de que la ganadora de Borda fuese otra alternativa distinta, si ésta ocupa "en media" un lugar más elevado en las preferencias de los agentes. Aunque Morales hizo sus razonamientos en abstracto, el siguiente ejemplo, inspirado en su análisis, ilustra tal posibilidad.

[14] El problema es que, como es bien sabido, existen diferentes tipos de media. De esta manera, tal como señala de nuevo Mueller [1979] (1984, p. 74) "el criterio de Condorcet también suministra, aunque de modo distinto, un resultado que es *por término medio* preferido a los demás".

[15] La robustez de un estimador es un concepto estadístico que, extrapolado al ámbito de la TES se puede interpretar, *grosso modo*, como "adherencia a la opinión mayoritaria".

Ejemplo 2.5. Considérese una comisión de 4 votantes, cuyas preferencias sobre 5 alternativas vienen dadas como sigue:

3 votantes	1 votante
x_1	x_2
x_2	x_3
x_3	x_4
x_4	x_5
x_5	x_1

Se observa que, aunque x_1 es la mejor alternativa para todos los agentes excepto uno, obtiene menos puntuación Borda que x_2. Concretamente:

$$\boldsymbol{r}(x_1) = 3 \cdot 4 = 12 < 13 = 3 \cdot 3 + 4 = \boldsymbol{r}(x_2).$$

Como ya señalamos en el primer capítulo, Daunou (1803) y Nanson (1882) sugirieron que situaciones (aparentemente) tan controvertidas como ésta debieran haber llevado a Borda a cuestionar su propio método. Se trata, una vez más, de la vieja polémica Borda – Condorcet llevada a un caso extremo[16].

2.6.2 Incumplimiento del Principio de Independencia de Alternativas Irrelevantes

Tal como pusieron de manifiesto McLean – Sommerlad (1991) y McLean (1995), el principio de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI) aparece ya en diversos escritos electorales de Condorcet, si bien fue Arrow [1963] (1974) quien, en su célebre Teorema General de Imposibilidad, lo llevó

[16] Es posible, por otro lado, que ejemplos como éste hiciesen patente a Morales (1797) la manipulabilidad del método de Borda mediante lo que él denominó "desercion" pues, a la vista de las puntuaciones emitidas por el electorado, podría pensarse que el último agente ha rebajado estratégicamente la puntuación de x_1 para primar a su favorito x_2, que con esta maniobra resulta vencedor. Sobre los aspectos estratégicos de la regla de Borda véase 2.6.3.

hasta sus últimas consecuencias[17]. En palabras de Sen [1970] (1976), Arrow extrajo la conclusión "general en su nihilismo" de que "no hay ninguna función de bienestar social que pueda satisfacer simultáneamente [...] cuatro condiciones aparentemente suaves", una de las cuales es precisamente el axioma de IAI citado. Justamente, este elegante tratamiento axiomático o, en palabras de Riker (1982, p. 129), esta "invulnerabilidad teórica", fue algo tan innovador en Economía que constituyó uno de los argumentos por los que fue concedido a Arrow el premio Nobel de esta disciplina en 1972.

El principio de IAI postula que, supuesta una preferencia colectiva[18] obtenida a partir de las preferencias individuales de los agentes (como pudiera ser, por ejemplo, P^B construida a partir de órdenes lineales de los agentes cuando se utiliza la regla de Borda clásica), la comparación mediante dicha preferencia agregada entre cualesquiera dos alternativas debe depender únicamente de la posición relativa de esas dos alternativas en las preferencias individuales de los votantes, y no de la relación de éstas con otras alternativas. A modo de ejemplo y parafraseando a Domenech (1989, p. 356), supongamos un grupo de comensales que va al restaurante y, en una situación un tanto forzada, debe elegir un menú conjunto de entre dos posibilidades: salmón o solomillo. Los comensales, tras decidirlo mediante votación eligen salmón. A todo eso,

[17] Ahora bien, Sen [1970] (1976, p. 60) señala que "la prueba de Arrow es algo oscura, sobre todo porque el uso de la condición crucial *I* (es decir, su condicion 3) nunca se aclara. De hecho esta condición no es ni siquiera mencionada en la demostración". La condición en cuestión es el principio de IAI.

[18] La expresión "preferencia colectiva" o "agregada" puede ser problemática. Según confesión de Arrow a Barberà (véase prólogo a Martínez Panero – García Lapresta (2003)), "durante una de sus estancias en la RAND Corporation, a finales de los años 40, [Arrow] hizo uso del término "preferencia social" ante un matemático. Éste le mostró incomprensión ante el concepto, y Arrow intentó convencerle de que podía definirse fácilmente como una extensión natural de la aplicación del método de mayoría al caso de más de dos alternativas. Pero pronto cayó en la cuenta de que tal pretensión era difícil de justificar, y finalmente demostró que, bajo sus propias reglas de juego, resultaba simplemente imposible. Así pues, el famoso teorema de imposibilidad de Arrow nace y se expresa como el enunciado de que una dificultad bien conocida del método de mayoría –la posibilidad de generar ciclos– es de hecho mucho más general, y que la comparten todos los métodos de agregación de preferencias dentro de una clase muy amplia". Sin embargo, como se ha señalado, con el método de Borda (o cualquier otro método basado en puntuaciones), la existencia de una "preferencia social" bien definida no presenta este tipo de problemas.

aparece el camarero y les informa de una tercera posibilidad no contenida en la carta: también hay lubina. Pues bien, el cumplimiento del principio IAI monta tanto como prohibirles que, tras una nueva votación, digan: “estupendo, en ese caso en vez de salmón, preferimos... ¡solomillo!”.

Es bien conocido que tal situación, en absoluto deseable por su inconsistencia, se puede dar efectivamente si se emplea la regla de Borda para agregar las preferencias individuales[19], como muestra el siguiente ejemplo que aparece en Sen [1970] (1976, p. 59). El mismo autor señala, sin embargo, que se trata del único de los cuatro axiomas de Arrow vulnerado por la regla de Borda (que él denomina “método de votación preferente”).

Ejemplo 2.6. Supongamos tres agentes con las preferencias individuales especificadas en la siguiente tabla:

1 votante	1 votante	1 votante
x_1	x_3	x_3
x_2	x_1	x_1
x_3	x_2	x_2

Mediante la regla de Borda clásica, x_1 y x_3 reciben ambos 4 puntos, luego $x_1 I^B x_3$.

Considérese ahora un segundo escenario en donde las preferencias de x_1 frente a x_3 permanecen iguales para los tres individuos, mientras que el primero de ellos cambia su opinión frente a una alternativa ajena x_2 y decide que es peor que ambas x_1 y x_3. La nueva situación sería, pues:

[19] Otras paradojas de la regla de Borda derivadas del incumplimiento del principio de IAI pueden verse en Ordeshook (1986, pp. 68 y ss.).

1 votante	1 votante	1 votante
x_1	x_3	x_3
x_3	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2

Este cambio mantiene el tanteo de x_1 inalterable, pero x_3 obtiene un punto más, por lo que ahora $x_3 P^B x_1$. Así pues, aunque la posición relativa de x_1 y x_3 sigue siendo la misma para todos los agentes, no ocurre lo mismo con la elección social, por lo que cabe decir que la alternativa x_2 ha resultado ser relevante en la misma.

Obviamente, el incumplimiento del principio de IAI para la regla de Borda clásica conlleva el de todas las reglas que extienden a ésta. Y, de hecho, tal como señala Young (1995), Condorcet, una vez más, probó que cualquier regla de puntuación es susceptible de la misma crítica (véase a este respecto, Gärdenfors (1973)), razón por la cual señala que "los resultados obtenidos mediante reglas de puntuación necesariamente se basan en factores irrelevantes". Ello ha motivado que tanto Sen (1977) como Pattanaik (2002) hayan propuesto variantes de la regla de Borda en conexión con el hecho anteriormente apuntado[20]. Señalemos, para concluir este apartado, que últimamente hay una línea crítica, encabezada por Saari (1999) y otros autores, que cuestiona la validez del principio de IAI (cf. McLean (2003)).

[20] En el primer capítulo ya aludimos a las variantes "narrow and broad Borda rules", que Sen (1977, p. 79) presenta como sigue. Mediante la primera de ellas "la elección sobre cualquier subconjunto S de X […] se realiza mediante las puntuaciones Borda para X. La segunda […] asigna puntuaciones Borda de acuerdo con la ordenación sobre S […]". Por su parte, Pattanaik (2002, pp. 371 – 372), en su estudio de las reglas posicionales de decisión colectiva distingue entre "Borda ranking rule" y "Borda decision rule", y para cada una de ellas considera, a su vez, "type I and II". Sin entrar en detalles, señalemos que la "narrow Borda rule" de Sen y la "Borda decisión rule, type I" de Pattanaik verifican el principio de IAI.

2.6.3 Manipulabilidad

Los aspectos estratégicos que entraña el uso de la regla de Borda fueron denunciados ya en la época en que se adoptó su uso en el *Institut National de France*, como señalamos en el primer capítulo. Así, el *Discours Peliminaire* de Condorcet (1785), sin citar a Borda (hace alusión veladamente a un "geómetra célebre") pero refiriéndose sin género de duda a su método, reputa a éste de cabalístico[21] (cf. Moulin – Young (1987)). Es bien conocido (la cita se ha convertido en un lugar común y refleja la ideología de toda una época) que cuando esta crítica le fue comunicada a Borda, éste se escudó en la pretendida honorabilidad de la que deberían hacer gala los cuerpos electorales.

Otro contemporáneo de Borda que también fue plenamente consciente de la manipulabilidad de su regla fue Morales (1797), quien acuñó el término "desercion" dos siglos antes de que en el contexto de la Teoría de Juegos se hablase, equivalentemente, de "misrepresentation of preferences" (cf. por ejemplo Ordeshook (1986, pp. 84 y ss.)). Morales (1797) cuantificó estas deserciones en el resultado final de una votación, señalando que el impacto de las mismas es menor con la regla de Borda que con el método de pluralidad. En cierta forma, se adelantó así a alguno de los resultados de Saari (1990) a los que nos referiremos a continuación.

La literatura a que ha dado lugar el estudio de estos aspectos ha sido y es muy profusa (véase, por ejemplo, Barberà (2001)). Así, Black (1976) señala la debilidad del método de Borda ante un voto estratégico del tipo siguiente: el votante, aparte de la primera elección, invierte el resto de lo que serían sus preferencias sinceras. Ludwin (1978), a su vez, señala otra posibilidad (usando ahora una regla de Borda extendida): votar al favorito en primer lugar y a todos los otros contrincantes, a la vez, en último lugar. Ludwin señala que esta

[21] Tal vez se entienda mejor este comentario de Condorcet si se tiene en cuenta que en francés "cabale" tiene una acepción de "intriga o maniobra oculta", de la que carece el término "cábala" en castellano.

posibilidad es “dominante” respecto de la indicada por Black, significando esto que el resultado es mejor o al menos tan bueno como el obtenido mediante tal estrategia para el votante en cuestión[22]. Por su parte, Sen (1984) ha estudiado la manipulabilidad de una clase de reglas que incluyen la de Borda y, para paliarla, Dummett (1998) ha propuesto dos variantes del procedimiento (“revised and adjusted Borda count”). Señalemos así mismo que Saari (1990) ha probado que la regla de Borda es el método de votación posicional menos manipulable cuando concurren tres candidatos, y que se comporta razonablemente bien cuando el número de alternativas aumenta, mejor al menos que otros procedimientos, como el de pluralidad, antipluralidad[23] y voto aprobatorio. Y recientemente, como ya señalamos en el capítulo anterior, Heckelman (2003) ha introducido una regla de Borda probabilística que “elimina el voto estratégico sobre el conjunto de alternativas […] al combinar los beneficios de la regla de Borda determinista con las ventajas de una lotería justa” aunque, entre sus desventajas debe señalarse su posible selección del perdedor de Condorcet, como ya se ha apuntado.

Paradójicamente, Niemi – Riker [1976] (1991, p. 481) señalan que, puesto que a la luz del teorema de Gibbard – Satterthwaite todos los métodos de votación son manipulables, “la manipulabilidad deja de de ser una cuestión interesante” y postulan que hay que concentrarse en que, al menos, sean decisivos, aspecto éste que sí logra la regla de Borda. Por el contrario, Ordeshook (1986, p. 84), quien pone de manifiesto distintos resultados electorales no deseables mediante la regla de Borda, llega a la conclusión de que la manipulabilidad es lo que hace interesante la política y la libra de ser un puro mecanismo[24]. Por fin, tanto Riker (1986) como Colomer (1990) han hablado de “el arte de la

[22] También comenta Ludwin que la manipulabilidad se hace más evidente en pequeños comités, quedando diluida cuando el número de electores y candidatos se incrementa de modo considerable. Véase, sin embargo, Felsenthal (1986) contra alguno de los argumentos de Black y Ludwin.
[23] Mediante este método los agentes deben votar por todas las alternativas excepto por una.
[24] Literalmente: “[…] strategic misrepresentation makes politics interesting: Without it, voting entails little more than the solicitation of dry recording of preferences, and the outcomes follow in a deterministic way […]”.

manipulación" y el primero de ellos ha acuñado un neologismo para aglutinar los diversos aspectos de la estrategia política: "herestética" ("heresthetics").

2.6.4 Consistencia

Un rasgo de la regla de Borda es que satisface la hipótesis de consistencia ("consistency"), también denominada en la literatura "reinforcement" (véanse Young (1974) y Fishburn (1979)). El axioma se puede postular de manera simple como sigue: "si usando un procedimiento de elección dos grupos de votantes N_1 y N_2 eligen a x_j por separado, entonces el procedimiento de elección es *consistente* si el grupo reunido también elige a x_j". En Biswas (1994), mediante el uso auxiliar de funciones cuasilineales, puede verse una demostración de que la regla de Borda satisface tal aserto. De hecho, Young (1974) demostró que la consistencia, junto con otras propiedades (neutralidad, fidelidad y propiedad de cancelación) caracterizan la regla Borda.

2.6.5 Optimalidad de Pareto

Si P^k, I^k denotan las relaciones de preferencia fuerte e indiferencia, respectivamente, del agente k, y P es la relación de preferencia colectiva obtenida a partir de ellas mediante un procedimiento de votación, entonces se dice que tal procedimiento cumple el *principio fuerte de Pareto* si para cualesquiera $x_i, x_j \in X$ se verifica:

$$\left.\begin{array}{c} \forall k \in \{1,\dots,m\} \;\; x_i(P^k \cup I^k)x_j \\ \exists k_0 \in \{1,\dots,m\} \;\; x_i P^{k_0} x_j \end{array}\right\} \Rightarrow x_i P x_j .$$

Al definirse los contadores Borda colectivos como suma de los individuales, la regla de Borda (tanto la clásica como sus extensiones) verifican el requerimiento anterior[25] y selecciona por tanto óptimos paretianos en el sentido siguiente: no hay otra alternativa que todos los agentes consideren al menos tan buena como las seleccionadas y que al menos un agente considere estrictamente mejor que ellas.

Sin embargo, tal como señala Sen [1970] (1976, pp. 38 y 39), aunque desde un punto de vista normativo el planteamiento es incuestionable y “la optimalidad de un sistema o de un programa político se juzga a menudo por el criterio de si se alcanza o no la optimalidad de Pareto, [...] en cuanto un individuo prefiera *x* a *y* y otro *y* a *x*, no podremos compararlos ya socialmente”, por lo que el criterio de Pareto es incompleto. De este modo y en el campo de la economía del bienestar, señala Sen que “una economía puede ser óptima [...] aún cuando unos estén nadando en la abundancia y otros bordeen la indigencia, con tal de que no pueda mejorarse a los indigentes sin recortar los placeres de los ricos”.

2.6.6 Cercanía al consenso

Cook – Seiford (1982) probaron, a partir de Kendall (1962), que la regla de Borda es el método que minimiza para la métrica 2 el desacuerdo total agregado (sobre las métricas p, $1 \leq p \leq \infty$, véase, por ejemplo González Pachón – Romero (1999)). En la misma línea, en la que late la idea de consenso (“distance-consensus” approach), Farkas – Nitzan (1979) también demostraron, a su vez, que el método de Borda coincide con la regla de cercanía a la unanimidad (“closeness to unanimity”) introducida por los citados autores en términos paretianos sugeridos por A.K. Sen. Ulteriores desarrollos de esta línea de investigación deben recoger las aportaciones de González Pachón – Romero (1999) utilizando programación por metas, y de Marchant

[25] Y también el menos restrictivo principio débil de Pareto: un procedimiento de votación satisface el principio débil de Pareto si para cualesquiera $x_i, x_j \in X$ se verifica:

$$\left(\forall k \in \{1,\ldots,m\} \;\; x_i P^k x_j\right) \Rightarrow \; x_i P x_j .$$

(2001) siguiendo los pasos de Farkas – Nitzan (1979) en un ámbito que incluye torneos, órdenes débiles, semiórdenes, relaciones de preferencia difusa, etc.

2.6.7 Inmunidad a la paradoja de la abstención

Según Lepelley – Merlin (2001), la paradoja de la abstención (“no show paradox”) es un una las más intrigantes de entre las que aparecen en la literatura sobre la TES. El término fue acuñado por Fishburn – Brams (1983) y designa, en su versión más fuerte, el hecho de que en ciertas reglas de votación existen situaciones decisionales en donde algunos votantes harían mejor en no participar en el proceso de elección. En otras palabras, podría darse el caso de que ciertos agentes obtuviesen un resultado más cercano a sus preferencias no votando que haciéndolo. A continuación, siguiendo a Trost – Levinsky (2003), se pone de manifiesto tal posibilidad.

Ejemplo 2.7. Considérese una comisión de 5 votantes, cuyas preferencias sobre 6 alternativas vienen dadas como sigue:

2 votantes	1 votante	2 votantes
x_1	x_2	x_3
x_3	x_4	x_2
x_2	x_5	x_4
x_4	x_6	x_5
x_5	x_1	x_6
x_6	x_3	x_1

Supongamos que se decide el ganador mediante la regla de Black. En tal caso debe verificarse en primer lugar si existe ganador de Condorcet y sólo en su ausencia aplicar el método de Borda. Una simple inspección nos hace ver que no existe ganador de Condorcet, y al aplicar el método de Borda resulta ganador x_2 (nótese que ocupa en promedio las más altas posiciones), que por tanto también es ganador según Black.

Ahora bien, supongamos que la coalición cuyas preferencias aparecen en la primera columna decidiese no votar. En el nuevo escenario se comprueba que x_3 pasaría a ser el ganador de Condorcet (y por tanto también según Black), lo que para la coalición que se ha retirado representa una mejor opción que la que resulta si concurre a votar.

Claramente, tal situación de inhibición del voto es susceptible de severas críticas desde posiciones ético-democráticas. Un hecho destacable fue probado en Moulin (1988), significativamente titulado "Condorcet´s principle implies the no show paradox". Es decir los sistemas de votación condorcetianos (esto es, los que seleccionan al ganador de Condorcet caso de existir, como por ejemplo la regla de Black empleada en el ejemplo anterior) son vulnerables a la paradoja de la abstención. Tal hecho, en consecuencia, hace tambalear la incuestionabilidad del principio de Condorcet[26]. Tanto más cuanto que la regla de Borda, antagonista radical de los planteamientos de Condorcet, es inmune a dicha paradoja[27]. Como veremos a continuación. la propiedad que nosotros hemos denominado representatividad y que se cumple bajo hipótesis de transitividad de los agentes, justifica este aserto.

Observación 2.18. En lo que sigue denominamos r^k al contador individual del agente *k*, $\boldsymbol{r}$ al contador colectivo y $\boldsymbol{r}'$ al contador colectivo con la abstención del agente *k*. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que un agente *k*, al emitir su lista de puntuaciones, genera un ganador x_i peor para él

---

[26] A este respecto, véanse también Pérez (2001) y Jimeno – Pérez – García (mimeo). Como ya hemos indicado, la literatura sobre este tema se viene incrementando en los últimos años. Así, entre otros, Campbell – Kelly (2002) han puesto de manifiesto que el incumplimiento de la propiedad de monotonía no implica necesariamente la aparición de la paradoja de la abstención. Por su parte, Jimeno (2004) la enmarca entre las propiedades de participación y realiza un análisis que incluye aspectos estadísticos de ocurrencia de la paradoja. Y recientemente, Côrte-Real – Pereira (2004) se han preocupado por aspectos de diseño e implementación de ciertas reglas de votación a la vista de tal posibilidad.

[27] No así la regla de Borda con eliminación o regla de Nanson ya que, como hemos visto, ésta cumple el principio de Condorcet. De hecho, todas las reglas de puntuación con descartes ("scoring run-off methods"), cumplan o no el principio de Condorcet, son vulnerables a la paradoja de la abstención (véanse a este respecto Smith (1973), Lepelley (1989) y Saari (1994), entre otros).

respecto del que resulta si se abstiene, x_j; es decir, $x_j P^k x_i$, $\boldsymbol{r}(x_i) > \boldsymbol{r}(x_j)$ y $\boldsymbol{r}'(x_j) > \boldsymbol{r}'(x_i)$. Pero entonces por la representatividad del contador individual, $r^k(x_j) > r^k(x_i)$; puesto que en ausencia del agente *k* se tiene $\boldsymbol{r}'(x_j) > \boldsymbol{r}'(x_i)$, al agregar las puntuaciones individuales de todos los agentes en la colectiva se obtiene:

$$\boldsymbol{r}(x_j) = r^k(x_j) + \boldsymbol{r}'(x_j) > r^k(x_i) + \boldsymbol{r}'(x_i) = \boldsymbol{r}(x_i),$$

lo que contradice el hecho de que x_i sea el ganador de Borda cuando vota el agente *k*.

No puede así darse la paradoja de la abstención si se emplea la regla de Borda, y cabe preguntarse cómo hubiese empleado este autor tal argumento, de haberlo conocido, en su polémica con Condorcet.

Bibliografía del Capítulo 2

Arrow, K.J. (1974): *Elección Social y Valores Individuales*. Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Traducción de Eusebio Aparicio Auñón de la segunda edición en inglés, corregida, 1963: *Social Choice and Individual Values*, Yale University Press, New Haven – Londres. Introducción de Andreu Mas Colell. Primera edición, 1951].

Baharad, E. – Nitzan, S. (2003): “The Borda rule, Condorcet consistency and Condorcet stability”. *Economic Theory* 22, pp. 685 – 688.

Barberà, S. (2001): “An introduction to strategy-proof social choice functions”. *Social Choice and Welfare* 18, pp. 619 – 653.

Basset Jr., G.W. – Persky, J. (1999): “Robust voting”. *Public Choice* 99, pp. 299 – 310.

Biswas, T. (1994): “Efficiency and consistency in group decisions”. *Public Choice* 80, pp. 23 – 34.

Black, D. (1958): *The Theory of Committees and Elections.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

Black, D. (1976): “Partial justification of the Borda count”. *Public Choice* 28, pp. 1–16.

Borda, J.C. de (1784): “Mémoire sur les élections au scrutin”, *Historie de l’Academie Royale des Sciences*, París. [Se reproduce, en inglés, en Grazia (1953) y en McLean – Urken (1995, pp. 81 – 89)].

Campbell, D.E. – Kelly, J.S. (2002): “Non-monotonicity does not imply the no-show paradox”. *Social Choice and Welfare* 19, pp. 513 – 515.

Colomer, J.M. (1990): *El Arte de la Manipulación Política: Votaciones y Teoría de Juegos en la Política Española.* Anagrama, Barcelona.

Condorcet, J.A.M.N.C., marqués de (1785): *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix,* L'Imprimierie Royale, París. [Se reproducen fragmentos escogidos, en inglés, en McLean – Urken (1995, pp. 91 – 112)].

Cook, W.D. – Seiford, L.M. (1982): "On the Borda – Kendall consensus method for priority ranking problems". *Management Science* 28, pp. 621 – 637.

Copeland, A.H. (1951): "A 'reasonable' social welfare function". *University of Michigan Seminar on Applications of Mathematics to the Social Sciences*. University of Michigan, Ann Arbor.

Côrte-Real, P.P. – Pereira, P.T. (2004): "The voter who wasn't there: Referenda, representation and abstention". *Social Choice and Welfare* 22, pp. 349 – 369.

Coughlin (1979): "A direct characterization of Black's first Borda count". *Economics Letters* 4, pp. 131–133.

Daunou, P.C.F. (1803): *Mémoire sur les Élections au Scrutin*. Baudouin, imprimeur de l'Institut National. París. [Se reproduce, en inglés, en McLean – Urken (1995, pp. 237 –276)].

Domenech, A. (1989): *De la Ética a la Política. De la Razón Erótica a la Razón Inerte*. Crítica, Barcelona.

Dummett, M. (1998): "The Borda count and agenda manipulation". *Social Choice and Welfare* 15, pp. 289 – 296.

Farkas, D. – Nitzan, S. (1979): "The Borda rule and Pareto stability: a comment". *Econometrica* 49, pp. 1305 – 1306.

Felsenthal, D.S. (1986): "Setting the record straight: A note on sophisticated voting under Borda's method". *Public Choice* 89, pp. 17 – 25.

Fishburn, P.C. (1973): *The Theory of Social Choice*. Princeton University Press, Princeton.

Fishburn, P.C. (1977): “Condorcet social choice functions”. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 33, pp. 469 – 489.

Fishburn, P.C. (1979): “Symmetric and consistent aggregation with dichotomous voting”, en J.J. Laffont (ed.): *Aggregation and Revelation of Preferences*. North – Holland, Amsterdam, pp. 201 – 218.

Fishburn, P.C. – Brams, S. (1983): “Paradoxes of preferencial voting”. *Mathematics Magazine* 56, pp. 207 – 214.

Fishburn, P.C. – Gehrlein, W.V. (1976): “Borda’s rule, positional voting and Condorcet’s simple majority principle”. *Public Choice* 28, pp. 79 – 88.

García Lapresta, J.L. (en prensa): “A general class of simple majority decision rules based on linguistic opinions”. *Information Sciences.*

García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2002): “Borda count versus approval voting: A fuzzy approach”. *Public Choice* 112, pp. 167 – 184.

García Lapresta, J.L. – Rodríguez Palmero, C. (en prensa): “Some algebraic characterizations of preference structures”. *Journal of Interdisciplinary Mathematics.*

Gärdenfors, P. (1973): “Positionalist voting functions”. *Theory and Decision* 4, pp. 1 – 24.

González Pachón, J. – Romero, C. (1999): “Distance-based consensus methods: A goal programming approach”. *Omega* 27, pp. 341 – 347.

Grazia, A. de (1953): “Mathematical derivation of an election system”. *Isis* 44, pp. 42 – 51.

Heckelman, J.C. (2003): “Probabilistic Borda rule voting”. *Social Choice and Welfare* 21, pp. 455 – 468.

Jimeno, J.L. (2004): *Propiedades de Participación en los Métodos de Agregación de Preferencias*. Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares.

Jimeno, J.L. – Pérez, J. – García, E. (mimeo): "Some results concerning no show paradoxes". Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares.

Kemeny, J. (1959): "Mathematics without numbers". *Daedalus* 88, pp. 571 – 591.

Kendall, M. (1962): *Rank Correlation Methods*. Hafner, Nueva York.

Lepelley, D. (1989): *Contribution à l'Analyse des Procédures de Décision Collectives*. Tesis Doctoral, Universidad de Caen, Caen.

Lepelley, D. – Merlin, V. (2001): "Scoring run-off paradoxes for variable electorates". *Economic Theory* 17, pp. 53 – 80.

Ludwin, W.G. (1978): "Strategic voting and the Borda method". *Public Choice* 33, pp. 85 – 90.

Marchant, T. (2000): "Does the Borda Rule provide more than a ranking?". *Social Choice and Welfare* 17, pp. 381 – 391.

Marchant, T. (2001): "The Borda rule and Pareto stability: A further comment". *Fuzzy Sets and Systems* 120, pp. 423 – 428.

Martínez Panero, M. (2002): "Estudio de algunos procedimientos híbridos de votación: Generalización y conexiones". *Actas de la XVI Reunión ASEPELT*, Madrid. Edición en CD-ROM.

Martínez Panero, M. – García Lapresta, J.L. (2003): *José Isidoro Morales, Precursor Ilustrado de la Teoría de la Elección Social.* Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial. Universidad de Valladolid, Valladolid. Prólogo de Salvador Barberà.

Mas Colell, A. – Whinston, M.D. – Green, J.R. (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Oxford.

May, K.O. (1952): "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision". *Econometrica* 20, pp. 680 – 684.

McLean, I. (1995): "Independence of irrelevant alternatives before Arrow". *Mathematical Social Sciences* 30, pp. 107 – 126.

McLean, I. (2003): "The reasonableness of independence: A conversation from Condorcet and Borda to Arrow and Saari". *Nuffield College Politics Working Paper* 2003 – W6, Oxford.

McLean, I. – Hewitt, F. (eds.) (1994): *Condorcet: Foundations of Social Choice and Political Theory*. Edward Elgar, Aldershot – Brookfield.

McLean, I. – Sommerlad, F. (eds.) (1991): *The Political Theory of Condorcet, II*. University of Oxford Social Studies Faculty Centre. Working Paper 1, Oxford.

McLean, I. – Urken, A.B. (eds.) (1995): *Classics of Social Choice*. The University of Michigan Press, Ann Arbor.

Morales, J.I. (1797): *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta Real, Madrid.

Morales, J.I. (1805): *Apéndice á la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta de Sancha, Madrid.

Moulin, H. (1988): "Condorcet's principle implies the no show paradox". *Journal of Economic Theory* 45, pp. 45 – 53.

Moulin, H. – Young, H.P. (1987): "Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de", en Eattwell, J. – Milgate, M. – Newman, P. (eds.): *The New Palgrave. A Dictionary of Economics*. McMillan Press, Londres – Stockton Press, Nueva York – Maruzen Company, Tokio.

Mueller, D.C. (1979): *Public Choice.* Cambridge University Press, Londres. [Existe traducción al castellano de Juan Carlos Zapatero en Alianza Editorial, Madrid, 1984].

Nanson, E.J. (1883): “Methods of election”. *Transactions and Proceedings of Royal Society of Victoria* 19, pp. 197 – 240. [Se reproduce en McLean – Urken (1995, pp. 321 – 359)].

Niemi, R.G. – Riker, W.H. (1991): “La elección de los sistemas de votación”, en Colomer, J.M. (ed.): *Lecturas de Economía Política Positiva*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Traducción del artículo original en inglés, 1976].

Nitzan, S. – Rubinstein, A. (1981): “A further characterization of Borda ranking method”. *Public Choice* 36, pp. 153 – 158.

Nurmi, H. (1999): *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*. Springer-Verlag, Berlín–Heidelberg.

Ordeshook, P.C. (1986): *Game Theory and Political Theory. An Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge.

Pattanaik, P.K. (2002): “Positional rules of collective decision-making”, en Arrow, K.J. – Sen, A.K. – Suzumura, K. (eds.): *Handbook of Social Choice and Welfare*, vol. 1, Elsevier Science, Amsterdam.

Pérez, J. (2001): “The strong no show paradoxes are a common flaw in Condorcet voting correspondences”. *Social Choice and Welfare* 18, pp. 601 – 616.

Pirlot, M. – Vincke, P. (1997): *Semiorders.* Kluwer Academic Publishing, Dordrecht.

Riker, W.H. (1982): *Liberalism against Populism.* W.H. Freeman, Nueva York.

Riker, W.H. (1986): *The Art of Political Manipulation*. Yale University Press, New Haven.

Roubens, M. – Vincke, P. (1985): *Preference Modelling*. Springer – Verlag, Berlín.

Saari, D.G. (1990): “Susceptibility to manipulation”. *Public Choice* 64, pp. 21 – 41.

Saari, D.G. (1994): *Geometry of Voting.* Springer – Verlag, Berlín.

Saari, D.G. (1999): “Explaining all three-alternatives voting outcomes”. *Journal of Economic Theory* 87, pp. 313 – 355.

Saari, D.G. (2000): “Mathematical structure of voting paradoxes. II. Positional voting”. *Economic Theory* 15, pp. 55 – 102.

Saari, D.G. – Merlin, V.R. (2000): “A geometric examination of Kemeny’s rule”. *Social Choice and Welfare* 17, pp. 403 – 438.

Sen, A.K. (1976): *Elección Colectiva y Bienestar Social*. Alianza Editorial, Madrid. [Traducción de Francisco Elías Castillo de la edición original en inglés, 1970: *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco].

Sen, A.K. (1977): “Social Choice Theory: A re-examination”. *Econometrica* 45, pp. 53 – 89.

Sen, M. (1984): “Strategy-proofness of a class of Borda rules”. *Public Choice* 43, pp. 251 – 285.

Smith, J.H. (1973): “Aggregation of preferences with variable electorate”. *Econometrica* 41, pp. 1027–1041.

Straffin Jr., P.D. (1980): *Topics in the Theory of Voting*. Birkhäuser, Boston.

Sugden, R. (1981): *The Political Economy of Public Choice: An Introduction to Welfare Economics*. Martin Robertson, Oxford.

Trost, M. – Levinsky, R. (2003): *Advanced Micro 2003/2004. Problem set # 2.* Institut zur Erforschung der Wirtschaftlich Entwicklung, Universität Freiburg, Friburgo. [Disponible online en http://www.vwl.uni-freiburg.de/fakultaet/erwien/ws03_04/ admicro03_04/Micro0304.pdf].

Truchon, M. – Le Breton, M. (1997): "A Borda measure for social choice functions". *Mathematical Social Sciences* 34, pp. 249 – 272.

Van Newenhizen, J. (1992): "The Borda Method is most likely to respect the Condorcet principle". *Economic Theory* 2, pp. 69 – 83.

Young, H.P. (1974): "An axiomatization of Borda's rule". *Journal of Economic Theory* 9, pp. 43 – 52.

Young, H.P. (1977): "Extending Condorcet's rule". *Journal of Economic Theory* 16, pp. 335 – 353.

Young, H.P. (1986): "Optimal ranking and choice from pairwise comparisons", en Grofman, B. – Owen, G. (eds): *Information Pooling and Group Decision Making*, JAI Press, Greenwich, pp. 113 – 122.

Young, H.P. (1988): "Condorcet's theory of voting". *American Political Science Review* 82, pp. 1231 – 1244.

Young, H.P. (1995): "Optimal voting rules". *Journal of Economic Perspectives* 9, pp. 51 – 64.

Young, H.P. – Levenglick, A. (1978): "A consistent extension of Condorcet's election principle". *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35, pp. 285 – 300.

Capítulo 3

Extensiones graduales y variantes lingüísticas de la regla de Borda

En el capítulo anterior comentamos que las puntuaciones escalonadas de la regla de Borda suponen un incremento de flexibilidad respecto del método de pluralidad, más monolítico, en el que sólo una alternativa es votada (éste fue uno de los argumentos de Morales (1797)). Más técnicamente, si hay m candidatos y cada votante dispone de un espectro de m valores numéricos para asignar a cada uno de ellos, la regla de pluralidad ofrece a cada agente el rango de puntuaciones $\{1,0,\ldots,0\}$, mientras que la regla de Borda clásica juega con los valores $\{m-1,m-2,\ldots,0\}$. Myerson – Weber (1993) y Weber (1995), entre otros, utilizan este argumento para abogar, por su parte, por el método de voto aprobatorio, donde el votante da el visto bueno a cuantas alternativas desea y, por tanto, el espectro de valores no es único, existiendo toda una gama de ellos[1]: $\{1,0,\ldots,0\}$, $\{1,1,\ldots,0\},\ldots,$ $\{1,1,\ldots,1,0\}$. Cabe indicar, no obstante, que en presencia de indiferencias por parte de los votantes, también existirían diversos espectros de puntuaciones correspondientes a las reglas de Borda

[1] Se excluyen los casos $\{0,0,\ldots,0\}$ y $\{1,1,\ldots,1\}$, equivalentes a no aprobar ninguna alternativa o a aprobarlas todas, respectivamente, por ser ambos irrelevantes en la ordenación que se deriva del cómputo total.

extendidas introducidas en el capítulo anterior, siendo la gama aún mucho más extensa que en el caso de voto aprobatorio. De hecho la incluiría: el método de voto aprobatorio, para cada agente, divide las alternativas en dos estratos, mientras que la regla de Borda es susceptible de hacerlo hasta en *m* estratos.

Cuando, en el primer capítulo, reseñamos históricamente el desarrollo del procedimiento que nos ocupa, ya indicamos que una de las primeras críticas de las que fue objeto consistía en que la elección de los valores a otorgar por los agentes fue considerada arbitraria por sus detractores, al coartar la libertad del votante y no representar con fidelidad el mérito del votado. Aunque tales denuncias trataron de ser rebatidas con diversos argumentos por el propio Borda, Morales y Laplace, la crítica perdura. Por ello, la asumimos y en este capítulo nos proponemos ampliar a un rango continuo los espectros discretos de puntuaciones de la regla de Borda considerados hasta ahora.

De hecho, en los trabajos de cada uno de estos precursores de la TES para justificar el empleo de un rango discreto de puntuaciones escalonadas ya están, si bien todavía en embrión, las bases para el enfoque gradual que desarrollamos en el presente capítulo. El concepto fundamental del mismo es el de "intensidades de preferencia", mediante las que cada agente dispone de mayor versatilidad respecto de las preferencias "taxativas" consideradas en el capítulo anterior. Pues bien, tal idea aparece ya prefigurada en los citados autores, como ya se señaló en el Capítulo 1. Así, Borda supone como cuestión de principio que "los grados de mérito ó de preferencia entre los Candidatos son iguales y reputados por iguales en la opinion de los Censores [Votantes]"[2], dando a entender implícitamente que podrían ser distintos. De otro lado, Laplace justificó la regla de Borda basándose en ideas de equiprobabilidad sobre las "estimaciones latentes" de los votantes que conectan en cierto modo con el

[2] Cf. López de Peñalver [1799] (1992, p. 59).

tratamiento que nosotros daremos en este capítulo[3]. Por su parte, también Morales (1797, pp. 8 y 32) puede constituir un antecedente cuando afirma, como hemos visto, que "no hay mas que un método exâcto, y por consiguiente justo de elegir, y es el metodo que podemos llamar de *compensacion*, el qual compara y pesa los grados de opinion del mismo modo que en una balanza se comparan diferentes pesos para conocer aun la mas pequeña diferencia que haya entre ellos. [...] La opinion no es cosa que se numera ó cuenta, sino que se pesa". Más adelante Morales (1797, p. 49) llama "eleccion *justa* á [...] aquella en que cada elector haya asignado á cada candidato el grado de aprecio, que *segun su juicio* le merece en comparacion con los demas".

Más recientemente, para apoyar esta idea de graduación del mérito de los candidatos, o desde otra perspectiva, de intensidad de preferencia de los agentes, podríamos citar a Juan Linz, catedrático emérito de la Universidad de Yale, quien en un artículo publicado en el diario *EL PAÍS* del día 12 de agosto de 2001 sostiene en la misma línea de Morales: "El principio de la mayoría no puede decidir cuestiones que afectan de una manera esencial a los sentimientos de las minorías, y es que el puro proceso mecánico de contar votos no tiene en cuenta su intensidad en los votantes".

Por nuestra parte, creemos que el uso de intensidades de preferencia en el contexto de la TES trasciende y mejora sustancialmente el estrecho marco informacional que proporcionan las preferencias ordinarias, como queda de manifiesto en el siguiente ejemplo inspirado en Lewis Carroll, quien suele ser una cita recurrente en disciplinas tales como la lógica, las matemáticas o la propia TES.

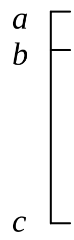
[3] Para Laplace, tales "estimaciones latentes" no se asignan al comparar las alternativas por parejas, sino al evaluarlas de una en una. Cf. Tanguiane (1991, pp. 80 y ss.) y Tangian (2000).

> En los mundos del País de las Maravillas y del Otro Lado del Espejo, la niña protagonista, Alicia, quiere dejarse oír y hacer su voluntad, lo que le resulta muy difícil por tratarse de alguien con sólo 7 años y medio de edad, la más pequeña de tres hermanas. A lo largo de sus aventuras se le plantean las tres siguientes posibilidades:
>
> *a*. Continuar siendo una niña a la que todos mandan y a la que hacen poco caso cuando habla.
>
> *b*. Ser, en lugar de ella misma, alguna de sus dos hermanas mayores, quienes gozan ya de cierto grado de independencia y libertad.
>
> *c*. Transformarse en reina, ser tomada en serio y poder imponer así su voluntad plena.
>
> Dada la decidida y en ocasiones audaz personalidad de Alicia, ésta preferiría las opciones *b* y *c* al ser confrontadas con la *a*. Desde el punto de vista de las preferencias ordinarias: bPa y cPa. Pero tales preferencias son groseras, no discriminan que la dominancia de *c* sobre *a* es seguramente mucho mayor que la de *b* sobre *a*. Efectivamente, cabe pensar que la intensidad de preferencia por ser reina frente a ser una simple niña debería ser mucho mayor que la intensidad de preferencia por ser alguna de sus hermanas mayores frente a ser la pequeña. Así, Alicia podría desear muchísimo convertirse en reina desde su estado actual (por ejemplo, con intensidad 0.9), o preferir bastante (pongamos con intensidad 0.7) ser alguna de sus hermanas en vez de ella misma.

Los anteriores argumentos avalan el auge que ha tenido y tiene cada vez más en el marco de la TES el que los agentes puedan manifestar intensidades de preferencia al comparar las alternativas en una situación decisional. Así, por ejemplo, Straffin Jr. (1980) dedica el Capítulo 3 de su monografía al estudio de recientes enfoques de la teoría del voto usando intensidades de preferencia. A continuación hacemos un repaso de alguna de las justificaciones de tal uso, siguiendo el ejemplo considerado por dicho autor. Las referencias que aparecen a continuación son del propio Straffin, e introducimos algún comentario personal entre corchetes.

Considérese la siguiente situación relativa a uno de los agentes que deben manifestarse acerca de 3 alternativas (Straffin Jr. (1980, p. 47)):

1 votante



“Las posiciones de las alternativas en la línea vertical representan intensidades de preferencia. [...] Las intensidades relativas ilustradas en el ejemplo se conocen como ‘utilidades cardinales’, en contraposición con las ‘utilidades ordinales’ que sólo indican el orden en que están dispuestas las alternativas”. [De tal enfoque, cabe decir que, al pasar de uno a varios votantes, conduce al problema de “comparación interpersonal de utilidades”, del que nos ocuparemos más adelante].

La primera de las interpretaciones de estas intensidades de preferencia se debe a la escuela que parte de Von Neumann – Morgenstern (1954) como texto seminal de la Teoría de Juegos. Straffin Jr. (1980, p. 48) indica que “si el [...] votante coloca la alternativa b a $\frac{4}{5}$ de camino hacia a [desde c, siendo la distancia total unitaria], es porque el votante sería indiferente entre elegir a b con probabilidad 1, o bien elegir una lotería que ofreciese a con probabilidad $\frac{4}{5}$ y c con probabilidad $\frac{1}{5}$”.

Un segundo enfoque sostiene que "los votantes pueden ser capaces de contestar de modo consistente a preguntas acerca de intensidades relativas, y *b* está colocada donde está porque el votante puede decir con pleno significado: 'Mi preferencia por *b* sobre *c* es cuatro veces más fuerte que mi preferencia por *a* sobre *b*'. (Véase Fishburn (1970))". [Cabe decir que tales argumentos ya aparecen en Morales (1805)].

Otra posibilidad es "que el votante piense en su escala como un 'termómetro de sensaciones' ('feeling thermometer') que indique cuán 'tibio' o 'frío' se siente hacia cada alternativa (véase Joslyn (1976), por ejemplo)".

Finalmente, "se puede pedir al votante que reparta 100 puntos entre las alternativas de modo que el reparto exprese sus preferencias. (véase Metfessel (1947)). Nuestro [...] votante podría dar 0 puntos a *c*, 44 a *b* y 56 a *a*".

Straffin Jr. (1980, p. 48) se decanta desde un punto de vista teórico por el enfoque probabilístico mediante loterías, aunque también señala que su complejidad de implementación lo hace inviable en la práctica. Por nuestra parte, como es usual en la literatura específica de la TES relativa al tema que nos ocupa desde la extraordinaria eclosión de la lógica y la matemática difusas ("fuzzy") a partir de Zadeh (1965), en la presente memoria modelizaremos las intensidades de preferencia mediante relaciones de preferencia difusas donde, a diferencia de alguno de los enfoques anteriores, se tienen en cuenta, y además de forma matizada, las comparaciones entre todos los posibles pares de alternativas. De tales relaciones de preferencia daremos una cumplida panorámica como sustrato teórico del presente capítulo.

A continuación trataremos acerca de las relaciones de preferencia "lingüísticas", que nosotros vemos como "frontera" entre las taxativas del capítulo anterior y las graduales de la primera sección del presente, de las que toman modelo. Surgen al asumir que el cerebro humano funciona en términos lingüísticos más bien que numéricos, tal como propugnó Zadeh (1975), y tienen en cuenta el hecho de que nuestro intelecto no está dotado para operar con muchos datos, sino con un número más bien reducido de ellos. El diseño de procedimientos de votación tipo Borda lingüísticos constituirá la segunda sección del presente capítulo.

En todo caso, el tratamiento del mismo correrá paralelo al del capítulo anterior y en cierta forma su desarrollo vendrá forzado por el propio planteamiento de las reglas de Borda que se considerarán en el presente a partir del patrón clásico, por lo que, de nuevo, se sigue el esquema en dos etapas: contadores individuales – contador colectivo.

3.1 Reglas de Borda graduales: Prerrequisitos teóricos

En la primera parte del capítulo extenderemos los contadores de Borda clásicos al caso gradual, y se mostrarán varias posibilidades de generalización en las que la toma de decisiones colectiva depende en cada caso de qué tipo de intensidades de preferencia de los agentes sean computadas. En primer lugar se introducen algunos conceptos básicos de la teoría de subconjuntos difusos, necesarios para formular los procedimientos de votación que se propondrán en 3.2.

3.1.1 Subconjuntos difusos

Dado un conjunto no vacío X, llamado *universo*, en la teoría ordinaria de conjuntos cualquiera que sea el subconjunto A de X, todo elemento de X o bien pertenece a A o, por el contrario, no pertenece; no existe otra posibilidad. Su *función característica*, $\mu_A : X \to \{0,1\}$, definida por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

indica que la transición entre pertenencia y no pertenencia es abrupta. Sin embargo, en la teoría de subconjuntos difusos tal transición es gradual. La función característica o *función de pertenencia* de un *subconjunto difuso A* del universo X es una aplicación $\mu_A : X \to [0,1]$, donde $\mu_A(x)$ es el *grado de pertenencia* de x a A. En consecuencia, la noción de subconjunto difuso generaliza la de subconjunto ordinario: un subconjunto difuso A de X es ordinario si y sólo si $\mu_A(X) \subseteq \{0,1\}$.

3.1.2 Relaciones binarias difusas

Al igual que las relaciones binarias ordinarias son un tipo concreto de subconjuntos ordinarios, las relaciones binarias difusas son un tipo determinado de subconjuntos difusos.

Definición 3.1. Dado un conjunto ordinario X, una *relación binaria difusa sobre* X es un subconjunto difuso del producto cartesiano $X \times X$. Si R es una relación binaria difusa sobre X con función de pertenencia $\mu_R : X \times X \to [0,1]$, se entenderá que $\mu_R(x,y)$ es la *intensidad* con la que x está relacionado con y.

Notación. Como en el capítulo anterior, se considerará a partir de ahora un conjunto finito de alternativas mutuamente excluyentes, $X = \{x_1, ..., x_n\}$, sobre el que un agente arbitrario muestra sus preferencias, a través de una relación binaria difusa R sobre X. Con $r_{ij} = \mu_R(x_i, x_j)$ se indicará el nivel de intensidad con el que el agente prefiere la alternativa x_i a la x_j, que es tanto mayor cuanto más cercano esté a 1.

Observación 3.1. El valor $r_{ij} = \mu_R(x_i, x_j) \in [0,1]$ se suele entender en la literatura principalmente de dos maneras. Para algunos autores indica el grado de confianza con la que el agente prefiere (de manera estricta o bien débil) la alternativa x_i a la alternativa x_j. Tal interpretación capta la idea de "vaguedad" o "ambivalencia" en la preferencia del agente en cuestión. Para otros autores, dicho valor denota la intensidad con que el agente prefiere x_i a x_j. Nosotros seguimos esta segunda interpretación. Cf. García Lapresta – Llamazares (2000) para las respectivas referencias.

3.1.3 Relaciones de preferencia difusas

Cuando un agente se dispone a comparar un par de alternativas, lo primero que se plantea es si prefiere una de ellas a la otra o, por el contrario, le resultan indiferentes. Si tiene preferencia por una de ellas, podrá manifestar la forma o la intensidad con la que la prefiere, informando de cómo prefiere la que para él es mejor. Podríamos pensar, trasladado a este marco, en el símil de la balanza de Morales (1797), al que ya aludimos. Supuesto que el agente distribuye toda su capacidad de preferir, considerada unitaria, entre cada par de alternativas, cuanto mayor sea la intensidad r_{ij} con la que x_i es preferida a x_j, tanto menor será la intensidad r_{ji} con la que x_j es preferida a x_i (cuanto más se eleva un platillo de la balanza, más decae el otro). De esta forma, surge de forma natural el axioma de reciprocidad[4].

Definición 3.2. Una relación binaria difusa R sobre $X = \{x_1, ..., x_n\}$ es *recíproca* si y sólo si $r_{ij} + r_{ji} = 1$ para cualesquiera $x_i, x_j \in X$.

Observación 3.2. Si R es recíproca, entonces se verifica $r_{ii} = 0.5$ para cualquier $x_i \in X$.

A partir de ahora, por las razones expuestas anteriormente, se supondrá que toda relación binaria difusa que modelice las preferencias es recíproca. De este modo, la reciprocidad es el rasgo definitorio de las relaciones de preferencia difusas, a partir de las cuales se formulan las reglas de Borda graduales que se introducirán en la siguiente sección.

Definición 3.3. Una *relación de preferencia difusa* es una relación binaria difusa recíproca.

---

[4] Sobre la justificación del axioma de reciprocidad véanse, entre otros, Bezdek – Spillman – Spillman (1978), Nurmi (1981), Tanino (1984) y García Lapresta – Llamazares (2000).

Definición 3.4. Para cada $\alpha \in [0,1)$, la relación de preferencia difusa R sobre X induce una *relación binaria ordinaria de nivel* (o *umbral*) *estricto* α dada por $x_i \succ_\alpha x_j \Leftrightarrow r_{ij} > \alpha$.

Observación 3.3. Conviene indicar que $\succ_\alpha$ es una relación de preferencia ordinaria (esto es, asimétrica) únicamente cuando $\alpha \geq 0.5$. En tal caso, la relación de indiferencia asociada a $\succ_\alpha$ viene dada por $x_i \sim_\alpha x_j \Leftrightarrow$ no ocurre $x_i \succ_\alpha x_j$ ni $x_j \succ_\alpha x_i$, o sea, $r_{ij} \leq \alpha$ y $r_{ji} \leq \alpha$. Por reciprocidad, ambas condiciones equivalen a $1-\alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$. De este modo, si el umbral α se encuentra en el rango señalado, para cada par de alternativas $x_i, x_j \in X$ es cierta una y sólo una de las siguientes situaciones: $x_i \succ_\alpha x_j$ ($r_{ij} > \alpha$), $x_i \sim_\alpha x_j$ ($1-\alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$), $x_j \succ_\alpha x_i$ ($r_{ji} > \alpha$ o, lo que es lo mismo, $r_{ij} < 1-\alpha$).

En conexión con los comentarios anteriores es interesante señalar, como hacen García Lapresta – Llamazares (2000), que las relaciones binarias difusas generalizan las relaciones binarias ordinarias, ya que éstas se pueden entender como un caso particular de las anteriores cuando sólo toman valores en $\{0,1\} \subset [0,1]$. Ahora bien, ninguna relación de preferencia difusa es ordinaria, ya que, como consecuencia de la reciprocidad, $r_{ii} = 0.5 \notin \{0,1\}$ para todo $x_i \in X$.

De entre todos los posibles umbrales $\alpha \in [0.5,1)$ que garantizan que $\succ_\alpha$ sea una relación de preferencia ordinaria, en lo que sigue tendremos como referencia el más pequeño de ellos, a saber, $\alpha = 0.5$. Tal elección se basa en consideraciones de simplicidad y en el hecho de que, en virtud de la reciprocidad de R, $r_{ij} > r_{ji}$ equivale a que $r_{ij} > 0.5$. Por tanto, tomando $\alpha = 0.5$ para definir la relación de preferencia ordinaria $\succ_\alpha$ asociada a R, se consigue indicar qué alternativas son preferidas respecto a otras por el agente en cuestión. Volviendo a la imagen de la balanza, R matiza perfectamente cuánto es preferida una alternativa a otra (cuanto más se inclina la balanza hacia el lado de un objeto que hacia el otro), mientras que $\succ_{0.5}$ sólo indica qué alternativa es preferida respecto de otra, sin matices (qué objeto pesa más, es decir, únicamente si la balanza se inclina hacia el platillo ocupado por dicho objeto, sin tomar en consideración cuánto se inclina). Estos comentarios propician la siguiente definición, que no es sino un caso particular de la Definición 3.4, donde ahora se especifica justamente que estamos tomando, de entre todos los valores posibles $\alpha \in [0.5,1)$, justamente $\alpha = 0.5$ por las razones señaladas.

Definición 3.5. Dada una relación de preferencia difusa R sobre *X*, la *relación de preferencia ordinaria inducida por R*, $\succ_{0.5}$, viene dada por

$$x_i \succ_{0.5} x_j \Leftrightarrow r_{ij} > 0.5,$$

para cada par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Notación. Denotaremos por $\sim_{0.5}$ y $\succcurlyeq_{0.5}$ a las correspondientes relaciones de indiferencia y preferencia en sentido débil, a saber: $x_i \sim_{0.5} x_j \Leftrightarrow r_{ij} = 0.5$; $x_i \succcurlyeq_{0.5} x_j \Leftrightarrow r_{ij} \geq 0.5$.

Observación 3.4. Tomar el umbral $\alpha = 0.5$ simplifica las tres situaciones posibles a las que aludíamos en la Observación 3.3 referentes a un par genérico de alternativas: $x_i \succ_{0.5} x_j$ ($r_{ij} > 0.5$), $x_i \sim_{0.5} x_j$ ($r_{ij} = 0.5$), $x_j \succ_{0.5} x_i$ ($r_{ij} < 0.5$).

Notación. Cuando nos encontremos ante una situación decisional en la que *m* agentes muestren sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1,...,x_n\}$ mediante relaciones de preferencia difusas $R^1, R^2, \ldots, R^m$, denotaremos mediante superíndices (y en ocasiones subíndices) los conceptos hasta ahora introducidos cuando hagan referencia a un agente genérico $k \in \{1,\ldots,m\}$. De este modo, $r_{ij}^k = \mu_{R^k}(x_i, x_j) \in [0,1]$ indica la intensidad de preferencia con que el agente *k* prefiere la alternativa x_i a la x_j ; $\succ_{0.5}^{k}$ denota la relación de preferencia ordinaria inducida por R^k, etc. Por la importancia que tendrá en el desarrollo posterior, particularizamos para el agente *k* la noción de matriz de intensidades de preferencia ya apuntada.

Definición 3.6. Dada R^k, relación de preferencia difusa del agente $k = 1,\ldots,m$, consideraremos la *matriz de intensidades de preferencia* de dicho agente:

$$\left(r_{ij}^k\right) = \begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \ldots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \ldots & r_{2n}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \ldots & r_{nn}^k \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes simétricos respecto de la diagonal principal suman 1, y los elementos diagonales toman el valor 0.5.

A continuación tratamos algunos aspectos relativos a la conexión, ya apuntada, entre intensidades de preferencia y utilidad.

3.1.4 Relación de preferencia difusa asociada a una función de utilidad

Si un agente valora numéricamente las opciones de $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ mediante una función (de utilidad) $u : X \to \mathbb{R}$, entonces puede asociarse de forma natural una relación binaria difusa recíproca R sobre X. Basta considerar, siguiendo a Tanino (1984),

$$d = \max\{u(x_i) \mid x_i \in X\} - \min\{u(x_i) \mid x_i \in X\}$$

y definir

$$r_{ij} = \frac{d + u(x_i) - u(x_j)}{2d}.$$

Así se tiene $0 \le r_{ij} \le 1$ y $r_{ij} + r_{ji} = 1$, para cualesquiera $x_i, x_j \in X$, lo que define una relación de preferencia difusa *R*. Además, puede considerarse en cierto sentido que r_{ij} es una medida ordinal (invariante ante transformaciones afines positivas) de la intensidad con la que x_i es preferida a x_j, tal como se justifica a continuación.

Sea $v: X \to \mathbb{R}$ una transformación afín positiva de *u*, es decir $v(x_i) = a \cdot u(x_i) + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Si se toma

$$d' = \max \{v(x_i) \mid x_i \in X\} - \min \{v(x_i) \mid x_i \in X\},$$

entonces es fácil comprobar

$$\frac{d' + v(x_i) - v(x_j)}{2d'} = \frac{d + u(x_i) - u(x_j)}{2d} = r_{ij}.$$

Se ha de observar que la relación de preferencia ordinaria $\succ_{0.5}$ asociada a *R*, coincide con la asociada a *u*, *P*(*u*), definida por $x_i P(u) x_j \Leftrightarrow u(x_i) > u(x_j)$. Efectivamente:

$$x_i \succ_{0.5} x_j \Leftrightarrow r_{ij} > 0.5 \Leftrightarrow \frac{d + u(x_i) - u(x_j)}{2d} > 0.5 \Leftrightarrow u(x_i) > u(x_j) \Leftrightarrow x_i P(u) x_j.$$

En consecuencia, $\succ_{0.5}$ es negativamente transitiva. Así mismo, resulta inmediato comprobar que $\succ_\alpha$ es transitiva[5] para todo $\alpha \in (0.5, 1)$.

Lo anterior muestra que no toda relación de preferencia difusa viene inducida por una función de utilidad, ya que, en general, $\succ_{0.5}$ no tiene por qué ser

[5] De hecho, de la equivalencia $x_i \succ_\alpha x_j \Leftrightarrow u(x_i) > u(x_j) + d(2\alpha - 1)$ se deduce que $\succ_\alpha$ es un semiorden para todo $\alpha \in (0.5, 1)$. A este respecto véanse Luce (1956) y Pirlot – Vincke (1997).

negativamente transitiva, al igual que $\succ_\alpha$ no ha de ser necesariamente transitiva para todo $\alpha \in (0.5, 1)$. Y es que el planteamiento utilitarista, donde las opciones se evalúan una a una, resulta mucho más constreñido que el enfoque gradual que proponemos, donde las alternativas se comparan por pares. Esto queda de manifiesto si tenemos en cuenta el siguiente hecho. Es fácil comprobar para una relación de preferencia difusa *R* inducida por una función de utilidad en la forma anteriormente expuesta, que

$$r_{ik} = r_{ij} + r_{jk} - 0.5.$$

La fórmula anterior nos indica, por ejemplo, que es imposible que un individuo, bajo supuestos utilitarios, asigne $r_{ij} = 0.8$ y $r_{jk} = 0.8$ porque, en ese caso, $r_{ik} = 1.1$, lo que es absurdo. Sin embargo, desde un enfoque gradual es perfectamente posible que se den simultáneamente $r_{ij} = 0.8$ y $r_{jk} = 0.8$, ya que, en principio, el agente tendría libertad para asignar el valor r_{ik} en el intervalo unidad. La idoneidad de dicho valor en conexión con los dados anteriormente depende del grado de coherencia del individuo. Tales supuestos de racionalidad de los agentes, enfocando nuestra atención en el estudio de ciertos tipos de transitividades difusas, serán tratados más adelante con extensión.

3.1.5 El problema de la comparación interpersonal de utilidades

Quienquiera que trate con intensidades de preferencia relativas a más de un agente debe encarar, en uno u otro momento, el problema de la comparación interpersonal de utilidades (CIU), muy relacionado con el de la simpatía o afinidad extendida ("extended simpathy") introducido por Arrow [1963] (1974, pp. 235 y 236) como la disposición de hacer comparaciones de la forma "el estado *x* es mejor (o peor) para mí de lo que el estado *y* lo es para ti". El debate y la literatura suscitados por este tema son muy extensos; a este respecto véanse Roberts (1980a, 1980b y 1997), Suzumura (1997), Sugden (1981, pp.

50 – 66), Hammond (1991) y Fleurbaey – Hammond (en prensa), entre otros. Dedicaremos este apartado a exponer el estado de la cuestión y manifestar nuestra posición al respecto.

Para delimitar el tema en nuestro contexto específico citaremos, de forma tal vez un tanto extensa, pero muy esclarecedora, la disertación pronunciada por Sen al recibir el premio Nobel (titulada significativamente "La posibilidad de la Elección Social" (Sen [1998] (2000); la nota al pie con asterisco corresponden a citas de dicho texto realizadas por su autor):

> "La Economía del Bienestar tradicional, que había sido concebida por los economistas utilitaristas [...], había tomado un camino muy diferente al de la Teoría de la Elección Social orientada hacia la votación. Se inspiró no en Borda […] ni en Condorcet […], sino en su contemporáneo Jeremy Bentham […]. Bentham fue el precursor del uso del cálculo utilitarista para obtener decisiones sobre el interés social, al agregar los intereses personales de los distintos individuos en la forma de sus utilidades respectivas. La inquietud de Bentham –y la del utilitarismo en general– tenía que ver con la *utilidad total* de una comunidad, independientemente de la distribución de ese total, y en esto existe una limitación informativa de considerable importancia ética y política [...]. No obstante, el interés utilitarista de comparar las ganancias y las pérdidas de diferentes personas no es en sí una inquietud insignificante. Y esta inquietud hace que la economía utilitarista del bienestar se interese profundamente en el uso de una clase de información –en forma de comparación de las ganancias y pérdidas de utilidad de las diferentes personas– con la que no trabajaron directamente ni Condorcet ni Borda.

El utilitarismo ha tenido gran influencia en el desarrollo de la economía del bienestar, que durante mucho tiempo estuvo dominada por una fidelidad casi incuestionable al cálculo utilitarista. Pero en la década de los 30, la economía utilitarista del bienestar comenzó a ser duramente criticada. [...] Los economistas se dejaron [...] persuadir por los argumentos presentados por Lionel Robbins y otros (influidos profundamente por la filosofía 'positivista lógica') en el sentido de que las comparaciones interpersonales de la utilidad no tenían bases científicas: 'Cada mente es inescrutable para cualquier otra mente y no es posible que exista un denominador común respecto a los sentimientos' (Robbins, 1938, p. 636). Por ende, las bases epistémicas de la economía utilitarista del bienestar se consideraron incurablemente defectuosas.

Siguieron intentos de hacer economía del bienestar sobre la base de los ordenamientos respectivos de la situación social de las diferentes personas, sin ninguna comparación interpersonal de las ganancias y pérdidas de utilidad (y, por supuesto, sin ninguna comparación de las utilidades totales de las diferentes personas, que los utilitaristas también pasan por alto). A pesar de que el utilitarismo y la economía utilitarista del bienestar son bastante indiferentes a la *distribución* de las utilidades entre diferentes personas (y más bien se concentran únicamente en la *suma total* de las utilidades), el nuevo régimen sin ningún tipo de comparación interpersonal redujo aún más la base informativa de la cual podría servirse la elección social. La base informativa ya limitada del cálculo de Bentham se redujo aún más respecto del de Borda y Condorcet, puesto que el uso de ordenamientos de utilidad de las diferentes personas sin

> ninguna comparación interpersonal es analíticamente bastante similar al uso de la información de votación a la hora de hacer una elección social".

Entre los economistas anti-utilitaristas que criticaron la visión cardinalista de Bentham (para quien la felicidad o la utilidad de los sujetos es comparable y agregable en un todo, llamado bienestar social), debemos citar a Bergson o Samuelson quienes, a su vez, comenzaron a hablar de ordinalidad e incomparabilidad. Así mismo, en una alocución sobre el autor de *On Liberty*, John Stuart Mill, Berlin [1569] (1995) sostiene que las percepciones individuales no son comparables si se quieren tener en cuenta la libertad y subjetividad personales. Y también afirma Sen [1998] (2000), como se ha señalado, que habría sido bastante natural poner en tela de juicio la manera como el utilitarismo se concentraba únicamente en las sumas totales de las utilidades, eludiendo con ello los aspectos distributivos siguiendo el camino trazado por Rawls [1971] (1979) al formular su Teoría de la Justicia[6]. En contrapartida debe citarse el enfoque de Harsanyi [1955] (1974, p. 81), que trató en éste y trabajos posteriores de eludir las dificultades del enfoque utilitarista, concluyendo que "[...] en la Economía del Bienestar hemos encontrado que un hombre racional (cuyas elecciones satisfagan ciertos postulados sencillos de racionalidad e imparcialidad) debe actuar *como si* hiciese comparaciones interpersonales de utilidad, aunque su información sea insuficiente para hacerlo sobre una base objetiva". Las consideraciones de Harsanyi fueron el punto de partida para Harvey (1999) en su trabajo acerca de la agregación de preferencias individuales en una preferencia social.

La postura inicial de Arrow sobre el problema fue rechazar el uso tanto de medidas cardinales de utilidad como de CIU. Arrow, incluso rechaza los

[6] El filósofo americano John Rawls postuló que el estado social debe tener como referente al individuo en peor situación.

índices de utilidad esperada de Von Neumann – Morgenstern, por considerarlos arbitrarios y poco significativos para valorar las situaciones sociales (cf. a este respecto Salcedo Megales (1994, pp. 73 y ss.)). Citemos de nuevo a Sen [1998] (2000):

> "Arrow había descartado el uso de comparaciones interpersonales, puesto que había seguido el consenso general que había surgido en los 40 en el sentido de que (en los términos de Arrow) "la comparación interpersonal de las utilidades no tiene significado" (Arrow [1963] (1974, p. 63)). La totalidad de la combinación de axiomas empleada por Arrow tuvo el efecto de limitar los procedimientos de elección social a normas que son, en términos generales, del tipo de las normas de votación[*]. Su resultado de imposibilidad se refiere, por lo tanto, a esta clase de normas".

[*] Debe explicarse que la restricción de los procedimientos de elección social a las normas de votación no es un *supuesto* que invoque Arrow [1963] (1974); forma parte del teorema de imposibilidad que él estableció. Es una consecuencia analítica del conjunto de axiomas aparentemente razonables postulados para la elección social razonada. La comparación interpersonal de las utilidades queda, por supuesto, excluida explícitamente, pero la comprobación del teorema de Arrow muestra que un grupo de otros supuestos con admisibilidad considerable, tomados en su conjunto, también implican lógicamente otras características de las normas de votación (un resultado analítico sorprendente en sí mismo). Las características derivadas incluyen, especialmente, el exigente requisito de que no se tome en cuenta efectivamente la *naturaleza* de las condiciones sociales: sólo los votos que se depositen respectivamente a favor –y en contra– de las mismas (una propiedad que a menudo se denomina "neutralidad", un nombre algo halagador para lo que después de todo no es más que una restricción informativa). A pesar de que evitar las comparaciones interpersonales de las utilidades elimina la posibilidad de tomar en cuenta la desigualdad de las utilidades (y las diferencias en términos de ganancias y pérdidas de las utilidades), el componente derivado de la "neutralidad" evita que se preste atención indirectamente a los asuntos distributivos mediante la consideración explícita de la naturaleza de las respectivas condiciones sociales (por ejemplo, de las desigualdades en términos de ingresos en las diferentes condiciones sociales). El papel que desempeñan las limitaciones informativas inducidas en la generación de resultados de imposibilidad se analiza en Sen (1977 y 1979).

Sin embargo, Arrow, consciente de las críticas suscitadas por el hecho de que excluir la CIU constriñe sustancialmente los supuestos informativos con los que operan los agentes (téngase en cuenta que el trabajo de Harsanyi que hemos citado es de 1955, mientras que la primera redacción de Arrow [1963] (1974) data de 1951), retomó el tema al considerar el uso de CIU, si bien tímidamente, tanto en el capítulo VIII, añadido a modo de apéndice, en Arrow [1963] (1974), así como en Arrow (1977). Por su parte, Sen [1970] (1976, p. 198), se manifiesta pleno defensor del uso de intensidades de preferencia en la TES cuando afirma que, "lo que importa no es sólo el número de los que prefieren x a y y el de los que prefieren y a x, sino también por cuánto prefiere cada cual una alternativa a la otra". De esta forma, en su visión de la TES, Sen no sólo no rechaza el tratamiento de la CIU, sino que la incorpora en una doble vertiente: de un lado, le permite introducir en su análisis aspectos éticos tales como desigualdad, etc. De otro lado, habilita una vía para eludir el "pesimismo constructivo" propiciado por el teorema de Arrow. Su visión sobre el uso de la CIU, ecléctica, queda resumida en estas palabras (Sen [1998] (2000)):

> "En efecto, las comparaciones interpersonales ni siquiera tienen que estar limitadas a dicotomías de 'todos o ninguno'. Podemos estar en capacidad de hacer comparaciones interpersonales hasta cierto punto, pero no en cada comparación, no de todo tipo, no con extraordinaria exactitud [...]. Podemos, por ejemplo, no tener gran dificultad en aceptar que la ganancia de utilidad que el emperador Nerón obtuvo al quemar Roma fue menor que la suma total de la pérdida de utilidades de todos los demás romanos que sufrieron con el incendio. Pero no por esto debemos estar seguros de que podemos colocar las utilidades de cada persona en una correspondencia uno a uno exacta entre sí. Por consiguiente, puede haber posibilidad de exigir "comparabilidad parcial" y negar ambos extremos: comparabilidad total y ninguna comparabilidad en lo

> absoluto. Puede darse a los diferentes alcances de la comparabilidad parcial formas matemáticamente exactas (articulando con precisión el alcance exacto de la inexactitud)".

Queda claro, pues, que la CIU constituye en campos tales como la Economía del Bienestar, la Teoría de Juegos o la TES un problema real, abierto (tal como sostienen, por ejemplo, Suzumura (1997) y Roberts (1997)) y tal vez intrínsecamente irresoluble, pero en ningún caso debe verse como un punto muerto en el desarrollo de estas disciplinas por minar sus fundamentos. De la misma manera que la Economía ha avanzado sustancialmente con la concepción utilitarista y las críticas a ésta, lo propio se puede decir de la evolución de la TES.

En lo que a nosotros se refiere, el problema de CIU nos atañe al introducir intensidades de preferencia en el diseño de variantes graduales de la regla de Borda clásica[7]. Nuestra postura coincide con la de Sen, quien, como hemos indicado, defiende a ultranza el uso de las intensidades de preferencia. Sin embargo, la vía sugerida por este autor en la que la TES incorporaría en sus modelos la vaguedad e inexactitud con que los agentes se manifiestan sobre las alternativas responde a una tradición que, como hemos declarado en la introducción al presente capítulo, nosotros no seguimos. Así, cuando en esta memoria se consideren intensidades de preferencia, éstas se interpretarán como asignaciones aquilatadas ("accurate assessments") manifestadas por los agentes. El problema radicaría en la fidelidad o adherencia de tales valoraciones a la realidad, o en el que un mismo valor asignado corresponda a

[7] De hecho, Hammond (1991) y Fleurbaey – Hammond (en prensa) ponen de manifiesto cómo las CIU están presentes incluso en el uso de la propia regla de Borda clásica (donde ya hay una graduación, si bien grosera, de las alternativas por parte de los agentes), en conexión con el incumplimiento del principio de IAI.

concepciones diferentes según el agente decisor. A modo de ejemplo, véase el siguiente comentario, realizado por un evaluador anónimo, previamente a la publicación de García Lapresta – Martínez Panero (2002):

> "Pongamos que $u_1(x)=1$ para la persona 1 tiene el mismo significado que $u_2(x)=1$ para la persona 2; de la misma manera para $u_1(x)=0$ y $u_2(x)=0$. Pero entonces todavía no está claro si se puede tener la confianza (basada en las preferencias reveladas [...]) de que $u_1(x)=0.4$ para la persona 1 signifique lo mismo que 0.4 para la persona 2. [No está resuelto] el problema de si es o no cierto que una transformación monótona positiva [de la función de utilidad normalizada de un agente] que deje invariantes el 0 y el 1, pero que 'contraiga' o 'estire' las proporciones intermedias (por ejemplo, $\phi(t)=t^2$), preserve la información contenida [en dicha función de utilidad]".

Debe tenerse en cuenta, como pusimos de manifiesto en 3.1.4, que en nuestro contexto de la TES las intensidades de preferencia entre pares de alternativas pueden no provenir de funciones de utilidad individuales de los agentes (en cuyo caso, en vez de cuestionar la CIU, nos podríamos preguntar, análogamente, si $r_{ij}^1=0.4$ significa lo mismo que $r_{ij}^2=0.4$). De cualquier forma, el comentario anterior resulta pertinente desde un planteamiento cardinalista, ya que transformaciones monótonas positivas pueden alterar de manera crucial las intensidades de preferencia entre alternativas y, por ende, el resultado total o agregado al ser sumadas tales intensidades[8]. Pero, ¿hasta qué

[8] Sin embargo, hemos visto en la misma sección que, si trabajamos con intensidades de preferencia derivadas de utilidades en el sentido de Tanino (1984) y a la clase de transformaciones afines crecientes (dos restricciones bastante fuertes), los resultados no se

punto? ¿Quiere esto decir que, en ausencia de información sustantiva acerca de cómo están configuradas las intensidades de preferencia de los agentes, deberemos renunciar a operar con tal información ante posibles problemas de consistencia? Creemos que no.

Permítasenos el siguiente símil. La geometría considera entidades ideales, aunque ello no obsta para que sus resultados puedan emplearse con idoneidad en agrimensura, geodesia, etc., operando entonces con elementos propios de tales disciplinas. Ahora bien, en rigor, existiría un hiato insalvable entre la teoría perfecta (el platónico mundo de las ideas) y la realidad física. Creemos que el fuero interno de los agentes pertenece a un mundo tan intangible como el de la pura geometría; sin embargo, ello no debe ser impedimento para que se pueda realizar un tratamiento de tal información, operando con ella para conseguir resultados válidos aunque dependientes, por las razones indicadas, de la forma en que los agentes revelan sus preferencias.

Nuestro planteamiento, pues, no elude la dificultad intrínseca del problema. Lo que propugna es que los resultados obtenidos deben ser vistos más como ideales que como reales, sin que ello obste para que, bajo tales supuestos, puedan implementarse y obtener de ellos una viabilidad práctica.

3.1.6 Transitividades difusas

En esta sección se tratan diversas hipótesis de racionalidad difusa relativas a las preferencias graduales de los agentes. La razón de ello estriba en que las reglas de Borda extendidas que se introducen en el presente capítulo se basan en tales preferencias, y de la coherencia mostrada por los agentes (o su carencia) al

---

verían alterados y tendríamos así, al menos, una vía ordinal consistente. En esta línea, Arrow – Raynaud [1986] (1989, p. 9) han señalado en otro contexto (el de la decisión multicriterio) que "cuanto más ordinales son los datos, más consistentes son los resultados".

manifestarse sobre las alternativas depende la idoneidad de los contadores de Borda diseñados.

Definición 3.7. Sea $*$ una operación binaria en [0.5, 1] con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $a * b = b * a$ para cualesquiera $a, b \in [0.5, 1]$.
- No decrecimiento en cada componente: $(a \leq a' \text{ y } b \leq b') \Rightarrow a * b \leq a' * b'$ para cualesquiera $a, a', b, b' \in [0.5,\ 1]$.
- Continuidad: Si dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0.5, 1]$ verifican $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b,$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n * b_n = a * b.$

Una relación de preferencia difusa R sobre X es *transitiva max-*$*$ *débil estricta* si y sólo si cumple:

$$(r_{ij} > 0.5 \ \text{ y } \ r_{jl} > 0.5) \Rightarrow (r_{il} > 0.5 \ \text{ y } \ r_{il} \geq r_{ij} * r_{jl})$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_l \in X$.

A continuación introducimos una transitividad análoga a la anterior, en la que se contempla el caso de indiferencia en los eslabones de la cadena de preferencias, y que denominamos por esta razón “no estricta”.

Definición 3.8. Dada una operación binaria $*$ en $[0.5, 1]$ con las propiedades consignadas anteriormente, una relación de preferencia difusa R sobre X es *transitiva max-*$*$ *débil no estricta* si y sólo si cumple:

$$(r_{ij} \geq 0.5 \ \text{ y } \ r_{jl} \geq 0.5) \Rightarrow \ r_{il} \geq r_{ij} * r_{jl}$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_l \in X$.

De entre las operaciones $*$ utilizadas en la literatura para modelizar la racionalidad consideraremos las siguientes propuestas:

$$a *_0 b = 0.5\,, \quad a *_1 b = \min\{a,b\}\,, \quad a *_2 b = \frac{a+b}{2}\,, \quad a *_3 b = \max\{a,b\}\,,$$

que, junto con otras que no trataremos aquí, pueden encontrarse en Zadeh (1971), Bezdek – Harris (1978) y García Lapresta – Meneses (2003), entre otros.

Definición 3.9. Denotaremos por $\hat{T}_i(X)$ al conjunto de relaciones de preferencia difusas sobre X que verifican transitividad max-$*_i$ débil estricta, $i = 0, 1, 2, 3$. Así mismo, usaremos la notación $\overline{T}_i(X)$ para las correspondientes transitividades débiles no estrictas.

Observación 3.5. Puesto que para cualesquiera $a,b \in [0.5, 1]$ se verifica

$$0.5 \le \min\{a,b\} \le \frac{a+b}{2} \le \max\{a,b\},$$

$$(a > 0.5,\ b > 0.5) \Rightarrow \min\{a,b\} > 0.5$$

y

$$(a \ge 0.5,\ b \ge 0.5) \Rightarrow \min\{a,b\} \ge 0.5,$$

se tiene:

$$R \in \hat{T}_i(X) \ \Rightarrow\ R \in \hat{T}_{i-1}(X), \quad i = 1,2,3.$$

$$R \in \overline{T}_i(X) \ \Rightarrow\ R \in \overline{T}_{i-1}(X), \quad i = 1,2,3.$$

Por otro lado, se verifican las implicaciones

$$R \in \overline{T}_i(X) \Rightarrow R \in \hat{T}_i(X), \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3.$$

Nótese que las relaciones de preferencia difusa pertenecientes a $\hat{T}_0(X)$ son aquéllas tales que $\succ_{0.5}$ es transitiva (respectivamente, las pertenecientes a $\overline{T}_0(X)$ son aquéllas tales que $\succcurlyeq_{0.5}$ es transitiva). Así mismo, por abuso de lenguaje, diremos que R es $\hat{T}_i$ (respectivamente $\overline{T}_i$) para significar $R \in \hat{T}_i(X)$ (respectivamente, $R \in \overline{T}_i(X)$), para $i = 0, 1, 2, 3$. Usando esta notación, se puede resumir toda la información anterior en el siguiente cuadro de implicaciones:

$$\begin{array}{ccccccc}
\overline{T}_3 & \Rightarrow & \overline{T}_2 & \Rightarrow & \overline{T}_1 & \Rightarrow & \overline{T}_0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\hat{T}_3 & \Rightarrow & \hat{T}_2 & \Rightarrow & \hat{T}_1 & \Rightarrow & \hat{T}_0
\end{array}$$

Observación 3.6. Algunas de las transitividades consignadas anteriormente aparecen en la literatura con otras denominaciones que no deben llevar a confusión. La transitividad max-$*$ para R se define inicialmente exigiendo $r_{il} \geq r_{ij} * r_{jl}$. La apostilla “débil” (o “restringida”, que nosotros no emplearemos para evitar confusiones) se debe a condiciones consideradas por Tanino (1984) y Dasgupta – Deb (1996), entre otros, cuando se requieren ciertas hipótesis adicionales. En nuestro caso, éstas consisten en considerar las intensidades de preferencia que aparecen en las definiciones anteriores mayores que 0.5 en el caso que hemos denominado estricto, y mayores o iguales que 0.5 en el caso no estricto. Por otro lado, Fishburn (1973), en un contexto probabilístico en buena parte extrapolable al difuso, habla de transitividades estocásticas fuertes (que corresponderían a las $\overline{T}_3$), moderadas (que coinciden con las $\overline{T}_1$), débiles (homólogas de las $\overline{T}_0$) y también alude a una “versión fuerte” de la transitividad estocástica fuerte, que es la asociada a nuestra $\hat{T}_3$. A este respecto véase también De Baets – De Meyer – De Schuymer – Jenei (2003).

Observación 3.7. Como ya señalamos en la Proposición 2.2, la transitividad de $\succcurlyeq_{0.5}$ equivale a las de $\succ_{0.5}$ y $\sim_{0.5}$ conjuntamente. Ahora bien, la transitividad de la indiferencia ha sido puesta en tela de juicio por Luce (1956), basándose en el hecho empíricamente constatable de la existencia de umbrales de percepción de los agentes. Así, en una cadena de alternativas, dos cualesquiera de ellas consecutivas pueden ser consideradas por un agente como indistinguibles (aunque de hecho no lo sean) debido a su capacidad limitada de percepción, y por tanto indiferentes; sin embargo tal agente puede mostrar una preferencia estricta entre la primera y última alternativas de la cadena, si la diferencia entre éstas supera su umbral de percepción (el ejemplo clásico considera una secuencia de tazas de café, a cada una de las cuales se añade un granito de azúcar más que la anterior, comenzando por una taza sin azúcar; tal diferencia es insensible entre dos tazas consecutivas, pero no lo es en absoluto entre la primera y la última, si el número de ellas es considerable).

Observación 3.8. Hacemos notar que una relación de preferencia difusa $R \in \hat{T}_i(X)$, $i = 1, 2, 3,$ no admite caídas de intensidad de preferencia en alternativas x_i, x_j, x_l conectadas de forma que cada una sea preferida a la siguiente según $\succ_{0.5}$. Así, por ejemplo, si $r_{ij}^k = 0.8$ y $r_{jl}^k = 0.6$, debería ser $r_{il}^k \geq 0.6$ si $R^k \in \hat{T}_1(X)$, $r_{il}^k \geq 0.7$ si $R^k \in \hat{T}_2(X)$ y $r_{il}^k \geq 0.8$ si $R^k \in \hat{T}_3(X)$. Consideraciones análogas de no caída de intensidad de preferencia son válidas para las correspondientes transitividades no estrictas en alternativas x_i, x_j, x_l conectadas de forma que cada una sea preferida a la siguiente según $\succcurlyeq_{0.5}$.

La idoneidad de los algunos de los contadores de Borda que se introducen en este capítulo, y a la que hacíamos referencia al comienzo del mismo, ya puede ser en parte explicitada: más adelante veremos que, bajo hipótesis de coherencia relacionadas con $\hat{T}_3(X)$ y $\overline{T}_3(X)$, los agentes que operen con contadores que se especificarán en cada caso asignarán puntuaciones representativas de sus preferencias, lo que significa que si una alternativa es mejor que otra para un agente en concreto, la puntuación otorgada a aquélla es mayor que la de ésta.

3.1.7 Mayorías simples generalizadas a partir de preferencias difusas

En el capítulo anterior aparecía la mayoría simple como método de decisión idóneo cuando concurren sólo 2 candidatos. Resultaba por ello ser la base teórica en que se sustenta el principio de Condorcet, y la principal de las críticas recibidas por la regla de Borda clásica estriba en vulnerar tal principio. En otras palabras, un ganador por el método de Borda podría ser vencido por mayoría simple por algún otro candidato para el colectivo de votantes, hecho éste que en buena medida cuestiona la legitimidad del ganador de Borda.

En esta sección se propone un tratamiento paralelo al del tema anterior, aunque veremos que la generalización del caso clásico al difuso no es única. Así, en primera instancia, se define una *mayoría simple generalizada en sentido amplio* en virtud de la cual la alternativa x_i vence a la alternativa x_j si se cumple

$$\sum_{k=1}^{m} r_{ij}^{k} > \sum_{k=1}^{m} r_{ji}^{k},$$

es decir, si la suma de todas las intensidades de preferencia (u opiniones) de los agentes sobre la alternativa x_i al ser confrontada con la alternativa x_j pesa más que si se intercambian los papeles de las alternativas.

Ahora bien, otra posibilidad legítima interpreta que sólo deben sumarse intensidades de preferencia cuando la correspondiente ordinaria inducida es estricta; en otras palabras, sólo deben ser computadas las opiniones favorables relativas a una alternativa al ser comparada con su oponente. De este modo, la alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido restringido* cuando

$$\sum_{\substack{k=1 \\ x_i \succ_{0.5}^k x_j}}^{m} r_{ij}^k > \sum_{\substack{k=1 \\ x_j \succ_{0.5}^k x_i}}^{m} r_{ji}^k .$$

Se entiende en lo sucesivo que si algún sumatorio está indexado en el conjunto vacío, su valor es nulo.

El tratamiento en sentido amplio es el considerado en Marchant (1996, pp. 28 – 29), mientras que, en un contexto de toma de decisiones mediante etiquetas lingüísticas, el enfoque restringido ha sido tenido en cuenta en García Lapresta (en prensa).

Como en el caso clásico, consideremos la matriz de intensidades de preferencia ya introducida en la Definición 3.6:

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \dots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \dots & r_{2n}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \dots & r_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

A partir de la información contenida en esta matriz de intensidades de preferencia individual hay dos posibilidades de agregarla, atendiendo a los enfoques apuntados.

- Definiendo una *matriz agregada en sentido amplio* como suma de las matrices de intensidades de preferencia individuales:

$$\left(\overline{r}_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(r_{ij}^k\right).$$

- Definiendo una *matriz agregada* como suma condicionada (denotada por $\oplus$) de las matrices de intensidades de preferencia individuales, donde sólo se suman intensidades de preferencia estrictamente mayores que 0.5:

$$\left(\hat{r}_{ij}\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \left(r_{ij}^{k}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ r_{ij}^{k} > 0.5}}^{m} (r_{ij}^{k}).$$

De nuevo, en la anterior definición se sopesan las intensidades con que la alternativa x_i es preferida a x_j conforme a la relación de preferencia inducida $\succ_{0.5}^{k}$ de cada agente.

Es interesante señalar que ambas matrices agregadas en sentidos amplio y restringido, coinciden en el caso clásico con la que, en tal contexto, denominamos simplemente “matriz agregada”, que aparece en la Definición 2.10.

La definición (y notación) de margen generalizado (ya sea o no en sentido amplio) entre dos alternativas se mantiene en este contexto, pero ahora puede tomar valores no enteros. De esta forma:

- La alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido amplio* cuando el *margen en sentido amplio* $\overline{\mathrm{mg}}(i,j) = \overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji}$ es positivo.

- La alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido restringido* cuando el *margen en sentido restringido* $\widehat{\mathrm{mg}}(i,j) = \hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji}$ es positivo.

3.2 Reglas de Borda graduales: Formulación y análisis

En esta sección, siguiendo un desarrollo paralelo al del capítulo anterior, se formalizan los contadores de Borda graduales sobre el esquema de sus homólogos discretos, y se mostrarán varias posibilidades de generalización en las que la toma de decisiones colectiva depende en cada caso de qué tipo de intensidades de preferencia de los agentes sean computadas. Hemos de notar que también Marchant (1996 y 2000), de forma similar, ha realizado un enfoque gradual del método de Borda, aunque más restrictivo que el nuestro, y en su caso, a partir de planteamientos de toma de decisiones multicriterio.

3.2.1 Extensiones graduales de la regla de Borda en sentido amplio

Hay varias formas de extender el contador de Borda clásico individual del agente $k \in \{1,...,m\}$ al caso en que éste manifieste gradualmente sus inclinaciones, recogidas en la matriz de intensidades de preferencia

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \dots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \dots & r_{2n}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \dots & r_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

Antes de entrar en su formalización debemos indicar que las que aparecen en este apartado las hemos denominado *extensiones en sentido amplio*, empleando la misma expresión ya acuñada para las mayorías simples generalizadas, ya que consideran todas las intensidades de preferencia de los agentes[9], la suma de las cuales constituye la matriz agregada en sentido amplio $\left(\overline{r}_{ij}\right)$. A su vez, en la notación introducida para estos contadores graduales se trata de mantener en paralelo la analogía con los contadores discretos del capítulo anterior.

Definición 3.10. Dada una alternativa $x_i \in X$, se definen los *contadores graduales de Borda individuales en sentido amplio* $\overline{r}_k^v(x_i),\ v = 1,\dots,4$, con los que el agente *k* asigna una puntuación a la alternativa x_i de la forma que sigue:

- $\overline{r}_k^1(x_i) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ij}^k$,

- $\overline{r}_k^2(x_i) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k$,

- $\overline{r}_k^3(x_i) = \sum_{i \neq j=1}^{n} r_{ij}^k$ (*Black I en sentido amplio*),

- $\overline{r}_k^4(x_i) = \sum_{i \neq j=1}^{n} r_{ij}^k - \sum_{i \neq j=1}^{n} r_{ji}^k$ (*Black II en sentido amplio*).

La razón de introducir el primer contador es de completitud formal. Recordemos que su homólogo en el caso discreto se define como

$$r_k^1(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{n} r_{ij}^k\,;$$

ahora bien, desde un punto de vista computacional, este último contador se puede reescribir como

$$r_k^1(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ij}^k\,,$$

sumando únicamente unos y ceros (es decir preferencias estrictas), y obviando las indiferencias (0.5). Es ésta la expresión que tomamos ahora como patrón (la que, además, tiene en cuenta las indiferencias será considerada en la siguiente subsección). Observamos, no obstante, que tal contador que en el caso discreto es perfectamente natural y extiende a órdenes no lineales la idea de Borda y Morales de contabilizar el número de alternativas peores que la que se evalúa, tiene ahora por el contrario, en este contexto gradual, un carácter *ad hoc*, al eludir en los sumatorios las intensidades 0.5.

---

[9] En otro contexto, este tratamiento ya ha sido considerado en García Lapresta – Llamazares

Parece, por tanto, más adecuado considerar el segundo contador, que suma todas las intensidades de preferencia entre la alternativa que el agente k está evaluando y las demás (incluida ella misma).

El tercer contador mantiene la fórmula anterior, pero excluye, por no aportar información relevante, la comparación de una alternativa consigo misma[10]. Este contador sería la extrapolación del primero de Black del caso discreto al gradual en sentido amplio.

Por fin, paralelamente al segundo contador discreto de Black, se puede considerar nuestro cuarto contador. Aunque en rigor y por paralelismo al caso discreto tratado en el capítulo anterior habría que definirlo como

$$\overline{r}_k^4(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ji}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ji}^k,$$

eludimos, por las razones indicadas referentes al primer contador, esta expresión, equivalente a la dada.

Es evidente la relación $\overline{r}_2^k(x_i) = \overline{r}_3^k(x_i) + 0.5$. Y para los contadores tercero y cuarto introducidos se verifica una fórmula idéntica a la del caso discreto. La demostración que damos a continuación, comparativamente mucho más sencilla que la de Black (1976) en su contexto, se basa en el axioma de reciprocidad.

Proposición 3.1. Para los contadores de Black graduales en sentido amplio se verifica la relación

$$\overline{r}_k^4(x_i) = 2\overline{r}_k^3(x_i) - (n-1).$$

(2003).

[10] Notemos así que el primer contador excluye todas las indiferencias, el tercero sólo la indiferencia de una alternativa consigo misma, y el segundo no excluye ninguna de las indiferencias.

Demostración:

$$\overline{r}_k^4(x_i) = \sum_{j\neq i=1}^{n} r_{ij}^k - \sum_{j\neq i=1}^{n} r_{ji}^k = \sum_{j\neq i=1}^{n} (r_{ij}^k - r_{ji}^k) = \sum_{j\neq i=1}^{n} (r_{ij}^k - (1-r_{ij}^k)) = \sum_{j\neq i=1}^{n} (2r_{ij}^k - 1) =$$

$$= 2\sum_{j\neq i=1}^{n} r_{ij}^k - (n-1) = 2\,\overline{r}_3^k(x_i) - (n-1). \quad \blacksquare$$

Conviene señalar que mientras los contadores de Borda considerados en el capítulo anterior sólo recorren un rango discreto de valores, las puntuaciones de los contadores de Borda graduales (en sentido amplio) recorren intervalos, es decir todos los valores intermedios entre las puntuaciones extremas asignables se pueden alcanzar. Más concretamente, los contadores primero y tercero pueden tomar valores en $[0,\ n-0.5]$; el segundo en $[0.5,\ n-0.5]$; y el cuarto en $[-(n-0.5),\ n-0.5]$.

En cuanto al cómputo total de puntuaciones otorgadas por cada uno de los agentes se tienen relaciones análogas a las del caso discreto:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^1(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{i,j=1 \\ r_{ij}^k \neq 0.5}}^{n} (r_{ij}^k + r_{ji}^k) \leq \binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$ (la igualdad se daría en el caso en que no hubiera indiferencia entre alternativas distintas).

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k = \sum_{i,j=1}^{n} (r_{ij}^k + r_{ji}^k) = \binom{n}{2} + n\cdot 0.5 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^3(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_k^2(x_i) - 0.5) = \frac{n^2}{2} - n\cdot 0.5 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^4(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(2\,\overline{r}_k^3(x_i) - (n-1)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_k^3(x_i) - n(n-1) = 2\frac{n(n-1)}{2} - n(n-1) = 0.$$

Hacemos notar que esta última fórmula era clave para probar las buenas propiedades de Condorcet en el caso discreto y, como veremos, también lo será en este contexto.

Con estos contadores individuales se construye uno colectivo en cada caso:

$$\overline{\boldsymbol{r}}^{\nu}(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \overline{r}_k^{\nu}(x_i),\ \ \nu = 1,\ldots,4.$$

Exceptuando el primero, los contadores colectivos considerados se pueden expresar mediante la matriz agregada $\left(\overline{r}_{ij}\right)$. Así:

- $\overline{\boldsymbol{r}}^{2}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \overline{r}_{ij}.$

- $\overline{\boldsymbol{r}}^{3}(x_i) = \sum_{i \neq j=1}^{n} \overline{r}_{ij}.$

- $\overline{\boldsymbol{r}}^{4}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} (\overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji}) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{mg}}(i, j).$

Además, conviene señalar que de las relaciones entre los correspondientes contadores individuales se deduce:

- $\overline{\boldsymbol{r}}^{3}(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \left(\overline{r}_k^{2}(x_i) - 0.5\right) = \overline{\boldsymbol{r}}^{2}(x_i) - \dfrac{m}{2}.$

- $\overline{\boldsymbol{r}}^{4}(x_i) = \sum_{k=1}^{m} (2\,\overline{r}_k^{3}(x_i) - (n-1)) = 2\,\overline{\boldsymbol{r}}^{3}(x_i) - m(n-1) = 2\left(2\,\overline{\boldsymbol{r}}^{2}(x_i) - \dfrac{m}{2}\right) - m(n-1) =$

  $= 2\,\overline{\boldsymbol{r}}^{2}(x_i) - mn.$

Las relaciones de preferencia colectivas $P_{\nu}^{\overline{B}}$ que se obtienen a partir de estos contadores vienen dadas por:

$$x_i P_{\nu}^{\overline{B}} x_j \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{r}}^{\nu}(x_i) > \overline{\boldsymbol{r}}^{\nu}(x_j),\ \ \nu = 1,\ldots,4,$$

las cuales siempre son negativamente transitivas, y resultará(n) elegida(s) en cada caso la(s) alternativa(s) con mayor puntuación. También aquí se denotan por $I_v^{\overline{B}}, v = 1, \ldots, 4,$ las correspondientes relaciones de indiferencia.

Ahora bien, de las relaciones anteriores se deduce que los contadores considerados, a excepción del primero, son equivalentes, es decir inducen la misma relación de preferencia colectiva: $P_2^{\overline{B}} = P_3^{\overline{B}} = P_4^{\overline{B}}$.

El hecho de que el primer contador no es equivalente a los anteriores se pone de manifiesto a continuación[11].

Ejemplo 3.1. Supongamos que la matriz de intensidades de preferencia del agente *k* viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\overline{r}_k^1(x_2) = 0.6 < 0.8 = \overline{r}_k^1(x_3),$ pero $\overline{r}_k^2(x_2) = 1.6 > 1.3 = \overline{r}_k^2(x_3).$

3.2.2 Extensiones graduales de la regla de Borda clásica en sentido restringido

En este apartado, y por razones que siguen la misma filosofía que las mayorías simples generalizadas que se introdujeron en 3.1.7, consideraremos otras extensiones de la regla de Borda clásica donde el recorrido de los sumatorios con los que se definen las puntuaciones otorgadas será más restringido. Más

[11] Aunque la equivalencia es una noción relativa a contadores colectivos, también la aplicaremos al caso de un único agente, y así hablaremos de contadores individuales equivalentes. Por esta razón, para justificar que dos reglas de Borda graduales introducidas son métodos de votación esencialmente distintos, bastará con probar el incumplimiento de la equivalencia para los respectivos contadores individuales.

concretamente, en este caso se considerarán esencialmente las intensidades de preferencia de los agentes mayores que 0.5, a partir de cuyas sumas se construye la matriz agregada $\left(\hat{r}_{ij}\right)$. Así se atienden las preferencias ordinarias de las que derivan las correspondientes graduales (o si se quiere, se tienen en cuenta las preferencias ordinarias inducidas), como se detalla a continuación. En parte, este enfoque ya ha sido tratado en García Lapresta – Martínez Panero (2002).

La situación, que venimos repitiendo en cada escenario, es ahora la siguiente: para cada agente *k*, se desea construir un nuevo contador que evalúe las alternativas teniendo en cuenta intensidades de preferencia en la comparación por pares de las mismas. En el caso discreto el valor dado por el contador individual a cada alternativa es el número de las que son peores que la considerada teniendo en cuenta la relación de preferencia ordinaria, P^k. Ahora, en un contexto gradual, este papel lo jugará la relación de preferencia ordinaria $\succ_{0.5}^k$ inducida por la relación de preferencia difusa R^k. Y también aquí, en la expresión de los siguientes contadores se sigue un discurso paralelo al de las extensiones discretas introducidas en el capítulo 2.

Definición 3.11. Dada una alternativa $x_i \in X$, se definen los *contadores graduales de Borda individuales en sentido restringido* $\hat{r}_k^v(x_i),\ v = 1, \ldots, 4$, con los que el agente *k* asigna una puntuación a la alternativa x_i de la forma que sigue:

- $\hat{r}_k^1(x_i) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ x_i \succ_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{n} r_{ij}^k,$

- $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ x_i \succcurlyeq_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k \geq 0.5}}^{n} r_{ij}^k,$

- $\hat{r}_k^3(x_i) = \sum_{\substack{i \neq j=1 \\ x_i \succcurlyeq_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{i \neq j=1 \\ r_{ij}^k \geq 0.5}}^{n} r_{ij}^k$ *(Black I en sentido restringido),*

- $\hat{r}_k^4(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i \succ_{0.5}^k x_j}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \succ_{0.5}^k x_i}}^{n} r_{ji}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ji}^k > 0.5}}^{n} r_{ji}^k$ *(Black II en sentido restringido).*

El primer contador individual suma las intensidades de preferencia entre la alternativa considerada y las que son peores según $\succ_k$. De esta forma, el agente k asigna a la alternativa x_i un valor que corresponde a sumar los coeficientes mayores que 0.5 de la fila i de la matriz de intensidades de preferencia del agente.

La segunda extensión consiste en incorporar los empates entre alternativas (incluido el de toda alternativa consigo misma) en la fórmula anterior o, si se quiere, computar la suma de los coeficientes mayores o iguales que 0.5 de la fila i de la matriz de intensidades de preferencia del agente.

Los dos últimos contadores individuales extienden los de Black, formulados en el caso discreto. Así, Black I gradual restringido reproduce la fórmula anterior, excluyendo el empate de una alternativa consigo misma; o sea, que el agente k asigna a la alternativa x_i un valor que corresponde a sumar los coeficientes mayores o iguales que 0.5 de la fila i de la matriz de intensidades de preferencia del agente, a excepción del elemento diagonal.

Por fin, Black II gradual restringido pondera victorias menos derrotas (según $\succ_{0.5}^k$), lo que, en este caso, corresponde a suma de coeficientes mayores que 0.5 de la fila i-ésima menos la suma de coeficientes mayores que 0.5 de la columna i-ésima de la matriz de intensidades de preferencia del agente.

Observación 3.9. Es trivial la relación $\hat{r}_k^2(x_i) = \hat{r}_k^3(x_i) + 0.5$. Ahora bien, no se tiene una fórmula tipo Black que relacione Black I y Black II en sentido restringido, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. Supongamos que la matriz de intensidades de preferencia del agente *k* viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.6 & 1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Las puntuaciones Borda según Black I resultan:

$$\hat{r}_k^3(x_1) = 0.7 + 0.6 + 1 = 2.3, \quad \hat{r}_k^3(x_2) = 0.5 + 0.8 = 1.3, \quad \hat{r}_k^3(x_3) = 0.5 + 0.7 = 1.2,$$
$$\hat{r}_k^3(x_4) = 0.$$

Y las puntuaciones según Black II son:

$$\hat{r}_k^4(x_1) = 0.7 + 0.6 + 1 = 2.3, \quad \hat{r}_k^4(x_2) = 0.8 - 0.7 = 0.1, \quad \hat{r}_k^4(x_3) = 0.7 - 0.6 = 0.1,$$
$$\hat{r}_k^4(x_4) = -1 - 0.8 - 0.7 = -2.5.$$

Así, a la vista de los resultados relativos a las alternativas x_2 y x_3, se observa que la correspondencia entre las puntuaciones otorgadas por Black I y Black II no puede venir dada mediante una transformación afín creciente, como en los casos discreto y gradual en sentido amplio, ya que ni siquiera existe una biyección entre tales juegos de puntuaciones. El mismo argumento es válido para $\hat{r}_k^1$ y $\hat{r}_k^4$, toda vez que en el anterior ejemplo, al no existir más indiferencias que la de una alternativa consigo misma, los contadores $\hat{r}_k^1$ y $\hat{r}_k^3$ asignan las mismas puntuaciones, por lo que de nuevo se puede hacer valer el razonamiento anterior.

Los contadores de Borda graduales individuales en sentido restringido recorren intervalos, y el rango de recorrido coincide con el de sus homólogos en sentido amplio. Ahora bien, en el cómputo total de puntuaciones otorgadas por cada agente se obtienen desigualdades, que únicamente serían igualdades cuando los coeficientes no diagonales de la matriz de preferencia individual del agente en cuestión fuesen nulos o unitarios, salvo en el caso del último contador que, cualesquiera que sean tales coeficientes, de nuevo se anula:

- $\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^1(x_i) \leq (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}.$
- $\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^2(x_i) \leq (n-1)+(n-2)+\cdots+1+n\cdot 0.5 = \frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}.$
- $\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^3(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{r}_k^2(x_i)-0.5\right) \leq \frac{n^2}{2}-n\cdot 0.5 = \frac{n(n-1)}{2}.$
- $\sum_{i=1}^{n} \hat{r}_k^4(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1\\ r_{ij}>0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{\substack{j=1\\ r_{ji}>0.5}}^{n} r_{ji}^k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ r_{ij}>0.5}}^{n} r_{ij}^k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ r_{ji}>0.5}}^{n} r_{ji}^k = 0.$

Para verificar que la última expresión es nula téngase en cuenta que si $r_{ij}^k > 0.5$ contabiliza como positivo por ser un elemento de la fila *i*, también lo hace con el mismo valor y signo contrario por pertenecer a la columna j.

Como en los casos discreto y gradual en sentido amplio, esta propiedad es básica para probar las buenas propiedades condorcetianas de Black II, que se tratarán en 3.4.

De nuevo, con los contadores individuales considerados se construye uno colectivo en cada caso:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^v(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \hat{r}_k^v(x_i),\ v = 1,\ldots,4.$$

Y también alguno de los contadores colectivos se puede expresar a través de la matriz agregada $\left(\hat{r}_{ij}\right)$ como sigue:

- $\hat{\boldsymbol{r}}^1(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \hat{r}_{ij}.$

- $\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_i) = \sum_{j=1}^{n} (\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji}) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\mathrm{mg}}(i, j).$

Como única relación entre los contadores colectivos podemos consignar

- $\hat{\boldsymbol{r}}^3(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \left(\hat{r}_k^2(x_i) - 0.5\right) = \hat{\boldsymbol{r}}^2(x_i) - \dfrac{m}{2}.$

Ahora, las relaciones de preferencia colectivas $P_v^{\hat{B}}$ vienen dadas por:

$$x_i P_v^{\hat{B}} x_j \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}}^v(x_i) > \hat{\boldsymbol{r}}^v(x_j), \;\; v = 1, \ldots, 4,$$

las cuales siempre son negativamente transitivas, y resultará(n) elegida(s) en cada caso la(s) alternativa(s) con mayor puntuación. Se denotan por $I_v^{\hat{B}}, v = 1, \ldots, 4,$ las correspondientes relaciones de indiferencia.

Observación 3.10. En lo que respecta a la equivalencia de contadores, obviamente se tiene $P_2^{\hat{B}} = P_3^{\hat{B}}$. Por otro lado, también sabemos a la vista del Ejemplo 3.2 que los contadores de Black inducen ordenaciones colectivas (o si se quiere, generan reglas de votación) esencialmente distintas, es decir $P_3^{\hat{B}} \neq P_4^{\hat{B}}$. También se justifica mediante el mismo ejemplo citado $P_1^{\hat{B}} \neq P_4^{\hat{B}}$. Y se verifica así mismo $P_1^{\hat{B}} \neq P_3^{\hat{B}}$: sirve para comprobar este último aserto el Ejemplo 2.2, sin más que cambiar los contadores allí empleados, $\boldsymbol{r}^1$ y $\boldsymbol{r}^3$ por sus homólogos en este contexto $\hat{\boldsymbol{r}}^1$ y $\hat{\boldsymbol{r}}^3$, permaneciendo las puntuaciones en ambos casos inalteradas.

3.2.3 Representatividad de los contadores de Borda graduales

En el contexto en que nos encontramos también parece lógico e inexcusable el que cada agente, al puntuar cualesquiera dos alternativas mediante los contadores de Borda individuales (ya sea en sentido amplio o restringido), asigne una mayor puntuación a aquella alternativa sobre la que manifiesta mayor intensidad de preferencia (o, si se quiere, que es preferida a la otra según la relación de preferencia ordinaria inducida). Sería deseable, por tanto, que los contadores de Borda individuales fuesen representativos de las preferencias de los agentes tal como se formaliza a continuación.

Definición 3.12. El contador de Borda individual en sentido amplio $\overline{r}_k^v,\ v=1,\ldots,4,$ es *representativo de* R^k si y sólo si se verifica

$$x_i \succ_{0.5}^k x_j \;\Rightarrow\; \overline{r}_k^v(x_i) > \overline{r}_k^v(x_j)\,,$$

para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Definición 3.13. El contador de Borda individual en sentido restringido $\hat{r}_k^v,\ v=1,\ldots,4,$ es *representativo de* R^k si y sólo si se verifica

$$x_i \succ_{0.5}^k x_j \;\Rightarrow\; \hat{r}_k^v(x_i) > \hat{r}_k^v(x_j)\,,$$

para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Observación 3.11. Análogamente al caso discreto, se comprueba que si dos alternativas $x_i, x_j \in X$ reciben la misma puntuación mediante cualquier contador representativo de R^k, entonces $r_{ij}^k = 0.5$, o equivalentemente, $x_i \sim_k x_j$, pero no es cierto el recíproco.

Como ya adelantamos, la transitividad denominada max-max débil no estricta $(\overline{T}_3)$:

$$(r_{ij}^k \geq 0.5 \quad \text{y} \quad r_{jl}^k \geq 0.5) \Rightarrow r_{il}^k \geq \max\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\},$$

es una condición suficiente para que los contadores graduales individuales en sentido amplio (a excepción del primero de ellos) estén dotados de la propiedad de consistencia interna de representatividad anteriormente definida.

Proposición 3.2. Si $R^k \in \overline{T}_3(X)$, entonces los contadores $\overline{r}_k^2$, $\overline{r}_k^3$ y $\overline{r}_k^4$ son representativos de R^k.

Demostración. Puesto que los contadores en cuestión son equivalentes, basta con demostrarlo para $\nu = 2$. Supongamos $x_i \succ_{0.5}^k x_j$, es decir $r_{ij}^k > 0.5$. Veamos entonces que, bajo la hipótesis de coherencia difusa $\overline{T}_3$, se verifica $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ para cualquier $x_l \in X$. Distinguiremos varios casos, excluyentes y exhaustivos:

- Si $r_{jl}^k \geq 0.5$, entonces $r_{il}^k \geq \max\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\} \geq r_{jl}^k$.

- Si $r_{jl}^k < 0.5$ y $r_{il}^k \leq 0.5$, por reciprocidad se tendrá $r_{li}^k \geq 0.5$. Entonces, $r_{lj}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} \geq r_{li}^k$, de donde, $1 - r_{lj}^k \leq 1 - r_{li}^k$ y, de nuevo por reciprocidad, $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$.

- Si $r_{jl}^k < 0.5$ y $r_{il}^k > 0.5$, entonces la desigualdad $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ se verifica trivialmente.

Además, por ser $r_{ij}^k > 0.5$, la desigualdad $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ es estricta al menos en los casos $l = i$ y $l = j$. Por tanto, $\overline{r}_k^2(x_i) = \sum_{l=1}^{n} r_{il}^k > \sum_{l=1}^{n} r_{jl}^k = \overline{r}_k^2(x_j)$. ■

Observación 3.12. Bajo la misma hipótesis de la proposición anterior, $R^k \in \overline{T}_3(X)$, el primer contador gradual individual en sentido amplio, $\overline{r}_k^1$, puede no ser representativo de R^k, como queda manifiesto para un agente con la matriz de intensidades de preferencia ya empleada en el Ejemplo 3.1:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Resulta inmediato comprobar que la relación de preferencia difusa de ese agente es $\overline{T}_3$-transitiva. Por otra parte, $x_2 \succ_{0.5}^k x_3$ puesto que $r_{23}^k = 0.6 > 0.5$, mientras que $\overline{r}_k^1$ invierte dicha relación: $\overline{r}_k^1(x_2) = 0.6 < 0.8 = 0.4 + 0.4 = \overline{r}_k^1(x_3)$.

A continuación se pone de manifiesto que relajar la transitividad difusa max-max débil no estricta puede vulnerar la representatividad. Lo comprobamos para el segundo contador de Borda en sentido amplio.

Observación 3.13. Sea R^k la relación de preferencia difusa sobre $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.52 & 0.76 & 0.88 & 0.79 \\ 0.48 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0.24 & 0 & 0.5 & 1 & 0.82 \\ 0.12 & 0 & 0 & 0.5 & 0.6 \\ 0.21 & 0 & 0.18 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $R^k \in \overline{T}_2(X)$ y, por la Observación 3.5, también $R^k \in \overline{T}_1(X)$. Sin embargo, obsérvese que $R^k \notin \overline{T}_3(X)$, pues, por ejemplo, $r_{12} = 0.52$ y $r_{23} = 1$, luego debería ser $r_{13} \geq \max\{0.52, 1\}=1$; pero $r_{13} = 0.76$.

Nótese así mismo que $x_1 \succ_{0.5}^k x_2$, pues $r_{12}^k = 0.52 > 0.5$. Sin embargo $\overline{r}_k^2(x_1) = 0.5 + 0.52 + 0.76 + 0.88 + 0.79 = 3.45 < 3.98 = 0.48 + 0.5 + 1 + 1 + 1 = \overline{r}_k^2(x_2)$.

Pasamos a tratar la representatividad de los contadores de Borda graduales en sentido restringido, esto es, los que consideran únicamente intensidades de preferencia mayores o iguales que 0.5. Veremos ahora que, bajo la condición $\hat{T}_3$, más débil que la empleada en el caso amplio, $\overline{T}_3$, todos ellos (incluido el primero, que no lo era en el caso amplio) son representativos de las correspondientes preferencias individuales.

En lo que al primer contador en sentido restringido se refiere y desde un punto de vista heurístico, tal vez pudiera conjeturarse, por analogía con el caso discreto, que la transitividad de $\succ_{0.5}^{k}$, esto es, la condición $\hat{T}_0$, garantizaría la representatividad de $\hat{r}_k^1$. Sin embargo, en García Lapresta – Martínez Panero (2002) probamos que esta propiedad no es suficiente, y consideramos la condición de transitividad difusa apuntada que sí asegura la consistencia interna del método propuesto, a saber, la que hemos denominado transitividad difusa max-max débil estricta, $\hat{T}_3$.

Proposición 3.3. Si $R^k \in \hat{T}_3(X)$, entonces el contador $\hat{r}_k^1$ es representativo de R^k.

Demostración. Para cada $i \in \{1,...,n\}$ tómese el conjunto $P(i) = \{l \mid r_{il}^k > 0.5\} \subset \{1,...,n\}$. Entonces, $\hat{r}_k^1(x_i) = \sum_{l \in P(i)} r_{il}^k$ y $\hat{r}_k^1(x_j) = \sum_{l \in P(j)} r_{jl}^k$. Supongamos $r_{ij}^k > 0.5$. Veamos que $P(j) \subset P(i)$: si $l \in P(j)$, entonces $r_{jl}^k > 0.5$. Por hipótesis, $r_{ij}^k > 0.5$, luego $r_{il}^k \geq \max\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\} > 0.5$ y así $l \in P(i)$. Nótese que la inclusión es estricta, pues $r_{ij}^k > 0.5$ implica $j \in P(i)$, mientras que $j \notin P(j)$, pues por la reciprocidad $r_{jj}^k = 0.5$. Entonces, en $\hat{r}_k^1(x_i)$ hay más sumandos que en $\hat{r}_k^1(x_j)$. Veamos ahora que cada sumando en $\hat{r}_k^1(x_i)$ es mayor o igual que el correspondiente en $\hat{r}_k^1(x_j)$. Para ello debe tenerse en cuenta que si $l \in P(j) \subset P(i)$, entonces se verifica $r_{il}^k \geq \max\{r_{ij}^k, r_{jl}^k\} \geq r_{jl}^k$ y, en consecuencia, $\hat{r}_k^1(x_i) = \sum_{l \in P(i)} r_{il}^k > \sum_{l \in P(i)} r_{jl}^k = \hat{r}_k^1(x_j)$. ■

Proposición 3.4. Si $R^k \in \hat{T}_3(X)$, entonces el contador $\hat{r}_k^4$ es representativo de R^k.

Demostración. Supongamos $r_{ij}^k > 0.5.$ Replicando exactamente la misma demostración de la proposición anterior se deduce $\sum_{\substack{l=1 \\ r_{il}^k > 0.5}}^{n} r_{il}^k > \sum_{\substack{l=1 \\ r_{jl}^k > 0.5}}^{n} r_{jl}^k.$

Análogamente, si denominamos $Q(i) = \{l \mid r_{li}^k > 0.5\} \subset \{1, ..., n\}$, entonces se puede probar $Q(i) \subset Q(j)$: si $l \in Q(i)$, entonces $r_{li}^k > 0.5$. Por hipótesis, $r_{ij}^k > 0.5$, luego $r_{lj}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} > 0.5$ y así $l \in Q(j)$. Nótese que la inclusión es estricta, pues $r_{ij}^k > 0.5$ implica $i \in Q(j)$, mientras que $i \notin Q(i)$, pues por la reciprocidad $r_{ii}^k = 0.5$. Además, si $l \in Q(i) \subset Q(j)$ se verifica $r_{lj}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} \geq r_{li}^k$ y, en consecuencia, $\sum_{\substack{l=1 \\ r_{lj}^k > 0.5}}^{n} r_{lj}^k = \sum_{l \in Q(j)} r_{lj}^k > \sum_{l \in Q(i)} r_{li}^k = \sum_{\substack{l=1 \\ r_{li}^k > 0.5}}^{n} r_{li}^k.$

De las anteriores desigualdades entre sumatorios se obtiene

$$\sum_{\substack{l=1 \\ r_{il}^k > 0.5}}^{n} r_{il}^k + \sum_{\substack{l=1 \\ r_{lj}^k > 0.5}}^{n} r_{lj}^k > \sum_{\substack{l=1 \\ r_{jl}^k > 0.5}}^{n} r_{jl}^k + \sum_{\substack{l=1 \\ r_{li}^k > 0.5}}^{n} r_{li}^k,$$

de donde

$$\hat{r}_k^4(x_i) = \sum_{\substack{l=1 \\ r_{il}^k > 0.5}}^{n} r_{il}^k - \sum_{\substack{l=1 \\ r_{li}^k > 0.5}}^{n} r_{li}^k > \sum_{\substack{l=1 \\ r_{jl}^k > 0.5}}^{n} r_{jl}^k - \sum_{\substack{l=1 \\ r_{lj}^k > 0.5}}^{n} r_{lj}^k = \hat{r}_k^4(x_j). \quad \blacksquare$$

Proposición 3.5. Si $R^k \in \hat{T}_3(X)$, entonces los contadores $\hat{r}_k^2$ y $\hat{r}_k^3$ son representativos de R^k.

Demostración. Por tratarse de contadores equivalentes, basta realizar la prueba para $\hat{r}_k^2$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ considérese el conjunto $S(i) = \{l \mid r_{il}^k \geq 0.5\} \subseteq \{1, ..., n\}$. Entonces, $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum_{l \in S(i)} r_{il}^k$ y $\hat{r}_2^k(x_j) = \sum_{l \in S(j)} r_{jl}^k$.

Supongamos $r_{ij}^k > 0.5$. Veamos en primer lugar que $S(j) \subseteq S(i)$: si $l \in S(j)$, entonces $r_{jl}^k \geq 0.5$. Por reducción al absurdo, supongamos $l \notin S(i)$, es decir, $r_{il}^k < 0.5$. Por reciprocidad $r_{li}^k > 0.5$, y entonces $r_{lj}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} > 0.5$, lo que contradice $r_{jl}^k \geq 0.5$. En segundo lugar, veamos que los sumandos que intervienen en $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum_{l \in S(i)} r_{il}^k$ son mayores o iguales que los correspondientes en $\hat{r}_2^k(x_j) = \sum_{l \in S(j)} r_{jl}^k$, es decir que para cualquier $l \in S(j)$ se cumple $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$. Notemos que $l \in S(j) \subseteq S(i)$ implica $r_{il}^k \geq 0.5$ y $r_{jl}^k \geq 0.5$. Razonemos de nuevo por reducción al absurdo y supongamos $r_{il}^k < r_{jl}^k$. Pero a la vez debe ser $r_{il}^k \geq \max\{r_{li}^k, r_{ij}^k\} \geq r_{jl}^k$, lo que es imposible. Por fin, veamos que alguna de las desigualdades $r_{il}^k \geq r_{jl}^k$ válidas para $l \in S(j)$ es estricta. Efectivamente, $j \in S(i)$ verifica $r_{ij}^k > 0.5$ y $j \in S(j)$ cumple $r_{jj}^k = 0.5$. Se llega así a la conclusión de que $\hat{r}_k^2(x_i) = \sum_{l \in S(i)} r_{il}^k > \sum_{l \in S(j)} r_{jl}^k = \hat{r}_2^k(x_j)$. ■

Observación 3.14. También en este contexto relajar la transitividad difusa max-max débil estricta puede vulnerar la representatividad de $\hat{r}_k^2$, como se observa en el siguiente ejemplo. Sea R^k la relación de preferencia difusa sobre $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dada por la matriz considerada en la Observación 3.13

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.52 & 0.76 & 0.88 & 0.79 \\ 0.48 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0.24 & 0 & 0.5 & 1 & 0.82 \\ 0.12 & 0 & 0 & 0.5 & 0.6 \\ 0.21 & 0 & 0.18 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dado que $R^k \in \overline{T}_2(X)$, por la Observación 3.5 se tiene que $R^k \in \hat{T}_2(X)$ y también $R^k \in \hat{T}_1(X)$. Nótese, así mismo, que $R^k \notin \hat{T}_3(X)$; lo cual se puede poner de manifiesto con el mismo argumento que el señalado en la Observación 3.13, aplicándolo ahora al caso restringido. Y aunque se verifica

$x_1 \succ_{0.5}^{k} x_2$, pues $r_{12}^{k} = 0.52 > 0.5$, sin embargo $\hat{r}_k^2(x_1) = 0.5 + 0.52 + 0.76 + 0.88 + 0.79 = 3.45 < 3.5 = 0.5 + 1 + 1 + 1 = \hat{r}_k^2(x_2)$.

3.2.4 Análisis de Condorcet en el marco difuso

Asumiendo en lo que sigue las hipótesis de racionalidad sobre las preferencias individuales señaladas, con objeto de que los contadores individuales sean representativos de las correspondientes preferencias, consideremos las matrices agregadas en sentidos amplio $\left(\overline{r}_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(r_{ij}^{k}\right)$ y restringido $\left(\hat{r}_{ij}\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \left(r_{ij}^{k}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ r_{ij}^{k} > 0.5}}^{m} (r_{ij}^{k})$. Se definen a continuación los conceptos de alternativa ganadora y perdedora de Condorcet en cada caso por analogía con el discreto.

Definición 3.14. La alternativa x_i es *ganadora de Condorcet en sentido amplio* si y sólo si el margen en sentido amplio sobre el resto de alternativas es positivo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i vence al resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido amplio. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji} > 0.$$

Definición 3.15. La alternativa x_i es *ganadora de Condorcet en sentido restringido* si y sólo si el margen en sentido restringido sobre el resto de alternativas es positivo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i vence al resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido restringido. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji} > 0.$$

Definición 3.16. La alternativa x_i es *perdedora de Condorcet en sentido amplio* si y sólo si el margen en sentido amplio sobre el resto de alternativas es negativo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i es vencida por el resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido amplio. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \overline{r}_{ij} - \overline{r}_{ji} < 0.$$

Definición 3.17. La alternativa x_i es *perdedora de Condorcet en sentido restringido* si y sólo si el margen en sentido restringido sobre el resto de alternativas es negativo, o lo que es lo mismo, si la alternativa x_i es vencida por el resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido restringido. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ji} < 0.$$

También en este contexto es claro que, caso de existir, de la definición de alternativa ganadora (respectivamente perdedora) de Condorcet, en cualquiera de sus variantes, se sigue su unicidad.

A continuación sigue un análisis paralelo al del Capítulo 2 sobre la conexión entre los contadores Borda graduales y el enfoque de Condorcet. Comenzamos por los contadores en sentido amplio, para los que (exceptuando el primer contador) se pueden generalizar los resultados y demostraciones del capítulo anterior ponderando ahora intensidades de preferencia, en lugar de contabilizar cardinales.

Proposición 3.6. Una alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, nunca será la peor puntuada por la regla de Borda si se emplean los contadores $\overline{\boldsymbol{r}}^2$, $\overline{\boldsymbol{r}}^3$ y $\overline{\boldsymbol{r}}^4$.

Demostración. Teniendo en cuenta la equivalencia entre los contadores $\overline{\boldsymbol{r}}^2$, $\overline{\boldsymbol{r}}^3$ y $\overline{\boldsymbol{r}}^4$, basta considerar la regla de Borda asociada a $\overline{\boldsymbol{r}}^4$ y utilizar, por tanto, los contadores individuales $\overline{r}_k^4$, $k = 1,\ldots,m$. Supongamos que la alternativa x_i es ganadora de Condorcet, es decir, para cualquier alternativa $x_j \neq x_i$ se verifica $\overline{r}_{ij} > \overline{r}_{ji}$. Para justificar que x_i no puede obtener la peor puntuación con $\overline{\boldsymbol{r}}^4$, basta demostrar que $\bar{\boldsymbol{r}}^4(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^4(x_i) > 0$, ya que como ha sido probado, se cumple $\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_k^4(x_j) = 0$ y, en consecuencia, la puntuación total media es

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{\boldsymbol{r}}^4(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\bar{r}_k^4(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{r}_k^4(x_j) = 0 .$$

El hecho de que $\bar{\boldsymbol{r}}^4(x_i)$ fuera positiva obligaría a que existiera alguna alternativa con puntuación negativa, luego peor puntuada que x_i. Y esto es inmediato, ya que por ser x_i ganadora de Condorcet, se tiene $\bar{r}_{ij} > \bar{r}_{ji}$, de donde $\boldsymbol{r}^4(x_i) = \bar{r}_{ij} - \bar{r}_{ji} > 0$. ■

Observación 3.15. El contador $\bar{\boldsymbol{r}}^1$ puede dar la peor puntuación Borda a la alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio. Sirve el mismo ejemplo proporcionado en la Observación 2.12.

También se verifica que la regla de Borda en sentido amplio en cualquiera de sus versiones, a excepción de la que emplea el primer contador, excluye a la alternativa perdedora de Condorcet. Enunciamos este resultado formalmente, pero omitimos su demostración, que extrapola argumentos del caso discreto al gradual en la línea de la proposición anterior.

Proposición 3.7. Una alternativa perdedora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, nunca será ganadora por la regla de Borda si se emplean los contadores $\bar{\boldsymbol{r}}^2$, $\bar{\boldsymbol{r}}^3$ y $\bar{\boldsymbol{r}}^4$. ■

Observación 3.16. El contador $\bar{\boldsymbol{r}}^1$ puede dar la mejor puntuación a la alternativa perdedora de Condorcet. Véase a este respecto la Observación 2.13 relativa al contador homólogo discreto.

En el caso restringido se tienen tres clases de equivalencia de contadores respecto de la preferencia colectiva inducida: la formada por el primer contador, la integrada por los contadores segundo y tercero, y la que viene dada por el cuarto contador. Este último mantiene las buenas propiedades de Condorcet de sus homólogos en los casos discreto y gradual en sentido amplio. Enunciamos el correspondiente resultado, paralelo al de las Proposiciones 3.6 y 3.7 conjuntamente, y de nuevo omitimos la demostración, idéntica a aquéllas y basada una vez más en la propiedad

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{r}_k^4(x_j) = 0.$$

Proposición 3.8. Una alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, nunca será la peor puntuada por la regla de Borda si se emplea el contador $\hat{\boldsymbol{r}}^4$. Así mismo, una alternativa perdedora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, nunca puede resultar ganadora por la regla de Borda generalizada si se emplea dicho contador. ■

Observación 3.17. A continuación mostramos que $\hat{\boldsymbol{r}}^1, \hat{\boldsymbol{r}}^2$ y $\hat{\boldsymbol{r}}^3$ no verifican las buenas propiedades señaladas en la Proposición 3.8 para $\hat{\boldsymbol{r}}^4$. En lo que sigue, si t es un número natural y M una matriz, convendremos en denotar $t \bullet M$ = $M \oplus \overbrace{\cdots}^{t \text{ veces}} \oplus M$. Supongamos 5 agentes divididos en 2 coaliciones de 2 y 3 miembros cada una, con la misma matriz de preferencias individuales (transitivas max-max débil estrictas) para todos los miembros de cada coalición. A continuación se detallan tales matrices así como la agregada, usando la notación introducida.

$$\left(2 \bullet \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \right) \oplus \left(3 \bullet \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2.1 & 0 & 1.2 \\ 2.1 & 1.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que x_1 es perdedora de Condorcet, pues $\hat{r}_{12} - \hat{r}_{21} = \hat{r}_{13} - \hat{r}_{31} = -0.1 < 0$. Sin embargo es la alternativa con mayor puntuación Borda:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^1(x_1)=2\cdot 2=4,\quad \hat{\boldsymbol{r}}^1(x_2)=2\cdot 0.6+3\cdot 0.7=3.3,\quad \hat{\boldsymbol{r}}^1(x_3)=3\cdot(0.6+0.7)=3.9.$$

Al no haber otra indiferencia entre alternativas que la propia, en este caso los contadores $\hat{\boldsymbol{r}}^1$ y $\hat{\boldsymbol{r}}^3$ coinciden, por lo que el mismo ejemplo sirve para probar que Black I gradual restringido, es decir, $\hat{\boldsymbol{r}}^3$ (y por equivalencia $\hat{\boldsymbol{r}}^2$) adolecen del mismo defecto que el contador $\hat{\boldsymbol{r}}^1$: no excluyen necesariamente, sino que pueden seleccionar, a la alternativa perdedora de Condorcet[12].

Por otro lado, supongamos ahora 10 agentes divididos en 4 coaliciones, 2 de 2 miembros y otras 2 de 3 miembros cada una, con la misma matriz de preferencias individuales (transitivas max-max débil estrictas) para todos los miembros de cada coalición. A continuación se detallan tales matrices así como la agregada, usando la notación introducida.

$$\left(2\bullet\begin{pmatrix}0.5 & 0.9 & 0.9\\ 0.1 & 0.5 & 0.6\\ 0.1 & 0.4 & 0.5\end{pmatrix}\right)\oplus\left(3\bullet\begin{pmatrix}0.5 & 0.1 & 0.1\\ 0.9 & 0.5 & 0.4\\ 0.9 & 0.6 & 0.5\end{pmatrix}\right)\oplus\left(3\bullet\begin{pmatrix}0.5 & 0.6 & 0.9\\ 0.4 & 0.5 & 0.9\\ 0.1 & 0.1 & 0.5\end{pmatrix}\right)\oplus$$

$$\oplus\left(2\bullet\begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.6 & 0.5 & 0.1\\ 0.9 & 0.9 & 0.5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 3.6 & 4.5\\ 3.9 & 0 & 3.9\\ 4.5 & 3.6 & 0\end{pmatrix}.$$

Obsérvese que x_2 es ganadora de Condorcet, pues $\hat{r}_{21}-\hat{r}_{12}=\hat{r}_{23}-\hat{r}_{32}=0.3>0$. Sin embargo es la alternativa con menor puntuación Borda:

[12] Sin embargo, nótese que, mediante Black II gradual en sentido restringido, x_1 ya no sería la alternativa más valorada:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_1)=2+2-2.1-2.1=-0.2,$$
$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_2)=2.1+1.2-2-1.8=-0.5,$$
$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_3)=2.1+1.8-2-1.2=0.7.$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}^1(x_1) = 3.6 + 4.5 = 8.1, \quad \hat{\boldsymbol{r}}^1(x_2) = 2 \cdot 3.9 = 7.8, \quad \hat{\boldsymbol{r}}^1(x_3) = 4.5 + 3.6 = 8.1.$$

Tampoco en este ejemplo existen otras indiferencias entre alternativas que la propia; por lo que también se prueba que Black I gradual restringido, es decir, $\hat{\boldsymbol{r}}^3$ (y por equivalencia $\hat{\boldsymbol{r}}^2$) adolecen del mismo defecto de que el contador $\hat{\boldsymbol{r}}^1$: el ganador de Condorcet puede ser la alternativa peor puntuada[13].

A continuación se proponen diversos procedimientos híbridos y variantes graduales como compromiso entre los enfoques de Borda y Condorcet. Para ello, ya han sido generalizados tanto el método de Borda y como los conceptos de alternativa ganadora y perdedora de Condorcet, considerando intensidades de preferencia en ambos casos, ya sea en sentido amplio o bien en sentido restringido. Seguidamente haremos lo mismo con el contador de Copeland y la distancia de Kemeny[14]. La razón de ello es que, con tales elementos, es posible rediseñar los procedimientos híbridos y variantes introducidos en el capítulo anterior en el marco discreto, dotándolos así de mayor versatilidad y decisividad al pasar al contexto gradual. Seguiremos las notaciones de los correspondientes patrones discretos, y los sentidos amplio o restringido se denotarán como hemos venido haciendo hasta ahora.

1. *Regla de Copeland generalizada*

Los contadores de Copeland para la alternativa x_i toman la misma expresión que en el caso discreto,

---

[13] Sin embargo, nótese que, mediante Black II gradual en sentido restringido, x_2 ya no sería la alternativa menos valorada:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_1) = 3.6 + 4.5 - 3.9 - 4.5 = -0.3,$$
$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_2) = 2 \cdot 3.9 - 2 \cdot 3.6 = 0.6,$$
$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_3) = 3.6 + 4.5 - 3.9 - 4.5 = -0.3.$$

[14] Cf. García Lapresta – Martínez Panero (2002), donde hemos hecho también esta transición hacia el campo gradual para el procedimiento de voto aprobatorio, ajeno aquí a nuestros propósitos.

$$\overline{c}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \operatorname{sign}(\overline{\mathrm{mg}}(i, j))$$

y respectivamente

$$\hat{c}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \operatorname{sign}(\widehat{\mathrm{mg}}(i, j)),$$

pero ahora los cálculos de los márgenes se hacen a partir de la matriz agregada generalizada en sentido amplio (respectivamente en sentido restringido). También aquí el método de Copeland gradual contabiliza victorias menos derrotas, de acuerdo ahora con la regla de mayoría simple generalizada que se considere en cada caso para el colectivo de agentes. Por ello, si existe una alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio (respectivamente en sentido restringido), x_i, lo es también mediante este procedimiento, ya que en dicho caso $\operatorname{sign}(\overline{\mathrm{mg}}(i, j)) > 0$ (respectivamente $\operatorname{sign}(\widehat{\mathrm{mg}}(i, j)) > 0$) para cada $j \neq i$, siendo por tanto $\overline{c}(x_i) = n-1$ (respectivamente $\hat{c}(x_i) = n-1$). Recíprocamente, una alternativa que reciba la máxima puntuación Copeland alcanzable, a saber, $n-1$, es ganadora de Condorcet en el mismo sentido (amplio o restringido) que la correspondiente regla de Copeland empleada.

2. *Regla de Kemeny generalizada*

Seguimos también aquí el tratamiento de Saari – Merlin (2000) para enunciar esta propuesta de regla generalizada de Kemeny. Utilizamos ahora la matriz agregada generalizada y los márgenes generalizados introducidos en sentido amplio (respectivamente restringido), y mantenemos el que la ordenación buscada sea un orden lineal P de los candidatos. Así pues, tómense todos los pares ordenados de alternativas tales que $x_i P x_j$ y tienen margen generalizado en sentido amplio (respectivamente restringido) negativo y súmense tales márgenes. El valor total, cambiado de signo, es la distancia generalizada de Kemeny en sentido amplio (respectivamente en sentido restringido) de P a las preferencias difusas de los agentes, y debe entenderse ahora una medida de la desavenencia entre el orden P y las preferencias difusas de los agentes, teniendo en cuenta la mayoría simple generalizada en sentido amplio (respectivamente restringido). El orden lineal que proporcione una menor distancia generalizada será el ranking proporcionado por la regla de Kemeny en este contexto.

Como ya hemos señalado, es posible ahora rediseñar los procedimientos híbridos discretos mediante sus componentes generalizados. Así, la regla generalizada de Nanson sería un método de Borda generalizado (en alguna de las versiones dadas) con eliminación, el híbrido generalizado de Black conjugaría el criterio de Condorcet generalizado y la regla de Borda generalizada (de nuevo en alguna de las versiones dadas), etc.

En todos los casos, el precio de pedir a los agentes una información más detallada sobre las alternativas (mediante intensidades de preferencia que sirvan como datos de entrada para los métodos híbridos generalizados) queda recompensado con una mayor decisividad en la elección y un sentido del voto más fiel a sus verdaderos deseos que si se hubieran manifestado mediante las preferencias más monolíticas que son la base de los métodos híbridos clásicos.

3.2.5 Consideraciones sobre los contadores de Borda graduales

La existencia o no de un umbral a partir del cual una opinión individual cuenta y por debajo del cual deja de hacerlo es la clave de los enfoques en sentidos restringido y amplio de las extensiones de la regla de Borda presentadas hasta ahora. Como hemos comentado, ambas posibilidades nos parecen, en principio, legítimas, y cada una de ellas aporta contadores adecuados, al menos en la misma manera en que lo eran los correspondientes discretos. Ahora bien, ningún contador en sentido amplio es equivalente a ningún otro en sentido restringido; es decir, para idénticas configuraciones de preferencias individuales de los agentes y según la vía que se siga, se pueden obtener preferencias colectivas esencialmente distintas. Por supuesto, este hecho no debe resultar paradójico para quienquiera que haya tratado mínimamente con distintos sistemas de votación, donde esta situación se da a menudo (a este respecto véase, por ejemplo, Saari (2001, pp. 1 – 20). Y tampoco en nuestro contexto debería parecer extraño, toda vez que los contadores en sentido restringido truncan parte de la información (por ser insustancial desde su punto de vista), a saber, las intensidades menores que 0.5 en las preferencias individuales de los agentes (que sí son significativas en sentido amplio).

Queremos poner de manifiesto a continuación que, en lo que al enfoque restringido de la regla de Borda se refiere, la existencia de tal umbral tiene relevantes repercusiones en lo relativo a la sensibilidad de los procedimientos empleados en cada caso. En otras palabras, vamos a mostrar que variaciones muy pequeñas en las preferencias individuales pueden tener drásticos efectos en el agregado. El siguiente ejemplo muestra cómo, por ejemplo, $\hat{\boldsymbol{r}}^4$, el contador con mejores propiedades de tipo Condorcet, se muestra vulnerable ante un análisis de sensibilidad como el que hemos indicado.

Ejemplo 3.3. Supongamos tres agentes cuyas preferencias individuales y agregada, usando la notación introducida, vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_1) = 2.9 - 2 = 0.9, \quad \hat{\boldsymbol{r}}^4(x_2) = 2 - 1 = 1 \quad \hat{\boldsymbol{r}}^4(x_3) = 1 - 2.9 = -1.9,$$

de donde $x_2 P^{\hat{B}} x_1 P^{\hat{B}} x_3$. Supongamos ahora que el tercer agente variase mínimamente sus intensidades de preferencia:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 1 \\ 0.4 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 1.9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^4(x_1) = 3.5 - 2 = 1.5, \quad \hat{\boldsymbol{r}}^4(x_2) = 2 - 1.6 = 0.4 \quad \hat{\boldsymbol{r}}^4(x_3) = 1 - 2.9 = -1.9,$$

con lo que la preferencia colectiva ha variado radicalmente: $x_1 P^{\hat{B}} x_2 P^{\hat{B}} x_3$.

La razón de ello, compartida por todos los contadores en sentido restringido, estriba en que si un agente *k* pasa de mostrar indiferencia entre dos alternativas ($r_{ij}^k = r_{ji}^k = 0.5$) a dar una preferencia, aunque sea muy tenue, a una de ellas frente a la otra (pongamos $r_{ij}^k = 0.501$, $r_{ji}^k = 0.499$), entonces un incremento de 0.001 en el coeficiente r_{ij}^k de la matriz de preferencias individuales supone en cambio un incremento de 0.501 en el coeficiente $\hat{r}_{ij}$ de la matriz agregada, y esta diferencia puede hacer variar el vencedor.

Cabe señalar que también el contador en sentido amplio $\overline{\boldsymbol{r}}^1$, al venir definido por la excepción $r_{ij}^k \neq 0.5$, comparte esta característica de los contadores en sentido restringido. Sin embargo los contadores equivalentes $\overline{\boldsymbol{r}}^2$, $\overline{\boldsymbol{r}}^3$ y $\overline{\boldsymbol{r}}^4$, al considerar todas las intensidades de preferencia individuales, son estables (o continuos) al verificar que pequeñas variaciones en las preferencias individuales inducen pequeños cambios en el agregado. En una primera aproximación, tal hecho tendría claras repercusiones en lo relativo a la manipulabilidad de los correspondientes métodos de Borda: si se emplean contadores en sentido amplio, un agente insincero que quiera hacer variar el resultado final tendría que distorsionar sus opiniones reales de modo sustancial (de otro modo su estrategia no tendría efecto). Por el contrario, si se usan contadores en sentido restringido, le podría bastar con ser levemente insincero para alterar el resultado de manera que éste fuese más cercano a sus preferencias.

Así, la estabilidad junto con las propiedades de tipo Condorcet y de representatividad de las preferencias individuales (bajo la hipótesis de transitividad difusa reseñada), avalan la puesta en práctica de los contadores de Borda en sentido amplio (a excepción siempre del primero) con sustrato teórico fundamentado.

A continuación, como resumen, en la Tabla 3.1 consignamos el comportamiento de los contadores de Borda graduales en relación con las propiedades estudiadas.

	CONTADORES GRADUALES							
	Sentido amplio				Sentido restringido			
	$\overline{\boldsymbol{r}}^1$	$\overline{\boldsymbol{r}}^2$	$\overline{\boldsymbol{r}}^3$	$\overline{\boldsymbol{r}}^4$	$\hat{\boldsymbol{r}}^1$	$\hat{\boldsymbol{r}}^2$	$\hat{\boldsymbol{r}}^3$	$\hat{\boldsymbol{r}}^4$
Excluye Perdedor Condorcet	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	SÍ
Estable	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO
Representativo	NO	SÍ, bajo $\overline{T}_3$			SÍ, bajo $\hat{T}_3$			

Tabla 3.1 Propiedades de los contadores graduales

3.3 Reglas de Borda lingüísticas: Prerrequisitos teóricos

Creemos conveniente en este punto motivar las variantes lingüísticas de la regla de Borda que vamos a introducir a continuación como una evolución natural de las extensiones graduales consideradas en la sección anterior. Mediante éstas, como hemos visto, los votantes pueden desde luego manifestar indiferencia entre alternativas, pero además, cuando prefieran una alternativa a otra, pueden mostrar con detalle cómo la prefieren, a través de cualquier número entre 0 y 1. Sin embargo, tal como señaló Zadeh (1975), los individuos tienden a expresar sus preferencias de forma lingüística más que con valores numéricos precisos, como ya habíamos apuntado. De esta forma, la literatura sobre "computación con palabras" ("computing with words", expresión acuñada por el propio Zadeh) ha adquido cada vez más relevancia y aplicabilidad (a este respecto puede consultarse Wang (2001)). En el ámbito de la TES, este tratamiento lingüístico ya ha sido ensayado con algunos tipos de mayorías: véanse, entre otros, Herrera – Herrera Viedma– Verdegay (1996), Herrera – Martínez (2000a y 2000b), Peláez – Doña (2003) y García Lapresta (en prensa).

Como cabría esperar, nuestro objetivo es aplicar también esta línea de investigación a la regla de Borda. Se considerarán para ello etiquetas lingüísticas que codifiquen las diversas modalidades de preferencia (totalmente, mucho, bastante, algo, etc.) con las que los agentes podrán comparar entre parejas de alternativas, de forma semejante a como ocurre en la vida cotidiana. Tales preferencias (lingüísticas) de los agentes son el objeto de estudio inmediato como sustrato teórico para modelizar diversas variantes lingüísticas de la regla de Borda de las que formalizaremos en la siguiente sección. Ahora bien, la implementación de tales variantes requiere que las etiquetas lingüísticas en las que se basan puedan ser operadas y comparados sus resultados. Para poder realizar tales cómputos, las etiquetas lingüísticas son susceptibles de ser representadas de muy diversas formas: números reales, intervalos, números borrosos triangulares o trapeciales. Nosotros hemos elegido esta última opción, por incluir las anteriores como casos particulares y porque, como ha sido puesto de manifiesto por Delgado – Vila – Voxman (1998a), otros subconjuntos difusos más sofisticados se alejan de la pretendida vaguedad que pretenden modelizar. Por otro lado, a la hora de implementar las distintas reglas de Borda lingüísticas que serán tratadas aquí seguiremos la misma filosofía (sentidos amplio y restringido, contadores individuales y colectivos) y el mismo tipo de análisis (representatividad, propiedades de tipo Condorcet) de las correspondientes reglas de Borda graduales en las que se inspiran.

3.3.1 Preferencias lingüísticas

Nos encontramos una vez más en la situación en la que los agentes muestran sus preferencias sobre cada par de alternativas de $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Ahora, para ello, cuentan con un conjunto $L=\{l_0, l_1, .., l_s\}$ de etiquetas lingüísticas, ordenado linealmente: $l_0 < l_1 < \cdots < l_s$.

El concepto de *etiqueta lingüística* es básico para definir una relación de preferencia lingüística[15]. En ocasiones ha sido definido como un "nombre" que se da a un conjunto difuso. Nosotros seguiremos la vía en sentido contrario y, como veremos, a partir de ciertos "nombres" (en nuestro caso, una gama de adverbios que indiquen grado de preferencia) se asociarán a éstos ciertos conjuntos difusos que los representen, a saber: números trapeciales difusos en nuestro caso, tal como se ha indicado.

Se supondrá que existe una etiqueta intermedia que denota indiferencia, y que el resto de ellas se disponen en torno a ella de forma simétrica, de manera que el número total de etiquetas $s+1$ debe ser impar y, por tanto, $l_{s/2}$ es la etiqueta central. El número de elementos en el espectro de etiquetas determina su *granularidad*, noción también introducida por Zadeh, y que, en nuestro contexto, comporta un mayor o menor grado de aquilatamiento en las manifestaciones de los agentes. En la práctica, por razones de capacidad limitada en la percepción humana señaladas, entre otros, por Miller (1969) y Yager (1993), no conviene que el espectro sea muy amplio y, en ningún caso, que supere las 13 etiquetas[16].

[15] Véanse a este respecto Zadeh (1975), Bonissone – Decker (1986) y Delgado – Verdegay – Vila (1993), entre otros.
[16] Algo parecido ocurre con el número de criterios y alternativas a considerar en Programación Multicriterio. A este respecto véase Arrow – Raynaud [1986] (1989, p. 21), quienes estiman que "cuatro criterios y cuatro alternativas es el máximo de complejidad tratable por el ser humano".

Definición 3.18. R es una *relación de preferencia lingüística sobre X basada en L* si y sólo si R es una relación binaria difusa dada por $\mu_R : X \times X \to L$, donde $\mu_R(x_i, x_j) = \tilde{r}_{ij}$ satisface $\tilde{r}_{ij} = l_h \Leftrightarrow \tilde{r}_{ji} = l_{s-h}$, para cada $x_i, x_j \in X$ y cada $h \in \{0,1,\ldots,s\}$.

En lo que sigue, $\tilde{r}_{ij}$ denotará el nivel de preferencia de x_i sobre x_j, de acuerdo con la siguiente estructura semántica[17]:

1. $\tilde{r}_{ij} = l_s$, si x_i es absolutamente preferida a x_j,

2. $l_{s/2} < \tilde{r}_{ij} < l_s$, si x_i es preferida en cierto grado a x_j,

3. $\tilde{r}_{ij} = l_{s/2}$, si x_i es indiferente a x_j, o sea, si x_i no es preferida a x_j ni x_j es preferida a x_i,

4. $l_0 < \tilde{r}_{ij} < l_{s/2}$, si x_j es preferida en cierto grado a x_i,

5. $\tilde{r}_{ij} = l_0$, si x_j es absolutamente preferida a x_i.

El tratamiento anterior es similar a otros que aparecen en la literatura[18], pero el papel del espectro de etiquetas L lo juega usualmente el intervalo [0,1]. En conexión con este hecho, García Lapresta (en prensa) señala que las preferencias ordinarias se pueden entender como un caso simplificado de las lingüísticas cuando se toma $L = \{0, 0.5, 1\} \subset [0,1]$. No obstante, algunos autores han usado también retículos y otra clase de conjuntos[19].

---

[17] Esta estructura semántica corresponde al nivel 2 del enfoque lingüístico desarrollado en Herrera – Verdegay (1995).
[18] Véanse Bezdek – Spillman – Spillman (1979), Kacprzyk (1986), Kacprzyk – Fedrizzi – Nurmi (1992) y Marimin – Umano – Hatono – Tamura (1998), entre otros.
[19] A este respecto, véanse Goguen (1967) y Barrett – Pattanaik – Salles (1992), entre otros.

Hacemos notar, así mismo, que la condición $\tilde{r}_{ij} = l_h \Leftrightarrow \tilde{r}_{ji} = l_{s-h}$ que aparece en la Definición 3.18 está inspirada en el axioma de reciprocidad de las relaciones de preferencia difusas. De la misma manera que éste era el rasgo definitorio de las relaciones de preferencias difusas, la “reciprocidad lingüística” lo es de las relaciones de preferencia lingüísticas. Obviamente, son extrapolables las críticas o justificaciones de tal condición señaladas en el contexto gradual al pasar al lingüístico.

Observación 3.18. Si R es una relación de preferencia lingüística sobre X basada en *L*, entonces se verifica $\tilde{r}_{ii} = l_{s/2}$ para cualquier $x_i \in X$.

Definición 3.19. Dada R, relación de preferencia lingüística sobre *X* basada en *L,* la *relación binaria ordinaria inducida por* R, $\succ_{l_{s/2}}$, viene dada por

$$x_i \succ_{l_{s/2}} x_j \Leftrightarrow \tilde{r}_{ij} > l_{s/2},$$

para cada par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Observación 3.19. El umbral $l_{s/2}$ que hemos tomado no es arbitrario pues, en virtud de la reciprocidad lingüística, la condición $\tilde{r}_{ij} > \tilde{r}_{ji}$ equivale a $\tilde{r}_{ij} > l_{s/2}$, ya que

$$\tilde{r}_{ij} = l_h > l_{s-h} = \tilde{r}_{ji} \Leftrightarrow h > s-h \Leftrightarrow h > \frac{s}{2}.$$

Teniendo en cuenta la Definición 3.19, es sencillo verificar que $\succ_{l_{s/2}}$ es asimétrica[20], y por tanto una relación de preferencia ordinaria sobre X. De este modo, consideraremos $\succ_{l_{s/2}}$ como la relación de preferencia ordinaria inducida por *R*. En consecuencia, la relación de indiferencia asociada a $\succ_{l_{s/2}}$ es reflexiva y simétrica, es decir, $\tilde{r}_{ii} = l_{s/2}$, y $\tilde{r}_{ij} = l_{s/2}$ implica $\tilde{r}_{ji} = l_{s/2}$, para cualesquiera $x_i, x_j \in X$. Como es usual, denotaremos por $\sim_{l_{s/2}}$ y $\succcurlyeq_{l_{s/2}}$ a las correspondientes relaciones ordinarias de indiferencia y de preferencia-indiferencia.

Notación. Cuando nos encontremos ante una situación decisional en la que *m* agentes muestren sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, ..., x_n\}$ mediante relaciones de preferencia lingüísticas $R^1, R^2, \ldots, R^m$, denotaremos mediante superíndices los conceptos hasta ahora introducidos cuando hagan referencia a un agente genérico $k \in \{1, \ldots, m\}$. De este modo, $\tilde{r}_{ij}^k = \mu_{R^k}(x_i, x_j) \in L$ indica el grado de preferencia con que el agente *k* prefiere la alternativa x_i a la x_j; $\succ_{l_{s/2}}^k$ denota la relación de preferencia ordinaria inducida por R^k, etc. Por la importancia que tendrá en el desarrollo posterior, particularizamos para el agente *k* la noción de matriz de intensidades de preferencia ya apuntada.

Definición 3.20. Dada R^k, relación de preferencia lingüística sobre *X* basada en *L* del agente $k = 1, \ldots, m$, consideraremos la *matriz de preferencia lingüística* de dicho agente:

$$\left(\tilde{r}_{ij}^k\right) = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{11}^k & \tilde{r}_{12}^k & \ldots & \tilde{r}_{1n}^k \\ \tilde{r}_{21}^k & \tilde{r}_{22}^k & \ldots & \tilde{r}_{2n}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{r}_{n1}^k & \tilde{r}_{n2}^k & \ldots & \tilde{r}_{nn}^k \end{pmatrix},$$

[20] De hecho, el umbral $l_{s/2}$ es el más pequeño (para el orden intrínseco de las etiquetas) que garantiza la asimetría de la relación binaria ordinaria así definida.

donde se verifica la reciprocidad lingüística: $\tilde{r}_{ij}^{k} = l_h \Leftrightarrow \tilde{r}_{ji}^{k} = l_{s-h}$; en particular. los elementos diagonales vienen dados por la etiqueta central.

3.3.2 Monoide ordenado sobre el conjunto de etiquetas lingüísticas

Aunque desde un punto de vista decisional la ordenación intrínseca del conjunto de etiquetas pueda ser suficiente en algunos aspectos a un nivel individual, en cuanto se trata de agregar las opiniones de dos o más agentes, se hace necesario ordenar no sólo etiquetas, sino sumas[21] de éstas. Nuestro propósito, como ya se ha indicado, es realizar tal proceso de agregación trasladando la filosofía del procedimiento de Borda al contexto lingüístico. Para el diseño de los contadores graduales definidos en la sección anterior, una vez consideradas relaciones de preferencia difusas por parte de los agentes, pudimos utilizar la aritmética y el orden usuales de los números reales sin mayor problema. Ahora bien, si queremos mantener el paralelismo para diseñar "contadores de Borda lingüísticos", necesitamos dotar de una aritmética y un orden a los elementos generados a partir del espectro de etiquetas lingüísticas original mediante tales contadores. Por ello, desde un punto de vista abstracto, vamos a construir formalmente una superestructura que englobe a nuestro conjunto de etiquetas. Desde un punto de vista matemático esto se lleva a cabo de forma estándar mediante lo que se conoce como *monoide libre conmutativo engendrado por un conjunto*, al que *a posteriori* impondremos un orden. Tal tratamiento fue usado por vez primera en un contexto decisional lingüístico por García Lapresta (en prensa) al analizar la mayoría simple con etiquetas lingüísticas.

[21] Por las razones que se detallarán más adelante, se trasladarán a un contexto lingüístico únicamente contadores de Borda graduales aditivos, es decir, homólogos de los que en su formulación gradual computan únicamente sumas de intensidades de preferencia (como Black I) y no restas (como Black II).

En nuestro caso, dado el conjunto de etiquetas L, se considera el conjunto $\langle L\rangle$ constituido por todas las sumas formales de elementos de L, en las que no importa el orden de los sumandos y l_0 actúa como elemento neutro. Se tiene de esta manera definida una estructura de monoide libre conmutativo sobre L que formalmente viene caracterizada por:

1. $L \subset \langle L\rangle$.

2. $l + l' \in \langle L\rangle$, para cualesquiera $l, l' \in \langle L\rangle$.

3. $l + (l' + l'') = (l + l') + l''$, para cualesquiera $l, l', l'' \in \langle L\rangle$.

4. $l + l' = l' + l$, para cualesquiera $l, l' \in \langle L\rangle$.

5. $l + l_0 = l$, para cualquier $l \in \langle L\rangle$.

Además de la estructura aditiva, consideraremos un orden total $\leq$ que extiende el orden original sobre L:

6. $l \leq l$, para cualquier $l \in \langle L\rangle$.

7. $(l \leq l'$ y $l' \leq l) \Rightarrow l = l'$, para cualesquiera $l, l' \in \langle L\rangle$.

8. $(l \leq l'$ y $l' \leq l'') \Rightarrow l \leq l''$, para cualesquiera $l, l', l'' \in \langle L\rangle$.

9. $l \leq l'$ o $l' \leq l$, para cualesquiera $l, l' \in \langle L\rangle$.

10. $l_0 < l_1 < \cdots < l_s$, donde $<$ es el orden estricto asociado a $\leq$ ($l < l'$ si $l \leq l'$ y $l \neq l'$, para cualesquiera $l, l' \in \langle L\rangle$).

Y se supondrá también que el orden es compatible con la suma:

11. $l \leq l' \Rightarrow l + l'' \leq l' + l''$, para cualesquiera $l, l', l'' \in \langle L\rangle$.

De esta forma, $(\langle L\rangle,+,\leq)$ es un monoide conmutativo totalmente ordenado. Notemos que, para cada $l \in \langle L\rangle$, existen enteros no negativos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_s$, tales que $l = \sum_{h=0}^{s} \lambda_h l_h$, donde $\lambda_h l_h$ denota λ_h veces de la etiqueta l_h, y $0 l_h = l_0$.

3.3.3 Aritmética y orden sobre el espectro de etiquetas

Para poder implementar las variantes lingüísticas de la regla de Borda que se formularán en la siguiente sección y llevar a cabo un análisis de representatividad y de tipo Condorcet de las mismas, introducimos ahora el instrumento matemático en que nos basaremos, a saber, el concepto de número difuso trapecial. Señalamos de antemano que, así como la aritmética difusa que definiremos a continuación es estándar (de hecho sólo usaremos sus rudimentos, cf. Dubois – Prade (1987)), es bien conocido que el orden de números difusos no tiene tal carácter canónico (el problema de la ordenación de números difusos es presentado de forma panorámica en Gento Municio (2000)).

Dados 4 números reales *a*, *b*, *c* y *d*, tales que $a \leq b \leq c \leq d$, se define el *número difuso trapecial* (NDT) $t = (a,b,c,d)$ (véase Figura 3.1) mediante su función de pertenencia μ_t, dada por

$$\mu_t(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{si} \quad x < a \quad \text{o} \quad x > d, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \quad \text{si} \quad a < x < b, \\ 1, \quad \text{si} \quad b < x < c, \\ \dfrac{d-x}{d-c}, \quad \text{si} \quad c < x < d \end{cases}$$

y

1. $\mu_t(a) = \mu_t(d) = 0$ y $\mu_t(b) = \mu_t(c) = 1$, si $a < b < c < d$,
2. $\mu_t(a) = \mu_t(b) = \mu_t(c) = 1$ y $\mu_t(d) = 0$, si $a = b = c < d$,

3. $\mu_t(a)=\mu_t(b)=\mu_t(c)=\mu_t(d)=1$, si $a=b<c=d$,
4. $\mu_t(a)=0$ y $\mu_t(b)=\mu_t(c)=\mu_t(d)=1$, si $a<b=c=d$,
5. $\mu_t(a)=\mu_t(b)=\mu_t(c)=\mu_t(d)=1$, si $a=b=c=d$.

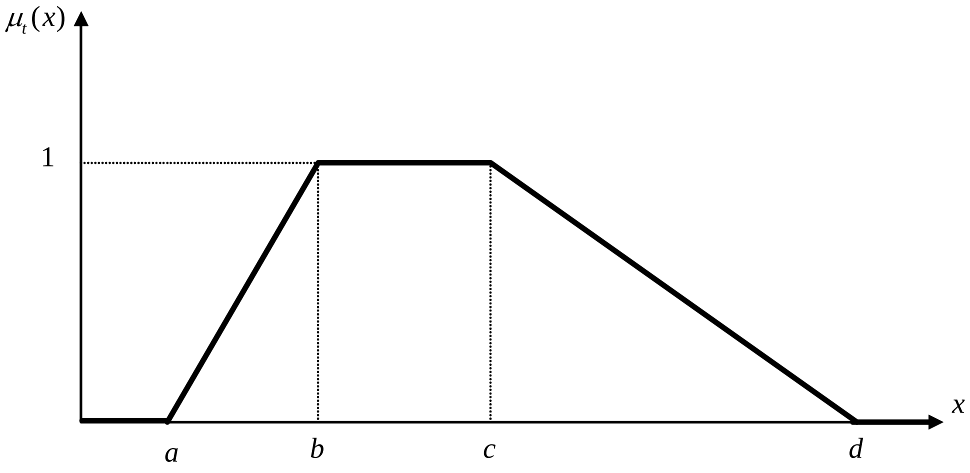


Figura 3.1. Número difuso trapecial (a,b,c,d)

Los números reales, los intervalos y los números difusos triangulares pueden ser descritos mediante números difusos trapeciales: (a,a,a,a) es el número real a; (a,a,b,b) es el intervalo [a,b]; y (a,b,b,c) es el número difuso triangular (a,b,c). A este respecto, véase García Lapresta (en prensa).

La suma de números difusos trapeciales se define componente a componente:

$$(a,b,c,d)+(a',b',c',d')=(a+a',b+b',c+c',d+d').$$

Como es usual, denotaremos por $\lambda(a,b,c,d)=(a,b,c,d)+\overbrace{\cdots}^{\lambda\ \text{veces}}+(a,b,c,d)$. Notemos que la suma de NDTs es también un NDT, o sea, que se trata de una operación interna. Sin embargo, como la idea para sumar etiquetas es asociarles números trapeciales y sumar éstos, la suma de etiquetas lingüísticas no es una operación interna, ya que el resultado generalmente no tiene por qué ser un NDT que corresponda a una etiqueta del espectro original. Aunque en ocasiones es interesante que también el resultado de sumar etiquetas del espectro original sea una de las mismas, para nuestros propósitos basta con que podamos ordenar los posibles resultados mediante un orden establecido en el conjunto de NDTs.

De las diversas ordenaciones que pueden efectuarse en el conjunto de números difusos trapeciales usaremos la propuesta por Delgado – Vila – Voxman (1998a), que sigue a continuación.

Consideraremos dos números reales asociados a un NDT (a,b,c,d): su *valor*,

$$V(a,b,c,d) = \frac{c+b}{2} + \frac{(d-c)-(b-a)}{6},$$

y su *ambigüedad*,

$$A(a,b,c,d) = \frac{c-b}{2} + \frac{(d-c)+(b-a)}{6}.$$

Es interesante señalar que, a la vista de la última expresión, los únicos NDTs con ambigüedad nula son los reales, es decir, los del tipo (a,a,a,a). Por otro lado, nótese que, por la forma en que han sido definidos, tanto el valor como la ambigüedad son aditivos: Así, dados $t=(a,b,c,d)$ y $t'=(a',b',c',d')$,

$$V(t+t') = V(t)+V(t'); \qquad A(t+t') = A(t)+A(t').$$

A partir de estas dos magnitudes, definimos un orden lexicográfico en el que damos prioridad al valor y, en caso de empate entre valores asociados, se elige el NDT que represente la preferencia más nítida, esto es, con menor ambigüedad. Así, dados $t=(a,b,c,d)$ y $t'=(a',b',c',d')$,

$$t \succ t' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} V(t) > V(t') \\ \text{o} \\ V(t) = V(t') \quad \text{y} \quad A(t) < A(t'). \end{cases}$$

Resulta fácil comprobar que tal relación es asimétrica y negativamente transitiva. Sin embargo, no es un orden lineal, ya que distintos números difusos trapeciales pueden tener el mismo valor y la misma ambigüedad, como se pone de manifiesto a continuación.

Ejemplo 3.4. Considérense los NDTs $t=(0,3,3,6)$ y $t'=(2,2,4,4)$. Entonces:

$$V(t)=\frac{3+3}{2}+\frac{(6-3)-(3-0)}{6}=3; \qquad V(t')=\frac{4+2}{2}+\frac{(4-4)-(2-2)}{6}=3;$$

$$A(t)=\frac{3-3}{2}+\frac{(6-3)+(3-0)}{6}=1; \qquad A(t')=\frac{4-2}{2}+\frac{(4-4)+(2-2)}{6}=1.$$

Si se desean conseguir órdenes lineales, habría que ampliar los órdenes lexicográficos con nuevas condiciones para evitar empates entre números difusos trapeciales diferentes. A este respecto, véase Delgado – Vila – Voxman (1998b).

Para definir un orden sobre $\langle L\rangle$, asociaremos a cada etiqueta $l_h \in L$ un NDT adecuado[22] t_h que la represente, donde $h\in\{0,1,\ldots,s\}$, y se extenderá esta asignación a $\langle L\rangle$ como sigue; a $l=\sum_{h=0}^{s}\lambda_h l_h \in \langle L\rangle$ le corresponderá $t=\sum_{h=0}^{s}\lambda_h t_h$. De esta manera, el orden $\succ$ definido anteriormente sobre el conjunto de los NDT se traslada a $\langle L\rangle$: $l>l' \Leftrightarrow t\succ t'$, donde t y t' son los NDTs asociados a l y l', respectivamente.

[22] Como es usual, se emplearán para este propósito números difusos trapeciales cuyas componentes pertenezcan al intervalo [0,1]. Obviamente, la asignación de NDTs a las etiquetas de L deberá respetar el orden intrínseco de éstas, y tener en cuenta la estructura semántica anteriormente expuesta. Ahora bien, no existen en la literatura pautas específicas para realizar tal asignación, y más adelante justificaremos la que se utilizará en la presente memoria.

En ocasiones, por abuso de lenguaje. identificaremos un elemento de $\langle L \rangle$ con su NDT asociado, usándose en tal caso el mismo símbolo para denotar a ambos. No obstante, cuando se realice tal identificación (normalmente a efectos operativos) deberá tenerse en cuenta que dos elementos distintos de $\langle L \rangle$ pueden tener asociado el mismo NDT.

Como ya señalamos de partida, si bien la construcción de $(\langle L \rangle, +)$ es canónica, la de $(\langle L \rangle, <)$ no lo es en absoluto. De hecho, el orden finalmente definido sobre $\langle L \rangle$ depende de la extensión (compatible con la operación +) sobre el orden original de L empleado. En un contexto decisional, esto tiene claras repercusiones sobre la robustez del procedimiento de Borda diseñado a partir de una u otra extensión[23].

Observación 3.20. En lo que sigue, fijaremos la semántica[24] que aparece en la Tabla 3.2, cuyos NDTs aparecen representados en la Figura 3.2, y se considerará la aritmética y orden derivados de la misma, según se ha indicado. Consideraremos un espectro de 9 etiquetas lingüísticas, $L = \{ l_0, \dots l_8 \}$, cuyos NDTs asociados, a medida que se alejan del centro (indiferencia), tienen menor ambigüedad, hasta que ésta se hace nula en los extremos (preferencia absoluta). Obsérvese así que se contemplan 4 modalidades de preferencia más la indiferencia. Por otra parte, además de ser las etiquetas consideradas simétricas respecto de la central, hemos tomado los NDTs que las representan, a su vez, simétricos respecto de 0.5. Por este motivo, a excepción del NDT que

[23] Esto es, la modalidad de representación del espectro de etiquetas lingüísticas elegida puede condicionar el ganador resultante, tal como ha sido puesto de manifiesto en García Lapresta (en prensa) para las mayorías simples lingüísticas, y en García Lapresta – Llamazares – Martínez Panero (2003) para una variante lingüística de la regla de Borda en sentido restringido que será tratada en 3.4.1.

[24] Esta semántica corresponde al nivel 3 del enfoque lingüístico desarrollado en Herrera – Verdegay (1995).

representa la etiqueta central, se presentan por parejas del tipo $l_h = (a, b, c, d)$ y $l_{s-h} = (1-d, 1-c, 1-b, 1-a)$, donde $h \in \{(s/2)+1, \ \ldots, \ s\}$. Como veremos, esta elección tiene repercusiones en el análisis de Condorcet para el contador lingüístico en sentido amplio que se realizará en 3.4.3.

Etiqueta	**Significado**	**Número difuso trapecial**
$\tilde{r}_{ij}^k = l_0$	El agente *k* prefiere totalmente x_j a x_i	$(0, 0, 0, 0)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_1$	El agente *k* prefiere mucho x_j a x_i	$(0, 0.02, 0.05, 0.11)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_2$	El agente *k* prefiere bastante x_j a x_i	$(0.05, 0.11, 0.17, 0.25)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_3$	El agente *k* prefiere algo x_j a x_i	$(0.17, 0.25, 0.34, 0.44)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_4$	El agente *k* es indiferente entre x_i y x_j	$(0.34, 0.44, 0.56, 0.66)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_5$	El agente *k* prefiere algo x_i a x_j	$(0.56, 0.66, 0.75, 0.83)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_6$	El agente *k* prefiere bastante x_i a x_j	$(0.75, 0.83, 0.89, 0.95)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_7$	El agente *k* prefiere mucho x_i a x_j	$(0.89, 0.95, 0.98, 1)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_8$	El agente *k* prefiere totalmente x_i a x_j	$(1, 1, 1, 1)$

Tabla 3.2. Semántica con 9 etiquetas lingüísticas

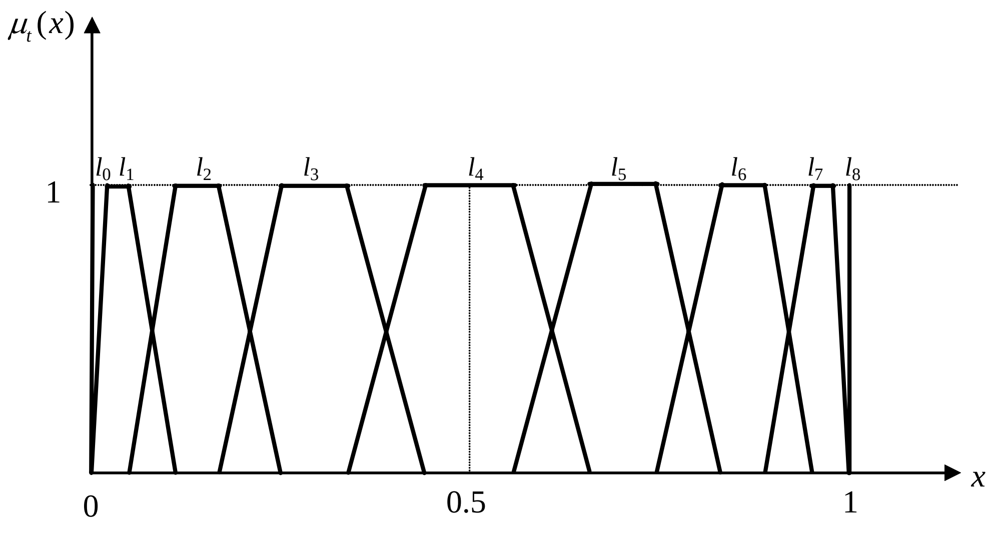


Figura 3.2. NDTs de la semántica con 9 etiquetas lingüísticas

3.3.4 Transitividades lingüísticas

A continuación se analizan ciertas condiciones de transitividad lingüística que, como veremos, tienen que ver con la adecuación de los contadores de Borda lingüísticos que se definirán a continuación con las preferencias de los agentes. Introducimos cuatro clases de relaciones de preferencia lingüística, en relación con el cumplimiento de sendas propiedades de transitividad. Tienen su correlato en las correspondientes transitividades difusas estudiadas en 3.1.6, y su estudio y análisis se puede ver ampliado, con otros tipos de transitividades lingüísticas que no trataremos aquí, en García Lapresta – Meneses (2003).

Definición 3.21. Sea R^k una relación de preferencia lingüística sobre X basada en L.

1. $R^k \in \hat{T}_0(X)$ si y sólo si $\succ^k_{l_{s/2}}$ es transitiva:

$$(\tilde{r}^k_{ij} > l_{s/2} \ \text{ y } \ \tilde{r}^k_{jp} > l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}^k_{ip} > l_{s/2},$$

   para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$.

2. $R^k \in \hat{T}_1(X)$ si y sólo si se verifica:

$$(\tilde{r}^k_{ij} > l_{s/2} \ \text{ y } \ \tilde{r}^k_{jp} > l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}^k_{ip} \geq \min\,\{\tilde{r}^k_{ij}, \tilde{r}^k_{jp}\},$$

   para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$. Se dice en este caso que R^k verifica la condición de *transitividad lingüística max-min débil estricta.*

3. $R^k \in \hat{T}_2(X)$ si y sólo si se verifica:

$$(\tilde{r}^k_{ij} > l_{s/2} \ \text{ y } \ \tilde{r}^k_{jp} > l_{s/2}) \ \Rightarrow 2\tilde{r}^k_{ip} \geq \tilde{r}^k_{ij} + \tilde{r}^k_{jp},$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$. Se dice en este caso que R^k verifica la condición de *transitividad lingüística max-media aritmética débil estricta.*

4. $R^k \in \hat{T}_3(X)$ si y sólo si se verifica:

$$(\tilde{r}_{ij}^k > l_{s/2} \text{ y } \tilde{r}_{jp}^k > l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}_{ip}^k \geq \max\{\tilde{r}_{ij}^k, \tilde{r}_{jp}^k\},$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$. Se dice en este caso que R^k verifica la condición de *transitividad lingüística max-max débil estricta.*

Definición 3.22. Sea R^k una relación de preferencia lingüística sobre X basada en L.

1. $R^k \in \overline{T}_0(X)$ si y sólo si $\succcurlyeq_{l_{s/2}}^k$ es transitiva:

$$(\tilde{r}_{ij}^k \geq l_{s/2} \text{ y } \tilde{r}_{jp}^k \geq l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}_{ip}^k \geq l_{s/2},$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$.

2. $R^k \in \overline{T}_1(X)$ si y sólo si se verifica:

$$(\tilde{r}_{ij}^k \geq l_{s/2} \text{ y } \tilde{r}_{jp}^k \geq l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}_{ip}^k \geq \min\{\tilde{r}_{ij}^k, \tilde{r}_{jp}^k\},$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$. Se dice en este caso que R^k verifica la condición de *transitividad lingüística max-min débil no estricta.*

3. $R^k \in \overline{T}_2(X)$ si y sólo si se verifica:

$$(\tilde{r}_{ij}^k \geq l_{s/2} \text{ y } \tilde{r}_{jp}^k \geq l_{s/2}) \Rightarrow 2\tilde{r}_{ip}^k \geq \tilde{r}_{ij}^k + \tilde{r}_{jp}^k,$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$. Se dice en este caso que R^k verifica la condición de *transitividad lingüística max-media aritmética débil no estricta.*

4. $R^k \in \overline{T}_3(X)$ si y sólo si se verifica:

$$(\tilde{r}_{ij}^k \geq l_{s/2} \text{ y } \tilde{r}_{jp}^k \geq l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}_{ip}^k \geq \max\{\tilde{r}_{ij}^k, \tilde{r}_{jp}^k\},$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_p \in X$. Se dice en este caso que R^k verifica la condición de *transitividad lingüística max-max débil no estricta.*

Observación 3.21. Es fácil comprobar que el hecho de que $\succsim_{l_{s/2}}^k$ sea transitiva equivale a que lo sean conjuntamente $\succ_{l_{s/2}}^k$ y $\sim_{l_{s/2}}^k$, esto es, a que se verifiquen:

$$(\tilde{r}_{ij}^k > l_{s/2} \text{ y } \tilde{r}_{jp}^k > l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}_{ip}^k > l_{s/2},$$

$$(\tilde{r}_{ij}^k = l_{s/2} \text{ y } \tilde{r}_{jp}^k = l_{s/2}) \Rightarrow \tilde{r}_{ip}^k = l_{s/2}.$$

Observación 3.22. Aunque, como se ha señalado, las condiciones anteriores son extrapolación del caso gradual al lingüístico, las denominadas transitividades lingüísticas max-media aritmética (en sus dos modalidades) requieren un comentario particular. Nótese, en primer lugar, que en la implicación que las define no aparece explícitamente media aritmética alguna, porque tal operación con etiquetas no puede efectuarse en $\langle L, + \rangle$. Sin embargo, cuando se opera con intensidades de preferencia (o sea, números reales), se tiene

$$r_{ip}^k > \frac{r_{ij}^k + r_{jp}^k}{2} \Leftrightarrow 2r_{ip}^k > r_{ij}^k + r_{jp}^k,$$

$$r_{ip}^k \geq \frac{r_{ij}^k + r_{jp}^k}{2} \Leftrightarrow 2r_{ip}^k \geq r_{ij}^k + r_{jp}^k,$$

donde las operaciones algebraicas que aparecen en las expresiones de la derecha sí tendrían sentido, operando con etiquetas, en $\langle L,+\rangle$. Ésta es la razón por la que hemos mantenido el nombre por analogía con las transitividades difusas correspondientes. En segundo lugar, las condiciones de transitividad lingüística max-media aritmética son las únicas de las anteriormente definidas en las que el orden intrínseco $l_0 < l_1 < \cdots < l_s$ de L resulta insuficiente para su verificación, siendo estrictamente necesario el orden extendido sobre $\langle L\rangle$. Por tanto, para la correcta formulación de tales transitividades se necesita la correspondiente representación de NDTs.

Observación 3.23. Puesto que, para cualesquiera $l_a, l_b \in \{l_{s/2}, \ldots, l_s\}$, se verifica:

$$2\min\{l_a, l_b\} \le l_a + l_b \le 2\max\{l_a, l_b\},$$

$$(l_a > l_{s/2},\ l_b > l_{s/2}) \Rightarrow \min\{l_a, l_b\} > l_{s/2},$$

$$(l_a \ge l_{s/2},\ l_b \ge l_{s/2}) \Rightarrow \min\{l_a, l_b\} \ge l_{s/2}$$

y

$$2l_a \ge 2l_b \quad \Rightarrow \quad l_a \ge l_b,$$

se tiene:

$$R \in \hat{T}_i(X) \ \Rightarrow\ R \in \hat{T}_{i-1}(X), \quad i = 1,2,3.$$

$$R \in \overline{T}_i(X) \ \Rightarrow\ R \in \overline{T}_{i-1}(X), \quad i = 1,2,3.$$

Por otro lado, a la vista de las Definiciones 3.21 y 3.22, y teniendo en cuenta la Observación 3.21, se verifican las implicaciones

$$R \in \overline{T}_i(X) \Rightarrow R \in \hat{T}_i(X), \quad \text{para } i = 0,1,2,3.$$

También en este contexto lingüístico diremos que R es $\hat{T}_i$ (respectivamente $\overline{T}_i$) para significar $R \in \hat{T}_i(X)$ (respectivamente, $R \in \overline{T}_i(X)$), para $i = 0, 1, 2, 3$. Y de nuevo se puede resumir toda la información anterior en el siguiente cuadro de implicaciones:

$$\begin{array}{ccccccc}
\overline{T}_3 & \Rightarrow & \overline{T}_2 & \Rightarrow & \overline{T}_1 & \Rightarrow & \overline{T}_0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\hat{T}_3 & \Rightarrow & \hat{T}_2 & \Rightarrow & \hat{T}_1 & \Rightarrow & \hat{T}_0
\end{array}$$

3.3.5 Mayorías simples lingüísticas

En 3.1.7 se generalizó, en una doble vertiente, la mayoría simple clásica al caso difuso o gradual, y a continuación vamos a seguir un desarrollo paralelo extrapolado al contexto lingüístico, donde consideramos fijados la aritmética y el orden como en 3.3.3. Así, en lo que sigue, a menudo nos referiremos a niveles (o grados) de preferencia, calificaciones, etc. (lo que nos parece pertinente en un contexto lingüístico), que jugarán el papel de las intensidades de preferencia, puntuaciones, etc., propias del enfoque gradual.

En primera instancia, se define una *mayoría simple lingüística en sentido amplio* en virtud de la cual la alternativa x_i vence a la alternativa x_j si se cumple

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{r}_{ij}^k > \sum_{k=1}^{m} \tilde{r}_{ji}^k,$$

es decir, si la suma de todos los niveles de preferencia de los agentes sobre la alternativa x_i al ser confrontada con la alternativa x_j pesa más que si se intercambian los papeles de las alternativas.

Ahora bien, también cabe interpretar que sólo deberían sumarse tales niveles de preferencia cuando la correspondiente ordinaria inducida es estricta; en otras palabras, sólo deberían ser computadas las calificaciones favorables relativas a una alternativa al ser comparada con su oponente. De este modo, la alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple lingüística en sentido restringido* cuando

$$\sum_{\substack{k=1 \\ x_i \succ^k_{l_{s/2}} x_j}}^{m} \tilde{r}^k_{ij} > \sum_{\substack{k=1 \\ x_j \succ^k_{l_{s/2}} x_i}}^{m} \tilde{r}^k_{ji}.$$

Se entiende en lo sucesivo que si algún sumatorio está indexado en el conjunto vacío, su resultado es l_0.

Como ya hemos comentado, es útil recoger los datos anteriores relativos a cada agente en la matriz de intensidades de preferencia

$$\left(\tilde{r}^k_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{r}^k_{11} & \tilde{r}^k_{12} & \cdots & \tilde{r}^k_{1n} \\ \tilde{r}^k_{21} & \tilde{r}^k_{22} & \cdots & \tilde{r}^k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{r}^k_{n1} & \tilde{r}^k_{n2} & \cdots & \tilde{r}^k_{nn} \end{pmatrix},$$

y a partir de la información contenida en esta matriz de intensidades de preferencia individual hay dos posibilidades de agregarla, atendiendo a los enfoques apuntados.

- Definiendo una *matriz agregada en sentido amplio* como suma de las matrices de preferencia lingüística individuales:

$$\left(\overline{r}_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\tilde{r}^k_{ij}\right).$$

- Definiendo una *matriz agregada* como suma condicionada (denotada por $\oplus$) de las matrices de de preferencia lingüística individuales, donde sólo se suman niveles de preferencia estrictamente mayores que $l_{s/2}$:

$$\left(\hat{r}_{ij}\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \left(\tilde{r}_{ij}^{k}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ \tilde{r}_{ij}^{k} > l_{s/2}}}^{m} (\tilde{r}_{ij}^{k}).$$

De nuevo, en la anterior definición se sopesan los grados de preferencia con que la alternativa x_i es preferida a x_j conforme a la relación de preferencia inducida $\succ_{l_{s/2}}^{k}$ de cada agente. De esta forma:

- La alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido amplio* cuando $\overline{r}_{ij} > \overline{r}_{ji}$ para cada $j \neq i$.

- La alternativa x_i vence a la alternativa x_j por *mayoría simple generalizada en sentido restringido* cuando $\hat{r}_{ij} > \hat{r}_{ji}$ para cada $j \neq i$.

3.4 Reglas de Borda lingüísticas: Formulación y análisis

Con el bagaje anteriormente expuesto, estamos en condiciones de formalizar en el marco lingüístico cualesquiera de los contadores de Borda aditivos, esto es, homólogos de los introducidos en la Sección 3.2, a excepción del segundo contador de Black, que utiliza la sustracción además de la adición. No obstante, por las razones que se indicarán al concluir la presente sección, ceñiremos nuestro análisis exclusivamente a dos contadores, uno en sentido amplio y otro en sentido restringido, que son los que se utilizarán en el estudio empírico del Capítulo 4.

3.4.1 Variantes lingüísticas de la regla de Borda en sentidos amplio y restringido

En primer lugar tomamos como modelo el tercer contador de Borda gradual (Black I) en sentido amplio introducido en 3.2.1. De esta forma, el *contador de Borda lingüístico individual en sentido amplio* toma la expresión:

- $\overline{r}_k(x_i) = \sum_{i \neq j=1}^{n} \tilde{r}_{ij}^k .$

Para el correspondiente contador en sentido restringido nos inspiramos en el primer contador de Borda gradual introducido en 3.2.2. De esta forma, el *contador de Borda lingüístico individual en sentido restringido*[25] viene dado por:

- $\hat{r}_k(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i \succ_{l_{s/2}}^k x_j}}^{n} \tilde{r}_{ij}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ \tilde{r}_{ij}^k > l_{s/2}}}^{n} \tilde{r}_{ij}^k .$

Como ya se ha indicado, se entiende que si los sumatorios lingüísticos indexados en el conjunto vacío, su resultado es l_0.

Con estos contadores individuales se construye uno colectivo en cada caso:

- $\overline{\boldsymbol{r}}(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \overline{r}_k(x_i),$

- $\hat{\boldsymbol{r}}(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \hat{r}_k(x_i).$

Así, tiene sentido considerar relaciones (ordinarias) de preferencia colectiva $P^{\overline{B}}$ y $P^{\hat{B}}$ que vienen dadas por:

$$x_i P^{\overline{B}} x_j \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{r}}(x_i) > \overline{\boldsymbol{r}}(x_j), \qquad x_i P^{\hat{B}} x_j \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}}(x_i) > \hat{\boldsymbol{r}}(x_j),$$

respectivamente, las cuales siempre son negativamente transitivas, y resultará(n) elegida(s) en cada caso la(s) alternativa(s) con mayor calificación obtenida (es decir, los elementos maximales para $P^{\bar{B}}$ y $P^{\hat{B}}$, respectivamente). Las correspondientes relaciones de indiferencia se denotarán por $I^{\bar{B}}$ y $I^{\hat{B}}$, como es habitual.

Observación 3.24. Los citados contadores colectivos admiten la siguiente reescritura en términos de las correspondientes matrices agregadas:

- $\bar{\boldsymbol{r}}(x_i) = \sum_{i \neq j=1}^{n} \bar{r}_{ij}$,

- $\hat{\boldsymbol{r}}(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \hat{r}_{ij}$.

Como ya se ha indicado, en ocasiones puede ser interesante que las relaciones de preferencia colectivas sean lingüísticas y estén basadas en el mismo espectro de etiquetas que las de los agentes. Existe un procedimiento de “normalización lingüística” que consigue este propósito, pero al ser ajeno a nuestros intereses (nosotros sólo pretendemos elaborar un ranking de alternativas) no será tratado aquí.

3.4.2 Representatividad de los contadores lingüísticos de Borda

A continuación se define la representatividad de los contadores lingüísticos individuales, como en el contexto gradual, con las diferencias de que ahora se considera $\succ_{l_{s/2}}^{k}$ en lugar de $\succ_{0.5}^{k}$ y se consideran cómputos relativos a NDTs en vez de números reales.

[25] Un análisis de algunos aspectos y propiedades de este contador se ha realizado en García Lapresta – Lazzari – Martínez Panero (2001) y en García Lapresta – Llamazares – Martínez Panero (2003).

Definición 3.23. El contador de Borda lingüístico $\overline{r}_k$ en sentido amplio es *representativo de* R^k si verifica

$$x_i \succ^k_{l_{s/2}} x_j \quad \Rightarrow \quad \overline{r}_k(x_i) > \overline{r}_k(x_j),$$

para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Definición 3.24. El contador de Borda lingüístico $\hat{r}_k$ en sentido restringido es *representativo de* R^k si verifica

$$x_i \succ^k_{l_{s/2}} x_j \quad \Rightarrow \quad \hat{r}_k(x_i) > \hat{r}_k(x_j),$$

para cualquier par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

Observación 3.25. Tal y como señalamos en su momento para los casos discreto y gradual, hacemos notar que si dos alternativas $x_i, x_j \in X$ reciben la misma calificación mediante cualquier contador representativo de R^k, entonces $\tilde{r}^k_{ij} = l_{s/2}$, o equivalentemente, $x_i \sim^k_{l_{s/2}} x_j$, pero no es cierto el recíproco. Convendrá tener esto en cuenta en el análisis empírico que se realiza en el Capítulo 4.

La siguientes proposiciones explicitan condiciones de transitividad lingüística que garantizan la representatividad de los contadores en cada caso, y combinan distintos argumentos y técnicas de demostración utilizados en los casos graduales homólogos.

Proposición 3.9. Si R^k es $\overline{T}_3$, entonces el contador $\overline{r}_k$ es representativo de R^k.

Demostración. Supongamos $\tilde{r}^k_{ij} > l_{s/2}$. Veamos entonces que, bajo la hipótesis de coherencia lingüística $\overline{T}_3$ se verifica $\tilde{r}^k_{ip} \geq \tilde{r}^k_{jp}$ para cualquier $x_p \in X$. Distinguiremos varios casos, excluyentes y exhaustivos:

- Si $\tilde{r}_{jp}^k \geq l_{s/2}$ entonces $\tilde{r}_{ip}^k \geq \max\{\tilde{r}_{ij}^k, \tilde{r}_{jp}^k\} \geq \tilde{r}_{jp}^k$.

- Si $\tilde{r}_{jp}^k < l_{s/2}$ y $\tilde{r}_{ip}^k \leq l_{s/2}$, por reciprocidad lingüística se tendrá $\tilde{r}_{pi}^k \geq l_{s/2}$. Entonces, $\tilde{r}_{pj}^k \geq \max\{\tilde{r}_{pi}^k, \tilde{r}_{ij}^k\} \geq \tilde{r}_{pi}^k$, de donde, de nuevo por reciprocidad lingüística, $\tilde{r}_{ip}^k \geq \tilde{r}_{jp}^k$.

- Si $\tilde{r}_{jp}^k < l_{s/2}$ y $\tilde{r}_{ip}^k > l_{s/2}$, entonces la desigualdad $\tilde{r}_{ip}^k \geq \tilde{r}_{jp}^k$ se verifica trivialmente.

En consecuencia $\tilde{r}_{ip}^k \geq \tilde{r}_{jp}^k$ para cualquier $x_p \in X$. Además, por ser $\tilde{r}_{ij}^k > l_{s/2}$, se verifica $\tilde{r}_{ij}^k > \tilde{r}_{ji}^k$. Por tanto $\overline{r}_k\ (x_i) = \sum_{p \neq i = 1}^{n} \tilde{r}_{ip}^k > \sum_{p \neq j = 1}^{n} \tilde{r}_{jp}^k = \overline{r}_k\ (x_j)$. ■

Proposición 3.10. Si R^k es $\hat{T}_3$, entonces el contador $\hat{r}_k$ es representativo de R^k.

Demostración. Para cada $i \in \{1,...,n\}$ tómese el conjunto $P(i) = \{p \mid r_{ip}^k > l_{s/2}\} \subset \{1,...,n\}$. Entonces, $\hat{r}_k\ (x_i) = \sum_{l \in P(i)} \tilde{r}_{ip}^k$ y $\hat{r}_k\ (x_j) = \sum_{l \in P(j)} \tilde{r}_{jp}^k$.

Supongamos $\tilde{r}_{ij}^k > l_{s/2}$. Veamos que $P(j) \subset P(i)$: si $p \in P(j)$, entonces $\tilde{r}_{jp}^k > l_{s/2}$. Por hipótesis, $\tilde{r}_{ij}^k > l_{s/2}$, luego $\tilde{r}_{ip}^k \geq \max\{\tilde{r}_{ij}^k, \tilde{r}_{jp}^k\} > l_{s/2}$ y así $p \in P(i)$. Nótese que la inclusión es estricta, pues $\tilde{r}_{ij}^k > l_{s/2}$ implica $j \in P(i)$, mientras que $j \notin P(j)$ pues, en virtud de la reciprocidad lingüística, $\tilde{r}_{jj}^k = l_{s/2}$. Entonces, en $\hat{r}_k^1(x_i)$ hay más sumandos que en $\hat{r}_k^1(x_j)$. Veamos ahora que cada sumando en $\hat{r}_k^1(x_i)$ es mayor o igual que el correspondiente en $\hat{r}_k^1(x_j)$. Para ello debe tenerse en cuenta que si $p \in P(j) \subset P(i)$, entonces se verifica $\tilde{r}_{ip}^k \geq \max\{\tilde{r}_{ij}^k, \tilde{r}_{jp}^k\} \geq \tilde{r}_{jp}^k$ y, en consecuencia, $\hat{r}_k\ (x_i) = \sum_{p \in P(i)} \tilde{r}_{ip}^k > \sum_{p \in P(j)} \tilde{r}_{jp}^k = \hat{r}_k\ (x_j)$.

■

Observación 3.26. También en este contexto, y análogamente a lo que ocurría en el caso gradual (véanse Observaciones 3.13 y 3.14), el hecho de relajar la transitividad lingüística max-max débiles (estrictas o no estrictas) puede vulnerar la representatividad de los contadores lingüísticos (en sentido restringido o amplio, respectivamente).

3.4.3 Análisis de Condorcet

En lo que sigue se asumirán las hipótesis de transitividad lingüística señaladas en cada sentido (amplio o restringido) para conseguir la representatividad de los correspondientes contadores. Se definen a continuación los conceptos de alternativa ganadora y perdedora de Condorcet, considerando las matrices agregadas en sentidos amplio $\left(\overline{r}_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\tilde{r}_{ij}^{k}\right)$ y restringido $\left(\hat{r}_{ij}\right) = \bigoplus_{k=1}^{m}\left(r_{ij}^{k}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ r_{ij}^{k} > l_{s/2}}}^{m} (\tilde{r}_{ij}^{k})$ en cada caso.

Definición 3.25. La alternativa x_i es *ganadora de Condorcet en sentido amplio* si y sólo si x_i vence al resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido amplio. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \overline{r}_{ij} > \overline{r}_{ji}.$$

Definición 3.26. La alternativa x_i es *ganadora de Condorcet en sentido restringido* si y sólo si x_i vence al resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido restringido. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \hat{r}_{ij} > \hat{r}_{ji}.$$

Definición 3.27. La alternativa x_i es *perdedora de Condorcet en sentido amplio* si y sólo si x_i es vencida por el resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido amplio. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \overline{r}_{ij} < \overline{r}_{ji}.$$

Definición 3.28. La alternativa x_i es *perdedora de Condorcet en sentido restringido* si y sólo si x_i es vencida por el resto de sus oponentes por mayoría simple generalizada en sentido restringido. Formalmente,

$$j \neq i \;\Rightarrow\; \hat{r}_{ij} < \hat{r}_{ji}.$$

De las propias definiciones se sigue que, caso de existir, la alternativa ganadora (respectivamente perdedora) de Condorcet, en cualquiera de sus variantes, es única.

Aunque la regla de Borda en ninguna de sus variantes es Condorcet consistente[26] (esto es, no selecciona necesariamente a la alternativa ganadora de Condorcet, caso de existir), en sus versiones gradual en sentido amplio, y también lingüística en sentido amplio (en este último caso, con ciertos requerimientos sobre la disposición de las etiquetas) nunca seleccionará al perdedor de Condorcet, tal como se justifica a continuación. En el desarrollo subsiguiente, siempre que hablemos de "valor" se entenderá en el sentido de Delgado – Vila – Voxman (1998a). Así mismo, identificaremos notacionalmente las etiquetas lingüísticas con sus NDTs asociados, tal como hemos señalado.

Proposición 3.11. Si se representan las etiquetas lingüísticas mediante NDTs dispuestos simétricamente respecto de 0.5, una alternativa perdedora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, nunca puede resultar ganadora por la regla de Borda si se emplea el contador en sentido amplio $\overline{\boldsymbol{r}}$.

[26] Se entiende que estamos hablando de las variantes tratadas en la presente memoria. Ya hemos señalado, que otras variantes, como la regla de Borda iterada (o regla de Nanson), que elimina en cada etapa la(s) alternativa(s) peor puntuada(s), sí es Condorcet consistente.

Demostración. En primer lugar, veamos que dos NDTs simétricos respecto de 0.5 tienen valores que suman 1, y la misma ambigüedad. Consideremos, pues, $l=(a,b,c,d)$ y $l'=(1-d,1-c,1-b,1-a)$. Entonces:

$$V(l)+V(l')=$$

$$=\left(\frac{c+b}{2}+\frac{(d-c)-(b-a)}{6}\right)+\left(\frac{(1-b)+(1-c)}{2}+\frac{((1-a)-(1-b))-((1-c)-(1-d))}{6}\right)=$$

$$=\left(\frac{c+b}{2}+\frac{2-b-c}{2}\right)+\left(\frac{d-c-b+a}{6}+\frac{1-a-1+b-1+c+1-d}{6}\right)=1.$$

Por otro lado:

$$A(l)=\frac{c-b}{2}+\frac{(d-c)+(b-a)}{6}$$

y

$$A(l')=\frac{(1-b)-(1-c)}{2}+\frac{((1-a)-(1-b))+((1-c)-(1-d))}{6}=\frac{c-b}{2}+\frac{(d-c)+(b-a)}{6},$$

luego $A(l)=A(l')$.

En lo que sigue, supondremos m agentes cuya suma de matrices de preferencia individual acerca de las n alternativas de X constituyen la matriz agregada:

$$\left(\overline{r}_{ij}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\tilde{r}_{ij}^{k}\right).$$

Si nos fijamos en los elementos no diagonales de las matrices individuales, el cómputo total de calificaciones emitidas por cada agente es $\frac{n(n-1)}{2}$ parejas de sumandos constituidos por etiquetas simétricas respecto de la central, que a su vez están representadas por NDTs simétricos respecto de 0.5. Como cada una de estas parejas aporta un valor unitario, según se ha visto, el valor del total de calificaciones emitidas por cada agente es exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$. Al existir m agentes, el valor del cómputo total de calificaciones emitidas es exactamente $m\frac{n(n-1)}{2}$.

Razonemos ahora por reducción al absurdo y supongamos que existiese una alternativa perdedora de Condorcet x_i que fuese ganadora de Borda mediante $\boldsymbol{\bar{r}}$. Hay que señalar de partida que los coeficientes simétricos respecto de la diagonal principal de la matriz agregada, al estar definidos a su vez como suma de etiquetas simétricas respecto del valor 0.5, tienen la misma ambigüedad, tal como se ha señalado. Por tanto, siguiendo el orden definido en 3.1.4, si $\bar{r}_{ij} < \bar{r}_{ji}$, es imposible que ello ocurra con $V(\bar{r}_{ij}) = V(\bar{r}_{ji})$ y $A(\bar{r}_{ij}) > A(\bar{r}_{ji})$. Debe ser, por tanto, $V(\bar{r}_{ij}) < V(\bar{r}_{ji})$ para cada $j \neq i$. Puesto que $V(\bar{r}_{ij}) + V(\bar{r}_{ji}) = m$, también para cada $j \neq i$ (es decir, para $n-1$ índices), la alternativa perdedora de Condorcet debe serlo con una calificación Borda (calculada a partir de la matriz agregada, teniendo en cuenta la Observación 3.24) cuyo valor sea estrictamente menor que $(n-1)\frac{m}{2}$. Ahora bien, si x_i fuera ganadora de Borda, ninguna de las n alternativas podrá alcanzar tampoco el valor $(n-1)\frac{m}{2}$, con lo que el cómputo de calificaciones emitidas por todos los agentes tendría un valor estrictamente menor que $n(n-1)\frac{m}{2}$, lo que contradice el valor exacto hallado anteriormente. ■

La proposición anterior garantiza que la regla de Borda en sentido amplio nunca dará la victoria a la alternativa perdedora de Condorcet cuando se toma un espectro de etiquetas simétricas respecto de 0.5. Esta es la razón por la que, deseando el cumplimiento de tal propiedad, hemos dispuesto en dicha forma las etiquetas del espectro considerado en la Tabla 3.2, que será también el utilizado en la parte empírica de la presente memoria, a desarrollar en el Capítulo 4.

A continuación verificamos que no se cumple la proposición análoga a la anterior en el caso restringido (como tampoco se cumplía para el contador de Borda gradual en sentido restringido en el que el correspondiente contador lingüístico, $\hat{\boldsymbol{r}}$, está inspirado).

Ejemplo 3.5. En lo que sigue utilizamos la misma notación indicada en la Observación 3.17, teniendo en cuenta que ahora las matrices son lingüísticas en vez de numéricas. Denotaremos por l_h, donde $h = \{0, \ldots, 8\}$, tanto a las etiquetas de L como a sus NDTs asociados según la representación considerada en la Tabla 3.2.

Supongamos 5 agentes divididos en 2 coaliciones de 2 y 3 miembros cada una, con la misma matriz de preferencias individuales (transitivas lingüísticas max-max débil estrictas) para todos los miembros de cada coalición. A continuación se detallan tales matrices así como la agregada:

$$\left(2 \bullet \begin{pmatrix} l_4 & l_8 & l_8 \\ l_0 & l_4 & l_5 \\ l_0 & l_3 & l_4 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(3 \bullet \begin{pmatrix} l_4 & l_3 & l_3 \\ l_5 & l_4 & l_4 \\ l_5 & l_4 & l_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} l_0 & 2l_8 & 2l_8 \\ 3l_5 & l_0 & 2l_5 \\ 3l_5 & l_0 & l_0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que x_1 es perdedora de Condorcet, pues $\hat{r}_{12} < \hat{r}_{21}$ y $\hat{r}_{13} < \hat{r}_{31}$, ya que $V(2l_8) = 2 < 2.105 = V(3l_5)$. Sin embargo es la alternativa con mayor calificación Borda, pues

$$\hat{\boldsymbol{r}}(x_1) = 4l_8, \quad \hat{\boldsymbol{r}}(x_2) = 5l_5, \quad \hat{\boldsymbol{r}}(x_3) = 3l_5,$$

donde:

$$V(4l_8) = 4, \quad V(5l_5) = 3.508, \quad V(3l_5) = 2.105.$$

Tanto la siguiente proposición, como la anterior, fueron probadas en los casos discreto y gradual en sentido amplio para Black II, resultando ser ciertas para

Black I en sentido amplio por equivalencia de contadores. Se realiza aquí una demostración directa para el contador lingüístico en sentido amplio que estamos considerando.

Proposición 3.12. Si se representan las etiquetas lingüísticas mediante NDTs dispuestos simétricamente respecto de 0.5, una alternativa ganadora de Condorcet en sentido amplio, caso de existir, nunca puede resultar perdedora por la regla de Borda si se emplea el contador en sentido amplio $\bar{\boldsymbol{r}}$.

Demostración. Ya se ha visto en la proposición anterior que el valor del cómputo total de calificaciones emitidas por el colectivo de agentes es exactamente $m\dfrac{n(n-1)}{2}$. Razonemos ahora por reducción al absurdo y supongamos que existiese una alternativa ganadora de Condorcet x_i que fuese perdedora de Borda mediante $\bar{\boldsymbol{r}}$. Con argumentos de simetría análogos a los de la proposición anterior, si $\bar{r}_{ij} > \bar{r}_{ji}$, es imposible que ello ocurra con $V(\bar{r}_{ij}) = V(\bar{r}_{ji})$ y $A(\bar{r}_{ij}) < A(\bar{r}_{ji})$. Debe ser, por tanto, $V(\bar{r}_{ij}) > V(\bar{r}_{ji})$ para cada $j \neq i$. Puesto que $V(\bar{r}_{ij}) + V(\bar{r}_{ji}) = m,$ de nuevo para cada $j \neq i$ (es decir, para $n-1$ índices), la alternativa ganadora de Condorcet debe serlo con una calificación Borda (calculada a partir de la matriz agregada, teniendo en cuenta la Observación 3.24) de valor estrictamente mayor que $(n-1)\dfrac{m}{2}$. Por tanto, si x_i es perdedora de Borda, las n alternativas deberán superar también el valor $(n-1)\dfrac{m}{2}$, con lo que el valor total del cómputo de calificaciones emitidas por todos los agentes sería estrictamente mayor que $n(n-1)\dfrac{m}{2}$, lo que contradice el valor exacto hallado anteriormente. ■

A continuación comprobamos que no se cumple la proposición análoga al caso anterior en el caso restringido. Tanto el siguiente ejemplo como el anterior trasladan a un marco lingüístico los presentados en la Observación 3.17.

Ejemplo 3.6. Supongamos 10 agentes divididos en 4 coaliciones, 2 de 2 miembros y otras 2 de 3 miembros cada una, con la misma matriz de preferencias individuales (transitivas lingüísticas max-max débil estrictas) para todos los miembros de cada coalición. A continuación se detallan tales matrices así como la agregada, usando la notación y representación anteriores.

$$\left(2\bullet\begin{pmatrix} l_4 & l_7 & l_7 \\ l_1 & l_4 & l_5 \\ l_1 & l_3 & l_4 \end{pmatrix}\right)\oplus\left(3\bullet\begin{pmatrix} l_4 & l_1 & l_1 \\ l_7 & l_4 & l_3 \\ l_7 & l_5 & l_4 \end{pmatrix}\right)\oplus\left(3\bullet\begin{pmatrix} l_4 & l_5 & l_7 \\ l_3 & l_4 & l_7 \\ l_1 & l_1 & l_4 \end{pmatrix}\right)\oplus$$

$$\oplus\left(2\bullet\begin{pmatrix} l_4 & l_3 & l_1 \\ l_5 & l_4 & l_1 \\ l_7 & l_7 & l_4 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} l_0 & 2l_7+3l_5 & 5l_7 \\ 3l_7+2l_5 & l_0 & 3l_7+2l_5 \\ 5l_7 & 2l_7+3l_5 & l_0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que x_2 es ganadora de Condorcet, pues $\hat{r}_{21}>\hat{r}_{12}$ y $\hat{r}_{23}>\hat{r}_{32}$, ya que $V(3l_7+2l_5)=4.278>4.021=V(2l_7+3l_5)$. Sin embargo es la alternativa con menor calificación Borda, pues:

$$\hat{\boldsymbol{r}}^1(x_1)=7l_7+3l_5,\quad \hat{\boldsymbol{r}}^1(x_2)=6l_7+4l_5,\quad \hat{\boldsymbol{r}}^1(x_3)=7l_7+3l_5,$$

donde

$$V(7l_7+3l_5)=8.813,\quad V(6l_7+4l_5)=8.566,\quad V(7l_7+3l_5)=8.813.$$

3.4.4 Consideraciones sobre los contadores de Borda lingüísticos

En vista de la analogía tan estrecha entre los contextos lingüístico y gradual, cabría definir y relacionar entre sí, de modo análogo al llevado a cabo en 3.2.2, todos los contadores lingüísticos homólogos a los allí considerados, y no únicamente los dos introducidos en 3.4.1. Ya hemos comentado que, con el soporte teórico introducido hasta ahora, sería factible la formulación de contadores de Borda lingüísticos aditivos (esto es, homólogos de todos los tratados hasta ahora a excepción de Black II). Sin embargo este programa, en principio optimista, tropieza con un serio escollo: tanto en la definición de Black II en un contexto lingüístico, como en la relación y posible equivalencia de contadores (que se daría al inducirse la misma preferencia colectiva), entra en juego la operación de sustracción de etiquetas lingüísticas, que una vez representadas, conlleva la sustracción de NDTs.

Desde un punto de vista teórico, pudiera pensarse que, en tal caso, se podría ampliar la estructura de monoide libre conmutativo expuesta en 3.3.2 a la de grupo libre conmutativo (o abeliano) para admitir la operación opuesta de la aditiva. Sin embargo, en la práctica, una vez representadas las etiquetas lingüísticas mediante NDTs, tal construcción extendida presenta dificultades y no permite compatibilizar la aritmética difusa estándar[27] de NDTs con el orden sobre dicho conjunto de números difusos a menos que la representación de las etiquetas lingüísticas no contemple en absoluto la vaguedad, esto es, a que se utilice como espectro de etiquetas un conjunto finito de número reales, o sea, una discretización del intervalo $[0,1]$, tal y como se pone de manifiesto a continuación.

En la aritmética difusa estándar (en nuestro caso, de NDTs), se define el opuesto de $l=\left(a,b,c,d\right)$ como $-l=\left(d,c,b,a\right)$. Puesto que el elemento neutro del monoide debe mantenerse en el grupo, esto conlleva:

$$l+(-l)=(a-d,b-c,c-b,d-a)=(0,0,0,0)=l_0 \quad \Leftrightarrow \quad a=b=c=d.$$

Así mismo, también se puede comprobar que la siguiente propiedad de compatibilidad de la estructura de grupo con la de orden:

$$l>l_0=(0,0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad -l<l_0,$$

[27] Como veremos, se habla también de aritmética borrosa con restricciones (“fuzzy arithmetic with requisite constraints”, por Klir (1997)) y aritmética borrosa débil (“weak fuzzy arithmetic”, por Mares (1997)).

que obviamente es cierta para números reales (NDTs del tipo (a,a,a,a)), no lo es en general. Esto conduce a situaciones paradójicas: por ejemplo, si $l=(-b,-a,a,b)$, con $a,b>0$ y $a\neq b$, se tendría $-l=l\neq l_0$.

Consideraciones como las apuntadas propiciaron cierto pesimismo en la implementación de modelos difusos en la toma de decisiones (véase, por ejemplo, French (1984): "It is my contention that these [fundamentals questions to be answered] cannot be resolved as favourably as the proponents of fuzzy mathematics suggest"). Se han tratado de evitar los inconvenientes anteriormente expuestos de diversas maneras, algunas de las cuales se citan a continuación:

- Mares (1997) ha propugnado una "aritmética difusa débil" al constatar: "Fuzzy quanties do not form [either] additive [or multiplicative] group […]. This fact can complicate some theoretical considerations or applied procedures". Para subsanar este hecho, ya señalado por Yager (1980), ha propuesto una "equivalencia aditiva" mediante la cual el conjunto cociente inducido tiene estructura de grupo y algunos de sus subconjuntos significativos son espacios vectoriales.

- Filev – Yager (1997) proponen una vía que conecta la aritmética difusa con el "razonamiento difuso (o aproximado)" ("fuzzy reasoning"), y sostienen: "This approach provides a link between the techniques used in fuzzy systems modeling and fuzzy arithmetic operations".

- Klir (1997) y Klir – Pan (1998) afirman por su parte: "From the mathematical point of view, fuzzy [standard] arithmetic is now fairly well developed. However, direct, unrevised application to problems in the various areas leads often to questionable results". Por ello han propuesto una "aritmética difusa con restricciones" ("fuzzy arithmetic with requisite constraints") que tenga en cuenta la información suplementaria de los elementos que intervienen en el problema que se trate en concreto. Sin embargo, en los citados trabajos, los propios

> promotores de esta revisión de la aritmética difusa estándar afirman que tal enfoque dista mucho de ser plenamente aceptado en la comunidad científica. Algunos de los problemas de consistencia, eficiencia e implementación de la aritmética difusa con restricciones han sido analizados en Navara – Zaborkrtsky (mimeo y 2001).

Observamos, pues, que si ya la implementación de la reglas de Borda lingüísticas aditivas es de por sí compleja (en el caso restringido supone: selección de las etiquetas lingüísticas relevantes, representación de tales etiquetas mediante NDTs, cómputos de los mismos y ordenación de los resultados obtenidos), a la vista de lo anteriormente señalado parece aún mas complicado extenderla de modo fundamentado a contadores de tipo Black II, por lo que en la presente memoria hemos reducido considerablemente el análisis, tanto teórico en el presente capítulo, como empírico en el siguiente, de los contadores lingüísticos a tratar, quedando reducido a dos de ellos (uno en sentido amplio y otro en sentido restringido).

Es interesante contrastar la sensibilidad ante pequeñas variaciones en las preferencias individuales de los contadores de Borda lingüísticos en conexión con sus homólogos graduales. En 3.2.5 señalamos que, de estos últimos, los diseñados en sentido amplio son estables, mientras que los definidos en sentido restringido son, por el contrario, susceptibles de que pequeños cambios a nivel individual conlleven cambios drásticos en el agregado. Pues bien, este defecto de los contadores en sentido restringido se ve mitigado en el caso lingüístico. La razón de ello estriba en que la discretización del espectro de etiquetas a asignar por parte de un agente no permite a éste, si su “estimación latente” cambia por muy levemente que sea, más posibilidad que pasar de una a otra de las etiquetas permisibles del conjunto L (como sucede con los saltos de nivel de energía en la Física Cuántica a nivel atómico), a diferencia de lo que ocurre con las intensidades de preferencia, que permiten una variación continua de asignaciones a otorgar.

Por razón de su diseño y tal como señalamos en la introducción al capítulo, nosotros vemos en el enfoque lingüístico de los contadores de Borda una especie de "frontera" o "híbrido" entre los casos discreto y gradual de dichos contadores, que recoge buenas características de ambos tipos de tratamiento. Efectivamente, nótese que el espectro de etiquetas con el que cuenta un agente en el caso lingüístico es finito, lo que le simplifica la asignación de calificaciones (como en el caso discreto). Por otro lado, el cómputo de las mismas se asemeja al del caso gradual: en ambos casos (lingüístico o gradual), la implementación del método es similar, con mayor o menor grado de complejidad, respectivamente.

Bibliografía del Capítulo 3

Arrow, K.J. (1974): *Elección Social y Valores Individuales*. Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Traducción de Eusebio Aparicio Auñón de la segunda edición, corregida, en inglés, 1963: *Social Choice and Individual Values*. Introducción de Andreu Mas Colell. Primera edición, 1951].

Arrow, K.J. (1977): "Extended sympathy and the possibility of Social Choice". *American Economic Review* 67, pp. 219 – 225.

Arrow, K.J. – Raynaud, H. (1989): *Opciones Sociales y Toma de Decisiones mediante Criterios Múltiples.* Alianza Editorial, Madrid. [Traducción al castellano de Manuel Pascual Morales de la edición original en inglés, 1986].

Barrett, C.R. – Pattanaik, P.K. – Salles, M. (1992): "Rationality and aggregation of preferences in an ordinally fuzzy framework". *Fuzzy Sets and Systems* 49, pp. 9 – 14.

Berlin, I. (1997): "John Stuart Mill y los fines de la vida", prólogo a Mill, J.S. : *Sobre la Libertad,* Alianza Editorial, Madrid, pp. 23 – 78. [Traducción de Natalia Rodríguez Salmones de la obra publicada en inglés, 1969, a partir de la conferencia original, 1959].

Bezdek, J.C. – Harris, J.D. (1978): "Fuzzy partitions and relations: An axiomatic basis for clustering". *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp. 111 – 127.

Bezdek, J.C. – Spillman, B. – Spillman, R. (1978): "A fuzzy relation space for group decision theory". *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp. 255 – 268.

Bezdek, J.C. – Spillman, B. – Spillman, R. (1979): “Fuzzy relation spaces for group decision theory: An application”. *Fuzzy Sets and Systems* 2, pp. 5 – 14.

Black, D. (1958): *The Theory of Committees and Elections*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Black, D. (1976): “Partial justification of the Borda count”. *Public Choice* 28, pp. 1 – 16.

Bonissone, P.P. – Decker, K.S. (1986): “Selecting uncertainty calculi and granularity: An experiment in trading-off precision and complexity”, en Kanal L.H. – Lemmer J.F. (eds.): *Uncertainty in Artificial Intelligence.* North-Holland, Amsterdam, pp. 217 – 247.

Dasgupta, M. – Deb, R. (1996): “Transitivity and fuzzy preferences”. *Social Choice and Welfare* 13, pp. 305 – 318.

De Baets, B. – De Meyer, H. – De Shuymer, B. – Jenny, S. (2003): “Cycle-transitivity of reciprocal relations”, en De Baets, B. – Fodor, J. (eds.): *Principles of Fuzzy Preference Modelling and Decision Making*. Academia Press, Gante, pp. 165 – 181.

Delgado, M. – Verdegay, J.L. – Vila, M.A. (1993): “Linguistic decision making models”. *International Journal of Intelligent Systems* 7 , pp. 479 – 492.

Delgado, M. – Vila, M.A. – Voxman, W. (1998a): “On a canonical representation of fuzzy numbers”. *Fuzzy Sets and Systems* 93, pp. 125 – 135.

Delgado, M. – Vila, M.A. – Voxman, W. (1998b): “A fuzziness measure for fuzzy numbers: Applications”. *Fuzzy Sets and Systems* 94, pp. 205 – 216.

Dubois, D. – Prade, H. (1987): "Fuzzy numbers: An overview", en Bezdek, J.C. (ed.): *Analysis of Fuzzy Information*, vol. 1. CRC Press, Boca Ratón, pp. 3 – 39.

Filev, D. – Yager, R. (1997): "Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning". *Fuzzy Sets and Systems* 91, pp. 137 – 142.

Fishburn, P.C. (1970): *Utility Theory for Decision Making.* Wiley, Nueva York.

Fishburn, P.C. (1973): "Binary choice probabilities: On the varieties of stochastic transitivity". *Journal of Mathematical Psychology* 10, pp. 327 – 352.

Fleurbaey, M. – Hammond, P.J. (en prensa): "Interpersonally comparable utility", en Barberà, S. – Hammond, P.J. – Seidl, C. (eds.): *Handbook of Utility Theory*, vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Boston.

French, S. (1984): "Fuzzy decision analysis: Some criticisms", en Zimmermann, H.J. (ed.): *TIMS/Studies in the Management Sciences*, vol. 20. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, pp. 3 – 8.

García Lapresta (en prensa): "A general class of simple majority decision rules based on linguistic opinions". *Information Sciences.*

García Lapresta, J.L. – Lazzari, L.L. – Martínez Panero, M. (2001): "A group decision making method using fuzzy triangular numbers", en Zopounidis, C. – Pardalos, P.M. – Baourakis, G. (eds.): *Fuzzy Sets in Management, Economics and Marketing.* World Scientific, Singapur, pp. 35 – 50.

García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. (2000): "Aggregation of fuzzy preferences: Some rules of the mean". *Social Choice and Welfare* 17, pp. 673 – 690.

García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. (2003): "An axiomatic characterization of fuzzy decision rules based on difference of votes". *Proceedings of the 10th International Fuzzy Systems Association World Congress,* Estambul, pp. 91 – 94.

García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. – Martínez Panero, M. (2003): Generalización de la regla de votación de Borda mediante el uso de preferencias lingüísticas: Análisis de sus propiedades. *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Lérida, Actas en CD-ROM.

García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2002): "Borda count versus approval voting: A fuzzy approach". *Public Choice* 112, pp. 167 – 184.

García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2003): "Extensiones discretas de la regla de Borda: Un estudio comparativo". *XVII Reunión Anual Asepelt*, Almería, Actas en CD-ROM.

García Lapresta, J.L. – Meneses, L.C. (2003): "An empirical analysis of transitivity with four scaled preference judgement modalities". *Review of Economic Design* 8, pp. 335 – 346.

Gento Municio, A.M. (2000): "Ordenación de números borrosos: el eterno problema". *Proceedings of the VII Congress of SIGEF*, Chania, pp. 635 – 645.

Goguen, J.A. (1967): "L-fuzzy sets". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 18, pp. 157 – 168.

Hammond, P.J. (1991): "Interpersonal comparisons of utility: Why and how they are and should be made", en Elster, J. – Roemer, J.E. (eds.): *Interpersonal Comparisons of Well-Being*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 200 – 254.

Harsanyi, J.C. (1974): "El bienestar cardinal, la ética individualista y las comparaciones interpersonales de utilidad", en Arrow, K.J. – Scitovsky, T. (eds): *La Economía del Bienestar*, Fondo de Cultura Económica, México, pp. 64 – 82. [Traducción del Eduardo L. Suárez y Manuel Sánchez Sarto del artículo original en inglés, 1955].

Harvey, C.M. (1999): "Aggregation of individuals' preference intensities into social preference intensity". *Social Choice and Welfare* 16, pp. 65 – 79.

Herrera, F. – Herrera Viedma, E. – Verdegay, J.L. (1996): "A linguistic decision process in group decision making". *Group Decision and Negotiation* 5, pp. 165 – 176.

Herrera, F. – Martínez, L. (2000a): "A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8, pp. 746 - 752.

Herrera, F. – Martínez, L. (2000b): "An approach for combining numerical and linguistic information based on the 2-tuple fuzzy linguistic representation model in decision making". *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge – Based Systems* 8, pp. 539 – 562.

Herrera, F. – Verdegay, J.L. (1995): "On group decision making under linguistic preferences and fuzzy linguistic quantifiers", en Bouchon, B. – Yager, R.R. – Zadeh, L (eds.): *Fuzzy Logic and Soft Computing*. Word Scientific, Singapur, pp. 173 – 180.

Joslyn, R.A. (1976): "Impact of decision rules in multicandidate campaigns: The case of the 1972 democratic presidential nomination". *Public Choice* 25, pp. 1 – 18.

Kacprzyk, J. (1986): "Group decision making with a fuzzy linguistic majority". *Fuzzy Sets and Systems* 11, pp. 105 – 118.

Kacprzyk, J. – Fedrizzi, M. – Nurmi, H. (1992): “Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority”. *Fuzzy Sets and Systems* 49, pp. 21 – 32.

Klir, G.J. (1997): “Fuzzy arithmetic with requisite constraints”. *Fuzzy Sets and Systems* 91, pp. 165 – 175.

Klir, G.J. – Pan, Y. (1998): “Constrained fuzzy arithmeric: Basic questions and some answers”. *Soft Computing* 2, pp. 100 – 108.

López de Peñalver, J. (1992): *Escritos*. Instituto de Cooperación Iberoamericana – Quinto Centenario – Antoni Bosch, editor – Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Edición de Ernest Lluch de la obra original, 1799].

Luce, D. (1956): “Semiorders and a theory of utility discrimination”. *Econometrica* 24, pp. 178 – 191.

Marchant, T. (1996): *Agrégation de relations valuées par la méthode de Borda en vue d’un rangement. Considérations axiomatiques.* Ph. D. Thesis, Université Libre de Bruxelles, Bruselas.

Marchant, T. (2000): “Does the Borda Rule provide more than a ranking?”. *Social Choice and Welfare* 17, pp. 381 – 391.

Mares, M. (1997): “Weak arithmetics of fuzzy numbers”. *Fuzzy Sets and Systems* 91, pp. 143 – 153.

Marimin – Umano, M. – Hatono, I. – Tamura, H. (1998): “Linguistic labels for expressing fuzzy preference relations in fuzzy group decision making”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics* 28, pp. 205–218.

May, K.O. (1952): “A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision”. *Econometrica* 20, pp. 680 – 684.

Metfessel, M. (1947): “A proposal for quantitative reporting of comparative judgements”. *Journal of Psychology* 24, pp. 229 – 235.

Miller, G.A. (1969): “The organization of lexical memory”, en Talland, G.A. – Waugh N.C. (eds.): *The Pathology of Memory*. Academic, Nueva York, pp. 223 – 236.

Morales, J.I. (1797): *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta Real, Madrid.

Morales, J.I. (1805): *Apéndice á la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta de Sancha, Madrid.

Myerson, R.B. – Weber, R.J. (1993): “A theory of voting equilibria”. *American Political Science Review* 87, pp. 102 – 114.

Navara, M. – Zabokrtsky, Z. (2001): “How to make constrained fuzzy arithmetic efficient”. *Soft Computing* 6, pp. 412 – 417.

Navara, M. – Zabokrtsky, Z. (mimeo): “Computational problems of constrained fuzzy arithmetic”. Czech Technical University, Praga. [Disponible online en http://ckl.mff.cuni.cz/~zabokrtsky/].

Nurmi, H. (1981): “Approaches to collective decisión making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems* 6, pp. 249 – 259.

Peláez, J.I. – Doña, J.M. (2003): “LAMA: A linguistic aggregation of majority additive operator”. *International Journal of Intelligent Systems* 18, pp. 809 – 820.

Pirlot, M. – Vincke, P. (1997): *Semiorders.* Kluwer Academic Publishing, Dordrecht.

Rawls, J. (1979): *Teoría de la Justicia.* Fondo de Cultura Económica, México. [Traducción de Maria Dolores González de la edición original en inglés, 1971].

Robbins, L. (1938): “Interpersonal comparisons of utility: A comment”. *Economic Journal* 48, pp. 635 – 641.

Roberts, K.W.S. (1980a): “Interpersonal comparability and social choice theory”. *Review of Economic Studies* 47, pp. 421-439.

Roberts, K.W.S. (1980b): “Social choice theory: Single-profile and multi-profile approaches”. *Review of Economic Studies* 47, pp. 441 – 450.

Roberts, K.W.S. (1997): “Interpersonal comparisons of the extended sympathy type and the possibility of Social Choice: Discussion”, en Arrow, K.J. – Sen, A.K. – Suzumura, K. (eds): *Social Choice Re-examined*, Vol. 2, St Martin's Press, Nueva York, pp. 230 – 236.

Saari, D.G. (2001): *Decisions and Elections. Explaining the Unexpected.* Cambridge University Press, Cambridge.

Saari, D.G. – Merlin, V.R. (2000): “A geometric examination of Kemeny’s rule”. *Social Choice and Welfare* 17, pp. 403 – 438.

Salcedo Megales, D. (1994): *Elección Social y Desigualdad Económica.* Anthropos – Universidad Autónoma Metropolitana (Iztapalapa), Barcelona.

Sen, A.K. (1976): *Elección Colectiva y Bienestar Social*. Alianza Editorial, Madrid. [Traducción de Francisco Elías Castillo de la edición original en inglés, 1970: *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco].

Sen. A.K. (1977): “On weights and measures: Informational constraints in Social Welfare analysis”. *Econometrica* 45, pp. 1539 – 1572.

Sen, A.K. (1979): “Personal utilities and public judgements: Or what’s wrong with Welfare Economics”. *Economic Journal* 89, pp. 537 – 558.

Sen, A.K. (2000): “La posibilidad de la elección social”. *Revista BCV* 14, pp. 9 – 60. [Disertación de recepción del Premio Nobel de Economía de 1998. Disponible en http://www.bcv.org.ve/publica/rbcv/rbcv100b.pdf].

Straffin Jr., P.D. (1980): *Topics in the Theory of Voting*. Birkhäuser, Boston.

Sugden, R. (1981): *The Political Economy of Public Choice*.Wiley, Nueva York.

Suzumura, K. (1997): “Interpersonal comparisons of the extended sympathy type and the possibility of Social Choice”, en Arrow, K.J. – Sen, A.K. – Suzumura, K. (eds): *Social Choice Re-examined*, Vol. 2, St Martin's Press, Nueva York, pp. 202 – 229.

Tangian, A.S. (2000): “Unlikelihood of Condorcet’s paradox in a large society”. *Social Choice and Welfare* 17, pp. 337 – 365.

Tanguiane, A.S. (1991): *Aggregation and Representation of Preferences. Introduction to Mathematical Theory of Democracy*. Springer – Verlag, Berlín.

Tanino, T. (1984): “Fuzzy preference orderings in group decision making”. *Fuzzy Sets and Systems* 12, pp. 117-131.

Von Neumann, J. – Morgenstern, O. (1953): *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton.

Wang, P.P. (ed.) (2001): *Computing with Words*. Wiley, Nueva York.

Weber, R.J. (1995): “Approval voying”. *Journal of Economic Perspectives* 9, pp. 39 – 49.

Yager, R.R. (1980): “On the lack of inverses in fuzzy arithmetic”. *Fuzzy Sets and Systems* 4, pp. 73 – 82.

Yager, R.R. (1993): “Families of OWA operators”. *Fuzzy Sets and Systems* 59, pp. 125 – 148.

Zadeh, L.A. (1965): “Fuzzy sets”. *Information and Control* 8, pp. 338 – 353.

Zadeh, L.A. (1971): “Similarity relations and fuzzy orderings”. *Information Sciences* 3, pp. 177 – 200.

Zadeh, L.A. (1975): “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning”. *Information Sciences* 8, pp. 199 – 249 y 301 – 357 (Parts I, II); 9, pp. 43 – 80 (Part III).

Capítulo 4

Contraste empírico

En este capítulo se aplican, en un caso real y de modo paralelo, las dos variantes lingüísticas de la regla de Borda tratadas en el capítulo anterior. Siguiendo el esquema allí trazado, estudiamos algunos aspectos que tienen que ver con las preferencias individuales de los agentes, a saber: el cumplimiento de las transitividades lingüísticas consideradas en cada caso, en los términos que hemos denominado *absoluto* (que hace referencia al número de agentes) y *relativo* (que alude a la cantidad total de manifestaciones de preferencia emitidas por éstos); y, relacionada con estas propiedades, se analiza también la asignación de calificaciones individuales atendiendo a la representatividad de los respectivos contadores. Ya desde el punto de vista agregado, se contrastan las ordenaciones obtenidas mediante las reglas de Borda lingüísticas empleadas, y se confrontan la alternativas ganadoras mediante tales métodos con las correspondientes ganadoras de Condorcet (caso de existir) en este contexto lingüístico.

4.1 El experimento

La coherencia y las condiciones de comportamiento racional que se suelen asumir en las teorías normativas son normalmente violadas en los problemas reales de decisión. De hecho, diferentes estudios empíricos muestran la aparición de inconsistencias en la práctica (véanse May (1954), Switalski (1999, 2001 y 2003) y García Lapresta – Meneses (2003 y en prensa), entre otros). Con el fin de contrastar empíricamente diferentes aspectos teóricos analizados en la presente memoria, nos hemos basado en los datos obtenidos en el experimento de campo llevado a cabo en el trabajo García Lapresta – Meneses (2003). En él se realizaron encuestas a 200 estudiantes de cuarto curso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid. Éstos mostraron en varios cuestionarios sus preferencias sobre diferentes destinos posibles para realizar su viaje de fin de carrera: China, Egipto, Praga-Budapest, Italia, Cuba, Rusia y Estambul. Con el fin de analizar la influencia del número de alternativas sobre los resultados obtenidos, se dividió a los 200 estudiantes en 4 grupos de 50, cada uno de los cuales tuvo que comparar entre sí todos los pares posibles de destinos.

Los conjuntos de alternativas considerados por cada grupo se detallan a continuación.

- El primer grupo mostró sus preferencias sobre el siguiente conjunto de 4 destinos:

  $X_4 = \{$China, Egipto, Praga-Budapest, Italia$\}$.

- El segundo grupo sobre el siguiente conjunto de 5 destinos:

  $X_5 = \{$China, Egipto, Praga-Budapest, Italia, Cuba$\}$.

- El tercer grupo sobre el siguiente conjunto de 6 destinos:

  $X_6 = \{$China, Egipto, Praga-Budapest, Italia, Cuba, Rusia$\}$.

- Y el cuarto grupo sobre el siguiente conjunto de 7 destinos:

  $X_7 = \{$China, Egipto, Praga-Budapest, Italia, Cuba, Rusia, Estambul$\}$.

Al mostrar sus preferencias sobre cada par de alternativas los estudiantes tuvieron que elegir entre cuatro modalidades de preferencia lingüística entre la alternativa preferida y la otra, de forma decreciente: “totalmente”, “mucho”, “bastante” y “algo”; en ausencia de preferencia entre alternativas declaraban “indiferencia”. De esta forma, los estudiantes tuvieron que responder cuestionarios como los del siguiente ejemplo, en donde se tenía que señalar una de las 9 modalidades de preferencia o indiferencia.

China								Italia
Totalmente	Mucho	Bastante	Algo	Indiferencia	Algo	Bastante	Mucho	Totalmente

Así, los estudiantes compararon un total de 5200 pares de alternativas. Para tratar todos esos datos, hemos utilizado la semántica mostrada en la Tabla 4.1 y representada gráficamente en la Figura 4.1, que ya había sido introducida en el capítulo anterior y cuyas características se detallan en la Observación 3.20. Hacemos notar que, a diferencia de García Lapresta – Meneses (2003), que trabajan con semánticas basadas en números reales, nosotros empleamos NDTs para capturar de la vaguedad intrínseca que toda etiqueta lingüística tiene.

Etiqueta	**Significado**	**Número difuso trapecial**
$\tilde{r}_{ij}^k = l_0$	El agente *k* prefiere totalmente x_j a x_i	$(0,0,0,0)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_1$	El agente *k* prefiere mucho x_j a x_i	$(0,0.02,0.05,0.11)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_2$	El agente *k* prefiere bastante x_j a x_i	$(0.05,0.11,0.17,0.25)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_3$	El agente *k* prefiere algo x_j a x_i	$(0.17,0.25,0.34,0.44)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_4$	El agente *k* es indiferente entre x_i y x_j	$(0.34,0.44,0.56,0.66)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_5$	El agente *k* prefiere algo x_i a x_j	$(0.56,0.66,0.75,0.83)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_6$	El agente *k* prefiere bastante x_i a x_j	$(0.75,0.83,0.89,0.95)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_7$	El agente *k* prefiere mucho x_i a x_j	$(0.89,0.95,0.98,1)$
$\tilde{r}_{ij}^k = l_8$	El agente *k* prefiere totalmente x_i a x_j	$(1,1,1,1)$

Tabla 4.1. Semántica con nueve etiquetas lingüísticas

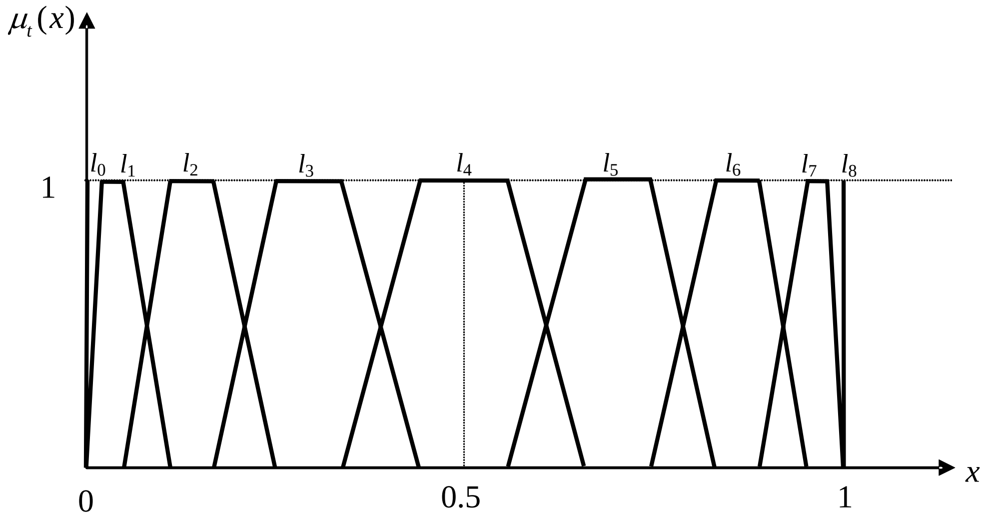


Figura 4.1. Semántica con nueve etiquetas lingüísticas

4.2 Análisis de la transitividad lingüística

El análisis de la racionalidad individual de los agentes se realiza bajo una doble vertiente. Por un lado se estudia el porcentaje de individuos que verifican cada una de las propiedades de transitividad lingüística consideradas, tanto las de sentido estricto como las de sentido no estricto, en cada uno de los conjuntos de alternativas. En este caso hablaremos de *cumplimiento absoluto* de las propiedades. Dado que este cumplimiento exige que se verifiquen las propiedades en todas las ternas posibles de alternativas, y el número de ternas varía en función del número de alternativas consideradas, en segundo lugar se estudia el *cumplimiento relativo* de las propiedades, analizando el porcentaje de ternas, sobre el total, que las verifican.

4.2.1 Cumplimiento absoluto

En la Tabla 4.2 y en la Figura 4.2 se especifican los porcentajes de cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística estricta, mientras que en la Tabla 4.3 y en la Figura 4.3 se especifica el cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística no estricta.

	$\hat{T}_0$	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_3$	$\hat{T}_0 \to \hat{T}_3$
X_4	92%	88%	72%	66%	28.26%
X_5	80%	62%	36%	28%	65.00%
X_6	62%	52%	34%	24%	61.29%
X_7	50%	36%	22%	18%	64.00%
$X_4 \to X_7$	45.65%	59.09%	69.44%	72.73%	

Tabla 4.2. Cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística estricta

	$\overline{T}_0$	$\overline{T}_1$	$\overline{T}_2$	$\overline{T}_3$	$\overline{T}_0 \to \overline{T}_3$
X_4	80%	76%	56%	44%	45.00%
X_5	66%	50%	32%	18%	72.73%
X_6	46%	38%	24%	6%	86.96%
X_7	20%	14%	4%	2%	90.00%
$X_4 \to X_7$	75.00%	81.58%	92.86%	95.45%	

Tabla 4.3. Cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística no estricta

Como es sabido (véase Observación 3.23), fijado el número de alternativas, el cumplimiento absoluto de las propiedades $\hat{T}_i$ o $\overline{T}_i$ disminuye a medida que *i* aumenta. En la últimas columnas de las Tablas 4.2 y 4.3 se muestran las disminuciones porcentuales en el cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad al pasar de $\hat{T}_0$ a $\hat{T}_3$ y de $\overline{T}_0$ a $\overline{T}_3$, con relación a los valores que toman $\hat{T}_0$ y $\overline{T}_0$, respectivamente. Se puede observar que las menores caídas en el nivel de cumplimiento absoluto se producen en los conjuntos de 4 alternativas: se pasa de un 92% a un 66% en las propiedades en sentido estricto, lo que supone una disminución del 28.26%, y de un 80% a un 44% en las de sentido no estricto, lo que supone una disminución del 45%. La mayor caída porcentual en las propiedades de sentido estricto se produce en el conjunto de 5 alternativas, al pasar de un 80% de cumplimiento de $\hat{T}_0$ a un 28% de $\hat{T}_3$, lo que supone una caída del 65%; las caídas en los conjuntos de 6 y 7 alternativas son ligeramente inferiores. Y si se consideran las propiedades en sentido no estricto se observa que cuantas más alternativas se consideren, mayor es la caída porcentual: en el conjunto de 7 alternativas se pasa de un cumplimiento del 20% en $\overline{T}_0$ a un 2% en $\overline{T}_3$, lo que supone una disminución del 90%.

Por otro lado, fijada la propiedad de transitividad lingüística, resulta evidente el hecho de que a mayor número de alternativas a comparar hay un menor cumplimiento de la propiedad. Obviamente, cuantas más alternativas se comparan es más fácil cometer inconsistencias, por lo que el resultado es a todas luces natural. Hay que tener en cuenta que el número de ternas que tienen que verificar cada una de las propiedades consideradas aumenta según lo hace el número de alternativas: 4 ternas en X_4, 10 en X_5, 20 en X_6 y 35 en X_7.

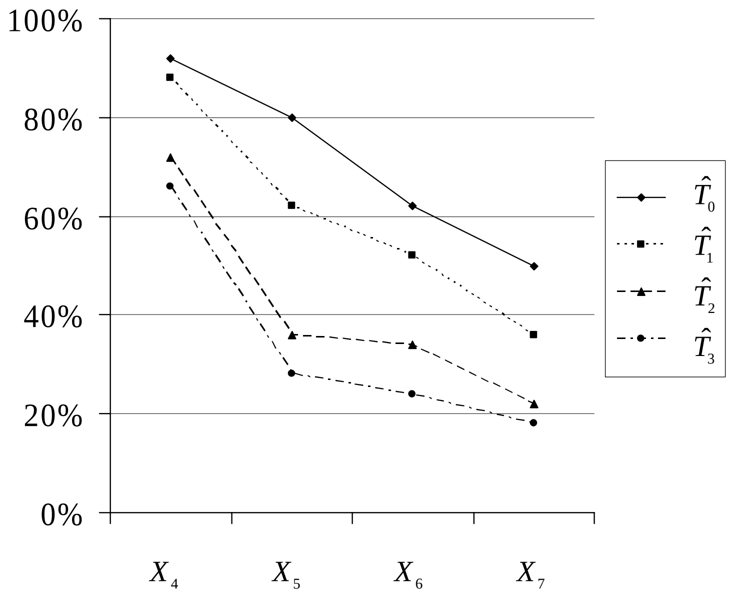


Figura 4.2. Cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística estricta

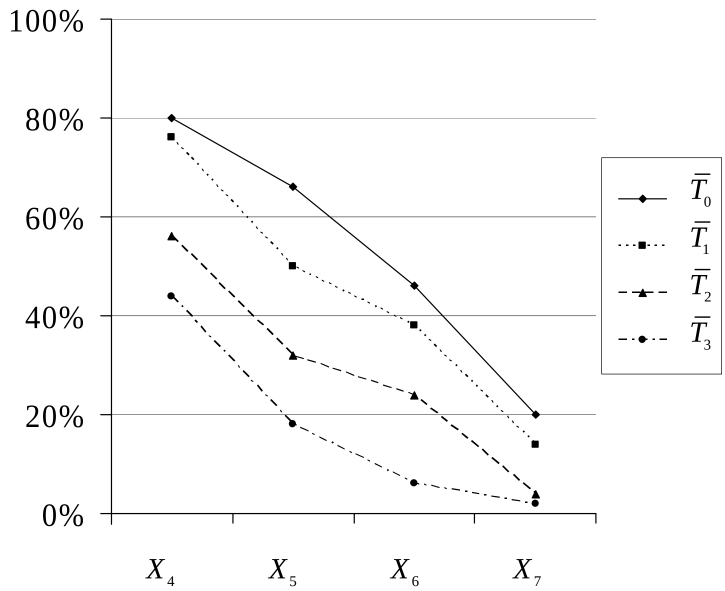


Figura 4.3. Cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística no estricta

En la última fila de las Tablas 4.2 y 4.3 se recogen las disminuciones porcentuales en el cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad al aumentar de 4 a 7 el número de alternativas, respecto del valor alcanzado en el conjunto X_4. Si se consideran las propiedades en sentido estricto, se observa que cuanto mas exigente sea la propiedad de transitividad lingüística, mayor es la disminución; por ejemplo, en la transitividad max-max débil estricta ($\hat{T}_3$) se pasa de un cumplimiento del 66% en X_4 a un 18% en X_7, lo que supone una caída del 72.73%. Lo mismo ocurre si se consideran las propiedades en sentido no estricto, ya que a mayor exigencia, mayor es la disminución: en la transitividad max-max débil no estricta ($\overline{T}_3$) se pasa de un 44% a un 2%, lo que supone una disminución del 95.45%.

Como ya se explicó en la Observación 3.21, las propiedades de transitividad lingüística no estrictas son más restrictivas que las propiedades en sentido estricto. Esto se refleja en los niveles de cumplimiento de ambos tipos de propiedades: el de las propiedades de transitividad en sentido estricto es superior en todos los casos al de las de sentido no estricto. Lo mismo ocurre al analizar la disminución en los niveles de cumplimiento de las distintas propiedades que se produce al pasar de considerar las propiedades en sentido estricto a las de sentido no estricto: las caídas siempre son mayores en las propiedades en sentido no estricto.

En la Tabla 4.4 se especifica la disminución porcentual que se produce en el cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística al pasar del caso estricto al no estricto, respecto del nivel de cumplimiento de las propiedades en sentido estricto, en cada una de las opciones posibles.

	$\hat{T}_0 \to \overline{T}_0$	$\hat{T}_1 \to \overline{T}_1$	$\hat{T}_2 \to \overline{T}_2$	$\hat{T}_3 \to \overline{T}_3$
X_4	13.04%	13.64%	22.22%	33.33%
X_5	17.50%	19.35%	11.11%	35.71%
X_6	25.81%	26.92%	29.41%	75.00%
X_7	60.00%	61.11%	81.82%	88.89%

Tabla 4.4. Disminución porcentual del cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística

Se observa cómo la caída del cumplimiento de las distintas propiedades al pasar de las estrictas a las no estrictas es mayor cuando aumenta el número de alternativas, fijada la propiedad de transitividad considerada, o cuando se considera una propiedad de transitividad más fuerte, si lo que fijamos es el número de alternativas. La única excepción a la anterior afirmación se produce en el conjunto de 5 alternativas cuando se comparan los resultados de $\hat{T}_2$ y $\overline{T}_2$ que, anómalamente, es la que tiene una menor diferencia. Esta caída es extrema en el conjunto de 7 alternativas, con un valor mínimo del 60% al comparar $\hat{T}_0$ y $\overline{T}_0$ (se pasa de un cumplimiento del 50% a otro del 20%), y un máximo que roza el 90% en la transitividad max-max débil: de un 18% de cumplimiento de $\hat{T}_3$ se pasa a un 2% de $\overline{T}_3$. Como cabía esperar, es esta última propiedad de transitividad la que experimenta unas mayores variaciones, ya que la mínima diferencia que se produce en ella es de un 33.33% en el conjunto de 4 alternativas.

A la vista de los datos expuestos, podemos concluir que el cumplimiento absoluto de las propiedades de transitividad lingüística viene condicionado por varios factores, entre los que destacamos los siguientes:

- A medida que aumenta el número de alternativas consideradas se producen dos efectos: hay menos individuos que cumplen las propiedades y la disminución que se produce en el número de individuos que las verifican cuando aumenta el nivel de exigencia de las propiedades es mayor.

- Tanto si se consideran las propiedades en sentido estricto como las de sentido no estricto, según se consideren propiedades más fuertes ($\hat{T}_i$ o $\overline{T}_i$ con valores más altos de i) se producen unos efectos similares a los del caso anterior: menores niveles de cumplimiento y las disminuciones que se producen en ellos son mayores cuando aumenta el número de alternativas.

- Como cabía esperar, los niveles de cumplimiento absoluto son superiores en las propiedades en sentido estricto que en las propiedades en sentido no estricto, mientras que la disminución que se produce en ese cumplimiento, al aumentar el número de alternativas consideradas y/o al considerar propiedades más fuertes, es mayor en las propiedades en sentido no estricto. La mayor exigencia de las propiedades en sentido no estricto se hace más patente cuando se consideran $\hat{T}_i$ o $\overline{T}_i$ para valores mayores de i.

4.2.2 Cumplimiento relativo

Dado que el número de ternas que tienen que verificar las distintas propiedades de transitividad lingüística en cada uno de los conjuntos de alternativas aumenta al hacerlo el número de alternativas, es deseable tener una medida relativa de su cumplimiento. Dicha medida la obtenemos a través del porcentaje de ternas, respecto del número total de ternas de cada conjunto, en donde se satisface cada propiedad. En las Tablas 4.5 y 4.6 se especifican los porcentajes de cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad lingüística estricta y no estricta, respectivamente. Los mismos resultados se muestran de forma gráfica en las Figuras 4.4 y 4.5.

	$\hat{T}_0$	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_3$	$\hat{T}_0 \to \hat{T}_3$
X_4	98.00%	97.00%	91.50%	88.50%	9.69%
X_5	97.20%	94.20%	88.00%	84.80%	12.76%
X_6	96.30%	95.40%	90.60%	86.50%	10.18%
X_7	96.91%	95.37%	90.11%	87.09%	10.14%
$X_4 \to X_7$	1.11%	1.68%	1.51%	1.60%	

Tabla 4.5. Cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad lingüística estricta

	$\overline{T}_0$	$\overline{T}_1$	$\overline{T}_2$	$\overline{T}_3$	$\overline{T}_0 \to \overline{T}_3$
X_4	95.00%	94.00%	86.00%	75.00%	21.05%
X_5	93.80%	90.80%	83.20%	72.80%	22.39%
X_6	93.40%	92.50%	86.70%	70.00%	25.05%
X_7	90.86%	89.31%	83.71%	70.86%	22.01%
$X_4 \to X_7$	4.36%	4.98%	2.66%	5.52%	

Tabla 4.6. Cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad lingüística no estricta

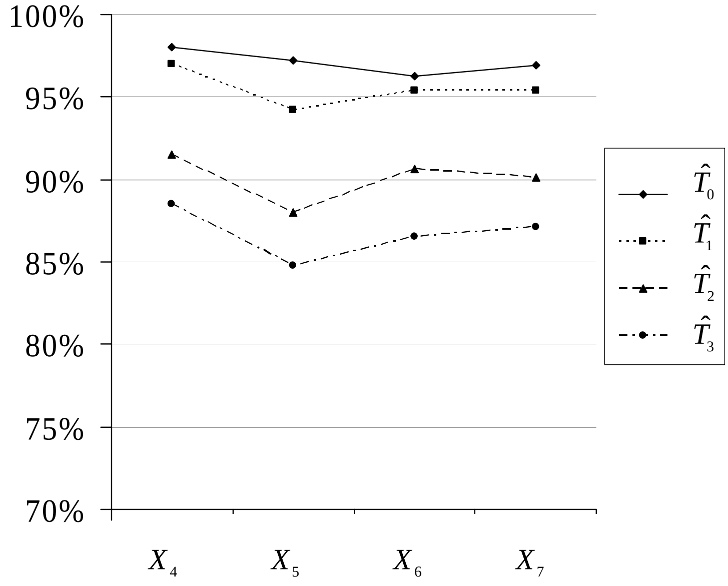


Figura 4.4. Cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad lingüística estricta

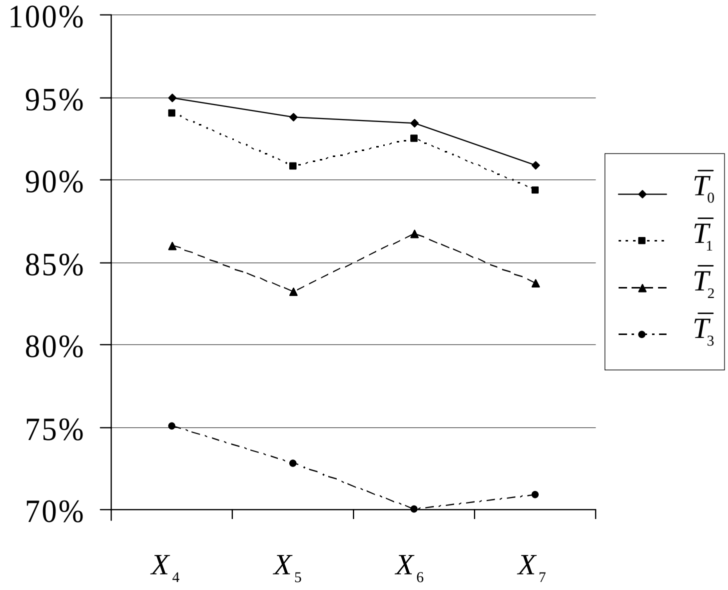


Figura 4.5. Cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad lingüística no estricta

Algunas de las regularidades que se producen en el caso absoluto se vuelven a dar en el caso relativo. Así, fijado el número de alternativas, según se vayan considerando propiedades de transitividad más fuertes, tanto si son en sentido estricto como si lo son en sentido no estricto, menor es su cumplimiento relativo. Además, el cumplimiento relativo de las propiedades en sentido estricto también es superior al obtenido en las propiedades en sentido no estricto.

Sin embargo, existen diferencias con los resultados obtenidos en 4.2.1. De éstas, la que resulta más evidente se aprecia al comparar los porcentajes de cumplimiento: son claramente superiores los que se obtienen en el caso relativo respecto de los del caso absoluto. Este hecho resulta ciertamente previsible, como se pone de manifiesto a continuación. Supongamos, por ejemplo, que los 50 agentes están considerando el conjunto de 5 alternativas. De este conjunto se pueden seleccionar 10 ternas distintas, lo que hace un total de 500 ternas posibles. Pues bien, una sola inconsistencia cometida por un individuo al encarar una terna de alternativas lleva aparejada una caída de $\frac{1}{50} = 2\%$ en el cumplimiento absoluto. Ahora bien, para que se diera esa misma caída en el cumplimiento relativo se tendrían que cometer 10 inconsistencias ($\frac{10}{500} = 2\%$).

Otra diferencia se observa al analizar la variación en el cumplimiento relativo, una vez fijada la propiedad de transitividad lingüística: aunque los mayores porcentajes de cumplimiento relativo se siguen produciendo en los conjuntos de 4 alternativas, no se puede afirmar que dicho cumplimiento disminuya a medida que aumenten las alternativas. Hay numerosas situaciones que contradicen esta afirmación: los porcentajes de cumplimiento relativo en el conjunto de 5 alternativas son inferiores en 5 casos de los 8 posibles a los que se obtienen en el conjunto de 6 alternativas y en 4 casos de 8 a los del conjunto de 7 alternativas; y los que se obtienen en el conjunto de 6 alternativas son inferiores en 4 casos de 8 a los que se obtienen en el conjunto de 7 alternativas.

Al analizar la disminución porcentual en el cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad al pasar de $\hat{T}_0$ a $\hat{T}_3$ y de $\overline{T}_0$ a $\overline{T}_3$, respecto de los valores que toman $\hat{T}_0$ y $\overline{T}_0$ (última fila de la Tabla 4.5 y de la Tabla 4.6 respectivamente), o la disminución porcentual al pasar de X_4 a X_7, respecto de los valores que se toma en el conjunto X_4 (última columna), se observa cómo la disminución sigue siendo superior en las propiedades en sentido no estricto y que las menores disminuciones se producen al considerar el conjunto de 4 alternativas, en el primer caso, o las propiedades $\hat{T}_0$ o $\overline{T}_0$, según proceda, en el segundo. Sin embargo también aquí existen diferencias con el caso absoluto. Con las propiedades en sentido estricto, la mayor diferencia al pasar de $\hat{T}_0$ a $\hat{T}_3$ se sigue produciendo en el conjunto de 5 alternativas, pero al pasar de X_4 a X_7 ahora la mayor disminución se produce en la transitividad max-min débil, $\hat{T}_1$. Con las propiedades en sentido no estricto ocurre lo contrario: al pasar de X_4 a X_7, la mayor disminución se produce en la transitividad max-max débil, $\overline{T}_3$, al igual que en el caso absoluto, pero ahora al pasar de $\overline{T}_0$ a $\overline{T}_3$, la mayor disminución se produce en el conjunto de 6 alternativas (en el caso absoluto se produce en el de 7).

En la Tabla 4.7 se especifica la disminución porcentual en el cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad al pasar del caso estricto al no estricto, respecto del nivel de cumplimiento de las propiedades estrictas, en cada una de las opciones posibles.

	$\hat{T}_0 \to \overline{T}_0$	$\hat{T}_1 \to \overline{T}_1$	$\hat{T}_2 \to \overline{T}_2$	$\hat{T}_3 \to \overline{T}_3$
X_4	3.06%	3.09%	6.01%	15.25%
X_5	3.50%	3.61%	5.45%	14.15%
X_6	3.01%	3.04%	4.30%	19.08%
X_7	6.25%	6.35%	7.10%	18.64%

Tabla 4.7. Disminución porcentual del cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad lingüística

Si fijamos el número de alternativas, tanto en el caso absoluto como en el relativo se observa que la caída en el cumplimiento de las distintas propiedades, al pasar de las de sentido estricto a las de sentido no estricto, es mayor cuanto más fuerte sea la propiedad considerada. Sin embargo, fijada la propiedad de transitividad, cuando aumenta el número de alternativas, la disminución del cumplimiento relativo aumenta, pero con varias excepciones: las mínimas diferencia al comparar los resultados de $\hat{T}_0$ con $\overline{T}_0$, de $\hat{T}_1$ con $\overline{T}_1$ y de $\hat{T}_2$ con $\overline{T}_2$ se producen en el conjunto de 6 alternativas, mientras que al comparar $\hat{T}_3$ con $\overline{T}_3$ el mínimo valor se produce en el conjunto de 5 alternativas, y el valor del conjunto X_7 es menor que el del conjunto X_6. Hay que destacar que al comparar $\hat{T}_0$ con $\overline{T}_0$ se producen prácticamente las mismas diferencias que al comparar $\hat{T}_1$ con $\overline{T}_1$, ligeramente inferiores a las que se producen al comparar $\hat{T}_2$ con $\overline{T}_2$, mientras que las mayores diferencias se producen al comparar $\hat{T}_3$ con $\overline{T}_3$.

Por otra parte, al comparar el cumplimiento absoluto con el relativo, se observa que porcentajes de cumplimiento relativo diferentes proporcionan el mismo número de individuos transitivos. Por ejemplo, si se considera $\hat{T}_0$ en el conjunto de 6 alternativas, esta propiedad la verifican el 62% de los individuos y el 96.30% de las ternas, mientras que si se considera $\hat{T}_1$ en el conjunto de 5 alternativas, entonces lo hacen el mismo número de individuos pero con un porcentaje de ternas del 94.20%. Estas situaciones son debidas a que en el segundo caso los individuos que vulneran la transitividad correspondiente lo hacen en un mayor porcentaje de ternas.

Del análisis realizado sobre el cumplimiento relativo de las propiedades de transitividad podemos deducir las siguientes conclusiones:

- Los porcentajes de ternas que cumplen las propiedades son muy superiores al porcentaje de individuos que las verifican.

- El número de alternativas influye de una manera menos clara que en el caso absoluto en el cumplimiento relativo de las propiedades, aunque en general se puede afirmar que disminuye el porcentaje de ternas que verifican las propiedades cuando aumentan las alternativas.

- A medida que aumenta el nivel de exigencia de las propiedades, bien porque se consideren propiedades $\hat{T}_i$ o $\overline{T}_i$ con *i* mayores, bien porque se consideren propiedades en sentido no estricto, disminuye el número de ternas que las verifican.

- Las propiedades en sentido no estricto tienen mayores disminuciones porcentuales en el cumplimiento relativo que las de sentido estricto al aumentar la exigencia de las mismas.

4.3 Estudio de la representatividad

A continuación se cuantifica el cumplimiento de la representatividad de los contadores lingüísticos individuales considerados en el capítulo anterior, prestándose especial atención a la relación entre dicho cumplimiento y el de los distintos tipos de transitividad lingüística ya analizados. A este respecto, en lo que sigue, siempre se tratarán en paralelo los contadores en sentido restringido y amplio en conexión con las transitividades lingüísticas estrictas y no estrictas, respectivamente.

En primer lugar hemos analizado la representatividad con independencia de los supuestos de racionalidad de los agentes. Como se observa en la Tabla 4.8, cuyos datos están representados en la Figura 4.6, el análisis empírico muestra que a medida que aumenta el número de alternativas, disminuye el porcentaje de individuos con contadores representativos. La razón de ello, como ya comentamos al estudiar el cumplimiento de las propiedades de transitividad, es que el número de inconsistencias cometidas se incrementa cuanto mayor es el número de alternativas a considerar por los agentes, y tales inconsistencias repercuten en la idónea asignación de las calificaciones.

	Restringido	Amplio
X_4	92%	94%
X_5	86%	90%
X_6	70%	82%
X_7	62%	68%

Tabla 4.8. Porcentaje de individuos cuyos contadores verifican la propiedad de representatividad

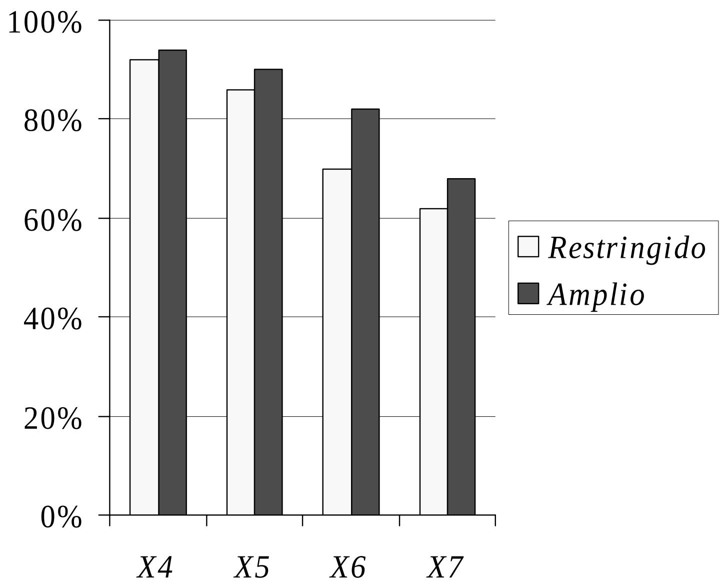


Figura 4.6. Porcentaje de individuos cuyos contadores verifican la propiedad de representatividad

Además, el análisis ha revelado que se da un mayor grado de cumplimiento de representatividad en los contadores individuales cuando éstos son en sentido amplio que en los definidos en sentido restringido, cualquiera que sea el número de alternativas considerado. Como tratamos de justificar a continuación, este hecho es, hasta cierto punto, inesperado. En primer lugar, y tal como se ha señalado en 4.2, el porcentaje de individuos $\overline{T}_3$ transitivos es menor que el de los individuos $\hat{T}_3$ transitivos. En segundo lugar, como se demuestra en las Proposiciones 3.9 y 3.10, estas condiciones implican la representatividad de los contadores en sentidos amplio y restringido, respectivamente. Por tanto sería razonable esperar que los porcentajes de cumplimiento de representatividad en los dos casos considerados (amplio y restringido) mantuviesen unos valores correlativos con los de las correspondientes transitividades (no estricta y estricta), pero tal correlación no se produce.

Para tratar de explicar la regularidad evidenciada en la Tabla 4.8, se podría conjeturar que todo individuo cuyo contador en sentido restringido asigne las puntuaciones de modo representativo con sus preferencias, también tendrá un contador individual en sentido amplio con la misma propiedad, pero esto es falso: en nuestro experimento hemos encontrado individuos cuyos contadores individuales en sentido restringido son representativos y no lo son los correspondientes en sentido amplio, y viceversa. En cualquier caso, se observa que los valores de representatividad obtenidos, tanto en el caso amplio como en el restringido, son bastante altos y, fijado el número de alternativas, similares entre sí (la diferencia a favor del caso amplio nunca supera el 12%).

Como ya se ha señalado, el cumplimiento de las propiedades de transitividad max-max débil por parte de un individuo es suficiente para que sus contadores verifiquen la propiedad de representatividad. El hecho de que tales condiciones no son necesarias se pone de manifiesto al observar los porcentajes de cumplimiento de la propiedad de representatividad en los dos casos siguientes.

- Cuando no se verifican las propiedades de transitividad estricta al considerar los contadores en sentido restringido (véase Tabla 4.9).

- Cuando se incumplen las propiedades de transitividad no estricta al considerar los contadores en sentido amplio (véase Tabla 4.10).

Los porcentajes están referidos tanto sobre el total de individuos, representado en las Figuras 4.7 y 4.9, como sobre el número de individuos que incumplen la respectiva propiedad de transitividad, representado en las Figuras 4.8 y 4.10.

Hacemos notar que la expresión “no transitivos” que aparece en las tablas y figuras siguientes se refiere al tipo de transitividad $\hat{T}_i$ o $\overline{T}_i$, con $i = 0,\ldots,3$, explicitado por la propia tabla o figura en cada caso. Así, por ejemplo, el dato 33.33% que aparece en la Tabla 4.9 indica que, del total de individuos que no verifican la propiedad de transitividad $\hat{T}_1$, para la tercera parte su contador individual en sentido restringido es representativo.

	Individuos cuyos contadores en sentido restringido son representativos e incumplen…							
	$\hat{T}_0$	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_3$	$\hat{T}_0$	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_3$
X_4	0%	4%	20%	26%	0.00%	33.33%	71.43%	76.47%
X_5	6%	24%	50%	58%	30.00%	63.16%	78.13%	80.56%
X_6	8%	18%	36%	46%	21.05%	37.50%	54.55%	60.53%
X_7	12%	26%	40%	44%	24.00%	40.63%	51.28%	53.66%
	Sobre el total de individuos				Sobre individuos no transitivos			

Tabla 4.9. Porcentajes de individuos cuyos contadores en sentido restringido son representativos, y que incumplen la propiedad de transitividad estricta

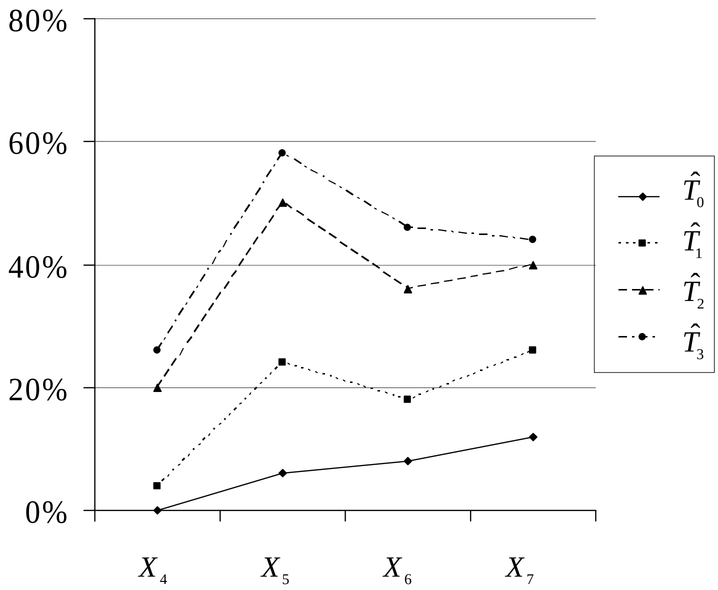


Figura 4.7. Porcentajes de individuos, sobre el total, cuyos contadores en sentido restringido son representativos, y que incumplen la propiedad de transitividad estricta

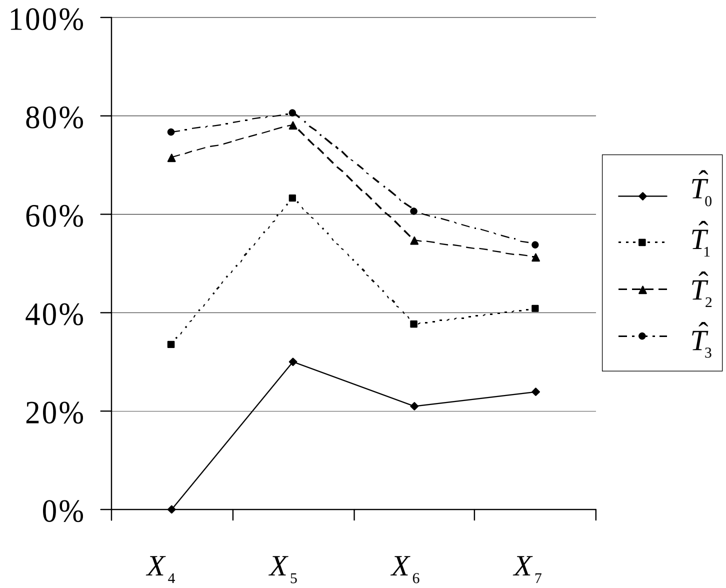


Figura 4.8. Porcentajes de individuos, sobre no transitivos, cuyos contadores en sentido restringido son representativos, y que incumplen la propiedad de transitividad estricta

En ambos casos (incumplimiento de la transitividad estricta – no estricta, contadores en sentido restringido – amplio, respectivamente), y tanto si se consideran porcentajes sobre el total de individuos como si estos se determinan sobre el número de individuos no transitivos, se observa que a medida que se consideran propiedades de transitividad más fuertes, aumenta el porcentaje de individuos con contadores representativos pero que incumplen dichas propiedades. Esto está en consonancia con el hecho, ya apuntado en la sección 4.2, de que el cumplimiento de las propiedades de transitividad es menor a medida que aumenta su nivel de exigencia.

Si fijamos la propiedad de transitividad y analizamos la variación que sufren los anteriores porcentajes cuando aumenta el número de alternativas, observamos que los valores más bajos se alcanzan siempre en el conjunto X_4. No obstante, las conclusiones que en esta situación podemos obtener en los dos casos, estricto y no estricto, son distintas.

- Al estudiar los porcentajes de individuos que incumplen las propiedades de transitividad estricta y con contadores en sentido restringido representativos, no se observa ninguna regularidad. En los porcentajes sobre el total de individuos, el valor máximo se alcanza en dos casos en el conjunto X_7 y en otros dos en el conjunto X_5, mientras que en los porcentajes sobre los individuos no transitivos el valor máximo siempre se alcanza en el conjunto X_5.
- Al estudiar los porcentajes de individuos que no verifican las propiedades de transitividad no estricta y con contadores en sentido amplio representativos, se observan unos valores significativamente más altos que en el caso anterior. Por otro lado, al aumentar el número de alternativas los porcentajes sobre el total de individuos se incrementan excepto al pasar de 6 a 7 alternativas en la propiedad $\overline{T}_3$ y los porcentajes sobre los individuos no transitivos disminuyen.

	Individuos cuyos contadores en sentido amplio son representativos e incumplen…							
	$\overline{T}_0$	$\overline{T}_1$	$\overline{T}_2$	$\overline{T}_3$	$\overline{T}_0$	$\overline{T}_1$	$\overline{T}_2$	$\overline{T}_3$
X_4	16%	20%	38%	50%	80.00%	83.33%	86.36%	89.29%
X_5	24%	40%	58%	72%	70.59%	80.00%	85.29%	87.80%
X_6	38%	44%	58%	76%	70.37%	70.97%	76.32%	80.85%
X_7	48%	54%	64%	66%	60.00%	62.79%	66.67%	67.35%
	Sobre el total de individuos				Sobre individuos no transitivos			

Tabla 4.10. Porcentajes de individuos cuyos contadores en sentido amplio son representativos, y que incumplen la propiedad de transitividad no estricta

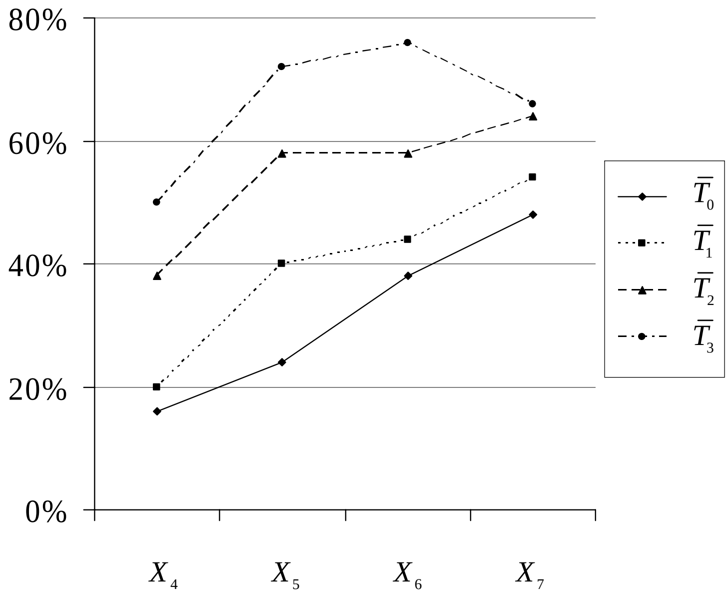


Figura 4.9. Porcentajes de individuos, sobre el total, cuyos contadores en sentido amplio son representativos, y que incumplen la propiedad de transitividad no estricta

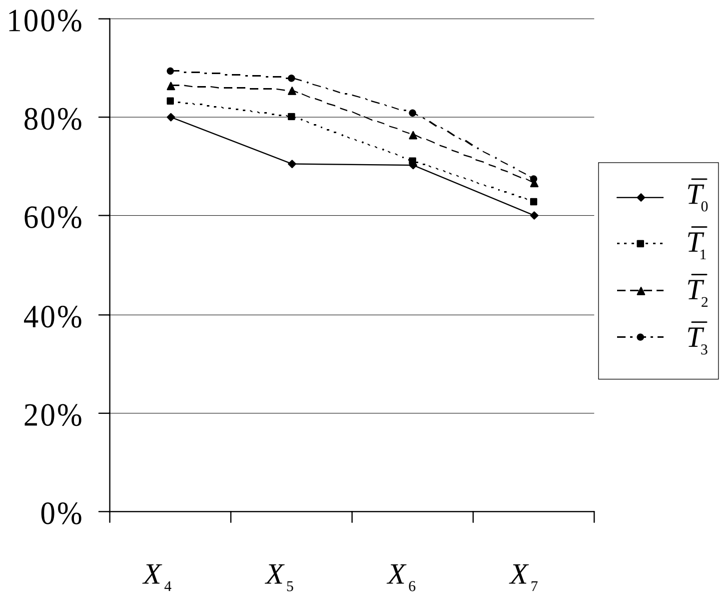


Figura 4.10. Porcentajes de individuos, sobre no transitivos, cuyos contadores en sentido amplio son representativos, y que incumplen la propiedad de transitividad no estricta

En el análisis de la representatividad de los contadores individuales y fijada una de las propiedades de transitividad lingüística consideradas, cabrían, en principio, cuatro posibilidades relativas a cualquiera de los individuos:

1. Que tenga un contador representativo y sea transitivo (R-T).
2. Que tenga un contador representativo y no sea transitivo (R-nT).
3. Que tenga un contador no representativo y sea transitivo (nR-T).
4. Que tenga un contador no representativo y no sea transitivo (nR-nT).

Como ya se ha comentado repetidamente, la transitividad lingüística max-max débil implica la representatividad, lo que hace que el caso 3 de la lista anterior sea imposible bajo dicho supuesto, pero si se relaja la condición de transitividad lingüística max-max débil y teniendo en cuenta la Observación 3.26, se podrían dar cualquiera de los casos anteriores.

Ahora bien, para los contadores en sentido restringido, a partir de los datos que aparecen en la Tabla 4.2 ((R-T) + (nR-T)), en la Tabla 4.8 ((R-T) + (R-nT)) y en la Tabla 4.9 (R-nT), se puede asegurar que la presencia de individuos adscritos al caso 3 de la lista anterior es, de hecho, nula para todas las transitividades consideradas. Sin embargo, para los contadores en sentido amplio sí se puede asegurar la existencia de individuos adscritos a tal caso a partir de los datos que aparecen en la Tablas 4.3 ((R-T) + (nR-T)), la Tabla 4.8 ((R-T) + (R-nT)) y la Tabla 4.10 (R-nT): concretamente, un 2% del total de los individuos resultan ser del tipo (nR-T), tanto al considerarse los conjuntos de 4 alternativas (para $\overline{T}_0$ y $\overline{T}_1$), como en caso de 6 alternativas (para $\overline{T}_0$). Excepto en estas tres ocasiones, los contadores de los individuos que verifican cualquiera de las propiedades de transitividad, no sólo la max-max, han resultado ser representativos. En la Tabla 4.11 y en la Figura 4.11 se detallan los datos relativos a las cuatro categorías de la lista anterior exclusivamente para el primero de tales conjuntos.

	R-T	R-nT	nR-T	nR-nT
$\overline{T}_0$	78%	16%	2%	4%
$\overline{T}_1$	74%	20%	2%	4%
$\overline{T}_2$	56%	38%	0%	6%
$\overline{T}_3$	44%	50%	0%	6%

Tabla 4.11. Distribución de los individuos según el cumplimiento de las propiedades de representatividad y transitividad en el conjunto de 4 alternativas

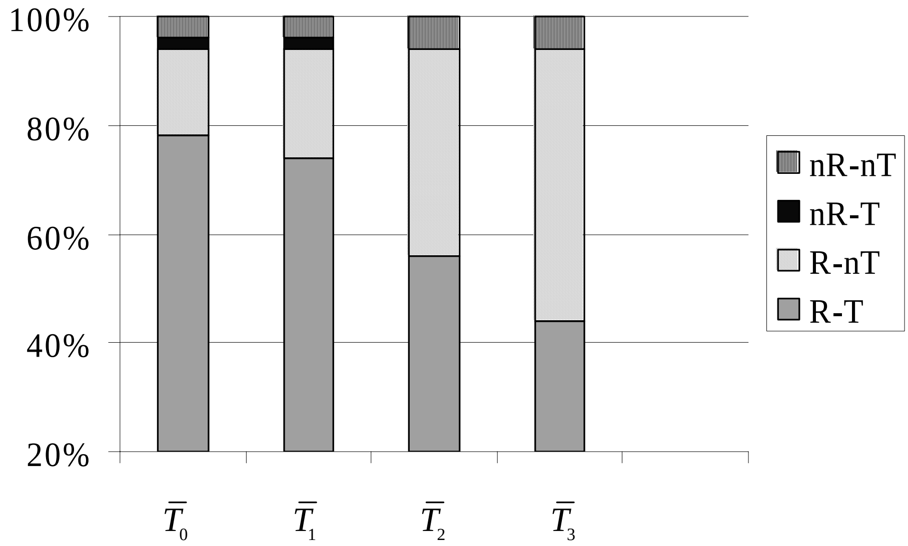


Figura 4.11. Distribución de los individuos según el cumplimiento de las propiedades de representatividad y transitividad en el conjunto de 4 alternativas

A la vista de los resultados obtenidos se puede extraer como conclusión que, si bien desde un punto de vista teórico sólo la transitividad max-max débil garantiza, de entre las estudiadas, el cumplimiento de la representatividad, en la práctica se observa cómo se obtiene un alto grado de cumplimiento aún cuando esta hipótesis de coherencia sea relajada incluso al caso de la transitividad de la preferencia ordinaria inducida.

4.4 Comparación de resultados según los contadores empleados

Como ya hemos señalado, los sentidos amplio y restringido de los contadores de Borda considerados en el trabajo empírico se distinguen en el umbral a partir del cual se tienen en consideración las opiniones de los agentes sobre las parejas de alternativas: básicamente, en el primer caso se ponderan todas las opiniones, mientras que en el segundo, sólo las favorables (mayores que las dadas por la etiqueta central).

Como vimos en el capítulo anterior, tal restricción sobre la base informacional a partir de la cual se opera, repercute negativamente en las propiedades del contador que utilice dichos *inputs* (algo parecido a lo que ocurre con el método de pluralidad, que trunca toda la información relativa a las alternativas a las que no se les otorga el voto, frente a la regla de Borda clásica, que las tiene todas en cuenta). En contrapartida, las propiedades de transitividad max-max débil que garantizan una asignación idónea (representativa) de las calificaciones otorgadas son de más fácil cumplimiento para los agentes en el caso restringido (condiciones estrictas), que en el amplio (condiciones no estrictas), como se ha señalado en 4.2.

Ahora bien, ¿existe en la práctica una diferencia radical entre las reglas de Borda lingüísticas en sentido estricto y no estricto consideradas? A la vista de la Tabla 4.12, en la que se muestran los resultados totales obtenidos por las reglas de Borda consideradas en los sentidos indicados para los 4 conjuntos de alternativas posibles estudiados, se observa que las ordenaciones colectivas inducidas por dichas reglas son idénticas en los conjuntos de 4 y 7 alternativas, mientras que difieren en los dos primeros puestos, que aparecen permutados, al ser considerados los conjuntos de 5 y 6 alternativas. Es decir, estos dos casos de conjuntos de alternativas de cardinal intermedio son aquéllos en los que la regla de votación empleada hubiera sido determinante en la elección colectiva efectuada, aunque hacemos notar que un análisis más pormenorizado de los resultados (no incluidos en la Tabla 4.12), muestra que, en ambos casos, las diferencias porcentuales entre los valores de Delgado – Vila – Voxman (definidos en 3.3.3) de las calificaciones obtenidas en el caso restringido por la primera y la segunda alternativas, que estaban en torno a un 3%, se han invertido en el caso amplio, resultando ahora una diferencia muy tenue, del orden del 0.05%.

	Ordenación de Borda	Condorcet		
		Ganador	Perdedor	
X_4	C E G A	C	A	Sentido restringido
X_5	B C E G A	C	A	
X_6	B C G E D A	B	A	
X_7	C B G E A D F	C	F	
X_4	C E G A	C	A	Sentido amplio
X_5	C B E G A	C	A	
X_6	C B G E D A	B	A	
X_7	C B G E A D F	C	F	

Tabla 4.12. Ordenación de Borda. Ganador y perdedor de Condorcet.
[A: China; B: Cuba; C: Egipto; D: Moscú; E: Praga-Budapest; F: Estambul; G: Italia]

4.5 Confrontación Borda – Condorcet

Desde el Capítulo 1 ya ha sido señalada la inconsistencia de Condorcet de la regla de Borda, es decir, el hecho de que ésta puede dar la victoria a una alternativa que incumpla el principio de Condorcet. Pero también se ha llamado la atención sobre el importante resultado de que, de entre todas las reglas de puntuación ("scoring rules"), la regla de Borda es la menos susceptible de vulnerar tal principio (cf. 2.5 para más detalles y las correspondientes referencias). Aunque nuestro contexto decisional no es el mismo que al que hace referencia dicho resultado, pues los dos tipos de regla de Borda considerados para agregar los datos del experimento son de tipo lingüístico, nos ha parecido interesante analizar, para cada uno de los conjuntos de alternativas considerados, si las alternativas ganadoras y perdedoras mediante tales métodos lingüísticos coinciden o no con las correspondientes ganadoras y perdedoras de Condorcet, respectivamente, caso de existir estas últimas.

En la Tabla 4.12 se muestran las ordenaciones colectivas generadas por las reglas de Borda consideradas, y paralelamente las alternativas ganadoras y perdedoras de Condorcet. Se puede observar que los resultados obtenidos mediante las reglas de Borda lingüísticas tratadas presentan un buen grado de cumplimiento del principio de Condorcet. Sin embargo no es pleno, ya que se constata que, existiendo en todos los casos estudiados alternativas ganadoras de Condorcet, existe discrepancia entre éstas y las que obtienen la victoria mediante los correspondientes métodos lingüísticos de Borda en el caso en sentido amplio para X_6 y en el caso en sentido restringido para X_5. Hacemos notar que, en las dos situaciones en las que tales discrepancias se producen, la alternativa ganadora de Condorcet coincide con la que recibe la segunda mayor calificación Borda.

En cuanto a las alternativas perdedoras, ha resultado haber total coincidencia entre los enfoques de Borda y Condorcet lingüísticos. Cabe señalar, para concluir, que por el propio diseño del espectro de etiquetas considerado y teniendo en cuenta las Proposiciones 3.11 y 3.12, es imposible que, si se opera con el contador de Borda lingüístico en sentido amplio, la alternativa ganadora de Borda hubiera resultado perdedora de Condorcet, y alternativamente, que la alternativa perdedora de Borda hubiera resultado ganadora de Condorcet.

4.6 Consideraciones finales

Como es bien conocido, el cerebro humano dista de ser un mecanismo perfecto. Así, es frecuente que cuando un individuo ha de decidirse entre una multiplicidad de alternativas, aparezcan inconsistencias, como ha sido puesto de manifiesto en el estudio de la transitividad de los agentes efectuado en nuestro estudio empírico.

Tal tipo de análisis tiene un interés intrínseco pero, en nuestro caso, no constituye un fin en sí mismo, sino un medio para estudiar cómo repercuten los supuestos de coherencia de los agentes en la idoneidad de las calificaciones

Borda individuales que se derivan de las opiniones emitidas. Obviamente, a la vista del desarrollo teórico del Capítulo 3, cabe esperar que cuanto más racionales sean los agentes, tanto más idónea será la asignación de tales calificaciones. Ahora bien, en la práctica, hemos constatado que el mínimo grado de racionalidad de entre los considerados en nuestro trabajo (a saber, la transitividad de la preferencia ordinaria inducida) ya conlleva unos niveles muy altos de representatividad de los contadores individuales, siendo esta propiedad un *desideratum* en la asignación de las calificaciones de Borda individuales. Y de hecho, aún cuando los agentes sean incoherentes en algún grado, no por ello debe ser desestimada la información proporcionada por la agregación de sus opiniones mediante el tratamiento de Borda lingüístico que hemos desarrollado: en tal caso, la información reportada aún sería relevante, si bien tendría que ser interpretada con necesaria cautela.

Así mismo, el estudio empírico realizado ha revelado que, si bien se produce alguna discordancia entre los resultados obtenidos según se implemente la regla de Borda en sentido amplio o restringido, se puede hablar con más razón de sintonía entre ambos casos. Además, salvando sus diferencias de raíz, ha quedado de manifiesto la convergencia casi total, en la práctica, entre los enfoques de Borda y Condorcet.

Bibliografía del Capítulo 4

García Lapresta, J.L. – Meneses, L.C. (2003): “An empirical analysis of transitivity with four scaled preference judgement modalities”. *Review of Economic Design* 8, pp. 335 – 346.

García Lapresta, J.L. – Meneses, L.C. (en prensa): “Individual valued preferences and their aggregation: Consistency analysis in a real case”. *Fuzzy Sets and Systems*.

May, K.O. (1954): “Intransitivity, utility, and the aggregation of preference patterns”. *Econometrica* 22, pp. 1 – 13.

Switalski, Z. (1999): “Rationality of fuzzy reciprocal preference relations”. *Fuzzy Sets and Systems* 107, pp. 187 – 190.

Switalski, Z. (2001): “Transitivity of fuzzy preference relations – an empirical study”. *Fuzzy Sets and Systems* 118, pp. 503 – 508.

Switalski, Z. (2003): “General transitivity conditions for fuzzy reciprocal preference matrices”. *Fuzzy Sets and Systems* 137, pp. 85 – 100.

Lista de símbolos

En esta lista de símbolos se sigue el orden impuesto por el propio desarrollo de la memoria, salvo cuando un mismo símbolo se haya utilizado simultáneamente en más de un contexto (discreto, gradual o lingüístico). En tal caso aparecerán reunidos todos los posibles significados del símbolo común.

- $\left(\overline{r}_{ij}\right)$ matriz agregada en sentido amplio (contexto gradual) .... 3.1.7 (p. 156)

  $\left(\overline{r}_{ij}\right)$ matriz agregada en sentido amplio (contexto lingüístico)........... 3.3.5 (p. 204)

- $\oplus$ suma condicionada de valores mayores que 0.5............................. 3.1.7 (p. 156)

  $\oplus$ suma condicionada de niveles mayores que $l_{s/2}$ .... 3.3.5 (p. 205)

- $\left(\hat{r}_{ij}\right)$ matriz agregada en sentido restringido (contexto gradual) .... 3.1.7 (p. 156)

  $\left(\hat{r}_{ij}\right)$ matriz agregada en sentido restringido (contexto ling.).............. 3.3.5 (p. 205)

- $\overline{\mathrm{mg}}(i,j)$ margen en sentido amplio de la alternativa x_i respecto de la x_j .... 3.1.7 (p. 157)

- $\widehat{\mathrm{mg}}(i,j)$ margen en sentido restringido de la alternativa x_i respecto de la x_j .... 3.1.7 (p. 157)

- $\overline{r}_k^{\nu}$ $(\nu = 1,\ldots,4)$ contadores individuales de Borda graduales en sentido amplio .... 3.2.1 (p. 158)

- $\hat{r}_k^{\nu}$ $(\nu = 1,\ldots,4)$ contadores individuales de Borda graduales en sentido restringido .... 3.2.2 (p. 164)

- $\overline{\boldsymbol{r}}^{\nu}$ $(\nu = 1,\ldots,4)$ contadores colectivos de Borda graduales en sentido amplio.. 3.2.1 (p. 162)

- $\hat{\boldsymbol{r}}^{\nu}$ $(\nu = 1,\ldots,4)$ contadores colectivos de Borda graduales en sentido restringido... 3.2.2 (p. 167)

- $P_{\nu}^{\overline{B}}$ $(\nu = 1,\ldots,4)$ relaciones de preferencia colectiva dadas por las reglas de Borda graduales en sentido amplio .... 3.2.1 (p. 162)

- $I_{\nu}^{\overline{B}}$ $(\nu = 1,\ldots,4)$ relaciones de indiferencia asociadas a $P_{\nu}^{\overline{B}}$ .... 3.2.1 (p. 163)