



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Métodos polinómicos en la Geometría de Incidencia

Autor: Francisco Javier Merino Herrero

Tutor: Félix Delgado de la Mata

2023

Índice general

1. Introducción	3
2. La Geometría de Incidencia	5
2.1. Notación	5
2.2. Primeros ejemplos	6
2.3. Incidencias	7
2.4. El teorema de Szemerédi-Trotter para puntos r -ricos	10
2.4.1. La configuración de red	10
2.5. Números de cruzamiento	15
2.5.1. La fórmula de Euler	15
2.5.2. Números de cruzamiento	17
2.6. Demostración del Teorema de Szemerédi-Trotter para puntos r -ricos	22
2.7. Demostración del Teorema de Szemerédi-Trotter para incidencias	24
2.8. El problema de Kakeya en un cuerpo finito	27
2.9. Preguntas abiertas	31
2.9.1. Problema de las distancias distintas	31
2.9.2. Problema de las distancias unitarias	32
2.9.3. Otros problemas no resueltos	32
3. El método polinómico	35
3.1. Notación	35
3.2. El método polinómico	36
3.2.1. Lemas previos	36
3.3. El problema de Kakeya en un cuerpo finito	38
3.4. El Teorema de Szemerédi-Trotter	40
3.4.1. Teorema del Bocado de jamón general	40

3.4.2.	Teorema del Bocado de jamón para conjuntos finitos	42
3.4.3.	Teorema de Partición Polinómica	43
3.4.4.	El Teorema de Szemerédi-Trotter	45
3.5.	Conclusiones	48

Capítulo 1

Introducción

En la década de 1940, Paul Erdős planteó el conocido **Problema de las distancias distintas**: dado un conjunto de N puntos en el plano, hallar cuál es el número mínimo de distancias distintas entre los mismos. Por ejemplo, si se colocan equiespaciados sobre una recta, obtenemos $N - 1$ distancias diferentes. El propio Erdős comprobó que disponiéndolos en una red de cuadrados se mejoraba la cota, hasta $N(\log N)^{-1/2}$. Más tarde, Guth y Katz mejoraron la cota probando que el número de distancias es como mínimo $cN(\log N)^{-1}$.

Cuando Erdős formuló el problema, éste no se enmarcaba completamente en ningún área bien definida de las matemáticas. Comenzaron a plantearse problemas similares en situaciones diferentes. Algunos de ellos, incluyendo el de las distancias distintas, resultaron ser de una complejidad inusitada. De esta forma, durante las décadas posteriores muchos matemáticos centraron su atención en desarrollar de forma sistemática un nuevo campo dentro de la combinatoria llamada la **Geometría de Incidencia**.

De manera informal podemos decir que la Geometría de Incidencia es el estudio de problemas de combinatoria formulados a partir de objetos y propiedades geométricos básicas, tales como rectas, círculos, distancias....

El uso de métodos polinómicos en problemas de geometría de incidencia nace a partir de la prueba de Z. Dvir del análogo del problema de Kakeya en cuerpos finitos presentado en el artículo [3]. A partir de este trabajo inicial se han desarrollado diversas aplicaciones de técnicas basadas en polinomios (tanto en el sentido puramente algebraico como de Geometría Algebraica) a problemas de geometría de incidencia. En muchos casos se obtienen demostraciones más claras y sencillas de resultados ya probados por métodos más

complejos, por ejemplo por métodos topológicos.

El objetivo de este trabajo es presentar este método que hemos descrito a partir de dos de los problemas fundacionales en el uso de técnicas polinómicas: el problema de Kakeya y el Teorema de Szemerédi-Trotter en el plano real. Para ello presentamos en primer lugar los problemas que abordan y daremos pruebas basadas en técnicas “no polinómicas”. En el caso del Teorema de Szemerédi-Trotter, dichas técnicas combinan técnicas topológicas y de grafos. En el capítulo 3 se desarrollan demostraciones basadas en propiedades muy elementales de los polinomios en varias indeterminadas. La extensión del Teorema de Szemerédi-Trotter a \mathbb{R}^n , que es considerablemente más compleja y requiere resultados avanzados de Geometría Algebraica, queda fuera del alcance de este trabajo.

El presente trabajo se ha desarrollado sobre todo a partir de la referencia de Larry Guth en el libro [6]. No obstante en bastantes aspectos también han sido relevantes las fuentes [3],[12] así como revisiones de los resultados, notablemente [9] y [4].

Capítulo 2

La Geometría de Incidencia

La geometría de incidencia estudia las posibles intersecciones de objetos geométricos simples, como por ejemplo rectas o circunferencias. En el presente trabajo nos vamos a limitar a considerar los problemas en el plano. Para comprender mejor esta rama de las matemáticas, analizaremos algunos de los problemas más ilustrativos de esta disciplina.

Comenzaremos estudiando problemas de rectas en el plano para hablar de uno de los resultados fundamentales de esta disciplina: el conocido Teorema de Szemerédi-Trotter. Poniendo especial interés en este teorema, veremos que uno de los descubrimientos más destacados en este campo fue el del papel que juega la topología en la geometría de incidencia.

Después hablaremos del problema de Kakeya en un cuerpo finito, uno de los problemas donde el método polinómico ha demostrado ser más eficiente que las técnicas geométricas tradicionales.

Para finalizar comentaremos brevemente problemas de distancias en el plano, como el famoso “problema de las distancias distintas de Erdős”. Ello lleva a considerar la geometría de incidencia con circunferencias y otras curvas. Así, acabaremos comentando algunos problemas a los que todavía no se ha hallado solución con los métodos disponibles hasta la fecha.

2.1. Notación

Escribiremos $A \lesssim B$ para indicar que existe una constante c positiva de manera que $A \leq cB$, y diremos que “A es menor que B salvo constante”. Del mismo modo, escribiremos $A \sim B$ si ocurre a la vez que $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$.

Decimos que una acotación es una **acotación precisa** (en inglés, “sharp”) si no se puede mejorar. Es decir, si por ejemplo se tiene $a \leq b$ y existe algún caso en el que $a = b$, entonces dicha cota será precisa y no se puede encontrar una cota superior menor para a . Por ejemplo, $\text{sen}(x) \leq 1$ es una cota precisa, pero $\text{sen}(x) \leq 2$ no. (Nótese que esta definición funciona de la misma manera para acotaciones del tipo “ \lesssim ”).

A lo largo de este trabajo, trataremos con frecuencia como números enteros números que estrictamente son racionales o reales. En tales casos, se entenderá que usamos la parte entera de dichas cantidades.

2.2. Primeros ejemplos

Sea \mathcal{L} un conjunto de L rectas en el plano real. Definimos un **punto r -rico** como un punto por el que pasan por lo menos r rectas de \mathcal{L} . El conjunto de todos los puntos r -ricos de \mathcal{L} lo denominamos $P_r(\mathcal{L})$ es decir,

$$P_r(\mathcal{L}) = \{x \in \mathbb{R}^2 | x \text{ pertenece como mínimo a } r \text{ rectas de } \mathcal{L}\}.$$

Una de las cuestiones más básicas que surgen sobre las intersecciones de rectas en el plano consiste en estimar o acotar

$$|P_r(L)| = \max_{|\mathcal{L}|=L} |P_r(\mathcal{L})|.$$

La respuesta (salvo un factor constante) fue hallada por Szemerédi y Trotter, pero veamos primero algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Posición general Si elegimos L rectas en posición general, entonces nos encontramos con $\binom{L}{2} \lesssim L^2$ puntos 2-ricos, pero ningún punto 3-rico (al elegir las en posición general, asumimos que no hay dos paralelas, lo que implica que todo par de rectas se cortan en un punto y que ninguna pasa por un punto donde ya se corten otras dos rectas).

Ejemplo 2: Configuración estrellada Si elegimos L/r puntos (con L múltiplo de r) y trazamos r rectas que pasen por cada punto, todas distintas, obtenemos una configuración que claramente cuenta con L rectas y $|P_r(\mathcal{L})| = L/r$. Llamaremos a este caso la configuración estrellada. (Ver figura 2.1)

Ejemplo 3: Configuración de red Vamos a construir un conjunto de L rectas de tal manera que obtengamos $|P_3(\mathcal{L})| \sim L^2$. La forma más sencilla

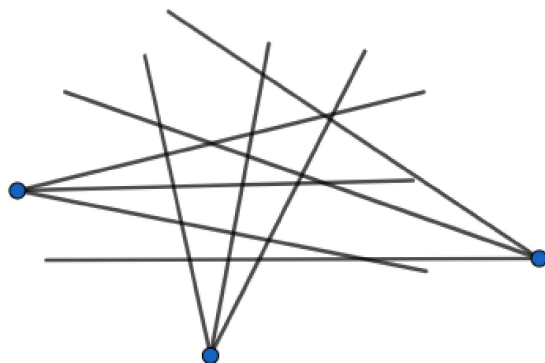


Figura 2.1: Ejemplo de configuración estrellada con 3 puntos 3-ricos

es usar una configuración de red o malla de rectas verticales, horizontales y diagonales de la siguiente manera:

- Verticales $x = a$ para cada entero $a = 1, \dots, L/4$
- Horizontales $y = b$ para cada entero $b = 1, \dots, L/4$
- Diagonales $x - y = c$ para cada entero $c = -L/4, \dots, L/4 - 1$

De esta forma, por cada punto de coordenadas enteras (a, b) con $1 \leq a, b \leq L/4$ pasan 3 rectas, más concretamente, las rectas $x = a, y = b, x - y = a - b$; de forma que el número de puntos 3-ricos resultantes es $|P_3(\mathcal{L})| \sim L^2$.

Si nos interesara aumentar r , podemos producir varios puntos r -ricos usando una estructura de malla similar y añadiendo más rectas con distintas pendientes. A esta construcción la llamaremos configuración de red. (Ver figura 2.2)

2.3. Incidencias

A continuación vamos a introducir el lenguaje de las incidencias, que evidentemente son la base de toda la geometría de incidencia, y es en dicho lenguaje como se escribe la formulación más clásica del teorema de Szemerédi-Trotter.

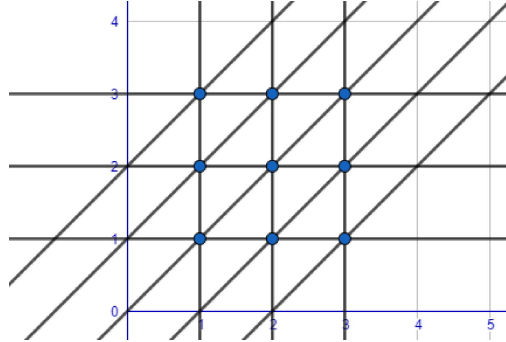


Figura 2.2: Ejemplo de configuración de red con 9 puntos 3-ricos

Sea \mathcal{L} un conjunto de rectas y \mathcal{S} un conjunto de puntos. Llamamos el **conjunto de incidencias** a

$$I(\mathcal{S}, \mathcal{L}) = \{(p, l) \in \mathcal{S} \times \mathcal{L} \mid p \in l\}.$$

El cardinal del conjunto de incidencias se puede calcular de dos formas equivalentes:

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| = \sum_{p \in \mathcal{S}} |\{l \in \mathcal{L} \mid p \in l\}| = \sum_{l \in \mathcal{L}} |\{p \in \mathcal{S} \mid p \in l\}|.$$

En otras palabras, vemos que el papel de los puntos y las rectas es simétrico a la hora de contar el número de incidencias. Podemos utilizar este hecho para demostrar una primera cota muy interesante del cardinal $|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})|$:

Lema 2.3.1. *Sea \mathcal{L} un conjunto de L rectas y \mathcal{S} un conjunto de S puntos en el plano, entonces*

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \leq L + S^2$$

y alternativamente

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \leq S + L^2.$$

Demostración. Agrupemos las rectas de \mathcal{L} de la siguiente manera: vamos a definir \mathcal{L}_1 como el conjunto de las rectas de \mathcal{L} que contienen exactamente un punto de \mathcal{S} , y \mathcal{L}_+ como el conjunto de las que contengan a más de un punto de \mathcal{S} . Al dividir de esta forma los elementos de \mathcal{L} , también podemos dividir las incidencias en $|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| = |I(\mathcal{S}, \mathcal{L}_1)| + |I(\mathcal{S}, \mathcal{L}_+)|$.

Evidentemente, para el primer término: $|I(\mathcal{S}, \mathcal{L}_1)| \leq |\mathcal{L}_1| \leq L$.
En cuanto al segundo término,

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L}_+)| = \sum_{p \in \mathcal{S}} |\{l \in \mathcal{L}_+ | p \in l\}|.$$

Para cada punto p de \mathcal{S} , existen como máximo $S - 1$ rectas que pasen por p y contengan otro punto de \mathcal{S} . Por lo tanto, tenemos que

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L}_+)| \leq \sum_{p \in \mathcal{S}} (S - 1) < S^2.$$

Sumando ambos miembros, obtenemos la desigualdad del enunciado.

Para la segunda versión de la desigualdad, se procede de forma análoga aprovechando el ya mencionado papel simétrico de las rectas y los puntos: sea \mathcal{S}_1 el conjunto de los puntos de \mathcal{S} por los que pasa solamente una recta de \mathcal{L} , y \mathcal{S}_+ los demás. Dividimos el conjunto de incidencias de la misma forma que antes y obtenemos

$$\begin{aligned} |I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| &= |I(\mathcal{S}_1, \mathcal{L})| + |I(\mathcal{S}_+, \mathcal{L})| \leq \\ &\leq S + \sum_{l \in \mathcal{L}} |\{p \in \mathcal{S}_+ | p \in l\}| \end{aligned}$$

Para cada $l \in \mathcal{L}$, hay como máximo $L - 1$ puntos en ella que pertenezcan a alguna recta más de \mathcal{L} , luego

$$S + \sum_{l \in \mathcal{L}} |\{p \in \mathcal{S}_+ | p \in l\}| \leq S + \sum_{l \in \mathcal{L}} (L - 1) \leq S + L^2.$$

□

Pasamos a enunciar el Teorema de Szemerédi-Trotter en su versión más usual en los textos, la que hace referencia al cardinal del conjunto de incidencias:

Teorema 2.3.2 (Szemerédi-Trotter para incidencias). *Sea \mathcal{S} un conjunto finito de puntos en el plano y \mathcal{L} un conjunto finito de rectas. Sea S el cardinal de \mathcal{S} y L el de \mathcal{L} . En tal caso se cumple que*

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim S^{2/3} L^{2/3} + S + L.$$

2.4. El teorema de Szemerédi-Trotter para puntos r -ricos

Anteriormente hemos presentado el Teorema de Szemerédi-Trotter para incidencias. Tanto dicho teorema como el que vamos a enunciar reciben el nombre de “Teorema de Szemerédi-Trotter”, pues ambos resultados son equivalentes y fueron probados por Endre Szemerédi y William T. Trotter. Aunque es más frecuente encontrarlo enunciado para incidencias, también será interesante estudiar su versión para puntos r -ricos:

Teorema 2.4.1 (Teorema de Szemerédi-Trotter para puntos r -ricos). *Sea \mathcal{L} un conjunto de L rectas en el plano. Entonces,*

$$|P_r(\mathcal{L})| \lesssim L^2 r^{-3} + L r^{-1}.$$

Como consecuencia,

$$P_r(L) \lesssim L^2 r^{-3} + L r^{-1}$$

Notemos que si ocurre que $L \leq r^2$, entonces $L^2 r^{-3} \leq L r^{-1}$, en cuyo caso el segundo término domina y en el ejemplo de la configuración estrellada se alcanza de forma precisa la cota. Si, por el contrario, $r^2 \leq L$, entonces $r^2 L \leq L^2$ y $L/r \leq L^3/r^3$, luego es el primer término el que domina.

A continuación comprobaremos que, en efecto, la acotación proporcionada por el teorema es precisa y no se puede mejorar, pues vamos a ver que en el caso de la configuración de red ocurre que $|P_r(\mathcal{L})| \sim L^2 r^{-3}$.

2.4.1. La configuración de red

Vamos a estudiar la configuración de red que comentamos en los primeros ejemplos. Habíamos visto cómo producir puntos 3-ricos, pero nos puede interesar un r mayor que 3. Para ello, en vez de limitarnos a tomar rectas horizontales, verticales y un tipo de diagonales, vamos a escoger las pendientes de otra forma.

Sea G_N la red de $N \times N$ puntos definida por $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | 1 \leq a, b \leq N\}$. Vamos a elegir r pendientes distintas para las rectas. Dichas pendientes nos interesan con denominadores y numeradores que sean pequeños, para ello definamos el conjunto de pendientes como los primeros r términos de la lista $0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, \dots$. En esta lista lo que hacemos es ir cogiendo los racionales menores o iguales que

2.4. EL TEOREMA DE SZEMERÉDI-TROTTER PARA PUNTOS r -RICOS 11

1 de forma que los denominadores sean lo más pequeños posibles, y evitando los que sean fracciones equivalentes de términos ya incluidos. El orden de la lista está marcado por el orden creciente de los denominadores.

Ahora, sean \mathcal{S}_r los r primeros racionales de la lista antes detallada. Llamemos $\mathcal{L}_{N,r}$ al conjunto de las rectas con pendiente en \mathcal{S}_r que pasen por lo menos por un punto de G_N . Es fácil ver que todos los puntos de G_N son puntos r -ricos de $\mathcal{L}_{N,r}$, luego obtenemos que $|P_r(\mathcal{L}_{N,r})| \geq N^2$. Lo que no resulta tan evidente es estimar $|\mathcal{L}_{N,r}|$, cardinal que vamos a denotar como L .

Afirmamos que las r pendientes en \mathcal{S}_r tienen numerador y denominador menor que $r^{1/2}$ salvo constante. Ello lo demostraremos a continuación como un pequeño lema:

Proposición 2.4.2. *Sea Q un entero positivo, y sea*

$$R(Q) = \{(p, q) | 1 \leq p < q \leq Q, \text{mcd}(p, q) = 1\}.$$

Entonces $|R(Q)| \geq Q^2/10$.

En particular, se cumple que los r primeros términos de la lista tienen denominador menor o igual que $r^{1/2}$ salvo constante.

Demostración: Primero, para a que cumpla $2 \leq a \leq Q$, definimos el conjunto

$$D(a, Q) = \{(p, q) | 1 \leq p < q \leq Q \text{ y además } a \text{ divide a } p \text{ y a } q\}.$$

Vamos a comprobar que $|D(a, Q)| \leq Q^2 a^{-2}$: en efecto, el número de múltiplos de a que son menores o iguales que Q son precisamente $\lfloor Q/a \rfloor$, por lo que nuestros parámetros p y q pueden variar en un rango de, como mucho, Q/a valores distintos. Por tanto, el número posible de pares (p, q) en $D(a, Q)$ no puede ser mayor que $(Q/a)(Q/a) = Q^2 a^{-2}$.

A continuación, notemos que podemos obtener $R(Q)$ sin más que considerar el conjunto de todos los pares $\{(p, q) | 1 \leq p < q \leq Q\}$ y luego sustraerle el conjunto $D(a, Q)$ para cada a primo, es decir:

$$\begin{aligned} |R(Q)| &\geq Q^2 - \sum_{2 \leq a \leq Q \text{ primo}} |D(a, Q)| \geq Q^2 - \sum_{2 \leq a \leq Q \text{ primo}} Q^2 a^{-2} = \\ &= (1 - \sum_{2 \leq a \leq Q \text{ primo}} a^{-2}) Q^2. \end{aligned}$$

Solo falta ver que el contenido del paréntesis es mayor o igual que $1/10$; para ello basta con recordar que $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$, y en nuestro caso, tenemos que

$$\sum_{a \geq 2, a \text{ primo}} a^{-2} \leq \sum_{a \geq 2} a^{-2} \leq \pi^2/6 - 1 \approx 0.6449,$$

en particular, $1 - \sum_{2 \leq a \leq Q, a \text{ primo}} a^{-2}$ resulta siempre menor que $1/10$. En conclusión, $|R(Q)| \geq Q^2/10$. \square

(Notemos que aunque aquí hemos concretado la constante $1/10$, nos bastaba comprobar la desigualdad salvo constante, y es así como vamos a usar este resultado más adelante).

Ahora podemos enunciar formalmente el resultado que hemos anticipado antes:

Proposición 2.4.3. *En la configuración de red anteriormente definida, se tiene que*

$$|P_r(\mathcal{L})| \gtrsim L^2 r^{-3}.$$

Demostración: Si l es una recta de pendiente p/q que pasa por un punto de coordenadas enteras (x, y) , entonces $(x + q, y + p)$ es otro punto de la recta l con coordenadas enteras. En el lema anterior hemos visto que cada una de las pendientes de \mathcal{S}_r tienen numerador y denominador menor salvo constante que $r^{1/2}$. Consideramos una red cuadrada $3N \times 3N$, sea G_{3N} , centrada en la red original de $N \times N$ (es decir, consideramos una copia de nuestra red a cada lado de la original, otras dos encima y debajo respectivamente, y cuatro más en los vértices formando un cuadrado $3N \times 3N$); entonces vamos a comprobar que cada recta de $\mathcal{L}_{N,r}$ contiene $\gtrsim Nr^{-1/2}$ puntos de la nueva red $3N \times 3N$:

Sea $l \in \mathcal{L}_{N,r}$ una recta con pendiente p/q con $\text{mcd}(p, q) = 1$ y que pase por un punto $(x_0, y_0) \in G_N$. Si tenemos un punto $(x, y) \in l$ con coordenadas enteras, entonces $(x, y) = (x_0, y_0) + t(q, p) = (x_0 + qt, y_0 + pt)$ y qt, pt son enteros. Por tanto, $t = m/q = n/p$ con m, n enteros. Puesto que p y q son primos entre sí, la igualdad $mp = nq$ implica que $q|m$ y $p|n$, luego t es un entero.

Supongamos $t \in \mathbb{Z}, t > 0$. La condición $(x, y) = (x_0, y_0) + t(q, p) \in G_{3N}$ se satisface siempre que $tq \leq N, tp \leq N$. Puesto que $p < q < r^{1/2}$ es suficiente que $tr^{1/2} \leq N$, es decir, $t \leq Nr^{-1/2}$. Así pues, los puntos $(x_0 + tq, y_0 + tp)$ con $0 \leq t \leq Nr^{-1/2}, t \in \mathbb{Z}$ son todos ellos puntos de G_{3N} . Razonando de la misma forma para $t < 0$, tendremos que los puntos $(x_0 + tq, y_0 + tp)$ con

2.4. EL TEOREMA DE SZEMERÉDI-TROTTER PARA PUNTOS r -RICOS 13

$-Nr^{-1/2} \leq t \leq Nr^{-1/2}, t \in \mathbb{Z}$ son puntos de G_{3N} . Por tanto, el número de puntos de l en G_{3N} es mayor que $Nr^{-1/2}$.

A partir de este punto, vamos a suponer que $r^{1/2} \leq N$, de modo que $1 \leq Nr^{-1/2}$. (En caso contrario, las rectas de $\mathcal{L}_{N,r}$ intersecarían G_N en un solo punto).

Ahora pasamos a estimar L (recordemos que lo hemos definido como $L = |\mathcal{L}_{N,r}|$). Lo haremos por un argumento de doble conteo: consideremos el conjunto $A = \{(p, l) \in G_{3N} \times \mathcal{L}_{N,r}\}$. Vamos a contar el número de elementos de dicho conjunto:

- Si los computamos contando por cada recta, hemos visto antes que cada una de las rectas contiene un número mayor de puntos, salvo constante, que $Nr^{-1/2}$; luego $|A| \gtrsim L(Nr^{-1/2})$.
- Por otra parte, si vamos contando en cada punto las rectas que lo atraviesan, sabemos que cada punto pertenece como mucho a r rectas (pues partimos de que los puntos de G_n son r -ricos, y por los de la aumentada no pasan más que por los de la original), luego obtenemos que $|A| \leq 3N^2r$.

Igualando $|A|$, obtenemos que $3N^2r \geq |A| \gtrsim LNr^{-1/2}$, resultando que $3Nr \geq Lr^{-1/2}$, y por nuestra definición de “ \gtrsim ” podemos obviar la constante. Finalmente obtenemos que $N^2 \gtrsim L^2r^{-3}$, lo que implica que $|P_r(\mathcal{L}_{N,r})| \gtrsim |\mathcal{L}_{N,r}|^2r^{-3}$. \square

En conclusión, hemos obtenido $|P_r(\mathcal{L}_{N,r})| \gtrsim |\mathcal{L}_{N,r}|^2r^{-3}$, que es la cota de Szemerédi-Trotter (recordemos que en este caso domina el primer término) pero en la otra dirección. Ello quiere decir que en el caso de la configuración de red, la desigualdad es precisa, es decir, acabamos de probar que $|P_r(\mathcal{L}_{N,r})| \gtrsim |\mathcal{L}_{N,r}|^2r^{-3}$ y el Teorema (2.4.1) afirma que $|P_r(\mathcal{L}_{N,r})| \lesssim |\mathcal{L}_{N,r}|^2r^{-3}$, por lo que se tiene $|P_r(\mathcal{L}_{N,r})| \sim |\mathcal{L}_{N,r}|^2r^{-3}$ y por tanto la cota no se puede mejorar.

Una vez vistos estos ejemplos, vamos a buscar cotas superiores para $|P_r(L)|$, para ello empezamos por utilizar el hecho de que dos rectas distintas se cortan como mucho en un punto.

Usando este argumento, podemos obtener una primera cota para $|P_r(L)|$ por un argumento de conteo doble:

Lema 2.4.4. $|P_r(\mathcal{L})| \leq \binom{L}{2} \binom{r}{2}^{-1} \sim L^2r^{-2}$

Demostración: Sea \mathcal{L} un conjunto de L rectas, procederemos por el método de doble conteo. Definimos el conjunto

$$A = \{(p, l, l') \mid p \in P_r(\mathcal{L}); l, l' \in \mathcal{L}; l \neq l'; p \in l \cap l'\}.$$

- Por una parte, si computamos los elementos de A contando punto por punto, obtenemos

$$|A| = \sum_{p \in P_r(\mathcal{L})} |\{(l, l') \in \mathcal{L}^2 \mid l \neq l', p \in l \cap l'\}| \geq |P_r(\mathcal{L})| \binom{r}{2}.$$
- Por otra parte, si los computamos considerando los pares de rectas, obtenemos

$$|A| = \sum_{(l, l') \in \mathcal{L}^2} |\{p \in P_r(\mathcal{L}) \mid p \in l \cap l'\}| \leq \binom{L}{2}.$$

Comparando ambas cotas para $|A|$, obtenemos $|P_r(\mathcal{L})| \binom{r}{2} \leq \binom{L}{2}$. \square

A continuación vamos a ver otra desigualdad para $|P_r(\mathcal{L})|$:

Lema 2.4.5. *Si $r \geq 2L^{1/2}$, entonces $|P_r(\mathcal{L})| < 2L/r$.*

Demostración: Sea \mathcal{L} un conjunto de L rectas. Lo probaremos por Reducción al Absurdo: supongamos que $|P_r(\mathcal{L})| \geq 2L/r$. Tomamos un subconjunto $P' \subset P_r(\mathcal{L})$ que cumpla que $2L/r \leq |P'| < (2L/r) + 1$. Como $r \geq 2L^{1/2}$, $|P'| < (r/2) + 1$.

Si $x \in P'$ y \mathcal{L}_x es el conjunto de rectas que pasan por x , entonces el cardinal de \mathcal{L}_x es mayor o igual que r (pues x sigue siendo un punto r -rico) y menos de $r/2$ rectas de \mathcal{L}_x pueden pasar por otro punto de P' , ya que hemos visto que $|P'| < (r/2) + 1$. Dicho de otra forma, para cada punto $x \in P'$, obtenemos que en la lista de rectas \mathcal{L}_x siempre vamos a tener como mínimo $r/2$ rectas que no pertenezcan a la lista de ningún otro punto. Repitiendo este argumento para cada punto de P' , observamos que el número de rectas L es mayor que $|P'|r/2$. Pero $|P'|r/2 \geq (2L/r)(r/2) = L$, llegando a contradicción. \square

Notemos que hay una gran diferencia entre esas estimaciones y la proporcionada por el teorema. Dicha diferencia es más grande y más interesante en el caso $r = L^{1/2}$. En este caso, los lemas de doble conteo anteriores nos dicen que $|P_{L^{1/2}}(\mathcal{L})| \lesssim L$ y por su parte el teorema (2.4.1) indica que $|P_{L^{1/2}}(\mathcal{L})| \lesssim L^{1/2}$. Estos dos lemas de conteo proporcionan algunas cotas, pero no nos bastan para demostrar el teorema (2.4.1). El axioma euclídeo que dice que dos rectas distintas se cortan a lo sumo en un punto se cumple en todos los cuerpos, pero el Teorema de Szemerédi-Trotter no.

Ejemplo en un cuerpo finito: Sea \mathbb{F}_q el cuerpo finito con q elementos, y sea \mathcal{L} el conjunto de todas las rectas “no verticales” de \mathbb{F}_q^2 , es decir, excluyendo aquéllas del tipo $x = c$ tales que $c \in \mathbb{F}_q$. Cada una de estas rectas tiene una ecuación del tipo $y = mx + b$. Para ver el número de rectas que hay en \mathcal{L} , basta con analizar los dos parámetros: m y b . Cada uno de ellos puede tomar como valores los q elementos del cuerpo, luego nos encontramos con q^2 posibilidades para elegir ecuaciones de rectas y, por tanto, tenemos exactamente $L = q^2$. Por cada punto de \mathbb{F}_q^2 pasa una recta de cada pendiente, luego hay q^2 puntos en $P_q(\mathcal{L})$. Así, tenemos $|P_{L^{1/2}}(\mathcal{L})| = L$, y esencialmente alcanzamos la cota superior que nos proporcionaba el primer lema de conteo.

Esto evidencia que para probar el teorema (2.4.1) no nos basta con usar el hecho de que dos rectas distintas se cortan como mucho en un punto, vamos a necesitar utilizar algo que es cierto para las rectas en \mathbb{R}^2 , pero falso en \mathbb{F}_q^2 . Para lograrlo, vamos a tener que usar otra herramienta más allá de dicho axioma, y ésa será la fórmula de Euler.

Se han realizado varias demostraciones del teorema de Szemerédi-Trotter, y todas ellas usan, de una forma u otra, herramientas topológicas en \mathbb{R}^2 . A continuación, vamos a demostrar el teorema (2.4.1) haciendo uso de la fórmula de Euler.

2.5. Números de cruzamiento

Vamos a estudiar un caso muy concreto de incidencias: ¿se puede tener L rectas en el plano de forma que $|P_r(\mathcal{L})|$ sea exactamente $\binom{L}{2} / \binom{r}{2}$, con $L > r^2$, es decir, que se alcance la cota proporcionada por el lema (2.4.4). Para que ello ocurra, cada par de rectas debe cortarse, y cada punto de intersección debe pertenecer a exactamente r rectas. Usando la fórmula de Euler, veremos que para $r \geq 6$ esto es imposible de lograr en \mathbb{R}^2 .

2.5.1. La fórmula de Euler

Un conjunto \mathcal{L} de rectas en el plano determina una estructura poligonal en \mathbb{R}^2 , interpretando cada punto de intersección como un vértice, cada segmento de una recta entre dos vértices como una arista, y cada componente conexa del complementario de las rectas como una cara.

Notemos que algunas de las caras y de las aristas no están acotadas. Llamemos X a la unión de los vértices, las caras y las aristas que sí están

acotadas, y considerando todo el exterior del grafo como otra cara. Las rectas entonces nos definen una estructura poligonal X con V vértices y E aristas.

Ahora vamos a considerar un embebimiento de X en \mathbb{S}^2 de forma similar a la empleada para hacer la proyección estereográfica de la esfera en el plano. Dado el X antes descrito en el plano, lo proyectamos llevando cada vértice de X al punto de la esfera del cual es proyección estereográfica. Añadimos las aristas uniendo los vértices en \mathbb{S}^2 , logrando una teselación de la esfera en distintas caras, y obtenemos así una estructura poligonal en \mathbb{S}^2 con V vértices, E aristas y F caras. (Notemos que al hacerlo así, lo que sería la cara exterior no acotada en X , en nuestra estructura poliedral resulta ser otra cara cerrada y delimitada).

La fórmula de Euler nos indica que

$$V - E + F = 2.$$

Vamos a comprobar lo que afirmamos antes, es decir, que si $r \geq 6$, entonces no existe ningún conjunto \mathcal{L} de L rectas en el plano de forma que

$$|P_r(\mathcal{L})| = \binom{L}{2} / \binom{r}{2}:$$

En tal caso, de cada vértice salen al menos r aristas, y cada arista contiene solamente dos vértices, por ello, $V \leq (2/r)E \leq E/3$. Cada cara tiene al menos 3 aristas, y cada arista pertenece como mucho a dos caras, y por ello $F \leq (2/3)E$. Pero entonces ocurriría que $V - E + F \leq 0$, por lo que llegamos a una contradicción.

Pasamos a explicar con un poco más de detalle el argumento de doble conteo usado en el párrafo anterior (que en este caso relacionaba los números de vértices, aristas y caras de X), ya que aunque no es demasiado complicado, lo hemos utilizado alguna vez con anterioridad y volveremos a usarlo más veces en el presente trabajo:

Sean $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ el conjunto de los vértices, las aristas y caras de X y sean V, E, F sus respectivos cardinales.

Consideremos por ejemplo la relación mencionada entre el número de vértices V y de aristas E . Definamos para cada $v \in \mathcal{V}$, el conjunto $E(v) = \{e \in \mathcal{E} | v \in e\}$, es decir, el conjunto de aristas que tienen como punto inicial o final al punto v , y del mismo modo, para cada $e \in \mathcal{E}$ definimos el conjunto $V(e) = \{v \in \mathcal{V} | v \in e\}$.

Ahora computemos estas relaciones en una matriz de la siguiente forma: la construiremos con E columnas, cada una de las cuales se corresponderá con una de las aristas de \mathcal{E} ; y V filas, cada una de las cuales se corresponderá

con uno de los puntos de \mathcal{V} . En dicha matriz, vamos a poner un 1 en aquella posición (i, j) donde se cumpla que el punto al que hemos asociado la fila i pertenece a la arista que hemos asociado a la columna j , y pondremos un 0 en las posiciones donde no se cumpla dicha relación.

De esta forma obtenemos un número de elementos no nulos en la matriz, concretamente el cardinal del conjunto $\{(v, e) | v \in e\} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{E}$, conjunto que denominaremos \mathcal{A} .

Dicho número de unos de la matriz podemos computarlo de dos formas: contando por filas o por columnas.

- Si contabilizamos por filas, obtenemos que $|\mathcal{A}| = \sum_{v \in \mathcal{V}} |E(v)| \geq \sum_{v \in \mathcal{V}} r = Vr$. La desigualdad se deduce porque usamos el hecho de que todos los vértices v son puntos r -ricos.
- Si contabilizamos por columnas, obtenemos que $|\mathcal{A}| = \sum_{e \in \mathcal{E}} |V(e)| = 2E$, la igualdad se da porque cada arista contiene exclusivamente dos vértices distintos.

Igualando $|\mathcal{A}|$ en ambos casos, se deduce la relación $V \leq (2/r)E$ anterior.

A continuación, vamos a introducir los “números de cruzamiento” de grafos para poder usar de forma más efectiva la fórmula de Euler.

2.5.2. Números de cruzamiento

Sea G un grafo, podemos representar gráficamente G en el plano \mathbb{R}^2 de la siguiente manera: asignamos a cada vértice de G un punto de \mathbb{R}^2 de forma que todos los puntos sean distintos y estén en posición general. Ahora, identificamos cada arista de G con un segmento de curva continua y sin autointersecciones en el plano que una sus puntos finales (vértices) y de forma que no pase por ningún otro vértice que no sea uno de sus extremos. Evidentemente, puede darse el caso de que las representaciones de dos aristas diferentes se corten en puntos que no sean vértices; tales puntos no los vamos a contabilizar como vértices, sino que los contaremos como cruzamientos, que pasamos a detallar.

Definimos un **cruzamiento** en la representación gráfica de un grafo como un punto x (que no sea un vértice) y un par de aristas abiertas (es decir, sin incluir los vértices) e, e' , tales que $x \in e \cap e'$. De esta forma, notemos que si r aristas distintas se cortasen en un mismo punto, entonces contaría como $\binom{r}{2}$ cruzamientos.

Definimos el **número de cruzamiento** de un grafo G , y lo denotamos $k(G)$, como el número más pequeño de cruzamientos necesarios para representar gráficamente G en el plano. Observemos que un grafo es un **grafo plano** si y solo si su número de cruzamiento es igual a cero, es decir, si se puede representar en el plano sin que ningún arista se corte con otra.

Por ejemplo, vamos a considerar el grafo completo de N vértices (en posición general), K_N ; y centrémonos en ver cómo crece $k(K_N)$ al ir aumentando el número de vértices. El grafo K_N cuenta con $E = \binom{N}{2}$ aristas. Si un grafo tiene E aristas entonces puede representarse con como mucho $\binom{E}{2}$ cruzamientos, por lo que el número de cruzamiento de K_N es claramente como máximo $\binom{E}{2} \sim N^4$. Así pues, el número de cruzamientos crece del mismo modo que N^4 . De manera más general, veremos cómo el número de cruzamiento de un grafo G está relacionado con el número de aristas y vértices del mismo.

También será interesante considerar el problema de los cruzamientos en el caso en el que todas las aristas son segmentos de rectas, como en el ejemplo anterior. En este contexto, con un pequeño abuso de notación, cuando hablemos de representar un grafo usando rectas o que las aristas de un grafo son rectas, nos referiremos claramente a que las aristas son segmentos de rectas. En estos casos sí que nos interesará que los puntos a los que asignamos los vértices estén en posición general. Así, definimos $k_r(G)$ el **número de cruzamiento con rectas** de G ; ello es el número mínimo de cruzamientos en una representación gráfica de G donde cada arista es un segmento rectilíneo. Este número de cruzamiento con rectas $k_r(G)$ puede ser diferente de $k(G)$, pero es claro que siempre $k_r(G) \geq k(G)$, pues estamos imponiendo una condición a mayores a la hora de trazar las aristas. Cualquiera de estos dos números de cruzamiento nos puede resultar útil a la hora de demostrar el teorema de Szemerédi-Trotter.

Ahora volvemos a centrarnos en estimar los números de cruzamiento de grafos, y vamos a empezar por probar un resultado que lo relaciona con el número de aristas y vértices de un grafo plano basándose en la fórmula de Euler.

Proposición 2.5.1. *Si G es un grafo plano, conexo con E aristas y V vértices, y tal que no tiene ningún vértice del que solamente salga una arista, entonces*

$$E - 3V \leq -6.$$

Demostración: Sea G un grafo plano y consideremos el embebimiento de

G en \mathbb{S}^2 antes descrito. Dicho embebimiento divide \mathbb{S}^2 en distintas caras, y obtenemos así una estructura poliédrica en \mathbb{S}^2 con V vértices, E aristas y F caras. Por la fórmula de Euler, tenemos que $2 = V - E + F$. El número de caras del grafo G podemos estimarlo de esta forma: cada cara tiene al menos tres aristas en sus bordes, mientras que cada arista está en la frontera de exactamente dos caras. Por lo tanto $F \leq (2/3)E$. Sustituyendo en la fórmula de Euler, obtenemos $2 = V - E + F \leq V - (E/3)$, y reorganizándolo llegamos a $E - 3V \leq -6$. \square

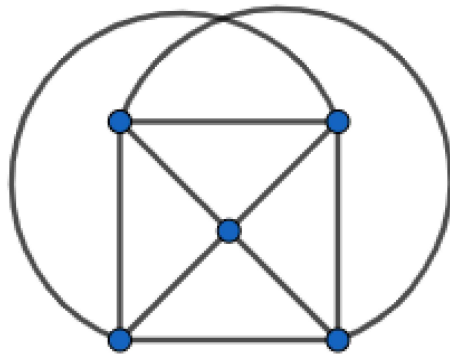


Figura 2.3: Ejemplo de grafo completo de 5 vértices con un cruzamiento

La proposición implica que, por ejemplo, el grafo completo de 5 vértices, K_5 , no es plano. Al tener 5 vértices y 10 aristas, se tiene que $E - 3V = -5 > -6$, y al dibujarlo se comprueba fácilmente que siempre obtendremos por lo menos un cruzamiento, tal y como se puede apreciar en la figura 2.3, por lo que $k(K_5) = 1$.

Proposición 2.5.2. *El número de cruzamiento de G es al menos $E - 3V + 6$.*

Demostración: Sea $k(G)$ el número de cruzamiento de G , dibujemos G en el plano con exactamente $k(G)$ cruzamientos. Podemos eliminar $k(G)$ aristas de forma que el grafo resultante G' sea plano y su número de aristas $E' = E - k(G)$. Ahora, eliminamos los vértices que se han quedado aislados al eliminar todas las aristas que pasaban por él, tendremos por tanto $V' \leq V$ vértices en G' . Aplicando la proposición (2.5.1), obtenemos que $-6 \geq E' - 3V' \geq E - k(G) - 3V$. \square

En el caso general, para el grafo completo K_N , lo que obtenemos es $k(K_N) \geq \binom{N}{2} - 3N + 6 \sim N^2$.

Todavía es posible mejorar esta cota: al eliminar una arista de G , lo mejor será elegir precisamente la que más cruzamientos provoque de forma que podamos disminuir $k(G)$ de forma significativa.

Teorema 2.5.3. *Sea G un grafo con E aristas, V vértices y tal que $E \geq 4V$. Entonces $k(G) \geq (1/64)E^3V^{-2}$.*

Como corolario de este teorema, obtenemos para el grafo completo K_N , que $k(K_N) \gtrsim \binom{N}{2}^3 N^{-2} \sim N^4$.

Antes de demostrar el teorema, probaremos el enunciado para $k_r(G)$. Posteriormente veremos las modificaciones necesarias para adaptarla a $k(G)$:

Teorema 2.5.4. *Sea G un grafo con E aristas, V vértices y tal que $E \geq 4V$. Entonces $k_r(G) \geq (1/64)E^3V^{-2}$.*

Demostración: Consideremos un número real $p \in [0, 1]$ que fijaremos más adelante. Sea G' un grafo que obtenemos a partir de G , pero de forma que cada vértice de éste sea incluido con probabilidad p , independientemente del resto de vértices. Incluimos en G' una de las aristas de G si y solo si los dos vértices que la delimitan aparecen en G' .

Claramente, en G' cabe esperar tener $V' = pV$ vértices y $E' = p^2E$ aristas, pues para incluir una arista específica deben aparecer sus dos vértices, cada uno tiene probabilidad p y son sucesos independientes. Por (2.5.2), para G' , tenemos que $k(G') \geq E' - 3V'$ (aquí eliminar el 6 de la desigualdad es irrelevante). Por tanto, el valor esperado de $k(G')$ será al menos $p^2E - 3pV$. Como $k_r(G) \geq k(G)$, entonces el valor esperado de $k_r(G')$ será al menos $p^2E - 3pV$.

También podemos dar una cota superior para $k_r(G')$: sea una representación de G usando rectas con exactamente $k_r(G)$ cruzamientos. Como estamos usando rectas, dos aristas que partan de un mismo vértice no pueden cortarse; lo que quiere decir que cada cruzamiento debe involucrar necesariamente dos aristas con cuatro vértices diferentes.

Partiendo de dicha representación con rectas de G , nos quedamos con la de G' . En dicho dibujo, cabe esperar que $k_r(G)$ sea $p^4k_r(G)$.

Si comparamos ambas cotas superior e inferior para el valor esperado de $k_r(G')$, observamos que $p^4k_r(G) \geq p^2E - 3pV$, y así tenemos la siguiente cota inferior: $k_r(G) \geq p^{-2}E - 3p^{-3}V$.

Ahora lo único que nos queda es elegir el valor de p para que la cota sea óptima. Puesto que $E \geq 4V$ tenemos que $p = 4V/E \leq 1$ y podemos fijar $p = 4V/E$. De esta forma, obtenemos que $k_r(G) \geq (1/64)E^3V^{-2}$. \square

Comentamos sucintamente cómo adaptar la demostración para extender el resultado al caso general, es decir, para $k(G)$, y así finalizar la demostración del teorema (2.5.3). La gran diferencia es que al poder ser las aristas curvas, dos aristas con un vértice común podrían cortarse, resultando un cruzamiento que involucre tres vértices. Dicho cruzamiento aparecería en G' con probabilidad p^3 , lo cual es muy distinto de p^4 .

Podemos resolver este problema asegurando, con un simple argumento geométrico, que si el dibujo de un grafo G cuenta con exactamente $k(G)$ cruzamientos, entonces cada cruzamiento se da entre dos aristas sin vértices comunes:

Razonemos por reducción al absurdo: supongamos que existen e_1, e_2 dos aristas con un vértice común v y que se cortan en el punto a . Podemos modificar nuestra representación gráfica de G de la siguiente manera: supongamos que e_1 se corta con otras k_1 aristas en el tramo entre v y a , e_2 hace lo propio con otras k_2 aristas y supongamos sin pérdida de generalidad que $k_1 \leq k_2$. Modificamos el dibujo de e_2 de tal manera que dicha arista vaya paralela a e_1 hasta llegar al punto a , e inmediatamente después de superar dicho punto vuelva a retomar su curso original. De esta forma logramos reducir el número de cruzamientos, pues en primer lugar la nueva arista e'_2 ya no se corta con e_1 , lo que disminuye el número en 1; y además ahora provoca solo k_1 cruzamientos hasta el punto a , y recordemos que $k_1 \leq k_2$ (en caso contrario, nos limitamos a renombrar las aristas).

Notemos que tenemos dos opciones a la hora de decidir cómo dibujar la nueva arista e'_2 en el tramo que va desde v hasta a , uno por el interior de la región cerrada que delimitan los trazos y otro por el exterior; pero resulta evidente que, como queremos evitar un cruzamiento a mayores con e_1 , escogeremos aquel que pasado el punto a ya se encuentre inmediatamente con la traza de e_2 .

También se puede dar el caso de que las dos aristas se corten en más de un punto, en tal caso, lo que haremos será trazar la nueva arista como hemos especificado para así evitar el primer cruzamiento como se aprecia en la figura 2.5.2. Luego hacemos lo propio con el segundo y así sucesivamente hasta lograr evitar todos los cruzamientos entre ambos vértices.

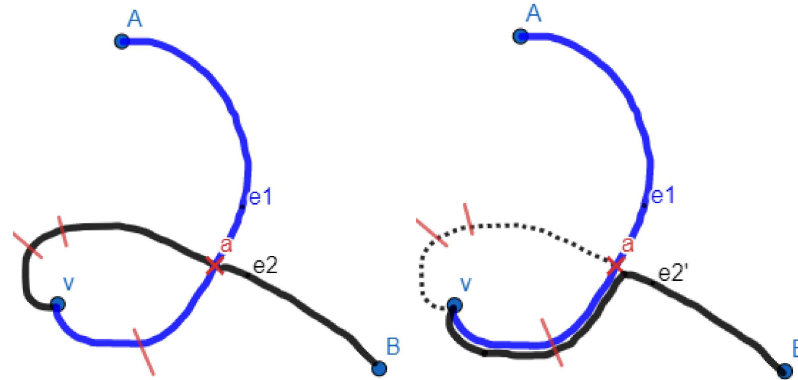


Figura 2.4: .

Trazado de la nueva arista donde evitamos el cruzamiento

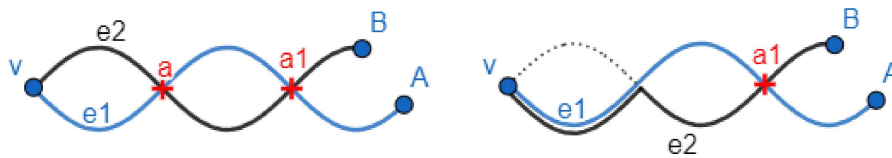


Figura 2.5: .

Situación en la que hay varios cruzamientos entre las aristas, donde resolvemos la intersección en a

2.6. Demostración del Teorema de Szemerédi-Trotter para puntos r -ricos

Ahora sí estamos en condiciones de probar el Teorema de Szemerédi-Trotter en su versión para el número de puntos r -ricos, y esta vez lo vamos a enunciar concretando las constantes:

Teorema 2.6.1 (Teorema de Szemerédi-Trotter para puntos r -ricos). *Sea \mathcal{L} un conjunto de L rectas en el plano. Entonces,*

$$|P_r(\mathcal{L})| \leq \max\{2^9 L^2 r^{-3}, 2Lr^{-1}\}.$$

Demostración: Definimos un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tomando como conjunto de vértices \mathcal{V} el conjunto de puntos r -ricos $P_r(\mathcal{L})$. Dados $p, q \in \mathcal{V}$, el par $\{p, q\}$ determinará una arista si y solo si existe una recta $l \in \mathcal{L}$ tal que $p, q \in l$

2.6. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE SZEMERÉDI-TROTTER PARA PUNTOS r -RICOS 23

y además el segmento entre p y q no contiene ningún otro punto de $P_r(\mathcal{L})$. Evidentemente la figura plana resultante es una representación plana del grafo abstracto G , que tendrá (en general) puntos de cruzamiento. Dado que el máximo número posible de intersecciones de rectas de \mathcal{L} es $\binom{L}{2} \leq L^2$, se tiene que $k_r(G) \leq L^2$.

Denotamos por $V = |P_r(\mathcal{L})| = |\mathcal{V}|$ el número de vértices de G . Veamos cómo calcular $E = |\mathcal{E}|$, el número de aristas.

En primer lugar, sea $\mathcal{L}' = \{l \in \mathcal{L} \mid \exists p \in \mathcal{V} \text{ con } p \in l\}$, se tiene que $L' = |\mathcal{L}'| \leq L = |\mathcal{L}|$.

Sea $\cup_{l \in \mathcal{L}'} l - \mathcal{V} = \sqcup_{l \in \mathcal{L}'} (l - \mathcal{V}) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ la descomposición en componentes conexas del conjunto de puntos de las rectas de \mathcal{L}' una vez eliminados los vértices \mathcal{V} .

Sea $\mathcal{E}' = \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_k\}$, siendo \bar{C}_i la clausura de la componente conexa C_i , ($1 \leq i \leq k$). Observemos que, si fijamos $l \in \mathcal{L}'$, las componentes $\bar{C} \in \mathcal{E}'$ tales que $\bar{C} \subset l$ son de 2 tipos: por un lado hay exactamente dos no acotadas, el resto serán componentes acotadas con extremos en puntos de \mathcal{V} , es decir, son las aristas de \mathcal{E} contenidas en l . Nótese que puede ocurrir que no haya componentes conexas acotadas en l , esto ocurre si solo hay un punto de \mathcal{V} en l . Llamemos \mathcal{E}'_∞ al conjunto de componentes no acotadas de \mathcal{E}' . Por tanto, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \mathcal{E}'_\infty$ y, además, $|\mathcal{E}'_\infty| = 2L'$.

Sea $Y = \{(p, \bar{C}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}' \mid p \in \bar{C}\}$. Para $v \in \mathcal{V}$, sea

$$Y(v) = \{(p, \bar{C}) \in Y \times \mathcal{E}' \mid p = v\}.$$

Se tiene que $|Y(v)| \geq 2r$, pues v es un punto r -rico y cada recta por v contribuye con 2 componentes. Por tanto, $|Y| = \sum_{v \in \mathcal{V}} |Y(v)| \geq 2rV$.

Sean ahora

$$X = \{(p, \bar{C}) \in Y \mid \bar{C} \in \mathcal{E}\} = \{(p, e) \in \mathcal{V} \times \mathcal{E} \mid p \in e\} \text{ y}$$

$$X_\infty = \{(p, \bar{C}) \in Y \mid \bar{C} \in \mathcal{E}'_\infty\}.$$

Evidentemente, se tiene $Y = X \sqcup X_\infty$, luego

$$|X| = |Y| - |X_\infty| \geq 2rV - 2L' \geq 2rV - 2L.$$

Por otro lado, para $e \in \mathcal{E}$, el conjunto $X(e) = \{(p, \bar{C}) \in X \mid \bar{C} = e\}$ tiene cardinal 2 (los extremos de la arista e). Por tanto, $|X| = \sum_{e \in \mathcal{E}} |X(e)| = 2|\mathcal{E}|$ y se tiene que $|\mathcal{E}| = |X|/2 \geq rV - L$.

Distinguimos dos casos:

1) Suponemos que $4V \leq E$. En este caso, la cota (2.5.4) nos dice que $k_r(G) \geq (1/64)E^3V^{-2}$. Puesto que el número de cruzamiento de L' aristas es

menor o igual que $\binom{L'}{2} \leq (L')^2 \leq L^2$, tendremos que $L^2 \geq k_r(G) \geq (1/64)(rV - L)^3 V^{-2}$.

Ahora pueden darse dos casos:

- Si $rV - L \geq rV/2$, entonces tenemos que $L^2 \geq (1/64)(rV - L)^3 V^{-2} \geq (1/64)r^3 V^3 / 2^3 V^2 = r^3 V / 2^9$, lo que despejando V implica que $|P_r(\mathcal{L})| = V \leq 2^9 L^2 r^{-3}$.
- Si, por el contrario, tenemos que $rV - L < rV/2$, entonces $|P_r(\mathcal{L})| = V \leq 2L/r$.

2) Si suponemos el caso contrario, sea que $4V > E$, entonces $rV - L < 4V$, lo que implica que $V < L/(r - 4)$. Ahora tenemos dos casos según el valor de r :

- Si $r \geq 8$, entonces $r - 4 \geq r/2$ y $V < L/(r - 4) \leq 2L/r$.
- Si, por el contrario, $r < 8$, podemos aplicar el lema (2.4.4) para obtener que $|P_r(\mathcal{L})| \leq \binom{L}{2} \binom{r}{2}^{-1}$. Dicha cota $\binom{L}{2} \binom{r}{2}^{-1}$ es menor o igual que $2L^2/r^2$, pues el teorema indicaba la desigualdad salvo constante, y $2L^2/r^2 \leq 2^9 L^2/r^3$, esto último porque al ser $r < 8$, entonces $2^8/r > 1$.

□

2.7. Demostración del Teorema de Szémeredi-Trotter para incidencias

A continuación vamos a demostrar el resultado que habíamos presentado como el Teorema de Szemerédi-Trotter en su versión para el conjunto de incidencias y comenzamos por recordar:

Teorema 2.7.1 (Szemerédi-Trotter para incidencias). *Sea \mathcal{S} un conjunto finito de puntos en el plano y \mathcal{L} un conjunto finito de rectas. Sea S el cardinal de \mathcal{S} y L el de \mathcal{L} . En tal caso se cumple que*

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim S^{2/3} L^{2/3} + S + L.$$

Demostración. Vamos a agrupar los puntos de \mathcal{S} de forma similar a como lo hicimos en la demostración de (2.3.1). Sea \mathcal{S}_h el conjunto de los puntos

2.7. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE SZÉMEREDI-TROTTER PARA INCIDENCIAS²⁵

de \mathcal{S} por los que pasan por lo menos $2L^{1/2}$ rectas de \mathcal{L} . Aplicamos el lema (2.3.1) para obtener que $|I(\mathcal{S}_h, \mathcal{L})| \leq L + |\mathcal{S}_h|^2$. Pero tenemos que $|\mathcal{S}_h| = |P_{2L^{1/2}}(\mathcal{L})|$, ya que en realidad el conjunto que hemos definido es precisamente $P_{2L^{1/2}}(\mathcal{L})$. De esta forma, podemos aplicar el lema (2.4.5) para obtener $|P_{2L^{1/2}}(\mathcal{L})| \leq L^{1/2}$. Así, tenemos que $|I(\mathcal{S}_h, \mathcal{L})| \leq 2L$.

Ahora agrupamos el resto de puntos de \mathcal{S} , definimos:

$$\mathcal{S}_k = \{p \in \mathcal{S} | 2^{k-1} \leq |\{l \in \mathcal{L} | p \in l\}| < 2^k\}$$

es decir, agrupamos los puntos según el número de rectas a las que pertenezcan. De la definición se deduce que $|I(\mathcal{S}_k, \mathcal{L})| \leq 2^k |\mathcal{S}_k|$, pues por cada punto de \mathcal{S}_k pasan menos de 2^k rectas. Ahora sea K el menor entero que cumpla que $2^{K-1} \geq 2L^{1/2}$. De esta forma nos aseguramos de que $\cup_{k>K} \mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}_h$. Vamos a contabilizar las incidencias según los conjuntos en los que hemos partido \mathcal{S} , ello es \mathcal{S}_h y los distintos \mathcal{S}_k :

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \leq |I(\mathcal{S}_h, \mathcal{L})| + \sum_{k=1}^K |I(\mathcal{S}_k, \mathcal{L})| = 2L + \sum_{k=1}^K 2^k |\mathcal{S}_k|.$$

Sabemos que $|\mathcal{S}_k| \leq |P_{2^{k-1}}(\mathcal{L})|$. Por la forma en que hemos elegido K , tenemos que $2^{k-1} \leq L^{1/2}$. Llegados a este punto, vamos a aplicar el teorema (2.4.1) para obtener que $|P_{2^{k-1}}(\mathcal{L})| \leq L^2 2^{-3k}$. También resulta evidente que $|\mathcal{S}_k| \leq S$. Juntando lo obtenido, vemos que

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim L + \sum_{k=1}^K 2^k \min(S, 2^{-3k} L^2).$$

Pasamos a estimar el valor de la suma. Dicha suma se divide en dos términos, dependiendo de cuál de los dos términos dentro del mínimo sea menor, y en cualquiera de los casos se trata de una serie geométrica. Si es mayor $2^{-3k} L^2 \geq S$, entonces $2^k \leq S^{-1/3} L^{2/3}$, de forma que la suma está acotada por

$$\sum_{1 \leq k \leq K, 2^k \leq L^{2/3} S^{-1/3}} 2^k S + \sum_{1 \leq k \leq K, 2^k \leq L^{2/3} S^{-1/3}} 2^{-2k} L^2.$$

- Si ocurre que $2^k \geq S^{-1/3} L^{2/3} \geq 1$ entonces cada suma geométrica es menor que $L^{2/3} S^{2/3}$ salvo constante.
- Si $L^{2/3} S^{-1/3} > 2^K$, entonces solamente aparece el primer sumatorio, y el total sale menor salvo constante que $2^K S \leq L^{2/3} S^{-1/3} S = L^{2/3} S^{2/3}$.

- Por último, en el caso $L^{2/3}S^{-1/3} < 1$, entonces solo aparece el segundo sumatorio, y el total sale menor que L^2 . Pero teníamos que $L^{2/3}S^{-1/3} < 1$, luego ocurre que $L^2 < S$.

Si juntamos lo obtenido en cada caso obtenemos que

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim S^{2/3}L^{2/3} + S + L. \quad \square$$

En este teorema, como adelantamos al introducir la definición de incidencias, las rectas y los puntos juegan un papel simétrico; tal y como se puede apreciar en la propia formulación, que es simétrica respecto de L y de S : $S^{2/3}L^{2/3} + S + L$.

También vamos a incluir otra demostración alternativa sumamente interesante para el Teorema de Szemerédi-Trotter para incidencias (2.7.1) que utiliza directamente el resultado (2.5.4) sobre los números de cruzamiento y técnicas que hemos usado para la demostrar el teorema para puntos r -ricos. Esta prueba fue propuesta por Székely en [9]:

Demostración. En las mismas condiciones del teorema (2.7.1), consideremos aparte las rectas de \mathcal{L} que solo pasan por un punto de \mathcal{S} (por tanto como mucho pueden contribuir con L incidencias). El resto de rectas van a contener al menos 2 puntos de \mathcal{S} .

Consideremos ahora la representación del grafo cuyos vértices son los puntos de \mathcal{S} , y dos puntos estarán unidos por una arista si y solo si se encuentran en la misma recta y no hay un tercer punto en el segmento entre ambos. Dada una recta $l \in \mathcal{L}$, el número de aristas en dicha recta será $|\mathcal{S}_l| - 1$, donde $|\mathcal{S}_l| = \mathcal{S} \cap l$.

El número total de aristas es $\sum_l |\mathcal{S}_l| - 1 \geq |I(\mathcal{S}, \mathcal{L})|/2$.

El número de cruzamiento del grafo resultante es como mucho L^2 , pues cada cruzamiento surge de la intersección de dos rectas de \mathcal{L} . Usando (2.5.4), obtenemos que ocurre uno de los siguientes casos: o bien $|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim S$, o bien $L^2 \gtrsim |I(\mathcal{S}, \mathcal{L})|^3/S^2$.

Juntando lo obtenido en cada caso, obtenemos

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim S^{2/3}L^{2/3} + S + L. \quad \square$$

2.8. El problema de Kakeya en un cuerpo finito

El siguiente problema que vamos a abordar no es estrictamente un problema que se pueda encuadrar dentro de la geometría de incidencia, pero se trata de una interesante cuestión de geometría cercana a dicha rama que ilustra bien algunas técnicas abordadas al estudiar incidencias. Además, se trata de uno de los primeros casos donde se pudo comprobar la eficacia del método polinómico, tal y como veremos más adelante.

Un conjunto de Kakeya en el espacio euclídeo es un conjunto de puntos que contiene un segmento unitario en todas las direcciones. El buscar conjuntos de Kakeya con dimensión mínima es un problema que lleva años siendo investigado.

El problema original de Kakeya se basaba esencialmente en determinar si un conjunto de Kakeya debía tener medida positiva, y fue rebatido por Besicovitch en 1920, al encontrar un conjunto de Kakeya de medida nula. A raíz de dicho contraejemplo, el problema ha evolucionado hasta una conjetura que hoy en día se sigue investigando: ¿un conjunto de Kakeya en \mathbb{R}^n debe tener dimensión de Hausdorff n ?

Sin entrar en demasiados detalles, ya que no es el objetivo del presente trabajo, la dimensión de Hausdorff generaliza la noción de dimensión de un espacio vectorial, generalmente la dimensión de Hausdorff de un espacio con producto interno n -dimensional es n . Por ejemplo, la dimensión de Hausdorff de un punto es 0, de un segmento rectilíneo es 1, de un cuadrado es 2, de un cubo es 3... Es decir, para conjuntos de puntos que definan una figura con pocos vértices, su dimensión de Hausdorff es un entero que coincide con la dimensión topológica. Para figuras más irregulares, puede llegar a ser incluso números racionales. (Para más información al respecto, consultar [7])

Para $n = 2$, la respuesta es positiva, y fue dada por R. O. Davies en [2] en 1971. En dimensiones mayores se sigue investigando, aunque las cotas más recientes que se han logrado indican que si $\dim K$ denota la dimensión de Hausdorff de K , entonces $\dim K \geq (n + 1)/2$.

En 1999, Wolff propuso el análogo al problema de Kakeya pero en vez de en el espacio euclídeo en el espacio \mathbb{F}_q^n , siendo \mathbb{F}_q el cuerpo finito de q elementos, con la esperanza de que los resultados y las técnicas de dicho problema pudieran ser de ayuda para resolver la conjetura original.

Es este problema, la restricción al cuerpo finito, el que vamos a abordar

en el presente trabajo. A continuación lo estudiaremos sin polinomios, y más tarde comprobaremos cómo el método polinómico agiliza notablemente las demostraciones.

Un **conjunto de Kakeya** es un conjunto $K \subset \mathbb{F}_q^n$ que cumple la condición de contener una recta en cada dirección, es decir, que para todo vector no nulo $a \in \mathbb{F}_q^n$, existe un vector b de modo que la recta $\{at + b | t \in \mathbb{F}_q\}$ está contenida en K . Un ejemplo trivial de conjunto de Kakeya sería precisamente todo \mathbb{F}_q^n . Vamos a buscar conjuntos de Kakeya más pequeños, y trataremos de determinar el tamaño mínimo de los mismos.

Comenzaremos por ver un resultado que aporta una buena cota para dimensión 2:

Proposición 2.8.1. *Sea $s \leq q$ y l_1, l_2, \dots, l_s rectas distintas en \mathbb{F}_q^2 . Entonces el número de puntos del conjunto $l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_s$ es como mínimo $qs/2$. En particular, si K es un conjunto de Kakeya, entonces $|K| \geq q^2/2$.*

Demostración. Vamos a ir añadiendo las rectas de una en una y consideraremos el número de puntos en su unión. La primera recta tiene q puntos. La siguiente tendrá por lo menos $q - 1$ puntos que no estaban en la primera. La siguiente tendrá al menos $q - 2$ puntos que no estaban en las anteriores. Iterando el argumento, llegamos a que el número de puntos distintos contenidos en la unión de las s rectas será como mínimo $q + (q - 1) + (q - 2) + \dots + (q - s + 1) = sq - \frac{s(s-1)}{2} > sq - \frac{sq}{2} = qs/2$.

En el caso de los conjuntos de Kakeya, por definición K contiene como mínimo q rectas distintas, por lo que $|K| \geq q^2/2$ \square

Esta cota funciona bien en dimensión 2, pero para dimensiones mayores resulta bastante grosera y podemos refinar más la demostración. Solo hemos usado que un conjunto de Kakeya contiene más de q rectas distintas, pues la condición inicial $s \leq q$ no nos permitía escoger un número mayor de rectas. Ello se ajusta bien a $n = 2$, donde las direcciones posibles son del orden de q , pero en dimensión $n > 2$, un conjunto de Kakeya contiene más de q^{n-1} rectas distintas. Así, para dimensiones $n > 2$ podemos usar el método de Haces:

Proposición 2.8.2. *Sean l_1, l_2, \dots, l_M rectas en \mathbb{F}_q^n . La unión de las rectas tiene cardinal como mínimo $(qM^{1/2})/2$. En particular, si K es conjunto de Kakeya, entonces $|K| \geq q^{(n+1)/2}/2$.*

Demostración. Consideremos el conjunto X formado por todos los puntos de \mathbb{F}_q^n pertenecientes a alguna de las M rectas. Cada recta contiene q puntos de

X , hay M rectas en total y $|X|$ puntos, luego un punto de X pertenece en promedio a $qM/|X|$ rectas; en particular debe existir un punto $x \in X$ que pertenezca al menos a $qM/|X|$ rectas.

El conjunto de rectas que pasan por dicho punto x lo denominaremos el haz de x , y lo denotaremos \mathcal{L}_x . Como cada recta de \mathcal{L}_x tiene q puntos y todas se cortan en x , cada una cuenta con $q - 1$ puntos de X adicionales, luego el número de puntos en el haz \mathcal{L}_x es al menos $1 + \frac{(q-1)qM}{|X|}$, y como es un subconjunto de X , tenemos que

$$\frac{(q-1)qM}{|X|} \leq |X|.$$

Despejando $|X|$ obtenemos que $(q-1)qM \leq |X|^2$ y al hacer las raíces cuadradas, $(q^2 - q)^{1/2}M^{1/2} \leq |X|$. Ahora bien, el término $(q^2 - q)^{1/2}$ es mayor o igual que $q/2$ siempre que $q \geq 4/3$, aunque al ser q entero, hecho cierto ya que q es un entero mayor o igual que 2. Así obtenemos $|X| \geq (qM^{1/2})/2$.

Ahora, si K es un conjunto de Kakeya, contendrá más de q^{n-1} rectas. Sustituyendo $M = q^{n-1}$, obtenemos que $|K| \geq q^{(n+1)/2}/2$. \square

Vamos a usar un tercer método denominado “método del cepillo”, que combina ideas de los dos anteriores y aprovecha el hecho de que no hay muchas rectas de un conjunto de Kakeya que puedan ser coplanarias.

Proposición 2.8.3. *Sean l_1, l_2, \dots, l_M rectas en \mathbb{F}_q^n de forma que no haya más de $q + 1$ contenidas en un mismo plano. Entonces el cardinal de su unión es como mínimo $(q^{3/2}M^{1/2})/3$. En particular, si K es un conjunto de Kakeya, entonces $|K| \geq q^{(n+2)/2}/3$.*

Demostración. Consideremos como en la demostración anterior el conjunto X formado por todos los puntos de \mathbb{F}_q^n pertenecientes a alguna de las M rectas, y definamos también L como el conjunto de las rectas $\{l_1, l_2, \dots, l_M\}$. Para cada una de las rectas l_i de L , definimos su cepillo $B(l)$ como el conjunto de rectas l_j que tienen intersección con l_i (no incluimos a la recta l_i en su propio cepillo). Un punto de X pertenece en promedio a $qM/|X|$ rectas l_i . Vamos a comprobar que siempre existe por lo menos un cepillo que cuenta como mínimo con $q^2M/2|X|$ rectas:

Definamos $\lambda(p)$ como el número de rectas de L a las cuales pertenece el punto p . Es evidente que $\sum_{p \in X} \lambda(p) = qM$, pues cada una de las M rectas tiene q puntos. Consideremos los tríos de la forma $(l, l', p) \in L \times L \times X$ tales que $p \in l \cap l'$. El número de estos tríos es $\sum_{p \in X} \lambda(p)^2$.

Considerando el promedio de $\lambda(p)$ para los $p \in X$, y como la función x^2 es convexa, podemos usar la desigualdad de Cauchy-Schwartz para concluir que

$$\frac{\sum_{p \in X} \lambda(p)^2}{|X|} \geq \left(\frac{\sum_{p \in X} \lambda(p)}{|X|} \right)^2,$$

luego el número de tríos $\sum_{p \in X} \lambda(p)^2$ es al menos $|X|(qM/|X|)^2 = q^2M^2/|X|$. Como L tiene M rectas, una de ellas debe aparecer por lo menos en $q^2M/|X|$ tríos. Llamemos l a dicha recta. Va a haber q tríos de la forma (l, l, p) , pero el resto serán de la forma (l_i, l, p) correspondiéndose a una recta l_i del cepillo de l , y cada recta contribuye con exactamente un trío. Por tanto, el número de rectas en el cepillo de l es por lo menos $(q^2M/|X|) - q$. Si ocurre que $|X| \geq qM/2$, hemos acabado, y en caso contrario, se tiene que el cepillo de l cuenta con al menos $q^2M/2|X|$ rectas.

Sea $l \in \{l_1, l_2, \dots, l_M\}$ tal que su cepillo, $B(l)$, contiene al menos $q^2M/2|X|$ rectas. Sea Π el conjunto de los planos en \mathbb{F}_q^n que contienen a l y por lo menos a otra recta $l' \in B(l)$. Dado $\pi \in \Pi$, denotamos por $H(\pi) = \{l' \in B(l) | l' \in \pi\}$ al conjunto de rectas de $B(l)$ contenidas en π . Observamos que si $l' \in B(l)$, entonces existe un único plano π tal que $l' \in \pi$. Por tanto, por un argumento de doble conteo obtenemos:

$$\sum_{\pi \in \Pi} |H(\pi)| = \sum_{l' \in B(l)} |\{\pi \in \Pi | l' \in \pi\}| = |B(l)| \geq q^2M/2|X|.$$

La misma técnica usada en (2.8.1) permite demostrar que $|\cup_{l' \in H(l)} l' - l| \geq |H(\pi)|(q-1)/2$. Si $q \geq 3$, es fácil ver que $|H(\pi)|(q-1)/2 \geq |H(\pi)|q/3$; y para el caso $q = 2$ se obtiene la misma cota. Por construcción, dos planos distintos $\pi, \pi' \in \Pi$ se cortan únicamente en l , por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} |\cup_{l' \in B(l)} l'| &\geq |\cup_{\pi \in \Pi} (\cup_{l' \in H(\pi)} l' - l)| = \sum_{\pi \in \Pi} |\cup_{l' \in H(\pi)} l' - l| \geq \sum_{\pi \in \Pi} q|H(\pi)|/3 = \\ &= (q/3) \sum_{\pi \in \Pi} |H(\pi)| \geq (q/3)q^2M/2|X| = q^3M/(6|X|). \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene también que $|X| \geq q^3M/(6|X|)$, y como consecuencia,

$$|X| \geq (1/3)q^{3/2}M^{1/2}.$$

Ahora sea $K \in \mathbb{F}_q^n$ un conjunto de Kakeya. Se tiene que $K \supset \cup_{i=1}^M l_i$ con l_1, l_2, \dots, l_M rectas con vectores directores distintos de modo que tengamos una en cada dirección posible. Esta última condición implica que $M \geq q^{n-1}$, ya que el número de direcciones distintas posibles es $\frac{q^n-1}{q-1} = 1 + q + \dots + q^{n-1}$. El hecho de que los vectores directores sean distintos implica que a lo sumo $q+1$ de ellos están contenidos en un mismo plano. Aplicando la desigualdad probada antes, obtenemos que

$$|K| \geq \frac{1}{3} q^{3/2} M^{1/2} \geq \frac{1}{3} q^{3/2} q^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{3} q^{\frac{n+2}{2}}$$

□

Este método nos indica que en \mathbb{F}_q^3 , un conjunto de Kakeya tiene dimensión $|K| \gtrsim q^{5/2}$. En el caso general, indica que si tenemos un conjunto $\{l_i\}$ de q^2 rectas sin que 3 compartan un mismo plano, entonces $|\cup l_i| \gtrsim q^{5/2}$.

2.9. Preguntas abiertas

2.9.1. Problema de las distancias distintas

Dados N puntos en el plano, ¿cuál es el número mínimo de distancias distintas al que pueden dar lugar? Es decir, sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de N puntos, hallar el cardinal mínimo de $d(P) = \{|p_1 - p_2|\}_{p_1, p_2 \in P, p_1 \neq p_2}$.

Un conjunto de N puntos en posición general da lugar a $\binom{N}{2}$ distancias distintas (una para cada par de puntos). No es difícil mejorar este resultado: si los colocamos equiespaciados a lo largo de una recta, obtenemos $N-1$ distancias distintas.

Erdős ya comprobó que era más óptimo colocarlos de modo que formen una rejilla cuadrada (similar a como los colocábamos en las configuraciones en red). Si P es el conjunto de puntos con coordenadas enteras (a, b) con $1 \leq a, b \leq S$, siendo $S^2 = N$, entonces la distancia entre dos puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) resulta ser $((a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2)^{1/2}$. Como $|(a_1 - a_2)^2| \leq S^2 = N$, entonces el valor $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$ es un entero positivo menor o igual que $2N$. Dicho valor es suma de dos cuadrados perfectos, cosa que no son todos los números en el rango $[1, 2N]$. Erdős ya tenía experiencia en la teoría de números, y pudo demostrar que $|d(P)| \sim N(\log N)^{-1/2}$. Hasta la fecha, no se ha encontrado ningún ejemplo significativamente mejor que el de la configuración de malla cuadrada.

Tiempo después, se ha seguido estudiando y trabajando para mejorar algo esta cota. Szemerédi y Trotter investigaron este problema, y ello les motivó a probar su teorema. Usando el número de cruzamiento, Szekely probó que $|d(P)| \gtrsim N^{-4/5}$, y antes de usar métodos polinómicos, la mejor cota era $|d(P)| \gtrsim N^{0.86}$.

2.9.2. Problema de las distancias unitarias

Dados N puntos en el plano, ¿cuál es el número máximo de distancias unitarias al que pueden dar lugar? Es decir, sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de N puntos, hallar el número máximo de pares de puntos p_1, p_2 de manera que $|p_1 - p_2| = 1$.

Para empezar, sea P el conjunto de puntos $(1, 0), (2, 0), \dots, (N, 0)$. Es evidente que en P hay $N - 1$ distancias unitarias.

Se puede encontrar conjuntos con un número de distancias unitarias que crezca de forma mucho más rápida. Por ejemplo, consideremos u_1, u_2, \dots, u_a vectores unitarios, y los $N = 2^a$ puntos de la forma $\sum_j c_j u_j$ con c_j valiendo 0 ó 1. Cada punto está a distancia unitaria de otros a puntos, luego el número de distancias unitarias será $a2^a = N \log_2 N$.

Erdős trabajó con una malla cuadrada escogiendo un espaciado adecuado, y logró más distancias distintas que en el mencionado ejemplo con los vectores unitarios. Llegó a probar que el número de distancias unitarias determinadas por N puntos era menor salvo constante que $N^{3/2}$. Más tarde, Szemerédi, Trotter y Spencer lograron refinar la cota hasta $N^{4/3}$. Hasta la fecha, no se ha logrado mejorar esta acotación.

2.9.3. Otros problemas no resueltos

El teorema de Szemerédi-Trotter se centra en los puntos r -ricos de un conjunto de rectas, pero podemos plantear variaciones sustituyendo dichas rectas por circunferencias, parábolas u otros tipos de curvas. Estos problemas son sumamente complicados y muy difíciles de abordar con las estrategias que hemos presentado hasta aquí.

Hablaremos brevemente del problema con circunferencias unitarias (es decir, de radio 1), ya que es uno de los problemas que más han sido estudiados. Si \mathcal{L} es un conjunto de L circunferencias unitarias en el plano, adaptando el argumento que utiliza los números de cruzamiento se obtiene de nuevo la cota $|P_r(\mathcal{L})| \lesssim L^2 r^{-3} + L r^{-1}$, ello es la misma que para rectas. No se

ha logrado mejorar esta cota, y tampoco se han encontrado ejemplos que la ejemplifiquen de forma satisfactoria.

Es fácil hallar ejemplos con L/r puntos r -ricos sin más que elegir precisamente L/r puntos y trazar r circunferencias que contengan a cada uno de ellos. Con $r = 2$ también es fácil hallar ejemplos de forma que $|P_2(\mathcal{L})| \sim L^2$. Es a partir de aquí cuando los ejemplos dejan de ser tan efectivos, concretamente, en el rango $3 \leq r \ll L^{1/2}$ encontramos que los ejemplos se alejan significativamente de la cota superior mencionada.

Para rectas, teníamos que la configuración de red daba lugar a $|P_r(\mathcal{L})| \sim L^2 r^{-3}$, pero dicho ejemplo no funciona tan bien al trabajar con circunferencias, pues una circunferencia puede contener muy pocos puntos de la configuración.

También se ha estudiado ampliamente la estimación del máximo número de incidencias entre L circunferencias unitarias y un conjunto de L puntos (equivalente al problema de las distancias unitarias), en este caso, aplicando métodos usados en el teorema de Szemerédi-Trotter, se obtiene que el número de incidencias es menor salvo constante que $L^{4/3}$, y el mejor ejemplo es una configuración de red.

Capítulo 3

El método polinómico

Hasta ahora hemos visto resultados de Geometría de Incidencia y del problema de Kakeya utilizando métodos propios de éstos, como teoría de grafos, la fórmula de Euler o propiedades geométricas básicas. Pero un gran descubrimiento en este campo fue la utilización de métodos polinómicos para lograr demostraciones distintas, y en algunos casos más claras y eficientes.

3.1. Notación

Para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vamos a definir el **conjunto de los ceros de la función** $Z(f)$ como

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

Vamos a decir que una función f **biseca** un abierto de volumen finito U cuando

$$\text{Vol}\{x \in U \mid f(x) < 0\} = \text{Vol}\{x \in U \mid f(x) > 0\}.$$

Evidente ambos volúmenes valdrán la mitad del volumen total de U .

Del mismo modo, si \mathcal{S} es un conjunto finito de S puntos, diremos que una función f **biseca** a \mathcal{S} cuando $|\{x \in \mathcal{S} \mid f(x) < 0\}| \leq S/2$ y $|\{x \in \mathcal{S} \mid f(x) > 0\}| \leq S/2$. Nótese que puede ocurrir que $f(x) = 0$ para algún punto de S .

3.2. El método polinómico

El método polinómico que vamos a emplear para obtener demostraciones alternativas, y en algunos casos más eficientes, a algunos problemas se puede resumir en general de la siguiente manera: dado un conjunto finito S de puntos en el plano que goce de cierta propiedad geométrica, vamos a definir un polinomio f (o puede que varios polinomios) para trasladar dicha propiedad geométrica de S a una propiedad algebraica de f . Con resultados de geometría algebraica (o en ciertos casos simples propiedades de los polinomios), deduciremos propiedades algebraicas adicionales que debe cumplir f , lo cual nos dará pie a deducir propiedades interesantes que debe cumplir S .

Por ejemplo, si S es un conjunto finito con cierta propiedad geométrica y definimos un polinomio f que traslade dicha propiedad geométrica a una algebraica y que además cumpla que su grado sea función de $|S|$, entonces si logramos probar que el grado del polinomio f está acotado, también obtendremos una cota para el cardinal $|S|$.

A continuación vamos a ver algunos ejemplos del método polinómico. Para ello, vamos a introducir dos herramientas muy útiles llamadas el lema de anulación y el argumento de conteo de parámetros. Se trata de dos lemas simples de probar que utilizaremos principalmente para demostrar el teorema de Kakeya en un cuerpo finito.

3.2.1. Lemas previos

Sea \mathbb{F} un cuerpo finito. Vamos a denotar por $Pol_D(\mathbb{F}^n)$ al conjunto de los polinomios en n indeterminadas con coeficientes en \mathbb{F} y cuyo grado total sea menor o igual que D . El espacio $Pol_D(\mathbb{F}^n)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} . Vamos a calcular la dimensión de $Pol_D(\mathbb{F}^n)$ para usarlo más adelante:

Lema 3.2.1. $\dim(Pol_D(\mathbb{F}^n)) = \binom{D+n}{n}$

Demostración. Una base de $Pol_D(\mathbb{F}^n)$ está formada por los monomios $x_1^{D_1} x_2^{D_2} \dots x_n^{D_n}$ donde los exponentes son no negativos y suman como máximo D . Vamos a hacer inducción sobre $D + n$:

El caso $n = 1$ ó $D = 1$ es trivial. Ahora, para $D + n \geq 2$:

$$|\{x_1^{D_1} \dots x_n^{D_n} \mid \sum D_i = D\}| = |\{x_1^{D_1} \dots x_{n-1}^{D_{n-1}} \mid \sum D_i \leq D\}| = \binom{D+n-1}{n-1}.$$

$$|\{x_1^{D_1} \dots x_n^{D_n} \mid \sum D_i < D\}| = \binom{D+n-1}{n}.$$

Y por la identidad de Pascal, la suma de ambos términos es igual a $\binom{D+n}{n}$. \square

Ahora sea $S \subset \mathbb{F}^n$ un conjunto finito de puntos. Busquemos si existe algún polinomio no nulo $P \in \text{Pol}_D(\mathbb{F}^n)$ que valga 0 en los puntos de S . Empezaremos por usar un argumento que utiliza la dimensión hallada:

Lema 3.2.2 (Conteo de parámetros). *Sea S un conjunto finito en \mathbb{F}^n con $|S|$ menor que $\binom{D+n}{n}$. En tal caso, existe un polinomio no nulo $P \in \text{Pol}_D(\mathbb{F}^n)$ que se anula en los puntos de S .*

Demostración. Consideremos el conjunto de los puntos de $S = \{p_1, p_2, \dots, p_{|S|}\}$. Ahora consideremos la aplicación que evalúa un polinomio Q en los puntos de S , es decir, $E : \text{Pol}_D(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{F}^{|S|}$ dado por $E(Q) = (Q(p_1), Q(p_2), \dots, Q(p_{|S|}))$.

Es fácil ver que es una aplicación lineal. El núcleo de E estará formado precisamente por todos los polinomios del espacio de definición que se anulan en los puntos de S .

La hipótesis nos indica que $\dim(\text{Pol}_D(\mathbb{F}^n)) > |S|$, luego por el Teorema del Rango el núcleo de la aplicación debe tener dimensión estrictamente positiva y por tanto algún elemento no nulo.

Finalmente, usando el Lema (3.2.1), sustituyendo $\dim(\text{Pol}_D(\mathbb{F}^n)) = \binom{D+n}{n}$ llegamos al resultado. \square

Vamos a introducir un pequeño corolario que proporciona una cota algo más grosera, pero que nos será útil más adelante:

Corolario 3.2.3. *Sea S un conjunto finito en \mathbb{F}^n con $n \geq 2$, entonces existe un polinomio no nulo de grado menor o igual que $n|S|^{1/n}$ que se anula en los puntos de S .*

Demostración. Sea $D = \lfloor n|S|^{1/n} \rfloor$. Entonces

$$\begin{aligned} \binom{D+n}{n} &= \frac{(D+n)!}{n!D!} = \frac{(D+n)(D+n-1)\dots(D+1)}{n!} > D^n/n! = \\ &= \lfloor n^n|S| \rfloor / n! > |S|. \end{aligned}$$

Por tanto se cumple la hipótesis del Lema (3.2.2) y debe existir un polinomio no nulo en $\text{Pol}_D(\mathbb{F}^n)$ que se anule en S . \square

A continuación hablaremos del lema de anulación, que más tarde usaremos para aplicar el método polinómico.

Lema 3.2.4 (Lema de anulación). *Si $P \in \text{Pol}_D(\mathbb{F}^n)$ y P se anula en $D + 1$ puntos de una recta l , entonces P se anula en toda la recta l .*

Se trata de una generalización de un resultado mucho más simple y universalmente conocido, que afirma que si $P \in \text{Pol}_D(\mathbb{F})$ y P se anula en $D + 1$ puntos, entonces P es el polinomio nulo.

Demostración. Parametrizamos l por la aplicación $\phi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^n$ de forma $\phi(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{F}^n$ y a no nulo. Definimos $Q(t) = P(\phi(t)) = P(at + b)$. $Q(t)$ es un polinomio en una indeterminada con grado menor o igual que D . Como P se anula en $D + 1$ puntos de l , Q se anula en $D + 1$ valores de t . Por el resultado antes mencionado, Q es el polinomio nulo y P se anula en l . \square

También vamos a introducir otro resultado para usarlo más adelante:

Lema 3.2.5. *Si $P \in \text{Pol}_{q-1}(\mathbb{F}_q^n)$ y P se anula en todos los puntos de \mathbb{F}_q^n , entonces es el polinomio nulo.*

Demostración. Usaremos inducción sobre n :

Para $n = 1$, se deduce inmediatamente del resultado anterior: P se anula en $q > \text{grado}(P)$ puntos de \mathbb{F}_q , luego es el polinomio nulo.

Hacemos el paso de inducción. Escribamos

$$P = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{q-1} P_j(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^j.$$

En esta fórmula, P_j son polinomios en las indeterminadas x_1, \dots, x_{n-1} con grado menor o igual que $q-1$. Fijamos los valores de todas las indeterminadas $x_i \in \mathbb{F}_q^n$ salvo de x_n . Obtenemos un polinomio en x_n de grado menor o igual que $q-1$ que se anula en todos los valores en \mathbb{F}_q , luego el lema de anulación nos dice que es el polinomio nulo. Aplicamos la inducción sobre n y concluimos que cada polinomio P_j es el polinomio nulo, por lo que P resulta ser el polinomio nulo. \square

3.3. El problema de Kakeya en un cuerpo finito

Volvemos a centrarnos en el problema de encontrar conjuntos de Kakeya que sean significativamente más pequeños que el espacio total utilizando el

método polinómico. Para los resultados anteriores no ha hecho falta tener en cuenta el número de elementos del cuerpo con el que trabajábamos, pero ahora vamos a considerar \mathbb{F}_q^n , el cuerpo finito de q elementos:

Teorema 3.3.1. *Si $K \subset \mathbb{F}_q^n$ es un conjunto de Kakeya, entonces tiene como mínimo q^n/n^n elementos.*

Demostración. Lo probaremos por Reducción al Absurdo: supongamos que existe en \mathbb{F}_q^n un conjunto de Kakeya K de forma que $|K| < q^n/n^n$. Por el Lema (3.2.3), existe un polinomio no nulo P de grado D que se anula en los puntos de K y de forma que $D \leq n|K|^{1/n} < q$. Escribiremos dicho polinomio como $P = P_D + Q$, donde P_D será un polinomio no nulo homogéneo de grado D y Q será el resto de términos, de forma que el grado de Q será menor que D .

Sea a un vector no nulo en \mathbb{F}_q^n . Elijamos b de forma que la recta $\{at + b | t \in \mathbb{F}_q\}$ esté contenida en K . Sea $R(x) = P(ax + b)$, $R(x)$ es un polinomio y $\text{grado}(R) \leq D < q$. Puesto que $R(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{F}_q^n$, por el lema de anulación (3.2.4), R es el polinomio nulo y todos sus coeficientes deben ser 0. Pero el coeficiente del término x^D en R es precisamente $P_D(a)$, lo que quiere decir que $P_D(a)$ se anula para todo $a \in \mathbb{F}_q^n - \{0\}$. Como P_D era homogéneo de grado D estrictamente positivo, entonces también se anula en 0, luego resulta que P_D se anula en todos los puntos de \mathbb{F}_q^n . Como $D < q$, el Lema (3.2.5) nos dice que P_D debe ser el polinomio nulo y llegamos a una contradicción. \square

Para concluir, vamos a comparar la información conseguida sobre el número mínimo de elementos de un conjunto de Kakeya utilizando el método polinómico y la obtenida anteriormente.

La nueva cota es $|K| \geq q^n/n^n$, que en la notación introducida al principio podemos escribir como $|K| \gtrsim q^n$; pues n^n es una constante que depende solamente de n .

La que habíamos obtenido anteriormente es $|K| \geq q^{\frac{n+1}{2}}/2$, que de nuevo podemos escribir $|K| \gtrsim q^{\frac{n+1}{2}}$.

Notemos que la cota obtenida con el método polinómico es mucho mejor, pues en general nos acota el tamaño de los conjuntos de Kakeya por un número más grande. Además, esta última demostración solamente ha requerido propiedades de polinomios y es notablemente más simple y directa que la anterior. Por tanto, éste es un claro ejemplo de caso en el que el método

polinómico simplifica las demostraciones y puede mejorar algunos resultados obtenidos por otras vías.

3.4. El Teorema de Szemerédi-Trotter

Para probar el Teorema de Szemerédi-Trotter utilizando el método polinómico, tenemos que hacer uso de un resultado conocido como el Teorema del Bocadillo de jamón. En este caso particular, lo que vamos a hacer va a ser adaptarlo para el caso de conjuntos finitos, sustituyendo los conjuntos de volumen finito del teorema original por conjuntos finitos de puntos, y más tarde lo usaremos para demostrar que podemos lograr un polinomio de forma que cada una de las celdas en las que divide al plano contenga, a lo sumo, un número adecuado de puntos.

3.4.1. Teorema del Bocadillo de jamón general

Vamos a recordar el Teorema del Bocadillo de jamón; aquí ofreceremos una demostración para una dimensión arbitraria, pero no olvidemos que en este caso particular, dado que estamos trabajando en el plano, nos bastaría considerar el caso de \mathbb{R}^2 .

Para esta demostración, es necesario recordar antes el Teorema de Borsuk-Ulam, que enunciamos a continuación:

Teorema 3.4.1 (Borsuk-Ulam). *Si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, entonces existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $-f(x) = f(-x)$.*

Se puede encontrar una demostración del teorema en [8].

Concretamente, en este trabajo utilizaremos un corolario de dicho teorema:

Corolario 3.4.2. *Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua y antipodal, es decir, $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{S}^n$. Entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Demostración: Por el Teorema (3.4.1), $\exists x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0)$. Por tanto, $f(x_0) = 0$. □

Teorema 3.4.3 (Teorema del Bocadillo de jamón). *Sea V un espacio vectorial de funciones continuas en \mathbb{R}^n y tales que para cada $f \in V - \{0\}$, el*

conjunto $Z(f)$ es de medida nula. Sean $U_1, U_2, \dots, U_N \subset \mathbb{R}^n$ abiertos con volumen finito y con $N < \dim V$. Entonces existe $f \in V - \{0\}$ que biseca a cada uno de los abiertos U_i .

Demostración: Para cada $i = 1, 2, \dots, N$, definimos la función $\phi_i : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\phi_i(F) = \text{Vol}(\{x \in U_i | F(x) > 0\}) - \text{Vol}(\{x \in U_i | F(x) < 0\}).$$

Las funciones ϕ_i son claramente antipodales, pues $\phi_i(-F) = -\phi_i(F)$. Además, $\phi_i(F) = 0$ si y solo si F biseca el conjunto U_i .

Sea ahora $\phi : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$.

Sabemos que $\dim V > N$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\dim V = N+1$. Elijamos un isomorfismo de V en \mathbb{R}^{N+1} y consideremos \mathbb{S}^N como subconjunto de V . Para ello, lo que hacemos es considerar $\{f_1, \dots, f_{N+1}\}$ una base de V , e identificamos el elemento de $(\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1})$ de \mathbb{R}^{N+1} con $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{N+1} f_{N+1}$ de V . De esta forma, \mathbb{S}^N resulta el conjunto de funciones de V con norma 1.

La aplicación $\phi : \mathbb{S}^N \simeq V - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ es antipodal, y si además es continua, aplicando (3.4.2), concluimos que existe una función $F \in \mathbb{S}^N \subset V - \{0\}$ tal que $\phi(F) = 0$. Dicha función F biseca a cada uno de los U_i .

Lo único que queda es asegurarse de que en efecto ϕ es continua. Lo afirmaremos como un pequeño lema:

Lema de continuidad: Sea V un espacio vectorial de funciones continuas en \mathbb{R}^n de dimensión finita. En estas condiciones, si U es un abierto de volumen finito, entonces la medida del conjunto $\{x \in U | f(x) > 0\}$ depende de forma continua de f .

Demostración: Supongamos que f es una función no nula de V , y $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset V$ una sucesión de funciones con $f_n \rightarrow f$ en V . A priori, f_n converge a f con la topología de V , ello es que las coordenadas de los términos de f_n convergen a los de f . Pero ello implica también la convergencia puntual. Sea $\epsilon > 0$. Podemos encontrar un subconjunto $E \subset U$ de forma que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en los puntos de $U - E$, y la medida de E sea menor que ϵ . (Ver Teorema 4.4 en [10])

El conjunto $\{x \in U | f(x) = 0\}$ es de medida nula, y U tiene medida finita. Sabiendo esto, podemos elegir un δ de forma que el conjunto $\{x \in U | |f(x)| < \delta\}$ tenga medida menor que ϵ . (Ver Teorema 3.3 en [10])

Elegimos un n suficientemente grande para que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ en $U - E$. Entonces las medidas de los conjuntos $\{x \in U | f_n(x) > 0\}$ y $\{x \in U | f(x) > 0\}$ difieren como mucho en 2ϵ , pero como el ϵ es arbitrariamente pequeño, concluye la demostración. \square

\square

En nuestro caso, dichas funciones f van a ser polinomios, que cumplen que son continuos y que el conjunto de sus ceros tiene medida nula.

3.4.2. Teorema del Bocado de jamón para conjuntos finitos

Vamos a adaptar el teorema del Bocado de jamón general para conjuntos finitos de puntos:

Teorema 3.4.4 (Teorema del bocado de jamón para conjuntos finitos). *Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_N$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^n de forma que $N < \binom{D+n}{n} = \dim Pol_D(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe un polinomio P no nulo $P \in Pol_D(\mathbb{R}^n)$ que biseca a cada uno de los conjuntos \mathcal{S}_i para $1 \leq i \leq n$.*

Para esta demostración vamos a aplicar el teorema del Bocado de jamón considerando δ -bolas en torno a cada uno de los puntos, para luego hacer δ tender hacia 0.

Demostración: Sea $\delta > 0$ y sea $U_{i,\delta} = \cup_{p_j \in \mathcal{S}_i} B(p_j, \delta)$ el conjunto formado por la unión de las δ -bolas centradas en los puntos de \mathcal{S}_i y con radio δ , de forma que las bolas sean disjuntas. Por el Teorema del Bocado de jamón, existe un polinomio P_δ con grado menor o igual que D que biseque a cada uno de los $U_{i,\delta}$. De forma similar a la anterior demostración, reescalamos P_δ para que $P_\delta \in \mathbb{S}^N \subset Pol_D(\mathbb{R}^n) - \{0\}$, es decir, dividimos el polinomio por su norma para asegurarnos de que el resultante tiene norma 1.

De esta forma, como \mathbb{S}^N es compacta, escogemos una sucesión $\delta_m \rightarrow 0$ de forma que $P_{\delta_m} \rightarrow P$ siendo P un polinomio $P \in \mathbb{S}^N \subset Pol_D(\mathbb{R}^n) - \{0\}$. Como cada uno de los coeficientes de P_δ converge a los coeficientes de P , se tiene que P_δ converge a P de forma uniforme en los compactos.

Vamos a ver que P biseca a cada uno de los \mathcal{S}_i por reducción al absurdo: de no ser así, podemos suponer que $P > 0$ en más de la mitad de los puntos de \mathcal{S}_i (el caso $P < 0$ sería análogo). Sea $\mathcal{S}_i^+ = \mathcal{S}_i \cap (P > 0)$. Elijamos un

$\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $P > \epsilon$ en torno a cada punto de \mathcal{S}_i^+ y además que las ϵ -bolas sean disjuntas. Como $P_\delta \rightarrow P$ uniformemente en los compactos, escogamos un m suficientemente grande para que cumpla que $\delta_m < \epsilon$. Entonces $P_{\delta_m} > 0$ en más de la mitad de U_{i,δ_m} . Esta contradicción prueba que P biseca a \mathcal{S}_i . \square

Nota: supongamos que hemos fijado el número n (es decir, la dimensión del espacio ambiente). Recordemos que se tiene que:

$$\binom{D+n}{n} = \frac{(D+n)!}{n!D!} = \frac{(D+n)(D+n-1)\dots(D+1)}{n!} > D^n/n!.$$

Si fijamos ahora N , tendremos que para $D \geq \sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n]{N}$ existe un polinomio $P \in \text{Pol}_D(\mathbb{R}^n)$ que biseca los conjuntos $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_N$. Así pues un grado $D \sim N^{1/n}$ es suficiente para bisecar N conjuntos finitos. El resultado se debe interpretar asintóticamente en función de N y con n fijo. Obsérvese que para $n = 2$ el grado $D \geq \sqrt{2}N^{1/2}$ es suficiente.

3.4.3. Teorema de Partición Polinómica

A continuación vamos a probar el Teorema de Partición Polinómica, para comprobar que existe un polinomio de forma que cada una de las celdas en las que sus ceros dividen el espacio contenga un número uniforme de puntos de \mathcal{S} .

Teorema 3.4.5 (Teorema de Partición Polinómica). *Sea $n \geq 2$ un entero. Existe $C(n) \in \mathbb{R}$ una constante que depende solo de n de forma que si \mathcal{S} es un subconjunto finito de \mathbb{R}^n y $D \geq 1$ es un entero, entonces existe un polinomio $P \in \text{Pol}_D(\mathbb{R}^n)$ no nulo tal que $\mathbb{R}^n - Z(P) = O_1 \sqcup O_2 \sqcup \dots \sqcup O_t$ con O_1, O_2, \dots, O_t abiertos disjuntos, $t \lesssim D^2$, y de forma que $|O_i \cap \mathcal{S}| \lesssim |\mathcal{S}|/D^n$.*

Demostración: La idea de la prueba es usar reiteradamente el Teorema del Bocado de Jamón para conjuntos finitos como medio para obtener subdivisiones sucesivas. Más concretamente, vemos en primer lugar que:

Lema 3.4.6. *Dado un conjunto finito de cardinal S , para un entero $l \geq 1$, existen polinomios P_1, P_2, \dots, P_l de grados d_1, d_2, \dots, d_l con $d_i \leq a(n)2^{(i-1)/n}$ para $i = 1 \dots l$ de forma que $\mathbb{R}^n - Z(P_1 P_2 \dots P_l) = O_1 \sqcup O_2 \sqcup \dots \sqcup O_{2^l}$ con O_1, O_2, \dots, O_{2^l} abiertos disjuntos y $|O_i \cap \mathcal{S}| \lesssim |\mathcal{S}|/2^l$.*

Demostración: Por el Teorema del Bocadillo de Jamón para conjuntos finitos (3.4.4), existe un polinomio P_1 de grado $d_1 = 1$ que biseca \mathcal{S} . Denotemos por $O_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | P_1(x) > 0\}$ y $O_- = \{x \in \mathbb{R}^n | P_1(x) < 0\}$, y sean $\mathcal{S}_+ = O_+ \cap \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}_- = O_- \cap \mathcal{S}$. De esta forma tenemos $\mathbb{R}^n - Z(P_1) = O_+ \sqcup O_-$ y $|\mathcal{S}_+|, |\mathcal{S}_-| \leq |\mathcal{S}|/2$.

Aplicamos el Teorema del Bocadillo de Jamón para conjuntos finitos (3.4.4) a las componentes \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- : existe un polinomio P_2 de grado $d_2 \leq a(n)2^{1/n}$ de forma que biseca a \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- , es decir, tomando $O_{\epsilon_1+} = O_{\epsilon_1} \cap \{P_2 > 0\}$, $O_{\epsilon_1-} = O_{\epsilon_1} \cap \{P_2 < 0\}$, y $\mathcal{S}_{\epsilon_1\epsilon_2} = O_{\epsilon_1\epsilon_2} \cap \mathcal{S}_{\epsilon_1}$ con $\epsilon_i \in \{+, -\}$ para $i = 1, 2$ tenemos que $\mathbb{R}^n - Z(P_1P_2) = \cup_{\epsilon_i \in \{+, -\}} O_{\epsilon_1\epsilon_2}$ como unión disjunta de abiertos y $|\mathcal{S}_{\epsilon_1\epsilon_2}| \leq |\mathcal{S}|/2^2$.

Iterando el procedimiento, para $t \leq l$ tendremos polinomios P_1, P_2, \dots, P_t de grados $d_i \leq a(n)2^{(i-1)/n}$ para $i = 1 \dots t$ y abiertos disjuntos $O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_t}$ con $\epsilon_i \in \{+, -\}$ de manera que $\mathbb{R}^n - Z(P_1 \dots P_t) = \cup_{\epsilon_i \in \{+, -\}} O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_t}$ y $|\mathcal{S}_{\epsilon_1 \dots \epsilon_t}| \leq |\mathcal{S}|/2^t$ siendo $\mathcal{S}_{\epsilon_1 \dots \epsilon_t} = O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_t} \cap \mathcal{S}$.

Puesto que el número de abiertos $O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_t}$ es 2^t (pues cada ϵ puede tomar dos valores, $+$ y $-$), se obtiene el resultado.

Nótese que, puesto que en la etapa $t - 1$ el número de “celdas” (abiertos) es 2^{t-1} y por lo tanto el grado de P_t es $d_t \leq a(n)2^{(t-1)/n}$ y se puede tomar $a(n) = \sqrt[n]{n!}$ (ver la nota anterior). Asimismo,

$$O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_{t-1}+} = O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_{t-1}} \cap \{P_t > 0\} \text{ y } O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_{t-1}-} = O_{\epsilon_1 \dots \epsilon_{t-1}} \cap \{P_t < 0\}. \quad \square$$

Una vez visto el lema, seguimos con la demostración del Teorema: observemos en primer lugar que si $P = P_1P_2 \dots P_l$, entonces el grado de P es

$$d = \sum_{i=1}^l \text{grado}(P_i) \leq a(n) \sum_{i=1}^l 2^{(i-1)/n} = \frac{a(n)}{2^{1/n} - 1} (2^{l/n} - 1) < c(n)2^{l/n}.$$

Fijemos ahora $d \geq 1$ y sea l con la condición

$$c(n)2^{(l-1)/n} < D \leq c(n)2^{l/n}.$$

Tendremos que el polinomio $P = P_1P_2 \dots P_l$ tiene grado menor o igual que D , por lo que $\mathbb{R}^n - Z(P)$ descompone como unión disjunta de 2^l abiertos disjuntos O_1, O_2, \dots, O_{2^l} y cada uno de ellos contiene a lo sumo $|\mathcal{S}|/2^l$ puntos de $|\mathcal{S}|$. Ahora, tenemos que $|\mathcal{S}|/2^l \leq |\mathcal{S}|c(n)^n/D^n \lesssim |\mathcal{S}|/D^n$ y para el número de “celdas” O_1, O_2, \dots, O_{2^l} tenemos que

$$2^l = 2 \cdot 2^{l-1} < 2D^n/c(n)^n \lesssim D^n$$

lo que finaliza la demostración. □

3.4.4. El Teorema de Szemerédi-Trotter

Tras haber probado estos resultados previos, finalmente estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Szemerédi-Trotter utilizando el método polinómico:

Teorema 3.4.7 (Szemerédi-Trotter para incidencias). *Sea \mathcal{S} un conjunto finito de puntos en el plano y \mathcal{L} un conjunto finito de rectas. Definamos S como el cardinal de \mathcal{S} y L como el de \mathcal{L} . En tal caso se cumple que*

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim S^{2/3}L^{2/3} + S + L.$$

Demostración. Notemos antes de nada, que si se da que $L > S^2$ ó que $L^2 < S$, entonces el teorema se deduce como corolario del Lema (2.3.1) probado anteriormente: supongamos que $L > S^2$. En este caso,

$$S^{2/3}L^{2/3} + S + L > S^{2/3}S^{4/3} + S + L = S^2 + S + L > S^2 + L$$

y se tendría que $|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \leq S^2 + L \leq S^{2/3}L^{2/3} + S + L$ por el Lema (2.3.1). De igual manera, si $L^2 < S$ el mismo resultado prueba el teorema. Por lo tanto podemos restringirnos al caso $S^{1/2} \leq L \leq S^2$.

Sea D un entero (que fijaremos más adelante). Por el Teorema de Partición Polinómica (3.4.5), existe un polinomio $P \in \text{Pol}_D(\mathbb{R}^2)$ de modo que $\mathbb{R} - Z(P) = O_1 \sqcup O_2 \sqcup \dots \sqcup O_t$, con O_1, O_2, \dots, O_t abiertos disjuntos y $t \lesssim D^2$, y si $\mathcal{S}_i = O_i \cap \mathcal{S}$, con $1 \leq i \leq t$, se tiene que $|\mathcal{S}_i| \lesssim |\mathcal{S}|/D^2$. Para cada $i = 1, \dots, t$ sea $\mathcal{L}_i = \{l \in \mathcal{L} | l \cap O_i \neq \emptyset\}$ el conjunto de rectas de \mathcal{L} que cortan a la celda O_i .

Separaremos el conjunto de los puntos \mathcal{S} y de rectas \mathcal{L} de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{S}_z = \mathcal{S} \cap Z(P)$ y sea $\mathcal{S}_c = \mathcal{S} - \mathcal{S}_z$. Denotamos por S_z, S_c sus cardinales.

Sea $\mathcal{L}_z = \{l \in \mathcal{L} | l \subset Z(P)\}$, y sea $\mathcal{L}_c = \mathcal{L} - \mathcal{L}_z$. Denotamos por L_z, L_c sus cardinales.

De esta forma, podemos dividir el conjunto de incidencias de la siguiente forma:

$$I(\mathcal{S}, \mathcal{L}) = I(\mathcal{S}_c, \mathcal{L}) \sqcup I(\mathcal{S}_z, \mathcal{L}) = I(\mathcal{S}_c, \mathcal{L}) \sqcup I(\mathcal{S}_z, \mathcal{L}_c) \sqcup I(\mathcal{S}_z, \mathcal{L}_z).$$

(Notemos que $I(\mathcal{S}_c, \mathcal{L}_z) = \emptyset$).

A la hora de contar el número de incidencias, tenemos por tanto que

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \leq |I(\mathcal{S}_c, \mathcal{L})| + |I(\mathcal{S}_z, \mathcal{L}_c)| + |I(\mathcal{S}_z, \mathcal{L}_z)|.$$

Tratemos de acotar cada uno de los términos:

- Para acotar el primer término, aplicamos el lema (2.3.1) a cada una de las celdas: $|I(\mathcal{S}_i, \mathcal{L}_i)| \leq L_i + S_i^2$.

Y en total, vemos que

$$|I(\mathcal{S}_c, \mathcal{L})| = \sum_i |I(\mathcal{S}_i, \mathcal{L}_i)| \leq \sum_i (L_i + S_i^2) = \sum_i L_i + \sum_i S_i^2.$$

Una recta que no esté contenida en $Z(P)$ corta a éste como mucho D veces (debido a que como el grado de P era menor o igual que D , podemos aplicar el resultado (3.2.4)), por ello una recta atraviesa como mucho a $D + 1$ celdas. Luego el sumatorio de L_i lo podemos acotar por $(D + 1)L$.

En cuanto al término $\sum_i S_i^2$, podemos hacer

$$\sum_i S_i^2 \lesssim \sum_i S_i(SD^{-2}) = SD^{-2} \sum_i S_i \leq S^2 D^{-2}.$$

Concluyendo la acotación del primer término, obtenemos que

$$|I(\mathcal{S}_c, \mathcal{L})| \lesssim LD + S^2 D^{-2} + L.$$

- Acotemos ahora el segundo término: cada $l \in \mathcal{L}_c$ corta a $Z(P)$ como mucho D veces -ya que l es una recta y $Z(P)$ son los ceros de un polinomio de grado D -, luego puede tener como máximo D incidencias con \mathcal{S}_z , por lo que podemos acotar

$$|I(\mathcal{S}_z, \mathcal{L}_c)| \leq LD.$$

- Por último, solo nos queda acotar el tercer término: el número de rectas de \mathcal{L}_z es como máximo D . Podemos aplicar el lema (2.3.1) para obtener:

$$|I(\mathcal{S}_z, \mathcal{L}_z)| \leq S + D^2.$$

Ahora juntamos lo obtenido en la acotación de cada término:

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim 2LD + L + S^2D^{-2} + S + D^2.$$

Llega el momento de escoger el valor de D de forma que optimicemos la cota obtenida: recordemos que D debe ser un entero positivo, pues es el grado de un polinomio. Busquemos un D que minimice $2LD + S^2D^{-2}$. Si tomamos la función $f(x) := 2Lx + S^2x^{-2}$, observamos que f presenta un mínimo en $x = S^{2/3}L^{-1/3}$. Puesto que tenemos $L \leq S^2$, entonces $S^{2/3}L^{-1/3} \geq 1$. Así pues, podemos tomar D entero, $D \sim S^{2/3}L^{-1/3}$ que minimiza $2LD + S^2D^{-2}$. Por otro lado, de la otra desigualdad $S^{1/2} \leq L$, obtenemos que $D^2 \sim S^{4/3}L^{-2/3} \leq S$.

De esta forma, la desigualdad queda

$$\begin{aligned} 2LD + L + S + D^2 + S^2D^{-2} &\sim 2LD + L + S + D^2 + S^2(S^{-4/3}L^{2/3}) \leq \\ &\leq 2S + 2LD + L + S^{2/3}L^{2/3} \leq 2S + L + 2L(S^{2/3}L^{-1/3}) + S^{2/3}L^{2/3} \leq \\ &\leq L + 2S + 2S^{2/3}L^{2/3} + S^{2/3}L^{2/3} = 2S + L + 3S^{2/3}L^{2/3} \end{aligned}$$

y finalmente, por la definición de “ \lesssim ” que estamos utilizando, podemos ignorar los coeficientes de los términos de la desigualdad siempre que estos sean constantes, resultando en:

$$|I(\mathcal{S}, \mathcal{L})| \lesssim S^{2/3}L^{2/3} + S + L.$$

De esta forma obtenemos la cota deseada y concluye la demostración del Teorema de Szemerédi-Trotter utilizando el método polinómico. \square

En conclusión hemos comprobado que el mencionado método polinómico proporciona algunas demostraciones más claras y rápidas que los medios convencionales para los problemas estudiados.

En el caso del problema de Kakeya analizado en el presente trabajo esto es evidente, y llega a mejorar las cotas obtenidas.

En el caso del Teorema de Szemerédi-Trotter hemos tardado un poco más en finalizarlo, pero no olvidemos que los teoremas previos son resultados independientes cuya demostración es ampliamente conocida y se podrían haber usado directamente si solo nos interesara la demostración de Szemerédi-Trotter.

Usando métodos polinómicos, también es posible extender el Teorema de Szemerédi-Trotter a \mathbb{R}^3 , pero como mencionamos en la introducción, se

utilizan resultados avanzados de geometría algebraica y ello queda fuera del alcance de este documento.

El método polinómico proporciona por tanto un enfoque muy útil e interesante para abordar tanto problemas ya resueltos como algunos que se siguen investigando y, dado que es una herramienta relativamente reciente, cabe esperar que pronto empiece a dar grandes resultados aplicado a distintas áreas, no solo a la geometría de incidencia.

3.5. Conclusiones

En conclusión, en el presente trabajo hemos comprobado que el citado método polinómico proporciona algunas demostraciones más claras y rápidas que los medios convencionales para los problemas estudiados.

En el caso del problema de Kakeya analizado en este trabajo esto es evidente, y llega a mejorar las cotas obtenidas.

En el caso del Teorema de Szemerédi-Trotter hemos tardado un poco más en finalizarlo, pero no olvidemos que los teoremas previos son resultados independientes cuya demostración es ampliamente conocida y se podrían haber usado directamente si solo nos interesara la demostración del mencionado Teorema Szemerédi-Trotter.

Usando métodos polinómicos, también es posible extender el Teorema de Szemerédi-Trotter a \mathbb{R}^3 , pero como mencionamos en la introducción, se utilizan resultados avanzados de geometría algebraica y ello queda fuera del alcance de este documento.

El método polinómico proporciona por tanto un enfoque muy útil e interesante para abordar tanto problemas ya resueltos como algunos que se siguen investigando y, dado que es una herramienta relativamente reciente, cabe esperar que en el corto plazo comience a dar grandes resultados aplicado a distintas áreas, no solo a la geometría de incidencia.

Bibliografía

- [1] S. Ball, Universidad Politécnica de Cataluña, *Review of Larry Guth's "Polynomial Methods in Combinatorics"* in Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
- [2] R. O. Davies, *Some remarks on the Kakeya problem*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 69 (1971)
- [3] Z. Dvir, *On the size of Kakeya sets in finite fields*, J. Amer. Math Soc. (2009)
- [4] Z. Dvir, *"Incidence Theorems and Their Applications"; Foundations and Trends in Theoretical Computer Science: Vol. 6: No. 4*, pp 257-393. (2012) <http://dx.doi.org/10.1561/04000000056>
- [5] L. Guth and N. Katz, *Algebraic methods in discrete analogs of the Kakeya problem* Adv. Math. 225 (2010), no. 5
- [6] L. Guth, *Polynomial Methods in Combinatorics* American Mathematical Society (2016)
- [7] F. Hausdorff, *Dimension and äusseres Mass* Math. Ann. , 79 (1918)
- [8] J. Matousek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem; Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry* Universitext, Springer Berlin, Heidelberg
- [9] F. Shahrokhi, L. A. Székely, I. Vrto, *Crossing numbers of graphs, lower bound techniques and algorithms: a survey*, Proc. of Graph Drawing '94 held at DIMACS, Princeton Lecture Notes in Computer Science Vol. 894, Springer Verlag, Berlin (1995)

- [10] E. M. Stein and Rami Shakarchi, *Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ (2005)
- [11] T. Tao, *The Szemerédi-Trotter theorem and the cell decomposition*. *Blog: What's new* (12 June 2009)
<http://terrytao.wordpress.com/2009/06/12/the-szemereditrotter-theorem-and-the-cell-decomposition/>
- [12] T. Tao *The crossing number inequality*. *Blog: What's new* (18 September, 2007)
<https://terrytao.wordpress.com/2007/09/18/the-crossing-number-inequality/>