UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Investigación Matemática

UNIFORMIZACIÓN DE SUPERFICIES DE RIEMANN

Autor: Alfonso Álamo Zapatero

Tutor: Antonio Campillo López

1

13

Valladolid, julio del 2014

TÍTULO: UNIFORMIZACIÓN DE SUPERFICIES DE RIEMANN.

AUTOR: Alfonso Álamo Zapatero.

TUTOR: Antonio Campillo López.

MIEMBROS DEL TRIBUNAL:

1. **PRESIDENTE:** Félix Delgado de la Mata.

2. **VOCAL**: José Cano Torres.

3. **SECRETARIO:** Jorge Mozo Fernández.

FECHA DE LECTURA: Lunes 7 de julio de 2014.

Agradecimientos

Es imposible que unas simples líneas puedan plasmar todo mi agradecimiento. No obstante, lo que sigue a estas palabras pretende dar una idea de ello:

Primeramente, me gustaría expresar toda mi gratitud a mi tutor, Antonio Campillo. Aún recuerdo con mucho cariño las charlas que manteníamos antes incluso de que yo comenzase la carrera. A lo largo de estos años me ha orientado, aconsejado y enseñado de manera magistral. Gracias a su ayuda, no sólo he aprendido una infinidad de matemáticas, sino que además, mi forma de concebir la matemática y la ciencia es, en gran parte, deudora de él.

Por otra parte, a mi profesor de variable compleja, Javier Sanz. Casi toda la variable compleja que sé es, sinceramente, gracias a él. Me gustaría que estas líneas sirvieran para recordar lo mucho que me ha ayudado en mi aprendizaje, lo bien que ha sabido estimularme y lo útiles que han sido sus consejos a la hora de orientarme.

Tampoco quisiera olvidarme de los profesores Manuel Núñez y Luis Tristán. Sus excelentes cursos de análisis real, vectorial y funcional (guardo como oro en paño los apuntes), unidos a los de Javier Sanz, tienen toda la culpa de mi predilección por las técnicas analíticas.

Por supuesto, me gustaría señalar también mi agradecimiento a la Sección de Matemáticas de la Universidad de Valladolid por la maravillosa formación que he recibido, de la que me siento muy orgulloso.

Por último, aunque no menos importante, siempre es un placer guardar un par de líneas para mis padres, Antonio y Pilar, por ayudarme siempre.

Resumen del proyecto

Este trabajo de máster se centra en el teorema de uniformización de superficies de Riemann. Además de presentar, enunciar y demostrar el extenso y profundo teorema de uniformización de superficies de Riemann, se hace un estudio sobre las distintas motivaciones (perspectivas y consecuencias) del problema en cuestión y sobre la evolución de las técnicas con las que abordarlo. También se hace un recorrido a lo largo del concepto de superficie de Riemann, profundizando en aspectos sutiles, como el teorema de Riemann-Roch, el cual permite probar la uniformización en el caso compacto. El teorema de uniformización no es un resultado trivial, necesita un extenso abanico de técnicas (por citar algunas: geometría diferencial y algebraica, teoría del potencial, topología algebraica, física, etc). El desarrollo de estas herramientas y el estudio de sus nexos explican la considerable extensión del trabajo.

Abstract

This master thesis focuses on the uniformization theorem of Riemann surfaces. After introducing and demonstrating the theorem, we will examine different approaches to the analysis of the problem itself and observe how the methods applied to its study have evolved over the years. The concept of Riemann surfaces will be reviewed in detail, and we will pay special attention to some subtle issues, such as the Riemann-Roch theorem, which allows to demonstrate the uniformization in the compact case. The uniformization theorem is not a trivial matter. Its study requires the combination of a wide range of techniques (differential geometry, algebraic geometry, potential theory, algebraic topology, physics, among others). The considerable lenght of this work is, therefore, the result of the development of these tools and the study of their connections.

Palabras clave

Superficie de Riemann, Uniformización, Cohomología, Teoría del potencial, Problema de Riemann-Roch, Problema de Dirichlet.

Uniformización de superficies de Riemann

Alfonso Álamo Zapatero

1 de julio de 2014

Parece como un vidente a quien las verdades se le aparecen con una luz intensa, pero fundamentalmente a él solo.

Hermite sobre Poincaré, en una carta a Mittag-Leffler fechada el 22 de noviembre de 1888.

Índice general

Introducción

En su libro "*Indiscrete thoughts*", el matemático y filósofo Gian Carlo Rota relata que Solomon Lefschetz comenzó un curso de superficies de Riemann con la siguiente cadena de afirmaciones:

"Bien, una superficie de Riemann es un cierto tipo de espacio Hausdorff. Ustedes saben lo que es un espacio Hausdorff, ¿verdad? Asumo que es una variedad. Seguramente saben lo que es una variedad. Ahora déjenme enunciarles un teorema no trivial: el teorema de Riemann-Roch..."

y sucesivamente, hasta que consiguió que se dieran de baja todos y cada uno de los alumnos.

Nuestro propósito es completamente diferente. Si bien es cierto que podríamos abordar directamente una o varias pruebas del teorema de uniformización, la moral de este trabajo es bien distinta. Nuestro objetivo no sólo es presentar, enunciar y demostrar el teorema de uniformización de Poincaré. Será fundamental tanto encontrar las distintas motivaciones del problema, como ver la forma en la que han ido evolucionando las técnicas, conceptos y pensamientos que rodean a este profundo resultado. Como sería deseable, haremos un recorrido a lo largo del concepto de superficie de Riemann. Toda vez estén asentados los conceptos más básicos, profundizaremos en los aspectos más sutiles llegando por ejemplo al teorema de Riemann-Roch que citaba Lefschetz, llave, por cierto, que permite probar el teorema de uniformización en el caso compacto. El teorema de uniformización no es un resultado trivial en absoluto: necesita de un extenso abanico de técnicas para poder ser asimilado. De ahí la considerable extensión del trabajo. Como se comprobará, las páginas de este trabajo encierran una colección de tópicos, cuanto menos, considerable. No nos queda más remedio que dar por sentados varios hechos (al más puro estilo Lefschetz); supondremos que el lector está familiarizado con la variable compleja elemental y con la geometria tanto diferencial como algebraica, que posee nociones de topología algebraica y que conoce hechos básicos de teoría del potencial. También sería conveniente cierto conocimiento de superficies de Riemann, claro está, y ciertas nociones de física. Dicho esto, intentaremos dar por sentado el menor número de cosas y presentaremos esquemas, en la medida de la posible, de las partes que obviemos.

El texto se divide en tres secciones agrupadas en dos bloques:

- La primera de ellas corresponde al primer bloque. Destinada primeramente a recordar el concepto de superficie de Riemann y a motivar el problema de la uniformización, se convierte en una guía cuyo propósito es presentar varias herramientas fundamentales en su estudio actual: espacios recubridores y revestimiento universal, formas diferenciales, holomorfas y meromorfas, la valiosísima cohomología de haces y ciertos aspectos púramente topológicos como la triangulación el género y *fórmula de Hurwitz*. Indespensable para comprender con claridad lo que sigue.

- El segundo bloque contiene a las otras dos secciones. Fruto de la habitual dicotomía entre compacidad y no compacidad, cada una está destinada a probar el teorema de uniformización en el pertinente caso, toda vez que se tienen las herramientas y el lenguaje adecuado.

    - La primera de ellas se apoya en el ya citado teorema de Riemann-Roch, una valiosísima herramienta análoga al básico teorema de Rouché-Frobenius del álgebra lineal, que permite controlar el máximo número de funciones linealmente independientes sobre una superficie de Riemann compacta.
    - La segunda, intentando crear simetría, se dedica al estudio de otro problema: el conocido problema de Dirichlet, esta vez sobre regiones relativamente compactas de superficies de Riemann. Su resolución viene acompañada de la uniformización de las superficies de Riemann simplemente conexas y no compactas.

El último capítulo pretende servir como conclusión y epílogo. Metiendo en danza todo lo anterior, se comprueba como se deduce sin mayor dificultad un importantísimo resultado de clasificación de superficies de Riemann. En cuanto a las últimas líneas del texto, antes del obligado apéndice, el autor se ha tomado la licencia de incluir unas someras notas históricas con el doble de fin de aclarar y completar los propósitos que el texto pueda tener.

Parte I

Superficies de Riemann

Capítulo 1

Nociones básicas sobre superficies de Riemann

1.1. Superficies de Riemann

Una superficie de Riemann es un refinamiento del concepto de superficie, esto es, de variedad diferencible dos dimensional. Las superficies de Riemann son aquellas superficies que, grosso modo, admiten atlas con cambios de carta holomorfos, donde por supuesto identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$. De esta forma, las cartas pasan a ser funciones valoradas en $\mathbb{C}$ y el cambio de cartas es, efectivamente, una función compleja de variable compleja. Precisamos estos hechos en las definiciones siguientes:

Definición 1.1.1 (Cartas complejas, compatibilidad) *Sea X un espacio topológico, entonces:*

- *Una carta compleja en X es un par $[\varphi, U]$ donde $\varphi : U \to V$ es un homeomorfismo entre el abierto $U \subset X$ y un abierto $V \subset \mathbb{C}$.*

- *Dos cartas complejas $[\varphi_1, U_1]$ y $[\varphi_2, U_2]$ en X, definidas sobre abiertos no disjuntos U_1 y U_2, se dicen compatibles si el cambio de cartas habitual*

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

  es una función holomorfa (y por tanto biholomorfa).

- *Un atlas complejo (o analítico) en X es una colección de cartas complejas cuyos dominios recubran toda la variedad y de suerte que si dos de ellas tienen dominios no disjuntos, entonces son compatibles.*

Recordemos que una carta $[\varphi, U]$ se dice que está *centrada en un punto* $a \in U$ si $\varphi(a) = 0$. Siguiendo los convenios de geometría diferencial, utilizaremos frecuentemente la notación $[z, U]$ para las cartas complejas, aprovechando la letra z para "establecer coordenadas". Con el fin de no sobrecargar el lenguaje, de ahora en adelante siempre que se diga "carta" querrá decirse "carta compleja", al igual que "atlas" significará "atlas complejo".

Diremos que dos atlas sobre un mismo espacio topológico son compatibles si la colección resultante de unir las cartas de ambos atlas, da lugar a un nuevo atlas sobre el mismo espacio topológico. Es inmediato comprobar que la compatibilidad es una relación de equivalencia. Dicho esto, introducimos el concepto de estructura analítica:

Definición 1.1.2 (Estructura analítica) *Una estructura analítica en un espacio topológico X es una clase de compatibilidad en el conjunto de atlas analíticos sobre X.*

Notemos que dar una clase de compatibilidad en el conjunto de atlas definidos sobre una variedad, en virtud del lema de Zorn, es tanto como dar un atlas maximal. Con todos los conceptos anteriores ya se puede presentar la definición moderna de superficie de Riemann:

Definición 1.1.3 (Superficie de Riemann) *Una superficie de Riemann es un espacio topológico Hausdorff, conexo, dotado de una estructura analítica.*

Suele ser habitual exigir la conexión, de todos modos esto no supone ningún problema: si a un conjunto se le dota de estructura analítica y resulta ser no conexo, sus componentes conexas, las cuales son conjuntos abiertos y disjuntos, heredarán de manera natural la estructura compleja y podemos considerarlas como objetos en cierto sentido independientes.

No es un hecho trivial ***(teorema de Radó)*** el que una superficie de Riemann satisfaga el segundo axioma de numerabilidad(es decir, su topología admite una base numerable); consecuencia de esto último es que las superficies de Riemann son espacios topológicos metrizables. Tendremos que esperar hasta las últimas líneas del texto para poder comprobar estos hechos.

Veamos esquemáticamente algunos ejemplos:

- **La recta proyectiva compleja** *(esfera de Riemann)*:

La recta proyectiva compleja, $\mathbb{P}$, queda recubierta por dos abiertos N y S, resultantes de quitar a toda la esfera el Polo norte y el Sur respectivamente.
En coordenadas: $N = \{[1, z]; z \in \mathbb{C}\}) = \mathbb{P} - \{[0, 1]\}$ y $S = \{[z, 1]; z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{P} - \{[1, 0]\}$. Se comprueba que las dos aplicaciones obvias son cartas: $f_0 : N \to \mathbb{C}$, $f_0([z, w]) = \frac{z}{w}$ y $f_1 : N \to \mathbb{C}$, $f_1([z, w]) = \frac{w}{z}$.
El cambio de cartas es una biyección en sí mismo del conjunto $f_0(N \cup S) = \mathbb{C}^*$: justamente la inversión $z \to \frac{1}{z}$ (tal y como era de esperar). Muy sencillamente se comprueba que es Hausdorff, compacto, conexo y 2AN (verifica el segundo axioma de numerabilidad). Para referirnos a la esfera de Riemann utilizaremos indistintamente las notaciones $\mathbb{P}$ o $\mathbb{C}^\infty$.

- **Curvas lisas** en $\mathbb{C}^2$

Para nosotros una curva afín lisa en $\mathbb{C}^2$ es el conjunto de ceros de un polinomio no constante $f \in \mathbb{C}[z, w]$ verificando que su gradiente sea no nulo en todo punto; dicho de otra forma, que en cada punto bien $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ o bien $\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0$. El término singular se utiliza como contraposición al concepto de lisitud: una curva afín es singular en un punto si el gradiente de su polinomio se anula en él.

Tomemos un punto $p = (z_0, w_0)$ de la curva y sin pérdida de generalidad supongamos que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. En virtud del teorema de las funciones implícitas existe un entorno abierto de p, digamos $\mathcal{V}_p$ y una función holomorfa φ definida en un entorno de z_0, de suerte que si $(z, w) \in \mathcal{V}_p$ entonces $w = \varphi(z)$. La idea es tomar como carta la inversa de la proyección $(z, w) \to z$ en el abierto $\mathcal{V}_p$ ya que en virtud de lo anterior, la información que aporta w es redundante. Claramente la proyección es un homeomorfismo, luego la inversa es efectivamente una carta. Por otra parte, sin mucho trabajo se comprueba que estas cartas dan lugar a un atlas compatible.

Por ser un subespacio de $\mathbb{C}^2$, la curva es separada Hausdorff. Otra propiedad topológica que hereda de $\mathbb{C}^2$ es la propiedad de Lindelöff, admitiendo por tanto un atlas numerable, luego es 2AN (recordemos que todas las superficies de Riemann son 2AN aunque aún no estemos en condiciones de probar esto). El carácter conexo se traduce en la irreducibilidad del polinomio. Por ejemplo, $f = (z + w + 1)(z + w + 2)$ representa dos rectas paralelas no coincidentes, luego disjuntas y por tanto la curva tendria exactamente dos componentes conexas. Se puede probar que la irreducibilidad es tal y como parece el factor determinante en la conexión: decir que una curva lisa afin es conexa es tanto como decir que su polinomio es irreducible en $\mathbb{C}[z, w]$. Por otra parte, en virtud del teorema fundamental del álgebra ninguna curva es acotada, luego no es compacta.

- **El toro**

  Recordemos cómo se construye el toro:

  Tomemos dos números complejos ω_1 y ω_2 $\mathbb{R}$- linealmente independientes y consideremos el grupo abeliano libre generado por ellos, es decir:

$$\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 | n, m \in \mathbb{Z}\}$$

  Se suele decir que el conjunto anterior es el retículo (*lattice* en inglés) generado por ω_1 y ω_2. Denotando por $\mathbb{C}/\Lambda$ al llamado espacio de órbitas (el retículo induce una relación de equivalencia sobre $\mathbb{C}$, a saber, *la congruencia módulo el retículo*: $z \sim z^{'}$ si, y sólo si $z - z^{'} \in \Lambda$) y por p a la proyección que asocia a cada punto su órbita, se puede dotar al espacio de órbitas de estructura de espacio topológico considerando la topologia final de p: la topología cociente. A este espacio cociente se le conoce con el nombre de toro.

  Claramente p es sobreyectiva y continua, luego el toro es conexo; por otra parte la proyección restringida al llamado *paralelogramo fundamental* $\{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 | \lambda, \mu \in [0, 1)\}$ es biyectiva, continua y abierta, de lo que se deduce, por ejemplo, que el toro es compacto o que es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a través de $(\lambda, \mu) \to (e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu})$. Es rutinario comprobar que p es globalmente abierta.

  Dotar al toro de una estructura analítica es muy sencillo: para cada punto q del toro, consideremos su único representante en el paralelogramo fundamental, y allí, un entorno abierto $\mathcal{U}$ del propio representante contenido en el paralelogramo. En virtud del anterior párrafo, p induce un homemorfismo entre $\mathcal{U}$ y cierto entorno abierto $\mathcal{V}$ de q, es decir, estamos *leyendo* un entorno $\mathcal{V}$ de un punto arbitrario q del toro sobre $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. Se comprueba trivialmente que esta familia de cartas son todas compatibles luego constituyen un atlas analítico para el toro.

$\square$

1.2. Morfismos entre superficies de Riemann

1.2.1. Holomorfía

Una vez introducidos los *objetos*, es natural presentar los *morfismos* entre objetos: aplicaciones holomorfas y meromorfas. Por comodidad, salvo que se especifique lo contrario, a lo largo de las líneas que siguen X e Y denotarán sendas superficies de Riemann.

Definición 1.2.1 (Función holomorfa) *Se dice que una función f a valores en $\mathbb{C}$ y definida en un abierto $\mathcal{U} \subset X$ es holomorfa en dicho abierto si, para cada carta $[\mathcal{V}, z]$ con dominio no disjunto con $\mathcal{V}$, la lectura de f en dicha carta, esto es, la función*

$$f \circ z^{-1} : z(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \mathbb{C}$$

es holomorfa en el sentido usual.

Introducimos el concepto de función meromorfa en el contexto general de superficies de Riemann:

Definición 1.2.2 (Función meromorfa) *Sea $\mathcal{U} \subset X$ un abierto de la superificie de Riemann X. Se dice que una función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^\infty$ es meromorfa si es continua, el conjunto $\{x \in X | f(x) = \infty\}$ es discreto y f es holomorfa fuera de él.*

De extraordinaria utilidad nos serán las funciones armónicas:

Definición 1.2.3 (Función armónica) *Sea f una función definida en un abierto $\mathcal{U} \subset X$ de la superificie de Riemann X y con valores reales. Se dice que f es armónica en U si para cada carta $[\mathcal{V}, z]$ con dominio no disjunto con $\mathcal{U}$, la lectura de f en dicha carta*

$$f \circ z^{-1} : z(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \mathbb{R}$$

es armónica en el sentido usual.

Cuando trabajemos con funciones armónicas generalmente supondremos que tratamos con funciones valoradas en $\mathbb{R}$; no hay ningún problema en generalizar el concepto a funciones valoradas en $\mathbb{R}^n$ (y por tanto en $\mathbb{C}$): una tal función definida sobre un abierto de una superficie de Riemann será armónica si, y sólo si, lo es cada una de sus componentes en el sentido de la definición anterior.

Podemos ir un poco más lejos y generalizar las definiciones anteriores a funciones con llegada en otra superficie de Riemann:

Definición 1.2.4 *Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ entre las superficies de Riemann X e Y es* ***holomorfa, meromorfa o armónica*** *en un punto $p \in X$ si lo es, respectivamente, alguna de sus lecturas en un entorno abierto de la lectura del punto. Es decir, si la aplicación $z_2 \circ f \circ z_1^{-1}$ es, según el caso, holomorfa, meromorfa o armónica en un entorno de $z_1(p)$ para ciertas cartas locales z_2 y z_1.*

Las siguientes observaciones son necesarias:

- En virtud de la holomorfía del cambio de cartas la definición anterior es consistente.
- A lo largo del texto será habitual encontrar funciones armónicas a valores en $\mathbb{C}$. Como ya se ha comentado, esto querrá decir que tanto la parte real como la parte imaginaria de la aplicación, serán funciones armónicas en el sentido de la definición [1.2.3].
- Diremos que una función entre superficies de Riemann $f : \mathcal{U} \subset X \to Y$ definida en un abierto $\mathcal{U}$ se dice que es holomorfa (resp. meromorfa/armónica) si lo es en cada punto de $\mathcal{U}$. Es inmediato comprobar que en caso de que $Y = \mathbb{C}$ resp($\mathbb{C}^\infty, \mathbb{R}$) las definiciones anteriores son equivalentes a las dadas en los epígrafes [1.2.1], [1.2.2] y [1.2.3].
- Al conjunto de funciones holomorfas entre X e Y lo denotaremos por $\mathcal{O}(X, Y)$. Caso de que $Y = \mathbb{C}$ simplemente escribiremos $\mathcal{O}(X)$. Igualmente, si decimos simplemente que una función es holomorfa asumimos que tiene llegada en $\mathbb{C}$
- Al conjunto de funciones meromorfas entre X e Y lo denotaremos por $\mathcal{M}(X, Y)$. Si $Y = \mathbb{C}$, como antes, ahorraremos escribiendo $\mathcal{M}(X)$ y además, el término "función meromorfa" asume que la llegada de la función es $\mathbb{C}^\infty$.

- Si f es una función meromorfa definida en un abierto del plano complejo que presenta un polo en cierto punto a, no hay ningun inconveniente en considerarla como una función valorada a la esfera $\mathbb{C}^\infty$ y, además, la definición de polo garantizará la continuidad en a. Con esta idea en mente se comprueba que $\mathcal{M}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{O}(X, \mathbb{C}^\infty)$.

Muchos resultados como el llamado *principio de identidad* o *el teorema de Weierstrass* se extienden sin mayor dificultad al caso de superficies de Riemann arbitrarias:

Proposición 1.2.5 (Principio de identidad) *Sean X e Y son superficies de Riemann siendo X conexa, entonces, dos funciones holomorfas coinciden si, y sólo si, coinciden en un subconjunto $\Omega \subset X$ con al menos un punto de acumulación en X.*

Proposición 1.2.6 (Teorema de Weierstrass) *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas valoradas en $\mathbb{C}$ definidas en un abierto $\mathcal{U} \subset X$ de suerte que en cada compacto contenido en dicho abierto la sucesión converge uniformemente hacia una función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. Entonces $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$*

Por último, una vez presentados los *morfismos*, es lógico clasificar las superficies según existan o no aplicaciones holomorfas inversas entre ellas: diremos que dos superficies de Riemann X e Y son **isomorfas** si existen aplicaciones holomorfas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ inversas.

1.2.2. Divisores

Si $f : X \to Y$ es una aplicación, se dice que un punto $a \in X$ es una **singularidad aislada** si existe un entorno abierto y punteado de a en X en el que F es holomorfa, es decir, si existe un abierto $\mathcal{U}$ que contenga al punto a de suerte que f es holomorfa en $\mathcal{U} - \{a\}$. Además, en las condiciones anteriores se dice que f presenta una *singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial* si alguna de sus lecturas presenta una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial respectivamente en la lectura del punto a. La holomorfía de los cambios de cartas justifica que esta definición es consistente, esto es, si una lectura de f presenta una singularidad de un tipo particular, cualquier otra lectura comparte el tipo de singularidad.

De hecho las lecturas no sólo comparten el tipo de singularidad sino también *el orden:*

Definición 1.2.7 *Sea $a \in X$ y $f : X \to Y$ es una aplicación entre superficies de Riemann holomorfa en un entorno punteado de a. Se define el orden de f en el punto a y se denota por $ord(f, a)$ al orden de una cualquiera de sus lecturas en la imagen del punto a.*

Recordemos que para una función compleja de variable compleja holomorfa en un disco punteado de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se definía su orden como el menor índice $n \in \mathbb{Z}$ de suerte que el coeficiente n-ésimo de su serie de Laurent en el disco punteado fuese no nulo. Si no se alcanzaba tal mínimo se convenía que el orden valía $-\infty$. Es rutinario justificar que la definición anterior tiene sentido.

Introducimos ahora una importante herramienta teórica: el concepto de **divisor** en una superficie de Riemann.

Definición 1.2.8 (Divisor) *Se dice que una aplicación $D : X \to \mathbb{Z}$ es un divisor de la superficie de Riemann X si en cada compacto contenido en la superficie, D es nulo salvo quizás para una cantidad finita de puntos.*

Obviamente los divisores forman un grupo aditivo con la suma definida puntualmente al que denotaremos por $Div(X)$. También es posible definir un orden parcial "$\geq$" en este conjunto: $D \geq D^{'}$ si, y sólo si $D(x) \geq D(x)^{'}$ para cada $x \in X$.

La idea subyacente al concepto de divisor es insertar un indicador en la superficie que represente el orden de un polo o de un cero en cada punto; esto se entiende mejor notando que para una función meromorfa f definida en X, la aplicación de X en $\mathbb{Z}$ $x \to ord(f, x)$ es un divisor. Estos divisores reciben el nombre de **divisores principales** y para ellos utilizaremos la notación (f). En añadidura, diremos que una cierta función f es **múltiplo** de D si $(f) \geq D$ y que el divisor es **efectivo** si sólo toma valores no negativos

Los divisores desempeñan un papel central en la teoría de superficies de Riemann, especialmente en aquellas que son compactas; suponen además un lenguaje idóneo para muchos resultados, tales como la *estimación de Riemann-Roch.*

Notemos que se tienen las siguientes propiedades evidentes:

- Una función f meromorfa es holomorfa si, y sólo si $(f) \geq 0$
- $(fg) = (f) + (g)$
- $(\frac{1}{f}) = -(f)$

Divisores en superficies de Riemann compactas

En una superficie de Riemann compacta X, el grupo de divisores se simplifica bastante: exactamente el conjunto de aplicaciones de X en $\mathbb{Z}$ nulas salvo quizás para una cantidad finita de puntos. Por ello, el grupo de divisores admite una definición alternativa:

Definición 1.2.9 *Si X es una superficie de Riemann compacta, entonces el grupo de divisores de X es el grupo abeliano libre generado por los propio puntos de X.*

Ambas definiciones son, obviamente, equivalentes: los divisores según esta última definición son expresiones formales del estilo

$$n_1P_1 + n_2P_2 + \ldots + n_mP_m$$

($P_1, \ldots, P_m$ son puntos de la superficie), las cuales se corresponden biyectivamente con las aplicaciones de X en $\mathbb{Z}$ que asignan a cada combinación del tipo anterior la aplicación nula fuera de $P_1, \ldots, P_m$ y de suerte que en cada P_i alcance el entero n_i.

Introducimos el concepto de grado de un divisor, que aporta información cuantitativa de los ceros y polos que pretende representar:

Definición 1.2.10 (Grado de un divisor) *Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X. Se llama grado del divisor al siguiente entero:*

$$deg(D) = \sum_{x \in X} D(x)$$

Recordemos que en la suma anterior todos los sumandos, salvo quizás una cantidad finita, son nulos, luego no hay problemas de definición.

Observemos también que $deg(D+D') = \sum_{x\in X}(D(x)+D'(x)) = deg(D)+deg(D')$, esto es,

$$deg : Div(X) \to \mathbb{Z}$$

es un morfismo de grupos.

1.2.3. Forma normal y puntos de ramificación

Tiene una gran importancia técnica el resultado que pasamos a mostrar. Su importancia radica en que pone de manifiesto que, salvo *equivalencias conformes* (i.e transformaciones biholomorfas) todas las funciones holomorfas son localmente de la forma z^d. La “rigidez” de estos monomios se traslada a las funciones holomorfas generales; por ejemplo, al ser los monomios z^d aplicaciones abiertas, toda función holomorfa ha de ser abierta.

Proposición 1.2.11 (Forma normal de un morfismo) *Sea $f : X \to Y$ una aplicación no constante entre superficies de Riemann y holomorfa en un entorno de un punto $a \in X$. Entonces existen cartas $[z_1,\mathcal{U}]$ y $[z_2,\mathcal{V}]$ centradas, respectivamente, en a y en $f(a)$ de suerte que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ y se tiene que para un cierto entero positivo d*

$$z_2 \circ f \circ z_1^{-1}(\omega) = \omega^d$$

para cada ω en $z_1(\mathcal{U})$. Además, si existe otro par de cartas $(z_1^{'},\mathcal{U}^{'})$ y $(z_2^{'},\mathcal{V}^{'})$ centradas en a y en $f(a)$ respectivamente, tales que

$$z_2 \circ f \circ z_1^{-1}(\omega) = \omega^p$$

para cada ω en $z_1^{'}(\mathcal{U}^{'})$, entonces $d = p$.

Dem:

Tomemos cartas $(z_1,\mathcal{U})$ y $(z_2,\mathcal{V})$ centradas en a y en $f(a)$ respectivamente tales que que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. La lectura de f en dichas cartas, $\hat{f} = z_2 \circ f \circ z_1^{-1}$, envía el punto cero en el cero de $\mathcal{V}$, luego existe un $d > 0$ de suerte que

$$\hat{f} = z^d g$$

en un disco D contenido en $z_1(\mathcal{U})$ de centro 0, siendo g una función no nula en él. De esta forma g admite una raíz d-sima analítica, es decir, una función holomorfa h definida en D de suerte que $h^d = g$, luego $\hat{f} = (zh)^d$ en D. Ya casi hemos acabado: simplemente necesitamos hacer zh sea la variable indepediente. La aplicación $\varphi : D \to \mathbb{C}\ z \to zh(z)$ tiene derivada no nula en cero ($\varphi^{'}(0) = h(0) \neq 0$), que es tanto como decir que induce una equivalencia conforme entre un disco de centro 0 contenido en D y otro entorno de cero, no hay ningún problema en suponer que el citado entorno es exactamente D y así, al componer $\varphi^{-1} \circ z_1$ obtenemos una carta de suerte que la lectura de f en ella y en z_2 es exactamente el monomio z^d.

Notemos que existe un entorno de $f(a)$ donde cada punto distinto del propio $f(a)$ tiene exactamente d contraimágenes por f en $z_1^{-1}(D)$, luego el entero d es independiente de las cartas.
□

Al entero d de la proposición anterior se le conoce como **índice de ramificación** de f en a y generalmente se le denota por $e(f,a)$.

La terminología proviene, evidentemente, del hecho que hemos comprobado durante la prueba anterior: en un entorno $\mathcal{U}$ del punto a suficientemente pequeño, cada punto de $f(\mathcal{U})$ distinto de $f(a)$ tiene exactamente $e(f,a)$ antiimágenes por f en $\mathcal{U}$.

Un par de observaciones importantes:

- Por construcción $e(f,a) = ord(f - f(a), a)$ y por tanto $e(f,a) = 1 + ord(f', a)$. Se deduce entonces que f es localmente inyectiva en a, si, y sólo si, $e(f,a) = 1$.
- Es inmediato comprobar que los puntos de X donde f no es localmente inyectiva forman un conjunto discreto y cerrado, es decir, el conjunto $\{a \in X | e(f,a) > 1\}$ es **cerrado y discreto** en X.

Aprovechamos para introducir la siguiente terminología de uso extendido:

Definición 1.2.12 (Puntos de ramificación) *Si $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann, a la imagen por f del conjunto de puntos de X en los que f no es localmente inyectiva se le conoce como conjunto de ramificación de f y a sus puntos como puntos de ramificación de f. Si un punto de Y no es de ramificación se dice que es un punto de escisión para f.*

Volviendo a la forma normal de aplicaciones holomorfas, tal y como comentábamos pueden obtenerse de manera directa múltiples propiedades, todas ellas inspiradas en el comportamiento de los monomios z^d, por ejemplo:

Proposición 1.2.13 *Toda aplicación $f : X \to Y$ holomorfa y no constante entre superficies de Riemann es abierta.*

Por otra parte, si un aplicación holomorfa $f : X \to Y$ es biyectiva, no le queda otra que tener un orden de ramificación exactamente igual a 1, luego su inversa es también holomorfa y por tanto tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.2.14 *Toda aplicación holomorfa y biyectiva entre superficies de Riemann es también biholomorfa.*

Como consecuencia directa del carácter abierto de las funciones holomorfas se tiene el *principio del módulo máximo*:

Proposición 1.2.15 (Principio del módulo máximo) *El módulo de cualquier aplicación holomorfa no constante entre una superficie de Riemann y $\mathbb{C}$ nunca alcanza su extremo superior.*

Dem:

En efecto, si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante que alcanzase su extremos superior en módulo, digamos R, entonces

$$f(X) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$$

Recordando que $f(X)$ es abierto en verdad se tiene la contención

$$f(X) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

en clara contradicción con los supuestos.

$\square$

Una observación interesante es que la compacidad de una superficie de Riemann implica una fuerte rigidez sobre los morfismos que salen de ella. Recogemos en ela siguiente proposición varios hechos destacados en este línea:

Proposición 1.2.16 *Si $f : X \to Y$ es un aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann, siendo además X compacta, entonces:*

1. *La aplicación es abierta y cerrada.*

2. *La aplicación es suprayectiva y por tanto la superficie Y ha de ser compacta.*

3. *La aplicación f tiene fibra finita, esto es, para cada $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ tiene un número finito de elementos.*

4. *Para cada $y \in Y$ y para cada abierto $\mathcal{V}$ que contenga a la fibra de y, existe un abierto de y, digamos $\mathcal{U} \subset Y$, tal que $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.*

5. *Sea $y \in Y$ un punto de escisión de f, entonces existe un entorno abierto $\mathcal{V}$ de y que queda regularmente cubierto de manera finita por f, es decir, existe una cantidad finita de abiertos $\mathcal{U}_i$ de X tales que:*

$$f^{-1}(\mathcal{V}) = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$$

y de suerte que la restricción de f a cada abierto $\mathcal{V}_i$ es una equivalencia conforme.

Dem:

1. Ya hemos comprado que f es abierta; el que sea cerrada es consecuencia inmediata de la compacidad de X y de que Y sea separada T_2.

2. Al ser cerrada y abierta, $f(X)$ es un abierto y cerrado en Y. Por ser no vacío es el total, teniendo así la suprayectividad. Como X es compacto también lo será $f(X) = Y$.

3. Al ser no constante la fibra es discreta, por ser X compacto, la fibra ha de ser finita.

4. La imagen del cerrado X-$\mathcal{V}$ por f es un cerrado (en virtud de los apartados anteriores); basta tomar su complementario para concluir.

5. Sean $a_1, \ldots, a_n$ las n antiimágenes de y por f; tomemos n cartas $[z_i, \mathcal{U}_i]$ de dominios disjuntos tales que $a_i \in \mathcal{U}_i$ para cada índice i. Continuando con la notación del epígrafe anterior, para el abierto $\mathcal{V} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ tomemos uno de los abiertos $\mathcal{U}$ cuya existencia afirma tal apartado. Refinando convenientemente estos $n+1$ abiertos se puede suponer que para cada i, $f(\mathcal{U}_i) = \mathcal{V}$. Por ser y un punto de escisión, $e(f, a_i) = 1$, luego en los abiertos $\mathcal{U}_i$ la aplicación es biyectiva y holomorfa, y por ende biholomorfa.

$\square$

Como corolario se obtiene el siguiente resultado fundamental:

Proposición 1.2.17 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada $b \in Y$ la ecuación*

$$f(a) = b$$

tiene siempre el mismo número de soluciones contando las pertinentes multiplicidades.

Dem:

Veamos primeramente que el número de raíces es constante en el conjunto de puntos de escisión, y por un argumento de densidad comprobemos que lo es también en el de puntos de ramificación.

- Sea $B \subset Y$ el conjunto de puntos de ramificación para f. Por ser X compacta, B ha de ser finito, luego su complementario, i.e. el conjunto de puntos de escisión de f, es conexo y denso. Ahora bien, cada punto $y \notin B$ tiene un entorno abierto en el que todos los elementos poseen el mismo número de antiimagénes por f en virtud del apartado 5 de la proposición anterior, y por ende, el número de antiimágenes es localmente constante en $Y - B$ y por conexión globalmente constante.

- Para $y \in B$, en virtud del apartado 4 de la proposición anterior, existen abiertos disjuntos $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ de X, conteniendo cada uno de ellos a un único antecendente de y, digamos a_i y un entorno abierto $\mathcal{U}$ de y de suerte que $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{V}_i$. Refinando si fuera necesario, no hay inconveniente en suponer que cada punto de $\mathcal{U}$ distinto de y es de escisión para f. Esto nos permite concluir, pues el número de soluciones de la ecuación $f(a) = y$ es exactamente $\sum_i e(f, a_i)$ que coincide con el número de soluciones de $f(p) = y$ para cualquier punto p de escisión para f contenido en $\mathcal{U}$.

$\square$

Al natural anterior se le conoce como **grado de la aplicación** f y generalmente se le denota por $\partial^{\text{o}} f$. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un polinomio, su grado como aplicación coincide con el grado algebriaco. Consecuencia inmediata de la proposición es que una función meroforma definida sobre una superficie de Riemann compacta tiene *tantos ceros como polos*, contados con su multiplicidad.

A propósito, generalmente en matemáticas, se suele hacer una mención cuando el teorema fundamental del álgebra se deduce de *manera trivial* de los entresijos de una teoría, tal y como es en este caso: un polinomio $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ puede extenderse a una función meromorfa $p : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ y por ende holomorfa, y por tanto sobreyectiva. De forma redundante, la proposición anterior nos indica que el polinomio tiene exactamente tantas raíces como su grado.

1.3. Haces y gérmenes de funciones en superficies de Riemann

1.3.1. Haces de funciones destacados

Pasamos a presentar someramente algunos de los haces de funciones más relevantes que pueden presentarse en una superficie de Riemann X.

- $\mathcal{O}$: **Haz de funciones holomorfas**.

  Para cada abierto $\mathcal{U}$ de la superficie consideremos el conjunto de funciones holomorfas definidas sobre él $\mathcal{O}(\mathcal{U})$. Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ es otro abierto, entonces la restricción usual induce, de manera contraviarante, un morfismo $\rho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$

  $$\mathcal{O}(\mathcal{U}) \to \mathcal{O}(\mathcal{V})$$

  $$f \to f|_{\mathcal{V}}$$

  Obviamente $\rho_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} \circ \rho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = \rho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}$ para cualquier terna de abiertos $\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ teniendo así una estructura de *prehaz*.
  Tomemos un abierto arbitrario $\mathcal{U}$ y una cubierta $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$, entonces, cualquier familia de funciones holomorfas $(f_i)_{i \in I}$ con f_i definida en el abierto $\mathcal{V}_i$ para cada índice i, define una única función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ y por ende la estructura es de haz.

- $\mathcal{M}$: **Haz de funciones meromorfas**.

  En la línea del apartado anterior obtenemos el haz de funciones meromorfas: para cada abierto $\mathcal{U}$ de la superficie se considera el conjunto de funciones meromorfas definidas sobre él, $\mathcal{M}(\mathcal{U})$. Como morfismos tomamos las restricciones de dominio y así tenemos una estructura de prehaz; los dos axiomas de haz se verifican de manera inmediata.

- Ar: **Haz de funciones armónicas**.

  Análogamente a los haces de funciones holomorfas y meromorfas, "mutatis mutandis" se introduce el haz de funciones armónicas sobre una superficie de Riemann.

- $\mathcal{M}_D$: **Haz de funciones meromorfas asociadas a un divisor D**.

  Sea D un divisor en la superficie de Riemann X; definimos el prehaz $\mathcal{M}_D$ como aquel tal que a cada abierto $\mathcal{U}$ le asocia el conjunto de funciones meromorfas en él que sean múltiplos de $-D$, es decir

  $$\mathcal{M}_D(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{U}) | (f) \geq -D\}$$

  y que tiene como morfismos a las restricciones. El comprobar que efectivamente es un haz es también obvio.

- $\mathcal{E}$: **Haz de funciones diferenciables** $\mathcal{E}$.

  Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{C}$, denotaremos por $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ al conjunto de funciones definidas en $\mathcal{U}$ con llegada a $\mathbb{C}$ de suerte que vistas como funciones valoradas en $\mathbb{R}^2$, sus dos componentes son infinitamente diferenciables. Inmediato es que con las restricciones obvias $\mathcal{E}$ define un haz en $\mathbb{C}$ (recordemos que para una función compleja de variable compleja decir que es holomorfa es tanto como decir que es diferenciable, considerando en $\mathbb{C}$ la estructura de $\mathbb{R}^2$, y que su diferencial sea $\mathbb{C}$-lineal).

  Extendamos el haz anterior a la superficie de Riemann arbitraria X:
  Sea $\mathcal{U}$ un abierto de la superficie, denotaremos por $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ al conjunto de funciones definidas en $\mathcal{U}$ y valoradas en $\mathbb{C}$ de suerte que para cada carta $[z, \mathcal{Y}]$ con $Y \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, su lectura $f \circ z^{-1} \in \mathcal{E}(z(Y \cap \mathcal{V}))$. Es rutinario comprobar que junto con las restricciones como morfismos se tiene una estructura de haz y que en el caso en que X= $\mathbb{C}$ coincide con la anteriormente definida.

- $\mathbb{C}_p$: **Haz rascacielos en el punto p**.

  Tomemos un punto $p \in X$, se define $\mathbb{C}_p(\mathcal{U}) = \mathbb{C}$ si $p \in \mathcal{U}$ y 0 en caso contrario. Definamos los morfismos: si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ son conjuntos abiertos de X consideremos dos situaciones:

  - $p \in \mathcal{V}$, luego $\mathbb{C}_p(\mathcal{V}) = \mathbb{C}_p(\mathcal{U}) = \mathbb{C}$ y el morfismo es la identidad en $\mathbb{C}$.
  - $p \in \mathcal{V}$ y por ende $\mathbb{C}_p(\mathcal{V}) = 0$ y el único morfismo posible hacia $\mathbb{C}_p(\mathcal{U})$ es el idénticamente nulo.

Se comprueba también de manera inmediata que efectivamente se tiene estructura de haz.

Este haz tan sencillo será una herramienta teórica muy útil para probar el teorema de Riemann-Roch. El por qué de su nombre es claro: a cada abierto bien le asocia el cero, o bien le asocia el conjunto $\mathbb{C}$, según contenga o no a p, determinando este hecho la "altura" de cada abierto.

1.3.2. Gérmenes

Consideremos en una superficie de Riemann X el haz de funciones holomorfas sobre ella; para cada punto $a \in X$ definimos, como es habitual, el tallo del haz $\mathcal{O}_a$ como el límite inductivo de los anillos $\mathcal{O}(\mathcal{U}_a)$ donde $\mathcal{U}_a$ varía en los entornos de a:

$$\mathcal{O}_a = \varinjlim \mathcal{O}(\mathcal{U}_a)$$

Los elementos del tallo son los llamados **gérmenes de funciones holomorfas**, esto es, clases de equivalencia de funciones holomorfas bajo la relación:

$$f \sim g$$

$$\longleftrightarrow$$

Existe un entorno de a en el que ambas están definidas y en él

$$f = g$$

La construcción anterior es propia de la teoría de haces y por tanto se extrapola sin mayor dificultad a cualquier otro haz definido sobre la superficie de Riemann X, en particular, para el haz $\mathcal{F}$, denotaremos su tallo en el punto $a \in X$ por $\mathcal{F}_a$. Continuando con notaciones: el germen de una función meromorfa f en un punto a lo denotaremos por $\rho_a(f)$.

Es interesante observar que si Ω es un dominio, decir que dos funciones meromorfas en Ω son iguales es tanto como decir que existe un punto a del dominio de suerte que $\rho_a(f) = \rho_a(g)$. En contextos más amplios, el que un haz de funciones verifique esta propiedad se expresa diciendo que el haz satisface *el axioma de identidad*.

El trabajar únicamente con funciones definidas localmente y no con clases de equivalencia supone ciertos problemas: principalmente los que atrae la geometría de los dominios (que para empezar no tienen ni por qué coincidir); el concepto de germen generaliza fuertemente al de *elemento de función*, esto es, un par (f, D) donde D es un disco abierto (o un abierto si se trabaja en superficies de Riemann arbitrarias) y f una función definida sobre él.

Comprobaremos también que el desarrollo de la teoría de superficies de Riemann, comenzando por la propia definición moderna de superficie, es en gran parte deudora de la noción de germen.

Capítulo 2

Nociones básicas sobre problema de uniformización

Bien conocido es que una curva en el plano real $\mathbb{R}^2$ se puede definir *esencialmente* de dos maneras distintas:

- De forma **implícita**: como los ceros de cierta función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- De forma **paramétrica:** como la imagen de cierta función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

A destacar es la **dualidad** existente entre estas dos perspectivas, traduciéndose, por ejemplo, en que si bien la forma explícita nos permite comprobar directamente el que *un punto* pertenezca o no la curva (verificando si cumple o no la ecuación), la descripción paramétrica permite, a partir de la variación de un parámetro describir *todos* los puntos de la curva, lo que coloquialmente se expresa diciendo que el parámetro **uniformiza** a la curva.

Por ejemplo, una recta puede ser considerada bien como el conjuntos de ceros de $f(x, y) = ax + by - c$ o bien como la imagen de la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $t \to (t, \frac{c-at}{b})$.

La clave del **teorema de uniformización**, grosso modo, permite el paso de la forma implícita a la paramétrica.

2.1. Curvas algebraicas

Los tres problemas más célebres de la antigüedad eran la trisección de un ángulo arbitrario, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Estos desafíos, planteados en el seno de la Grecia Clásica estaban sometidos a los cánones de rigor de la época: una construcción solamente era válida si únicamente respondía al uso de la regla y del compás.

El primer paso destacado en la trisección de un ángulo lo dio el sofista Hipías de Elis, en plena ilustración Ateniense (siglo V a.C.). Su idea radicaba en la introducción de una artificiosa*curva auxiliar* hecha a medida, la cual posibilitaba la trisección de cualquier ángulo. Hoy en día esta curva es llamada "cuadratriz de Dinostrato" y no "trisectriz de Hipías" como sería de esperar; la razón es que posteriormente, el geómetra griego Dinostrato (y hermano de Mecnemo, el famoso descubridor de las secciones cónicas) comprobó que la curva también resolvía la cuadratura del círculo. En palabras de los propios autores, sus soluciones eran *"sofisticas"* o más familiarmente, "sofisticadas". Tales calificativos no tenían otro pretexto que el intentar justificar sus razonamientos, inválidos según el rigor vigente en la época, ya que precisamente, la citada curva no era constructible con regla y compás. No obstante, la idea *sofisticada* de construir curvas auxiliares "a la carta" se consolidó como un argumento de peso a la hora de resolver problemas geométricos.

Para el siguiente avance significativo hay que esperar hasta el siglo XVII, cuando las ideas pioneras de Descartes y Fermat (dotar al plano de coordenadas insertando ejes ortogonales y asociar a cada curva una ecuación) abrieron la veda del estudio conjunto del álgebra y la geometría. Con el tiempo se fue entendiendo que ambas disciplinas bebían la una de la otra y que en cierto sentido ambas representaban dos caras de la misma moneda.

Mostremos las opiniones de J.L de Lagrange (arriba) y de J.J. Sylvester (abajo) al respecto:

"Mientras el álgebra y la geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias se han unido, han intercambiado sus fuerzas y han avanzado juntas hacia la perfección."

"Hubo un tiempo en el que todas las partes de la materia estaban dispersas, cuando el álgebra, la geometría y la aritmética, o bien vivían separadas, o mantenían relaciones frías, reducidas a llamadas ocasionales de una a otra; pero eso se está acabando; las tres se están acercando y aparecen constantemente conectadas e íntimamente relacionadas por miles de fuertes lazos, y podemos esperar con confianza en que llegará un tiempo en el que no formarán sino un solo cuerpo con una sola alma".

Las curvas que resultan ser ceros de polinomios se llaman **curvas algebraicas**, caso contrario se las conoce como **curvas trascendentes** o mecánicas para Descartes.

Centrémonos en el estudio de curvas algebraicas. Inmediatamente se toma consciencia de que el grado del polinomio que define la curva es independiente del sistema de referencia elegido (un cambio de referencia es una transformación afín), de esta forma se tiene un primer *invariante* para las curvas algebraicas; por ejemplo, las curvas de grado uno son exactamente las rectas y las de grado dos las célebres cónicas.

El propio Newton realizó un profundo estudio las curvas de grado tres, las llamadas cúbicas. Sus artículos fueron redactados hacia 1676 pero para su publicación hubo que esperar hasta 1704, bajo el título *"Enumeratio linearum tertii ordinis"*. En su clasificación llegó a distinguir hasta 72 tipos. Entre ellos, uno presentaba una papel singular: la *parábola divergente*:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Veamos su importancia. Tomemos una cúbica cualquiera, admitiendo el hecho que de toda cúbica presenta al menos un punto singular, podemos colocar una sistema de referencia cuyo origen sea precisamente el punto singular y el eje de abscisas sea la recta de tangencia. Así pues la cúbica se podrá expresar como el conjunto de puntos (x, y) de suerte que

$$y + axy + by^2 + cx^3 + dx^2y + exy^2 + fy^3 = 0$$

para ciertos coeficientes. Viendo el plano como la carta $z \neq 0$ del plano proyectivo, podemos sumergir la curva y obtener:

$$z^2y + axyz + by^2z + cx^3 + dx^2y + exy^2 + fy^3 = 0$$

Considerando la proyectividad $(x, y, z) \to (x, z, y)$ y posteriormente volviendo a tomar la carta $z \neq 0$, la curva se expresa como

$$y^2 + axy + by + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

Entonces, con manipulaciones sencillas se llega a

$$(y + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2})^2 + cx^3 + (d - \frac{a^2}{4})x^2 + (e - \frac{ab}{2})x + f - \frac{b^2}{4} = 0$$

Por último, la afinidad $(x, y) \to (x, y - \frac{a}{2}x - \frac{b}{2})$ convierte la curva en una parábola divergente:

$$y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

De hecho se puede ir un poco más lejos, la afinidad $(x, y) \to (x - \frac{\beta}{3\alpha}, y)$ elimina al monomio βx^2:

$$y^2 = px^3 + qx + r$$

y la transformación $(x, y) \to (xp^{-\frac{1}{3}}, y)$ "normaliza" la curva obteniendo así la llamada *forma normal* de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + ux + v$$

Es obvio que la clave del razonamiento anterior es haber pasado por el espacio proyectivo. La geometría proyectiva, al igual que utilización sistemática de los números complejos en el estudio de curvas, supone un inconmensurable paso en el estudio de las curvas algebraicas y por tanto hacia la comprensión de la geometría. Por otra parte, los trabajos de, entre otros, Plücker, Poncelet y Steiner consolidaron la utilización cambios de coordenadas no lineales como por ejemplo la inversión $(x, y) \to (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$, cuya versión proyectiva es $(x : y : z) \to (yz : xz : xy)$.

Estas transformaciones requieren un par puntualizaciones destacadas:

- No tienen por qué estar definidas en todos los puntos. Esto es inmediato por ejemplo en la inversión del plano afín $(x, y) \to (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$. Pero hay que notar que esta patología no es exclusiva del caso afín, la inversión proyectiva no está definida en los puntos $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ y $(0 : 0 : 1)$, vértices del triángulo de referencia; en los demás casos es una biyección por ser involutiva.

- Estas transformaciones no tienen por qué *conservar el grado*, es decir, la transformada de una curva de grado d no tiene por qué tener grado d, por ejemplo, la inversión afín transforma la recta $x + y = 1$ en la "casi" circunferencia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ (notemos que no esta definida sobre los puntos de la recta $(1, 0)$ y $(0, 1)$).

Este tipo de transformaciones dan lugar a la llamada **geometria birracional**, una de las grandes ideas de Riemann. Recordemos que dos curvas

$f(x, y, z) = 0$ y $g(x, y, z) = 0$ en el plano proyectivo complejo son *birracionalmente equivalentes* si existe un conjunto finito de puntos sobre cada curva y polinomios homogéneos p, q, r de suerte que la aplicación $(x, y, z) \to (p(x, y, z), q(x, y, z)\ , r(x, y, z))$ biyecta los complementarios de los conjuntos finitos anteriores.

Se llaman **curvas racionales** a aquellas que son birracionalmente equivalentes a una recta. Las cónicas son un ejemplo de curvas racionales. De manera más general, se comprueba que decir que una curva es racional es tanto como decir que admite una parametrización, salvo para una cantidad finita de puntos, de la forma

$$x = x(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$$
$$y = y(t) = \frac{r(t)}{q(t)}$$

para ciertos polinomios $p, q, r \in \mathbb{C}[t]$.

Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ en $\mathbb{C}^2$ se puede parametrizar por

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
$$y(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

donde el parámetro t varía en todo $\mathbb{C}^\infty$ menos en el par de puntos $i, -i$.

Como toda recta en el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ queda uniformizada por la esfera de Riemann, toda curva racional se puede parametrizar por un parámetro que varía en una esfera, es decir, *la esfera uniformiza a toda curva racional.*

Volvamos por un instante a las curvas cúbicas. Es conocido que la condición de lisitud sobre curvas cúbicas equivale a que el *discriminante* de la curva sea no nulo, esto es, una cúbica expresada en su forma normal

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

es lisa si, y sólo si, $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ (esto es muy sencillo de probar, tan sólo hay que imponer que la diferencial del polinomio se anule).

Sugerimos al lector que intente parametrizar un cúbica lisa a través de fracciones racionales, difícilmente lo va a conseguir. Si la cúbica no es lisa es otra historia. Por ejemplo, la curva $y^2 - x^3 = 0$ tiene discriminante nulo, luego es singular. En efecto, tiene una singularidad en $(0, 0)$ pues la diferencial del polinomio $y^2 - x^3$ se anula en tal punto (y sólo en ese). Un sencilla parametrización racional podría ser

$$x(t) = t^2$$
$$y(t) = t^3$$

Si una cúbica posee un punto singular, uno puede apoyarse en él y trazar rectas partiendo de la singularidad: los cortes con la curva sirven para dislumbrar una parametrización. Sin embargo, si no hay un *foco* desde el que proyectar, a priori, no hay una forma factible de parametrizar racionalmente la curva. De hecho, es que no la hay. Esto se puede probar de manera elemental jugando con los grados de los polinomios de una posible factorización y comprobando como la disyuntiva de grados y^2/x^3 junto con la no anulación del discriminante tira por tierra toda esperanza. Sin embargo, paulatinamente se fue tomando consciencia de que hay una razón mucho más profunda que lo impide, un hecho que a priori poco o nada tiene que ver: el toro y la esfera no son homeomorfos.

A partir de aquí sería deseable que el lector estuviera mínimamente versado en las funciones elípticas; no obstante presentaremos varios conceptos básicos por si no fuera el caso, comenzado por su definición:

Definición 2.1.1 (Función elíptica) *Una función meromorfa se dice que es elíptica si es doblemente periódica, esto es, existen dos números complejos w_1 y w_2 $\mathbb{R}$-linealmente independientes tales que*

$$f(z + \omega_1) = f(z) \text{ y } f(z + \omega_2) = f(z)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$

De esta forma, puede pensarse que el dominio adecuado de definición para una función elíptica es el toro $\mathbb{C}/\Lambda$ donde Λ es el retículo generado por ω_1 y ω_2. De esta forma, las funciones elípticas son exactamente las funciones meromorfas definidas sobre el toro.

A cada retículo se le puede asociar una función elíptica determinante: la función $\mathcal{P}$ de Weierstrass:

Definición 2.1.2 *Si Λ es un retículo en $\mathbb{C}$ se define la función $\mathcal{P}$ de Weierstrass asociada al retículo como la función:*

$$\mathcal{P}_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

Es inmediato comprobar que para cada retículo Λ la función $\mathcal{P}_\Lambda$ es meromorfa (la serie converge normalmente sobre los compactos de $\mathbb{C} - \Lambda$). Su derivada, en virtud de lo anterior, puede obtenerse derivando término a término:

$$\mathcal{P}_\Lambda'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z+\omega)^3}$$

A parte de ser meromorfa, esta función también es doblemente periódica (es invariante bajo la transformación $z \to z + \omega$ para cada ω período del retículo) luego fijado $\omega \in \Lambda$, para cada $z \in \mathbb{C}$ la función

$$\mathcal{P}_\Lambda(z+\omega) - \mathcal{P}_\Lambda(z)$$

es constante en los dominios de $\mathbb{C} - \Lambda$ ya que su derivada es nula. Haciendo $z = -\frac{\omega}{2}$ se comprueba que la función es nula en el paralelogramo fundamental del retículo, luego es doblemente periódica respecto de Λ, y de esta forma, tanto la función $\mathcal{P}_\Lambda$ como su derivada son funciones meromorfas definidas sobre el toro $\mathbb{C}/\Lambda$.

Es más, puede probarse que el conjunto de funciones meromorfas sobre el toro $\mathbb{C}/\Lambda$ es exactamente $\mathbb{C}(\mathcal{P}_\Lambda, \mathcal{P}_\Lambda')$.

Introducimos ahora las llamadas sumas de Einsenstein:

Definición 2.1.3 *Si Λ es un retículo en $\mathbb{C}$, para cada $n \geq 3$ se define la n-sima suma de Einsenstein como la serie*

$$G_{n,\Lambda} = \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\omega^n}$$

No es difícil comprobar que todas ellas, para cualquier retículo, son finitas.

Tomemos un retículo Λ en $\mathbb{C}$; sabemos que para cada complejo z de módulo menor que 1 se cumple que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

Fijemos r real positivo de suerte que $r \leq |\omega|$ para cada ω no nulo del retículo. Entonces, si z es tal que $0 < |z| < r$, se tendrá $|\frac{z}{\omega}| < 1$ siempre que ω sea no nulo, luego

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2(1-\frac{z}{\omega})^2} =$$
$$= \frac{1}{\omega^2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(\frac{z}{\omega})^n)$$

y por tanto

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{\omega^{n+2}})z^n$$

Sumando en ω se tiene el desarrollo en serie de Laurent para la función $\mathcal{P}_\Lambda$ de Weierstrass:

Proposición 2.1.4 *El desarrollo de Laurent para la función $\mathcal{P}_\Lambda$ es exactamente*

$$\mathcal{P}_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2,\Lambda}z^{2n}$$

A partir de aquí uno obtiene la propiedad que permite tender el puente hacia las curvas cúbicas: la ecuación diferencial de $\mathcal{P}_\Lambda$.

Proposición 2.1.5 *La función $\mathcal{P}_\Lambda$ de Weierstrass verifica la siguiente ecuación diferencial:*

$$(\mathcal{P}_\Lambda')^2 = 4\mathcal{P}_\Lambda^3 - 60G_{4,\Lambda}\mathcal{P}_\Lambda - 140G_{6,\Lambda}$$

Dem:

Derivando la serie de Laurent para $\mathcal{P}_\Lambda$, elevando al cuadrado y operando se tiene que:

$$(\mathcal{P}_\Lambda')^2 - 4\mathcal{P}_\Lambda^3 + 60G_{4,\Lambda}\mathcal{P}_\Lambda + 140G_{6,\Lambda} = O(z^2)$$

Por ser el primer miembro una función elíptica, lo es el segundo, pero éste es también una función holomorfa, luego constante (si es holomorfa es continua, luego está acotada en el paralelogramo fundamental y por periodicidad en $\mathbb{C}$; como también es una función entera ha de ser constante). Además, al no tener término independiente ha de ser nula.

□

De esta forma, si tomamos dos complejos ω_1 y ω_2 linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, formamos retículo correspondiente y tomamos tanto las sumas de Einsenstein asociadas como la función de Weiertrass, se tiene el siguiente importante resultado:

Proposición 2.1.6 *Manteniendo la notación anterior y denotando por E a la cúbica $\{(x,y) \in \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty | \ y^2 - 4x^3 + 60G_4 + 140G_6 = 0\}$ la aplicación,*

$$\mathbb{C}/\Lambda \to E$$

$$z \to (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}^{'}(z))$$

establece una biyección holomorfa entre superficies de Riemann. Es decir, la cubica $y^2 - 4x^3 + 60G_4x + 140G_6 = 0$ queda uniformizada por el toro

Para una prueba puede consultarse el capítulo tercero del texto de Jones y Singerman [**3**]. De todos modos, al ser el toro una superficie compacta, la holomorfía de la aplicación anterior haría que estuviéramos ante un recubrimiento ramificado, garantizando la sobreyectividad (entre otras cosas). Habida cuenta la inyectividad, se tendría la deseada equivalencia conforme.

Parece que este argumento sólo funciona a posteriori, es decir, tomamos dos complejos que dan lugar a un retículo, formamos las sumas respectivas y entonces, la cúbica inducida queda uniformizada por el toro pertinente, pero para una cúbica arbitraria, ¿podemos construir un retículo cuya función de Weiertrass “verifique” la ecuación de la curva? La respuesta es que sí, pero su prueba no es nada trivial. Para una prueba detallada puede consultarse en el texto de geometría algebraica de Ivorra [7]; para razonar suele ser habitual apoyarse en la llamada *forma modular de Klein*:

$$J(\omega_1, \omega_2) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2}$$

donde

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60G_{2,\Lambda}$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = 140G_{6,\Lambda}$$

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = g_2^3(\omega_1, \omega_2) - 27g_3^2(\omega_1, \omega_2)$$

Y por supuesto Λ es el retículo asociado a ω_1 y ω_2.

Otra forma de probarlo es utilizando la llamada *variedad de Jacobi*; este enfoque se desarrolla en [2]. De una u otra forma, el resultado es el que sigue:

Proposición 2.1.7 *Si a y b son complejos de suerte que $a^3 - 27b^2 \neq 0$ entonces existen complejos ω_1 y ω_2 $\mathbb{R}$ tales que*

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = a$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = b$$

y por tanto la cúbica singular $y^2 = 4x^3 - ax - b$ (con discriminante $a^3 - 27b^2$) es uniformizable por el toro $\mathbb{C}/ < \omega_1, \omega_2 >$.

Como corolario, hilando todos los hechos anteriores tenemos el resultado clave:

Proposición 2.1.8 *Toda curva cúbica lisa queda uniformizada por un toro complejo.*

Con este hecho entendemos de manera topológica por qué las cúbicas lisas no son racionales: por una parte, toda curva racional queda parametrizada a través de funciones racionales (esto es, meromorfas en $\mathbb{C}^\infty$) salvo una cantidad finita de puntos (contemplamos aquí también el caso en el que no hubiese que suprimir *ningún* punto), por la esfera de Riemann, luego toda ella menos una cantidad finita de puntos es homeomorfa a una esfera salvo un número finito de puntos, y por otra, toda curva cúbica no singular es homeomorfa al toro, pero una esfera privada de cualquier cantidad finita de puntos (incluso sin quitar ninguno) de ninguna manera es homeomorfa al toro.

A través de este importantísimo ejemplo comprobamos la estrecha relación entre las curvas algebraicas, superficies de Riemann, uniformización de curvas algebraicas y uniformización de superficies de Riemann. Señalemos que dos de los hechos más destacables en esta dirección fueron *casi* probados por el propio Riemann:

- Dos curvas algebraicas son birracionalmente equivalentes si, y sólo si, sus superficies de Riemann asociadas son conformemente equivalentes.

- Toda superficie de Riemann compacta es conformemente equivalente a la superficie de Riemann asociada a una curva algebraica.

Nosotros no vamos a continuar esta línea. Como ya se ha expuesto, nuestro objetivo es probar que toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente o al disco unidad del plano compleja, o al propio plano complejo o a la esfera de Riemann y para ello hemos escogido un enfoque mayoritariamente analítico. Ahora bien, siempre es interesante tener el enfoque algebraico (fruto de las propias curvas algebraicas) en mente. Por ejemplo, una vez leído todo el trabajo, del teorema [**8.1.6**] se deduce que si X es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, existe un subgrupo G de $PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{H})$ que actúa propiamente sobre el semiplano de Poincaré $\mathbb{H}$ de suerte que X se identifica con el cociente

$$\mathbb{H}/G$$

Por supuesto, para entender lo anterior, el lector tendría que conocer la teoría de antemano o sino debería completar la lectura del trabajo al completo. Asumiendo que verdaderamente el lector está siguiendo el razonamiento, desde la perspectiva de curvas algebraicas, lo que en verdad estamos probando es que cualquier curva algebraica $F(x,y) = 0$ que dé lugar a la superficie X queda uniformizada por dos funciones univaluadas y holomorfas $x, y : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Admitiendo la correspondencia entre géneros de curvas y géneros de superficies, el teorema [**8.1.6**] supone una de las joyas de la teoría de curvas algebraicas. En efecto, no sólo afirma la existencia de parametrizaciones para todas las curvas algebraicas, sino que especifica los pertinentes dominios, todo ello en función de ciertas propiedades topológicas Por cierto, a los subgrupos de $PSL(2,\mathbb{R})$ se les conoce como grupos fuchsianos y el hecho anterior que se ha justificado con el teorema [**8.1.6**] fue probado independientemente por Klein y Poincaré en 1882. Más detalles se encuentran en la sección **Notas históricas**, del capítulo 8.

Capítulo 3

Espacios recubridores

3.1. Aplicaciones recubridoras

3.1.1. Recubrimientos regulares

Sabemos que la aplicación exponencial exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ biyecta bandas horizontales de anchura 2π, abiertas por un extremo y cerradas por otro, con el plano agujereado $\mathbb{C}^*$. De esta forma, cada complejo no nulo presenta entornos de suerte que su antiimagen es una colección infinita numerable de abiertos, todos ellos copias por traslación del vector $2\pi i$ y homeomorfos a través de la exponencial al entorno de partida. Esta peculiaridad se expresa diciendo que el entorno *queda regularmente cubierto* y que el par $(\mathbb{C}, exp)$ es un *espacio recubridor* para $\mathbb{C}^*$. La teoría de espacios recubridores fue creada por Schwarz para el estudio de la uniformización de superficies de Riemann, aunque su presentación moderna encuentra su marco adecuado en el ámbito topológico.

Las siguientes líneas están destinadas a introducir *someramente* las herramientas y conceptos de la teoría de espacios recubridores que posteriormente necesitaremos. Si bien podríamos abordar directamente los tópicos desde el contexto de superficies de Riemann, se ha preferido trabajar en el encuadre topológico, esto es así porque las mayores dificultades a la hora de probar los resultados residen en la propia topología y no en la estructura analítica, no siriviendo esta última, salvo en alguna ocasión, como herramienta de simplificación. De esta forma se gana una sustancial generalidad sin que suponga un excesivo esfuerzo en comparación otras exposiciones más restrictivas, como hace por ejemplo [**2**].

La teoría de espacios recubridores es muy rica y muy amplia. Supondremos que el lector posee mínimos conocimientos de topologia algebraica. De todos modos, enunciaremos los resultados básicos de esta disciplina que nos sean necesarios, omitiendo las pertinentes demostraciones. El lector que desee una prueba de ellas puede consultar el excelente manual de topología de Munkres ([**11**]).

Por comodidad, de ahora en adelante E y B denotarán sendos espacios topológicos.

Definición 3.1.1 (Recubrimiento regular) *Sea* $p{:}E \to B$ *una aplicación continua y suprayectiva. Se dice que un abierto* $\mathcal{U} \subset B$ *queda regularmente cubierto por la aplicación* p *si la contraimagen de dicho abierto,* p^{-1} $(\mathcal{U})$*, se puede expresar como unión disjunta de abiertos no vacíos, tales que la restricción de* p *a cada uno de ellos sea un homeomorfismo.*

A cualquiera de las particiones anteriores se le llama generalmente **partición en rebanadas** de p^{-1} $(\mathcal{U})$.

Con el concepto de recubrimiento regular en mente introducimos el de aplicación recubridora:

Definición 3.1.2 (Aplicación recubridora) *Sea* $p : E \to B$ *una aplicación continua y suprayectiva. Se dice que es una aplicación recubridora si cada punto de* B *tiene un entorno abierto regularmente cubierto por* p*.*

Observación 3.1.3 *Las siguientes observaciones son necesarias:*

1. *Bajo las mismas notaciones que en la proposición anterior, si* p *es una aplicación recubridora, se dice que el espacio* E *es un espacio recubridor, un recubrimiento étale o simplemente un recubrimiento para* B*. También suele utilizarse la terminología revestimiento étale.*

2. *Es claro que toda aplicación recubridora es un homeomorfismo local. Este hecho está más cerca de lo que en un principio pueda parecer para caracterizarl. Tampoco es difícil comprobar que las aplicaciones recubridoras son abiertas y que cada una de sus fibras hereda la topología discreta.*

3. *De la definición se desprende que cada punto posee un entorno cuyos elementos comparten el cardinal de la fibra, esto es, el cardinal de la fibra es localmente constante y por ende es abierto y cerrado en el espacio* B*. Si* B *fuese conexo (como ocurre con las superficies de Riemann) el cardinal de la fibra es constante.*

4. *En virtud del apartado anterior, si B es conexo, se dice que (E,p) es un recubrimiento étale de grado d si la fibra tiene cardinal d.*

3.1.2. Recubrimientos ramificados y aplicaciones propias

Volviendo al contexto de superficies de Riemann; tomemos dos superficies de Riemann compactas, X e Y, y una aplicación holomorfa entre ellas $f : X \to Y$. Para cada $y \in Y$, existe un entorno $\mathcal{V}$ de y y entornos disjuntos (proposición [**1.2.16**]) $\mathcal{U}_i$ de cada a_i ($f^{-1}(y) = \{a_1, \dots, a_n\}$) de suerte que $\mathcal{V} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ y para cada $\mathcal{U}_i$ la lectura de la restricción $f : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}$ es un monomio z^{r_i}.

- Si el punto a es de escisión, todos los exponentes $r_i = e(f, a_i)$ son exactamente 1, es decir, la aplicación biyecta cada abierto $\mathcal{U}_i$ con el abierto $\mathcal{V}$ y al ser la aplicación holomorfa, es biholomorfa y por tanto un homeomorfismo ($\mathcal{V}$ queda regularmente cubierto).
- En cambio, si el punto a es de ramificación, algún $r_i = e(f, a_i)$ ha de ser estrictamente mayor que uno, imposibilitando que el abierto $\mathcal{U}_i$ sea homeomorfo con $\mathcal{V}$ a través de f ($\mathcal{V}$ no queda regularmente cubierto).

Recordemos que el conjunto $\{a \in X : e(f, a) > 1\}$ es cerrado y discreto en X, luego finito. De esta forma, para cualquier aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas, al suprimir una cantidad finita de puntos en las superficies, puede obtenerse una aplicación recubridora. Tomamos entonces consciencia de que las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas están *"muy cerca"* de ser aplicaciones recubridoras.

Sin embargo, no es estrictamente necesario que el dominio de definición de una función holomorfa sea una superficie de Riemann *compacta* para que presente un comportamiento similar al de una aplicación recubridora: la función

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$
$$z \to z^2$$

es una aplicación recubridora, pero deja de serlo al extender su dominio a todo el plano $\mathbb{C}$: no es inyectiva en ningún entorno de cero, luego este punto no admite ningún entorno regularmente cubierto. Sin embargo, cualquier punto de $\mathbb{C}$ tiene un entorno abierto $\mathcal{V}$ de suerte que existen entornos disjuntos de sus antiimágenes, tales que la restricción de f a cada uno de ellos es una función continua y sobreyectiva. Obviamente, si el complejo es no nulo, f es biyectiva en los pertinentes entornos y por tanto la aplicación entre los conjuntos $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es una aplicación recubridora.

Todos estos hechos hacen necesaria una leve generalización del concepto de aplicación recubridora al contexto de superficies de Riemann; si X e Y son superficies de Riemann buscamos aplicaciones $f : X \to Y$ tales que:

- Sean holomorfas
- Tengan fibra finita (recordemos que toda función holomorfa no constante tiene fibra discreta, el pedir que sea además finita, tal y como se comproborá en un futuro, no supone ninguna restricción significativa)
- Para cada $a \in Y$, existe un entorno $\mathcal{V}$ de y y entornos disjuntos $\mathcal{U}_i$ de cada a_i ($f^{-1}(y) = \{a_1, \ldots, a_n\}$) tales que $\mathcal{V} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ y para cada $\mathcal{U}_i$ la lectura de la restricción $f : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}$ es un monomio z^{r_i} con r_i entero.

Introducimos así el concepto de recubrimiento ramificado:

Definición 3.1.4 (Recubrimiento ramificado) *Sean X e Y superficies de Riemann y $f : X \to Y$ una aplicación verificando las tres condiciones anteriores, entonces se dice que f es un recubrimiento ramificado.*

En virtud de todo lo anterior, hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 3.1.5 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas, entonces f es un recubrimiento ramificado. Es más, si no tiene puntos de ramificación, entonces (X, f) es un recubrimiento de Y de grado $\partial^o f$.*

La clave en la prueba del resultado anterior es la proposición [**1.2.16**]. Si observamos detalladamente la prueba de sus apartados, todas las ideas se apoyan en el hecho de que f sea cerrada y de fibra finita. Al ser el dominio de f (siguiendo con la notación de la proposición: $f : X \to Y$) compacto, estos dos hechos son triviales. Sin embargo, ambos se pueden garantizar con la siguiente propiedad, ajena por supuesto al hecho de que X sea o no compacta: *la contraimagen de un compacto de Y a través de f es un compacto de X*, esto es, f es una **aplicación propia**.

En efecto:

- El que sea de fibra finita es obvio, pues por ser cada punto compacto, la fibra ha de ser compacta y al ser también discreta (asumimos que f es no constante, luego es de fibra discreta), ha de ser finita.
- Sea $F \subset X$ un cerrado, veamos que $f(F)$ es cerrado. Sea $y \in f(F)$. Por ser Y 1AN, existe una sucesión $(f(x_n))_n$ una sucesión de $f(F)$ convergente hacia y con $(x_n)_n \subset F$. El conjunto $(f(x_n))_n \cup \{y\}$ es compacto, luego su contraimagen es un compacto de X, que además contiene a la sucesión $(x_n)_n$. De esta forma, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k \subset F$ convergente hacia un punto $\alpha \in F$ (F es cerrado), y por tanto $f(x_{n_k}) \to y = f(\alpha) \in f(F)$.

De esta forma, calcando sendas demostraciones se comprueba que:

Proposición 3.1.6 *Si $f : X \to Y$ es un aplicación holomorfa no constante y **propia** entre superficies de Riemann, entonces:*

1. *La aplicación es abierta y cerrada.*
2. *La aplicación es suprayectiva*
3. *La aplicación f tiene fibra finita*
4. *Para cada $y \in Y$ y para cada abierto $\mathcal{V}$ que contenga a la fibra de y, existe un abierto $\mathcal{U} \subset Y$ tal que $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.*
5. *Sea $y \in Y$ un punto de escisión de f, entonces existen un entorno abierto $\mathcal{V}$ de y y una cantidad finita de abiertos $\mathcal{U}_i$ de X tales que:*

$$f^{-1}(\mathcal{V}) = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$$

y de suerte que la restricción de f a cada abierto $\mathcal{V}_i$ es una equivalencia conforme.

Proposición 3.1.7 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante y **propia** entre superficies de Riemann. Para cada $b \in Y$ la ecuación*

$$f(a) = b$$

tiene siempre el mismo número de soluciones contando las pertinentes multiplicidades.

Proposición 3.1.8 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante y **propia** entre superficies de Riemann, entonces f es un recubrimiento ramificado. Es más, si no tiene puntos de ramificación, entonces (X, f) es un recubrimiento de Y de grado $\partial^o f$.*

3.2. Grupo fundamental y recubrimiento universal

Recordemos que el teorema de uniformización de superficies de Riemann afirma que toda superficie de Riemann *simplemente conexa* es conformemente equivalente al plano $\mathbb{C}$, al disco unidad o a la esfera $\mathbb{C}^\infty$. La piedra angular del resultado anterior es la **simple conexión**, concepto topológico que se apoya directamente en el de grupo fundamental: un espacio topológico es simplemente conexo si, y sólo si, es arco-conexo y su grupo fundamental es trivial.

En las siguientes líneas seguiremos la notación establecida en el apéndice de topología algebraica, concretamente: E, B y X denotarán sendos espacios topológicos, $\pi_1(a, X)$ representará al grupo fundamental del espacio topológico X en el punto $a \in X$ y $\Lambda(a, X)$ al conjunto de lazos en X basados en $a \in X$ (para no recargar la notación, cuando no haya confusión con el espacio topológico ambiente, omitiremos su referencia).

Uno de los conceptos fundamentales es el de levantamiento:

Definición 3.2.1 (Levantamiento) *Sean X, B y E espacios topológicos y $p : E \to B$ y $f : X \to B$ aplicaciones continuas. Un levantamiento de f a lo largo de p, o sobre p o simplemente un levantamiento de f cuando no haya confusión con la aplicación recubridora, es una aplicación continua $\hat{f} : X \to E$ tal que $p \circ \hat{f} = f$*

Es decir, un levantamiento es toda aplicación continua $\hat{f}$ que haga conmutativa el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow^{\hat{f}} & \downarrow^{p} \\ X & \rightarrow^{f} & B \end{array}$$

Consecuencia sencilla de ser homeomorfismos locales es que las aplicaciones recubridoras **levantan arcos**, es más, el levantamiento es único si imponemos una condición inicial; precisando más: si $\gamma : I \to B$ es un arco, $p : E \to B$ es una aplicación recubridora y $\gamma(0) = b_0 = p(e_0)$, existe un único levantamiento de γ, digamos $\hat{\gamma}$, tal que $\hat{\gamma}(0) = e_0$. Si levantan arcos, también levantan familias de arcos, ahora bien, si la familia varía sobre un parámetro de forma uniformemente continua, no es difícil probar (apoyándose en la propiedad de homeomorfismo local) que los levantamientos dependerán también de forma continua del parámetro y por tanto **levantan homotopías de arcos en homotopías de arcos**. En este último caso también se tiene una unicidad toda vez que se fijen condiciones iniciales, formalmente: si $p : E \to B$ es una aplicación recubridora, $H : I \times I \to E$ es una aplicación continua (y por tanto uniformemente continua) con $H(0,0) = b_0 \in B$, entonces para cada $e_0 \in E$ de suerte que $p(e_0) = b_0$ existe un único levantamiento $\hat{H}$ de H de suerte que $\hat{H}(0,0) = e_0$. Además si H es una homotopía de arcos, también lo es $\hat{H}$.

Si las aplicaciones recubridoras levantan arcos y homotopías, no es extraño pensar que levanten también, en cierto sentido, al grupo fundamental. Precisemos eso último: sean $p : E \to B$ una aplicación recubridora entre espacios topológicos, $b_0 \in B$ y e_0 un punto de la fibra de b_0 por p; es lógico considerar la aplicación

$$\phi_{e_0} : \Lambda(b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

$$\gamma \to \hat{\gamma}(1)$$

donde $\hat{\gamma}$ representa al único levantamiento de γ por p comenzando en e_0. Resulta que la aplicación anterior es ajena a la homotopía, es decir, si dos lazos γ_1 y γ_2 de $\Lambda(b_0)$ son homótopos, sus levantamientos serán homótopos relativamente a los extremos, luego $\hat{\gamma_1}(1) = \hat{\gamma_2}(1)$ y por tanto la aplicación anterior se extiende al grupo fundamental de B en b_0:

$$\Phi_{e_0} : \pi_1(b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

$$\dot{\gamma} \to \hat{\gamma}(1)$$

donde por $\dot{\gamma}$ nos referimos a la clase de homotopía del lazo γ.

Supongamos que E es simplemente conexo. Si γ_1 y γ_2 son dos lazos en b_0 tales que $\hat{\gamma_1}(1) = \hat{\gamma_2}(1)$, entonces $\hat{\gamma_1}\hat{\gamma_2}^{-1}$ es contráctil, i.e., homótopo a un punto (*justamente a* e_0), sea H una de estas homotopías; su composición con p sigue siendo continua, luego es una homotopía entre γ_1 y γ_2 y además es relativa a los extremos, luego $\dot{\gamma_1} = \dot{\gamma_2}$ (ambos lazos comparte clase de homotopía) y por tanto la aplicación es inyectiva. El que sea suprayectiva es inmediato de la arco-conexión de E: cada punto de la fibra esta conectado con e_0 a través de un arco, la composición del arco con p da lugar a un lazo basado en b_0 cuya clase de homotopía es un antecedente para el punto de de partida. En resumidas cuentas, si E es simplemente conexo entonces **la**

aplicación anterior es biyectiva.

Como aplicación de lo anterior: la exponencial normalizada $e(t) = exp(2\pi it)$ definida sobre la recta real es una aplicación recubridora sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Por ser $\mathbb{R}$ simplemente conexo, existe una biyección (una cualquiera de las aplicaciones Φ) entre $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ y la fibra de cualquier punto $b_0 \in \mathbb{S}^1$. Particularizando $b_0 = 1$, su fibra la constituyen todos los enteros, luego existe una biyección entre $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ y $\mathbb{Z}$. Es muy sencillo comprobar que Φ es morfismo de grupos, luego ambos grupos son isomorfos.

3.2.1. Recubrimientos universales

Esto ha de servir como ejemplo de las múltiples bondades que proporciona un recubrimiento simplemente conexo. Es por tanto natural cuestionarse los siguientes hechos:

- Por una parte: dados dos espacios recubridores (E, p) y $(E^{'}, p^{'})$sobre B, ¿cómo saber si existe un homemorfimos entre ellos que respete las fibras de las sendas aplicaciones recubridoras? Es decir, cómo saber si existe un homeomorfismo g que haga conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E^{'} & \to^{g} & E \\ & \searrow^{p^{'}} & \downarrow^{p} \\ & & B \end{array}$$

  Caso de existir tal homeomorfismo, diremos que ambos *espacios recubridores* son equivalentes.

- Y por otra: ¿todo espacio topológico admite un recubrimiento simplemente conexo?

Ambas preguntas son fundamentales en el contexto de superficies de Riemann. Veremos que toda superficie de Riemann admite un recubrimiento simplemente conexo y por tanto el teorema de uniformización adquiere una mayor importancia si cabe.

Si $p : E \to B$ es una aplicación recubridora, los homeomorfismos $f : E \to E$ que preservan la fibra de p, i.e. $p = p \circ f$ forman un grupo con la operación composición, al que representaremos por $Deck(E, p, B)$. Nos referiremos a él como el **grupo de equivalencias** del par (E, p) o simplemente como el grupo de equivalencias cuando no haya lugar a la confusión.

Bajo ciertas condiciones de conexión sobre el espacio E (como la simple conexión), resulta que el propio B es homeomorfo al espacio de órbitas de E bajo la acción del grupo de equivalencias. De esta forma, cualquier superficie de Riemann X se puede expresar como *un cociente de su recubrimiento universal*, es decir, **toda superficie de Riemann es homeomorfa a un cociente del disco, del plano o de la esfera**: un resultado formidable. A lo largo del texto precisaremos debidamente las ideas anteriores en el contexto que nos interesa (el de superficies de Riemann). Comprobaremos que al citado cociente anterior se le puede dotar de estructura de superficie de Riemann, veremos también como la identificación anterior no sólo es topológica, sino conforme.

Resolvamos esquemáticamente las dos cuestiones anteriores en el marco topológico:

- En lo que al primer problema se refiere:

  Las clases de conjugación de $\pi_1(b_0)$ determinan completamente los distintos recubrimientos del espacio. Precisando más: tomemos dos recubrimientos (E, p) y $(E^{'}, p^{'})$ para B y supongamos que $p(e_0) = p^{'}(e_0^{'}) = b_0$, entonces, los recubrimientos son equivalentes si, y sólo si, los subgrupos de $\pi_1(b_0)$, $p_*(\pi_1(e_0)$ y $p_*^{'}(\pi_1(e_0^{'})$ son conjugados.

  Para una prueba ver [11], capítulo 13, teorema 79.2. La prueba del resultado anterior no es en absoluto difícil, si bien utiliza sistemáticamente u resultado técnico generalmente conocido como el *lema de levantamiento general*. Este lema aporta condiciones suficientes y necesarias, en base a los grupos fundamentales, para que una aplicación arbitraria y continua pueda ser levantada por una aplicación recubridora. Al ser meramente un utensilio topológico ajeno a las superficies de Riemann omitimos su enunciado y referimos de nuevo al lector interesando al libro de Munkres.

  Veamos un par de ejemplos:

  - Intentemos caracterizar todos los recubrimientos de $\mathbb{S}^1$.

Sabemos que su grupo fundamental es isomorfo al aditivo de $\mathbb{Z}$; cada subgrupo de los enteros es de la forma $m\mathbb{Z}$ para algún entero m y el hecho de que n$\mathbb{Z}$ sea un grupo conmutativo hace que la conjugación sea trivial. De esta forma, dos recubrimientos de $\mathbb{S}^1$ son equivalentes si, y sólo si, sus grupos inducidos coinciden. Ahora bien, para cada $n \geq 1$ el par $(\mathbb{S}^1, z^n)$ es un recubrimiento del disco y, además, el grupo inducido es isomorfo a $n\mathbb{Z}$. Por otra parte el par $(\mathbb{R}, e(t))$ es otro recubrimiento cuyo grupo es exactamente el trivial. De esta forma, cualquier otro recubrimiento para el disco unidad **es equivalente** a uno de los anteriores.

- Fijémonos ahora en el disco agujereado, esto es, $D^* = D(0,1) - \{0\}$. Por ser homotópicamente equivalente al disco $\mathbb{S}^1$ (basta considerar la retracción $z \to \frac{z}{|z|}$) comparten grupo fundamental (ver apéndice). Como antes, para cada entero no nulo n los monomios $z^n : D^* \to D^*$ son aplicaciones recubridoras cuyos grupos inducidos son $n\mathbb{Z}$. Por otra parte, la exponencial compleja $e^z : \{z|Re(z) < 0\} \to D^*$ es también una aplicación recubridora y por la conexión simple del semiplano $Re(z) < 0$ su grupo inducido es el trivial. De esta forma cualquier otro recubrimiento del disco punteado **es equivalente** a uno de los anteriores.

Remarquemos el hecho de que las clases de conjugación determinan únicamente el que dos recubrimientos sean o no equivalentes pero no aportan ninguna información sobre la *existencia* de tales recubrimientos, es decir, nada nos garantiza a priori la existencia de recubrimientos cuyos grupos inducidos determinen una clase de conjugación en particular.

Entre todas las clases de conjugación de $\pi_1(b_0)$ a destacar es la clase (0); si $p : E \to B$ es una aplicación recubridora, la inyectividad de $p_* : \pi_1(e_0) \to \pi_1(b_0)$ garantiza que todo recubrimiento cuya clase de conjugación asociada sea la nula ha de ser forzosamente simplemente y conexo, y además, dos recubrimientos simplemente conexos cualesquiera son equivalentes (pues sus grupos inducidos son ambos nulos y por ende son conjugados). Un recubrimiento simplemente conexo recibe el nombre de **recubrimiento universal.** En bastantes textos suele introducirse a partir de propiedades universales, sin embargo creemos que es mucho más natural la presentación anterior.

Con estas ideas en mente pasamos entonces a la segunda cuestión.

- Como se puede intuir de las líneas anteriores, no todos los espacios topológicos admiten un recubrimiento universal. Sin embargo, se conoce el siguiente destacado teorema de caracterización:

  Teorema 3.2.2 *Un espacio topológico X tiene un recubridor universal si, y solo si, es arco-conexo y verifica la siguiente propiedad: cada $x \in X$ tiene un entorno abierto $\mathcal{U}_x$, de suerte que el morfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $i : \mathcal{U}_x \to X$*

  $$i_* : \pi_1(x, \mathcal{U}_x) \to \pi_1(X, x)$$

  es trivial. Además, si X es Hausdorff entonces su recubridor universal es Hausdorff.

  Para una prueba puede consultarse el texto de Munkres [11], capítulo 13, sección 82.

  La condición del teorema suele conocerse con el nombre *"semilocalmente simplemente conexo"*. Observemos que obviamente todo espacio simplemente conexo es semilocalmente simplemente conexo.

3.2.2. Recubridor universal en superficies de Riemann

Dejemos de lado el marco general anterior y volvamos al contexto de superficies de Riemann: resulta que toda superficie de Riemann es semilocalmente simplemente conexa, pues localmente se indentifica con discos del plano complejo, que son simplemente conexos. La arco-conexión de una superficie de Riemann S se justifica de forma sencilla como sigue: fijemos un punto $x \in S$, entonces el conjunto $\{y \in S |$ existe un arco conectando x e y $\}$ es no vacío, ahora bien, por ser S localmente arco-conexa (como ya hemos mencionado localmente se identifican con discos complejos) el conjunto anterior es abierto y cerrado, y por conexión ha de ser el total. De esta forma toda superficie de Riemann admite un recubridor universal:

Teorema 3.2.3 *Toda superficie de Riemann X admite un recubridor universal $\hat{X}$.*

Recordando que toda aplicación recubridora es un homeomorfismo local, no es difícil equipar al recubridor universal de una superficie de Riemann con una estructura analítica, es más, el recubridor universal admite una única estructura analítica bajo la cual la aplicación recubridora es holomorfa, tal y como se deduce de la siguiente proposición:

Proposición 3.2.4 *Sea X una superficie de Riemann y sea Y un espacio topológico separado Hausdorff. Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, entonces Y admite una única estructura de superficie de Riemann para la que la aplicación p es holomorfa (y por tanto biholomorfa localmente).*

Dem:

La unicidad es clara: dos estructuras complejas cualesquiera sobre Y por hipótesis son localmente biholomorfas a X, luego localemten son biholomorfas entre ellas, y por tanto coincidentes.
Construyámosla:

Para cada punto α de Y existe un entorno suyo, digamos $\mathcal{V}_\alpha$, de suerte que es homeomorfo a un abierto $\mathcal{U}_\alpha$ de X a través de $\mathbf{p}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el abierto $\mathcal{U}_\alpha$ es el dominio de una carta $(\mathcal{U}_\alpha, Z_\alpha)$; de esta forma la familia de cartas $\{(\mathcal{V}_\alpha, Z_\alpha \circ \ \mathbf{p})\}_\alpha$ es trivialmente un atlas para Y y para el que la lectura $\mathbf{p}$ es la identidad; la holomorfía es evidente (nótese que también lo es la biholomorfía).

□

En virtud de lo anterior, de ahora en adelante consideraremos al conjunto $\hat{X}$ no sólo como espacio topológico, sino como una superficie de Riemann (salvo que se especifique lo contrario, siempre con la estructura analítica anterior).

Si X es una superficie de Riemann y $\hat{X}$ su recubridor universal, no sólo tiene sentido considerar las equivalencias de $\hat{X}$ como espacio topológico (esto es, los homeomorfismos de $\hat{X}$ que respetan las fibras de p), sino que se puede **explotar la estructura analítica del recubridor** imponiendo que las equivalencias sean también aplicaciones holomorfas (y por tanto biholomorfas), es decir, consideramos las aplicaciones biholomorfas $f : \hat{X} \to \hat{X}$ que hacen conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \to^{f} & \hat{X} \\ & \searrow^{p} & \downarrow^{p} \\ & & X \end{array}$$

Con la composición como operación, las aplicaciones anteriores forman un grupo al que denotaremos por $Aut(\hat{X}, X)$ y que recibe el nombre de **grupo de equivalencias holomorfas**. El grupo anterior es un subgrupo del formado por todas las aplicaciones biholomorfas de $\hat{X}$ en $\hat{X}$, comúnmente conocido con el nombre de **grupo de automorfismos** de $\hat{X}$ y denotado por $Aut(\hat{X})$.

Se tiene el siguiente importante resultado:

Proposición 3.2.5 *Si X es una superficie de Riemann, entonces:*

1. $Aut(\hat{X}, X) \simeq \pi_1(X)$
2. *El recubrimiento $(\hat{X}, p)$ es de tipo Galois, es decir, si $a, b \in \hat{X}$ son tales que $p(a) = p(b)$ entonces existe $f \in Aut(\hat{X}, X)$ tal que $f(a) = b$.*

La prueba es muy larga y tediosa. Aconsejamos al lector interesado que consulte **[2]**.

Denotemos por $\hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$ al espacio de órbitas de $\hat{X}$ bajo la acción del grupo de equivalencias holomorfas, es decir, las clases de equivalencia de los puntos de $\hat{X}$ bajo la relación de igualdad obvia: dos puntos $a, b \in \hat{X}$ están relacionados si, y sólo si, existe $f \in Aut(\hat{X}, X)$ tal que $f(a) = b$. Por ser f una equivalencia, si dos puntos están relacionados entonces comparten fibra, i.e. existe $\alpha \in X$ de suerte que $a, b \in p^{-1}(\alpha)$ siendo p la aplicación recubridora. De hecho se cumple el resultado recíproco por ser el recubrimiento $(\hat{X}, p)$ de tipo Galois: si dos puntos $a, b \in \hat{X}$ comparten fibra existe una equivalencia f de suerte que $f(a) = b$ y por ende ambos puntos están relacionados. De esta forma, dos puntos $a, b \in \hat{X}$ están relacionados si, y sólo si, están en la misma fibra. Otra forma de probar este hecho, tal y como hace Munkres **[11]** , es apoyarse en el *lema de levantamiento general.*

Con las ideas anteriores en mente, es natural considerar la aplicación

$$\Gamma : \hat{X}/Aut(\hat{X}, X) \to X$$

$$\dot{a} \to p(a)$$

donde $\dot{a}$ denota la clase de equivalencia bajo la relación anterior de un punto $a \in \hat{X}$.

Proposición 3.2.6 *La aplicación anterior está bien definida y es biyectiva.*

Dem:

- El que la aplicación está bien definida es obvio: dos representantes cualesquiera de $\dot{a}$ han de compartir fibra y por ende su imagen por p es idéntica.

- También es inmediata la inyectividad: si dos elementos $\dot{a}$ y $\dot{b}$ son tales que $p(a) = p(b) = \alpha \in X$ entonces a y b están en la fibra de α luego comparten clase de equivalencia.

- Por último, es sobreyectiva: si $\alpha \in X$, por ser p una aplicación recubridora es sobreyectiva, luego la fibra de α es no vacía. Basta tomar un elemento cualquier de esta fibra como representante de una clase antecedente.

$\square$

Basta una mínima reflexión para darse cuenta de que es evidente avanzar ennuestra lista de propósitos. Es inmediato encontrar una topología (separada Haussdorf) en el espacio cociente $\hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$ de suerte que la aplicación Γ sea un homeomorfismo local. Hecho esto, en virtud de la proposición [**3.24**], la aplicación Γ se convierte en un *puente* que permite extender la estructura analítica de X al cociente y convertir a la propia Γ es una aplicación holomorfa. Habida cuenta el carácter biyectivo de la aplicación, $\hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$ y la superficie en cuestión X serán isomorfas como superficies de Riemann. La topología citada es la obvia: cada punto de la superficie X posee un entorno abierto $\mathcal{U}$ que queda regularmente cubierto por la proyección canónica del recubridor $p : \hat{X} \to X$, esto es, existen abiertos $(V_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de suerte que

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$

y cada abierto V_α es homeomorfo a $\mathcal{V}$ vía la proyección p. Obviamente $\dot{V}_\alpha = \dot{V}_\beta$ para cualesquiera índices $\alpha, \beta \in \Lambda$, luego al abierto $\mathcal{U} \subset X$ le podemos asignar un subconjunto de $\hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$. Tenemos por tanto una asignación (aplicación) inyectiva

$$\mathcal{T} \to P(\hat{X}/Aut(\hat{X}, X))$$

donde $\mathcal{T}$ es la topología de X y $P(\hat{X}/Aut(\hat{X}, X))$ es el conjunto de partes del espacio cociente que respeta contenciones, uniones e interesecciones, luego la imagen de por la aplicación anterior es de nuevo una topología (separada Haussdorf por serlo $\mathcal{T}$). Por construcción la proyección Γ es trivialmente continua y localmente abierta, luego es un homeomorfismo local. Basta acudir a la proposición **[3.24]** para completar la prueba del siguiente resultado fundamental:

Proposición 3.2.7 *Sea X una superficie de Riemann y $\hat{X}$ su recubridor universal. Manteniendo la notación de los resultados anteriores, existe un única estructura de superficie de Riemann en el cociente $\hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$ para la que cual la aplicación Γ es holomorfa. De ahora en adelante, salvo que se especifique lo contrario, supondremos que el cociente $\hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$ está equipado con tal estructura.*

Como consecuencia de todo lo anterior el resultado estrella de la sección se vuelve trivial:

Teorema 3.2.8 (Identificación con el espacio cociente) *Sea X una superficie de Riemann y $\hat{X}$ su recubridor universal. Manteniendo la notación de los resultados anteriores, la aplicación*

$$\Gamma : \hat{X}/Aut(\hat{X}, X) \to X$$
$$\dot{a} \to p(a)$$

*establece una equivalencia conforme entre ambas superficies, luego ambas se **pueden identificar de manera natural**.*

Este resultado, de capital importancia, **complementa a la perfección** al teorema de uniformización. Si conocemos todas las clases de isomorfía de las superficies de Riemann simplemente conexas (la esfera, el plano o el disco), conocemos todas las clases de isomorfía de los recubrimientos universales y por tanto **toda superficie de Riemann será un cociente bien de la esfera (superficie elíptica), bien del plano (superficie parabólica), bien del disco (superficie hiperbólica).**

Capítulo 4

Formas diferenciales

Las siguientes líneas pretenden ser una somera introducción a la teoría de formas diferenciales sobre superficies de Riemann.

Las formas diferenciales constituyen uno de los valuartes de la geometría diferencial. Íntimamente ligadas al concepto de diferenciabilidad, suponen el lenguaje adecuado para múltiples problemas, como por ejemplo la integración. Al ser una superficie de Riemann una 2-variedad real, toda la teoría de formas de geometría real tiene perfecto sentido, pero la estructura analítica atañe una mayor riqueza: formas diferenciales, holomorfas y meromorfas. Al igual que para una aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ de una superficie de Riemann en el plano, tiene pleno sentido preguntarse tanto por su diferenciabilidad como por su holomorfia, lo mismo sucede tanto con las formas como los espacios tangentes, esto es, bien derivaciones sobre funciones holomorfas, bien derivaciones sobre funciones de tipo $\mathcal{E}$.

A lo largo de este capítulo definiremos los espacios tangente y cotangente a una superficie de Riemann en un punto, introduciremos las distintas clases de formas que se encuentran en una variedad, desde las propias formas diferenciales de la geometría real hasta formas holomorfas, pasando por las distintas variantes de formas meromorfas. Presentaremos el llamado lema de Dolbeault, de capital importancia teórica e introduciremos la cohomología de deRham, herramienta indispensable.

4.1. Espacios tangente y cotangente

Sea X una superficie de Riemann y $[z = x+iy, \mathcal{U}]$ una carta en ella, generalizamos a continuación los operadores de derivación clásicos de la geometría diferencial:

- Parcial respecto de x, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{E}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{U})$$

$$f \to \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial x} \circ z$$

- Parcial respecto de y, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial y} : \mathcal{E}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{U})$$

$$f \to \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial y} \circ z$$

Notemos que ambos operadores son $\mathbb{C}$-lineales. Si queremos particularizar y evaluar las funciones anteriores en un punto a, utilizaremos la notación $\partial x_{|a} = (\frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial x} \circ z)(a)$ y $\partial y_{|a} = (\frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial y} \circ) z(a)$.

De ahora en adelante, para una función $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, denotaremos su lectura a través de la carta z con la notación $\hat{f}$. Dicho esto, sea $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ y $a \in \mathcal{U}$; suponiendo que $\hat{f} = u + iv$, al considerar los desarrollos de Taylor en torno a $z(a)$ de las componentes u y v, vistas ambas como funciones definidas en $z(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$

- $u(x, y) = u(x(a), y(a)) + \frac{\partial u(x(a),y(a))}{\partial x}(x - x(a)) + \frac{\partial u(x(a),y(a))}{\partial y}(y - y(a)) + o(|x - x(a), y - y(a)|)$

- $v(x, y) = v(x(a), y(a)) + \frac{\partial v(x(a),y(a))}{\partial x}(x - x(a)) + \frac{\partial v(x(a),y(a))}{\partial y}(y - y(a)) + o(|x - x(a), y - y(a)|)$

se tiene el siguiente **desarrollo de Taylor** para $\hat{f}$:

$$\hat{f}(x+iy) = \hat{f}(x(a)+iy(a)) + \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x-x(a)) + \frac{\partial f(a)}{\partial y}(y-y(a)) + o(|z-z(a)|)$$

Por tanto, cada punto $a \in \mathcal{U}$ tiene un entorno abierto $\mathcal{V}_a \subset \mathcal{U}$, de suerte que para todo punto $q \in \mathcal{V}_a$:

$$f(q) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x(q) - x(a)) + \frac{\partial f(a)}{\partial y}(y(q) - y(a)) + o|(z(q) - z(a)|)$$

Fijemos de nuevo un punto $a \in \mathcal{U}$ y consideramos el tallo del haz $\mathcal{E}$ en dicho punto $\mathcal{E}_a$. Sean f y g sendos representantes de dos gérmenes de $\mathcal{E}_a$. Si $f(a) = 0$, entonces $(fg)(a) = 0$ y si $f(a) = g(a) = 0$, el germen suma, para el que $f + g$ es un representante, también se anula en a; en terminología algebraica: el subconjunto $\mu_a \subset \mathcal{E}_a$ formado por los gérmenes que se anulan en a es un **ideal.**

Además, si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, el germen de $f - f(a)$ es un elemento de μ_a y en virtud del desarrollo de Taylor de $\hat{f}$ centrado en $z(a)$

$$f(q) - f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x(q) - x(a)) + \frac{\partial f(a)}{\partial y}(y(q) - y(a)) + o|(z(q) - z(a)|)$$

para todo q en un cierto entorno de a, en particular $f - f(a)$ y $\frac{\partial f(a)}{\partial x}(x - x(a)) + \frac{\partial f(a)}{\partial y}(y - y(a))$ coinciden en un entorno de a luego comparten germen en a.

Ya casi hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 4.1.1 *Bajo las mismas notaciones de las líneas anteriores, se verifican los siguientes asertos:*

1. *El ideal μ_a está generado por las funciones $x - x(a)$ e $y - y(a)$*
2. *El ideal μ_a es maximal.*
3. *El espacio $\mathcal{E}_a$ tiene estrucutra de álgebra local, con ideal maximal μ_a.*

Dem:

- Ya está probado.
- Obviamente $\mathcal{E}_a/\mu_a$ es isomorfo al cuerpo $\mathbb{C}$, identificando cada germen módulo μ_a con su valor en a, luego el ideal es maximal.
- El conjunto de no unidades de $\mathcal{E}_a$ lo constituyen exactamente los gérmenes nulos en a, es decir, μ_a. Al tener el conjunto de no unidades estructura de ideas, el anillo es local.

□

Consideremos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las **derivaciones** $\mathbb{C}$-lineales con llegada a $\mathbb{C}$, $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}_a, \mathbb{C})$, es decir, las aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales

$$\Lambda : \mathcal{E}_a \to \mathbb{C}$$

que verifican la *regla de Leibnitz*: $\Lambda(\dot{f}\dot{g}) = \dot{f}\Lambda(\dot{g}) + \dot{g}\Lambda(\dot{f})$. El álgebra conmutativa nos dice entonces que

$$Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}_a, \mathbb{C}) \cong Hom_{\mathbb{C}}(\frac{\mu_a}{\mu_a^2}, \mathbb{C})$$

(ver por ejemplo **[12]**) clave para definir los conceptos que veníamos buscando:

Definición 4.1.2 (Espacios tangente y cotangente) *Sea X una superficie de Riemann y $a \in X$, entonces se define:*

- *El espacio tangente en el punto a como el $\mathbb{C}$- espacio vectorial $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}_a, \mathbb{C})$. Le denotaremos por $T_a(X)$ omitiendo la X si no hubiese confusión.*
- *El espacio cotangente en el punto a como el $\mathbb{C}$- espacio vectorial dual del tangente en ese punto, el cual sabemos que es isomorfo al $\mathbb{C}$- espacio vectorial $\frac{\mu_a}{\mu_a^2}$. Le denotaremos por $T_a^*(X)$ omitiendo como antes la X si no hubiese confusión.*

Explotando de nuevo el desarrollo de Taylor de una función se prueba (*calcando la pertinente demostración del caso real*) que una base local para $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}_a, \mathbb{C})$ la constituyen las parciales de las coordenadas, precisando más:

Proposición 4.1.3 *Sea X una superificie de Riemann y $[z = x + iy, \mathcal{U}]$ una carta en X. Si $a \in \mathcal{U}$, una base para $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}_a, \mathbb{C})$ la constituyen $\partial x_{|a}$ y $\partial y_{|a}$, es más, para cada $v \in T_a(X)$:*

$$v = v(\dot{x})\partial x_{|a} + v(\dot{y})\partial y_{|a}$$

donde $\dot{x}$ e $\dot{y}$ denotan a los gérmenes de x e y respectivamente en el punto a

Como observación: de ahora en adelante, para no sobrecargar en exceso la notación, cometeremos un pequeño abuso de notación (muy habitual por cierto): si no hay lugar a la confunsión, los vectores tangentes en vez de actuar sobre el germen de función, actuarán directamente sobre la propia función.

A los elementos del espacio cotangente T_a^* se les llama 1**- formas en el punto** a; a los del espacio tangente T_a se les conoce como **vectores tangentes en el punto** a. La siguiente sección está consagrada a profundizar en las formas diferenaciales sobre superficies de Riemann.

4.2. Formas diferenciales

Por claridad de ideas, de ahora en adelante supondremos que estamos trabajando en el abierto $\mathcal{U}$, dominio de la carta $[z = x+iy, \mathcal{U}]$ en la superficie de Riemann X. Una vez abordado el concepto de 1-forma en cada punto del abierto $\mathcal{U}$ es natural considerar formas definidas en todo el abierto:

Definición 4.2.1 *Una 1-forma en el abierto $\mathcal{U}$ es cualquier aplicación*

$$\omega : \mathcal{U} \to \bigcup_{p \in \mathcal{U}} T_p^*$$

tal que $\omega(a) \in T_a^*$ para cada $a \in \mathcal{U}$.

Sigiuiendo a la geometría diferencial real, de la manera obvia se define el concepto *de diferencial de una aplicación* de tipo $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ en un punto $a \in \mathcal{U}$:

Definición 4.2.2 *La diferencial de una función $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ en el punto $a \in \mathcal{U}$ es la* 1*-forma sobre el punto a, $d_a f$, que verifica*

$$d_a f(u) = u(f)$$

para cada vector u tangente en a.

De esta forma, cuando escribamos df siendo f una función de infinitamente diferenciable en $\mathcal{U}$, estaremos representando a la 1-forma en $\mathcal{U}$ tal que en cada punto $a \in \mathcal{U}$ es exactamente la diferencial de f en el punto a: $d_a f$. Es frecuente referirse a la forma anterior como **la diferencial de** f en $\mathcal{U}$.

Notemos que las funciones $x, y, z, \bar{z} = x - iy \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, luego tiene sentido considerar sus diferenciales: $dx, dy, dz, d\bar{z}$. De ahora en adelante, para no sobrecargar la notación, confundiremos $d_a f$ con df, es decir, obviaremos el punto de tangencia en la superficie. Es conveniente pensar que, por una parte la diferencial dz representa en cierto sentido la "variación holomorfa", y la diferencial $d\bar{z}$ la variación en un sentido opuesto.

Observemos además que

- $dx(\partial_x) = \partial_x(x) = 1$
- $dx(\partial_y) = \partial_y(x) = 0$
- $dy(\partial_x) = \partial_x(y) = 0$
- $dy(\partial_y) = \partial_y(y) = 1$

Esto es, la base dx, dy es justamente **la base dual de** $\{\partial_x, \partial_y\}$; deducimos entonces que cada punto $a \in \mathcal{U}$ y para cada $1-$forma $\omega \in T_a^*$

$$\omega = \omega(\partial_x|_a)dx + \omega(\partial_y|_a)dy$$

y por tanto

$$d_af = d_af(\partial_x|_a)dx + d_af(\partial_y|_a)dy = \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy$$

Como $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$, dz y $d\bar{z}$ son **también base del espacio cotangente** en cada punto del abierto $\mathcal{U}$, tiene sentido buscar *la expresión de la diferencial de una función diferenciable f en esta base*:

De la definición de dz y $d\bar{z}$ se obtiene inmediatamente que $dx = \frac{dz+d\bar{z}}{2}$ y $dy = \frac{dz-d\bar{z}}{2i}$, luego

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dz + d\bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dz - d\bar{z}}{2i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\bar{z}$$

Es usual utilizar las notaciones

- $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$
- $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$

y por tanto

$$df = \partial f dz + \bar{\partial} f d\bar{z}$$

Los operadores anteriores son endomorfismos $\mathbb{C}$-lineales de $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Recordando que para una función f diferenciable en $\mathcal{U}$ las condiciones de Cauchy-Riemann se traducen en la ortogonalidad $if_x = f_y$, la holomorfía de una función $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ es entonces equivalente en la condición $\bar{\partial} f = 0$, luego $\mathcal{O}(\mathcal{U}) = Ker(\bar{\partial})$ y además, si $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ entonces $\partial f = \frac{f_x + f_x}{2} = f'$

Presentamos a continuación varios tipos de formas diferenciales sobre abiertos en superficies de Riemann:

Definición 4.2.3 *Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{V}$ un abierto en ella. Se dice que una* 1*-forma en $\mathcal{V}$ es:*

- *diferenciable si para cada carta $[z = x + iy, \mathcal{U}]$ existen $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ tales que $\omega = fdz + gd\bar{z}$ en $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$*
- *de tipo $(1,0)$ si para cada carta $[z = x + iy, \mathcal{U}]$ existe $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ tal que $\omega = fdz$ en $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$*
- *de tipo $(0,1)$ si para cada carta $[z = x + iy, \mathcal{U}]$ existe $g \in \mathcal{E}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ tal que $\omega = gd\bar{z}$ en $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$*
- *holomorfa si para cada carta $[z = x + iy, \mathcal{U}]$ existe $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ tal que $\omega = fdz$ en $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$*

Sea $a \in \mathcal{U}$ y ω una $1-$ forma holomorfa en un entorno punteado de a, digamos $\mathcal{V}_a$. Por definición existen funciones $f \in \mathcal{O}(\mathcal{V}_a)$ de suerte que $\omega = fdz$: tiene por tanto sentido intentar extender el concepto de residio de ω en el punto a. Resulta que la elección natural está bien definida, esto es, **el residuo de ω en a**, denotado por $Res(\omega, a)$ es el residuo de cualquier función f holomorfa en un entorno punteado de a en $\mathcal{U}$ tal que $\omega = fdz$, las cuales comparten todas ellas residuo en a. Para una prueba de ello remitimos al lector a texto de Forster [2].

Resulta que también está bien definido el orden de una $1-$forma holomorfa en un punto de la superficie X: como antes, si $a \in X$, $\mathcal{V}_a$ es un entorno punteado de a en X y ω es una 1-forma holomorfa en $\mathcal{V}_a$, se define **el orden en el punto a de la $1-$forma** ω, y se denota por $ord(\omega, a)$, como el orden en a de cualquier función f holomorfa en un entorno punteado de a tal que $\omega = fdz$.

Definición 4.2.4 (Polos de $1-$ formas) *Sea X una superficie de Riemann, $a \in X$, y $\mathcal{V}_a$ un entorno punteado de a en $\mathcal{U}$. Una $1-$forma holomorfa ω en $\mathcal{V}_a$ se dice que tiene un polo en el punto a si $-\infty < ord(\omega, a) < 0$.*

Definición 4.2.5 (Formas meromorfas) *Sea X una superficie de Riemann, $\mathcal{U}$ un abierto en ella y $S \subset \mathcal{U}$ un conjunto discreto. Una $1-$ forma ω en $\mathcal{U}$ se dice que es meromorfa en $\mathcal{U}$ si*

- *es holomorfa en $\mathcal{U} - S$.*
- *tiene polos en cada punto de S.*

Observación 4.2.6 *Las siguientes observaciones son necesarias:*

- *Es frecuente referirse a las $1-$ formas meromorfas como diferenciales abelianas, es más, se suelen clasificar en los siguientes tres tipos:*

  1. *de **primera especie**: exactamente las 1-formas holomorfas.*
  2. *de **segunda especie**: aquellas cuyo residuo es nulo en cada uno de sus polos.*
  3. *de **tercera especie**: si no es de primera ni de segunda especie.*

- *En cuanto a notación adoptaremos el siguiente convenio frecuente: si X es una superficie de Riemann y $\mathcal{V}$ es un abierto en ella, entonces:*

  - *$\mathcal{E}(1)(\mathcal{V})$ denotará a las 1-formas diferenciables en $\mathcal{V}$.*
  - *$\mathcal{E}^{(1,0)}(\mathcal{V})$ denotará a las 1-formas de tipo $(1,0)$ en $\mathcal{V}$.*
  - *$\mathcal{E}^{(0,1)}(\mathcal{V})$ denotará a las 1-formas de tipo $(0,1)$ en $\mathcal{V}$.*
  - *$\Omega(\mathcal{V})$ denotará a las 1-formas holomorfas en $\mathcal{V}$.*
  - *$\mathcal{M}^{(1)}(\mathcal{V})$ denotará a las 1-formas meromorfas en $\mathcal{V}$.*

  Además, el comprobar que los prehaces que asocian a cada abierto de $\mathcal{V}$ de X

  $$\mathcal{V} \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$$

  donde $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{(1,0)}, \mathcal{E}^{(0,1)}, \mathcal{E}^{(1)}, \Omega, \mathcal{M}^{(1)}$ son realmente haces en X es inemdiato.

Definición 4.2.7 *Si X es una superficie de Riemann y $\mathcal{U}$ es un abierto en ella, para cada función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ se **define la diferencial de** f y se denota por df a la 1-forma meromorfa en $\mathcal{U}$*

$$df = f^{'} dz$$

Notemos que por definición, para un abierto $\mathcal{U}$ de una superficie de Riemann X, se cumplen los siguientes hechos (triviales de las definiciones):

- si $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, entonces $df \in \Omega(\mathcal{U})$.
- si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, entonces $df \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathcal{U})$.
- si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, entonces $df \in \mathcal{M}^{(1)}(\mathcal{U})$.
- $\mathcal{E}^{(1)}(\mathcal{U}) = \mathcal{E}^{(1,0)}(\mathcal{U}) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(\mathcal{U})$.

También son de uso frecuente los dos operadores siguientes:

Definición 4.2.8 *Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{U}$ un abierto en ella, se definen los operadores*

- $d' : \mathcal{E}(\mathcal{U}) \to \mathcal{E}^{(1,0)}(\mathcal{U})$ $f \to d'f = \partial f dz$.
- $d'' : \mathcal{E}(\mathcal{U}) \to \mathcal{E}^{(0,1)}(\mathcal{U})$ $f \to d''f = \bar{\partial} f d\bar{z}$.

4.2.1. Derivada exterior

Supondremos al lector familiarizado con el álgebra exterior; en lo que sigue $\wedge$ denotará el producto exterior de vectores.

Comencemos introduciendo el concepto de 2-forma:

Definición 4.2.9 *Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{U}$ un abierto en ella. Una 2-forma en el abierto $\mathcal{U}$ es cualquier aplicación*

$$\omega : \mathcal{U} \to \bigcup_{p \in \mathcal{U}} T_p^* \wedge T_p^*$$

tal que $\omega(a) \in T_a^* \wedge T_a^*$ para cada $a \in \mathcal{U}$. Además, diremos que una 2-forma es diferenciable en el abierto $\mathcal{U}$ si para cada carta $[z, \mathcal{V}]$ en un $\mathcal{U}$, existe $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ de suerte que

$$\omega = f dz \wedge d\bar{z}$$

Por último, si las aplicaciones anteriores son además holomorfas en $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, se dice entonces que la 2-forma es holomorfa.

Supongamos que ω es una 1-forma diferenciable en un abierto $\mathcal{U}$ de una superficie de Riemann X que se expresa como

$$\omega = a_1 df_1 + \dots a_n df_n$$

para ciertas funciones $a_1, a_2, \dots, a_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ diferenciables en $\mathcal{U}$. Se define la **derivada exterior** de la 1-forma ω como la 2-forma $d\omega$ siguiente:

$$d\omega = da_1 \wedge df_1 + \dots da_n \wedge df_n$$

Necesitamos comprobar que la derivada exterior es intrínseca, esto es, que no depende de las cartas:

Proposición 4.2.10 *La derivada exterior está bien definida.*

Dem:

Basta comprobar que si $\mathcal{U}$ es el dominio de dos cartas distintas en las que una 1-forma diferenciable admite dos expresiones distintas, entonces sus dos derivadas exteriores coinciden a través del cambio de cartas.

Sea, pues, ω 1-forma diferenciable en el abierto $\mathcal{U}$, dominio de las cartas $[z = x+iy, \mathcal{U}]$, $[\zeta = u+iv, \mathcal{U}]$. Supongamos que ω admite las las expresiones siguientes en cada una de las cartas:

- En la carta z: $\omega = a_1 df_1 + \dots a_n df_n$ donde $a_i = a_i(x+iy), f_i = f_i(x+iy)$ son funciones diferenciables en $\mathcal{U}$.
- En la carta ζ: $\omega = \alpha_1 d\varphi_1 + \dots \alpha_n d\varphi_n$ donde $\alpha_i = \alpha_i(x+iy), \varphi_i = \varphi_i(x+iy)$ son funciones diferenciables en $\mathcal{U}$.

Debido a las reglas del álgebra exterior se tiene que:

$$da_i \wedge df_i = \frac{\partial(a_i, f_i)}{\partial(x,y)} dx \wedge dy = \frac{\partial(a_i, f_i)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv$$

La regla de la cadena nos permite concluir, ya que por hipótesis:

$$\frac{\partial(a_i, f_i)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(\alpha_i, \varphi_i)}{\partial(u,v)}$$

y por tanto para $1 \le i \le n$

$$da_i \wedge df_i = \frac{\partial(\alpha_i, \varphi_i)}{\partial(u,v)} du \wedge dv = d\alpha_i \wedge d\varphi_i$$

□

La misma línea de razonamiento nos permite extender los operadores $d^{'}$ y $d^{''}$ definidos para funciones diferenciables al marco de las formas diferenciales, los cuales, en aras de la brevedad, compartirán nomenclatura con sus antecesores.

Definición 4.2.11 *Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{U}$ un abierto en ella. Si $\omega \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ es una 1-forma diferencial con expresión*

$$\omega = a_1 df_1 + \ldots + a_n df_n$$

para ciertas funciones diferenciables $a_1, \ldots, a_n, f_1, \ldots, f_n$, se definen

- *la derivada exterior de tipo $(1,0)$ como la 2-forma*

$$d\omega = d^{'}a_1 \wedge df_1 + \ldots d^{'}a_n \wedge df_n$$

- *la derivada exterior de tipo $(0,1)$ como la 2-forma*

$$d\omega = d^{''}a_1 \wedge df_1 + \ldots d^{''}a_n \wedge df_n$$

Como para cualquier función diferenciable $df = d^{'}f + d^{''}f$, resulta que los operadores $d^{'}$ y $d^{''}$ definidos para formas también verifican la relación $d = d^{'} + d^{''}$. Éstas y otras propiedades quedan recogidas en la siguiente proposición:

Proposición 4.2.12 *Si $\mathcal{U}$ es un abierto de la superficie de Riemann X, entonces:*

- $d = d^{'} + d^{''}$.
- $d^2 = (d^{'})^2 + (d^{''})^2$.
- $d(f\omega) = df\omega + fd\omega$ *para cualesquiera* $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ *y* $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathcal{U})$.
- $d\Omega(\mathcal{U}) = 0$
- *Si* $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}(\mathcal{U})$ *y* $d\omega = 0$, *entonces* $\omega \in \Omega(\mathcal{U})$
- *Si $\mathcal{U}$ es simplemente conexo, cada 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathcal{U})$ admite primitiva en $\mathcal{U}$, i.e, existe $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ de suerte que $df = \omega$.*

Dem:

- Ya está probado.

- Comprobémoslo para el operador d, para los demás se procede por analogía. Veamos primero que si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ entonces $d^2 f = 0$. En efecto: $d^2 f = d(df) = d(1 \wedge f) = d1 \wedge df = 0$. Conocido esto, el que para cada 1-forma ω diferenciable $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ es trivial.

- Sin pérdida de generalidad supongamos que $\omega = adg$ para ciertas funciones a, g diferanciables en $\mathcal{U}$. Así pues:

  $$f\omega = fadg \to d(f\omega) = d(fa) \wedge dg$$

  Las propiedades de la diferencial de funciones nos permiten concluir, ya que:

  $$d(fa) \wedge dg = fda \wedge dg + adf \wedge dg = fd\omega + df \wedge \omega$$

  .

- Sin pérdida de generalidad $\mathcal{U}$ es el dominio de la carta $[z = x + iy, \mathcal{U}]$. Sea, pues, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ de suerte que $\omega = fdz$. De esta forma $d\omega = -\bar{\partial} f dz \wedge d\bar{z} = 0 dz \wedge d\bar{z} = 0$.

- Como antes, sin pérdida de generalidad asumimos que el abierto $\mathcal{U}$ es el dominio de la carta $[z = x + iy, \mathcal{U}]$. Si $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}(\mathcal{U})$, existe $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ de suerte que $\omega = fdz$ y por ende $d\omega = -\bar{\partial} f dz \wedge d\bar{z}$. Deducimos entonces que la condición $d\omega = 0$ es equivalente a que $\bar{\partial} f = 0$, que es tanto como decir que la aplicación f sea holomorfa.

- Es un corolario del llamado lema de Poincaré.

□

A las 1-formas $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathcal{U})$ tales que $d\omega = 0$ se las conoce como 1-formas **cerradas**. El cuarto apartado de la proposición anterior afirma que **toda 1-forma holomorfa es cerrada.** Al conjunto de 1-formas cerradas en un abierto $\mathcal{U}$ se le denota frecuentemente por $Z_{\mathcal{E}}(\mathcal{U})$. Por otra parte, si ω es una 1-forma diferenciable en $\mathcal{U}$ para la que existe $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ de suerte que $df = \omega$, se dice entonces que la 1-forma es **exacta**. Al conjunto de 1-formas exactas en un abierto $\mathcal{U}$ se le denota de manera general por $B_{\mathcal{E}}(\mathcal{U})$

4.3. Lema de Dolbeault

Presentamos a continuación una importante herramienta teórica: el llamado **lema de Dolbeault.** Para su prueba remitimos al lector a [2] o bien a [13].

Teorema 4.3.1 (Lema de Dolbeault) *Por D_R denotaremos al disco de centro* 0 *y radio* $R \in (0, \infty]$ *en el plano complejo (admitiendo que* $D_\infty = \mathbb{C}$*). Entonces, el operador* $\bar{\partial} : \mathcal{E}(D_R) \to \mathcal{E}(D_R)$*, es sobreyectivo para* $0 < R \leq \infty$.

De él se deduce de manera sencilla el siguiente importante teorema:

Teorema 4.3.2 (Sobreyectividad del Laplaciano) *Si* D_R *denota al disco de centro* 0 *y radio* R *en el plano complejo admitiendo que* $D_\infty = \mathbb{C}$*, entonces el laplaciano* $\Delta : \mathcal{E}(D_R) \to \mathcal{E}(D_R)$ *es sobreyectivo para* $0 < R \leq \infty$.

Dem:

Utilizaremos indistintamente la notación $conj(z)$ y $\bar{z}$ para denotar al conjugado del complejo z. No hay más que notar que:

- $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y) = 4\partial\bar{\partial}$
- Para cualquier $f \in \mathcal{E}(D_R)$ $conj(\partial \bar{f}) = \bar{\partial} f$

Sea, pues, $g \in \mathcal{E}(D_R)$. Tomemos primeramente $h \in \mathcal{E}(D_R)$ tal que $\bar{\partial} h = g$ y posteriormente $f \in \mathcal{E}(D_R)$ de suerte que $\bar{\partial} \bar{f} = h$ (el lema e Dolbeault garantiza la existencia de tales funciones en ambos casos). De esta forma, $\bar{\partial} f = \bar{h} \to \partial f = h \to \bar{\partial}\partial f = \bar{\partial} h = g \to \Delta \frac{f}{4} = \bar{\partial}\partial f = g$, es decir, g tiene antecedente por Δ en $\mathcal{E}(D_R)$.

□

4.4. Cohomología de de Rham

Adelantándonos al siguiente capítulo, el último epígrafe está consagrado a introducir un tipo de cohomología sobre superficies de Riemann, la cohomología de de Rham. Teniendo en mente ciertas matizaciones, la idea es, en esencia, la misma que en geometría diferencial: obtener información de la topología global de la superficie X a partir de la existencia o no de primitivas para formas. Cuantas menos "patologías" presente la topología de la superficie, menor dificultad encontrará una forma para admitir una primitiva.

Las matizaciones a las que nos referíamos tienen que ver con que no sólo tenemos a disposición las formas diferenciales, sino también las holomorfas; es por ello que en una superificie de Riemann X se suelen distinguir dos grupos de cohomología de de Rham:

- **Cohomología de de Rham clásica** $Rh^1_{\mathcal{E}}(X)$.

  Es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las 1-formas de $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ cerradas, $Z^1_{\mathcal{E}}(X)$, cociente por las exactas $B^1_{\mathcal{E}}(X)$:

  $$Rh^1_{\mathcal{E}}(X) = \frac{Z^1_{\mathcal{E}}(X)}{B^1_{\mathcal{E}}(X)}$$

- **Cohomología de de Rham holomorfa** $Rh^1_{\mathcal{O}}(X)$.

  Como toda 1-forma holomorfa es cerrada, se define el primer grupo de cohomología de de Rham holomorfa como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial cociente:

  $$Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = \frac{\Omega(X)}{d\mathcal{O}(X)}$$

Capítulo 5

Cohomología en superficies de Riemann

La teoría de haces es una de las herramientas básicas de la geometría, tanto diferencial como algebraica; estrechamente ligada a la idea de haz se encuentra la de cohomología. Dedicaremos íntegramente este capítulo al estudio de la cohomología en superficies de Riemann de cara a obtener técnicas para abordar el problema de uniformización.

De entre las distintas perspectivas que ofrece la cohomología, nosotros hemos optado por el enfoque de Čech. La cohomología de Čech se caracteriza principalmente por presentar un cálculo explícito aceptablemente sencillo y por su versatilidad. Los grupos de cohomología, informalmente hablando, permiten leer ciertas patologías de la topología de una variedad apoyándose en los haces definidos sobre ella. Si la variedad es una superficie de Riemann, particularmente interesantes son los haces tanto de funciones infinitamente diferenciables como de funciones holomorfas sobre ella. Resulta que el primer grupo de cohomología del haz $\mathcal{E}$, $H^1(X, \mathcal{E})$, es nulo para cualquier superficie de Riemann (la paracompacidad es la clave), resultando así un recurso teórico extremadamente útil. Por contra, si X es una superficie de Riemann compacta, salvo que sea homeomorfa a la esfera, el primer grupo de cohomología para el haz de funciones holomorfas $H^1(X, \mathcal{O})$ no es nunca nulo, es más, es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión compleja exactamente igual al género topológico de la superficie. El lector que no esté familizarizado con la cohomología puede empezar a entreveer qué es lo que quería transimitir afirmando que la cohomología permite leer ciertas patologías topológicas de la superficie.

Una vez introducido el concepto de morfismo entre haces, es natural considerar las sucesiones exactas, piedra angular del álgebra homológica y llave para obtener profundos resultados. Allá por las últimas líenas del capítulo, comprobaremos que, efectivamente, a partir de las sucesiones exactas de haces, se prueban de manera sencilla resultados complejos como por el ejemplo los teoremas de Dolbeault o de de Rham.

5.1. Cohomología de $\breve{C}ech$

Sea X un espacio topológico. La idea es asociar a cada recubrimiento por abiertos de X, un complejo simplicial (llamado nervio del recubrimiento), con la intención de que si el recubrimiento es lo suficientemente fino, entonces se tenga un buen modelo combinatorio del espacio X.

Definición 5.1.1 *Sea X un espacio topológico, $\mathbb{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X y $\mathcal{F}$ un haz sobre X de grupos abelianos. Para cada entero no negativo $q \geq 0$ se define el q-ésimo grupo de cocadenas de $\breve{C}ech$ para el recubrimiento $\mathbb{U}$ y se denota por $C^q(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ al grupo*

$$C^q(\mathbb{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\boldsymbol{s}\in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\boldsymbol{s}})$$

donde si $\boldsymbol{s}$ denota al multiíndice $\boldsymbol{s} = (i_0, i_1, \ldots, i_q)$ entonces $U_{\boldsymbol{s}} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_q}$

Definición 5.1.2 (Operador borde) *Bajo las mismas notaciones de la definición anterior, para un recubrimiento abierto de X, digamos $\mathbb{U} = (U_i)_{i\in I}$, y para cada entero no negativo $n \geq 0$, definimos el n-simo operador borde d^n como sigue:*

$$d^n : C^n(\mathbb{U}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathbb{U}, \mathcal{F})$$

$$\alpha \to d^n\alpha$$

donde $d^n\alpha(s) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \alpha(\boldsymbol{s}_j)|_{U_s}$ siendo $\boldsymbol{s}_j$ es el multiíndice resultante de suprimir el índice j-ésimo de $\boldsymbol{s}$.

Es rutinario comprobar que cada d^n transforma cocadenas en cocadenas (y por tanto está bien definido) y que todos ellos son morfismos de grupos tales que $d^n \circ d^{n+1} = 0$. Si $q \geq 0$, llamando $Z^q(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ al núcleo de d^q y $B^q(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ a la imagen de d^{q-1} (se conviene que $B^0(\mathbb{U}, \mathcal{F}) = 0$), se define el

q-simo grupo de cohomología de *Čech* del recubrimiento $\mathbb{U}$ como el grupo cociente

$$H^q(\mathbb{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^q(\mathbb{U}, \mathcal{F})}{B^q(\mathbb{U}, \mathcal{F})}$$

En lo que a notación se refiere, si $\underline{f} \in Z^q(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ para algún $q \geq 0$, denotaremos por $\dot{\underline{f}}$ su clase módulo $B^q(\mathbb{U}, \mathcal{F})$.

Nosotros nos centraremos únicamente en los casos $q = 0, 1, 2$; al interesarnos únicamente por los operadores d^0, d^1, en aras de las brevedad les denotaremos indistintamente por d, sin que haya lugar a la confusión. En particular, el operador $d : C^0(\mathbb{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ es tal que para cada $\underline{f} \in C^0(\mathbb{U}, \mathcal{F})$:

$$(d\underline{f})_{i,j} = f_i - f_j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

para cualesquiera $i, j \in I$ y por tanto, para cada terna de índices i, j, k :

- $(d\underline{f})_{i,j} = -(d\underline{f})_{j,i}$
- $(d\underline{f})_{i,i} = 0$
- $(d\underline{f})_{i,j} = (d\underline{f})_{i,k} + (d\underline{f})_{k,j}$

Por otra parte, el otro operador borde que vamos a considerar, $d : C^1(\mathbb{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ es tal que para cada $\underline{f} \in C^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$:

$$(d\underline{f})_{i,j,k} = f_{i,j} + f_{j,k} - f_{i,k} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

y por tanto la condición $d\underline{f} = 0$ es equivalente a que para cualesquiera índices i, j, k se cumpla la igualdad $f_{i,j} + f_{j,k} = f_{i,k}$. En particular, comprobamos inmediatamente un hecho que ya habíamos enunciado:

$$B^1(\mathbb{U}, \mathcal{F}) \subset Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$$

Cohomología de orden cero

Recordemos que para un espacio topológico X, un haz $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre él y un recubrimiento por abiertos $\mathbb{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X, se definió por convenio $B^0(\mathbb{U}, \mathcal{F}) = 0$ y por tanto $H^0(\mathbb{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathbb{U}, \mathcal{F})$. Ahora bien, si $\underline{f} \in Z^0(\mathbb{U}, \mathcal{F})$, entonces para cada par de abiertos del recubrimiento $\mathbb{U}$, digamos U_i, U_j, se tiene que

$$f_i = f_j \text{ en } U_i \cap U_j$$

y por tanto, por ser $\mathcal{F}$ un haz, existe un único $f \in \mathcal{F}(X)$ de suerte que para cada $i \in I$

$$f|U_i = f_i$$

Es decir, independientemente del recubrimiento $\mathbb{U}$, $Z^0(\mathbb{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Cohomología de orden uno

Los grupos $H^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$, al contrario de lo que ocurría con los de primer tipo, $H^0(\mathbb{U}, \mathcal{F})$, sí dependen del recubrimiento $\mathbb{U}$ que tomemos. Para salvar esta dificultad se consideran sucesivos refinamientos de $\mathbb{U}$, con los pertinentes morfismos de restricción (inyectivos en el caso que nos interesa: $q = 1$, para más detalles sobre la inyectividad veáse el texto [13], sección 6, pág 37. Resulta entonces que la familia formada por todos los grupos $H^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ donde $\mathbb{U}$ varía en los recubrimientos abiertos de X, junto con los morfismos de restricción obvias forman *un sistema inductivo*. Se define entonces el primer grupo de cohomología de *Čech* del espacio topológico X, respecto del haz $\mathcal{F}$, denotándose por $H^1(X, \mathcal{F})$, como el límite inductivo

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \lim_{\rightarrow} H^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$$

Si el lector quiere profundizar en los detalles técnicos, le remitimos a las exposiciones de Ivorra [**8**] o de Forster [**2**].

Una importante herramiento es el llamado **teorema de Leray**. La idea sobre la que se cimenta es que si los abiertos del recubrimiento son *"suficientemente regulares"* entonces es lógico pensar que cualquier otro refinamiento del recubrimiento aportará la misma información.

Teorema 5.1.3 (Recubrimientos de Leray) *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre él y $\mathbb{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimientos por abiertos de X. Si $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ para cada índice $i \in I$ entonces:*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$$

Un recubrimiento verificando las hipótesis del teorema anterior recibe el nombre de *recubrimiento de Leray*.

5.1.1. Morfismos de haces

Dados dos haces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ en un espacio topológico X, un morfimos de haces φ es una familia de morfismos de grupos

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

para cada abierto U del espacio X, todos ellos compatibles con los morfismos de restricción $\mathcal{F}\rho_V^U$ (restricción de U a V en $\mathcal{F}$) y $\mathcal{G}\rho_V^U$ (restricción de U a V en $\mathcal{G}$). Dicho de otra forma, para cualesquiera abiertos $V \subset U$ de X, el cuadrado siguiente, en el que los morfismos son los obvios, es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Notemos que este último hecho posibilita que los morfismos obvios entre tallos *estén bien definidos*, i.e: para cada $x \in X$, el morfismo de grupos

$$\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$
$$\alpha \to \varphi_x(\alpha)$$

donde si $[f, U_x]$ es un representante del germen α, entonces $\varphi_x(\alpha)$ es la clase de equivalencia del germen $[\varphi_{U_x}(f), U_x]$. En efecto, dos representantes $[f, U_x]$ y $[g, V_x]$ del germen α coincidentes en un entorno de x, digamos $W_x \subset U_x, V_x$, tendrán por imagen a través de φ_x a las clases de los gérmenes $[\varphi_{U_x}(f), U_x]$ y $[\varphi_{V_x}(g), V_x]$. Ahora bien, en virtud de la conmutatividad del pertinente diagrama, $\varphi_{U_x}(f)|_{W_x} = \varphi_{W_x}(f|_{W_x}) = \varphi_{W_x}(g|_{W_x}) = \varphi_{V_x}(g)|_{W_x}$ y por tanto $[\varphi_{U_x}(f), U_x]$ y $[\varphi_{V_x}(g), V_x]$ representan al mismo germen.

Definición 5.1.4 *Una sucesión de morfimos de haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X*

$$\ldots \mathcal{F} \to^{\varphi} \mathcal{G} \to^{\gamma} \mathcal{H} \to^{\eta} \ldots$$

se dice que es exacta si para cada $x \in X$ la sucesión

$$\ldots \mathcal{F}_x \to^{\varphi_x} \mathcal{G}_x \to^{\gamma_x} \mathcal{H}_x \to^{\eta_x} \ldots$$

es exacta. Además, si la sucesión

$$0 \to \mathcal{F} \to^{\varphi} \mathcal{G} \to^{\gamma} \mathcal{H} \to^{\eta} 0$$

es exacta, se dice entonces que es una sucesión exacta corta.

El que varios objetos formen parte de una sucesión exacta quiere decir que existen ciertas relaciones combinatorias entre ellos . No es de extrañar que una sucesión exacta (corta) de haces induzca otra sucesión exacta entre los grupos de cohomología (que en esencia son ciertos mordelos combinatorios). En esta línea encontramos el siguiente resultado, de capital importancia y de prueba nada trivial:

Teorema 5.1.5 *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ haces en X de grupos abelianos. Si la sucesión*

$$0 \to \mathcal{F} \to^{\varphi} \mathcal{G} \to^{\gamma} \mathcal{H} \to 0$$

es exacta, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to^{\varphi_X} \mathcal{G}(X) \to^{\gamma_X} \mathcal{H}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H})$$

Observación 5.1.6 *Las siguientes observaciones son necesarias:*

- *El morfismo $H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G})$ suele denotarse por φ^1 y se define como sigue: si $\underline{f} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ con $\mathbb{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X, entonces $\varphi^1 \dot{\underline{f}}$ es la clase del cociclo cerrado de $Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{G})$ definido por $(\varphi(f))_{i,j} = \varphi_{U_i \cap U_j}(f_{i,j})$ para cualesquiera índices $i, j \in I$; veamos que está bien definido. Las aplicaciones*

  $$h^1 : C^1(\mathbb{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathbb{U}, \mathcal{G})$$

  $$\underline{f} \to h^1(\underline{f})$$

  con $(h^1(\underline{f}))_{i,j} = \varphi_{U_i \cap U_j}(f_{i,j})$ y

  $$h^0 : C^0(\mathbb{U}, \mathcal{F}) \to C^0(\mathbb{U}, \mathcal{G})$$

  $$\underline{f} \to h^0(\underline{f})$$

  $(h^0(\underline{f}))_i = \varphi_{U_i}(f_i)$

  por construcción verifican que

  - $h^1(\partial \underline{f}) = \partial h^0(\underline{f})$
  - $h^0(\underline{f} + \underline{g}) = h^0(\underline{f}) + h^0(\underline{g})$

- $h^1(\underline{f}+\underline{g}) = h^1(\underline{f}) + h^1(\underline{g})$

y por tanto si $\underline{f}, \underline{g} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ *son tales que* $\underline{f} - \underline{g} = \partial\underline{s}$, $\varphi^1(\dot{\underline{f}}) = h^1(\dot{\underline{f}}) = h^1(\underline{g} \dot{+} \underline{\delta s}) = h^1(\dot{\underline{g}}) + h^1(\partial\underline{s}) = h^1(\dot{\underline{g}}) + h^1(\dot{\partial}\underline{s}) = h^1(\dot{\underline{g}})$, *luego* φ^1 *está bien definida.*

- *El morfismo* $H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H})$ *suele denotarse por* γ^1 *y se define de manera análoga a* φ^1.

- *El morfismo* $\mathcal{H}(X) \to H^1(X, \mathcal{F})$*de la sucesión anterior recibe el nombre de* ***morfimo de conexión*** *y generalmente se denota por* δ^*. *Definirlo requiere algo más de trabajo, vamos a esquematizarlo:*

  Sea $\underline{f} \in \mathcal{H}(X)$, *como para cada* $x \in X$ *los morfismos* $\gamma_x : \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ *son sobreyectivos, podemos encontrar un recubrimiento abierto* $\mathbb{U} = (U_i)_{i \in I}$ *de* X *y* $\underline{g} \in C^0(\mathbb{U}, \mathcal{G})$ *de suerte que*

$$\gamma_{U_i}(g_i) = f|_{U_i}$$

  para cada índice $i \in I$. *Como* $\gamma_{U_i \cap U_j}(g_i - g_j) = f|_{U_i \cap U_j} - f|_{U_i \cap U_j} = 0$ *y* $\mathcal{F}_x \to^{\varphi_x} \mathcal{G}_x$ *es sobreyectivo para cada* $x \in X$, *puede probarse la existencia de un* $h_{i,j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ *tal que* $\varphi(h_{i,j}) = g_i - g_j$. *Así pues, en* $U_i \cap U_j \cap U_k$, $\varphi(h_{i,j} + h_{j,k} - h_{i,k}) = 0$ *y utilizando la inyectividad de* $\mathcal{F}_x \to^{\varphi}_x \mathcal{G}_x$ *para cada* $x \in X$ *se deduce entonces que para cada abierto* U *de* X *los morfismos* $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ *son inyectivos, y por ende* $h_{i,j} + h_{j,k} = h_{i,k}$, *esto es,* $\underline{h} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{F})$. *Definimos entonces* $\delta^+(\underline{f}) = \dot{\underline{h}}$. *Siguiendo el razonamiento anterior se puede comprobar que* δ^* *es efectivamente un morfismo de grupos y que está bien definido.*

- *Como se ha comentado, la prueba no es en absoluto trivial y requiere varios lemas previos. Remitimos al lector interesado al libro de [Fors].*

5.2. Cohomología en superficies de Riemann

Hasta el momento, en ningún hecho hemos supuesto que X sea una superficie de Riemann, simplemente hemos utilizado la estructura topológica. A lo largo de esta sección particularizaremos los resultados anteriores en el contexto de superficies de Riemann sacando gran provecho de los teoremas anteriores.

5.2.1. Cálculo de ciertos grupos de cohomología en superficies de Riemann

En lo que sigue X denotará una superficie de Riemann. Las siguientes líneas están dedicadas a calcular ciertos grupos de cohomología en superficies de Riemann.

- $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$

  Este resultado es particularmetne importante: la flexibilidad de las funciones infinitamente diferenciables no permite "leer posibles patologías" de la topología de la superficie. Como casi todos los haces que consideremos sobre X son haces de funciones al menos infinitmanete diferenciables, el saber que todo cociclo cerrado de tipo $\mathcal{E}$ es exacto, permite escindir cociclos cerrados de otro tipo más fino (nos refererimos aquí a cociclos de tipo holomorfo, de constantes, armónicos, etc). La prueba utiliza la existencia de particiones de la unidad. Esto se deduce de la metrizabilidad de X, hecho que aplazaremos hsta el **capítulo 7**, donde comprobaremos que toda superficie de Riemann es metrizable sin utilizar ningún resultado que se apoye en la cohomología (la resolución del problema de Dirichlet en superifices de Riemann).

  Sea, pues, $\underline{f} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{E})$ con $\mathbb{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ recubrimiento abierto de X y $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ una partición de la unidad en X subordianda al recubrimiento $\mathbb{U}$. Fijados U_i y U_j abiertos no disjuntos del recubrimiento, la función $f_{i,j} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$ se puede expresar como sigue:

$$f_{i,j} = \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha f_{i,j} = \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha (f_{i,\alpha} + f_{\alpha,j}) =$$

$$= \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha f_{i,\alpha} + \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha f_{\alpha,j} =$$

$$= \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha f_{\alpha,i} - \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha f_{j,\alpha}$$

  ya que al ser $\underline{f}$ cerrada, para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in I$, entonces $f_{\alpha,\beta} = -f_{\beta,\alpha}$ y $f_{\alpha,\beta} + f_{\beta,\gamma} = f_{\alpha,\gamma}$

  Fijado $\alpha \in I$, como el soporte de φ_α está contenido en el abierto U_α, para cada índice $i \in I$, la función $\varphi_\alpha f_{i\alpha}$ se puede extender a una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el abierto U_i, y por tanto, por ser las particiones de la unidad localmente finitas, la suma

$$\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha f_{i,\alpha}$$

define una función de tipo $\mathcal{E}$ en U_i, esto es, para cada índice $i \in I$

$$g_i = \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha f_{i,\alpha} \in \mathcal{E}(U_i)$$

y por tanto si $\underline{g}$ es la cocadena de orden 0 en X para $\mathbb{U}$ tal que $(\underline{g})_i = g_i$, se cumple que

$$\partial \underline{g} = \underline{f}$$

y por tanto $\underline{f}$ es exacto.

- $H^1(X, \mathcal{E}^{(1)}) = H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = H^1(X, \mathcal{E}^{(0,1)}) = H^1(X, \mathcal{E}^{(2)}) = 0$

  Basta repetir la prueba anterior. Al igual que el epígrafe anterior, es un hecho extremadamente útil, pues permite escindir cocadenas de clases más finas en cocadenas de alguno de los tipos diferenciables.

- Si X es simplemente conexo, entonces $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ y $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

  - $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$

    Aquí $\mathbb{C}$ denota al haz de funciones constantes y valoradas en $\mathbb{C}$ Sea $\underline{f} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, $\mathbb{U} = (U_i)_{i \in I}$ recubrimiento abierto en X. Para cada par de índices $i, j \in I$ existen $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ y $g_j \in \mathcal{E}(U_j)$ tales que

    $$f_{i,j} = g_i - g_j$$

    Como $f_{i,j} \in \mathbb{C}$, las funciones g_i y g_j en cada componente conexa de la intersección $U_i \cap U_j$ difieren en una constante, luego comparten diferencial en $U_i \cap U_j$. Sea $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ de suerte que

    $$\omega|_{U_i} = dg_i$$

para cada $i \in I$. Al ser X simplemente conexo, ω admite una primitiva, esto es, existe $g \in \mathcal{E}(X)$ tal que $\omega = dg$. Por tanto, como

$$f_{i,j} = g_i - g - (g_j - g)$$

y $d(g_i - g) = dg_i - dg = 0$, entonces $g_i - g \in \mathbb{C}$ para todo índice $i \in I$ y por tanto $\underline{f} \in B^1(\mathbb{U}, \mathbb{C})$.

- $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$

  Por $\mathbb{Z}$ representamos obviamente al haz de funciones constantes valoradas en $\mathbb{Z}$. Sea $\underline{a} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, con $\mathbb{U} = (U_i)_{i\in I}$ recubrimiento abierto en X. Por el apartado anterior, para cada par de índices $i, j \in I$ existen$c_i \in \mathbb{C}$ y $c_j \in \mathbb{C}$ tales que

$$a_{i,j} = c_i - c_j$$

  Sea $e(t) = exp(2\pi it)$; recordemos que para un complejo t, la condición $e(t) = 1$ es equivalente a que $t \in \mathbb{Z}$. De esta forma para cada par de índices $i, j \in I$, $e(a_{i,j}) = 1$
  y por tanto

$$e(c_i) = e(c_j) \text{ en } U_i \cap U_j$$

  La simple conexión de X garantiza entonces s la igualdad de todos los números complejos $(e(c_k))_{k\in I}$. Así pues, podemos escoger complejos $b, c \in \mathbb{C}$, de suerte que para cada índice $i \in I$

$$e(c) = b = e(c_i)$$

  Definimos entonces $\underline{m} \in Z^0(\mathbb{U}, \mathbb{C})$ tal que

$$m_i = c_i - c$$

  para cada $i \in I$. Como $e(m_i) = \frac{e(c_i)}{e(c)} = 1$, $m_i \in \mathbb{Z}$ y por tanto $\underline{m} \in Z^0(\mathbb{U}, \mathbb{Z})$. Obviamente $\partial\underline{m} = \underline{a}$ ya que

$$a_{i,j} = c_i - c - (c_j - c) = m_i - m_j$$

  luego $\underline{a}$ escinde.

- $H^1(D_R, \mathcal{O}) = 0$ para $R \in (0, \infty]$ donde $D_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ y $D_\infty = \mathbb{C}$.

  Sea $\underline{f} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathbb{O})$, $\mathbb{U} = (U_i)_{i \in I}$ recubrimiento abierto en X. Sabemos que para cada par de índices $i, j \in I$ existen $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ y $g_j \in \mathcal{E}(U_j)$ de suerte que

  $$f_{i,j} = g_i - g_j$$

  y además, como $f_{i,j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, decir que $\partial \bar{f}_{i,j} = 0$ es tanto como decir que $\bar{\partial} g_i = \bar{\partial} g_j$. Existe por tanto $h \in \mathcal{E}(D_R)$ de suerte que

  $$h|_{U_i} = g_i$$

  para cada índice $i \in I$. Sea g un antecedente de h en $\mathcal{E}(D_R)$ por $\bar{\partial}$, esto es, tomamos $g \in \mathcal{E}(D_R)$ tal que $\bar{\partial} g = h$ (recordemos que el lema de Dolbeault afirma que $\bar{\partial} : \mathcal{E}(D_R) \to \mathcal{E}(D_R)$ es suprayectivo). Así pues,

  $$f_{i,j} = g_i - g - (g_j - g)$$

  y como $\bar{\partial} g = \bar{\partial} g_i$, para cada $i \in$ se tiene que $\bar{\partial}(g - g_i) = 0$, esto es, $g_i - g$ es holomorfa en U_iy y por tanto $\underline{f}$ escinde.

- $H^1(D_R, Ar) = 0$ con $R \in (0, \infty]$.

  Recordemos que del lema del Dolbeault se deducía que el laplaciano $\Delta : \mathcal{E}(D_R) \to \mathcal{E}(D_R)$ es un operador suprayectivo. Repitiendo el argumento del epígrafe anterior y substituyendo $\bar{\partial}$ por Δ se comprueba que todo cociclo cerrado de tipo armónico $\underline{f} \in Z^1(\mathbb{U}, Ar)$ escide y por tanto $H^1(D_R, Ar) = 0$.

- $H^1(\mathbb{C}^\infty, \mathcal{O}) = 0$

  Consideremos el recubrimiento por abiertos de la esfera $\mathbb{U} = \{\mathbb{C}^\infty - \{0\}, \mathbb{C}\}$. Como $\mathbb{C}^\infty - \{0\}$ es conformemente equivalente al plano (basta tomar la inversión $z \to \frac{1}{z}$), se verifica también el lema de Dolbeault y por tanto

$$H^1(\mathbb{C}^\infty - \{0\}, \mathcal{O}) = 0$$

En los epígrafes anteriores habíamos comprobado que

$$H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$$

luego $\mathbb{U}$ es un **recubrimiento de Leray**. Dar un cociclo cerrado $\underline{f} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{O})$ es tanto como dar un elemento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\infty - \{0\} \cap \mathbb{C}) = \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$ pues

- $f_{1,1} = f_{2,2} = 0$.
- $f_{1,2} = -f_{2,1} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$.

Sea, pues, $f_{1,2}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$ la expansión de Laurent para $f_{1,2}$. Descomponiendo la serie anterior en su parte regular

$$R(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

y en su parte singular

$$S(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

tenemos que $f_{1,2}(z) = R(z) - (-S(z))$ con $R \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\infty - \{0\})$ y $-S \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$, luego $\underline{f}$ escinde y por tanto $H^1(\mathbb{C}^\infty, \mathcal{O}) = 0$.

Más adelante comprobaremos que esto se podría haber deducido directamente sin más que notar que la esfera $\mathbb{C}^\infty$ es una superficie compacta de género 0; veremos que si X es una superficie de Riemann compacta de género g, entonces $g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O})$.

- $H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C}$ y $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$ para cada $p \in X$.

Recordemos que $\mathbb{C}_p$ denotaba al haz rascacielos (skyscreaper) en el punto p de la superficie de Riemann X. Obviamente $H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C}(X) = \mathbb{C}$. Por otra parte, dado un cociclo $\underline{f} \in Z^1(\mathbb{U}, \mathbb{C}_p)$, siendo $\mathbb{U} = (U_i)_{i\in I}$ recubrimiento abierto de X, veamos que no sólo es exacto, sino que ha de ser nulo: $\underline{f} = \underline{0}$. El conjunto $\{U_\alpha \in \mathbb{U} |\ p \in U_\alpha\}$, en virtud del lema de Zorn admite elementos maximales: sea $\mathcal{M}$ un maximal. Por ser $\mathcal{M}$

abierto, es entorno de cada punto; para cada punto $q \in \mathcal{M}$ tomamos un entorno abierto $G_q \subset \mathcal{M}$, que por la metrizabilidad de X (de nuevo el teorema de Radó) podemos asumir que son todos disjuntos.

Consideremos ahora el refinamiento $\mathbb{V}$ de $\mathbb{U}$ formado por las dos familias siguientes de abiertos en X:

- los abiertos $U_i \in \mathbb{U}$ que no contienen a p.
- cada uno de los abiertos G_q con $q \in \mathcal{M}$

Obviamente $\mathbb{V}$ es un refinamiento de $\mathbb{U}$, luego cualquier inclusión $i : Z^1(\mathbb{U}, \mathbb{C}_p) \to Z^1(\mathbb{V}, \mathbb{C}_p)$ es inyectiva. Ahora bien, el punto p sólo pertenece a uno de los abiertos del recubrimiento $\mathbb{V}$, luego para cualesquiera abiertos $V_i, V_j \in \mathbb{V}$, $\mathbb{C}_p(V_i \cap V_j) = 0$ deduciendo que $Z^1(\mathbb{V}, \mathbb{C}_p) = 0$. La inyectividad de la inclusión permite entonces afirmar que $Z^1(\mathbb{U}, \mathbb{C}_p) = 0$ y por ende $H^1(\mathbb{U}, \mathbb{C}_p) = 0$ para cada recubrimiento abierto $\mathbb{U}$ de X.

5.2.2. Sucesiones exactas de haces en superficies de Riemann

Es útil tener en mente las siguientes seis sucesiones exactas de haces en una superficie de Riemann X:

- $0 \to \mathbb{Z} \to^i \mathcal{O} \to^e \mathcal{O}^* \to 0$

  Por $\mathbb{Z}$ representamos como es habitual el haz de funciones constantes valoradas en $\mathbb{Z}$; por $\mathcal{O}^*$ el haz que a cada abierto asocia las funciones holomorfas que no se anulan en él. En cuanto a los morfismos de haces: i es la inclusión obvia y e denota a la exponencial normalizada: si U es un abierto en X, entonces:

  $$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U)$$

  $$f \to exp(2\pi i f)$$

  La sucesión es exacta: si $x \in X$, entonces:

- $0 \to \mathbb{Z}_x \to^{i_X} \mathcal{O}_x \to^{e_x} \mathcal{O}^*_x \to 0$

  es exacta:

  - i_x es inyectiva

- $Rg(i_x) = Ker(e_x)$. En efecto: como $exp(2\pi iz) = 1$ si, y sólo si $z \in \mathbb{Z}$, decir que $e_x(\dot{f}) = \dot{1}$ es tanto como decir que en un entorno de x, U_x, suficientemente pequeño, que sin pérdida de generalidad se puede suponer dominio de una carta $[z, U_x]$ tal que $z(U_x) = D(0, \delta) \subset \mathbb{C}$, $exp(2\pi if(z)) = 1$ para cada $z \in D(0, \delta)$, que a su vez es tanto como decir que $f(p) = n \in \mathbb{Z}$ para todo $p \in U_x$, luego para cada $\dot{f} \in \mathcal{O}_x$ se cumple que

$$\dot{f} \in Rg(i_x) \leftrightarrow \dot{f} \in Ker(e_x)$$

- $Rg(e_x) = \mathcal{O}_x^*$. Obviamente $Rg(e_x) \subset \mathcal{O}_x^*$. Tomemos $\dot{f} \in \mathcal{O}_x$ y una carta $[z, U]$ centrada en x para la que $z(U) = D(0, \delta) \subset \mathbb{C}$. Al ser los discos simplemente conexos, la lectura de f en la carta ,digamos $\hat{f}$, admite un logaritmo analítico en él, i.e., existe $g \in \mathcal{O}(D(0, \delta))$ tal que

$$\hat{f} = exp(2\pi ig)$$

  y por tanto $\dot{f} = e_x(\dot{g})$.

- $0 \to \mathcal{O} \to^i \mathcal{E} \to^{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$.

Como antes, i denota la inclusión natural. el que para cada $x \in X$ la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}_x \to^{i_x} \mathcal{E}_x \to^{d''_x} \mathcal{E}^{(0,1)_x} \to 0$$

sea exacta es consecuencia del lema de Dolbeault, pues si tomamos $\dot{\omega} \in \mathcal{E}_x^{(0,1)}$ con $\dot{\omega} = [\omega = fd\bar{z}, U_x]$ y U_x siendo el dominio de una carta z para la cual $z(U_x) = D(0, \delta) \subset \mathbb{C}$, existe $g \in \mathcal{E}(D(0, R\delta))$ tal que

$$\bar{\partial}g(z) = f(z)$$

luego $d''[g, U_x] = d''\dot{g} = \dot{\overline{\partial}gd\bar{z}} = \dot{fd\bar{z}} = \dot{\omega}$. Obviamente i_x es inyectiva y $Rg(i_x) = Ker(d''_x)$.

- $0 \to \mathbb{C} \to^i \mathcal{O} \to^d \Omega \to 0$.

Como siempre $\mathbb{C}$ denota el haz de funciones constantes a valores complejos. La exactitud en este caso es obvia sin más que recordar que los abiertos simplemente conexos toda forma holomorfa admite primitiva.

- $0 \to \Omega \to^i \mathcal{E}^{(1,0)} \to^d \mathcal{E}^(2) \to 0.$

  También es evidente el que es una sucesión exacta.

- Si $\mathcal{H} = Ker(\mathcal{E}^{(1)} \to^d \mathcal{E}^{(2)})$

$$0 \to \mathbb{C} \to^i \mathcal{E} \to^d \mathcal{H} \to 0$$

  Por construcción, es inmediato comprobar la exactitud.

- Si X es una superficie de Riemann compacta, $p \in X$ y D es un divisor en ella, entonces

$$0 \to \mathcal{M}_D \to^i \mathcal{M}_{D+p} \to^\varphi \mathbb{C}_p \to 0$$

  Recordemos que para cada abierto U de la superficie X se definía

$$\mathcal{M}_p(U) = \{f \in \mathcal{M}(U)|\ (f) \geq -D\}$$

  El morfismo i es la inclusión obvia, φ se define como sigue: sea U un abierto de X

  - si $p \notin U$, entonces

$$\varphi_U : \mathcal{M}_{p+D}(U) \to \mathbb{C}_p(U) = 0$$

$$f \to 0$$

  - por contra, si $p \in U$

$$\varphi_U : \mathcal{M}_{p+D}(U) \to \mathbb{C}_p(U) = \mathbb{C}$$

$$f \to a_{-k-1}(f)$$

    donde $a_{-k-1}(f)$ denota al $-k-1$-ésimo coeficiente de la serie de Laurent de f en un entorno de p, siendo $k = D(p)$.

$$f \to 0$$

Para cada $x \in X$, la sucesión

$$0 \to (\mathcal{M}_D)_x \to^{i_x} (\mathcal{M}_{D+p})_x \to^{\varphi_x} (\mathbb{C}_p)_x \to 0$$

es exacta ya que:

- i_x es inyectiva y φ_x es suprayectiva.
- $Rg(i_x) = Ker(\varphi_x)$. En efecto, si $p \in U \subset X$ con U abierto de suerte que $\varphi_U(f) = a_{-k-1}(f) = 0$, entonces $f \in \mathcal{M}_D(U)$ y por tanto, para un germen $\dot{f} \in (\mathcal{M}_{D+p})_x$ se tiene la equivalencia

$$\varphi_x(\dot{f}) = 0 \Leftrightarrow \dot{f} = i_x(\dot{g})$$

siendo $\dot{g}$ el germen en $(\mathcal{M}_D)_x$ de $[f, U_x]$.

5.3. Teoremas de de Rham y de Dolbeault

Vamos a probar de manera muy sencilla dos resultados clásicos: los teoremas de deRham y de Dolbeault. La idea es bien sencilla, sabemos que toda sucesión exacta corta de haces induce una sucesión exacta en los pertinentes grupos de cohomología. Aprovechando las sucesiones exactas de la sección anterior, obtendremos de forma natural los mencionados teoremas a partir de ciertos hechos básicos del álgebra homológica.

Teorema 5.3.1 (Teorema de de Rham) *Sea X una superficie de Riemann, entonces*

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong Rh^1_{\mathcal{E}}(X)$$

Dem :

La sucesión exacta

$$0 \to \mathbb{C} \to^{i} \mathcal{E} \to^{d} \mathcal{H} \to 0$$

donde $\mathcal{H} = Ker(\mathcal{E}^{(1)} \to^{d} \mathcal{E}^{(2)})$, induce la sucesión exacta

$$\mathcal{E}(X) \to^{d} \mathcal{H}(X) \to^{\delta^*} H^1(X, \mathbb{C}) \to^{i^1} H^1(X, \mathcal{E}) = 0$$

Como $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$, el operador de conexión δ^* es suprayectivo, y por ende

$$\frac{\mathcal{H}(X)}{Ker(\delta^*)} \cong H^1(X, \mathbb{C})$$

pero $Ker(\delta^*) = B^1_{\mathcal{E}}(X)$ y $\mathcal{H}(X) = Z^1_{\mathcal{E}}(X)$, luego

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong Rh^1_{\mathcal{E}}(X)$$

□

Teorema 5.3.2 (Teorema de Dolbeault) *Sea X una superficie de Riemann, entonces*

- $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \frac{\mathcal{E}^{(1,0)}}{d''\mathcal{E}(X)}$
- $H^1(X, \Omega) \cong \frac{\mathcal{E}^{(2)}}{d\mathcal{E}^{(1,0)}(X)}$

Dem:

- La sucesión exacta

  $$0 \to \mathcal{O} \to^i \mathcal{E} \to^{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$$

  induce esta otra sucesión exacta

  $$\mathcal{E}(X) \to^{d''} \mathcal{E}^{(0,1)}(X) \to^{\delta^*} H^1(X, \mathcal{O})^1(X, \mathcal{E}) = 0$$

  de donde se deduce inmediatamente que

  $$\frac{\mathcal{E}^{(0,1)}(X)}{d''\mathcal{E}(X)} \cong H^1(X, \mathcal{O})$$

- Para el segundo apartado basta considerar la sucesión

  $$0 \to \Omega \to^i \mathcal{E}^{(1,0)} \to^d \mathcal{E}^2 \to 0$$

  La sucesión exacta inducida

  $$\mathcal{E}^{(1,0)}(X) \to^d \mathcal{E}^2(X) \to H^1(X, \Omega) \to H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = 0$$

  trae consigo el isomorfismo buscado:

  $$\frac{\mathcal{E}^{(2)}(X)}{d\mathcal{E}^{(1,0)}(X)} \cong H^1(X, \Omega)$$

□

5.4. El teorema de finitud

Las últimas líneas de este capítulo están destinadas a probar la siguiente condición de finitud:

"Para toda una superficie de Riemann compacta X, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $H^1(X, \mathcal{O})$ es de dimensión finita"

Recordemos, a modo de ejemplo, la nulidad del espacio vectorial anterior para la esfera $\mathbb{C}^\infty$: $H^1(\mathbb{C}^\infty, \mathcal{O}) = 0$. A la dimensión algebraica del citado espacio la llamaremos *género analítico* de X y lo denotaremos por G. No tardando comprobaremos que **el género analítico de una superficie coincide con su género topológico**. Así pues, consideraciones como que el espacio vectorial $H^1(X, \mathcal{O})$ mide "patologías" globales de la topología adquieren ahora pleno sentido. Tal y como se ha comentado, en los capítulos que siguen probaremos la coincidencia de ambos géneros. Para ello nos apoyaremos en la llamada *fórmula de Hurwitz*: ecuación que involucra el género de una superficie. Obtendremos la citada fórmula en dos contextos distintos lo que nos servirá para comprobar que las expresiones para el género topolgico y el analítico coinciden.

En el problema que nos ocupa, la finitud de $H^1(X, \mathcal{O})$, es habitual encontrar distintas técnicas de abordar la cuestión, si bien la mayor parte de ellas comparten argumento: la teoría de espacios normados. El *leitmotiv* es introducir una norma adecuada que permita concluir que la bola unidad es compacta.

Nosotros seguiremos la exposición de [2], aunque omitiremos la difícil y tediosa prueba de un resultado técnico. En él se concentra en gran medida la dificultad del teorema y para conseguir probarle es necesario utilizar la llave del análisis funcional. El lector interesado puede encontrar en la sección 14 una larga prueba de él.

Entremos ya en materia:

Comencemos notando que si Y es un abierto de la superificie de Riemann X y $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos, entonces existe un morfismo canónico de grupos, generalmente llamado morfismo de restricción

$$H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(Y, \mathcal{F})$$

provocado por el siguiente hecho: cualquier recubrimiento abierto $\mathbb{U}$ de X se restringe, cortando a cada uno de sus miembros con Y, a un recubrimiento abierto de Y, al que denotaremos por $\mathbb{U} \cap Y$. De esta forma, cada cociclo en X de tipo $C^j(\mathbb{U}, \mathcal{F})$ con $j = 0, 1$, se restringe a un cociclo en Y de tipo $C^j(\mathbb{U} \cap Y, \mathcal{F})$ para $j = 0, 1$. Además, esta restricción conmuta con el operador borde d (obvio, pues las restricciones son morfismos de grupos) y por ende se extiende a los pertienentes grupos de cohomología de *Čech*, referidos tanto a recubrimientos particulares como a los propios espacios topológicos. Notemos también que si $\mathcal{F}$ es un haz de espacios vectoriales, los morfismos de restricción anteriores también *portarán*esta estructura, esto es, serán aplicaciones lineales.

Además, por construcción, si $U \subset V \subset X$, la restricción $H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F})$ es la composición de la restricción $H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(V, \mathcal{F})$ con la de V a U: $H^1(V, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F})$.

El resultado clave es el que sigue:

Teorema 5.4.1 *Sea X una superficie de Riemann (no necesariamente compacta) y sean $V \subset U \subset X$ abiertos de suerte que V sea relativamente compacto en U. Entonces, el morfismo de restricción*

$$H^1(U, \mathcal{O}) \to H^1(V, \mathcal{O})$$

tiene rango finito.

Esquema de la prueba:

Si $\mathbb{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $\mathbb{B} = (B_i)_{1 \leq i \leq n}$ son familias finitas de abiertos en X tales que para cada índice i

- $U_i \subset B_i$
- U_i es relativamente compacto en B_i

diremos entonces que la familia $\mathbb{U}$ es un refinamiento *relativamente compacto* de $\mathbb{B}$ y escribiremos $\mathbb{U} \lhd \mathbb{B}$.

La parte más delicada es probar que la restricción inyectiva

$$H^1(\mathbb{B}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathbb{U}, \mathcal{O})$$

tiene rango finito, donde $\mathbb{U}\triangleleft\mathbb{B}$ son familias finitas de abiertos en X. Éste es justamente el resultado técnico al que nos referíamos; herramientas clásicas del análisis funcional como por ejemplo el teorema de la aplicación abierta de Banach son necesarias. La idea de [2] es dotar al conjunto $C^1(\mathbb{U},\mathcal{O})$ de estructura de espacio de Hilbert de suerte que $Z^1(\mathbb{U},\mathcal{O})$ sea un subespacio cerrado para posteriormente utilizar propiedades de ortogonalidad. Otra forma de probarlo es utilizar los llamados *fibrados tangentes* a la superficie X, conceptos que quedan lejos del alcance de estas líneas.

Más sencillo de probar pero muy tedioso de formalizar es probar la existencia de cartas $[z_i, U_i]_{i=1}^n$, y de abiertos $(W_i)_{1\le i\le n}$, $(V_i)_{1\le i\le n}$ y $(U_i^*)_{1\le i\le n}$ tales que:

- para cada índice $i \in \{1, 2\ldots, n\}$

$$W_i \subset V_i \subset U_i \subset U_i^*$$

  y cada miembro de la cadena anterior es relativamente compacto en el siguiente.

- $V \subset \bigcup_{i=1}^n W_i = W \subset G = \bigcup_{i=1}^n U_i \subset U$ y W es relativamente compacto en el abierto G.

- para cada índice $i \in \{1, 2\ldots, n\}$, los abiertos $z(U_i)$, $z(U_i^*)$ y $z(W_i)$ son discos en el plano $\mathbb{C}$ y por tanto

$$H^1(U_i,\mathcal{O}) = H^1(W_i,\mathcal{O}) = 0$$

Llamando $\mathbb{U}$ a la familia $(U_i)_{i=1}^n$ y $\mathbb{W} = (W_i)_{i=1}^n$, de los apartados anteriores se deduce que

- $\mathbb{W} \triangleleft \mathbb{U}$ y por tanto la restricción

$$H^1(\mathbb{U},\mathcal{O}) \to^{\delta} H^1(\mathbb{W},\mathcal{O})$$

  tiene rango finito.

- Tanto $\mathbb{W}$ como $\mathbb{U}$ son recubrimientos de Leray para W y para G respectivamente, luego

$$H^1(G,\mathcal{O}) \cong H^1(\mathbb{U},\mathcal{O})$$

$$H^1(W, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathbb{W}, \mathcal{O})$$

Por tanto, añadiendo la conmutatividad de las restricciones, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(U,\mathcal{O}) \to & H^1(G,\mathcal{O}) \to & H^1(W,\mathcal{O}) \to & H^1(V,\mathcal{O}) \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & H^1(\mathbb{U},\mathcal{O}) & \to^{\delta} H^1(\mathbb{W},\mathcal{O}) & \end{array}$$

De esta forma, al tener δ rango finito, la restricción $H^1(U, \mathcal{O}) \to H^1(V, \mathcal{O})$ también tendrá rango finito.

□

Como corolario obtenemos el importante teorema que buscábamos:

Teorema 5.4.2 *Sea X una superficie de Riemann compacta, entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$$

Dem:

Basta tener en cuenta que por una parte X es relativamente compacta en ella misma y por otra, que la restricción canónica

$$H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \mathcal{O})$$

es justamente la identidad. Así pues, la identidad de $H^1(X, \mathcal{O})$ tiene rango finito, habida cuenta del teorema anterior, y por tanto

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) = \dim_{\mathbb{C}} id(H^1(X, \mathcal{O})) < \infty$$

□

Tal y como comentábamos al principio de la sección, a la dimensión anterior la llamaremos **género analítico** de la superficie X y la denotaremos por la letra G, teniendo siempre en mente que este natural es exactamente el género topológico de la superificie.

5.5. Funciones meromorfas no constantes

El que las funciones meromorfas en una superficie de Riemann separen puntos es tan difícil de probar como útil a la hora de razonar. El siguiente resultado recoge una de las principales propiedades de separación que presentan las funciones meromorfas en superficies de Riemann:

Teorema 5.5.1 *Sea X una superficie de Riemann y n un entero positivo. Para cualesquiera $x_1, x_2 \ldots, x_n$ puntos distintos en X y $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ números complejos, existe una función meromorfa $f : X \to \mathbb{C}$ de suerte que*

$$f(x_i) = \alpha_i$$

para cada índice $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

La prueba de este teorema es, cuanto menos, difícil. Como aplicación del teorema de finitud, nosotros vamos a probarlo en el caso particular en el que X sea compacta. El lector interesado en la prueba general puede consultar [9] o [5] en donde se utiliza teoría del potencial; la piedra angular del razonamiento es la construcción de funciones armónicas con singularidades prefijadas, que según [9] fue la idea original que utilizó el propio Riemann para afrontar el problema. Dicho esto, centrémonos ya en la prueba del teorema supuesta la compacidad de la superficie X.

Teorema 5.5.2 *Sea X una superficie de Riemann* ***compacta*** *y n un entero positivo. Para cualesquiera $x_1, x_2 \ldots, x_n$ puntos distintos en X y $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ números complejos, existe una función meromorfa $f : X \to \mathbb{C}$ de suerte que*

$$f(x_i) = \alpha_i$$

para cada índice $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

- Veamos primeramente que para cada punto $a \in X$ existe $\varphi : X \to \mathbb{C}$ meromorfa, cuyo conjunto de polos se reduce exactamente al punto a .

  Sea G el género analítico de X y $[z, U_1]$ una carta centrada en a. Consideremos el recubrimiento abierto de X $\mathbb{U} = \{U_1, U_2\}$ donde $U_2 = X - \{a\}$, recordemos que cualquier inclusión $H^1(\mathbb{U}, \mathcal{O}) \to^i H^1(X, \mathcal{O})$ ha de ser inyectiva y que por el teorema de finitud ha de tener rango finito, de esta forma

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{U}, \mathcal{O}) = rg(H^1(\mathbb{U}, \mathcal{O}) \to^i H^1(X, \mathcal{O})) < \infty$$

Sea, pues, $d = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{U}, \mathcal{O}) < \infty$. Consideremos las $d+1$ cocadenas cerradas $\underline{f}_j \in Z^1(\mathbb{U}, \mathcal{O})$ con $1 \leq j \leq d+1$ tales que

$$(\underline{f}_j)_{1,2} = -(\underline{f}_j)_{2,1} = \frac{1}{z^j}$$

Debido a la dependencia lineal de sus clases en $H^1(\mathbb{U}, \mathcal{O})$, existe $\underline{f} \in C^0(\mathbb{U}, \mathcal{O})$ y escalares complejos no todos nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de suerte que

$$\sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j \underline{f}_j = \underline{\partial f}$$

y por tanto, en $U_1 \cap U_2 = U - \{a\}$

$$\sum_{j=1}^{d+1} \frac{\lambda_j}{z^j} = f_1 - f_2$$

con $f_1 \in \mathcal{O}(U)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(X - \{a\})$. Basta entonces tomar $\varphi = f_2 \in \mathcal{O}(X - \{a\})$. De esta forma, como para cada $z \in U$

$$\varphi(z) = f_1(z) - \sum_{j=1}^{d+1} \frac{\lambda_j}{z^j}$$

La holomorfía de f_1 en U permite afirmar que φ tiene un polo únicamente en a.

- Construyamos ya la función f:

  Fijados dos índices distintos $i, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$, para cada par (x_i, x_j), tomamos $f_{i,j} : X \to \mathbb{C}$, función mermorfa en X cuyo conjunto de polos es exactamente el punto x_i. Nótese que la existencia de estas funciones viene garantizada por el apartado anterior. Por la finitud del conjunto de índices podemos encontrar un número complejo $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ de suerte que para índice $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$

  $$f_{i,j}(x_k) \neq f_{i,j}(x_j) + a_{i,j}$$

  Construimos entonces la función $g_{i,j} : X \to \mathbb{C}$

$$g_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j}(x_j)}{f_{i,j} - f_{i,j}(x_j) + a_{i,j}}$$

holomorfa en $\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ y verificando que $g_{i,j}(x_i) = 1$ y $g_{i,j}(x_j) = 0$. Por tanto, la función

$$h_i = \prod_{j|j\neq i} g_{i,j}$$

es tal que $h_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$ y $h_i(a_i) = 1$, luego la función

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$$

sirve.
□

La existencia de funciones meromorfas no constantes en superficies de Riemann compactas trae consigo la existencia de 1-formas meromorfas no constantes: la diferencial de una cualquiera de estas funciones es una 1-forma meromorfa y no constante. De esta forma, se tiene el siguiente importante resultado:

Teorema 5.5.3 *Toda superficie de Riemann compacta admite formas meromorfas no constantes.*

5.6. Triangulación y género

Una vez introducido el sutil enfoque analítico del género, prestamos atención a la perspectiva topológica. Esta última sección está consagrada al estudio de propiedades puramente topológicas: las triangulaciones y el género topológico. Si bien aún no estamos en condiciones de probar la igualdad entre el género topológico y el analítico, es útil tener la idea en mente.

Obviamente toda superficie de Riemann es una 2-variedad conexa, esto es, una variedad real de clase $\mathcal{C}^\infty$ de dimensión dos y conexa. Si la superficie además es compacta, también lo será como 2-variedad.

La geometría diferencial real nos dice que toda 2-variedad conexa, compacta y orientable **es homeomorfa a una esfera con** $g \geq 0$ **asas**; recordemos que el natural anterior g recibe el nombre de **género de la variedad** y es por tanto un invariante topológico: decir que $g = 0$ es tanto como decir que la variedad es homeomorfa a una esfera, $g = 1$ representa precisamente a las variedades homemorfas al toro y si $g \geq 2$ la variedad es, salvo homeomorfismo, un pegado de g asas a la esfera. En añadidura, recordemos que **la característica de Euler** χ de una 2-variedad compacta, conexa y orientable se define como

$$\chi = 2 - 2g$$

y por tanto es otro invariante topológico, íntimamente relacionado con las triangulaciones.

Recordemos que un triángulo en una 2-variedad es un par formado por un subconjunto cerrado de la variedad y un homemorfismo entre él y el símplice usual en $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Las aristas y vértices de un triángulo en un variedad no son más que las imágenes por el homeomorfismo de las aristas y vértices usuales del símplice Δ. La cara de un triángulo será la imagen a través del homeomorfismo del interior del símplice Δ.

Una triangulación en una 2-variedad compacta X es una colección de triángulos en X de suerte que

- Forman un recubrimiento de la variedad.
- Dos triángulos cualesquiera, bien son disjuntos, bien comparten una arista y dos vértices o bien sólo comparten un vértice.

Hechos conocidos de topología son que toda 2-variedad compacta admite una triangulación y que la suma alternada del número de vértices V, caras C y aristas A de una triangulación cualquiera es constante, es más, constante e igual a la característica de Euler de la 2-variedad:

$$\chi = V - A + C$$

Todos estos hechos básicos de topología y geometría pueden consultarse, por ejemplo, en [11], capítulo 12, sección 77.

Resulta que toda superficies de Riemann es orientable, luego todos los conceptos anteriores tienen perfecto sentido en el contexto que nos interesa.

La orientabilidad se justifica como sigue: si dos cartas $[\mathcal{U}, z = x + iy]$ y $[\mathcal{V}, w = \alpha + i\beta]$ tienen dominios no disjuntos, debido a las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

el determinante Jacobiano es positivo:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = (\frac{\partial x}{\partial \alpha})^2 + (\frac{\partial x}{\partial \beta})^2 > 0$$

luego dos cartas cualesquiera conservan la orientación.

A partir de la existencia de funciones meromorfas no constantes en superficies de Riemann compactas $f : X \to \mathbb{C}^\infty$ (*recordemos que cualquiera de estas funciones ha de ser un recubrimiento ramificado habida cuenta la compacidad de X*), no es difícil **levantar una triangulación** de la esfera hasta una **triangulación de la superficie** X permitiendo probar directamente que toda superficie de Riemann es triangulable, pero se puede ir más lejos, obteniendo incluso una expresión para el género de X a partir del grado de la aplicación f: la llamada **fórmula de Hurwitz.**

Teorema 5.6.1 (Triangulaciones en superficies de Riemann compactas) *Sea X una superficie de Riemann compacta y $f : X \to \mathbb{C}^\infty$ una función holomorfa no constante, entonces:*

- *X es triangulable*
- ***Fórmula de Hurwitz:*** *si $\chi(X)$ denota la característica de Euler de X y $n = \partial^o f$ se cumple que*

$$\chi(X) = 2n + \sum_{x \in X} (1 - e(f, x))$$

La suma anterior está bien definida: por ser la superficie de Riemann compacta, $1 - e(f, x)$ será nulo salvo quizás para una cantidad finita de puntos ya que el conjunto $\{x \in X | e(x, f) > 1\}$ es discreto en X.

Para la prueba del teorema anterior seguiremos el enfoque conciso de Ivorra en [7]:

Dem:

Por ser X compacta, f es un recubrimiento ramificado y por ende, para cada punto $a \in \mathbb{C}^\infty$ existe un entorno abierto de a, digamos $\mathcal{V}_a$, y abiertos disjuntos $(\mathcal{U}_i)_i$, entornos de las antiimagénes $x_1, \ldots, x_m$ de a por f (asumimos que cada $\mathcal{U}_j$ es entorno de x_j), de suerte que la lectura de la restricción de f a cada abierto $\mathcal{U}_i$ es el monomio $z^{e(f, x_i)}$.

Tomemos una triangulación en la esfera. Cada triángulo en $\mathbb{C}^\infty$ es un cerrado, luego compacto, y por tanto las uniones (finitas) de triángulos siguen siendo compactos en $\mathbb{C}^\infty$. Sea K el compacto formado por la reunión de los triángulos cuyos vértices son puntos de escisión (que son una cantidad finita). Para cada $a \in K$ consideremos el entorno abierto $\mathcal{V}_a$ del párrafo anterior, así pues la familia $(\mathcal{V}_a)_{a \in K}$ es una cubierta para K, luego existe un subrecubrimiento finito $(\mathcal{V}_{a_j})_{j \in F}$ Refinemos la triangulación anterior hasta que se cumplan lo siguientes supuestos:

- Cada punto de ramificación de f es un vértice de un triángulo.
- Cada triángulo tiene, a lo sumo, un único vértice como punto de ramificación de f.
- Todos los triángulos que tengan por vértice un punto de ramificación $a \in \mathbb{C}^\infty$ están contenidos en el abierto $\mathcal{V}_a$.
- Cada triángulo cuyos vértices sean todos puntos de escisión estará completamente contenido un abierto de la familia finita $(\mathcal{V}_{a_j})_{j \in F}$.

Esto es posible ya que al ser K compacto y la topología de $\mathbb{C}^\infty$ métrica, existe un δ de suerte que todo subconjunto de K con diámetro menor que δ estará contenido en un miembro del recubrimiento *(lema del número de Lebesgue)*.

De esta forma, las antiimágenes de estos triángulos en $\mathbb{C}^\infty$ forman una triangulación para X: recubren X y verifican las tres condiciones de separación.

Sean A, V y C el número de aristas, vértices y caras respectivamente de la triangulación de $\mathbb{C}^\infty$ y $\hat{A}$, $\hat{V}$ y $\hat{C}$ el número de aristas, vértices y caras respectivamente de la triangulación de X. Busquemos la relación entre las 6 cantidades anteriores y utilizando que la esfera tiene género nulo y por tanto que $V-A+C=2$, obtengamos la fórmula de Hurwitz.

Sea T un triángulo en la esfera; distinguimos dos casos:

1. El triángulo no tiene por vertice ningun punto de ramificación. Si esto fuese así, su contraimagen la formarian exactamente $n = \partial^{\text{o}} f$ triángulos disjuntos.
2. El triángulo tiene un punto de ramifiación como vértice. Sea b tal punto de ramificación y $x_1, \ldots, x_m$ sus antecedentes por f. Debido al comportamiento de los monomios $z^{e(f,x_i)}$, la antiimagen del triángulo es exactamente m conjuntos de triángulos, de suerte que cada el conjunto i-simo lo forman $e(f, x_i)$ triángulos unidos por el mismo vértice, el punto x_i.

De lo anterior se deduce que $\hat{A} = nA$ y $\hat{C} = nC$ y si los puntos de ramificación de f son exactamente los puntos $b_1, \ldots, b_p$ teniendo b_i exactamente m_i antiimágenes , entonces:

$$\hat{V} = n(V-p) + \sum_i m_i$$

y por tanto

$$\hat{V} = nV - np + \sum_i m_i = nV + \sum_i m_i - n$$

Teniendo en cuenta que $m_i - n = \sum_{a \in f^{-1}(b_i)} 1 - e(f,a)$ se llega a que:

$$\hat{V} = nV + \sum_{a} 1 - e(f, a)$$

y por tanto:

$$\chi(X) = \hat{V} - \hat{A} + \hat{C} = 2n + \sum_{x \in X} (1 - e(f, x))$$

□

Para ciertos autores la *fórmula de Hurwitz* es la siguiente expresión que se obtiene inmediatamente de la formula anterior:

Proposición 5.6.2 (Fórmula de Hurwitz, versión topológica) *Sea X una superficie de Riemann compacta de genero g y f una función meromorfa no constante definida sobre ella de grado n, entonces:*

$$g = 1 - n + \frac{1}{2} \sum_{x \in X} (e(f, x) - 1)$$

Parte II

Uniformización de superficies de Riemann

Introducción

Presentados los conceptos básicos de la teoría de superficies de Riemann, dirigimos nuestra atención al problema de la uniformización. Como suele ser habitual en matemáticas, nos encontramos con la clásica dicotomía fruto de la presencia o no de la compacidad. Tan acusada es esta distinción que tendremos que abordar por separado el problema de la uniformización. De todos modos, tal y como el lector comprobará, se ha intentado dar la mayor simetría posible al desarrollo de la materia.

La propiedad de compacidad en una superficie de Riemann trae consigo inumerables peculiaridades, tirando por borda cualquier posible parecido de la superficie con los abiertos del plano complejo. La resolución de un profundo problema del estilo *Rouché-Frobenius*, el de determinar el número de funciones meromorfas linealmente independientes sometidas a ciertas restricciones de ceros y polos sobre la superficie, esto es, el llamado problema de *Riemann-Roch*, permite de manera sencilla probar el teorema de uniformización en el marco de la compacidad: una superficie de Riemann simplemente conexa es compacta si y sólo si, es conformemente equivalente a la esfera.

Por contra, las superficies de Riemann no compactas sí que presentan grandes similitudes con los abiertos del plano complejo. La resolución del *problema de Dirichlet*, un problema de existencia de funciones armónicas que generaliza el intuitivo hecho de que por dos puntos cualesquiera del plano pasa un única recta, permitirá la resolución, primeramente del llamado *teorema de la aplicación de Riemann*, esto es, todo abierto no trivial del plano $\mathbb{C}$ es simplemememente conexo, si y sólo si, es conformemente equivalente al disco (teniéndose por tanto el teorema uniformización para los abiertos del plano) y posteriormente, la generalización al caso de superficies abstractas.

Una vez alcanzado el teorema de uniformización de superficies simplemente conexas, la existencia de un recubridor universal simplemente conexo para cada superficie, da lugar a una clasificación de las superficies de Riemann como cocientes del plano, del disco y de la esfera. Estudiando propiedades de los automorfismos tales como la ausencia de puntos fijos o el carácter discreto de la órbita de cada elemento, se puede afinar la clasificación por cocientes anterior. A ello está dedicada la primerta parte del capítulo octavo, el último capítulo.

Resuelto ya el problema de la uniformización, las últimas líneas del trabajo están dedicadas a dar someras pinceladas sobre el desarrollo histórico tanto del problema como del concepto de superficie de Riemann. Textos de los principales protagonistas (Riemann, Klein, Poincaré) nos permitirán acercarnos más a sus propias vivencias y perspectivas.

Así pues, esta segunda parte consta de tres capítulos: los dos primeros, técnicos, el tercero mitad historiográfico, mitad técnico. Sin más dilación adentrémenos ya en ella.

Capítulo 6

Caso compacto: el problema de Riemann-Roch

6.1. Introducción

El problema de Riemann-Roch hace referencia a una de las preguntas más importantes que se puedan formular en el marco de superficies de Riemann compactas:

Determinar el número de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta $\mathbb{C}$-linealmente independientes imponiendo restricciones de atadura sobre sus ceros y polos.

El concepto de divisor sobre una superficie de Riemann compacta X, esto es, cualquier aplicación $D : X \to \mathbb{Z}$ nula salvo quizás para una cantidad finita de puntos, establece el lenguaje adecuado para el contexto: las restricciones de ceros y polos para una función f mencionadas anteriormente serán exactamente condiciones del tipo

$$(f) \geq D$$

para cierto divisor D, desempeñando los haces $\mathcal{M}_D$ un papel primordial.

Con esta notación, la versión actual del problema de Riemann-Roch [1], se formula como sigue:

[1] Alexander Grothendieck se granjeó fama mundial al generalizar a contextos más generales este teorema. Veáse por ejemplo [12], capítulo 9 o el texto de Ivorra [7], capítulos 8 y 9 para analizar tal sofisticada generalización

Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en ella. Hallar o estimar

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X)$$

Originalmente planteado y parcialmente resuelto por Riemann, debemos esperar hasta que su joven discípulo Gustav Roch afinase la sutil estimación de su maestro, hasta llegar a obtener el valor exacto, función del propio divisor y del género de la superficie.

En 1851, Riemann defiende en Gotinga su tesis doctoral. En ella desarrolla gran parte de la teoría de funciones de variable compleja y prueba el hoy llamado *teorema de la aplicación de Riemann* o *teorema de representación conforme*: un teorema de uniformización para los abiertos simplemente conexos del plano complejo $\mathbb{C}$ sobre el que más tarde volveremos. La continuación natural de su tesis es la memoria sobre las funciones abelianas que publica en 1857. La sección V de dicha memoria, acoge el estudio de las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta (a la que generalmente denota por la letra T). En ella, Riemann se preocupa tanto por la relación existente entre las funciones meromorfas y sus polos como por la medida en que estos últimos son capaces de determinar a las propias funciones. En 1874, Brill y Noëther se refieren a la cuestión anterior por primera vez con el nombre de *problema de Riemann-Roch*, ver [BriNoe1874].

Brevemente describamos la perspectiva de Riemann:

Primeramente consideró un conjunto finito de puntos $\{P_1, \ldots, P_n\}$ sobre la superficie compacta T, con la idea de que representasen los polos *simples* de una función meromorfa. A partir de varios resultados de funciones armónicas pudo probar, lo que en el lenguaje actual sería un teorema de existencia de formas diferenciales. Imponiendo condiciones al más puro estilo *Rouché-Frobenius* es capaz de llegar a un caso particular de la hoy conocida *estimación de Riemann*, que en notación moderna se formula como sigue:

Si la superficie de Riemann compacta T tiene género g, la dimensión compleja del espacio vectorial de las funciones meromorfas cuyos únicos polos están en el conjunto $\{P_1, \ldots, P_n\}$ y son todos simples es, al menos

$$m - g + 1$$

Para el caso de polos dobles y de orden superior, razonó de manera heurística, por *paso al límite*, haciendo coincidir puntos cierta cantidad de los puntos $P_1, \ldots, P_n$. Si bien el argumento era intuitivamente claro, el rigor dejaba bastante que desear.

$\square$

Es interesante incidir en que el problema de Riemann-Roch, tal y como se ha comentado, muestra una clara similitud con un clásico teorema del álgebra lineal, el teorema de *Rouché-Frobenius*, el cual se plantea informalmente como sigue:

Dadas ciertas restricciones lineales sobre un cierto número de variables, hallar el número máximo de variables linealmente independientes

En particular, dadas n variables *(incógnitas)* y $m \leq n$ restricciones (*ecuaciones lineales y homogéneas*),

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0$$

el álgebra lineal elemental nos permite concluir que hay $n - m$ variables (*linealmente*) independientes.

En el caso que nos ocupa, el número de funciones meromorfas linealmente independientes no sólo depende de las propias restricciones (esto es, el grado del propio divisor en cuestión) sino que además depende de algo tan genuino como el propio género de la superficie.

Antes de entrar de lleno en el propio problema, un par de cuestiones de notación; si X es una superficie de Riemann compacta y D es un divisor en ella, entonces

- Es habitual encontrar las notaciones $h^0(D)$ y $h^1(D)$ para referirse a las dimensiones complejas de los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $H^0(X, \mathcal{M}_D) = \mathcal{M}_D(X)$ y $H^1(X, \mathcal{M}_D)$ respectivamente.

- También es frecuente toparse con otra notación para la dimensión de $H^1(X, \mathcal{M}_D)$: $i(D)$. En palabras es habitual hablar del : "*índice de especialización del divisor D*".

6.2. El teorema de Riemann-Roch, versión analítica

Sin más dilación, centrémonos ya en el problema en cuestión. Sea, pues, X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en ella. Fijemos un punto $p \in X$ y tomemos el divisor $D^{'} = D + p$. Consideremos la siguiente sucesión exacta, estudiada en el **capítulo 5, seccción 5.6**:

$$0 \to \mathcal{M}_D \to^i \mathcal{M}_{D'} \to^{\varphi} \mathbb{C}_p \to 0$$

La sucesión inducida en los grupos de cohomología es

$$0 \to \mathcal{M}_D(X) \to^{i_X} \mathcal{M}_{D'}(X) \to^{\varphi_X} \mathbb{C} \to^{\delta^{'}} H^1(X, \mathcal{M}_D) \to H^1(X, \mathcal{M}_{D'}) \to H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$$

Sea $V = Rg(\varphi_X)$, la sucesión exacta anterior escinde en las dos siguientes:

- $0 \to \mathcal{M}_D(X) \to^{i_X} \mathcal{M}_{D'}(X) \to^{(\varphi_X)} V \to 0$
- $\mathbb{C}/V \to H^1(X, \mathcal{M}_D) \to H^1(X, \mathcal{M}_{D'}) \to 0$

Tomando dimensiones (de lo anterior se deduce que todos los espacios vectoriales tienen dimensión compleja finita) se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$h^0(D^{'}) = h^0(D) + \nu$$

$$h^1(D^{'}) = h^1(D) + 1 - \nu$$

donde $\nu = \dim_{\mathbb{C}} V$. Sumando las dos igualdades anteriores se llega a la expresión

$$h^0(D^{'}) + h^1(D) = h^0(D) + h^1(D^{'}) + 1$$

luego

$$h^0(D') - h^1(D') = h^0(D) - h^1(D) + 1$$

Sin más que notar que $deg(D') - deg(D) = 1$, la ecuación anterior toma la forma

$$h^0(D') - h^1(D') - deg(D') = h^0(D) - h^1(D) - deg(D)$$

y por tanto existe un escalar γ

$$\gamma = h^0(D) - h^1(D) - deg(D)$$

independiente de cualquier divisor $D \in Div(X)$, ya que al ser X compacta, dos divisores cualesquiera difieren en una cantidad finita de puntos, y por tanto, no hay más que razonar por recurrencia.

Ahora bien, el caso particular $D = 0$ permite despejar γ ya que

- $h^0(D) = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}(X) = dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$
- $h^1(D) = dim_{\mathbb{C}}H^1(X, \mathcal{O}) = G$

y por tanto

$$\gamma = h^0(0) - h^1(0) - deg(0) = 1 - G$$

En resumidas cuentas, hemos probado de forma muy sencilla el omnipresente teorema de Riemann-Roch:

Teorema 6.2.1 (de Riemann-Roch, versión analítica) *Sea X una superficie de Riemann compacta de género analítico G y D un divisor en ella. Se cumplen los siguientes apartados:*

- ***Desigualdad de Riemann:***

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) \geq 1 - G + deg(D)$$

- ***Correción de Roch:***

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{M}_D) = 1 - G + deg(D)$$

6.3. Principio de dualidad de Serre

Cargar las tintas en funciones meromorfas antes que en formas meromorfas es sólo una cuestión de gustos, pues como cabía esperar, el problema de Riemann-Roch también puede ser planteado y resuelto de manera satisfactoria en el contexto de formas meromorfas sobre superficies de Riemann compactas. El principio de dualidad es un profundo resultado que liga magistralmente el problema de Riemann-Roch en ambos contextos, unificando las soluciones y estableciendo una dualidad cuanto menos llamativa.

Para formular correctamente el problema de Riemann-Roch en el marco de las formas diferenciales, el primer paso es generalizar el concepto de divisor de funciones meromorfas con el fin de obtener una notación adecuada:

- Si ω es una 1-forma meromorfa en una superficie de Riemann X, se define su divisor asociado, denotánse por (ω), como el divisor

$$(\omega) : X \to \mathbb{Z}$$
$$p \to ord(\omega, p)$$

  Recordemos que el orden de una forma meromorfa en un punto cualquier de la superficie estaba bien definido. Por otra parte, si la superficie X era compacta, el grupo de divisores se podía identificar con el grupo abeliano libre generado por los puntos de la superficie, de esta forma, el divisor (ω) se identifica con el elemento

$$\sum_{P \in X} ord(\omega, P)P$$

- Si X es una superficie de Riemann compacta y D es un divisor en ella, definimos el haz de formas meromorfas $\mathcal{M}_D$ como el haz que a cada abierto U de X asocia las formas meromorfas en U múltiplos de $-D$, esto es:

$$\mathcal{M}_D^{(1)}(U) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U) | \ (\omega) \geq -D\}$$

- Notemos que para cada $\omega \in \mathcal{M}_D^{(1)}(X)$, el morfismo de haces

$$\mathcal{M}_{D+(\omega)} \to \mathcal{M}_D^{(1)}$$

inducido por la multiplicación $f \to f\omega$ está bien definido pues $(f\omega) = (f) + (\omega) \geq -D - (\omega) + (\omega) = -D$. Es más, puede comprobarse que es un isomorfismo de haces, esto es, en cada punto $x \in X$ el morfimos inducido entre tallos es un isomorfimos de espacios vectoriales.

El principio de dualidad de Serre afirma para cada divisor D en una superficie de Riemann compacta X

$$H^1(X, \mathcal{M}_D)^* \cong \mathcal{M}^{(1)}_{-D}(X)$$

como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

Entre las múltiples ventajas que ofrece esta dualidad, destaca la posibilidad de suprimir los grupos de cohomología de primer orden que aparecen en el teorema de Riemann-Roch, tomando así la forma:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{(1)}_{-D}(X) = 1 - G + deg(D)$$

Es decir, el máximo número de funciones meromorfas $\mathbb{C}$- linealmente independientes sobre una superficie de Riemann compacta que sean múltiplos de un divisor D menos el máximo número de formas meromorfas $\mathbb{C}$- linealmente independientes múltiplos de $-D$ es exactamente $1 + deg(D) - G$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{M}^{(1)}_{-D}(X) = H^0(X, \mathcal{M}^{(1)}_{-D})$, el principio de dualidad adquiere una mayor simetría:

$$H^1(X, \mathcal{M}_D)^* \cong H^0(X, \mathcal{M}^{(1)}_{-D})$$

Es más, combinando la dualidad anterior con los isomorfismos de haces $\mathcal{M}_{D+(\omega)} \cong \mathcal{M}^{(1)}_D$, se obtiene otra expresión de dualidad:

$$H^0(X, \mathcal{M}_D) \cong H^0(X, \mathcal{M}^{(1)}_{D-(\omega)}) \cong H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}_{(\omega)-D})^* \cong H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}_{-D})^*$$

Enunciamos ya formalmente el principio de dualidad de Serre:

Teorema 6.3.1 (Principio de dualidad, de Serre) *Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en ella. Se tiene el siguiente par de isomorfismos de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:*

- $H^1(X, \mathcal{M}_{-D})^* \cong \mathcal{M}^{(1)}_D(X)$
- $H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}_{-D})^* \cong \mathcal{M}_D(X)$

En particular, para $D = 0$

$$H^1(X, \mathcal{O})^* \cong \Omega(X)$$

y por tanto

$$G = \dim_{\mathbb{C}} \Omega(X)$$

Hay varias formas de probar este resultado. Las perspectivas de [13] (tres vías distintas en total) son particularmente interesantes. Una de ellas sigue la idea de [2]. Esquemáticamente:

Para cada abierto U, el producto

$$\mathcal{M}^{(1)}_{-D}(U) \times \mathcal{M}_D(U) \to \Omega(U)$$

$$(\omega, f) \to \omega f$$

induce una aplicación bilineal

$$H^0(X, \mathcal{M}^{(1)}_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{M}_D) \to H^1(X, \Omega)$$

Recordando que el teorema de Dolbeault proporcionaba la identificación

$$H^1(X, \Omega) \cong \frac{\mathcal{E}^{(2)}(X)}{d\mathcal{E}^{(1,0)}(X)}$$

podemos componer la aplicación bilineal anterior con el *funcional "residuo"*

$$\frac{\mathcal{E}^{(2)}(X)}{d\mathcal{E}^{(1,0)}(X)} \to \mathbb{C}$$

$$\dot{\omega} \to Res(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\int_X \omega$$

donde $\dot{\omega}$ denota la clase de $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$, módulo $d\mathcal{E}^{(1,0)}$.
Tenemos por tanto una forma bilineal

$$<,>: \mathcal{M}^{(1)}_{-D}(X) \times H^1(X, \mathcal{M}_D) \to \mathbb{C}$$

$$(\omega, \underline{f}) \to < \omega, \underline{f} >= Res(\omega \underline{f})$$

y por dualidad una aplicación lineal

$$\mathcal{M}_{-D}^{(1)}(X) \to H^1(X, \mathcal{M}_D)$$

que tediosamente se prueba, primeramente su inyectividad, y posteriormente la suprayectividad.

□

La combinación del teorema de Riemann-Roch con el principio de dualidad de Serre permite al fin probar la coincidencia del género analítico con el género topológico. Para ello probaremos de nuevo la fórmula de Hurwitz, si bien esta vez será para el género analítico trayendo consigo una sustancial generalidad respecto de la versión topológica.

Teorema 6.3.2 (Fórmula de Hurwitz, versión analítica) *Sea $f : X \to Y$ una recubrimiento ramificado de grado n entre superficies de Riemann compactas X e Y, de géneros analíticos G y G' respectivamente. Se verifica entonces la siguiente igualdad, conocida como fórmula de Hurwitz:*

$$G = 1 + n(G' - 1) + \frac{1}{2}\sum_{a \in X}(e(f,a) - 1)$$

Dem:

- Veamos primero que si $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ no es idénticamente nula, entonces

  $$deg(\omega) = 2G - 2 = -\chi(X)$$

  En efecto, del teorema de Riemann-Roch se obtiene la siguiente igualdad:

  $$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{M}_{(\omega)}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{M}_{(\omega)}) = 1 - G + deg(\omega)$$

  que se transforma, utilizando el morfismo de haces $\Omega \cong \mathcal{M}_{(\omega)}$ en

  $$1 - G + deg(\omega) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega)$$

  y si tenemos en cuenta el principio dual de Serre:

  - $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(X))^* = 1$
  - $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega(X) = G$

llegamos a que

$$1 - G + deg(\omega) = G - 1$$

es decir,

$$deg(\omega) = 2G - 2$$

- Tomemos una 1-forma $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$ no constante (recordemos que en el capítulo anterior habíamos asegurado la existencia de 1-formas meromorfas no constantes sin más que considerar diferenciales de funciones meromorfas no constantes). Si f^* denota el "pull back" por f, en virtud del apartado anterior:

$$deg(\omega) = 2G' - 2$$
$$deg(f^*\omega) = 2G - 2$$

Fijemos $a \in X$ y consideremos $b = f(a)$. Podemos tomar cartas $[z, V_a]$ y $[\zeta, V_b]$ centradas en a y en b respectivamente de suerte que la lectura de f en ellas, digamos $\hat{f}$, sea el monomio

$$\hat{f}(z) = z^{e(f,a)}$$

Por tanto, si $\omega = \varphi(\zeta)d\zeta$, para cada $z \in V_a$

$$f^*\omega = \varphi(z^{e(f,a)})dz^{e(f,a)} = e(f,a)z^{e(f,a)-1}\varphi(z^{e(f,a)})dz$$

y por ende

$$ord(f^*\omega, a) = e(f,a) - 1 + e(f,a)ord(\omega, a)$$

Ya casi hemos acabado, pues para cada $y \in Y$, en virtud de la igualdad anterior:

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} ord(f^*\omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} (e(f,x) - 1) + ord(\omega, y) =$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)} (e(f,x) - 1) + ord(\omega, y)n$$

y por ende, como

$$deg(f^*\omega) = \sum_{x \in X} ord(f^*\omega, x)$$

resulta que (recordemos que f es suprayectiva al ser un recubrimiento ramificado)

$$deg(f^*\omega) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in f^{-1}(y)} ord(f^*\omega, x) = \sum_{x \in X} (e(f,x) - 1) + n \sum_{y \in Y} ord(\omega, y)$$

Ahora bien

$$\sum_{y \in Y} ord(\omega, y) = deg(\omega) = 2G^{'} - 2$$

luego

$$2G - 2 = deg(f^*\omega) = \sum_{x \in X} (e(f,x) - 1) + n(2G^{'} - 2)$$

Equivalentemente:

$$G = 1 + n(G^{'} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{x \in X} (e(f,x) - 1)$$

□

Ahora ya resulta trivial comprobar que el género topológico y el analítico coinciden:

Teorema 6.3.3 (Igualdad de géneros) *Sea X una superficie de Riemann compacta de género topológico g, entonces*

$$g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O})$$

Es decir, el género analítico de la superficie coincide con el género topológico.

Dem:

Si $X = \mathbb{C}^\infty$ sabemos que $G = dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{C}^\infty, \mathcal{O}) = 0 = g$, luego se da la igualdad.

Sea, pues, X una superficie de Riemann compacta distinta de la esfera. La existencia de funciones meromorfas no constantes acarrea la existencia de funciones holomorfas $X \to \mathbb{C}^\infty$ no constantes, sea entonces f una cualquiera de ellas. La compacidad de X implica que f es un recubrimiento ramificado, llamemos n a su grado. Las fórmulas de Hurwitz nos permiten concluir:

- Versión analítica: $G = 1 - n + \frac{1}{2}\sum_{a \in X}(e(f,a) - 1)$
- Versión topológica: $g = 1 - n + \frac{1}{2}\sum_{a \in X}(e(f,a) - 1)$

□

6.4. Teorema de Riemann-Roch, versión general

Tanto el principio de dualidad de Serre como la igualdad entre géneros topológico y analítico, complementan a la perfección la llamada versión analítica del teorema de Riemann-Roch, dando lugar al clásico teorema de Riemann-Roch sobre superficies de Riemann:

Teorema 6.4.1 (de Riemann-Roch, versión general) *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g y D un divisor en ella. Se cumplen los siguientes apartados:*

- ***Desigualdad de Riemann (1857):***

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) \geq 1 - g + deg(D)$$

- ***Correción de Roch (1865):***

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{M}_D) = 1 - g + deg(D)$$

  que en virtud de la dualidad de Serre puede expresarse como

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{(1)}_{-D}(X) = 1 - g + deg(D)$$

Tal y como muestran los siguientes corolarios, la desigualdad de Riemann suele ser lo suficientemente ajustada como para no tener que recurrir a la correción de Roch:

Proposición 6.4.2 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g. Para cada punto $a \in X$ existe una función meromorfa $f_a : X \to \mathbb{C}^\infty$ cuyo conjunto de polos se reduce únicamente al punto a. Es más, la función puede tomarse de suerte que*

$$ord(f_a, a) \geq -(g+1)$$

Dem:

Basta observar que el divisor $D = (g+1)a$, a través de la desigualdad de Riemann, da lugar a la siguiente condición

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) \geq 1 - g + g + 1 = 2 > 1$$

y por tanto $\mathcal{M}_D(X)$ contiene funciones no constantes; cualquiera de ellas verifica las condiciones requeridas.

$\square$

Notemos que la existencia de funciones meromorfas no constantes sobre superficies de Riemann compactas **queda garantazida** con la proposición anterior. Esto es, el teorema de Riemann-Roch permite asegurar la existencia de funciones meromorfas no constantes sin necesidad de pasar por el llamado teorema de finitud:

Teorema 6.4.3 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Existen funciones meromorfas $f : X \to \mathbb{C}$ no constantes.*

Dem:

Sea g el género de X y a un punto cualquiera de la superficie. En la proposición anterior se comprobó que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_D(X) \geq 1 - g + g + 1 = 2 > 1$$

con $D = (g+1)a$, existiendo por tanto funciones $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfas no constantes.

□

6.5. Uniformización de superficies de Riemann compactas

Como colofón, estamos en condiciones de probar el teorema de uniformización supuesta la compacidad de la superficie, esto es:

"*Toda superficie de Riemann compacta simplemente conexa queda uniformizada por la esfera*"

Antes de abordar directamente el problema, presentamos otro resultado de uniformización. De profundo significado (permite relacionar cualquier superficie compacta con la esfera de Riemann), es notoria la sencillez de su prueba (habida cuenta de los teoremas anteriores). Así pues, tenemos ante nosotros una nueva evidencia de la importancia del teorema de Riemann-Roch.

Teorema 6.5.1 *Sea X una superficie de Riemann compacta X de género g. Entonces existe un recubrimiento ramificado*

$$f : X \to \mathbb{C}^{\infty}$$

de grado $\partial^o f \leq g+1$. En particular, si X tiene género nulo, entonces X queda uniformizada por la esfera de Riemann $\mathbb{C}^{\infty}$, esto es, X y $\mathbb{C}^{\infty}$ son conformemente equivalentes.

Dem:

Como se ha comentado la prueba es inmediata a partir de los resultados anteriores: fijado un punto $a \in X$, sabemos que existe $f_a : X \to \mathbb{C}$, meromorfa, con un único polo, exactamente en el punto a y orden menor o igual que $g+1$. Extendiendo el rango de la función del plano a la esfera $\mathbb{C}^{\infty}$, la holomorfía viene garantizada por la condición de ser meromorfa, la compacidad de X implica que f es un recubrimiento ramificado y el que tenga grado menor o igual que $g+1$ es consecuencia de que el orden del polo en el punto a es menor o igual que $g+1$.

Si el género de la superficie X es nulo, el recubrimiento ramificado tiene grado positivo y menor o igual que uno, esto es, grado exactamente uno. Obviamente un recubrimiento ramificado es de grado uno si, y sólo si, es una equivalencia conforme.

□

Notemos que del teorema anterior deducimos un importante resultado: **la esfera posee una única estructura analítica**. Sin más dilación, abordamos ya el caso compacto del teorema de uniformización:

Teorema 6.5.2 (Uniformización de superficies de Riemann: caso compacto) *Sea X una superficie de Riemann compacta y simplemente conexa, entonces X es conformemente equivalente a la esfera $\mathbb{C}^\infty$.*

Dem:

Según el teorema anterior basta ver que tiene género 0, pues automáticamente será conformemente equivalente a la esfera. Ahora bien, la simple conexión implica que toda forma holomorfa admite primitiva y por tanto

$$Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = \frac{\Omega(X)}{d\mathcal{O}(X)} = 0$$

La compacidad de X implica además que $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$ y por ende $d\mathcal{O}(X) = 0$, deduciendo que $\Omega(X) = 0$. No hay más que recordar que el género era la dimensión de este último espacio vectorial para concluir que $g = 0$.

□

Capítulo 7

Caso no compacto: el problema de Dirichlet

Si bien la resolución del *problema de Riemann-Roch* permitió probar el teorema de uniformización en el caso compacto, la resolución del llamado *problema de Dirichlet* será la llave que permita probar el teorema de uniformización supuesta la no compacidad. Tal y como se ha venido comentando, las superficies de Riemann no compactas presentan una gran semejanza con los abiertos del plano complejo. En particular, el teorema de uniformización de superficies de Riemann no compactas se convierte en el conocido *teorema de representación conforme* de Riemann para abiertos del plano, esto es, todo abierto simplemente conexo del plano, de complementario no vacío, es conformemente equivalente al disco. El problema de Dirichlet no sólo permite probar el teorema de representación conforme, sino que facilita el salto al contexto de las superficies abstractas, zanjando así el problema de la uniformización.

7.1. El problema de Dirichlet en superficies de Riemann

Las siguientes líneas están destinadas al estudio del problema de Dirichlet en regiones Ω **relativamente compactas** en superficies de Riemann. La compacidad relativa es simplemente una hipótesis destinada a facilitar la teoría; el problema de Dirichlet puede formularse igualmente obviando este hecho. Admitiendo que por $\partial\Omega$ denotamos a la frontera topológica del abierto Ω, el problema se plantea como sigue:

Problema de Dirichlet: si $\Omega \subset X$ es un dominio no trivial y relativamente compacto de la superficie de Riemann X y $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua, ¿existe $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, continua, armónica en Ω y tal que $u|_{\partial\Omega} = f$?

Es decir, ¿f se puede extender con continuidad a una función armónica en la región Ω?

De ahora en adelante, supondremos que trabajamos en una superficie de Riemann X y que $\Omega \subset X$ es un dominio no trivial y relativamente compacto de la superficie.

En lo que a nomenclatura se refiere:

- Es habitual referirse a las funciones $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continuas como *condiciones de contorno* para Ω.
- Si la respuesta al problema de Dirichlet es afirmativa para cualquier condición de contorno, se dice entonces que Ω es un **dominio de Dirichlet**.

Una observación importante es que si una condición de contorno f admite alguna extensión, ésta ha de ser única, es decir, la **solución del problema de Dirichlet, caso de existir, es única**. En efecto, dos de ellas, digamos u y v son funciones armónicas en Ω, luego $u - v$ es una función armónica en Ω y nula en la frontera $\partial\Omega$. La compacidad relativa de Ω y la continuidad de $u - v$ en $\bar{\Omega}$ implican que $u - v$ alcanza sus extremos;el teorema del módulo máximo para funciones armónicas permite concluir, pues en Ω

$$0 \leq u - v \leq 0$$

Un par de observaciones:

- Es conocido que los discos del plano $\mathbb{C}$ son dominios de Dirichlet. En efecto: sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ continua con $\mathbb{S}^1 = \partial D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. La extensión $F : \bar{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ de f definida en cada punto $z = re^{i\theta}$ por

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(e^{it})P(z,t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(e^{it})P(r, t-\theta)dt$$

  siendo $P(z,t) = Re(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z})$ el llamado núcleo de Poisson, es armónica en el disco. Esto es así porque $F(z) = Re(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt)$ y el integrando es una función holomorfa. Más trabajo requiere comprobar la continuidad en todo el disco cerrado. Para un disco arbitrario, se reescalan los datos de manera oportuna comprobando que la *convolución con el núcleo de Poisson* resuelve el problema de Dirichlet. Para comprobar los detalles remitimos al lector al libro de Ash [1] o al de Ivorra [5] o al de Forster [2].

- Siendo el disco un dominio simplemente conexo cabe preguntarse si todo dominio Ω del plano complejo será también un dominio Dirichlet. La respuesta es afirmativa pero esto constituye un problema de dificultad sustancialmente mayor. Yendo más lejos se tiene el siguiente teorema general:

  "*Sea Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$ de suerte que ninguna de las componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty - \Omega$ consta de un único punto, entonces, Ω es un dominio de Dirichlet*"

  De él se deduce, por ejemplo, que las coronas $\{z \in \mathbb{C} | 0 < r < |z-a| < R\}$ para ciertos $0 < r < R$ y $a \in \mathbb{C}$ son dominios de Dirichlet.

Modificaciones de Poissón

Siguiendo esta línea, en lo que a notación se refiere, si X es una superficie de Riemann e Y es un dominio de X, representaremos por $Reg(Y)$ a todos los subdominios relativamente compactos de Dirichlet contenidos en Y. Obviamente, si $[z, U]$ es una carta en Y y el abierto V es tal que $V \subset U$ y $z(V) = D(0, \delta) \subset \mathbb{C}$ para cierto $\delta > 0$, entonces $V \in Reg(Y)$.

Un concepto fundamental es el que sigue:

Definición 7.1.1 (Modificación de Poissón) *Sea Y un dominio con frontera no vacía en una superficie de Riemann X y sea $u : Y \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Para cada $D \in Reg(Y)$, se llama modificicación de Poissón de u en D a la función $P_D U : Y \to \mathbb{R}$ coincidente con u en $Y - D$ y que en D resuelve el propio problema de Dirichlet en D para la condición de contorno*

$$\partial D \to \mathbb{R}$$

$$x \to u(x)$$

De la unicidad del problema de Dirichlet se prueban los siguientes hechos:

Proposición 7.1.2 *Bajo las mismas notaciones e hipótesis anteriores:*

- *El operador P_D es $\mathbb{R}$-lineal: $\lambda P_D u = P_D \lambda u$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P_D(u+v) = P_D u + P_D v$.*
- *El operador P_D es monótono: $u \leq v \to P_D u \leq P_D v$*

7.1.1. Funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas

Recordamos que una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida en una superficie de Riemann X, se dice que es armónica si para cada carta en X, su lectura es una función armónica en el sentido usual, esto es, es de clase $\mathcal{C}^2$ y verifica la llamada ecuación de Laplace:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

La teoría de funciones holomorfas y el cálculo diferencial real son teorías íntimamente ligadas. Uno de los principales nexos lo constituyen las funciones armónicas.

- En el cálculo infinitesimal real se aprende que una buena medida de la curvatura de una función viene dada por la derivada segunda. Las rectas son exactamente las funciones con derivada segunda nula ($f'' = \Delta f = 0$), es decir, sin curvatura. Para una función doblemente derivable, decir que es convexa (curvatura no negativa) es tanto como decir que su derivada segunda es no negativa ($\Delta f \geq 0$). Lo mismo ocurre para la concavidad: si $f \in \mathcal{C}^2$, f es cóncava si, y sólo si $\Delta f \leq 0$.

  Es verdaderamente interesante pensar que las funciones armónicas son una generalización de las rectas (curvatura cero); aquellas cuyo laplaciano es no negativo $\Delta f \geq 0$, las llamadas subarmónicas, generalizan a las funciones convexas (curvatura no negativa) y que las funciones con laplaciano no positivo, $\Delta f \leq 0$, las funciones subarmónicas, generalizan a las cóncavas (curvatura no positiva). Muchas propiedades pueden recordarse de manera muy sencilla a partir de la analogía anterior.

- Las condiciones de Cauchy-Riemann, junto con la fórmula integral de Cauchy, son posiblemente los dos pilares de la teoría de funciones de variable compleja. Recordemos que las condiciones de Cauchy-Riemann podían resumirse en la anulación del operador $\bar{\partial}$, esto es

$$f_x + if_y = 0$$

La curiosa identidad

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)$$

fruto de la clausura algebraica de $\mathbb{C}$ constituye el puente entre la teoría del potencial (estudio de las funciones armónicas) y la teoría de funciones holomorfas. La ortogonalidad que suscitan las condiciones de Cauchy-Riemann $if_x = f_y$, esto es, la *conformidad* $f_x \perp f_y$, se traduce en la anulación del factor $\partial_x + i\partial_y$ de la descomposición anterior del Laplaciano, luego

$$\Delta f = \Delta Re(f) + i\Delta Im(f) = 0$$

Es decir, tanto la parte real como la imaginaria de una función holomorfa son funciones armónicas. Heurísticamente uno puede pensar que al asemejarse las funciones armónicas a rectas, una curvatura nula podría garantizarse con un crecimiento lo más simétrico posible, es decir, $f_x \perp f_y$. Resulta que la anulación de alguno de los factores $(\partial_x - i\partial_y), (\partial_x + i\partial_y)$ es equivalente a la ortogonalidad de las parciales f_x, f_y: bien $if_x = f_y$ (se conserva la orientación) o bien $if_x = -f_y$(se invierte la orientación). Esto es, cualquier aplicación suficientemente diferenciable entre abiertos del plano con derivadas parciales f_x y f_y ortogonales será armónica. Resulta que la información que recogen las condiciones de Cauchy-Riemann se traduce exactamente en que las derivadas han de ser ortogonales y se ha de conservar la orientación (lo que he última instancia implica que las superficies de Riemann sean variedades orientables), luego podríamos pensar que la holomorfía asegura un "crecimiento neutral" y por tanto una "curvatura nula".

Habida cuenta la reflexión anterior, presentamos, de **manera unificada**, los conceptos de funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas en abiertos del plano complejo bajo tres perspectivas distintas:

Definición 7.1.3 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación definida en un abierto U del plano complejo $\mathbb{C}$. Entonces:*

- *Se dice que f es armónica en U si $f \in \mathcal{C}^2$ y $\Delta f = 0$.*
- *Se dice que f es subarmónica en U si $f \in \mathcal{C}^2$ y $\Delta f \geq 0$.*

- *Se dice que f es armónica en U si $f \in \mathcal{C}^2$ y $\Delta f \leq 0$.*

Definición 7.1.4 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación definida en un abierto U del plano complejo $\mathbb{C}$. Entonces:*

- *Se dice que f es armónica en U si para cada $D \in Reg(U)$, $P_D f = f$*
- *Se dice que f es subarmónica en U si para cada $D \in Reg(U)$, $P_D f \geq f$*
- *Se dice que f es superarmónica en U si para cada $D \in Reg(U)$, $P_D f \leq f$*

Definición 7.1.5 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación definida en un abierto U del plano complejo $\mathbb{C}$. Entonces:*

- *Se dice que f es armónica en U si es continua en U y para disco $\bar{D}(a,r) \subset U$, $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$*
- *Se dice que f es armónica en U si es continua en U y para disco $\bar{D}(a,r) \subset U$, $f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$*
- *Se dice que f es armónica en U si es continua en U y para disco $\bar{D}(a,r) \subset U$, $f(a) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$*

Proposición 7.1.6 *Las tres definiciones anteriores son equivalentes.*

Como nuestro próposito queda lejos de un posible estudio exhaustivo de las funciones armónicas, eludimos la prueba de la proposición anterior. El lector interesado puede consultar los textos de Ivorra, bien el de variable real [6], en cuyo caso le aconsejamos que siga el capítulo 12 o bien el de variable compleja [5], remitiéndole al capítulo 9.

Notemos que teniendo en mente la heurística que relaciona la curvatura, rectas y funciones cóncavas y convexas con las funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas, los resultados anteriores **son inmediatos de recordar.** Además, si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, combinando la desigualdad elemental

$$|\int f dz| \leq \int |f| dz$$

con las definiciones anteriores se deduce que $|f|$ es una función subarmónica: el principio de módulo máximo es ahora consecuencia inmediata los resultados anteriores.

7.1.2. Familias de Perrón

El objetivo del principio de Dirichlet es la construcción de una función armónica sujeta a ciertas restricciones de continuidad y de contorno. La heurística de la sección anterior aporta una interesante idea: ya que toda recta se puede obtener a partir del pegado de las funciones convexas que domina, podría esperarse que una función armónica se pudiese obtener a partir de un cierto pegado de cierta clase de funciones subarmónicas que domina. El principio de Perrón es justamente la formalización de esta idea y por tanto una herramienta muy útil para la resolución del principio de Dirichlet.

Centrémonos ya en el contexto de superficies de Riemann. Sea X una superficie de Riemann, los conceptos de función sub y superarmónica se extienden de la manera obvia:

Definición 7.1.7 *Se dice que una aplicación $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es subarmónica (respectivamente superarmónica) si para cada carta en X, la lectura de ϕ es subarmónica (respectivamente superarmónica) en el sentido usual.*

Los siguiente hechos son obvios de las pertinentes definiciones:

Proposición 7.1.8 *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones subarmónicas en la superficie de Riemann X, entonces:*

- *Las aplicaciones $-f$ y $-g$ son superarmónicas en X.*
- *La aplicación $\max\{f, g\}$ es subarmónica en X.*
- *Si λ y μ son reales no negativos entonces $\lambda f + \mu g$ es subarmónica en X.*

Introduzcamos ya el concepto de familia de Perrón:

Definición 7.1.9 (Familia de Perrón) *Sea X una superficie de Riemann. Una familia de Perrón en X es una familia $\mathcal{F}$ de funciones subarmónicas de X en $\mathbb{R}$ de suerte que*

- *Es cerrada para máximos: si $u, v \in \mathcal{F}$ entonces $\max\{u, v\} \in \mathcal{F}$*
- *Es cerrada para modificaciones de Poisson: si $D \in Reg(X)$ y $u \in \mathcal{F}$, entonces $P_D u \in \mathcal{F}$.*

Estrechamente ligado al concepto de familia de Perrón se encuentra el de envolvente superior de Perrón:

Definición 7.1.10 (Envolvente superior de Perrón) *Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{F}$ una familia de Perrón en ella. Se define la envolvente superior de Perrón de la familia $\mathcal{F}$ como la aplicación*

$$u^* : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$x \to \sup_{u \in \mathcal{F}} \{u(x)\}$$

La idea es que la envolvente superior de una familia de Perrón ha de ser una función armónica. Si pensamos en rectas y funciones convexas la idea es bien sencilla: a partir de la toma máximos y de modificaciones de Poisson e ir sustituyendo, se ha de alcanzar una recta, siempre y cuando todas las funciones queden dominadas, caso contrario obtendríamos la función idénticamente igual a ∞. El teorema de Perrón formaliza esta heurística:

Teorema 7.1.11 (Teorema de Perrón) *Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{F}$ una familia de Perrón en ella. Si u^* es su envolvente superior de Perrón, se cumple uno de los siguientes hechos:*

- $u^* = \infty$
- $u^*(x) < \infty$ *para cada* $x \in X$*. Es más,* u^* *es armónica en* X.

Dem:

Nosotros vamos a suponer que la familia $\mathcal{F}$ es acotada, es decir, existe un real positivo M de suerte que $u \leq M$ para cada $u \in \mathcal{F}$. La conclusión será entonces que u^* es armónica. El otro caso no nos interesa. Remitimos al lector interesado a [5], capítulo 9, sección 9.4 para la prueba general. Un último apunte, la prueba que se presenta se apoya *sistemáticamente* en el teorema de Harnack. Si el lector no está familiarizado con la teoría de funciones armónicas, sería conveniente que consultase el apéndice.

Fijemos $a \in X$. Al ser los discos dominios de Dirichlet, existen entornos abiertos y relativamente compactos de a resolubles en el sentido de Dirichlet. Sea, pues, $D \in Reg(X)$ entorno abierto del punto a.

Tomemos una sucesión $(u_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ de suerte que

$$\lim_n u_n(a) = u^*(a)$$

Por hipótesis podemos suponer que la sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ es monótona creciente. Para cada $n \geq 1$ sea $v_n = P_D u_n$. Notemos que se tienen los siguientes hechos:

- La sucesión $(v_n)_{n\geq 1}$ es monótona creciente fruto de la monotonía del operador P_D
- Para cada $n \geq 1$, $v_n \geq u_n$ ya que todas las funciones u_n son subarmónicas.

En virtud del teorema de Harnack, la sucesión $(v_n)_{n\geq 1}$ converge en D hacia una función armónica $v : D \to \mathbb{R}$. Es suficiente ver que u^* coincide con v en el dominio D.

Por una parte es claro que

- $v(a) = u^*(a)$ pues $v_n \geq u_n$ para cada índice n.
- $u^*|_D \geq v$ por ser u^* la envolvente superior de la familia $\mathcal{F}$.

Fijemos $x \in D$ y tomemos una sucesión $(w_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ de suerte que

$$\lim_n w_n(x) = u^*(x)$$

Además, podemos suponer que para cada índice n:

- $v_n \leq w_n$
- $w_n = P_D w_n$
- $w_n \leq w_{n+1}$

De nuevo, el teorema de Harnack (recordemos que todo elemento de la familia $\mathcal{F}$ está uniformemente acotado por una constante fija) garantiza la convergencia de esta sucesión en el dominio D hacia una función armónica $w : D \to \mathbb{R}$ cumpliendo el siguiente par de condiciones:

- $v \leq w \leq u^*$
- $v(a) = w(a) = u^*(a)$

El principio del máximo aplicado a la diferencia $v - w$ en el dominio D implica que para cada punto $z \in D$ se cumple que $v(z) = w(z)$. Es entonces claro que

$$v(x) = w(x) = u^*(x)$$

tal y como queríamos ver.

□

De esta forma, si $\Omega \subset X$ es un dominio (al que no exigimos que sea relativamente compacto) de una superficie de Riemann X y $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, la familia de aplicaciones $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes cuatro condiciones:

- $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$
- u es subarmónica en Ω
- $u|_{\partial\Omega} \leq f$
- $u \leq M_f$ siendo M_f una cota cualquiera para f

es un familia de Perrón en Ω, dominada por M_f. En efecto: si u y v son dos funciones de la familia, su máximo sigue siendo una función armónica en Ω dominada por M_f y cualquier modificación de Poissón $P_D u$, con $D \in Reg(Y)$, es de nuevo una función subarmónica, cuya acotación $P_D u \leq M_f$ viene garantizada por el principio del módulo máximo: $P_D u|_D \leq \text{máx}_{x \in \partial D}\{u(x)\} \leq M_f$. A la familia anterior generalmente se la conoce como la *familia de Perrón asociada a f*.

El teorema de Perrón nos dice entonces que **la envolvente superior** de la familia de Perrón asociada a f, digamos u^*, es una **función armónica** en Ω. Para resolver completamente el problema de Dirichlet resta comprobar una condición de continuidad: para cada $x \in \partial\Omega$ ha de cumplirse que

$$\lim_{y \to x, y \in \Omega} u^*(y) = f(x)$$

Esta condición, dependiente del dominio Ω, **no siempre se satisface**. La forma habitual de abordar este problema es con el estudio tanto de las llamadas *funciones barrera*, como de los *puntos regulares*, conceptos estrechamente ligados:

Definición 7.1.12 (Barrera) *Sea Ω un dominio de una superficie de Riemann X con frontera no vacía. Una barrera en un punto $a \in \partial\Omega$ es un par $[U_a, \beta]$ donde U_a es un entorno abierto de a y $\beta : \bar{\Omega} \cap U_a \to \mathbb{R}$ es una aplicación:*

- *Continua en $\bar{\Omega} \cap U_a$.*
- *Subarmónica en el abierto $\Omega \cap U_a$.*
- $\beta(a) = 0$
- $\beta(x) < 0$ *si* $x \neq a$

Definición 7.1.13 (Punto regular) *Si Ω es un dominio de frontera no vacía en la superficie de Riemann X, se dice que un punto $x \in \partial\Omega$ es regular si admite una barrera en él. Se dice que el dominio Ω es regular si cada punto de $\partial\Omega$ es regular.*

Veamos que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio de frontera no vacía, los puntos $z \in \partial\Omega$ que admiten un disco de tangencia son regulares:

Proposición 7.1.14 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio no trivial de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \partial\Omega$. Si existe un disco $D(a, \delta)$ de suerte que*

- $|z_0 - a| = \delta$
- $\bar{D}(a, \delta) \cap \Omega = \emptyset$

entonces z_0 es regular. En particular si existe $\omega_0 \notin \bar{\Omega}$ de suerte el segmento $[z_0, \omega_0]$ no corte al dominio Ω, esto es, para cada escalar $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda z_0 + (1-\lambda)\omega_0 \notin \Omega$, el punto z_0 es regular.

Dem:

La solución pasa por la estrecha relación entre los logaritmos y las funciones armónicas radiales. Si $\omega_0 = \frac{z_0+a}{2}$, entonces el par $[\beta, D(z_0), \frac{\delta}{2}]$ donde

$$\beta : D(z_0, \frac{\delta}{2}) \cap \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$$

$$z \to \log(\frac{\delta}{2|z - \omega_0|})$$

es una barrera en z_0. En efecto:

- $\beta(z_0) = \log(\frac{\delta}{2|z_0-\omega_0|}) = \log(1) = 0$
- Si $z \neq z_0$ y $|z - z_0| < \frac{\delta}{2}$, entonces $\frac{\delta}{2|z-\omega_0|} < 1$ y por tanto $\beta(z) = \log(\frac{\delta}{2|z-\omega_0|}) < 0$.
- $\Delta\beta = 0$, ya que el logaritmo de cualquier cantidad radial, esto es, que depende únicamente del radio, es una función armónica.
- Obviamente $\beta \in \mathcal{C}(D(z_0, \frac{\delta}{2}) \cap \bar{\Omega} : \mathbb{R})$.

□

Llegamos así al resultado estrella:

Teorema 7.1.15 *Sea Ω un dominio de frontera no vacía en la superficie de Riemann X y sea $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Denotaremos por P_f su familia de Perrón asociada y po u^* a su envolvente superior de Perrón. Entonces, si $a \in \partial\Omega$ es regular, se cumple que*

$$\lim_{x\to a, x\in\Omega} u^*(x) = f(a)$$

Para una prueba detallada puede consultarse el texto de Ivorra de Variable Compleja [5], capítulo 9, sección 9.4 o el propio [2], teorema 22.16.

Como corolario inmediato tenemos los siguientes hechos:

Teorema 7.1.16 *Sea X una superficie de Riemann y Ω un dominio relativamente compacto en X de frontera regular. Entonces Ω es un dominio de Dirichlet. En particular, si $X = \mathbb{C}^\infty$ y toda componente conexa de $\mathbb{C}^\infty - \Omega$ tiene más de un punto, entonces Ω es un dominio de Dirichlet.*

7.1.3. El teorema de Radó

La teoría del potencial es una herramienta extremadamente útil en el contexto de las superficies de Riemann. Puede seguirse [FélixLópez] para comprobar cómo a partir los conceptos estudiados la anterior sección (familias de Perrón, principio de Dirichlet) se deduce la existencia de funciones meromorfas no constantes sobre una superficie de Riemann arbitraria (hecho que nosotros hemos comprobado supuesta la compacidad de la superficie de dos formas distintas: vía el teorema de *de Riemann-Roch* y a través del teorema de finitud de grupos de cohomología). Nosotros utilizaremos la teoría del potencial, en combinación con el llamado **principio de Poincaré-Volterra**, para probar el tan citado **teorema de Radó**, esto es, *toda superficie de Riemann admite una base numerable de abiertos.*

Una de las versiones más generales del principio de Poincaré-Volterra es la que sigue:

Teorema 7.1.17 (Principio de numerabilidad Poincaré-Volterra) *Si X es una variedad diferenciable conexa e Y es un espacio topológico separado T_2 con una base numerable de abiertos, la existencia de una aplicación continua de fibra discreta $f : X \to Y$ implica que X ha de tener también una base numerable de abiertos.*

Para una prueba puede consultarse [2].

Si admitimos el hecho de que sobre una superficie de Riemann arbitraria existen funciones meromorfas no constantes, la metrizabilidad de la esfera $\mathbb{C}^{\infty}$ unida al principio topológico anterior, nos permiten concluir: al ser las funciones holomorfas aplicaciones de fibra discreta, forzosamente la superficie de partida será 2AN. Sin embargo, nosotros daremos otra prueba (que depende fuertemente de la resolución del problema de Dirichlet) no supeditada a la existencia de funciones meromorfas no constantes en superficies de Riemann arbitrarias. Sin más dilación, presentamos ya la prueba:

Teorema 7.1.18 (Teorema de Radó) *Toda superficie de Riemann verifica el segundo axioma de numerabilidad, esto es, posee una base numerable*

Dem:

Sea, pues, X una superficie de Riemann. Sea $[z, U]$ una carta en X y sean D_1 y D_2 subconjuntos compactos de U de suerte que $z(D_1)$ y $z(D_2)$ son dos discos cerrados (compactos) en el plano $\mathbb{C}$. El abierto $\Omega = X - (D_1 \cup D_2)$ tiene por frontera $\partial\Omega = \partial D_1 \cup \partial D_1$, cuya imagen por la carta es trivialmente regular en lo que al problema de Dirichlet se refiere, luego Ω tiene frontera regular en el sentido Dirichlet. Sea, pues, $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ armónica en Ω de suerte que

- $u|_{\partial D_0} = 0$
- $u|_{\partial D_0} = 1$

La 1-forma $\omega = d^{'}u = \frac{\partial u}{\partial z}dz$ es holomorfa al ser u armónica. Sea $\hat{\Omega}$ el recubrimiento universal de Ω y $p : \hat{\Omega} \to \Omega$ la proyección canónica. Por ser $\hat{\Omega}$

simplemente conexo, el pullback de ω por p, digamos $p^*\omega$, admite primitiva holomorfa. Sea $f : \hat{\Omega} \to \mathbb{C}$ una de estas primitivas, que es una aplicación no trivial, ya que u no es trivial (toma dos valores distintos) y por tanto ω también es no trivial.

Ahora bien, el principio de Poincaré-Volterra implica que el recubrimiento universal de Ω es 2AN, ya que $f : \hat{\Omega} \to \mathbb{C}$ es continua y de fibra discreta al ser holomorfa. Por otra parte, si $(U_n)_{n\geq 1}$ es una base numerable para $\hat{\Omega}$, resulta que $(p(U_n))_{n\geq 1}$ es una base numerable para Ω (esto es así porque la proyección canónica p es sobreyectiva, continua y abierta), luego Ω es 2AN.

Para concluir basta notar que el abierto U, dominio de la carta $[z, U]$, también es 2AN, luego $X = \Omega \cup U$ es 2AN, justo lo que queríamos ver.

□

Probada la existencia de bases numerables topológicas en superficies de Riemann, no es difícil justificar la metrizabilidad de estas superficies:

Teorema 7.1.19 *Todo superficie de Riemann es metrizable*

Dem:

Toda superficie de Riemann es localmente compacta, luego es completamente regular. Todo espacio topológico completamente regular se puede sumergir en un producto del intervalo $[0, 1]$ por sí mismo tantas veces como el cardinal de una cualquier de sus bases topológicas, luego toda superficie de Riemann se puede sumergir en un producto numerable del intervalo $[0, 1]$ por sí mismo, que es un espacio topológico metrizable y por ende la superficie en cuestión será también metrizable.

□

7.1.4. Dominios de Runge

Como ya se ha comentado varias veces, las superficies de Riemann no compactas presentan muchas similitudes con los abiertos del plano $\mathbb{C}$. El objetivo de esta sección es mostrar someramente cómo **generalizar**, en cierto sentido, **la sigma-compacidad de los abiertos del plano**. El teorema de Radó nos asegura que las superficies de Riemann son sigma-compactas, esto es, existe una sucesión expansiva de compactos que recubre a la superficie. El propósito de estas líneas es mostrar que se puede refinar tal concepto, comprobando que existen sucesiones expansivas de compactos (o de abiertos relativamente compactos) , cuyos elementos verifican propiedades muy útiles relacionadas tanto con la aproximación por funciones holomorfas como con la resolución del problema de Dirichlet.

Comenzamos introduciendo la siguiente nomenclatura, bastante extendida por cierto:

Definición 7.1.20 (Envolvente de Runge) *Sea X una superficie de Riemann y Ω un subconjunto de X. Se define la envolvente de Runge de Ω y se denota por $h(\Omega)$ a la unión del propio Ω con las componentes conexas de $X-\Omega$ relativamente compactas. En particular, si $\Omega = h(\Omega)$ decimos entonces Ω es un conjunto de Runge o de tipo Runge.*

Observación 7.1.21 *El lector familiarizado con el teorema de aproximación de Runge de la variable compleja entederá el por qué de la nomenclatura. Si bien a nosotros no nos interesa tal teorema, si es interesante una brevejustificación. El concepto de dominio de Runge se introduce en el contexto de las superficies de Riemann en aras de una generalización el citado teorema de aproximación. Resulta que para un abierto de tipo Runge Ω, el espacio de funciones holomorfas definidas sobre él $\mathcal{O}(\Omega)$, presenta buenas propiedades de aproximación por funciones holomorfas en la toda la superficie, especificando más:*

Teorema 7.1.22 (Aproximación por funciones holomorfas, de Runge) *Sea X una superficie de Riemann no compacta y $\Omega \subset X$ un abierto de tipo Runge. Para cada $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, existe una sucesión de funciones holomorfas en X que converge a f uniformemente en todos los subconjuntos compactos de Ω.*

La generalización de la sigma-compacidad que venimos buscamos es la siguiente:

Teorema 7.1.23 *Sea X una superficie de Riemann no compacta. Existe una sucesión creciente $(C_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos de X de suerte que:*

- *C_i es relativamente compacto en C_{i+1} para cada $i \geq 1$*
- *$\bigcup_{n\geq 1} C_n = X$, es decir, recubren X.*
- *Para cada $i \geq 1$, $C_i = h(C_i)$, esto es, cada C_i es de tipo Runge.*

- *Cada C_i tiene frontera regular en lo que al problema de Dirichlet se refiere.*

La prueba es muy laboriosa. Únicamente vamos a dar una guía de los pasos necesarios omitiendo los detalles. El lector interesado puede consultar por ejemplo la excelente referencia que supone [2], capítulo 3, final de la sección 23.

- Para fijar ideas, supongamos que trabajamos en la superficie de Riemann X. Primeramente, si $C_1, C_2 \subset X$, se comprueban los siguientes hechos:
    - Si $C_1 \subset C_2$, entonces $h(C_1) \subset h(C_2)$.
    - $h(h(C)) = h(C)$
    - Si C es cerrado también lo es $h(C)$.
    - Si C es compacto también lo es $h(C)$.
- Posteriormente se comprueba que cada componente conexa de un abierto de tipo Runge es también de tipo Runge.
- Seguidamente, si K_1 y K_2 subconjuntos compactos de la superficie X de suerte que $K_1 \subset \dot{K}_2$ y K_2 es de tipo Runge, entonces existe un abierto $Y \subset X$ verificando los siguientes hechos:
    - Es de tipo Runge.
    - Su frontera es regular en lo que a resolución del problema de Dirichlet se refiere.
    - $K_1 \subset Y \subset K_2$
- Finalmente, el teorema de Radó asegura la existencia de sucesiones expansivas de compactos. Partiendo de una de ellas, con las modificaciones oportunas que permiten los epígrafes anteriores y razonando por inducción se construye la sucesión buscada.

$\square$

Para redondear la sección, enunciamos sin demostración un curioso resultado que posteriormente nos será útil:

Proposición 7.1.24 *Sea X una superficie de Riemann no compacta para la que $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = (0)$. Entonces, para cada dominio $Y \subset X$ de tipo Runge $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y) = (0)$.*

7.2. El teorema de representación conforme

7.2.1. La perspectiva de Riemann

El que todo abierto simplemente conexo del plano $\mathbb{C}$, o si se prefiere de $\mathbb{R}^2$, es homeomorfo al disco unidad no es en absoluto fácil de probar. Menos aún es que ambos sean conformemente equivalentes. Esto es exactamente lo que afirma el teorema de representación conforme de Riemann.

Contenido en su memoria doctoral de 1851, el teorema de representación conforme es, posiblemente, el resultado más brillante. En palabras del propio Riemann:

Riemann siempre se mostró muy interesado en la física matemática. Gran parte de la culpa pudo tenerla el íntimo amigo de su querido mentor Gauss, Wilhem Webber. Aconsejado por su padre, Riemann comenzó su segunda estancia en Gotinga en 1849, coincidiendo con el retorno de Weber a la ciudad. Así pues, aprovecha y comienza a asistir al seminario de física que imparten conjuntamente Weber y Listing. En aquella época, el interés de Riemann por la física le llevó a apartar temporalmente sus intereses en matemática pura para concentrarse en la llamada física matemática. Particularmente atractiva le resultaba la teoría de la electricidad, posiblemente influenciado por Gauss y Weber, ambos refutados expertos. A lo largo de su vida, Riemann siempre tuvo presente una hipótetica teoría de unificación entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria. Años atrás, Laplace había consolidado la utilización de la función potencial como el método adecuado para tratar los problemas de fuerzas gravitatorias: el campo gravitatorio era un campo conservativo y la resolución una ecuación diferencial, la hoy en día conocida como *ecuación de Laplace*, se convertía en un asunto primordial. Notemos cómo se empieza a vislumbrar la conexión con el problema de Diricihlet. Riemann supo entender a la perfección la conexión entre la teoría del potencial y la aún primigenia variable compleja de Cauchy; como ya se ha comentado a lo largo del texto, la sutil factorización

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)$$

tiende un fructífero puente entre ambas disciplinas. La ortogonalidad $if_x = f_y$ de las condiciones de Cauchy-Riemann, esto es, la *conformidad*, trae consigo la anulación del Laplaciano, tal y como le sucede a la función potencial de Laplace. En su memoria de 1851 Riemann reescribió la variable compleja si bien con otro punto de vista: en vez de fijarse en el enfoque algebraico de Cauchy (el otro protagonista junto a Riemann que aparece en el nombre de las llamadas condiciones de *Cauchy-Riemann*), aborda una perspectiva eminentemente geométrica y conceptual (señalemos que muy deudora de esta concepción es la primera noción de superficie de Rieman que el mismo introdujo: levantamientos del plano, como por ejemplo espirales, dentro del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$). Riemann supo valorar la potencia de la conformidad que traía consigo la variable compleja, al igual que ya había hecho su maestro Gauss. Si bien la motivación de Gauss era distinta (en vez de guiado por la física, lo hizo a través de la cartografía), vale la pena recoger las siguientes palabras en las que Gauss evidencia el principal uso de la representación conforme que ofrecía la variable compleja:

(la representación conforme da lugar a) la posibilidad de representar las partes de una superficie dada de tal forma que la representación sea original en sus partes más pequeñas

Como se ha comentado antes, quizás el resultado más importante de entre los que figuran en su memoria doctoral de 1851 sea el teorema de representación conforme, también conocido como el teorema de la aplicación de Riemann.

La prueba que ofrece Riemann no se puede encuadrar dentro de los cánones de rigor actual. Ni tan siquiera en los de la época. Aún así, conviene que nos dentengamos en ella. Simplemente la cantidad de profundas ideas que contiene bastaría como justificación, pero además, su razonamiento ayuda a entenderla filosofía de trabajo de Riemann que antes se ha pretendido esbozar.

Prueba de Riemann

Sea, pues, Ω una región del plano $\mathbb{C}$ que supondremos simplemente conexa. Nos damos ya de bruces con la primera pega: ¿de cuándo data el concepto de simple conexión? ¿qué hipótesis sobre el dominio se asumían en el siglo XIX?

Recordemos que para nosotros un espacio topológico simplemente conexo es un espacio topológico arcoconexo de suerte que cada lazo es homótopo a un punto. Ésta es la definición de Poincaré. El concepto de simple conexión fue introducido precisamente por el Riemann en su memoria de 1851. En sus propias palabras:

"Tenemos pues una distinción entre superficies simplemente conexas, donde cada curva cerrada encierra exactamente una parte de la superficie (...) y entre superficies multiplemente conexas, donde este hecho no tiene lugar."

Destaquemos que al formular la definción anterior (**homológica** por cierto), Riemann tenía únicamente en mente a los subconjuntos del plano $\mathbb{R}^2$. De esta forma, con la frase " *(que) cada curva cerrada encierra exactamente una parte de la superficie*" quería decir que el conjunto que encierra la curva, subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, está totalmente contenido en la superficie. Aclarado este aspecto, es claro que en el contexto adecuado esta idea es exactamente la simple conexión actual.

La idea es definir un campo eléctrico sobre el abierto Ω. La ortogonalidad entre las curvas de nivel y las curvas integrales permitirá trazar una aplicación conforme con llegada en el disco, que será biyectiva habida cuenta la simple conexión.

Asumimos que **somos capaces que colocar una carga eléctrica puntual** (positiva y unitaria) en un punto $z_0 \in \Omega$: esta carga dará lugar a un campo eléctrico sobre Ω de potencial V e intensidad E. Suponemos también que **la frontera de Ω está "enterrada"** (o simplemente aislada de la electricidad: aquí la hipótesis de que Ω sea abierto es fundamental, pues $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$ y por tanto no hay corriente eléctrica en ningún punto de $\partial\Omega$). Formalmente esta condición se traduce en que $V|_{\partial\Omega} = 0$.

Por ejemplo, si $\Omega = D(0,1)$ y $z_0 = 0$ se comprueba que el potencial eléctrico generado por una carga puntual y unitaria es

$$V(z) = \log(\frac{1}{|z|})$$

Observemos que efectivamente $V(z) = 0$ en $\partial\Omega$. A destacar también es que $\Delta \log(\frac{1}{|z|}) = 0$, esto es, V es una función armónica. Este hecho no es una casualidad, sino consecuencia directa de las leyes de Maxwell, en efecto: la incompresibilidad de E se traduce en que

$$div(E) = 0$$

que unido a la condición

$$E = -\nabla V$$

implica que $\Delta V = div(\nabla V) = 0$, es decir, el potencial es armónico en Ω.

Supuesta ya la existencia de un campo eléctrico sobre Ω de potencial V, vamos a definir una aplicación

$$\phi : \Omega \to D(0,1)$$

a partir de las dos observaciones siguientes

- Cada punto $z \in \Omega$ pertenece a una única *línea de potencial*, esto es, una curva de nivel para V:

$$L_c = \{\omega \in \Omega : V(\omega) = c\}$$

- La curva integral asociada a un punto $z \in \Omega$, esto es, la trayectoria $\gamma_z : [0,1] \to \Omega$ que seguiría una partícula a lo largo del campo hasta llegar al punto z_0, comenzando en el propio punto z

$$\dot{\gamma_z}(t) = E(\gamma_z(t))$$

$$\gamma_z(0) = z$$

es ortogonal a la línea de potencial de z. En efecto, la condición $V(z) = c$ implica la ortoganilidad entre ∇V y la dirección tangente de L_c en z, luego $E = -\nabla V$ sigue siendo ortogonal a la dirección tangente de L_c en z.

Sea, pues, $z \in \Omega$ un punto genérico de Ω distinto de z_0. Sea c el potencial en z, i.e., $V(z) = c$ y θ el ángulo orientado de la curva integral de z a tiempo 0 respecto del origen del plano, esto es, el ángulo del vector $\dot{\gamma_z}(0)$ en $\mathbb{R}^2$. Definimos entonces

$$\phi(z) = e^{-c+i\theta}$$

Si $z = z_0$, entonces $\phi(z_0) = 0$.

Las siguientes observaciones son necesarias:

- $|\phi(z)| = e^{-c} < 1$ ya que $c \in (0, \infty)$, luego si $S(r)$ denota a la circunferencia de radio r, entonces

$$\phi(L_c) \subset S(e^{-c})$$

- Resulta que la contención anterior es en verdad una igualdad: es aquí donde **entra en juego la simple conexión** de Ω. Según la definición de conexión simple de Riemann, la curva L_c encierra un recinto R que contiene al punto z_0 y que ha de estar totalmente contenido en la superficie, y por tanto no tiene agujeros. De esta forma, al no haber agujeros en R, cuando $z \in L_c$, los ángulos de las curvas integrales $\theta(z)$ han de tomar todos los valores posibles entre $[0, 2\pi)$, pues en caso contrario el campo eléctrico estaría señalando un agujero en R. Por la misma razón debe tomarles una única vez.

  Es necesario remarcar que en aquella época ni siquiera se tenía una definición firme del conjunto de los números reales (ni mucho menos del de función). De esta forma, el que $\theta(z)$ recorriese *completamente* el intervalo $[0, 2\pi)$ venía garantizado por el famoso principio que Leibnitz recogía en su conocida frase:

  "*Natura non facis saltus*"

  esto es, la naturaleza no da saltos. Este principio también justificaba los siguientes hechos:

  - El escalar c tomaba todos los valores posibles entre $(0, \infty)$, luego cada circunferencia $S(r)$ con $0 < r < 1$ está en biyección con la curva de nivel $-log(r)$. De esta forma, teniendo en cuenta que $\phi(z_0) = 0$ y que

    $$\Omega - \{z_0\} = \bigcup_{c>0} L_c$$

    la aplicación ϕ era **biyectiva.**
  - La aplicación ϕ tendría que ser tan derivable como se quisiera y por tanto es un difeomorfismo entre Ω y $D(0, 1)$.

- Debido a la ortogonalidad del campo E con las líneas equipotenciales, la aplicación ϕ es conforme, es más, respeta la métrica. Puede probarse entonces que ϕ ha de ser forzosamente una aplicación holomorfa:

  Proposición 7.2.1 *Si $(x, y) \to (u, v)$ es un difeomorfismo entre abiertos del plano real Ω y $\mathcal{U}$, entonces el ser orientado y el que conserve salvo factor de proporcionalidad la métrica euclídea es equivalente a que la función $u + iv = f(x + iy)$ sea holomorfa en el abierto Ω*

Dem:

Una implicación es clara, centrémonos en la otra.

Nuestro objetivo es comprobar que si la primera forma fundamental inducida en $\mathcal{U}$,

$$E(x,y)dx^2 + G(x,y)dy^2 + 2F(x,y)dxdy$$

es proporcional a la métrica $dx^2 + dy^2$, entonces u y v verifican las condiciones de Cauchy-Riemann.

Con la notación usual de geometría diferencial, se tiene que

- $\partial_x = (u_x, v_x)$ $\partial_y = (u_y, v_y)$
- $E = u_x^2 + v_x^2$, $G = u_y^2 + v_y^2$ $F = u_x u_y + v_x v_y$
- $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x$

Las condiciones del enunciado se traducen entonces en que

- $E = G \to u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$
- $F = 0 \to u_x u_y = -v_x v_y$
- $u_x v_y - u_y v_x > 0$

Consecuencia del primer epígrafe es que $u_x^2 - u_y^2 = v_y^2 - v_x^2$, y en virtud del segundo apartado, al sumar a ambos miembros $2iu_x u_y$ se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$u_x^2 + (iu_y)^2 + 2iu_x u_y = v_y^2 - v_x^2 - 2iv_x v_y$$

$$(u_x + iu_y)^2 = -(v_x^2 - v_y^2 + 2iv_x v_y) = i^2(v_v + iv_y)^2$$

$$(u_x + iu_y)^2 = (-v_y + iv_x)^2$$

Se llega por tanto a dos posibilidades: bien $u_x + iu_y = -v_y + iv_x$, o bien $u_x + iu_y = v_y - iv_x$. Recordando que se ha de mantener la orientación se deshecha la primera ecuación candidata, concluyendo entonces con que ha de verificarse que:

$$u_x = v_y$$

y

$$u_y = -v_x$$

esto es, se cumplen las ecuaciones de Cauchy- Riemann.

□

Comprobamos así que la aplicación ϕ es biyectiva gracias a la simple conexión y holomorfa por construcción, luego es una equivalencia conforme.

Si bien son notorias las carencias en el rigor, hay un detalle ligeramente sutil que hemos pasado por alto (puede que el lector haya caído en él) cuya importancia es considerable:

¿Qué garantiza que exista una carga puntual sobre Ω que dé lugar a la distribución eléctrica en cuestión?

dicho de otra forma:

¿Qué garantiza la existencia de un potencial V, armónico en Ω (salvo en un punto z_0) y tal que $V|_{\partial\Omega} = 0$?

Esto es el problema de Dirichlet, y de aquí su popularidad en la época. Esquematicemos cómo Riemann resuelve el problema de Dirichlet en Ω:

Toma primero una función $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. La idea es que la función buscada se expreserá como

$$f + \alpha$$

para otra cierta función desconocida $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$. Un comportamiento armónico de $f + \alpha$ debería acarrear que cualquier energía asociada a $f + \alpha$ fuese mínima. Recordando que la energía de una partícula de trayectoria g es proporcional a $||\nabla g||^2$, Riemann buscó $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega ||\nabla(f + \alpha)||^2 dm$$

fuese mínima (mínima energía). Si bien Riemann probó rigurosamente que si con la función α se alcanzaba exactamente el mínimo entonces $f + \alpha$ era armónica (la heurística era correcta), no fue capaz de probar el llamado *principio de Dirichlet*: tal ínfimo se alcanzaba. En verdad el principio de Dirichlet era más general. Informalmente podría decirse que aseguraba el hecho de que el inferior de integrales que involucraban una derivada se alcanzaba al variar las funciones en una determinada familia (señalemos que en aquella época aún no se tenía un concepto claro de inferior y superior, generando bastante confusiones). En el caso que nos ocupa, el principio es válido habida cuenta la completitud del espacio $\mathcal{E}$ tal y como probó Hilbert en [**Hilb1900**]. El principio de Dirichlet recibió innumerables critícas, especialmente de Weierstrass, quien a parte de demostrar que toda función continua sobre un intervalo compacto alcanza sus extremos, propuso el siguiente contraejemplo al principio general:

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones de tipo $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $[-1, 1]$, tomando valores distintos a y b en -1 y 1 respectivamente. Definimos la aplicación $J : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$$J(f) = \int_{-1}^{1} x^2 (\frac{df}{dx})^2 dx$$

Se comprueba que la familia

$$f_\varepsilon(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a) arctan(\frac{x}{\varepsilon})}{2 arctan(\frac{1}{\varepsilon})}$$

con $\varepsilon > 0$ verifica que $J(f_\varepsilon) \to 0$ si $\varepsilon \to 0$, luego el inferior de J en $\mathcal{F}$ es 0, que no puede alcanzarse ya que entonces $x\frac{df}{dx} = 0$ para cada x, luego, por la continuidad de la derivada, f sería una recta constante, en contra de que $a \neq b$.

7.2.2. Pruebas modernas del teorema de representación

Si bien la veracidad de la prueba de Riemann era muy cuestionada, la validez del teorema fue siempre mayoritariamente aceptada. La búsqueda de una demostración rigurosa proporcionó métodos que a lo postre servirían para abordar exitósamente el teorema de uniformización general. Vale la pena que nos detengamos en ello.

La primera prueba rigurosa suele atribuirse al americano William Fogg Osgood. En su artículo de 1900 *"On the existence of the Grenn's function for the most general simply connected plan region"* [OsgW1900], no sólo prueba el teorema de representación conforme sino que es capaz de abordar un resultado más general, obteniendo el teorema de Riemann como un corolario sencillo. Poincare se servirá de estas ideas para probar en 1907 el teorema de uniformización.

Después del trabajo de Osgood, encontramos por una parte la prueba del griego Constantin Carathéodory, publicada en su artículo de 1912 [Car1912], y por otra la de los húngaros Lipót Fejér(1880-1959) y Frigyes Riesz(1880-1956), fechada en 1922. Esta última tiene una importancia especial por ser sustancialmente más corta y sencilla que sus predecesoras. En ella dos aspectos destacan especialmente. Por una parte, su línea de razonamiento se nutre de las técnicas del joven análisis funcional: claves son las propiedades topológicas del espacio de funciones $\mathcal{O}(\Omega)$. Por otra, la aplicación conforme buscada se obtiene como solución a un **problema variacional**, al igual que hizo Riemann en su tesis doctoral.

La prueba que se presenta a continuación es un refinamiento de la de Fejér y Riesz a manos de Ostrowski y Carathéodory.

Prueba de Féjer-Riesz:

- Veamos primero que existe una función holomorfa inyectiva de Ω en el disco.

  Sea $a \in \mathbb{C} - \Omega$; la translación de $z \to z - a$ definida en Ω no se anula, esto es, es una unidad del anillo $\mathcal{O}(\Omega)$, luego en virtud de la simple conexión de Ω admite un logaritmo analítico y por tanto una raíz cuadrada analítica, digamos h. Se tiene por tanto que para $z \in \Omega$, existe $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ de suerte que

  $$h^2(z) = z - a$$

  Es inmediato comprobar que la función h es inyectiva ($h(w) = h(z) \to h^2(z) = h^2(w) \to w = z$), que no toma el valor cero ($h^2(z) = 0 \to z = a \in \mathbb{C} - \Omega$) y que los conjuntos $h(\Omega)$ y $-h(\Omega)$ son disjuntos. De esta forma, fijado un $b \in -h(\Omega)$, por ser el conjunto abierto, existirá un disco centrado en b y de radio positivo contenido en $-h(\Omega)$ y por ende, estará contenido en el complementario de $h(\Omega)$. De esta forma la función holomorfa $z \to \frac{1}{h(z)-w}$ definida en Ω está acotada y es inyectiva. Escalando oportunamente se tiene una función holomorfa inyectiva de Ω en el disco unidad, digamos ϕ.

- Fijemos un punto α del dominio Ω. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones f holomorfas definidas en Ω, inyectivas y de suerte que su derivada en el punto α sea en módulo no menor que la de ϕ, esto es:

$$|f^{'}(\alpha)| \geq |\phi^{'}(\alpha)| > 0$$

  La familia $\mathcal{F}$ es trivialmente acotada y no vacía, y en virtud del teorema de Hurwitz (esto es, el límite casi uniforme de funciones holomorfas inyectivas bien es inyectivo o bien es constante) es cerrada, luego compacta (recordemos que el *teorema de Montel* afirma que el espacio de *Fréchet* de funciones holomorfas definidas sobre un abierto del plano es de *Heine-Borel*, esto es, la compacidad es equivalente a la acotación y al hecho de ser cerrado).

  El teorema de Weierstrass asegura que la aplicación $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tal que $f \to |f^{'}(\alpha)|$ es continua, luego alcanza sus extremos debido a la compacidad del dominio. Sea g un elemento de la familia sobre la que se alcanza el máximo. Veamos que g es una apliacación buscada, para ello solo baste ver que es sobreyectiva. Teniendo en cuenta el significado de la derivada que aporta la teoria de la medida, el razonamiento es claro: hemos cogido aquella cuyo crecimiento "a partir" de un punto fijo, α, es máximo. Parece lógico por tanto esperar que sea sobreyectiva.

- Consideremos, para cada complejo η situado en el disco unidad, la aplicación

$$\varphi_\eta : D \to D$$

$$z \to \frac{z-\eta}{1-\bar{\eta}z}$$

  Es conocido que la aplicación anterior es un automorfismo del disco (véase por ejemplo la proposición [8.1.2] del capítulo siguiente).

Supongamos que g no es sobreyectiva. Tomemos un punto a del disco unidad D que no sea alcanzado por g. Vamos a utilizar la familia de automorfismos anteriores para construir un elemento de la familia $\mathcal{F}$ con derivada en el punto α superior en módulo a la de g.

- La aplicación $\varphi_a \circ g : D \to D$ no se anula y por ende admite una raíz cuadrada analítica, digamos $l : D \to D$, que será inyectiva al serlo $\varphi_a \circ g$.
- Sean $b = l(\alpha)$ y $f = \varphi_b \circ l : \Omega \to D$, aplicación inyectiva y holomorfa del dominio Ω en el disco. Veamos que es un elemento de la familia $\mathcal{F}$ con derivada en α superior en módulo a la de g, llegando así a una contradicción. Busquemos su derivada a partir de la regla de la cadena:

$$g = \varphi_{-a} \circ l^2 = \varphi_{-a} \circ (\varphi_{-b} \circ f)^2 = \varphi_{-a} \circ (\varphi_{-b}^2 \circ f) = (\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2) \circ f$$

y por tanto

$$g^{'}(\alpha) = (\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)^{'}(0) \circ f^{'}(\alpha)$$

Un conocido teorema de variable compleja, el lema de Schwarz-Pick (véase por ejemplo [1], capítulo 4, teorema 4.6.3) aplicado a la función holomorfa $\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2 : D \to D$ da lugar a la desigualdad

$$|(\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)^{'}(0)| < 1 - |(\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)(0)|^2$$

De todo lo anterior es ahora evidente que

$$|g^{'}(\alpha)| < (1 - |(\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)(0)|^2)|f^{'}(\alpha)|$$

de donde deducimos simultáneamente que $f \in \mathcal{F}$ y que f tiene una derivada en el punto α en módulo mayor que la de g. Concluimos entonces que g ha de ser sobreyectiva y por ende es una equivalencia conforme.

□

Señalemos que un año después de publicar una prueba satisfactoria del teorema, el griego Carathéodory presenta el siguiente resultado (del cual omitimos la prueba) que complementa a la perfección al teorema de representación:

Teorema 7.2.2 (de Carathéodory, 1913) *Sea Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to D(0,1)$ una equivalencia conforme. Si la frontera de Ω es una curva de Jordan, la equivalencia conforme f se extiende con continuidad a la frontera $\partial\Omega$. Es más, es un homemorfismo entre $\partial\Omega$ y $\mathbb{S}^1$.*

Pequeño teorema de Uniformización

Emulando la pretensión más general de Osgood, presentamos a continuación un resultado (distinto del de Osgood) mucho más rico que el teorema de representación conforme. Al igual que hizo Poincaré con el teorema de Osgood, le utilizaremos para dar el salto oportuno hacia el teorema de uniformización general. Remarquemos que este teorema no es tan diferente al de Osgood, que como se indicó puede consultarse en [OsgW1900]. La clave del trabajo de Osgood son las llamadas funciones y mayorantes de Green. En el teorema que nosotros presentamos, si bien no se hace mención explícita al concepto de función de Green, este concepto desempeña el papel fundamental.

Teorema 7.2.3 (Pequeño teorema de uniformización) *Sea X una superficie de Riemann no compacta y Ω un abierto relativamente compacto contenido en ella. Si suponemos que $Rh^1_{\mathcal{O}}(\Omega) = 0$ y que la frontera $\partial\Omega$ es regular en lo que al problema de Dirichlet se refiere entonces Ω es conformemente equivalente al disco unidad.*

Para su prueba utilizaremos una de las generalizaciones al caso de superficies de Riemann de los teoremas de interpolación de Mittag-Leffler: el llamado teorema de interpolación de Weierstrass en superficies de Riemann. Este teorema está encauzado en la misma línea que el conocido teorema de factorización de Weierstrass de funciones enteras. Enunciado en lenguaje de divisores se plantea como sigue:

Teorema 7.2.4 (Teorema de interpolación de Weierstrass) *Sea X una superficie de Riemann no compacta y D un divisor en ella. Existe una función f meromorfa de suerte que*

$$D = (f)$$

Omitiremos su prueba. El lector interesado puede consultar [2], capítulo 3, teorema 26.5.

Probemos ahora el pequeño teorema de uniformización:

Tomemos un punto $a \in Y$ (esto es, seleccionamos un punto donde colocar una carga eléctrica). El teorema de interpolación de Weierstrass afirma que existe una función holomorfa en X, que presenta un cero de primer orden en el punto a y que no se anula en ningún otro punto. Esta función desempeñará el papel de *función de Green* y por ello la denotaremos por la letra g.

Al no anularse g en $X - \{a\}$, la función $z \to \log |g(z)|$ está bien definida en $X - \{a\}$ y además es continua (buscamos que la carga sea unitaria seleccionando el comportamiento del potencial: logarítmico). Tomémosla como una condición de contorno para el problema de Dirichlet sobre el dominio Y. Sea $u : \bar{Y} \to \mathbb{R}$ tal solución, esto es, u es una función continua en su dominio de definición, armónica en Y y de suerte que

$$u(z) = \log |g(z)|$$

para cada $z \in \partial Y$ (dicho de otra forma, hemos encontrado la función potencial).

Al ser u armónica en Y, será la parte real de una función holomorfa, a la que llamaremos ρ. Comprobemos que, al igual que hacíamos en la prueba de Riemann, la aplicación

$$f : Y \to \mathbb{C}$$

$$z \to e^{-\rho} g$$

dar lugar a una equivalencia conforme entre el dominio Y y el disco unidad $D \subset \mathbb{C}$.

- Primeramente, es claro que f es holomorfa en Y al serlo ρ y g.

- Veamos que $f(Y) \subset D$. En efecto: si $z \in Y$ y $z \neq a$ entonces

$$|f(z)| = |e^{-h(z)}||g(z)| = e^{|\log(g(z))-u(z)}$$

Vemos que la función $|f|$, definida en principio sólo sobre Y, puede prolongarse a la adherencia $\bar{Y}$ con continuidad sin más que dar el valor 1 en todos los puntos de ∂Y. Llamemos F a esta prolongación. El principio del máximo afirma entonces que $|f(z)| < 1$ en Y tal y como queríamos ver.

- La aplicación $f : Y \to D$ es propia. Para ello basta ver que la contraimagen de cada disco cerrado $\bar{D}(r)$ (para $r \in (0,1)$), digamos Y_r, es un compacto en Y. Acudiendo a la prolongación del módulo anteriormente construida, la función $F : \bar{Y} \to \mathbb{R}$, es obvio que $Y_r = F^{-1}[0,r]$, luego Y_r es un cerrado en el compacto $\bar{Y}$ y por ende es un compacto en Y.

- Por ser propia es sobreyectiva. Como toma el valor cero una única vez, su grado es 1 y por tanto también es inyectiva.

Comprobamos así que la aplicación f es una equivalencia conforme entre Y y el disco unidad.

Un comentario final: nótese que esta prueba puede verse como una adaptación rigurosa de la heurística de Riemann.

□

7.3. Uniformización de superficies de Riemann no compactas

El propósito de esta sección es probar el teorema de uniformización supuesta la no compacidad. En el desarrollo de la prueba nos apoyaremos en el siguiente resultado técnico, interesante por si solo:

Lema 7.3.1 *Sea $R \in (0, \infty]$ y sea Y un dominio propio contenido en el disco centrado en el origen y de radio R, digamos $D(R) \subset \mathbb{C}$ (si $R = \infty$ convenimos que $D(R) = \mathbb{C}$). Si el dominio Y contiene al origen y es simplemente conexo, entonces existen un radio $0 < r < R$ y una aplicación holomorfa $f : Y \to D(r)$ de suerte que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.*

Dem:

- Supongamos primeramente que R es finito y por tanto no hay inconveniente en asumir que $R = 1$. Como es habitual, D denotará al disco unidad. Al ser $Y \subset D$ un subconjunto propio, existirá un punto $a \in D - Y$. El lector familizarizado con los autormorfismos del disco encontrará familiar el argumento que sigue a estas líneas. Consideremos el automorfismo del disco

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

Obviamente $\varphi_a(a) = 0$, luego $0 \notin \varphi_a(Y)$, esto es, φ_a es una unidad en el anillo $\mathcal{O}(Y)$. Por ser Y simplemente conexo φ_a admite una raíz cuadrada analítica en Y, digamos g. Obviamente $g(Y) \subset D$. Si $b = g(0)$, recurrimos al autormorfismo

$$\varphi_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

La composición $F = \varphi_b \circ g : Y \to D$ envía el origen al origen y en virtud de la regla de la cadena se comprueba que

$$F^{'}(0) = \varphi_b^{'}(b)g^{'}(0) = \varphi_b^{'}(b)\frac{\varphi_a^{'}(0)}{2g(0)} = \frac{1 + |b|^2}{2b} = \gamma$$

y por ende, γ es en módulo mayor que 1. Es entonces claro que si tomamos $r = \frac{1}{|\gamma|}$ y $f = F/\gamma : Y \to D(r)$ hemos acabado.

- Para el caso $R = \infty$ el razonamiento anterior es válido modificando únicamente los pertinentes autormorfismos. Si para cada complejo ω se considera el automorfismo del plano $\varphi_\omega(z) = z - \omega$, el calco de la prueba anterior permite probar el caso que consideramos.

$\square$

Sin más dilación abordamos ya el problema de la uniformización de superficies de Riemann no compactas.

Sea, pues, X una superficie de Riemann no compacta. Sabemos que existe una sucesión $(Y_n)_{n\geq 0}$ de dominios de tipo Runge contenidos en X de suerte que:

- Su frontera es regular en lo que a resolución del problema de Dirichlet se refiere
- Forman una sucesión encajada $Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots Y_n \ldots$ creciente hacia X y cada uno de ellos es relativamente compacto en el siguiente.

Notemos además que para cada $n \geq 0$ $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y_n) = 0$ ya que $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$.

En virtud del pequeño teorema de uniformización (**teorema [7.2.3]**), cada Y_n es conformemente equivalente al disco unidad D. Fijemos un punto $a \in Y_0$ y tomemos una carta centrada en a, digamos $[U, z]$. Podemos encontrar entonces una sucesión de números reales positivos $(r_n)_{n\geq 1}$ y otra de aplicaciones

$$f_n : Y_n \to D(r_n)$$

de suerte que

- Cada f_n es una equivalencia conforme
- $f_n(a) = 0$
- $\frac{df_n}{dz}(a) = 1 > 0$

En base a las estimaciones de Cauchy para las derivadas, no es difícil comprobar que la sucesión de radios r_n ha de ser monótona creciente. En efecto, la aplicación

$$g_n = f_{n+1} \circ f_n^{-1} : D(r_n) \to D(r_{n+1})$$

es holomorfa y su derivada en cero vale uno: $g_n^{'}(0) = 1$. Las desigualdades de Cauchy afirman entonces que $g_n^{'}(0) = 1 \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}$ obteniendo así la relación buscada.

Sea $R = sup_n\{r_n\}$. Denotaremos por $D(R)$ al disco del plano $\mathbb{C}$ centrado en 0 y con radio R supuesta la finitud de R, en cambio, si $R = \infty$ entonces convenimos que $D(R) = \mathbb{C}$. Veamos que a partir de la sucesión

f_n obtendremos una equivalencia conforme entre X y $D(R)$.

La clave es el siguiente razonamiento:

La aplicación

$$D \to Y_0$$

$$z \to f_0^{-1}(zr_0)$$

nos da una equivalencia conforme entre el disco D y el dominio Y_0. A partir de ella consideramos la sucesión de aplicaciones holomorfas

$$g_n^{(1)}(z) : D \to \mathbb{C}$$
$$z \to \frac{1}{r_0} f_n \circ f_0^{-1}(zr_0)$$

Todas ellas son funciones *schlicht*, esto es, aplicaciones holomorfas del disco en el plano, inyectivas, que envían al cero en el cero y cuya primera derivada en el origen vale 1. Al ser el conjunto de aplicaciones schlicht un **compacto** en el espacio de funciones holomorfas $\mathcal{O}(D : \mathbb{C})$ (esto es muy sencillo habida cuenta del teorema de convergencia de Hurwitz: el límite casi uniforme de funciones inyectivas o es inyectivo o constante), la sucesión anterior tendrá un punto límite, y por tanto existirá una subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$, digamos $(f_{n_k})_{k\geq 1}$, que convergirá uniformemente en los compactos de Y_0. Si ahora nos fijamos en la aplicación

$$D \to Y_1$$

$$z \to f_1^{-1}(zr_1)$$

equivalencia conforme entre Y_1 y el disco unidad, podemos considerar la sucesión de funciones

$$g_k^{(2)}(z) : D \to \mathbb{C}$$
$$z \to \frac{1}{r_1} f_{n_k} \circ f_1^{-1}(zr_1)$$

para obtener una subsucesión de la familia $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ que convergirá uniformemente en los compactos de Y_1. Repitiendo el proceso y en virtud del argumento diagonal de Cantor, obtendremos una sucesión $(h_n)_{n\geq 1}$ de funciones holomorfas en X (recordemos que $X = \bigcup_n Y_n$) que converge uniformemente en los compactos de cada Y_m. El teorema de Weierstrass nos dice entonces que hemos construido así una aplicación holomorfa $f : X \to \mathbb{C}$ (el límite de la sucesión anterior).

Veamos que f es una equivalencia conforme entre X y $D(R)$.

Por construcción se tienen los siguientes hechos

- f es inyectiva
- $f(0) = 0$
- $\frac{df}{dz}(a) = 1$
- $f(X) \subset D(R)$

Veamos que es suprayectiva y habremos acabado. En caso contrario, por el lema **[7.3.1]** , existiría un radio positivo $\delta < R$ y una aplicación holomorfa $F : f(X) \to D(\delta)$ de suerte que $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$. Como R es el límite de la sucesión r_n y $\delta < R$, existirá un radio r_m mayor estrictamente que δ. La aplicación

$$F \circ f \circ f_m^{-1} : D(r_m) \to D(\delta)$$

envía el origen en el origen y su derivada en cero es exactamente 1. La estimación Cauchy para la primera derivada (justo el mismo razonamiento que al principio de la prueba) afirma entonces que

$$1 \leq \frac{\delta}{r_m}$$

en contra de lo supuesto.

Concluimos entonces que $f : X \to D(R)$ es una biyección holomorfa. Si $R = \infty$ entonces X es conformemente equivalente al plano. Caso contrario, X es conformemente equivalente al disco $D(R)$ y por ende al disco unidad D.

□

En resumidas cuentas, hemos probado el teorema que buscábamos:

Teorema 7.3.2 (Uniformización, caso no compacto) *Toda superficie de Riemann no compacta y simplemente conexa o es conformemente equivalente al plano* $\mathbb{C}$ *o lo es al disco* $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Capítulo 8

Uniformización global y Notas históricas

8.1. Uniformización global de superficies de Riemann

Habida cuenta el teorema de uniformización, toda superficie de Riemann X es isomorfa a un cociente bien del plano $\mathbb{C}$, bien de la esfera de Riemann $\mathbb{C}^\infty$ o bien del disco unidad $D = D(0,1) \subset \mathbb{C}$. Esto es así porque su recubridor universal, al que denotábamos por $\hat{X}$, es una superficie de Riemann simplemente conexa. Por tanto, recordando el teorema [**3.2.8**], existe una equivalencia conforme

$$\hat{X}/Aut(\hat{X}, X) \to X$$

siendo $Aut(\hat{X}, X)$ el grupo de equivalencias holomorfas del recubrimiento, esto es, las transformaciones conformes que respetaban las fibras de la proyección canónica $p : \hat{X} \to X$. Este observación, sumamente trivial a partir de los resultados que disponemos, es excepcionalmente importante. Es por ello que la recogemos en el siguiente teorema:

Teorema 8.1.1 *Toda superficie de Riemann es conformemente equivalente o un cociente del plano $\mathbb{C}$, o a un cociente de la esfera de Riemann $\mathbb{C}^\infty$ o a un cociente del disco unidad D.*

Las siguientes líneas están destinadas a refinar el anterior teorema en el siguiente sentido: el grupo de equivalencias holomorfas del recubrimiento $(\hat{X}, p, X)$, $Aut(\hat{X}, X)$, es un subgrupo del grupo de automorfismos de $\hat{X}$. Pero no es un subgrupo cualquiera: actúa sin puntos fijos y de manera discreta. Si conseguimos caracterizar los grupos de automorfismos de la esfera, del plano y del disco para posteriormente fijarnos en aquellos de órbita discreta y que actúen sin puntos fijos, habremos reducido, a priori, la gama de posibles cocientes $\hat{X}/G$. De esta forma habremos reducido los posibles tipos de superficies de Riemann.

Comencemos recordando cuáles son los grupos de automorfismos de las tres superficies simplemente conexas "canónicas":

Proposición 8.1.2 *Se cumplen los siguientes hechos:*

- $Aut(\mathbb{C}^\infty) = PLG_2(\mathbb{C}) = PSL_2(\mathbb{C})$
- $Aut(\mathbb{C}) = \{\tau_a(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$
- $Aut(D) = \{\lambda\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ |a| < 1, |\lambda| = 1\}$
- *El disco unidad D es conformemente equivalente al semiplano de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}|\ Im(z) > 0\}$. Además $Aut(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$*

Dem:

- $Aut(\mathbb{C})$: Sea f un automorfismo del plano. Por hipótesis f es una función entera. La singularidad aislada que presenta en el punto del infinito no puede ser evitable pues f sería acotada. Al ser la aplicación abierta, tampoco puede ser una singularidad esencial, luego forzosamente es un polo. Al presentar f un polo en el infinito, su desarrollo de Taylor en torno al origen consta sólo de una cantidad finita de sumandos no nulos, luego f es un polinomio. El carácter biyectivo fuerza que el grado de tal polinomio sea exactamente uno, tal y como queríamos ver.
- $Aut(\mathbb{C}^\infty)$: Todo automorfismo de la esfera ha de ser una función meromorfa de la esfera y por ende racional. Por ser automorfismo, presenta únicamente un polo. Puede ocurrir que tal polo esté en el infinito; entonces, al restringir la aplicación al plano $\mathbb{C}$ obtenemos un automorfismo del plano, y por ende el automorfismo sería exactamente un polinomiode grado uno. Por contra, supongamos

que el polo está situado en un punto distinto del infinito y que el automorfismo f es el cociente de los polinomios coprimos $\frac{p}{q}$. Por hipótesis p y q han de tener el mismo grado (el valor en el infinito es finito) y q únicamente tiene una raíz, luego p y q son dos polinomios de grado exactamente 1. La condición de coprimalidad entre p y q se traduce en el carácter proyectivo (permitir las simplificaciones) del grupo $PGL_2(\mathbb{C})$. Es inmediato comprobar que este grupo coincide con $PSL_2(\mathbb{C})$.

- El argumento clásico para calcular los automorfismos del disco es acudir al lema de Schwarz. No entraremos en detalles ya que es un hecho muy conocido y púramente técnico. El lector interesado puede consultar el libro de Ash [**1**].

Para comprobar la equivalencia conforme entre el disco unidad D y el semiplano $\mathbb{H}$ basta considerar las homografías

$$z \to e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$$

siendo θ cualquier número real y α cualquier complejo con parte imaginaria positiva. Es inmediato comprobar que llevan el eje real en la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y que biyectan el semiplano $\mathbb{H}$ con el disco D. De esta forma, se tiene una identificación entre ambas superficies de Riemann permitiendo calcular los automorfismos de la una en función de los de la otra. Rutinario es comprobar que los autormorfismos del plano se identifican con el grupo $PSL_2(\mathbb{R})$.

□

Precisemos ahora los conceptos de órbita discreta y actuación de un grupo sin puntos fijos:

Definición 8.1.3 *Si X es una superficie de Riemann, se dice que un grupo G actúa sin puntos fijos y de manera discreta en X si:*

1. *Si $g \in G$ no es el elemento neutro del grupo, entonces $g(x) \neq x$ para cada $x \in X$*
2. *Cada $x \in X$ tiene órbita discreta.*

Ya hemos comprobado que la órbita de un elemento $x \in \hat{X}$ bajo la acción de $\hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$ es exactamente el conjunto $p^{-1}(p(x))$, que por ser holomorfa p tiene fibra discreta, luego si $G = \hat{X}/Aut(\hat{X}, X)$ se verifica la segunda condición de la definición anterior. La primera condición es consecuencia directa de que cada equivalencia holomorfa queda determinada por la imagen de un punto.

El siguiente resultado técnico nos será de gran utilidad:

Proposición 8.1.4 *Sea G un subgrupo del grupo de automorfismos del plano $\mathbb{C}$ que actúa sin puntos fijos y con órbita discreta. Entonces se cumple uno de los siguientes apartados:*

- $G = \{id\}$
- *Existe un número complejo α no nulo de suerte que G es exactamente el conjunto de translaciones $z \to z + n\alpha$ con $n \in \mathbb{Z}$ y por tanto*

$$G \cong \mathbb{Z}$$

- *Existen números complejos α, β no nulos de suerte que G está formado exactamente por todas las translaciones "dobles" $z \to z + n\alpha + m\beta$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ y por tanto*

$$G \cong \mathbb{Z}^2$$

Dem:

Sea Γ la órbita del origen por la acción de G. Por hipótesis Γ es un subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$ discreto. Recordando el siguiente hecho conocido el resultado es trivial:

Todo subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$ discreto o bien es el grupo trivial, o es el grupo libre generado por un complejo no nulo (y por tanto es isomorfo a $\mathbb{Z}$) o el es grupo libre generado por dos complejos no nulos y $\mathbb{R}$-linealmente independientes (y es por tanto es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$).

Para una prueba remitimos al lector al texto de Singerman **[3]**, capítulo tercero. Sin más que recordar que $Aut(\mathbb{C})$ son los polinomios de grado exactamente 1, la condición anterior sobre la órbita del origen Γ, permite alcanzar la clasificación anterior.

□

Es muy frecuente la siguiente clasificación para superficies de Riemann atendiendo a la clase de isomorfía de su recubridor universal:

Definición 8.1.5 *Se dice que una superficie de Riemann es de tipo*

- ***parabólico*** *si su recubridor universal es conformemente equivalente al plano $\mathbb{C}$.*
- ***hiperbólico*** *si su recubridor universal es conformemente equivalente al disco D.*
- ***elíptico*** *si su recubridor universal es conformemente equivalente a la esfera $\mathbb{C}^\infty$.*

Obviamente, en virtud del teorema de uniformización, toda superficie de Riemann pertenece a alguna de las clases anteriores.

Con las ideas anteriores en mente, llegamos al último teorema del texto. El resultado es, cuanto menos, sorprendente. La idea es afinar la clasificación anterior delimitando, en la medida de lo posible, los distintos tipos de superficies de Riemann

Teorema 8.1.6 (Clasificación de superficies de Riemann) *Se cumplen los siguientes hechos:*

- *La única superficie de Riemann elíptica que existe salvo isomorfía es la esfera de Riemann.*
- *Las únicas superficies de Riemann parabólicas que existen, salvo isomorfía, son el plano $\mathbb{C}$, el plano ajugereado $\mathbb{C}^*$ y cualquier toro (recordemos que todo toro es de la forma $\mathbb{C}/\Lambda$ siendo Λ un retículo dos dimensional sobre el plano complejo.)*

Por tanto, cualquier superficie de Riemann que no sea conformemente equivalente o a la esfera, o al plano, o al plano agujerado o a un toro, ha de ser de tipo hiperbólico.

Dem:

Apoyándonos en todos los resultados de los capítulos precedentes, la prueba de este importante teorema resulta ser tan trivial como elegante.

- Sea X una superficie de Riemann elíptica. Sabemos que X se identifica con un cociente de la esfera bajo la acción de un subgrupo de órbita discreta y sin puntos fijos de $Aut(\mathbb{C}^\infty) = PSL_2(\mathbb{C})$. Ahora bien, toda homografía tiene puntos fijos: el único subgrupo posible entonces ha de ser el grupo trivial. Por ende el cociente es también trivial, esto es, X es conformemente equivalente a su recubridor universal, la esfera, tal y como queríamos ver.
- Sea X una superficie de Riemann parabólica. Como antes, X se identifica con un cociente del plano bajo la acción de un subgrupo G de $Aut(\mathbb{C})$ con órbita discreta y sin puntos fijos Sabemos entonces que se cumple una de las siguientes posibilidades
  - G es el grupo trivial
  - Existe un número complejo α no nulo de suerte que G es exactamente el conjunto de translaciones $z \to z + n\alpha$ con $n \in \mathbb{Z}$
  - Existen números complejos α, β no nulos de suerte que G está formado exactamente por todas las translaciones "dobles" $z \to z + n\alpha + m\beta$ con $n, m \in \mathbb{Z}$

  Cada una de las posibilidades anteriores da lugar, respectivamente, bien al propio, bien al plano agujereado o bien al toro $\mathbb{C}/\Lambda$ donde $\Lambda =< \alpha, \beta >_{\mathbb{Z}}$, tal y como queríamos ver.

□

8.2. Notas históricas

La primera prueba rigurosa del teorema de uniformización de superficies de Riemann se debe al francés Jules Henri Poincaré (1854-1912) y data de 1907. La autoría y fecha de su primera formulación es otra historia. El que toda superficie de Riemann fuera un cociente o del disco o del plano o de la esfera resultaba impensable para casi toda la comunidad matemática de la época. Si bien es cierto que de nuevo, parte del mérito que acarrea la formulación del problema corre a cargo de Poincaré, no se debe olvidar al otro hombre clave de la historia, el alemán Félix Klein (1849-1925).

Si queremos buscar los primeros esbozos conocidos del problema tenemos que remontarnos hasta el año 1882. Al parecer, la salud de Klein era cuanto menos frágil; por ello, en ese mismo años se translada a la localidad costera de Norden (baja Sajonia) buscando un clima mejor. Es en este período cuando comienza a vislumbrar el teorema de uniformización. Leamos sus propias palabras en [**Kle1928**]:

Durante mi última noche de estancia, aquella del 22 al 23 de marzo, la cual pasé sentado en un diván a causa de una crisis asmática, se me apareció súbitamente, hacia las tres y media, el teorema central que esbocé sobre un polígono de 14 lados. La mañana siguiente, en la diligencia que por entonces circulaba entre Norden y Emden, reflexioné sobre lo que había encontrado examinando de nuevo todos los detalles. Sabía, entonces, que había encontrado un teorema importante. Llegúe a Düsseldorf, escribí la memoria, con fecha 27 de marzo, la envié a Teubner e hice que llegasen pruebas a Poincaré, Schwarz así como a Hurwitz.

El teorema al que se refería Klein es justamente el que coméntábamos al final del segundo capítulo, que en notación moderna reza como sigue:

Teorema 8.2.1 *Si X es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, existe un subgrupo G de $PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{H})$ que actúa propiamente sobre el semiplano de Poincaré $\mathbb{H}$ de suerte que X se identifica con el cociente*

$$\mathbb{H}/G$$

Como ya se comentó por entonces, este resultado es un corolario trivial del teorema de clasificación de superficies de Riemann. Su deseo de dar a conocer lo más pronto posible su nuevo descubrimiento, le llevó a dejar de lado su retiro en Norden y volver a su Düsseldorf natal. Una vez allí, las *escuetas* respuestas que obtuvo Klein de sus tres colegas, según [Abik1981] fueron las siguientes:

- **Hurwitz**: Lo acepto sin dudar.
- **Schwarz**: Es falso.
- **Poincaré**: Es cierto. Lo sabía y tengo una mejor forma de afrontar el problema.

Poco después Schwarz se retracta y lo acepta; es más, dedica gran parte de su quehacer a la teoría de uniformización.

Por aquel entonces, el mayor incoveniente que rodeaba al problema de la uniformización, era sin duda la ausencia de una definición rigurosa de superficie de Riemann. Para ir tomando conciencia de lo poco claras que estaban las cosas, leamos las siguientes palabras del propio Riemann que ilustran a la perfección la concepción de la época:

Para muchas investigaciones, tales como la de funciones algebraicas y abelianas, es conveniente representar el modo en que se ramifica una función multievaluada de la siguiente manera geométrica. Pensemos que el plano (x, y) *está cubierto por otra superficie coincidente con él (o apoyado sobre él a una distancia infinitesimal) en tanto en cuanto la función esté definida. Al continuar la función, la superficie se extiende correspondientemente. En una parte del plano en la que la función tenga dos o más continuaciones la superficie es doble o múltiple; consta allí de dos o más hojas, cada una de las cuales representa una rama de la función. Alrededor de un punto de ramificación de la función una hoja de la superficie continua en otra, de manera que el entorno de tal punto puede mirarse como una superficie helicoidal con eje a través del punto, perpendicular al plano* (x, y) *y de pendiente infinitesimal. Cuando la función retorna a su valor previo tras un número de vueltas de* z *alrededor del punto de ramificación, como por ejemplo con* $(z-a)^{\frac{m}{n}}$*, cuando* m *y* n *son primos relativos, después de* n *vueltas de* z *alrededor de* a*), entonces naturalmente hay que suponer que la hoja de más arriba baja a través de las otras a unirse con la inferior. La función multievaluada tiene sólo un valor para cada punto de esta superficie que representa su ramificación, y por tanto puede ser vista como una función completamente determinada sobre la superficie.*

Vemos que el concepto de superficie de Riemann estaba *ligado* al de función meromorfa: las superficies de Riemann eran *únicamente* complementos de las funciones, cuyo objetivo era evitar la multievaluación de éstas. No se concebía una superficie de Riemann desilagada a una función.

Otro eminente matemático alemán de la época, Karl Weierstrass (1815-1897), introdujo un punto de vista diferente en el estudio de la multi-evaluación de funciones meromorfas. La llamada *prolongación analítica* fue clave para el desarrollo de la noción moderna de superficie de Riemann, pero también para otros conceptos claves de geometría, como por ejemplo el de *haz* y el de *germen*. Vagamente hablando, la idea de Weierstrass se describe como sigue: comenzando por un elemento de función holomorfa, esto es, un par (D, f) donde D es un disco de la esfera $\mathbb{C}^\infty$ y f es una función holomorfa en D (definiendo por tanto una serie de potencias convergente en el disco) es natural preguntarse por los elementos de función meromorfa que resultan ser prolongación analítica del elemento primigénio. Una breve reflexión vislumbra que el concepto de germen de función podría ser más adecuado que el de elemento de función. Y así es. Preguntándose por los gérmenes de función meromorfa que prolongan a uno dado se introducen las superficies de gérmenes y en particular las *funciones meromorfas generales*, teniendo así una concepción de superficie de Riemann y de función multiforme. Con la notación actual, se describen como sigue. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{V})$ el conjunto de gérmenes de función meromorfa definidos sobre un abierto $\mathcal{V}$ de la esfera de Riemann; es inmediato comprobar que los conjuntos

$$[U, f] = \{\rho_a(f) | a \in U\}$$

forman una base para un topología. Por construcción, la proyección π que asocia a cada germen α a su punto de soporte es claramente un homeomorfismo local. Tenemos por tanto un espacio topológico separado Haussdorf (consecuencia directa del principio de identidad de función holomorfas) que localmente se identifica con el abierto $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^\infty$ y un homeomorfismo local $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{V}$. De esta forma, la proposición **[3.2.4]** garantiza la existencia de una única estructura de superficie de Riemann en $\mathcal{M}$ para la que la proyección es holomorfa. La superficie $\mathcal{M}$ es entonces una superficie de Riemann; inmediato también es que para esta estructura, la aplicación

$$\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^\infty$$

$$\rho_a(f) \to f(a)$$

es holomorfa. Tenemos un contexto magnífico para poder definir cualquier función meromorfa sin preocuparnos por la multievaluación. Siguiendo a [**9**] se definen las **funciones meromorfas generales** en un dominio $\mathcal{V}$ de la esfera como los subconjuntos $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathcal{V})$ de suerte que

- Cada elemento de $\mathcal{F}$ tiene su soporte en $\mathcal{V}$
- Es cerrado en el dominio $\mathcal{V}$ para prolongaciones analíticas, esto es, por una parte dos elementos cualquiera del conjunto $\mathcal{F}$ han de ser prologación analítica a través de una curva contenida y por otra si un germen soportado en $\mathcal{V}$ se prolonga a través de una curva contenida en $\mathcal{V}$ hasta un germen de $\mathcal{F}$, entonces el germen también pertenece a $\mathcal{F}$.

Obviamiente, si α es un germen de una función holomorfa f en el dominio $\mathcal{V}$, el conjunto $\mathcal{F}$ de gérmenes de función meromorfa que resultan ser prolonganción analítica de α sobre el dominio $\mathcal{V}$ es una función meromorfa general. La aplicación

$$\Phi|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathbb{C}^{\infty}$$

es una función holomorfa (univaluada) que generaliza entonces a la función f. Bajo ciertas salvedades, hemos resuelto el problema de la multievaluación de la forma siguiente: primero generalizando el dominio de las funciones de la manera obvia, posteriormente dotándole de una estructura de superficie de Riemann y comprobando que la pertinente generalización de la aplicación es bien meromorfa, bien holomorfa y univaluada.

Salvando las distancias (la topología tal y como hoy la entendemos no estaba a disposición de Weierstrass ni de su escuela) las líneas anteriores describen la idea de Weierstrass de prolongación analítica. Comprobamos de nuevo que el concepto de superficie de Riemann (*configuración analítica*) seguía ligado al de función. Tenemos que esperar hasta 1913, con la publicación de Hermann Weyl (1885-1955) "**Die Idee der Riemannschen Fläche**"(en la bibliografía se recoge tanto el texto original [**HWeyl1913**] como una traducción posterior al inglés [**HWeyl1955**]), para encontrar una definición de superficie de Riemann (la actual) independiente tanto del concepto de función meromorfa como del embebimiento que Riemann consideraba natural en el espacio Euclídeo tridimensional. Parafraseando al propio Weyl:

"En esencia, el espacio tridimensional nada tiene que ver con las formas analíticas (superficies de Riemann de funciones multivaluadas), y así lo parece en el ámbito de la lógica-matematica. El problema está estrechamente asociado con nuestro sentido de la percepción. Para satisfacer nuestro deseo de dibujar y de crear analogías, forzamos la existencia de representaciones vacías de los objetos en vez de tomarles como son, lo que podríamos denominar un principio antropomorfo contrario a las directrices científicas. Sin embargo, estas críticas de los puros lógicos no serán pertinentes si buscamos otra aproximación... en la que las formas analíticas son variedades dos dimensionales... Al contrario, no usar este enfoque es pasar por alto uno de los aspectos más esenciales de la materia."

Tal y como se ha comentado, la definición que aporta Weyl es la actual. Tomándonos ciertas licencias en lo que ha rigor se refiere, podemos afirmar que las tres concepciones son equivalentes (aunque estrictamente sólo hay una definición formal, la de Weyl). Este es un hecho nada trivial pero que conocemos ya sobradamente: en toda superficie de Riemann existen funciones meromorfas no constantes.

Volvamos al problema de uniformización. Klein sabía allá por 1882 que si G es un subgrupo de los automorfismos del semiplano de Poincaré $\mathbb{H}$, que actúa sin puntos fijos y con órbita discreta, entonces el cociente

$$\mathbb{H}/G$$

se "asemejaba" a una superficie de Riemann en el sentido de aquella época, esto es, presentaba las propiedades (topológicas) habituales pero faltaba construir una función meromorfa cuya superficie de Riemann en el sentido de Weierstrass o de Riemann fuera exactamente $\mathbb{H}/G$.

Según hemos visto al principio, cuando parecía que Klein había encontrado un método para ello, Poincaré afirmó que el tenía ya dos formas. Una de ellas relacionada con las llamadas funciones automorfas o equivalentemente, a partir de los trabajos de Fuchs sobre la resolución de ecuaciones de segundo orden y de tipo Ricatti. El teorema de uniformización se debe, casi por completo, a la correspondecia epistolar mantenida estas dos grandes figuras de la matemática moderna. Como se viene comentando, su enfoque poco tiene que ver con el seguido en este texto, pero merece la pena exponer brevemente las ideas fundamentales. La proposición **2.1.6** afirmaba que a través de una función

$\mathcal{P}$ de Weierstrass se podía uniformizar cierta curva algebraica. Dicho de otra forma, la inversa en cierto sentido de una función $\mathcal{P}$ permite parametrizar cierto toro. La piedra angular del razonamiento anterior era la ecuación diferencial que verificaba la propia $\mathcal{P}$. Poincaré se preguntó por las propiedades, no de funciones soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden, sino por sus inversas. Estableciendo paralelismos fue capaz de repetir el asombroso casamiento entre funciones elípticas, curvas elípticas y toros con superficies de Riemann compactas generales y las llamadas funciones fuchsianas.

De todos modos, qué mejor lectura que la de las propias palabras de Poincaré describiendo su visión de la solución [Poinc1921]:

J'etais donc conduic à examiner les équations linéaires à coefficients rationels et algebriques.

(...)

Cette étude intime de la nature des fonctions intégrales ne peut se faire que par l'introduction de transcendantes nouvelles, dont je vais maintenant dire quelques mots. Ces transcendantes nouvelles, dont je vais maintenant dire quelques mots. Ces transcendantes ont de grandes analogies avec les fonctiones elliptiques, et l'on ne doit pas s'en étonner, car si j'imaginais ces fonctions nouvelles, c'était afin de faire pour es équations différentielles linéaires ce quón avait fait à l'aide des series θ elliptiques et abéliennes, pour les intégrales des différentielles algébriques.

C'est donc l'analogie avec les fonctions elliptiques qui m'a servi de guide dans toutes mes recherches. Les fonctiones elliptiques sont des fonctiones uniformes que ni sont pas altérées quand on augmente la variable de certaines périodes. Cette notion est tellement utile dans l 'Analyse mathématique, que tous les géomètres ont dû penser depuis longtemps qu'il conviendrait de la généraliser en cherchant des fonctions uniformes d'une variable x qui demeuren inaltérées, quand on fait subir à cetter variable certaines transformations; mais ces transformations ne peuvent pas être choisies de manière quelconque.

Il est aisé de voir quelle est l'espèce particulière de groupes discontinus *qu'il convient d'introduire. On se rappelle quel est le mode de génération des fonctions elliptiques: on considère ensuite certaines intégrales appelées de première espèce, ensuite, par un procédé connu sous le nom d'inversion, on regarde la variable x vomme fonction de l'integrale; la fonction ainsi définie est uniforme et doublemente périodique.*

(...)

De même, nous envisageons une équation linéaire du second ordre et, par une sorte d'inversion, nous regardons la variable comme fonction, non plus de l'intégrale, mais du rapport z de deux intégrales de notre équation. Dans certains cas, la fonction ainsi définie sera uniforme, et alors elle demeurera inaltérée par une infinité de substitutions linéaires, changeant z en $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

(...)

Les résultats ainsi obtenus ne donnaient encore qu' une solution bien incomplète du problème que je m'étais proposé, c'esta-à-dire l'intégration des équations différentielles linéaires. Les équations que j'ai appelées des cas très particulieres des équations linéaries du second ordre. On ne doit pas s'en étonner si on réfléchit un peu à l'analogie avec les fonctions elliptiques. Le procédé d'inversion ne permet de calculer que les intégrales de première espèce. pour les intégrales de deuxième et troisième espèce, il faut procéder d'une autre manière.

Envisageons par exemple l'intégrale de deuxième espèce

$$u = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Pour l'obtenir, nous considérons comme équation auxiliaire celle qui donne l'intégrale de première espèce

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

d'où par inversion $x = sn(z)$ Remplaçant x par $sn(z)$, on trouve que u est égal à une fonction uniforme de z, $Z(z)$, qui augmente d'une *constante quand* z *augmente d'une période. On est donc conduit à employer un procédé analogue: étant donée une équation différentielle linéaire* E *d'ordre quelconque, à coefficients algébriques en* x, *on se sert d'une équation auxiliaire* E' *du second ordre, et cette équation auxiliaire doit être choisie de telle façon que* x *soit une fonction du rapport* z *de deux intégrales de* E' *et que les intégrales de* E *soient des fonctions uniformes de* z.

Est-il toujours possible de faire ce choix de manère à satisfaire à toutes ces conditions? Telle est la question qui se pose naturellement. Cela revient d'ailleurs à se demander so, parmi les équations liéaires qui satisfont à certaines conditions, qu'il est inutile d'énoncer ici, il y a toujours une équation fuchsienne. Je suis parvenu à démontrer qu' on pouvait répondre affirmativement à cette question. Je ne puis expliquer ici en quoi consiste la méthode que nous avons suivie. M. Klein et moi, dans l'étude de divers exemples particuliers; comment M. Klein a cherché à appliquer cette méthode dans le cas général, ni comment j'ai comblé les lacunes que subsistaient encore dans la démonstration du géomètre allemand, en introuisant une théorie qui a les plus grandes analogies avec celle de la réduction des formes quadratiques.

(...)

Ainsi, il est possible d'exprimer les intégrales des équation linéaires à coeffcients algébriques, à l'aide de trascendantes nouvelles, de la même manière que l'on a exprimé, à l'aide de fonctions abéliennes, les intégrales des différentielles algébriques. D'ailleurs ces dernières intégrales elles-mêmes sont susceptibles d'être obtenues aussi par l'intermédiarre des fonctions fuchsiennes, et l'on a ainsi une expression nouvelle, entièrement différent de celle où entrent les series θ *à plusieurs variables.*

La única relación que mantuvieron Klein y Poincaré fue a través de correspondencia epistolar. Podríamos decir que el teorema de uniformización es fruto de este intercambio de ideas. La referencia [KlePoin1923] contiene íntegramente la correspondencia entre ambos. Está en francés; la traducción del alemán al francés de las cartas de Klein corre a cargo de François Poincaré, el menor de los hijos de Poincaré. La relación epistolar que mantuvieron ambos fue de máximo respeto y explícita admiración. El único desencuentro que se registra en la correspondencia, viene generado la terminología “función fuchsiana”, totalmente inadmisible para Klein. Las funciones automorfas, tal y como Klein se refiere a ellas, fueron introducidas, por primera vez, por los miembros de la escuela de Gotinga: los sucesores de Riemann, entre los que se encontraba Klein. De esta forma, el propio Klein consideraba cuanto menos ofensivo que Poincaré se refiriera a ellas (y más aún, que afirmase no conocer los trabajos de Riemann) con el apelativo de fuchsianas, en honor al matemático Lázarus Fuchs (1833-1902), ajeno a la escuela de Klein.

Es interesante la forma en la que el matemático alemán Hans Freudenthal describe esta relación en [Freud1955] (la traducción al castellano va a cargo de un servidor):

Veintiséis cartas se intercambiaron Klein y Poincaré sobre las funciones automorfas. Klein escribió la primera después de la publicación de la tercera Nota de Poincaré. En esta correspondencia Poincaré es el alumno, quien posee las preguntas, y Klein es el maestro, quien con toda sinceridad y honradez guía a su alumno y le hace rellenar las lagunas enormes de su erudición matemática. Sólo se encuentra una diferencia: Klein desaprueba la denomicación de funciones fuchsianas que Poincaré había escogido, ignorando los méritos de los matemáticos de la escuela de Riemann, pero Poincaré es tenaz. (...)

¿Quién puede mostrar los sentimientos provocados en Klein por los progresos enormes e instantáneos que Poincaré hace sobre un camino donde ellos, Klein y sus discípulos, únicamente conseguían avanzar paso a paso? Cuanto más sabemos de esta situación, más debemos admirar la actitud irreprochable de Klein.

Es destacable el hecho de que en 1907 no sólo Poincaré dió con una prueba rigurosa del teorema de uniformización, también lo hizo el joven alemán Paul Koebe (1882-1945). El enfoque de Koebe, ligado a la teoría del potencial, se asemeja mucho más al nuestro que al de Poincaré. El propio Koebe dio posteriormente hasta tres pruebas distintas del resultado, que pueden consultarse en [Koeb1], [Koeb2] y [Koeb3]. Recomendamos al lector interesado que quiera profundizar en estas y otras cuestiones históricas sobre el problema de uniformización el texto de Gray [18].

Apéndice

Topología algebraica

Las siguientes líneas están dedicadas tanto a asentar notaciones, como a presentar varios hechos de topología algebraica, todos ellos de manera esquemática. Si el lector desea una prueba de los mismos puede consultar el excelente texto de Munkres [11], concretamente el capítulo 9.

En lo que sigue X, E y B denotarán sendos espacios topológicos. Generalmente utilizaremos la letra p para designar una aplicación recubridora $p : E \to B$.

- Un **arco** γ en un espacio topológico es una aplicación continua del intervalo unidad $I = [0, 1]$ al espacio X.
- Un **lazo** en un punto $a \in X$ es un arco γ en X de suerte que $\gamma(0) = \gamma(1) = a$. Al conjunto de lazos con *punto base* $a \in X$ lo denotaremos por $\Lambda(a, X)$
- Una **homotopía** de X en B es una aplicación $H : X \times I \to B$ continua donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unidad. Dos arcos γ_1, γ_2 en B son homótopos si existe una homotopía $H : I \times I \to B$ tal que $H(s, 0) = \gamma_1(s)$ y $H(s, 1) = \gamma_2(s)$. Además, se dirá que son homótopos relativamente a los extremos si $H(0, t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $H(1, t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Más en general, dos aplicaciones $f, g : X \to B$ son homótopas si existe una homotopía $H : X \times I \to B$ tal que $H(s, 0) = f(s)$ y $H(s, 1) = g(s)$. Es decir, si existe una familia de aplicaciones, parametrizadas con continuidad por el intervalo unidad, que "transladan" f a g. Escribiremos $f \simeq g$.
- Dos lazos son homótopos si son homótopos relativamente a sus extremos (relativos al punto base) como arcos. El que dos lazos sean homótopos es una relación de equivalencia $\sim$. Se define el grupo fundamental de un espacio topológico X en un punto a, $\pi_1(a, X)$, como el conjunto de lazos basados en a, módulo la homotopía, es decir:
$$\pi_1(a, X) = \frac{\Lambda(a, X)}{\sim}$$
- Se comprueba que el grupo fundamental es efectivamente un grupo, que si dos puntos $x, y \in X$ están unidos por un arco, i.e. existe un arco con punto inicial x y con punto final y, entonces $\pi_1(x, X) \cong \pi_1(y, X)$, aunque en general el isomorfismo no es canónico. En aras de la brevedad, suprimiremos la referencia al

espacio topológico ambiente cuando no haya confusión, por ende, serán frecuentes las notaciones $\pi_1(a)$ y $\Lambda(a)$ para referirse al tanto al grupo fundamental, como al conjunto de lazos basados en el punto a.

- Si X e Y son dos espacios topológicos, se dice que ambos son homotópicamente equivalentes si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que sus respectivas composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son homótopas a las respectivas identidades de los espacios X e Y. En ese caso escribiremos $X \simeq Y$.
- Si X e Y son dos espacios topológicos homeomorfos entonces son homotópicamente equivalentes. El recíproco no es cierto. Sin embargo, si son homotópicamente equivalentes a través de $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ y $f(a) = b$, entonces $\pi_1(a) \cong \pi_1(b)$.

Funciones armónicas

Por completitud persentamos un teorema de uso constante (tal y como se ha comprobado) cuando se trabaja con funciones armónicas:

Teorema 8.2.2 (Principio de Harnack) *Sea V un abierto del plano complejo y $(u_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones armónicas, definidas en el abierto V, monótona creciente. Entonces la sucesión es una familia normal, esto es, o bien converge casi uniformemente hacia una función armónica, o diverge uniformemente en los compactos hacia ∞.*

Para una prueba detallada remitimos al lector al libro de Ivorra [5], capítulo 9, sección 9.2 o al texto de Forster [2], capítulo 3, teorema 22.6.

Bibliografía

[1] Ash, R.B. y Novinger W.P. (2004) *Complex variables.* Second edition. Versión electrónica.

[2] Forster, Otto. (1981) *Lectures on Riemann surfaces.* Second edition. Ed. Springer-Verlag, New York

[3] Jones y Singerman (1987) *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint* First edition. Cambridge university press, London.

[4] Saint-Gervais, H.P. (2010) *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenarie.* ENS Éditions, Lyon.

[5] Ivorra Castillo, C. *Funciones de variable compleja.* Versión electrónica. http://www.uv.es/ivorra/Libros/Varcom.pdf

[6] Ivorra Castillo, C. *Análisis matemático.* Versión electrónica. http://www.uv.es/ivorra/Libros/Analisis.pdf

[7] Ivorra Castillo, C. *Geometría algebraica.* Versión electrónica. http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geomalg.pdf

[8] Ivorra Castillo, C. *Esquemas.* Versión electrónica. http://www.uv.es/ivorra/Libros/Esquemas.pdf

[9] López Fernández-Asenjo, F. Galindo Soto, F. Tristán Vega, L.A. (1996). *Funciones analíticas multiformes. Una introducción a las superficies de Riemann.* Primera edición. Secretariado de publicaciones e intercambio científico de la Universidad de Valladolid.

[10] Conway, J. (1973) *Functions of one complex variable* Ed. Springer-Verlag. New York

[11] Munkres, J. R. (2002) *Topología.* Segunda edición. Ed. Prentise Hall.

[12] Sancho Guimera, J. Navarro, J (2013) *Apuntes para una licenciatura.* Versión electrónica http://matematicas.unex.es/ navarro/licenciatura.pdf

[13] Complex Analysis on Riemann Surfaces. Notas del curso de Harvard "Complex Analysis on Riemann Surfaces". Versión electrónica: http://www.math.harvard.edu/ ctm/papers/home/text/class/harvard/ 213b/course/course.pdf

[14] Teleman, C. (2004) *Riemann Surfaces* Notas del curso del profesor Teleman. Versión electrónica: http://www2.imperial.ac.uk/ skdona/RSPREF.PDF

[15] Poincaré, J.H. (1907) *Sur l'uniformisation des fonctiones analytiques.* Acta Math. 31, pág 1-63. Link de Springer: http://link.springer.com/article/10.1007

[16] Farkas, H.M. e Irwin, K. (1980) *Riemann Surfaces.* Ed. Springer Verlag. First edition

[17] Rota, G.C (2008) *Indiscrete Thoughts.* Ed. Springer-

[18] Aroca Hernández-Ros, J.M. (Agosto 2004) *Monodromía y ecuaciones Fuchsianas en la obra de H. Poincaré.* Revista Arbor. Versión electrónica: http://arbor.revistas.csic.es/index.php/arbor/article/viewFile/553/554

[19] Gray, J. (1994) *On the history of the Riemann mapping theorem.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II. Supplemento (34) Versión electrónica http://www.math.stonybrook.edu/ bishop/classes/math401.F09/GrayRMT.pdf

[20] Muñoz, J.L. (2006) *Riemann, una nueva visión de la geometría.* Ed. Nivola. Colección "La matemática en sus personajes".

[21] Moreno Castillo, R. (2008) *Plücker y Poncelet, dos modos de entender la geometría.* Ed. Nivola. Colección "La matemática en sus personajes".

[22] Lorenzo, J. (2009) *Poincaré. Matemático visionario, politécnico escéptico.* Ed. Nivola. Colección "La matemática en sus personajes".

[Abik1981] Abikoff, W. (1981) *The uniformization theorem.* American Mathematical Monthly, nº 88, pág 574-592.

[BriNoe1874] Brill, A. y Noether, M. (1874) *Über die algebraischwn Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.* Math. Ann. nº7. pág.269-316.

[Freud1955] Freudenthal, H. (1955) *Poincaré et les fonctions automorphes. Le livre de centenaire de la naissance de Henri Poincaré.* Ed. Gauthier-Villars. París. pág 212-219.

[Hilb1900] Hilbert, D. (1900) *Über das Dirichletsche Prinzip.* Deutsche Math. Ver. 81, pág 184-188.

[HWeyl1955] Weyl, H. (1955) *The concept of a Riemann surfaces.* ED. Addison-Wesley, 3rd ed.

[HWeyl1913] Weyl, H. (1913) *Die Idee der Riemannschen Fläche.* Teubner, Leipzig.

[Kle1928] Klein, F. (1928) *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Ed. Springer, Berlin.

[KlePoin1923] Klein, F y Poincaré, H. L. (1923) *La correspondance d' Henri Poincaré et de Félix Klein.* Acta Math. 39, pág. 94-132.

[Koeb1] Koebe, P. (1907) *Über die Uniformisierung reeller analytischer Kurven.* Göttinger Nachrichten. pág. 177–190 Link: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN00250118X

[Koeb2] Koebe, P. (1907) *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.* Göttinger Nachrichten. pág. 191–210 Link: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002501198

[Koeb3] Koebe, P. (1907) *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven Zweite Mitteilung.* Göttinger Nachrichten. pág. 633–669. Link http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002501473

[OsgW1900] Osgood, W. (1900) *On the existence of the Green's function for the most general simply connected plan regions.* American matematical Soc. I. pág 310-314.

[Poinc1921] Poincaré, H. (1921, a título póstumo) *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même.* Acta Math. 38. pág 1-153.