Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

Tesis Doctoral:

EL PASO DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Presentada por Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:

Dr. Tomás Ortega del Rincón

TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN, CAUN de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que la presente memoria, *El paso de la geometría sintética a la geometría analítica*, ha sido realizada por doña Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre bajo mi dirección en la Universidad de Valladolid.

Valladolid, octubre de 2014.

Fdo.: Tomás Ortega del Rincón

AGRADECIMIENTO

A mi director de tesis, Dr. Tomás Ortega, por su oportuna y pertinente orientación en el desarrollo de este trabajo; por su generosidad al dedicarme cientos de horas para revisar palabra por palabra las muchas versiones por las que tuvo que pasar esta memoria hasta llegar al final. Luego de comprobar su capacidad de trabajo durante los años en que he podido conocerle, no me queda más que decir que he comprendido que la culminación de la tesis en realidad es el inicio de una nueva etapa como investigadora en Didáctica de la Matemática y que ésta nunca acabará.

A mis padres por haberme apoyado desde siempre a cumplir mi sueño de ser maestra.

A mi esposo por haberme animado y acompañado durante todo este tiempo y por haber comprendido que las ausencias eran necesarias para crecer académicamente y poder ir más allá de mis sueños.

A mis amigos de España, en especial a Carmen, por haberme acogido en su casa y brindado su amistad, haciendo que el estar lejos de mi familia fuera menos difícil.

A mis amigos peruanos, por su apoyo y aliento.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú que me brindó las condiciones laborales idóneas para llevar a cabo esta investigación.

DEDICATORIA

A Francisco, mi compañero para toda la vida.

A Gaby y Gonzalo, mis queridos hijos.

A Dios, mi luz y guía.

RESUMEN

La organización actual de la geometría analítica en los textos didácticos empleados en el primer año de universidad de estudiantes de carreras de ingeniería y arquitectura responde básicamente a dos orientaciones. Una asociada al álgebra lineal, cuyo origen se encuentra en la concepción moderna de geometría en función del conjunto de invariantes, idea desarrollada por Klein, y otra caracterizada por abordar la geometría analítica básicamente a través del estudio de las propiedades de las curvas a partir de sus expresiones algebraicas, como un requisito para fundamental para el cálculo en varias variables.

Por otro lado, se ha encontrado que la enseñanza de la geometría analítica se realiza sin una problematización previa y sin establecer relaciones explícitas entre ella y la geometría de las formas, estudiada en el nivel educativo previo al universitario. En este trabajo se considera positiva la búsqueda de dichas relaciones ya que el uso de distintos elementos y procedimientos favorecerán los aprendizajes matemáticos.

Partiendo del supuesto de que es posible diseñar situaciones que sean el hilo conductor entre dichas geometrías, se plantea como objetivo fundamental de investigación diseñar situaciones que permitan la evolución de los conocimientos de la geometría sintética, con los que los estudiantes podrían venir de su formación básica, hacia la geometría analítica, en particular, hacia el tratamiento de las rectas y las cónicas.

Para el desarrollo de la investigación se consideran elementos de la investigación basada en el diseño y de la investigación-acción.

Luego de un estudio sobre la evolución histórica de la geometría se hallaron evidencias de que la noción de lugar geométrico ha estado presente en el desarrollo inicial de la geometría analítica. Una de ellas corresponde al trabajo de Descartes; él resolvió problemas sobre lugar geométrico que tradicionalmente se abordaban en contextos sintéticos, pero empleando el álgebra como herramienta alternativa a las que brindan las construcciones exactas.

A partir de lo hallado, se diseñó una familia de problemas para cuya solución se requiere inicialmente de las técnicas de construcciones exactas; luego éstas deben evolucionar para dar lugar a técnicas algebraicas. De esa manera, la introducción de un sistema de coordenadas cartesiano estará plenamente justificada.

Para comprender la complejidad cognitiva de las tareas propuestas se recurrió a la noción de registro de representación semiótico y se definieron unidades elementales de información. Con esos elementos teóricos se contrastan los procedimientos de solución desde los marcos geométrico y algebraico y se identifican algunos conflictos que pueden presentarse cuando los estudiantes resuelvan las tareas propuestas.

La secuencia didáctica propuesta inicialmente se fue modificando a partir de los resultados obtenidos, completándose cinco ciclos según la metodología investigación-acción. Como resultado del trabajo realizado se cuenta con una secuencia didáctica que justificará la enseñanza de técnicas algebraicas empleadas en geometría analítica, a partir de las limitaciones que presentan las técnicas de construcción con regla y compás.

De esta manera, se espera contribuir a que alumnos de niveles educativos equivalentes al nivel en el que se hizo el estudio reconozcan el aporte de los conceptos, técnicas, argumentos y representaciones algebraicas de la geometría analítica en otros temas en los se requiera de un pensamiento matemático avanzado como el cálculo diferencial, integral y el álgebra lineal, y para los cuales la geometría analítica debe ser un conocimiento previo.

ABSTRACT

The current organization of analytic geometry in textbooks used in the first year of college of students pursuing careers in engineering and architecture basically responds to two aspects. The first one, associated to linear algebra, whose origin lies in the modern conception of geometry based on a set of invariants, an idea developed by Felix Klein; and the second one, characterized by addressing analytical geometry basically through the study of the properties of curves from their algebraic expressions, as an essential requirement for calculus of several variables.

Furthermore, it has been found that the teaching of analytic geometry is performed without any prior problematization and without establishing explicit relations between the latter and the geometry of shapes, which is studied during pre-university education. The search for such relations is considered positive in this work given that the use of different elements and procedures will encourage mathematical learning.

Assuming that it is possible to design situations that are the common thread between these geometries, the primary goal of this research is to design situations that allow the evolution of knowledge from the field of synthetic geometry, with which students could come from their basic training, to the field of analytic geometry, in particular to the treatment of straight lines and conics.

Elements of both, design experiments and action research, are considered for the development of this research.

After a study about the historical development of geometry, it was found that the concept of *locus* had been present in the initial development of

analytic geometry. One such piece of evidence is the work of Descartes; he solved *loci* problems in synthetic contexts using algebra as an alternative tool to those that provide accurate constructions.

From what had been found, a set of problems whose solution initially required accurate construction techniques was designed; then, these techniques must evolve to lead to algebraic techniques. Thus, the introduction of a Cartesian coordinate system will be fully justified.

To understand the cognitive complexity of the proposed tasks, the concept of semiotic register of representation was used and basic information units were defined. Problem-solving procedures are compared with these theoretical elements from geometric and algebraic aspects, and some conflicts that can arise when students solve the proposed tasks are identified.

The initially proposed teaching sequence was gradually modified from the results obtained, completing five cycles according to the action research methodology. As a result of the work done, there is currently a didactic sequence that will justify the teaching of algebraic techniques used in analytic geometry from the restrictions that ruler and compass construction techniques present.

This way we hope to provide students with levels of education equivalent to the level at which the study was done with ways to recognize the contribution of the concepts, techniques, arguments and algebraic representations of analytic geometry in other topics that require advanced mathematical thinking, like differential and integral calculus and linear algebra, and for which prior knowledge of analytic geometry is required.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TÉRMINOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN GENERAL

Este trabajo se desarrolla en un primer curso universitario luego de una formación obligatoria de once años, correspondiente a la primaria y secundaria. Se enmarca dentro de las investigaciones sobre el aprendizaje de la geometría y parte del supuesto de que el desarrollo histórico de la geometría puede dar elementos para establecer conexiones entre dos campos que hasta el momento se presentan de modo independiente en la enseñanza: la geometría sintética y la geometría analítica.

Apoyados en la teoría de registros de representación semiótica (Duval, 2006a) y en el juego de marcos (Douady, 1986), se buscará construir situaciones contextualizadas inicialmente en el campo de la geometría sintética pero que irán evolucionando de modo que el conocimiento que se desea enseñar, las técnicas algebraicas propias de la denominada geometría analítica, sea el camino óptimo de solución.

Cabe señalar que al referirnos a la geometría sintética queremos caracterizar aquellos problemas de construcciones exactas con regla y compás; en particular los que se refieren a lugares geométricos. De otro lado, cuando se haga referencia a la geometría analítica, nos estaremos refiriendo a la geometría plana en donde se emplea un sistema de coordenadas cartesianas y que relaciona ecuaciones con curvas.

En sus orígenes, la geometría tuvo un carácter utilitario, como se verifica al estudiar el desarrollo de culturas antiguas tales como la egipcia y las mesopotámicas. Sin embargo, fue en el periodo talásico cuando la geometría desarrollada por los griegos adoptó la categoría de ciencia, estableciendo definiciones y proposiciones de carácter universal. Desde ese entonces, dicha disciplina ha estado sometida a diversos cambios y desde que la educación se extendió a niveles elementales ha sido incluida también en los planes de estudios de todo ciudadano.

Un momento importante en la historia de la educación matemática corresponde a los años sesenta, época en la se introdujeron modificaciones en la organización curricular de la matemática, respondiendo al movimiento denominado matemáticas modernas. A partir de entonces, se propuso introducir en los programas de la educación básica (primaria y secundaria) la teoría elemental de conjuntos, el desarrollo de las nociones algebraicas y las nociones fundamentales del cálculo diferencial y del integral. Esto se hizo a cambio de suprimir la geometría euclidiana tradicional, basándose en la consigna de que la introducción temprana a las estructuras generales traería, como consecuencia, una economía del pensamiento.

Así, en la mayoría de experiencias desarrolladas para organizar y enseñar geometría en la época posterior a la matemática moderna se puso especial énfasis en la incorporación del álgebra. En ese contexto, la geometría se presenta como una estructura algebraica, como un grupo ortogonal sobre un espacio vectorial euclídeo, o como un grupo de transformaciones que cumplen determinadas características. La geometría sintética quedó fuera de los contenidos matemáticos a enseñar; en particular, se dejaron de tratar problemas de construcciones exactas con regla y compás donde las soluciones son puntos, segmentos, rectas o circunferencias o, lógicamente, combinaciones de estos elementos.

Actualmente se ha pasado de una posición que en el siglo XIX reivindicaba los métodos y principios de una geometría con regla y compás, la denominada geometría sintética, a la situación actual en donde es la geometría de las formas, que se preocupa por determinar longitudes, ángulos, áreas, etc. y la geometría analítica, con métodos caracterizados por las representaciones algebraicas, las que ocupan un lugar destacado en la educación obligatoria.

En particular, en el contexto peruano, en la primaria y a inicios de la secundaria el énfasis está puesto en la geometría sin coordenadas y en el estudio de transformaciones, mientras que en los últimos cursos de la secundaria y en los primeros cursos de la universidad, se enfatiza el trabajo con técnicas algebraicas propias de la geometría analítica. Sin embargo, esta situación se presenta con escazas justificaciones y sin mostrar conexión entre los procedimientos algebraicos y los sintéticos. Y aunque es necesario que los estudiantes aprendan procedimientos inherentes a cada una de estas geometrías, también es cierto que para que se produzca una real compresión de los conceptos y se adquieran competencias matemáticas, es necesario establecer relaciones entre aquellos campos del conocimiento que lo permitan; ese es el caso de la geometría sintética y la analítica.

De otro lado, en el desarrollo de la geometría se encuentran evidencias que la geometría analítica surgió para suministrar un método general para la resolución de problemas de lugares geométricos, correspondientes a la geometría sintética. La afirmación anterior se apoya en los trabajos desarrollados por Apolonio (siglo III a. C.), Pappus (siglo III d.C.) y Descartes (siglo XVII) en torno al denominado problema de Pappus.

Desde el punto de vista de los aprendizajes, consideramos que sería conveniente trabajar la geometría sintética y la geometría analítica de manera complementaria, ya que mientras la primera permite el desarrollo de la intuición, de la visualización y de la argumentación a partir de construcciones exactas, la segunda permite establecer conexiones entre condiciones geométricas y expresiones algebraicas. Y partiendo del supuesto de que el empleo de distintos registros de representación de un mismo objeto matemático favorece su comprensión, se hace necesaria la búsqueda de actividades que exijan al alumno transitar entre las representaciones figural, algebraica y gráfica de los objetos geométricos.

Partiendo del supuesto de que es posible diseñar situaciones que sean el hilo conductor entres estas geometrías, este proyecto propone fijar la atención en las conexiones que se pueden establecer entre la geometría sintética y la geometría analítica en la actualidad. El contexto en el que se plantea esta investigación es el de una primera asignatura de matemática del plan de estudios de futuros arquitectos en una universidad del Perú.

Dado que será necesario construir una génesis artificial del conocimiento en un campo conceptual determinado, que en este caso será la geometría analítica, a partir de situaciones en contextos de geometría sintética, se eligió como método de investigación la *investigación basada en el diseño*. La organización de la presente memoria se ha realizado teniendo en cuenta las etapas que dicho método contempla.

Se cuenta con ocho capítulos, además de la presente introducción, de las referencias consultadas y de los anexos correspondientes.

En el capítulo 1 se presenta el contexto en el que se realiza la investigación, se analizan los currículos respectivos, se describe la problemática identificada y se muestran los resultados de un trabajo de investigación que explora cuáles son las dificultades específicas que presentan los estudiantes al abordar temas de geometría analítica. Finalmente se adopta una posición respecto a los términos geometría sintética, geometría analítica y lugar geométrico que serán empleados continuamente en el trabajo.

En el capítulo 2 se describen resultados de trabajos que abordan distintos aspectos relacionados con la investigación, entre los que se encuentran la ubicación que ha tenido la geometría en el currículo, la importancia del uso de la regla y el compás, el aporte de entornos tecnológicos para el aprendizaje y enseñanza de la geometría y la necesidad y posibilidad de establecer conexiones entre las geometrías sintética y analítica. Luego se señala la relevancia del trabajo a realizar, además del problema, los objetivos y las hipótesis de investigación. Finalmente, se justifican y describen las opciones metodológicas adoptadas.

En el capítulo 3 se realiza una revisión de problemas relevantes que a lo largo de la historia fueron el hilo conductor en el desarrollo de la geometría. En ese proceso se identifican las técnicas empleadas y la razón de su evolución. Se encuentra que en un primer momento la argumentación se basaba únicamente en construcciones con regla y compás, pero que luego dio paso a argumentos algebraicos que permitieron la clasificación de las curvas algebraicas. Se revisa un conjunto de textos universitarios representativos de los últimos sesenta años con la finalidad de identificar las implicancias en la enseñanza de la geometría de la postura epistemológica adoptada.

En el capítulo 4 se describen los elementos del marco teórico considerado. Se presentan algunos elementos de la teoría de registros de semiótica y del juego de marcos; se establece relación entre ellos. Se define la noción de unidad elemental de información y se muestra como aplicarla para describir procedimientos de solución problemas de geometría sintética y analítica.

En el capítulo 5 se propone una secuencia de actividades en un contexto de geometría sintética con la finalidad inicial de que los estudiantes reconozcan cuándo una construcción es exacta y desarrollen una concepción global y completa de lugar geométrico. El segundo grupo de actividades corresponde a una familia de problemas de lugar geométrico. Posteriormente se organizan dichas situaciones en una familia de problemas. En esta etapa de la investigación se presentan los comportamientos matemáticos esperados por parte de los estudiantes al enfrentarse a las tareas planteadas. Con los elementos teóricos descritos en el capítulo 4 se identifican posibles obstáculos cognitivos que pueden presentar los estudiantes al resolver dichos problemas.

En el capítulo 6 se describe lo ocurrido en cada uno de los cinco ciclos en los que se llevó a cabo la implementación de la propuesta. Los grupos que participaron cada ciclo se pueden considerar homogéneos entre sí pero heterogéneos al interior. La descripción de lo ocurrido en cada uno de ellos se hace teniendo en cuenta las fases de la investigación acción. En dicha explicación se pone especial énfasis en señalar los cambios realizados entre ciclo y ciclo.

En el capítulo 7 se presentan los criterios considerados para analizar las respuestas que dieron los estudiantes. Esos criterios se definen en función de cada una de las tres cuestiones de investigación planteadas. Las actividades desarrolladas al final de cada ciclo, correspondientes a las tres cuestiones de interés, se analizan con los criterios definidos previamente. Las respuestas de los alumnos se organizan según haya sido los niveles de adquisición alcanzados. Se contrastan los resultados obtenidos cada ciclo con las respuestas esperadas.

En el capítulo 8 se presentan las consideraciones finales del trabajo realizado, algunas recomendaciones para articular las geometrías sintética y analítica, así como cuestiones abiertas para próximas investigaciones.

Con la finalidad de presentar una imagen global del trabajo de investigación realizado, se presenta el siguiente esquema a través del cual se puede apreciar la estructura de la investigación. Se parte del problema de investigación, se consideran los marcos teórico y metodológico, antecedentes, desarrollo de la tesis y las conclusiones.

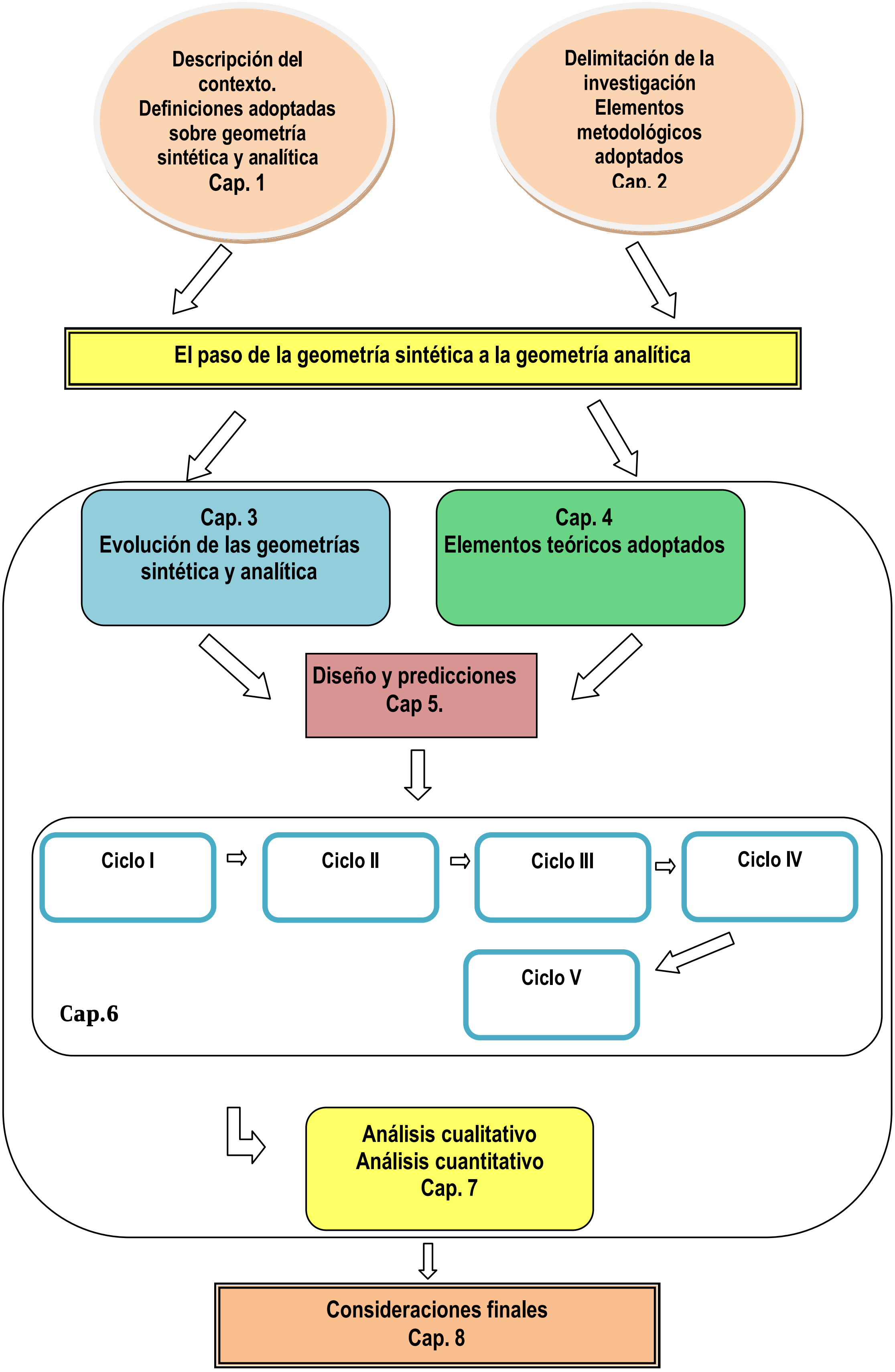


Figura 0. Esquema de la investigación

CAPÍTULO 1

CONTEXTO Y DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA IDENTIFICADA

En este capítulo se señala el rol que cumple la geometría analítica y la geometría sintética en la formación de un estudiante de arquitectura. Se describe la organización de la geometría en las asignaturas del plan actual de arquitectos en formación. Se complementa la descripción del contexto con el estudio de la organización de la geometría en el currículo de la educación escolar. Finalmente, se presentan los resultados de un estudio exploratorio realizado con estudiantes de arquitectura del primer año. Dicho trabajo permitió identificar algunas dificultades al abordar temas de geometría analítica plana, las que han sido descritas en términos de las conexiones establecidas entre registros de representación.

1.1.DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO

La presente investigación se desarrolla con alumnos del primer año de la facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. Las edades de estos jóvenes oscilan entre los 16 y 17 años ya que, según el sistema educativo peruano, al culminar los once años de educación básica (6 años de primaria y 5 de secundaria), los estudiantes pueden acceder a estudios universitarios. Es decir, entre la finalización de la secundaria y el inicio de la universidad no hay cursos intermedios. De esta manera, el quinto año de secundaria en Perú y el primer año de estudios universitarios podría ser equivalente a los estudios de los dos años del bachillerato español.

Dada la naturaleza de la arquitectura, resulta indispensable que un estudiante de esta disciplina tenga sólidos conocimientos relacionados con las geometrías sintética, analítica y proyectiva. Así, mientras que la primera servirá de base para el estudio de las formas, la segunda se convertirá en los fundamentos de un primer curso de diseño y la tercera permitirá representar en el plano objetos tridimensionales. En una segunda etapa de la formación del arquitecto, éste requerirá del cálculo diferencial e integral y del álgebra lineal para el diseño de estructuras, así como de nociones de perspectiva para los cursos de dibujo arquitectónico

Los estudiantes que son objeto de estudio cursan la asignatura Matemática 1, la primera de las dos asignaturas de matemáticas presentes en su plan de estudios.

Según el programa analítico de dicha asignatura, está previsto que se dediquen 27 de las 42 horas totales a estudiar la geometría analítica plana y espacial. Tradicionalmente, en esta asignatura se introduce el capítulo de geometría analítica haciendo referencia a objetos que ya han sido estudiados en la geometría sintética, tales como el punto, la recta y la circunferencia. Sin embargo, los problemas que aquí se plantean adquieren una naturaleza distinta pues, mientras que en el campo de la geometría sintética la solución de problemas requiere de la construcción de soluciones exactas con regla y compás, en el campo de la geometría analítica la actividad se centra en hallar expresiones algebraicas para objetos definidos geométricamente, como por ejemplo, en el caso de las cónicas.

A lo largo de varias experiencias en el dictado de temas relacionados con geometría analítica, se ha podido observar que los estudiantes de arquitectura presentan serias dificultades cuando se trabajan las técnicas algebraicas de la geometría analítica. En particular, se ha encontrado que no logran establecer la conexión entre las soluciones obtenidas algebraicamente y las que se obtienen geométricamente. Resulta especialmente compleja la identificación de lugares geométricos, dadas las condiciones geométricas, así como la tarea de asignar ecuaciones a dichos lugares geométricos.

De estas experiencias, surge la inquietud de analizar con mayor profundidad las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con técnicas propias de la geometría analítica. También interesa identificar si existe una problematización inicial que justifique la introducción de dichas técnicas; es decir, analizar si se consideran situaciones para las que la geometría analítica resulta una herramienta eficiente para la solución. En particular, se plantea analizar si existen conexiones entre las problemáticas y las técnicas de la geometría analítica y las aprendidas en la geometría sintética, ya sea en esta etapa de la formación universitaria o durante la etapa de formación matemática básica de los estudiantes.

1.2. ORGANIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICA 1 Y DIBUJO ARQUITECTÓNICO

A diferencia de los currículos de estudios preuniversitarios donde los contenidos matemáticos suelen ser los mismos para todo un país, podría haber muchas diferencias entre los planes de estudios de una determinada carrera universitaria en distintas universidades. Sin embargo, y aunque no hay uniformidad en las diferentes facultades de arquitectura en el número de asignaturas de matemáticas y en sus contenidos, se ha encontrado que el tema de geometría analítica está presente en todos los planes de estudio revisados de universidades peruanas cuyas facultades de arquitectura son reconocidas en el medio.

A continuación se describirán los contenidos matemáticos considerados en la asignatura Matemática 1, primera asignatura de matemáticas de la especialidad de arquitectura del centro universitario en el que se llevará a cabo la investigación. Además, dado que en el primer año del plan de estudios de estos estudiantes de arquitectura se contempla también la asignatura de Dibujo arquitectónico 1, tal como se muestra en la tabla 1.1, asignatura donde también se abordan conceptos geométricos, se hará una breve descripción de la organización de la geometría en esta otra asignatura.

Tabla 1.1. Asignaturas del primer curso en el plan de estudios de Arquitectura y Urbanismo de la PUCP.

Nivel	Curso		
	Clave	Nombre	Tipo
1	URB103	Población y territorio	Obligatorio
	ARC121	Taller 1	Obligatorio
	ARC131	**Dibujo arquitectónico 1**	**Obligatorio**
	MAT116	**Matemáticas 1**	**Obligatorio**
	HUM113	Argumentación	Obligatorio

Posteriormente, con la finalidad de comprender mejor el contexto en el que se desarrolla la presente investigación, se identificará el papel que cumple la geometría en el nivel educativo previo, la educación secundaria.

1.2.1. ORGANIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LA ASIGNATURA MATEMÁTICA 1

Como se mencionó, esta es la primera de las dos únicas asignaturas de matemáticas de dicho plan; su docencia está a cargo de profesores del área de matemáticas. Sin embargo, las asignaturas de matemáticas corresponden al área de tecnologías, que también incluyen las asignaturas de estructuras, y la docencia de estas otras asignaturas está a cargo de profesores del área de ingeniería.

La asignatura Matemática 1 se desarrolla durante 14 semanas con 3 horas de clases expositivas y 2 horas de prácticas semanales, alternando entre prácticas dirigidas y calificadas. Adicionalmente se considera una semana de exámenes parciales, luego de las primeras 7 semanas de clase, y otra semana de exámenes finales, luego de las últimas 7 semanas de clase.

Según el sílabo, esta asignatura se organiza en cuatro capítulos, que son los siguientes:

Capítulo 1. Los números reales y la teoría de la proporción
Introducción: las proporciones en la arquitectura. Definición de proporción. Razones y escalas. El proceso de medir y los números racionales. Ubicación en la recta real. Construcciones con regla y compás. Representación decimal. Los números irracionales y las proporciones. Ubicación en la recta real. Exactitud, precisión y redondeo. Nociones geométricas básicas en el plano: punto, recta, segmento, rectas paralelas y perpendiculares, triángulos y cuadriláteros y circunferencia.

Capítulo 2. Funciones y simetrías
Introducción: funciones, simetrías y arquitectura. Definición, ejemplos. Funciones reales de variable real. Función lineal: modelo matemático de la proporcionalidad. Funciones cuadráticas: el proceso de completar cuadrados. Gráfica de funciones. Interpretación geométrica de las ecuaciones e inecuaciones cuadráticas. Otros ejemplos de aplicación: las funciones en la arquitectura.

Capítulo 3. Lugares geométricos
Pendiente de un segmento. Distancia entre dos puntos. Distancia entre punto y recta. La recta, circunferencia, elipse e hipérbola como lugares geométricos: condición geométrica y expresión algebraica. Las cónicas, sus expresiones algebraicas y sus gráficas. Determinación de las formas canónicas, su importancia en la localización del centro, de los vértices, en el cálculo de las longitudes del eje mayor y del eje menor, y en la determinación de las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola.

Capítulo 4. Geometría en el espacio
Fórmula de distancia entre dos puntos. Ecuación cartesiana de la esfera y del plano. Vectores tridimensionales: definición, suma, producto por un escalar interpretación geométrica de estas operaciones. Ecuaciones vectoriales de la recta y el plano. El producto vectorial: definición, propiedades. Ecuación vectorial del plano. Posiciones relativas entre rectas y planos. Ángulo entre vectores: el producto escalar: ángulo entre rectas y planos. Distancia entre puntos, rectas y planos: distancia punto-recta, punto-plano, recta-recta, recta-plano, plano-plano.

En el primer capítulo de la asignatura se plantea el estudio de los números y se tratan temas de geometría sintética, donde se resuelven problemas de representación de números en la recta con regla y compás; luego se introducen nociones de álgebra de funciones para después presentar las nociones de geometría analítica en el tercer capítulo. Se determina la ecuación algebraica que describe a un conjunto de puntos con una característica geométrica dada. Se clasifican y bosquejan la gráfica de ecuaciones de segundo grado en dos variables, señalando dominio, rango, intersecciones con los ejes y analizando simetrías y sus elementos más importantes. Finalmente, en el cuarto capítulo se introduce al estudiante en el estudio de superficies, haciendo uso de conceptos de álgebra vectorial.

En relación a la conexión entre los temas tratados, en el documento correspondiente al sílabo no se encuentran párrafos que muestren que hay intención de establecer conexiones entre los métodos introducidos en el capítulo primero y el tercero.

Además del sílabo, también se cuenta con un texto diseñado especialmente para esta asignatura por dos profesores que lo imparten desde hace varios años (Ugarte y Yucra, 2010). Según ellos mismos refieren, en la fase de diseño revisaron diversos libros para arquitectos en formación, entre los que destacan los textos de Alsina y Trillas (1992) y otros textos del área de estructuras, área para la cual las matemáticas del plan de estudios de arquitectura debe servir como lenguaje e instrumento. El texto elaborado bajo estas consideraciones, contiene los siguientes capítulos: Los números reales y la teoría de la proporción; Las funciones y su aplicación en la arquitectura; La geometría analítica en el plano y, La geometría analítica en el espacio y elementos de geometría vectorial.

En el capítulo 1 de dicho texto se realizan construcciones geométricas básicas utilizando la regla y el compás; se hacen corresponder los números racionales con puntos en la recta real y cuando es posible, también se hace lo mismo con algunos números irracionales. Se introduce la noción de proporción y con ella se generan números irracionales como el número de oro. A manera de ejemplo, se muestra el procedimiento que se sigue para representar $\sqrt{2}$ en la recta real.

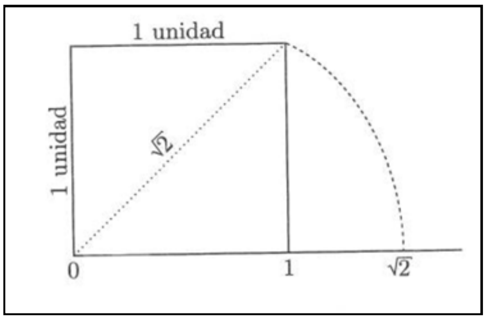


Figura 1.1. Construcción de raíz cuadrada de 2
Tomado de Ugarte y Yucra (2010 p. 64)

Según se observa en el libro, no hay una explicación detallada del procedimiento seguido para construir con regla y compás la perpendicular al segmento de longitud 1; sólo se observa el procedimiento para trasladar distancias empleando un compás.

A continuación se muestra el procedimiento que se plantea en el texto para ubicar el número $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

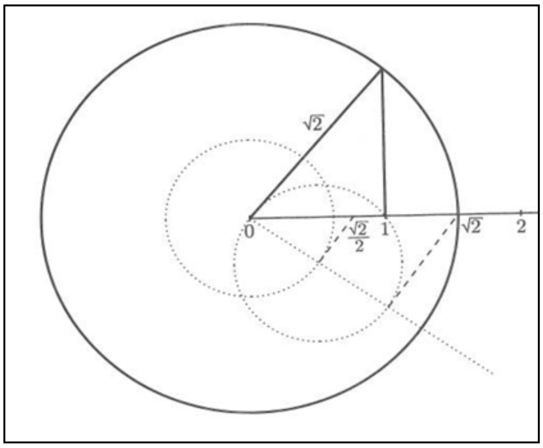


Figura 1.2. Construcción del punto medio de un segmento de longitud raíz cuadrada de 2
Tomado de Ugarte y Yucra (2010 p. 65)

Para la construcción de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se parte de la construcción previa de un segmento de longitud $\sqrt{2}$; luego, trazando segmentos paralelos adecuados, se ubica el punto medio del segmento anterior. En esta construcción se ha aplicado el teorema de Tales, sin embargo, se pudo resolver por otros caminos como por ejemplo, construyendo la mediatriz de $\sqrt{2}$.

Luego se ubican algunos números irracionales en la recta, concretamente, las raíces cuadradas de números naturales, tal como se muestra en la siguiente figura.

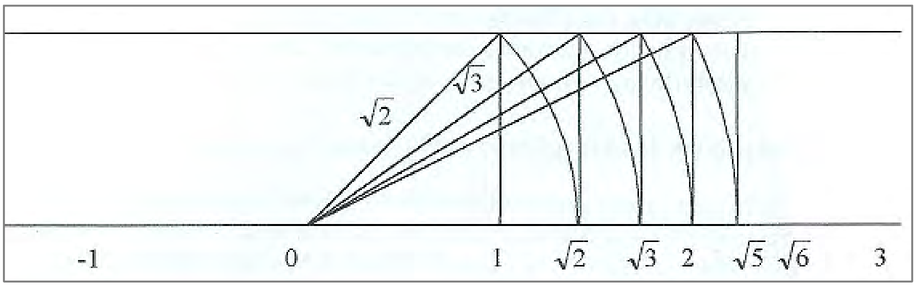


Figura 1.3. Ubicación de números irracionales en la recta
Tomado de Ugarte y Yucra (2010 p. 66)

La construcción de la representación estos números irracionales se basa en aplicaciones sucesivas del teorema de Pitágoras.

En este punto se observa que las tareas propuestas se modifican: de problemas que requerían de construcciones, a problemas que indagan sobre las distintas representaciones de un número racional. Luego hay un tratamiento de los números racionales y su expresión decimal.

En el capítulo 2, se introduce la noción de simetría por traslación y por rotación. Se plantean tareas relacionadas con la construcción de figuras simétricas. En ese mismo capítulo, se presenta la definición analítica de función, en particular la de función real de variable real, así como el estudio de las funciones elementales y sus gráficas. No se establece ninguna conexión entre este tema y el capítulo anterior.

En el capítulo 3 se introduce la geometría analítica plana, señalando que su principal contribución al desarrollo de las matemáticas ha sido la incorporación de un sistema de coordenadas. No se presentan problemas donde se haga explícito lo que se gana al usar tales coordenadas. Se presentan técnicas para calcular la distancia entre dos puntos conociendo sus coordenadas y para calcular la pendiente de un segmento. El eje central de este capítulo es el estudio de lugares geométricos elementales tales como la recta, la parábola, la elipse y la hipérbola que son estudiadas a través de sus ecuaciones canónicas. También se plantean algunos lugares geométricos cuya condición geométrica es distinta a la de las cónicas.

Se plantea como problema cómo, a partir de una condición geométrica, se puede obtener una ecuación. A esta expresión algebraica se le denomina *ecuación del lugar geométrico*. Se trabajan algunos ejemplos referidos a la búsqueda de ecuaciones de lugares geométricos de puntos que satisfacen condiciones que involucran pendientes, suma o diferencias de distancias, de modo que los resultados fueran rectas o algunas curvas cuya gráfica se puede esbozar con algunos puntos de paso. Se tiene cuidado en colocar las restricciones que son necesarias para garantizar que se cumpla la relación algebraica; así por ejemplo, si se obtiene la relación $y=1/x$ se observa que x no puede tomar el valor cero.

Se observa que no se ubican puntos particulares del lugar geométrico para “intuir” la figura que le corresponde; a partir de la condición geométrica dada, se escribe la expresión algebraica correspondiente. Una vez que el problema ha sido resuelto, no se retoma el problema inicial y por tanto, no se analiza el resultado algebraico en el contexto geométrico.

Si bien al inicio del capítulo de geometría analítica se planten problemas para hallar ecuaciones lugares geométricos, este concepto luego es dejado de lado y el énfasis se centra en el tratamiento algebraico de la expresión encontrada y en escribirla en otras formas equivalentes. Aquí se reconocen dos técnicas analíticas:

- En el caso de las expresiones lineales, se reemplazan dos puntos de paso en la expresión $y=mx+$b y se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales donde las incógnitas eran m y b.

- En el caso de las expresiones cuadráticas, se reescriben las expresiones haciendo uso de la técnica de completar cuadrados con la finalidad de identificar elementos de las curvas que permiten hacer sus gráficas.

En el desarrollo de estos temas no se hace uso de instrumentos de dibujo, y salvo el concepto de mediatriz, no se hace referencia a ningún otro concepto de geometría sintética. Se observa el abandono de la geometría sintética en beneficio de la geometría analítica.

Finalmente, en el capítulo 4 se presentan algunos elementos de álgebra vectorial para realizar el estudio de rectas y planos en el espacio.

Se observa que en el planteamiento de la asignatura, se sigue concibiendo a las geometrías sintética y analítica como campos del conocimiento sin conexión. La naturaleza de los problemas planteados en cada caso es distinta y las técnicas empleadas en sus soluciones también.

A continuación se describirán los conceptos geométricos que se abordan en la asignatura de Dibujo arquitectónico 1, impartida en simultáneo con la asignatura de Matemática 1. La finalidad es reconocer si en su desarrollo se abordan las construcciones exactas con regla y compás.

1.2.2. ORGANIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LA ASIGNATURA DIBUJO ARQUITECTÓNICO 1

Dibujo arquitectónico 1 es una asignatura eminentemente práctica y su dictado está a cargo de arquitectos. Se plantea como objetivo general introducir a los alumnos en los lenguajes de representación arquitectónica desde la observación, representación y síntesis para luego presentar las nociones de escala, precisión y construcción geométrica. En las últimas siete semanas de clase de la asignatura se imparten conocimientos sobre los instrumentos de trazado y sobre su uso correcto en las construcciones geométricas básicas. A continuación se presenta la tabla 1.2 con los contenidos abordados en dicha segunda parte.

Tabla 1.2. Contenidos geométricos abordados en la asignatura Dibujo arquitectónico 1

Concepto a desarrollar	**Contenido**	**Práctica**
-Síntesis	La representación sintética de la realidad. El apunte.	Representación rápida de un objeto y su entorno.
-Estructura geométrica	El uso de los instrumentos de dibujo. Construcciones geométricas.	Uso de los ángulos de las escuadras.
-Precisión	Construcciones geométricas con tangencias.	Uso del compás.

-Representación ortogonal	Introducción a la representación utilizando el sistema de proyección ortogonal.	Construcción de isometrías con instrumentos a partir de sus vistas ortogonales.
-Lógica geométrica	Desplazamiento, giros y cortes de un volumen	Representación isométrica de un sólido en diferentes posiciones y secciones.
-Anteproyecto	Lectura de planos y su representación tridimensional.	Bocetos a mano alzada. Dibujo en isometría con instrumentos.
-Anteproyecto	Cortes y elevaciones	Bocetos a mano alzada. Cortes en isometría con instrumentos.

Se trabajan construcciones geométricas consideradas como básicas tales como el trazado de perpendiculares, paralelas, segmentos, ángulos, triángulos, cuadriláteros, algunos lugares geométricos como la bisectriz, la mediatriz, eje radical, construcción de polígonos, tangencias, entre otros conceptos.

Sin embargo, un aspecto que debe mencionarse y que se observa al revisar los textos de esta asignatura, es que no se hace distinción entre las técnicas que generan construcciones exactas y aquellas que no lo hacen.

A manera de ejemplo, en la figura 1.4 se muestra la técnica para rectificar una circunferencia. La tarea propuesta fue construir un segmento cuya longitud coincida con la de la circunferencia.

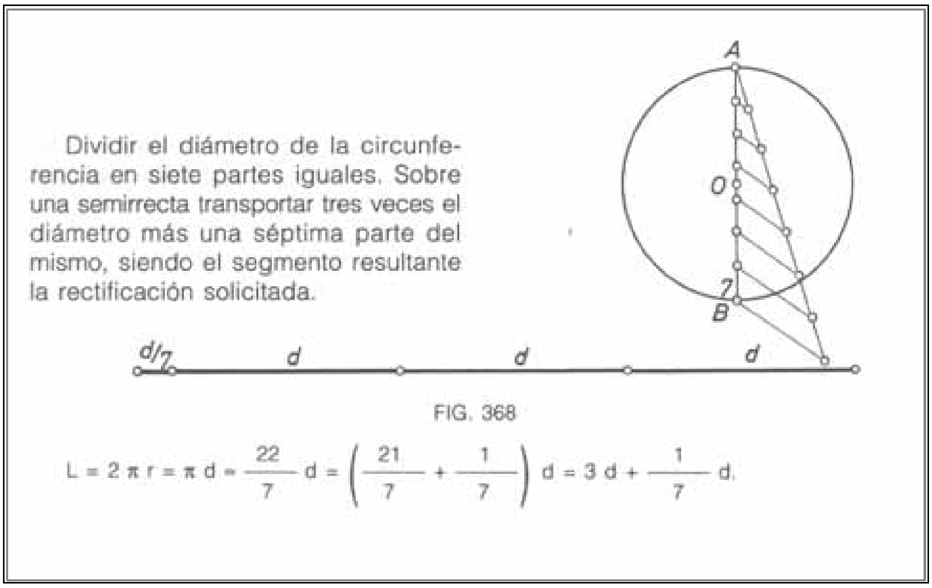


Figura 1.4. Construcción aproximada de PI
Tomado de González y Palencia (1992, p.160)

Como se observa, se reemplaza π por $\frac{22}{7}$, sin señalar que esto es sólo una aproximación del número irracional. Se da por rectificada la circunferencia sin comentario alguno, como si el segmento obtenido fuese exacto, es decir, como si su longitud coincidiera con la de la circunferencia.

Podría entenderse que dado que el método mismo implica una aproximación, no se hace necesario decir de manera explícita que no se trata de una construcción exacta. Sin embargo, esto vuelve a ocurrir cuando en el capítulo de construcciones de polígonos regulares se presentan técnicas para *construir con regla y compás* polígonos regulares *de cualquier número de lados*, aun cuando se sabe que es posible hacerlo de manera exacta sólo en el caso de algunos polígonos. Esto ocurre por ejemplo cuando se "construye" un heptágono regular (González y Palencia, 1992, p.179).

Se concluye entonces que si bien en la asignatura Dibujo arquitectónico se rescatan las construcciones con regla y compás, no se distingue aquellas que son exactas de las que son sólo aproximadas. Por otro lado, tampoco se plantea como objetivo el introducir técnicas de geometría analítica. Entonces recaerá únicamente sobre la asignatura de Matemática 1 el hacer estas reflexiones.

1.2.3. COMENTARIOS SOBRE EL TRATAMIENTO QUE SE BRINDA A LA GEOMETRÍA EN LAS ASIGNATURAS ANALIZADAS

En la asignatura Matemática 1 se recurre a las construcciones con regla y compás con la finalidad de complementar la presentación de los distintos conjuntos numéricos. En Dibujo arquitectónico 1 las construcciones tienen por finalidad elaborar dibujos para representar proyectos arquitectónicos.

En la asignatura Matemática 1 se propone tratar sólo algunas construcciones con regla y compás tales como el trazado de segmentos perpendiculares, segmentos paralelos, la división de un segmento en una razón dada y la construcción de raíces cuadradas de números naturales. Mientras que en la asignatura Dibujo arquitectónico 1 se proponen tratar muchas más construcciones además de las relacionadas con el trazado de arcos, correspondientes a diferentes secciones cónicas, que en realidad sólo serán trazos aproximados.

En Matemática 1 sólo se realizan construcciones exactas con regla y compás en el primer capítulo. Esto contrasta con lo que ocurre en la asignatura de Dibujo arquitectónico 1 en donde los procedimientos básicos se emplean de manera continua y se realizan cada vez que se les necesita.

Podría decirse que en la asignatura de Dibujo arquitectónico 1 los estudiantes encuentran un espacio idóneo para adquirir destrezas en el uso de los instrumentos como la regla, el compás y también en el uso de escuadras; cuando estas han sido adquiridas, las usan para representar objetos tridimensionales, intersecciones y giros. Mientras que en Matemática 1, en cambio, no se dedica tiempo suficiente para reflexionar sobre lo que se puede o no se puede hacer de manera exacta con regla y compás; tampoco se muestra la utilidad de estos instrumentos en la resolución de otros problemas matemáticos.

En la asignatura Matemática 1, se observa que cada procedimiento se explica individualmente y cuando se debe repetir dicha construcción en un nuevo problema, ésta se omite y se reemplaza por una expresión como *se procede de manera similar a como se hizo en la presentación de la técnica anterior*, realizando los trazos auxiliares de manera aproximada. Se podría decir que en esos casos las construcciones no son exactas. Mientras que en la asignatura de Dibujo arquitectónico 1, la falta de exactitud es más alarmante pues se debe a que no se distingue cuáles de las construcciones realizadas con regla y compás son exactas y cuáles no; incluso hay algunas construcciones cuya imposibilidad ha sido demostrada pero que en la asignatura de dibujo arquitectónico aparentemente se hacen, sin que se diga que son sólo procedimientos aproximados.

En general, se observa que no existe relación entre las dos asignaturas a pesar de que se podrían establecer conexiones interesantes entre ellas si, por ejemplo, en Matemática 1 se privilegiara la presentación de las técnicas de construcción y se organizaran los problemas que con ellas se pueden abordar; mientras que en Dibujo arquitectónico 1 se podría enfatizar en el dominio de las técnicas de construcción exacta, distinguiéndolas de las que son sólo aproximadas.

Dado que se detectó que el tratamiento de técnicas de construcción en el curso de matemáticas era casi nulo, se planteó investigar si el estudio de construcciones con regla y compás estaba contemplado en los cursos de matemáticas de la secundaria. De ser así, se podría asumir que se había cubierto este prerrequisito, necesario para continuar con el diseño de las actividades que se pretende proponer en la fase experimental del presente trabajo de investigación

1.3. ORGANIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PERUANA

La educación básica en Perú comprende los niveles educativos primaria (seis años) y secundaria (cinco años). A continuación se describirá la manera en que está organizada la geometría en el currículo de ese nivel educativo; se prestará especial atención al lugar que ocupan las geometrías sintética y analítica en los planes de estudio.

Tomando como referencia el documento oficial Diseño Curricular Nacional (2009), se observa que la geometría es uno de los temas centrales del área de matemáticas, los cuales son: Números, relaciones y operaciones; Geometría y medición; y, Estadística.

En la educación primaria, se propone tratar a las figuras geométricas, basándose en la aplicación de transformaciones en el plano, en particular de la simetría respecto de un eje y de la traslación. Se enfatiza también en que se comprendan los atributos mensurables de los objetos, así como en el empleo de unidades, sistemas y procesos de medida, y la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiadas para obtener medidas. En todos los casos, se usan relaciones métricas previamente establecidas con las que se realizan cálculos.

Sólo en sexto grado se señala el uso de instrumentos de dibujo para la construcción de ángulos, esto se refiere al uso del transportador. Sin embargo, no se hace referencia a la construcción de figuras haciendo uso de regla y compás para resolver los problemas.

Se encuentra que en los primeros años de escuela, la geometría tiene como objetivo proveer de herramientas elementales para describir el mundo, las formas de los cuerpos que nos rodean, su tamaño y posición en el espacio. Luego, el estudio de la geometría busca la clasificación de las formas, la identificación de las propiedades de las clases de objetos, de la mano de un lenguaje preciso que luego permitirá deducir las consecuencias lógicas de definiciones y convenios establecidos. Esto concuerda con el análisis realizado por Godino y Ruíz (2002).

En los dos ciclos considerados en la educación secundaria se plantean los siguientes objetivos, mostrados en la tabla 1.3, en relación a la componente geometría y medición:

Tabla 1.3. Objetivos de aprendizaje de la geometría en la educación secundaria en Perú

Ciclo VI de la EB	Ciclo VII de la EB
Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos geométricos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Resuelve problemas que requieren de razones trigonométricas, superficies de revolución y elementos de geometría analítica; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.

En este nivel educativo se plantea que el tratamiento de la geometría y medición debe centrarse en analizar las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros; comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales.

Respecto a los conocimientos geométricos específicos involucrados, a continuación se describen los que se consideran en el último ciclo de este nivel pues es allí donde está previsto un mayor tiempo para su estudio. Se presentan primero los conocimientos asociados a la geometría plana, sin coordenadas, que requerirá emplear las relaciones existentes entre los diferentes elementos de cada figura luego los sólidos geométricos tales como la esfera y el prisma; finalmente se consideran conocimientos de geometría analítica, tal como se muestra en la tabla 1.4.

Tabla 1.4. Conocimientos de geometría del cuarto grado de secundaria en Perú

Geometría plana	Geometría analítica
Semejanza de triángulos y Lema de Tales. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras. Área de regiones formadas por una circunferencia inscrita o circunscrita en un polígono. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.	Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Ecuaciones de la recta: punto-pendiente, ordenada en el origen y ecuación general. Posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y rectas perpendiculares. Ángulo entre dos rectas.
Geometría del espacio. Área de la superficie de la esfera. Volumen de la esfera. Área lateral y volumen de un tronco de prisma.	

Ambos temas se presentan de manera independiente, abordando problemas de distinta naturaleza. Por un lado, se realizan cálculos de longitudes de segmentos, áreas y distancias, utilizando los teoremas o resultados dados o demostrados previamente y por otro, se determinan ecuaciones de rectas, se calculan ángulos y distancias, empleando para ello las expresiones algebraicas obtenidas previamente.

No se observa el tratamiento de problemas en contexto de geometría plana que puedan ser resueltos de manera más eficiente con técnicas de geometría analítica. Tampoco se observa que se trabajen técnicas de construcciones con regla y compás en este nivel.

Se observa también cómo el estudio de las transformaciones de las figuras geométricas ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría basada en teoremas y demostraciones deductivas. Esto confirma el estudio realizado por Dickson, Gibson y Brown (1991).

Se puede concluir entonces que durante la educación secundaria en el Perú, el énfasis está puesto en la geometría que estudia las formas y las magnitudes asociadas a ellas, pues se abordan propiedades relativas a tamaños, distancias, ángulos, áreas y volúmenes, que conducen por tanto a la medición de magnitudes. Solamente en el último ciclo se trabajan algunos temas de geometría con coordenadas sin hacer mención explícita a conexiones entre la denominada geometría plana y la analítica.

1.4. ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE DIFICULTADES EN GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

De la revisión de documentos en la sección previa se concluyó que los estudiantes terminaban la educación secundaria, última etapa de la formación escolar en el Perú, sin haber estudiado la técnicas de construcciones con regla y compás, entendiendo a la geometría analítica como un campo del conocimiento matemático con sus propias técnicas y sin conexión con la geometría de las formas.

Se han encontrado muy pocos trabajos que profundicen en las dificultades poseen estudiantes universitarios en relación a la geometría analítica y que den cuenta además de su origen. Uno de ellos es el de Acuña (2005) en donde se señalan que no es inmediato para estudiantes de bachillerato aceptar que el punto, entendido como un objeto figural, puede además ser concebido como un objeto abstracto que no tiene dimensión y que también puede ser pensado como un objeto concreto con propiedades entre ellas la posibilidad de asignarle una posición.

Las dificultades detectadas al tratar un objeto elemental, como es el punto, permiten prever que no resultarán triviales aquellas tareas en donde se requiera establecer relaciones entre las representaciones gráficas y algebraicas de un mismo objeto. Se debe tener en cuenta que los procedimientos fundamentales para el desarrollo de problemas de geometría analítica requieren de una asociación continua entre las coordenadas de puntos y su representación, así como entre las representaciones figurales y algebraicas. Luego, la introducción de la geometría analítica debería realizarse contemplando la complejidad cognitiva de este campo de la matemática.

Teniendo en cuenta lo anterior se planteó realizar un estudio exploratorio para identificar qué dificultades específicas presentaban los alumnos luego de haber estudiado la geometría analítica desconectada de la geometría sin coordenadas. Los resultados de dicho trabajo contribuirían a la fundamentación de la presente investigación.

La experimentación se desarrolló en un contexto tradicional de enseñanza en el que se introdujo el uso de un sistema de coordenadas en el plano y una serie de procedimientos propios de la geometría analítica, tal como suele hacerse en los textos de pre cálculo y sin que éstos respondan a una necesidad previamente identificada.

El trabajo exploratorio se realizó con estudiantes de la especialidad de arquitectura de un primer curso universitario. A partir de las respuestas de los estudiantes se podrían identificar obstáculos cognitivos al tratar situaciones de geometría analítica cuando éstas se presentaban sin conexión con los conocimientos de geometría sintética.

Se optó por fijar la atención en el tipo de registro de representación que empleaban los estudiantes al dar respuesta a las preguntas sobre geometría analítica. Así, el primer objetivo específico fue analizar qué tipo de registro de representación era el que aparecía con mayor frecuencia en los procedimientos de solución de los estudiantes e identificar entre qué registros se tenía mayor dificultad para hacer las transformaciones.

Al diseñar las actividades, se tuvo en cuenta que había algunos términos empleados en geometría analítica, tales como lugar geométrico y condición algebraica, que podían adquirir distintos significados para los estudiantes o que podían carecer de sentido para ellos. Por esa razón, se consideró como un segundo objetivo específico el identificar la concepción que poseían los estudiantes sobre la noción de lugar geométrico y cómo entendían el pedido de dar como respuesta una expresión algebraica.

Por otro lado, también se planteó como objetivo del trabajo el reconocer la concepción que poseían los estudiantes sobre lo que era resolver un problema en el contexto de la geometría analítica: ¿bastaría dar una solución?, ¿se debían dar todas las soluciones posibles?, ¿la solución debía ser una expresión algebraica?, ¿la construcción de un figura podría ser admitida como la solución de un problema?, ¿la solución de un problema podría ser un número?, etc.

Hipótesis del trabajo exploratorio

Los objetivos fueron traducidos en las siguientes hipótesis de investigación, cuya confirmación o rechazo, total o parcial, vendrían acompañadas de las justificaciones respectivas.

Hipótesis 1: Los estudiantes emplean con mayor frecuencia el registro simbólico algebraico; sin embargo, presentan dificultades en el tratamiento del mismo. Por otro lado, tienen dificultades para interpretar geométricamente las soluciones obtenidas algebraicamente.

Hipótesis 2: Los estudiantes no han desarrollado una real comprensión de la noción de lugar geométrico. Esto se pone en evidencia cuando, ante el pedido de hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por un punto que satisface cierta condición geométrica, dan como respuesta algún caso particular. Sobre lo que significa obtener una condición algebraica, señalan que se trata de obtener una ecuación.

Hipótesis 3: Los estudiantes consideran que un problema ha sido resuelto en un contexto geométrico cuando obtienen una solución; no analizan si hay otras soluciones posibles. En los casos en los que emplean el registro simbólico algebraico en el proceso de solución, dan como respuesta las coordenadas de un punto.

Categorías de análisis consideradas en el trabajo exploratorio

Dado que las actividades debían permitir recoger información de naturaleza cognitiva, se consideró necesario definir *categorías de análisis*. Las categorías de análisis consideradas fueron las siguientes:

Tabla 1.5. Categorías de análisis consideradas en el trabajo exploratorio

Categorías	Descripción	Respuestas esperadas
Representación figural del enunciado	Se hace uso de representaciones que involucran la construcción de figuras empleando regla, compás o escuadras para representar los datos. Se emplea el compás para trasladar medidas.	Los estudiantes pueden realizar un esbozo de la situación descrita empleando técnicas geométricas. Sin embargo, no pueden dar solución al problema sólo con esas técnicas.
Representación del enunciado empleando coordenadas cartesianas	Se hace uso de representaciones que involucran el uso de sistemas de coordenadas, ya sea a través de la ubicación de puntos en el plano, en la recta real o de la asignación de coordenadas para representar los datos (dependiendo de la naturaleza del problema).	Los estudiantes pueden representar los datos en un plano cartesiano.
Definición de variables	Se definen variables a partir del enunciado verbal de un problema.	Los estudiantes identifican las variables del enunciado y emplean el menor número de ellas para describir el problema. Las variables están referidas a la abscisa y ordenada de determinados puntos que deben determinarse.
Planteamiento de ecuaciones	Se asocia una ecuación al enunciado verbal de un problema.	Los estudiantes establecen relaciones algebraicas entre las coordenadas de los puntos que deben determinarse para resolver el problema. Para ello emplean las expresiones algebraicas previamente estudiadas (distancia entre dos puntos, ecuación de la recta, etc.).

Resolución del problema	Se resuelve un problema empleando procedimientos algebraicos, técnicas sintéticas o probando con algunos valores.	Los estudiantes encuentran la solución a un problema, resolviendo correctamente las ecuaciones obtenidas previamente.
Número de soluciones	Se encuentra la solución de un problema y se analiza si hay otras.	Los estudiantes hallan una solución del problema y no cuestionan la existencia de otras.
Interpretación de la solución	Se interpretan en el contexto geométrico las soluciones obtenidas en el contexto algebraico.	Los estudiantes dan respuesta al problema con la solución algebraica encontrada.
Concepción sobre condición algebraica	Se interpreta el pedido de hallar una expresión algebraica como el hallar una ecuación o una expresión que relacione las coordenadas de puntos que satisfacen el problema.	Los estudiantes no identifican a qué se refiere el pedido de hallar una expresión algebraica o dan como respuesta la traducción simbólica del enunciado.
Concepción sobre lugar geométrico	Se concibe el lugar geométrico como un conjunto de puntos que satisface determinada condición geométrica y se reconoce que puede ser descrito a través de una ecuación.	Ante el pedido de hallar una ecuación del lugar geométrico descrito por un punto que satisface cierta condición geométrica, los estudiantes dan como respuesta un caso particular.

Contexto en el que se realizó el trabajo exploratorio

Participaron del estudio alumnos de la asignatura Matemática 1, durante el primer semestre académico del año 2010.

Durante 6 semanas de clase se desarrollaron los temas propuestos de geometría analítica de manera tradicional, incluyendo el tema de lugar geométrico.

Para efectos del estudio exploratorio se diseñaron y aplicaron cuatro preguntas para evaluar las categorías descritas. Los enunciados y soluciones esperadas se presentan en el anexo 1.

Las preguntas 1 y 2 fueron propuestas a 109 alumnos de los 120 alumnos matriculados en la asignatura. Las preguntas 3 y 4 fueron plateadas a 115 estudiantes matriculados.

Si los estudiantes tenían interrogantes respecto a los enunciados, debían plantearlas por escrito. El asistente de práctica presente en el aula las respondería con asesoría del investigador.

Resultados obtenidos en el trabajo exploratorio

En cuanto a la representación figural del enunciado, se encontró que pocos estudiantes la emplearon. Los resultados dan cuenta de la ausencia de técnicas sintéticas en las respuestas de los estudiantes, lo que contrasta con las técnicas presentadas durante la docencia. Así, pese a que el profesor explicó cómo desplazar segmentos de igual longitud empleando el compás, cómo trazar paralelas a una recta dada por un punto dado, cómo trazar perpendiculares y cómo ubicar el punto medio de un segmento haciendo uso de un compás, los alumnos no emplearon ninguna de estas técnicas en sus soluciones a las preguntas propuestas.

En el paso del registro verbal al analítico se pudo observar dificultad para traducir algunas condiciones geométricas. Así por ejemplo, un número considerable de estudiantes tradujo la condición *tres puntos están alineados* con *estar a la misma distancia,* y muy pocos estudiantes pudieron traducir a una expresión algebraica la condición de que un punto se encontraba en una recta determinada por dos puntos dados.

Sobre la conversión de los datos empleando dos registros de representación, se encontró que, en general, los estudiantes que hicieron representaciones gráficas en las preguntas, tuvieron más éxito en llegar a la solución que aquellos que no las hicieron.

Sobre el planteamiento de ecuaciones, se observó que cuando el problema generaba una sola ecuación, en general los estudiantes podían plantearla. Mientras que si una pregunta requiere plantear varias ecuaciones y relacionarlas, no realizan eficientemente la tarea.

Sobre la solución de un problema en un contexto de geometría analítica, al parecer los estudiantes consideraron que bastaba con hallar una respuesta para dar por resuelto el problema. Así, en un problema que admitía tres soluciones, casi todos dieron una de ellas como solución, dos estudiantes encontraron dos soluciones y sólo uno halló las tres, para lo cual debió analizar todas las posibles ubicaciones del punto solución.

Sobre los procedimientos válidos para resolver un problema de geometría analítica, algunos estudiantes consideraron que el tanteo de las respuestas era un procedimiento válido. Habría que tomar en cuenta este resultado pues, aunque es una estrategia heurística que suele valorarse negativamente, les resultó efectiva; más aún, su uso denota que el problema había sido comprendido.

Sobre la concepción de los estudiantes sobre condición algebraica, un grupo señaló explícitamente cuál era, mientras que otro grupo lo hizo implícitamente al dar por terminado el problema cuando obtuvo la expresión algebraica.

Sobre la concepción de los estudiantes sobre lugar geométrico, la mayoría no señaló explícitamente qué entendía por ello. Sin embargo, por las respuestas que brindaron parecían concebirlo como una solución particular del problema.

Conclusiones del trabajo exploratorio

En relación a la hipótesis 1:

Los estudiantes emplearon con mayor frecuencia el registro simbólico o algebraico; sin embargo, presentaron dificultades en el tratamiento del mismo. También tuvieron dificultades para interpretar geométricamente las soluciones obtenidas algebraicamente. Se registraron dificultades en el paso del registro verbal al algebraico o simbólico. Sería conveniente enfatizar en la traducción de diversas condiciones geométricas, no sólo de aquellas condiciones que generan los lugares geométricos elementales; también se podría pedir que obtengan maneras equivalentes de expresar una misma condición geométrica.

La representación figural no fue una de las privilegiadas por los estudiantes. Esto puede tener explicación en que en la docencia no se propusieron actividades que hicieran necesario su uso y a que los registros que se privilegian en el tratamiento de la geometría sintética no son los mismos que los que predominan en la geometría analítica. Se hace necesario considerar un trabajo previo en el registro figural, intermediario natural entre el lenguaje habitual y el lenguaje algebraico.

De otro lado, se tiene que los problemas de geometría abordados requerían de la conversión implícita y continua de dos registros a la vez, mientras se realizaban tratamientos en cada uno de ellos, lo que se considera que contribuye a la comprensión de los conceptos. Así, los problemas que no requieran de la interacción de más de un registro, no serán los más apropiados para la introducción de la geometría analítica como nuevo campo de conocimiento.

En esa misma línea, en los problemas planteados, hay algunos indicios de que la representación en el plano podría no influir sustancialmente en la solución del mismo. Parece ser que, dependiendo de la naturaleza del problema, el empleo de un sistema de coordenadas para representar los datos podría ser beneficioso o resultar innecesario. Es pertinente entonces tratar de identificar aquellos problemas para los que el empleo de coordenadas efectivamente facilita el camino de solución.

En relación a la hipótesis 2:

Aunque la mayoría de estudiantes no declaró, al menos de manera explícita, su concepción sobre lugar geométrico existen algunos indicios de que conciben el lugar geométrico asociado a un caso particular. Tampoco se encontraron señales sobre la concepción que poseían los estudiantes respecto a lo que es una condición algebraica ni sobre la concepción que poseían sobre lo que es una solución en un contexto de geometría analítica. Se hace necesario seguir profundizando en la concepción de lugar geométrico que poseen los estudiantes.

En relación a la hipótesis 3:

Sobre la solución de un problema en un contexto de geometría analítica, los estudiantes consideraron que bastaba con hallar una respuesta para dar por resuelto el problema.

De otro lado, se observa una cierta tendencia a dejar de lado las estrategias heurísticas a medida que los estudiantes avanzan en la adquisición de un pensamiento más formal, que está representado por el uso de técnicas analíticas. Sin embargo, el no considerar estrategias heurísticas en la solución de los problemas podría traer como consecuencia dificultades al interpretar los resultados. En ese sentido, sería pertinente explorar sobre el uso de estrategias heurísticas, para dar solución a los problemas, siendo una de ellas el tanteo.

1.5. DEFINICIÓN DE ALGUNOS TÉRMINOS QUE SE EMPLEARÁN EN EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

El primer término que debiera ser descrito es el de geometría pero dado que este término ha ido adoptando diversos significados según ha evolucionado la matemática y escapa del tema de esta investigación, se centrará la atención en definir aquellos términos a los que se hará referencia en este trabajo.

1.5.1. DEFINICIONES IDENTIFICADAS EN LOS TEXTOS

Se presentan las definiciones de geometría euclidiana, geometría sintética, geometría descriptiva, geometría analítica y lugar geométrico.

Geometría euclidiana

Se describe la *geometría euclidiana* considerando el origen de la propia geometría como ciencia, “En origen, estudio de la geometría en el marco y el espíritu impuesto por los trabajos de Euclides, particularmente por el quinto de sus postulados. La intuición y la observación jugaban un gran papel en ella”, (Bouvier y George, 1984, p. 315).

Pero también es posible entenderla según la concepción propuesta por Felix Klein (1862-1943) a inicios del siglo XX, que se basa en una axiomatización de la geometría euclídea apoyándose en un sistema de axiomas independientes.

O según la concepción moderna en la que se considera el estudio del grupo ortogonal sobre un espacio vectorial euclídeo, definiéndose geometría euclídea como:

> *El espacio métrico (en el sentido topológico), o como un estudio basado en axiomas afines, ampliado luego por la introducción de nuevos axiomas*

> *hasta llegar a una métrica euclídea. Puede definirse también como el estudio de un espacio en el cual actúa un grupo de transformaciones particular, o como el estudio de un espacio cartesiano, etc.* (Piaget, Choquet, Dieudonné y Thom, 1986, p. 298).

En esta última concepción, el grupo de transformaciones al que hacen referencia los autores es el de las isometrías.

Geometría sintética

Respecto a la *geometría sintética*, en Bouvier y George (1984) se señala que "es la geometría euclidiana trabajada por los griegos y hasta el siglo XVIII" (p. 373). Se considera como sinónimo de geometría pura, la que se entiende por oposición a la geometría analítica, pues en ella no intervienen ni sistema de referencia ni sistema de coordenadas.

En Mammana y Villani (1998, p.12) se señala que se conoce como Geometría Sintética a los métodos desarrollados para resolver preguntas en geometría que fueron desarrollados por Euclides, Apolonio y sus sucesores, previos al desarrollo de la geometría analítica. En general, este término incluye el uso de otros instrumentos o *linkages* y procedimientos para construir curvas que provienen de lugares geométricos.

Geometría descriptiva

Respecto a la *geometría descriptiva*, en Bouvier y George (1984) se señala que es el "método que permite representar las figuras del espacio sobre un plano, facilitando de esta forma el estudio de sus propiedades". (p. 244)

Geometría analítica

Sobre el término geometría analítica se tiene la siguiente descripción:

> *Sus principios reagrupan la asociación de funciones numéricas con nociones geométricas, el uso de sistemas de coordenadas y de representaciones gráficas. Para las figuras más clásicas, permite descubrir un gran número de sus propiedades geométricas, estudiando las*

> *propiedades algebraicas de las ecuaciones de estas figuras, sin necesidad de hacer dibujos a veces complicados e ilegibles, incluso engañosos. Y a la inversa, el estudio de ecuaciones algebraicas permite imaginar figuras que la observación directa del mundo natural no sugiere.* (Bouvier y George, 1984, p.34)

De otro lado, en Rey Pastor, Santaló y Balanzat (1957) se indica que la idea esencial de la Geometría analítica no fue la representación de los puntos de un espacio mediante conjuntos de números llamados coordenadas, como se suele pensar, sino la representación de los lugares geométricos por ecuaciones y el estudio de las figuras asociadas a tales expresiones mediante el algoritmo algebraico.

Lugar geométrico

Dado que se ha planteado considerar la noción de lugar geométrico como mediadora entre la geometría sintética y la analítica, se hace necesario señalar lo que se entiende por este concepto matemático. Se presenta la siguiente definición:

> *A un conjunto de puntos de un espacio afín que posee una propiedad* P, *se le denomina lugar geométrico de los puntos que poseen la propiedad* P. *Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos distintos* A *y* B *es la mediatriz del segmento* AB. (Bouvier y George, 1984, p.374).

1.5.2. POSICIONAMIENTO RESPECTO A ESTOS TÉRMINOS EN EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Cuando en este trabajo se haga referencia a la geometría sintética se estará tomando como referencia el libro I de los Elementos en donde la existencia de un objeto geométrico estaba garantizada a través de su construcción. Así, la definición de *geometría sintética* que adoptaremos en este trabajo será la de aquella geometría desarrollada por Euclides que emplea la regla y el compás de manera *exacta* y los problemas de lugares geométricos. En ella se aplicarán los axiomas, definiciones y teoremas de la geometría euclídea.

Se enfatiza en que las construcciones se realizarán de manera exacta ya que se podrían construir objetos utilizando los instrumentos mencionados sin que cumplan la condición de exactitud. Por ejemplo, si se pide trazar la mediatriz de un segmento, utilizando los instrumentos de dibujo, esta podría dibujarse:

- de manera exacta, trazando dos circunferencias, cada una con centro en cada extremo del segmento y con radio la longitud del segmento, de modo que la mediatriz quedaría determinada de manera exacta como la recta que pasa por los dos puntos de corte de estas circunferencias; o
- de manera aproximada, midiendo el segmento y ubicando aproximadamente su punto medio y trazando por él una recta perpendicular al segmento dado.

Aunque en ambos casos se ha empleado la regla y el compás como instrumentos, sólo en el primero la construcción ha sido hecha de manera exacta.

Según lo anterior, y tal como señala Aráujo (2007), las únicas construcciones exactas posibles de efectuar con regla y compás serán:

- Señalar un punto sobre una figura construida previamente
- Trazar una recta que pasa por un punto construido previamente
- Trazar una recta que pasa por dos puntos construidos previamente
- Trazar una circunferencia a partir de un centro y un radio
- Trazar una circunferencia de centro conocido y conociendo un punto de paso
- Cualquier construcción que pueda realizarse con un número finito de las operaciones descritas previamente

Como consecuencia, en las construcciones exactas los puntos serán obtenidos de tres maneras: como intersecciones de dos rectas, de dos circunferencias o de una recta y una circunferencia.

En lo que se refiere a la geometría analítica, aunque entendemos que formalmente ese término debe referirse a la geometría que emplea métodos y técnicas propias del cálculo, en este trabajo emplearemos dicha denominación en el sentido en que lo hacen los textos tradicionales, es decir al desarrollo de la geometría con coordenadas.

Así, entenderemos por *geometría analítica* al campo de estudio de la matemática que emplea un sistema de referencia y ecuaciones algebraicas y en donde se dice que un problema ha sido resuelto cuando se obtienen ecuaciones de curvas asociadas a dicho sistema de referencia. Las técnicas de solución estarán relacionadas únicamente con las de las expresiones algebraicas y el sistema de referencia no será necesariamente el sistema de coordenadas cartesianas; podría estar dado por una recta y un punto, como en el caso de las coordenadas polares.

En relación a la concepción de lugar geométrico, en este trabajo se considerará que se refiere al conjunto de puntos del plano que satisfacen una condición dada previamente.

A la definición presentada es necesario añadir el adjetivo *todos*; de otra forma, se podría estar definiendo subconjuntos en lugar de conjuntos. Un ejemplo de esta ambigüedad sería el siguiente:

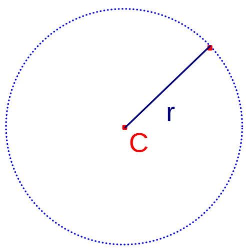
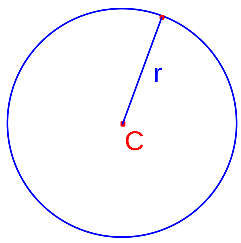
Determinar el lugar geométrico de los puntos del plano que están situados a una distancia dada, r, de un punto dado, C.	Determinar el lugar geométrico de *todos* los puntos del plano que están situados a una distancia dada, r, de un punto dado, C.
	

Figura 1.5. Ejemplo de lugar geométrico

La ausencia del adjetivo *todos* podría dar lugar a falsas interpretaciones y que figuras continuas como la de la derecha, se consideren discretas, como la de la izquierda. También podría dar lugar a que en problemas donde se pida determinar lugares geométricos, se dé por resuelto el problema solamente hallando soluciones particulares.

1.6. REFLEXIONES DEL CAPÍTULO

Como producto de la experiencia docente, se han identificado dificultades en la interpretación de procedimientos y resultados obtenidos en contextos de geometría analítica por parte de estudiantes de arquitectura que cursan una primera asignatura de matemáticas. Se atribuye esa situación a que el tema no ha sido abordado en etapas de formación previas.

De otro lado, no se encuentra relación entre las asignaturas de matemáticas y de dibujo arquitectónico que cursan los estudiantes de arquitectura en el primer año de su formación universitaria. Se plantea que es posible hacerlo si se privilegian las técnicas de construcción en matemáticas y se distingue entre las técnicas de construcción exacta de las que sólo son aproximadas haciendo referencia a las empleadas en las asignaturas de dibujo.

Luego de revisar documentos que describen la formación geométrica que recibieron dichos estudiantes en etapas anteriores a la universitaria, se encontró que en un primer momento el énfasis estuvo en el estudio de las formas y en las magnitudes asociadas a ellas, abordándose propiedades relativas a tamaños, distancias, ángulos, áreas y volúmenes, que conducen por tanto a la medición de magnitudes. En la etapa final de la educación secundaria se trabajan algunos temas de geometría con coordenadas, sin establecer conexión con los temas estudiados previamente en geometría. No se observa el tratamiento de problemas en contexto de geometría plana que puedan ser resueltos de manera más eficiente con técnicas de geometría analítica. Tampoco se observa que se trabajen técnicas de construcciones con regla y compás en este nivel.

Se realizó un estudio exploratorio para confirmar que existen dificultades cuando estudiantes de arquitectura de un primer año universitario abordan temas de geometría analítica. Una de las principales deficiencias identificadas fue el que no podían establecer conexiones entre los trabajos realizados en contextos simbólicos y gráficos, lo que muestra que no se ha comprendido el tema estudiado y corrobora lo observado durante la experiencia docente.

El hecho que los estudiantes con quienes se realiza el trabajo de investigación no dominen las técnicas propias de la geometría sintética tendrá que ser tomado en cuenta en el planteamiento que se hará posteriormente y que buscará ampliar la problemática sintética para justificar la introducción de técnicas algebraicas.

Se hace evidente la necesidad de buscar mecanismos que permitan dar sentido a los conceptos y procedimientos que se introducen al estudiar geometría analítica. Creemos que esto puede hacerse a través de un trabajo previo con geometría sintética. Para ello será necesario revisar el desarrollo histórico de la geometría, en particular el de las geometrías sintética y analítica.

Finalmente, en este capítulo se señalaron las definiciones que se adoptarán en el trabajo de investigación sobre lo que se entenderá por geometría sintética, geometría analítica y lugar geométrico.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES Y DELIMITACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN. OBJETIVOS, HIPÓTESIS Y METODOLOGÍA

En este capítulo se contempla la revisión de resultados obtenidos por la comunidad de investigadores en Educación Matemática relacionados con el aprendizaje y enseñanza de las geometrías sintética y analítica desde distintos focos de atención. Se toman como referencia publicaciones en revistas y congresos de reconocido prestigio en el medio, relacionadas con el tema de la presente investigación. Luego, se presenta el problema de investigación en términos de la identificación y diseño de situaciones que propicien el cambio de estrategias sintéticas por estrategias analíticas al resolver problemas en contextos geométricos. Se definen los objetivos generales, los objetivos específicos y las hipótesis de la investigación. Finalmente se describen las opciones metodológicas adoptadas, las cuales se fundamentan en el diseño basado en experimentos; la descripción de cada ciclo implementado se realiza considerando las fases de la investigación acción.

2.1. ANTECEDENTES

A continuación se presentan algunos trabajos de investigación relacionados con el tema de interés. Estos han sido organizados de la siguiente manera: en un primer grupo se describen diversos trabajos que cuestionan la ubicación otorgada a la geometría en el currículo; luego se presentan investigaciones sobre resolución de problemas que proponen rescatar las construcciones con regla y compás para desarrollar el razonamiento deductivo en matemáticas; posteriormente se describen algunos trabajos sobre el uso de entornos tecnológicos para el aprendizaje y enseñanza de la geometría y algunos que identifican problemas en el aprendizaje de la geometría. Finalmente, se revisan los resultados de trabajos relacionados con posibles conexiones didácticas entre las geometrías sintética y analítica.

2.1.1. INVESTIGACIONES QUE CUESTIONAN LA AUSENCIA DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA EN LOS DISEÑOS CURRICUALRES

La preocupación por identificar el lugar que debía ocupar la geometría dentro de la formación matemática de un individuo, tanto en el nivel básico como en el superior, no es reciente y guarda relación directa con la concepción que poseían los responsables de las políticas educativas respecto de las matemáticas y del quehacer matemático.

Antes de las reformas en los currículos de matemáticas, propuestas por el movimiento denominado matemática moderna, en los años sesenta, se consideraba el estudio de construcciones exactas con regla y compás y también la presentación axiomática desarrollada por Euclides. Luego, basándose en la consigna de matemáticos que lideraron el movimiento de la matemática moderna según la cual la introducción temprana a las estructuras generales repercutiría en una economía del pensamiento, se introdujeron nuevos temas en los programas de la educación secundaria. Algunos de esos temas fueron los siguientes:

- Teoría elemental de conjuntos, empleo de los símbolos, aplicaciones de un conjunto en otro, cuantificadores.
- Desarrollo de las nociones algebraicas: leyes de composición sobre un conjunto, nociones de grupo, anillo y cuerpo. Introducción del cuerpo complejo durante el último año.
- Las nociones fundamentales del cálculo diferencial e integral, las derivadas, primitivas y las funciones elementales logaritmo y exponencial.

Estos cambios se hicieron a partir de la supresión de la geometría euclidiana tradicional y, en particular, de todo lo que se refería a la geometría del triángulo, aquella donde se definen las líneas y puntos notables y los teoremas que se desprenden de estos conceptos, por considerarlos poco útiles.

Sobre los argumentos que se dieron en su momento para eliminar la geometría euclidiana tradicional al introducirse las matemáticas modernas, Thom señala que los trabajos sobre los *Fundamentos de Geometría* de Hilbert pusieron de manifiesto que el pretendido rigor de los Elementos de Euclides no era tal, pues estaba mezclado con un empleo abundante de la intuición, (Piaget, Choquet, Dieudonné y Thom, 1986, p.116).

De esta manera, se justificaba el reemplazar la geometría euclidiana por el álgebra que sí resultaría verdaderamente útil, ocultando la inutilidad de las estructuras algebraicas en estos niveles educativos.

En el mismo texto, se señala que luego de las reformas, la enseñanza de la geometría en la enseñanza media planteaba tres situaciones posibles:

- Explicar la geometría de Euclides sin ninguna modificación, como si las demostraciones fueran completamente rigurosas, lo que resultaría igualmente impresionante para los estudiantes.
- Utilizar la axiomática de Hilbert o alguna equivalente, lo que resultaría bastante complicado en ese nivel educativo.
- Abandonar toda presentación axiomática de la geometría, definiendo el espacio cartesiano como un espacio vectorial de dimensión dos, con una forma bilineal definida positiva, lo que no excluye la axiomática pero la limita al álgebra.

Uno de los argumentos a favor de la tercera propuesta, según Thom, fue el que la geometría podría integrarse con las estructuras de la matemática elemental, basadas en los conjuntos. De esta manera, se podía iniciar a los alumnos en el conocimiento de las estructuras fundamentales.

Es importante mencionar que no hubo un acuerdo generalizado entre todos los matemáticos de la época para adoptar estos cambios. Algunos, como René Thom, trataron de defender la permanencia de la geometría sintética en los planes de estudio, señalando que ésta cumplía un papel fundamental para el desarrollo del pensamiento. Se presentaron argumentos como los siguientes (Piaget et al. 1986):

- La geometría euclidiana, en el sentido de geometría sintética, “constituyó el primer ejemplo de transcripción de un proceso espacial bi o tridimensional al lenguaje unidimensional de la escritura”. Esto equivale a un proceso explícito de cambio de registro de representación.
- La función primordial del lenguaje geométrico es la de describir los procesos espacio temporales que nos rodean.
- La representación algebraica de los objetos geométricos es demasiado pobre semánticamente, respecto a las representaciones gráficas. Al ser la geometría sintética un intermediario natural entre el lenguaje habitual y el lenguaje algebraico, se hace necesario promover su uso.
- Los registros que se privilegian en el tratamiento de la geometría sintética no son los mismos que los que predominan en la geometría analítica por lo que abordar un mismo problema desde estas dos perspectivas, favorecería la comprensión matemática.

De otro lado, se resaltó que el éxito histórico de los Elementos como soporte de la geometría sintética, radicó en que fue “el primer ejemplo de transcripción de un proceso espacial bi o tridimensional al lenguaje unidimensional de la escritura” (Piaget et al. 1986, p.124). Así, constituyó un proceso explícito de cambio de registro de representación. La geometría es un intermediario natural, y tal vez insustituible, entre el lenguaje habitual y el lenguaje formalizado de las matemáticas, lenguaje en el que el objeto se reduce al símbolo y el grupo de equivalencias a la identidad del símbolo consigo mismo. Desde este punto de vista, se puede afirmar que el estadio del pensamiento geométrico es algo imposible de suprimir en el desarrollo normal de la actividad racional del hombre.

En la mayoría de experiencias desarrolladas para organizar y enseñar geometría en la educación básica en la época posterior a la matemática moderna se puso especial énfasis en la incorporación del álgebra. Debido a la gran influencia que tuvo esta corriente, la geometría sintética quedó fuera de los planes de estudio de matemática en todos los niveles (Piaget et al. 1986), esto es, se dejaron de lado las construcciones con regla y compás. Así, la geometría que se abordaba en la escuela mostraba a la geometría euclídea como el estudio del grupo ortogonal sobre un espacio. Actualmente, todavía se pueden encontrar rezagos de esta postura ya que en los programas de geometría en la educación primaria y secundaria están presentes las transformaciones en el plano.

Algunas experiencias realizadas en torno a la enseñanza de la geometría se desarrollaron en escuelas de Holanda en el primer ciclo de enseñanza secundaria. En ellas, se empezaba con el estudio intuitivo de figuras y transformaciones, para luego hacer deducciones de algunas propiedades. La meta era llegar hasta la estructura de grupo pero sin ponerla de manifiesto. Así, se completaría la estructura definitiva, sin llegar a una organización global de la geometría; sólo se establecerían sistemas locales.

También en la línea de trabajos que privilegian lo empírico para luego formalizar, Gattegno, (en Piaget et al. 1986), propone el desarrollo de un programa basado en la experiencia geométrica. Esto se refería a percibir en una situación dada lo que es invariante respecto a un grupo de transformaciones (según la idea de Klein) u organizar un conjunto de puntos en conjuntos que se pueden caracterizar por una relación. En esta línea, la enseñanza de la geometría debía organizarse a través de experiencias particulares que luego pudieran convertirse en una actividad intelectual. Por ejemplo, trazar arcos con un compás no era considerada como una actividad intelectual pero saber qué se puede hacer con un compás en el plano sí lo era.

Se han realizado trabajos para revalorar la geometría, ya que ella "hace referencia continuamente a una intuición subyacente, lo que le otorga un mayor significado que al álgebra" (Piaget et al. 1986, p.119). Mientras que existen problemas clásicos de geometría con una amplia gama de dificultades que podrían abordarse en la educación secundaria y superior, no sucede lo mismo con el álgebra, donde los problemas propuestos en el nivel básico o en los primeros cursos de universidad, son simples ejercicios donde se aplica alguna regla de cálculo conocida o donde se emplea un teorema en el que basta reemplazar un valor o donde se deben emplear argumentos de álgebra teórica, que están muy por encima de la capacidad promedio de los alumnos. La tendencia de sustituir la geometría por el álgebra es muy negativa y debería revertirse.

Sobre la geometría sintética en particular, Vagn Lundsgaard Hansen (en Mammana y Villani, 1998, p.11) menciona que en muchos países las construcciones con regla y compás han desaparecido de los programas a pesar de que muchas veces pueden resultar una muy buena forma de aproximarse a una situación dada. Incluso, en algunos casos, dichas construcciones han sido usadas para acrecentar el interés por las matemáticas de jóvenes talentosos. Propone que muchos problemas sobre construcciones geométricas sean trasladados al lenguaje matemático moderno y se enfoquen desde nuevas perspectivas, de modo que puedan volver a despertar el interés.

Incluso dentro del campo de estudio de la comunidad matemática, en los últimos años se ha retomado el interés por las construcciones geométricas, aunque no propiamente en el sentido de las construcciones con regla y compás. Se ha ampliado el conjunto de instrumentos permitido y se ha desarrollado los denominados *linkages* que buscan dibujar curvas, desde una recta, con ayuda de mecanismos. En esa línea, se encuentra la investigación sobre mecanismos (como por ejemplo linkages and kinematic geometry) desarrollada por Bartollini y Boero, tal como se señala en Mammana y Villani (1998) en donde se destaca la importancia de la experiencia geométrica. Así, se remontan al desarrollo histórico de los conceptos, como el estudio de las transformaciones geométricas como objetos matemáticos que además pueden ser representados por máquinas que los generen.

Vagn Lunsgaard Hansen (en Mammana y Villani, 1998, p. 13) señala que los métodos propios de la geometría analítica están presentes en los currículos de secundaria de muchos países; sin embargo, el tratamiento que se da actualmente a temas tales como las cónicas es superficial y sin aplicaciones, lo que podría ocasionar que este tópico desaparezca del currículo.

Por lo anterior, consideramos que la exclusión de la geometría euclidiana de los currículos de matemáticas durante el predominio de las matemáticas modernas, a favor de la inclusión del álgebra, no fue la decisión más acertada. Existen formas de revertir esta situación y una de ellas podría ser retomar el estudio de rectas, circunferencias y algunas cónicas pero desde una perspectiva sintética, para luego establecer conexiones con la geometría analítica.

Tomamos como referente para esta propuesta el trabajo de Sessa (2005), en donde se cuestiona el modo distanciado en el que usualmente se aborda el álgebra y la geometría en la escuela. La propuesta de Sessa se basa en que es posible pensar la geometría como herramienta para validar algunas leyes y resolver problemas algebraicos, así como también lo es el reconocer que el álgebra se puede convertir en una herramienta poderosa para resolver problemas geométricos. Realizar un trabajo como el descrito constituye dos facetas de un juego de marcos que permitirá que los estudiantes asignen sentido al trabajo en estos dos campos de la matemática: el álgebra y la geometría. En base a ese aporte, consideramos válida también la propuesta de repensar el trabajo en contextos sintéticos y analíticos como un juego de marcos entre la geometría y el álgebra.

2.1.2. INVESTIGACIONES SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE PROPONEN RESCATAR LAS CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

Un grupo de investigadores ha centrado su atención en la resolución de problemas, focalizándose en los problemas de geometría euclidiana. Entre estos trabajos se encuentra el de Siñeriz (2002) en donde se fundamenta el uso de problemas geométricos de construcciones pues poseen un potencial para desarrollar formas de hacer matemáticas. Este trabajo, en particular, se centra en la actividad del profesor de matemáticas. Señala también que existen diferentes perspectivas desde las cuales estos problemas pueden enfocarse. Respecto al análisis teórico de los problemas y del proceso de resolución, se contemplan las siguientes etapas: la elaboración del espacio teórico de problemas generado por cada método, la distinción entre operaciones básicas y construcciones elementales, y la realización de sus correspondientes espacios teóricos.

En dicho trabajo, se consideran como operaciones básicas la traslación de segmentos y de ángulos; la primera operación permitirá construir una circunferencia con un centro y un radio dado, y la segunda permitirá trazar una recta que tiene una dirección conocida respecto a otra recta dada. Así mismo, se consideran construcciones elementales a las siguientes: mediatriz de un segmento, perpendicular y paralela a una recta dada, bisectriz de un ángulo y arco capaz. Estas construcciones aparecerán en los procedimientos asociados a la construcción de lugares geométricos.

En una investigación posterior, Guillén y Siñeriz (2012) centran la atención en identificar elementos que deben formar parte de la conducta docente para favorecer el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas en la resolución de problemas de regla y compás. Se destaca la necesidad de incorporar problemas de construcciones geométricas en la enseñanza, pues éstos ofrecen oportunidades para desarrollar prácticas propias del quehacer matemático.

Sobre el uso de instrumentos para el aprendizaje de la geometría, se tiene el trabajo de Chassapis (1999) en el que se rescata el valor del compás para construir circunferencias dado que permite que los estudiantes puedan reconocer los elementos y propiedades del concepto matemático, a diferencia de lo que ocurre cuando emplean otros elementos, como por ejemplo, discos.

El trabajo de Chinnapan (1998) presenta explicaciones acerca de la interacción entre el conocimiento geométrico y un modelo para las representaciones mentales; la experiencia muestra que podría resultar beneficioso para el desarrollo de los esquemas geométricos el que los procesos de enseñanza se centren en la actividad de resolución de problemas.

También se tienen trabajos muy relevantes desarrollados por De Villiers (2008) y De Villiers y Garner (2007), que relacionan la geometría, en particular los lugares geométricos, con la resolución de problemas y la geometría analítica. El objetivo de estas investigaciones es ilustrar cómo se puede emplear la generalización como estrategia de resolución de problemas, en contraste con la consideración de casos particulares. Y en ese proceso, el uso de los programas de geometría dinámica se considera como un elemento fundamental.

Finalmente, presentamos el trabajo de De la Torre y Pérez Blanco (2008), en el que describen los paradigmas que componen la geometría elemental: la Geometría Natural (o Geometría I), la Geometría Axiomática Natural (o Geometría II) y la Geometría Axiomática Formalista (o Geometría III). En el citado artículo, los autores describen lo que se entiende por objeto, método y problema en los dos primeros paradigmas.

En la Geometría I, los objetos son objetos materiales, trazos sobre el papel o sobre la pantalla del ordenador, los problemas requieren de trazos y las técnicas se apoyan en la utilización de instrumentos tales como regla graduada, compás, escuadra, transportador y también el plegado, recortado o calcado. La experiencia usual en este paradigma es el dibujo con instrumentos.

La geometría II toma como objetos de estudio a objetos ideales, lo que justifica la necesidad de presentar definiciones, axiomas, como los de Euclides los que se apoyan fuertemente en la geometría I, en el sentido que se apoyan en el espacio percibido por los sentidos. La manera de producir conocimientos, es decir teoremas, es el razonamiento hipotético deductivo y eso se consigue a través la demostración. Los problemas deben tener un enunciado y la representación de los datos se hace a través de esquemas, con aspecto idéntico a los dibujos de geometría I, pero que deben ser vistos de otra forma. Los esquemas, y más generalmente las imágenes, presentan la característica de reagrupar en un todo un cierto número de hipótesis y ser la base para una secuencia de esquemas que siguen una deducción lógica. En este paradigma no hay instrumentos materiales, sólo instrumentos intelectuales: sólo el razonamiento hipotético-deductivo permite construir nuevos conocimientos.

Por tanto, la Geometría II produce en muchos casos una tecnología, en el sentido de una justificación, para las técnicas de Geometría I: los trazos usuales de la mediatriz, el reparto de un segmento en partes iguales, la multiplicación y la división geométrica, en general, las construcciones con regla y compás. Así, aunque la regla y el compás sean considerados como artefactos en geometría I, pueden jugar un papel importante en geometría II ya que evocan la cuestión de la construcción.

Sin embargo, en Geometría I existen construcciones eficaces (utilizadas por los arquitectos y otros profesionales) que no son válidas en Geometría II, pero sí en geometría I.

Consideramos que es fundamental tomar conciencia de estas diferencias porque generalmente no se hacen explícitas; basta revisar libros de geometría descriptiva para comprobar que en ellos se presentan construcciones aproximadas como si fueran exactas, tal es el caso, de la construcción del número π.

2.1.3. INVESTIGACIONES QUE RECOMIENDAN EL USO DE ENTORNOS TECNOLÓGICOS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

La creación y masiva difusión de programas de geometría dinámica ha contribuido a un notable incremento de publicaciones relacionadas con resultados de investigaciones en las que se incorporan programas informáticos. Así, se encuentran títulos de investigaciones avanzadas en el handbook del PME, editado por Gutiérrez y Boero (2006) en el que se dedican varias páginas a la presentación de resultados de investigaciones que abordan la naturaleza de la geometría mediada por la tecnología, el diseño de tareas y el aprendizaje de la geometría, y el uso de la tecnología en la enseñanza de la geometría.

La premisa fundamental de dichos trabajos es que el uso de recursos tecnológicos permite reconocer las propiedades geométricas de determinados objetos. Esto se debe a que los programas de geometría dinámica enfatizan en el reconocimiento de condiciones para crear determinadas figuras geométricas, así como en la identificación de las diferentes transformaciones que se pueden realizar en el plano y en las propiedades que se pueden establecer entre ellos, teniendo como base el modelo cognitivo de Van Hiele (Corberan, 1989). En particular, los recursos “traza” y “lugar” permiten a los profesores plantear problemas para identificar propiedades de los objetos generados que de otra manera serían muy complejas de visualizar (Laborde, 2010).

Destaca entre los programas informáticos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría el CABRI que propicia el desarrollo de una actividad pocas veces trabajada en las clases de matemáticas: la predicción. Este programa permite una confrontación inmediata entre la predicción y la observación, generando en los estudiantes una necesidad de explicar el por qué ocurre lo contrario en los casos en los que la predicción fue equivocada, (Laborde, 2001, p.305).

De otro lado, el CABRI puede ser empleado como un elemento mediador para la introducción de la prueba matemática, dado que la necesidad de validar una construcción puede surgir a partir de la observación de diversos casos particulares (Araújo, 2007, p.189)

En esa misma línea, De Guzmán (2002) señala que el trabajo con programas informáticos puede ayudar al quehacer matemático desde un punto de vista experimental y dar lugar a una transformación del campo de la geometría elemental. Propone abordar diversos teoremas de la geometría sintética destacando los relacionados con lugares geométricos, con una visión sintética pero también analítica, empleando para ello Derive, sobre todo en los casos en los que los procedimientos sintéticos no resulten satisfactorios. De Guzmán señala que la geometría elemental, entiéndase, geometría sintética, fomenta la intuición en el plano y en el espacio, sin descuidar el razonamiento lógico que se encuentra muy cerca del pensamiento matemático del mundo griego antiguo. Además, ofrece un aporte interesante al abordar algunos problemas de lugares geométricos cuya forma y solución geométrica es difícil de intuir y que, más bien, son más fáciles de entender usando las técnicas de la geometría analítica acompañadas de un software simbólico. Así, en dicho texto se presentan algunos problemas de geometría sintética para los que la geometría analítica proporciona herramientas más eficientes.

Finalmente, destacamos el trabajo de Iranzo y Fortuny (2009) en el que se caracterizan las estrategias de resolución de los alumnos empleando geometría dinámica, así como lápiz y papel, se analizan los procesos de instrumentación e instrumentalización para esbozar diferentes tipologías de alumnos y se explora la influencia conjunta del uso de ambos medios en la adquisición de conocimiento, visualización y pensamiento estratégico en el alumno. Se obtuvo como resultado que el uso de GeoGebra favoreció el empleo de múltiples representaciones de conceptos geométricos y ayudó a evitar obstáculos algebraicos, permitiendo centrarse en los conceptos geométricos, así como a resolver los problemas de otra forma.

2.1.4. INVESTIGACIONES QUE IDENTIFICAN PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

En el trabajo de Radillo, Nesterova, Ulloa, Pantoja y Yakhno (2005) se señalan algunas dificultades que tienen los estudiantes cuando resuelven problemas en este campo. Y se explican en base en a la diferencia de significado que tienen algunos términos dentro del contexto euclidiano y en un contexto más cotidiano. Así, mencionan que hay términos del español especializado que tienen significados muy precisos con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano; por ejemplo expresiones como “un punto cualquiera” o “uno y sólo uno”. Indican también que hay términos del español especializado a los cuales corresponden dos o más condiciones que deben representarse con dos o más expresiones simbólicas o características en la representación gráfica, por ejemplo en el caso de la mediatriz. Luego señalan errores de sintaxis, ya sea en la notación simbólica o en la representación gráfica, y errores semánticos, al traducir recta como un segmento por ejemplo. Estos investigadores plantean que las reglas para la notación simbólica de la geometría euclidiana deberían presentarse asociadas a definiciones, propiedades, axiomas y postulados que contribuyan a darles sentido.

Un grupo de trabajos se asocia al desarrollo de la visualización y al reconocimiento de las representaciones semióticas involucradas (Duval, en Mammana y Villani, 1998). También en el artículo de Fortuny, Iranzo y Morera (2010) se hace mención a un trabajo de Duval (1999) en el que se identifican tres procesos cognitivos implicados en el desarrollo de la actividad geométrica: la visualización de procesos (entendiendo por ello la interpretación de diagramas geométricos), los procesos de construcción mediante herramientas (en la resolución de problemas de geometría se debe explorar, manipular e interpretar los datos para que emerjan estrategias de solución) y el razonamiento, la conjetura y la prueba (a través de la relación entre las representaciones y los conocimientos teóricos).

En esa misma línea, el reciente trabajo de Fernández (2013) presenta una completa revisión bibliográfica sobre las principales cuestiones formuladas alrededor de la visualización y el razonamiento geométrico y espacial. Justifica el interés en el tema a partir del desarrollo de nuevos entornos de aprendizaje que conllevan a cambios en los recursos semióticos y en las representaciones, y que llevan a investigar sobre los procesos de visualización involucrados. A partir del análisis bibliográfico realizado por Fernández, se concluye que en la actualidad la visualización es considerada en el aprendizaje de las matemáticas como una componente clave para el razonamiento, la resolución de problemas y la demostración.

2.1.5. INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON LAS CONEXIONES ENTRE LAS GEOMETRÍAS SINTÉTICA Y ANALÍTICA

Algunas investigaciones se aproximan de manera más directa con lo que se propone en el presente trabajo de investigación pues se centran en las relaciones entre los problemas que pueden abordarse desde las perspectivas sintética y analítica, así como en contrastar las técnicas propias de cada una de estas geometrías (Gascón, 2002; Ortega y Ortega, 2004; Wilhelmi, 2007; Font, 1999).

Uno de estos trabajos es el desarrollado por Ortega y Ortega (2004) en el que se retoman los diez problemas de Apolonio, con la finalidad de mostrar distintas formas de razonamiento en el proceso de solución. Como se sabe, estos problemas consisten en dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de tres elementos dados (que podrían ser puntos, rectas, circunferencias o una combinación cualquiera de ellos). El problema general da lugar a diez casos posibles y cada uno de ellos es resuelto en el artículo, en primer lugar, de manera exacta empleando técnicas propias de la geometría sintética y luego, planteando y resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes, lo que corresponde a emplear técnicas de la geometría analítica. Se observa que en algunos casos, las técnicas de la geometría sintética resultan más económicas en razonamiento que las de la geometría analítica, mientras que en otros casos, éste es mucho más rico. A medida que se cambian los objetos, la complejidad de los problemas se incrementa, pudiéndose observar que si las construcciones con regla y compás necesarias para la solución fueran interiorizadas, se producirían aprendizajes correspondientes a las últimos niveles del modelo de razonamiento geométrico propuesto por Van Hiele. Así, se reflexiona sobre la conveniencia de emplear la geometría sintética o la geometría analítica, en cada caso.

Se señala también que el tipo de razonamiento que exige el resolver los problemas de Apolonio empleando la geometría analítica, en general, es más pobre ya que la condición de tangencia se traduce siempre en un algoritmo en el que hay que resolver un sistema de ecuaciones y exigir que la solución sea única. Mientras que el resolver los problemas de tangencia desde la geometría sintética requiere abordar cada problema de manera independiente (aunque luego se encuentren similitudes entre uno y otro). Se concluye que ambas técnicas son complementarias y que el uso de distintos razonamientos garantizará aprendizajes mucho más ricos.

Colocando un mayor énfasis a las técnicas propias de la geometría analítica, se encuentra el trabajo desarrollado por Wilhelmi (2007). Este se centra en un proceso de estudio para la determinación de una circunferencia dada su ecuación implícita, empleando distintos métodos y predominando el de las transformaciones algebraicas. Sin embargo, al haber sido esa técnica la introducida por el profesor sin una problematización inicial, se observan luego acciones irresponsables por parte de los estudiantes. Se concluye el artículo reflexionando sobre la necesidad de que la técnica de las transformaciones algebraicas surja como la síntesis de un proceso de estudio que articule las obras de la geometría plana con regla y compás, y la geometría analítica que actualmente en muchas instituciones de enseñanza se identifica con la determinación del lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una cierta relación algebraica.

En la búsqueda de situaciones que articulen las obras sintética y analíticas se encuentra el trabajo de Font (1999) en donde se analiza el desarrollo de la geometría analítica realizado por Descartes y en donde se plantea considerar al problema de Pappus como la base de la "situación fundamental", en el sentido de la teoría de situaciones didácticas, de modo que ésta justifique la emergencia de la geometría analítica.

Por otra parte, Gascón (2002) hace una revisión del currículo español y propone emplear algunas situaciones relacionadas con la noción de lugar geométrico en la enseñanza de la geometría en secundaria, de modo que permitan complementar las técnicas sintéticas con las analíticas. La propuesta mencionada es interesante ya que se centra en la técnica de los "dos lugares geométricos"; sin embargo, no se detalla de qué manera la problemática planteada generará en el estudiante la necesidad de evolucionar en la técnica que antes dominaba.

De otro lado, se observa que para afrontar las situaciones propuestas, los estudiantes deben dominar las técnicas de construcciones de regla y compás y haber adquirido algunas concepciones particulares respecto a lo que significa resolver un problema en ese contexto; así, un problema quedaría resuelto cuando se hubiera construido una figura o un elemento geométrico que cumpliera con la condición planteada. Y como se ha descrito anteriormente, estos aspectos no son abordados en la formación matemática de los estudiantes en la educación secundaria y, por tanto, la inclusión de problemas con esas características no será trivial, ya que los estudiantes no cuentan con los conocimientos previos necesarios.

2.2. RELEVANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

Se han realizado trabajos para revalorar la geometría, en el sentido de geometría sintética. Una de las razones para ello es su función como descriptora del mundo. La función primordial del lenguaje geométrico es la de describir los procesos espacio temporales que nos rodean; así, la geometría es un intermediario natural, y tal vez insustituible, entre el lenguaje habitual y el lenguaje formalizado de las matemáticas, lenguaje en el que el objeto se reduce a un símbolo y el grupo de equivalencias a la identidad del símbolo consigo mismo. Según Thom, la geometría "constituyó el primer ejemplo de transcripción de un proceso espacial bi o tridimensional al lenguaje unidimensional de la escritura" (Piaget et al. 1986, p.124). Este proceso conlleva una transformación explícita de cambio de registro de representación. Desde esta perspectiva, el estadio del pensamiento geométrico es algo imposible de suprimir en el desarrollo normal de la actividad racional del hombre.

De otro lado, Thom señala que la geometría "hace referencia continuamente a una intuición subyacente, lo que le otorga un mayor significado que al álgebra"

(Piaget et al. 1986, p.119). Por esta razón, desde un punto de vista pedagógico, la tendencia a sustituir la geometría por el álgebra es muy negativa y debería revertirse. Actualmente, en las propuestas educativas hay algunos elementos que buscan establecer conexiones entre la geometría y el álgebra, básicamente a través de las transformaciones; sin embargo, el énfasis está puesto en el tratamiento algebraico más que en el tratamiento geométrico y en la identificación de las propiedades propiamente algebraicas que cumplen los objetos involucrados.

En la matemática misma también se pueden encontrar ejemplos de problemas clásicos de geometría con una amplia gama de dificultades que podrían abordarse en la educación básica y superior, (Ortega y Ortega, 2004). Esta situación contrasta con la del álgebra, donde los problemas propuestos en el nivel básico o en los primeros cursos de universidad, son simples ejercicios que requieren la aplicación de alguna regla de cálculo conocida, o donde se emplea un teorema en el que basta reemplazar un valor o donde se deben emplear argumentos de álgebra teórica, que están muy por encima de la capacidad promedio de los alumnos.

La falta de conexión al enseñar distintos campos de la matemática también es una característica de lo que ocurre al presentar la geometría sintética y la geometría analítica en la educación básica y superior. Tal como señala Gascón (2002), esta separación corresponde a un análisis epistemológico superficial. A este hecho se suma el que en la educación secundaria se trabaja una geometría sintética rígida, donde no se consideran técnicas distintas para abordar un mismo tipo de problemas, en donde no se reflexiona sobre la técnica empleada y donde ésta no se revierte para realizar la tarea inversa. Como alternativa, propone emplear algunas situaciones relacionadas con la noción de lugar geométrico, de modo que permitan complementar las técnicas sintéticas con las analíticas. La propuesta de Gascón se centra en la técnica de los “dos lugares geométricos” y trata de mostrar cómo se puede ir ampliando una problemática de modo que las técnicas que antes eran útiles, ahora ya no lo sean.

Consideramos importante mencionar que no siempre el abordar los problemas geométricos con técnicas algebraicas será más eficiente. Existen problemas que se resuelven más fácilmente desde la geometría, como por ejemplo, determinar el ángulo máximo de visión el cual se puede resolver aplicando el teorema del ángulo inscrito y el concepto de potencia de una circunferencia (Alsina, 2011, pág. 9). Luego, aunque en el trabajo se mostrará que la geometría analítica es una herramienta más potente para determinados problemas, los problemas escolares que ella resuelve, por lo general también pueden ser resueltos en geometría sintética y geometría descriptiva.

De otro lado, aunque los problemas que son resolubles con regla y compás, problemas de la geometría sintética, puedan estar completamente resueltos dentro del campo de investigación de la comunidad matemática, aún tienen un importante potencial para emplearse en la enseñanza de la geometría. Por ello, se hace necesario buscar los medios para reintegrar los valores de esta geometría al mundo de la geometría moderna. En particular, muchos problemas sobre construcciones geométricas deberían ser trasladados al lenguaje matemático moderno y deberían enfocarse desde nuevas perspectivas, de modo que puedan volver a despertar el interés.

Además, los objetos matemáticos que se abordan en un primer curso de geometría analítica (punto, recta, circunferencia, entre otros) son también considerados en el campo de la geometría sintética. Pero existen diferencias en el tipo de registros de representación y en las tareas que se proponen en cada caso. Teniendo en cuenta resultados de trabajos previos (Duval, 1998, 2000, 2004, 2006a, 2006b; Janvier, 1987), se respalda el supuesto de que el tránsito entre distintas representaciones de un mismo objeto matemático favorece la comprensión. Este hecho permite afirmar que si se establece una mayor conexión entre la geometría sintética y la geometría analítica, es posible que se produzca una mejor comprensión de ambas geometrías y en particular de la geometría analítica, tópico de estudio fundamental en este nivel de formación de futuros arquitectos.

2.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema de investigación consiste entonces en identificar y, si es necesario, diseñar situaciones que propicien el cambio de estrategias sintéticas por estrategias algebraicas al resolver problemas en contextos geométricos.

En términos cognitivos, esto se evidenciará cuando los estudiantes reconozcan las limitaciones de las técnicas de construcción de la geometría sintética y las ventajas del trabajo con técnicas algebraicas, en particular, con aquellas relacionadas con la construcción de lugares geométricos tales como rectas y cónicas. Para ello, los problemas se caracterizarán según la cantidad y complejidad de transformaciones semióticas que se deban realizar para su solución. Será necesario disgregar en procedimientos mínimos los pasos que se siguen durante la solución de un problema, estableciendo equivalencias matemáticas de soluciones en contextos geométricos y algebraicos, así como diferencias cognitivas al seguir dichos procedimientos.

Como resultado de este trabajo se tendrán insumos para construir secuencias de aprendizaje que justifiquen el empleo de conceptos, técnicas, argumentos y representaciones propios de la geometría analítica, que luego podrán ser retomados en asignaturas para las que dicho conocimiento sea un requisito.

2.4. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En primer lugar se presentan los objetivos generales de la investigación y, en segundo lugar, los específicos.

Objetivos generales de investigación:

- Establecer conexiones entre dos campos del conocimiento matemático que hasta el momento se estudian separadamente en la secundaria y en el primer año de universidad: las construcciones exactas con regla y compás y la geometría analítica. Esto se hará a través de la identificación de problemas para cuya solución se requiera inicialmente de técnicas de geometría sintética pero luego éstas deberán evolucionar para dar lugar a técnicas algebraicas.
- Analizar de qué manera el tratar los conceptos geométricos de recta, circunferencia y cónicas, empleando distintas representaciones semióticas tales como figurales, algebraicas y gráficas, influye en una real comprensión de estos temas.

Objetivos específicos de investigación:

Así, se definen como objetivos específicos de investigación los siguientes:

- Identificar algunos problemas de geometría sintética que permitieron el desarrollo de la geometría analítica; para ello, se analizará la evolución de la geometría, con especial énfasis en la época en donde se realizó un estudio sistemático de determinados lugares geométricos.

- Comprender la complejidad cognitiva de los problemas geométricos; esto se hará identificando las UEI que intervienen en procedimientos de solución de problemas de geometría, la mayoría de los cuales deberá cumplir como requisito el que puedan ser abordados tanto desde una perspectiva sintética como algebraica.

- Identificar conflictos potenciales que podrían presentarse cuando los estudiantes resuelvan problemas de geometría, teniendo en cuenta los principios de la teoría de registros de representación semiótica y las UEI que éstos involucran.

- Justificar la ampliación del campo de conocimiento de la geometría sintética a la geometría analítica diseñando situaciones que contribuyan a este fin. Ello deberá concretarse con la elaboración y valoración de una propuesta que pueda emplearse en contextos similares al de esta investigación y que permita justificar el paso de una geometría de construcciones a una geometría con coordenadas.

2.5. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Una vez fijados los objetivos de la investigación y considerando la experiencia como docente de estudiantes de arquitectura en sus primeros años, los supuestos de la teoría de registros de representación semiótica y de la teoría de cambio de marcos, así como los resultados de la experimentación previa, se enuncian las siguientes hipótesis de investigación, que fijan un posicionamiento del equipo investigador sobre los objetivos enunciados.

H1: En el desarrollo histórico del concepto de lugar geométrico se encontrarán evidencias que justifiquen la emergencia de la geometría analítica; estas evidencias podrán ser adaptadas para ser desarrolladas en el nivel de enseñanza en el que se desarrolla esta investigación.

H2: Es posible caracterizar la actividad matemática que se debe desarrollar al resolver determinados problemas de geometría sintética con un número finito de procedimientos, así como establecer relaciones entre estos y los procedimientos del álgebra que involucran los mismos objetos matemáticos.

H3: Se establecerán conjeturas sobre los comportamientos de los estudiantes y éstas se podrán contrastar en el desarrollo de la investigación. Los estudiantes presentarán dificultades al realizar tareas que requieran de construcciones geométricas y éstas se incrementarán a medida que la solución posea un mayor número de unidades elementales de información.

H4: La implementación de una propuesta didáctica que exija abordar problemas sobre lugar geométrico desde los contextos geométrico y algebraico, basada en construcciones geométricas, contribuirá a la comprensión de dicho concepto.

Será la propia investigación la que confirme estas hipótesis, las reformule y, en todo caso, explique cómo se verifican o no de forma pormenorizada.

2.6. OPCIONES METODOLÓGICAS ADOPTADAS

Para el diseño de esta investigación se hace necesario reconstruir la génesis del conocimiento en un campo conceptual determinado que, en este caso, es el paso de la geometría sintética a la geometría analítica.

Se requiere entonces emplear una metodología de investigación cualitativa que permitirá estudiar las condiciones bajo las cuales se puede constituir la geometría analítica como un saber a partir de las limitaciones de la geometría sintética.

Confrey (2006) señala que el método de investigación Diseño de experimentos (Design experiments) resulta pertinente cuando se pretende hallar corredores conceptuales (*conceptual corridors*), en el sentido de un conjunto de caminos fructíferos posibles para el aprendizaje de un contenido conceptual. En la misma línea, Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer and Schauble (2003) presentan al Diseño de experimentos como un método de investigación idóneo cuando el objetivo es analizar procesos de aprendizaje de dominios específicos. Es por ello que consideramos pertinente emplear elementos de esta metodología para el presente trabajo.

2.6.1. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

A continuación se señalan algunas características del método Diseño de experimentos, tal como lo menciona Karrer (2006), así como sus implicaciones en el presente trabajo.

(1) El método de investigación es de naturaleza intervencionista por lo que será fundamental distinguir cuáles son los elementos que representan el objeto de investigación de aquellos que son considerados como prerrequisitos. El tener en cuenta los aportes de trabajos de investigación existentes ayudará a establecer esta distinción.

Para ello se deberán presentar los resultados de investigaciones relacionadas con el trabajo a realizar. En este caso, algunas de ellas se referirán a las transformaciones que se llevan a cabo en los aprendizajes de conceptos geométricos y especialmente a las que generan mayores dificultades.

(2) El objetivo fundamental de la investigación debe ser aportar tanto en el desarrollo de teorías como en el proceso de aprendizaje de un determinado tópico; en particular, puede dar luces sobre el desarrollo de un modelo cognitivo sobre el proceso que desarrollan los estudiantes cuando comprenden una idea matemática específica (Cobb et al. 2003).

En nuestro caso, el énfasis estará puesto en identificar los procesos de transformación entre registros que se realizan cuando se resuelven problemas en contextos de geometría sintética y luego en contextos de geometría analítica. También se pondrá atención al número de UEI que intervienen en la solución de las tareas propuestas en los marcos geométrico y algebraico. Dichos elementos permitirán justificar la complejidad de las tareas propuestas.

(3) El diseño inicial debe responder a una serie de conjeturas sobre los significados que sustentarán una forma particular de aprendizaje. Según señala Confrey (2006), el método del Diseño de experimentos contempla la elaboración de modelos de resultados probables, íntimamente conectados con la teoría que soporta el diseño.

Dado que la investigación estará orientada por la teoría y dirigida por la práctica, se dice que se trata de un método de investigación pragmático y teórico. Desde esta perspectiva, es fundamental que la propuesta planteada en el experimento venga acompañada de una serie de predicciones sobre los comportamientos que tendrán los estudiantes en interacción con las actividades, apoyadas en supuestos teóricos definidos previamente. El sustento teórico fundamental que permitirá brindar explicaciones a los comportamientos observados será la teoría de Registros de Representación Semiótica y el Juego de Marcos.

En este trabajo se contempla una fase de predicción en la que se establecerán conjeturas sobre los comportamientos de los estudiantes, especialmente en lo que se refiere a las respuestas a la familia de problemas propuestos para justificar la geometría analítica.

(4) Debido a la naturaleza dinámica del método, se considerarán ciclos de experimentación, de modo que los cambios de uno a otro respondan a las informaciones obtenidas en el ciclo previo y a los cambios realizados.

En este método se pone especial atención a la forma en la que los estudiantes interactúan con las situaciones propuestas; esto permitirá identificar los procesos cognitivos complejos que se desarrollan cuando esto ocurre y brindará elementos para realizar modificaciones entre ciclo y ciclo.

Las situaciones diseñadas serán puestas a prueba durante la realización del experimento y podrán ser refutadas o reformuladas y nuevamente puestas a prueba en una siguiente experimentación. En este trabajo se considerarán cinco ciclos de experimentación, durante los cuales las situaciones se irán modificando de modo que respondan mejor a los objetivos planteados.

Se emplearán diversas técnicas de recogida de datos tales como cuestionarios, entrevistas, pruebas escritas, registro de clases, entre otros.

(5) Sobre la validez de la investigación, se considerará una validación interna dada por el contraste entre lo previsto y lo ocurrido durante el proceso de estudio observado. Lo que a su vez contribuirá a poder predecir lo que ocurrirá en contextos similares al de este estudio.

2.6.2. ETAPAS CONSIDERADAS EN LA INVESTIGACIÓN

En este subapartado se describen las etapas en las que se desarrolla la investigación:

Primera etapa

Se deben revisar los trabajos previos vinculados con los objetivos de investigación; esto implica señalar los resultados obtenidos en investigaciones relacionadas con esta, así como explicitar en qué medida lo propuesto en el presente trabajo contribuirá al desarrollo de un nuevo conocimiento. Es decir, se debe especificar el punto de partida, así como los elementos que interesará observar en la investigación. Esto forma parte de la revisión de antecedentes presentada en la sección 2.1.

Segunda etapa

Dado que se pretende elaborar una propuesta que permita conectar la geometría sintética con la analítica, se debe considerar un trabajo piloto documentado con resultados que justifiquen el desarrollo de nuevos métodos.

Para este trabajo en particular, se requiere entonces recoger evidencias de las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a problemas para cuya solución requieren emplear técnicas algebraicas propias de la geometría analítica cuando la presencia de dicho conocimiento no ha sido justificado. Esta etapa corresponde al trabajo experimental descrito en la sección 1.4.

Tercera etapa

Aunque esta etapa no está contemplada explícitamente en el método de investigación adoptado, se hace necesario describir el desarrollo de la geometría, poniendo especial atención a las razones que permitieron la evolución de la geometría sin coordenadas a la geometría analítica, en el sentido de geometría algebraica.

En dicho proceso se buscará encontrar una justificación epistemológica de que es posible conectar la geometría sintética con la geometría analítica.

Cuarta etapa

Se debe definir el sustento teórico en el que se basará la investigación. En esta sección se describirán los elementos de la teoría de registros de representación semiótica y el cambio de marcos a los que se recurrirá para predecir y explicar los comportamientos matemáticos de los estudiantes.

Se identificarán las unidades elementales de información mínimas que se ponen en juego en la solución de problemas en contextos geométricos y en contextos analíticos. En los casos en los que los problemas adquieran sentido en ambos contextos, se identificará cuáles presentan una mayor complejidad cognitiva, teniendo en cuenta si las transformaciones cognitivas para la solución son tratamientos o conversiones, así como el número de unidades elementales de información que intervienen.

Se mostrará que, desde un punto de vista cognitivo, teniendo como referencia a la teoría de registros de representación semiótica y a los trabajos de investigación existentes, se hace necesaria una conexión permanente entre registros, en particular entre los registros de representación figural y simbólico, para que se produzca una real comprensión de los conceptos.

Quinta etapa

Teniendo en cuenta los resultados previos, se abordarán las siguientes preguntas:

- ¿Para qué problemas el conocimiento pretendido, que en este caso es la geometría analítica, será la mejor herramienta de solución? ¿En qué situaciones el conocimiento relacionado con la geometría analítica será necesariamente movilizado?
- ¿Qué características debe tener una familia de problemas que inicialmente puedan ser resueltos con los procedimientos propios de la geometría sintética y que luego, con un cambio de variables adecuado, requieran del empleo de la geometría analítica?

Así, se propondrán algunas situaciones que permitan justificar el paso de geometría sintética hacia la geometría analítica plana, en particular aquellas que se pueden resolver empleando construcciones con regla y compás pero que al modificar algún dato del enunciado, requieran de otros procedimientos para su solución. En particular se considerarán problemas que involucren rectas, circunferencias y cónicas.

Sexta etapa

Proponer cuáles serían los comportamientos matemáticos esperados por parte de los estudiantes al enfrentarse a las situaciones planteadas para establecer conexiones entre la geometría sintética y la analítica, teniendo en cuenta los distintos registros de representación semiótica a los que se evocará en la solución de los mismos y al número de UEI que intervendrán. Así, los supuestos de la teoría de registros de representación y el cambio de marcos serán tomados en cuenta para predecir cuáles son aquellas tareas que pueden ocasionar mayor dificultad a los estudiantes en términos de su complejidad cognitiva.

En este proceso se identificarán cuáles son las estrategias base que poseen los alumnos al abordar problemas de geometría sintética y de geometría analítica. Además se hará necesaria la identificación de variables, de modo que la modificación de alguna de ellas propicie el cambio de estrategias de acción en los estudiantes.

En esta etapa será fundamental la caracterización del grupo de estudiantes y la determinación el conjunto de circunstancias en las cuales se podría reproducir el estudio; por ejemplo, se considerará el efecto del uso de la tecnología, el que se haya o no usado el programa con los estudiantes antes, entre otros aspectos.

Sétima etapa

Implementar las situaciones propuestas. En esta etapa el profesor -investigador debe adoptar una postura analítica con los alumnos ya que deberá identificar en sus razonamientos los procesos mentales que realizan al interactuar con las situaciones.

Dependiendo de los cambios que realicen los estudiantes en sus estrategias iniciales, estos conseguirán el éxito o el fracaso al intentar resolver la situación. Por ello, será fundamental registrar la mayor cantidad de información sobre el proceso desarrollado lo que se hará empleando distintas formas de recolección de datos: cuestionarios, pruebas, análisis de discursos, entre otros.

Octava etapa

Para analizar el trabajo de los estudiantes y la influencia que ha tenido el ambiente de aprendizaje propuesto será necesario establecer criterios o categorías de análisis, que permitan validar las conjeturas elaboradas previamente.

Posteriormente se intentará contrastar o verificar las hipótesis iniciales con los resultados obtenidos. Se deberá considera que los datos son cualitativos y que por ello el interés estará en estudiar las variables de proceso. Esto no impedirá recurrir a la cuantificación de algunos resultados para dar cuenta de cuáles son los comportamientos predominantes. Se explicarán los resultados teniendo como soporte la teoría de registros de representación semiótica.

En función a lo encontrado, se realizarán nuevas experimentaciones, con grupos similares. Luego se identificarán los fenómenos que se han presentado con regularidad en la implementación en los distintos ciclos.

Una de las finalidades de este trabajo de investigación apunta a una intervención en la práctica profesional con la intención de ocasionar una mejora y esa es justamente una característica de la metodología investigación acción (Latorre, 2003). Algunas características significativas de la investigación acción son las siguientes:

- *Es cíclica: requiere de repetir los pasos en secuencias similares.*
- *Es participativa: todos los involucrados participan del proceso de investigación.*
- *Es reflexiva: en cada ciclo se considera una fase de* reflexión crítica sobre el proceso y los resultados obtenidos.

Las fases que permiten describir el desarrollo de cada ciclo de experimentación se presentan en la figura 2.1.

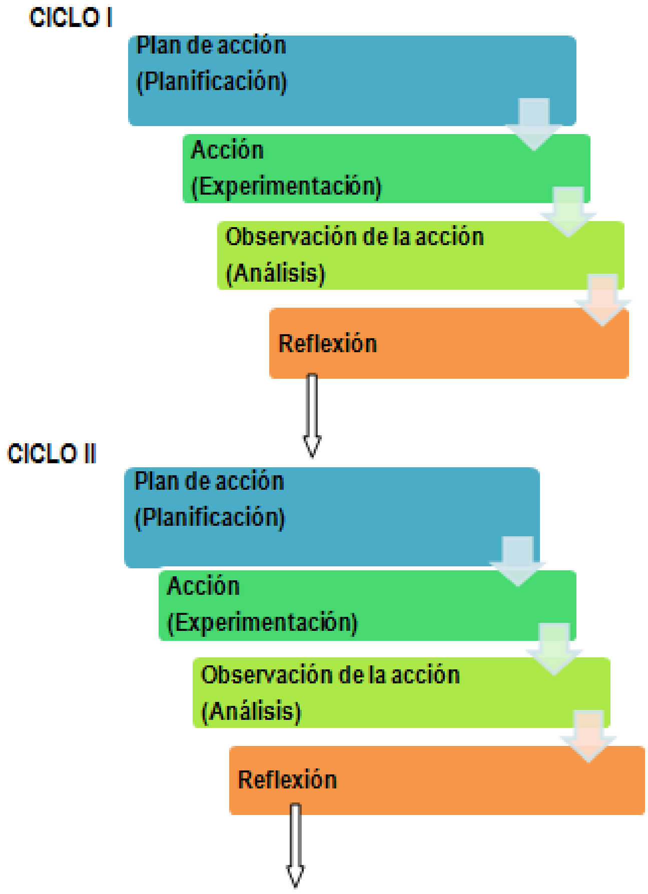


Figura 2.1. Fases de la investigación acción

Novena etapa

Luego de cinco ciclos de experimentación, cuando se haya producido una saturación, se tendrá una propuesta para la introducción de la geometría sintética, organizada en tipos de tareas y una familia de problemas en contextos sintéticos que evolucionarán para justificar la introducción de las técnicas propias de la geometría analítica.

La implementación de la propuesta servirá para introducir el tema de geometría analítica en un nivel de formación equivalente al considerado en esta investigación. Sin embargo, también permitirá brindar sugerencias sobre la forma en la que pueden abordarse algunos conceptos geométricos en la secundaria.

2.7. REFLEXIONES DEL CAPÍTULO

Los trabajos revisados justifican la inclusión de la geometría en la formación básica de todo ciudadano señalando la necesidad del desarrollo del pensamiento geométrico para el normal desarrollo de la actividad racional del hombre. Se sustenta la necesidad de retomar la geometría de construcciones, priorizándola sobre el trabajo algebraico predominante en la actualidad, ya que ésta hace referencia continuamente a una intuición subyacente que le otorga mayor significado que al álgebra.

También se ha reconocido que los problemas de construcciones geométricas con regla y compás permiten que los estudiantes reconozcan elementos y propiedades de conceptos geométricos. Se propone incorporar estos problemas en la enseñanza, previa organización de los mismos, pues se convierten en oportunidades para desarrollar prácticas propias del quehacer matemático como el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas.

Aquellos trabajos que centraron su atención en el uso de recursos tecnológicos se basan en que los programas de geometría dinámica permiten reconocer las propiedades geométricas de determinados objetos a partir de la identificación de condiciones para crear determinadas figuras geométricas. Además permiten la confrontación inmediata entre la predicción y la observación, y abre camino para abordar la prueba en matemáticas. De otro lado, se enfatiza en que los programas de software simbólico ofrecen un importante aporte para tratar algunos problemas de lugares geométricos, cuya solución en el contexto sintético se hace más compleja.

En relación a los trabajos cuyo interés fue identificar obstáculos en el aprendizaje de la geometría se encontró que se producen errores sintácticos, especialmente cuando se emplea la notación simbólica, lo que lleva a proponer actividades que otorguen sentido a los símbolos y a las reglas que los relacionan. Se presentan también cuestiones de investigación relacionadas con la visualización y el reconocimiento de distintas representaciones semióticas involucradas en la actividad geométrica.

En relación a la pertinencia de plantear situaciones que permitan establecer conexiones entre la geometría sintética y la analítica, se ha encontrado un conjunto de investigaciones que hacen referencia a distintas razones para ello. Desde argumentos basados en el desarrollo histórico de la geometría, pasando por justificaciones en términos de evolucionar técnicas para ampliar las organizaciones praxeológicas; siendo fundamental la noción de lugar geométrico en todos los casos.

Así, se confirma que la agenda internacional dedicada a la investigación en didáctica de la geometría está en permanente actividad, lo que denota un reconocimiento a su importancia y necesidad, tal como lo señalaba Gutiérrez (2010). En particular, la articulación de las geometrías sintética y la analítica se ha planteado como un tema de interés de la comunidad de educadores matemáticos que requiere ser estudiado.

Del estudio exploratorio inicial y de la descripción de la problemática identificada en la experiencia docente se ha encontrado que se hace necesario intervenir en la forma en la que tradicionalmente se aborda el tema de geometría analítica en el nivel universitario. Con esa finalidad, se plantea como objetivo de investigación identificar y diseñar situaciones que justifiquen la introducción de ese tópico de estudio. Se propone hacerlo a partir de situaciones que evolucionen y propicien el cambio de estrategias sintéticas por estrategias analíticas para resolver problemas en contextos geométricos.

Se plantea también identificar posibles conflictos que surgirán cuando los estudiantes se enfrenten a las situaciones didácticas propuestas. La explicación de lo que ocurra se hará teniendo como base la complejidad del cambio entre distintas representaciones semióticas y el concepto de unidad elemental de información que permitirá comparar los procedimientos matemáticos que intervienen en distintos contextos geométricos.

Dada la naturaleza de la investigación, se considera apropiado emplear elementos del método investigación basada en el diseño, ya que permitirá estudiar las condiciones bajo las cuales la geometría analítica se puede constituir como un saber en el nivel educativo considerado. Considerar a la investigación acción como método para describir lo que ocurrirá en cada ciclo de experimentación permitirá reconocer los elementos que deben modificarse ciclo a ciclo para la consecución de los objetivos propuestos.

CAPÍTULO 3

EVOLUCIÓN DE LAS GEOMETRÍAS SINTÉTICA Y ANALÍTICA

Siguiendo con la tercera etapa de la metodología adoptada, se realiza un breve estudio de la forma en la que evolucionó la geometría desde la matemática griega hasta su organización a partir de los trabajos de Hilbert y Klein. Esto se hace con la finalidad de comprender mejor la naturaleza de los objetos matemáticos en estudio y la forma en que la geometría ha sido organizada en los currículos actuales. Para ello se identifican las problemáticas que abordan las geometrías sintética y analítica, con especial énfasis en la época en donde se desarrolló un estudio sistemático de los lugares geométricos. Se complementa el estudio analizando algunos textos didácticos y matemáticos para ilustrar el tratamiento que se dio a estos temas en distintas épocas.

3.1. GEOMETRÍA SINTÉTICA Y SU EVOLUCIÓN

A continuación se presenta una síntesis de algunos trabajos realizados en el desarrollo de la geometría, en particular, los relacionados con la evolución de la geometría sintética. Aunque no pretende ser un análisis exhaustivo, pues es probable que se hayan omitido algunos otros resultados relevantes, consideramos que el reporte que se brindará a continuación podrá ayudar a desarrollar el primer objetivo específico de la investigación. Se pondrá especial énfasis a identificar aquellos problemas que permitieron la evolución de la geometría sintética y de la geometría analítica

3.1.1. LA GEOMETRÍA EN LA CULTURA EGIPCIA

Como refiere Blumenthal (1965), en muchos textos se afirma que la geometría, como rama de la matemática que se encarga del estudio de la tierra y sus medidas, tuvo su origen en Egipto.

Lo que se sabe de las matemáticas egipcias procede en su mayoría de fuentes indirectas, pero también de algunas fuentes directas como el Papiro de Rhind o de Ahmes. A través de las evidencias encontradas en los papiros se puede notar una búsqueda de relaciones entre figuras geométricas; para intentar justificar estos procedimientos, se construyeron diversas explicaciones.

Varios problemas interesantes se encuentran en el Papiro de Ahmes. Éste contiene una colección de 87 enunciados de problemas con sus respectivas soluciones. Por ejemplo, en la figura 4.1, la cual se remonta al año 1650 a. C., se tienen cálculos de áreas de triángulos, rectángulos y trapezoides así como de volúmenes de cilindros, pirámides y prismas para cuyas soluciones usaban semejanzas de triángulos.

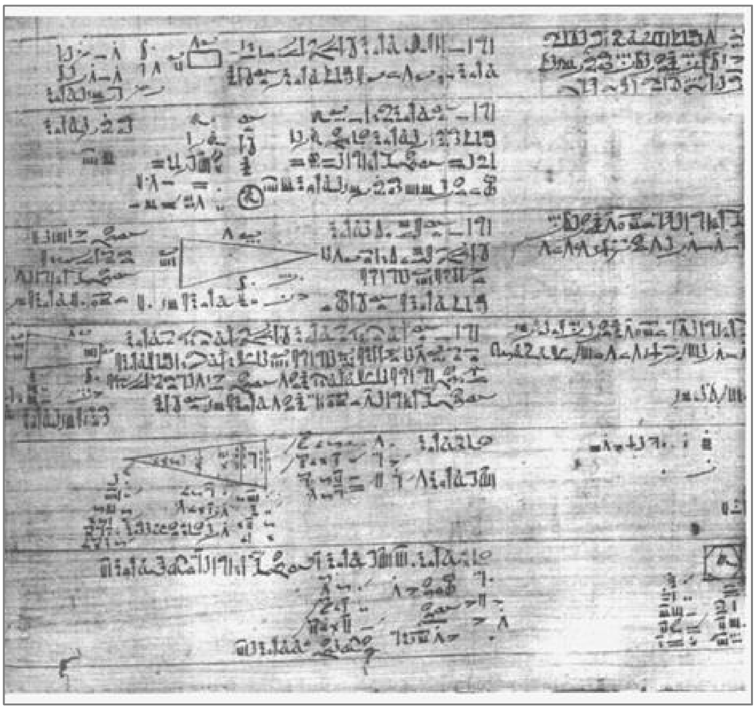


Figura 3.1. Papiro de Ahmes
Tomado de Piñeiro, Ibañes y Ortega(1998)

En el Papiro de Moscú, correspondiente al siglo XVII a. C., se encuentran problemas como el cálculo del volumen de tronco de pirámide con base cuadrada y el cálculo del área superficial de una superficie semiesférica, sin que aparezcan fórmulas.

En Piñeiro, Ibañes y Ortega (1998) se presenta el problema 14 de dicho papiro cuyo objetivo es hallar el volumen del tronco de pirámide de base cuadrada cuya altura vertical es 6 cubitos, la longitud de la base es 4 cubitos y donde la de la parte superior es 2 cubitos. A continuación, se reproduce el procedimiento seguido:

Elevar este 4 al cuadrado: 16
Elevar este 2 al cuadrado: 4
Tomar 4 dos veces: 8
Sumar 16, 8 y 4: 28
Tomar 1/3 de 6: 2
Tomar 28 dos veces : 56
El resultado es 56

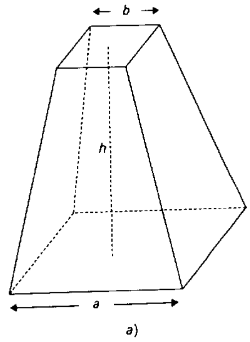


Figura 3.2. Volumen de un tronco de pirámide
Tomado de Piñeiro, Ibañes y Ortega(1998)

Este razonamiento, en lenguaje actual, correspondería a que si h=6, a=4 y b=2, entonces el volumen de la pirámide es $(a^2+ab+b^2)h/3$. En la historiografía aparecen varias explicaciones de cómo los egipcios llegaron a la expresión correcta del volumen de tronco de pirámide. Una de ellas sugiere que cortaron el tronco en sólidos más pequeños y sencillos cuyos volúmenes calcularon a continuación; otra señala que habían descubierto empíricamente que el volumen del tronco de pirámide puede obtenerse como el producto de la altura del tronco y la media de Herón de las áreas de las bases.

Este tipo de explicaciones refuerza la afirmación de Boyer (1999), según la cual el aporte de los egipcios al desarrollo de la geometría ha sido básicamente de carácter práctico.

3.1.2. LA GEOMETRÍA BABILÓNICA

La geometría desarrollada en Mesopotamia se remonta a la primera mitad del segundo milenio antes de Cristo. Respecto al desarrollo de la geometría, los babilonios resolvieron problemas geométricos que podrían calificarse de alto nivel. Al parecer, poseían un cierto concepto de semejanza de figuras pues usaban una fórmula equivalente al teorema que señala que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados correspondientes. Sabían también que un ángulo inscrito en una semicircunferencia era un ángulo recto. Las tablillas encontradas muestran que también usaron el teorema de Pitágoras.

Uno de los problemas geométricos más antiguo que se conoce y que ha sido abordado por los babilonios se encuentra en una tablilla hallada en Tell Harmak (Irak), cuyo origen se remonta al año 2000 a. C. (Piñeiro, Ibañes y Ortega, 1998). El problema es el siguiente:

Dados los lados del triángulo ABC y las áreas de los triángulos BAD, ADE, DEF y EFC, hallar los lados BD, DF, AE y AD.

Por los datos dados, se deduce que el triángulo es rectángulo. La resolución que aparece en la tablilla, en lenguaje actual, es la siguiente:

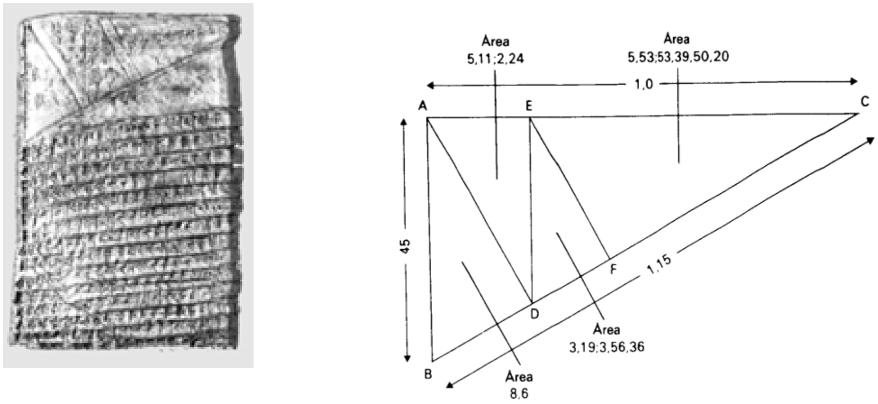


Figura 3.3. Tablilla de Tell Harmal y reproducción de su dibujo
Tomado de Piñeiro, Ibañes y Ortega(1998, p.21)

La explicación sería la siguiente:

- Tomar el inverso de 1;0 y multiplicarlo por 45: Resultado: 0; 45
  Aquí es importante notar que debieron conocer el resultado de si el triángulo ABC es semejante al ABD, entonces AB/AC=BD/AD.
- Multiplicar el resultado por 2: Resultado: 1;30
  Y la justificación es que debieron conocer que el área del triángulo ABD es (1/2)BD.AD
- Multiplicar el resultado por el área del triángulo ABD:
  Resultado: (8;6)(1;30)=12;9
- Hallar la raíz cuadrada de 12,9: resultado: BD=27

Se puede utilizar el teorema de Pitágoras para hallar que la longitud del lado AD es igual a 36; luego se puede aplicar el procedimiento anterior para obtener la longitud AE. Este proceso se puede continuar indefinidamente para hallar las dimensiones requeridas de una serie infinita de triángulos rectángulos semejantes.

En Boyer (1999) se dice que para los babilonios los problemas típicos eran: *Dada la suma y el producto de los lados de un rectángulo, hallar dichos lados*.

En general, para los mesopotámicos, la geometría no era una ciencia matemática como se entiende ahora, sino que correspondía a un grupo de problemas asociados a figuras que se resolvían con técnicas aritméticas; es decir, poseía un carácter pre científico.

3.1.3. LA GEOMETRÍA EN LA CULTURA GRIEGA

Entre los años 800 a. C. y 800 d. C., ante la declinación del saber en Egipto y Mesopotamia, una nueva cultura promovida por ciudades estado libres, situadas en las costas orientales del Mediterráneo y del Mar Negro, emergieron notablemente. A este periodo se le denominó Edad Talásica (surgida del mar), (Boyer, 1999). Es en esta cultura que la geometría adquiere la categoría de ciencia deductiva.

En una primera etapa de esta época, se atribuyeron varios descubrimientos matemáticos a Tales y Pitágoras.

Sobre Tales de Mileto, se calcula que vivió aproximadamente entre los años 624 y 548 a. C. y es frecuentemente reconocido por ser el primer hombre al que se le asignaron descubrimientos matemáticos concretos. Proclo, basándose en Eudemo, atribuye a Tales los siguientes teoremas:

- Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
- Los ángulos básicos de un triángulo isósceles son iguales.
- Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.
- Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Sin embargo, no hay evidencias concretas que muestren que Tales fuera el responsable de la organización de estos resultados. Los seguidores de Tales formaron parte de la llamada Escuela Jónica.

La figura de Pitágoras también es un tanto oscura pues no se dispone de documentos de la época. Se estima que Pitágoras vivió entre los años 580 a. C. y 500 a. C. y sobre sus aportes a la matemática, se prefiere señalar que estos corresponden a los pitagóricos. Estos formaban una escuela de pensamiento que consideraba a los estudios filosóficos y matemáticos como base moral para la dirección de la vida.

El principio fundamental de los pitagóricos del siglo V a. C. era que todas las cosas eran números. Sin embargo, este principio se vio cuestionado cuando se planteó que dadas dos magnitudes lineales A y B, siempre se puede encontrar una magnitud menor C, que "cabe" un número entero m de veces en A, y un número entero de veces n en B. Esto es, se encontró que la afirmación "A y B son siempre conmensurables", no siempre era cierta.

Respecto a los conocimientos geométricos de los pitagóricos, se señala en Boyer (1999, p.80), que conocieron tres sólidos regulares: el tetraedro, el cubo y el dodecaedro. También manejaban la propiedad que afirma que cualquiera de los puntos de intersección de las diagonales del pentágono regular, divide a una diagonal en dos segmentos distintos y tales que la razón de la diagonal completa al mayor de los dos segmentos es la misma que la de éste al segmento menor. Esta subdivisión de la diagonal es conocida como sección áurea de un segmento, o como la llamaron los griegos, la división de un segmento en media y extrema razón. También conocieron que la relación entre la diagonal y el lado del pentágono era la sección áurea.

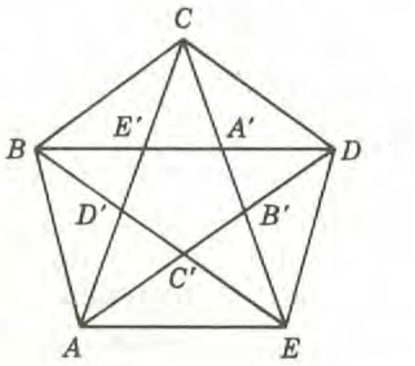


Figura 3.4. Relación entre lado y diagonal de un pentágono.
Tomado de Boyer (1999, p. 80)

De modo que si a es la longitud de la diagonal AC , x es la longitud de AE' y E'C es a-x, se tendrá que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

Uno de los procedimientos que pudieron seguir los pitagóricos para hallar o construir la razón áurea, pudo haber sido empleando la regla y el compás de manera exacta, como hiciera posteriormente Euclides en los *Elementos*. Para ello, en primer lugar, debieron construir el cuadrado *ABCD*, luego ubicar el punto medio *E* del segmento *AC*. Al trazar el segmento *EB* y extender el segmento *CEA*, se obtiene *F* de modo que *EB*=*EF*. El punto buscado *H* se obtiene completando el cuadrado *AFGH*. Esto es, si el lado del cuadrado *AC* es *l*, se obtiene que el segmento *FC* tiene longitud $\frac{\sqrt{5}+1}{2}l$.

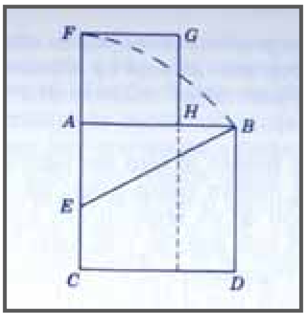


Figura 3.5. Construcción de la razón áurea
Tomado de Boyer (1999, p. 82)

Se conoce como época heroica de las matemáticas a los años comprendidos entre la segunda mitad del siglo V a.C., época en la que la ciencia griega se caracterizó por estar guiada por el deseo de conocer, dejando de lado su carácter utilitario. Es en este período que surgen los tres problemas denominados *clásicos*: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. El intentar resolver estos problemas de manera exacta con regla y compás, tarea imposible, dio origen a problemas colaterales y a soluciones mecánicas y aproximadas.

Motivados por la búsqueda de la solución a estos problemas, los griegos desarrollaron algunos problemas y técnicas muy interesantes. Destacan entre ellos los siguientes:

- El convertir un rectángulo de lados a y b en un cuadrado de igual área. Esto lo hacían construyendo segmentos de longitud x tales que:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

  Este método de solución fue empleado también para interpolar dos medias entre dos magnitudes dadas a y b:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

  Y cuando b=2a, correspondería al problema de la duplicación del cubo. Este trabajo fue atribuido a Hipócrates alrededor del año 430 a.C.
  Explicación:

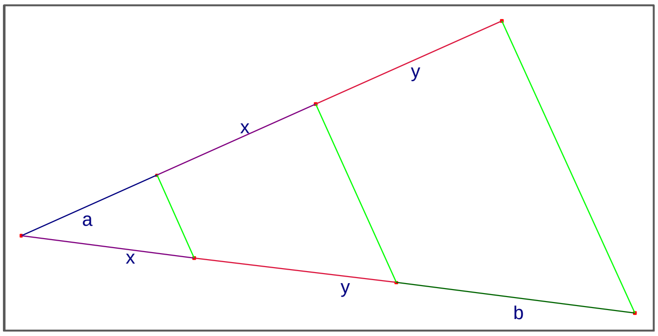


Figura 3.6. Construcción de la raíz cúbica de 2

  Considerando que x e y son dos números entre a y b tales que:

  $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$, luego $ay=x^2$

  $\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, luego $2ax=y^2$. Si 2a=b, $bx=y^2$, $x=\frac{y^2}{b}$

  Reemplazando en la primera expresión:

$$4a^3=y^3$$
$$\sqrt[3]{4}a=y$$
$$x=\sqrt[3]{2}a$$

- La construcción de curvas distintas a la recta y la circunferencia. Una de ellas se denominó trisectriz o cuadratriz de Hipias (427 a. C.).
  La construcción de la curva aparece en Boyer (1999, p.102); en ella se considera un cuadrado en el que el lado AB se traslada a velocidad uniforme hasta llegar a

coincidir con DC y, simultáneamente, el lado *DA* gira uniformemente en sentido horario hasta coincidir con *DC*. En un instante cualquiera las posiciones de los dos segmentos móviles vienen dadas por *A'B'* y *DA''*, siendo *P* su punto de corte. Luego, el lugar geométrico descrito por *P* será la trisectriz, que corresponde a la curva *APQ* de la figura 3.7. Considerando el caso en el que los segmentos *A'D* y *B'C* se trisecan, se tiene que el ángulo *A''DC* se triseca en *V* y *W*.

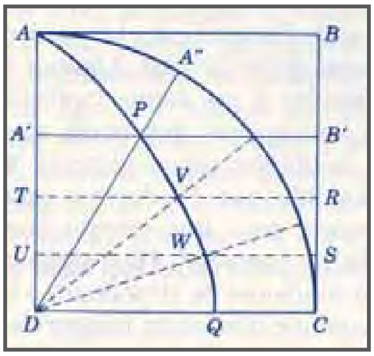


Figura 3.7. Construcción de la trisectriz de Hipias
Tomado de Boyer (1999, p. 102)

- Una solución tridimensional del problema de la duplicación del cubo, atribuida a Arquitas en el siglo IV a. C.

  En la solución propuesta en el texto consultado se emplea la geometría analítica. El procedimiento consiste en lo siguiente:

  > *Si a es la altura del cubo cuyo volumen se debe duplicar, se consideran tres circunferencias de radio a con centro en (a; 0; 0), situada cada una de ellas en un plano perpendicular a uno de los ejes de coordenadas. Por la circunferencia perpendicular al eje Ox se traza un cono circular de vértice el origen de coordenadas, cuya ecuación es* $x^2 = y^2 + z^2$ *. Por la circunferencia situada sobre el plano Oxy se considera el cilindro circular recto de eje paralelo al eje Oz cuya ecuación es* $2ax = x^2 + y^2$. *Se hace girar la circunferencia situada en el plano Oxz alrededor del eje Oz de modo que se genera un toro cuya ecuación es* $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

La intersección de estas tres superficies se produce en un punto de coordenada x igual a $\sqrt[3]{2}\,a$. *Este valor corresponde a la arista del cubo buscado* (Boyer, 1999, p.105).

- Otro problema al que los griegos dedicaron su atención durante esta época fue el de la inconmensurabilidad de algunas magnitudes lo que los condujo a evitar interpretaciones en términos de razones y prefirieron trabajar con áreas. Así, la ecuación lineal $ax = bc$ se prefirió interpretar como una igualdad de áreas en lugar de una igualdad entre dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

  Para ello, uno de los requisitos era que las magnitudes fueran de la misma naturaleza, es decir, debía haber una homogeneidad estricta de términos. Del mismo modo, una ecuación cuadrática debía interpretarse como una igualdad de áreas donde el objetivo era hallar la longitud de un determinado segmento.

- También se hicieron construcciones con regla y compás de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces cuadradas, lo que en lenguaje moderno, correspondería al álgebra geométrica.

  Esta es otra de las tareas que se rescatará y se considerará en la propuesta didáctica.

En Boyer (1999, p.106), se atribuye a Aristóteles una demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado, en el que se emplea el teorema de Pitágoras. El razonamiento es el siguiente:

Se supone que d y s son la diagonal y el lado de un cuadrado, respectivamente, y que la razón d/s es un racional. Luego, se debe cumplir que $d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2$, luego $d^2/s^2 = p^2/q^2$ con p y q primos entre sí. Por tanto, $p^2 = 2q^2$, p^2 es par y p es par. Si $p = 2r$ entonces q debe ser impar. Pero al reemplazar p se obtiene: $(2r)^2 = 2q^2$, luego q debe ser par. Luego la hipótesis de que d/s es un racional es falsa. En el lenguaje de la época, p y q son inconmensurables.

La siguiente etapa que tuvo lugar durante el apogeo griego corresponde a la época platónica. Fue la Academia de Platón, en Atenas, el centro del saber de la última parte del siglo IV a. C. Respecto a la geometría, Platón (427 a. C. -347 a. C.) tuvo noticias de la existencia de los únicos cinco poliedros regulares, el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, hecho por el cual se denominan cuerpos platónicos. Se atribuye el estudio del octaedro y el icosaedro a Teteo, amigo de Platón.

Aunque Platón tuvo pocas contribuciones originales, jugó un papel importante al resaltar a lo largo de sus enseñanzas la necesidad de demostraciones rigurosas y preparar el terreno para el posterior trabajo de Euclides.

De otro lado, Eudoxo de Cnido, alrededor del año 360 a. C., tratando de definir mejor la noción de razón como una relación entre dos magnitudes del mismo tipo, dio lugar a la teoría de proporciones que posteriormente se presentó de manera organizada en el libro V de Los Elementos de Euclides. Según esta teoría, un segmento no puede compararse con un área ni con un volumen. Esto dio origen a la teoría de los inconmensurables. La formulación teórica es la siguiente:

> *Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando tomando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente.* (Boyer, 1999, p. 127)

Es decir, $a/b=c/d$ si, y sólo si, dados dos números naturales cualesquiera m y n, si $ma<nb$ entonces $mc<nd$, o si $ma=nb$ entonces $mc=nd$, o si $ma>nb$ entonces $mc>nd$.

También se le atribuye a Eudoxo el lema que sirvió de base al método de exhausción griego, que en lenguaje moderno, se podría decir que introdujo por primera vez la noción de límite. Afirma lo siguiente:

> *Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano"* (Boyer, 1999, p. 129)

El comportamiento de los matemáticos griegos para abordar este tema es considerado como el inicio de la búsqueda del rigor extremo.

El aporte de Euclides

El libro escrito por Euclides entre los años 330 y 320 AC, *Elementos*, ha merecido la admiración de la humanidad durante más de 2000 años y ha establecido un modelo de demostración rigurosa de gran repercusión en la matemática moderna. Se denominó así porque de esa manera se llamaba a las proposiciones que desempeñaban un papel fundamental en la obtención o en la organización deductiva de otros resultados, según señala Proclo (Euclides, 1991, p.21).

En la versión de los *Elementos* de Euclides (1991), hay un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 452 proposiciones distribuidas en trece libros o capítulos. Aunque suele identificarse esta obra básicamente con la geometría, en realidad comprende diversos campos temáticos como la geometría plana, la geometría del espacio, la teoría generalizada de la proporción, la aritmética y la teoría de la inconmensurabilidad.

La tabla 3.1. tiene su base en el mostrado en Millán (2004) y presenta los tópicos en los que se centró cada libro o capítulo de los *Elementos*.

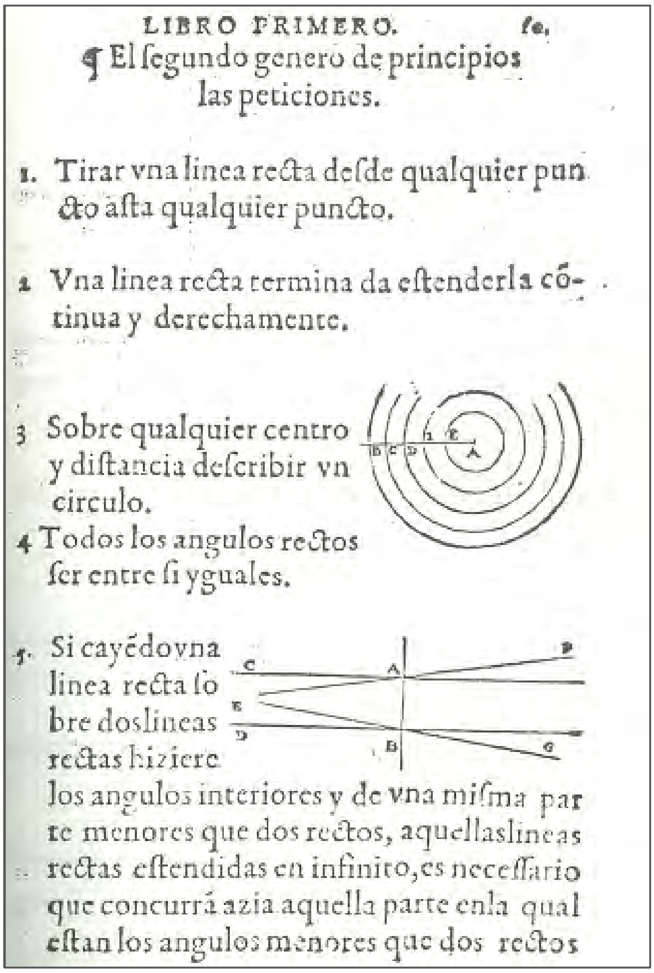
Tabla 3.1. Temática de los Elementos

Geometría plana	Libro I	Figuras rectilíneas
	Libro II	Relaciones entre magnitudes geométricas planas. Método de aplicación de áreas.
	Libro III	Figuras circulares: círculos y circunferencias.
	Libro IV	Teoría de las figuras inscritas y circunscritas.
Teoría de la proporción	Libro V	Relaciones entre magnitudes
Geometría plana	Libro VI	Aplicación de la teoría general de la proporción a la geometría plana.
Aritmética	Libros VII, VIII y IX	Números múltiplos, números perfectos y condición arquimediana.
Teoría de la inconmensurabilidad	Libro X	Clasificación de las cantidades inconmensurables
Geometría del espacio	Libro XI	Figuras sólidas.
	Libro XII	Relaciones entre magnitudes geométricas sólidas.
	Libro XIII	Poliedros regulares

En el tomo I se presentan las “definiciones” de punto, línea, recta, superficie, diámetro, entre otros objetos. Así por ejemplo, define un punto como lo que no tiene partes, línea como una longitud sin anchura y línea recta como aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Sobre el sistema introducido por Euclides, se señala en Blumenthal (1965), que éste tuvo como base un conjunto de proposiciones sin demostración a las que llamó postulados, reservando el término axiomas para las nociones evidentes no específicas de la geometría y que enunció de manera explícita.

La forma en la que Euclides enunció sus postulados se muestra en la figura 3.8.



LIBRO PRIMERO. fo.

¶ El ſegundo genero de principios las peticiones.

1. Tirar vna linea recta deſde qualquier puncto aſta qualquier puncto.

2 Vna linea recta termina da eſtenderla cõtinua y derechamente.

3 Sobre qualquier centro y diſtancia deſcribir vn circulo.

4 Todos los angulos rectos ſer entre ſi yguales.

5. Si cayẽdo vna linea recta ſobre dos lineas rectas hiziere los angulos interiores y de vna miſma parte menores que dos rectos, aquellas lineas rectas eſtendidas en infinito, es neceſſario que concurrã azia aquella parte en la qual eſtan los angulos menores que dos rectos

Figura 3.8. Postulados de Euclides.
Tomado de Sanz (1999, p. 11)

Los postulados de Euclides, en lenguaje actual, son los siguientes:

- Se puede trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro.
- Se puede prolongar continuamente en línea recta una recta dada.
- Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio dados.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Si una línea recta que corta a otras dos rectas forma de un mismo lado con ellas ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos últimas rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que la suma de los ángulos es menor que dos rectos.

Es importante resaltar que, en el contexto en el que se escribieron los Elementos, la concepción que se tenía de problema y teorema era distinta a la actual. Así, ante todo, un problema representaba un objeto geométrico (por ejemplo, la construcción de una figura) a hacer; mientras que hallar la solución de un problema equivalía a construir un segmento que midiera lo que se quería hallar o a ubicar el punto, la recta o la circunferencia cuya existencia se afirmaba. Un teorema era, en cambio, una proposición a establecer acerca de alguna característica- propiedad, relación- esencial de objetos matemáticos construidos o dados (una cierta figura que ha sido trazada de una cierta manera, determinada de antemano, satisface ciertas condiciones).

En los Elementos de Euclides, tanto los problemas como los teoremas, se presentan como proposiciones. Y la demostración es definida como un proceso que consiste en la derivación de consecuencias sobre la base de conocimientos previos que podían ser proposiciones primordiales (definiciones, postulados, nociones comunes o axiomas) o proposiciones establecidas en pruebas anteriores. (Euclides, 1991).

Como la solución de los problemas en ese contexto debía traducirse gráficamente a un dibujo, era preciso recurrir al empleo de algunos instrumentos. Habitualmente se recurría a una regla, que permitía trazar una recta que pasara por dos puntos dados, y del compás, que posibilitaba dibujar una circunferencia, con centro y radio dados. Por tanto, una solución cualquiera se debía componer por un número finito de veces de estas dos operaciones, (Petersen, trad.1955). Los procedimientos empleados por los griegos de mayor repercusión han sido las construcciones con regla y compás.

A manera de ejemplo, se presenta la figura 4.9. que corresponde a la demostración del teorema de Pitágoras, de manera similar a como fue presentada en el libro I de Los Elementos.

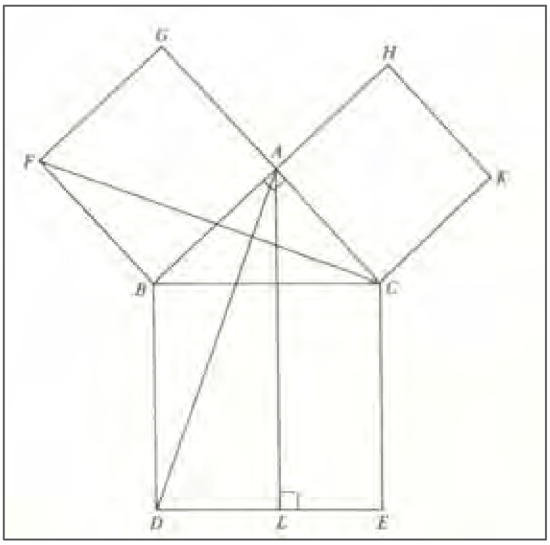


Figura 3.9. Teorema de Pitágoras
Tomado de Kline (1992, p. 97)

Reescribiendo el enunciado y la demostración del teorema, se tiene lo siguiente.

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman.

La demostración se consigue mostrando que el triángulo *ABD* es semejante al triángulo *FBC*, que el rectángulo *BL* es igual a dos veces el triángulo *ABD*, que el rectángulo *GB* es igual a veces el triángulo *FBC*. En consecuencia, el rectángulo *BL* es igual al cuadrado *GB*, y el rectángulo *CL* es igual al cuadrado *AK*. Luego, la suma de los cuadrados es igual a la suma de los rectángulos, es decir, al cuadrado sobre *BC*.

En el libro I se pueden identificar problemas relacionados con puntos, líneas y triángulos. Se propone demostrar algunos resultados, así como construir objetos que verifiquen condiciones dadas previamente.

Entre los problemas de construcción que aparecen en este libro se encuentran los siguientes:

- "Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada" (Euclides (1991, p.201).
- "Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado" (Euclides (1991, p.213).
- "Dividir en dos partes iguales una recta finita dada" (Euclides (1991, p.213).
- "Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella" (Euclides (1991, p.215).
- "Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos (de las) rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante" (Euclides (1991, p.227).
- "Por un punto dado, trazar una línea recta paralela a una recta dada" (Euclides, 1991, p.241).

Entre los teoremas enunciados y demostrados se encuentran los siguientes:

- "En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí" (Euclides (1991, p.208).
- "Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí" (Euclides (1991, p.219).
- "La recta que incide sobre las rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos. (Euclides (1991, p.238).
- "En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto" (Euclides, 1991, p.260).

Entre las construcciones más frecuentes para resolver problemas o demostrar teoremas aparece la de construir circunferencias con un centro dado, cuyo radio corresponde a la longitud de un segmento que debe trasladarse, y la construcción de la mediatriz de un segmento.

El principal procedimiento empleado para resolver estos problemas es trazar dos lugares geométricos, que corresponden a rectas o circunferencias, en cuya intersección se encuentra la solución buscada. Se usa también el principio de que la mínima distancia que une dos puntos es un segmento en la demostración de algunos teoremas.

En el libro II aparecen problemas sobre áreas en las que las figuras se descomponen; estas tareas podrían atribuírsele hoy al álgebra geométrica.

Por ejemplo, la proposición IV (p. 270) se enuncia así:

> *Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos*[70].

Figura 3.10. Proposición IV del libro II
Tomado de Euclides (1991, p. 270)

En la demostración se considera la figura:

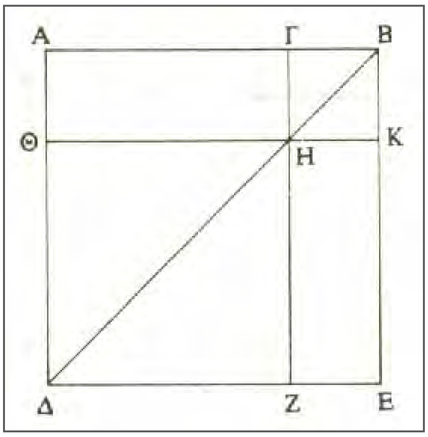


Figura 3.11. Demostración de la proposición IV
Tomado de Euclides (1991, p. 270)

Y se busca mostrar que el cuadrado de la longitud de AB es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de $A\Gamma$, ΓB y de dos veces el área del rectángulo comprendido por $A\Gamma$ y ΓB. Empleando el lenguaje algebraico equivaldría a enunciar la siguiente proposición, donde a y b son las longitudes de los segmentos en los que queda dividido el segmento original:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Los procedimientos empleados en este libro para mostrar la igualdad de áreas tienen su fundamento en la igualdad de segmentos.

En el libro III se estudian las propiedades del círculo y la circunferencia, incluyendo un teorema para calcular la distancia mínima de un punto a una recta. Así por ejemplo, se plantean las siguientes preguntas: cómo hallar el centro de una circunferencia si se conoce la circunferencia, cómo trazar la tangente a una circunferencia desde un punto dado, entre otros.

En este libro se enuncian teoremas como los siguientes:

- "Si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales" (Euclides (1991, p.293).

Que en lenguaje actual diría: Si un segmento trazado desde el centro de una circunferencia es perpendicular a una cuerda de dicha circunferencia, entonces divide a la cuerda en dos partes iguales, y viceversa.

- "Si dos círculos se tocan uno a otro por fuera, la recta que une sus centros pasará a través del punto de contacto" (Euclides (1991, p.306).
- "En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia" (Euclides (1991, p.316).

También se presentan construcciones como la de la recta tangente a una circunferencia, tanto desde un punto sobre la circunferencia como desde un punto exterior a ella. Se considera para ello la siguiente definición de tangencia:

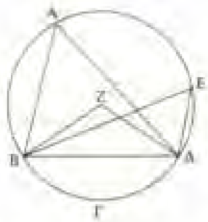
"Se dice que una recta es tangente a una circunferencia si la toca y cuando se prolonga no vuelve a hacerlo", (Euclides, 1991, p.293).

Para ilustrar de qué manera se abordaban estos problemas, se presenta la demostración dada por Euclides de la proposición 21.

- Enunciado: "En una circunferencia, los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí" (Euclides (1991, p.318).

Sea el círculo ABΓΔ y en el mismo segmento BAEΔ estén los ángulos BAΔ, BEΔ.

Digo que los ángulos BAΔ, BEΔ son iguales entre sí.



Tómese, pues, el centro del círculo ABΓΔ y sea Z, y trácense BZ, ZΔ.

Y como el ángulo BZΔ es el correspondiente al centro y el (ángulo) BAΔ el correspondiente a la circunferencia, y tienen como base la misma circunferencia BΓΔ, entonces el ángulo BZΔ es el doble del (ángulo) BAΔ [III, 20]. Por lo mismo, el (ángulo) BZΔ es también el doble del (ángulo) BEΔ; luego el (ángulo) BAΔ es igual al ángulo BEΔ.

Por consiguiente, en un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí. Q. E. D.

Figura 3.12. Demostración de la proposición 21, Libro III
Tomado de Euclides (1991, p.318)

Los argumentos empleados en las justificaciones de estos teoremas se basan en propiedades de triángulos.

El libro IV presenta problemas sobre figuras inscritas y circunscritas en otras. Para ello, se definen previamente los siguientes términos:

- "Se dice que una figura rectilínea está inscrita en otra figura rectilínea, cuando cada uno de los ángulos de la figura inscrita toca los lados respectivos de aquella en la que se inscribe" (Euclides, 1991, p.341).

Al respecto hay una aclaración en el texto donde se señala que cuando se dice *ángulos*, se refiere a los vértices.

- "Se dice que una figura rectilínea está inscrita en un círculo, cuando cada ángulo de la figura (inscrita) toca la circunferencia del círculo" (Euclides (1991, p.341).
- "Se dice que una figura rectilínea está circunscrita en torno a un círculo, cuando cada lado de la (figura) circunscrita toca la circunferencia del círculo. (Euclides, 1991, p.341).

Algunos de los problemas que se abordan en este libro son los siguientes:

- "Inscribir un círculo en un triángulo dado" (Euclides (1991, p.345).
- "Inscribir un cuadrado en un círculo dado" (Euclides (1991, p.349).
- "Inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en un círculo dado" (Euclides, 1991, p.364).

Este es el polígono con el mayor número lados para el que se muestra explícitamente el método a seguir.

Los procedimientos empleados para realizar las tareas propuestas en este libro se basan en inscribir o circunscribir figuras con un menor número de lados (como en el ejemplo mostrado, para inscribir un pentágono se parte de inscribir triángulos) y de emplear las propiedades de una circunferencia desarrolladas en el libro III.

En el libro V se presenta la teoría de las magnitudes proporcionales, desarrollada previamente por Eudoxo de Cnido en el año 360 a. C. Según Kline (1992), sobre el contenido de este libro se ha debatido más extensa e intensamente que cualquier otra porción de los Elementos. En él se extiende la teoría de las proporciones a razones inconmensurables, aun evitando la introducción de los números irracionales.

En el libro VI se aplica la teoría expuesta en los otros libros referida a semejanza de triángulos, determinación de terceras, medias y cuartas proporcionales y semejanza de polígonos (definiendo previamente lo que esto significa). La mayor parte del trabajo presentado aquí se debe a Euclides y se caracteriza por el rigor de las demostraciones de verdades intuitivas.

La verdadera grandeza de la obra de Euclides es que en ella logra ordenar la geometría de su tiempo en un sistema deductivo, empleando unas pocas propiedades geométricas y demostrando las restantes como consecuencia lógica de ellas. Los Elementos fijaron un estándar metodológico en lo referente al rigor que debía tener una prueba en matemáticas. En realidad, la axiomatización geométrica sirvió de modelo para sentar las bases del análisis matemático moderno.

Sin embargo, no toda la obra de Euclides está acorde con la concepción axiomática moderna. Freudenthal, en Piaget et al. (1986), señala que si bien hay partes de este trabajo, como los libros V y VI, que sirvieron de modelo en el desarrollo de las matemáticas modernas; hay otras con una estructura deductiva débil. En la misma línea, Kline (1992) afirma que mientras que se suponía que la geometría euclídea ofrecía pruebas rigurosas de teoremas sugeridos intuitivamente por las figuras, en realidad, ofrecía demostraciones intuitivas a partir de figuras dibujadas rigurosamente. Un ejemplo de ello es que en muchos casos los teoremas generales se probaban para casos especiales o posiciones especiales de los datos propuestos.

Otro defecto señalado es que utilizaban suposiciones que no se explicitaban, como por ejemplo en la proposición 1 del libro I donde se supone que dos circunferencias tienen siempre un punto en común.

Otros aportes griegos

A Arquímedes (287a.C.-212 a. C) se le podría llamar el padre de la física matemática por los grandes inventos mecánicos que realizó; sin embargo, su mérito es todavía mayor porque se le reconoce su interés por encontrar principios generales para las aplicaciones prácticas. Para ello, Arquímedes disponía de un método basado en la mecánica por el que verificaba algunos resultados que luego demostraba.

Según Boyer (1999), Arquímedes fue el matemático más importante de la época helenística. Algunos de los resultados que se le atribuyen son una estimación aproximada de la razón de una circunferencia a su diámetro, la solución de dos de los problemas griegos clásicos empleando la espiral de Arquímedes, la determinación del área de un segmento parabólico, el cálculo del área de la elipse completa, entre otros.

Una de la obras de Arquímedes que estuvo perdida hasta el año 1906, El Método, da cuenta muy detalladamente de las investigaciones mecánicas preliminares que le condujeron a sus descubrimientos matemáticos más importantes. Uno de los primeros teoremas que demostró se refiere a determinar el área de un segmento parabólico. Lo hizo en primer lugar "pesando" segmentos rectilíneos, lo que en mecánica equivale a pesar cuerpos sólidos.

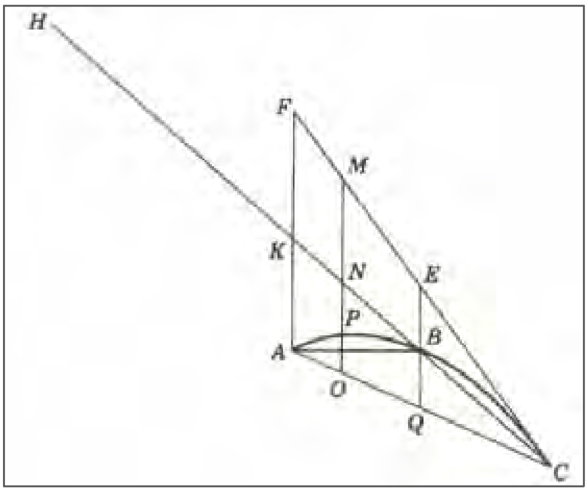


Figura 3.13. Sobre el trabajo de Arquímedes
Tomado de Boyer (1999, p.185)

Arquímedes consideró las áreas del segmento parabólico *ABC* y del triángulo *AFC* (siendo *FC* la tangente a la parábola en *C*) como la totalidad del conjunto de segmentos paralelos al diámetro *QB* de la parábola, tales como el *OP* para la parábola y *OM* para el caso del triángulo. Luego se ubica *H* con la condición de que *HK*=*KC*; se coloca después en *H* un segmento igual a *OP* de modo que equilibre exactamente al segmento *OM* donde está situado realmente, con respecto al punto de apoyo K. Lo anterior lo justificó Arquímedes empleando la ley de la palanca (dos pesos en un palanca se equilibran cuando son inversamente proporcionales a sus distancias al punto de apoyo) y propiedades de la parábola. Se llega a la conclusión que el área del segmento parabólico, situado con su centro de gravedad en H, equilibrará exactamente al área del triángulo en su posición real, cuyo centro de gravedad esta sobre la recta KC y a un tercio de la distancia de *K* a *C*. Luego, el área del segmento parabólico es igual a un tercio del área del triángulo *AFC*.

Luego del desarrollo excepcional de la matemática griega hasta aproximadamente el año 600 d. C, no se produjeron avances importantes en geometría, en particular en geometría sintética, así, durante la época medieval no se tuvieron resultados que equipararan a los presentados por Euclides.

Fue recién a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX cuando, como se señala en el libro de Smogorzhevski (1981), se estudió por completo el conjunto de problemas que se resuelven con las herramientas clásicas, la regla y el compás. Dado que este desarrolló requirió del progreso del álgebra, se retomará su estudio luego de la presentación del desarrollo de la geometría analítica.

3.2. GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SU EVOLUCIÓN

A continuación se realizará un estudio similar para identificar los progresos de la geometría analítica en la historia de la matemática. No se pretende realizar un análisis exhaustivo y es probable que se hayan omitido algunos resultados relevantes, sin embargo, consideramos que el reporte que se brindará contribuirá con el desarrollo del primer objetivo específico de la investigación.

En ésta revisión se identificarán aquellos problemas de geometría sintética que fueron abordados desde la perspectiva de la geometría analítica. Destacan en ese estudio las figuras de Descartes, Fermat y las de predecesores tales como Apolonio de Perga y Ptolomeo, de cuyos trabajos daremos a continuación algunos datos.

3.2.1 APOLONIO DE PERGA

En su obra Las Cónicas, Apolonio (262-190 a.C.) desarrolla la teoría de las cónicas con un nivel avanzado. Antes de este trabajo, la elipse, la parábola y la hipérbola se obtenían como secciones que resultaban de cortar con un plano tres tipos de conos circulares rectos distintos, según que el ángulo en el vértice fuese agudo, recto u obtuso.

Apolonio razonó de forma diferente y consideró un único cono y secciones planas cambiantes, de modo que, dependiendo de la inclinación del plano, se obtendrían los tres tipos de secciones cónicas; este resultado permitió unificar las tres curvas. Incluso demostró que el cono no necesitaba ser recto y, más bien, definió un cono de dos hojas, (Boyer, 1999, p.194).

Apolonio dio una expresión métrica para cada cónica, que no es otra cosa que su ecuación. A continuación se presentan tales expresiones, escritas en la notación actual:

$y^2 = lx$, asociada a la parábola, donde l es el llamado *latus rectum*.

$y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$, asociada a la elipse,

$y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$, asociada a la hipérbola,

siendo $l = \frac{2b^2}{a}$ en los dos últimos casos.

Apolonio resolvió el problema de los lugares geométricos con respecto al problema de 3 ó 4 rectas, tarea que Euclides sólo pudo realizar para los casos más simples.

El problema al que se hace referencia se enuncia como sigue:

Dadas tres (o cuatro) rectas en un plano, hallar el lugar geométrico de un punto P *que se mueve de tal manera que el cuadrado de la distancia de* P *a una de estas tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (o, en el caso de cuatro rectas, el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), midiendo siempre estas distancias en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes.*

Teorema de Pappus para el caso *n*=3 o 4

Así por ejemplo, si se considera el caso del lugar geométrico correspondiente a tres rectas, y se presenta el problema empleando la notación actual, siguiendo a Boyer (1999, p.201), se tendría lo siguiente:

Las tres rectas estarían dadas por las ecuaciones:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{y} \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

Los ángulos, según los cuales se deben medir las distancias, serían $\theta_1, \quad \theta_2 \quad \text{y} \quad \theta_3$

Y la condición del lugar geométrico del punto $P(x, y)$ se traduciría en la siguiente ecuación en x e y:

$$\frac{(A_1x + B_1y + C_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2)sen^2\theta_1} = \frac{K(A_2x + B_2y + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\,sen^2\theta_2} \cdot \frac{(A_3x + B_3y + C_3)}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}\,sen^2\theta_3}$$

Al ser, en general, una ecuación cuadrática en x e y, el lugar geométrico corresponderá a una cónica.

Estos problemas serían reformulados por Pappus hacia el año 320 d. C., medio milenio después, para n rectas con $n>4$ en su libro “Colección Matemática”. En la solución lo que se hace es traducir a un lenguaje geométrico una condición que podía haber estado dada en forma aritmético-algebraica. Esto obliga a Pappus a resolverlo considerando a lo más seis líneas, porque no concibe ir más allá del volumen del paralelepípedo rectángulo que puede obtenerse reuniendo los seis segmentos de tres en tres, (Chica, 2001).

Y, como se verá luego, fue este problema el punto de partida para que Descartes desarrollara su geometría analítica; en cierto sentido podría decirse que la obra de Apolonio fue una anticipación a la geometría analítica de Descartes.

3.2.2. PTOLOMEO

En Boyer (1999) se señala que Ptolomeo (siglo II) tenía un trabajo donde presentaba las longitudes y latitudes de muchos puntos del mundo conocido en ese entonces (coordenadas geográficas). Éste consistía en la revolucionaria idea de abandonar la exigencia griega de uniformidad en los movimientos circulares utilizados e introducir un punto geométrico, denominado ecuante E, alineado con la tierra G y con el centro C del círculo deferente, de manera que el movimiento angular aparente del centro Q del epiciclo en el que gira el planeta P, sea uniforme cuando es visto desde E.

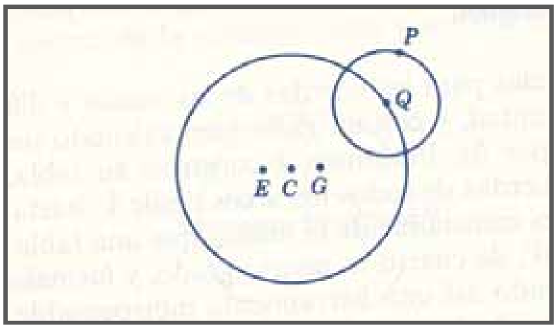


Figura 4.14. El modelo de Ptolomeo

Luego del trabajo de Apolonio y Ptolomeo, no se encontraron trabajos relevantes relacionados con el desarrollo de la geometría analítica excepto por el aporte de Nicole Oresme (1323-1382) que planteó estudiar las “formas variables” a través de la representación gráfica en un sistema ortogonal que se asemeja al actual sistema de coordenadas cartesianas (Boyer, 1999).

Sin embargo, fue recién con el aporte de Vieta, a fines del siglo XVI, cuando se desarrolló un lenguaje algebraico que permitió el desarrollo posterior de la geometría analítica. Vieta presentó un algoritmo general del álgebra mediante el cual se pudo establecer una clasificación de las de curvas y superficies. Así, Fermat y Descartes, cada uno de manera independiente, desarrollaron la geometría analítica al aplicar el álgebra renacentista a los problemas de la antigua Grecia.

3.2.3 DESCARTES

Descartes (1596-1650) señala sobre la Geometría y el Álgebra que, mientras que la primera está siempre tan ligada a consideraciones sobre las figuras, lo que no permite ejercitar el intelecto, en la segunda se está tan sujeto a ciertas reglas, que en lugar de ser una ciencia que eduque la mente, se convierte en un arte oscuro y confuso. Sin duda este comentario trata de favorecer el tratamiento algebraico de la geometría, pero tal como se ha mencionado antes, consideramos que muchos problemas de resolución puramente geométrica son mucho más ricos en razonamiento que aquellos de solución algebraica.

El libro de Descartes (1954) corresponde a la traducción de *La Geometría*, uno de los tres ensayos anexos que acompañan al *Discours de la Methode* (1637). Dicho ensayo está estructurado a su vez en tres libros o capítulos: en el primero se hace referencia a los problemas para cuya “construcción” sólo se requieren líneas y circunferencias; en el segundo se estudia la naturaleza de las líneas curvas y en el tercero se trata de la construcción de problemas de sólidos y supersólidos.

En el primero de ellos, Descartes señala que cualquier problema en geometría puede reducirse fácilmente a conocer la longitud de ciertos segmentos útiles para la construcción de la solución. Nótese el contexto del que se toman los problemas es el geométrico; no se trata de un problema en contexto algebraico inicialmente.

En este libro, Descartes hace una analogía con la aritmética que, para él, consiste sólo en 5 operaciones, adición, sustracción, multiplicación, división y la extracción de raíces. Para hallar las líneas solicitadas en un problema de geometría, es necesario añadir o sustraer otras líneas, y tomar una de ellas como la unidad.

Así, por ejemplo, si se tiene que hallar el producto de los segmentos *AD* y *BC* que han sido dados, la solución según Descartes vendrá dada por este esquema. En él se considera *BA* como la unidad y se señala que el producto $AD \cdot BC$ es *CE,* siendo *DE* un segmento paralelo a *AC*.

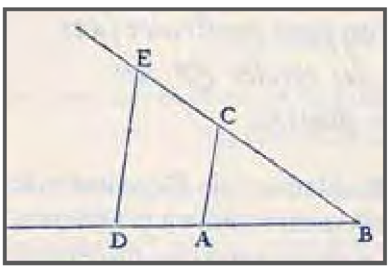


Figura 3.15. La multiplicación según Descartes

La justificación se basa en una aplicación inmediata del teorema de Tales. Empleando la notación actual sería la siguiente:

Denotando por x=*AD*, y=*B*C, z=*CE* y como *AB*=1 y *DE* es paralelo a *A*C, se cumple que:

$$\frac{y}{1}=\frac{z}{x}\text{, de donde se tiene que } z = xy\ .$$

En otro problema, hallar la raíz cuadrada de *G*H, se procede de la siguiente manera:

Se traza el segmento *GF*=1 y el punto medio de *FH* al que se denomina *K*. Con centro en *K*, se traza la semicircunferencia de radio *KH*. Desde el punto *G* se traza una perpendicular a *FH*. Al punto de intersección de dicha perpendicular y la circunferencia se le denomina *I*. Así, $GI = \sqrt{GH}$.

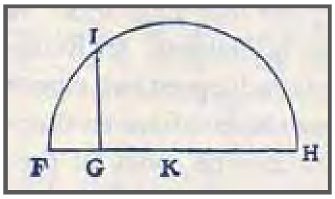


Figura 3.16. La raíz cuadrada según Descartes

La justificación que aporta Descartes se puede escribir así:

Puesto que *GK*=x, *FI*=a, *HI*=b y *GI*=h, entonces se verifica que:

$$a^2+b^2=(2x+2)^2$$

$$a^2=1^2+h^2$$

$$b^2=(2x+1)^2+h^2$$

De donde se obtiene: $h^2=1+2x$. Luego, *GI* es la raíz de *GH*.

La justificación también pudo haberse dado empleando la propiedad de la altura en un triángulo rectángulo, de modo que si se consideraba el triángulo *FIH*, recto en *I* y cuya altura, respecto a la hipotenusa, es *GI*, se tendría que:

$$GI^2 = FG \cdot GH$$
$$GI = \sqrt{1 \cdot GH}$$
$$GI = \sqrt{GH}$$

Este problema, como otros muchos también fue tratado por Euclides y la solución que aparece en el texto de Sanz (1999) es la que muestra la siguiente figura:

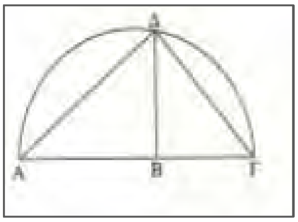


Figura 3.17. Libro VI proposición 13

Enunciado: Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.

Demostración:

Sean *AB* y *BΓ* las rectas dadas, pónganse en línea recta y descríbase sobre *AΓ* el semicírculo *AΔΓ* y trácese a partir del punto *B*, *BΔ* formando ángulos rectos con la recta *AΓ* y trácense *AΔ* y *ΔΓ*.

Puesto que el ángulo *AΔΓ* está inscrito en un semicírculo, es recto. Y dado que en el triángulo rectángulo *AΔΓ* se ha trazado la perpendicular *BΔ* desde el ángulo recto hasta la base, entonces *BΔ* es una media proporcional de los segmentos de la base, *AB* y *B*Γ.

Así, mientras que en la solución de Euclides se presenta un trabajo geométrico similar pero empleando regla y compás, en la solución de Descartes, en cambio, se está considerando un eje de referencia, la recta *FH*, y un origen de coordenadas en el punto *G*, aunque sin señalarlo de manera explícita.

Más adelante, Descartes afirma que para resolver un problema en geometría conviene suponer el problema resuelto y dar nombres a todas las líneas (entiéndanse segmentos) que intervienen en su construcción, tanto las conocidas como las no conocidas y hacer un análisis sobre los elementos que componen la figura. Luego, la dificultad radicará en determinar todas las relaciones posibles entre esas líneas hasta que ello quede expresado en un sistema de ecuaciones que resuelva el problema propuesto. Se deben plantear tantas ecuaciones como líneas rectas desconocidas haya.

El siguiente ejemplo corresponde a un problema que aparece en el trabajo de Descartes pero cuya solución es explicada con detalle por Schooten, empleando los métodos propuestos por Descartes.

Dado el segmento AB *que contiene el punto* C, *hallar en la recta* AB *un punto* D *tal que el rectángulo* AD. BD *sea igual al cuadrado* CD.

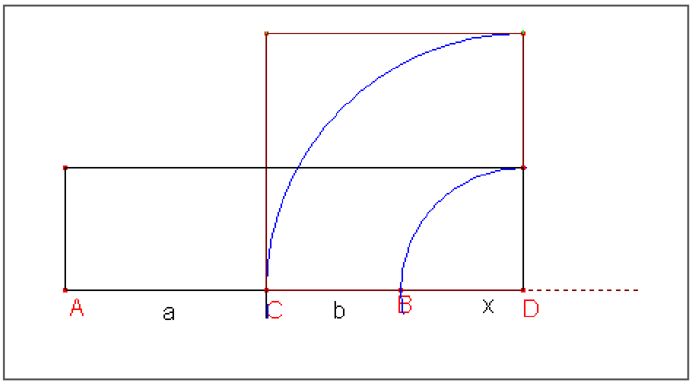


Figura 3.18. Interpretación geométrica del problema de Schooten

En este caso, se trataría de ubicar los puntos *A*, *C*, *B* y *D* sobre una recta, considerando que $AC=a$; $CB=b$; $BD=x$ de modo que $AD=a+b+x$, $CD=b+x$.

Luego, $AD.DB=(a+b+x)x=ax+bx+x^2$

Y por otro lado, $CD^2=(b+x)^2=b^2+2bx+x^2$

Como se quiere que $AD\cdot DB=CD^2$, entonces se tendría que:

$ax+bx+x^2= b^2+2bx+x^2$

de donde $$x=\frac{b^2}{a-b}.$$

Notemos que, en este caso, la solución algebraica ha sido el resultado de resolver una ecuación que en ambos miembros tiene expresiones cuadráticas y que, finalmente, se transforma en una ecuación lineal. Una vez conocida su solución, el segmento de longitud *x* se puede trazar considerando las construcciones de segmentos que resultan de multiplicar, de restar y de dividir segmentos. De modo que *D* quedaría construido partir de las longitudes de *a* y *b*.

Utilizando la herramienta *lugar geométrico* de un programa de geometría dinámica, se realizará la construcción geométrica, que como se verá, es más complicada que la solución algebraica aportada por Descartes.

Enunciado: Dado un segmento AB *y un punto* C *del mismo, determinar un punto* D *sobre la prolongación del segmento tal que* $(AD)(BD)=CD^2$

La solución propuesta es la siguiente:

Se considera un punto arbitrario *D'* que va a cumplir las funciones de *D*; se determina el punto *P* tal que $(D'P)^2=(AD')(BD')$. Se determina el lugar geométrico de los puntos *P* ligados al desplazamiento de *D'* al deslizarse sobre la recta que contiene a *AB*. Los trazos que se describirán a continuación se muestran en la figura 3.19.

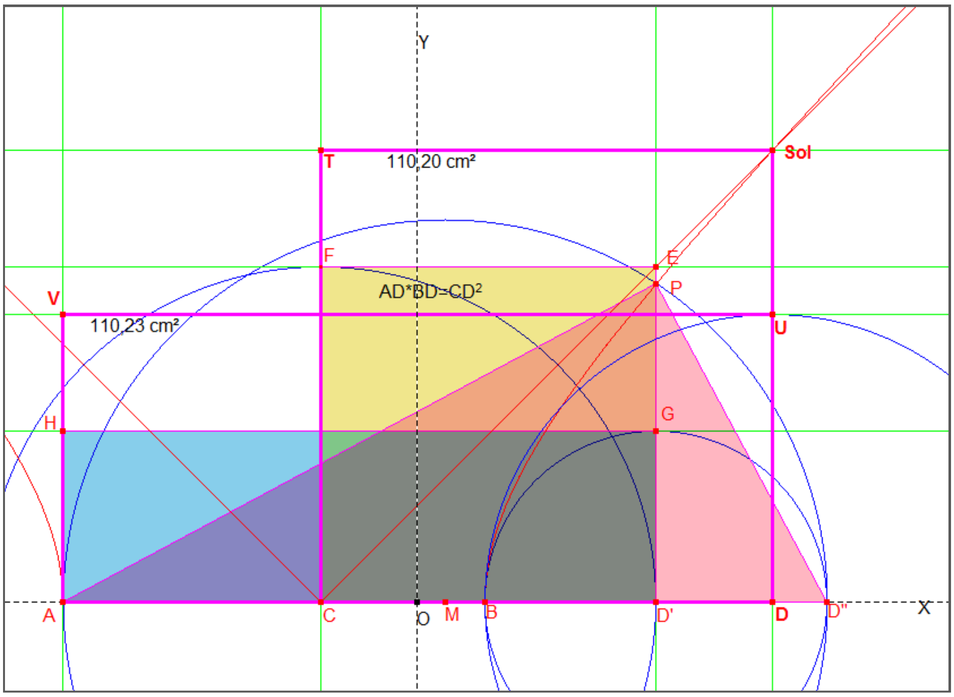


Figura 3.19. Solución del problema de Schooten

Se construye el cuadrado *CD'EF*, cuya área será coincidente con el área del rectángulo *AD'GH* cuando *D'* coincida con *D*. Se dibuja el lugar geométrico de los puntos *E* (vértice superior derecho del cuadrado). Se dibuja el lugar geométrico de este punto, *E*, asociado al desplazamiento de *D'*. La intersección de estos dos lugares geométricos determina el punto "Sol", cuya proyección horizontal determina *D*, el cuadrado y el rectángulo. Con este procedimiento quedará construido el punto *D*.

Descartes señala que cuando se tengan varias ecuaciones, el método general consistirá en tratar de combinarlas hasta obtener una con una sola variable. En ese proceso se puede obtener una cantidad desconocida igual a una conocida. También se puede obtener su cuadrado, cubo, etc., igual a una suma o diferencia de dos o más cantidades. Esto ocurre, por ejemplo, en las siguientes expresiones: $z=b$ ó $z^2=-az+b^2$ ó $z^3=az^2+b^2z-c^3$, donde *z* es la cantidad desconocida.

Menciona también que al obtener las ecuaciones se debe reconocer la procedencia geométrica de cada término presente y esto está relacionado con que la solución del problema se obtendrá trazando líneas, circunferencias, secciones cónicas u otras curvas.

Para ilustrar esta afirmación presentamos otro ejemplo desarrollado por Descartes.

Interpretar geométricamente la ecuación $z^2=az+b^2$.

El enunciado anterior tiene una interpretación geométrica:
Encontrar un cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de un cuadrado de lado conocido y un rectángulo con lados el lado del cuadrado buscado y donde el otro lado es dato.

Descartes señala cómo construir el lado del cuadrado buscado.

En el siguiente gráfico se traza el segmento *LM* de longitud conocida *b*, desde L se traza el segmento *NL*, perpendicular a *LM* y de longitud conocida *a*/2, y se traza la circunferencia de centro *N* y radio *a*/2. Se afirma que el punto de intersección de la recta que contiene a *NM* con la circunferencia trazada es el punto buscado *O*, siendo *z* la distancia del punto *O* a *M*.

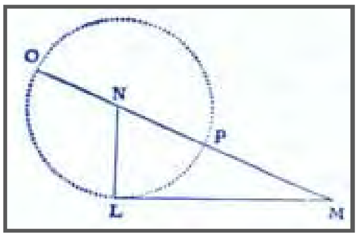


Figura 3.20. Construcción del punto *O*, solución del problema

Y la justificación analítica se presenta a continuación.

Del triángulo se obtiene:

$$z = \frac{a}{2} + NM$$

Pero

$NM^2 = NL^2 + LM^2$

Luego:

$(z - \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$

$z^2 - az = b^2$
$z^2 = az + b^2$

Obteniéndose con métodos algebraicos que $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$

Descartes señala que, de manera análoga, se pueden construir "todos" los problemas de la geometría ordinaria relacionados con las siguientes ecuaciones:

$$z^2 + az - b^2 = 0; z^2 - az - b^2 = 0; z^2 - az + b^2 = 0 .$$

Su solución resultará de la intersección de una circunferencia y una recta que hayan sido trazadas adecuadamente. Esta afirmación de Descartes se justifica por el hecho de que las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y raíces cuadradas se pueden representar geométricamente con construcciones con regla y compás.

No se han planteado ecuaciones de la forma $z^2+az+b^2=0$ ya que sólo se consideraron valores de *a*, *b* y *z* mayores o iguales a cero.

Así, en la primera mitad del libro I, Descartes resuelve exclusivamente problemas clásicos con ayuda del álgebra, lo que constituye una aplicación del álgebra a la geometría, pero no geometría analítica en el sentido actual (Kline, 1992, p. 410).

Luego aborda problemas indeterminados en los que hay muchas longitudes como soluciones posibles.

A continuación se presenta el problema de Pappus, generalización del problema de las tres o cuatro rectas abordado por Apolonio, y que Descartes formuló en los siguientes términos:

Problema de Pappus

"Teniendo tres, cuatro o u número mayor de rectas dadas en posición, se intenta hallar, en primer lugar, un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de forma que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no haya sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro. O bien, si hay cinco, que el paralelepípedo rectángulo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada… De este modo tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier número de rectas. A continuación, y puesto que existe una infinidad de puntos que pueden cumplir lo que se trate de hallar, es necesario conocer y trazar la curva en la que se encuentran todos; Pappus afirma que, cuando no existen más que tres o cuatro líneas dadas, se encuentra en una de las secciones cónicas, pero no intenta determinarla ni describirla, al igual que tampoco intenta explicar aquellas en que deben encontrarse todos estos puntos cuando la cuestión es planteada para un número mayor de rectas".

Teorema de Pappus para el caso $n>2$. (Chica, 2001, pp.75-76)

La figura 3.21 acompañará a la demostración de este teorema que corresponde a la solución propuesta por Descartes, para el caso en que se consideran tres rectas, es la siguiente:

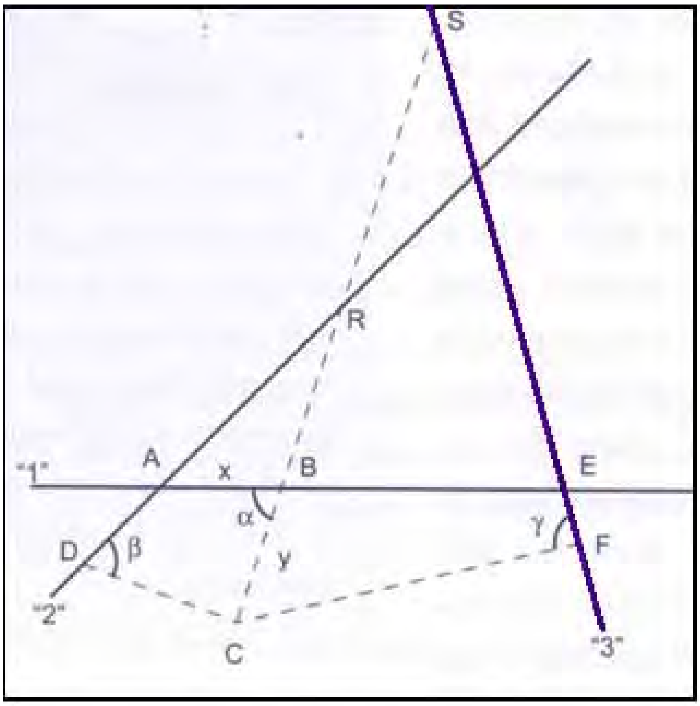


Figura 3.21. Teorema de Pappus
Tomado de Descartes (1954, p.78)

Dadas las rectas "1", "2" y "3", se considera a una de ellas como eje de coordenadas ("1") y a uno de los puntos, como origen (*B*). Considerar tres líneas dadas, "1", "2" y "3". Los ángulos β, α y γ conocidos. El problema consiste en determinar el conjunto de posiciones posibles del punto *C* de modo que $CB.CD = k(CF)^2$.

Se considerarán como líneas principales la recta "1" y la recta que pasa por *C* y *B*. En el lenguaje actual, dichas líneas serían los ejes de coordenadas y *B* sería el origen de coordenadas. Se denotan las longitudes *BA* y *BC* por *x* e *y*, respectivamente.

A continuación se buscarán expresiones para las longitudes de los segmentos *CB*, *CD* y *CF* en términos de los ángulos dados y de las variables *x* e *y*.

Se denotan por *R* y *S* los puntos de corte de las líneas "2" y "3" con la línea principal *C*B, respectivamente. Así, en el triángulo *ABR* son datos los ángulos del vértice *A*, del vértice *B* y el lado *AB*.

Luego, empleando la ley de senos, $\frac{sen(A)}{BR} = \frac{sen(R)}{x}$, *R* se determina a partir de los ángulos *A* y *B*.

Así, la longitud *BR* se puede expresar como un valor constante, por ejemplo *m*, de modo que *BR*= *mx*, donde *m* es conocido.

De esta manera, *CR*=*CB*+*BR*=*y*+*mx*.

Con esta expresión, analizamos ahora el triángulo *CRD* para hallar *C*D. Los ángulos *D* y *R* son conocidos y el segmento *CD* se puede expresar a partir de *CR*, empleando la ley de senos, como $CD=n(y+mx)$, con n conocido.

Finalmente, realizando un procedimiento análogo primero en el triángulo *BES* y luego con el triángulo *CF*S, se tendrá que:

$CF=s[y+p(q-x)]$, con s conocido.

De la condición: $CB.CD = k(CF)^2$, se tendrá:

$y.n(y+mx)=k[\ s[y+p(q-x)]]^2$ donde m, n, s, p y q son números conocidos.

En esta expresión sólo x e y son variables y el mayor grado con el que aparecen es 2. Así, simplificando esta expresión, se obtendrá una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como se vio en el problema que desarrolló Descartes, se fijó una recta como eje horizontal y un punto fijo de referencia sobre el eje, enfatizando en que la elección de estos elementos no afectaría la naturaleza de la curva; es decir, esta no se vería afectada por una transformación de coordenadas. La consideración de un eje y de un origen se convierte en una figura precursora del sistema cartesiano tal como lo conocemos hoy.

Cuando la condición del problema de Pappus venía dada por cuatro líneas rectas en lugar de tres, Descartes mostró que la solución general coincidía con la hallada para el caso de tres líneas rectas. Además, mostró que si se partía de cinco o seis líneas rectas, la expresión algebraica del lugar geométrico descrito por el punto C sería del tipo $P(x, y)=0$, donde P correspondería a un polinomio de tercer grado en x e y. Y procedió de manera análoga para un número mayor de líneas.

Por la limitación del lenguaje geométrico de áreas y volúmenes que limitaban la segunda condición, Pappus sólo pudo abordar el problema para un máximo de seis líneas. Sin embargo, el procedimiento seguido por Descartes muestra el poder de la geometría analítica para resolver el problema considerando un número cualquiera n de líneas.

El objetivo fundamental de Descartes fue determinar la curva que contenía a un conjunto finito de puntos dados y que satisfacían una condición geométrica dada, (Descartes, 1954). Sin embargo, si bien se reconoce que la motivación original de Descartes estuvo en resolver problemas de contextos sintéticos, su aporte fundamental radicó en emplear herramientas distintas a las que brindan las construcciones exactas con regla y compás.

Siguiendo procedimientos similares a los descritos previamente, en el segundo libro de *La Geometría*, Descartes clasificó los problemas de geometría asociados a esta situación de la siguiente manera:

- Problemas del plano, que sólo requerían de rectas y circunferencias para su solución, lo que es equivalente a que solo requerían de regla y compás.
- Problemas de sólidos, que requieren usar secciones cónicas que provienen de superficies cónicas
- Problemas lineales, que requieren el uso de líneas de naturaleza distinta tales como la espiral, la conchoide, la cisoide, etc.

Señaló luego que caracterizaría todas las curvas a las que llamaría geométricas y que son las que admiten una medida exacta y precisa. Quedarían fuera de esta clasificación las curvas que corresponden a la coordinación de dos movimientos distintos y cuya relación no admite relación exacta; estas curvas no podrían ser expresadas por ecuaciones algebraicas. Leibniz denominaría luego a estas últimas curvas trascendentes.

En el trabajo de Pappus, se concluyó que cuando no existían más que tres o cuatro líneas rectas dadas, la solución se encontraba en una de las secciones cónicas; sin embargo, en ese trabajo, no se intentó determinarla, ni describirla. Pero en la solución que dio Descartes varios siglos después, se propuso una clasificación de las curvas geométricas en función del grado de la ecuación que satisfacían los puntos de ésta. La clasificación se describe a continuación:

- Si la ecuación en dos variables no tiene términos de grado mayor a dos, se tratará de una curva de primera clase. Corresponden a este grupo las parábolas, elipses, hipérbolas y circunferencias.
- Si la ecuación tiene uno o más términos de tercer o cuarto grado y éste es el mayor grado presente, la curva será de segunda clase.
- Si la ecuación tiene uno o más términos de quinto o sexto grado y éste es el mayor grado presente, la curva será de tercera clase.

Y así sucesivamente.

Retomando el problema de Pappus, luego de esta clasificación Descartes enunció la solución general de la siguiente manera:

- Cuando se conocen 3 ó 4 puntos, la ecuación que resulta es de segundo grado. De aquí se sigue que la curva que pasa por esos puntos es de primera clase.

- Cuando no se conocen más de 8 puntos, la ecuación será, a lo más, una bicuadrática y entonces la curva resultante será de primera o segunda clase.
- Cuando no se conocen más de 12 puntos, la ecuación será, a lo más, de sexto grado y la curva resultante será de primera, segunda o tercera clase.

Descartes concluyó además que si se tiene la ecuación de una curva geométrica, entonces en las condiciones dadas para su definición siempre se requerirá sólo un número finito de puntos.

Tal como lo señala Font (1999), el aporte de Descartes para el estudio de las curvas resultó sumamente interesante. Antes de su trabajo, las curvas eran secciones o eran la traza de un punto que se desplazaba sujeto a determinadas condiciones geométricas. Con los aportes de Descartes, las curvas fueron consideradas como la traza de un punto que se desplazaba sujeto a determinadas condiciones geométricas pero que además podían ser descritas completamente por comprensión a través de una ecuación. El trabajo de Descartes exigió un cambio de representación del registro figural, al gráfico y luego al simbólico.

Por otro lado, hay algunas precisiones que realizar respecto al trabajo de Descartes. Como estrategia de solución, eligió adecuadamente el sistema de referencia de modo que la ecuación pudiera reducirse a su forma más sencilla. Sin embargo, como se ha podido observar en la solución propuesta al problema de Pappus, Descartes no hizo uso de un sistema de coordenadas rectangulares como el que conocemos actualmente. Como señalan Rey Pastor et al. (1957), en la técnica descrita en el trabajo de Descartes sólo se requería tomar segmentos paralelos sobre un eje, definiendo un sistema de referencia; no se daban ecuaciones de objetos, ni siquiera la de una recta. Tampoco trabajó con pares de números asociados a puntos; las variables usadas representaban longitudes respecto del sistema de referencia. El término *producto cartesiano* fue introducido por primera vez por el matemático francés Fréchet recién a inicios del siglo XX (Boyer, 1999, p. 436) y no por Descartes, como suele señalarse en los textos.

3.2.4. FERMAT

Sobre Fermat (1601-1665), en Boyer (1999) se afirma que asumió la tarea de reconstruir los lugares planos de Apolonio, apoyándose en las referencias contenidas en la *Colección Matemática* de Pappus. El uso de coordenadas en el trabajo de Fermat no surgió por consideraciones prácticas, sino que apareció al aplicar el álgebra del renacimiento a problemas geométricos de la antigua Grecia. Fermat introdujo dos ejes y desarrolló sistemáticamente la teoría de la recta y de las cónicas. Por eso se afirma que Fermat realizó un trabajo que se asemeja más a lo que hoy se conoce como geometría analítica.

Según Boyer, Fermat descubrió lo que denominó Principio Fundamental de la Geometría Analítica, el cual enunció de la siguiente manera: "*Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva*" (Boyer, 1999, p. 437).

Fermat asignó a las ecuaciones de primer grado, las rectas y afirmó que a toda recta se le podía asociar una ecuación de primer grado; señaló que las gráficas de las ecuaciones $xy = k^2$ eran hipérbolas, las de las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2Dx + 2By = b^2$ eran circunferencias, las de las ecuaciones $x^2 = By, y^2 = Dx$ y $b^2 \pm x^2 = By$ eran parábolas, que $b^2 - x^2 = ky^2$ era una elipse, que $b^2 + x^2 = ky^2$ era una hipérbola y que $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ también era una hipérbola, (Font 1999, pág. 162).

A diferencia del trabajo de Descartes, el punto de partida del trabajo de Fermat fueron las ecuaciones y luego estudió sus gráficas; así, su énfasis estuvo en encontrar una representación gráfica de las expresiones algebraicas.

Los trabajos de Descartes y Fermat en relación al desarrollo de la geometría analítica pueden ser considerados como los resultados en geometría de mayor impacto desde el desarrollo de la matemática griega (O'Leary, 2010, p.289).

Sin embargo, aunque se suele atribuir el desarrollo de la geometría analítica a estos dos matemáticos, señalando que ambos encontraron los mismos resultados trabajando independientemente, según lo expuesto se puede afirmar que sí hubo diferencias importantes entre sus producciones. Mientras que Descartes construyó su geometría desde el complejo problema de Pappus pero sin adoptar un sistema de coordenadas, Fermat consideró lugares geométricos más sencillos, de la forma $y = x^n$, comenzando por la ecuación lineal y eligiendo un sistema de coordenadas con dos ejes perpendiculares para representarla.

3.2.5. OTROS AVANCES IMPORTANTES EN EL DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA

Hay otro personaje importante que se asocia al desarrollo de la geometría analítica; se trata del alemán Möbius, quien en la obra "Der barycentrische Calcül" en 1827 introdujo el sentido o signo de las magnitudes geométricas, de modo que logró el perfecto paralelismo con el Álgebra. Esto quiere decir que adjudicó el signo ± a segmentos, ángulos y recintos, según su orientación. Posteriormente, fue otro matemático alemán, Plücker, quien en 1832 amplió el horizonte de la geometría analítica, considerando que también eran elementos del espacio las rectas o planos, y no sólo los puntos.

Al paso de la geometría sintética a la geometría analítica caracterizado por la definición de un objeto mediante una fórmula que permitía calcularlo, Sierpinska (1996) lo denominó *aritmetización del espacio*. Y señaló que éste constituyó una primera etapa en el establecimiento del álgebra lineal como campo del conocimiento matemático.

3.3. EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LOS SIGLOS XVIII Y XIX

A continuación se realizará una revisión de la evolución de la geometría en los siglos posteriores a los aportes de Fermat y Descartes.

Boyer (1999) señala que luego de varios siglos de abandono, los problemas clásicos de la geometría sintética fueron retomados en la Europa continental; prueba de ello es el trabajo de Clairut en 1741, *Eléments de géométrie.*

En el siglo XVIII, Gauss demostró la constructibilidad del polígono regular de 17 lados, empleando sólo regla y compás. Más aún, enuncio que los únicos polígonos regulares que se pueden construir con regla y compás son aquellos cuyo número de lados es $N = 2^m p_1 p_2 \ldots . p_r$, con m entero, $m \geq 0$ y $p_1, p_2, \ldots ., p_r$ números primos de Fermat distintos (esto es, números primos de la forma $2^{2^n} + 1$ con n=0, 1, 2,…) o bien $N = 2^m$. Así, los polígonos regulares construibles con regla y compás son aquellos que tienen un número de lados igual a 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, etc. En la búsqueda de la solución de este problema, Gauss desarrolló la teoría de números, además de la aritmética modular.

En Acevedo y Falk (1997) se señala que se le debe a Gauss establecer una relación entre los problemas de construcciones con regla y compás y la teoría de ecuaciones algebraicas. La pregunta fundamental a la que se dio respuesta fue la siguiente: *Qué cantidades pueden ser construidas con regla y compás, asumiendo que las operaciones geométricas se pueden representar en un sistema coordenado en el plano*. Para ello es necesario identificar las operaciones algebraicas involucradas en cada paso. Por ejemplo, para hallar una distancia entre dos puntos se recurre al cálculo de una raíz cuadrada; para determinar puntos de intersección de una recta y una circunferencia, se recurre a resolver una ecuación de segundo grado. En resumen, construir con regla y compás cantidades geométricas corresponde algebraicamente a que éstas puedan ser deducidas por el uso repetido y finito de las cuatro operaciones aritméticas y de la raíz cuadrada.

En un contexto más general del significado de geometría, el fracaso de los intentos por demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro, condujo a la definición de nuevas geometrías, (Blumenthal, 1965). Aquellas geometrías en las que no se cumplía el quinto postulado se denominaron geometrías no euclidianas, siendo Gauss el primero en introducir este término.

De otro lado, respecto al trabajo de Euler en el siglo XVIII, es importante mencionar su libro *Introductio*, volumen 1, publicado en 1748, en donde no se limitó al estudio de las secciones cónicas con ayuda del álgebra sino que realizó un estudio sistemático de curvas basado en el concepto de función; en el volumen 2 estudió las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas con geometría analítica.

De esta manera, se estableció un vínculo importante entre estas áreas del conocimiento matemático.

Retomando los problemas clásicos de la matemática griega, a continuación se enuncia el teorema de Wantzel, 1837, cuyo autor es el matemático francés del mismo nombre y que en el siglo XIX dio respuesta a los problemas de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la construcción de polígonos regulares con regla y compás, así como la irracionalidad de π, empleando argumentos algebraicos. Su obra se denominó *Recherches sur le moyens de reconnaître si un Problème Géométrie peut sé résoudre avec la règle et le compas*.

> Un número real *x* es construible de forma exacta con regla y compás, si, y sólo si, es algebraico sobre Q y el polinomio de grado mínimo (irreducible con coeficiente 1 para el término de mayor grado) que tiene a *x* como raíz, tiene como grado una potencia de 2 (es decir, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2^q} x^{2^q} = 0$).

Enunciado del Teorema de Wantzell

Con este importante resultado, se pudieron retomar los problemas clásicos de la geometría griega y darles solución algebraicamente o justificar la imposibilidad de resolverlos de manera exacta con regla y compás (Pérez, 2009). A continuación se retoman los problemas clásicos y se comenta cómo se abordaron.

Problema 1: Cuadratura del círculo

El problema hace referencia a construir un cuadrado de área igual a la un círculo dado. En el caso en que el radio fuera 1, el resolverlo sería equivalente a construir un cuadrado de lado $\sqrt{\pi}$ y Lindemann probó, en 1882, que π era trascendente, es decir, que no era solución de un polinomio con coeficientes racionales y por tanto no era construible (Alsina y Trillas, 1992, p.216).

Es interesante comentar que existe un método que sí permite cuadrar el círculo, es el método de la cicloide: éste consiste en hacer rodar un círculo una vuelta completa sobre una recta. Como esta longitud es 2π, se puede obtener el segmento de longitud π, pero ello no significa que π sea construible de manera exacta con regla y compás.

Problema 2: Trisecar un ángulo

Ante el problema de dividir exactamente en tres partes cualquier ángulo realizando construcciones con regla y compás, se tiene que si A es un ángulo y *a* es su medida en radianes, A será *trisecable* si $\frac{a}{3}$ ó $\cos(\frac{a}{3})$ son construibles.

La solución a este problema se puede enunciar también a través del siguiente teorema:

Teorema: Sólo son trisecables aquellos ángulos *a* tales que el polinomio $4x^3 - 3x - \cos(a)$ sea reducible en el conjunto de polinomios con coeficientes en Q(*cos*(*a*)).

Esta afirmación se deriva de escribir el *cos*(*a*) en términos del $\cos(\frac{a}{3})$.

de donde se obtiene la identidad $\cos(a) = 4\cos^3(\frac{a}{3}) - 3\cos(\frac{a}{3})$ en la que $cos(\frac{a}{3})$ se denota por x.

Así, se tendrá que:

Para $a=\frac{\pi}{3}$: $\cos(\frac{\pi}{3}) = 4x^3 - 3x$, ecuación de grado 3 que tiene a $\cos(\frac{\pi}{9})$ es algebraico sobre Q pero su polinomio de grado mínimo tiene grado 3.

Luego, $\cos(\frac{\pi}{9})$ no es construible; esto es, el ángulo $\frac{\pi}{3}$ no se puede trisecar.

Para $a=\frac{\pi}{2}$: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 4x^3 - 3x$, ecuación de grado 3 que tiene a $\cos(\frac{\pi}{6})$ es algebraico sobre Q y su polinomio de grado mínimo tiene grado 2 ($0 = 4x^2 - 3$). Luego, $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ es construible; esto es, el ángulo $\frac{\pi}{2}$ se puede trisecar.

Este desarrollo permite concluir que sólo se pueden trisecar de forma exacta algunos ángulos.

Problema 3: Duplicación del cubo

Dado un cubo de lado *l*, construir con regla y compás, el lado de un cubo que tenga el doble de volumen del anterior.

Este problema se reduce a determinar si $\sqrt[3]{2}$ es construible. Pese a ser $\sqrt[3]{2}$ algebraico sobre Q por ser solución de $x^3 - 2 = 0$, como este polinomio es de grado 3, se tiene que $\sqrt[3]{2}$ no es construible. Y por tanto, el problema de construir un cubo con el doble de volumen no se puede resolver de manera exacta con regla y compás.

Notar que este problema tiene relación con el trabajo de Hipócrates que, en el siglo V a.C., observó que la resolución del problema de la media geométrica $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, con *b*=2*a*, conducía a las expresiones $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, lo que era equivalente en términos modernos a resolver $x^3 = 2a^3$; es decir, a hallar puntos que verificasen las dos ecuaciones anteriores correspondientes a dos curvas.

Menecmo, en el siglo IV a.C., trató de resolver el problema intersecando dos parábolas o una hipérbola $xy=a^2$ y una parábola $y^2=(a/2)x$ pero al no ser construibles con regla y compás ni la parábola ni la hipérbola, la solución tampoco lo sería.

A fines del siglo 18 Monge realizó un estudio sistemático de representaciones planas de objetos tridimensionales, dando origen a la geometría descriptiva y Poncelet, en el siglo XIX, desarrolló resultados muy importantes de geometría proyectiva y revaloró la geometría sintética.

Sin embargo, no transcurrió mucho tiempo para que se hicieran evidentes las intenciones por separar el álgebra de la geometría sintética. Lacroix (1765-1843) formuló su punto de vista sobre este tema con mucha claridad en su obra *Traite élementaire* a través del siguiente párrafo:

> *Evitando cuidadosamente todas las construcciones geométricas, haremos ver al lector que existe una manera de considerar la geometría que se podría llamar geometría analítica, y que consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por métodos puramente analíticos, de la misma manera que ha hecho Lagrange en su mecánica con respecto a las propiedades del equilibrio y del movimiento.* (Boyer, 1999, p.602-603)

Para entender la repercusión del trabajo de Lacroix, se puede decir que su texto apareció en veinticinco ediciones durante 99 años. De hecho, el estilo de su obra sirvió de modelo a muchos autores de tratados sobre geometría analítica durante el siglo XX.

Sierpinska (1996) denominó a este proceso como la *desaritmetización del espacio* y lo caracterizó por la definición de los objetos a partir de propiedades. Se da un objeto a través de la síntesis y luego se genera su concepto, formulando un conjunto de axiomas que describen sus propiedades. De esta manera, en pro de la comunicación, se pierde parte del significado, aunque se gane en el significado global de la teoría.

3.4. GEOMETRÍA SEGÚN LA CONCEPCIÓN MODERNA

En este apartado se presentan algunos de los valiosos aportes que hicieron Felix Klein y David Hilbert, casi simultáneamente, para adoptar una visión de la geometría desde el álgebra lineal.

Félix Klein, maestro de Hilbert, a través del programa de Erlangen (1872) tuvo el mérito de distinguir entre las distintas geometrías que hasta ese entonces se habían desarrollado al margen de una concepción unificadora (Wussing y Arnold, 1989). En

Bouvier y George (1984, p. 373) se señala que Klein mostró la geometría como el estudio de los invariantes de grupos que operan sobre conjuntos muy diversos llamados, en tal caso, conjunto de puntos.

Para definir una geometría, Klein identificó dos elementos fundamentales:

- Un espacio E: que puede ser cualquier conjunto no vacío, por ejemplo un conjunto finito de elementos, la recta R, el espacio R^3.

y

- Un grupo G(E) de transformaciones de dicho espacio que como mínimo contiene a la identidad y está contenido en el grupo de todas las posibles biyecciones de E en E.

Con el par [E, G(E)] se pueden clasificar las *figuras*, o subconjuntos no vacíos de E, de acuerdo con las transformaciones de G(E) y según el siguiente criterio:

Dos figuras F y F' de E son equivalentes, y se escribe F ~ F' si, y sólo si, existe una transformación T de G(E) que transforma F en F', es decir T(F)=F'.

Con las exigencias dadas, se puede verificar que la relación ~ es de equivalencia. El ser una relación de equivalencia facilita una clasificación de las figuras del espacio: en cada *clase* de figuras aparecen unas figuras dadas y todas las obtenidas a partir de éstas mediante las transformaciones consideradas, (Alsina y Trillas, 1992).

Sobre un mismo espacio pueden considerarse diferentes grupos de transformaciones, dando lugar con ello a diferentes geometrías: existen tantas geometrías como posibles subgrupos del grupo de biyecciones del espacio en sí mismo. Así, se concibe a la geometría como *el estudio de las propiedades invariantes de ciertas relaciones generalizadas de equivalencia, de modo que una geometría se distingue de otra por el grupo de transformaciones características*. De esta manera, la geometría se definió haciendo uso de estructuras algebraicas y de objetos del álgebra lineal.

Para el caso particular de las geometrías de R^3, atendiendo a la definición dada por Klein en la que una geometría está determinada por el conjunto de invariantes, se han considerado las geometrías equiforme, euclidiana, afín y proyectiva, tal como se muestra en la tabla 3.2.

Tabla 3.2. Clasificación de las geometrías según invariantes

Geometría	**Transformaciones**	**Invariantes**
Equiforme	Semejanzas	Ángulos, paralelismo, razones dobles
Euclídeana	Isometrías	Distancias, ángulos, paralelismo, razones dobles
Afín	Afinidades	Paralelismo, razones dobles
Proyectiva	Proyectividades	Razones dobles

Según esto, en la Geometría Euclídeana las transformaciones consideradas son las isometrías o movimientos rígidos. En estas transformaciones las distancias, ángulos, ortogonalidad y paralelismo se preservan; no pasa lo mismo con la posición.

Un tema aparte merece el trabajo de Hilbert (1862-1943) y su organización de la geometría en su obra *Fundamentos de Geometría* (1898). Con este trabajo, el carácter formal de la geometría quedó establecido así como se había hecho ya con el álgebra y el análisis. Hilbert desarrolló una teoría en donde se consideraban tres tipos de objetos indefinidos: puntos, rectas y planos; seis relaciones indefinidas: estar sobre, estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo. En lugar de cinco axiomas y cinco postulados como los de Euclides, Hilbert formula un conjunto de 21 axiomas, conocidos como los axiomas de Hilbert para la geometría euclidiana.

Según la organización presentada por Hilbert, la geometría euclidiana sería aquella donde la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es igual a dos ángulos rectos; a esta geometría también la denominó *geometría parabólica*. Llamó *geometría hiperbólica* a la desarrollada por Saccheri, Gauss, Bolyai y Lobachewsky y *geometría elíptica* a la desarrollada por Riemann; estas geometrías surgieron negando el axioma de las paralelas. En la geometría elíptica no existe ninguna paralela a una recta dada por un punto exterior a la misma y en la geometría hiperbólica existe más de una paralela.

También se suelen describir como las geometrías planas tales que al construir un trapecio ABCD, trazando perpendicularmente a los extremos del segmento AB y de mismo lado de ese segmento dos segmentos de igual longitud AD y BC, ocurre que:

- En la geometría del ángulo recto, la de Euclides, los ángulos interiores en C y D son rectos.
- En la geometría del ángulo agudo, la de Lobatchevski, los ángulos interiores en C y D son agudos.
- En la geometría del ángulo obtuso, la de Riemann, los ángulos interiores en C y D son obtusos.

La representación geométrica de estas situaciones se muestra a continuación.

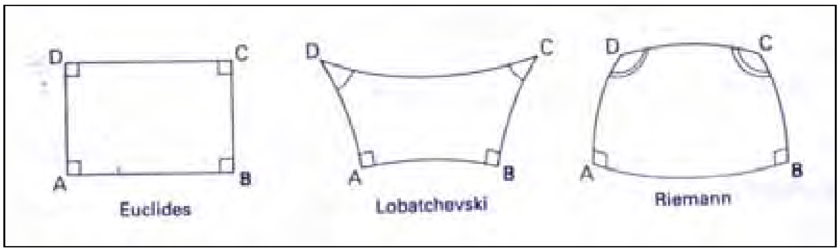


Figura 3.22. Representación de un trapecio con dos ángulos rectos en la base según las tres geometrías
Tomado de Bouvier y George (1984, p. 374)

Un caso particular de la geometría Riemaniana es la esférica. En ella los ángulos interiores pueden medir $\frac{3\pi}{2}$. Esto marcó un hito en la concepción de la geometría como descripción del espacio físico.

El desarrollo de geometrías no euclidianas como las desarrolladas por Gauss, Bolyai y Lobachevsky muestra que en dicha época se desarrollaba una postura distinta frente al conocimiento. El admitir que era posible considerar otras geometrías lógicamente satisfactorias era equivalente a aceptar que no había una única verdad en matemáticas; lo importante era que el sistema construido fuera consistente.

3.5. SOBRE LAS REPERCUSIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA CONCEPCIÓN MODERNA DE GEOMETRÍA

La organización de la geometría analítica en los textos didácticos empleados en el primer año de universidad de estudiantes de carreras de ingeniería y arquitectura responde básicamente a dos orientaciones. Una asociada al álgebra lineal, cuyo origen se encuentra en la concepción moderna de geometría en función del conjunto de invariantes de grupos que operan sobre diversos conjuntos, idea desarrollada por Klein (Bouvier y George, 1984, p. 373), presente todavía en textos como el de Alsina y Trillas (1992) y otra caracterizada por abordar la geometría analítica como un requisito para el tema de funciones, concepto fundamental del cálculo diferencial e integral, y que es característica de diversos libros de cálculo como el de Stewart, Redlin y Watson (2007) en donde se enfatiza en el estudio de propiedades de curvas a partir de sus expresiones algebraicas.

A continuación, se presenta la forma en la que se abordó la geometría en diversos textos didácticos, empleados en los primeros cursos de matemáticas para estudiantes de arquitectura, luego del trabajo de Klein y Hilbert. En la descripción se toma en cuenta si hubo una problematización que justificara la introducción del tema, los problemas que se presentaron, los conceptos que se abordaron y se identifica si se establecieron conexiones entre geometría sintética y geometría analítica.

Texto 1

Se revisó un texto que planteaba el estudio de objetos geométricos en términos de transformaciones, se trata del texto de Rey Pastor, Santaló y Balanzat (1957). En él se señala que la Geometría Métrica presenta inconvenientes, como la ausencia de métodos; en contraste, se presenta la Geometría Analítica como aquella que, al poseer un método y permitir sistematizaciones, será una geometría al alcance de todos.

En este texto se dejan de lado las construcciones con regla y compás; los problemas de lugares geométricos se abordan directamente desde la perspectiva algebraica. Con esta nueva herramienta se establecen relaciones entre los elementos de las figuras que pueden expresarse a través de ecuaciones.

En un apartado interesante, se menciona que en los orígenes de la Geometría Analítica se empleaba un sistema de coordenadas cartesianas generales, no necesariamente rectangulares y donde la abscisa y ordenada de un punto se definen como las proyecciones sobre los ejes de coordenadas, mediante paralelismo, tal como se muestra en la siguiente figura.

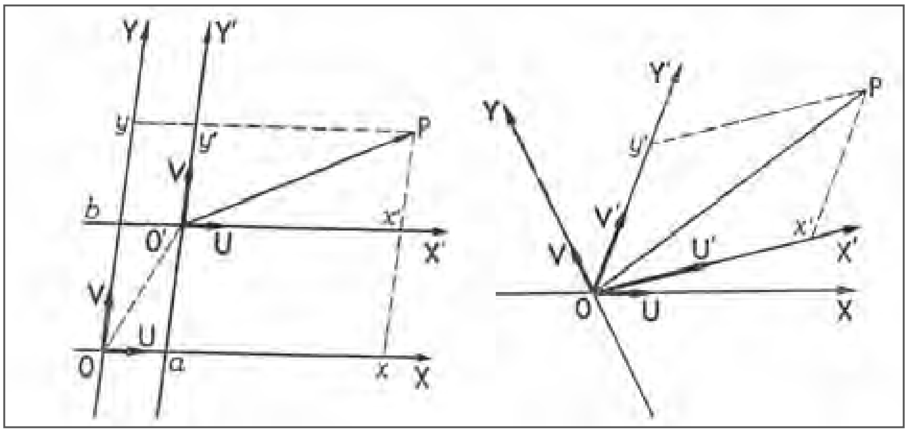


Figura 3.23.Sistema de coordenadas generales
Tomado de Rey Pastor, Santaló y Balanzat (1957, p.34)

Se resalta el que el sistema de coordenadas cartesianas garantiza la biyección entre los puntos del plano y R^2; dicha propiedad no la satisfacen todos los sistemas de coordenadas, basta analizar el caso del sistema de coordenadas polares.

Se señala también que un sistema de coordenadas cartesianas no rectangulares permite resolver problemas de intersecciones y proyecciones, problemas de lugares geométricos que no involucren distancias, entre otros, eligiendo un sistema de manera conveniente. Mientras que la condición de ejes perpendiculares (proyecciones paralelas que son ortogonales) permite abordar problemas métricos, tales como distancias, medidas de ángulos, condición de perpendicularidad, cálculo de áreas, entre otros.

Para los autores, la introducción de un sistema de coordenadas rectangulares *X*-*Y* desde el inicio no permitirá distinguir lo útil que puede ser el hecho que se considere un sistema de coordenadas donde los ejes son perpendiculares.

Texto 2

Para comprender mejor el efecto que tuvo en la enseñanza de la matemática la presentación de la geometría desde la perspectiva de Klein, se consideró pertinente analizar un texto editado por primera vez en 1947 y de lectura obligatoria en la formación matemática de ingenieros y arquitectos de la época. Se trata del libro *Geometría Métrica*, cuyo autor es Puig Adam (1976). Fue escrito bajo la concepción de qué geometría requería un ingeniero o arquitecto para que le proporcionara no sólo los conocimientos útiles para su trabajo práctico, sino también el hábito de manejarlos con buen criterio. Actualmente el texto se encuentra en desuso, pero sigue siendo una obra de consulta obligada para quien desea aprender geometría métrica.

En el texto se considera la geometría métrica en el marco de la clasificación general de las geometrías establecida por Klein en el programa Erlangen. Esto significa que en el caso particular de la geometría métrica, sus propiedades son invariantes respecto del grupo de los movimientos y del grupo de semejanzas. Así, luego de establecer las nociones de movimiento y congruencia, todas las propiedades que se estudien (igualdad entre elementos, entre sumas o diferencias, entre sus razones, entre sus medidas y entre productos de sus medidas, etc.) serán propiedades que permanecerán aún luego de aplicar a la figura cualquier movimiento o transformar la figura por homotecia o semejanza.

El texto se inicia estableciendo relaciones en el plano tales como enlace, ordenación y sentido, para luego introducir la congruencia y el paralelismo con transformaciones como simetrías, traslaciones y giros. Luego se establecen relaciones métricas en las figuras planas, que después permitirán determinar longitudes y áreas.

En este libro se enfatiza el tema de construcciones geométricas, destacando su interés formativo. Se consideran problemas donde se emplean los métodos de tangencias, lugares geométricos y transformaciones.

Luego se presentan las construcciones que se pueden realizar sólo con regla, sólo con compás, con ambos instrumentos, para después recomendar ampliar este conjunto de instrumentos de modo que se puedan realizar construcciones con sencillez y exactitud.

Justamente, a partir del análisis crítico de las construcciones con regla y compás, se pone de manifiesto que hay problemas que son irresolubles y que requieren de otros recursos, como aquellos que sólo el Análisis puede aportar, para resolver problemas geométricos. Se presentan entonces algunos resultados y conceptos elementales, como el de coordenadas cartesianas de un punto en el plano, distancia entre dos puntos, para después estudiar el carácter algebraico de construcciones con regla y compás como la de la recta y la de la circunferencia.

Finalmente se desarrollan capítulos con los temas señalados anteriormente pero ahora considerando objetos en tres dimensiones.

Texto 3

Otro intento para no dejar de lado las construcciones con regla y compás, pero desde la perspectiva del álgebra lineal, es el trabajo realizado por Alsina y Trillas (1992). Ellos organizan los conceptos geométricos para estudiantes de arquitectura de primer año en el texto Lecciones de Álgebra y Geometría.

En un primer capítulo se introduce la teoría de grafos, enfatizando sus aplicaciones en la arquitectura. En los siguientes tres capítulos se describen las geometrías lineal, afín y euclídea, empleando para ello el lenguaje del álgebra lineal.

Luego, con estos elementos se aborda el tema de la simetría sin dejar de lado las primeras concepciones que se tuvieron de este concepto donde se asociaba la noción de simetría como una proporción. Así, se presenta la definición de Vitruvio, que tuvo una notable influencia en el renacimiento:

> *La simetría o conmensuración es, precisamente, el vínculo armónico de cada uno de los miembros del edificio […] es la correspondencia proporcional […] de cada una de las partes consideradas en sí, respecto a la figura global de la obra. Así como en el cuerpo del hombre la cualidad de la euritmia está conmensurada por el antebrazo, el pie, la palma de la mano, el dedo y las otras partes, lo mismo ocurre en el perfecto y completo edificio* (Vitruvio, en Alsina y Trillas, 1992, p.132).

Después se señala que posteriormente se establecieron diferencias entre la teoría de la simetría y la de la proporción; así, mientras que la simetría se referiría a una similitud de partes opuestas o a la reproducción exacta a la izquierda o derecha de un eje, la proporción haría referencia a una relación armoniosa del todo con las partes.

Con esta introducción, se señala que en el capítulo del libro se abordará la simetría desde el siguiente punto de vista: “La teoría de la simetría es una parte de la geometría que operando sobre el espacio euclídeo engloba como transformaciones a todas las isometrías, siendo su interés específico el estudio de los grupos de isometrías que dejan invariantes a las figuras” (Alsina y Trillas, 1992, p.133).

Luego de presentar las isometrías y las matrices asociadas, se proponen y resuelven problemas para encontrar ecuaciones de transformación, conociendo la matriz de la transformación asociada.

A continuación, en el texto se presenta el teorema fundamental que permite clasificar las cuádricas para luego estudiar las cónicas a través de ellas.

Teorema: De acuerdo con unas técnicas adecuadas de reducción, toda cuádrica admite una ecuación canónica o reducida de uno de los siguientes tipos:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0, \quad \text{o}$$
$$\lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 = 2Kx + c$$

Los problemas que aparecen en este capítulo tienen como objetivo fundamental la identificación del tipo de cuádrica que está asociada a una ecuación dada.

La clasificación de las cónicas está contenida en la de las cuádricas ya que las ecuaciones reducidas de éstas se obtienen de intersecar las ecuaciones canónicas de las cuádricas con planos paralelos al plano XY. Así, se obtienen las siguientes ecuaciones canónicas de las cónicas:

$$ax^2 + by^2 = K \quad \text{ó} \quad x = ay^2$$

Hasta aquí se observa que en el texto se priorizan las técnicas propias del álgebra lineal para la solución de problemas. Los problemas planteados no requieren del uso de técnicas gráficas ni de construcciones geométricas.

En la segunda parte del texto se sistematiza el estudio de las construcciones con regla y compás. Se plantean problemas de construcciones exactas con regla y compás, tales como trazar una paralela a una recta dada por un punto dado, inscribir un cuadrado en una circunferencia dada, construir un triángulo conociendo sus tres lados, trazado de tangentes, construir triángulos conociendo tres datos, entre otros.

Posteriormente se organiza la teoría para establecer cuándo un número es construible de manera exacta con regla y compás. Para ello, primero se presentan las construcciones elementales que pueden ser realizadas con cada uno de los dos instrumentos y luego se recurre a resultados importantes del álgebra para justificar la imposibilidad de construir con regla y compás las soluciones de los tres problemas clásicos de la matemática griega. Así, se muestra el vínculo entre dos campos del conocimiento: la construcción de soluciones de problemas geométricos y el álgebra.

Siguiendo con la organización del texto, se señalan cuáles son las construcciones que se pueden realizar empleando una *regla euclídea*. En este contexto, la solución de un problema equivale a la construcción de una figura con las características solicitadas.

Después se amplía el campo de problemas de modo que las nuevas situaciones corresponderán a problemas elementales que no pueden resolverse empleando sólo la regla como por ejemplo, trazar el punto medio de un segmento, construir un triángulo conociendo un lado y dos ángulos, construir un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido. La solución de estos problemas será posible si se emplea un compás. Se comenta que el compás empleado por Euclides (compás euclídeo) difiere del compás que conocemos actualmente ya que mientras que el compás euclídeo se cerraba solo, es decir, no poseía la facultad de trasladar distancias y requería del centro y un punto de paso, el compás moderno puede mantener la abertura constante y así trazar circunferencias teniendo como dato el centro y el radio. Luego se demuestra que el compás euclídeo y el moderno son equivalentes. Se señala que, en adelante, cuando se haga referencia al compás, se asumirá que es el compás moderno para evitar complicaciones innecesarias.

Ejemplos de algunos problemas que se pueden resolver sólo si se emplea el compás son construir la mediatriz de un segmento, construir la perpendicular a una recta desde un punto exterior dado, construir la bisectriz de un ángulo, construir la paralela a una recta desde un punto exterior dado, construir triángulos conociendo tres lados, construir cuadriláteros, trazado de tangentes a una circunferencia, etc.

A manera de ejemplo, se presenta la construcción de la recta tangente a una circunferencia dada desde un punto exterior.

Problema: Trazar la tangente a una circunferencia desde un punto exterior.
Construcción propuesta:
Si *P* es el punto exterior y *O* es el centro de la circunferencia, considerar los puntos *M* y *N* en los que las rectas tangentes trazadas desde *P*, cortan a la circunferencia.

Luego, los triángulos *OPM* y *OPN* son rectos en *M* y *N*, respectivamente.

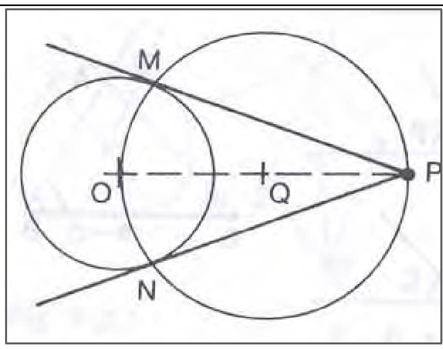


Figura 3.24. Construcción de una tangente trazada desde un punto exterior.
Tomado de Alsina y Trillas, 1992, p.212

Además, si *Q* es el punto medio del segmento *OP* y se traza la circunferencia de centro *Q* que pasa por *O*, entonces *M* y *N* estarán sobre esta circunferencia. Así, los puntos de tangencia se encuentran intersecando la circunferencia dada y la construida en el paso anterior. Las rectas que pasan por *P* y *M* , y por *P* y *N* son las rectas tangentes pedidas

Para hacer referencia al estudio formal de los problemas de construcciones exactas con regla y compás, en el texto se presentan las siguientes definiciones.

Definición: Sea P el plano euclideo, identificado con R^2, y dos puntos O y I, llamados puntos de base, se define una construcción con regla y compás como una secuencia finita de operaciones de uno de los siguientes tipos:

(R)Trazar la recta $R_{A,B}$ que pasa por dos puntos diferentes A y B, siendo A y B los puntos de base o puntos ya construidos.

(C)Trazar la circunferencia $C_C(AB)$ de centro C y radio AB, siendo A, B y C puntos de base o puntos ya construidos.

Así, cuando una recta se obtiene por la operación R se dirá *recta construible*, mientras que si una circunferencia se obtiene mediante la operación C, se dirá *circunferencia construible*.

Un punto del plano euclídeo será un punto construible si es la intersección de dos rectas construibles o si está en la intersección de una recta y una circunferencia construibles o es la intersección de dos circunferencias construibles. Es decir, siempre que se obtenga por intersección de dos elementos "exactos".

Para definir cuando un número real es construible se requiere fijar previamente un sistema de referencia.
Se construye una referencia ortogonal trazando la recta $R_{O,I}$ y la circunferencia $C_O(OI)$; luego se tiene que $R_{O,I} \cap C_O(OI)=\{I, I'\}$.
Se trazan $C_I(II')$ y $C_{I'}(II')$ y a uno de los puntos de intersección de estas circunferencias, se le denomina M. Luego se traza $R_{O,M}$. Así, las rectas $R_{O,I}$ y $R_{O,M}$ determinarán un sistema de referencia ortogonal.

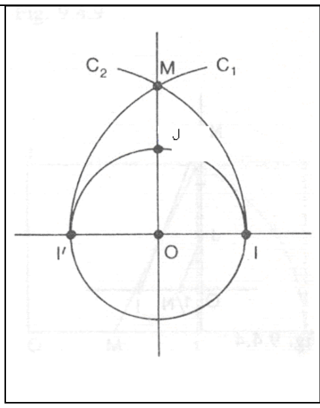


Figura 3.25. Construcción de la referencia ortogonal para luego asignar coordenadas a los puntos.
Tomado de Alsina y Trillas, 1992, p.213

Se puede probar que si $R_{A,B}$ es una recta construible y K es un punto construible entonces la recta paralela a $R_{A,B}$ que pasa por K y la recta perpendicular a $R_{A,B}$ que pasa por K son construibles.

El resultado anterior permite definir las coordenadas de un punto A en el plano P, respecto del sistema de coordenadas definido. Para ello, se trazan las rectas paralelas a $R_{O,I}$ y $R_{O,M}$ desde el punto A. Los puntos de intersección de dichas rectas con $R_{O,I}$ y $R_{O,M}$ serán las coordenadas del punto A, tal como se muestra en la siguiente definición.

Definición: Un número real x es construible si es una de las coordenadas de un punto construible A en la recta $R_{O,I}$ tal que $AO=x$.

Notar que con esta definición los números construibles se asocian con aquellos puntos de la recta $R_{O,I}$ que lo son.

Asignando el número 0 al punto *OO*, el número 1 al punto *OI*, se puede asegurar que los números naturales son construibles. Los números enteros negativos se construyen empleando la simetría respecto a *OO*. Los números racionales $\frac{m}{n}$, con m y n enteros positivos, se pueden construir. A continuación se mostrará el proceso a seguir.

En primer lugar se demostrará que el número $1/n$ es construible. Esto se consigue ubicando los números n y 1, como se muestra en la figura; luego por el teorema de Tales, se verifica que $\frac{x}{1}=\frac{1}{n}$.

Así, $x=1/n$.

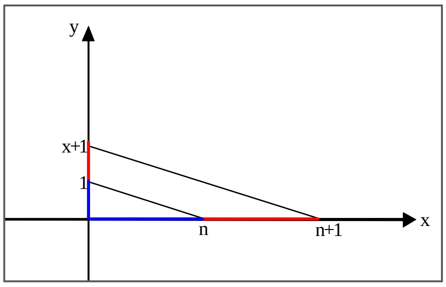


Figura 3.26. Construcción de los números $1/n$

Lo siguiente es probar que el producto $m.\frac{1}{n}$ es construible.

Ubicando los números $1/n$, 1 y $1+m$ en P, como se muestra en la figura, y empleando el teorema de Tales, se verifica que $\frac{x}{m}=\frac{1/n}{1}$, luego $x=m.\frac{1}{n}$

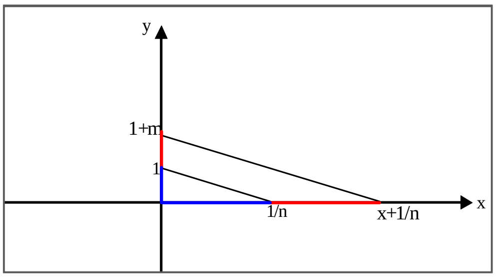


Figura 3.27. Construcción de los números racionales

De esta manera, se ha probado que pueden construir todos los números racionales.

Se puede verificar también que los números de la forma $\sqrt{x}$, con x racional positivo, son construibles.

Para ello, basta ubicar los números x y 1 en el plano P, como se muestra en la figura y luego usar el teorema de la altura empleado también por Euclides en sus construcciones.

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{1}$$

$\sqrt{x}$ es construible.

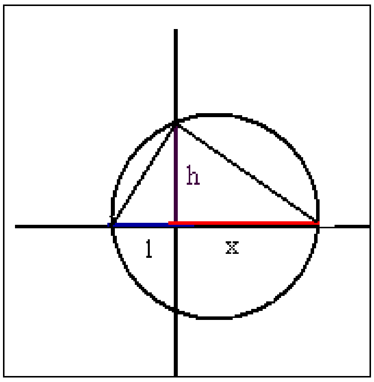


Figura 3.28. Construcción de las raíces cuadradas de números racionales

A continuación, se señala que para poder ampliar este conjunto, se hará necesario asignar una estructura algebraica a este conjunto. Entonces se enuncia y demuestra el siguiente teorema.

Teorema: El conjunto C= {$x\in$ R/ x es construible} con la adición y multiplicación en R admite estructura algebraica de cuerpo.

Resultado que se puede probar fácilmente. Además, como C es subconjunto de R, C es totalmente ordenado.

Surge la pregunta natural de si C=R, es decir, si todos los números reales son construibles con regla y compás. Para dar respuesta, recurriremos nuevamente a resultados del álgebra que permitirán dar una respuesta categórica.

Definición: Se dice que λ es algebraico sobre el cuerpo K si, y sólo si, existe un polinomio $p(x)$ con coeficientes en K tal que $p(\lambda)=0$. Si λ no es algebraico, se dice que es trascendente.

De esta definición se sigue que $\sqrt{2}$ es algebraico sobre Q, pues $p(x)=x^2-2$ verifica que $p(\sqrt{2})=0$.

Se señala que existen números reales que no son algebraicos. Un resultado de 1882, debido a Hermite, demuestra que e es trascendente sobre Q y ese mismo año Lindemann demostró que π también era trascendente sobre Q, es decir, que no existen polinomios con coeficientes en Q para los que e ó π sean solución.

Con el siguiente resultado veremos entonces que al no ser algebraicos, ni e ni π serán construibles; el resultado también mostrará que no lo serán algunos números algebraicos. Esto implica que los elementos de los siguientes conjuntos son todos no algebraicos.

$$P_1 = \{a + \pi/a \in Q\}, P_2 = \{a\pi/a \in Q, a \neq 0\},$$

$$E_1 = \{a + e/a \in Q\}, E_2 = \{ae\ /a \in Q, a \neq 0\}$$

Finalmente, en el texto de Alsina y Trillas (1992) se muestra cómo, a partir de argumentos algebraicos, se pueden retomar los métodos geométricos.

Texto 4

En el contexto en el que se realiza la investigación, estudiantes universitarios de primer año de la carrera de arquitectura, el tema geometría analítica se estudia como un requisito para introducir el cálculo diferencial o integral. Por esa razón, para terminar esta revisión, se presenta el análisis de un texto que se puede considerar un buen representante de los textos que actualmente se utilizan en la docencia de las Facultades de Arquitectura e Ingeniería en los primeros cursos de las universidades peruanas.

Se revisaron varios textos de precálculo y dado que había similitud en el tratamiento que brindaban a la geometría analítica se optó por elegir al texto de Stewart, Redlin y Watson (2007), cuyo libro se titula *Precálculo. Matemáticas previas al cálculo, 5ta edición*. Dicho texto será descrito en este apartado

En el libro el estudio de la geometría analítica se inicia situando un plano de coordenadas cartesianas rectangulares, para luego definir objetos geométricos en el lenguaje de la geometría analítica y después enunciar propiedades empleando expresiones algebraicas. No hay una justificación para su introducción.

Los objetos geométricos que se presentan inicialmente en el texto son los puntos del plano, a los que se les asocia un par ordenado, y las rectas, que no se definen pero que se describen a través de ecuaciones.

Se obtienen expresiones algebraicas para el cálculo de la distancia entre dos puntos, la pendiente de una recta, la distancia de un punto a una recta, entre otras. En la figura 3.29. se muestra cómo se obtiene una expresión general para determinar el punto medio de otros dos puntos dados, a partir de un resultado geométrico.

Ahora determinemos las coordenadas (x, y) del punto medio M del segmento de recta que une el punto $A(x_1, y_1)$ con el punto $B(x_2, y_2)$. En la figura 6 vemos que los triángulos APM y MQB son congruentes porque $d(A, M) = d(M, B)$ y los ángulos correspondientes son iguales.

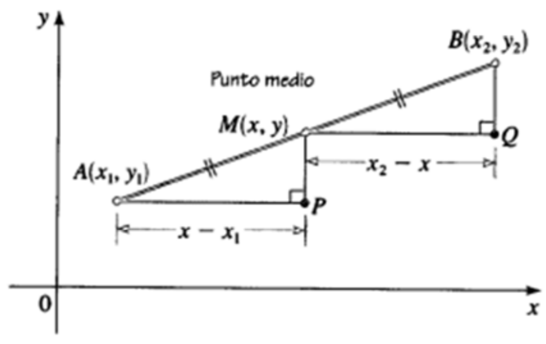


Figura 6

Se infiere entonces que $d(A, P) = d(M, Q)$ y que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Al determinar el valor de x, en esta ecuación, tenemos $2x = x_1 + x_2$, y entonces $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. De igual manera, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Figura 3.29. Determinación del punto medio
Tomado de Stewart et al. (2007, p.89)

Se estudian las posiciones relativas entre los objetos geométricos, por ejemplo:

- La posición relativa entre rectas a través de condiciones analíticas para determinar cuándo dos rectas son paralelas, perpendiculares o cuánto mide el ángulo entre dos rectas en general. En la figura 3.30. se muestra un problema en donde se pide hallar la relación entre las pendientes de rectas perpendiculares. En la justificación de este resultado se emplean rectas y puntos particulares que facilitarán los cálculos y se emplea el teorema de Pitágoras como propiedad a partir de la cual se obtendrá la relación buscada entre las pendientes. En el procedimiento se deja de lado la interpretación geométrica de la condición de perpendicularidad.

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes recíprocas y de signo contrario:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Asimismo, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a la recta vertical (pendiente indefinida).

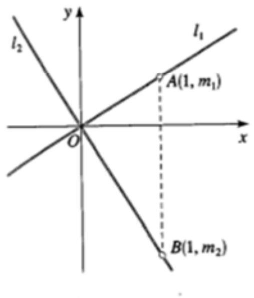


Figura 14

■ **Demostración** En la figura 14 se ilustran dos rectas que se cortan en el origen. (Si las rectas se cortan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cortan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.)

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Observe que $A(1, m_1)$ queda sobre l_1 y $B(1, m_2)$ queda sobre l_2. Según el teorema de Pitágoras y su inverso (véase pág. 54), $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2 = [d(A,B)]^2$$

De acuerdo con la fórmula de la distancia, esto se transforma en

$$\begin{aligned}(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) &= (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2\\ 2 + m_1^2 + m_2^2 &= m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2\\ 2 &= -2m_1m_2\\ m_1m_2 &= -1\end{aligned}$$ ■

Figura 3.30.Rectas perpendiculares.
Tomado de Stewart et al. (2007, p.117)

- La posición relativa entre una recta y una circunferencia, determinando condiciones analíticas para el caso en el que una recta es tangente a una circunferencia. En la figura 3.31. se muestra uno de los problemas propuestos en el que se pide determinar la ecuación de una recta tangente a una circunferencia; se espera que esto se haga empleando la relación existente entre las pendientes de rectas perpendiculares. Dicho resultado sí hace referencia a una propiedad geométrica que luego se traducirá en cálculos algebraicos.

60. a) Calcule una ecuación para la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Véase la figura.)

b) ¿En qué otro punto de la circunferencia una tangente será paralela a la tangente del inciso a)?

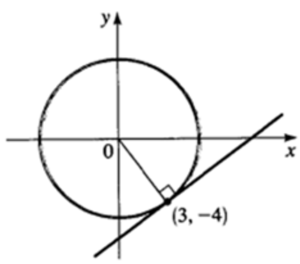


Figura 3.31. Recta tangente.
Tomado de Stewart et al. (2007, p. 121)

Con las expresiones y relaciones obtenidas se definen objetos geométricos como circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas, a partir de una condición geométrica y se les asocia una ecuación. No se emplea el concepto de lugar geométrico. Se justifica emplear el término *cónicas* para dichas curvas señalando que éstas se obtienen a partir de cortes de un cono con un plano en distintas posiciones, como se observa en la figura 3.32.

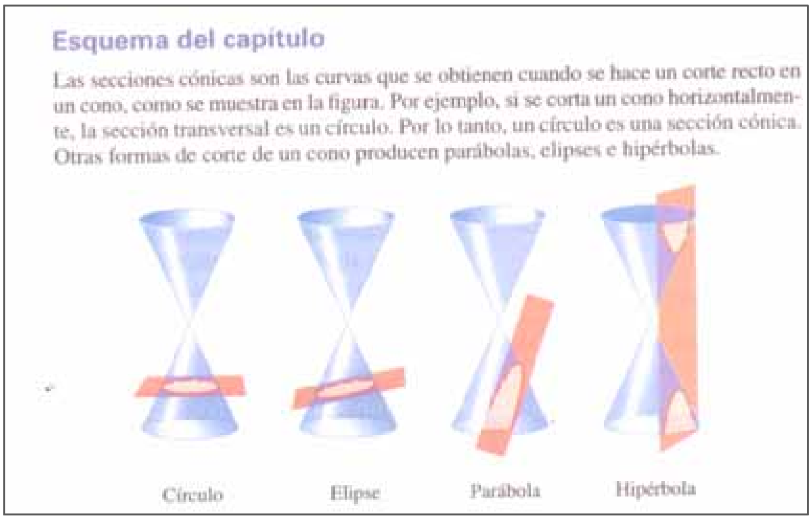


Figura 3.32. Motivación para introducir la geometría analítica.
Tomado de Stewart et al. (2007, p.743)

Sin embargo, en la definición de cada una de estas curvas no se hace referencia al cono; se considera una condición geométrica basada en distancias y se consideran sólo los casos en los que las parábolas tienen vértice en el origen y en el que las elipses e hipérbolas tienen centro en el origen. En la figura 3.33. se muestra, a modo de ejemplo, la forma en la que se define elipse.

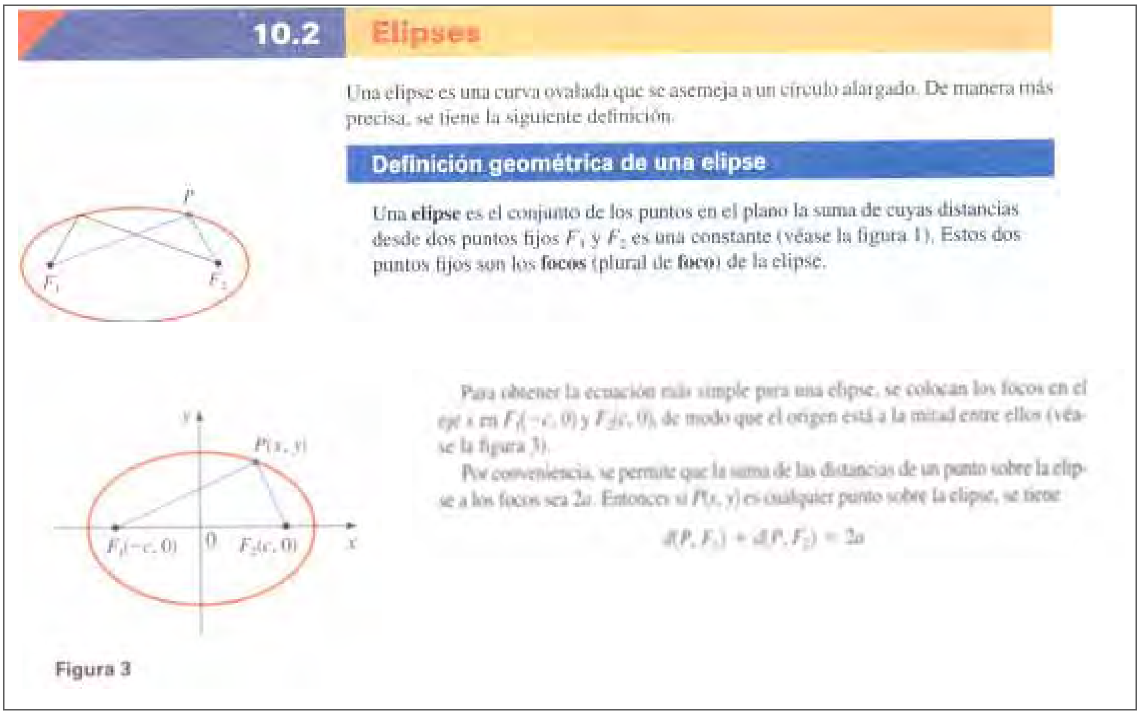


Figura 3.33. Definición de la elipse.
Tomado de Stewart, Redlin y Watson (2007, p. 753-754)

Se identifican los elementos notables para los objetos geométricos definidos; así, en el caso de la circunferencia se identifica el centro y el radio; para la parábola se identifica el foco, la directriz y el vértice; para la elipse se identifica el centro, los focos y vértices, los ejes mayor y menor; y para la hipérbola se presenta el centro, los focos y vértices, las asíntotas y los ejes normal y transverso. Se estudian únicamente cónicas con ejes de simetría paralelos a alguno de los ejes coordenados. Posteriormente, se estudiará el caso general a través de una rotación de los ejes de coordenadas.

Los problemas que se abordan en textos de geometría analítica como éste se han organizado en cinco tipos:

- Aquellos en los que se emplea la geometría analítica para justificar el que una figura satisfaga una determinada propiedad. Por ejemplo, determinar líneas y puntos notables de un triángulo o demostrar que un triángulo dado es rectángulo o que un cuadrilátero es un cuadrado, como en la figura 3.34.

35. Demuestre que los puntos $A(-2, 9)$, $B(4, 6)$, $C(1, 0)$ y $D(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

Figura 3.34. Problemas del tipo 1.
Tomado de Stewart, Redlin y Watson (2007, p.98)

- Aquellos en los que dada la gráfica de alguna de las figuras estudiadas donde se señalan algunos de sus elementos, se pide hallar su ecuación.

  Por ejemplo, se han encontrado problemas en donde se muestra la gráfica de una circunferencia, se señala claramente la ubicación del centro y de uno de los puntos de paso de la circunferencia y se pide hallar su ecuación.

- Aquellos en los que dada una ecuación, se pide hallar su gráfica.

  En un primer momento se propone hacer la gráfica de ecuaciones de cónicas con centro en el origen. Luego se desplaza el centro a otro punto del plano y se propone hacer el estudio de la gráfica identificando las traslaciones y los ejes de simetría de la figura a partir de su ecuación. Se propone analizar si la curva es simétrica respecto a los ejes de coordenadas o respecto a alguna otra recta paralela a los ejes de coordenadas.

  Más adelante, cuando se identifican algunas ecuaciones con determinadas curvas se considera el procedimiento de completar los cuadrados para identificar los elementos de la curva y a partir de ellos, hacer el gráfico. En esos problemas se deja de lado el análisis de la curva en términos de la simetría.

- Un cuarto grupo de problemas en donde se dan como datos algunos elementos de la cónica y se pide hallar la ecuación de la curva. Un ejemplo de ello se tiene en la figura 3.35.

29–40 □ Encuentre una ecuación para la elipse que satisface las condiciones dadas.

29. Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

30. Focos $(0, \pm 3)$, vértices $(0, \pm 5)$

31. Longitud del eje mayor 4, longitud del eje menor 2, focos en el eje *y*

Figura 3.35. Problema del tipo 4.
Tomado de Stewart, Redlin y Watson (2007, p.760)

- También se identifican problemas contextualizados que deben ser resueltos utilizando los elementos de la geometría analítica definidos previamente. Como por ejemplo en la figura 3.36. se muestra como se emplea el concepto de parábola para modelar el comportamiento de un reflector.

50. Plato de satélite Un reflector para un plato de satélite es una sección transversal parabólica, con el receptor en el foco *F*. El reflector tiene un pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (véase la figura). ¿Qué tan lejos está el receptor del vértice del reflector parabólico?

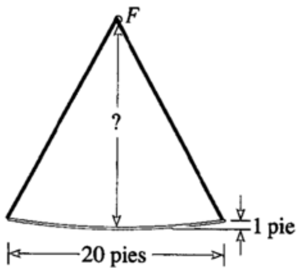


Figura 3.36. Problema contextualizado
Tomado de Stewart, Redlin y Watson (2007) pág. 752

Finalmente, después del estudio de la geometría analítica plana se incluye el estudio de vectores para ampliar la geometría analítica al espacio tridimensional. Luego se introducen elementos de cálculo diferencial empleando las representaciones analíticas; no se analizará la forma en la que estos temas se presentan en el texto pues escapa a los objetivos de esta investigación.

3.6. REFLEXIONES DEL CAPÍTULO

Las evidencias brindadas por las antiguas civilizaciones permiten afirmar que, en sus inicios, la geometría tuvo un carácter utilitario. Fue durante el apogeo de la civilización griega cuando adopta el carácter de ciencia. Así, el modelo de Euclides se convierte por muchos siglos en el prototipo de un sistema racional de un campo de conocimiento.

La geometría sintética se desarrolla en un espacio sin coordenadas, en donde los principales resultados a los que se hace referencia en la solución de problemas son el Teorema de Tales, el Teorema de Pitágoras y el Teorema del ángulo inscrito. Se observa que la solución de un problema en este contexto requiere de ciertas habilidades tales como la visualización, el manejo preciso de instrumentos, el tener presente en todo momento adónde se quiere llegar, la capacidad de identificar cuáles son las construcciones auxiliares que se deben realizar de modo que quede construida la solución del problema.

Un hito importante lo constituye el trabajo de Descartes y Fermat en el siglo XVII, vinculando geometría y álgebra, a través de la geometría analítica. El método de solución de este campo de conocimiento se caracteriza por sustituir las figuras por números o incógnitas, entre las que se deben establecer relaciones que deriven en un sistema de ecuaciones que luego deberá resolverse.

Una de las principales razones por las que evolucionaron las técnicas de la geometría analítica fue la búsqueda de generalización del problema de Pappus por parte de Descartes y Fermat. Este problema sobre lugares geométricos fue redactado en un contexto de geometría sintética pero, para su generalización, fueron necesarias técnicas algebraicas. Así, el papel de los problemas de lugar geométrico fue fundamental en la emergencia de la geometría analítica.

Del estudio del desarrollo histórico de la geometría, se pueden considerar los siguientes elementos para el posterior diseño de situaciones:

- Problemas de construcciones con regla y compás, específicamente aquellos relacionados con el álgebra geométrica. Construcciones de representaciones de números considerando las cinco operaciones.
- Problemas sobre construcciones de triángulos conociendo algunos de sus elementos.
- Problemas sobre construcción de cuadriláteros con la misma área.
- Problemas sobre lugares geométricos donde la solución es una recta o una circunferencia.
- Problemas de lugares geométricos cuya solución son las cónicas.

La hipótesis inicial referida a que es posible encontrar situaciones que justifiquen el paso de la geometría sintética a la geometría analítica, encuentra sustento en el estudio realizado que contempla una revisión epistemológica de su evolución. De esta manera, se plantea que el origen y el desarrollo histórico de la geometría puede servir de guía para justificar la génesis artificial (o escolar) de la geometría analítica.

Sin embargo, se pueden prever algunas restricciones en la implementación de una propuesta que busque recuperar esta idea esencial de la geometría analítica, ya que el uso del álgebra como primer recurso para la solución de problemas está muy arraigado en los currículos. Estas restricciones pueden tener su origen en la concepción moderna de la geometría en función del conjunto de invariantes, trabajada por Felix Klein.

Con los trabajos de Klein y Hilbert, a fines del siglo XIX, las geometrías adquirieron un nivel de abstracción muy alto, concibiéndolas en función de un conjunto de invariantes. Esta postura se encuentra vigente actualmente y permite entender por qué se ha priorizado el estudio de la geometría desde el álgebra lineal, dejando de lado sus orígenes basados en las construcciones elementales.

La forma como los tres primeros textos presentan la geometría analítica y la geometría sintética es muy particular y no se corresponde con el enfoque de los textos actuales de pre cálculo (en los que figura la geometría de sus currículos académicos), empleados por estudiantes de arquitectura e ingeniería en sus primeros años universitarios.

En el primer texto, el de Rey Pastor, Santaló y Balanzat (1957), la geometría analítica aparece para resolver directamente problemas de lugares geométricos, sin una problematización inicial y sin haber tratado previamente problemas de construcciones.

En el segundo texto, el de Puig Adam (1976), luego de trabajar construcciones con regla y compás y geometría métrica, se presenta la geometría analítica como una herramienta más potente que la geometría sintética para resolver determinados problemas.

En el texto de Alsina y Trillas (1992), la geometría analítica aparece como parte del álgebra lineal y la geometría sintética se retoma para abordar problemas de construcciones que se resolverán con regla y compás pero que luego se transformarán en otros problemas para cuya solución será necesario introducir estructuras algebraicas.

Respecto al texto de Stewart, Redlin y Watson (2007), la introducción del sistema de coordenadas se hace sin que se señale previamente para qué tipo de problemas este método de solución resultará eficiente. La geometría analítica se presenta como un saber requisito para temas de cálculo. Se plantean situaciones que exigen que se establezca conexión entre representaciones analíticas y gráficas en el sistema de coordenadas cartesiana. No aparecen temas de geometría sintética.

Así, la organización actual de la geometría analítica en los textos didácticos responde a dos posturas, ya sea asociada al álgebra lineal o, como se vio en textos de pre cálculo, como un requisito para el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

Se observa que los textos analizados de Geometría Sintética mantienen su foco de atención en la generación de procedimientos en los que se enfatiza en el uso de instrumentos de construcción para la solución de problemas, objetivo que se corresponde en cierta medida con el desarrollo histórico de esta disciplina.

Sin embargo, en los textos de enseñanza de la Geometría Analítica se observa que la introducción de la misma carece de una justificación; no se presenta una problemática que obligue a recurrir a un sistema de coordenadas para resolver problemas de determinación de lugares geométricos, como sí ocurrió en el desarrollo histórico de esta disciplina.

Además, en los textos revisados, la presentación de la Geometría Analítica se realiza empleando desde un primer momento un sistema de coordenadas rectangulares. Se debe tener en cuenta que en el estudio epistemológico realizado se vio que en los orígenes de la Geometría Analítica se empleaba un sistema de coordenadas cartesianas generales, no necesariamente rectangulares. Como esto no se estudia, no se aprecian las ventajas que aporta la consideración de un sistema de coordenadas rectangulares X-Y.

En términos matemáticos, una de las diferencias que existe entre resolver problemas en geometrías sin coordenadas y geometría con coordenadas es que, en el segundo caso, las soluciones algebraicas estarán asociadas al sistema de referencia elegido, es decir, serán relativas, mientras que en el primer caso, las soluciones serán absolutas pues no dependerán de un sistema de referencia. Así por ejemplo, para resolver el problema consistente en *hallar el lugar geométrico de un conjunto de puntos del plano que equidista de un punto fijo y de una recta fija* no es necesario considerar coordenadas, pero adquirirá distinto grado de complejidad si en el enunciado del problema se introducen coordenadas cartesianas y la recta fija es o no paralela a alguno de los dos ejes de coordenadas. No se discute la conveniencia de elegir un sistema de coordenadas adecuado ya que suele estar dado en el problema.

CAPÍTULO 4

MARCO TEÓRICO ADOPTADO EN LA INVESTIGACIÓN

Siguiendo con la cuarta etapa de la metodología adoptada, en este capítulo se presentan los elementos del marco teórico que permitirán describir y explicar la actividad matemática que se realiza cuando se resuelven problemas de geometría sintética y geometría analítica. Se presentan algunos elementos de la teoría de registros de representación semiótica y de la teoría del juego de marcos. Se definen unidades de significado elemental para establecer relación entre los procedimientos empleados en los marcos geométrico y algebraico. A modo de ejemplo se presenta una tarea cuya solución es analizada en términos de unidades elementales y se muestra que en algunos casos es posible establecer un paralelismo entre los elementos que describen los procedimientos geométrico y algebraico.

4.1. ALGUNOS ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Para analizar la interacción de los estudiantes con las situaciones que se propongan en este trabajo de investigación se considerará la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), Duval (2006a). Dicha teoría se basa en que para comprender lo que ocurre en el aprendizaje de las matemáticas se requiere de investigaciones sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático, (p.144).

Según Duval (2006b), el principal problema de la comprensión en matemáticas, radica en el conflicto cognitivo que se genera en todos los niveles curriculares cuando se plantea la pregunta: ¿Cómo podrá distinguir el estudiante el objeto representado de la representación semiótica empleada si no puede acceder al objeto matemático sin la representación semiótica? De esta manera se puede plantear la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué procesos cognitivos se llevan a cabo en el pensamiento matemático cuando se aprende un determinado concepto matemático*?

En particular, en geometría, Duval (1998b) considera tres clases de procesos cognitivos que cumplen con funciones epistemológicas específicas, esos son:

- El proceso de visualización: que hace referencia a representaciones espaciales para ilustrar una proposición, para explorar, para verificar, etc.
- El proceso de razonamiento: que hace referencia a los procesos discursivos que acompañan al quehacer en geometría y que cumplen la función de explicar, demostrar, etc.
- El proceso de construcción mediante herramientas: que se refiere a construir configuraciones a partir de la observación de resultados que son producto de la acción sobre las representaciones de los objetos matemáticos.

Aunque estos procesos son diferentes y pueden ser realizados separadamente, están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría.

En la descripción anterior aparecen algunos términos que debemos definir. En relación a la visualización, se define como "la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de una representación visual a otra", tal como señalan Prior y Torregrosa (2013, p.342).

En relación a la transferencia, Prior y Torregrosa (2013) la definen como "la asociación realizada por un sujeto, como respuesta a un estímulo (objeto, fenómeno, concepto, …), cuyo significado depende del sujeto" (p.342).

Sobre la configuración, también denominada configuración de puntos, esos mismos autores la definen como cualquier representación plana de los objetos geométricos y señalan que emplearán también el término dibujo para referirse a configuraciones de puntos.

Como resultado de distintos tipos de transferencia sobre una configuración, se definen distintos tipos de aprehensión (Duval, 1998a).

Se llama aprehensión perceptiva a la identificación simple de una configuración, reconociendo su forma pero sin asociarle ninguna propiedad y sin reconocer elementos que la conforman. Se llama aprehensión discursiva a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Esto puede ocurrir del anclaje visual al discursivo: cuando al dibujo de una figura se le asocia una afirmación, o del anclaje discursivo al visual cuando el estudiante tiene la capacidad para realizar un dibujo que cumpla las características o propiedades mencionadas.

De otro lado, cuando se haga referencia a la actividad del sujeto que implica la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico, se dice que se ha producido una aprehensión operativa. Esta puede ser una aprehensión operativa de cambio figural cuando a la configuración inicial se le añaden o quitan elementos geométricos, produciéndose nuevas sub configuraciones. Pero también puede tratarse de una aprehensión operativa de reconfiguración si las sub configuraciones iniciales se manipulan como las piezas de un rompecabezas, (Torregrosa y Quesada, 2007).

A partir de estas dos últimas aprehensiones, los mismos investigadores desarrollan el concepto de razonamiento configural para describir el desarrollo de la acción coordinada del estudiante asociando afirmaciones matemáticas o realizando modificaciones en la configuración inicial al resolver problemas de geometría.

Complementando lo anterior, la TRRS postula que en la actividad matemática se deben usar necesariamente representaciones semióticas, ya que los objetos de conocimiento matemático no son accesibles físicamente.

Se entiende por representación semiótica a una representación constituida por el empleo de signos, ya sea una figura geométrica, un enunciado natural, una fórmula algebraica, una gráfica, etc. Así, una representación semiótica está subordinada a una representación mental.

De otro lado, los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas. Esto es importante porque permite entender por qué al representar un concepto en uno u otro registro, no cambian las propiedades matemáticas de dicho concepto.

Duval (2006b, p 111) señala que no todos los sistemas semióticos se constituyen en registros, sólo lo serán aquellos que permitan la transformación de las representaciones. Dado que las representaciones semióticas son fundamentales para la actividad matemática, es necesario distinguir los sistemas semióticos de aquellos sistemas de signos que no lo son. A ellos se les denominará *registros de representación semiótica*.

Siguiendo a Duval (1995), las cuatro condiciones que debe satisfacer un sistema semiótico para constituirse en un registro son las siguientes:

a) Estar constituido por trazas identificables como una representación de algo.

b) Disponer de reglas de transformación para producir otras representaciones que aporten conocimientos.

c) Disponer de reglas de conversión hacia otro sistema de representación para hacer explícitos otros significados.

d) Disponer de reglas de conformidad o validez para constituir unidades de nivel superior.

Basándose en la definición de Duval pero con la intención de hacerla más operativa, Pluvinage, citado en Puerta (2009), define un sistema semiótico como un conjunto de signos y reglas cuya finalidad es representar objetos, mientras que asigna el término *unidades elementales del sistema* a los signos que se emplean y a las reglas que permiten establecer relaciones entre ellos las denomina *sintaxis*.

En el contexto de esta investigación se considerarán los siguientes tipos de registros de representación semiótica:

- Lenguaje natural: corresponde a las condiciones matemáticas expresadas verbalmente. Por ejemplo, definir una circunferencia como un conjunto de puntos del plano que dista de un punto fijo, el centro, en una cantidad fija, el radio.
- Representaciones gráficas: aquellas que se realizan en un plano con algún sistema de coordenadas. Por ejemplo, la gráfica de una circunferencia, conociendo las coordenadas de su centro y de otro punto de paso.
- Representaciones simbólicas: caracterizadas por una expresión simbólica que describe un conjunto de pares de puntos que satisfacen una determinada condición.
- Representaciones figurales: aquellas que se realizan en el plano o en el espacio sin coordenadas, ya sea haciendo uso de instrumentos como regla y compás o de manera aproximada, y a partir de condiciones geométricas que definen a los objetos. Por ejemplo, construir una circunferencia con el compás o ubicar puntos en el plano que equidistan de dos puntos dados.

El registro de transformaciones figurales suele ser el que se requiere para resolver los problemas de geometría elemental. Y las transformaciones que se emplean son las de visualización. Un ejemplo de visualización podría ser la operación de reconstrucción de una figura, a partir de otra dada previamente. Según la TRRS, este proceso se considera complejo cognitivamente, (Duval, 1999).

Por ejemplo, para justificar la expresión que permite hallar el área de un triángulo en términos de un lado y su respectiva altura, se suele presentar como argumento la siguiente figura:

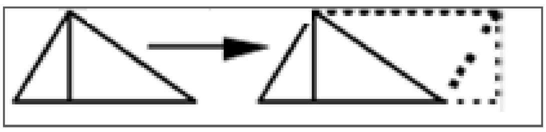


Figura 4.1. Cambio visual de la configuración.

Como se observa, se hace necesario “completar el triángulo” hasta obtener un paralelogramo y luego desplazar el triángulo pequeño, aceptando que la nueva figura tiene el doble de área que la figura inicial, apoyándose para ello en propiedades de las figuras involucradas. En ese caso se dice que se realizan reconfiguraciones, entendiéndose por reconfiguración a una acción sobre una figura dada que puede tener sustento en un conjunto de propiedades o definiciones matemáticas aprendidas.

Muchos de estos ejemplos, que requieren de la operación visual de reconfiguración, también son empleados en la enseñanza de las matemáticas, considerándolos como intuitivos. Sin embargo, esto no siempre es así ya que el proceso visual de reconocimiento de la forma no ocurre igual que desde el punto de vista matemático. Más aún, en Duval (2004) se señala que en geometría no hay aprendizaje de las reglas de tratamiento propias al registro de las figuras geométricas.

4.1.1 TIPOS DE TRANSFORMACIONES SEGÚN LA TRRS

Duval (2006a) postula que el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas. Basados en este supuesto, se afirma que los sistemas de representación semiótica son importantes no sólo porque permiten representar objetos, lo son principalmente porque es posible trabajar con ellos realizando transformaciones.

Cuando las transformaciones de las representaciones ocurren en el mismo registro, se denominan *tratamientos*. Son ejemplos de ellos el realizar cálculos en un mismo sistema numérico, resolver una ecuación, completar una figura usando criterios de simetría o construir la mediatriz de un segmento usando regla y compás.

Si bien la mayoría de los problemas obliga elegir un sistema de representación de forma prioritaria, será necesario recurrir a otros sistemas de representación, por lo menos en un segundo plano. Esta actividad es inherente al quehacer matemático y se denomina *conversión*. Así, la conversión implica una coordinación interna entre diversos sistemas de representación.

Sin embargo, el isomorfismo matemático entre dos representaciones no involucra necesariamente un isomorfismo cognitivo. Toda representación comporta dos dimensiones semánticas: la del contenido que representa, y que es intrínseca al registro movilizado, y la del objeto que representa y que es independiente del registro movilizado. Como las diferencias de contenidos de las representaciones varían independientemente de los objetos representados, la sola presentación de varias posibles representaciones al mismo tiempo no garantiza la comprensión pues la transferencia no es trivial. (Duval, 2006a, p.159)

Para que se produzca la comprensión matemática es necesario transferir lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes contextos. Mientras que esto no ocurra, habrá tantos objetos representados como contenidos de representación usados. Cuando este proceso cognitivo se convierte en un proceso de coordinación interna entre los diversos sistemas de representación de un mismo objeto matemático que tiene un individuo, se dice que se ha producido la comprensión de dicho objeto; así, se considera a la conversión como el umbral de la comprensión matemática. Si esto no ocurre, dos representaciones diferentes de un mismo objeto podrán significar para el individuo dos objetos distintos. Por tanto, para que exista una comprensión de un concepto es necesario, aunque puede no ser suficiente, que exista una coordinación entre al menos dos registros.

Por lo general, la conversión y el tratamiento se pueden identificar claramente en las distintas etapas del proceso de resolución del problema. Sin embargo, hay situaciones en las que se requiere la conversión implícita y continua de dos registros a la vez, mientras se realizan tratamientos en cada uno de ellos. Este es el caso de la demostración de un teorema en geometría en donde intervienen registros lingüísticos, figurales y simbólicos. Así, aunque se realizan tratamientos en cada uno de los registros de forma separada dado que no se movilizan los mismos sistemas cognitivos, luego se hace necesaria su interacción cognitiva para el desarrollo de la actividad matemática. En ese sentido, se recomienda plantear tareas que exijan la traducción entre distintas representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, en particular aquellas donde intervenga el registro lingüístico.

4.1.2 SOBRE LA CONVERSIÓN ENTRE EL REGISTRO SIMBÓLICO Y GRÁFICO

Podría entenderse la conversión como una codificación, sin embargo esto no es así. Por ejemplo, si se toma como referencia la regla cartesiana para graficar ecuaciones lineales, dada cualquier ecuación, la determinación de su gráfica no es inmediata. La práctica habitual de seleccionar pares ordenados e identificar su ubicación en el plano sólo permitirá determinar la forma de la gráfica en casos muy particulares; en general, lo que se requiere es un análisis global y cualitativo de las características de la gráfica.

La pregunta básica es *cómo ver las características semánticas de una ecuación a través de las características visuales cualitativas de una gráfica dibujada y viceversa*. Duval (2011) plantea que deben propiciarse variaciones visuales de manera sistemática en los gráficos de modo que estas correspondan a oposiciones cualitativas de unidades de sentido.

Por ejemplo, cuando se representa una recta gráficamente, se deben considerar las siguientes características visuales:

- Si la recta “sube” o “baja”
- Si pasa o no por el origen
- Si pasa por “encima” o por “debajo” del origen
- Si es paralela o no a los ejes

Duval presentaba una quinta característica visual en su trabajo original, que hacía referencia a si la gráfica está más próxima del eje de abscisas o de ordenadas. Lo hemos hecho porque lo consideramos incorrecto ya que si la recta no es paralela a los ejes de coordenadas, su distancia a cualquiera de ellos es cero y no tendrá sentido referirse a cuál de ellos está más próxima.

La tabla XX muestra detalladamente la relación entre las características visuales y los parámetros de la ecuación $y = ax + b$ de un gráfico lineal.

Tabla 4.1. Descripción algebraica de las características visuales de un gráfico lineal. Adaptación propia de Duval (2011, p. 111)

Valores cualitativos de las características visuales de un gráfico lineal			**Ecuaciones**
Sentido de la inclinación (de izquierda a derecha)	Ángulo α con el semieje *OX*	Posición respecto al eje *Y*	Ejemplo
	α =45º *a*=1	Pasa por el origen b=0 Pasa por encima del origen b>0 Pasa por debajo del origen b<0	*y*=*x* *y*=*x*+1 *y*=*x*-1
Sube *a*>0	45º < α < 90º *a* >1	Pasa por el origen b=0 Pasa por encima del origen b>0 Pasa por debajo del origen b<0	*y*=2*x* *y*=2*x*+1 *y*=2*x*-1
	0º < α < 45º 0<*a* <1	Pasa por el origen b=0 Pasa por encima del origen b>0 Pasa por debajo del origen b<0	*y*=0,1*x* *y*=0,1*x*+1 *y*=0,1*x*-1
Baja *a*<0	………	……..	*y*= -……
Ni sube ni baja *a*=0	α =0º	Pasa por el origen b=0 No pasa por el origen	*y=0* $y \neq 0$

Mención aparte merecen las rectas paralelas al eje de coordenadas Y, cuyas ecuaciones son de la forma $x = D$ y que proceden de la expresión general $Ax + By + C = 0$. La característica de *si la recta sube o baja* no tiene sentido en ese caso; tampoco lo tendrá la característica de *si la recta pasa por encima o por debajo del origen*. En cambio, la característica de *si la recta pasa por el origen* sí se aplica y se asociará al caso *D*=0.

Otro ejemplo puede ser el de representar una circunferencia gráficamente. Para ello se propone considerar las siguientes características visuales:

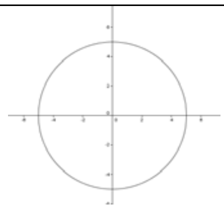
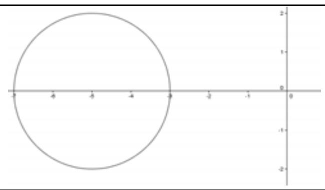
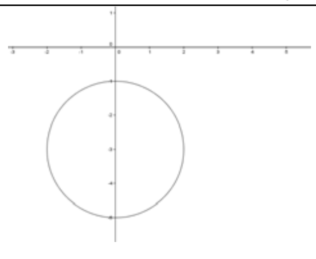
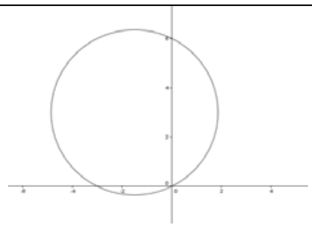
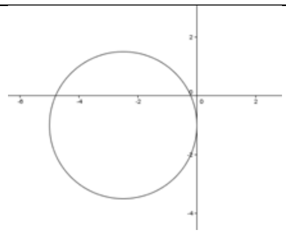
- Si tiene centro en el origen o no
- Si es simétrica respecto a un eje de coordenadas
- Si pasa por el origen o no
- Si es tangente a los ejes de coordenadas o no

La identificación de cada una de las características visuales propiciará la comprensión de la representación gráfica y su relación con su representación simbólica. Luego, existirá conversión cuando se reconozca el efecto de modificar una ecuación en un valor visual del gráfico y viceversa.

Se recomienda también trabajar los valores opuestos de las características descritas, por ejemplo, el reconocer que la circunferencia no pasará por el origen cuando se tenga una ecuación de la forma $x^2 + ax + y^2 + by = c^2$ con $c \neq 0$.

En la tabla 4.2. se muestra la relación entre las características visuales y los parámetros de la ecuación $x^2 + ax + y^2 + by = c^2$ que corresponde a una circunferencia.

Tabla 4.2. Descripción algebraica de las características visuales del gráfico de una circunferencia

<table>
<tr><th colspan="3">Valores cualitativos de las características visuales del gráfico de una circunferencia</th><th>Ecuación
$\boldsymbol{x^2 + ax + y^2 + by = c^2}$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Centro en el origen</td><td></td><td>a=b=0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simétrica respecto a un eje</td><td>Respecto al eje x</td><td></td><td>b=0</td></tr>
<tr><td>Respecto al eje y</td><td></td><td>a=0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasa por el origen</td><td></td><td>c=0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tangente a los ejes de coordenadas</td><td></td><td>$a^2 - 4c = 0$
ó
$b^2 - 4c = 0$</td></tr>
</table>

A partir de lo anterior, y retomando el objetivo de investigación, para el diseño de actividades de aprendizaje se tomarán en cuenta las siguientes recomendaciones de Duval:

- Cada característica visual particular puede ser distinguida sólo a través de la oposición de dos gráficas.
- Cada característica visual particular se combina con una característica semántica de la ecuación.
- Esta red de características visuales distintivas es la que permite que el estudiante convierta gráficas y ecuaciones.

Sin embargo, no existen reglas explícitas para los cambios de registros, y aunque en algunos casos existieran, éstas no garantizan que desaparezcan las dificultades en el aprendizaje, (Duval, 2004). Esto será tomado en cuenta para comprender las dificultades que presenten los estudiantes al abordar problemas, en particular sobre lugar geométrico, así como se pida que encuentren relación entre el trabajo analítico y el gráfico.

4.1.3 SOBRE LA CONVERSIÓN DE LA LENGUA NATURAL A OTRO REGISTRO DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Dado que la lengua natural es considerada una representación discursiva en donde las transformaciones no son determinadas por un algoritmo, las tareas que la involucren serán de considerable complejidad cognitiva. Así, según Duval (2011), existe una distancia cognitiva considerable entre la lengua natural y los otros registros discursivos propios de la matemática. Esto permitirá entender las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a situaciones donde sea necesaria una transformación del registro lengua natural a otro como el simbólico o el figural.

En particular, en problemas geométricos que involucren relaciones métricas, antes de que se pueda asociar una representación gráfica a una ecuación, se debe producir la comprensión de los enunciados verbales. Esto implica la comprensión de todos los elementos geométricos que intervienen en el problema, así como sus propiedades, y también como es que ellos pueden ser expresados algebraicamente.

A manera de ejemplo, considerar el siguiente problema: Determine el lugar geométrico de los puntos del plano que se ubican en alguna de las dos rectas dadas y en alguna de las circunferencias de radios dados que son tangentes a dichas rectas.

En este ejemplo hay que comprender conceptos como recta tangente a una circunferencia y las propiedades que se verifican, que los centros de las circunferencias deben estar sobre las bisectrices de las rectas pero también deben estar sobre rectas paralelas a las rectas dadas a una distancia igual al valor del radio. Sólo si se comprenden todas estas condiciones, se podrá plantear la resolución del problema, bien sintética o analíticamente. Cabe resaltar que la solución sintética en este caso es más simple que la analítica.

4.1.4 FENÓMENOS DE CONGRUENCIA

Para poder entender por qué algunas actividades de conversión son más complejas que otras, es conveniente recurrir a la noción de unidades significantes y a la noción de congruencia.

Antes de definir lo que se entiende por congruencia, se presenta el siguiente ejemplo para ilustrar cómo se pueden identificar las unidades significantes en los registros de las expresiones en lenguaje natural y en escritura algebraica:

1. El conjunto de puntos cuya ordenada es superior a la abscisa. $y>x$

   Existe una correspondencia entre las unidades significantes "es superior" y el símbolo ">"

2. El conjunto de puntos cuyas abscisas y ordenadas tienen el mismo signo. $xy>0$

   En el primer caso no es trivial asociar la condición "tener el mismo signo" a ">0"

   Será más natural: $(x>0 \wedge y>0)$ v $(x<0 \wedge y<0)$

   Tampoco será espontánea la conversión inversa $xy>0$ con el conjunto de puntos cuyas abscisas y ordenadas tienen el mismo signo.

   Será más natural asociar a $xy>0$, la expresión: "El producto de la ordenada y abscisa es mayor que cero". En este ejemplo se observa la no congruencia de las representaciones.

Luego, para determinar el tipo de congruencia que existe entre dos representaciones, primero habrá que segmentarlas e identificar las unidades significantes.

Antes de definir cuando dos representaciones son congruentes, siguiendo a Duval (2004), se darán algunos criterios para determinar la congruencia:

Criterio 1: Analizar la posibilidad de una correspondencia semántica de los elementos significantes.

Criterio 2: Analizar la univocidad semántica terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de partida no le corresponde más que una unidad significante elemental en la representación de salida.

Criterio 3: Relativo a cómo están organizadas las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas conducen a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden las representaciones; esto ocurrirá cuando se tiene el mismo número de dimensiones y será útil para comparar frases con fórmulas literales.

Así, se dirá que:

> *Dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes, univocidad semántica terminal y el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones. Naturalmente, puede no haber correspondencia cuando no se cumple ninguno, dos o sólo uno de los tres criterios. La no-congruencia entre dos representaciones, por tanto, puede ser más o menos grande. La dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no congruencia entre la representación de partida y la representación de llegada.* (Duval, 2004, p.53)

En algunos casos, es posible establecer alguna relación entre unidades significantes de distintos registros; cuando esa relación es de congruencia, se espera que las dificultades de aprendizaje sean menores.

Duval (2011) señala que la tendencia en la escuela es emplear problemas en las que las conversiones a realizar son congruentes y que los problemas donde se requiere hacer conversiones no congruentes son reservados para estudiantes más avanzados o para el desarrollo de investigaciones. El autor recomienda organizar la enseñanza primero considerando problemas según las representaciones que estos requieren, y en un segundo momento, teniendo en cuenta si las conversiones son congruentes o no pero procurando que los estudiantes tomen conciencia de ello.

4.1.5 ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS Y TAREAS PROPIAS DE LAS GEOMETRÍAS SINTÉTICA Y ANALÍTICA DESDE LA TRRS

Con los conceptos teóricos presentados en esta sección se analizarán las transformaciones cognitivas que se desarrollan durante la actividad matemática al resolver problemas de geometría, en particular en contextos sintéticos y analíticos. El tratamiento de un mismo problema desde las perspectivas sintética y analítica requerirá de transformaciones cognitivas en un mismo registro y en algunos casos entre distintos registros; la comprensión de un individuo estará asociada a su capacidad de tránsito entre al menos dos registros de representación.

Si bien existen objetos geométricos comunes que suelen aparecer en distintos contextos geométricos, las representaciones que se emplean para ellos pueden ser diferentes, especialmente si se consideran los contextos sintético y analítico. Así, mientras que en geometría sintética se recurre a un registro de representación semiótica de figuras geométricas, con sus propias reglas de tratamiento, al emplear el álgebra en la geometría analítica se hace necesario recurrir a un registro simbólico, también con sus propias reglas de tratamiento.

En particular, resulta interesante el cambio de representación del registro figural al simbólico y viceversa ya que no es trivial pues las transformaciones suelen no ser congruentes. Una muestra de ello es que los tratamientos figurales que permiten resolver problemas en geometría sintética no son equivalentes a los razonamientos deductivos que establece un teorema en el registro simbólico del álgebra o en el de la lengua natural (Duval, 2004, p.55).

Teniendo en cuenta el objetivo de esta investigación y los aportes del marco teórico descrito, se plantea construir situaciones en contextos geométricos en las que se requiera estudiar los objetos que intervienen y los procedimientos que se realizan desde un punto de vista sintético; además, en aquellos casos en los que tenga sentido, se hará un estudio de la soluciones de las situaciones en contextos analíticos.

Según Duval (2006b, p110), en sistemas simbólicos, como el algebraico, casi todos los procesos se pueden algoritmizar. Mientras que en registros como el figural, correspondiente a las figuras geométricas, la mayoría de procesos no se puede algoritmizar. Nosotros pensamos que esta afirmación es demasiado restrictiva ya que habría que pensar en la posibilidad de encontrar modelos matemáticos que representen a los elementos figurales con errores controlados. Quizás estas diferencias de pensamiento se deban a la interpretación del término *algoritmización*. Aunque Duval no detalla qué entiende por algoritmizar, se puede deducir del uso que le da, que se refiere a procedimientos estándar con un principio y final determinado. Mientras que desde la perspectiva matemática este término hace referencia al proceso de representar un objeto por un conjunto finito de elementos matemáticos conocidos, ya sean algebraicos o geométricos. Con esta interpretación, no sólo podrán sistematizarse los procedimientos en el registro simbólico o algebraico, sino también en el registro figural, aunque ello pueda ser más complejo.

Por ejemplo, el problema de determinar el volumen de una superficie de forma irregular no se puede algoritmizar en el sentido de Duval; sin embargo, desde el punto de vista matemático siempre es posible construir una superficie formada por elementos finitos que modele el cuerpo geométrico, mediante un recubrimiento, con un determinado error, pudiendo considerar un cilindro como una primera aproximación. Es en ese sentido que decimos que el problema se puede algoritmizar.

Lo anterior nos lleva a aceptar que existen diferencias notables entre los procesos cognitivos que se llevan a cabo al resolver problemas de geometría sintética y de geometría analítica, ya que en el primer caso éstos podrían ser más complejos.

En relación a los aprendizajes en geometría analítica, estos requieren de continuas transformaciones de conversión. Por ejemplo, establecer conversiones de la escritura simbólica o algebraica a las relaciones y gráficos en el plano cartesiano. A cada punto del plano se le puede asignar una dupla o par ordenado de números reales y luego se podrá pensar en un procedimiento general que asocie a cada representación gráfica una relación algebraica.

Sin embargo, aunque para la matemática estos procedimientos están bien definidos, desde la perspectiva cognitiva no se trata de procesos triviales (Duval, 1988a). Pese a que los alumnos conocen algunas técnicas para efectuar esta tarea, eso no es suficiente para que dada la ecuación $y=x$, por ejemplo, discriminen si la recta pasa por el origen o no. Para que puedan hacerlo, será necesario tener una visión global de la recta en el registro gráfico y relacionarla con su representación en el simbólico algebraico. Además, según el sentido en el que se haga la conversión, serán distintos los procedimientos involucrados.

Por lo expresado anteriormente, aquellos problemas de geometría analítica que requieran de realizar conversiones entre distintos registros de representación semiótica deben ser valorados positivamente y considerados en las secuencias didácticas que se elaboren.

De otro lado, cuando como parte del proceso de solución de un problema en contexto sintético o analítico se deba realizar una conversión entre representaciones no congruentes, la dificultad será mayor que en el caso en que no lo sean. En ese caso, las dificultades que puedan presentar los estudiantes ante las tareas propuestas podrán entenderse como la incapacidad para convertir una representación de un sistema semiótico en una representación del mismo objeto en otro sistema o de realizar un tratamiento en el mismo sistema, (Duval, 2000).

Además, en muchas ocasiones incluso en representaciones congruentes se presentan dificultades tal es el caso, por ejemplo, de determinar la bisectriz de un ángulo. En geometría sin coordenadas basta considerar puntos en los lados que determinan el ángulo, ubicados a igual distancia del vértice, construir la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos y esa recta será la bisectriz buscada. Mientras que para obtener la correspondiente solución algebraica, es decir al ecuación de la bisectriz, hay que escribir una condición para la pendiente de bisectriz en términos de las pendientes de las rectas que forman el ángulo y de una igualdad, resolver la ecuación, seleccionarla solución que tenga sentido según el problema y finalmente caracterizar la ecuación de la bisectriz, proceso que no es trivial.

4.2. ALGUNOS ELEMENTOS DE LA TEORÍA SOBRE JUEGO DE MARCOS

En el presente trabajo de investigación se considerará positivo abordar problemas de lugar geométrico cuyo enunciado pueda plantearse en distintos contextos matemáticos. En particular, interesará convertir el enunciado de un problema dado en el contexto algebraico a un problema equivalente pero en el contexto sintético. También interesa comparar los procedimientos de solución seguidos en ambos contextos para identificar cual es más complejo.

Dado que en el trabajo de Duval se hace referencia a las representaciones empleadas para los objetos pero no se presentan herramientas teóricas para hacer referencia a los distintos contextos matemáticos en los que puede aparecer un problema, hemos considerado pertinente complementar el marco teórico de esta investigación con los aportes de la teoría sobre Juego de Marcos.

La búsqueda de relaciones entre procedimientos de solución de un mismo problema, desde distintos contextos ha sido valorada positivamente por Douady (1986), quien señala que para que las concepciones de los estudiantes evolucionen, se hace necesario un juego de marcos. Douady, citada en Balacheff (2005), define lo que entiende por marco de la siguiente manera:

> *Un marco se constituye de objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre esos objetos, de las formulaciones eventualmente diferentes y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Esas imágenes juegan un rol esencial en el funcionamiento como herramientas de los objetos del marco. Dos marcos pueden contener los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada*, (p.187).

Se presenta como uno de los postulados fundamentales de esta teoría el que todo concepto matemático está asociado a varios marcos y que dichos marcos se pueden relacionar a través de sistemas de representación. Así, se plantea escoger unos problemas para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos que deben intervenir en al menos dos marcos.

De otro lado, se afirma que marcos diferentes no coinciden ya que no movilizan ni las mismas propiedades ni los mismos teoremas y, además, porque existen diferencias entre el valor ostensivo de los sistemas de representación que producen, (Balacheff, 2005, p.185). Resalta también que los marcos en sí mismos no son interesantes, lo son las relaciones que se pueden establecer entre ellos ya que al hacerlo se destacan propiedades de un mismo concepto, justamente debido a las diferencias entre las propiedades referenciales de los sistemas de representación que movilizan.

Para que las concepciones de los estudiantes evolucionen, Douady propone escoger unos problemas para introducir y suscitar el funcionamiento de conocimientos que deben intervenir en al menos dos marcos. Sugiere también privilegiar aquellos problemas en los cuales el error en la correspondencia genere desequilibrios que deban de ser compensados, (Douady, 1986). Esta caracterización hará del juego de marcos un método efectivo para la construcción de situaciones pertinentes que favorezcan el aprendizaje.

Así, se parte del supuesto que cambiar de marco para bordar un problema matemático es un medio que permite obtener formulaciones diferentes de un problema que, sin ser completamente equivalentes, permiten la puesta en juego de herramientas y técnicas cuyo uso no aparece en una primera formulación. Por lo anterior, en este trabajo de investigación se plantea construir problemas sobre lugar geométrico que admitan ser abordados desde los marcos geométrico y algebraico, con la intención de promover aprendizajes

4.3. RELACIÓN ENTRE MARCO Y REGISTRO DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Duval propone la reflexión en torno a registros de representación semiótica y a la necesidad de que exista coordinación entre ellos, asignándoles un lugar fundamental para que se produzcan aprendizajes. Y como la descripción de los marcos deberá hacer referencia a una de las ramas de la matemática, su caracterización pasará necesariamente por la de al menos un sistema de representación semiótico, (Balacheff, 2005).

La presente investigación se centra en problemas de lugar geométrico; éstos podrán abordarse desde los marcos geométrico y algebraico. Los objetos a los que se hará referencia en el marco geométrico serán los que pertenecen a la geometría sintética; mientras que los objetos a los que se recurrirá en el marco algebraico serán los que corresponden a la geometría analítica.

El desarrollo de los problemas de geometría requerirá del empleo de representaciones figurales realizadas con regla y compás sobre un papel. También se emplearán representaciones manipulables en la interfase de un paquete de geometría dinámica las que, según Balacheff, se constituyen en un nuevo registro semiótico con sus propias reglas; a este nuevo registro lo denomina registro semiótico dinámico, (Balacheff, 2005, p.190). Mientras que en el marco algebraico, las representaciones que se emplearán para resolver los problemas serán fundamentalmente las representaciones algebraicas y las gráficas. El siguiente esquema ilustra lo anterior.

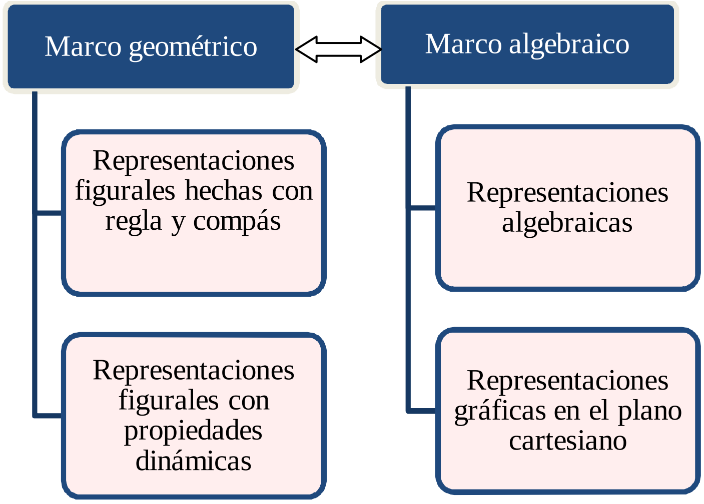


Figura 4.2. Relación entre marco y registro

De otro lado, mientras Douady propone el juego de marcos como medio para hacer evolucionar las concepciones de los estudiantes en matemáticas (Douady, 1986), Balacheff ubica a los registros como el puente que permite establecer relaciones entre marco y concepción.

Respecto a la noción de concepción, Balacheff la describe como una propiedad que emerge de la interacción del sujeto con un medio y que se puede caracterizar a través de cuatro componentes: un conjunto de problemas, un conjunto de operadores que permiten el tratamiento de los problemas, un sistema de representación para los problemas y operadores, y una estructura de control que da criterios de validez para las acciones que se realizan.

De otro lado, Balacheff menciona que hay que distinguir entre las reglas de las estructuras de control en una concepción o en un marco, de las reglas de conformidad en un registro. Ilustraremos esto a través de un ejemplo.

Considerar lo siguiente: $x + a = 0 \rightarrow x = -a$

Entendiendo lo anterior como una representación en el registro algebraico, se le asocia una regla de conformidad en dicho registro que podría enunciarse así: "*a* pasa al otro lado de la igualdad y cambia de signo" y que puede entenderse como una regla de escritura autónoma.

De otro lado, en el contexto del marco algebraico, la estructura de control que da validez a esa acción será el siguiente teorema:

$\forall a, \forall b, \forall c \; reales, a = b \rightarrow a + c = b + c$, resultado que está ligado a la teoría de los números reales y a una demostración.

4.4. CONSTRUCCIÓN DE UNIDADES ELEMENTALES EN LOS MARCOS GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO

Al abordar problemas en matemáticas conviene hacerlo desde distintos marcos; en particular, si nos centramos en la noción de lugar geométrico, dada su evolución histórica descrita en el capítulo 3, convendrá tratar problemas sobre lugar geométrico desde los marcos geométrico y algebraico. Las áreas del conocimiento matemático a los que este conocimiento está asociado son la geometría sintética y la geometría analítica, respectivamente.

Desde la matemática, será necesario identificar elementos básicos que aparezcan en los marcos geométrico y algebraico. Luego, se presentarán algunas relaciones básicas así como los principales resultados que se emplearán como argumentos. Finalmente se describirán algunos procedimientos que tendrán sentido tanto en el marco geométrico como en el algebraico como la construcción de la mediatriz de un segmento, de una recta tangente a una circunferencias, entre otros problemas. Esto se hará en términos de la noción de unidad elemental de información.

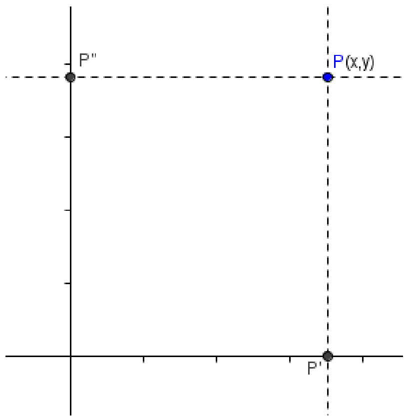
Asimismo, para comprender la complejidad cognitiva de los procedimientos involucrados en las tareas propuestas en geometría sintética y en geometría analítica, se plantea identificar el tipo de transformación que se lleva a cabo en cada paso que se sigue en la solución, según que se trate de un tratamiento o una conversión.

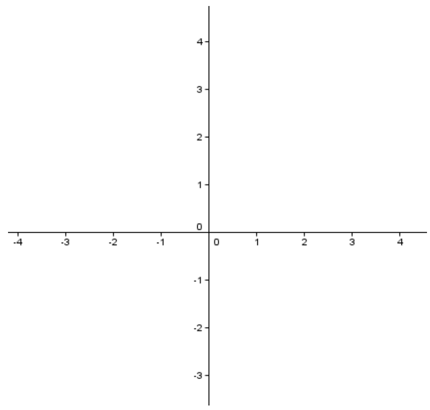
Luego, considerando la cantidad de pasos que la solución requiera, así como la naturaleza de los mismos, será posible prever los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrenten a dichas tareas y evaluar su aprendizaje matemático en relación a los aspectos mencionados.

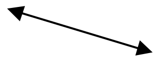
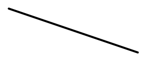
4.4.1 RELACIONES ENTRE LOS MARCOS GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO

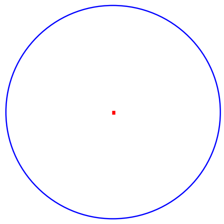
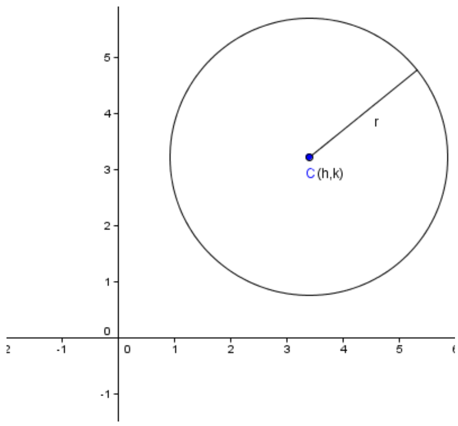
En la tabla 4.3. se presentan los elementos básicos, las relaciones que se pueden establecer entre ellos y los resultados que se considerarán en este trabajo, tanto en el marco geométrico como algebraico. Además, en cada caso, se señalan los registros que se emplean para su representación.

Tabla 4.3.Asociación entre elementos básicos de los marcos geométrico y algebraico

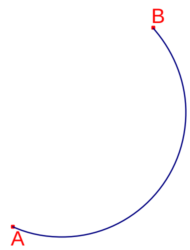
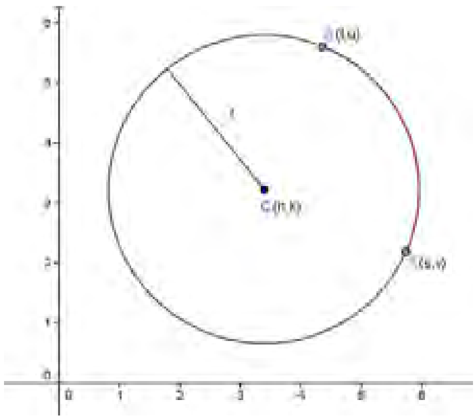
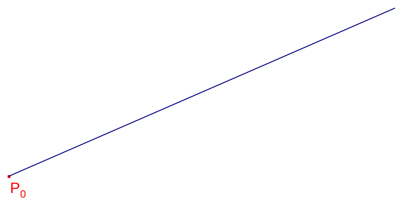
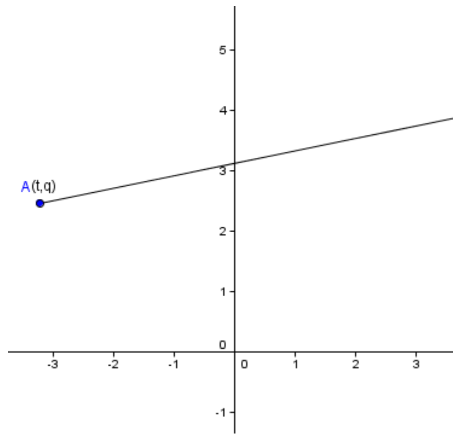
Elemento básico	**Marco geométrico**	**Marco algebraico**
Punto	Corresponde a un concepto primitivo y, por tanto, no se define. Su representación suele ser con una marca como la siguiente · o por o o también por + Es decir, se hace uso de una representación figural. Para ilustrar la representación de un punto en el lenguaje natural, se presenta la definición que aparece en Los Elementos: Punto es lo que no tiene partes. (Euclides, Libro I, p.189). En este caso, el punto es considerado un objeto primitivo.	Un punto P se representa como un par ordenado (*x*, *y*) donde la abscisa *x* es el número real asociado a la posición en la recta real del punto P' que es proyección ortogonal de P sobre el eje X, y donde la ordenada *y* es el número real asociado a la posición en la recta real del punto P'' que es proyección ortogonal de P sobre el eje Y. 

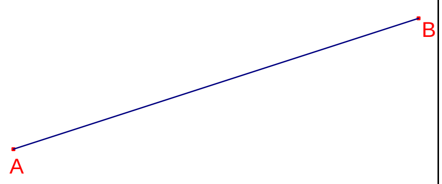
Plano	La representación figural de plano corresponde a la de un paralelogramo  Cuando se trabaja con lápiz y papel, se suele identificar el plano con la hoja de papel y cuando se trabaja en un programa de geometría dinámica se identifica el plano con la ventana gráfica. Nota: Esta representación del plano podría convertirse en un obstáculo didáctico para los estudiantes quienes podrían atribuirle la propiedad de estar acotado y no de extenderse indefinidamente. En el texto de Euclides lo que se define es superficie plana: Es aquella que yace por igual respecto a las líneas que están en ella. (Euclides, Libro I, p.192)	La representación simbólica de plano es la de un conjunto de pares con las siguientes características: {(x,y)/x e y reales}. Su representación suele estar dada por dos rectas perpendiculares graduadas, a cuya intersección se le denomina origen O, y por los cuatro cuadrantes que estas determinan.  Una de esas rectas se suele colocar horizontalmente y se le denota eje de abscisas y al perpendicular, eje de ordenadas. Un sistema de representación queda determinado por una terna formada por un punto, que es el origen, y una base que usualmente es ortonormal. Elegido un sistema de representación, el plano será el conjunto de puntos en dicho sistema.

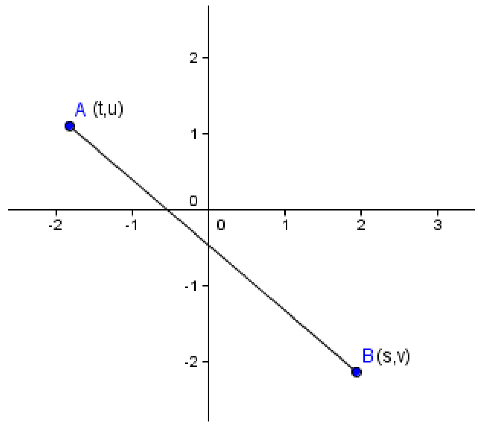
Recta	La representación figural de una recta se realiza a partir de dos puntos de paso o de un punto y una dirección. Inicialmente se suele representar de la siguiente manera:  Y luego, por simplicidad, se omiten los extremos y se representa empleando la siguiente figura:  Su construcción se realiza con un instrumento básico: la regla. Si se cuenta con los dos puntos de paso, la construcción es inmediata, mientras que si sólo se tiene un punto y una dirección, se hace necesario trasladar la dirección de manera paralela hasta el punto de paso. Para ilustrar la representación en el lenguaje natural de una recta, se presenta la definición que se da en Los Elementos de este objeto primitivo: Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella (Euclides, Libro I, p.109)	Se presentan distintas formas en las que se puede escribir la ecuación de una recta en el plano. El caso general corresponde a una ecuación en las variables *x* e *y*, de la forma $Ax+By+C=0$, con $A\neq0$ ó $B\neq0$. En el caso en el que la recta sea vertical, su ecuación será de la forma $x= K$, donde *K* es una constante. En el caso en el que la recta no sea vertical, se suele representar por la ecuación pendiente-ordenada en el origen $y=mx+b$ o en la forma punto-pendiente $y-y_0=m(x-x_0)$ o con la ecuación continua $\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}$

<table>
<tr>
<td>Circunferencia</td>
<td>
Se construye con un instrumento básico: el compás. Para ello se fija un punto, el centro, y se adopta la abertura del radio. Su representación figural es como sigue:

Circunferencia es una línea tal que todas las líneas que salen del centro y llegan a ella son iguales entre sí.
(Euclides, fo.9)
</td>
<td>
En términos simbólicos, se asignan coordenadas al punto fijo que será el centro (h, k) y se elige una distancia fija, r, que será el radio.
Dada la condición de distancia que define a la circunferencia, se obtiene que su ecuación siempre adopta la forma:
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
En ese proceso, se hace necesaria una conversión del registro lengua natural al simbólico.
Su representación gráfica será:


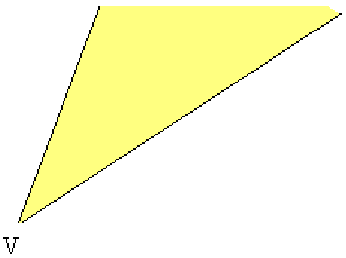
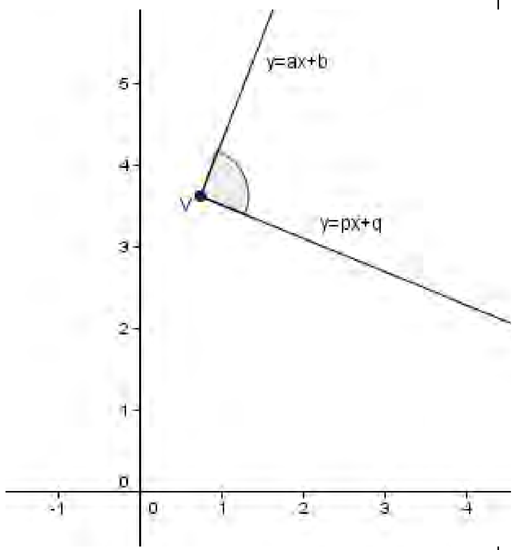
</td>
</tr>
</table>

Arco	Para construirlo, se procede como sigue: Se fija el compás en un punto, se considera una abertura del compás y se hace un trazo con este instrumento que no necesariamente se "cierre". 	Su definición está dada como un subconjunto de circunferencia.  Arco={$(x,y)/(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, (($x\in[t,h+r]$, $y>k$) ó ($x\in[s,h+r]$,$y<k$))}
Semirrecta	Luego de seleccionar un punto P_0 en la recta, se selecciona uno de los sentidos que define la dirección de la recta de modo que cada uno dé origen a una semirrecta. Su representación figural es la siguiente: 	Su representación analítica está dada por el sistema: $y=mx+b$, con $x\geq t$ (o $x\leq t$) que corresponde a la intersección de una recta con un semiplano. Su representación gráfica será la siguiente:  Y si es una semirrecta vertical será de la forma: $x=t$, con $y\geq q$ (ó $y\leq q$).

<table>
<tr>
<td>Segmento</td>
<td>
Queda determinado por dos puntos que serán los extremos del segmento.
Su representación figural es la siguiente:


</td>
<td>
Si la ecuación de la recta que pasa por A y B es de la forma $y=mx+b$, entonces la representación del segmento en términos analíticos es la siguiente:
$$y=mx+b,\ t \leq x \leq s.$$
Su representación gráfica es la siguiente:


Si la recta AB es vertical, la representación analítica del segmento
será
$$x=K, \text{ con } v \leq y \leq u .$$
En cualquier caso se trataría de un sistema formado por una ecuación y dos inecuaciones lineales, que corresponde a intersecar una recta y dos semiplanos.
</td>
</tr>
</table>

Ángulo	Su representación figural es la siguiente:  En términos del lenguaje natural, se define ángulo como la región del plano limitada entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen que es el vértice, V, del ángulo.	En el contexto de geometría analítica, el ángulo quedará determinado por las inecuaciones que describan la región encerrada por dos semirrectas con un origen común.  De modo que la representación algebraica correspondiente corresponderá a la de un sistema de inecuaciones lineales $y \leq ax + b; y \geq px + q,$ que corresponde a intersecar dos semiplanos.

Además de los elementos básicos, existen relaciones básicas definidas entre estos elementos y que pueden ser descritas en los marcos geométrico y algebraico, tal como se muestra en la tabla 4.4.

Tabla 4.4. Asociación entre relaciones básicas de los marcos geométrico y algebraico

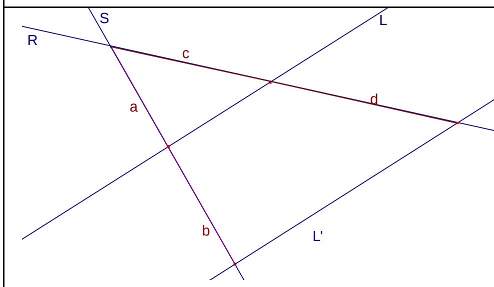
Relación establecida	Marco geométrico	Marco algebraico
Formar parte de un objeto	Satisfacer la condición geométrica que lo define. El conjunto de puntos que satisface la condición geométrica dada recibe el nombre de lugar geométrico.	Satisfacer la condición algebraica que lo describe ya sea una ecuación, un sistema de ecuaciones, una inecuación o un sistema de inecuaciones.
Formar parte de varios objetos	Corresponde a pertenecer a la intersección de varios objetos geométricos. En términos de procedimientos, requiere de intersectar objetos geométricos. Cuando la intersección es un punto, se trazan dos figuras geométricas sobre las que se encuentra el punto buscado y se marca la intersección. A esta forma de hallar puntos se le conoce como el método de dos lugares.	Corresponde a satisfacer varias ecuaciones en simultáneo. En términos de procedimientos, equivale a resolver un sistema de ecuaciones Los puntos de intersección serán todos aquellos pares ordenados que satisfacen el sistema de ecuaciones dado.
Estar a una distancia dada de un punto dado	Corresponde a encontrarse sobre una circunferencia de centro el punto dado y radio la distancia dada.	Corresponde a satisfacer la expresión cuadrática en dos variables de forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, donde (h,k) es el punto dado y r la distancia dada.

Relación establecida	Marco geométrico	Marco algebraico
Estar a una distancia de una recta	Corresponde a encontrarse sobre una recta paralela a la recta dada que se ubica a la distancia dada de la recta original.	Si L: $y=mx+b$ es la ecuación de la recta L y h es la distancia a la que debe encontrarse otra recta Entonces se debe hallar la ecuación del lugar del lugar geométrico de los puntos (x,y) que distan de L en h. Son los puntos que satisfacen la ecuación: $$\frac{\lvert mx-y+b\rvert}{\sqrt{m^2+1}}=h$$ Que da origen en realidad a dos ecuaciones lineales, correspondientes a dos rectas paralelas.
Distancia entre objetos	Se refiere a la mínima distancia posible entre dos objetos. En geometría sintética la medida de un segmento queda determinada de manera implícita cuando se construye dicho segmento.	Se refiere a la mínima distancia posible entre dos objetos. En geometría analítica la medida debe darse en términos de un valor numérico y dependiendo del problema, el procedimiento de solución variará.

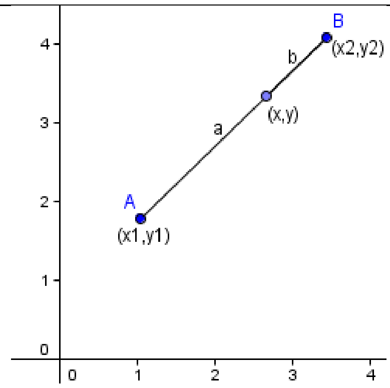
Resultados que se emplearán como argumentos

Adicionalmente, se considerarán algunos resultados comunes que serán empleados como argumentos en los procedimientos sintéticos y analíticos que se considerarán en la investigación. Sin embargo, en cada contexto, el resultado se justificará empleando los elementos teóricos propios del marco en el que éste se enuncia. Las representaciones empleadas en cada marco serán distintas, tal como se indica en la tabla 4.5.

Tabla 4.5. Resultados que se emplean como argumentos

<table>
<tr><td colspan="2">Teorema de Tales: Si dos rectas R y S se cortan por un sistema de paralelas, L y L', los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra. (Representación verbal del teorema)</td></tr>
<tr><td>Marco geométrico</td><td>Marco algebraico</td></tr>
<tr><td>


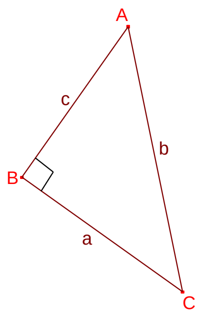
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

Del teorema de Tales se desprende el teorema para la semejanza de triángulos. (Representación figural y simbólica del teorema)</td>
<td>


$\frac{x-x1}{x2-x}=\frac{a}{b};\frac{x-x1}{x2-x1}=\frac{a}{a+b}$, relación que se justifica con el teorema de Tales;

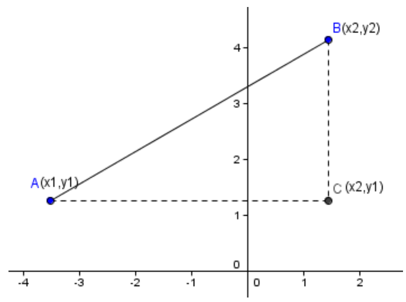
Mientras que la relación

$$\frac{y-y1}{y2-y}=\frac{a}{b};\frac{y-y1}{y2-y1}=\frac{a}{a+b}$$

se justifica empleando semejanza de triángulos. (Representación gráfica y simbólica del teorema)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo de catetos a y c e hipotenusa b, se verifica que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. (Representación verbal del teorema)</td></tr>
<tr><td>Marco geométrico</td><td>Marco algebraico</td></tr>
<tr><td>


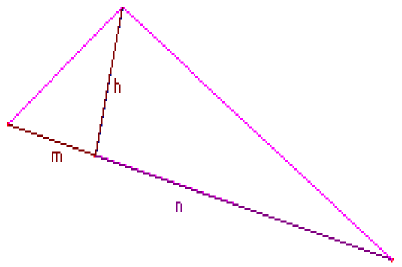
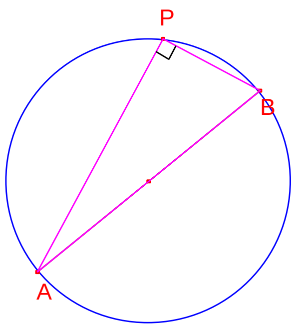
$a^2+c^2=b^2$

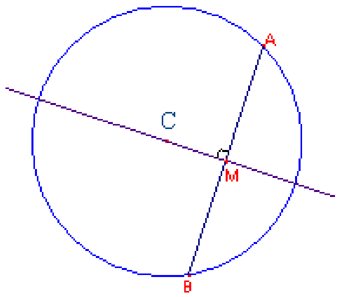
(Representación figural y simbólica del teorema)</td>
<td>El teorema de Pitágoras se emplea en el contexto algebraico para justificar la fórmula que permite obtener la distancia entre dos puntos cuyas coordenadas se conocen.



$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(Representación gráfica y simbólica del teorema)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Teorema de la altura: En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional a los segmentos en los que esta queda dividida. (Representación verbal del teorema)</td></tr>
<tr><th>Marco geométrico</th><th>Marco algebraico</th></tr>
<tr><td>
$h^2 = mn$
(Representación figural y simbólica del teorema)</td><td>Si bien en las construcciones con regla y compás este teorema es muy usado, en el contexto de la geometría analítica no se suele emplear. Por esa razón no se presenta en el contexto de un sistema de coordenadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teorema: Todo triángulo inscrito en una circunferencia en el que un lado es un diámetro, es recto. (Representación verbal del teorema)</td></tr>
<tr><th>Marco geométrico</th><th>Marco algebraico</th></tr>
<tr><td>
$AP^2 + PB^2 = AB^2$
(Representación figural y simbólica del teorema)</td><td>Si (h, k) son las coordenadas del punto medio de AB y $2r$ es la longitud de AB, entonces la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que describen triángulos APB, rectos en P es de la forma:
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
(Representación simbólica del teorema)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teorema: La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda es mediatriz de ésta.
O equivalentemente,
Si una recta pasa por el centro de una circunferencia y por el punto medio de una cuerda entonces es mediatriz a la cuerda.
O equivalentemente,
Si una recta es mediatriz de una cuerda de circunferencia, entonces pasa por el centro de la circunferencia. (Representación verbal del teorema)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Marco geométrico</th><th>Marco algebraico</th></tr>
<tr><td>

(Representación figural del teorema)</td><td>Dados A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(h,k) que satisfacen la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

y $M\left(\frac{x1+x2}{2},\frac{y1+y2}{2}\right)$,

entonces el producto de las pendientes de las rectas *AB* y *CM* es -1.

Esto es:

$$\left(\frac{y2-y1}{x2-x1}\right)\left(\frac{k-\dfrac{y1+y2}{2}}{h-\dfrac{x1+x2}{2}}\right)=-1$$

(Representación simbólica del teorema)</td></tr>
</table>

4.4.2. DEFINICIÓN DE LA NOCIÓN DE UNIDAD ELEMENTAL

Para describir los procedimientos que se llevan a cabo al abordar los problemas se define la noción de unidad elemental de información, en adelante unidad elemental (UEI). Se establecen asociaciones entre UEI en los marcos geométrico y algebraico de manera similar a como hizo Puerta (2009) al relacionar unidades elementales en el marco algebraico y en el marco gráfico para problemas de interpolación y extrapolación. Las UEI en los marcos geométrico y algebraico están asociadas a sistemas de representación semiótica distintos, siendo en este caso los principales sistemas de representación el figural y el algebraico, respectivamente.

Se empleará el término UEI en el marco geométrico para hacer referencia a cada construcción añadida con regla y compás. Por lo general, cada UEI implicará una movilización en el registro figural; dichas UEI permitirán describir los pasos en la solución de un problema en contexto de geometría sintética.

En el caso de tareas del marco algebraico, se considerará como UEI cada ecuación lineal o cuadrática en dos variables (con coeficientes cuadráticos iguales) determinada por las condiciones de un problema o la solución de un sistema de ecuaciones. Por lo general, cada UEI implicará una movilización en el registro algebraico.

En la tabla 4.6. se presentan las UEI consideradas en este trabajo para el marco geométrico, así como sus respectivas UEI en el marco algebraico.

Tabla 4.6. Asociación de UEI entre los marcos geométrico y algebraico

MARCO GEOMÉTRICO	MARCO ALGEBRAICO
Construir una recta conociendo dos puntos de paso.	Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso.
Construir una circunferencia con centro y radio conocido.	Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.
Identificar puntos sobre un objeto dado.	Resolver una ecuación lineal o cuadrática en una variable
Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente.	Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, o dos ecuaciones cuadráticas o una ecuación lineal y otra cuadrática, con dos incógnitas.

También se debe considerar que en el desarrollo de las UEI se realizan transformaciones entre representaciones distintas. Algunas estas asociadas a transformaciones en un mismo registro, como por ejemplo en la actividad *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:* $x^2+y^2=16$; $(x-4)^2+(y-4)^2=16$, donde se deben realizar transformaciones en el registro algebraico, obteniendo expresiones equivalentes, hasta obtener las soluciones x=4, y=0; x=0, y=4. En otros casos, se hace necesario realizar una transformación entre registros distintos; por ejemplo, este es el caso en el que a partir de los datos que proporciona el enunciado de un problema, se obtiene una ecuación.

Es importante mencionar que incluso en las transformaciones entre registros existen distintos grados de dificultad. Por ejemplo, algunas transformaciones algebraicas resultarán triviales, como en el caso de transponer términos en la ecuación $3x+4y=8x-2$ para obtener una ecuación de la forma $-5x+4y+2=0$. Mientras que habrá otras transformaciones algebraicas que no serán triviales, como por ejemplo, aquellas en las que se deba transformar la expresión:

$$(x-5)^2+(y-6-\sqrt{3})^2+(x-3)^2+(y-6+\sqrt{3})^2=16$$

en esta otra: $(x-4)^2+(y-6)^2=4$

donde, a partir de esta nueva expresión, se obtiene información sobre el centro y radio de la circunferencia. Se requieren conceptos matemáticos específicos para llevar a cabo esta transformación entre los que se encuentran la noción de ecuación equivalente y de productos notables.

Otras UEI tendrán asociadas conversiones. Por ejemplo, cuando en un problema se tenga como dato el centro y el radio de una circunferencia y a partir de esta información se debe obtener su ecuación, será necesaria una conversión del registro en lengua natural al registro simbólico. Así también, tareas como la 25.2 del anexo 3, tendrán asociadas muchas UEI en el marco geométrico, mientras que en el algebraico serán muy pocas pero en ese segundo contexto la dificultad estará en reconocer la curva que se asocia a la ecuación obtenida.

La UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, o dos ecuaciones cuadráticas o una ecuación lineal y otra cuadrática, con dos incógnitas, si bien tiene asociado un único procedimiento en el contexto sintético, el procedimiento a seguir en el contexto algebraico dependerá de si las ecuaciones involucradas son lineales o cuadráticas. Dependiendo de ello, será mayor o menor el número de tratamientos a realizar.

Para simplificar la descripción de las UEI en problemas de soluciones complejas o extensas, se hará referencia a las UEI que fueron descritas en los procedimientos básicos de modo que estos ya no se tengan que describir nuevamente.

Además, como parte de la descripción de la actividad matemática, en algunos casos será necesario considerar como UEI en el marco numérico lo siguiente: Hacer un cálculo aritmético entre números dados. Así por ejemplo, si se tienen las coordenadas de dos puntos y se pide calcular su distancia, se le asignará la UEI: Hacer un cálculo aritmético entre números dados.

A manera de ejemplo, se presenta un problema y su solución siguiendo determinados procedimientos que involucran los elementos, relaciones y resultados básicos descritos previamente, y que serán consideradas en el trabajo de investigación. Se ha previsto identificar explícitamente las UEI que intervienen, teniendo en cuenta la solución propuesta tanto en el marco geométrico como en el algebraico.

En caso exista similitud entre los procedimientos que se desarrollan en los dos marcos, se dirá que existe correspondencia entre los procedimientos realizados en ambos contextos. De esa manera se podrán identificar las situaciones para las cuales es posible establecer una equivalencia entre los procedimientos de la geometría sintética y de la geometría analítica. Ese es el caso de la mediatriz de un segmento, como se muestra en la tabla 4.7.

Tabla 4.7. UEI asociadas a la mediatriz de un segmento

<table>
<tr><th>UEI en el marco geométrico</th><th>UEI en el marco algebraico</th></tr>
<tr><td>
Enunciado: Construya la mediatriz del segmento de extremos A y B.

Solución propuesta:

Considerando a la mediatriz como la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, su construcción debe seguir los siguientes pasos:

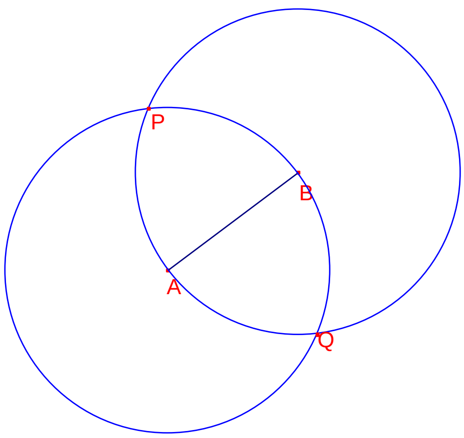
Dado el segmento de extremos A y B, con centro en A, construir una circunferencia de radio r, mayor que AB/2.

[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido].

Con centro en B, construir una circunferencia de radio r.

[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido].

Identificar los puntos de intersección, P y Q, de las circunferencias construidas



[UEI: Construir puntos de intersección de objetos dados]

Luego, trazar la recta que une los puntos de intersección de las circunferencias.

[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso]

Esta será la mediatriz de AB.
</td><td>
Enunciado: Determine la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A(a, b) y B(c,d)

Enunciado particular: Determine la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A(0,0) y B(4,4).

Solución propuesta:

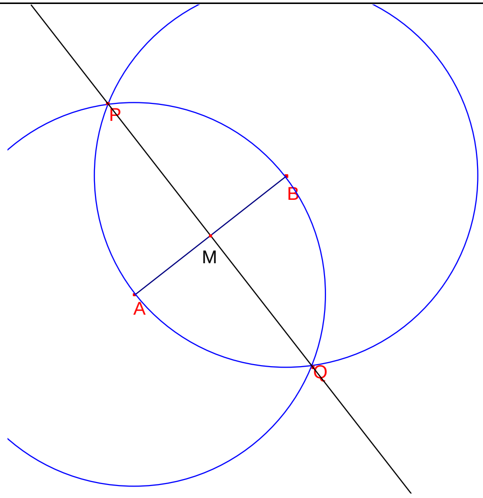
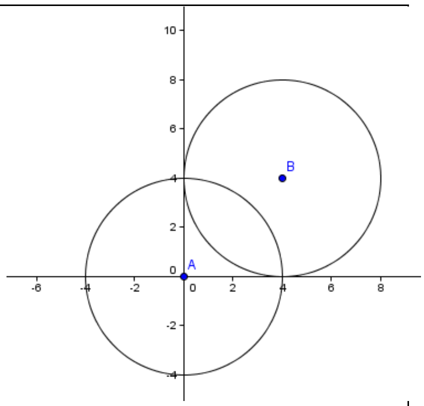
Se determina la ecuación de una circunferencia de centro A y radio un número mayor a la mitad de la distancia de A a B, por ejemplo, 4. La ecuación será:

$$x^2 + y^2 = 16$$
[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].

Con centro en B y radio 4 se determina la ecuación de otra circunferencia:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$
[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].

Interpretar la solución del sistema de ecuaciones formado por dichas ecuaciones como las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la mediatriz de AB.
</td></tr>
</table>

	 [UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas] Se resuelve el sistema formado por estas dos ecuaciones y se obtiene: *P*(4,0) y *Q*(0,4). Dado que las soluciones del sistema son puntos de paso de la mediatriz del segmento *AB*, conociendo esas coordenadas se determina la ecuación de la recta mediatriz de AB. [UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]

El procedimiento usual empleado en los textos de geometría analítica para resolver este problema se caracteriza por usar el hecho de que la pendiente de la mediatriz es el inverso con signo cambiado de la recta que contiene al segmento dado, además de que la mediatriz pasa por el punto medio del segmento. La justificación analítica de este resultado se basa en conceptos e identidades trigonométricas. Una vez que se conoce este resultado, el trabajo algebraico para hallar la ecuación de la mediatriz se reduce pero se corre el riesgo de no encontrar significado a lo que se está haciendo, además de que se puede perder de vista la propiedad de la mediatriz.

Por esa razón se plantea abordar el problema, tal como se ha presentado en la tabla anterior, aprovechando la equivalencia entre los procedimientos sintético y analítico. El reproducir el razonamiento sintético en el contexto donde aparecen las representaciones simbólicas puede ser beneficioso para el aprendizaje ya que cada paso puede interpretarse en términos de representaciones figurales y al mismo tiempo como el resultado de trabajar con símbolos. El tránsito entre distintos registros de representación favorecerá la comprensión.

4.5. REFLEXIONES DEL CAPÍTULO

La comprensión de los objetos matemáticos pasa por reconocer que éstos son inaccesibles físicamente por lo que se hace indispensable emplear representaciones semióticas para el desarrollo de la actividad matemática. Este supuesto será la base de la explicación de lo que ocurre cuando estudiantes universitarios de un primer curso de arquitectura se enfrenten a problemas sobre geometría sintética y geometría analítica.

Para que exista una comprensión de un concepto es necesario, aunque puede no ser suficiente, que exista una coordinación entre al menos dos registros. En particular, resulta interesante el cambio de representación del registro figural al simbólico y viceversa ya que no es trivial pues las transformaciones suelen no ser congruentes. Una muestra de ello es que los tratamientos figurales que permiten resolver problemas en geometría sintética no son equivalentes a los razonamientos deductivos que establece un teorema en el registro simbólico del álgebra o en el de la lengua natural

El estudio de la teoría de registros de representación nos lleva a aceptar que existen diferencias notables entre los procesos cognitivos que se llevan a cabo al resolver problemas de geometría sintética y de geometría analítica, y que en el primer caso éstos podrían ser más complejos.

Se consideran tres clases de procesos cognitivos en geometría: Visualización: Razonamiento y Construcción mediante herramientas. En este trabajo se pondrá especial énfasis en relacionar los dos últimos para explicar la complejidad de la actividad matemática que involucran determinadas tareas geométricas.

Se plantea también la necesidad de un cambio de marco, es decir, de transferir lo aprendido a nuevos y distintos contextos, ya que esta actividad se considera fundamental para que se produzca la comprensión matemática.

Para describir los procedimientos que se llevan a cabo al abordar los problemas en los marcos geométrico y algebraico se definen unidades elementales de información, en adelante unidades elementales.

La definición de unidades elementales permitirá reconocer la dificultad que ofrece cada una de las tareas propuestas. Esto se deberá tener en cuenta cuando se diseñen las actividades de aprendizaje, de modo que éstas se organicen en orden de dificultad.

Además, el reconocimiento de que cada paso de la solución, en cualquiera de los dos contextos, implica una transformación de la representación original en otra del mismo registro o en otra de un registro diferente permitirá predecir los potenciales conflictos semióticos a los que se enfrentarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas.

Luego, considerando la cantidad de pasos que la solución requiera, así como la naturaleza de los mismos, será posible prever los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrenten a dichas tareas y evaluar su aprendizaje matemático en relación a los aspectos mencionados.

Del análisis realizado se concluye que no existe una superioridad de las técnicas algebraicas sobre las sintéticas ni viceversa; simplemente, hay situaciones en las que unas resultan más eficientes que las otras.

CAPÍTULO 5

DISEÑO DE LAS SITUACIONES Y RESPUESTAS ESPERADAS

En este capítulo se desarrollan la quinta y sexta etapas, correspondientes a la metodología de investigación adoptada. Se plantea la tarea de diseñar situaciones a partir de los resultados de la evolución histórica de la geometría y su enseñanza. Dichas situaciones recogen las ideas centrales de la geometría sintética y de la geometría analítica sobre lugar geométrico y se adaptan al contexto en el que se realiza la investigación. Las situaciones se organizan en dos grupos: las que permitirán que los estudiantes se familiaricen con la regla y el compás y las que serán organizadas en una familia de problemas sobre lugar geométrico. Los comportamientos matemáticos esperados de los estudiantes al desarrollar las situaciones propuestas se describen teniendo en cuenta los elementos teóricos seleccionados y descritos en el capítulo anterior. La actividad matemática que se desarrolla al resolver las situaciones propuestas se describe a través de la noción de UEI tanto en el marco geométrico como en el algebraico.

5.1. CONCEPCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Teniendo en cuenta el estudio histórico epistemológico realizado, en este capítulo se plantea responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué problemas pueden introducirse en el nivel educativo en el que se realiza la investigación de modo que puedan ser resueltos en el marco geométrico, con regla y compás, y luego en el algebraico, introduciendo un sistema de coordenadas cartesianas?
- ¿Para qué tipo de problemas el conocimiento pretendido, que en este caso es la geometría analítica, será mejor herramienta de resolución que las técnicas de construcciones? ¿En qué situaciones el conocimiento relacionado con la geometría analítica será necesariamente movilizado?
- ¿De qué manera se puede ir variando un problema, enunciado inicialmente en un contexto de geometría sintética, de modo estas variaciones permitan

reconocer el potencial de la geometría analítica en la solución de tareas cuya solución sintética es muy compleja o es imposible?

Así, se convierte en objetivo central de este capítulo el diseñar situaciones, algunas con orígenes en el análisis histórico y otras construidas especialmente para los fines de esta investigación para las cuales las técnicas propias de la geometría sintética sean inicialmente suficientes pero que luego, al ser modificadas adecuadamente, requieran de una estrategia algebraica para su solución.

Según el estudio realizado, se han detectado tres momentos importantes en la evolución de la geometría:

1) El desarrollo de la geometría sintética caracterizada por la resolución de problemas mediante construcciones con regla y compás, cuya obra cumbre es la geometría de los Elementos de Euclides.

2) El desarrollo de la geometría analítica desde el punto de vista de Descartes y Fermat en donde se busca estudiar las curvas geométricas empleando ecuaciones y variables.

3) El desarrollo del álgebra lineal que ha proporcionado otras herramientas y ha abierto campo a numerosas geometrías, de las cuales consideramos como las más importantes la geometría afín, vectorial y métrica, que surgen de aplicaciones vectoriales.

Atendiendo a los objetivos de esta investigación, se decidió centrar la atención en los dos primeros momentos y tomar algunos problemas que requerían construcciones elementales como la construcción de representaciones de números que eran resultado de operaciones aritméticas, de figuras geométricas con características dadas tales como la proporción áurea y de algunos lugares geométricos cuya representación geométrica completa podía construirse sólo empleando regla y compás. Así, en una primera etapa se organizó un conjunto de problemas que debían ser resueltos básicamente haciendo uso de la regla y del compás. De esta manera, los estudiantes adoptarían como estrategias iniciales para enfrentar un problema, aquellos procedimientos propios de las construcciones exactas.

Posteriormente, se identificaron algunos problemas sobre lugar geométrico en un contexto de la geometría sintética. El objetivo era que lo estudiantes se formaran una concepción completa de la noción de lugar geométrico; esto se consideró pertinente pues el trabajo exploratorio brindó evidencias de que la comprensión de dicho concepto resultaba complejo.

Se trató de agrupar los problemas de lugar geométrico en contextos sintéticos en una familia de problemas. Los primeros problemas tendrían como soluciones rectas y circunferencias, pero al modificarlos convenientemente las soluciones serían curvas distintas a las rectas y circunferencias; aparecerían elipses e hipérbolas. De esta manera, la solución de los problemas no podría determinarse por completo haciendo uso sólo de regla y compás; sólo se podría construir un número finito de puntos de la curva y quedaría pendiente identificar su forma global. Para ello se debía recurrir a la representación algebraica del lugar geométrico y hacer un estudio de la gráfica a través de la relación entre las variables de la ecuación.

Asumiendo los principios de la TRRS y del Juego de Marcos, la familia de problemas construida debía cumplir con un requisito fundamental: garantizar la comprensión de los objetos matemáticos involucrados. Esto se evidenciaría cuando los estudiantes pudieran establecer conexiones entre las distintas representaciones de un mismo objeto matemático, en este caso, entres los contextos sintético y algebraico.

Atendiendo a lo anterior, se elaboró un conjunto de actividades para ser desarrollado por los estudiantes y monitoreado por la docente-investigadora.

Es importante señalar que las condiciones bajo las cuales se planteó desarrollar las actividades que se describen a continuación, es decir, los enunciados, el tiempo estimado, la forma de trabajo propuesta, así como los recursos que se sugirieron e emplear, son el resultado de una experimentación desarrollada con diferentes grupos, homogéneos entre sí, pero aplicada en el desarrollo de distintos cursos. Así, la propuesta que se presenta a continuación es el resultado de la reflexión luego de ciclos de experimentación.

5.2. PROBLEMAS SOBRE CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

A continuación se presenta la forma en que fueron organizados los problemas de construcción exacta y se describen algunos de ellos en términos de UEI.

5.2.1. SOBRE LA ORGANIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN

La primera parte de la propuesta debía hacer referencia a actividades que permitirían que los alumnos se habituaran a los procedimientos básicos de las construcciones con regla y compás. Las razones fundamentales para ello fueron las siguientes:

- Según los resultados del estudio curricular, el estudio de técnicas de construcciones con regla y compás no se contempla durante la formación escolar.

- Esta situación se vio reforzada con los resultados del trabajo exploratorio en donde se encontró un desconocimiento completo de los estudiantes que iniciaban sus estudios universitarios en la especialidad de arquitectura en relación a lo que era una construcción exacta con regla y compás y los procedimientos asociados.

- Los problemas que se propondrían en la segunda parte tendrían el rol de mostrar la necesidad de emplear herramientas de la geometría analítica en algunos problemas en contextos sintéticos. Para que esto ocurriera era una condición necesaria que los estudiantes hubieran adquirido previamente un manejo adecuado de los procedimientos propios de las construcciones con regla y compás.

Así, se consideraron tareas relacionadas con las siguientes construcciones:

- Construcciones elementales: construir mediatriz, punto medio, rectas perpendiculares y rectas paralelas.

- Otras construcciones: Dividir un segmento en una razón dada, construir líneas y puntos notables de triángulos, construir tangentes a circunferencias, construir triángulos a partir de algunos de sus elementos, construir rectas tangentes a circunferencias, construir resultados de operaciones aritméticas, construir cuadrados con área igual a la de un rectángulo dado, entre otros.

5.2.2. DESCRIPCIÓN DE PROBLEMAS DE CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS EN TÉRMINOS DE UEI

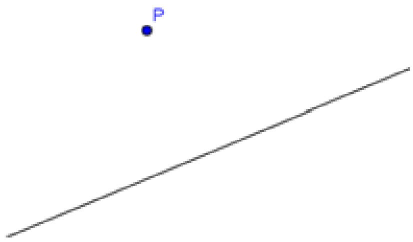
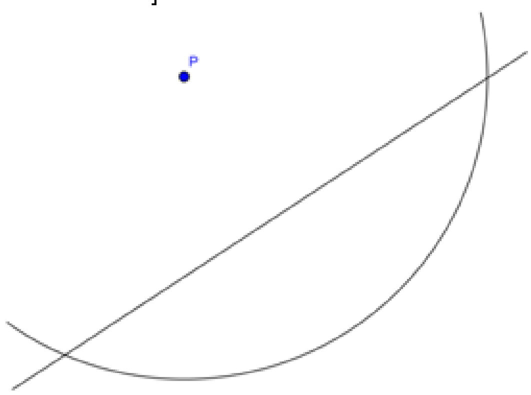
En el anexo 2 se presenta la lista completa de problemas que forman parte de la propuesta didáctica, así como la descripción completa de su solución en términos de UEI y de las transformaciones realizadas, en el sentido de la TRRS, que son necesarias para llevar a cabo esas soluciones.

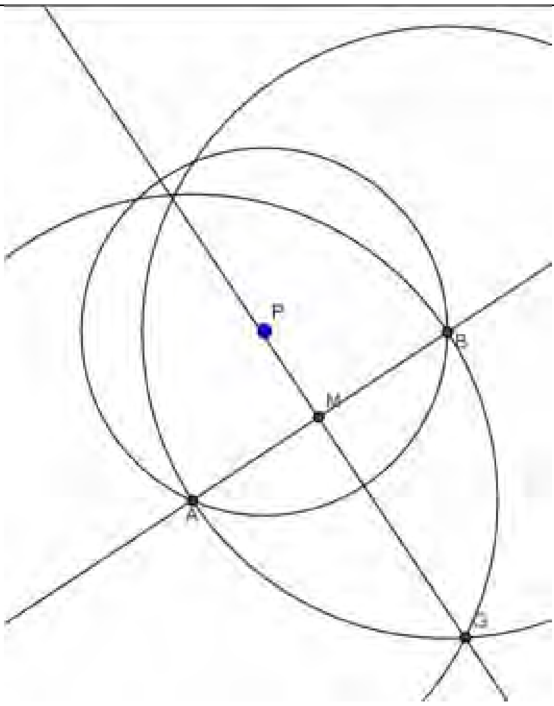
La consideración de UEI permitirá analizar las dificultades de los alumnos en la enseñanza aprendizaje de los objetos y conceptos desde la perspectiva de los marcos geométrico y algebraico, así como brindar recomendaciones para favorecer aprendizajes.

En algunos casos, además de las soluciones presentadas, se muestran otras que requieren de un mayor número de UEI y transformaciones y que aparecen en algunos textos didácticos. En esos casos se analizará la conveniencia de reemplazarlas por aquellas con un menor número de UEI y transformaciones.

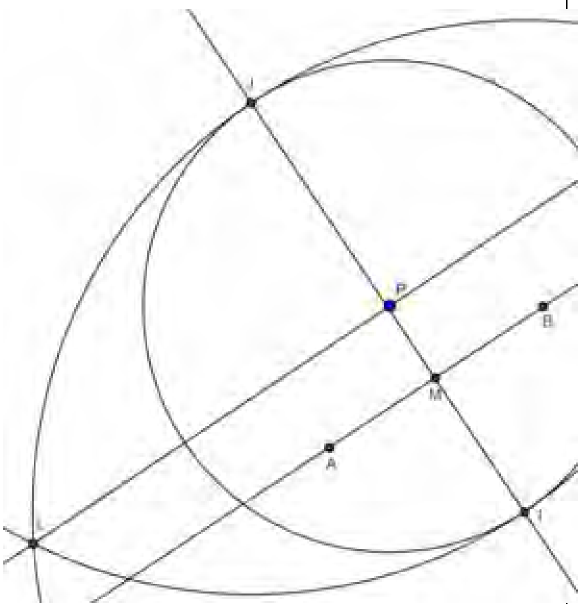
En la tabla 5.1. se presenta una tarea que será muy frecuente en problemas de construcción y corresponde a trazar una recta que pasa por un punto específico y que es paralela a otra recta que ha sido dada previamente.

Tabla 5.1. UEI asociadas a la recta paralela (empleando perpendiculares)

UEI en el marco geométrico	UEI en el marco algebraico
Enunciado: Dada la recta *L* y un punto *P*, construya la recta paralela a *L* que pasa por *P*.	**Enunciado: Dada la recta cuya ecuación es *L*: $Ax+By+C=0$ y un punto exterior a ella, $P_0(x_0,y_0)$, halle la ecuación de la recta paralela a *L* que pasa por P_0.**
Solución propuesta:  Reconocer que la recta paralela que se debe trazar será la perpendicular a la perpendicular a la recta dada que pase por *P*. Trazar el arco de radio *r* con centro en *P*. [UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido.]  Construir los puntos *A* y *B*, puntos de intersección del arco y la recta. [UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados] Construir el punto medio del segmento *AB*. [UEI: Las correspondientes a construir el punto medio de un segmento]	Solución propuesta: Se sigue el procedimiento para determinar la ecuación de la recta perpendicular a L que pasa por P_0. [UEI: Todas las descritas en la determinación de la recta perpendicular] Y luego se repite el procedimiento para determinar la ecuación de la perpendicular a la recta perpendicular obtenida en el paso anterior, que pasa por P_0. [UEI: Todas las descritas en la determinación de la recta perpendicular]



Con centro en la intersección de las dos rectas, trazar otro arco de radio arbitrario.
[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido.]
Identificar los puntos *C* y *D* en la intersección.
[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados]
Trazar la mediatriz del segmento *CD*.
[UEI: Las consideradas en la construcción de la mediatriz]

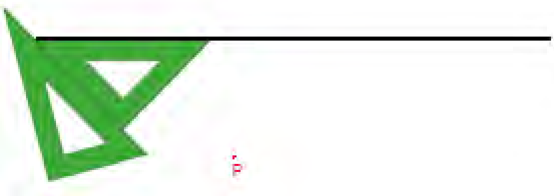


La recta mediatriz será la recta paralela a la recta dada inicialmente.

<table>
<tr>
<td>
Solución propuesta 2 (con escuadras):

En el contexto de las construcciones, ya ha sido validado el uso de escuadras para el traslado de paralelas y perpendiculares sin necesidad de recurrir siempre al uso del compás.

Así, dada la recta mostrada y un punto de paso P, se debe colocar una escuadra en la dirección de la recta y emplear la segunda escuadra como apoyo para desplazar la primera hasta que pase por el punto P.



[UEI: Construir una recta conociendo su dirección y un punto de paso]
</td>
<td>
Solución propuesta 2 (cuando se conoce que las rectas paralelas tienen pendientes iguales):

Reconocer que la pendiente de la recta paralela coincide con la pendiente de la recta dada.

Se determina la pendiente de la recta dada reconociendo que corresponde al coeficiente de x en la expresión $y-y_0=m(x-x_0)$.
La ecuación de la recta paralela será: $y-3=-\frac{2}{3}(x-4)$, que simplificando es igual a:

$$3y+2x-17=0$$
[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de un punto de paso y su pendiente].
</td>
</tr>
</table>

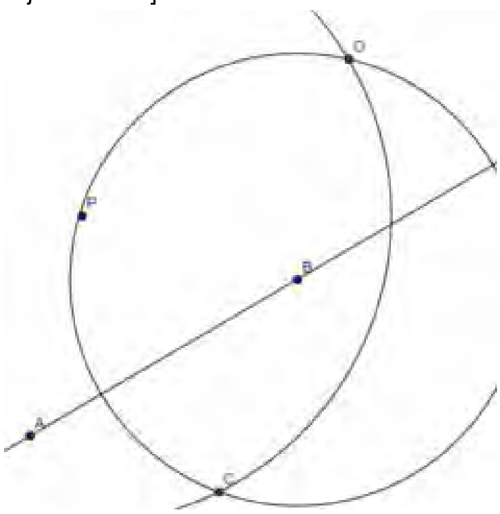
En el ejemplo anterior, el procedimiento seguido en el contexto sintético se ha reproducido en el contexto algebraico, considerando dos formas de abordar el problema. Lo que se suele encontrar en los textos didácticos de geometría analítica es que se enuncia un teorema que garantiza que rectas paralelas poseen la misma pendiente y luego se hallan las ecuaciones de rectas paralelas según la solución propuesta 2. Así, si se considera que el uso de la escuadra para trazar paralelas es exacto, entonces las UEI en ambos contextos, sintético y analítico, serían totalmente equivalentes. La equivalencia sería la siguiente:

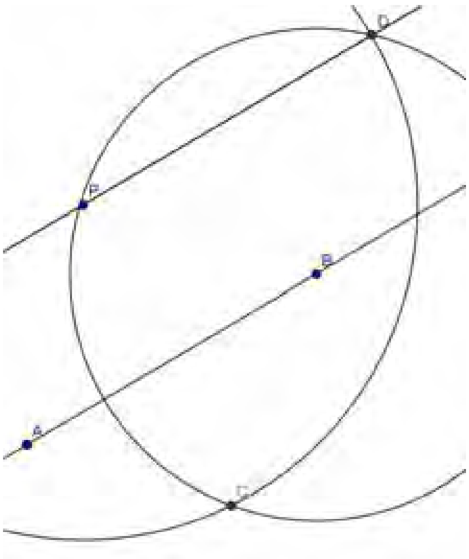
- Posicionar la escuadra será equivalente a reconocer que las pendientes de las rectas son las mismas.
- Desplazar la escuadra hasta el punto dado inicialmente será equivalente a determinar la ecuación de la recta paralela reemplazando el punto de paso.

De otro lado, si se compara la solución sintética 1 para el trazado de paralelas, con la solución algebraica 2 entonces no habrá equivalencia entre las UEI. Si los estudiantes se encuentran con estas soluciones que no son equivalentes, sin que se haya propiciado una discusión previa, es posible que surjan conflictos. Consideramos que en un primer acercamiento a estos problemas es necesario que los estudiantes trabajen con las dos soluciones en cada contexto de modo que puedan establecer relaciones entre los procedimientos seguidos; en un segundo momento, se podrá optar por aquellas soluciones que resulten más eficientes en cada marco.

Existen otras formas de construir paralelas; una de ellas se basa en propiedades del paralelogramo. En la tabla 5.2. se detalla el procedimiento a seguir en ese caso.

Tabla 5.2. UEI asociadas a la recta paralela (empleando propiedades del paralelogramo)

UEI en el marco geométrico	**UEI en el marco algebraico**
Solución propuesta: Elegir dos puntos *A* y *B* en la recta *L*. [UEI: Construir puntos sobre objeto] Construir una circunferencia con centro en *P* y radio *AB* [UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocidos]. Con centro en *B*, construir una circunferencia de radio *AP* [UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocidos] Identificar los puntos de intersección de las dos circunferencias construidas [UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados]  Uno de los puntos de intersección de las circunferencias permitirá construir un paralelogramo. En el dibujo, dicho punto es *D.*	Solución propuesta: Obtener las coordenadas de dos puntos *A* y *B* que satisfacen la ecuación de la recta *L*. [UEI: Resolver una ecuación lineal] (2 veces) Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en *A* y radio la distancia de *B* a *L*. [UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia con centro y radio conocido] Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en *P* y radio la distancia de *A* a *B*. [UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia con centro y radio conocido] Resolver un sistema de dos ecuaciones. [UEI: Resolver un sistema dos ecuaciones cuadráticas] Identificar en una de las soluciones otro punto de paso de la recta paralela a L. [UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso]

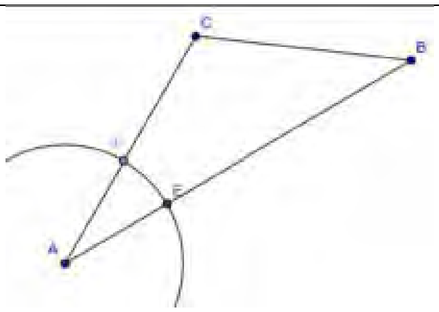
Construir la recta que pasa por *P* y *D.* [UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso] 	

Como se puede observar, este procedimiento se puede repetir cada vez que se deba construir una recta paralela. Sin embargo, cuando los estudiantes lo realicen por primera vez, requerirán coordinar varias construcciones y comprender por qué la figura construida satisface la condición pedida. Aunque esta forma de construir paralelas requiere de menos UEI que aquella basada en la construcción de dos perpendiculares, 6UE versus 13 UEI, en términos cognitivos resultará más compleja porque se debe hacer uso de una propiedad previa.

En la tabla 5.3. se presenta otro problema en el que se identifican las UEI en ambos contextos pero en el que no hay una equivalencia como en el caso anterior.

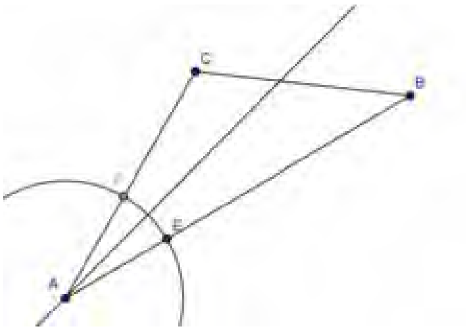
Tabla 5.3. UEI asociadas a la bisectriz

UEI en el marco geométrico	**UEI en el marco algebraico**
Enunciado: Construya la bisectriz de uno de los ángulos de un triángulo. Solución propuesta: Se traza una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y cualquier radio. [UEI: Construir una circunferencia a partir del centro y un radio].	**Enunciado: Determine la ecuación de la bisectriz del ángulo A, correspondiente al triángulo de vértices A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) y C(x_3,y_3).** Enunciado particular: Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo A, sabiendo que los vértices del triángulo tienen coordenadas A(0,0), B(3,4) y C(5,2). Solución propuesta: Determinar las ecuaciones de las rectas *AB* y *AC*.



Se construyen los puntos de intersección, *E* y *F*, de la circunferencia con los lados del ángulo.
[UEI: Construir un punto en la intersección con dos objetos dados]
(2 veces).

Se construye la mediatriz del segmento EF.



[UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz].

El problema está resuelto porque la bisectriz del ángulo *A* coincide con la mediatriz de *EF* ya que el triángulo *AEF* es isósceles.

Nota: También se pudo abordar el problema partiendo de la definición de bisectriz como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas que se cortan.

[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]. (2 veces)

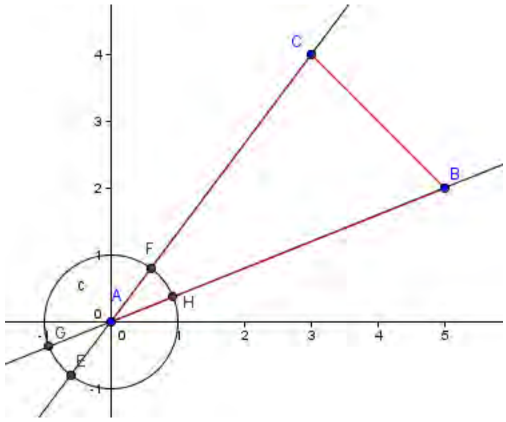
Las ecuaciones de las rectas son:

$$-2x + 5y = 0$$
$$-4x + 3y = 0$$

Determinar la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en *A* y cuyo radio es, por ejemplo, 1.
[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].

$$x^2 + y^2 = 1$$

Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta *AB* con la circunferencia.
Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta *AC* con la circunferencia.
[UEI: Resolver un sistema de ecuaciones siendo una lineal y la otra cuadrática, y con dos incógnitas]. (2 veces)

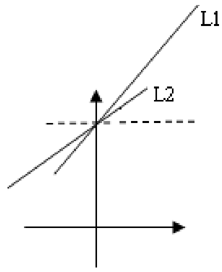


Se deben considerar sólo aquellas soluciones que tienen sentido según el problema. Por ejemplo, en el caso de los puntos *F* y *E* que son intersección de la circunferencia y la recta *AC*, sólo considerar el punto *F*.

Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *FH.*
[UEI: Las consideradas en la determinación de la ecuación de la mediatriz]
El problema está resuelto porque la mediatriz de *FH* coincide con la bisectriz del ángulo A.

En la solución presentada se han descrito procedimientos casi equivalentes en los contextos sintético y analítico, pues mientras que en el primer caso se requieren de 7UE, en el segundo se emplean 9UE. La solución algebraica mostrada exige establecer continuamente conexiones entre expresiones simbólicas y representaciones gráficas; esto requiere de continuos tratamientos y conversiones.
Sin embargo, en los textos de geometría analítica es usual encontrar el siguiente procedimiento para determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo de un triángulo del que se conocen sus vértices. Se recurre a un resultado de la trigonometría, según el cual la tangente de una diferencia de ángulos se calcula como sigue:

$\tan(\alpha-\beta)=(\tan\alpha-\tan\beta)/(1-\tan\alpha.\tan\beta)$



Siendo α el ángulo que forma L_1 y el semieje x positivo, y β el ángulo que forma L_2 y el semieje x positivo.
L' es la bisectriz del ángulo formado por L_1 y L_2.

Este resultado se aplica primero las rectas L_1 y L', y luego a las rectas L' y L_2, obteniéndose que:

$$\tan(a)=\frac{m_{L_1}-m_{L'}}{1+m_{L_1}.m_{L'}} \quad \text{y también} \quad \tan(a)=\frac{m_{L'}-m_{L_2}}{1+m_{L_2}.m_{L'}},$$

donde a es la mitad del ángulo entre L_1 y L_2.

Luego, por transitividad ya que las expresiones corresponden a tangentes de ángulos de igual medida, se igualan las dos expresiones obtenidas. Se resuelve la ecuación cuadrática donde la incógnita será la pendiente de la bisectriz.

$$\frac{m_{L_1}-m_{L'}}{1+m_{L_1}.m_{L'}}=\frac{m_{L'}-m_{L_2}}{1+m_{L_2}.m_{L'}}$$

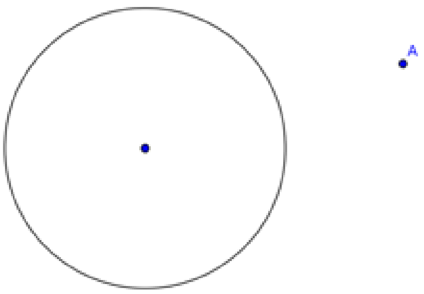
Se obtienen dos resultados al resolver la ecuación cuadrática; se selecciona aquel que se encuentra en el intervalo $m_{L_1} < m_{L'} < m_{L_2}$

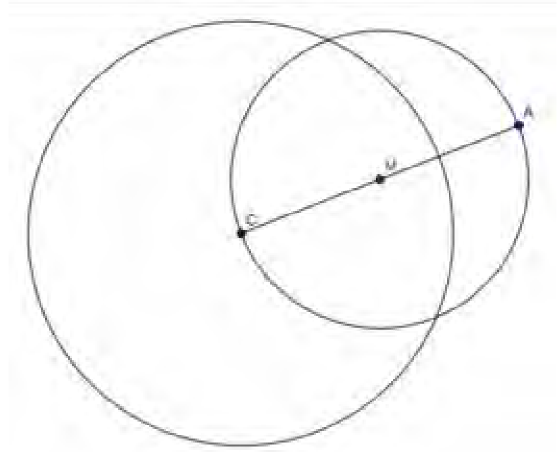
Para determinar un punto de paso de la bisectriz, se deben intersecar las rectas dadas, lo que equivale a resolver un sistema con las ecuaciones de L_1 y L_2. Finalmente, se determina la ecuación de la bisectriz considerando como pendiente de la recta bisectriz el valor hallado $m_{L'}$ y el punto de paso determinado.

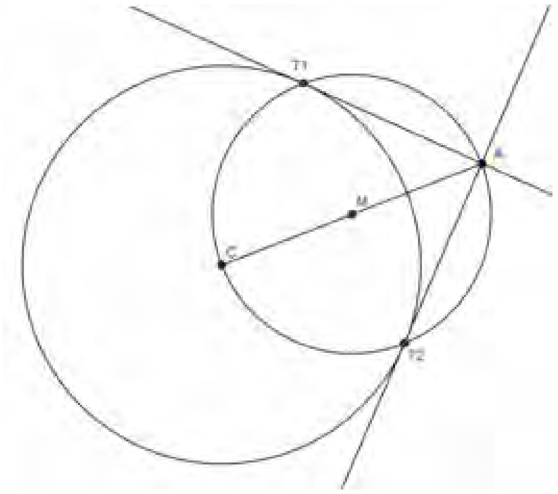
Como se puede observar, este procedimiento no es equivalente al descrito previamente. Consideramos conveniente que cuando un estudiante aborde por primera vez preguntas de esta naturaleza, se sugiera que las aborde siguiendo la solución algebraica que sí corresponde a la solución sintética para que cada paso que realice tenga significado; más adelante, se podrá presentar esta otra solución.

En la tabla 5.4. se presenta la solución en el marco geométrico y en el algebraico de un problema sobre tangentes.

Tabla 5.4. UEI asociadas a la recta tangente a una circunferencia trazada desde un punto exterior

UEI en el marco geométrico	UEI en el marco algebraico
Enunciado: Construya la recta que pasa por el punto A y que es tangente a la circunferencia C dada inicialmente, considerando que $A \notin C$. Solución propuesta:  Construir el segmento que une el centro *C* y el punto exterior *A*. [UEI: Construir un segmento conociendo sus extremos]. Construir el punto medio de dicho segmento, construyendo primero la mediatriz del segmento. [UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz]. Construir el punto de intersección de la mediatriz y el segmento *AC.* [UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos] Construir la circunferencia con centro en el punto medio y diámetro la longitud del segmento construido en el paso anterior. [UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].	**Enunciado: Determine la ecuación de la recta que contiene al punto A y es tangente a la circunferencia *C* cuya ecuación es dato, considerando que $A \notin C$.** Solución propuesta: Determinar las coordenadas del punto medio del segmento *CA* que une el centro *C* de la circunferencia dada con el punto exterior *A.* [UEI: Las descritas al determinar el punto medio] Calcular la distancia entre los puntos *C* y *A*. Determinar la ecuación de la circunferencia *C* ' cuyo centro es el punto medio de *CA* y cuyo radio es 1/2 d(*C*, *A*). [UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.] Resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la circunferencia dada inicialmente y la ecuación de *C*''. [UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas, con dos incógnitas.] Cada solución obtenida es uno de los puntos de tangencia de las rectas tangentes trazadas desde *A* a la circunferencia *C*.

<table>
<tr>
<td>


Identificar los puntos de tangencia en la intersección de la circunferencia construida y la circunferencia dada inicialmente.
[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados].
Para construir las dos rectas tangentes que pasan por A bastará con construir rectas que pasen por A y por cada punto de tangencia.
[UEI: Construir una recta que pasa por dos puntos que son dato]. (2 veces)


</td>
<td>
Esto implica interpretar las dos soluciones en términos gráficos.

Para cada uno de los puntos de tangencia, se determina la ecuación de la recta que pasa por ellos y por A.

[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]. (2 veces)
</td>
</tr>
</table>

Como se ha mostrado en la tabla anterior, en este caso existe equivalencia entre el procedimiento sintético y el analítico para determinar la recta tangente a una circunferencia trazada desde un punto exterior; en el primer caso fueron necesarias 10UE, mientras que en el segundo se emplearon 9UE.

Sin embargo en algunos textos de geometría analítica puede encontrarse el siguiente procedimiento para la determinación de rectas tangentes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior.

Si se denota por m a la pendiente de la recta tangente buscada, su ecuación será:

$$y\text{-}y_0=m(x\text{-}x_0)$$

donde (x_0,y_0) son las coordenadas del punto A dado inicialmente.

El punto de tangencia será la solución de un sistema de ecuaciones, formado por la ecuación de la recta tangente y de la circunferencia.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

De este sistema se puede obtener una ecuación cuadrática por ejemplo en la variable x, donde aparecerá el parámetro m. Como la recta es tangente, debe cumplirse que la intersección entre estos dos objetos sea un único punto. Lo que en términos algebraicos quiere decir que el discriminante sea cero. Resolver la ecuación para determinar los valores de m. Interpretar las dos soluciones de m como las dos posibles rectas tangentes a la circunferencia trazadas desde el punto exterior.

Para obtener la solución de la ecuación que se genera por la condición del discriminante igual a cero, salvo casos particulares, deben realizarse muchos cálculos y en su desarrollo pueden cometerse errores.

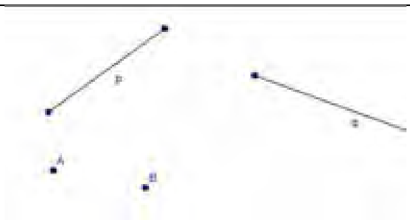
De esta manera se tiene que la solución descrita que aparece en algunos textos de pre cálculo se centra en transformaciones simbólicas, que hacen que se pierdan de vista las propiedades geométricas que deben cumplirse en la situación de tangencia. Esto hace que la solución algebraica mostrada sea más “oscura” que la presentada en la tabla 5.4. en el marco algebraico; además las soluciones de dicha tabla sí son equivalentes.

Por lo anterior, y al igual que en el caso de la bisectriz, se recomienda introducir la determinación de la ecuación de la recta tangente en un contexto algebraico pero reproduciendo el razonamiento sintético ya que ello exige establecer continuamente conexiones entre las transformaciones simbólicas y gráficas; esto dotará de significado a los procedimientos empleados.

En la tabla 5.5 se presenta un problema de construcción de triángulos analizado desde los marcos geométrico y algebraico.

Tabla 5.5. UEI asociadas a la determinación de un triángulo

UEI en el marco geométrico	UEI en el marco algebraico
Enunciado: **Se tienen como datos el lado AB del triángulo ABC y segmentos *p* y *q* correspondientes a las longitudes de la altura y la mediana relativas al lado AB, respectivamente. Teniendo en cuenta estos elementos:** **a) Construya el triángulo ABC.** **b) ¿Cuántos triángulos pueden construirse con estas condiciones?** Solución propuesta: Se tienen los siguientes datos:	**Enunciado: Se tienen como datos las coordenadas de los vértices A y B de un triángulo ABC, así como las longitudes de los segmentos *p* y *q* correspondientes a las medidas de la altura y la mediana relativas al lado AB, respectivamente. Teniendo en cuenta estos elementos:** **a) Determine las coordenadas del vértice C.** **b) ¿En cuántas ubicaciones en el plano cartesiano puede estar el punto C?**

 i)Interpretar *estar en la mediana* como estar sobre una circunferencia de centro el punto medio y radio conocido. Para ello: Construir el punto medio de AB. [UEI: Las descritas al construir el punto medio de un segmento]. Construir una circunferencia con centro en dicho punto medio y radio q. [UEI: Construir una circunferencia a partir de un centro y radio dado]. El vértice C se encuentra sobre la circunferencia que se acaba de construir. ii)Interpretar el dato de la altura como el conocer a qué distancia está el vértice C del segmento AB y que eso se representa geométricamente con estar sobre una recta paralela al segmento AB. La construcción de una recta paralela al lado AB a una distancia de p unidades se puede hacer siguiendo los siguientes pasos: Construir la mediatriz de AB [UEI: Las descritas al construir la mediatriz de un segmento] Construir una circunferencia de centro el punto medio de AB y radio la distancia p dada. [UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y radio] Construir el punto de intersección de la circunferencia del paso anterior y la mediatriz de AB. [UEI: Construir puntos de intersección de dos objetos dados previamente]. Por uno de los puntos de intersección, construir la recta paralela a AB. [UEI: Las descritas al construir una recta paralela]. Finalmente, identificar el vértice C como el punto de intersección de esa recta y la circunferencia construida con la mediana. [UEI: Construir puntos de intersección de dos	Solución propuesta: Se tienen como datos los puntos A y B: i) Determinar las coordenadas de la recta AB. [UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso] Calcular las coordenadas de M (x_M, y_M), punto medio del segmento AB a partir de la expresión para el punto medio. [UEI: Las descritas al determinar el punto medio]. Con las coordenadas de M y considerando como radio el valor dado q, determinar la ecuación de la circunferencia con centro en M: $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=q^2$ [UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio]. ii) Por otro lado, se debe determinar la ecuación de una recta paralela a AB ubicada a la distancia de p unidades. Para ello, se determinará la ecuación de un circunferencia con centro en algún punto de la recta que pasa por A y B, llamémosle D, y radio p. El centro D se obtiene al seleccionar un punto que satisfaga la ecuación de AB. [UEI: Resolver una ecuación lineal con una incógnita]. [UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio]. (α) Luego se determina la ecuación de una recta perpendicular a AB y que pase por el punto D. [UEI: Las descritas al determinar la ecuación de una recta perpendicular] (β) Resolver el sistema determinado por la ecuación cuadrática (α) y la ecuación lineal (β) [UEI: Resolver un sistema de ecuaciones formado por una ecuación lineal y una cuadrática en dos incógnitas] Determinar la ecuación de una recta paralela a AB que pasa por uno de los puntos de

objetos dados previamente]. Al considerar las dos rectas paralelas, se encontrarán cuatro soluciones.	intersección determinados en el paso anterior. [UEI: Los descritos al determinar una recta paralela] Resolver un sistema de ecuaciones en el que una de ellas corresponde a la ecuación de la circunferencia determinada en i) y la otra ecuación corresponde a la recta determinada en ii) [UEI: Resolver un sistema de ecuaciones formado por una ecuación lineal y una cuadrática en dos incógnitas] Interpretar las cuatro soluciones (2 para cada ecuación de la recta paralela) como las posibles ubicaciones del vértice C en el plano cartesiano.

Es un problema con un número muy grande de UEI, 19 en el marco de la geometría sintética y 29 en el algebraico. Por lo anterior, se deduce que la solución será más compleja en el contexto de la geometría analítica ya que se deben realizar muchos cálculos y emplear propiedades geométricas como las de la altura y la mediana. Así por ejemplo, se requiere interpretar el dato de la altura como *conocer a qué distancia está el tercer vértice del segmento AB* y que esto a su vez se representa ubicando a C en una recta paralela a AB a la distancia dada. También se debe interpretar el conocer la longitud de la mediana como *saber que C está sobre una circunferencia de centro el punto medio de AB y radio la longitud de la mediana*.

Por lo anterior, puede considerarse como un problema complejo pero muy interesante porque para poder resolverlo se exige establecer conexiones entre distintos registros de representación y eso ocurre en ambos marcos.

5.3. PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO PARA INTRODUCIR LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

En el estudio histórico se identificó que la noción de lugar geométrico había sido fundamental para el desarrollo de la geometría analítica. Esto se confirmó, al revisar el trabajo de Descartes que se basaba en el problema de Pappus, pero teniendo como objetivo hallar una solución para el caso general. Sin embargo, este problema, tal como se vio en el capítulo 4, requería de establecer muchas relaciones que involucraban distancias y resultados de trigonometría para reducir el número de variables. Esto hacía que se perdieran de vista las condiciones geométricas que habían generado el problema.

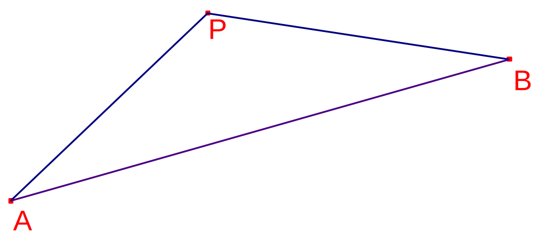
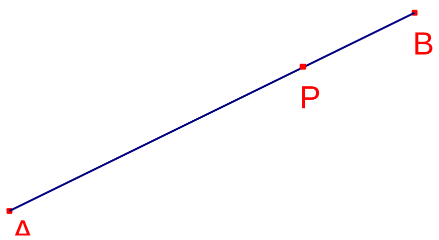
Por lo expuesto, se consideró pertinente diseñar situaciones sobre lugar geométrico que emplearan el concepto de distancia entre dos puntos y que se pudieran interpretar, en primer lugar, en términos geométricos. Esto se hizo organizando varias situaciones a través de una familia de problemas en donde la modificación de determinados parámetros, generaría un cambio en la estrategia de solución. Así, la secuencia de actividades que se diseñó consideró que los alumnos debían recurrir a estrategias de solución que, en un principio, les serían familiares, pero que luego dejarían de serlo.

5.3.1. SOBRE LA ORGANIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO

Situación 1 - Enunciado

Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que la distancia de *A* a *P* coincida con la diferencia entre las distancias de *A* a *B* y de *P* a *B*.

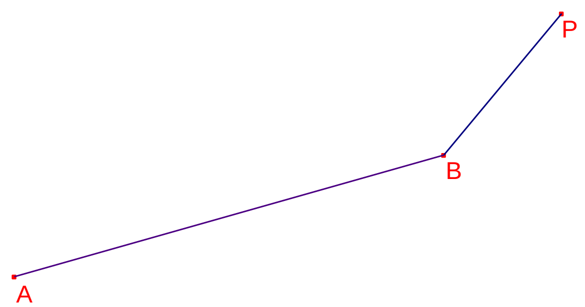
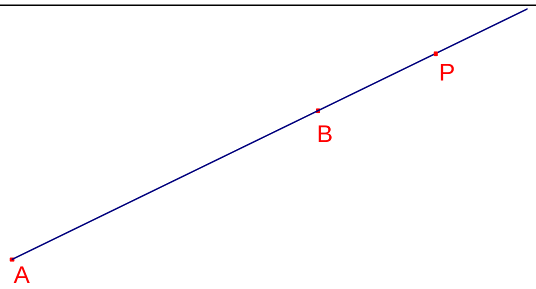
Solución propuesta:

	La única ubicación en la que puede estar *P* para que se cumpla la condición dada es que P se encuentre alineado con *A* y *B*.
	La solución se encuentra sólo en los puntos *P* de modo que *P* está en el segmento de extremos *A* y *B*. El lugar geométrico es el segmento *AB*.

Situación 2 - Enunciado

Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que la distancia de *A* a *P* coincida con la suma de las distancias de *A* a *B* y de *P* a *B*.

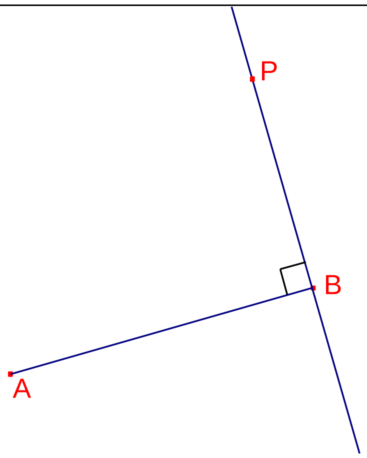
Solución propuesta:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Para que se cumpla la condición dada debe ocurrir que A, B y P estén alineados.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Luego, la solución se encuentra sólo en los puntos P de modo que P se encuentra en la semirrecta de extremo inicial B, en la dirección AB pero que no contiene a A.
El lugar geométrico es la semirrecta con extremo inicial B, en la dirección de AB pero que no contiene a A.</td>
</tr>
</table>

Situación 3 - Enunciado

Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que los triángulos *APB* son rectos en *B*.

Solución propuesta:

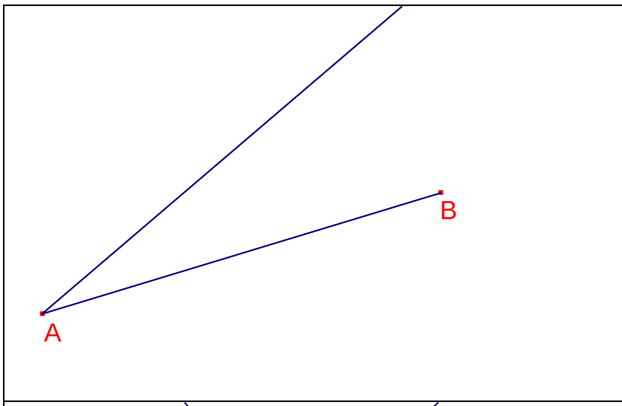
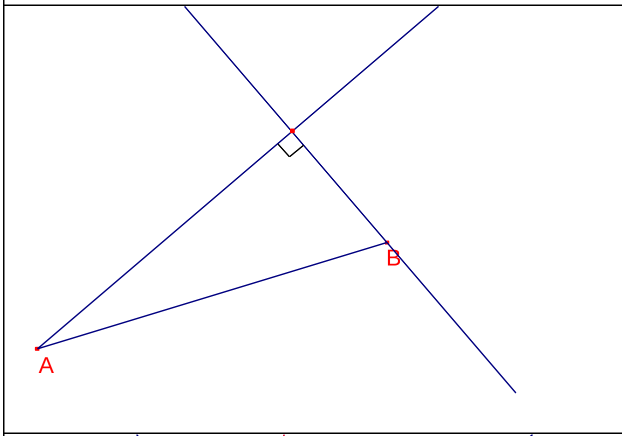
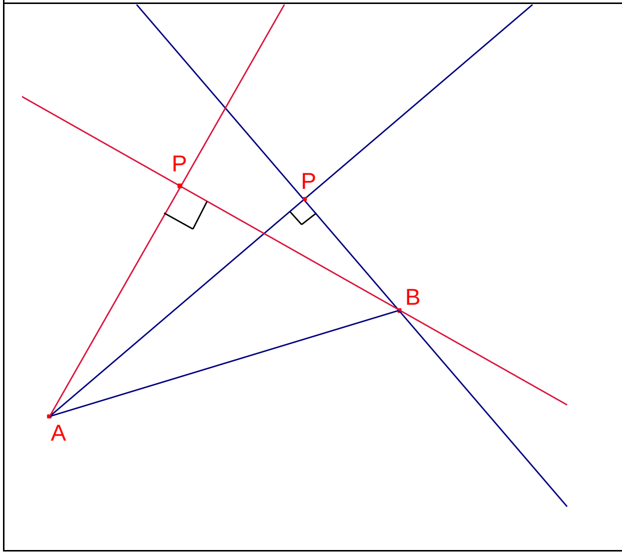
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Dados los puntos A y B, basta construir una recta perpendicular a dicho segmento por el punto B.
Cualquier punto sobre dicha recta será un elemento del lugar geométrico.
El lugar geométrico es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por B, excepto el punto B.</td>
</tr>
</table>

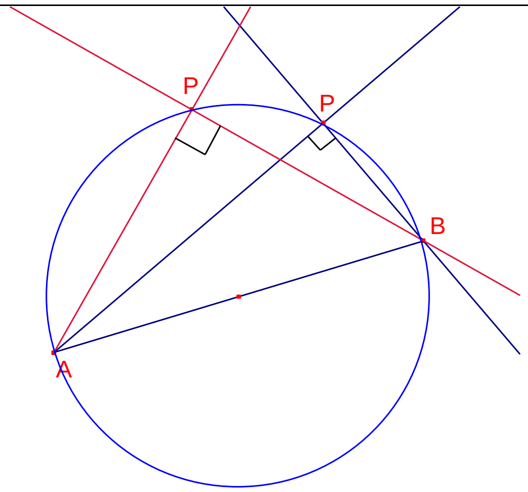
Situación 4 - Enunciado

Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que el triángulo *APB* es recto en *P*.

Solución propuesta:

Dado que la condición se refiere a la suma de cuadrados, es natural recurrir al teorema de Pitágoras y, por tanto, la construcción asociada incluirá un triángulo rectángulo.

	Ubique *A* y *B*. Trace una recta cualquiera que pase por *A*.
	Por el punto *B*, trace una recta perpendicular a la recta anterior. El punto de intersección es un punto del lugar geométrico pedido.
	Repitiendo el procedimiento anterior, se encuentran varios puntos del lugar geométrico.



Se puede concluir que todos los puntos sobre la circunferencia de diámetro *AB* (excepto *A* y *B*) formarán parte del lugar geométrico.

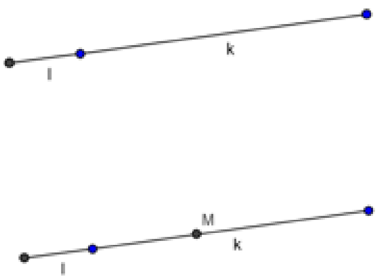
El argumento puede basarse en el teorema de la semicircunferencia (todo triángulo que tiene dos vértices como extremo de un diámetro de la circunferencia *C* y el tercer vértice sobre la circunferencia *C*, será recto en este último vértice).

Sólo falta justificar que ningún punto fuera o dentro de la circunferencia satisface la condición dada; esto es cierto pues en esos casos el triángulo *APB* será agudo u obtusángulo, respectivamente. Por lo tanto, el lugar geométrico corresponde a la circunferencia de diámetro *AB*, sin los puntos *A* y *B*.

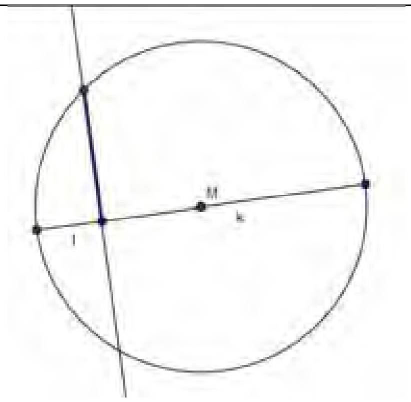
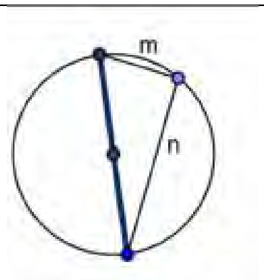
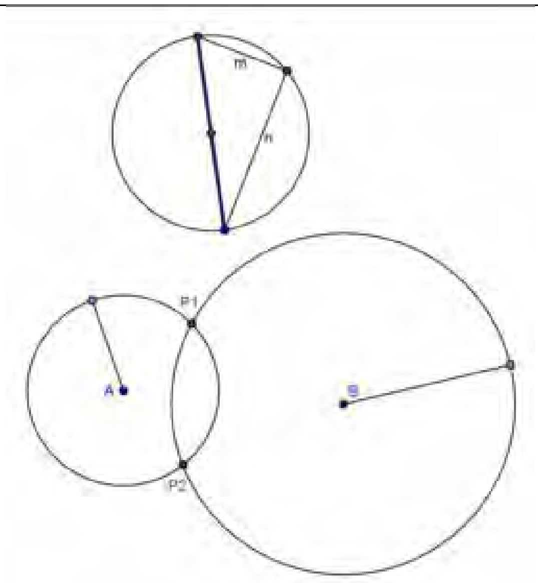
Situación 5 - Enunciado

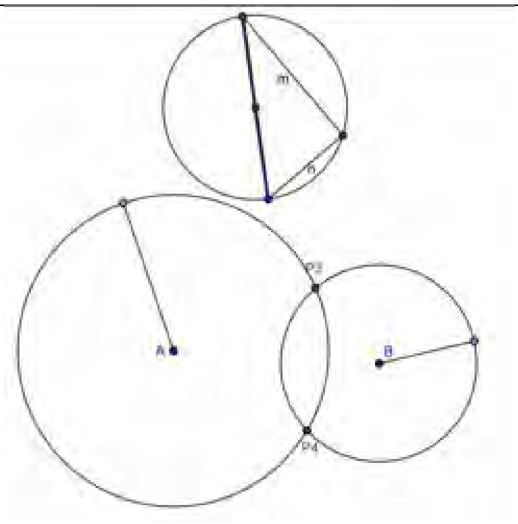
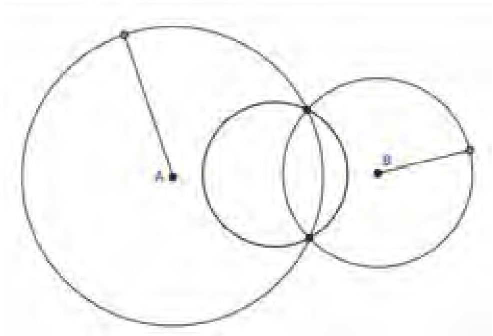
Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que la suma de los cuadrados de distancias de *P* a cada uno de esos puntos es un valor constante *K*.

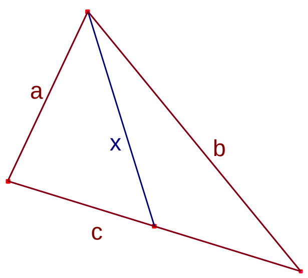
Solución propuesta:



Como *K* es dato, es posible construir un segmento con esa longitud.
Y también es posible construir $\sqrt{K}$. Para ello se considera un segmento de longitud 1 y se ubica a continuación del segmento anterior. Se construye el punto *M*, punto medio del segmento de longitud 1+*K*.
Se construye la circunferencia con centro en *M* y diámetro el segmento de longitud 1+*K*.
Se traza una perpendicular al diámetro por el punto donde se

	unen los dos segmentos iniciales. El punto de intersección de la circunferencia y la recta perpendicular trazada es el tercer vértice de un triángulo rectángulo que tiene hipotenusa en el diámetro considerado inicialmente. Se afirma que la altura *h*, relativa a la hipotenusa de dicho triángulo, es la raíz de *K*. En efecto, pues se verifica que h^2=(1)(*K*). Luego, *h*= $\sqrt{K}$.
	Siguiendo con la construcción de los puntos del lugar geométrico, se considera el segmento de longitud $\sqrt{K}$ como el diámetro de una circunferencia y se construya dicha circunferencia. Si se elige cualquier punto sobre dicha circunferencia, se observa que se generan triángulos rectángulos en los que se verifica la siguiente relación: $m^2 + n^2 = K$
	*A* y *B* son puntos dados. Luego se trasladan segmentos de longitudes *m* y *n* y se construyen circunferencias centradas en *A* y *B*, con radios *m* y *n*, respectivamente. Se afirma que los puntos donde estas dos circunferencias se cortan forman parte del lugar geométrico. Esto es cierto pues *P* se ubica en la circunferencia de centro *A* y radio *m*, luego, *d*(*A*,*P*)=*m* Y *P* también se encuentra en la circunferencia de centro *B* y radio *n*, luego, *d*(*B*,*P*)=*n* Y como : $d^2(A;P) + d^2(B;P) = K,$ *P* se encuentra en el lugar

<table>
<tr><td></td><td>geométrico buscado.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Si se elige otro punto sobre la circunferencia de diámetro $\sqrt{K}$, se obtendrán otros valores de m y n y otros puntos del lugar geométrico.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>¿Qué forma adoptará la unión de todos esos puntos?

Si bien con la herramienta lugar que tiene CABRI, se puede encontrar que la traza que deja el punto de intersección de las circunferencias es una circunferencia, se hace necesaria una justificación geométrica.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>La justificación geométrica se basa en el teorema de la mediana que señala que si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y x es la longitud de la mediana relativa al lado c, entonces se verifica que:

$a^2+b^2=2x^2+c^2/2$

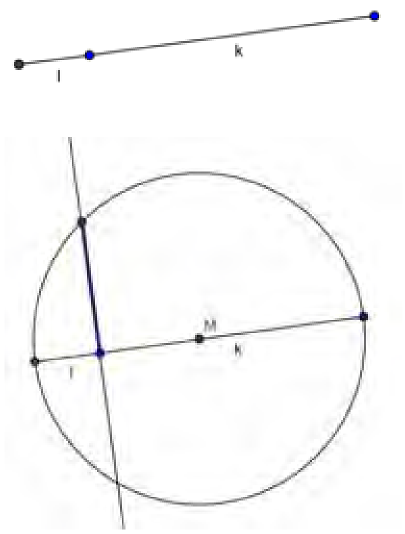
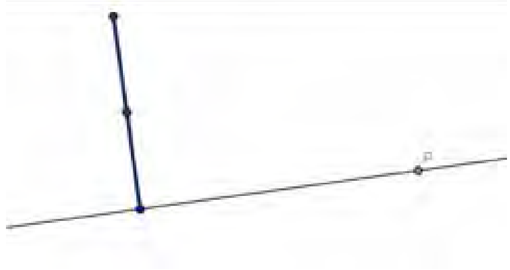
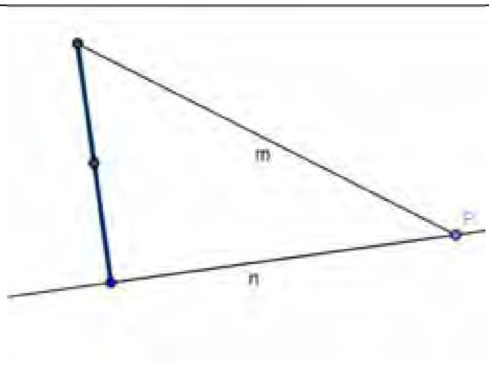
Como a^2+b^2 es K y $c^2=d^2(A,\mathrm{B})$, x toma un valor único. Así el lugar geométrico buscado corresponde a una circunferencia de centro el punto medio de AB y cuyo radio x queda bien determinado por los datos.</td></tr>
</table>

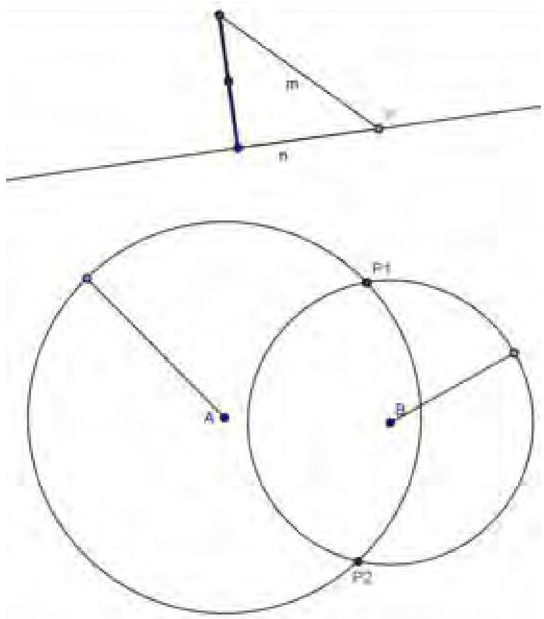
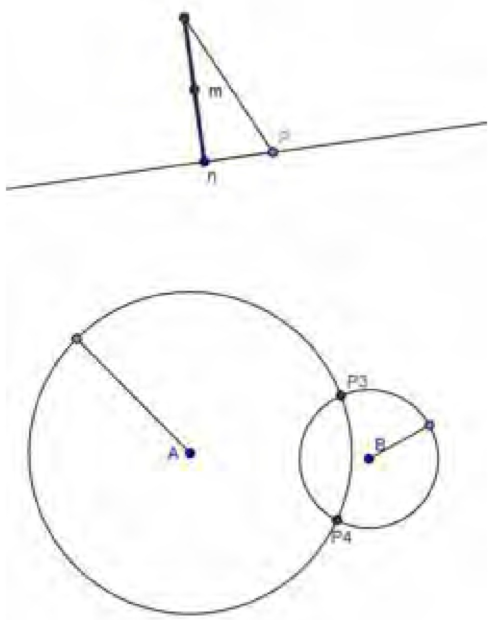
Situación 6 - Enunciado

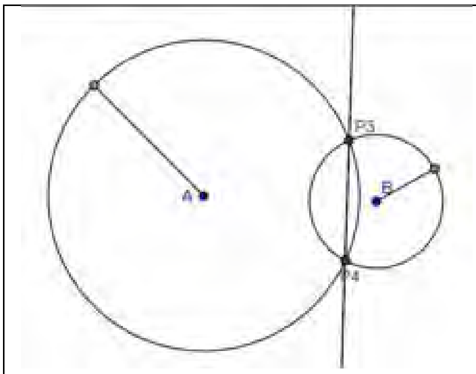
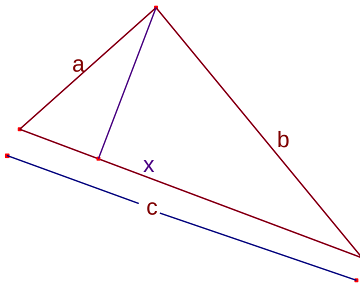
Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de *P* a cada uno de esos puntos es un valor constante *K*.

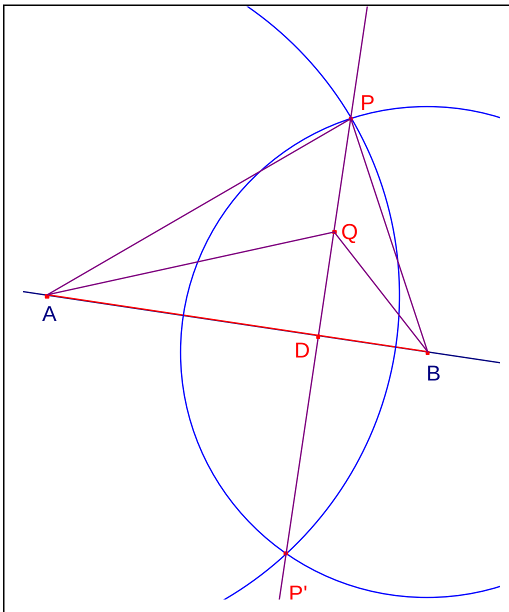
Solución propuesta:

Si *K*=0, se trata de la mediatriz del segmento *AB*. Mientras que para cualquier valor positivo de *K* se seguirá el siguiente razonamiento.

	Se construye el segmento de longitud $\sqrt{K}$.
	Luego, se busca construir triángulos rectángulos con un cateto de longitud $\sqrt{K}$. Para ello basta trazar una recta perpendicular al segmento, por uno de sus extremos Cualquier punto sobre esa recta será el tercer vértice de un triángulo rectángulo de cateto $\sqrt{K}$.
	Si se denota por *m* a la hipotenusa del triángulo y por *n* al otro cateto, se tendrá que: $m^2 = n^2 + K$

	*A* y *B* son puntos dados. Luego se trasladan segmentos de longitudes *m* y *n* y se construyen circunferencias centradas en *A* y *B*, con radios *m* y *n*, respectivamente. Se afirma que los puntos donde estas dos circunferencias se cortan forman parte del lugar geométrico. Esto es cierto pues *P* se ubica en la circunferencia de centro *A* y radio *m*, luego, *d*(*A*,*P*)=*m* Y *P* también se encuentra en la circunferencia de centro *B* y radio *n*, luego, *d*(*B*,*P*)=*n*. Como se verifica que: $m^2 = n^2 + K$, entonces *P* forma parte del lugar geométrico buscado.
	Al hacer variar *P* sobre la recta perpendicular, se generan distintos valores para *n* y *m*. Los puntos donde estas dos circunferencias se cortan también forman parte del lugar geométrico.

	¿Qué forma adopta la unión de todos esos puntos? Si bien con la herramienta *lugar* que tiene CABRI, se puede encontrar que la traza que deja el punto de intersección de las circunferencias es una recta, que además es perpendicular al segmento *AB*, se hace necesaria una justificación geométrica.
	La justificación geométrica se basa en el teorema de Euclides que señala que si *a*, *b* y *c* son las longitudes de los lados de un triángulo y x es la longitud de la proyección de la altura relativa al lado c, entonces se verifica que: $a^2\text{-}b^2=c^2\text{-}2cx$ Como $a^2\text{-}b^2$ es K y $c^2=d^2(A,B)$, x toma un valor único; es decir, la proyección siempre debe ser la misma. Así el lugar geométrico buscado corresponde a la recta perpendicular a *AB* que divide a ese segmento en dos uno de los cuales mide *x*, por lo que el lugar geométrico queda bien determinado por los datos.



Otra forma de demostrar que, efectivamente, el conjunto de puntos construido corresponde a una recta perpendicular al segmento *AB* es a través del siguiente razonamiento: Considerar que el punto *P* pertenece al lugar geométrico. Por dicho punto, se traza la recta perpendicular al segmento *AB*. Se toma un punto cualquiera sobre dicha recta, por ejemplo *Q*, y se verifica que también cumple la condición geométrica establecida. Esto es cierto pues, aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos *ADQ* y *BDQ*, se tendrá lo siguiente:

$AQ^2=AD^2+QD^2$, $BQ^2=BD^2+QD^2$

De donde: $QB^2 - PA^2=BD^2 - AD^2$

Por transitividad, $QB^2-QA^2=PB^2-PA^2$

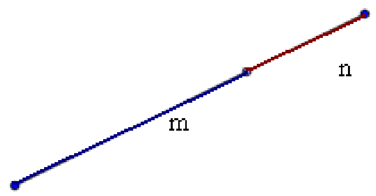
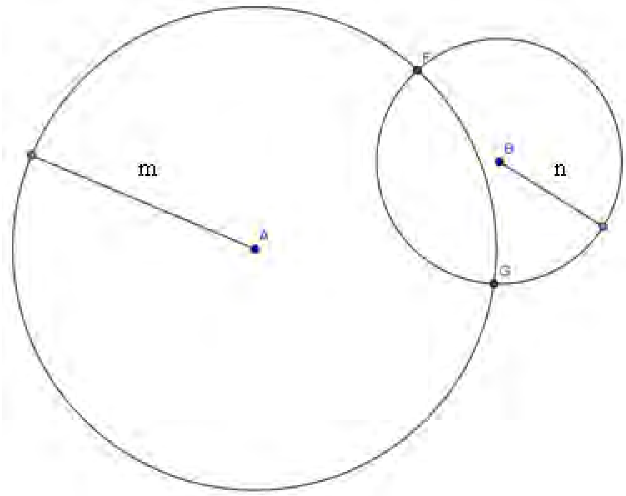
Y como *P* satisface la condición: $AP^2-BP^2=K$, se tiene que también *Q* satisface la condición para estar en el lugar geométrico.

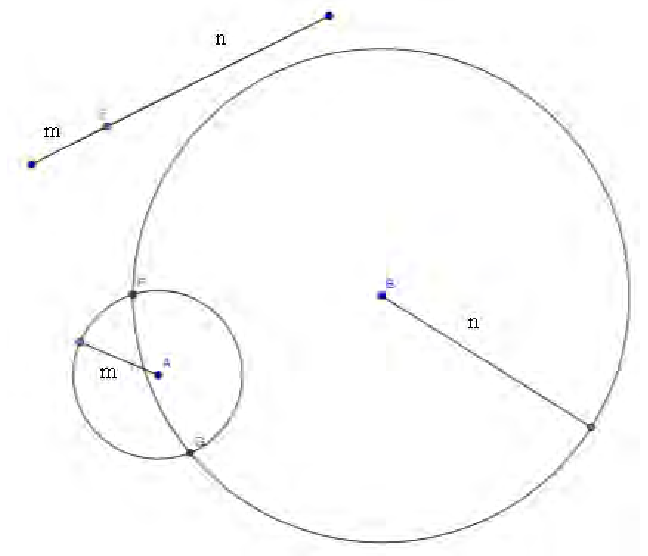
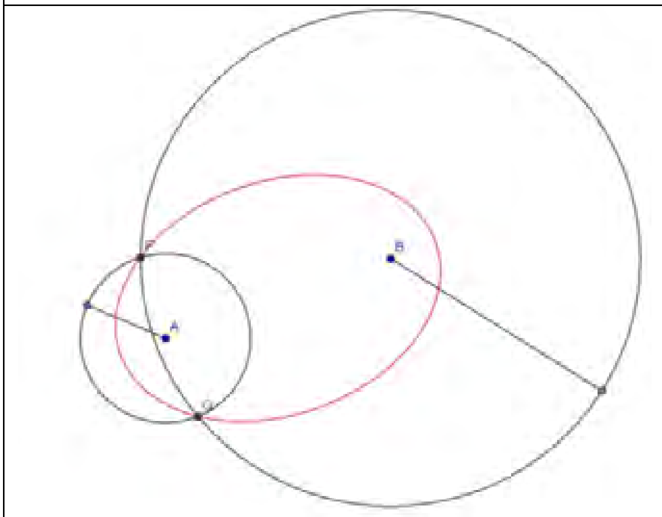
Por tanto, el lugar geométrico es una recta perpendicular al segmento *AB*.

Situación 7- Enunciado

Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que la suma de las distancias de *P* a cada uno de esos puntos es un valor constante *K*.

Solución propuesta:

	Se parte de los puntos *A* y *B* que son datos y de un segmento de longitud *K* que también ha sido dado. Se divide el segmento de longitud *K* en dos segmentos de longitudes *m* y *n*.
	Con centro en *A*, se construye una circunferencia de radio *m* y con centro en *B*, se construye una circunferencia de radio *n*. Se afirma que los puntos donde estas dos circunferencias se cortan forman parte del LG. Esto es cierto pues cada uno de ellos se ubican en la circunferencia de centro *A* y radio *m*, luego, *d*(*A*,punto de intersección)=*m* Y también se encuentran en la circunferencia de centro *B* y radio *n*, luego, *d*(*B*,punto de intersección)=*n* Y como : $m + n = K$, Cada uno de dichos puntos forma parte del lugar geométrico buscado.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Modificando la longitud m (y por tanto la de n), se obtienen otros puntos del lugar geométrico.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>¿Qué forma tendrá la unión de todos esos puntos?
Con la herramienta lugar que tiene CABRI, se puede encontrar la traza que deja el punto de intersección de las circunferencias. ¿A qué curva corresponde esta figura?

El lugar geométrico corresponde a una elipse que queda bien determinada por los datos pero que no se puede construir con regla y compás en un número finito de pasos.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">A partir de la construcción y de la manipulación de los puntos A y B, se pueden hacer algunas observaciones:

La distancia a la que se encuentren A y B y la distancia K deben ser tales que $d(A; B) <K$ para que las circunferencias se corten. En caso que $d(A; B) >K$, con este método no se encontrarán puntos en la intersección de las circunferencias y eso permitirá discutir las restricciones del problema.
Como el segmento m debe medir menos que K, parece ser que la figura que se generará estará “acotada”.
</td>
</tr>
</table>

Para un estudio completo de este lugar, es conveniente introducir un lenguaje algebraico ya que la forma que adopta el lugar geométrico determinado por *P* no es tan evidente como en los casos anteriores. El lugar geométrico no se puede construir de manera exacta con regla y compás, sólo se puede ubicar un número finito de puntos. Se trata de una curva nueva para los estudiantes, la elipse.

Una vez que el problema se ha escrito en términos algebraicos, el trabajo fundamentalmente será en ese registro ya que deberá encontrarse una ecuación que sea equivalente a la ecuación que se obtiene directamente, que tiene dos radicales; la nueva ecuación no tendrá ninguno y estará expresada en términos de binomios al cuadrado.

Esto llevará a obtener la expresión:

$$16(y+1)^2 + 25(x-4)^2 = 400$$

Sin embargo, los estudiantes no han estudiado antes qué figuras se asocian con ecuaciones de esta forma. Se les plantea entonces que para hacerlo conviene despejar cada variable en términos de la otra para analizar qué valores puede tomar cada una de ellas. De esta manera determinarán los intervalos en los que toman valores *x* e *y*, así como los intervalos de crecimiento o decrecimiento.

Por ejemplo, despejando *y*:

$$y = 1 \pm \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$$

Se obtiene que $0 \le x \le 8$.

Considerando primero que $y = 1 + \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$, se tiene que cuando *x*=0, y=1; *x*=4, *y*=6, por tanto en ese intervalo *y* crece.

Se tiene también que cuando *x*=4, *y*=6; *x*=8, *y*=1, por tanto en ese intervalo y decrece.

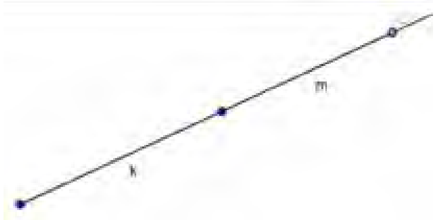
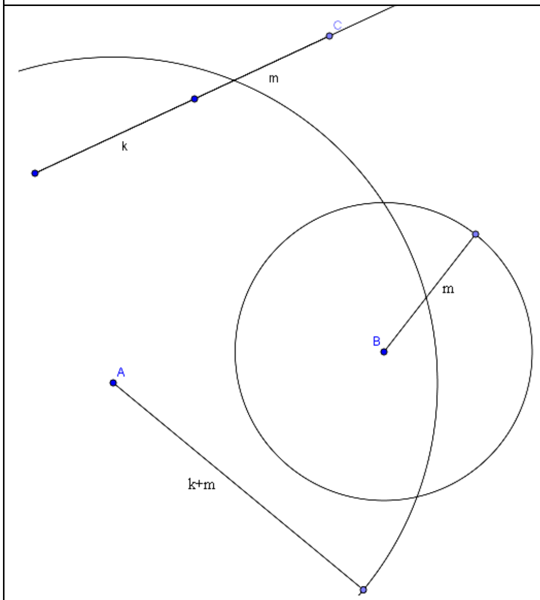
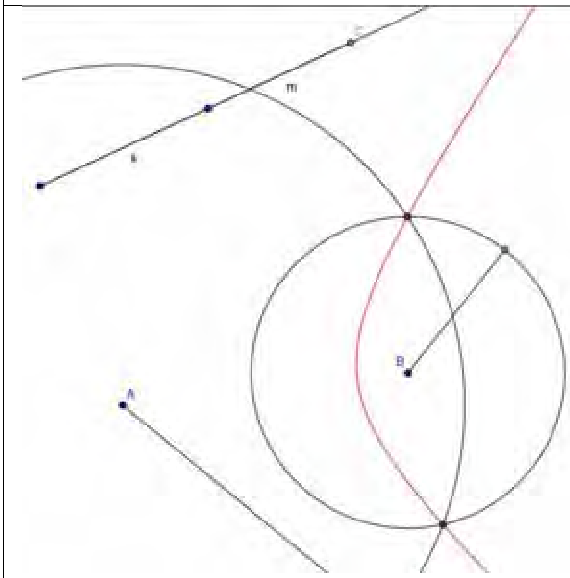
Si se despeja *x*:

$x = 4 \pm 4\sqrt{1 - \frac{(y+1)^2}{25}}$, se concluye que *y* puede tomar valores sólo entre -6 y 4; que cuando *y*=-1, *x* toma su valor máximo *x*=8 y también su valor mínimo *x*=0. Además, cuando *y* toma valores mayores que -1 y se considera $x = 4 + 4\sqrt{1 - \frac{(y+1)^2}{25}}$, entonces *x* crece.

Situación 8

Dados los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico de los puntos *P* tales que la diferencia de las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* es un valor constante *K*.

Solución propuesta:

	La construcción será similar a la del caso anterior, con la diferencia que el segmento mayor ya no medirá *K* sino *K*+*m*, siendo m variable. Se denotará por *n* al segmento de longitud *K*+*m*.
	Con centro en *A* y radio *n* se traza una circunferencia. Con centro en *B* y radio *m*, se traza otra circunferencia. Y como los puntos de intersección de dichas circunferencias cumplen la condición $d(A;P) = d(B;P) + K$ Entonces forman parte del lugar geométrico.
	Con la herramienta *lugar* que tiene CABRI se puede encontrar la *traza* que deja cada punto de intersección de las circunferencias. La figura mostrada corresponde al lugar de uno de esos puntos. ¿A qué curva corresponde esta figura? El lugar geométrico corresponde a la rama de una hipérbola que queda bien determinada por los datos pero que no se puede construir con regla y compás en un número finito de pasos.

Para un estudio completo de este lugar, es conveniente introducir un lenguaje algebraico. Sólo con la determinación de algunos puntos no se podrá dar respuesta a preguntas como a qué distancia de los puntos A y B se encuentra el vértice; se requiere introducir una métrica y en este caso ésta vendará dada por un sistema de coordenadas rectangulares.
Algunas observaciones se pueden hacer a partir de la construcción y de la manipulación de los puntos *A* y *B*:

- Para que ocurra lo descrito se hace necesario que $d(A; B) > K$.
- A diferencia del caso anterior en el que el segmento *m* siempre medía menos que *K*, en este caso *m* puede tomar cualquier valor. Esto tendrá un efecto sobre la figura que se generará como lugar geométrico pues no estará "acotada".

El planteamiento sintético implica una actividad de conversión en la que se interpreta la condición de la diferencia de distancias asociada a la diferencia de longitudes de dos segmentos. De otro lado, con tratamientos en el registro figural sólo se podrá determinar un conjunto finito de puntos de paso pero no se podrá construir la curva completa.

En geometría sintética tampoco se podrán responder preguntas sobre las restricciones del problema para que éste tenga sentido, por ejemplo, ¿debe existir alguna relación entre *K* y *d(A;B)* para que existan puntos solución?

De otro lado, aunque el procedimiento algebraico es el mismo que en el caso anterior, la complejidad cognitiva puede ser mayor ya que al estudiar los valores permitidos para *y*, se encontrará que serán todos los reales, excepto en un intervalo. El que la curva no esté acotada puede ser una variable que incremente la complejidad de las conversiones. Con el tratamiento de las expresiones algebraicas se puede dar respuesta a las preguntas sobre las restricciones y condiciones iniciales.

Los últimos dos casos, situaciones 7 y 8, se consideran como situaciones idóneas para introducir las técnicas propias de la geometría analítica ya que se requiere de una descripción global de la figura asociada al lugar geométrico que no será posible si sólo se construyen algunos puntos. Además, hay condiciones que deben cumplirse entre *A*, *B* y *K* para que se genere este objeto que se pueden estudiar mejor con la incorporación de coordenadas.

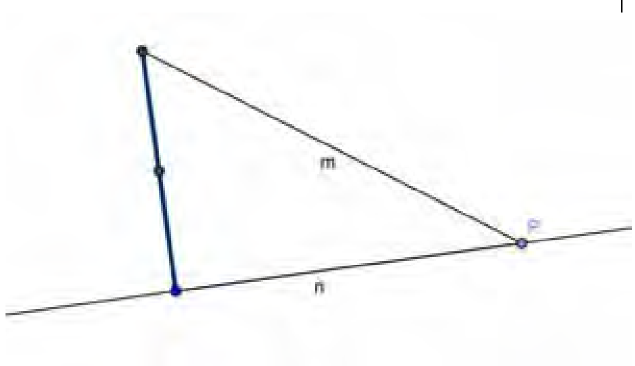
A partir del trabajo realizado por los estudiantes al desarrollar estos problemas en el que se genera la necesidad de estudiar los lugares con herramientas distintas a las que provee la geometría sintética, se propone introducir el sistema de coordenadas cartesianas y traducir las condiciones geométricas de distancias entre puntos en términos algebraicos. Luego se estudiará la ecuación de cada lugar geométrico encontrado y la relación que ésta tiene con su representación gráfica.

Posteriormente, a partir de la expresión algébrica encontrada y estableciendo relaciones entre los intervalos de crecimiento, decrecimiento, la identificación de máximos y mínimos y la representación gráfica del lugar geométrico en el plano cartesiano, se podrá hacer la descripción global del lugar geométrico.

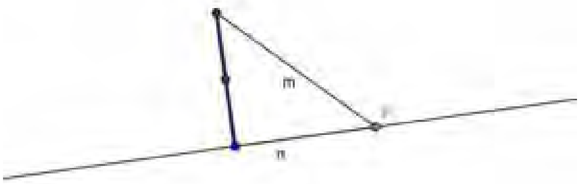
5.3.2. SOBRE LA DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO EN TÉRMINOS DE UEI

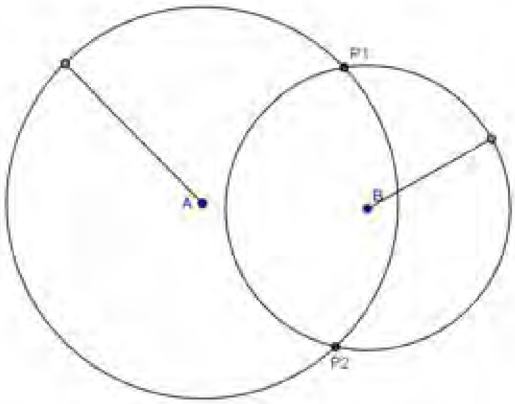
A manera de ejemplo, en la tabla 5.6. se estudiará la solución de uno de los problemas anteriores (situación 6), desde los marcos geométrico y algebraico, identificando las UEI que intervienen.

Tabla 5.6. UEI asociadas a la determinación de un lugar geométrico

UEI en el marco geométrico	UEI en el marco algebraico
Enunciado: Dados los puntos A y B y el valor constante K, determine el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es K^2. Solución propuesta: Se construye un triángulo con cateto K. Para ello, se traza una perpendicular al segmento de longitud K por uno de sus extremos. [UEI: Las consideradas al construir una recta perpendicular]. Seleccionar un punto cualquiera Q sobre dicha recta. [UEI: Construir puntos sobre un objeto dado] Construir un triángulo rectángulo de hipotenusa m y catetos K y n. [UEI: Construir un segmento conociendo sus extremos]. Sea m la longitud del segmento con un extremo en el extremo de K y otro en Q.  Se verifica entonces que: $m^2=K^2+n^2$. Con los segmentos de longitudes m y n se construyen circunferencias con centros en A y B y radios m y n,	**Enunciado: Dados los puntos A y B y el valor constante K, determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es conocida.** Enunciado particular: Determinar la ecuación de lugar geométrico de los puntos cuyos cuadrados de distancias a los puntos A(3;5) y B(0,0) tienen una diferencia constante de 100 unidades. Solución propuesta: Se denota por $P(x, y)$ a los puntos del plano que cumplen la relación pedida y se plantea una ecuación que represente la condición dada. Las distancias de P a A y de P a B se representan con una expresión algebraica. [UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables] [UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables] Luego se debe determinar una ecuación que relacione las coordenadas del punto P con los datos dados. $d^2(P,A) - d^2(P,B) = 100$

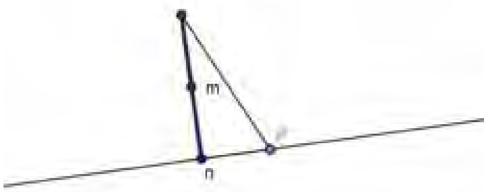
<table>
<tr>
<td>
respectivamente.
[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio] (2 veces)

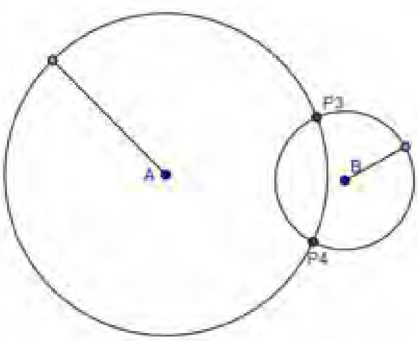




En la intersección de las dos circunferencias construidas se encuentran puntos del lugar geométrico.
[UEI: Construir puntos de intersección de objetos dados].

Construyendo otros puntos se tiene lo siguiente:



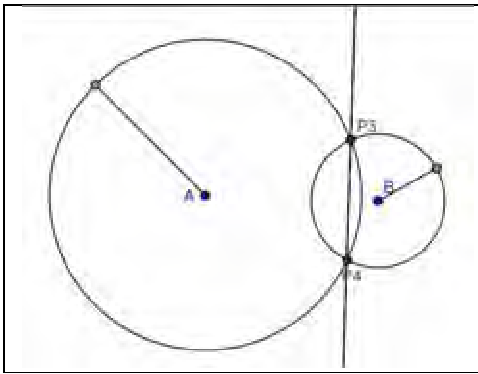


El LG generado es una recta.
</td>
<td>
$$(x-3)^2+(y-5)^2-(x-0)^2-(y-0)^2=100$$

Desarrollando las expresiones y simplificando, se tiene que:

$$-3x-5y=66$$

Reconocer que dicha ecuación corresponde a la del lugar geométrico solicitado y que es una recta perpendicular a AB.
</td>
</tr>
</table>



Este es un ejemplo en donde no existe una equivalencia entre los procedimientos en los marcos geométrico y algebraico. Aunque es posible tratar de establecer una relación entre cada paso seguido en el procedimiento sintético con el algebraico, esto no es trivial. Por ejemplo, se puede considerar que la construcción de puntos P que pertenecen a circunferencias de centros en A y B y radios m y n, respectivamente, puede asociarse a las expresiones:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=m; \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=n$$

e identificarlos en la expresión $d^2(P,A)$-$d^2(P,B)$=100

De modo que lo que se pida sea determinar los puntos de intersección de dichas circunferencias,

$$(x-3)^2+(y-5)^2-m^2=(x-0)^2+(y-0)^2-n^2\ ,$$

sabiendo además que $m^2=n^2+100$.

En la práctica, cuando se resuelve el problema en el contexto algebraico, no es necesario establecer las relaciones descritas en las líneas anteriores.

Por otro lado, la solución sintética de este problema requiere de construcciones adicionales fuera del dibujo inicial que deben ser trasladadas a donde se encuentran los datos. Esto corresponde a una actividad cognitiva de reconfiguración pues las configuraciones iniciales han sido manipuladas. Esto explicaría que los estudiantes presenten mayores dificultades al realizarlo.

Además, el procedimiento empleado para resolver este problema en el marco algebraico ha resultado ser más eficiente que el descrito en el marco geométrico pues la justificación formal de la forma global que adopta el LG en el contexto sintético requiere de un razonamiento deductivo en el que se debe considerar un tercer punto en el lugar geométrico y demostrar que está alineado con los otros dos. Mientras que la solución algebraica permite identificar el lugar geométrico casi inmediatamente reconociendo que la ecuación final corresponde a la de una recta.

Así, el procedimiento empleado en el marco algebraico requiere de menos etapas que el seguido en el marco geométrico; asimismo, es más general porque no depende del valor que adopte K.

5.4. CARACTERIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS PARA INTRODUCIR LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

A partir de la búsqueda de regularidades en los problemas planteados en las situaciones 1-8, se identificó una expresión que los caracteriza. Así, se consideró el siguiente problema general, del cual se desprenden todos los problemas descritos anteriormente.

5.4.1 PROBLEMA GENERAL

Teniendo en cuenta que se conocen *K*, los puntos *A* y *B*, determine el lugar geométrico descrito por los puntos *P* del plano, tales que satisfacen la siguiente condición:

$$d^p(A;P)+(-1)^q d^p(B;P)=K,$$

De modo que p y q tomen valores en $\{1;\ 2\}$

Las variables didácticas consideradas son K y los exponentes p y q. Dependiendo de los valores que ellas tomen, el estudiante deberá recurrir a una estrategia distinta.

Caso I: *K* particular con *p*∈{1,2} y *q*∈{1,2}

a) *K*=*d*(*A*, *B*), *p*=1 y *q*=2

$$d\ \ (A;P)+d(P;B)=d\ \ (A;B)$$

b) K=*d*(*A*, *B*), *p*=1 y *q*=1

$$d\ \ (A;P)-d(B;P)=d\ \ (A;B)$$

c) K= $d^2(A;B)$, *p*=2 y *q*=1

$$d^2(A;P)-d^2(B;P)=d^2(A;B)$$

d) K= $d^2(A;B)$, *p*=2 y *q*=2

$$d^2(A;P)+d^2(B;P)=d^2(A;B)$$

La técnica de solución requiere únicamente de construcciones elementales en la figura que reúne a los datos. Los lugares geométricos que aparecen con esta familia de problemas son rectas, segmentos, semirrectas o circunferencias.

Caso II) K cualquier número real positivo, excepto los valores considerados en el caso I

a) $K \neq d^2(A;B)$, p=2 y q=2

$$d^2(A;P) + d^2(B;P) = K$$

b) $K \neq d^2(A;B)$, *p*=2 y *q*=1

$$d^2(A;P) - d^2(B;P) = K$$

O equivalentemente:

$$d^2(A;P) = d^2(B;P) + K$$

c) $K \neq d(A;B)$, *p*=1 y *q*=2

$$d(A;P) + d(B;P) = K,$$

Notar que para que el problema tenga solución, se debe cumplir que $d(A,B) \leq K$. Como el caso $d(A;B)=K$ ya se analizó, se considerará sólo $d(A,B) < K$.

d) $K \neq d(A;B)$, *p*=1 y *q*=1

$$d(A;P) - d(B;P) = K,$$

Notar que para que el problema tenga solución, se debe cumplir que $d(A,B) \geq K$. Como el caso $d(A;B)=K$ ya se analizó, se considerará sólo $d(A,B) > K$.

La técnica de solución siempre requiere construir figuras auxiliares y trasladar segmentos a la figura inicial que reúne a los datos. Los lugares geométricos que aparecen con esta familia de problemas son rectas, circunferencias, elipses e hipérbolas.

5.4.2. COMPORTAMIENTOS ESPERADOS AL RESOLVER LA FAMILIA DE PROBLEMAS

En esta sección se desarrollará la etapa predictiva del *diseño de experimentos*; esto implica describir los comportamientos matemáticos esperados de los estudiantes al desarrollar las situaciones propuestas.

Los supuestos de la teoría de registros de representación serán tomados en cuenta en esta etapa y permitirán predecir cuáles serán aquellas tareas que, por su complejidad cognitiva y matemática, ocasionarán mayor dificultad a los estudiantes.

Se considerarán dos tipos de variables:

- Variable micro didácticas: aquellas variables matemáticas que al modificarse generarán cambios en las estrategias adoptadas al abordar los problemas.

  Serán variables de este tipo los parámetros p, q y K de la expresión general $d^p(A;P) + (-1)^q d^p(B;P) = K$, donde p y q tomen valores en $\{1;\ 2\}$ y $K \in R$.

- Variables macro didácticas: aquellas variables que no lo son en el sentido matemático pero que influirán en el desarrollo de la actividad matemática realizada por los estudiantes.

  En la investigación, serán variables de este tipo el uso o no de algún programa de geometría dinámica, el dominio de técnicas de construcción con regla y compás, el que los trazos auxiliares deban realizarse donde se encuentran los dato so en otra zona de la hoja de dibujo, la modalidad de trabajo (individual, parejas, etc.), entre otras.

Respecto a las estrategias de solución, en las primeras situaciones éstas estarán dadas por el trazado de rectas paralelas o perpendiculares o por la construcción de una circunferencia conociendo su centro y radio, en el mismo dibujo donde se encuentran los datos. En un segundo grupo de problemas, se deberá recurrir a una técnica distinta que consiste en realizar trazos auxiliares en una zona diferente a aquella donde se encuentran los datos, para luego trasladar distancias al lugar donde estaba la información inicial y buscar soluciones en la intersección de dos lugares geométricos construidos apropiadamente.

Así como las técnicas de solución irán cambiando según se modifiquen *K*, *p* y *q*, también irán cambiando las formas de los lugares geométricos que son solución de las situaciones propuestas. Mientras que en las primeras situaciones se obtendrán rectas y circunferencias, en las siguientes, las formas que se obtengan corresponderán a figuras no estudiadas previamente (elipses e hipérbolas).

Se preverán comportamientos posibles en relación a la estrategia de selección para la solución de un problema y de posibles dificultades que podrían aparecer. Esto se hará asumiendo que durante la implementación el profesor intervendrá sólo cuando el alumno lo requiera.

Para dar una idea más completa del escenario en el que se propone plantear las actividades, se presenta información sobre los siguientes aspectos:

- El enunciado tal como se debería presentar a los estudiantes
- El tiempo estimado previsto para que los estudiantes den respuesta a la pregunta
- La forma de trabajo propuesta: individual o en pareja
- Los recursos considerados para el desarrollo de la actividad: regla y compás o un ordenador con un programa de geometría dinámica

- Los conocimientos matemáticos implicados, tanto los que se requieren para la solución del problema así como los que se desprenden de ella.
- El análisis de la tarea
- Los comportamientos esperados que se justifican por el número de UEI y de transformaciones involucradas en el desarrollo de la tarea.

<u>Primer bloque de tareas</u>

Este bloque está formado por las situaciones 1-4 y se caracteriza porque K=$d(A;B)$ ó K=$d^2(A;B)$.

Caso Ia): K=$d(A,B)$, p=1 y q=2

Ecuación particular: $d(A,P)+d(P,B)=d(A,B)$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos A y B.

a) Construyan, haciendo uso de las herramientas de dibujo, un punto P tal que la distancia de A a P coincida con la diferencia entre las distancias de A a B y de P a B.

b) ¿Qué figura formarán todos los puntos P que satisfacen la condición geométrica descrita? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por P? ¿Por qué?

Tiempo estimado: 15 minutos

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Lápiz y papel, regla y compás

Conocimientos matemáticos implicados:

Conocimiento previo: La mínima distancia entre dos puntos del plano es la longitud del segmento que los une. Desigualdad triangular.

Conocimiento de aprendizaje: Lugar geométrico

Análisis previo de la tarea: En términos de transformaciones entre registros, deberá producirse una conversión que permita interpretar la condición dada verbalmente a través de una representación figural. La tarea exige representar geométricamente los tres puntos y reconocer que la condición dada sólo se verifica en el caso en el que A, P y B se encuentran alineados, lo que a su vez debe traducirse en que P esté en el segmento AB. Las UEI se refieren únicamente a la construcción de una recta, tal como se describió en el problema 25.1 del Anexo 3.

Comportamientos esperados: Se espera que puedan realizar la traducción de la condición verbal a la figural y que identifiquen que para que esta se cumpla, P

debe estar sobre el segmento. De otro lado, al ser la primera situación en la que aparece el término lugar geométrico es probable que sea necesario aclarar lo que significa.

Caso Ib)*: K*=*d*(*A*, *B*), *p*=1 y *q*=1

Ecuación particular: $d(A, P) - d(B, P) = d(A, B)$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos *A* y *B*.

a) Construyan, haciendo uso de las herramientas de dibujo, un punto *P* tal que la distancia de *A* a *P* coincida con la suma de las distancias de *A* a *B* y de *B* a P.
b) ¿Qué figura formarán todos los puntos *P* que satisfacen la condición geométrica descrita? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por *P*? ¿Por qué?

Tiempo estimado: 15 minutos
Forma de trabajo: En parejas
Recursos disponibles: Lápiz y papel, regla y compás
Conocimientos matemáticos implicados

Conocimiento previo: La mínima distancia entre dos puntos del plano es la longitud del segmento que los une.

Conocimiento de aprendizaje: Lugar geométrico

Análisis previo de la tarea: La tarea exige realizar la traducción de la condición verbal a otra equivalente en donde se pide que la distancia de *A* a *P* sea la misma que la suma de distancias de *A* a *B* y de *B* a *P*. Luego se deberá representar geométricamente los tres puntos y reconocer que la condición dada sólo se verifica en el caso en el que no se forme un triángulo lo que a su vez debe traducirse en que *A*, *B* y *P* estén alineados.

A diferencia de la pregunta anterior, *P* se podrá desplazarse sobre toda la semirrecta con punto inicial en *B*.

Para llegar a esta respuesta es necesario que se conciba como lugar geométrico al conjunto de *todos* los puntos que satisfacen la condición. Las UEI se refieren únicamente a la construcción de rectas, tal como se describió en el problema 26.1 del Anexo 3.

Comportamientos esperados: Se espera que los estudiantes traduzcan la condición dada a un contexto geométrico y que identifiquen que para que esto se cumpla, *P* debe estar a la derecha de *B*. Podría ocurrir que sólo se den algunas ubicaciones de *P* como respuesta y no den toda la semirrecta. El que ésta solución no esté acotada, le otorgará un mayor grado de dificultad respecto a la anterior.

Caso Ic): *K*= $\boldsymbol{d^2(A,B)}$, *p*=2 y *q*=1

Ecuación particular: $d^2(A,P) - d^2(B,P) = d^2(A,B)$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos *A* y *B*.

a) Construyan, haciendo uso de las herramientas de dibujo, un punto *P* tal que el triángulo *ABP* sea recto en *B*.
b) ¿Es el punto *P*, construido en a), único?
c) ¿Qué figura formarán todos los puntos *P* que satisfacen la condición geométrica dada? Es decir, ¿cuál sería el lugar geométrico descrito por *P*?
d) ¿Cómo garantizarían que no hay otros puntos del plano que forman parte del lugar geométrico?

Tiempo estimado: 15 minutos

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Lápiz y papel, regla y compás

Conocimientos matemáticos implicados

Conocimiento previo: Trazado de perpendiculares

*Conocimiento de aprendizaje: L*ugar geométrico como un conjunto de puntos

Análisis previo de la tarea: Se requiere reconocer que la condición dada obliga a construir una recta perpendicular a *AB* por el punto *B*. Así, la estrategia de base es construir la recta perpendicular. El argumento para garantizar que no hay otros puntos del plano deberá basarse en que un punto en cualquier otra ubicación formará un triángulo que no será recto en *B*. Las UEI son las que aparecen al realizar la construcción de una recta perpendicular a otra de modo que pase por un punto dado, tal como se describió en el problema 3 del Anexo 3.

Comportamientos esperados: Se espera que los estudiantes reconozcan que en la recta perpendicular se encuentran todos los puntos del lugar geométrico. Sin embargo, de no tener una concepción del lugar geométrico como el conjunto de *todos* los puntos que satisfacen una condición, darán como respuesta sólo uno o sólo algunos puntos de la recta.

Luego, usando como argumento la propiedad del arco subtendido por una semicircunferencia, bastará trazar la circunferencia que tiene como un diámetro a *AB* y afirmar que todos los puntos sobre dicha circunferencia, excepto *A* y B, corresponden a lugar geométrico pedido.

En relación a la justificación de por qué no hay otros puntos en el plano, se espera que al ser esto tan evidente, no encuentren argumentos para justificar.

Caso Id)*: K=* $\boldsymbol{d^2(A,B)}$, *p*=2 y *q*=2

Ecuación particular: $d^2(A,P) + d^2(B,P) = d^2(A,)$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos *A* y *B*.

a) Construyan, haciendo uso de las herramientas de dibujo, un punto *P* tal que el triángulo *APB* sea recto en *P*.
b) ¿Es el punto P construido en a) único?
c) ¿Qué figura formarán todos los puntos *P* que satisfacen la condición geométrica descrita? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por *P*? ¿Por qué?
d) ¿Cómo garantizarían que no hay otros puntos del plano que forman parte del lugar geométrico?

Tiempo estimado: 30 minutos

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Lápiz y papel, regla y compás

Conocimientos matemáticos implicados

Conocimiento previo: triángulo rectángulo, punto medio de un segmento, construcción de un cuadrado conociendo su diagonal (en algunos casos), propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia en el que un lado es el diámetro.

Conocimiento de aprendizaje: lugar geométrico como un conjunto de puntos

Análisis previo de la tarea: La realización de la tarea, tal como está planteada, exige ubicar algunos puntos *P* que verifiquen la condición geométrica dada. Esto se hará construyendo rectas que pasen por *A* y luego trazando perpendiculares a cada una de dichas rectas de modo que éstas pasen por *B*. En la intersección de cada par de estas rectas, se ubicarán los puntos *P*.

Las UEI son las que aparecen al realizar la construcción de una recta perpendicular a otra de modo que pase por un punto dado. Esto deberá repetirse varias veces.

Respecto a la identificación global del lugar geométrico, se requiere realizar una transformación en el registro figural y reconocer que se puede trazar una circunferencia por la unión de los puntos construidos recientemente. Para ello se deberá recurrir a la propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia en el que un lado es un diámetro. Esto permitirá concluir que el lugar geométrico es la circunferencia de diámetro *AB*, sin los puntos *A* y *B*.

Para la construcción de la circunferencia, bastará construir el punto medio del segmento *AB* y luego, con centro en ese punto y radio *AB*/2, trazar la circunferencia. Las UEI son las que corresponden a estas construcciones.

Teniendo en cuenta las construcciones que se deben realizar y con ellas, el número de UEI que aparecen, 6 en cada caso, se puede afirmar que esta tarea igual de compleja que la anterior. El detalle se encuentra en el Anexo 3, problema 22.

Comportamientos esperados: Algunos alumnos empezarán ubicando puntos particulares que satisfacen la condición. Por ejemplo, considerando que el segmento AB es la diagonal de un cuadrado, trazando la mediatriz de dicho segmento y marcando aquellos puntos que distan del punto medio del segmento en $AB/2$. Este último paso lo harán trasladando distancias con el compás. Luego, usando como argumento la propiedad del ángulo inscrito, considerarán suficiente trazar una circunferencia de diámetro a AB y afirmar que todos los puntos sobre dicha circunferencia, excepto quizás A y B, corresponden a lugar geométrico pedido.

Es probable que otros alumnos identifiquen directamente la propiedad de la circunferencia (todo triángulo que tiene dos vértices como extremo de un diámetro de la circunferencia C y el tercer vértice sobre la circunferencia C será recto en este último vértice). Así, señalarán sin una exploración previa, que el lugar geométrico es una circunferencia de diámetro AB.

Se espera que algunos excluyan a A y a B pero que la mayoría no lo haga porque no prevalecerá la condición de que se genere un triángulo.

Puede ocurrir también que sólo ubiquen un punto que satisface la condición geométrica lo que denotaría que no tienen una concepción de lugar geométrico como el conjunto de todos los puntos que satisfacen la condición dada.

Puesta en común e intervención del profesor

Luego de trabajar estos cuatro casos, el profesor deberá propiciar la reflexión sobre si se han encontrado todos los puntos que satisfacen la condición pedida y si será posible que existan puntos fuera de la circunferencia y que formen parte del lugar geométrico.

Cabe resaltar que, ya que la justificación de este problema se puede brindar sólo con elementos de la geometría sintética y propiedades geométricas, no se hace necesario resolverlo en el contexto algebraico.

Comentarios sobre los cuatro casos descritos:

- Las variaciones en los valores de las variables K, p y q deberán significar cambios en las estrategias de solución; así, en los dos primeros casos se hará necesario ubicar sólo puntos con la condición de que estén alineados, en la tercera pregunta se hará necesario trazar una recta perpendicular, mientras que en la cuarta, se tendrán que trazar varias rectas perpendiculares.

- Otra característica común a las soluciones de los cuatro problemas analizados, es que todos los trazos que contribuirán directamente con la solución se encuentran en una misma región de la hoja de dibujo donde estén ubicados A y B.

Segundo bloque de tareas

Este bloque está formado por las situaciones 5-9 y se caracteriza porque $K\neq d(A;B)$ ó $K\neq d^2(A;B)$.

Caso IIa): $\boldsymbol{K \neq d^2(A,B)}$**, p=2 y q=2**

Ecuación particular: $d^2(A,P) + d^2(B,P) = K$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos A y B y un segmento de longitud $k\neq d(A,B)$. Haciendo uso de las herramientas de dibujo que ofrece CABRI, realicen las siguientes actividades:

a) Construyan una circunferencia cuyo diámetro mida *k*. Construyan un triángulo inscrito en dicha circunferencia de modo que uno de sus lados sea un diámetro. Nombren *m* y *n* a los catetos del triángulo.
b) Construyan un punto *P*, en el plano, de modo que la suma de los cuadrados de las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* sea k^2. ¿Es el punto *P* único?
c) La unión de todos los puntos *P* que satisfacen la condición anterior, ¿corresponderá a alguna figura conocida?

Tiempo estimado: 40 minutos

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Ordenador con software de geometría dinámica

Conocimientos matemáticos implicados

Conocimiento previo: construcción de un triángulo rectángulo conociendo la longitud de la hipotenusa *(*propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia en el que un lado es el diámetro); teorema de Pitágoras.

Conocimiento de aprendizaje: lugar geométrico como un conjunto de puntos cada uno de los cuales resulta de intersecar dos objetos y que se obtiene uno a uno pero que son se llega a reconocer su forma global y, por tanto, no se le concibe como una traza.

Análisis previo de la tarea: A diferencia de las tareas anteriores, en el enunciado aparece una nueva variable, *k*. Un primer paso de la solución será representar en el plano los tres elementos que son datos: los puntos *A* y *B* y un segmento de longitud *k*. Esto requiere una conversión del registro verbal al figural.

Aunque la traducción de la condición que deben cumplir los puntos del lugar geométrico evocará inicialmente a un triángulo rectángulo, su representación geométrica no será inmediata porque el único lado conocido de dicho triángulo es el que tiene longitud *k*.

Se deberá construir un triángulo rectángulo con hipotenusa cuya longitud es *k*. Para ello puede seguir el procedimiento del caso Id) en donde se construirá la circunferencia de diámetro *k* y se verificará que el triángulo con lado *k* y vértice en cualquier otro punto de dicha circunferencia será rectángulo; este procedimiento implicara movilizar varias UEI de significado.

Luego deberá recurrirse a una nueva estrategia: la construcción de dos lugares, en cuya intersección se encontrarán los puntos que satisfacen el problema. El siguiente paso será trasladar distancias y construir circunferencias centradas en los puntos dados y cuyos radios coincidan con la longitud de los lados del triángulo construido en el paso anterior. Aquí se deberá reconocer que en la intersección de las circunferencias construidas se encuentran puntos del lugar geométrico. Esto implicará realizar una transformación de conversión al pasar del registro figural al registro simbólico cuando se identifiquen los puntos de la intersección con aquellos que satisfacen la condición solicitada.

Además, se deberá establecer relación entre tomar un punto distinto en la circunferencia, construir dos circunferencias distintas centradas en *A* y *B* y obtener dos nuevos puntos del lugar geométrico. Esta actividad requerirá transitar por tres registros en ambos sentidos; también es una actividad de conversión y, por tanto, es bastante compleja.

El detalle sobre las UEI que intervienen en la solución se encuentra en el Anexo 3, problema 23.

Comportamientos esperados: Los alumnos asumirán que la longitud k coincidirá con la longitud del lado *AB*, dado que tratarán de asociar el valor de *k* a un objeto geométrico definido previamente como lo es el segmento *AB*, aunque esto no sea dato.

Si los puntos *A* y *B* han sido ubicados de modo que las circunferencias no se corten, los alumnos cuestionarán el procedimiento seguido pero no la condición que deben cumplir *A* y *B* para que el problema tenga solución.

En los casos en los que ubiquen adecuadamente *A* y *B*, es de esperar que sólo reconozcan algunos puntos del lugar geométrico y que no identifiquen la forma global que este adoptará. Si esto ocurre, se dirá que los estudiantes poseen una concepción estática del concepto de lugar geométrico.

En aquellos casos en que los estudiantes reconozcan que la forma global del lugar geométrico es una circunferencia, se espera que no tengan otros argumentos para justificarlo, más allá de los argumentos basados en las figuras.

Puesta en común e intervención del profesor

A pesar de que en el enunciado se han dado las instrucciones una a una, se considera que será necesario realizar una puesta en común donde se haga evidente el efecto de considerar otro punto sobre la circunferencia de diámetro k y su relación con otros puntos del lugar geométrico.

Se espera que el uso del programa de geometría dinámica favorezca el reconocimiento de la dependencia entre el punto elegido sobre la circunferencia y los nuevos puntos del lugar geométrico.

En la puesta en común, el profesor deberá propiciar la reflexión sobre si el procedimiento seguido ha permitido encontrar *todos* los puntos que satisfacen la condición pedida o si será posible que existan otros puntos.

Dado que es posible que la identificación de la forma global del lugar geométrico no sea trivial, se presentará la opción *lugar* que ofrece el programa de geometría dinámica para explorar.

Luego, se podrán emplear argumentos analíticos que justificarán la forma de todo el conjunto de puntos relacionando la expresión algebraica y su gráfica.

Los siguientes problemas deberán plantearse a los estudiantes para que sean trabajados y discutidos en parejas y sin la intervención del profesor.

Caso IIb): $\boldsymbol{K \neq d^2(A,B)}$, $\boldsymbol{p}$=2 y $\boldsymbol{q}$=1

Ecuación particular: $d^2(A,P) - d^2(B,P) = K$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos A y B y un segmento de longitud $k \neq d(A,B)$. Haciendo uso de las herramientas de dibujo que ofrece CABRI, realicen las siguientes actividades:

a) Construyan un triángulo rectángulo de modo que un cateto mida k. Nombren m a la hipotenusa de dicho triángulo y n al otro cateto.
b) Construyan un punto P en el plano de modo que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B sea k^2. ¿Es el punto P único?
c) La unión de todos los puntos P que satisfacen la condición anterior, ¿corresponderá a alguna figura conocida?

Tiempo: 40 minutos

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Ordenador con software de geometría dinámica

Conocimientos matemáticos implicados:

Conocimiento previo: traslado de distancias, construcción de triángulos rectángulos conociendo un cateto, teorema de Pitágoras.

Conocimiento de aprendizaje: un punto del lugar geométrico como una intersección de dos figuras, el lugar geométrico como traza.

Análisis previo de la tarea: Para la realización de la tarea se deberán ubicar dos puntos A y B en el plano de dibujo. Luego, se tendrá que reconocer que la ubicación de P está relacionada con la construcción de un triángulo rectángulo que no es *APB*. Aquí se deberá asociar la expresión *la diferencia de los cuadrados de las distancias* con el teorema de Pitágoras en el que un cateto mide *k* y el otro cateto tiene una longitud cualquiera, *n*. Con estos dos valores, quedará fijo el valor de la hipotenusa, *m*.

Dicha actividad requerirá convertir del registro dado por la lengua natural al simbólico, reconociendo en la propiedad de los cuadrados de las distancias que se debe construir un triángulo rectángulo. Esto llevará a una nueva actividad de conversión del registro simbólico al figural.

Para la ubicación de *P* se seguirá la misma estrategia que en el problema anterior que consiste en construir dos lugares. Así, se deberán trasladar las distancias consideradas para la hipotenusa *m* y para el cateto *n* a un dibujo que incluya los puntos *A* y *B*. Con centro en *A* y radio la longitud de la hipotenusa, se deberá construir una circunferencia; con centro en *B* y radio la longitud del cateto, se construirá otra circunferencia. En los procesos descritos se deberán movilizar varias UEI. Luego se deberá identificar la ubicación de *P* en la intersección de las dos circunferencias construidas, es decir, se deberá reconocer que el punto *P* que ha sido construido geométricamente satisface las condiciones solicitadas. Esto implicará una transformación de conversión, que en este caso es del registro figural al simbólico.

Para generar el lugar geométrico es preciso notar que *P* no es único; esto se hará evidente al buscar otros puntos *P* variando los valores para *m* y *n*. Aquí se deberá establecer una conexión entre dichos cambios y las nuevas circunferencias que deberán construirse e intersecarse. Esta actividad implicará realizar varias conversiones y por tanto también será bastante compleja.

Por otro lado, se deberá concebir al lugar geométrico como el conjunto formado por *todos* los puntos que satisfacen la condición dada. Para que esto ocurra, se deberá variar continuamente uno de los vértices del triángulo rectángulo de cateto *k* e intuir que la forma global del lugar geométrico corresponderá a un objeto geométrico estudiado previamente: la recta. Aunque la justificación formal de que dicho lugar geométrico es una recta perpendicular al segmento *AB* puede basarse únicamente en argumentos propios de la geometría sintética, esto no será trivial ya que no es una demostración constructiva, recurre a la inclusión de conjuntos: si un punto *P* pertenece al lugar geométrico, entonces cualquier punto que se encuentre sobre la recta perpendicular al segmento *AB* que pase por *P*, también estará en el lugar geométrico.

El detalle sobre las UEI que intervienen en la solución se encuentra en el Anexo 3, problema 24.

Comportamientos esperados: Se espera que algunos alumnos consideren que la distancia *k* es la distancia entre *A* y *B* y formen el triángulo rectángulo con *A*, *B* y *P*. En ese caso, darán por respuesta una que no sería correcta según el problema.

En aquellos casos en los que interpreten correctamente los datos, será fundamental que conecten la condición dada verbalmente con la condición geométrica basada en el teorema de Pitágoras. El hecho que en el enunciado aparezcan expresiones como “la diferencia de los cuadrados de las distancias” deberá inducir a usar ese teorema, que, en términos cognitivos, corresponde a una conversión entre registros.

Al igual que en el problema anterior, la construcción de la solución se hará en una misma ventana gráfica pero requiere “alejarse” del segmento *AB* y construir un triángulo rectángulo en otro lugar del plano para luego “regresar” a las ubicaciones originales de A y B y trasladar distancias. La construcción del triángulo rectángulo requerirá de varias UEI como las descritas en el tercer problema.

Para aquellos alumnos que logren ubicar un par de puntos del lugar geométrico podría no resultar evidente la forma que tendrá el lugar geométrico. Deberán ubicar al menos tres puntos y hacerlo de manera exacta para que intuyan que se trata de una línea recta pues, de lo contrario, le asociarán otra curva.

Podrán emplear la opción *lugar* y obtener la recta (o semirrecta en caso desplacen sólo un punto de corte) para dar respuesta a cuál es la forma global del lugar geométrico. Si proceden de esa manera, será una señal de que han comprendido la relación entre m y n y los puntos del lugar geométrico.

No está prevista una puesta en común.

Caso IIc): $\boldsymbol{K \neq d(A,B)}$, $\boldsymbol{p}$=1 y $\boldsymbol{q}$=2

Ecuación particular: $d(A,P) + d(B,P) = K$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos A y B y un segmento de longitud $K \neq d(A,B)$. Haciendo uso de las herramientas de dibujo que ofrece CABRI, realicen las siguientes actividades:

a) Construyan un punto P en el plano tal que la suma de las distancias de P a cada uno de los puntos dados es el valor constante K. ¿Es el punto P único?
b) La unión de todos los puntos P que satisfacen la condición anterior, ¿corresponderá a alguna figura conocida?

Tiempo: 40 minutos

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Ordenador con software de geometría dinámica

Conocimientos matemáticos implicados:

Conocimiento previo: traslado de distancias

Conocimiento de aprendizaje: la elipse como lugar geométrico.

Análisis previo de la tarea: A diferencia de los últimos dos procedimientos en donde la condición del cuadrado de las distancias evocaba al teorema de Pitágoras, en este problema la condición lineal de las distancias deberá ser traducida en términos de dos segmentos cuya suma de longitudes es conocida (k). Esta tarea implicará una traducción entre el registro verbal y el figural por lo que corresponderá a una conversión.

Se espera que al llegar a esa situación, los alumnos recurran a la estrategia de construir dos lugares, que en este caso también serán dos circunferencias con centros en A y B y radios las longitudes de los segmentos determinados en el paso anterior, respectivamente. Luego, se espera que identifiquen puntos del lugar geométrico en la intersección de las circunferencias. La construcción de las circunferencias tendrá asociadas muy pocas UEI pero la identificación de soluciones en las intersecciones corresponde a una conversión entre el registro figural y el simbólico, transformación de mayor complejidad cognitiva.

También se deberá reconocer que los dos puntos construidos a través de la intersección de las circunferencias no son únicos; esto se hará evidente al buscar otros puntos del lugar geométrico variando los valores para m y n. Aquí se deberá establecer una conexión entre los valores que adoptan m y n, las nuevas circunferencias que se generan y los nuevos puntos del lugar geométrico. Esta actividad implica coordinar estos procesos a través de:

- Una conversión del registro simbólico al figural pues a medida que se eligen valores distintos de m y n cuya suma es k, se modifican las longitudes de los radios de las circunferencias

- Un tratamiento en el registro figural pues cuando se generan las nuevas circunferencias, también se obtienen nuevos elementos del lugar geométrico.

De otro lado, para identificar la forma global del lugar geométrico se hará necesario unir los distintos puntos hallados. Sin embargo, la forma que adopta el lugar geométrico ya no se podrá justificar sólo empleando elementos de geometría sintética pues se obtiene una elipse, curva que no es construible de manera exacta. Esto deberá generar la necesidad de recurrir a otra estrategia que sería resolver el problema considerando un sistema de coordenadas rectangulares.
El detalle sobre las UEI que intervienen en la solución se encuentra en el Anexo 3, problema 25.2.

Comportamientos esperados: Se espera que reconozcan que la condición suma de distancias debe traducirse en términos de segmentos y que no se requiere recurrir a un triángulo rectángulo. Más bien, deberán reconocer que la estrategia empleada en los últimos problemas, que consistía en encontrar puntos del lugar geométrico como intersección de dos lugares (dos circunferencias), también podría ser empleada en esta situación.

Sin embargo, se espera que los estudiantes no reconozcan la forma global del lugar geométrico, ya que no corresponderá a ninguno de los lugares geométricos identificados previamente. En algunos casos, podrán señalar que se trata de una circunferencia por ser la curva conocida que más se asemeja a la solución.

Al recurrir a la opción lugar que ofrece el programa de geometría dinámica, pueden surgir dudas cuando al variar K, manteniendo A y B fijos, no se generen puntos en la intersección de los lugares. Esto podrá dar lugar a comentar la necesidad de que $K \geq d(A,B)$ y que el caso particular de la igualdad genera una circunferencia.

Se espera que ante la sugerencia de estudiar el problema con coordenadas, surjan dificultades ya que se incrementará el trabajo algebraico y se haga necesaria la interpretación entre resultados algebraicos y su representación gráfica. Todas estas actividades implicarán convertir información simbólica en gráfica y viceversa de manera continua; por tanto, no debería ser trivial para los estudiantes. Sin embargo, un estudio que exija relacionar los resultados del registro algebraico con el gráfico favorecerá la comprensión del objeto lugar geométrico

Caso IId): $\boldsymbol{K \neq d(A,B)}$, *p*=1 y *q*=1

Ecuación particular: $d(A,P) - d(B,P) = K$

Enunciado: Consideren conocidos los puntos A y B y un segmento de longitud $K \neq d(A,B)$. Haciendo uso de las herramientas de dibujo que ofrece CABRI, realicen las siguientes actividades:

a) Construyan un punto *P* en el plano tal que la diferencia de las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* sea el valor constante *K*. ¿Es el punto *P* único?

b) La unión de todos los puntos *P* que satisfacen la condición anterior, ¿corresponderá a alguna figura conocida?

c) ¿A qué distancia de *A* se encontrará el punto del lugar geométrico ubicado en la recta *AB*? ¿Esa distancia está relacionada con el valor de *K* y con la distancia de *A* a *B*? Comente.

Tiempo: 40 minutos

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Ordenador con software de geometría dinámica

Conocimientos matemáticos implicados:

Conocimiento previo: traslado de distancias

Conocimiento de aprendizaje: la hipérbola como lugar geométrico.

Análisis previo de la tarea: Como en el procedimiento anterior, en este problema la condición lineal de las distancias deberá ser traducida en términos de dos segmentos cuya diferencia de longitudes es conocida (*K*), la construcción de la diferencia tiene asociadas muy pocas UEI. Sin embargo, en términos de transformaciones, esta tarea implicará una traducción entre los registros verbales y figural, lo que corresponderá a una conversión.

A partir de aquí se podrá recurrir a la estrategia de construir dos lugares empleada previamente. En ese caso también se construirán dos circunferencias, con centros en *A* y *B* y radios las longitudes de los segmentos determinados en el paso anterior (*m* y *n*=*m*+*K*), respectivamente. Luego se deberán identificar puntos del lugar geométrico en la intersección de las circunferencias. Como se ha dicho antes, esta tarea requerirá establecer conexiones entre las figuras, los puntos de intersección de estas y las soluciones del problema que fueron dadas verbalmente; lo que implica desarrollar actividades cognitivas complejas como la conversión.

Luego se deberá reconocer que los dos puntos construidos a través de la intersección no son únicos; esto se hará evidente al buscar otros puntos del lugar geométrico variando los valores para *m* y *n*. Aquí se deberá establecer una conexión entre dichos cambios y las nuevas circunferencias que deberán construirse e intersecarse. Como se ha trabajado con esta estrategia en problemas previos, se espera que los alumnos puedan recurrir a ella en este problema, a pesar de ser una actividad compleja pues se trata de una conversión.

Para identificar la forma global del lugar geométrico se hará necesario unir los distintos puntos hallados. La justificación de la forma que adoptará el lugar geométrico ya no se podrá realizar sólo con elementos de geometría sintética pues se trata de una hipérbola. Esta tarea, al igual que la anterior, justificará la introducción de un sistema de coordenadas.

El detalle sobre las UEI que intervienen en la solución se encuentra en el Anexo 3, problema 26.2.

Comportamientos esperados: Se espera que reconozcan que la condición *diferencia de distancias* se puede traducir en términos de segmentos y que ya no se requiere recurrir a un triángulo rectángulo. Los alumnos deberán ser capaces de hacerlo ya que en el trabajo previo de construcciones con regla y compás (construcción de operaciones aritméticas) se abordó un tipo de tarea relacionado con éste.

La estrategia empleada en los últimos problemas que consistía en encontrar puntos del lugar geométrico como intersección de dos lugares (dos circunferencias) deberá ser empleada aquí también.

Sin embargo, es posible que los estudiantes puedan no reconocer la forma global del lugar geométrico ya que la figura que resulta no está acotada y, además, no ha sido estudiada antes.

Comentarios sobre los cuatro casos descritos:

- Para la solución de estos problemas se debe recurrir a una nueva estrategia que requiera hacer construcciones auxiliares fuera del dibujo donde están los datos.

- Lo anterior implicará un incremento en el número de construcciones y por tanto de UEI; por ello, se propone incluir el uso de un programa de geometría dinámica. De esta manera, las construcciones serán exactas y el estudiante podrá centrar su atención en las estrategias que debe emplear y en el efecto que tendrá el modificar una determinada condición sobre los objetos que se van construyendo.

5.5. SOBRE LAS DIFICULTADES PREVISTAS EN TÉRMINOS DE UEI AL ABORDAR LAS TAREAS PROPUESTAS

Como se describió en el apartado 4.4.2., se definieron como UEI básicas en el marco geométrico las siguientes acciones:

UEI tipo 1: Construir una recta conociendo dos puntos de paso

UEI tipo 2: Construir una circunferencia con centro y radio conocido

UEI tipo 3: Construir un punto sobre un objeto construido previamente

UEI tipo 4: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente

Mientras que las siguientes acciones se definieron como UEI básicas en el marco algebraico:

UEI tipo 1: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso

UEI tipo 2: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio

UEI tipo 3: Resolver una ecuación lineal o cuadrática en una variable

UEI tipo 4: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, o dos ecuaciones cuadráticas o una ecuación lineal y otra cuadrática, con dos incógnitas

Las distintas tareas que formarán parte de los problemas planteados durante el desarrollo de esta investigación y otros que también forma parte de la propuesta didáctica se presentan en el anexo 2. Cada una de ellas ha sido analizada considerando las UEI presentadas en los marcos geométrico y algebraico.

Como resultado de ello, se tienen las tablas 5.7. y 5.8. en donde se detalla el número de UEI según los tipos definidos previamente, que intervienen al resolver cada uno de esos problemas.

Tabla 5.7. Descripción del número de UEI que intervienen al resolver las actividades propuestas en el contexto de la geometría sintética

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
1	Mediatriz	1	2		1	4
2	Punto medio	1	2		2	5
3	Perpendicular por un punto	1	3		2	6
4	Paralela en base a un paralelogramo	1	2	2	1	6
4	Paralela en base a una perpendicular	2	6		5	13
5	Distancia de un punto a una recta	2	3		3	8
6	Distancia entre dos rectas paralelas	2	3	1	3	9
7	Punto que divide a un segmento en una razón dada	4	7		7	18
8	Circuncentro	2	4		3	9
9	Bisectriz	1	3		3	7
10	Recta tangente por un punto sobre la circunferencia	2	3		2	7
11	Recta tangente por un punto exterior	4	3		3	10
12	12.1 Suma de números construibles	1	1			2
12	12.2 Diferencia de números construibles	1	1			2
12	12.3 Producto de números construibles	4	8		7	19
12	12.4 Cociente de números construibles	5	8		6	19
12	12.5 Raíz cuadrada de un número construible	3	6		6	15
13	Cuadrado cuya área coincida con la del rectángulo de lados a y b.	6	17		13	36
14	Cuadrilátero semejante a otro cuyas dimensiones se conocen	9	16		16	41
15	Triángulo conociendo la longitud de sus tres lados.		2		1	3
16	Triángulo conociendo un cateto	2	3	1	2	8
17	Triángulo conociendo un cateto y la hipotenusa	1	4		3	8
18	Triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los dos catetos.	2	4		3	9
19	19.1 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados				1	1
20	Triángulo conociendo algunos elementos	4	12		10	26
19	19.2 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados	3	9		7	19
21	21.1 Lugar geométrico descrito por puntos del plano que están sobre una recta dada y se encuentran a una distancia fija de un punto dado		1		1	2
21	21.2 Lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de una recta dada	3	9		7	19

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
22	Lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo APB sea recto en P, dados los puntos A y B.	1	3		2	6
23	Lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a cada uno de esos puntos es $K \neq d^2(A,B)$, dados los puntos A y B y el valor constante K.	3	5	1	3	12
24	Lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es K, con $K \neq d^2(A,B)$ y dados los puntos A y B y el valor constante K.	2	5	1	3	11
25	25.1 Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la suma de las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
25	25.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias de P a cada uno de esos puntos es K, con $d(A;B)<K/2$, dados los puntos A y B y el valor constante K.	1	2		1	4
26	26.1 a)Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la diferencia entre las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
26	26.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las distancias de P a A y de P a B es K, con $d(A;B)>K/2$, dados los puntos A y B y el valor constante K.	1	2	1	1	5

A partir de lo analizado, se puede predecir que las primeras tareas, tarea 1, 2 y 3, que permiten realizar construcciones elementales, deberían presentar poca dificultad para los estudiantes; mientras que aquellas como las tareas de construcción de productos y cocientes números podrían resultar más complejas.

Para la determinación del número de UEI en los casos en los que se requiera construir una recta paralela como parte de la solución, se ha considerado que ésta se obtiene a partir de la construcción de dos perpendiculares. Esto se ha hecho considerando que otro criterio que justificará las dificultades que presenten los alumnos al resolver estos problemas es el tipo de resultado previo que se debe emplear. En el caso de la construcción de paralelas empleando propiedades del paralelogramo se requieren menos UEI que cuando se construye en base a perpendiculares; sin embargo, es probable que los estudiantes prefieran construir la paralela empleando perpendiculares ya que se justifica con una propiedad trivial: la perpendicular de la perpendicular es paralela a la recta original.

Se debe tomar en cuenta que en las soluciones propuestas para los problemas 25.2 y 26.2 solo se logran construir dos puntos del lugar geométrico. Se espera que esos procedimientos resulten complejos para los alumnos ya que requieren de realizar diversas construcciones auxiliares para luego trasladarlas al plano original en el que se encontraban los datos.

Tabla 5.8. Descripción del número de UEI que intervienen al resolver las actividades propuestas en el contexto de la geometría analítica

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
1	Mediatriz	1	2		1	4
2	Punto medio	1	2		2	5
3	Perpendicular por un punto	1	3		2	6
4	Paralela en base a un paralelogramo	1	2	2	1	6
4	Paralela en base a una perpendicular	2	6		4	12
5	Distancia de un punto a una recta	1	3		3	7
6	Distancia entre dos rectas paralelas	1	3	1	3	8
7	Punto que divide a un segmento en una razón dada	2			1	3
8	Circuncentro	2	4		3	9
9	Bisectriz	3	3		3	9
10	Recta tangente por un punto sobre la circunferencia	2				2
11	Recta tangente por un punto exterior	3	3		3	9
15	Triángulo conociendo la longitud de sus tres lados.		2		1	3
16	Triángulo conociendo un cateto	2	3	1	2	8
17	Triángulo conociendo un cateto y la hipotenusa	1	4		3	8
18	Triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los dos catetos.	2	4		3	9
19	19.1 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados				1	1
19	19.2 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados	5	13	1	10	29
20	Triángulo conociendo algunos elementos	8	12	1	2	23
21	21.1 Lugar geométrico descrito por puntos del plano que están sobre una recta dada y se encuentran a una distancia fija de un punto dado		1		1	2
21	21.2 Lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de una recta dada	3	10	1	7	21
22	Lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo APB sea recto en P, dados los puntos A y B.		2			2

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
23	Lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a cada uno de esos puntos es $K \neq d^2(A,B)$, dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2
24	Lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es K, con $K \neq d^2(A,B)$ y dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2
25	25.1 Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la suma de las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
25	25.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias de P a cada uno de esos puntos es K, con $d(A;B)<K/2$, dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2
26	26.1 a)Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la diferencia entre las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
26	26.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las distancias de P a A y de P a B es K, con $d(A;B)>K/2$, dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2

Se consideró que los problemas 12, 13 y 14 no tenían una equivalencia en el marco algebraico por lo que no se realizó el análisis de los mismos en dicho marco.

A partir de lo mostrado en las tablas 5.6. y 5.7., se prevé que ocurra lo siguiente:

- Que las actividades relacionadas con mediatrices, puntos medios, perpendiculares, así como con lugares geométricos que satisfacen condiciones como la de los problemas 25.1 y 26.1 resulten triviales tanto en el marco geométrico como algebraico. Esto se debe a que en ambos marcos presentan un número similar de UEI y además dicho número es pequeño pues oscila entre 1 y 6.

- Que resultan igualmente complejas las actividades sobre triángulos como los problemas 19.2 y 20, ya que presentan un número grande de UEI que oscila entre 19 y 29.

- Que los estudiantes presenten dificultades similares, tanto en los marcos geométrico como algebraico, al abordar tareas sobre paralelas, rectas tangentes por un punto exterior, circuncentros, entre otras, ya que tienen un número de UEI similar.

- Que la actividad de construcción de bisectriz resulte menos compleja en el marco sintético que en el algebraico ya que en ese contexto se requieren de menos UEI.

- Que las actividades de construcción de tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, de triángulos rectángulos, de puntos que dividen un segmento en una razón dada o problemas de lugar geométrico como el 22, 23 y 24 resulten más complejos que sus equivalentes en el marco algebraico ya que en ese contexto se requieren de muchas menos UEI.

- Que los estudiantes reconozcan la superioridad de las técnicas algebraicas y opten por resolver esos problemas en el marco algebraico para luego interpretar la solución en el marco geométrico. Esto debería suceder ya que, a diferencia de lo que ocurre con la solución de las tareas 25.2 y 26.2 en el marco geométrico, en el marco algebraico se obtiene la ecuación de todo el lugar geométrico empleando muy pocas UEI. De otro lado, las dificultades de los estudiantes en el marco algebraico podrían explicarse porque se requieren de varias transformaciones de conversión y tratamiento.

5.6. REFLEXIONES DEL CAPÍTULO

Se diseñó una propuesta didáctica caracterizada por actividades que en una primera etapa permitirán que los alumnos se familiaricen con los procedimientos básicos de las construcciones con regla y compás. En una segunda etapa se contemplan situaciones para cuya solución resultarán más eficientes las herramientas que proporciona la geometría analítica, lo que justificará su uso.

La construcción de las situaciones que justifican la introducción de la geometría analítica se ha hecho de modo que cada una de ellas forme parte de una familia de problemas, donde la modificación de alguna de las variables didácticas consideradas, exigirá una modificación en la estrategia de solución.

Para un primer grupo de actividades las estrategias estarán asociadas a construcciones triviales con regla y compás: construir segmentos, rectas y circunferencias; mientras que para un segundo grupo se requiere de construcciones auxiliares, algunas similares a las empleadas previamente pero que luego deberán ser trasladadas al dibujo original, lo que incrementa su complejidad. Las situaciones finales, además de lo anterior, requerirán del empleo de técnicas algebraicas y gráficas para obtener la solución completa.

Los conocimientos previos involucrados y los que se requiere se generen para la solución de las tareas serán únicamente la noción de distancia entre puntos, el teorema de Pitágoras y la noción de lugar geométrico. Como parte del proceso de solución se hará necesario que los estudiantes establezcan conexiones entre las representaciones algebraicas de lugares geométricos elementales tales como la recta y la circunferencia y sus representaciones geométricas.

A partir de los elementos del marco teórico considerado, la noción de UEI y la teoría de registros de representación semiótica, se hicieron predicciones sobre los comportamientos esperados de los estudiantes cuando se enfrenten a la familia de problemas propuesta para justificar la introducción de la geometría analítica.

Todas las tareas propuestas, tanto para los problemas de construcción con regla y compás como para justificar la introducción de la geometría analítica fueron analizadas teniendo en cuenta el concepto de UEI. Esto permitió reconocer aquellas actividades que podrían resultar más complejas por requerir de un número grande de UEI así como aquellas que, a pesar de emplear pocas UEI podrían presentar dificultades para los estudiantes porque exigirían emplear propiedades geométricas o realizar construcciones auxiliares fuera del plano de dibujo inicial.

Se han identificado problemas en donde es posible establecer una correspondencia entre cada paso en geometría sintética y cada paso en geometría analítica. Sin embargo, en otros casos no ha sido posible establecer dicha relación.

Se han presentado problemas en donde el tratamiento sintético es más simple que el algebraico y otros en los que ocurre lo contrario. Así, en varios problemas sobre lugar geométrico se vio que el razonamiento algebraico resulta más efectivo que el sintético, mientras que en tareas de construcción de triángulos, las soluciones en el marco geométrico se pueden describir con menos UEI que las soluciones en el marco sintético.

Se ha reconocido que actualmente en la formación de arquitectos se plantean tareas como determinar la bisectriz o la recta tangente a una circunferencia trazada desde un punto exterior, el énfasis está puesto en procedimientos dentro del marco algebraico. Como esos procedimientos requieren de muchas transformaciones, no contribuyen a otorgarle sentido al procedimiento realizado.

La situación descrita contrasta con lo que se plantea realizar en las soluciones del margo geométrico, en donde las técnicas sintéticas son mucho más *transparentes* y su continua referencia al contexto geométrico favorece la comprensión.

Finalmente, se tiene que aunque en muchos casos es posible establecer un paralelismo entre los elementos que describen el procedimiento algebraico y los elementos que describen el procedimiento sintético, actividad que contribuiría a su comprensión, ésta no es una práctica usual en los procesos de enseñanza. Se hace necesario incluir este tipo de tareas en la docencia.

CAPÍTULO 6

DESCRIPCIÓN DE LOS CICLOS DE INVESTIGACIÓN

A continuación se describe lo ocurrido durante la etapa experimental del trabajo, lo que corresponde a la sétima etapa de la metodología de investigación adoptada. La forma en la que se llevó a cabo cada uno de los cinco ciclos de experimentación se presenta teniendo en cuenta las fases consideradas en la metodología de investigación-acción: planificación, ejecución, análisis y reflexión. Se analiza la pertinencia de las situaciones planteadas tanto para abordar las construcciones exactas, la noción de lugar geométrico y la pertinencia de situaciones que justificarían la enseñanza de la geometría analítica.

6.1. SOBRE EL CONTEXTO EN EL QUE SE DESARROLLÓ LA INVESTIGACIÓN

Sobre la universidad: El centro donde se desarrolló la investigación fue una universidad privada, situada en la ciudad de Lima, Perú. Este centro de estudios es reconocido como la primera universidad privada del país. Inició sus actividades en 1917 pero la Facultad de Arquitectura y Urbanismo, lugar donde se lleva a cabo el trabajo de investigación, fue creada en el año 2001.

La mayoría de los estudiantes de esta universidad proviene de familias que poseen estudios básicos o superiores y corresponden a niveles socioeconómicos medio o alto.

Los cursos se organizan en los dos cuatrimestres ordinarios del año. El año lectivo coincide con el año según el calendario; así por ejemplo, los cuatrimestres del año 2013 se denominan 2013-1 (periodo del 15 de marzo-al 15 de julio) y 2013-2 (periodo del 15 de agosto-al 15 de diciembre).

Los cuatrimestres en los que se realizó la experimentación fueron los siguientes: 2011-1, 2011-2, 2012-1, 2013-1 y 2013-2.

Sobre los estudiantes: Los estudiantes que participaron de las experimentaciones cursaban una primera asignatura de matemática, denominada Matemática 1, en su primer año en la universidad.

Para acceder a seguir estudios en esta facultad, los estudiantes debieron rendir un examen de admisión al centro e ingresaron sólo aquellos que ocuparon las vacantes ofrecidas. En esta universidad, la facultad de arquitectura es la que tiene la mejor tasa de selección por lo que se puede decir que los grupos de alumnos que participaron en las experimentaciones tenían un muy buen rendimiento académico; además, estaban muy motivados por iniciar sus estudios universitarios.

Sobre los grupos considerados en los cinco ciclos de investigación se tiene que estos fueron homogéneos en cuanto al contexto en el que se ubicaban, la cantidad de estudiantes por sexo y los conocimientos previos que poseían pero heterogéneos al interior en cuanto a la edad ya que estas oscilaban entre los 16 y 19 años.

El número de estudiantes que participó cada ciclo a ciclo fue variable, como se muestra en el siguiente gráfico. Esto respondió al número de secciones que se ofreció en cada cuatrimestre.

Tabla 6.1.Número de estudiantes matriculados en cada ciclo

	CICLO I	CICLO II	CICLO III	CICLO IV	CICLO V
Número de alumnos matriculados	36	44	35	30	36

Sobre la profesora: La profesora fue la investigadora de este trabajo; había impartido la asignatura Matemática 1 dos veces antes de iniciar la investigación y tenía más de diez de años de experiencia en la docencia universitaria con estudiantes de ingeniería.

Sobre la organización de la experimentación: Las actividades diseñadas para la investigación se incorporaron como parte del programa de la asignatura. La secuencia de actividades se implementó durante cuatro semanas; en cada semana se realizaron dos sesiones, una de trabajo en clase con una duración de tres horas y otra de trabajo en sala de práctica o laboratorio que duró dos horas. En total se dedicó alrededor de veinte horas de trabajo en cada una de las experimentaciones.

Sobre los contenidos abordados: Se consideró un conjunto de situaciones en contexto de geometría sintética y otras actividades que reforzaran la conexión entre problemas de geometría analítica y geometría sintética a través de la noción de lugar geométrico.

Sobre las variables consideradas: Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, para la definición de la familia de problemas que debía justificar la introducción de la geometría analítica, se han considerado algunas variables relacionadas con las actividades propuestas (los valores de p, q y K en la familia de problemas construida) y otras variables que se fueron modificando ciclo a ciclo (el uso del programa de geometría dinámica, el uso de los instrumentos regla y compás, así como la modalidad de trabajo).

Sobre las estrategias de recolección de datos: Dado que el trabajo fue fundamentalmente experimental, se emplearon estrategias que permitieron recoger información sobre la forma en la que se desarrolló la experiencia.

Se consideraron los siguientes instrumentos para el registro de información:

- El diario de la profesora investigadora en el que se registraron las actividades de enseñanza aprendizaje propuestas.
- Los cuestionarios con las respuestas escritas de los estudiantes a las principales actividades planteadas.
- Las grabaciones de las sesiones desarrolladas, especialmente las conversaciones que tuvieron los alumnos y la profesora en relación a la familia de problemas propuesta.
- Las entrevistas a los asistentes de docencia que participaron de la implementación como observadores y las discusiones con otros docentes de la asignatura con quienes se validaron las actividades.

6.2. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DESARROLLADOS

En este apartado se detallan las cuatro fases consideradas en cada ciclo, según la metodología de investigación-acción; éstas son las etapas de planificación, ejecución, análisis y reflexión. Para ello se tendrá en cuenta la información registrada en el diario de la profesora investigadora y las grabaciones de lo ocurrido en el aula.

6.2.1. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL CICLO I

Planificación

Se planteó conectar el tema de números racionales con el de construcciones con regla y compás. Se eligieron algunas construcciones elementales con la finalidad de que los estudiantes se familiarizaran con el uso de estos instrumentos. Estos problemas se seleccionaron teniendo en cuenta los resultados del estudio histórico.

En otro momento se planteó trabajar la noción de lugar geométrico y para ello se plantearon tres situaciones.

Sobre la primera situación planteada: *determinar el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia dada de una recta dada*, y la segunda: *dados los puntos A y B, determinar el lugar geométrico formado por los puntos del plano que generan triángulos rectángulos APB, rectos en P,* se consideró que los alumnos podrían identificar la forma de estos dos conjuntos y que los construirían sin dificultad usando las construcciones básicas con regla y compás.

De otro lado, se consideró que la tercera situación *Determinar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cuadrado de las diferencias de sus distancias a dos puntos fijos fuera conocida*, sería la que generaría la necesidad de introducir la geometría analítica dado que los estudiantes no tendrían argumentos suficientes para justificar la forma global del lugar geométrico.

Para la introducción de la geometría analítica no se contempló enmarcar las situaciones dentro de una familia de problemas en el sentido descrito en el capítulo anterior. Lo que se hizo fue seleccionar un problema cuya solución con regla y compás pareciera compleja de modo que siguiendo un razonamiento propio de la geometría analítica, su solución fuera más directa.

Todas las actividades fueron propuestas para ser trabajadas con lápiz y papel.

Implementación

En relación a las construcciones con regla y compás:

En una primera sesión, la profesora introdujo el uso de la regla y el compás como herramientas que permitían construir algunos objetos de manera exacta. Se dio la definición de punto construible como aquel que se puede obtener de alguna de las siguientes formas: Como la intersección de dos rectas, como la intersección de una recta y una circunferencia, o como la intersección de dos circunferencias

Se trabajaron algunas construcciones elementales tales como el trazado de paralelas en base a un paralelogramo, el trazado de la mediatriz de un segmento, la división de un segmento en una razón dada, entre otras construcciones que se señalaron que eran construcciones elementales.

Los estudiantes trabajaron durante una sesión resolviendo diversos problemas sobre construcciones con regla y compás, empleando para ello las construcciones elementales. Una de las construcciones solicitadas a los estudiantes fue la representación geométrica de la multiplicación de números construibles. Ellos trabajaron individualmente pero contaron con el asesoramiento de la profesora y de dos asistentes de docencia. El trabajo se realizó con lápiz y papel.

En una siguiente sesión, previa a la introducción de lugar geométrico, los estudiantes desarrollaron actividades que requerían conocer la definición de circunferencia, así como sus principales propiedades entre las que estaba la propiedad del ángulo inscrito.

En la próxima sesión, los alumnos trabajaron en parejas en torno a las tres situaciones mencionadas en la fase de planificación cuyo objetivo era introducir la noción de lugar geométrico. Se plantearon preguntas para explorar si los estudiantes concebían el lugar geométrico como un conjunto de puntos o sólo como un punto, si reconocían la forma global que adoptaba el conjunto y si garantizaban que el conjunto incluyera a todos los puntos que satisfacían la condición o si sólo consideraban algunos.

Luego de trabajar las dos primeras situaciones, se hizo una puesta en común de las repuestas que habían dado los estudiantes a las situaciones planteadas, luego de lo cual la profesora dio la siguiente definición: *Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen una condición geométrica dada previamente.*

La tercera situación se presentó con el siguiente enunciado:

a) *Consideren dos puntos fijos A y B y una distancia constante* a^2. *Construyan puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a los puntos dados sea la constante* a^2.
b) *¿Qué forma tendrá lugar geométrico de los puntos P determinados en la parte* a)*? ¿Corresponde a alguna curva o figura conocida?*

Sólo 10 de las 14 parejas que iniciaron el trabajo en esta sesión intentaron resolverla, cuatro de las cuales plantearon una relación pitagórica entre tres números, siendo uno de ellos a pero sin poder relacionar luego la expresión con los puntos A y B. Otras tres parejas plantearon una relación pitagórica entre a, $d(A,P)$ y $d(B,P)$ y asumieron que $d(A,B)=a$, sin que esto fuera dato. Sin embargo, a pesar de este supuesto, no concluyeron lo que de él se desprendía: Que AB sería un cateto de un triángulo rectángulo ABP y que el lugar geométrico estaría dado por una recta perpendicular al segmento AB por el punto B. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 6.1.

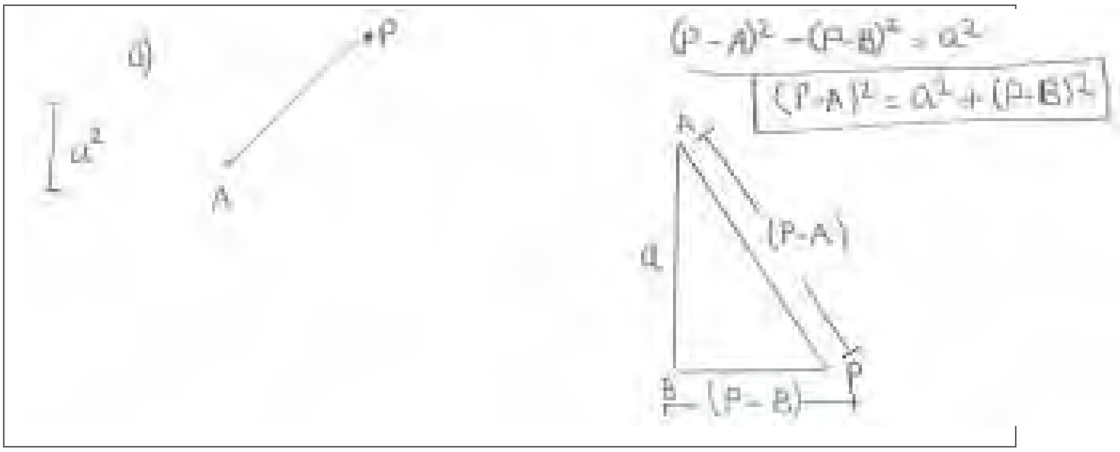


Figura 6.1. Solución de la pareja 4 del ciclo I

Las otras tres parejas sí consideraron que *a* no tenía por qué coincidir con el valor de *d(A,B)* y construyeron triángulos rectángulos con lados *a*, *m* y *n*, considerando que *m* y *n* podían tomar distintos valores. Incluso, en dos de los casos construyeron circunferencias con centros en *A* y *B* y radios *m* y *n* e identificaron como puntos del lugar geométrico las intersecciones de las dos circunferencias. Uno de esas soluciones se muestra en la figura 6.2.

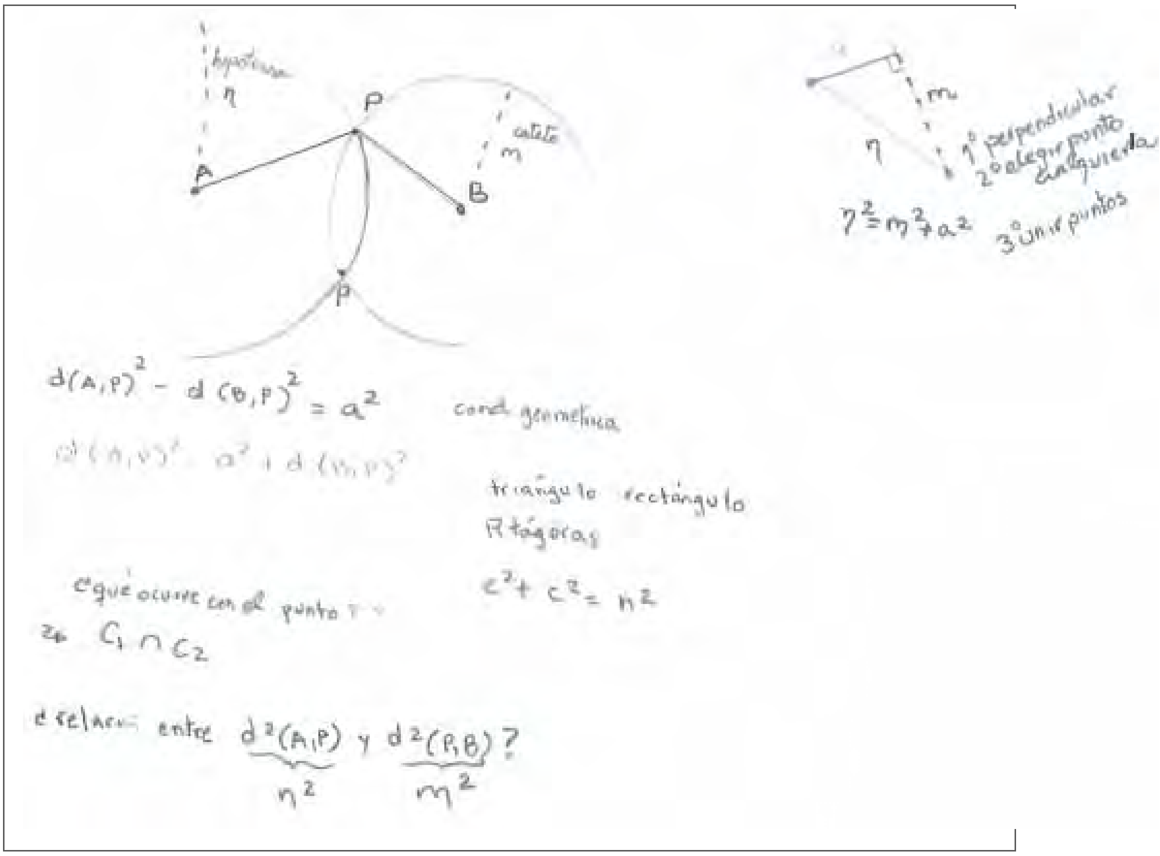


Figura 6.2. Solución de la pareja 1 del ciclo I

Sin embargo, pese a que estas tres parejas mostraron tener una visión dinámica de lugar geométrico, no pudieron concebirlo globalmente. No consideraron como estrategia de solución para determinar la forma del lugar geométrico el asignar coordenadas a los datos; tampoco resolvieron la parte c) del enunciado lo que les hubiera dado indicios de cómo responder la pregunta b).

Estos resultados muestran que el diseño de la actividad no fue apropiado; hubo restricciones de tiempo y muchos alumnos no supieron interpretar la condición dada para relacionar adecuadamente todos los datos del problema.

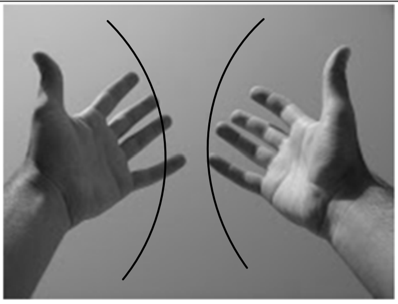
En una siguiente sesión, se propuso a los estudiantes retomar la última situación sobre lugar geométrico planteada en la sesión previa. Después de 10 minutos de trabajo en parejas, se procedió a explicar a la clase cómo se podrían construir dos puntos específicos. Se propuso para ello seguir el procedimiento descrito en la solución del problema IIb), presentado en el capítulo anterior y que tiene asociado el siguiente modelo:

$$d^2(A;P) - d^2(B;P) = K \quad con \quad K \neq d^2(A,B)$$

Ante la explicación brindada hubo preguntas por parte de los estudiantes que evidenciaron que el procedimiento les resultaba novedoso pero también, en algunos casos, no había sido comprendido. Ante las dudas manifestadas, se explicó nuevamente la idea central de la prueba, poniendo énfasis en que la relación entre AP y BP estaba garantizada por la forma como había sido construido el triángulo auxiliar de lados m, n y a. Se comentó que la elección de los segmentos m y n había sido arbitraria y que se pudo considerar segmentos con otras longitudes de modo que también se generaran triángulos rectángulos. Se construyeron otras circunferencias con centros en A y B y radios m y n, respectivamente.

Al preguntar por la forma que adoptaba la curva que unía los puntos del lugar geométrico, los alumnos dieron las siguientes respuestas:

- *Haciendo gestos con las manos:*



- Verbalmente manifestaron:

  Alumno 1: *Será una recta;* Alumno 2: *No se sabe*

Se planteó que, dado que en ese caso no era evidente la forma que adoptaba el lugar geométrico pues no habían dado ningún argumento para ello, sería pertinente recurrir a la geometría analítica para salir de dudas.

Se notó mucho interés por parte de los alumnos por conocer finalmente la forma que adoptaba el conjunto de puntos que satisfacía la condición dada. Fue en ese momento que se replanteó el problema en un contexto algebraico y mostraron sorpresa cuando se encontró que el lugar geométrico era una recta.

Posteriormente se desarrollaron cuatro sesiones para trabajar elementos propios de la geometría analítica, tal como se había hecho en otros cursos.

Análisis

Las actividades de geometría sintética permitieron identificar si los estudiantes distinguían entre una construcción exacta y una aproximada. La construcción de paralelas se constituyó en un problema complejo para los estudiantes.

Asimismo, el incluir como un pedido explícito en las preguntas que explicaran por escrito las construcciones realizadas para dar una respuesta, obligó a los alumnos a realizar por lo menos una conversión del registro figural a la lengua natural. Muchos de ellos justificaron sus procedimientos geométricos a través de cálculos algebraicos; recurrieron a resultados geométricos, como el teorema de Tales, para justificar su solución en algunos casos explícita y en otros implícitamente.

Sobre las respuestas a las situaciones propuestas para introducir la noción de lugar geométrico, se encontró que las dos primeras cumplieron su función. Sin embargo, la última situación no fue abordada con éxito por la mayoría de estudiantes. Los pocos que lo hicieron, asumieron que la solución se encontraba construyendo triángulos rectángulos con un cateto en el segmento *AB*, es decir asumieron que el dato *a* correspondía a la distancia entre *A* y *B*, lo que no era correcto. En esos casos, trataron de reproducir una estrategia empleada previamente pero que no era útil en esta situación. De otro lado, cuando los estudiantes reconocían que el triángulo rectángulo no tenía vértices en *A*, *B* y *P*, buscaban una solución algebraica y dejaban de lado las construcciones geométricas. Por ejemplo, trataban de factorizar la diferencia de los cuadrados de las distancias, lo que hacía que luego no pudieran relacionar esta nueva expresión con la figura.

Reflexión

Se trabajaron situaciones y procedimientos de geometría sintética, aunque sin una organización previa de las mismas. Se hace necesaria una reorganización de las actividades consideradas, de modo que los estudiantes puedan reconocer qué caracteriza a una construcción con regla y compás e identifiquen las construcciones elementales.

Dado que la última situación para introducir la noción de lugar geométrico se encontró muy lejos del alcance de los estudiantes, se deben hacer modificaciones que contribuyan a que puedan abordarla. El enunciado debería modificarse de modo que no se asuma que el valor constante a puede ser en algún caso la $d(A,B)$, y se debería eliminar el apartado relativo a resolver el problema de forma algebraica mediante el uso de coordenadas.

Si bien se notó un dominio aceptable de las técnicas algebraicas, se concluyó que el trabajo realizado no había contribuido realmente a que los alumnos pudieran establecer conexiones entre el trabajo sintético y analítico. El que algunos estudiantes hubieran resuelto adecuadamente un problema con técnicas de geometría analítica pero que no trataran de buscar los procedimientos equivalentes para resolver esa misma pregunta en el contexto sintético, confirma el supuesto de que la conversión de representaciones en uno y otro registro no es una tarea trivial.

6.2.2. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL CICLO II

Planificación

Dado que el conjunto de problemas de construcciones era muy amplio y los procedimientos de solución eran muy variados, se optó por organizar las situaciones propuestas, centrándose en dos *tipos de tareas*, de modo que cada tipo reuniera problemas con contextos similares:

- El tipo de tareas I correspondió a la representación de números en la recta real empleando regla y compás (problemas 13-15 del anexo 3).
- El tipo de tareas II correspondió a construir triángulos teniendo como datos algunos de sus elementos (problemas 16-21 del anexo 3).

En cuanto a las tareas propuestas para introducir la noción de lugar geométrico, se planteó emplear nuevamente las tres situaciones de la experimentación anterior, colocando un dato adicional en el problema IIb), del segundo bloque de problemas presentado en el capítulo anterior, para evitar que asumieran que la distancia entre A y B era el dato a.

No se vio necesario considerar actividades prerrequisitos para los problemas de lugar geométrico, como se había hecho en la experimentación anterior, pues la propiedad que se debía usar, la del triángulo inscrito en una circunferencia con un lado como uno de sus diámetros, había sido empleada recientemente en la construcción de la raíz cuadrada de un número construible.

Estaba previsto que todo el trabajo se hiciera con lápiz y papel y de manera individual.

Implementación

Los conjuntos numéricos (tema que se había tratado en clases previas) y las construcciones con regla y compás (tema que debía introducirse) se conectaron a través de la problemática *cómo representar en la recta números con regla y compás*. Así, luego de ubicar las representaciones exactas de números enteros en la recta sin mayor dificultad, se planteó ubicar 3/7 o $\sqrt{5}$, de manera exacta. Este problema justificó la introducción de las construcciones con regla y compás, empezando con algunas construcciones básicas tales como la construcción de paralelas y perpendiculares. Para generalizar los procedimientos, se planteó representar números cualesquiera que resultaran de realizar una combinación finita de operaciones como $+,-,\times,:$ y $\sqrt{}$ con números cuya representación fuera construible.

Se plantearon preguntas relacionadas con los tipos de tareas I y II de modo que los estudiantes aplicaran las construcciones elementales en dos contextos específicos. Esto contribuyó a que los estudiantes fueran adquiriendo mayor seguridad pues se redujo el conjunto de construcciones geométricas elementales que podían emplear, así como el conjunto de problemas en donde debían aplicarlas.

Sobre las sesiones relacionadas con la noción de lugar geométrico, se procedió de la misma forma que en el ciclo anterior pero modificando el enunciado de la situación que generó confusión, de modo que ahora fuera un dato explícito que $a \neq d(A,B)$.

Así, el enunciado que recibieron los estudiantes fue el siguiente:

Consideren dos puntos fijos A *y* B *y una distancia constante* a^2 *de modo que* $a \neq \mathrm{d(A,B)}$.
a) Construyan un punto P *tal que la diferencia de los cuadrados de las distancias de* P *a los puntos dados* A *y* B *sea la constante* a^2.
b) ¿Es el punto P *construido en a) único?*
c) ¿Qué forma tendrá el lugar geométrico de los puntos P *que satisfacen la condición dada en a)? ¿Corresponderá a alguna curva o figura conocida?*

En esta ocasión, la mayoría de parejas abordó el problema. La condición explícita de que a no podía ser la $d(A,B)$ hizo que disminuyera el número de parejas que asumió que $a=d(A,B)$; aun así algunas todavía lo asumieron como se muestra en la figura 6.3.

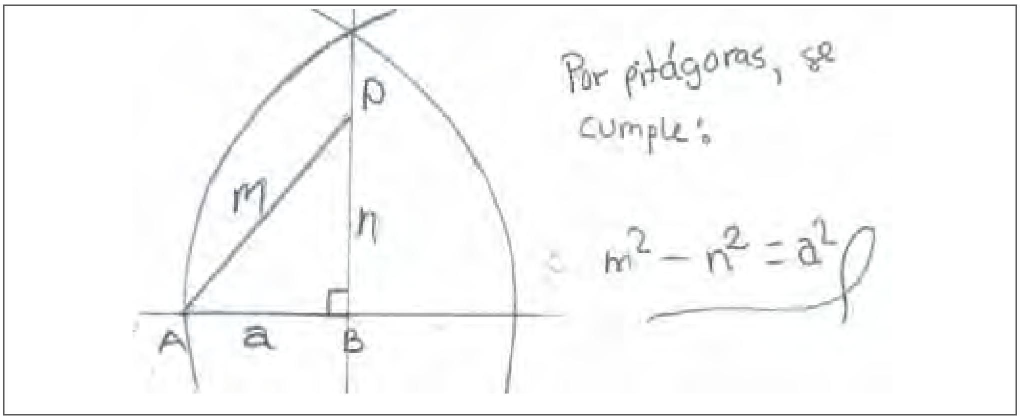


Figura 6.3. Solución de la pareja 13 del ciclo II

Es interesante notar lo fuertemente arraigada que estuvo la idea de que los puntos del lugar geométrico formaban triángulos rectángulos con un lado *AB*. La solución de la figura 6.4. es una muestra de que, a pesar de que esta pareja hizo la construcción adecuada y trasladó las distancias *m* y *n* correctamente, insistió en que *APB* formaba un triángulo rectángulo, como se observa en la siguiente figura. Estos alumnos mostraron poseer una configuración cognitiva que denota un anclaje de lo discursivo a lo visual: Asocia el dibujo de un triángulo rectángulo a un enunciado que hace referencia a suma de cuadrados.

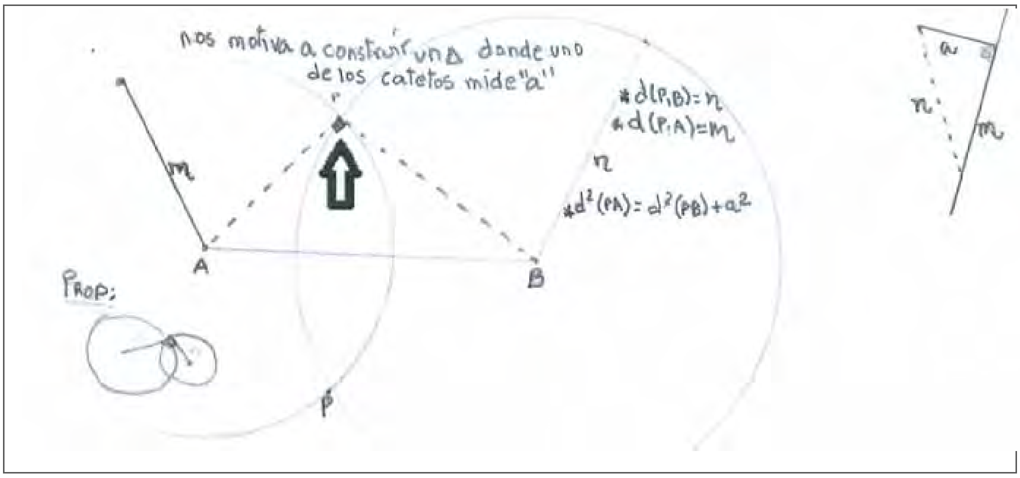


Figura 6.4. Solución de la pareja 12 del ciclo II

De otro lado, se encontraron algunas parejas escribieron en su solución simbólica que a^2=d(A,B), aunque en sus representaciones figurales consideraron que a=d(A,B). La figura 6.5. que viene acompañada de un planteamiento y desarrollo simbólico, ilustra esta situación.

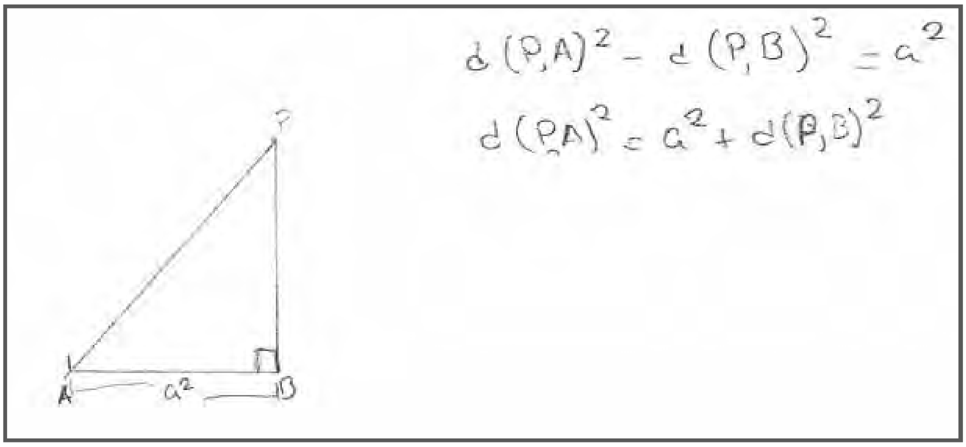


Figura 6.5. Solución de la pareja 17 del ciclo II

Finalmente, en este ciclo 4 parejas interpretaron correctamente los datos del problema y llegaron a encontrar dos puntos del lugar geométrico.

Dado que el número de estudiantes que manifestaron dificultades para encontrar dos soluciones al problema todavía era alto, la situación fue retomada en la siguiente clase donde la profesora procedió de manera similar a como lo hizo en la experimentación anterior.

Análisis

En cuanto al dominio de las técnicas sintéticas, se obtuvieron mejoras; los alumnos distinguieron cuándo una construcción era exacta de cuándo no lo era. Sin embargo, se observó la tendencia de emplear casos particulares para justificar resultados que debían ser generales. Por ejemplo, asignaban valores específicos para justificar que cualquier número racional era construible o asumían que el triángulo era isósceles cuando se pedía construir la bisectriz de un ángulo de un triángulo cualquiera.

De otro lado, la construcción de paralelas de manera exacta siguió siendo un problema complejo para los estudiantes que sólo la realizaban de manera aproximada en problemas con un gran número de UEI.

Sobre las situaciones empleadas para introducir la noción de lugar geométrico, las dos primeras cumplieron su objetivo. No obstante, respecto a la situación sobre lugar geométrico que debía ser el nexo entre la geometría sintética y geometría analítica, se puede decir que no cumplió su papel pues siguió sin estar al alcance de la mayoría de los estudiantes.

Según los resultados del ciclo anterior, se pensó que la dificultad de la pregunta radicaba en que los alumnos habían supuesto que el dato *a* era la distancia entre los puntos *A* y *B*, y que si se salvaba esto, podrían centrarse en la estrategia del traslado de distancias; sin embargo, esto no fue así.

Luego de hacer las modificaciones en el enunciado, ya no hubo confusiones sobre qué representaba *a*, pero tampoco lograron plantear una estrategia para hallar puntos del lugar geométrico ya que no pudieron establecer conexiones entre los datos. Se atribuye esta dificultad a que la solución del problema requería de varias UEI y a que varios trazos debían realizarse fuera del área donde se encontraban los datos iniciales; ello exigía realizar una actividad de reconfiguración. Además, en ninguno de los problemas de construcciones estudiados previamente había sido necesario emplear una estrategia similar a esta.

Reflexión

Se ha confirmado que la situación propuesta para introducir la geometría analítica resulta de alta complejidad cognitiva; esto se debe fundamentalmente al gran número de UEI que intervienen y a los múltiples procesos de coordinación entre representaciones que deben llevarse a cabo. Debería considerarse la incorporación de un programa de geometría dinámica para resolver dicha situación ya que, de esa manera, los alumnos podrían reconocer el efecto que tiene el modificar alguna de las condiciones en la figura que se genera como lugar geométrico.

Por otro lado, respecto a que la pertinencia de la tercera situación para justificar el recurrir a la geometría analítica, se vio que esto no era cierto en el sentido estricto ya que el problema también podía resolverse con regla y compás pues el lugar geométrico era una recta. Lo que ocurría era que la justificación sintética de la forma que éste adoptaba no era trivial y el problema era mucho más sencillo si se abordaba desde la perspectiva algebraica. Quedaba pendiente entonces ampliar este problema a otro para el que el uso de la regla y el compás resultará realmente insuficiente.

Se planteó recién en este ciclo buscar algunas similitudes entre las condiciones geométricas que habían generado las tres situaciones sobre las que se venía trabajando la noción de lugar geométrico. Podría pensarse en que todas ellas fueran casos particulares de una situación más general.

6.2.3. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL CICLO III

Planificación

Se mantuvieron los problemas de construcciones con regla y compás empleados en el ciclo previo, organizados en los dos tipos de tareas definidos

Sin embargo, por primera vez se contempló la incorporación de un programa de geometría dinámica que complementara el trabajo con lápiz y papel. Esto se hizo con la finalidad de que los estudiantes pudieran realizar construcciones exactas de mayor dificultad, es decir, con un mayor número de UEI, aprovechando las construcciones predeterminadas que ofrecía el programa, tales como recta perpendicular, recta paralela, etc. De esta manera, se pondría especial énfasis en la justificación de los procedimientos seguidos, basados en las propiedades de los objetos geométricos involucrados.

Así, para el trabajo de situaciones en contextos sintéticos, además del trabajo con lápiz y papel, se diseñaron actividades para ser desarrolladas de manera individual haciendo uso del programa CABRI.

Las actividades sobre lugar geométrico se rediseñaron. Las tres situaciones de lugar geométrico se reformularon y se incorporó una nueva que hacía referencia a una suma de cuadrados (Caso IIa).

La situación central sobre lugar geométrico seguiría siendo la que hacía referencia a una diferencia de cuadrados igual a una constante pero se redefinió para ser tratada en el laboratorio de cómputo. Se esperaba que al contar con un recurso tecnológico, la construcción de los puntos del lugar geométrico que satisfacían la situación central, se pudiera realizar con menos UEI (al menos explícitamente), ya que las opciones que ofrecía CABRI permitirían reducir los pasos en relación a los que debían seguirse con lápiz y papel. De esta manera, los estudiantes podrían centrar su atención en la relación dinámica existente entre los elementos construidos, así como en la justificación de sus procedimientos, ya que la exactitud estaba garantizada.

Respecto a la forma en la que se abordaría esta última situación con las opciones del programa de geometría dinámica, en esencia, sería con la misma estrategia empleada con lápiz y papel. Sin embargo, no se tendría la duda de cuál sería la forma del objeto construido ya que al trazar varios puntos, se observaría que éstos estarían alineados. Después vendría de manera natural el pedido de una justificación formal de que, efectivamente, se trataría de una recta. En ese momento se podría introducir la geometría analítica como medio que permitiría justificar la forma global.

Implementación

Tal como se había hecho en las experimentaciones anteriores, una primera parte del trabajo se desarrolló en el aula. Durante el desarrollo de ésta, la profesora presentó lo que era construir con regla y compás y los estudiantes realizaron construcciones con lápiz y papel. Luego, los estudiantes trabajaron en el laboratorio de cómputo y se familiarizaron con las opciones de construcción que ofrecía el programa CABRI; ellos realizaron varias construcciones elementales y otras relacionadas con los dos tipos de tareas tipos.

En una nueva sesión en el laboratorio de cómputo, se pidió a los alumnos que trabajaran en parejas. Esto se hizo para promover la comunicación entre los estudiantes y que sintieran la necesidad de formular de manera clara sus repuestas para que éstas fueran comprendidas por su compañero.

Los estudiantes trabajaron varias situaciones que introducían la noción de lugar geométrico y pudieron explorar la forma global que adoptaban las figuras correspondientes a los lugares geométricos descritos en enunciados verbales, empleando para ello la herramienta informática.

Las primeras actividades sobre lugar geométrico fueron trabajadas sin dificultad por los alumnos. Ante los resultados obtenidos en los ciclos previos, se optó porque los alumnos abordaran la última situación con ayuda de CABRI. El enunciado se modificó y se introdujo *k* para denotar la distancia que antes se había denotado por *a*, para evitar que asociaran este valor a la longitud del segmento *AB*.

> *Consideren conocidos los puntos* A *y* B *y el valor constante* k*. Un punto P satisface la condición de que la diferencia de los cuadrados de las distancias de dicho punto a los puntos* A *y* B *es* $\mathbf{k^2}$*. La distancia entre A y B no es* k.
> *a) Construyan, haciendo uso de las opciones que ofrece el programa CABRI, un punto P que satisfaga la condición dada.*
> *b) ¿Es el punto* P *construido en a) único?*
> *c) ¿Qué forma tendrá el lugar geométrico de los puntos* P *que satisfacen la condición dada en a)? ¿Corresponderá a alguna curva o figura conocida?*

Fue una sorpresa encontrar que 11 de las 17 parejas no pudieron abordar el problema a pesar de contar aparentemente con más recursos tales como el programa informático. Al parecer, les resultó complejo traducir la condición geométrica dada en lengua natural en una figura que la satisficiera. Además, según se tiene registrado, se contó con muy poco tiempo para desarrollar esta actividad.

Por otro lado, dos parejas hicieron trazos con los que mostraban que habían entendido la condición geométrica dada pero, tal como se muestra en la figura 6.6., no pudieron trasladar esta información a una figura en donde además aparecieran los puntos *A*, *B* y el segmento de longitud *k*.

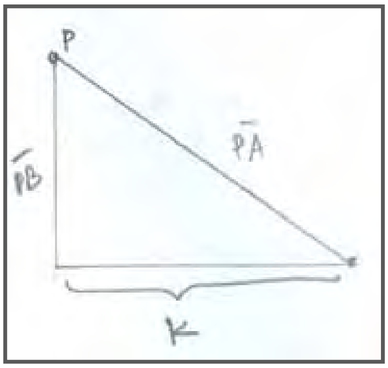


Figura 6.6. Solución de la pareja 8 del ciclo III

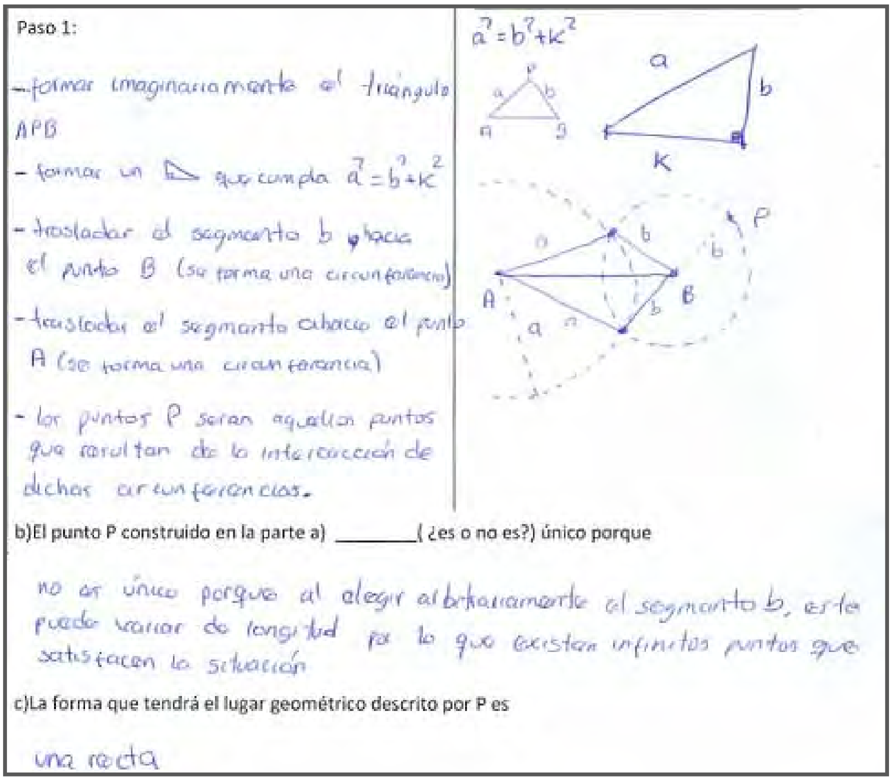
Cuatro parejas sí determinaron puntos del lugar geométrico; aunque ante el requerimiento de identificar la forma que éste adoptaba, dos de ellas no respondieron la pregunta, una señaló que se trataba de una recta y la otra indicó que se trataba de dos rectas.

A continuación se presenta la transcripción del dialogo sostenido con una de las parejas que abordó el problema. En ella se puede notar de qué manera la profesora interactúa con la pareja de alumnas, haciéndoles preguntas para que relacionen cada paso que realizaban. Esta pareja logró identificar un par de puntos del lugar geométrico y reconoció que había más, pero no hizo un estudio global de la figura que se genera con ellos.

Profesora: *¿Qué es lo que te dan en el problema? [La profesora lee el enunciado] Consideren conocidos los puntos* A *y* B *y* k*… En esta relación que han planteado [señalando la relación* $\mathrm{a}^2 = k^2 + \mathrm{b}^2$ *que los alumnos habían escrito] ¿qué se conoce?*
Alumna: *Conocemos* k
Profesora: *Hagamos una figura. No usen esta figura [señalando a la que tienen a un lado con el segmento AB] porque no las va a ayudar.*
[La alumna dibuja un triángulo rectángulo donde un cateto es k]
Profesora: *Y los otros lados ¿cuánto medirían, considerando los nombres que han dado antes?*
Alumna: a *y* b
Profesora: *¿Este triángulo es único? Es decir, con ese mismo* k, *¿pueden construir otro triángulo rectángulo?*
Alumna : *Sí.*
Profesora: *¿Qué es* a*?*
Alumna: *Va a determinar las distancias.*
Profesora: *¿De dónde a dónde?*
Alumna: *De* A *a* P
Profesora: *Ajá. Es la distancia del vértice* A *al punto* P. *Recapitulemos. Nos han dado un segmento* AB *y nos piden buscar un punto* P *tal que …. ¿Qué es lo que hemos hecho acá? Nos hemos alejado de* AB *y hemos construido*

un triángulo que cumple esa relación. Ese valor de a quiero que sea la distancia A *de* P. *Debo buscar un punto en el plano que diste a de* P. *¿Dónde están los puntos del plano que distan del vértice* A *en este tamaño?[refiriéndose al tamaño a]?*
Alumnas: *En la circunferencia [señalando a una circunferencia que dibujan con centro en A]*
Profesora: *¿Quiénes son los puntos* P *que se encuentran a la distancia* b *del vértice* B*?*
Alumnas: *Los de la circunferencia [señalando a una circunferencia que dibujan con centro en B]*
Profesora: *Entonces ¿quiénes son los puntos* P *que cumplen las dos condiciones a la vez?*
Alumna: *Sí, ¿pero cómo trasladamos la distancia?*
Profesora: *Lo que pasa es que el CABRI tiene la opción compás*
Alumna: ¡*Ah ya!*
[Luego las alumnas hacen los trazos y marcan las dos intersecciones].
Profesora: *¿Qué cumplen los puntos que han marcado?*
Alumnas: *La relación pedida*
Profesora : *Y el triángulo* APB *¿es recto?*
Alumna: *No*
Profesora: *No, ¿no? Y ese punto que han construido [señalando los dos puntos de la intersección] ¿ son únicos o habrá más?*
Alumna: *Sí, habrá más*
Profesora: *¿Qué forma tendría la unión de todos esos puntos? Exploren un poquito a ver qué pasa… [la profesora se aleja dirigiéndose a otra pareja]*

La figura 6.7. corresponde a la solución presentada por esta pareja.


Paso 1:

- formar imaginariamente el triángulo APB
- formar un ⊿ que cumpla $a^2 = b^2 + k^2$
- trasladar el segmento b hacia el punto B (se forma una circunferencia)
- trasladar el segmento a hacia el punto A (se forma una circunferencia)
- los puntos P serán aquellos puntos que resultan de la intersección de dichas circunferencias.

b)El punto P construido en la parte a) ________(¿es o no es?) único porque

no es único porque al elegir arbitrariamente el segmento b, este puede variar de longitud por lo que existen infinitos puntos que satisfacen la situación

c)La forma que tendrá el lugar geométrico descrito por P es

una recta

Figura 6.7. Solución de la pareja 11 del ciclo III

A continuación se presenta la transcripción del diálogo entre la profesora y una segunda pareja que también abordó dicha situación.

Alumna: *La condición nos lleva a pensar en Pitágoras. Son dato la constante* k *y las distancias de* A *a* P *y de* B *a* P.

Profesora*: Esas distancias no son dato. Sólo lo son* A *y* B *pero si no conoces* P*, no tienen las distancias.*

Profesora: *Este* y, *¿qué es en la expresión? [Mirando la expresión escrita por los alumnos*: $\mathrm{x}^2 = \mathrm{k}^2 + y^2$]

Alumna: *La distancia de* B *a* P

Profesora: *Entonces, ¿creen que la distancia de* P *a* B *es única?*

Alumna: *No*

Profesora: *Construyan un triángulo con cateto* k *y una distancia elegida por ustedes que se llamará* y. *¿Qué sería entonces* x*?*

Alumna: *La distancia de* A *a* P

Profesora: *Sí, pero en el triángulo rectángulo que han construido, ¿qué sería* x*?*

Alumna: *La hipotenusa*

Profesora: *Al elegir esto de esa manera ahora hay que buscar un punto P en algún lugar del plano que haga que la distancia de* P *a* A *sea* x *y de* P*a* B *sea* y. *¿Qué se les ocurre hacer?*

Alumno: *Pongo en* B *la distancia* y, *pongo en* A *la distancia* x, *trazo las circunferencias respectivas y la intersección es* P.

Profesora: *¿Ese triángulo* APB *es rectángulo?*
Alumnos: *No*
Profesora: *¿Y nos importa que sea rectángulo?*
Alumnos: *No*
Profesora: *Claro; ustedes han encontrado dos puntos que satisfacen la condición. ¿Serán únicos?*
Alumnos: *Sí, son sólo los dos*
Profesora: *Para esa construcción: pero ¿podrá haber otra construcción?*
Alumno: *Sí*
Alumna: *¡Se obtiene una recta!*
Profesora: *Ah, tú quieres que salga una recta pero ¿por qué tendría que ser así? A ver prueben; construyan otro.*
Alumno: *Ya.*

Luego se dejó a estos estudiantes que exploraran y ellos construyeron otro triángulo de cateto *k*. Ante la pregunta de la profesora de si esos puntos eran únicos, los alumnos optaron por trasladar los radios *x* e *y* pero ahora con centros en *B* y *A*, respectivamente. Pero luego no consideraron otros posibles valores para *x* e *y*; eso explica el que hayan dado como respuesta dos rectas, tal como se muestra en la figura 6.8.

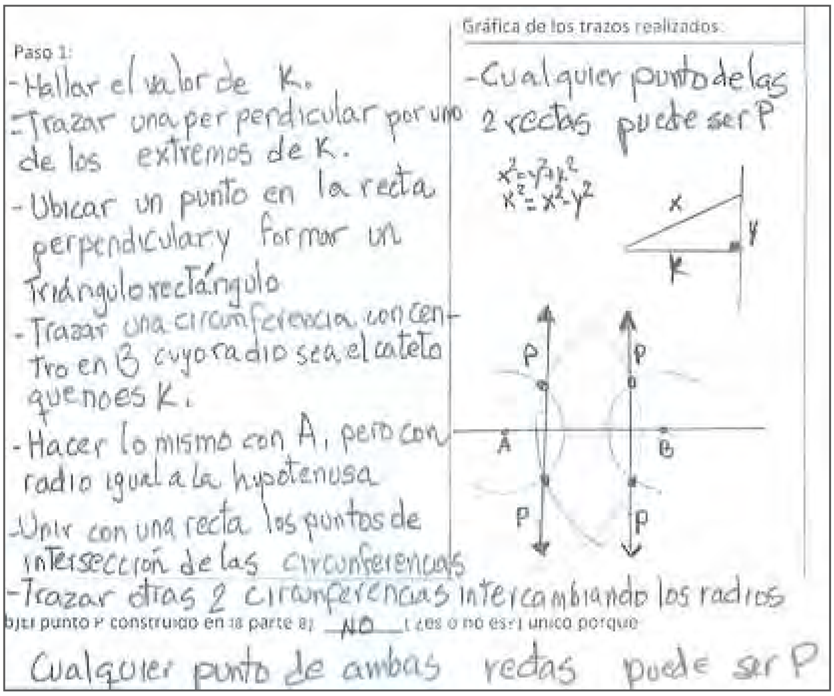


Figura 6.8. Solución de la pareja 16 del ciclo III

Dado que muy pocas parejas abordaron la situación considerada como fundamental para introducir la geometría analítica, y los que lo hicieron no identificaron la forma global del lugar geométrico, se planteó retomarla en la siguiente sesión, también con ayuda de un programa de geometría dinámica.

En esa nueva sesión además se planteó otra situación, similar a la anterior pero en la que la condición era que la suma de los cuadrados de las distancias fuera una constante arbitraria.

Se esperaba que la identificación de la forma global no fuera inmediata si se hallaba punto por punto; esto justificaría la introducción de un sistema de coordenadas. Sin embargo, al cambiar la condición de la diferencia por una suma, emplearon una estrategia similar al caso de las diferencias, incluso más simple, y reconocieron la forma global de la solución sólo en el contexto sintético.

Esto hizo que se replanteara el diseño que se venía implementando y que se buscaran otros problemas sobre lugares geométricos que generaran curvas distintas a la recta y a la circunferencia.

Análisis

La incorporación de un programa de geometría dinámica contribuyó a que se pudieran plantear construcciones con un mayor número de UEI. Al tener la posibilidad de emplear las construcciones predeterminadas por CABRI, el estudiante centraría su atención en identificar los caminos de solución, explicar el procedimiento con detalle y justificar la validez del mismo. Los resultados de las sesiones en el laboratorio, fueron positivos; sólo se detectaron algunas indicaciones en los enunciados de los problemas que podrían mejorarse para ser más precisos.

Sobre los resultados al trabajar los problemas para introducir la geometría analítica, usando el programa de geometría dinámica se tiene lo siguiente:

- Las primeras situaciones fueron abordadas por los alumnos de manera adecuada, las construcciones predefinidas que ofrecía el CABRI como *recta perpendicular* o *punto medio*, permitieron que los estudiantes se centraran en las condiciones geométricas dadas y pudieran reconocer los lugares geométricos generados con las condiciones dadas.
- A diferencia de las experimentaciones anteriores en las que ninguna pareja respondió a la pregunta sobre la forma del lugar geométrico, en esta ocasión dos parejas intentaron dar respuesta (aunque sólo una lo hizo correctamente). Pese a que todavía el número de parejas que respondió la pregunta fue bajo, se considera que la incorporación del programa informático contribuyó a este pequeño incremento pues permitió repetir las construcciones en pocos pasos y tener en un mismo dibujo los puntos del lugar geométrico generados en cada construcción.

Se planteó una reorganización de esta actividad para su implementación en el cuarto ciclo con la intención de que un número mayor de alumnos respondiera la pregunta.

Reflexión

La actividad final para introducir la noción de lugar geométrico sigue estando lejos del alcance de la mayoría de los estudiantes. Consideramos que esto se debe fundamentalmente a que la técnica de solución según la cual se debe construir una figura auxiliar ubicada en una región del área de dibujo donde no están los datos, y luego se deban trasladar distancias, exige realizar reconfiguraciones, actividad de alta complejidad cognitiva.

Se deberían plantear más actividades para que dicha técnica sea incorporada al conjunto de procedimientos básicos tales como construir paralelas, mediatrices, etc.

Para que los problemas no deriven siempre en rectas o circunferencias, convendría plantear otra situación sobre lugar geométrico donde se siga empleando la noción de distancia entre puntos pues su representación con regla y compás es inmediata, pero sin la condición de elevar al cuadrado. De esta manera, se generarán otras curvas, como por ejemplo hipérbolas, cuya construcción completa y exacta no será posible de hacer con regla y compás.

Así, surge una nueva inquietud: cómo modificar la situación para que el lugar geométrico no sea construible Esta preocupación dio origen a una cuarta experimentación donde se caracterizaron los problemas y se definió una familia de problemas.

6.2.4. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL CICLO IV

Planificación

Además de la propuesta considerada en el ciclo anterior, se consideró construir la paralela en base a la construcción de dos perpendiculares.

En relación a las situaciones que debían generar la necesidad de usar geometría analítica, éstas fueron reorganizadas por primera vez como casos particulares de una familia de problemas que permitiría conectar las construcciones con regla y compás con problemas de geometría analítica. La caracterización de dicha familia corresponde a lo presentado en el apartado 5.4.

En la primera parte (situaciones a, b, c y d del caso I, correspondientes al primer bloque de tareas presentadas en el capítulo anterior), los alumnos deberán recurrir a estrategias que han empleado en otros problemas; el concepto nuevo sería el de lugar geométrico y el objetivo central será justificar la forma que adoptará éste en cada caso. Este trabajo lo harán en el aula y sólo con lápiz y papel; discutirán los problemas en pareja y cada pareja entregará un sólo informe del trabajo realizado.

En la segunda parte (situaciones a, b, c y d del caso II, correspondientes al segundo bloque de tareas presentadas en el capítulo anterior) los alumnos deberán modificar su estrategia de solución. Este trabajo lo harán en el laboratorio de cómputo con el programa CABRI y cada pareja presentará un informe de lo realizado.

Implementación

En cuanto al trabajo con construcciones con regla y compás, se siguió el mismo esquema de trabajo que en la experiencia anterior, una primera parte en aula con lápiz y papel y una segunda parte en el laboratorio donde se usó CABRI.

Tal como se había previsto, las situaciones para introducir la geometría analítica fueron trabajadas en dos etapas. En ambas, se pidió que abordaran los problemas en parejas. De esta manera, se esperaba que antes de escribir algo en el papel, justificaran su respuesta ante su compañero; esto exigiría una mayor reflexión. Y en la mayoría de los casos, se notó que esta medida fue positiva.

En la primera etapa, los problemas de lugar geométrico fueron resueltos en el aula sólo con lápiz y papel.

En la segunda etapa, se recurrió al apoyo del programa informático. Si bien el tiempo previsto para trabajar las situaciones con lápiz y papel en el aula fue suficiente, no ocurrió lo mismo cuando los estudiantes fueron al laboratorio de cómputo donde sólo pudieron trabajar uno de los tres problemas propuestos ya que las tareas eran más complejas.La situación que había generado dudas en los ciclos previos se reescribió y se desdobló en sub preguntas, en una de las cuales se daban las indicaciones para la construcción de dos puntos del lugar geométrico y se presentaba a los estudiantes la nueva técnica de solución. El enunciado fue el siguiente:

a) Consideren conocidos los puntos A y B *y un segmento de longitud* $\mathrm{k} \neq \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. *(Esto significa que deben construirse de antemano usando CABRI)*
b) Construyan un triángulo rectángulo de modo que un cateto mida k.
c) Nombren m *a la hipotenusa de dicho triángulo y* n *al otro cateto.*
d) Construyan un punto P *en el plano de modo que la diferencia de los cuadrados de las distancias de* P *a* A *y de* P *a* B *sea* k^2. *(Recuerden usar la opción compás para trasladar distancias). Muestren cómo lo construyeron.*
e) ¿Es único el punto que satisface la condición dada en el enunciado del problema? ¿Por qué?

f) Si se unen todos los puntos P *que satisfacen la condición dada en el enunciado del problema, ¿se formará alguna figura conocida? Expliquen.*

Participaron 15 parejas de esta actividad. Ninguna de ellas supuso que la longitud *k* correspondía a la longitud del segmento *AB*; las indicaciones que se dieron en el enunciado evitaron que esto ocurriera.

Sobre las respuestas, se tiene que tres parejas siguieron las instrucciones, con más o menos pasos, pero no respondieron a lo que el problema pedía. Una de ellas construyó un triángulo rectángulo de cateto *k* y luego no hizo más construcciones; otra pareja construyó el triángulo y traslado las distancias *m* y *n* pero no reconoció puntos del lugar geométrico en los puntos de intersección; la tercera pareja llegó a ubicar los dos puntos de corte pero no dio respuesta sobre si había otros puntos ni sobre el lugar geométrico.

De las 12 parejas restantes, tres dieron como respuesta el segmento que unía los puntos de intersección de las dos circunferencias, con lo cual mostraron que no habían comprendido por qué dichos puntos eran soluciones del problema. En la figura 6.9. se muestra una de dichas soluciones.

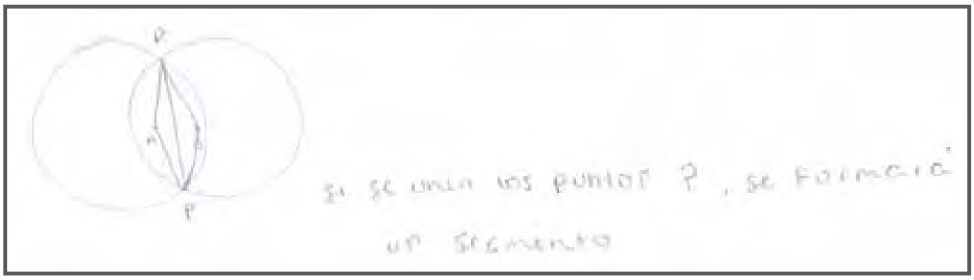


Figura 6.9. Solución de la pareja 11 del ciclo IV

Cinco parejas consideraron una circunferencia de diámetro *k* como figura auxiliar y sobre ella tomaron puntos que definían catetos de longitudes que denotaron por *m* y *n*; esto procedimiento no fue correcto pues debieron trazar como construcción auxiliar una recta perpendicular al segmento de longitud *k*. Estos estudiantes dieron una circunferencia como respuesta para el lugar geométrico.

Esta solución puede interpretarse como que asumieron que la forma del lugar geométrico debía heredarse de la construcción auxiliar y que, por tanto, el lugar geométrico también será una circunferencia. En la figura 6.10., se muestra la respuesta proporcionada por otra pareja que también procedió así, se identifica de manera más clara esta afirmación.

Si se unen todos los puntos P que satisfacen la condición dada en el enunciado del problema, ¿se formará alguna figura conocida? Expliquen.

Una circunferencia pues los valores de m y n pueden modificarse y mantener la forma

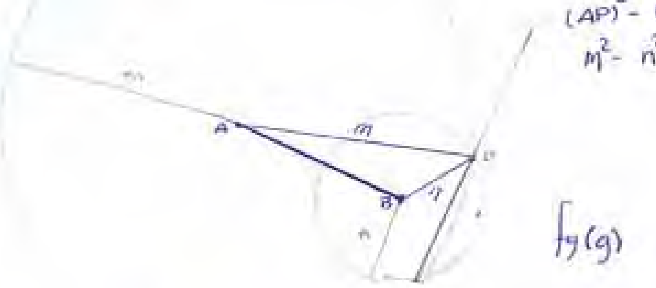
Figura 6.10. Solución de la pareja 6 del ciclo IV

Mientras que otras cuatro parejas concluyeron que el lugar geométrico era una recta. Esto también podría tener relación con la construcción auxiliar donde ubicaron el triángulo de lados *m*, *n* y *k*, según la cual los lados *m* y *n* cambiaban al desplazar un punto sobre la recta perpendicular al segmento de longitud *k*.

En la solución de la siguiente pareja, correspondiente a la figura 6.11., se tiene que además de identificar la forma global correcta del lugar geométrico, los estudiantes se animaron a colocar restricciones para los segmentos *m* y *n* de modo que garantizaran la existencia de un triángulo.

$(AP)^2 - (PB)^2 = K^2$

$m^2 - n^2 = k^2$



fg(g)

① Ubicamos los puntos A y B - Restricción

$m - n \leq AB \leq m+n$

② Con centro "A" formamos una circunferencia de radio "m"

¿Es único el punto que satisface la condición dada en el enunciado del problema? ¿Por qué?

No, porque se puede tomar diversos puntos de la recta perpendicular trazada inicialmente.

Se formaría una recta

Véase la figura "g"

Figura 6.11. Solución de la pareja 3 del ciclo IV

En la siguiente sesión se optó por comentar el trabajo que los estudiantes habían realizado al abordar las situaciones de la familia de problemas y para ello se recordó previamente la definición dada para lugar geométrico. De esta manera, se aclararon dudas y se hizo un cierre respecto al trabajo realizado.

El retomar en clase la situación anterior, correspondiente al modelo

$$d^2(A;P) - d^2(B;P) = K \text{ con } K \neq d^2(A;B),$$

permitió discutir sobre la nueva técnica de solución y resaltar la relación que existía entre los valores de m y n, y los puntos del lugar geométrico. El uso del recurso tecnológico contribuyó a resaltar la concepción dinámica de lugar geométrico.

Sin embargo, cuando se pidió a los estudiantes que, a partir de la variación de m y n, identificaran la forma global que tendría el lugar geométrico, hubo una diversidad de respuestas; los alumnos mencionaron todos los objetos geométricos que conocían, al menos por el nombre. Así por ejemplo, un estudiante indicó que se trataba de una parábola, otro dijo que era una recta, uno señaló que eran dos rectas y otro respondió que era un arco.

Se generó entonces la necesidad de saber qué forma adoptaba “realmente”. En este ciclo, en lugar de introducir un sistema de coordenadas como se había hecho el ciclo anterior, se optó por presentar la herramienta *lugar* que ofrecía el programa de geometría dinámica con la cual pudieron esbozar la forma global del lugar geométrico. Se vio cómo, al seleccionar uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias y variar m, el conjunto de puntos P describía una semicircunferencia; al hacer lo mismo con el otro punto de intersección, se generaba la otra semicircunferencia. De esa forma se justificó que el lugar geométrico descrito por los puntos que verificaban la condición dada inicialmente era una circunferencia, cuyo centro se encontraba en el punto medio de AB; sin embargo, quedaba pendiente determinar su radio. Y fue recién en ese momento que el problema se planteó en un contexto de geometría analítica.

Para resolver las demás situaciones de la familia de problemas, los estudiantes trataron de emplear la técnica de construcción de una figura auxiliar; sin embargo, se notó que todavía era complejo para algunos establecer conexión entre las construcciones que hacían y las condiciones geométricas que debían cumplirse. Para determinar la forma del lugar geométrico, trataron de emplear la opción *lugar* que se había presentado previamente, pero esto también resultó complejo porque para activarla necesitaban reconocer qué puntos dependían de qué condición; eso necesitaba haber adoptado una concepción dinámica adecuada de lugar geométrico.

Cuando surgieron algunas interrogantes de los propios estudiantes para referirse a la figura que habían hallado con el programa, se aprovechaba para comentar lo útil que sería resolver el problema en un contexto algebraico.

En una siguiente etapa de trabajo en el laboratorio, los alumnos formularon preguntas que se aprovecharon para tratar de establecer una conexión entre las condiciones geométricas y las simbólicas.

Por ejemplo, cuando en un problema de geometría sintética que se modela con la ecuación

$$d(A;P) - d(B;P) = K, \text{ con } K \neq (A;B),$$

se obtenía como lugar geométrico la rama de una hipérbola, algún estudiante preguntaba:

Estudiante 1:*¿A qué distancia de* B *se encontrará ese punto. [señalando al vértice de la rama de hipérbola]*
Estudiante 2: *¿Por qué esa figura no es una parábola?*

Se mencionó que para responder esas preguntas sería mejor introducir un sistema de coordenadas que permitiera obtener una ecuación y retomar las preguntas a partir de ella. Así, se planteó el siguiente problema, equivalente al anterior, pero en el marco algebraico.

Consideren los puntos A (-5,0) *y* B(5,0) *y un segmento de longitud 8.*

a) Determinen la ecuación que deben satisfacer los puntos P(x,y) *del plano que verifican la siguiente condición: La diferencia de las distancias de* P *a* A *y de* P *a* B *es 8.*

b) ¿Qué forma geométrica tendrá el conjunto de puntos P *que satisfacen dicha ecuación? Para ello, analicen qué valores puede tomar* y*; qué ocurre con* y *a medida que* x *"crece".*

Para la solución, se dio la siguiente explicación.

Los estudiantes conocían la expresión para determinar la distancia entre puntos, así que podían representar la condición del problema en términos de una ecuación que, luego de simplificarse, daría origen a la siguiente expresión:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

Se les planteó estudiar la forma del lugar geométrico, despejando una variable en términos de la otra.
Por ejemplo, si se despeja la variable *x*, se tiene que.

$$x = \pm\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$$

- ¿Qué valores pueden tomar *x* e *y*?

  Se observa que *y* puede tomar valores en todos los números reales. En cambio, se observa que *x* toma valores en los intervalos $[4, +\infty[$ ó $]-\infty, -4]$ ocurriendo que cuando *y*=0, *x*=4 ó -4.

- ¿Qué ocurre con *x* a medida que *y* "crece"?

  Cuando *y* "crece", *x* "crece": A valores cada vez más positivos de *y*, *x* aumenta. A valores cada vez más negativos de *y*, *x* aumenta.

Con estos elementos se esbozó la gráfica de la curva cuya ecuación era la siguiente:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

Y a partir de lo anterior, se señaló que en las siguientes clases se estudiarían las gráficas de curvas cuyas ecuaciones tuvieran dos variables y fueran como máximo de segundo grado (sin términos mixtos *xy*).

Análisis

En relación a la aplicación de la familia de problemas para trabajar la noción de lugar geométrico e introducir la geometría analítica, las primeras actividades cumplieron su objetivo.

Sin embargo, si bien se había pensado que el uso del recurso tecnológico permitiría que los estudiantes establecieran relaciones más fácilmente en la situación que requería construcciones adicionales, esto no resulto así con todos los alumnos. Aunque se observó un incremento en el número de parejas que logró identificar la forma del lugar geométrico descrito con las condiciones dadas, consideramos que la tarea resultó compleja porque requería establecer conexiones entre construcciones puntuales y su efecto en la generación de nuevos puntos del lugar geométrico, lo que se hacía de manera dinámica con CABRI.

En relación a la justificación que se dio sobre la forma que adoptaba el lugar geométrico a partir de su ecuación, se observó que los alumnos no comprendieron muy bien cómo se podía determinar el comportamiento de *y* a partir de la variación de *x* y viceversa.

Resultó positivo que algunos alumnos dieran como respuesta un lugar geométrico distinto al correcto pues la profesora aprovechó muy bien las distintas respuestas dadas por los estudiantes; esta situación le permitió justificar la necesidad de buscar argumentos más *fuertes* para reconocer la forma global. Y las justificaciones no debían basarse en las formas que se empleaban en las construcciones auxiliares realizadas para hallar puntos particulares porque no era cierto que estas formas siempre se heredaran. Por ejemplo, no debía asumirse que si las construcciones auxiliares eran circunferencias, el lugar geométrico sería también una circunferencia.

Reflexión

Ha sido muy positivo el combinar sesiones de trabajo con lápiz y papel y sesiones en el laboratorio.

En los problemas más complejos y, por tanto, con un mayor número de UEI, el poder recurrir a las construcciones predeterminadas que ofrece el CABRI permitió que los estudiantes se concentraran en la estrategia a seguir y no se preocuparan por la precisión de las construcciones, que sí es importante en las construcciones con lápiz y papel.

La incorporación de un programa de geometría dinámica para resolver los problemas de construcciones sobre lugar geométrico ha permitido enfrentar con un poco más de éxito las situaciones para las que la estrategia sintética de construcciones auxiliares fuera del dibujo en el que se encuentran los datos es el camino de solución. La reformulación de las actividades, con instrucciones más detalladas para que los estudiantes reflexionen sobre la técnica de construcción de puntos del lugar geométrico a través de la construcción de una figura auxiliar y luego de la intersección de dos figuras, resultó favorable.

Por otro lado, el uso de un programa de geometría dinámica ha contribuido a que reconozcan que hay infinitos puntos en cada lugar geométrico y que cada uno está asociado a una construcción auxiliar particular.

Un aspecto positivo de haber fomentado su uso es que la herramienta *lugar* permitió que los estudiantes comprendieran mejor la forma global que adoptaba cada lugar geométrico.

Sin embargo, también se corre el riesgo de que los estudiantes consideren que la solución que da la herramienta *lugar* es suficiente para dar por terminado el problema una justificación formal de la forma que adopta un determinado lugar geométrico. Se hace necesario plantear preguntas complementarias que los obliguen a desarrollar ese tipo de razonamientos.

Al estudiar las ecuaciones obtenidas en dos variables haciendo referencia continuamente a su representación gráfica, se identificaron dificultades. Esto era previsible pues se requería de constantes tratamientos en el registro algebraico y de su conversión al registro gráfico. Por esa razón, se plantea introducir en el tema de funciones reales de variable real, expresiones que correspondan a tramos de cónicas para que los estudiantes se familiaricen con el tipo de razonamiento descrito anteriormente.

6.2.5. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL CICLO V

Planificación

Se reorganizaron las primeras actividades sobre construcciones con regla y compás, ordenándolas de menor a mayor número de UEI. Sin embargo, se optó por trabajar primero la construcción de la recta perpendicular y luego la de recta paralela ya que la construcción de la paralela sin el uso de perpendiculares requería de mayores transformaciones semióticas y de evocar una propiedad adicional.

Se mantuvo la distinción entre construcciones elementales y problemas correspondientes a los tipos de tareas de representación de números construibles en la recta real y de construcción de triángulos.

Se planificó una sesión donde los alumnos trabajarían con el programa de geometría dinámica CABRI. En dicha sesión el énfasis estaría puesto en trabajar tareas de construcción de triángulos. También se considerarían actividades de construcción que hicieran referencia a la propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia y cuyo lado es un diámetro. Esta propiedad sería empleada posteriormente para resolver algunos problemas de lugar geométrico.

Para trabajar el concepto de lugar geométrico, básicamente se considerarían las mismas situaciones que el ciclo anterior. Se previeron sesiones en aula para trabajar las primeras situaciones de la familia de problemas con lápiz y papel y luego dos sesiones en el laboratorio de cómputo donde se resolverían las situaciones más complejas, empleando GeoGebra pero en un primer momento considerando un plano sin coordenadas. Se optó por trabajar con ese programa ya que luego se abordarían los mismos problemas pero desde el contexto de la geometría analítica, lo que no se podría hacer empleando CABRI.

Implementación

Como se había planificado, la presentación de los problemas de construcciones en aula se hizo teniendo en cuenta el número de UEI que estos involucraban.

En una siguiente sesión los alumnos trabajaron en el laboratorio de cómputo otros problemas sobre construcciones que aparecen en el anexo 2. El énfasis estuvo en emplear la propiedad del triángulo inscrito en una circunferencia con uno de sus lados como diámetro, y en hallar la solución de algunos problemas como intersección de dos lugares. Uno de esos problemas fue el de construir un triángulo conociendo su hipotenusa y un cateto. Además, se trabajaron problemas de construcción de cuadriláteros, que requerían de la representación gráfica de ciertos números mediante longitudes.

Sobre las sesiones en las que se trabajaron los problemas de lugar geométrico, el desarrollo se dio de la siguiente manera.

En la primera sesión se señaló que el tema que se trabajaría sería el de geometría analítica y se justificó el aprenderlo como requisito para el estudio del cálculo diferencial e integral. Se explicó que la geometría analítica surgió con la noción de lugar geométrico y, por ello, en la asignatura se emplearía ese tema para establecer relación entre las dos geometrías: la sintética y la analítica.

Como en ciclos anteriores, se formaron parejas y se les entregaron los enunciados de los problemas de lugar geométrico. Recibieron como consigna que debían discutir las respuestas a cada pregunta entre los dos miembros del grupo; se enfatizó en que no debían repartirse las preguntas y que lo que escribieran en las hojas debía ser el resultado de la discusión y del acuerdo previo.

La primera situación correspondía al modelo $d(A;P)+d(P;B)=d(A;B)$. En un primer momento, la mayoría de parejas representó la información con un triángulo de vértices *A*, *B* y *P*. Una de las parejas propuso como solución que los segmentos tuvieran longitudes 2, 3 y 5; otra dio como longitudes *x*, *y* y *y-x*. Al ser interrogadas sobre la existencia de un triángulo con tales características, reconocieron inmediatamente que eso no era posible ya que en cualquier triángulo la longitud de un lado siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Por tanto, el punto P no podía estar en ninguno de los semiplanos generados por la recta *AB*. Concluyeron que debía estar únicamente en el segmento *AB*.

La situación 2 correspondía al modelo $d(A;P)-d(P;B)=d(A;B)$ y fue entendida como muy similar a la anterior con la diferencia que el lugar geométrico sería una semirrecta. No tuvieron dificultad para describir el lugar geométrico como un rayo; sólo fue necesario recordar que para que quedara bien definido, debían dar su dirección y su origen, es decir, debían indicar que seguía la dirección de *AB* y partía de *B*.

La situación 3 correspondía al modelo $d^2(A;P)-d^2(P;B)=d^2(A;B)$. Les resultó trivial pues al ubicar un punto del lugar geométrico se dieron cuenta que todos los puntos estaban sobre la recta perpendicular a *AB* que pasaba por *B*, también cumplían la condición.

En la situación 4, correspondiente al modelo $d^2(A;P)+d^2(P;B)=d^2(A;B)$ (caso Id), se observó como en casos anteriores, que los estudiantes recordaron inmediatamente la propiedad que satisface un triángulo en una circunferencia y que tiene al diámetro como uno de sus lados y dieron como respuesta la forma global del lugar geométrico.

La siguiente sesión se desarrolló en el laboratorio de cómputo y se inició con una explicación de la profesora sobre el uso del GeoGebra pero con los ejes de coordenadas desactivados. Luego se abordaron los mismos problemas que se habían considerado el ciclo anterior.

En el desarrollo de las actividades en el laboratorio de cómputo se notó que varios alumnos concebían a la recta como el segmento con el que se representa; esto se convirtió en un obstáculo cuando en tareas como la siguiente: *Identifica el lugar geométrico que describen puntos del plano que distan de la recta dada* L *en* h *unidades*, daban como respuesta un rectángulo o una región limitada por dos segmentos paralelos y dos semicircunferencias. A manera de ejemplo, se presenta el siguiente diálogo sostenido entre un alumno y la profesora-investigadora:

Alumno: *¿No sería algo así como un rectángulo? [Haciendo referencia a un dibujo en el papel en el que aparece una figura formada por un rectángulo al centro y a los extremos por dos semicircunferencias].*
Profesora: *¿Ahí está el dibujo de la recta? ¿Cuál es la recta?*
[El alumno señala al segmento que representa a la recta dada inicialmente].
Profesora:*¿Cuál es la recta? [Haciendo referencia al dibujo en la pantalla] ¿Dónde terminaría? ¿ahí? [señalando los extremos finales del segmento]*
Alumno: *Acá [señalando el último punto que se ve en la pantalla]*
Profesora: *¿Ahí termina?*
Alumno: *Sí.*
Alumna: *No, no termina.*
Alumno: *La recta es infinita pero… [el alumno se ve obligado a cuestionarse su planteamiento inicial]*
Profesora: *¿Entonces?*
Alumno: *Ah, entonces el lugar geométrico es un rectángulo que continúa.*

A través de este diálogo, con ayuda de su compañera, el alumno logró cambiar su respuesta inicial y finalmente reconoció que el segmento era sólo una representación de la recta; lo que sí prevaleció es que en su respuesta siguió incluyendo el interior de la banda limitada por las dos rectas paralelas que eran solución del problema.

Los estudiantes participaron activamente en la reconstrucción de las respuestas a las situaciones trabajadas. Se consideró un momento para reflexionar sobre los distintos lugares geométricos obtenidos: en las distintas preguntas. En uno de ellos la solución fue un segmento, en otro una semirrecta, también se obtuvo una recta, dos rectas y una circunferencia. Se les planteó como pregunta si sería posible obtener otro tipo de figuras en problemas de lugar geométrico.

Se desarrolló una sesión más en el laboratorio de cómputo donde se trabajó la nueva técnica de solución, que consideraba realizar construcciones auxiliares fuera de la región del gráfico donde estaban *A* y *B*. Esto se hizo con la intención de favorecer la construcción de al menos un par de puntos del lugar geométrico. Se incorporó una pregunta para que conectaran el problema con su equivalente en el marco algebraico.

El enunciado que recibieron los estudiantes fue el siguiente:

a) Consideren conocidos los puntos A *y* B *y un segmento de longitud* $a \neq d(A, B)$. *(Esto significa que deben construirse de antemano usando el programa)*
b) Construyan un triángulo rectángulo de modo que un cateto mida a.
c) Midan las longitudes de la hipotenusa y del otro cateto. El programa le asignará un nombre a cada uno de esos valores (posiblemente serán b *y* c*).*
d) Construyan un punto P *en el plano de modo que la diferencia de los cuadrados de las distancias de* P *a* A *y de* P *a* B *sea* a^2. *(Recuerden usar la opción Circunferencia dados su centro y su radio).*
e) ¿Es único el punto que satisface la condición dada en el enunciado del problema? ¿Por qué?
f) Si unen todos los puntos P *que satisfacen la condición dada en el enunciado del problema, ¿se formará alguna figura conocida? Expliquen.*
g) Si se consideran los puntos A(3,5), B(0,0) y el valor a=10, *¿cuál será la ecuación de dicho lugar geométrico?*

De las 16 parejas que trabajaron en esa sesión, sólo una supuso que la longitud *a* correspondía a la distancia entre A y B, por lo que en general se puede decir que el obstáculo que apareció en las primeras experimentaciones al asumir que *d(A,B)=a* quedó superado con los cambios realizados.

Sobre las respuestas, se tiene que 14 parejas siguieron las instrucciones, trasladaron las longitudes del otro cateto y de la hipotenusa para construir circunferencias con estos radios y con centros en *B* y *A*, respectivamente. Todas ellas identificaron puntos del lugar geométrico en la intersección de las circunferencias construidas. Las otras dos parejas no hicieron avances significativos en sus respuestas.

Seis de las 14 parejas que abordaron el problema, sí dieron como respuesta que el lugar geométrico era una recta, algunas incluso indicaron que era una recta perpendicular al segmento AB, tal como se muestra en la figura 6.12.

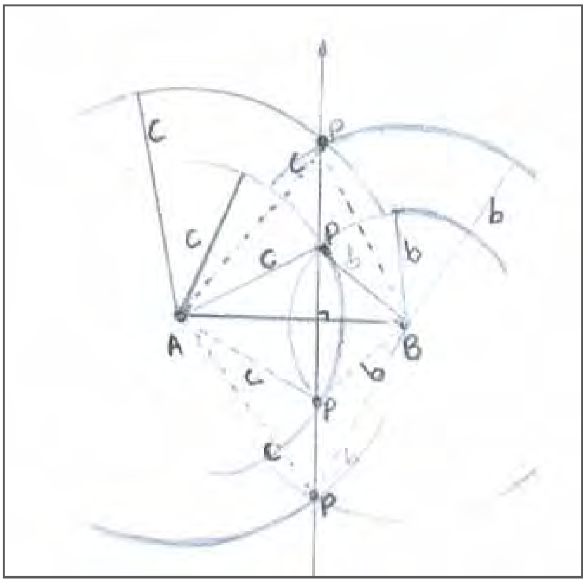


Figura 6.12. Solución sintética de la pareja 7 del ciclo V

De las dos parejas que no dieron como respuesta que el lugar geométrico era recta o circunferencia, una afirmó que sólo eran dos puntos; esto denota que no llegó a comprender que la construcción auxiliar generaba únicamente soluciones particulares.

A manera de conclusión, se observó que los resultados de esta implementación fueron mejores que los de la implementación anterior porque los alumnos reconocieron que la construcción auxiliar que representaba la condición geométrica: *La diferencia de los cuadrados de las distancias de A a P y de P a B es* a^2 debía representarse con la figura de un triángulo rectángulo con hipotenusa variable y no con una circunferencia de hipotenusa fija y de longitud a.

Sin embargo, todavía se identifican dificultades en algunos alumnos para reconocer la forma global del lugar geométrico en el contexto sintético, pues asumen que éste hereda la forma de las construcciones auxiliares. Sería recomendable plantear más problemas donde en las construcciones auxiliares se empleen rectas o circunferencias, pero en las que el lugar geométrico adopte otra forma.

A continuación se han transcrito los diálogos que sostuvieron dos parejas de alumnos y la profesora, mientras resolvían el problema correspondiente al modelo $d^2(A;P) - d^2(B;P) = a^2$ con $a^2 \neq d^2(A;B)$. En uno de ellos puede identificarse que los estudiantes tuvieron dificultades para interpretar la condición geométrica dada, mientras que en el otro caso, se tiene que sí comprendieron la condición.

La profesora se acerca a una pareja y le pide que le explique lo que ha hecho en la pantalla del ordenador. Esta pareja ha construido una circunferencia en la que ha inscrito un triángulo. El triángulo tiene catetos b y c, e hipotenusa a. Como ha asumido erróneamente que a debe representarse como longitud de una hipotenusa, la profesora tratará de hacerles notar que eso no es correcto.

Alumna 1: *Primero hemos trazado un triángulo con cateto* a*, una perpendicular que contiene al cateto* b *y luego hemos trasladado* a *y* b*. Una circunferencia de centro* A *y radio* a *y luego el otro cateto* b *con centro en* B.
Profesora: *¿Han trasladado los dos catetos?*
Alumna 1: *Sí*
Profesora: *O* sea*, éste al cuadrado más este al cuadrado, ¿es esto al cuadrado? [Haciendo referencia a que a^2+b^2 sea c^2]*
Alumna 1 y alumna 2: *¡Claro!*
Profesora: *¿Y esa es la condición?*
Alumna 1: *No. La condición es la resta. ¡Lo pusimos al revés!*
Alumna 2*: No, no veo el error; sé que está mal pero no sabemos cómo.*
[La profesora nota que sólo una de las alumnas que conforma la pareja ha identificado el problema, la otra todavía no lo ha hecho.]
Profesora: *Lo que pasa es que aquí [haciendo referencia a la expresión $d^2(A;P) - d^2(B;P) = a^2$], ¿qué es lo que tienen? ¿La distancia de* A *a* P*, cómo se llama? ¿Qué es en este dibujo?*
Alumna 2: *El cateto* a
Profesora: *El que te dieron como dato, ¿cierto?*
Alumna 2: *Sí.*
Profesora*: ¿Y qué es esta distancia? [haciendo referencia a d(B,P)]*
Alumna 2: *La distancia al otro cateto,* b.
Profesora: *En esta expresión* [haciendo referencia a la expresión que ellos escribieron c^2-b^2=a^2], *¿quiénes son catetos y quienes son hipotenusa? ¿qué pasa?*
Alumna 2:*¡Ah!* c *es* PA*, no* a
Profesora: *Algo de eso ocurre; revisen lo que han hecho.*

El siguiente es el diálogo que sostuvo la profesora con otra pareja que sí realizó la construcción auxiliar correcta, es decir, que sí construyó una recta perpendicular al segmento dado de longitud a. A estas alumnas también se les pidió que explicaran la construcción que habían realizado.

Alumna 1: *Hemos supuesto que como a es conocido, obviamente va a haber una perpendicular. Puede ser cualquier valor, le ponemos una recta y obviamente* c *también varía dependiendo de eso. Y luego, cuando ya vamos a trazar las circunferencias, nos guiamos del teorema de Pitágoras y pasamos* a *al cuadrado*
Profesora: *A ver, a ver. ¿Qué cosa es* a *en el dibujo?*
Alumna 1: *Un cateto*

Profesora: *¿Y lo han trasladado a donde están los puntos* A *y* B*?*
Alumna 2: *No, lo que hicimos primero fue del teorema de Pitágoras, $c^2-b^2=a^2$, lo despejamos [señalando la expresión* $c^2=b^2+a^2$*] y entonces asumimos que la circunferencia que vamos a hacer en* A*, tenía que ser de radio* c.
Profesora: *¡Ah! Se refieren al punto* A.
Alumna 2: *Sí, tenía que tener de radio* c *y el otro punto tenía que tener radio* b*. De ahí nos dimos cuenta que formaba dos intersecciones y al momento de mover esto [señalando el punto que seleccionaron sobre la recta perpendicular], nos damos cuenta que el lugar geométrico como que forma una recta perpendicular*
Profesora: *¿Perpendicular a qué?*
Alumna: *Al segmento* AB*. Siempre con la condición de que* a *tenga que ser menor que* b *porque si no como que ….*
Profesora: *¿Qué pasa?*
Alumna 2: *Como que no existe punto de intersección.*
Profesora: *Ah, es interesante, eso también lo pueden anotar en su solución. ¿Y cómo confirman la medida del ángulo entre esa recta y el segmento* AB*? Piénsenlo.*

Como se encontró que a algunas parejas les costó mucho establecer relación entre los dibujos que se hacían y las condiciones algebraicas que se planteaban, se consideró pertinente dar un espacio para discutir el procedimiento seguido. Por lo demás, la secuencia de trabajo fue similar a la del ciclo anterior, con el añadido de una pregunta en el contexto algebraico.

En la figura 6.13. se muestra la solución de una de las parejas que presentó una solución algebraica coherente con su solución sintética, que ha sido presentada unas páginas atrás.

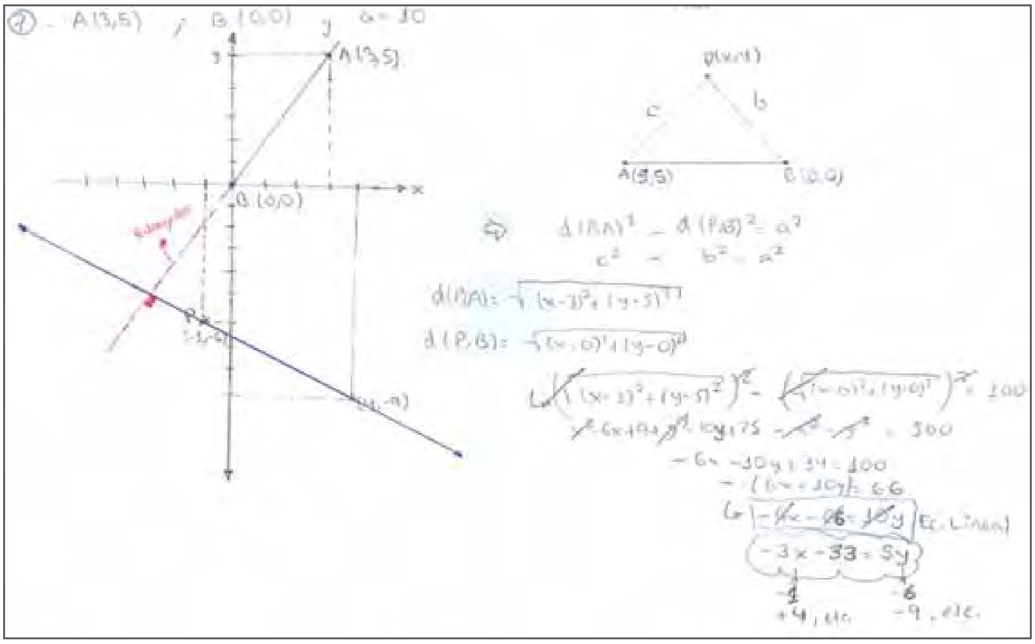
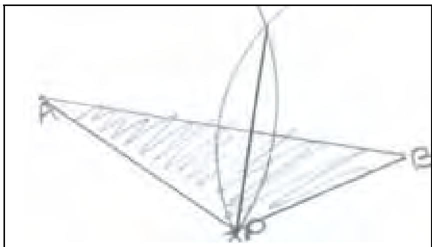


Figura 6.13. Solución algebraica de la pareja 7 del ciclo V

Pero también hubo soluciones erróneas; la mayor dificultad estuvo al realizar los cálculos algebraicos, a pesar de que eran muy simples.

De otro lado, seis parejas que obtuvieron una circunferencia en su solución sintética, obtuvieron la ecuación de una recta en el trabajo analítico y no cuestionaron sus respuestas. Esto es señal de que no establecieron conexiones entre los resultados en los marcos geométrico y algebraico, lo que a su vez muestra falta de comprensión del trabajo realizado. La figura 6.14. corresponde a una de esas respuestas.



Justificación de los alumnos: *Forman una circunferencia porque la longitud/distancia entre los puntos puede ser alterado cambiando los puntos de la hipotenusa.*

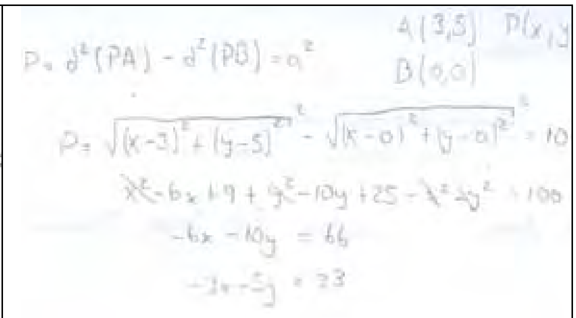


Figura 6.14. Solución sintética y analítica de la pareja 16 del ciclo V

Análisis

La organización de los problemas sobre construcción con regla y compás en construcciones elementales y en dos tipos de tareas fue pertinente ya que permitió que los estudiantes se centraran en unas pocas estrategias de solución y que el énfasis estuviera en reconocer bajo qué condiciones una construcción era exacta.

Las situaciones seleccionadas para introducir la noción de lugar geométrico cumplieron su papel, permitiendo que los alumnos se formaran una visión global del mismo.

De otro lado, con el primer grupo de situaciones sobre lugar geométrico, los estudiantes lograron traducir eficientemente sus respuestas verbales a respuestas escritas, empleando para ello sistemas de representación simbólica y figural.

Tal como se había previsto, los problemas de lugar geométrico del segundo caso, es decir, aquellos que requerían construir una figura auxiliar, generaron dudas en los estudiantes. En particular, les resultó muy difícil de comprender que sin que se construyera un triángulo rectángulo con vértices en A, B y P, se verificaba una relación pitagórica. Estos alumnos han establecido una configuración muy fuerte que asocia la figura de triángulos rectángulos con condiciones cuadráticas.

Esta actividad requería coordinar figuras, relacionarlas con propiedades y realizar un nuevo dibujo donde se verifiquen nuevas relaciones.

La incorporación de problemas en el contexto algebraico con enunciados equivalentes al del contexto sintético favoreció que algunos alumnos pudieran establecer conexiones entre construcciones y representaciones algebraicas.

Reflexión

Se valora positivamente el que las actividades propuestas sobre lugar geométrico hicieran que los estudiantes buscaran identificar la forma global del lugar geométrico, más que ubicar un solo punto.

Con las respuestas que dieron los estudiantes a la última tarea propuesta sobre lugar geométrico en los contextos sintético y analítico, se pone en evidencia nuevamente lo complejo que resulta para ellos establecer conexiones entre las distintas representaciones de un mismo objeto matemático. Así, la incorporación de actividades que pueden ser abordadas desde distintos marcos resultó positiva pero también permitió confirmar que no se trata de una actividad trivial.

A modo de síntesis, se presenta la tabla 6.2., donde se señalan las principales modificaciones realizadas entre ciclo y ciclo de experimentación.

Tabla 6.2. Principales actividades desarrolladas en cada ciclo.

Ubicación temporal	Actividad central
Ciclo 1 (Primer Cuatrimestre 2011)	Se trabajaron situaciones y procedimientos de geometría sintética, aunque sin una organización previa de las mismas. Se introdujeron algunas situaciones para explorar sobre la concepción de lugar geométrico que poseían los estudiantes.
Ciclo 2 (Segundo Cuatrimestre 2011)	Además de lo anterior, se trabajaron situaciones y procedimientos de geometría sintética organizadas en *tipos de tareas*, de modo que cada tipo reuniera problemas con contextos similares.
Ciclo 3 (Primer Cuatrimestre 2012)	Además de lo anterior, se incorporó por primera vez el uso del programa CABRI, y a partir de las construcciones elementales que ofrece, se trabajó la noción de lugar geométrico.
Ciclo 4 (Primer Cuatrimestre 2013)	Además de lo anterior, se organizaron los problemas de lugar geométrico en torno a una familia de problemas; para ello, se quitaron algunas actividades trabajadas en ciclos anteriores y se incorporaron otras. A través de esa caracterización y modificando variables, se introduciría la geometría analítica con sus propias estrategias de solución. Se incluyó la opción *lugar* para identificar algunos lugares geométricos.
Ciclo 5 (Segundo cuatrimestre 2013)	Además del uso de CABRI en las actividades de construcción, se adaptaron las situaciones que requerían usar geometría dinámica para trabajarlas ahora con GeoGebra de modo que luego se pudiera hacer la conexión natural con la geometría analítica, actividad que no era posible hacer con CABRI. Adicionalmente, para algunas de las situaciones de la familia de problemas se plantearon enunciados en los marcos geométrico y algebraico.

6.3. REFLEXIONES DEL CAPÍTULO

Se consideraron cinco ciclos de experimentación y el desarrollo de los mismos permitió ir refinando las situaciones propuestas.

En relación a las situaciones del primer grupo de la familia de problemas propuesta en el capítulo 5, se encontró que éstas fueron adecuadas desde el punto de vista matemático y también contribuyeron a que los estudiantes se formaran una concepción más completa del concepto de lugar geométrico. De otro lado, si bien se consiguió que los alumnos distinguieran una construcción exacta de otra que era sólo aproximada, todavía se presentan dificultades para realizar construcciones exactas de varias etapas. Un ejemplo de ello es la construcción exacta de paralelas.

El segundo grupo de actividades cumplió la finalidad de garantizar que inicialmente los estudiantes tuvieran a su disposición recursos básicos para resolver algunos problemas de construcciones con regla y compás.

Luego, las variables didácticas se modificaron y las estrategias empleadas previamente tuvieron que transformarse, pues tales resultaron insuficientes. Así, se hizo necesaria la introducción de los elementos y procedimientos básicos propios de la geometría analítica. En particular, las situaciones del segundo grupo resultaron adecuadas desde el punto de vista didáctico, ya que un tratamiento algebraico de las mismas generó una solución más completa que la que se había obtenido sintéticamente.

Sin embargo, según los resultados descritos, a nivel cognitivo, las preguntas del grupo II todavía están lejos del alcance de algunos estudiantes, ya que no se ha garantizado una comprensión completa del problema en el contexto sintético. Esto se evidencia por las dificultades que tienen los alumnos para comprender la técnica de las construcciones auxiliares y de los dos lugares geométricos, y las dificultades en aceptar que dicha solución genera sólo algunos puntos del lugar geométrico.

Consideramos que la razón fundamental para la situación descrita en el párrafo anterior radica en el número de UEI que intervienen en la solución y en las múltiples transformaciones entre distintas representaciones que se deben producir al realizar la actividad matemática involucrada.

Otra prueba de ello es que en todos los ciclos de la implementación se ha notado lo difícil que resulta para los estudiantes aceptar que se puede verificar una relación pitagórica sin que se construya un triángulo rectángulo. Para aceptar que eso puede ocurrir, se requiere coordinar figuras, relacionarlas con propiedades y realizar un nuevo dibujo donde se verifiquen nuevas relaciones. Este tipo de actividad matemática requiere de actividades cognitivas muy complejas, según la TRRS.

Se recomienda proponer actividades que puedan ser abordadas desde distintos marcos y pedir a los estudiantes que las resuelvan; de esa manera, cuando sean capaces de establecer conexiones entre los procedimientos realizados en distintos contextos se podrá decir que se han producido aprendizajes.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS OBTENIDOS EN CADA CICLO

Después de la presentación general de los cinco ciclos considerados en la investigación en este capítulo, se fijará la atención en tres apartados relacionados con la actividad matemática de los estudiantes que se consideran fundamentales en este trabajo; esto corresponde a la octava etapa de la metodología adoptada en la investigación. Los dos primeros se sitúan básicamente en el contexto de la geometría sintética, mientras que el tercero se ubica en los contextos sintético y algebraico. Se definen categorías para cada apartado, las cuales sirven para organizar cuantitativamente las respuestas de los estudiantes.

7.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

Cada uno de los cinco ciclos implementados se realizó durante cuatro semanas de intervención y en ese proceso se desarrollaron numerosas actividades con los estudiantes. Sin embargo, y tal como se describió en el capítulo anterior, éstas no siempre fueron las mismas pues, atendiendo al método de investigación acción, a partir de los resultados de un ciclo se redefinía el siguiente.

En ese contexto, surgió la necesidad de definir criterios que permitieran comparar los resultados obtenidos entre ciclo y ciclo de manera a pesar de no haber empleado siempre los mismos problemas. Para ello se definieron tres apartados que permitirían valorar cuantitativamente los resultados de cada ciclo implementado.

El primer apartado se refiere a las construcciones exactas; las categorizaciones que se definieron para analizar las respuestas tuvieron en cuenta el número de trazos exactos y la pertinencia matemática de la estrategia empleada. El segundo apartado se refiere a la concepción de lugar geométrico que poseen los estudiantes; las categorizaciones consideradas para las respuestas tienen en cuenta si se posee una concepción global y dinámica de lugar geométrico, así como la pertinencia matemática de la estrategia empleada. El tercer apartado se refiere a las conexiones que realizan los estudiantes entre distintas representaciones de un mismo objeto matemático; las categorizaciones consideradas se refieren a las transformaciones entre registros de representación que se llevan a cabo, así como a la pertinencia matemática de la estrategia empleada al resolver un problema en distintos contextos.

Además, se consideran algunos aspectos de manera transversal; por ejemplo, el número de UEI asociado a la tarea y su nivel de éxito y también se presta atención a la forma en la que los estudiantes hacen las construcciones. De otro lado, algunos conocimientos involucrados en cada apartado son requisitos de otros; esto se muestra en la figura 7.1.

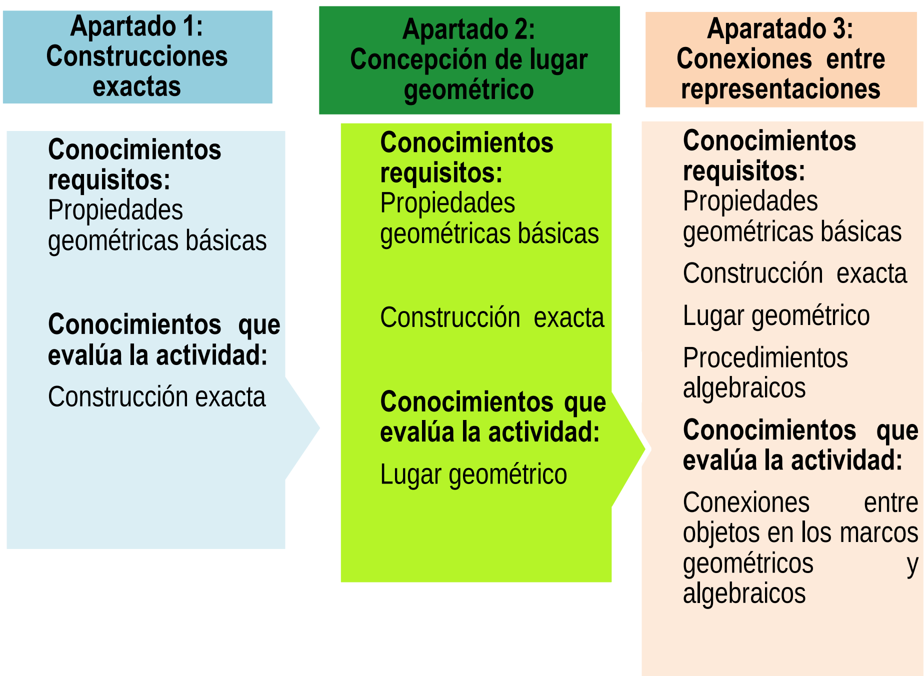


Figura 7.1. Esquema de conocimientos previos y emergentes de cada apartado

Para los apartados 1 y 3 se analiza una tarea específica; mientras que para el apartado 2 se analizan dos tareas específicas. Se presentan los resultados organizados de manera cuantitativa a través de tablas y gráficos de frecuencias de los niveles de logro alcanzados en cada apartado. Se complementa la explicación con un análisis cualitativo. Finalmente, para cada apartado se realizan algunas reflexiones teniendo en cuenta los elementos del marco teórico considerado.

7.2. CONSTRUCCIONES EXACTAS CON REGLA Y COMPÁS

Dado que uno de los focos de la investigación estaba relacionado con la incorporación de actividades de construcciones exactas, se consideró pertinente evaluar si la secuencia de aprendizaje propuesta favorecía la adquisición de conocimientos relacionados con este tipo de problemas de la geometría sintética.

Se hizo necesaria la categorización de las respuestas con el objetivo de identificar similitudes o diferencias entre los resultados de cada ciclo. Uno de los criterios considerados en la categorización se refiere a la tarea misma de construir de manera exacta y el otro considera la solución matemática. Respecto al segundo aspecto, en la reflexión final se analizará si existe relación entre el número de UEI propuestos en la solución ideal de las tareas y el nivel de éxito alcanzado al resolverlas.

7.2.1. CATEGORIZACIÓN DE RESPUESTAS SOBRE CONSTRUCCIONES EXACTAS

Se consideraron dos aspectos para analizar las respuestas que dieron los estudiantes a los problemas de construcciones con regla y compás: que la construcción fuera apropiada desde el punto de vista matemático y que fuera exacta.

Dado que era de interés identificar si los trazos realizados eran pertinentes para la solución, se consideró una categorización de las respuestas que permitiera dar cuenta de ello.
Se consideraron los siguientes aspectos:

- Identificación de los datos
- Identificación de lo que se pide
- Organización de un plan apoyado en un resultado previo o en una propiedad adecuada
- Eficiencia de la estrategia seleccionada, en términos de usar el menor número de UEI

En la tabla 7.1 se describe lo que un alumno debió hacer para ser ubicado en un determinado nivel de este aspecto.

Tabla 7.1. Descripción de niveles sobre la solución matemática

Niveles	Descripción
Muy alto	Identifica correctamente cuáles son los datos en el enunciado del problema y qué es lo que se pide. Selecciona resultados suficientes que serán pertinentes para resolver el problema. Resuelve el problema. Es decir, emplea todas las UEI que permiten dar respuesta al problema

Alto	Identifica incorrectamente algún dato del problema o lo que se pide hallar, aunque esto no modifica esencialmente la solución. Selecciona resultados suficientes que serán pertinentes para resolver el problema. Resuelve el problema en más pasos de los necesarios. Es decir, emplea más UEI de las necesarias para dar respuesta al problema
Medio	Resuelve correctamente el problema para casos particulares. Selecciona un resultado que es válido sólo en algunos casos.
Bajo	Considera como datos del problema lo que debe hallar. Emplea resultados incorrectos para resolver el problema.
Nulo	No resuelve el problema; a lo más hace trazos pero no plantea relaciones correctas entre ellos.

Respecto de construir de manera exacta con regla y compás, esto se evidencia al realizar las construcciones exactas adecuadamente y cuando se reconoce si una construcción ha sido realizada sólo de manera aproximada.

En la tabla 7.2 se describe lo que un alumno debió hacer para ser ubicado en un determinado nivel de este aspecto.

Tabla 7.2. Descripción de niveles sobre la construcción gráfica exacta

Niveles	**Descripción**
Muy alto	Todos los trazos son exactos
Alto	Casi todos los trazos son exactos
Medio	Algunos trazos son exactos
Bajo	Hace construcciones pero ninguna es exacta
Nulo	No hace construcciones

7.2.2. TAREAS PROPUESTAS

Si bien durante los cinco ciclos se trabajaron diversas actividades relacionadas con el apartado *construcciones exactas*, para esta sección se han seleccionado sólo algunas tareas específicas que fueron resueltas por los estudiantes, una para cada ciclo, y que se han analizado considerando las categorizaciones descritas en la sección anterior.

Se debe tomar en cuenta que los ciclos responden a años diferentes y en cada uno de ellos se ha recabado información escrita y presencial de los alumnos en relación a las construcciones exactas.

Dado que las tareas analizadas en todos los ciclos corresponden a la etapa terminal de la implementación, los resultados podrán tomarse como referencia para describir los logros o deficiencias detectadas en cada ciclo.

Como se comentó antes, la organización didáctica de los problemas sobre construcciones exactas fue la que sufrió mayores modificaciones de ciclo en ciclo por lo que no se contó con una tarea común desarrollada durante los cinco ciclos. Sin embargo, las tareas seleccionadas guardan estrecha relación, excepto con la del ciclo III.

- En el ciclo I se consideró una tarea para representar razones numéricas de la forma *b*/*a* en la recta empleando regla y compás, a partir de las representaciones de *a* y de *b*.
- En el ciclo II se hizo una variación al enunciado del ciclo I con la intención de establecer conexiones con el tema de conjuntos numéricos que se había estudiado en clase.
- En el ciclo III se consideró una actividad del segundo tipo de tareas sobre construcción de triángulos y líneas notables.
- En el ciclo IV se retomó la tarea de representar razones numéricas con regla y compás, empleada en el ciclo I.
- En el ciclo V se consideró una actividad en la que se tenía que representar en la recta real un número particular, expresado inicialmente en forma periódica.

En la tabla 7.3. se presentan las tareas específicas que se utilizaron en cada ciclo para la obtención de los datos. En la tercera columna se describe el número de UEI consideradas en la solución ideal de las tareas (anexo 3).

Tabla 7.3. Cuestiones propuestas para evaluar el apartado 1

Ciclo	Enunciado de la tarea	Nº de UEI
I	Dados los números *a* y *b*, con *a*<*b*, construye, usando únicamente regla y compás, un segmento cuya longitud sea *b*/*a*.	17
II	Analiza si la siguiente afirmación en verdadera; de serlo, justifica en palabras y realiza las construcciones que consideres necesarias. *Todo número racional puede ser representado empleando regla y compás.*	17
III	Considera un triángulo obtusángulo ABC. Empleando el menor número de trazos, construye con regla y compás el circuncentro de dicho triángulo. Acompaña tus trazos con una explicación del procedimiento seguido.	9
IV	Construye la representación de un segmento de longitud *m*/*n*, teniendo como dato segmentos cuyas longitudes son *m* y *n*.	17
V	Representa en la recta real el número $0.\overline{714285}$, considerando como unidad de medida la siguiente _______________.	14

7.2.3. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS RESPUESTAS

Para efectos de un análisis detallado se han seleccionado algunas respuestas de los estudiantes a las tareas de la tabla XXXX; esto permitirá ilustrar de qué manera se realizó la asignación de los niveles en cada categoría considerada.

Ciclo I

Se encontraron diversas soluciones, todas ellas requerían de la construcción de paralelas, pero basándose en distintos resultados: semejanza de triángulos, teorema de Tales o propiedades aritméticas de las proporciones.

La figura 7.2. corresponde a una solución que se basa en la semejanza de triángulos. Desde el punto de vista de la solución matemática, esta respuesta fue ubicada en el nivel muy alto. Esta misma solución, analizada desde la exactitud de las construcciones, fue valorada en el nivel medio, pues construyeron de manera exacta los segmentos a y b, dados, y la unidad pero el trazado de la recta paralela no fue exacto.

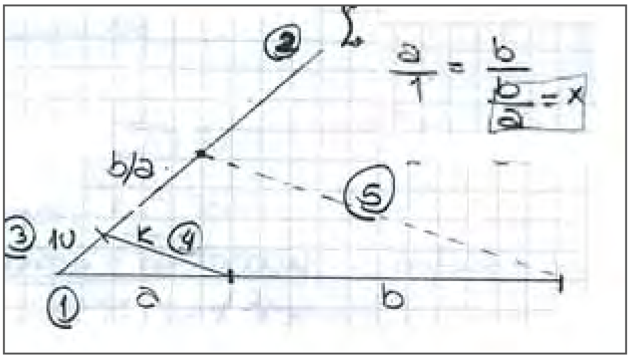


Figura 7.2. Respuesta del estudiante 1 del ciclo I

En la figura 7.3. se muestra una construcción basada en el teorema de Tales. Fue ubicada en el nivel muy alto en relación a la pertinencia de la solución pero, al igual que en el caso anterior, fue considerada en el nivel medio en relación a la exactitud de las construcciones ya que la paralela no se realizó de manera exacta.

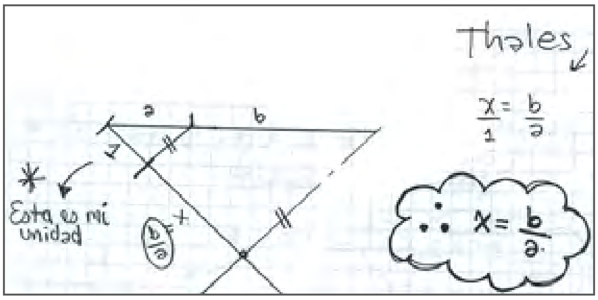


Figura 7.3. Respuesta del estudiante 31 del ciclo I

Sobre la estrategia de solución empleada, un 36% de los estudiantes consideró que era necesaria la construcción de rectas paralelas, basándose en la semejanza de triángulos y en la propiedad aritmética de las proporciones según la cual: $\frac{x}{y} = \frac{w}{z} = \frac{x \pm w}{y \pm z}$, que aplicada a este caso sería: $\frac{a}{1} = \frac{p}{q} = \frac{p-a}{q-1} = \frac{b}{x}$ donde $p = a + b; q = 1 + x$. Mientras que el 12% de los estudiantes empleo directamente el teorema de Tales y el 9% construyó una figura a partir de la cual estableció directamente una relación de semejanza de triángulos.

Como resultado de la primera experimentación se tiene que un grupo importante de alumnos identificó como estrategia óptima de solución el construir una recta paralela. En suma, casi el 60% de los estudiantes identificó una estrategia adecuada para resolver la tarea, algunos recurrieron al teorema de Tales, al teorema de semejanza de triángulos o propiedades aritméticas. Sin embargo, los triángulos que construyeron con esa finalidad fueron diversos. Se identificaron diferentes relaciones entre *a*, *b*, la unidad de medida y el segmento de longitud *b*/*a;* si bien a todas ellas se les asocia la misma cantidad de UEI, se nota la tendencia a usar algunas en particular.

De otro lado, no deja de ser preocupante el alto porcentaje de estudiantes, 43%, que no empleo ninguna relación correcta y no pudo resolver el problema. También preocupa que en esta primera experimentación ningún estudiante haya podido realizar todos o casi todos los trazos de manera exacta con regla y compás.

Ciclo II

Al igual que el ciclo anterior, los estudiantes basaron sus procedimientos en diversos resultados. Por ejemplo, los alumnos que definieron segmentos cuyas longitudes eran los valores de *p* y *q* y señalaron que el objetivo era aplicar el teorema de Tales o el teorema de semejanza y construyeron un encaje de Tales o triángulos semejantes, respectivamente, fueron ubicados en el nivel muy alto en cuanto a la pertinencia de la solución. Una de esas soluciones es la que se muestra en la figura 7.4.

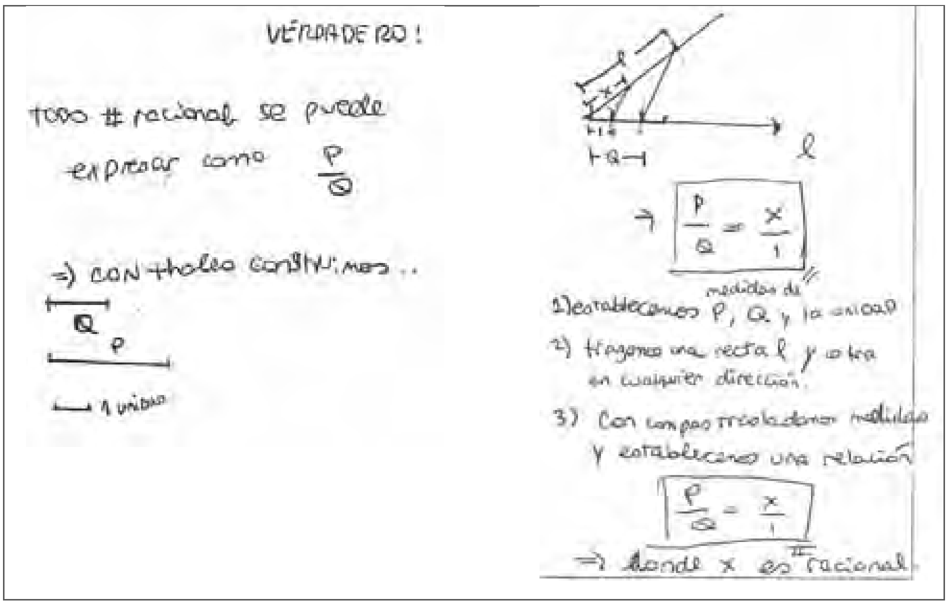


Figura 7.4. Respuesta del estudiante 7 del ciclo II

Sin embargo, la solución anterior muestra que el estudiante no reconoció el significado de construir de manera exacta e hizo sólo trazos aproximados; pese a que había definido previamente segmentos de longitud *p*, *q* y la unidad, no los reprodujo de manera exacta en la siguiente construcción. Por ello, este procedimiento fue ubicado en el nivel bajo respecto a construir de manera exacta.

Sobre la solución matemática, algunos alumnos consideraron que se debía construir números racionales particulares y que ello era suficiente para garantizar que se podía construir cualquier número racional. Estas respuestas se consideraron en el nivel medio pues corresponde a resolver correctamente el problema pero para casos particulares; la figura 7.5 muestra una solución que ilustra esta situación. En relación a la exactitud, esta respuesta fue ubicada en el nivel medio pues la construcción de paralelas fue sólo aproximada.

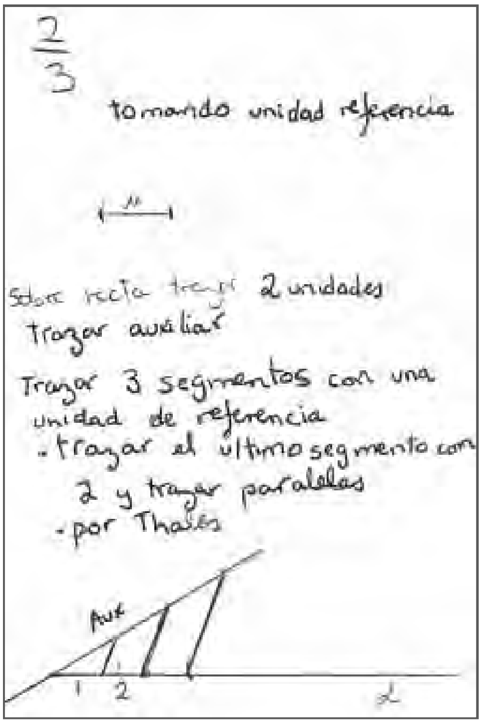


Figura 7.5. Respuesta del estudiante 1 del ciclo II

Durante el segundo ciclo a los alumnos se les instruyó en el trazado de la recta paralela por un punto exterior, utilizando dos arcos de circunferencia para construir un paralelogramo de forma que uno de sus lados estuviera sobre la recta dada y el otro sobre la paralela buscada. A pesar que sólo se requiere de 4 UEI en dicho procedimiento, los resultados muestran lo complejo que resultó para ellos reproducir esa solución. Atribuimos este hecho a que su aplicación requería reconocer varias propiedades geométricas.

En la figura 7.6. se presenta la solución de un estudiante que trató de construir la paralela a través de este método. Sin embargo, para hacerlo debió considerar que el punto *P* coincidía con el extremo final de *b*, que una de las circunferencias debía tener centro en *P* y radio *PQ* y que la otra debía tener centro en el extremo final de *a* y radio *b-a*; de esa manera, se generaría un paralelogramo. En relación a la estrategia de solución de este mismo alumno, ésta también fue errónea ya que se debió unir el extremo final de la unidad con el extremo final de *a*; caso contraria, estaría hallando *a*/*b* y no *b*/*a*, representación que eligió para el número racional.

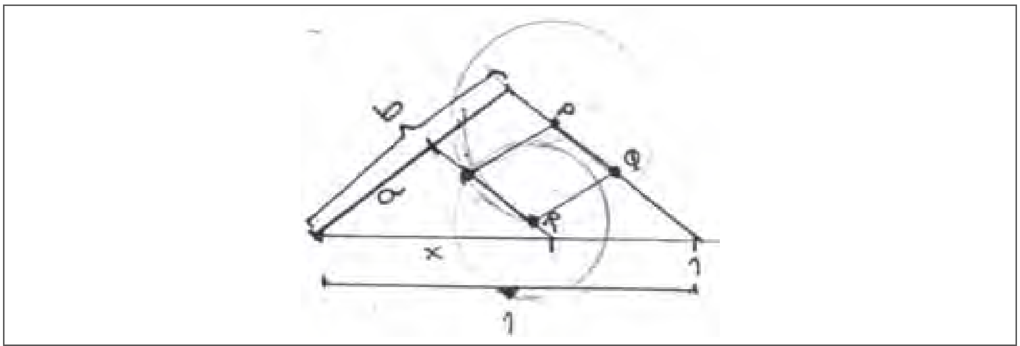


Figura 7.6. Respuesta del estudiante 28 del ciclo II

En este segundo ciclo también se encontró que las soluciones más frecuentes se basaron en el teorema de Tales (33%) y en alguna propiedad aritmética de las proporciones (12%); mientras que el 9% de las soluciones correspondieron a establecer una relación entre triángulos semejantes. Al parecer, a los alumnos les resultó *más natural* establecer relaciones entre segmentos descritos con un único término y no con una suma.

La construcción de paralelas para la mayoría de los estudiantes siguió considerándose un paso que se asumió como trivial y que realizaron de manera aproximada, en este segundo ciclo.

De otro lado, la reducción en el porcentaje de estudiantes que resolvió bien la tarea, respecto al ciclo anterior, puede atribuirse a que se presentó una dificultad adicional: transformar la condición de ser un número racional en una representación simbólica de la forma *p*/*q*, y considerar que al ser *p* y *q* enteros eran *construibles*.

Ciclo III

Para identificar si los estudiantes podían construir de manera exacta con regla y compás, durante el ciclo III se consideró un problema distinto al de construir representaciones de números en la recta; se planteó construir el circuncentro de un triángulo.

La solución que reproduce la figura 7.7. se ubicó en el nivel muy alto en relación a las dos categorizaciones ya que sólo se construyeron dos mediatrices, además éstas fueron hechas de manera exacta.

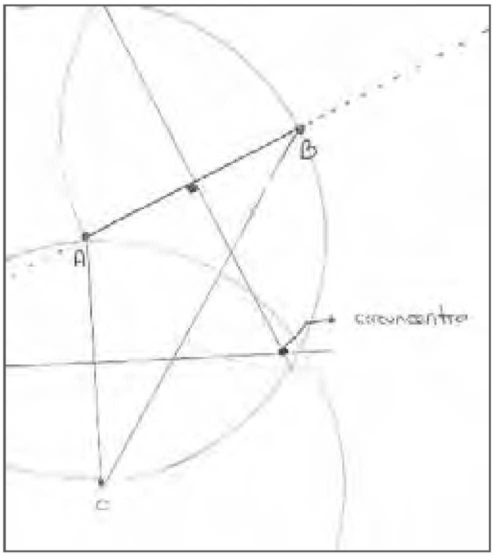


Figura 7.7. Respuesta del estudiante 26 del ciclo III

La figura 7.8. corresponde a la solución de uno de los alumnos que consideró necesario construir tres mediatrices obviando que se pidió hacerlo con el menor número de trazos. En relación a la categorización de pertinencia de la solución, esta respuesta fue ubicada en el nivel alto, mientras que en relación a la exactitud se ubicó en el nivel bajo por no presentar construcciones exactas.

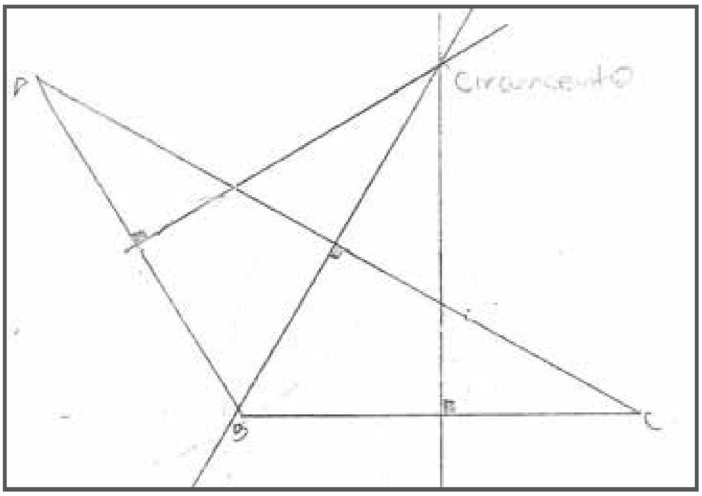


Figura 7.8. Respuesta del estudiante 16 del ciclo III

Sólo algunos estudiantes fueron ubicados en el nivel medio en relación a la exactitud de las construcciones; en la figura 7.9. se muestra una solución de este nivel en donde la construcción del punto medio se hizo de manera aproximada pues la construcción de la paralela, que debió haberla dibujado con regla y compás, no está justificada y tampoco construyó la perpendicular de manera exacta con regla y compás. Sin embargo, sobre la categorización relacionada con la pertinencia de la solución, se le asignó el nivel muy alto ya que reconoció que bastaba construir dos mediatrices.

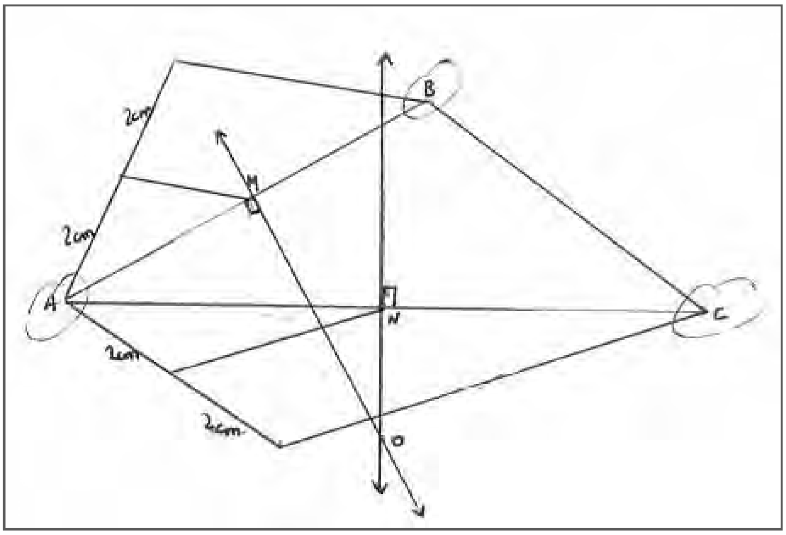


Figura 7.9. Respuesta del estudiante 3 del ciclo III

En aquellos casos en los que los alumnos construyeron medianas, bisectrices u otras líneas, la solución se ubicó en el nivel bajo, tal como ocurrió con la solución de un estudiante mostrada en la figura 7.10.en donde se observa que construyó las medianas del triángulo y señaló que el circuncentro se encontraba en la intersección de éstas. Sin embargo, en relación a la exactitud de los trazos, su solución fue considerada en el nivel medio ya que construyó los puntos medios de dos segmentos adecuadamente.

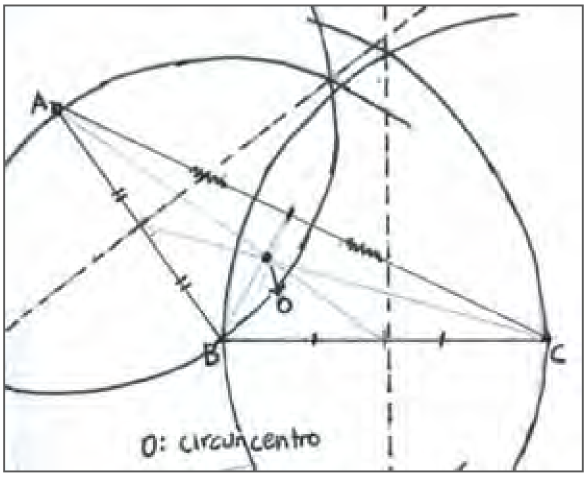


Figura 7.10. Respuesta del estudiante 27 del ciclo III

También se asumieron datos que en realidad no lo eran; en eso casos se les asignó el nivel bajo. En la figura 7.11. se presenta la solución de un alumno que asumió que el centro de la circunferencia circunscrita era dato, cuando lo que se conocían eran los tres vértices del triángulo. Además, en la solución mostrada la ubicación del punto medio no fue exacta y tampoco lo fueron las perpendiculares a los lados, por lo que, en relación a la exactitud de la construcción también fue ubicada en el nivel bajo.

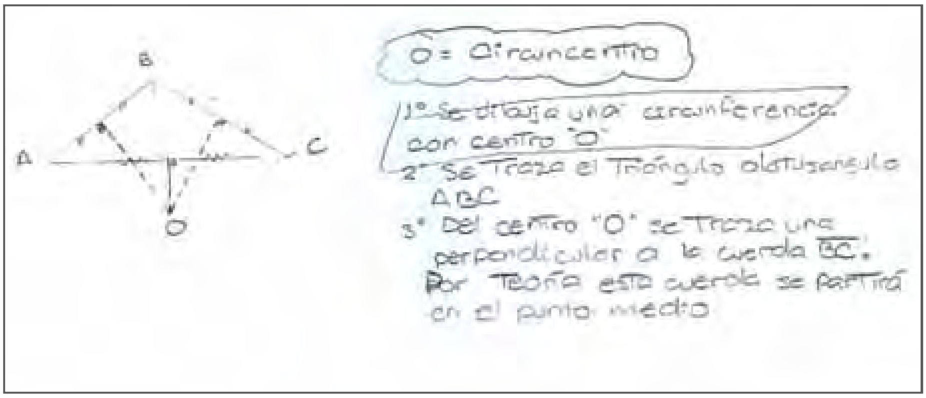


Figura 7.11. Respuesta del estudiante 1 del ciclo III

En general, en relación a la situación planteada en el ciclo III, se puede decir que la mayoría de estudiantes reconoció cuál era el procedimiento que se debía seguir para la solución, aunque algunos trabajaron más de lo necesario y por esa razón fueron ubicados sólo en el nivel alto en relación a la solución matemática. Así, un alto porcentaje de estudiantes identificó que se requería construir mediatrices como estrategia de solución; sin embargo, la mayoría consideró necesario construir las tres ya que no hizo uso de la propiedad de que las tres mediatrices son concurrentes.

De otro lado, como las construcciones que debían hacerse sólo requerían del trazado de arcos y de perpendiculares, se obtuvieron mejores resultados que en las tareas propuestas en los ciclos I y II en donde debían construir una recta paralela.

Ciclo IV

En la figura 7.12 se muestra la solución de un estudiante que trató de recurrir a un procedimiento para construir de manera exacta la recta paralela, pero lo hizo sin éxito ya que realizó construcciones que no contribuyeron con ese objetivo. Por esa razón se le asignó el nivel bajo en la categorización relacionada con la pertinencia de la solución.

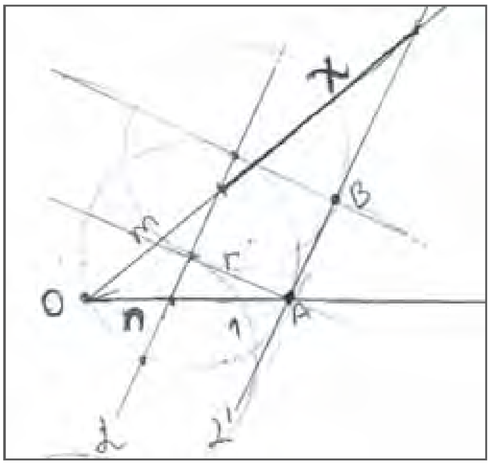


Figura 7.12. Respuesta del estudiante 10 del ciclo IV

A pesar de haber instruido a los alumnos en el trazado de paralelas con regla y compás, muchos mostraron no tener estrategias adecuadas para ello. Esta deficiencia fue la causa de que la mayoría de estudiantes realizara su construcción de manera aproximada, como se ilustra en la figura 7.13. Sin embargo, en relación a la pertinencia de la solución, respuestas como la siguiente fueron ubicadas en el nivel muy alto.

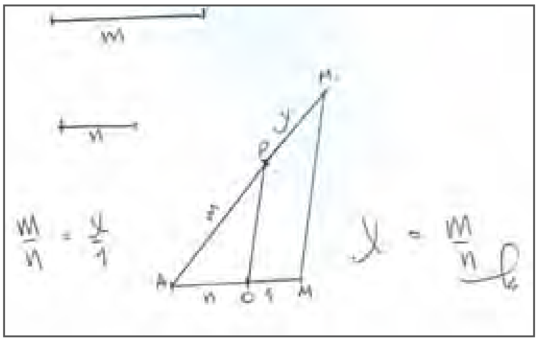


Figura 7.13. Respuesta del estudiante 3 del ciclo IV

En general, se notó un incremento en el porcentaje de estudiantes que logró identificar la estrategia de solución del problema, en relación a los resultados de ciclos previos. Se encontró también que las soluciones más frecuentes se basaron en el teorema de Tales (18%) y en la propiedad de las proporciones (45%); ninguna solución se estableció considerando una relación entre triángulos semejantes. Se confirma la hipótesis de que a los alumnos les resulta más natural establecer relaciones entre segmentos que se describen con un solo término y no con una suma.

En algunos casos no se emplearon los segmentos dados como datos y se consideraron otros y, aunque esto se valora negativamente en relación a la exactitud de las construcciones, no lo es para la categorización relacionada con la pertinencia de la solución ya que el procedimiento empleado para la solución fue correcto.

De otro lado, los resultados obtenidos durante este ciclo confirman la dificultad que presenta para los estudiantes la construcción de rectas paralelas de manera exacta, dificultad que ya había sido detectada en los ciclos I y II.

A manera de resumen, se puede decir que en relación a la solución matemática, en el ciclo IV se obtuvieron mejores resultados que en el ciclo I donde se abordó una tarea similar. Las respuestas de más del 80% de los estudiantes se ubicaron en los niveles alto y muy alto. Esto quiere decir que casi todos los estudiantes identificaron el resultado que permitía resolver el problema e hicieron la construcción correspondiente. Consideramos que contribuyeron a ello los cambios introducidos durante los distintos ciclos en los que se fue llevando a cabo la investigación y la experiencia que iba adquiriendo la profesora-investigadora.

Ciclo V

La tarea planteada durante el ciclo V consistió en construir la representación fraccionaria de un número racional específico, considerando una unidad de medida dada.

Dada la dificultad detectada previamente para construir paralelas, este ciclo se permitió el uso de escuadras; así, algunos estudiantes las emplearon para el trazado de paralelas. Al ser esas construcciones exactas, las soluciones donde se procedió de esa manera se ubicaron en el nivel muy alto. La solución mostrada en la figura 7.14. corresponde a una respuesta que fue ubicada en el nivel muy alto ya que el segmento auxiliar fue dividido de manera exacta en 7 segmentos de igual longitud y el trazado de la paralela se hizo con una escuadra.

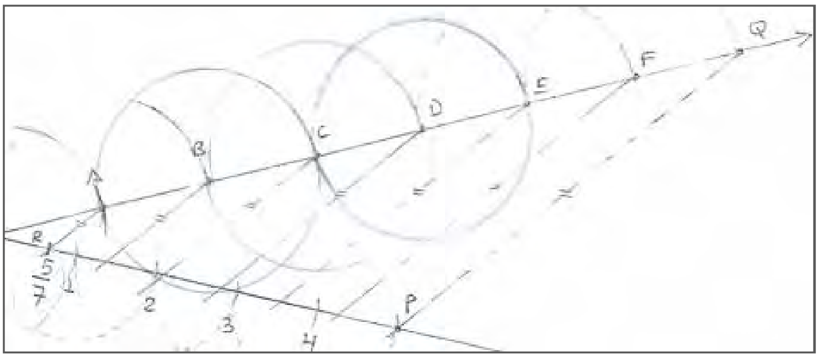
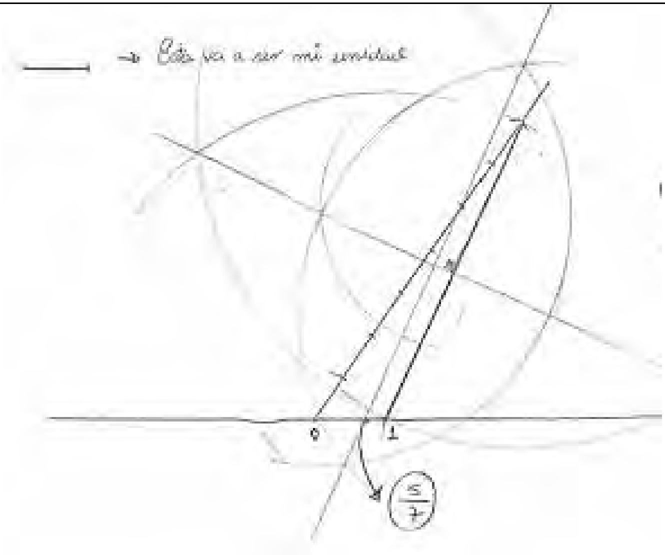


Figura 7.14. Respuesta del estudiante 5 del ciclo V

También se observó que varios estudiantes trataron de construir la recta paralela usando el método basado en el trazado de dos perpendiculares, lo que denotó un mayor domino de los instrumentos respecto a ciclos anteriores. Sin embargo, en algunos casos sus construcciones no fueron exactas. La figura 7.15. corresponde a una solución ubicada en el nivel alto en las dos categorizaciones, en la que se trata de construir la paralela a partir de dos perpendiculares pero en la que no considera el punto adecuado en el segmento auxiliar. La explicación que presenta el alumno acompañando sus trazos también es bastante confusa por lo que se optó por transcribirla.



1. *Localizamos la unidad*
2. *Realizamos 7 unidades iguales en un segmento que hemos trazado realizando circunferencias*
3. *Trazamos una línea de ambos finales*
4. *Del quinto espacio trazamos una paralela a la línea trazada en 4.*

4.1 Se traza perpendicular a la línea azul

4.2 Del segmento deseado (quinto) se realiza una circunferencia tomando un punto de la perpendicular

4.3 Se ubica el punto medio y se hace construir los extremos y el quinto segmento

Se ubica 5/7 en la recta por la intersección de la paralela y la recta

Figura 7.15. Respuesta del estudiante 21 del ciclo V

Los resultados obtenidos en el último ciclo son evidencia de que los estudiantes comprendieron que una relación entre números podía representarse geométricamente; esta actividad matemática pasa por un proceso de conversión, considerado como complejo cognitivamente.

La mayoría de estudiantes (84%) identificó el procedimiento correcto, lo que implicó establecer relaciones entre una expresión simbólica y los elementos presentes en una figura. De otro lado, por la naturaleza de la pregunta en donde se daba un número fraccionario específico, el resultado en el que se basó la construcción fue únicamente el teorema de Tales.

7.2.4. RESULTADOS CUANTITATIVO SOBRE LAS CONSTRUCCIONES EXACTAS

La cantidad de estudiantes que participó en esta etapa del estudio se muestra en la tabla 7.4.

Tabla 7.4. Cantidad de estudiantes que dio respuesta al apartado 1

	Ciclo I	**Ciclo II**	**Ciclo III**	**Ciclo IV**	**Ciclo V**
Número total de estudiantes que respondieron las tareas propuestas	33	33	33	15	32

Luego de analizar las respuestas de todos los estudiantes, éstas se organizaron en tablas de frecuencias porcentuales y gráficos para tener una idea global del comportamiento del grupo en relación al apartado de construcciones exactas.

La tabla 7.5. corresponde a los resultados globales sobre la pertinencia matemática de la solución, obtenidos durante los cinco en los que se plantearon tareas sobre lugar geométrico.

Tabla 7.5. Porcentaje por nivel según la solución matemática

Niveles	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
	%	%	%	%	%
Muy alto	39,40	21,21	9,09	41,67	66,67
Alto	12,12	3,03	57,58	33,33	18,18
Medio	3,03	45,50	0	8,33	3,03
Bajo	9,09	6,06	27,27	16,67	9,09
Nulo	36,36	24,24	6,06	0	3,03

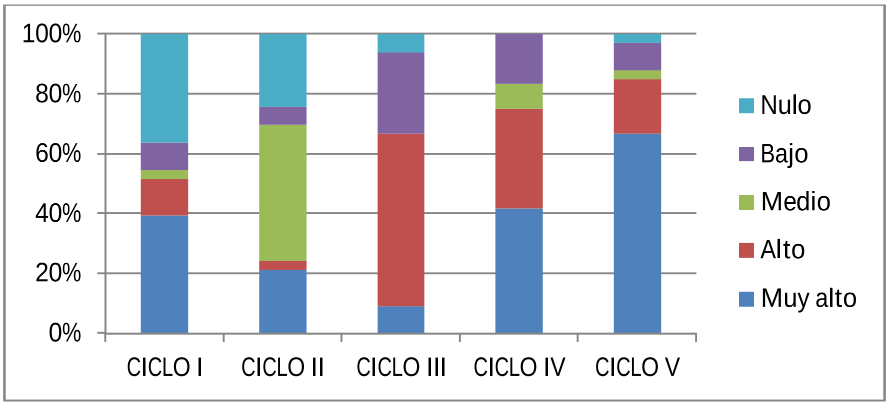


Figura 7.16. Gráfico de frecuencias acumuladas sobre la solución matemática

Según la figura 7.16.se observa una disminución en el nivel de éxito del ciclo I al ciclo II y un incremento del ciclo IV al V. Los resultados del ciclo III no pueden compararse con los obtenidos en los otros ciclos ya que la tarea analizada fue radicalmente diferente.

La disminución en el porcentaje de respuestas ubicadas en los niveles muy alto y alto del primer al segundo ciclo se puede explicar porque en el segundo ciclo se debía realizar un procedimiento previo al de construir la representación: se debía transformar la expresión *número racional* en *un número en representación fraccionaria;* este es un conocimiento requisito que no todos los alumnos tenían y que implica transformar la expresión en lengua natural en una expresión simbólica. Esto representó una dificultad para algunos estudiantes que asumieron que el término racional hacía referencia a números enteros o a raíces cuadradas. Después debían asociar una representación geométrica dada por un segmento cuya longitud tuviera la cuantía del número racional dado verbalmente.

La tabla 7.6. corresponde a los resultados globales sobre la construcción exacta, obtenidos durante los cinco en los que se plantearon tareas sobre lugar geométrico.

Tabla 7.6. Porcentaje por nivel según la construcción gráfica exacta

Niveles	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
	%	%	%	%	%
Muy alto	0	0	39,39	8,33	27,27
Alto	0	3,03	12,12	0	15,15
Medio	57,58	51,52	12,12	66,67	42,42
Bajo	9,09	9,09	18,18	8,33	9,09
Nulo	33,33	36,36	18,18	16,67	6,06

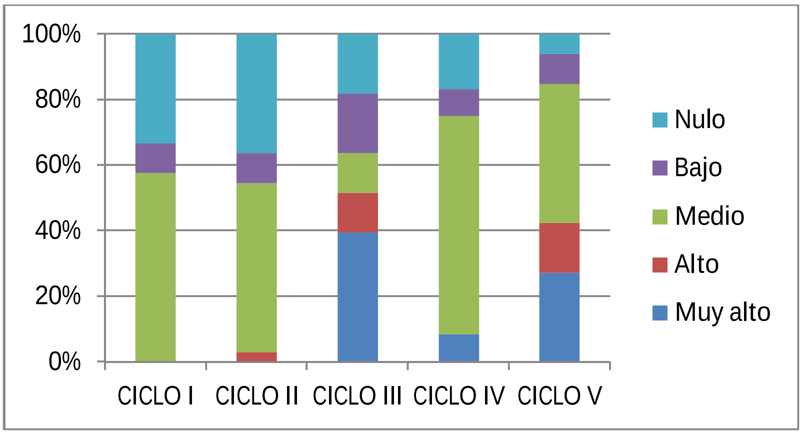


Figura 7.17. Gráfico de frecuencias sobre la construcción exacta

Sobre comprender las características que debe tener una construcción para ser exacta, se encontró que en los primeros ciclos los estudiantes no distinguían entre resolver un problema de geometría donde se esbozaban figuras a las que se les asociaba alguna relación algebraica, de aquellas que debían preservar longitudes dadas y en las que los objetos se construyen mediante la regla y el compás. Tal como muestra la figura 7.17., los porcentajes casi nulos de estudiantes que fueron ubicados en los niveles alto y muy alto durante los ciclos I y II dan cuenta de esa afirmación.

Con excepción del ciclo III, en donde la pregunta considerada fue de naturaleza distinta, en los ciclos IV y V se pudo observar un incremento en el porcentaje de estudiantes que realizaron construcciones exactas. En particular en el ciclo V, se observó un incremento notable en el porcentaje de estudiantes que construyó la paralela de manera exacta, algunos usando regla y compás y otros empleando escuadras.

En el ciclo III se encontró que un porcentaje importante de alumnos realizó los trazos de manera exacta, ubicándose en el nivel muy alto. Sin embargo, como en la solución realizaron más pasos de los necesarios, el porcentaje de estudiantes que fue ubicado en el nivel muy alto en la categorización relacionada con la solución matemática, fue menor.

Sobre la relación que se puede establecer entre el número de UEI asociadas a cada tarea y al nivel de éxito alcanzado en las construcciones de las mismas, se observó que a tareas con mayor número de UEI, el nivel de éxito en la construcción fue menor. Así, se tiene que las tareas de los ciclos I, II y IV con 17 UEI, fueron resueltas con menos éxito que la tarea del ciclo III con 9 UEI y la tarea del ciclo V con 14 UEI; lo que confirma la hipótesis planteada al respecto.

Se encontró también que las construcciones que involucraban UEI asociadas a la construcción de arcos, circunferencias, rectas y semirrectas fueron realizadas sin mayor dificultad.

7.2.5. REFLEXIONES

Considerando los ciclos I, II, IV y V, se observa que, si bien al principio la mayoría de estudiantes tuvo problemas para elegir la estrategia adecuada y justificarla, progresivamente esto se fue superando; lo que se evidencia con el aumento en el porcentaje de estudiantes ubicados en los niveles alto y muy alto en los últimos ciclos. Si bien el porcentaje de respuestas deficientes todavía es preocupante, se percibe una mejoría notable en los tres últimos ciclos, lo que sin duda tiene que ver con el afianzamiento de la profesora-investigadora.

Los teoremas de Tales, de semejanza y las propiedades aritméticas de las proporciones (igualdad de dos razones) fueron reconocidos, directa o indirectamente, como los argumentos centrales para justificar la solución de las tareas propuestas en todos estos ciclos, excepto en el ciclo V, donde no era necesario señalarlo explícitamente pues se debía representar un número específico.

Se atribuye el incremento en el porcentaje de estudiantes que se ubicaron en el nivel muy alto en los últimos ciclos a las modificaciones que se fueron realizando en las secuencias de enseñanza-aprendizaje propuestas en donde se reorganizaron los problemas y se planteó trabajarlos de menos a más UEI. De esta manera, si bien en el primer ciclo ningún estudiante fue capaz de realizar todas las construcciones exactas, ya en las últimas implementaciones se observa que iba quedando más claro para los alumnos lo que significaba construir de manera exacta.

En las respuestas erróneas de los alumnos se observa que esto ocurre porque resolvieron cuestiones diferentes a las planteadas en los enunciados y a que muchos no respondieron las preguntas o escribieron soluciones desatinadas. Así por ejemplo, algunos estudiante señalaron que el circuncentro era el punto de intersección de medianas o consideraron a $\sqrt{2}$ como ejemplo de un número racional, entre otros errores detectados.

En cuanto a las construcciones geométricas se observa que, en general, los estudiantes no las hacen con la debida precisión. En particular, la construcción de la recta paralela resultó muy compleja para los estudiantes. La solución basada en construir un paralelogramo ha demostrado estar fuera del alcance de los alumnos; esto puede explicarse por el gran número de UEI que intervienen en el proceso de construcción, especialmente cuando se sigue un procedimiento que no se basa en el uso de perpendiculares o de la escuadra. Por ello, consideramos conveniente introducir pronto el uso de escuadras, como parte de las construcciones consideradas exactas para favorecer el éxito en este tipo de tareas.

Si se tiene en cuenta que el número de UEI que intervienen en la construcción de representaciones de razones o cocientes es mayor al número de UEI que aparecen en la construcción de la mediatriz, se podrían explicar los resultados obtenidos. Así, se confirma que si un problema tiene asociadas menos UEI y requiere de un menor número de transformaciones, entonces es de menor complejidad cognitiva.

De otro lado, se ha encontrado que cuando un procedimiento resultaba trivial para el estudiante, éste no reflexionaba sobre cómo hacerlo en el menor número de pasos y tampoco consideraba necesario justificar sus procedimientos, tal como ocurrió en el problema del circuncentro.

Por lo demás, los resultados obtenidos muestran que la reorganización de la secuencia de enseñanza implementada ciclo a ciclo contribuyó a que los estudiantes abordaran los problemas teniendo una estrategia de solución, basándose en resultados geométricos estudiados o en procedimientos de construcción aprendidos previamente.

7.3. CONCEPCIONES SOBRE LUGAR GEOMÉTRICO

Las situaciones consideradas para introducir los procedimientos de la geometría analítica se basaron en la noción de lugar geométrico y, dado que éste suele ser un concepto que genera dificultades en los estudiantes tal como se verificó en el trabajo exploratorio, se prestó especial interés en identificar qué significados se le asignaba a este concepto. Así, se planteó reconocer qué entienden los alumnos por lugar geométrico, teniendo en cuenta si consideran condiciones necesarias y suficientes, a lo que se denominó *concepción global*, así como si identifican una relación entre los elementos que lo generan y los puntos del lugar geométrico, a lo que se denominó *concepción dinámica*. También interesó reconocer si los estudiantes obtenían el lugar geométrico en un determinado problema mediante un procedimiento matemático correcto.

De otro lado, aunque no fue el foco de atención de esta sección, se registró si se produjo una mejora, respecto a ciclos previos, en lo que se refiere realizar construcciones exactas. Y en relación al número de UEI involucradas en las dos tareas que se analizarán a continuación, éste fue el mismo, por lo que se espera resultados similares al analizar el éxito la solución de las mismas.

7.3.1. CATEGORIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS SOBRE LUGAR GEOMÉTRICO

Se consideraron dos aspectos para analizar las respuestas que dieron los estudiantes a las situaciones que introducían la noción de lugar geométrico: que la solución fuera apropiada desde el punto de vista matemático y que la concepción sobre la noción de lugar geométrico fuera global y dinámica.

En relación a la pertinencia matemática de la solución, se definieron categorías para distinguir a aquellos estudiantes que resolvían adecuadamente el problema de quienes no lo hacían. Al ser esta categoría muy compleja por los distintos procedimientos y factores que condicionan su adquisición, se consideró pertinente analizarla teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- Identificación de los datos: se refiere a la identificación de los objetos geométricos involucrados (puntos, rectas, segmentos y circunferencias)
- Identificación de lo que se pide: se refiere a la identificación de la condición geométrica involucrada en los datos (distancia entre puntos, distancia entre rectas, distancia entre punto y recta, posición relativa entre rectas o segmentos, etc.)
- Organización de un plan apoyado en resultados previos o en propiedades adecuadas
- Eficiencia de la estrategia seleccionada

En la tabla 7.7. se describe lo que un alumno debió hacer para ser ubicado en un determinado nivel en relación a este aspecto.

Tabla 7.7. Descripción de niveles sobre la solución matemática

Niveles	Descripción
Muy alto	Identifica correctamente cuáles son los datos en el enunciado del problema y qué es lo que se pide. Selecciona resultados suficientes que serán pertinentes para resolver el problema. Resuelve el problema con eficiencia; esto es, emplea las UEI necesarias para resolver el problema.
Alto	Identifica incorrectamente algún dato del problema o lo que se pide hallar, aunque esto no modifica esencialmente la solución.

	Selecciona resultados suficientes que serán pertinentes para resolver el problema. Resuelve el problema en más pasos de los necesarios. Esto es, emplea más UEI de las necesarias para resolver el problema.
Medio	Resuelve correctamente el problema para casos particulares. Presenta un procedimiento correcto pero incompleto. Selecciona un resultado que es válido sólo en algunos casos.
Bajo	Considera como datos del problema lo que debe hallar. Emplea resultados incorrectos para resolver el problema.
Nulo	No resuelve el problema; a lo más hace trazos pero no plantea relaciones correctas.

Para la construcción de los niveles relacionados con la concepción de lugar geométrico, se tuvieron en cuenta dos características que se asumieron fundamentales: el considerar todos los puntos del lugar geométrico y no sólo algunos, y el comprender de qué manera se generaban sus elementos.

En la tabla 7.8. se describe lo que un alumno debió hacer para ser ubicado en un determinado nivel de este aspecto.

Tabla 7.8. Descripción de niveles sobre la concepción de lugar geométrico

Niveles	**Descripción**
Muy alto	Tiene una concepción dinámica de lugar geométrico y considera a todos los puntos que satisfacen la condición.
Alto	Tiene una concepción dinámica de lugar geométrico pero no considera a todos los puntos que satisfacen la condición.
Medio	Tiene una concepción estática de lugar geométrico pero dentro de ella considera a todos los que satisfacen la condición. Tiene una concepción dinámica de lugar geométrico pero una concepción equivocada de algún objeto geométrico.
Bajo	Tiene una concepción estática de lugar y considera puntos que no corresponden al lugar geométrico. Tiene un concepción estática de lugar geométrico y además considera sólo algunos puntos.
Nulo	No tiene concepción alguna de lugar geométrico

7.3.2. TAREAS PROPUESTAS

Durante los cinco ciclos se trabajaron las mismas actividades relacionadas con el apartado *concepciones sobre lugar geométrico*. Para efectos de un análisis detallado, en esta sección se considerarán dos tareas específicas que fueron resueltas por los estudiantes trabajando en parejas durante los distintos ciclos de la experimentación y que han sido analizadas considerando las categorizaciones descritas en la sección anterior. Las actividades fueron presentadas básicamente en el contexto de la geometría sintética; los enunciados se muestran en la tabla 7.9.

Tabla 7.9. Cuestiones propuestas para evaluar el apartado 2

Ciclos I, II, III y V	**Tarea 1:** a) Determinen la forma que tiene el lugar geométrico formado por todos los puntos del plano que están a una distancia dada de una recta dada.	La solución requiere de 13 UEI
	b) ¿Cómo garantizarían que no tiene la forma de otra figura?	
Ciclos I, II, III, IV y V	**Tarea 2:** a) Consideren conocidos los puntos *A* y *B*. Construyan, haciendo uso de regla y compás, puntos *P* tales que los triángulos *APB* sean rectos en *P*.	La solución requiere de 6 UEI
	b) Determinen qué figura describirán los puntos *P* de la parte a); es decir, determinen la forma que adoptará el lugar geométrico descrito por *P.* Justifiquen su respuesta.	

Cabe resaltar que la tarea 1 se aplicó en todos los ciclos excepto en el cuarto, ya que en esa ocasión se reestructuraron las actividades y se caracterizaron en torno a una familia de problemas. La tarea 2 sí se pudo implementar en todos los ciclos, aunque con algunas pequeñas modificaciones en el enunciado presentado entre ciclo y ciclo.

7.3.3. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS RESPUESTAS

Tarea 1

Se seleccionaron algunas soluciones correspondientes a los casos que se consideraron más relevantes para mostrar de qué manera se llevó a cabo este análisis.

Dado que para este apartado se consideró la misma tarea en cuatro de los cinco ciclos implementados, se hará un análisis casi continuo entre ciclo y ciclo.

Ciclo I

En el ciclo I se encontraron varias soluciones en las que los estudiantes asignaban dos rectas paralelas como lugar geométrico; esto es, identificaron todos los puntos que cumplían la condición y no sólo algunos (*concepción global*), y asignaron a cada punto de la recta original los respectivos puntos del lugar geométrico (*concepción dinámica*).

En la figura 7.18. se muestra la solución de una pareja de estudiantes que posee una concepción dinámica y global de lugar geométrico; por esa razón, se le asignó el nivel muy alto en relación a la concepción de lugar geométrico. Se considera que es una solución global porque da como respuesta las dos rectas. Y consideramos que es dinámica porque reconoce que la construcción realizada le ha permitido hallar cuatro puntos del lugar geométrico pero que en realidad si repitiera el procedimiento hallaría más.

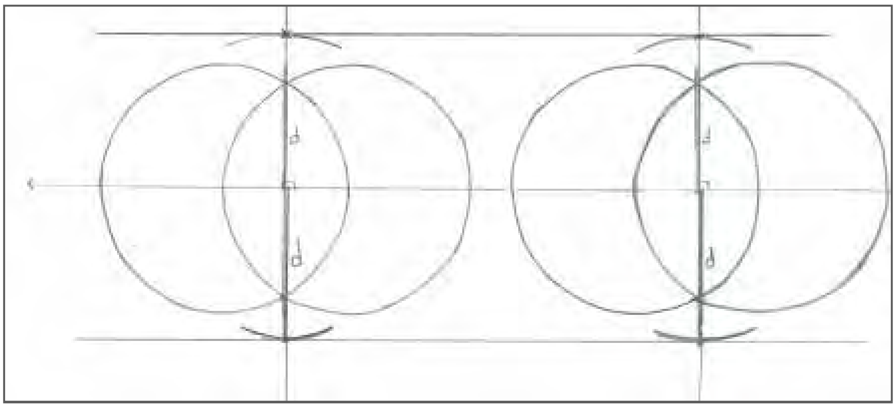


Figura 7.18. Respuesta de la pareja 8 del ciclo I

Sobre la pertinencia matemática de la solución de la figura 7.18., se tiene que el trazado de las paralelas se ha hecho a partir de dos perpendiculares y d la intersección de éstas con circunferencias que tiene como radio la distancia dada inicialmente. Por lo que respecto a esta categorización, la solución también fue considerada en el nivel muy alto.

En otras soluciones, se observó que aunque los alumnos tenían una concepción dinámica de lugar geométrico, no verificaban que estuvieran todos los puntos del plano que cumplían la condición geométrica; esta situación denotaba una concepción local de lugar geométrico.

La solución mostrada en la figura 7.19. corresponde a uno de los casos en los que sólo se identificó una de las rectas del lugar geométrico, esto es, la que se ubica *d* unidades a la derecha de la recta dada. Según los criterios descritos, la solución de esta pareja corresponde a poseer una concepción dinámica de lugar geométrico pues asume que para cada punto se debe proceder de la misma manera, pero al no haber trazado la otra recta, no consideró a todos los puntos que cumplen esta condición. Esto denota que todavía no se tenía una concepción global de lugar geométrico. De otro lado, en relación a la pertinencia matemática de la solución, se consideró en el nivel muy alto pues identificó los objetos geométricos dados, relacionó la condición de distancia con trazar un arco de radio conocido y luego consideró un punto en la intersección de la recta perpendicular a la recta dada que pasaba por el centro de la circunferencia con un arco.

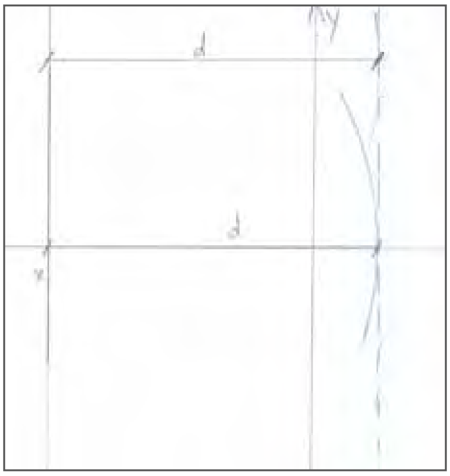


Figura 7.19. Respuesta de la pareja 2 del ciclo

La solución de la figura 7.20. corresponde a una concepción dinámica de lugar geométrico; sin embargo, el asignar como representación figural de una recta a un segmento, llevó a obtener como lugar geométrico una figura que no es la correcta y a la que los alumnos denominaron *óvalo* (figura geométrica que no se corresponde con la forma dibujada). Esto denota que confundían el objeto matemático recta con su representación figural como segmento acotado; al preguntar a los alumnos que dieron esta solución si la recta "terminaba" en los extremos, ellos decían que no, sin embargo, para hallar elementos del lugar geométrico consideraban que sí terminaba pues señalaban los extremos de la representación como puntos finales. Esta solución fue considerada en el nivel bajo respecto a la pertinencia matemática pues usa un resultado incorrecto pero muy alto respecto a la concepción de lugar geométrico pues si se considera que el dato es un segmento, el lugar geométrico si correspondería a lo mostrado.

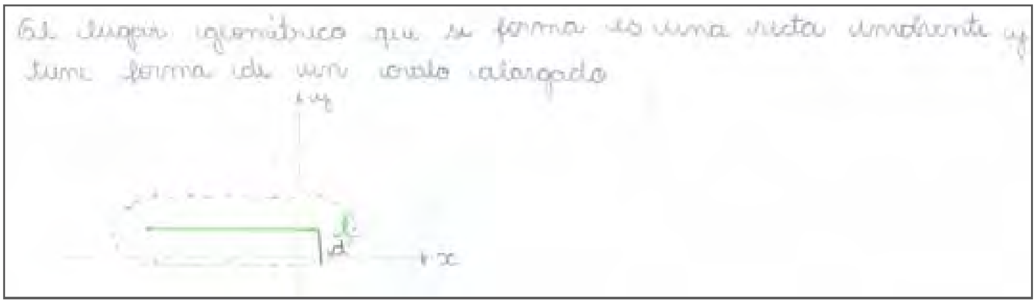


Figura 7.20. Respuesta de la pareja 3 del ciclo I

La solución de la figura 7.21. corresponde a la de una pareja de estudiantes que también concibieron la recta como un segmento y que dio como respuesta un rectángulo para el lugar geométrico. Sin embargo, esta solución no es coherente pues si asumieron que la recta era un segmento, debieron incluir dos semicircunferencias, una a cada extremo de los dos segmentos (como en el caso anterior). Por esa razón esta solución fue considerada en el nivel bajo respecto a la pertinencia matemática y también respecto a la concepción de lugar geométrico.

Figura 7.21. Respuesta de la pareja 7 del ciclo I

De otro lado, también se encontraron otras soluciones en las que se identificó una concepción estática de lugar geométrico pues sólo se hizo la asignación de puntos del lugar geométrico a un único punto de la recta dada inicialmente y se dio por resuelto el problema.

La figura 7.22. muestra una solución que es susceptible de dos interpretaciones: 1) que el lugar geométrico corresponde a una circunferencia en el plano del dibujo, con centro A y radio d, y 2) que el lugar geométrico es una circunferencia de centro A y radio d, perpendicular al plano dibujado. Al consultar a los estudiantes sobre su intención al responder la pregunta, ellos señalaron que había sido trabajar únicamente en el plano. Por esa razón, esta solución fue ubicada en el nivel bajo respecto a la concepción de lugar geométrico y también respecto a la pertinencia matemática ya que no tuvieron en cuenta que, salvo dos puntos de la circunferencia, los otros no distan de la recta en la cantidad fija.

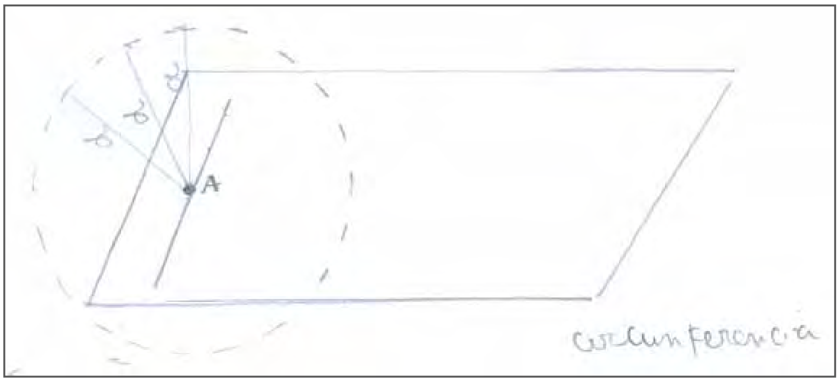


Figura 7.22. Respuesta de la pareja 9 del ciclo I

En la figura 7.23. los estudiantes mostraron tener una concepción dinámica de lugar geométrico pero con una concepción equivocada de cómo se determina la distancia de un punto a una recta. Esta solución se consideró de baja pertinencia matemática y se consideró en el nivel medio en relación a la concepción de lugar geométrico.

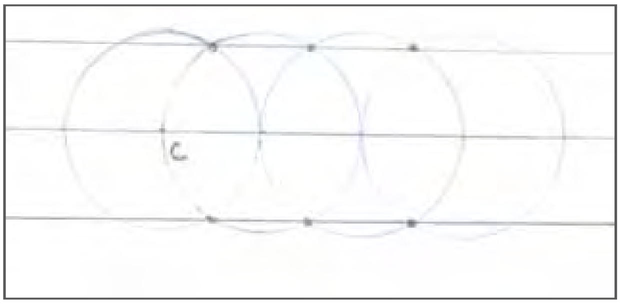


Figura 7.23. Respuesta de la pareja 15 del ciclo I

En general, los resultados obtenidos durante el ciclo I muestran que sólo alrededor del 20% de los estudiantes siguió un procedimiento matemático correcto que permitió que obtuvieran la solución. En relación a la concepción global y completa de lugar geométrico, se tiene que todavía debe trabajarse con los estudiantes para que comprendan que el lugar geométrico debe incluir a *todos* los puntos que satisfacen la condición dada y no sólo algunos.

Ciclo II

En una solución correspondiente al ciclo II, mostrada en la figura 7.24., se observa que el trazado de las rectas tangentes fue aproximado. Esto es algo que se refuerza con la explicación presentada por la pareja de estudiantes, donde indican: *Se construye una recta L, luego con el compás se toma una distancia d, tanto de la parte superior como inferior; luego se unen los puntos A y B, formando una recta paralela a L. Se hace lo mismo en la parte inferior.* Según esto, los puntos *A* y *B* fueron seleccionados de manera aproximada. Esta solución es considerada matemáticamente incompleta pues faltó explicar cómo se hallaron los puntos *A* y *B* por ello fue ubicada en el nivel medio en relación a la categorización sobre la pertinencia matemática de la solución. Sin embargo, respecto a la concepción de lugar geométrico, se ubicó en el nivel muy alto ya que efectivamente el lugar geométrico estaba determinado por dos rectas paralelas a las que se llegó por poseer una concepción global y dinámica de lugar geométrico.

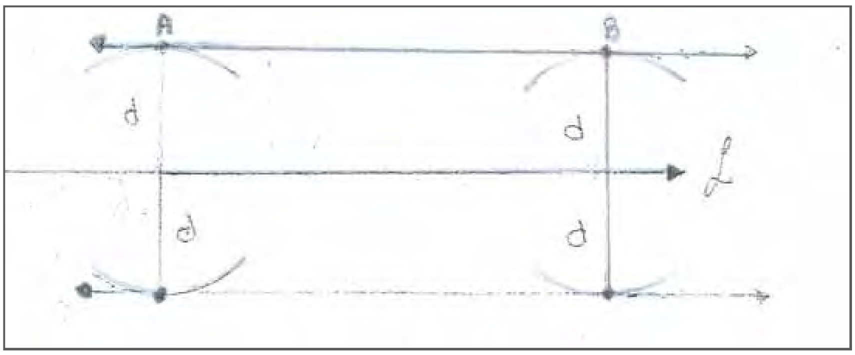


Figura 7.24. Respuesta de la pareja 2 del ciclo II

En la figura 7.25. se observa que los estudiantes representaron el lugar geométrico con un conjunto discreto de puntos alineados, mientras que en la explicación que acompañó sus trazos indicaron que el lugar geométrico correspondía a dos rectas. Esto muestra que finalmente sí reconocieron todos los elementos del lugar geométrico; teniendo en cuenta los niveles definidos previamente, se les asignó el nivel muy alto en la categorización sobre lugar geométrico y el nivel medio respecto a la pertinencia matemática de la solución porque no completaron el procedimiento de solución.

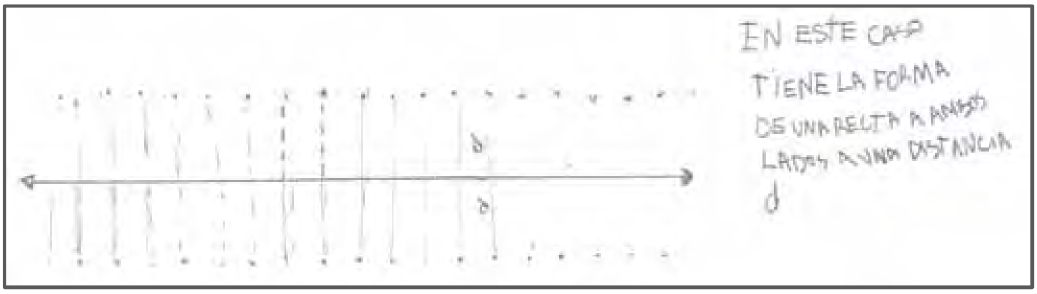


Figura 7.25. Respuesta de la pareja 16 del ciclo II

En este ciclo, como en el anterior, también se encontraron soluciones en donde se obtiene un *óvalo* como lugar geométrico, un ejemplo de ello se muestra en la figura 7.26. Estas respuestas fueron consideradas en el nivel alto respecto a la pertinencia matemática ya que si bien no es la solución correcta, es consecuente con el haber asumido que el dato era un segmento y no una recta. Respecto a la concepción de lugar geométrico se le consideró en el nivel muy alto por ser esta dinámica y global.

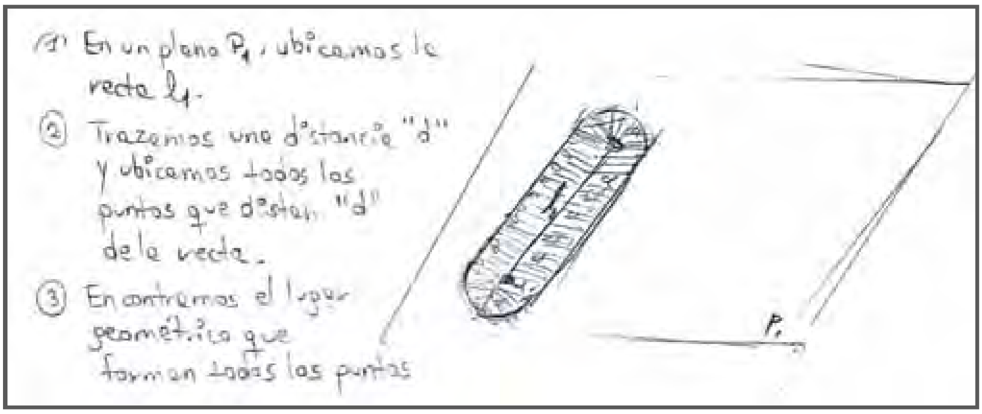


Figura 7.26. Respuesta de la pareja 5 del ciclo II

Ciclo III

En ese ciclo la tarea se resolvió en el laboratorio de cómputo, empleando el programa de geometría dinámica CABRI. Se encontraron soluciones similares a las descritas en los ciclos previos, aunque con un incremento en el porcentaje de respuestas a las que se les asignó los niveles alto y muy alto en ambas categorías.

En la figura 7.27. se presenta la solución de una pareja de estudiantes y la justificación con la que acompañó respuesta. Ellos tradujeron la condición de distancia en términos de trazado de perpendiculares y explicaron por qué puntos distintos a los que se encontraban sobre las rectas paralelas identificadas como lugar geométrico no formaban parte del mismo.

Los alumnos señalaron lo siguiente: *Si ubicamos un punto exterior a la circunferencia, la medida no será la misma que la del punto ya señalado; pasando lo mismo si trazamos un punto interior de la circunferencia.* En relación a la pertinencia matemática de la solución, se le asignó el nivel muy alto y se hizo lo mismo en relación a la concepción de lugar geométrico.

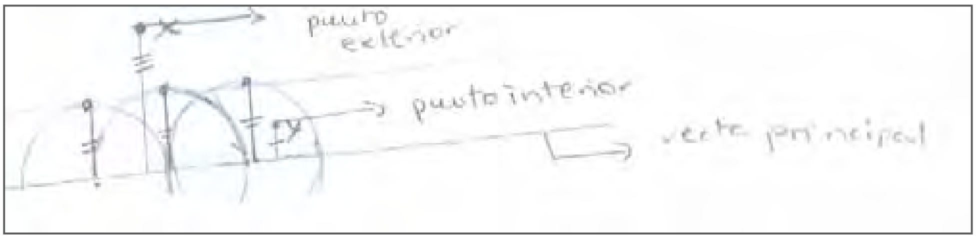


Figura 7.27. Respuesta de la pareja 2 del ciclo III

Ciclo IV

No se aplicó la tarea 1.

Ciclo V

En el ciclo V se retomó la tarea para ser resuelta con lápiz y papel. En general se puede decir que la mayoría de estudiantes que participó en el ciclo V logró adquirir una concepción dinámica y global de lugar geométrico, aceptando que se trataba de un conjunto de puntos, en este caso eran dos rectas, y que cada elemento debía satisfacer la condición dada.

La figura 7.28. presenta otro ejemplo de cómo justificaron los estudiantes la forma que adoptaba el lugar geométrico; para ello, hicieron referencia a la longitud que debían tener otros segmentos que fueran perpendiculares a la recta dada y cuyo extremo final no se ubicara sobre la recta paralela que había sido considerada como conjunto solución. Respuestas como esta fueron consideradas en el nivel muy alto en relación a la pertinencia matemática y a la concepción de lugar geométrico.

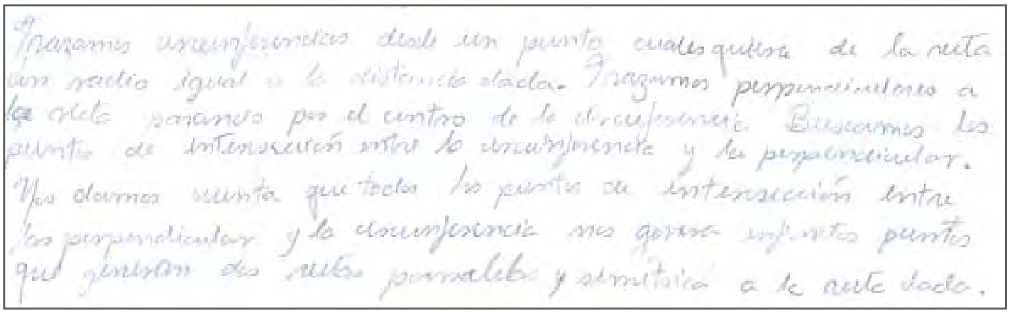


Figura 7.28. Respuesta de la pareja 4 del ciclo V

De otro lado, la solución mostrada en la figura 7.29. fue considerada de nivel bajo en las dos categorizaciones. Esto fue porque los estudiantes asumieron que la recta era el segmento que la representaba y, además, su solución no fue consecuente con ello. Hay que notar que el punto D ubicado en el extremo izquierdo (y también en el extremo derecho) no satisface la condición de la distancia. Los alumnos tampoco mostraron tener una concepción ni dinámica ni global de lugar geométrico.

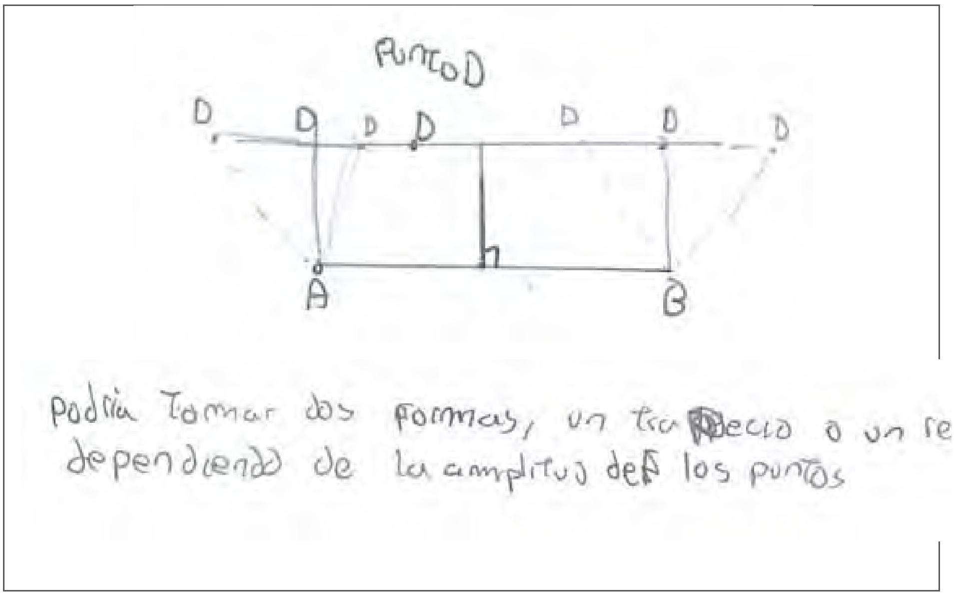


Figura 7.29. Respuesta de la pareja 17 del ciclo V

En relación a las construcciones realizadas, todavía se encontró que la construcción de rectas paralelas se hizo mediante trazos que sólo eran aproximados.

Tarea 2

Dado que la tarea 2 fue la misma durante los cinco ciclos, se optó por organizar las respuestas en función de las regularidades detectadas, en lugar de hacerlo temporalmente.

A continuación se comentarán algunas soluciones que aparecieron durante los cinco ciclos.

En la figura 7.30. se muestran justificaciones correctas del resultado, apoyadas en una representación figural de la propiedad de la circunferencia. A estas soluciones se les asignó el nivel muy alto en las dos categorizaciones consideradas.

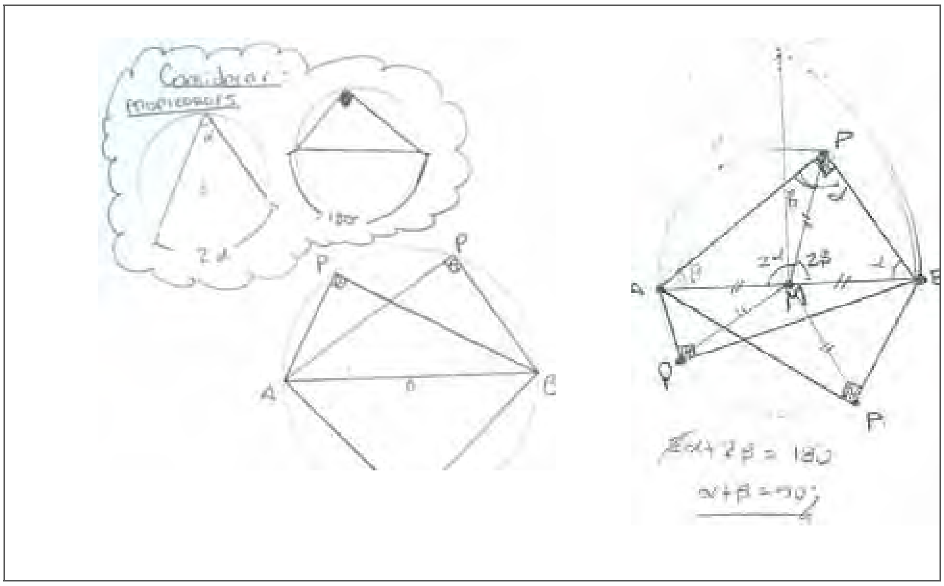


Figura 7.30. Respuesta de las parejas 16 y 8 del ciclo II

En la solución mostrada en la figura 7.31. se observa que los estudiantes justificaron con un dibujo, que ilustra una propiedad, por qué el lugar geométrico no puede incluir puntos interiores o exteriores a la circunferencia. Este es un ejemplo de una respuesta que se consideró en el nivel muy alto en las dos categorizaciones consideradas.

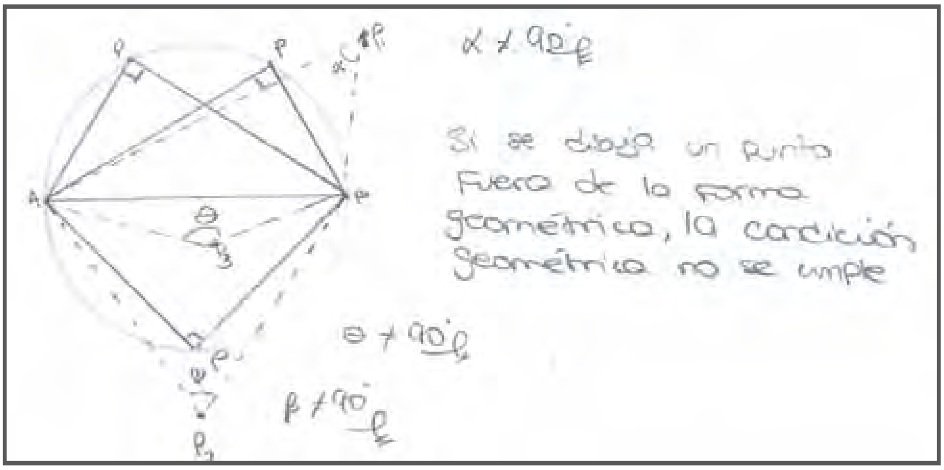


Figura 7.31. Respuesta de la pareja 7 del ciclo IV

En la figura 7.32. se muestra que la pareja de alumnos construyó de manera exacta la circunferencia de diámetro *AB* y dio como lugar geométrico la circunferencia sin *A* y *B*, como puede observarse por los círculos sin rellenar que dibujaron alrededor de esos puntos. En el texto que acompaña el dibujo anotaron lo siguiente: *Los puntos P forman una circunferencia con diámetro AB*. Además, colocan como restricción: *P≠A* y *P≠B*. Esta solución se consideró de nivel muy alto en relación a la concepción de lugar geométrico y en el nivel alto respecto a la pertinencia matemática ya que sólo faltó hacer explícita la propiedad que justificaba el que los ángulos APB fueran rectos.

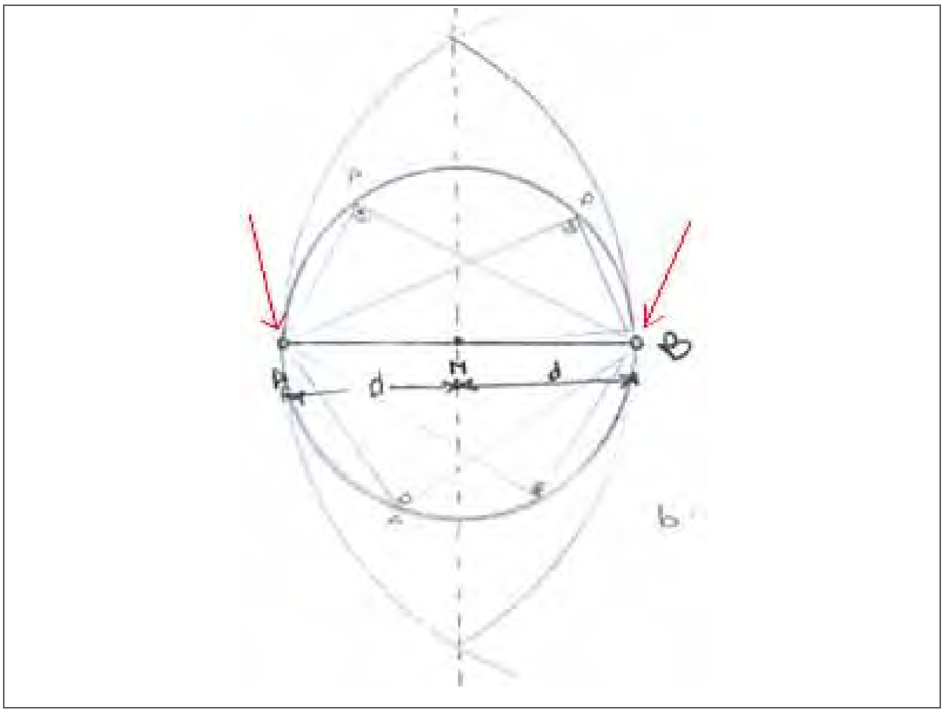


Figura 7.32. Respuesta de la pareja 8 del ciclo I

Fueron más frecuentes las soluciones en las que se incluyó a *A* y *B* como parte del conjunto solución que aquellas otras en las que se excluyeron; uno de esos casos es el que corresponde a la figura 7.33., donde A y B forman parte del lugar geométrico. Esta respuesta fue ubicada en el nivel muy alto en relación a la concepción de lugar geométrico y alto en lo que se refiere a la solución matemática ya que no se indicó cual era la propiedad que justificaba la forma adoptada.

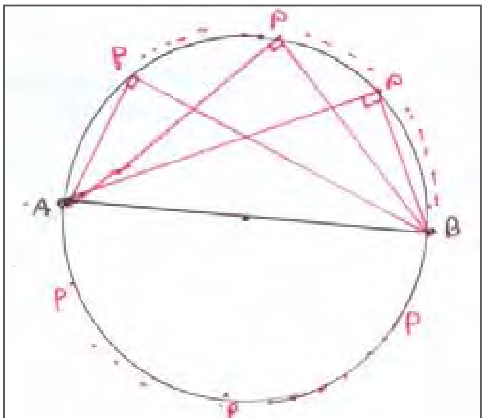


Figura 7.33. Respuesta de la pareja 7 del ciclo V

Otros estudiantes mostraron poseer una visión dinámica de lugar geométrico pues a cada punto *P* le asociaron un triángulo rectángulo, pero no identificaron todos los puntos del plano que satisfacían la condición geométrica dada y consideraron sólo una semicircunferencia. Esta fue la razón por la que esas respuestas fueron ubicadas en el nivel alto respecto a la concepción de lugar geométrico. De otro lado, dado que no justificaron en qué propiedad basaron su solución, también se les asignó el nivel alto en relación a la pertinencia matemática. Un ejemplo de esta situación se ilustra en la figura 7.34.

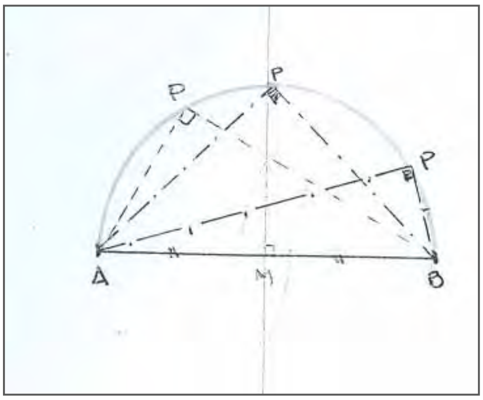


Figura 7.34. Respuesta de la pareja 12 del ciclo II

Se encontraron algunas parejas de estudiantes que comprendieron la condición dada e identificaron puntos del lugar geométrico en la intersección de cada par de rectas perpendiculares, una que pasaba por *A* y la otra por *B* (aunque debieron emplear el término “cortar”, en lugar de cruzar por tratarse de un problema en el plano). La figura 7.35. corresponde a uno de esos casos. En ella se muestra que la pareja de estudiantes poseía una visión dinámica de lugar geométrico. Sin embargo, no trazaron la circunferencia que unía esos puntos. Según los criterios definidos previamente, respuestas como esta se ubicaron en el nivel alto al mostrar una concepción dinámica de lugar geométrico pero que considera sólo algunos puntos. Respecto a la pertinencia matemática, la solución se ubicó en el nivel medio pues si bien el procedimiento fue correcto, no se reconoció la propiedad de la circunferencia que hubiera permitido identificar el lugar geométrico.

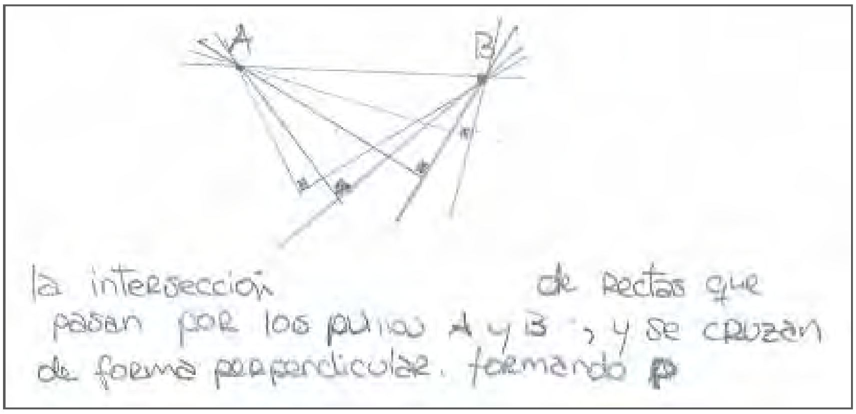


Figura 7.35. Respuesta de la pareja 6 del ciclo I

Con la figura 7.36. se ilustran aquellas soluciones en las que los estudiantes dieron como lugar geométrico una solución particular, en este caso dieron sólo un punto, *P*, que generaba un triángulo rectángulo isósceles, pero en la que tampoco se consideró el punto simétrico de *P* respecto de *AB*. Así, se trata de una visión estática de lugar geométrico que además no considera todos los puntos; esta solución fue catalogada dentro de las que se encuentran en el nivel bajo respecto a la concepción de lugar geométrico. Respecto a la pertinencia matemática, fue ubicada en el nivel medio al resolver el problema sólo con un caso particular.

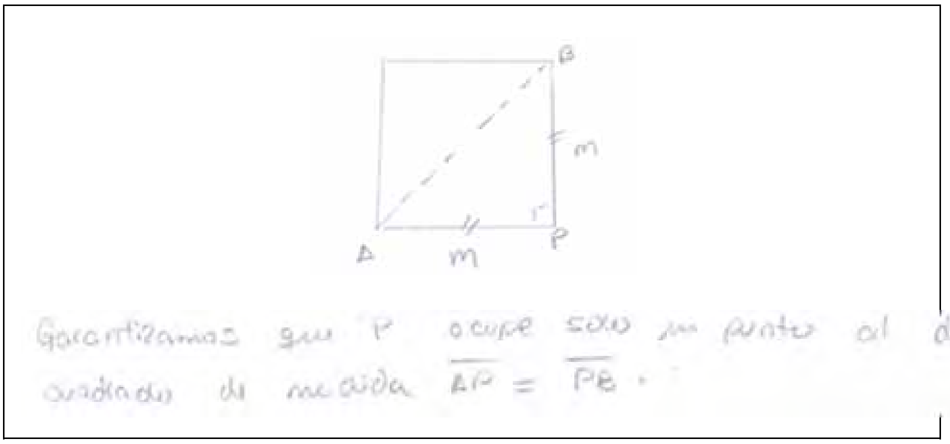


Figura 7.36. Respuesta de la pareja 17 del ciclo V

La figura 7.37. muestra una solución en donde no queda claro cómo se han generado los puntos *P*, ni si su intención fue dar como respuesta toda la circunferencia y tampoco se evidencia que hayan reconocido la condición dinámica con la que deben generarse los puntos *P*. Al dar como respuesta sólo algunos puntos del lugar, se les asignó un nivel bajo en relación a la primera categorización. En relación a la segunda categorización se les asignó el nivel nulo pues aunque reconocieron que el trazado de la circunferencia era parte de la estrategia de solución, no reconocieron que los triángulos que debían construirse debían tener vértices en A, P y B.

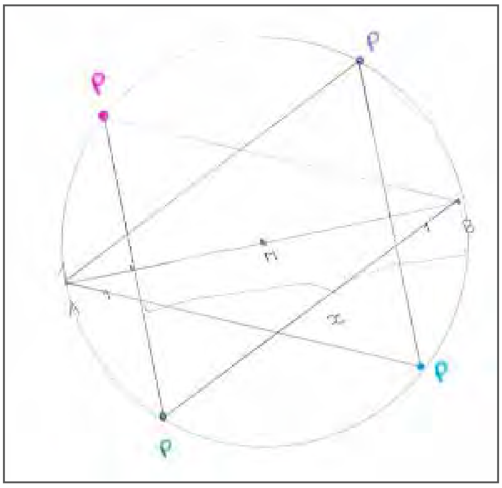


Figura 7.37. Respuesta de la pareja 3 del ciclo I

De otro lado, se observó que en esta tarea la mayoría de construcciones realizadas sí fue exacta, tal como consta en las figuras 7.32., 7.33. y 7.34. Esto puede atribuirse a que la construcción de la circunferencia requería básicamente sólo del trazado de la mediatriz del segmento AB. Sin embargo, para el trazado de perpendiculares todavía se encontraron construcciones que fueron sólo aproximadas.

En general, la mayoría de respuestas de los alumnos muestran que comprendieron la condición geométrica dada, la tradujeron adecuadamente al construir triángulos *ABP* rectos en *P* y encontraron que la solución del problema no era un único punto. En los cinco ciclos, un gran número de alumnos reconoció de antemano la forma del lugar geométrico y lo construyó desde el inicio, sin que fuera necesario construir puntos particulares. Algunos alumnos hicieron referencia explícita a la propiedad de la circunferencia que justifica que la construcción realizada es solución del problema; otros sólo la mencionaron.

7.3.4. RESULTADOS CUANTITATIVOS SOBRE LUGAR GEOMÉTRICO

Tarea 1

La cantidad de estudiantes que participó en esta etapa del estudio se muestra en la tabla 7.10.

Tabla 7.10. Cantidad de parejas de estudiantes que dio respuesta al apartado 2

	Ciclo I	**Ciclo II**	**Ciclo III**	**Ciclo IV**	**Ciclo V**
Número total de parejas que respondieron las tareas propuestas	14	18	17	14	18

Luego de analizar las respuestas de todos los estudiantes, éstas se organizaron en tablas de frecuencias porcentuales y gráficos para tener una idea global del comportamiento del grupo en relación al apartado de lugar geométrico.

La tabla 7.11. corresponde a los resultados globales obtenidos durante los cuatro ciclos en los que se planteó la tarea 1 para identificar la concepción de lugar geométrico que tenían los estudiantes.

Tabla 7.11. Porcentaje por nivel según la concepción de lugar geométrico-tarea 1

Niveles	**Ciclo I**	**Ciclo II**	**Ciclo III**	**Ciclo V**
	%	%	%	%
Muy alto	7,14	55,55	88,24	66,68
Alto	21,43	16,67	5,88	16,67
Medio	35,71	16,67	5,88	5,55
Bajo	28,58	0	0	5,55
Nulo	7,14	11,11	0	5,55

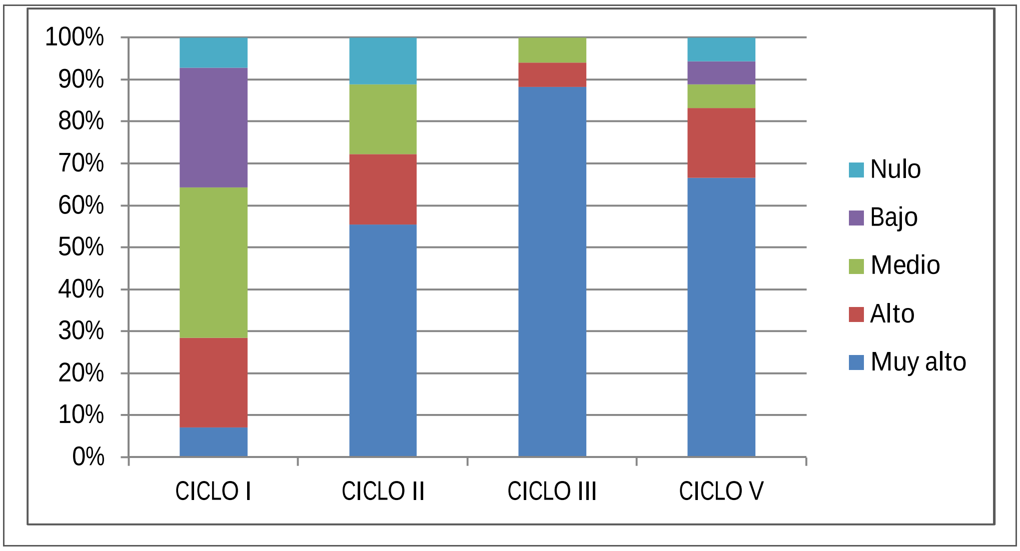


Figura 7.38. Gráfico de frecuencias sobre concepción de lugar geométrico–tarea 1

En la figura 7.38. se puede observar que, tanto del ciclo I al II, como del II al III, hubo un incremento en el porcentaje de parejas que identificaron todos los puntos del lugar geométrico y no sólo algunos; esto significa que buscaron en el plano todos los puntos que cumplían la condición dada, y que no se quedaron con la primera solución que encontraron. Esto se considera muy positivo para los fines de la investigación.

En particular, en el ciclo III la mayoría de parejas identificó a las dos rectas paralelas como lugar geométrico y en sus soluciones mostraron que asociaban a cada punto de la recta original, un punto en cada recta paralela. Se asocia este resultado a la incorporación del programa de geometría dinámica en dicho ciclo, herramienta que en el ciclo V se empleó en otras actividades pero no en ésta, lo que explicaría la disminución en el porcentaje de alumnos ubicados en el nivel muy alto durante la última implementación.

A pesar de ello, se observa que en los últimos ciclos, más del 60% de estudiantes adoptó una concepción global y dinámica del concepto lugar geométrico. Esto es algo positivo y representa un progreso respecto a la forma como se abordaron los problemas de lugar geométrico en la etapa exploratoria.

La tabla 7.12. corresponde a los resultados globales obtenidos durante los cuatro ciclos en los que se planteó la Tarea 1 a los estudiantes para identificar si sus soluciones eran matemáticamente correctas.

Tabla 7.12. Porcentaje por nivel según la solución matemática-tarea 1

Niveles	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo V
	%	%	%	%
Muy alto	21,43	44,44	82,36	72,22
Alto	21,43	5,56	0	0
Medio	14,29	11,11	5,88	0
Bajo	28,56	11,11	0	16,67
Nulo	14,29	27,78	11,76	11,11

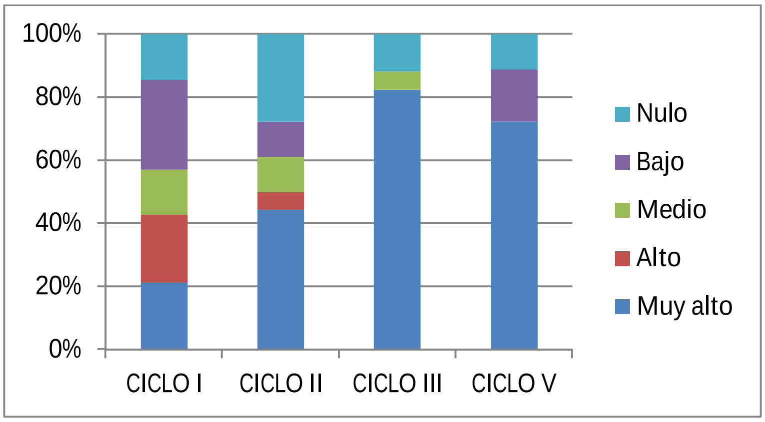


Figura 7.39. Gráfico de frecuencias sobre la solución matemática –tarea 1

En la figura 7.39. se observa que, si bien en el primer ciclo sólo un porcentaje pequeño dio solución correcta al problema, a partir del segundo ciclo, más del 50% de alumnos respondió con éxito la pregunta. La noción de distancia entre objetos como la mínima distancia posible fue un concepto que ya en las últimas experimentaciones no suscitó dudas.

Como la construcción de los puntos del lugar geométrico requería del trazado de circunferencias y luego de rectas perpendiculares, el uso de un programa de geometría dinámica en el tercer ciclo fue favorable ya que permitió que los estudiantes se centraran en la estrategia de solución. El no usarlo en el quinto ciclo podría justificar la disminución en el porcentaje de estudiantes que fueron ubicados en el nivel muy alto. Esto confirma que es más fácil usar las herramientas de dibujo que ofrece un programa de geometría que las herramientas manipulativas de dibujo.

En relación a la pertinencia matemática de la solución, la principal razón por la que algunos alumnos obtuvieron una respuesta errónea para el lugar geométrico fue que confundieron el objeto recta con su representación figural, asumiendo que el segmento dibujado era la recta.

Tarea 2

La tabla 7.13. corresponde a los resultados globales obtenidos durante los cinco ciclos en los que se planteó la Tarea 2 a los estudiantes para identificar su concepción sobre lugar geométrico.

Tabla 7.13.Porcentaje por nivel según la concepción de lugar geométrico-tarea 2

Niveles	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
	%	%	%	%	%
Muy alto	28,58	83,32	70,59	50,0	55,56
Alto	14,28	5,56	23,53	21,42	33,33
Medio	28,58	5,56	0	0	11,11
Bajo	14,28	5,56	0	14,29	0
Nulo	14,28	0	5,88	14,29	0

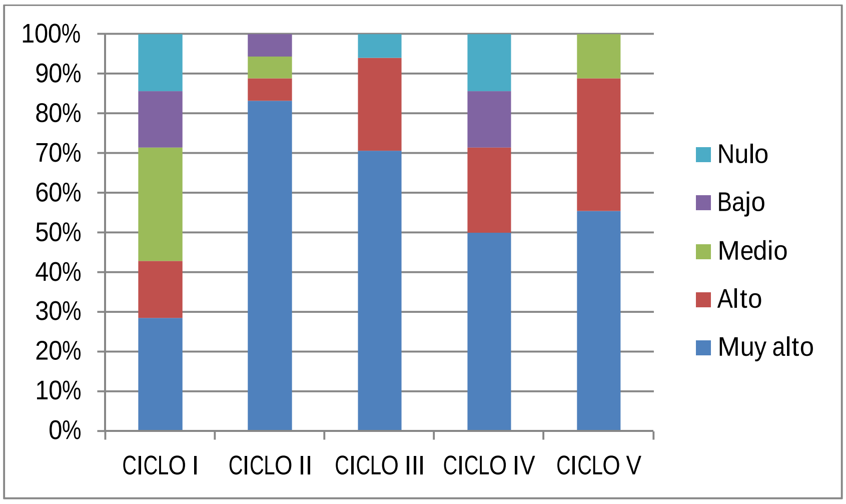


Figura 7.40. Gráfico de frecuencias sobre la concepción de lugar geométrico –tarea 2

Los resultados obtenidos a partir del ciclo II fueron positivos, tal como se observa en la figura 7.40.; destacan los resultados del tercer ciclo en donde se empleó un recurso informático.

En general, la situación fue abordada por casi todos los alumnos y contribuyó a que reconocieran que el lugar geométrico podía ser una circunferencia, aunque en algunos casos dieron como solución una semicircunferencia.

La tabla 7.14.corresponde a los resultados obtenidos durante los cinco ciclos en los que se planteó la Tarea 2 y en donde el foco de atención fue la pertinencia matemática de la solución.

Tabla 7.14. Porcentaje por nivel según la solución matemática-tarea 2

Niveles	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
	%	%	%	%	%
Muy alto	35,71	72,22	88,24	71,43	77,78
Alto	7,14	16,67	5,88	0	0
Medio	28,57	5,56	0	14,29	22,22
Bajo	21,43	5,56	5,88	7,14	0
Nulo	7,14	0	0	7,14	0

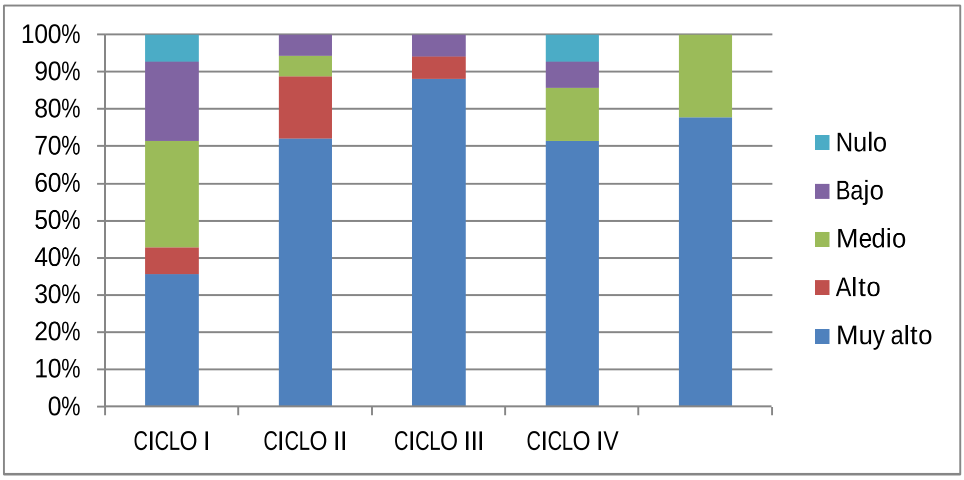


Figura 7.41. Gráfico de frecuencias sobre la solución matemática –tarea 2

Como se observa en la figura 7.41., los resultados obtenidos a partir del segundo ciclo muestran que esta segunda tarea resultó estar al alcance de más del 70% de los estudiantes, pudiendo encontrar la estrategia de solución que les permitió identificar el lugar geométrico y en algunos casos incluso justificaron formalmente su respuesta. Lo hicieron empleando el registro figural y simbólico para representar la propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia que tiene uno de los lados como diámetro. Sin embargo, en otros casos, las justificaciones no fueron explícitas.

Los niveles de éxito alcanzados en ambas tareas son similares. Aunque el número de UEI difieren entre ambas tareas pues la tarea 1 tiene asociadas 13 UEI y la tarea 2 sólo 6 UEI, el nivel de dificultad es similar pues en la tarea

1 un mismo procedimiento se realiza dos veces. En la tarea 1 las UEI son las que siguen: las descritas al construir una mediatriz (4UE), una circunferencia conociendo centro y radio (1UE), y luego construir puntos de intersección de dos objetos dados (1UE), se repite el procedimiento para hallar otro punto de la recta y luego se construye una recta conociendo dos puntos de paso (1UE). Cabe señalar que no se solicitó de manera explícita la construcción exacta de la recta paralela. En la tarea 2, las UEI son las consideradas al construir el punto medio (5UE) y luego construir una circunferencia conociendo su centro y radio (1UE).

7.3.5. REFLEXIONES

Se puede decir que el nivel de éxito al realizar la tarea 1, en general fue alto. Los cambios realizados en la organización de los problemas de construcciones favoreció la identificación del procedimiento solución en el caso de las tareas de lugar geométrico. Contribuyó también para ello el que los estudiantes tuvieran una concepción adecuada de distancia entre objetos.

Aquellos estudiantes que no interpretaron adecuadamente la noción de distancia de un punto a una recta como la mínima, obtuvieron lugares geométricos distintos. Debería considerarse el reforzar la comprensión de la noción de distancia entre objetos para evitar que se confunda con la condición de estar alineados o de equidistar.

En general, la tarea 1 estuvo al alcance de la mayor parte de los estudiantes y fue adecuada para reconocer los dos aspectos fundamentales de la noción de lugar geométrico: el que se consideren todos los puntos del conjunto y el que cada elemento del lugar geométrico satisfaga la condición dada.

Entre los principales obstáculos detectados en todos los ciclos de la implementación se encuentra el que algunos estudiantes confundieron la recta con el segmento que la representaba; esto ocasionó que dieran como lugar geométrico un rectángulo o un *óvalo*. Aunque afortunadamente no fueron respuestas muy frecuentes, se debería considerar en siguientes experimentaciones actividades donde se considere este aspecto de la discusión en el que se enfatice en que no se debe confundir el objeto con su representación.

La segunda tarea también cumplió su objetivo ya que la mayoría de estudiantes concibió al lugar geométrico como un conjunto de puntos que se generaba por una condición dinámica: a cada punto de la circunferencia le asociaron segmentos perpendiculares entre sí que pasaban por A y B. Además, los alumnos consideraron todos los puntos que éste lugar geométrico incluía, aunque en algunos casos añadieron puntos que no debían estar (los puntos A y B) y en otros dieron como respuesta la semicircunferencia. Consideramos que el haber trabajado con la construcción de una circunferencia a partir de su diámetro en problemas de construcciones abordados previamente, contribuyó a que los estudiantes identificaran la forma que adoptaba dicho lugar.

Es importante resaltar que la incorporación de la herramienta informática en el ciclo III favoreció la adquisición de una concepción dinámica del concepto lugar geométrico pues contribuyó a que los estudiantes fueran hallando, uno a uno, los puntos como intersección de rectas perpendiculares.

Otro aspecto positivo del uso del programa de geometría dinámica fue que permitió a los alumnos llevar adelante una estrategia de solución sin tener que preocuparse por la exactitud de sus construcciones; a cambio, los obligó a reconocer los datos y la condición geométrica que había sido dada.

Un rasgo negativo del uso del programa informático fue que algunos estudiantes consideraron innecesario explicar por escrito el procedimiento empleado; probablemente esto ocurrió porque asumieron que estaba justificado con el uso del programa.

Recordemos que los resultados del trabajo exploratorio daban cuenta que estudiantes de arquitectura con características similares a los que participaron de esta experimentación dieron como respuesta sólo un elemento particular del conjunto, al resolver tareas de lugar geométrico. En ese trabajo donde los problemas de LG se plantearon directamente en el marco algebraico. Teniendo en cuenta dicho trabajo exploratorio y los resultados de éste, se valora positivamente la introducción del LG en el marco geométrico ya que favoreció que los alumnos adquirieran una concepción dinámica y global de LG, dejando de lado la concepción puntual que poseían.

Puede decirse que el proceso de instrucción implementado favoreció la construcción de una concepción más completa de LG, lo que era un requisito fundamental para abordar problemas más complejos, en particular, aquellos que permitirán justificar la introducción de la geometría analítica.

De otro lado, en esta etapa de la investigación se observó que, en general, las construcciones geométricas fueron más precisas que aquellas que se realizaron en las actividades sobre construcciones con regla y compás, comentadas en el apartado anterior. Esto puede ser un indicio de que la concepción de construcción exacta que poseían los alumnos fue evolucionando positivamente conforme iba avanzando el curso.

Finalmente, debe notarse que el éxito obtenido en la realización de las dos tareas guarda relación con el poco número de unidades que requerían las dos tareas.

7.4. CONEXIONES ENTRE LAS REPRESENTACIONES DE UN MISMO OBJETO MATEMÁTICO.

Otro aspecto de interés para la investigación fue identificar los efectos que tendrían en los aprendizajes de los estudiantes el abordar problemas equivalentes en contextos sintético y algebraico, o problemas no completamente equivalentes pero en los cuales los resultados obtenidos en uno de ellos pudieran ayudar a comprender lo que debía hacerse en el otro. Así, se plantearon tareas para explorar la capacidad que poseían los estudiantes para establecer conexiones entre las representaciones de los mismos objetos a través de conversiones o tratamientos. Para lograrlo, se analizó la actividad matemática desarrollada por los alumnos tanto en el marco geométrico como en el algebraico.

7.4.1. CATEGORIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS SOBRE CONEXIONES ENTRE DISTINTAS REPRESENTACIONES

Para analizar las respuestas que dieron los estudiantes a las situaciones que requerían establecer conexiones entre representaciones de un mismo objeto matemático, se consideraron dos aspectos: la eficiencia de la estrategia de solución empleada en distintos contextos y la capacidad para realizar transformaciones entre distintos registros de representación.

Para analizar la eficiencia de la estrategia de solución empleada en distintos contextos, se consideró el proceso de solución completo, enfatizando en la pertinencia matemática de la estrategia empleada. Se aplicó a aquellas tareas que fueron planteadas en varios contextos, aunque no fueran necesariamente equivalentes. Importaba reconocer el marco en el que la tarea estuvo más al alcance de los estudiantes (algebraico o geométrico), reconociendo cuando ésta había sido resuelta exitosamente.

Para la categorización de las respuestas se consideraron los siguientes aspectos:

- Resolver el problema en el contexto en el que éste fue planteado.
- Identificar las UEI empleadas con éxito en el proceso de solución de modo. Se consideró una solución como parcial cuando se empleó sólo un determinado número de ellas.

En la tabla 7.15. se describe lo que un alumno debió hacer para ser ubicado en un determinado nivel de este aspecto.

Tabla 7.15. Descripción de niveles respecto a la eficiencia de la estrategia empleada

Niveles	Descripción
Muy alto	Resuelve exitosamente la tarea en dos contextos, es decir, emplea todas las UEI que permiten dar respuesta al problema
Alto	Resuelve exitosamente la tarea en un contexto y en otro contexto lo hace parcialmente, lo que significa que en el segundo contexto solo emplea algunas de las UEI necesarias para dar respuesta al problema.
Medio	Resuelve exitosamente la tarea en un contexto pero no la resuelve en otro contexto, lo que significa que no emplea ninguna de las UEI necesarias para resolver el problema en el segundo contexto.
Bajo	Resuelve sólo parcialmente la tarea en al menos un contexto, lo que significa que sólo emplea algunas de las UEI necesarias para resolver el problema en al menos un contexto
Nulo	No resuelve la tarea en ningún contexto

La categorización de las respuestas de los estudiantes, respecto a las transformaciones entre distintos registros de representación, se hizo teniendo en cuenta los siguientes aspectos.

- Realizar tratamientos en un mismo registro de representación. Por ejemplo, encontrar expresiones simbólicas equivalentes a una expresión algebraica de partida.
- Establecer conexiones entre los procedimientos empleados en distintos registros. Por ejemplo, asociar el resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos variables con la identificación de los puntos de intersección de las rectas representadas gráficamente correspondientes a dichas ecuaciones.
- Establecer conexiones entre respuestas halladas en distintos registros de representación. Por ejemplo, establecer relación entre el número de soluciones hallado analíticamente y el número de soluciones sintéticas o gráficas, según corresponda.

En la tabla 7.16. se describe lo que un alumno debió hacer para ser ubicado en un determinado nivel de este aspecto.

Tabla 7.16. Descripción de niveles respecto a las transformaciones entre registros

Niveles	Descripción
Muy alto	Realiza adecuadamente todos los tratamientos y conversiones que requiere el problema. En los casos en los que se aplique, establece conexiones entre las soluciones encontradas en distintos contextos.
Alto	Realiza adecuadamente todas las conversiones y casi todos los tratamientos que requiere el problema
Medio	Realiza adecuadamente todos los tratamientos pero no todas las conversiones que requiere el problema
Bajo	Realiza sólo algunas transformaciones en un mismo registro, necesarias para la solución y sólo realiza las conversiones que son inmediatas

Nulo	No realiza ni tratamientos ni conversiones

7.4.2. TAREAS PROPUESTAS

En la tabla 7.17. se presentan las tareas propuestas a los estudiantes para la obtención de los datos.

Tabla 7.17. Cuestiones propuestas para evaluar el apartado 3

Ciclo I	**Tarea 1:** a)Respecto al triángulo *ABC* se sabe que un lado tiene longitud *a* y se conocen también las longitudes de los segmentos altura, *h*, y mediana, *m*, relativos a dicho lado. Usa regla y compás y construye el triángulo *ABC*. (Problema 19.2 del Anexo 3) b)Dados los vértices *B*(-3,-2) y *C*(3,4), la recta $y = -\frac{3}{2}x + 1$ que contiene a la mediana relativa al lado *BC* y la recta $y = -x + 3$ que contiene a la altura relativa al lado *BC*, halla las coordenadas del vértice *A*. (Problema 19.1 del Anexo 3)
Ciclo II	**Tarea 2:** a) Considera dos puntos *A* y *B* y la distancia entre *A* y *B* denotada por la constante *a*. Construye un punto *P* tal que la suma de los cuadrados de las distancias de *P* a los dos puntos dados *A* y *B* sea a^2. Construye otro posible punto *P*, siguiendo el mismo razonamiento empleado en la parte a). Señala la forma que tendrá el lugar geométrico descrito por los puntos *P* que satisfacen la condición dada. Señala si corresponde a alguna curva conocida. b)Considera los puntos fijos *A*(0,8) y *B*(0,12). Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos *P*(*x*,*y*) del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancia a *A* y *B* sea 16. Según la ecuación obtenida en el paso anterior, señala a qué curva corresponde el lugar geométrico descrito por los puntos *P*. Justifica tu respuesta. c) Explica la relación que existe entre las preguntas a) y b). (problema 22 del anexo 3)
Ciclo III	**Tarea 3:** a)Considera dos puntos fijos *A* y *B* cuya distancia es 3 unidades. Usa regla y compás, y ubica un punto del plano tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a *A* y a *B* sea 16 unidades. Señala la forma que tendrá el conjunto de puntos que cumplen con la condición descrita. b)Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos *A*(1;0) y *B*(4;0) sea 16. Grafica la curva que satisface ecuación hallada y señala sus elementos más importantes.(Problema 23 del anexo 3)
Ciclo IV	**Tarea 4:** Dados puntos fijos *A* y *B* en el plano, los puntos *P*(*x*,*y*) cumplen la siguiente propiedad: La suma del cuadrado de la distancia de *A* a *P* y del doble del cuadrado de la distancia de *B* a *P* es 22. Teniendo en cuenta lo anterior, responde las siguientes preguntas: a) Considera puntos que distan de *A* en 2 unidades (represéntalos por una

	circunferencia con centro en *A* y radio 2); considera puntos que distan de *B* en 3 unidades (represéntalos por una circunferencia con centro en *B* y radio 3) y construye los puntos de intersección de las dos circunferencias. Justifica por qué se afirma que dichos puntos son puntos del lugar geométrico descrito. b) De manera similar a la descrita en la parte a), encuentra más puntos del lugar geométrico. Señala la forma que éste adopta. Si los puntos *A* y *B* tienen coordenadas (1,0) y (3,4), respectivamente, d) Determina la ecuación tiene dicho lugar geométrico. e) Grafica el lugar geométrico a partir de la ecuación obtenida en d) Describe la relación que existe entre las preguntas b) y e). (Variante del Problema 23 del Anexo 3)
Ciclo V	**Tarea 5:** Considera dos puntos fijos *A* y *B* que distan entre sí en 3 unidades. a)Usa regla y compás y construye un punto *P* en el plano tal que la suma del cuadrado de la distancia de *P* a *A* y del cuadrado de la distancia de *P* a *B* sea 16 unidades. Explica con detalle los pasos de tu construcción. b) Señala la forma que tendrá el conjunto de puntos *P* que cumple con la condición dada. Si *A* tiene coordenadas (0,1) y *B* tiene coordenadas (0,4), c)Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la suma del cuadrado de la distancia de *P* a *A* y del cuadrado de la distancia de *P* a *B* sea 16 unidades. d)Grafica la ecuación hallada en c), señalando sus elementos más importante. e)Determina la relación que existe entre los procedimientos seguidos para responder las preguntas a) y c). Determina el lugar geométrico en la parte b. (Problema 23 del anexo 3)

Las soluciones de los problemas abordados, tanto en contexto sintético como algebraico, aparecen en el anexo 3. Ahí se señalan las UEI asociadas a cada procedimiento de solución. La descripción de las tareas de geometría sintética y de geometría analítica empleando las UEI permitirá pronosticar en cuáles de ellas los estudiantes podrían manifestar mayores dificultades al intentar resolverlas

Se puede observar que en el ciclo I las tareas propuestas en el marco geométrico y algebraico no fueron equivalentes; así, mientras que en el primer caso se debían emplear 19UE, en el segundo sólo se necesitaba de 1UE.

De otro lado, no sólo se trata de un mayor número de pasos en la solución geométrica sino que además en ese contexto los datos de la altura y la mediana de un triángulo se deben interpretar en términos de construcciones para lo que se requiere reconocer las propiedades que estas líneas notables satisfacen. Esto permite predecir que el nivel de éxito en el marco algebraico será mayor que en el marco geométrico.

Respecto a las tareas propuestas en los ciclos II, III, IV y V se afirma que mientras que si bien los enunciados fueron equivalentes, los procedimientos de solución en los dos marcos no lo fueron. Esto se verifica al comparar el número de UEI necesarias para dar solución a los problemas, donde se tiene que en el marco geométrico no fueron menos de 6UE, mientras que en el marco algebraico sólo fueron 2UE. También se podrá explorar la capacidad de los estudiantes para establecer relaciones entre los resultados obtenidos al resolver problemas equivalentes en distintos contextos

De otro lado, las respuestas a las tareas propuestas en los cinco ciclos permitirán identificar si los estudiantes pueden realizar transformaciones de un mismo objeto matemático y reconocerlo en sus distintas representaciones.

7.4.3. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS RESPUESTAS

Se seleccionaron algunas soluciones para mostrar de qué manera se llevó a cabo el análisis en cada una de las tareas. Las respuestas se presentan en tablas de frecuencias porcentuales para cada categorización considerada en este apartado. Esta información permitirá tener una idea global del comportamiento del grupo en relación a su capacidad para establecer conexiones entre las representaciones de un mismo objeto matemático y a la eficiencia de la estrategia empleada.

A continuación se presenta el análisis de algunas respuestas de los estudiantes donde se indica el nivel asignado en relación a los aspectos que se consideraron de interés en este apartado.

Ciclo I

En este primer ciclo de la experimentación no se tenían muchas expectativas respecto a que el trabajo realizado en el marco geométrico tuviera resultados positivos pues no se había implementado aún la secuencia didáctica que en los siguientes ciclos fue tomando forma. Los resultados confirmaron estas sospechas: la mitad de los estudiantes no pudo abordar el problema en ninguno de los dos contextos, ni siquiera parcialmente. Por lo que se puede decir que esta actividad resultó bastante compleja para ellos.

En la figura 7.42. se presenta una de las pocas soluciones geométricas en las que el estudiante tradujo adecuadamente lo que significaba tener como datos la altura y la mediana y ubicó al vértice A en la intersección de dos objetos conocidos.

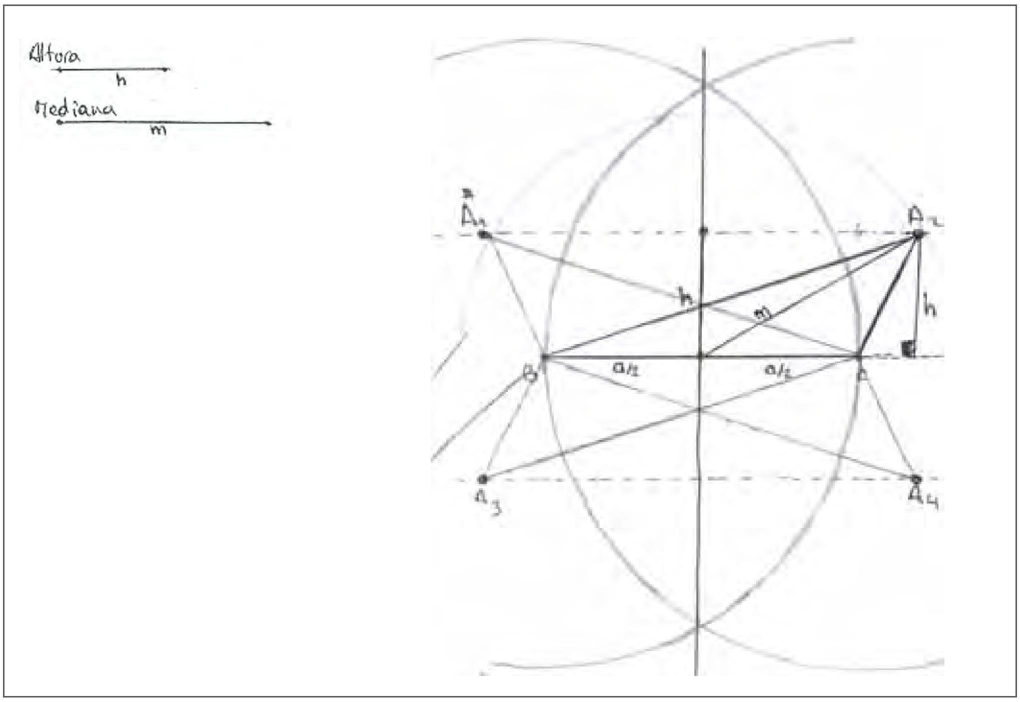


Figura 7.42. Respuesta sintética del alumno 26 del ciclo I

Este estudiante interpretó los datos dados en lenguaje verbal y los transformó en construcciones. Así, el dato de la altura *h* fue interpretado como construir una recta paralela al segmento BC, ubicada a la distancia *h*, aunque la construcción que realizó no fue exacta. El dato de la mediana fue interpretado como construir una circunferencia de centro el punto medio del lado de longitud *a* y radio la longitud de la mediana *m*; esta construcción sí fue exacta. Este alumno reconoció que el vértice buscado estaba en la intersección de la recta paralela y de la circunferencia lo que significa que realizó una configuración a partir de los datos y de propiedades ya aprendidas; dicha configuración puede interpretarse como una conversión del registro de lengua natural al registro figural.

La solución algebraica de este estudiante, correspondiente a la figura 7.43., también es correcta. Reconoció que el vértice *A* pertenecía a las dos rectas dadas e identificó el punto de intersección de las rectas con la solución de un sistema de ecuaciones, resolvió el sistema y dio como respuesta al par ordenado cuyas coordenadas corresponden a la solución encontrada.

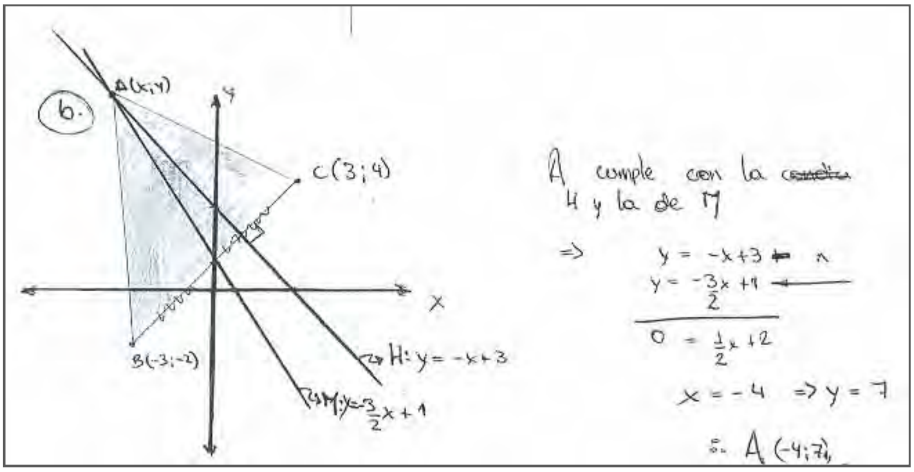


Figura 7.43. Respuesta algebraica del alumno 26 del ciclo I

En relación a las transformaciones realizadas y también en lo que se refiere a la eficiencia de la estrategia matemática asociada al empleo de las UEI necesarias, dicha solución fue ubicada en el nivel muy alto.

La solución de la figura 7.44. corresponde a la de un estudiante que dio valores específicos para *m* y *h*, construyó la circunferencia adecuada, trazó la paralela con escuadras e identificó el vértice *A* en la intersección, reconociendo que había 4 soluciones. Aunque consideró valores particulares para *m* y *h*, la solución mostrada corresponde a una prueba pre formal, en el sentido de Van Ash (1993), ya que el razonamiento seguido es el mismo que debió seguirse para el caso general, es decir, la idea esencial está presente. Las UEI empleadas en la solución corresponden a las previstas en la solución ideal.

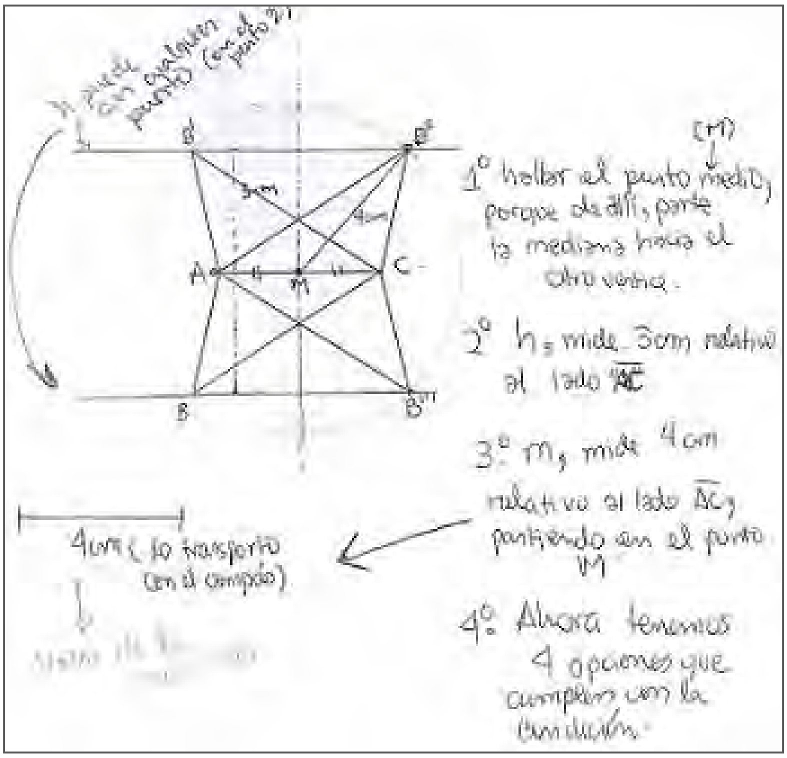


Figura 7.44. Respuesta sintética del alumno 28 del ciclo I

En relación a la solución algebraica de este mismo alumno, en la figura 7.45. se tiene que reconoció que el vértice A se encontraba en la intersección de las rectas que eran datos, lo que se refleja en el gráfico realizado y en la búsqueda de solución a un sistema de ecuaciones lineales que luego asoció a las coordenadas del vértice A. En lo que se refiere a las transformaciones realizadas y a la eficiencia de las estrategias matemáticas, esta solución también fue ubicada en el nivel muy alto.

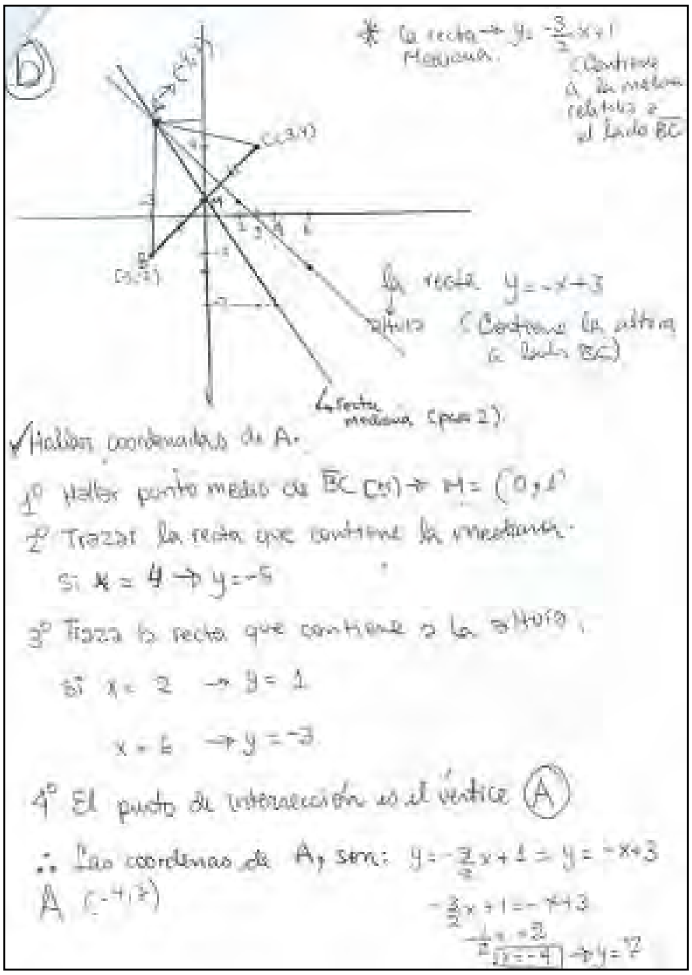


Figura 7.45. Respuesta algebraica del alumno 28 del ciclo I

La figura 7.46. corresponde a la solución de un estudiante que mostró conocer la definición de mediana y de altura, lo que se evidencia en el dibujo del triángulo de la derecha. En términos de UEI, construyó una circunferencia con centro en el punto medio del lado conocido y radio *m* y una paralela a la distancia *h*; sin embargo, la representación que empleó no contribuyó a encontrar la solución ya que en el dibujo realizado la recta paralela y la circunferencia no se intersecaban.

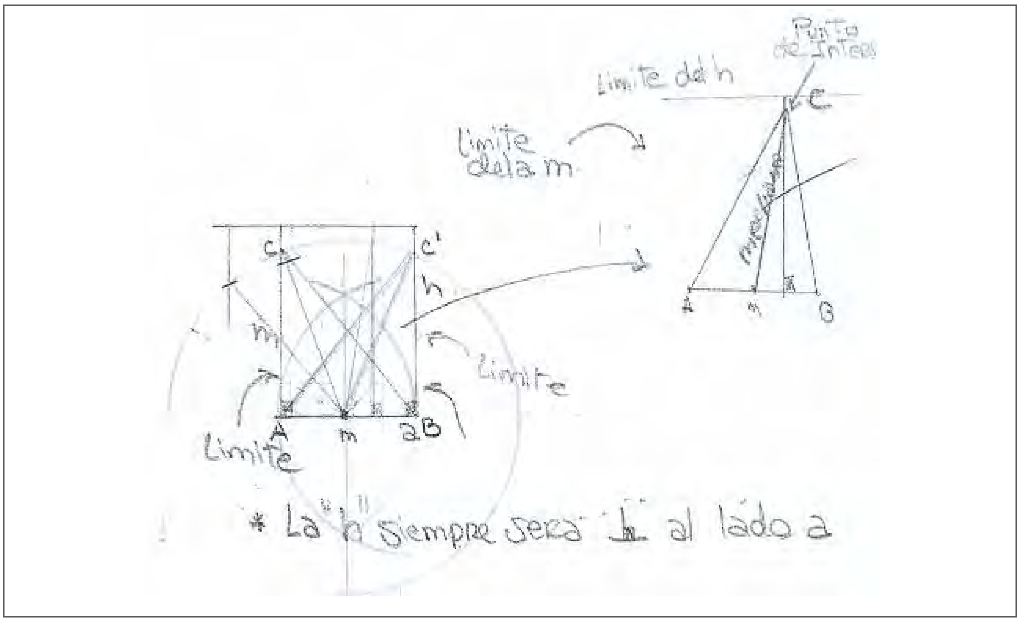


Figura 7.46. Respuesta sintética del alumno 7 del ciclo I

La solución algebraica de este mismo alumno se caracterizó por identificar primero gráficamente al tercer vértice en la intersección de las rectas dadas y luego por reconocer que la solución se encontraba en la solución de un sistema de ecuaciones, tal como se observa en la figura 7.47.

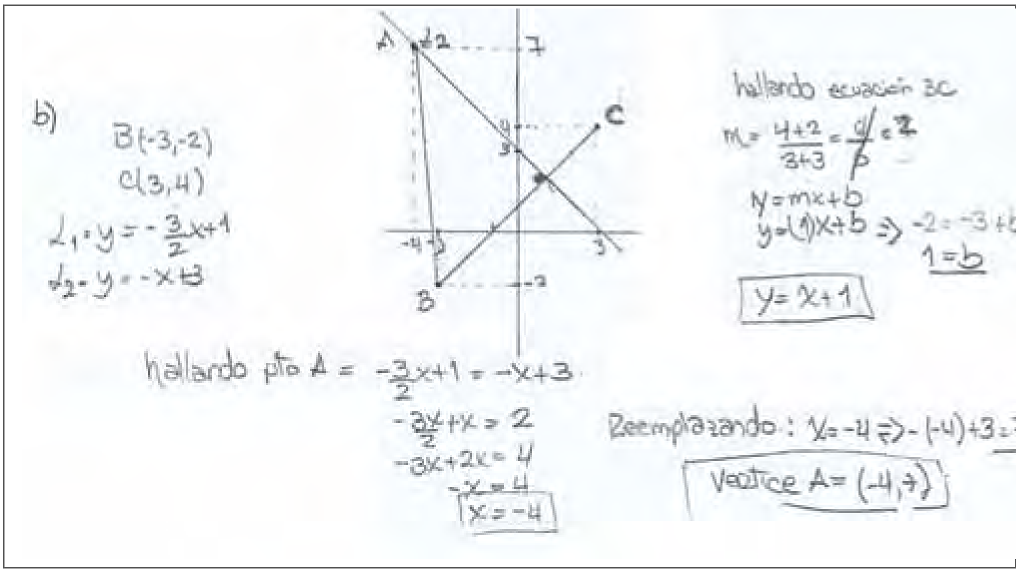


Figura 7.47. Respuesta algebraica del alumno 7 del ciclo I

Según la categorización descrita previamente, a dicho estudiante se le asignó el nivel alto en lo que respecta a la eficiencia de la solución ya que fue completa en el marco algebraico y parcial en el geométrico. En relación a las transformaciones y representaciones, se le asignó el nivel medio ya que no empleó las representaciones adecuadas en el contexto sintético (empleo segmentos de longitud inadecuada para los datos) pero sí empleó representaciones adecuadas en el contexto algebraico.

La figura 7.48. ilustra el caso en que se asumió como dato el triángulo. Esta solución fue catalogada en el nivel medio respecto a la estrategia de la solución ya que el estudiante resolvió correctamente el problema sólo en el contexto algebraico pero no en el otro contexto. Por otro lado, como no se hizo la conversión adecuada de los datos al registro figural, pero sí se interpretaron adecuadamente los datos en el registro gráfico, se le asoció el nivel medio en lo que se refiere a las transformaciones: Realiza adecuadamente todos los tratamientos pero no todas las conversiones que requiere el problema.

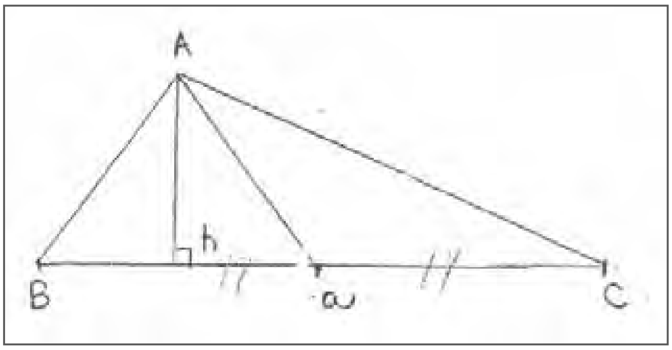


Figura 7.48. Respuesta sintética del alumno 8 del ciclo I

En general, un mayor porcentaje de alumnos resolvió el problema en el contexto algebraico que en el sintético; esto concuerda con que la solución del problema en el contexto sintético requería de un mayor número de UEI que la solución en el contexto algebraico y que el número de ellas influye en la dificultad del problema.

Sobre los problemas detectados en las soluciones sintéticas se encuentra que muy pocos lograron asociar el dato de la altura con la construcción de una recta paralela; tampoco asociaron el dato de la mediana con la construcción de una circunferencia. Sin ello, no se pudo identificar un punto del lugar geométrico en la intersección de esos dos objetos. En cambio, lo que ocurrió es que los estudiantes asumieron que el triángulo *ABC* era dato y partieron de una figura que lo representaba, sobre la cual trazaron la altura y la mediana relativa al lado *AB*. Si bien los trazos realizados pueden dar cuenta que conocían la definición de esas líneas notables, el asumir que el triángulo era dato impedía reconocer las propiedades que verificaban dichas líneas; esto es, que uno de los extremos de la altura se encuentra sobre un segmento paralelo a *AB* que está a la distancia la longitud de la altura y que uno de los extremos de la mediana se encuentra sobre una circunferencia de centro el punto medio de *AB* y cuyo radio es la longitud de la mediana.

Soluciones como la descrita en el párrafo anterior se caracterizan por no emplear las UEI necesarias, ni utilizar las representaciones figurales adecuadas para los datos del problema.

En relación a los estudiantes que abordaron el problema en el contexto algebraico, se observó que en la mayoría de los casos en los que se asoció *hallar el tercer vértice* con *resolver un sistema de ecuaciones lineales*, se obtuvo la solución correcta no presentándose dificultades al resolver el sistema. Los datos suministrados ponían en ventaja a la resolución algebraica ya que se disponía de la ecuación.

Ciclo II

En el contexto sintético, la tarea planteada requería interpretar la condición dada verbalmente en términos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa era dato, para luego construir una circunferencia de diámetro conocido y reconocer que los puntos del lugar geométrico son exactamente aquellos que forman parte de la circunferencia dibujada para lo cual se debe evocar una propiedad.

En términos de representaciones, se debían realizar más transformaciones en el marco algebraico ya que se debía transformar la condición dada en una representación simbólica, realizar tratamientos hasta obtener una ecuación equivalente, reconocer la forma global del LG e identificar el centro y radio de la circunferencia para luego graficarla en el plano de coordenadas.

En términos de UEI, el trabajo sería mayor en el marco geométrico (6UE) que en el algebraico (2UE). Dependiendo del grado de avance de sus soluciones, esto es, del número de UEI empleadas, las soluciones se ubicarían en un determinado nivel de la categorización relacionada con la eficiencia de la solución.

Por lo anterior, se esperaba un mayor éxito en la solución sintética pues si recordaban la propiedad de la circunferencia y comprendían el enunciado, la solución sería inmediata. Mientras que en la solución algebraica se hacía necesario realizar un mayor número de transformaciones en el registro simbólico y luego del simbólico al gráfico.

Los resultados obtenidos confirman el supuesto anterior: un mayor número de estudiantes pudo realizar la tarea solicitada en el contexto sintético, respecto al número de alumnos que lo resolvió correctamente en el contexto algebraico.

En la figura 7.49. se presenta la solución de un estudiante que mostró coherencia entre la solución algebraica y la solución geométrica Esa solución fue considerada en el nivel muy alto en relación a la eficiencia de la estrategia empleada y también en relación a las transformaciones realizadas ya que además reconoce la relación entre ambos problemas y respuestas.

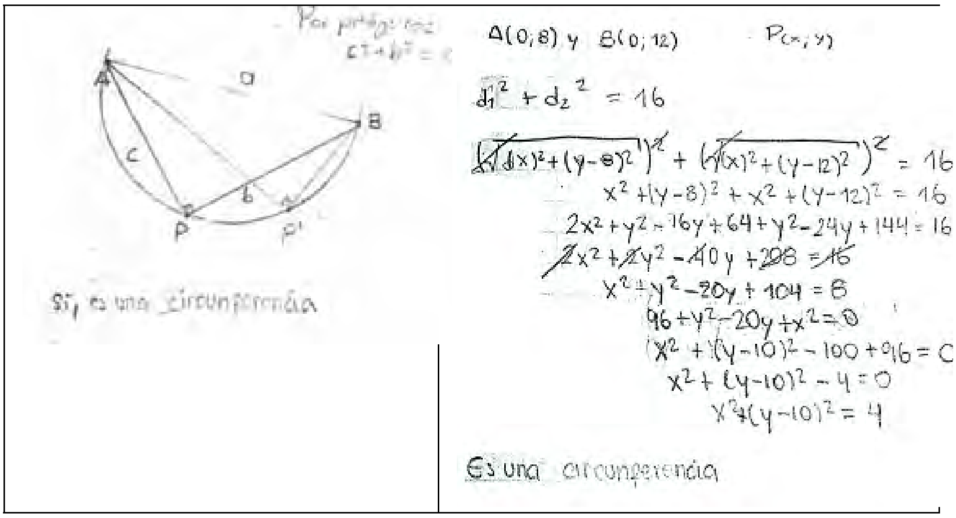


Figura 7.49. Respuesta del alumno 32 del ciclo II

Sobre el reconocimiento explícito de que se trataba de un mismo problema pero en diferentes contextos, se encontró que casi todos los estudiantes que resolvieron el problema en los dos contextos, señalaron que sí existía relación entre las soluciones obtenidas en los marcos geométrico y algebraico. A continuación se muestran algunas de las respuestas que confirman que reconocieron la relación entre los realizado en las partes a) y b).

Alumno 1*: Sí guardan relación, se construyó la figura con diferentes métodos.*

Alumno 2*: En la parte a) no te dan las medidas ni puntos de paso, lo que hace que te apoyes en el gráfico; en la parte b) ya podemos sacar la ecuación del lugar geométrico y los dos son circunferencias.*

Alumno 3: *La relación que se puede establecer entre ambas partes es que mediante el uso de instrumentos se pueden analizar problemas específicos tal es el caso de la parte a) y con geometría analítica se pueden comprobar dichos resultados.*

Alumno 4: *En la pregunta a) la solución es general y en la pregunta b) es un caso particular. Ambos lugares geométricos son circunferencias.*

Por otro lado, también se encontró que otro grupo de estudiantes dio respuestas distintas al identificar la forma que adoptaba el lugar geométrico en a) y b); y, a pesar de habérseles pedido que analizaran si existía relación entre las dos tareas, no cuestionaron que sus respuestas no coincidieran y las mantuvieron. Esto revela que no comprendieron que al ser problemas equivalentes, debían tener las mismas soluciones, hecho que los ubicaría entre los niveles medio y nulo en lo que se refiere a transformaciones entre registros.

En la figura 7.50. se muestra un ejemplo de un estudiante que obtuvo como respuesta a la parte a) que el lugar geométrico era una recta, mientras que en la parte b) señaló que se trataba de una circunferencia. Al preguntarle sobre la relación entre a) y b), explica que la forma de la parte b) es una circunferencia por la forma de la ecuación; sin embargo, no cuestiona la respuesta previa que había dado en a). Es decir, el alumno mantuvo sus respuestas, aun cuando tuvo la oportunidad de contrastarlas en la parte c). En cuanto a establecer conexiones entre sus representaciones se le ubicó en un nivel medio.

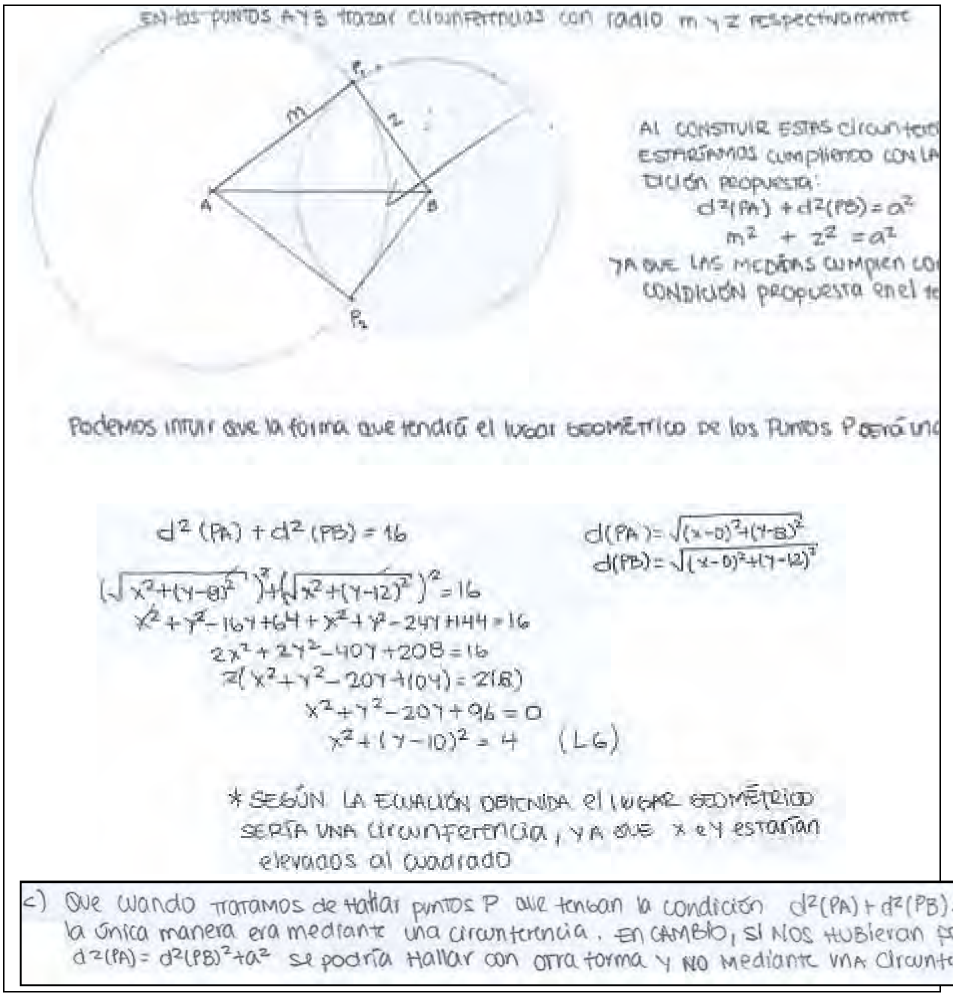


Figura 7.50. Respuesta del alumno 13 del ciclo II

Este mismo estudiante siguió un procedimiento adecuado en el contexto algebraico pero en el contexto geométrico empleó sólo algunas de las UEI necesarias para dar respuesta al problema; por ello se le asignó el nivel medio en lo que se refiere a la eficiencia de la solución.

La figura 7.51. ilustra el caso de un alumno que logró traducir adecuadamente la información brindada en el enunciado a una representación simbólica y que transformó la expresión inicial a otras equivalentes pero que no logró identificar la forma que adquiría el lugar geométrico. Por esa razón se le asignó el nivel bajo en relación a la capacidad para realizar transformaciones. Como además este estudiante no abordó el problema en el contexto sintético, también se le asignó el nivel bajo en lo que se refiere a la eficiencia de la solución.

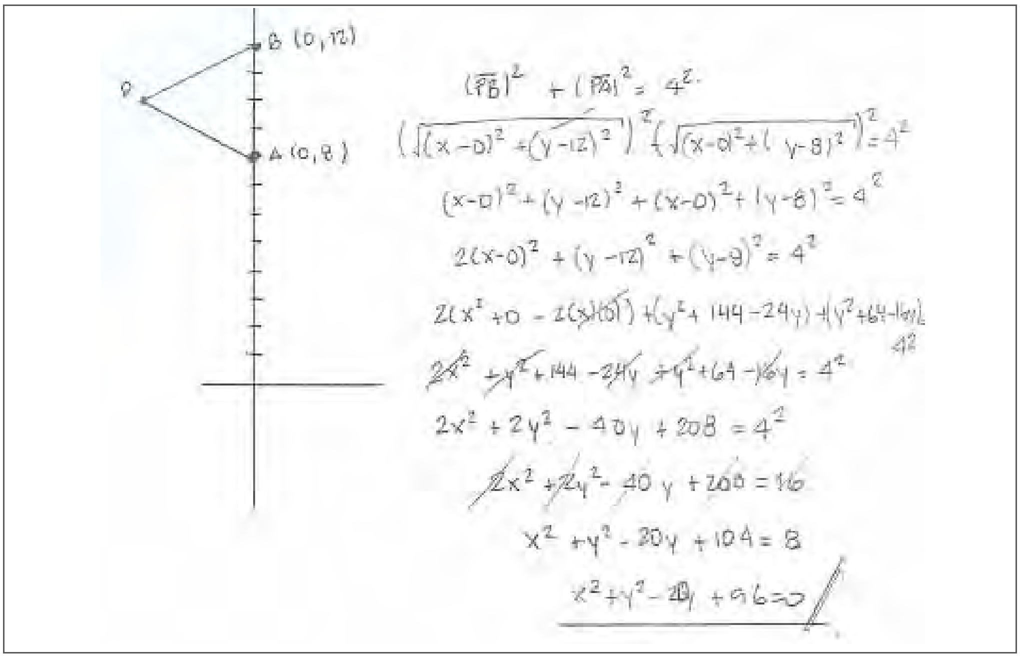


Figura 7.51. Respuesta algebraica del alumno 17 del ciclo II

La figura 7.52. corresponde a la solución de un alumno que no resolvió el problema en el contexto sintético y que en el contexto algebraico obtuvo la expresión algebraica en la forma canónica pero que no reconoció correctamente de qué curva se trataba y señaló que era una parábola. Su solución también fue considerada en el nivel bajo en los dos aspectos que fueron contemplados en este apartado.

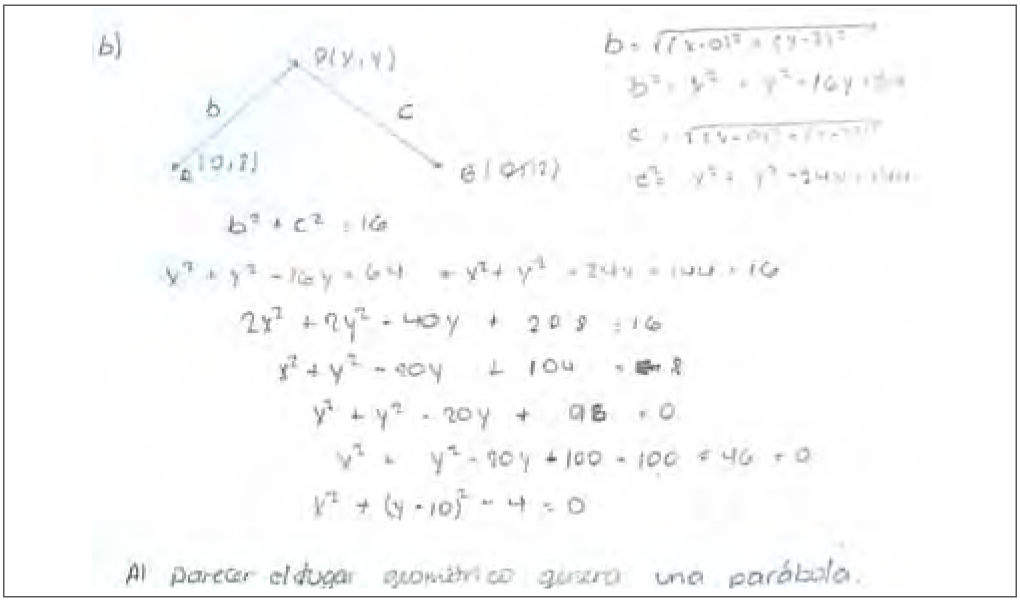
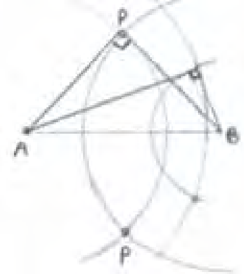


Figura 7.52. Respuesta analítica del alumno 40 del ciclo II

La figura 7.53. corresponde a una solución interesante, el estudiante no necesitó transformar la expresión algebraica hasta obtener la forma canónica ya que asoció su respuesta con la obtenida en a); de esta manera, reconoció que se trataba de la misma curva, una circunferencia, cuyo centro se ubicaba en el punto medio de los puntos dados y cuyo radio era igual a la mitad de la distancia entre dichos puntos. Es decir, usó la solución obtenida en el marco geométrico como soporte de la solución algebraica. Este alumno fue ubicado en el nivel muy alto en las dos categorizaciones consideradas ya que resolvió el problema adecuadamente en los dos contextos, realizó adecuadamente transformaciones entre distintas representaciones y se aprovechó de ellas para reducir el trabajo con expresiones algebraicas.



$$(d(P,A))^2 + (d(P,B))^2 = a^2$$

$$\sqrt{(d(P,A))^2 + (d(P,B))^2} = a$$

El lugar geométrico será una circunferencia porque la ecuación planteada hace referencia al teorema de Pitágoras y el ángulo recto se formaría en todos los puntos P, formando así una circunferencia.

$\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ serían los catetos y $\overline{AB}$ la hipotenusa.

$$d(P,A) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-8)^2}$$
$$d(P,B) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2}$$
$$\left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-8)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2}\right)^2 = 16$$
$$(x-0)^2 + (y-8)^2 + (x-0)^2 + (y-12)^2 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 16y + 64 + x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$
$$2x^2 + 2y^2 - 40y + 192 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 20y + 96 = 0$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia de radio 2. y centro (0;10)

En la primera parte de la pregunta se puede ver como sumando los cuadrados de las distancias de los puntos A y B a los puntos P, ~~son los~~) se obtiene el ~~diámetro~~ del ~~círculo~~ del segmento AB que vendría a ser el diámetro (no al cuadrado) del círculo formado por los puntos P, por lo tanto, en este problema (parte b) se obtiene una circunferencia de diámetro 4, ya que $4^2=16$ y entonces la figura obtenida es una circunferencia de radio 2.

Figura 7.53. Respuesta del alumno 2 del ciclo II

En general, se encontró que los estudiantes asociaron casi directamente la condición geométrica que había sido dato con la construcción de un triángulo rectángulo. Los estudiantes reconocieron la propiedad que satisface un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia y por ello no tuvieron problemas en señalar que el lugar geométrico era una circunferencia, aunque ninguno señaló que se debían excluir los puntos *A* y *B*.

En relación a las transformaciones que generaron mayor dificultad, éstas fueron los tratamientos en el registro simbólico. La principal dificultad que tuvieron varios estudiantes al abordar el problema en el marco algebraico fue encontrar una expresión equivalente que les permitiera identificar la forma del lugar geométrico. Esto generó que un grupo importante de estudiantes dieran como respuesta sólo la expresión algebraica, sin transformarla a su forma canónica y sin reconocer la forma del lugar geométrico; otros se animaron a señalar que correspondía a algún objeto que conocían (recta, parábola, etc.) aunque éste no fuera correcto; finalmente, otros hicieron cálculos incorrectos, obtuvieron una ecuación que no era correcta pero identificaron adecuadamente la forma del LG de la ecuación a la que llegaron. Esto confirma las predicciones realizadas previamente según las cuales se afirmaba que, al no estar escrita la ecuación de la circunferencia en su forma canónica, los estudiantes tendrían dificultad en reconocer la gráfica asociada a ella.

Ciclo III

Sobre la tarea en el contexto sintético ésta exigía, como primer paso, asociar el dato numérico con el diámetro de una circunferencia; se debía construir dicha circunferencia para después reconocer que con vértices sobre dicha circunferencia se podían construir triángulos rectángulos cuyos catetos tendrían las longitudes de los radios de nuevas circunferencias construidas con centros en *A* y *B*, respectivamente. En los puntos de intersección de estas dos circunferencias se debían identificar los puntos *P* que cumplían la condición dada en el enunciado, aun cuando los triángulos *APB* no fueran rectángulos. Este procedimiento debía repetirse considerando otros radios, para luego reconocer la forma que adquiría el conjunto de puntos *P*. Se consideraría que el procedimiento seguido había sido parcial si sólo se llegaba a determinar un par de puntos *P*.

Sobre la tarea en el contexto algebraico, se debía convertir la condición geométrica dada verbalmente en una expresión simbólica. Para reconocer la forma que adoptaba el lugar geométrico era necesario transformar la expresión algebraica inicial en otra equivalente que correspondía a la ecuación canónica de una circunferencia. Finalmente se debía representar la expresión obtenida a través de un gráfico en el plano cartesiano.

En término de número de UEI, la solución parcial en el marco geométrico contemplaba 12UE mientras que la solución completa en el marco algebraico requería sólo 2UE; por ello se esperaba que resultara más compleja en el primer contexto.

Por otro lado, en términos de transformaciones, el trabajo que debía realizarse en la primera parte del problema requería emplear un procedimiento de construcción fuera de la figura que se dibuja directamente con los datos, después de lo cual se debía trasladar información al dibujo inicial de manera adecuada; y esto implicaba realizar una actividad de reconfiguración, muy compleja cognitivamente. Además, se debía hacer un esbozo de la forma que adoptaba la solución del problema en base a unos cuantos puntos construidos. Mientras que en la segunda parte del problema se requería realizar varias transformaciones en el registro simbólico y luego una conversión al registro gráfico a través de procedimientos que los estudiantes habían empleado en situaciones similares.

Por lo descrito en los párrafos anteriores se esperaba el porcentaje de estudiantes que resolvieran el problema en el contexto algebraico fuera mayor que el porcentaje de estudiantes que lo resolvería en el contexto sintético. Los resultados obtenidos confirmaron estas sospechas.

La figura 7.54. muestra una solución en la que se determinan sólo dos puntos del lugar geométrico al considerar el caso particular en el que $d(A,P)=d(B,P)$; sin embargo, en el contexto algebraico sí se resolvió completamente el problema. En relación a la eficiencia de su solución, a esta solución se le asignó el nivel alto ya que la tarea fue resuelta exitosamente en un contexto y en el otro sólo se hizo parcialmente.

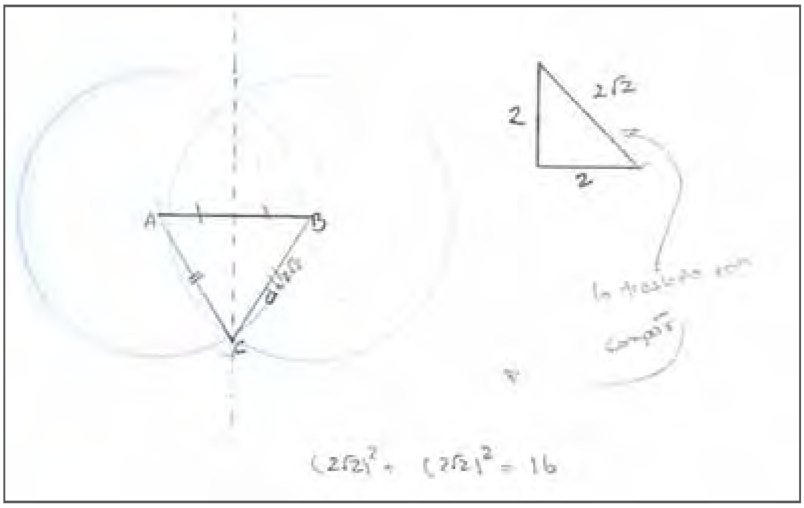


Figura 7.54. Respuesta sintética del alumno 1 del ciclo III

Cabe resaltar que la elección de radios iguales ubicaba a los dos puntos del lugar geométrico en la mediatriz del segmento *AB* y el que luego no se haya probado con otros valores, podría hacer pensar a los estudiantes que los puntos solución siempre estarían sobre la mediatriz, lo que no es cierto.

En relación a las transformaciones realizadas, como se observa en la figura 7.55., éstas fueron realizadas adecuadamente en el registro algebraico y luego traducidas al gráfico; sin embargo, no se establecieron conexiones entre los enunciados y resultados de los problemas en los dos contextos. Por esta razón, se le asignó el nivel medio en lo relacionado a establecer conexiones entre representaciones.

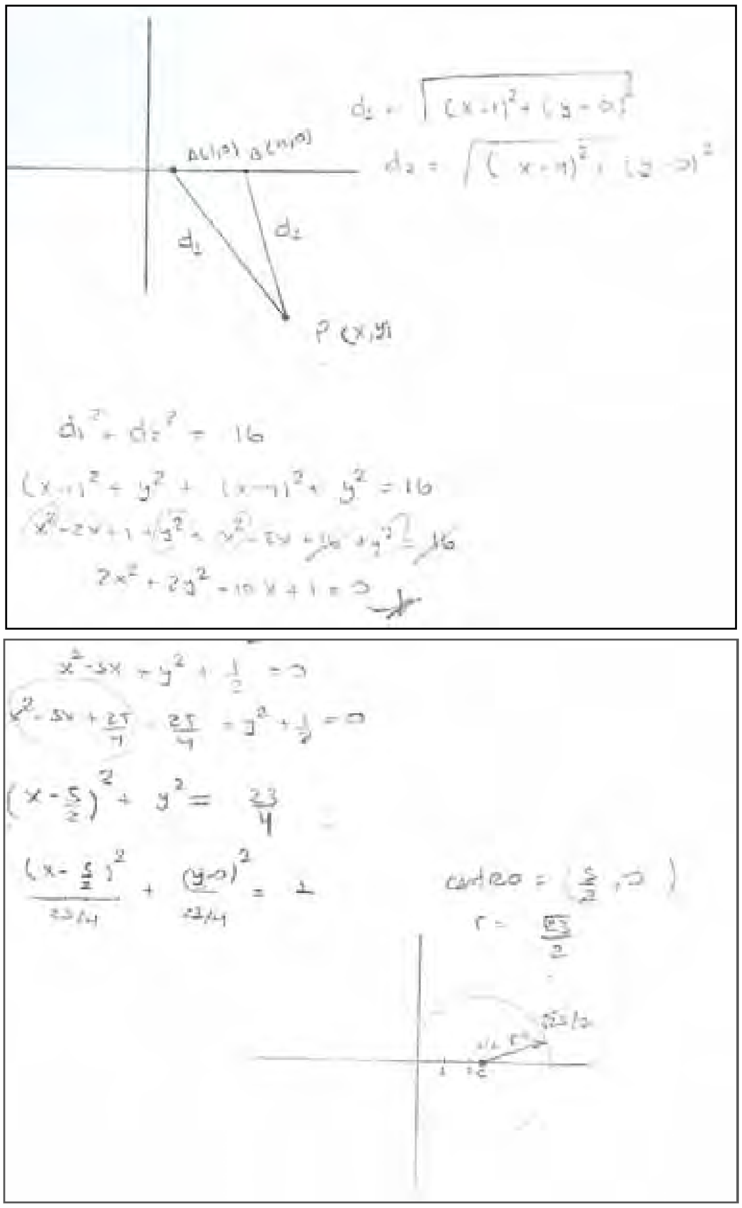


Figura 7.55. Respuesta algebraica del alumno 1 del ciclo III

La figura 7.56. muestra el caso de un alumno que consideró como radios a 3 y $\sqrt{7}$.

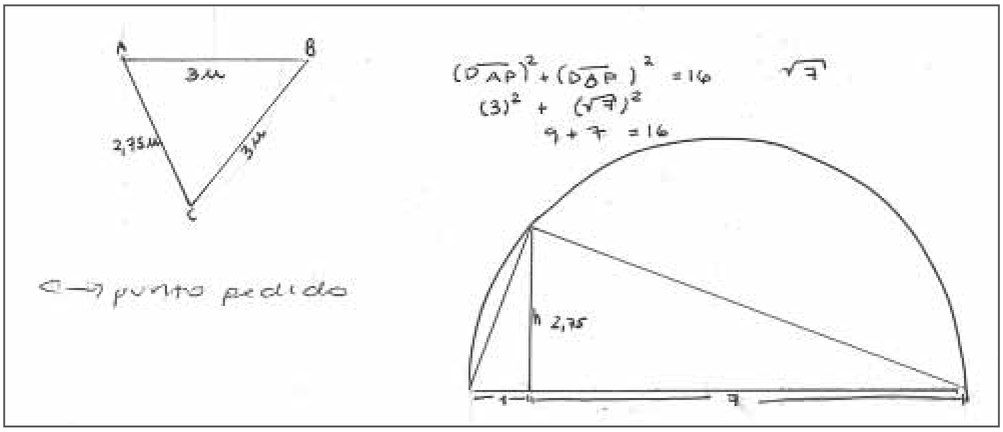


Figura 7.56. Respuesta algebraica del alumno 25 del ciclo III

En la figura 7.57, se muestra que el alumno obtuvo la expresión algebraica adecuada; sin embargo, no reconoció correctamente la curva que se le debía asociar, dando como respuesta una elipse. Notar que además el punto de coordenadas (x, y) no fue ubicado sobre la elipse lo que muestra que no es capaz de establecer relación entre la representación de un punto cuyas coordenadas satisfacen una ecuación y su representación en la gráfica. Por lo descrito, esta solución fue ubicada en el nivel bajo en lo relacionado a las transformaciones ya que se hicieron tratamientos inadecuados en el contexto algebraico. De otro lado, al no haber resuelto correctamente el problema en ningún contexto, se le asignó el nivel bajo en relación a la eficiencia de la solución.

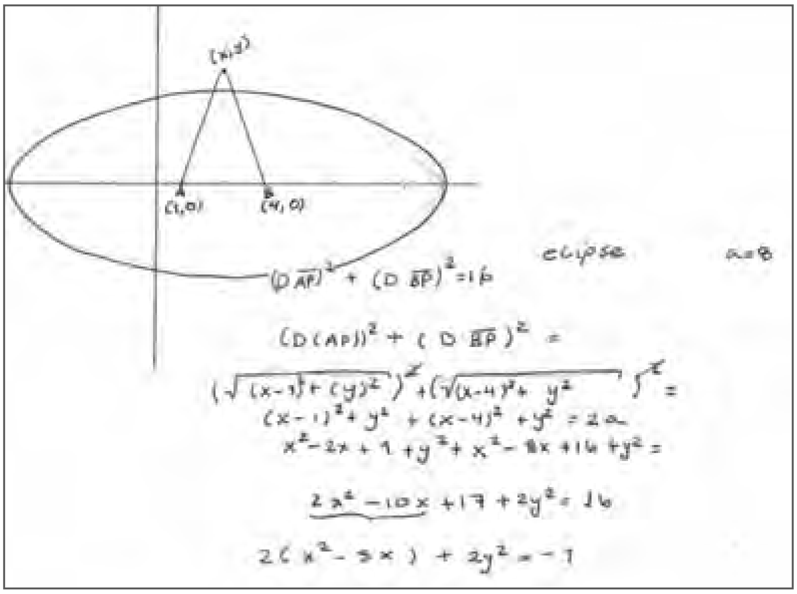


Figura 7.57. Respuesta algebraica del alumno 25 del ciclo III

La solución mostrada en la figura 7.58. corresponde a la de un estudiante que, si bien comprendió el enunciado, no siguió los pasos adecuados para hallar una solución particular pues no recurrió a construir circunferencias del mismo radio sino que trazó dos segmentos que asumió tenían el mismo radio; tampoco logró resolver el problema. De otro lado, en el contexto algebraico tampoco llegó a terminar de resolver el problema. Al no haber resuelto correctamente el problema en ningún contexto, se le asignó el nivel bajo en relación a la eficiencia de la solución.

En relación a la transformación de representaciones, encontró una ecuación pero no pudo asociarla a ninguna curva por lo que también se le asignó el nivel bajo en lo relacionado a establecer conexiones entre representaciones.

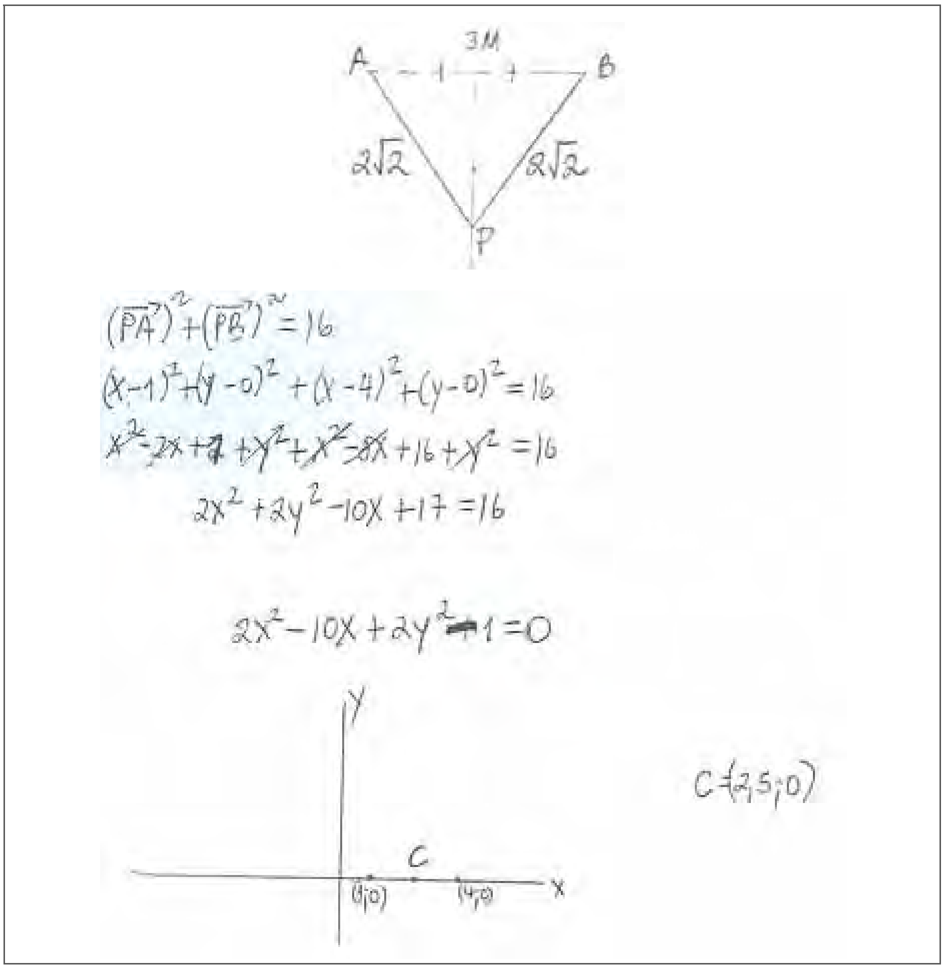


Figura 7.58. Respuesta del alumno 16 del ciclo III

En general, sobre la tarea en el marco geométrico, se tiene que alrededor del 50% de los estudiantes logró traducir la condición dada en una serie construcciones adicionales fuera de la figura inicial y trasladar distancias para hallar un par de puntos del lugar geométrico; sin embargo, sólo uno pudo identificar la forma global del lugar geométrico a partir de ellos.

Respecto a la construcción adicional que hicieron los estudiantes en la solución geométrica, alrededor del 30% asumió que los radios eran iguales a $2\sqrt{2}$, el 17% asumió que los radios eran 3 y $\sqrt{7}$ y sólo un alumno dio otras soluciones (3%). Sobre la elección de radios 3 y $\sqrt{7}$ que hizo un grupo importante de alumnos, podría deberse a que consideraron como uno de los radios a la distancia entre A y B que era 3.

En general, se identifica que los estudiantes reprodujeron el procedimiento de construcción para un primer de puntos pero luego no lo repitieron; lo que indica que resolvieron el problema sólo parcialmente en el contexto geométrico.

La incapacidad para conectar a través de una curva los puntos de intersección, denota que no se establecieron conexiones entre las condiciones del problema y los puntos construidos.

De otro lado, se encontraron dificultades para realizar tratamientos en el registro simbólico, lo que no permitió a muchos estudiantes obtener la expresión canónica asociada a la ecuación inicial.

A diferencia del problema planteado el ciclo II, en esta tarea no era trivial identificar la forma que adoptaba el lugar geométrico; se necesitaba establecer relaciones entre los enunciados dados en ambos contextos para poder dar respuesta a la pregunta en el contexto sintético a partir de la curva identificada en el contexto algebraico. Y esto no resultó trivial para los estudiantes pues incluso quienes hallaron la solución algebraica, no lograron retomar la pregunta en el contexto geométrico.

Ciclo IV

El problema planteado en el cuarto ciclo es una variante del enunciado considerado en el ciclo anterior. En el contexto sintético la condición de que un sumando fuera el doble del cuadrado de la distancia de B a P debía interpretarse en términos de una construcción adicional para representar un segmento cuya longitud fuera $\sqrt{2}\ n$ a partir de otro cuya longitud era n. Aunque en esencia se debía seguir el mismo procedimiento que el descrito en la tarea del ciclo III, si no se lograba interpretar adecuadamente en el enunciado el nuevo dato: *el dobl*e, se estaría resolviendo otro problema. Por lo tanto esta tarea requería de un mayor número de UEI. Esto hizo que se esperara un menor éxito en la solución de esta tarea en relación al nivel de éxito del ciclo III.

En cambio, en el contexto algebraico el número de UEI era el mismo que en la tarea del ciclo III ya que la condición del doble no exigía un trabajo mayor.

Si sólo se construían dos puntos del lugar geométrico, se consideró que el problema había sido resuelto parcialmente en ese contexto. Para obtener una solución completa de la tarea en el contexto geométrico se hacía necesaria una conexión con los resultados de la tarea en el contexto algebraico.

En relación a las transformaciones que debían realizarse para resolver el problema dado en el contexto algebraico, se requería convertir la condición geométrica dada verbalmente en una expresión simbólica. Para reconocer la forma que adoptaba el lugar geométrico era necesario transformar la expresión algebraica inicial en otra equivalente correspondiente a la ecuación canónica de una circunferencia. Finalmente, se debía representar la expresión obtenida a través de un gráfico en el plano cartesiano.

Los resultados muestran que ningún estudiante pudo identificar la forma del lugar geométrico en el contexto geométrico y que pocos resolvieron correctamente la tarea en el contexto algebraico y parcialmente en el sintético.

La solución de la figura 7.59. muestra el caso de un alumno que interpretó adecuadamente la condición dada y eligió valores específicos para las distancias de A a P y de B a P, aunque en la sustitución de valores cometió un error menor al no escribir el número 2 precediendo al 3^2 sin que esto afectara la solución.

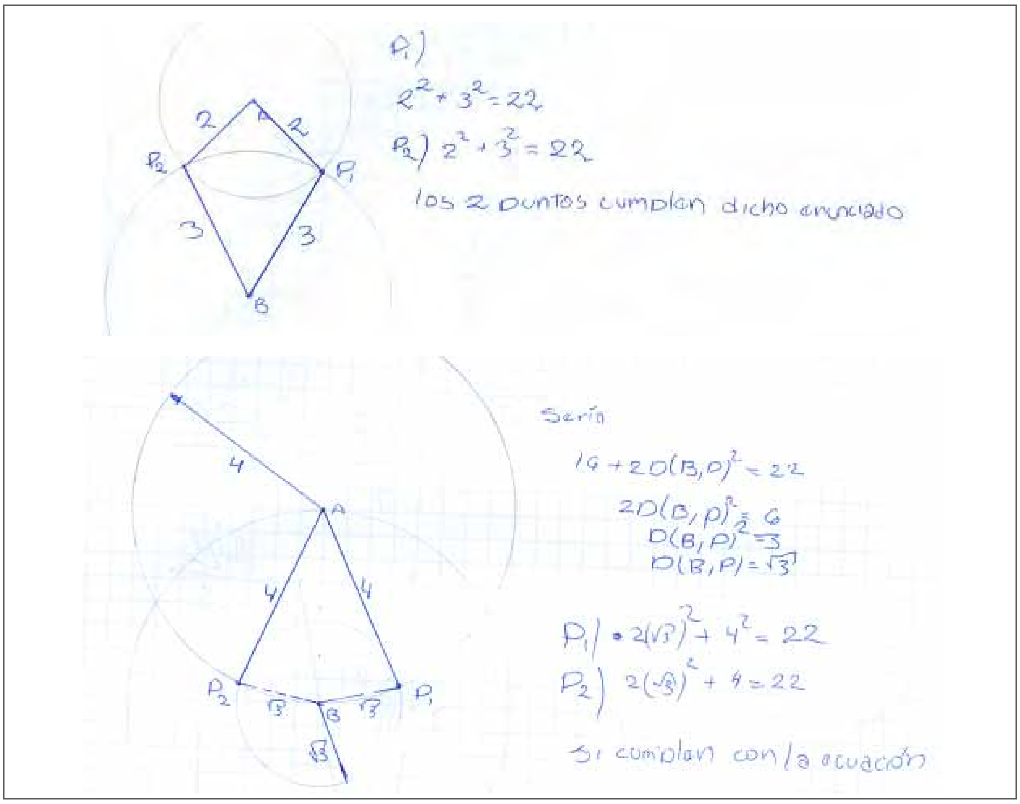


Figura 7.59. Respuesta sintética del alumno 15 del ciclo IV

Este estudiante también dio solución al problema en el contexto algebraico y reconoció la forma global que adoptaba el lugar geométrico, como se observa en la figura 7.60. Sin embargo, no estableció conexiones con la solución parcial obtenida para el enunciado de la parte a). A este estudiante se le asignó el nivel alto en relación a la eficiencia de la solución matemática y el nivel medio en relación a realizar transformaciones, pues no estableció la conexión entre la solución geométrica y la algebraica.

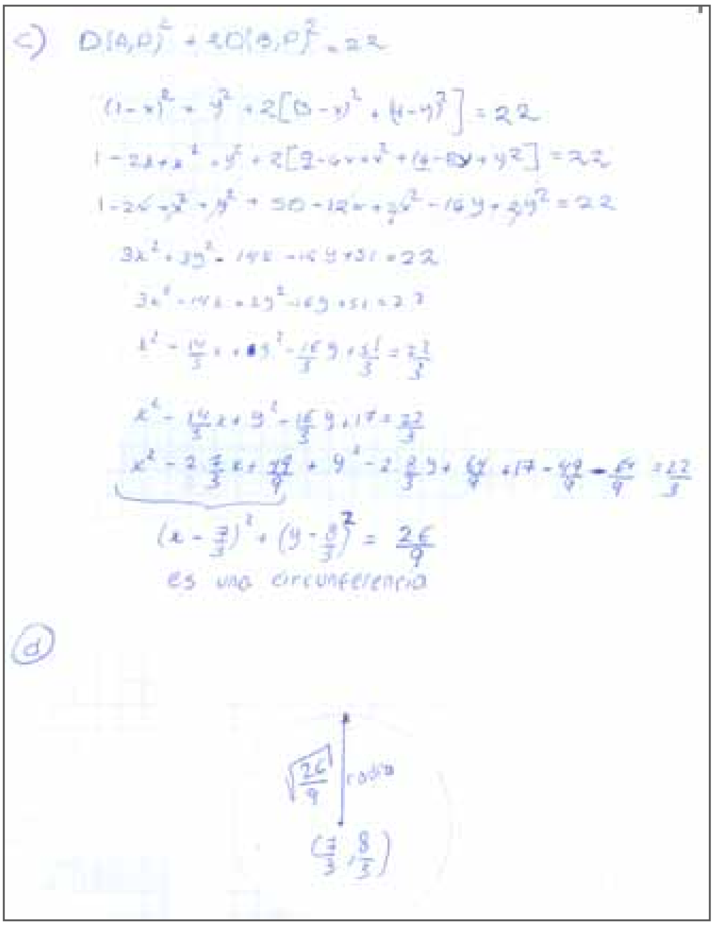
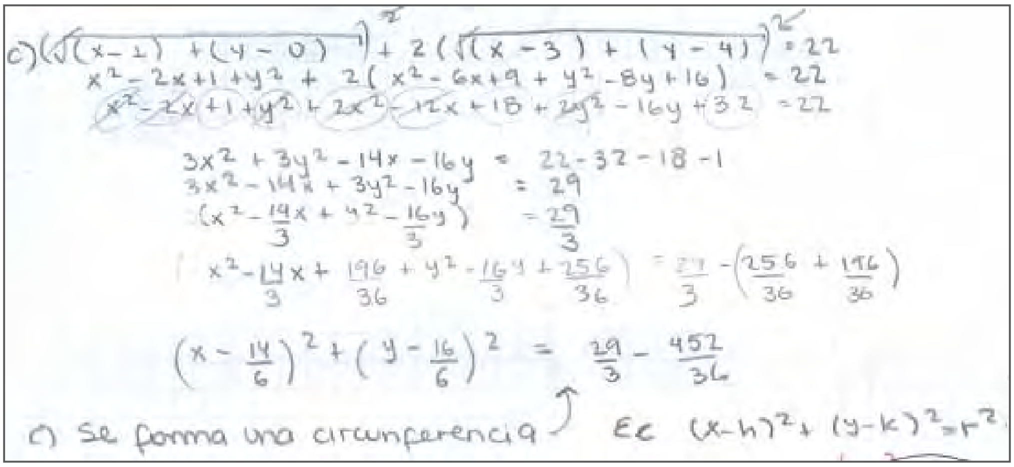


Figura 7.60. Respuesta algebraica del alumno 15 del ciclo IV

En la figura 7.61. se muestra la solución de un alumno que cometió errores en la transformación de la expresión algebraica por otra equivalente. El estudiante reconoció la forma general de la ecuación obtenida y la asoció a una circunferencia pero cometió errores en las operaciones intermedias, obteniendo para r^2 un valor negativo. Al parecer, fue consciente de ello ya que dejó indicada una diferencia que no realizó. Este alumno no planteó el problema en el contexto sintético. Esta respuesta se ubicó en el nivel bajo en relación a la eficiencia de la solución y bajo en relación a las transformaciones entre registros ya que no se revisaron las operaciones para identificar dónde estaba el error.



c) $(\sqrt{(x-1)+(y-0)})^2 + 2(\sqrt{(x-3)+(y-4)})^2 = 22$

$x^2-2x+1+y^2+2(x^2-6x+9+y^2-8y+16) = 22$

$x^2-2x+1+y^2+2x^2-12x+18+2y^2-16y+32 = 22$

$3x^2+3y^2-14x-16y = 22-32-18-1$

$3x^2-14x+3y^2-16y = 29$

$(x^2-\frac{14}{3}x+y^2-\frac{16y}{3}) = \frac{29}{3}$

$(x^2-\frac{14}{3}x+\frac{196}{36}+y^2-\frac{16y}{3}+\frac{256}{36}) = \frac{29}{3}-(\frac{256}{36}+\frac{196}{36})$

$(x-\frac{14}{6})^2+(y-\frac{16}{6})^2 = \frac{29}{3}-\frac{452}{36}$

c) Se forma una circunferencia Ec $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Figura 7.61. Respuesta algebraica del alumno 14 del ciclo IV

La figura 7.62. muestra el caso de un estudiante que reconoció sólo dos puntos del lugar geométrico en el contexto geométrico; mientras que en el contexto algebraico obtuvo una expresión algebraica. No realizó tratamientos en el registro algebraico para identificar la curva a la que correspondía la ecuación obtenida y por lo tanto tampoco la graficó. Esta solución fue ubicada en el nivel en relación a la eficiencia de la solución matemática y en el nivel bajo respecto a la capacidad para realizar transformaciones

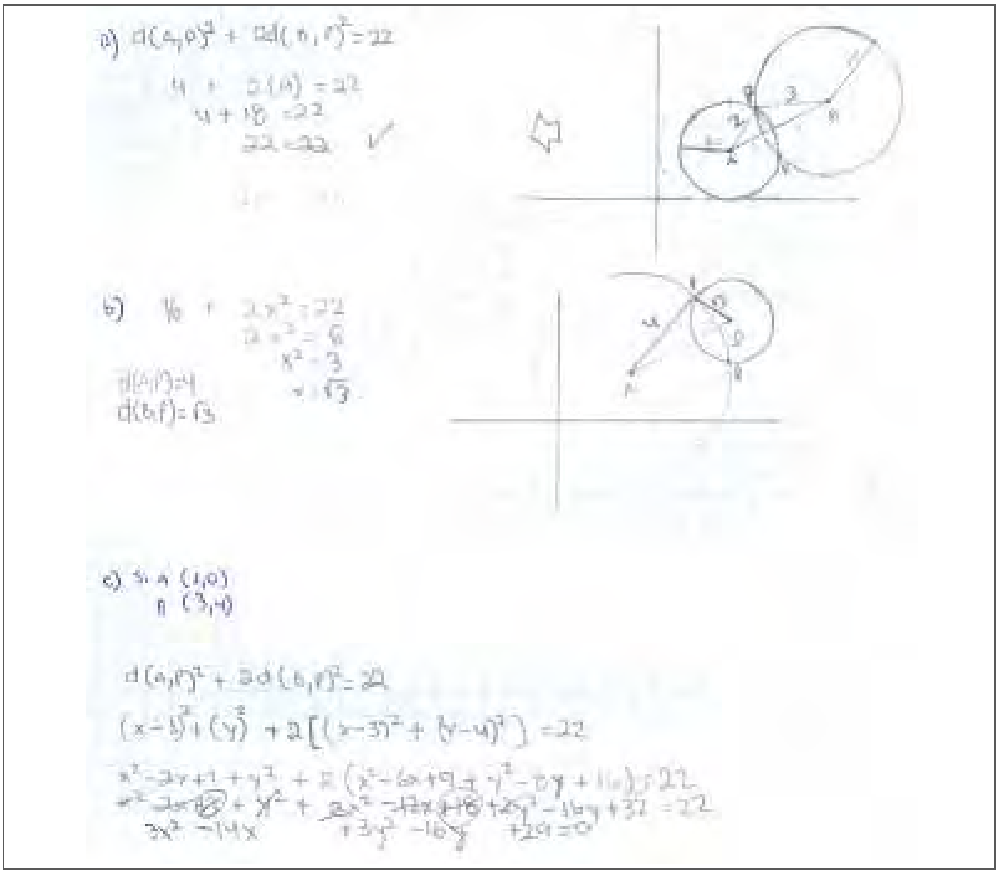


Figura 7.62. Respuesta algebraica del alumno 10 del ciclo IV

La figura 7.63. corresponde al procedimiento que siguió un estudiante que resolvió el problema en el contexto geométrico parcialmente y lo resolvió mal en otro contexto. Por ello se le asignó el nivel bajo en relación a la eficiencia de la solución matemática.

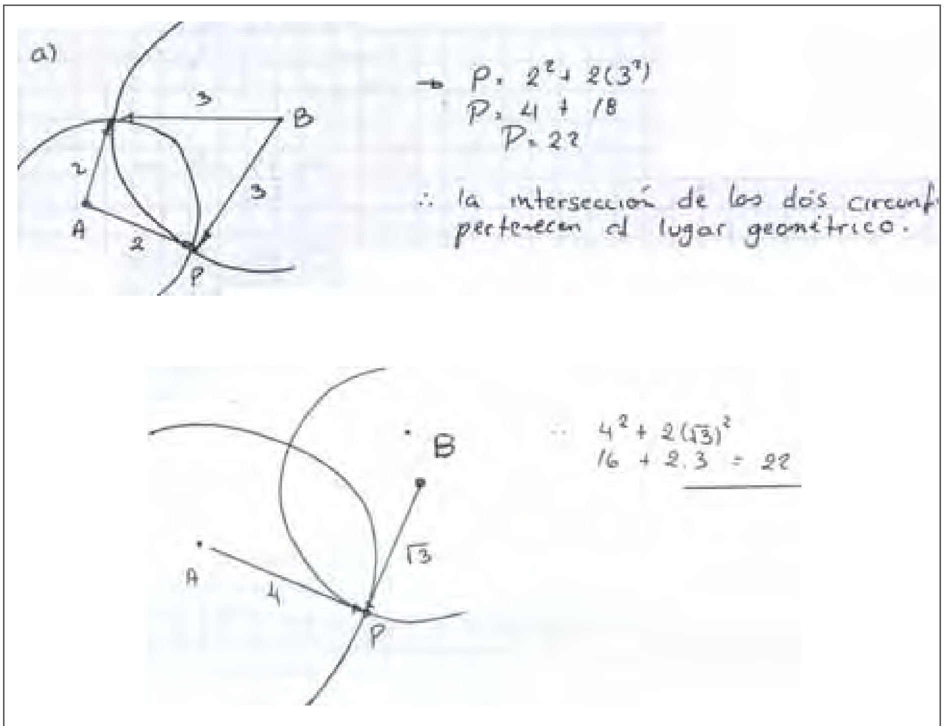


Figura 7.63. Respuesta sintética del alumno 8 del ciclo IV

Este mismo estudiante presentó una solución algebraica, figura 7.64., que resulta interesante analizar. Estableció conexión entre algunos de los procedimientos sintéticos y analíticos seguidos, lo que se evidencia al plantear ecuaciones asociadas a las circunferencias construidas de radios 2 y 3 consideradas en la primera parte de la pregunta. Sin embargo, mientras que en la solución del marco geométrico dio como respuesta los dos puntos de intersección de las circunferencias, en la solución del marco algebraico dio como respuesta la ecuación de la recta que resultada de restar las ecuaciones cuadráticas. Para ser coherente con el procedimiento sintético, debió dar como respuesta la solución del sistema de ecuaciones. Consideramos que la dificultad radicó en no reconocer que los radios elegidos inicialmente generaban puntos particulares del lugar geométrico, y que para hallar más puntos, debían elegirse otros radios. El asumir que la solución algebraica estaba dada por la recta que contenía a dos puntos particulares, muestra que no logró establecer una conexión completa entre los procedimientos seguidos en ambos contextos. Según los criterios establecidos, se le asignó el nivel medio en lo relacionado con las transformaciones.

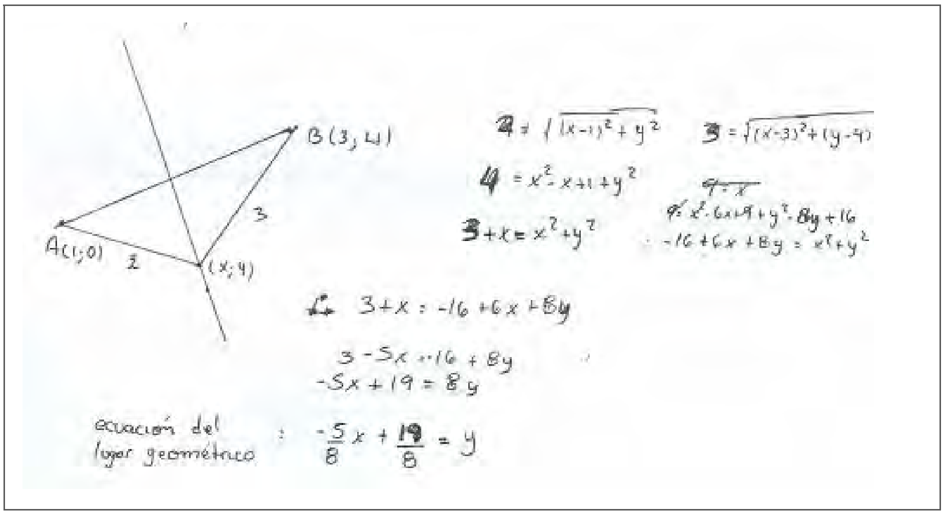


Figura 7.64. Respuesta algebraica del alumno 8 del ciclo IV

En general, pocos estudiantes pudieron reproducir el procedimiento de construcciones para otros radios; también se ha identificado que la variación en el dato donde se mencionaba que un valor se duplicaba generó dificultades, tanto en el tratamiento geométrico como en el algebraico.

Se confirma entonces que tareas que involucran más UEI, aunque éstas correspondan a procedimientos básicos, resultan más complejas para los estudiantes.

Dado que la condición geométrica del enunciado ya no se asociaba directamente con alguna forma conocida, como sí ocurrió en la tarea del ciclo II, se hacía necesario establecer conexiones entre procedimientos equivalentes en distintos contextos. Los resultados obtenidos para esta tarea muestran lo difícil que resultó para los alumnos realizar dichas transformaciones.

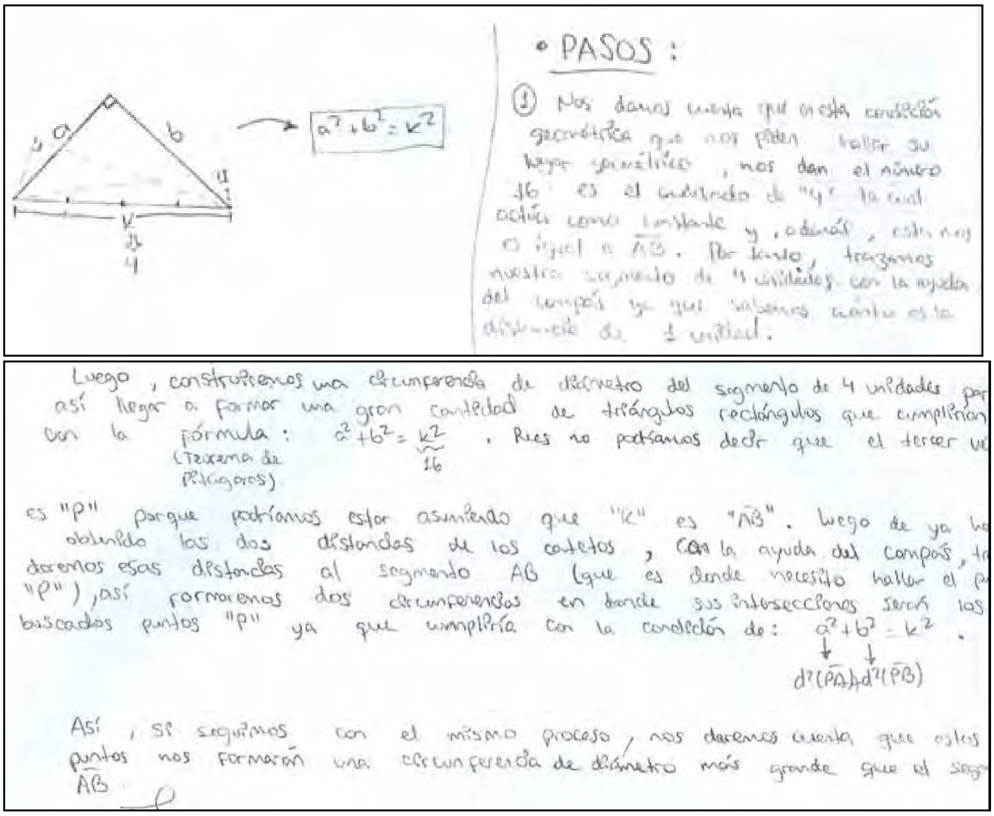
También se encontró que los estudiantes tuvieron problemas para realizar transformaciones de expresiones algebraicas. Así, aunque alrededor del 75% de los estudiantes abordó la tarea en ese contexto, aproximadamente el 45% cometió errores al hallar expresiones algebraicas equivalentes o no pudo reconocer la forma global del lugar geométrico a partir de la expresión algebraica encontrada.

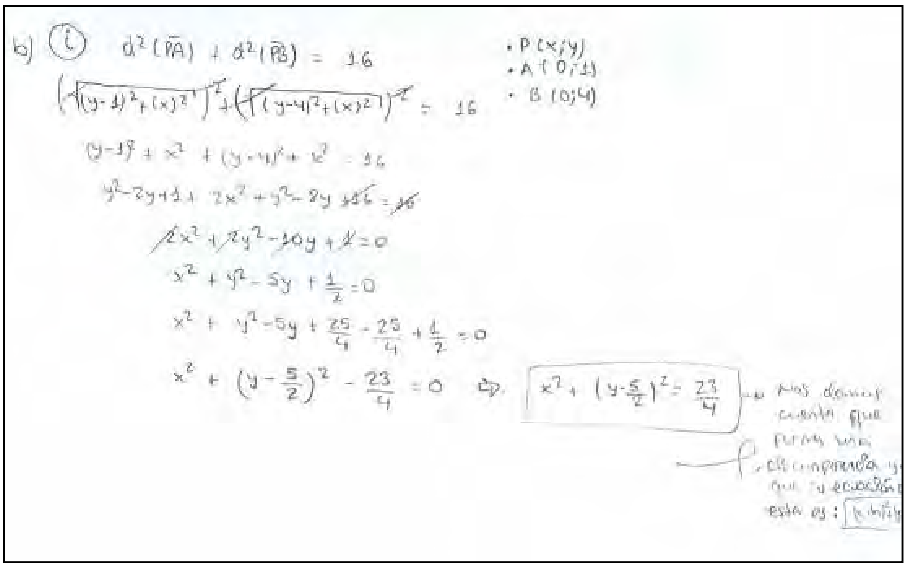
CICLO V

Como se mencionó en el ciclo III donde se propuso la misma tarea que en este ciclo, la solución en el contexto geométrico contemplaba un procedimiento de construcción fuera de la figura inicial obtenida directamente con los datos. Después, debía trasladarse de manera adecuada información de la figura auxiliar al dibujo inicial; para llevar a cabo estas acciones se requería de una reconfiguración, actividad muy compleja en términos cognitivos.

Dado que la tarea en el marco geométrico requería de un mayor número de UEI para su solución, 12UE versus 2UE en el marco algebraico, se esperaba que el porcentaje de estudiantes que tuviera éxito al resolver el problema en el contexto algebraico fuera mayor que el porcentaje de estudiantes que lo resolviera en el contexto sintético.

La figura 7.65. corresponde a la solución de uno de los estudiantes que resolvió el problema satisfactoriamente en ambos contextos. Inicialmente construyó sólo algunos puntos del LG; luego resolvió el problema en el contexto algebraico e identificó la curva y, finalmente, considerando la solución algebraica retomó la solución sintética y señaló que se trataba de la misma curva. Sin embargo, como faltó dibujar la solución en el contexto geométrico, su respuesta fue ubicada en el nivel alto en relación a la estrategia de solución. Y como la respuesta dada por dicho alumno a la parte c) muestra que reconoció que había relación entre las dos tareas y entre sus soluciones, se le ubicó en el nivel muy alto en relación a realizar transformaciones.





b) (i) $d^2(\overline{PA}) + d^2(\overline{PB}) = 16$ • $P(x;y)$ • $A(0;1)$ • $B(0;4)$

$\left(\sqrt{(y-1)^2+(x)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(y-4)^2+(x)^2}\right)^2 = 16$

$(y-1)^2 + x^2 + (y-4)^2 + x^2 = 16$

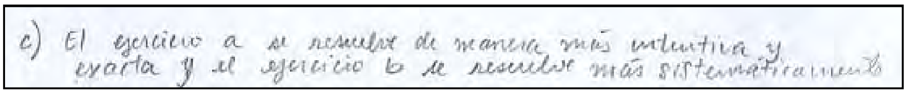
$y^2-2y+1+2x^2+y^2-8y+\cancel{16}=\cancel{16}$

$\cancel{2}x^2+\cancel{2}y^2-10y+\cancel{1}=0$

$x^2+y^2-5y+\frac{1}{2}=0$

$x^2+y^2-5y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{1}{2}=0$

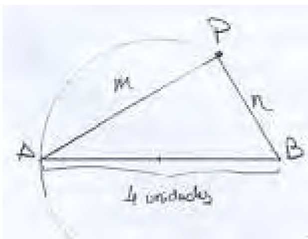
$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{23}{4}=0 \Rightarrow \boxed{x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{23}{4}}$ → Nos damos cuenta que forma una circunferencia y que su ecuación esta es:



c) El ejercicio a se resuelve de manera más intuitiva y exacta y el ejercicio b se resuelve más sistemáticamente

Figura 7.65. Respuesta del alumno 13 del ciclo V

De otro lado, también se encontraron soluciones en las que se asumía como dato que la distancia entre *A* y *B* coincidía con el valor constante conocido, aun cuando en el enunciado se señalaba que la distancia entre *A* y *B* tomaba otro valor. La figura 7.66. ilustra esta situación. Esto simplificó el problema, convirtiéndolo en uno similar al de la tarea propuesta en el ciclo II, pues se identificó la forma del lugar geométrico como una circunferencia, apoyándose en una propiedad directa. Como además la solución coincidía con lo que obtuvo analíticamente, el estudiante no reconoció que había cometido un error. Esta respuesta fue ubicada en el nivel medio en relación a la eficiencia de la solución porque sólo fue resuelta adecuadamente en un contexto. En relación a las transformaciones, fue ubicada en el nivel medio ya que realizó adecuadamente los tratamientos pero no todas las conversiones al no traducir adecuadamente los datos.



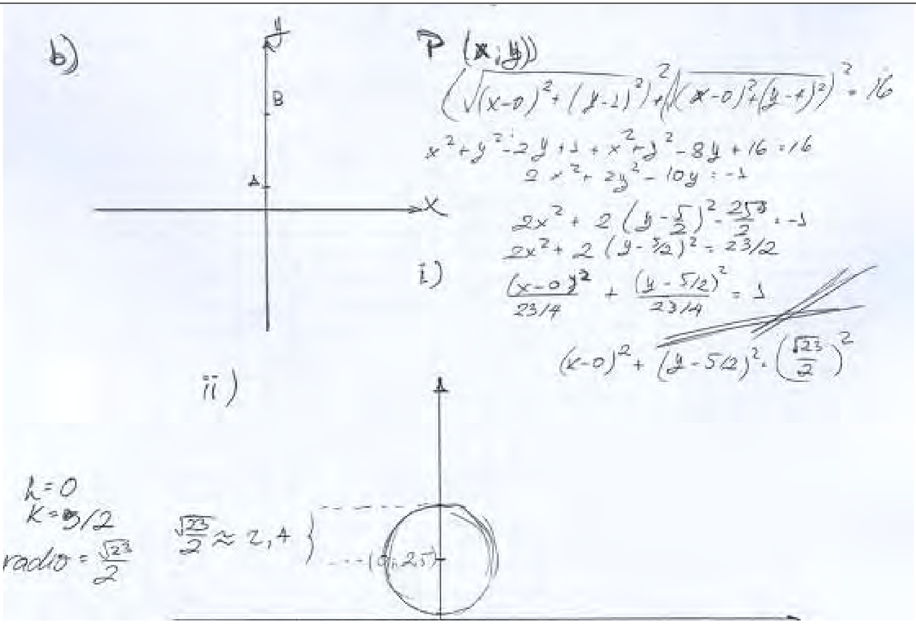
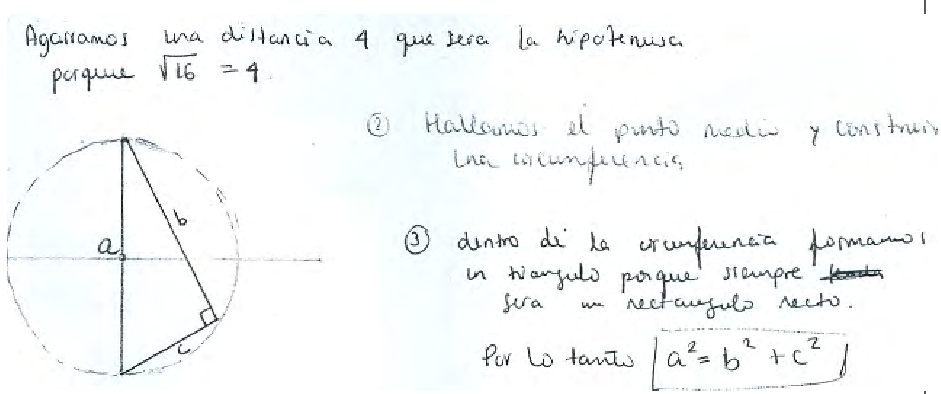


Figura 7.66. Respuesta del alumno 22 del ciclo V

La figura 7.67. es un ejemplo de una solución en donde se asumió también que el valor constante era la distancia de *A* a *B*. Como realizó sólo algunas transformaciones en un mismo registro, necesarias para la solución y sólo efectuó las conversiones que eran inmediatas, se le asignó el nivel bajo en relación a las transformaciones entre registros. Y dado que obtuvo una solución incorrecta en el contexto geométrico y también en el contexto algebraico, se le asignó el nivel bajo en relación a la eficiencia de la solución.



Y luego de plantear la condición simbólica y simplificar, obtiene:

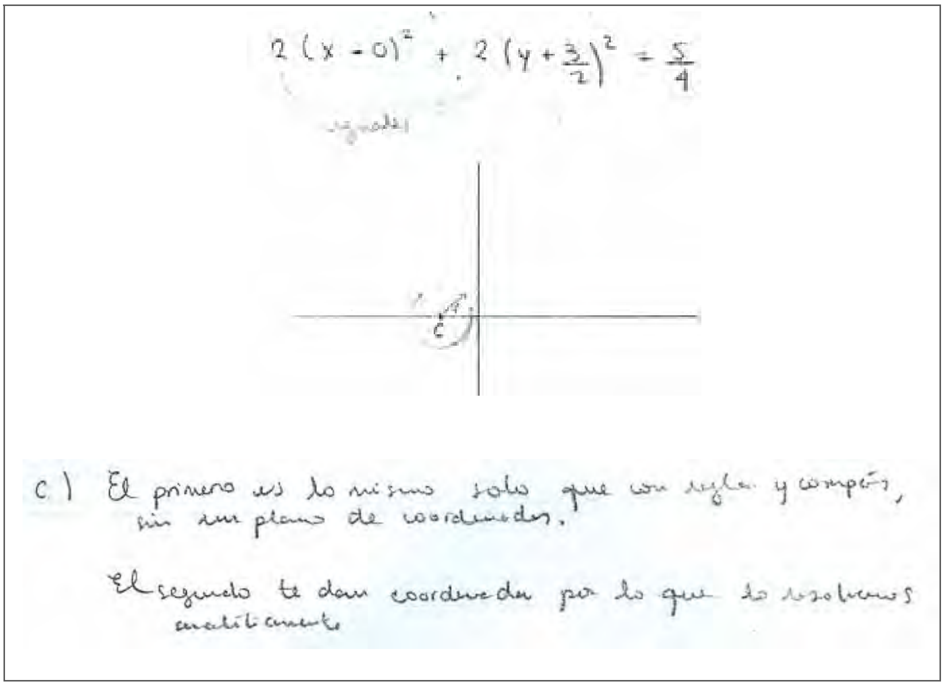


Figura 7.67. Respuesta del alumno 21 del ciclo V

Los resultados generales muestran que más del 80% de los estudiantes resolvió con éxito el problema en el marco algebraico, mientras que alrededor del 20% de estudiantes lo resolvió satisfactoriamente en el marco geométrico. Todos los alumnos que resolvieron el problema en el contexto sintético, lo hicieron también en el contexto algebraico, pero no ocurrió lo contrario. Lo que confirma que el problema resultó más complejo en el contexto sintético, tal como se había previsto.

Respecto a los resultados obtenidos en el ciclo III, se observó un incremento considerable en el porcentaje de estudiantes que tuvo éxito al realizar la tarea tanto en el contexto sintético como en el analítico. Consideramos que las modificaciones realizadas en la docencia, donde se trabajaron más actividades de construcción y a muchas de las cuales se les asoció un enunciado en el contexto de la geometría analítica, contribuyó a dichas mejoras.

Por otro lado, se encontró que todos los estudiantes que dieron casos particulares para los radios y no abordaron el caso general, optaron por considerar los valores 3 y $\sqrt{7}$. Al parecer esto ocurrió ya que al ser 3 el dato de la distancia entre *A* y *B*, lo tomaron como uno de los radios aunque ello no los llevó a asumir que el triángulo *APB* era recto.

También resultó interesante encontrar que algunos estudiantes atribuyeron la forma del lugar geométrico a la forma empleada en las construcciones auxiliares. Esto había sido contemplado en el análisis previo por lo que se esperaba que en este ciclo aparecieran resultados con esas características. Así por ejemplo, algunos estudiantes se apoyaron en que dado que las construcciones auxiliares eran circunferencias, la forma que adoptaba el lugar geométrico también debía serlo, afirmación que no siempre es correcta.

7.4.4. RESULTADOS CUANTITATIVOS SOBRE CONEXIONES ENTRE DISTINTAS REPRESENTACIONES

La cantidad de estudiantes que participó en esta etapa del estudio se muestra en la tabla 7.18.

Tabla 7.18. Cantidad de estudiantes que dio respuesta al apartado 3

	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
Número total de estudiantes a los que se les presentaron las tareas del apartado 3	30	41	31	20	33

Luego de analizar las respuestas de todos los estudiantes, éstas se organizaron en tablas de frecuencias porcentuales y gráficos para tener una idea global del comportamiento del grupo en relación al apartado de conexiones entre distintas representaciones.

La tabla 7.19. corresponde a los resultados globales obtenidos durante los cinco en los que se plantearon tareas sobre transformaciones entre registros.

Tabla 7.19. Porcentaje según nivel en relación a las transformaciones entre registros

Niveles	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
	%	%	%	%	%
Muy alto	10	9,76	3,23	0	3,03
Alto	3,33	12,2	16,13	5	9,09
Medio	40	46,34	54,84	25	54,55
Bajo	23,33	19,51	12,9	45	30,3
Nulo	23,33	12,2	12,9	25	3,03

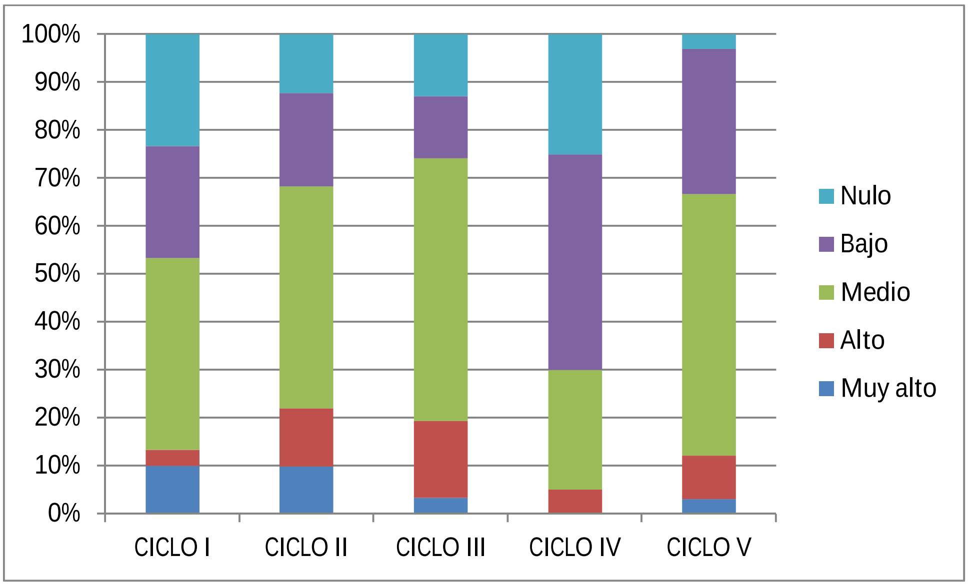


Figura 7.69. Gráfico de frecuencias sobre transformaciones entre registros–tarea 3

Según la figura 7.69., se ha encontrado que del primer al tercer ciclo el porcentaje acumulado de estudiantes ubicados en los niveles muy alto, alto y medio fue en aumento. Esto corresponde a un progreso en la capacidad para realizar adecuadamente transformaciones del registro lengua natural al registro figural (al interpretar los enunciados con construcciones), del registro lengua natural al simbólico (al representar las condiciones a través de expresiones algebraicas), del registro simbólico al gráfico (al representar en un plano cartesiano los pares de puntos que satisfacen una ecuación) y al establecer conexiones entre soluciones geométricas y algebraicas. En el ciclo V hubo una leve disminución de este porcentaje.

Los resultados poco alentadores obtenidos en el ciclo IV se explican por lo compleja que resultó la tarea propuesta; se requería realizar un gran número de movilizaciones en el registro figural.

La tabla 7.20. corresponde a los resultados globales obtenidos durante los cinco ciclos, en relación a la eficiencia de la estrategia empleada en distintos contextos

Tabla 7.20. Porcentaje según nivel sobre la eficiencia de la estrategia en distintos contextos

Niveles	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
	%	%	%	%	%
Muy alto	6,67	19,51	3,23	0	18,18
Alto	3,33	9,76	12,9	20	54,55
Medio	23,33	26,83	16,13	10	12,12
Bajo	16,67	26,83	51,61	45	15,15
Nulo	50	17,07	16,13	25	0

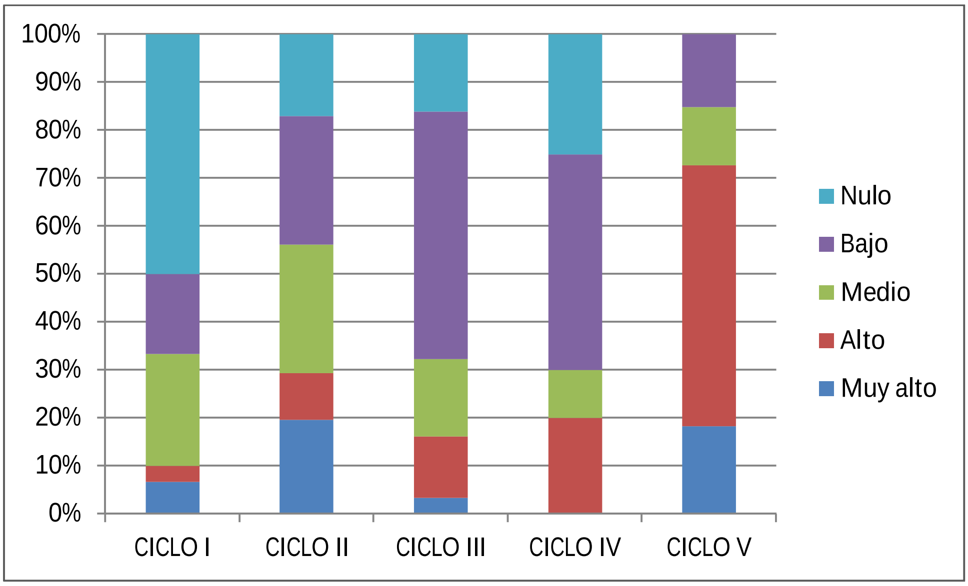


Figura 7.70. Gráfico de frecuencias sobre la eficiencia de la estrategia–tarea 3

El porcentaje de estudiantes que logró resolver con éxito la tarea en un contexto y parcialmente en el otro se incrementó durante los distintos ciclos, lo que se verifica con el crecimiento de las barras correspondientes al nivel alto en la figura 7.70.

En relación al porcentaje de estudiantes que resolvió la tarea en los dos contextos en los que ésta fue presentada, se obtuvo un ligero incremento. La tabla 7.21. muestra con más detalle el nivel de éxito en cada ciclo según se haya resuelto la tarea en el contexto geométrico o en el algebraico o en ambos.

Tabla 7.21. Porcentaje de éxito en la solución de la tarea según el contexto

Descripción	Ciclo I	Ciclo II	Ciclo III	Ciclo IV	Ciclo V
Solución sintética y algebraica	6,67	19,51	3,23	0	18,18
Sólo solución algebraica	26,67	14,63	29,03	30	66,67
Sólo solución sintética	0	21,95	0	0	0

Como se observa en la figura 7.71., se ha producido una evolución favorable en el nivel de éxito de las soluciones en el contexto algebraico.

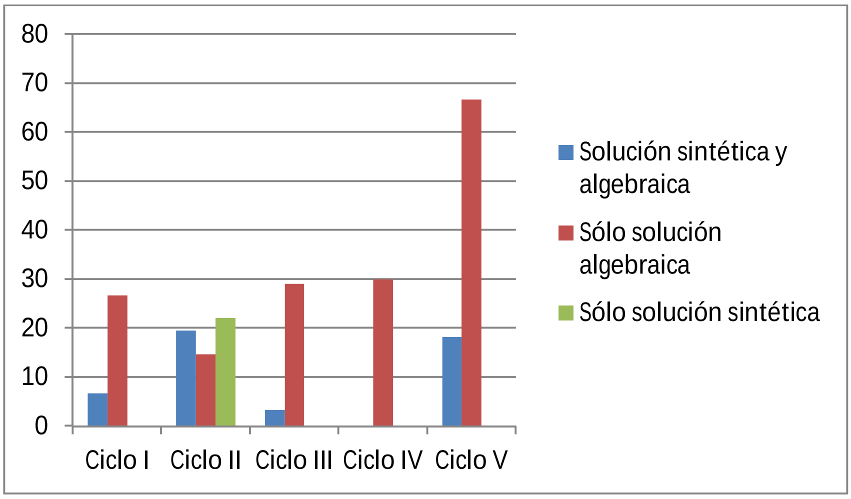


Figura 7.71. Gráfico sobre éxito según contexto en los cinco ciclos

En particular, comparando los resultados del ciclo III y V donde se planteó la misma tarea, se encuentra una mejora como se observa en la figura 7.72.

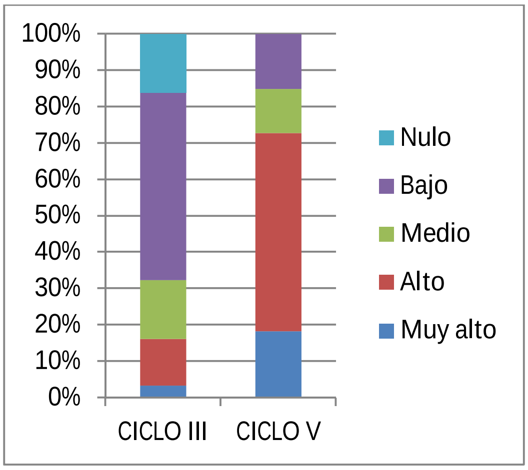


Figura 7.72. Gráfico sobre éxito en ciclos III y V

7.4.5. REFLEXIONES

Los procedimientos sintéticos han resultado más complejos para los estudiantes que los procedimientos analíticos, tal como se ha verificado en los ciclos I, III, IV y V. En particular, el identificar cuándo se hacía necesario construir una recta paralela a otra o cuándo convenía construir una circunferencia a partir de datos dados, son procedimientos cuya utilidad no se reconoció de manera inmediata. En cambio, sí lo fueron procedimientos tales como determinar una ecuación lineal o cuadrática a partir de información dada previamente.

Las diferencias de resultados entre las tareas propuestas en el ciclo II (donde no se requería de una construcción adicional), la del ciclo III (que fue igual a la del ciclo V, donde sí había que hacer construcciones auxiliares fuera del dibujo donde se encontraban los datos A y B) y la tarea propuesta en el ciclo IV (similar a la del ciclo III pero con una condición adicional que incrementaba su dificultad) se pueden explicar en base al número de propiedades y definiciones ya aprendidas que se debían movilizar en cada caso.

Se esperaba que dado que la actividad propuesta en el ciclo II tenía asociadas un menor número de UEI y no requería de construcciones adicionales fuera del dibujo inicial, se obtuviera un mayor éxito en su solución que en la de cualquier otra tarea. Efectivamente, en dicho ciclo se obtuvo el porcentaje más alto de estudiantes que logró resolver la tarea en los dos marcos. Contribuyó a ello el que en el marco geométrico se podía justificar la forma del lugar geométrico considerando una propiedad de la circunferencia que los alumnos conocían y que podían asociarla a su equivalente algebraico.

Se produjo un incremento considerable en el porcentaje de estudiantes que dio solución, al menos en un contexto, a la tarea planteada en el ciclo V respecto al ciclo III donde se propuso la misma actividad. Los resultados obtenidos en la tarea propuesta en el ciclo V muestran una evolución positiva en relación a los aprendizajes.

Consideramos que el hecho que el porcentaje de estudiantes que resolvió con éxito el problema del ciclo I haya sido tan pequeño se debe básicamente a que la figura del triángulo no era dato. Para construirlo, se hacía necesario una actividad de configuración donde, a partir de un enunciado, los alumnos debían movilizar las propiedades o definiciones ya aprendidas sobre altura y mediana para construir la figura.

Mención aparte merece el ciclo II en donde el porcentaje de estudiantes que abordó el problema sólo en el contexto sintético fue mayor, aunque por poco, al que lo hizo sólo en el contexto algebraico; esto concuerda con lo previsto. Según el marco teórico adoptado, se esperaba un mayor éxito en la solución sintética pues si recordaban la propiedad de la circunferencia y comprendían el enunciado, la solución sería inmediata. Mientras que la solución algebraica exigía realizar un mayor número de transformaciones en el registro simbólico y luego del simbólico al gráfico.

Los resultados del ciclo IV, donde se trabajó la tarea más compleja pues involucraba un mayor número de UEI, concuerdan con lo esperado y muestran que esta actividad resultó especialmente difícil para los estudiantes, tanto en el contexto sintético como en el analítico. El poco éxito obtenido en la solución de esta tarea puede tener su origen en que el procedimiento sintético requería traducir la condición dada a un dibujo, por ejemplo a un triángulo recto de catetos 2 y $3\sqrt{2}$, e *imaginar* otro dibujo donde se mantuvieran algunas de las condiciones pero otras no, como el que la suma de los cuadrados seguiría siendo 22 pero el triángulo *APB* ya no sería recto y sus lados medirían 2 y 3. Se trata de una actividad de reconfiguración, que desde el punto de vista cognitivo es muy compleja.

De otro lado, el abordar la tarea en el contexto geométrico contribuyó a darle sentido al trabajo algebraico como se observó especialmente en los resultados de los ciclos II, IV y V en donde todos los estudiantes que resolvieron el problema en el contexto sintético también lo resolvieron en el contexto algebraico; sin embargo, no ocurrió lo contrario.

Se ha verificado que aquellas tareas que generaron mayor dificultad en los alumnos correspondieron a preguntas para cuya solución se hacía necesario un mayor número de UEI, destacando la tarea del ciclo IV con un mayor número de UEI y la del ciclo II con el menor número de UEI.

Durante el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes se reconoció la presencia de representaciones en los registros lengua natural, figural, simbólico y gráfico. Las mayores dificultades se presentaron al realizar dos tipos de transformaciones: de la lengua natural a una representación geométrica que no se obtenía directamente de los datos, y al transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes. Fue también complejo el establecimiento de relaciones entre las soluciones obtenidas en el marco geométrico y el algebraico.

El progreso entre uno y otro ciclo puede atribuirse, en parte, a la evolución de la profesora investigadora que fue incorporando mejoras en las distintas implementaciones, conducentes a que los estudiantes logren una mejor conexión entre sus procedimientos. Sin embargo, los resultados finales dejan en evidencia que el marco geométrico sintético no es trivial. Se sugiere dedicar más tiempo al trabajo con actividades de construcción para que los estudiantes se familiaricen con los procedimientos propios de esta geometría.

7.5. REFLEXIONES DEL CAPÍTULO

La selección de una tarea específica para cada aspecto ha permitido realizar un análisis en profundidad de los tres focos de interés de esta investigación. Así también, la definición de categorías de análisis para cada uno de dichos aspectos permitió reconocer las principales dificultades que presentaron los estudiantes.

En general, se ha encontrado que en tareas comunes aplicadas en ciclos distintos aparecieron errores similares, es decir, se identificaron errores reproducibles. De otro lado, en tareas de naturaleza distinta, se identificaron dificultades atribuibles a la actividad matemática que el problema exigía.

En lo relacionado a lo que significa construir de manera exacta con regla y compás, se ha obtenido una notable mejora en las últimas implementaciones respecto a las primeras. Dicha concepción ha ido evolucionando a medida que se desarrolla el proceso de instrucción. Lo que, en cierta manera, valida las modificaciones realizadas entre uno y otro ciclo.

Sin embargo, aún persisten algunos problemas para realizar las construcciones de manera exacta sólo con regla y compás, cometiéndose algunas imprecisiones. Esto hace que nos replanteemos si vale la pena seguir insistiendo en ello o si se admite desde el inicio el uso de escuadras para facilitar las construcciones, especialmente aquellas que involucran un gran número de UEI.

Sobre las tareas propuestas en este trabajo para identificar la concepción que poseían los estudiantes sobre la noción de lugar geométrico, se caracterizaron por situarse en contextos geométricos, contrariamente a como suele hacerse. Actualmente este concepto aparece por primera vez en contextos de geometría analítica. Esto se hizo bajo la premisa de que el marco geométrico le atribuiría un mayor significado a dicho concepto.

Los resultados muestran que las tareas propuestas favorecieron la identificación del lugar geométrico como un conjunto que se genera con una condición dinámica y que exige tener en cuenta todos los elementos que lo forman y no sólo algunos. Así, se verificó la conveniencia de introducir el lugar geométrico inicialmente en el marco geométrico.

En relación al tercer apartado referido a las conexiones que se realizan entre distintas representaciones, se ha confirmado lo complejo que resulta para los estudiantes realizar algunas transformaciones. Según las evidencias recogidas, no ha resultado trivial para los estudiantes establecer conexiones entre enunciados, procedimientos y resultados dados en contextos diferentes. Esto se ha evidenciado al analizar las respuestas a problemas equivalentes en los marcos geométrico y algebraico.

En relación a las tareas seleccionadas en los últimos ciclos para establecer conexiones entre la geometría sintética y la analítica, se ha encontrado que éstas han sido pertinentes para justificar el uso de técnicas algebraicas. Los métodos geométricos generaban únicamente un número finito de soluciones mientras que los métodos algebraicos permitían obtener todas las soluciones completas con significado geométrico.

De otro lado, el plantear las mismas tareas tanto en el contexto geométrico como el algebraico, contribuyó a darle sentido al trabajo realizado con las ecuaciones, como se observó especialmente en los resultados de los ciclos II, IV y V en donde todos los estudiantes que resolvieron el problema en el contexto sintético también lo resolvieron en el contexto algebraico.

En cierta forma, se ha cumplido con el objetivo de aprendizaje planteado, que consistía en que los estudiantes reconocieran la utilidad y dieran sentido a las técnicas propias de la geometría analítica. Ello, en contraste con la eficiencia limitada de las técnicas de geometría sintética en las tareas seleccionadas en esta investigación. Aclarando que fue justamente ese el criterio de selección de las actividades, ya que existen otras en donde ocurre lo contrario, tal como se vio en el capítulo 4.

Se ha verificado que el tratamiento de tareas en el contexto geométrico no es trivial. Esto puede ocurrir debido a que en la actividad geométrica se demandan actividades de una mayor complejidad cognitiva, como en el caso de las reconfiguraciones. Se hace entonces necesario realizar más investigaciones para su comprensión.

Finalmente, el análisis de las tareas correspondientes a los tres aspectos de interés de esta investigación provee evidencia para establecer una relación inversamente proporcional entre el número de UEI asociado a una tarea y el nivel de éxito al realizarla.

CAPÍTULO 8

CONSIDERACIONES FINALES

A continuación se presentan las conclusiones del trabajo, las mismas que han sido redactadas en forma discusiva, retomando las hipótesis de investigación. De esa manera, teniendo en cuenta las evidencias encontradas, los supuestos se confirman o refutan. Luego se señalan los aportes de la tesis relacionados con el análisis de la organización curricular actual, el estudio histórico epistemológico realizado, la propuesta didáctica elaborada y el método de investigación seleccionado. Finalmente, se presentan algunos problemas abiertos que se desprenden del trabajo realizado.

8.1. CONCLUSIONES

Se presentan las conclusiones del trabajo de investigación, asociando cada uno de ellos a las hipótesis de investigación.

H1: En el desarrollo histórico del concepto de lugar geométrico se encontrarán evidencias que justifiquen la emergencia de la geometría analítica; estas evidencias podrán ser adaptadas para ser desarrolladas en el nivel de enseñanza en el que se desarrolla esta investigación.

Durante el apogeo de la matemática griega, la geometría se caracterizó por seguir razonamientos deductivos en los que la demostración, definida como un proceso que consiste en la derivación de consecuencias sobre la base de conocimientos previos, era el camino de solución. Los principales resultados que sirvieron de argumentos paras justificar esta geometría debido a sus innumerables aplicaciones teóricas y prácticas fueron los teoremas de Tales, de Pitágoras y del ángulo inscrito.

No obstante, también se identificó que en esa etapa del desarrollo de la geometría las soluciones de los problemas debían venir acompañadas de un dibujo, realizado empleando exclusivamente con la regla y el compás. Y fue justamente la búsqueda de soluciones a determinados problemas empleando únicamente esos instrumentos lo que permitió el desarrollo de otras áreas de la matemática, entre ellas la del Álgebra.

Dentro de los problemas abordados por Euclides, destaca un problema sobre lugar geométrico, dado en términos de proporciones y conocido como el *problema de Pappus*. En el siglo IV a.C. Euclides lo resolvió para el caso n=1 y n=2. Posteriormente, en el siglo III a.C., Apolonio lo resolvió considerando n=3 y n=4 pero con un método distinto, lo que le permitió obtener ecuaciones de cónicas; por ello se considera que la obra de Apolonio fue una anticipación a la geometría analítica de Descartes. Entre los siglos III y IV de nuestra era, Pappus, en su libro "*Colección Matemática*", planteó formalmente el problema para n>4. Ese fue el punto de partida para que Descartes desarrollara la geometría analítica. Con los aportes de Descartes, las curvas fueron consideradas como la traza de un punto que se desplazaba sujeto a determinadas condiciones geométricas pero que además podían ser descritas completamente por comprensión a través de una ecuación. Y clasificó las curvas geométricas según el grado de dichas ecuaciones.

Se concluye que la hipótesis inicial referida a que es posible encontrar situaciones que justifiquen el paso de la geometría sintética a la geometría analítica, halla sustento en el estudio realizado. De esta manera, se confirma que el origen y desarrollo histórico de la geometría sintética, sin duda, brindan pautas para justificar la génesis de la geometría analítica, que de otro modo resultaría un tanto artificial.

Las actividades que se propongan deben considerar como idea fundamental la noción de lugar geométrico. Se debe caracterizar porque inicialmente puedan ser resueltas con regla y compás pero luego, al realizar alguna modificación en las condiciones del problema, se debe hacer necesaria la introducción de las técnicas algebraicas, tal como ocurrió en el desarrollo del problema de Pappus.

Además, del estudio histórico epistemológico realizado se concluye que el método empleado por Descartes al resolver el problema de Pappus difiere considerablemente del empleado actualmente en cursos de geometría analítica. Descartes no trabajó con pares de números asociados a puntos; las variables usadas representaban longitudes absolutas respecto del sistema de referencia formado por los elementos constructivos. De esa manera, se obtenían varias ecuaciones a partir de las condiciones geométricas dadas, las que se combinaban hasta obtener una con una sola variable.

Se confirma entonces la necesidad de diseñar actividades que recojan las técnicas algebraicas actuales, empleando un sistema de coordenadas rectangulares. Dichas tareas deberán generar la necesidad de ampliar las técnicas de la geometría sintética por las técnicas algebraicas propias de la geometría analítica.

H2: Es posible caracterizar la actividad matemática que se debe desarrollar al resolver determinados problemas de geometría sintética con un número finito de procedimientos, así como establecer relaciones entre estos y los procedimientos del álgebra que involucran los mismos objetos matemáticos.

Para describir los procedimientos que se llevan a cabo al abordar problemas de geometría se definieron las UEI. Estas UEI en los marcos geométrico y algebraico se asociaron a sistemas de representación semiótica distintos.

Se empleó el término UEI en el marco de la geometría sintética para hacer referencia a cada construcción añadida con regla y compás. Por lo general, cada UEI implicó una movilización en el registro figural.

En el caso de tareas del marco algebraico, se consideró como UEI cada ecuación lineal o cuadrática en dos variables (con coeficientes cuadráticos iguales) determinada por las condiciones de un problema o la solución de un sistema de ecuaciones de ese tipo. Por lo general, cada UEI implicará una movilización en el registro algebraico.

Se establecieron asociaciones entre UEI en los marcos geométrico y algebraico. Así, se asoció el construir una recta conociendo dos puntos de paso con determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso; el construir una circunferencia con centro y radio conocido con determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio; el identificar puntos sobre un objeto dado con resolver una ecuación lineal o cuadrática en una variable; y, finalmente, construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente con resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, o dos ecuaciones cuadráticas o una ecuación lineal y otra cuadrática, con dos incógnitas.

Así, todas las tareas de geometría consideradas fueron analizadas únicamente en términos de dichas UEI. La descomposición de los procedimientos involucrados en UEI permitió poner en evidencia que el uso de un marco u otro en la solución de un problema genera distintos procedimientos de solución, algunos equivalentes pero otros no.

De esta manera, se confirma la hipótesis según la cual es posible caracterizar la actividad matemática que se debe desarrollar al resolver determinados problemas de geometría sintética con un número finito de procedimientos.

De otro lado, se verifica el supuesto de la teoría de marcos según el cual todo concepto matemático, en este caso el lugar geométrico, está asociado a varios marcos; dicha noción ha sido estudiada en este trabajo desde los marcos geométrico y algebraico.

Se consideran tres clases de procesos cognitivos en geometría: Visualización: Razonamiento y Construcción mediante herramientas. En este trabajo se ha puesto especial énfasis en relacionar los dos últimos para explicar la complejidad de la actividad matemática que involucran determinadas tareas geométricas.

También se confirma que existen diferencias entre los sistemas de representación que producen los distintos marcos; así, mientras que en el marco geométrico la representación predominante fue la figural, en el marco algebraico lo fueron la algebraica y la gráfica.

La descripción de los procedimientos habituales empleados en geometría sintética y geometría analítica ha puesto en evidencia que, tal como lo afirma la teoría de marcos, en general no se movilizan las mismas propiedades ni los mismos procedimientos.

Finalmente, se ha seguido la recomendación de la teoría de marcos según la cual se deben construir problemas que permitan introducir y suscitar el funcionamiento de conocimientos en los que intervienen al menos dos marcos. Así, se han diseñado problemas de lugar geométrico para cuya solución deben interactuar los marcos geométrico y algebraico ya que de esa manera se favorecerán los aprendizajes.

H3: Se establecerán conjeturas sobre los comportamientos de los estudiantes y éstas se podrán contrastar en el desarrollo de la investigación. Los estudiantes presentarán dificultades al realizar tareas que requieran de construcciones geométricas y éstas se incrementarán a medida que la solución posea un mayor número de unidades elementales.

Se realizaron predicciones sobre los comportamientos de los estudiantes al resolver las actividades de construcción con regla y compás y de la familia de problemas sobre lugar geométrico. Para ello, se tuvieron en cuenta los elementos del marco teórico seleccionado. El desarrollo de las conjeturas se presentó con detalle en el capítulo 6.

El análisis de procedimientos de solución en términos de UEI permitió reconocer qué tareas geométricas resultarían más complejas. Lo serían, en particular aquellas relacionadas con la construcción de paralelas mediante la construcción de dos perpendiculares, y de representación de productos y cocientes de longitudes de segmentos en la recta ya que poseen un gran número de UEI. Con el mismo argumento, se esperaba que tareas en contexto geométrico, como las relacionadas con la construcción de líneas notables de un triángulo, se encontraran más al alcance de los estudiantes y así fue.

Otro de los criterios tenidos en cuenta para prever qué actividades resultarían más complejas en términos cognitivos fue considerar los tratamientos, conversiones o reconfiguraciones que se hacían necesarios realizar en el proceso de solución. En el contexto geométrico lo serían las tareas sobre lugar geométrico para las cuales la geometría sintética sólo permitía obtener un conjunto finito de soluciones. Mientras que en el contexto algebraico, serían más complejas aquellas tareas sobre determinación de tangentes exteriores o bisectrices, pues se requería realizar un gran número de tratamientos y conversiones del registro algebraico al gráfico.

Para las tareas de lugar geométrico consideradas se encontró que los procedimientos sintéticos resultaron más complejos que los algebraicos. Esto puede atribuirse, como señala la TRRS, a que en sistemas como el algebraico casi todos los procesos se pueden algoritmizar, mientras que esto no ocurre en el registro figural. La solución de un problema de geometría requiere de ciertas habilidades tales como la visualización, el manejo preciso de instrumentos y el tener presente en todo momento a dónde se quiere llegar.

Y dentro de las tareas en el cuadro geométrico, las que presentaron mayor dificultad para los alumnos fueron aquellas en las que se debía realizar construcciones auxiliares fuera de la construcción principal. Esto se atribuye a que dicha acción requiere realizar reconfiguraciones; es decir, requieren modificar la configuración inicial a través de una aprehensión operativa o discursiva. Dicha actividad es de alta complejidad cognitiva, tal como lo señala la TRRS.

Los estudiantes también presentaron dificultades para realizar construcciones exactas de varias etapas; esto ocurrió, en particular, con la construcción de la recta paralela por lo que los alumnos optaron por construirla sólo de manera aproximada. Se ha encontrado que la razón fundamental para la situación descrita radica en el número de UEI que intervienen en la solución sintética y en los múltiples trazos auxiliares que intervienen en su construcción.

Así, del análisis de las respuestas a las tareas propuestas se tiene evidencia de la relación inversamente proporcional entre el número de UEI de una tarea y el nivel de éxito asociado a la misma. Se confirma la hipótesis que afirma que las construcciones que poseen un gran número de UEI resultarán ser más complejas para los estudiantes.

Dicha hipótesis se ha complementado considerando que para explicar las dificultades cognitivas de las tareas planteadas también se deben tener en cuenta las transformaciones que deben realizarse entre registros. En particular, los problemas de lugar geométrico que requerían de una transformación del lenguaje natural al figural o del lenguaje natural al algebraico y en los cuales no había una relación de congruencia entre las condiciones del enunciado y la representación de los mismos, resultaron especialmente complejas para los estudiantes.

H4: La implementación de una propuesta didáctica que exija abordar problemas sobre lugar geométrico desde los contextos geométrico y algebraico, basada en construcciones geométricas, contribuirá a la comprensión de dicho concepto.

La propuesta didáctica presentada organiza actividades que se fueron variando ciclo a ciclo con la finalidad de garantizar que los estudiantes tuvieran a su disposición recursos básicos para resolver algunos problemas de construcciones con regla y compás. Luego, cuando estos problemas fueran modificados según un criterio previamente definido, los recursos geométricos se volverían insuficientes y se haría necesaria la introducción de los elementos y procedimientos básicos, propios de la geometría analítica.

Como resultado de las actividades implementadas se tiene que la concepción sobre lo que significa construir de manera exacta con regla y compás ha ido evolucionando positivamente a medida que se desarrolló el proceso de instrucción.

Las modificaciones introducidas en el diseño entre cada ciclo de la experimentación han contribuido a que se incremente el número de estudiantes que fueron ubicados en los niveles alto y muy alto respecto a la adquisición de conocimientos y destrezas sobre construcciones exactas con regla y compás. Se ha conseguido que los alumnos distingan una construcción exacta de otra que sólo es aproximada.

Algo similar ocurrió con las actividades propuestas para adquirir una comprensión de la noción de lugar geométrico. Las tareas desarrolladas para ello se enmarcaron en el contexto geométrico, lo que requirió básicamente del empleo de representaciones figurales y de transformaciones del lenguaje natural al figural.

A partir de los resultados experimentales, se confirma que los estudiantes lograron adquirir una concepción dinámica y global de la noción lugar geométrico. Es decir, los estudiantes lograron reconocer todos los elementos que formaban parte de un determinado lugar y no sólo algunos. Esto contrasta con lo ocurrido en el trabajo exploratorio según el cual los estudiantes mostraron tener una concepción sólo puntual de lugar geométrico, lo que se atribuyó a la introducción del tema empleando básicamente el registro algebraico.

Posteriormente, se desarrollaron tareas sobre lugar geométrico con la finalidad de justificar la introducción de técnicas algebraicas. Esto también se hizo con el objetivo de que los estudiantes establecieran conexiones entre problemas del mismo objeto matemático, enunciados en marcos distintos.

Desde el punto de vista didáctico, los problemas considerados para justificar la introducción de las técnicas algebraicas propias de la geometría analítica resultaron adecuados, ya que un tratamiento algebraico de las tareas generaba una solución más completa que la que se obtenía sintéticamente.

De otro lado, en general, se tiene que, ciclo a ciclo, los resultados sobre las conexiones que realizaban los estudiantes entre distintas representaciones de un mismo objeto matemático fueron mejorando. Sin embargo, desde un punto de vista cognitivo, se ha encontrado que algunas preguntas que se desprenden de la familia de problemas todavía se encuentran lejos del alcance de algunos estudiantes.

En particular, no se ha garantizado una comprensión completa de los últimos problemas de lugar geométrico en el contexto sintético. Esto se evidencia por las dificultades que mostraron los alumnos para comprender la técnica de las construcciones auxiliares y de los dos lugares geométricos. También se presentaron problemas para aceptar que con dichos métodos de solución sólo se podía construir un número finito de puntos del lugar geométrico.

Así también, algunos alumnos no pudieron establecer conexiones entre la solución que obtenían en el contexto algebraico y la solución del contexto geométrico. En otros casos, los estudiantes asumieron que la forma del lugar geométrico debía ser la misma que la de los objetos que intervenían en la construcción auxiliar, lo que en general no es correcto.

En conclusión, sobre las primeras actividades de lugar geométrico propuestas en el marco de la geometría sintética, se tiene que éstas contribuyeron a la comprensión de dicho concepto. Sin embargo, las actividades finales sobre lugar geométrico, planteadas simultáneamente en los marcos geométrico y algebraico, aún resultaron muy complejas para un grupo de estudiantes que no logró establecer conexiones entre ellas.

Resultaron especialmente complejas aquellas tareas que exigían tratamientos en el registro figural o las que exigían interpretar las soluciones obtenidas en el registro algebraico en el registro gráfico o figural. Se confirma el supuesto de que la actividad de conversión que implica establecer conexiones entre representaciones de un mismo objeto en diferentes registros no es trivial.

Retomando la hipótesis, si bien las actividades implementadas presentan resultados alentadores, todavía se hace necesario realizar algunas modificaciones orientadas a la comprensión de los procesos involucrados en la solución sintética de los últimos cuatro problemas de la familia propuesta.

Conclusión general

En el estudio histórico epistemológico realizado se encontraron evidencias que justifican la emergencia de la geometría analítica a partir de problemas enunciados en contextos de geometría sintética. La noción de lugar geométrico fue un hilo conductor en el trabajo de Descartes según el cual la definición de curva estaba asociada inicialmente a la traza de un punto pero posteriormente ésta evoluciona y se estudia por comprensión a través de una ecuación. Se observa que en ese trabajo las variables no representaban las posiciones de un punto respecto de un sistema de coordenadas cartesianas y se reconoce lo complejo que sería tratar de abordar los problemas en la forma como lo hizo Descartes. Por esa razón, se diseñaron actividades sobre lugar geométrico para las cuales el empleo de técnicas sintéticas sería eficiente inicialmente pero luego debían evolucionar y reemplazarse por técnicas algebraicas, basadas en el uso de un sistema de coordenadas rectangulares. Las tareas consideradas fueron analizadas empleando la noción de unidad elemental desde los cuadros geométrico y algebraico; esto permitió comprobar que aunque intervienen los mismos objetos matemáticos, en general, no se movilizan las mismas propiedades ni los mismos procedimientos. De otro lado, del análisis de las respuestas de los estudiantes se tiene evidencia de la relación inversamente proporcional entre el número de UEI de una tarea y el nivel de éxito asociado a la misma. Además, resultaron especialmente complejos los problemas de lugar geométrico que requerían de una transformación del lenguaje natural al figural o del lenguaje natural al algebraico y en los cuales no había una relación de congruencia entre las condiciones del enunciado y la representación de los mismos. En general, se tiene que las actividades diseñadas han contribuido a que la concepción sobre lo que significa construir de manera exacta y la concepción de lugar geométrico evolucionen positivamente. Pero, si bien las tareas que debían justificar la introducción de las técnicas algebraicas propias de la geometría analítica resultaron pertinentes desde el punto de vista matemático, todavía algunas de ellas se encuentran lejos del alcance de algunos estudiantes. Esto se atribuye a que las estrategias de solución requerían de construcciones auxiliares, actividad que, a nivel cognitivo, demanda que se realicen reconfiguraciones. Por ello, todavía se hace necesario realizar algunas modificaciones orientadas a la comprensión de los procesos involucrados en la solución sintética de los últimos problemas de la familia propuesta. Finalmente, se ha encontrado que el planteamiento de las mismas tareas tanto en contextos geométrico y algebraico ha contribuido a dar sentido al trabajo realizado con las ecuaciones pues el uso del álgebra ha quedado plenamente justificado en aquellos casos donde las técnicas geométricas fueron insuficientes.

8.2. APORTES DE LA INVESTIGACIÓN

En este subapartado se describen los principales aportes del trabajo realizado. Estos se han organizado teniendo en cuenta de qué manera la investigación puede contribuir a una reorganización del currículo de estudiantes de arquitectura, cuál ha sido el aporte que brinda el estudio histórico realizado, así como de la definición de la noción de unidad elemental de información (UEI), de la propuesta didáctica construida y de haber tomado en cuenta los elementos de los métodos de investigación seleccionados.

***Sobre el análisis de la organización curricular actual*:**

Un conjunto de investigaciones desarrolladas en el campo de la Educación Matemática y que han sido revisadas para este trabajo confirman la necesidad de plantear situaciones que permitan establecer conexiones entre la geometría sintética y la analítica. Para ello presentan distintas razones; desde argumentos que también se basan en el desarrollo histórico de la geometría, pasando por justificaciones en términos de la necesidad de evolucionar técnicas para ampliar las organizaciones praxeológicas y otras que señalan la riqueza de los razonamientos geométricos sobre los algebraicos.

A las evidencias presentadas, se suman las encontradas en esta investigación, según las cuales la introducción de la geometría analítica se suele hacer sin una problematización inicial que justifique su aparición.

El trabajo de investigación realizado puede servir para reformular el tratamiento que se suele dar a la geometría analítica en los cursos iniciales de pre cálculo, tanto para estudiantes de arquitectura como de carreras de ingeniería. Es una aportación relevante, ya que permite establecer un nexo entre dos campos fundamentales en la formación matemática: la Geometría y el Álgebra y posteriormente con el Cálculo de varias variables.

De otro lado, se prevén algunas restricciones en la implementación de una propuesta que busque recuperar la idea esencial de la geometría analítica, ya que el uso del álgebra como primer recurso para la solución de problemas está muy arraigado en los currículos. Estas restricciones pueden tener su origen en la concepción moderna de la geometría en función del conjunto de invariantes siguiendo las orientaciones de Klein (Wussing y Arnold, 1989).

Sobre el análisis histórico epistemológico realizado:

El análisis histórico epistemológico de los conceptos matemáticos estudiados es fundamental para un educador matemático, ya que brinda elementos para la elaboración de propuestas didácticas que permitan dar sentido a los conceptos, aunque sin pretender que ésta haga el mismo recorrido que hicieron los matemáticos para construir un determinado concepto. En particular, el estudio realizado rescata uno de los hilos conductores en el desarrollo de la geometría: la noción de lugar geométrico. Pero también se identifican algunos problemas de construcciones exactas que motivaron el desarrollo de otros campos de la matemática tales como el Álgebra.

A partir de investigaciones realizadas previamente, se sabe que los problemas de construcciones geométricas con regla y compás permiten que los estudiantes reconozcan elementos y propiedades de conceptos geométricos. Además, se convierten en oportunidades para desarrollar prácticas propias del quehacer matemático como el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas. Por esa razón, se ha elaborado una propuesta que incorpora problemas con esas características y que han sido organizados según el número de UEI.

De otro lado, el reconocimiento de la noción de lugar geométrico como uno de los hilos conductores en el desarrollo de las geometrías sintética y analítica, permitió diseñar un conjunto de actividades enmarcadas en una familia de problemas.

Sobre la definición de UEI:

La identificación de UEI en la solución de los problemas ha permitido comprender la complejidad cognitiva que éstos presentan, así como hacer explícitas las relaciones y diferencias existentes entre procedimientos algebraicos y geométricos.

En particular, se ha puesto en evidencia la riqueza de los razonamientos geométricos y la posibilidad de emplearlos al resolver problemas que tradicionalmente se abordan en geometría analítica, ya que en muchos casos existen procedimientos equivalentes.

La organización de las tareas debe realizarse teniendo en cuenta el número de UEI implicadas. En una etapa posterior de dicho diseño, se deben considerar problemas que permitan establecer relaciones entre los procedimientos involucrados en los dos marcos.

En particular, será conveniente considerar aquellos problemas que son equivalentes en los dos marcos ya que de esa manera se podrán establecer relaciones entre sus elementos y entre sus soluciones. Esto favorecerá la comprensión de los objetos involucrados ya que, según el marco teórico adoptado, la búsqueda de relaciones entre procedimientos de solución de un mismo problema desde distintos contextos hará que las concepciones de los estudiantes evolucionen.

Sin embargo, será un requisito previo el diseñar secuencias de enseñanza aprendizaje que permitan a los estudiantes familiarizarse con los procedimientos propios de la geometría sintética.

Sobre la propuesta didáctica que incluye la caracterización:

Se ha elaborado una propuesta para ser trabajada con estudiantes de arquitectura en una primera asignatura de matemáticas. Dicha propuesta se ha ido refinando durante cinco ciclos y como resultado del trabajo experimental, se cuenta con un conjunto de 26 problemas, con sus respectivas soluciones en los marcos geométrico y algebraico, descritas en términos de UEI. En los anexos 2 y 3 se presentan la propuesta y las soluciones, respectivamente.

La propuesta incluye un primer grupo de problemas sobre construcciones elementales con regla y compás, organizados básicamente en dos tipos: problemas sobre representaciones de números construibles y problemas sobre construcción de triángulos.

El segundo grupo de problemas ha sido organizado en una familia de problemas sobre lugar geométrico. Se cuenta con variables didácticas que al ser modificadas generarán problemas que requerirán distintas estrategias de solución.

Inicialmente bastará recurrir a las construcciones elementales con regla y compás para identificar el lugar geométrico. Posteriormente se hará necesario que los estudiantes se familiaricen con la nueva estrategia de realizar construcciones auxiliares fuera del espacio en el que se encuentran los datos para luego trasladar distancia. En este proceso surge la necesidad de usar una herramienta más potente, el sistema de coordenadas, lo que permite asociar una ecuación algebraica a la curva en cuestión y analizar ésta a través de aquella.

La familia de problemas se logró caracterizar con una sola expresión matemática, la cual se enuncia a continuación:

Problema general:
Teniendo en cuenta que se conocen K, los puntos A y B, determine el lugar geométrico descrito por los puntos P del plano, tales que satisfacen la siguiente condición:

$$d^p(A;P) + (-1)^q d^p(B;P) = K,$$

de modo que p y q tomen valores en $\{1;\ 2\}$

Las variables didácticas consideradas son K y los exponentes p y q. Dependiendo de los valores que ellos tomen, el estudiante deberá recurrir a una estrategia de solución distinta.

Se propone considerar primero los casos donde K está en función de las distancia entre A y B; de esa manera se requerirán únicamente estrategias de construcciones exactas de pocas UEI.

En una segunda etapa se propone estudiar el caso para K arbitrario, donde se necesitará realizar construcciones auxiliares (p=2) o dará origen solo a un conjunto finito de puntos del lugar geométrico (p=1). Será en ese último contexto en el que se podrá reconocer la superioridad de las técnicas algebraicas, respecto a las de las construcciones exactas.

La organización de los problemas sobre lugar geométrico como una familia de problemas ha ayudado a identificar cuáles son las técnicas de construcción con regla y compás básicas, y que deben formar parte de la lista de problemas considerada en la primera parte del trabajo.

De otro lado, dicha organización, también ha contribuido a hacer explícita la relación entre la geometría sintética y la analítica, y ha generado actividades que propician la conexión entre los dos marcos.

Sobre el método seleccionado:

El haber tomado elementos de la investigación basada en el diseño y de la investigación acción, métodos de investigación cualitativa, para el desarrollo de este trabajo ha permitido realizar un estudio en profundidad de los aspectos de interés.

En orden a la elaboración de la presente memoria ha seguido el proceso de la organización de la investigación, teniendo en cuenta las etapas propuestas por dichos métodos, lo que sin duda ha contribuido a una lectura más fluida.

La definición de categorías para organizar las respuestas de los estudiantes permitió complementar el estudio cualitativo realizado con un análisis cuantitativo; lo que consideramos enriquece el trabajo.

De otro lado, se ha confirmado la necesidad de experimentar la propuesta durante varios ciclos para cumplir con el criterio de reproducibilidad que le dará validez para su réplica en contextos similares. Ello confirma la naturaleza teórico-práctica de la investigación en el campo educativo de la Matemática.

8.3. RECOMENDACIONES

- Identificar aquellos problemas de geometría analítica que suelen aparecer en los textos didácticos y que puedan situarse en contextos de geometría sintética, solicitando que se resuelvan en ese contexto. De esa manera se exigirá una interpretación continua de lo que se hace en cada paso y se contribuirá a la comprensión de los conceptos y procesos involucrados.

- Proponer actividades que puedan ser abordadas desde distintos marcos y pedir a los estudiantes que lo hagan; de esa manera, cuando sean capaces de establecer conexiones entre los procedimientos realizados se podrá decir que se han producido aprendizajes.

- Reconocer la complejidad cognitiva de los problemas de geometría, en particular de aquellos que requieren realizar reconfiguraciones.

- Tener en cuenta el número de UEI y de transformaciones entre representaciones de registros de representación semiótica que intervienen en la solución de los problemas de geometría para organizarlos según esos criterios.

  Y dado que la construcción de rectas paralelas ha resultado especialmente compleja para los estudiantes, se propone que para futuras implementaciones se permita emplear escuadras. De esa manera, actividades más complejas que tienen a la construcción de paralelas como parte de varias etapas del proceso, podrán ser realizadas de manera exacta.

8.4. CUESTIONES ABIERTAS

A partir de la investigación realizada, se han identificado algunos temas que podrían ser considerados en futuros trabajos, los cuales se presentan a continuación.

- Es necesario realizar más propuestas didácticas que permitan retomar el trabajo de construcciones con regla y compás en la educación escolar ya que los procedimientos que involucran ese tipo de problemas son mucho más ricos, en términos cognitivos, que los procedimientos algebraicos a los que tanta importancia se da en los currículos actuales. Para ello se hace necesario realizar más investigaciones que tengan en cuenta la complejidad de la actividad geométrica.

- Se propone estudiar la posibilidad de modificar en el enunciado del problema general los puntos *A* y *B* por otros objetos como un punto y una recta, de modo que se generen lugares geométricos distintos, siendo un caso particular el de la parábola. De esa manera, a través de un problema general, se pueden plantear diversas situaciones sobre lugar geométrico que tienen como soluciones a todas las cónicas

- El trabajo realizado ha permitido estudiar lugares geométricos correspondientes a rectas, circunferencias, elipses e hipérbolas en términos funcionales (al menos por trozos) con ayuda del álgebra y de las representaciones gráficas. Se plantea estudiar la posibilidad de ampliar el problema general que dé origen a lugares geométricos correspondientes a curvas que no sean cónicas. En ese caso se impone un análisis infinitesimal y el cálculo diferencial de una o varias variables se presentará como una herramienta mucho más poderosa que el álgebra; la ampliación de esa familia de problemas podría ser una forma alternativa de justificar la aparición de las derivadas.

- Aunque no ha sido uno de los focos de esta investigación, se ha valorado positivamente el uso de programas de geometría dinámica para construir la noción de lugar geométrico. Queda pendiente seguir explorando el efecto que tiene el empleo de programas con esas características en el aprendizaje de la geometría y las condiciones bajo las cuales éstos deberían utilizarse.

REFERENCIAS

Acevedo, M. y Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Universidad Nacional de Colombia, Colciencias.

Acuña, C. (2005) ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8 (1), 7-23.

Alsina, C. y Trillas, E. (1992). *Lecciones de álgebra y geometría*. Sexta edición. Editorial Barcelona. España: Gustavo Gili S.A.

Alsina, C. (2011). *La secta de los números. El teorema de Pitágoras.* RBA. Navarra.

Araújo de, I. (2007). *Uma abordagem para a prova com construções geométricas e cabri-géometre*. Tesis de Mestrado em Edução Matemática. PUC/SP

Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. Notas sobre las relaciones entre tres conceptos claves en didáctica. *Revista EMA*, 9(3), 181-204.

Blumenthal, L. (1965). *Geometría Axiomática*. Madrid: Aguilar.

Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid. España: Akal Editor.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática* [A history of Mathematics] (M. Martínez Trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Chassapis, D. (1999). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circles as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 275-293.

Chica, A. (2001). Descartes. Geometría y Método. *La matemática en sus personajes.* Número 8. Madrid: Nivola.

Chinnapan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics,* 36, 201-217.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Education Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R.K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). Nueva York: Cambridge University Press.

Corberan, R. M. (1989). *Didáctica de la geometría: el modelo Van Hiele* (vol. 1). Universitat de València.

De Guzmán Ozámiz, M. (2002). *La experiencia de descubrir la geometría.* Madrid: Nivola.

De la Torre, E. y Pérez Blanco, M. (2008). Paradigmas y Espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la E.S.O. *Investigación en Educación Matemática.* SEIEM, Badajoz.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes*. (David Eugene Smith y Marcia L. Lathan, trad.). Nueva York: Dover Publications, Inc.

De Villiers, M. y Garner, M. (2007). Problem solving and proving via generalization. *Learning and Teaching Mathematics,* 5, 19-25

De Villiers, M. (2008). Solving a locus problem via generalization. *Reflections,* (pp. 10-21). A publication of Georgia Council of Teachers of Mathematics.

Dickson, L., Gibson, O. y Brown, M. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques,* 7(0), 2.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensee humaine*. Bernes: Peter Lang

Duval., R. (1998a). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II*. 173-201.

Duval, R. (1998b). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammama y V. Villani (Eds.). *Perspective on the teaching of* *geometry for the 21st Century*. New ICMI Study Series. Vol. 5 (pp. 29-37). Dordrecht. Netherlands : Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization : cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Proceedings of Psychology Mathematics Education Conferences 23,* 3-26.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address). En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education* (tome I), 55-69. Hiroshima University.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME,* 9(1), 143-168.

Duval, R. (2006b). A cognitive analisis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* 61, 103-161.

Duval, R. (2011). *Ver e Ensinar Matematica de outra forma: entrar no modo matemático do pensar: os registros de representações semió*ticas. Tania Campos (Org). São Paulo: PROEM Editora.

Euclides (1991). *Elementos*. (Maria Luisa Puertas Castaño, trad.). Madrid: Gredos.

Fernández, T. (2013) La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicaciones a las derivadas*. Universidad de Barcelona. Tesis doctoral.

Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-86). Lleida: SEIEM

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la E.S.O. y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, 39, 13-25.

Godino, J.D. y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 9 de noviembre de 2011. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

González, M. y Palencia, J. (1992). *Dibujo técnico I: Trazado geométrico*. [s.n.]

Guillén, G. y Siñériz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de magisterio. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordoñez (Eds). *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp.331-340). Jaen: SEIEM

Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.). (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Gutiérrez, A. (2010). Introducción al seminario I sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 17-20). Lleida: SEIEM.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433–446.

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Karrer, M. (2006). *Articulacao entre álgebra linear e geometría. Um estudo sobre as transformacoes lineares na perspectiva dos registros de representacao semiótica*. Tesis doctoral. PUCP/SP.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317.

Laborde, C. (2010). The use of new technologies as a vehicle for restructuring teacher's mathematics. En A. Bishop (Ed.) *Mathematics Education. Major Themes in Education*, (pp. 155-174).

Latorre, A. (2003). *La investigación acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. España: Grao.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century*: *an ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers.

Millán, A. (2004). Euclides. La fuerza del razonamiento matemático. *La matemática en sus personajes*. Número 19. Madrid: Nivola.

Ministerio de Educación del Perú. (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*.

O'Leary, M. (2010). *Revolutions of Geometry*. New Jersey: Wiley & Sons Inc.

Ortega, I. y Ortega, T. (2004). Los diez problemas de Apolonio. *SUMA*, 46, 59-70.

Pérez, M. (2009). *Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes*. Madrid: Visión Libros.

Petersen, J. (trad. 1955). *Métodos y teorías para la resolución de los problemas de construcciones geométricas*. (J. Gallego Díaz, trad.). Madrid: Giner.

Piaget, J.,Choquet, G., Dieudonné, J. y Thom, R. (1986). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.

Piñeiro, M., Ibañes, M. y Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Editorial Síntesis.

Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (3), 339-368.

Puerta, M. (2009). *Interpolación y extrapolación gráfica y algebraica. Estudio de contraste*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Puig Adam, P. (1976). *Curso de geometría Métrica*. 12ª Edición. Madrid: Biblioteca Matemática.

Radillo, M., Nesterova, E.D., Ulloa, R., Pantoja, R. y Yakhno, A. (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa. *Congreso Internacional Virtual de Educación (CIVE 2005*). Disponible en:www.cibereduca.com/cive/cive2005.asp

Rey Pastor, J., Santaló, L.A. y Balanzat, M. (1957). *Geometría analítica.* Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Sanz, J. (1999). *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides*. Ediciones Universidad Salamanca.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sierpinska, A. (1996) Razonamiento analítico versus razonamiento sintético en álgebra lineal, o cómo un problema de comunicación se convierte en un problema de significado. En L. Puig y J. Calderón (Eds.) *Investigación y didáctica de las matemáticas* (pp.49-66). Ministerio de Educación y Ciencia.

Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás, del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(1), 79-101

Smogorzhevski, A.S. (1981) *La regla en construcciones geométricas.* Moscú: Editorial MIR.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas previas al cálculo.* Quinta edición. México: Thomson.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10(2), 275-300.

Ugarte, F. y Yucra, J. (2010). *Matemática para arquitectos*. Lima: Facultad de Arquitectura y Urbanismo-PUCP.

Van Ash, A.G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mahematics Education, Science and Technology*, 2, 301-313.

Wilhelmi, M. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la evolución de un proceso de estudio: el caso de la determinación de una circunferencia. En J. Higueras, A. Estepa y F. García (Coords.)

Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (pp. 177-200). Universidad de Jaén.

Wussing, H. y Arnold, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Zaragoza: España: Universidad de Zaragoza.

ANEXOS

ANEXO 1

TRABAJO EXPLORATORIO

A continuación se presentan los enunciados de las preguntas que se emplearon en el trabajo exploratorio, del cual se brinda información en el sub apartado 1.4. y también se presentan las soluciones propuestas para cada una de ellas.

Pregunta 1

Considerar los puntos A, B y C ubicados en el semieje x positivo, de modo que A coincida con el origen de coordenadas, B diste en 3 unidades del origen y C diste 5 unidades del origen.

- Escriba la condición algebraica que debe satisfacer la coordenada correspondiente al punto D ubicado en ese mismo semieje, de modo que el área del cuadrado de lado BD coincida con el área del rectángulo cuyos lados miden AD y CD.

- Halle las posibles ubicaciones de D.

Solución experta:

Usando las técnicas de la geometría analítica, este problema podría resolverse de varias formas; se presentan a continuación dos de ellas.

Alternativa 1

Denotando por *x* la distancia de D al origen, y dependiendo de la ubicación de D, a la derecha o a la izquierda de C, la condición de igualdad de áreas se escribe:

$$(x-3)^2 = x|x-5|$$

Cuando x>5:

Alternativa 2

Se puede designar por *x* a la "distancia" de C a D, de modo que la condición de igualdad de áreas se escriba:

$$\begin{aligned}(2+x)^2 &= (5+x)x \\ 4 &= x\end{aligned},$$

esto es, cuando D se ubica a la derecha de C. La ubicación de D

$x^2-6x+9=x^2-5x$ $x=9$ Cuando x<5: $x^2-6x+9=-(x^2-5x)$ $2x^2-11x+9=0$ $x=\frac{9}{2}$ ó $x=1$ Luego el lugar geométrico descrito por D está formado por tres puntos: (9,0); (9/2, 0) y (1,0).	sería (9,0) También podría ocurrir que D se ubique a la izquierda de C: $(5-3-x)^2=(5-x)x$ $2x^2-9x+4=0$ $x=4$ ó $x=1/2$ La ubicación de D sería (1,0) ó (9/2, 0).
Al definir como variable la posición de D en el sistema fijado en el enunciado, la condición planteada contemplará todos los casos posibles.	Mientras que al definir como variable la distancia de D a C, esta sólo podrá tomar valores positivos y será necesario analizar casos.

Comentario:

Esta pregunta puede enmarcarse en un contexto de geometría sintética clásica, ya que se pide construir dos figuras de igual área pero se situará en un contexto de geometría analítica dado que en el enunciado se hace mención implícita a un sistema de coordenadas al fijar el origen en uno de los datos. En la primera parte se solicita dar como respuesta una condición algebraica para D, mientras que en la segunda se pide hallar sus posibles ubicaciones, tarea que exigirá interpretar las soluciones encontradas. Notemos que si se hubiera resuelto este problema con las técnicas sintéticas, probablemente se habría obtenido sólo una solución; en este caso, el empleo de técnicas analíticas ha sido útil para obtener las tres soluciones posibles. Problemas como éste son aquellos a los que nos referimos cuando decimos que puede haber situaciones cuya solución es más simple empleando técnicas analíticas que técnicas sintéticas y que podrían emplearse para introducir el tema de geometría analítica.

Sobre las respuestas encontradas a la Pregunta 1

Esta pregunta se planteó con la finalidad de explorar la capacidad de los alumnos de relacionar las técnicas sintéticas y las analíticas. Las primeras habían sido estudiadas en el primer capítulo del curso que es motivo de investigación. Las segundas habían sido trabajadas durante las tres semanas previas a la aplicación de este instrumento.

Dado que durante la docencia de la asignatura no se resolvieron problemas similares a éste, la situación resultó realmente novedosa para los alumnos.

La pregunta fue abordada por 99 estudiantes. El resto, 10 estudiantes, la dejaron en blanco, tal como se muestra en la figura 1.

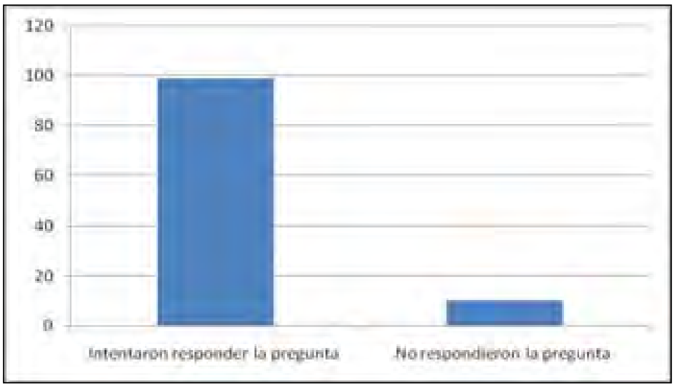


Figura 1. Respuesta de los estudiantes a la pregunta 1

A continuación se muestran los resultados obtenidos en las categorías de análisis consideradas para esta pregunta.

Tabla 1. Resultados de la pregunta 1

	Datos generales		**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje de estudiantes[1]**
	Intentaron responder la pregunta		99	90,8%
	No respondieron la pregunta		10	9,2%
	Categorías		**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje de estudiantes**
RSE	Representación sintética del enunciado	Correcta	2	1,8%
		Incorrecta	6	5,5%
		No emplea representación sintética	101	92,7%
RAE	Representación analítica del enunciado	Correcta	43	39,4%
		Incorrecta	48	44,1%
		No emplea representación analítica	18	16,5%
DV	Definición de variables	Define la posición de D como variable	40	36,7%
		Define la distancia de D a C como variable	23	21,1%

[1] Los porcentajes a los que se hará referencia en la tabla serán respecto al total de estudiantes que participaron en la prueba (109).

		Define más variables de las necesarias, por ejemplo, la posición de D y la distancia de D a C.	1	0,9%
		No define variables	45	41,3%
PE	Planteamiento de ecuaciones	Correcto	49	45%
		Incorrecto	16	14,6%
		No plantea ecuaciones	44	40,4%
RP	Resolución del problema	Correcta	30	28,4%
		Incorrecta	6	4,6%
		No resuelve el problema	73	67%
NS	Número de soluciones	3	1	0,9%
		2	2	1,8%
		1	28	25,7%
		0	78	71,6%
IS	Interpretación de la solución	Interpreta la solución en el contexto del problema	30	27,5%
		No interpreta	79	72,5%
CCA	Concepción sobre condición algebraica	Señala explícitamente que la condición algebraica es la ecuación encontrada	5	4,6%
		Obtiene una ecuación pero no señala explícitamente que ésta sea la condición algebraica solicitada	44	40,4%
		Señala que la condición algebraica solicitada es $BD^2 = AD \cdot CI$ ó y=0 ó f(x)=3x ó	9	8,3%

		$\{D \in IR, D \neq 0$		
		No hay referencia ni explícita ni implícita a la condición algebraica	51	46,8%

La representación privilegiada por los estudiantes fue la representación analítica; 91 estudiantes recurrieron a ella, mientras que sólo 8 lo hicieron sintéticamente.

De los 91 estudiantes que recurrieron a un sistema de coordenadas para representar los datos, sólo 43 lo hicieron eficientemente; los errores más frecuentes fueron ubicar el punto D en el eje x pero con coordenadas D(x,y) o ubicar D en el primer cuadrante.

De los 8 estudiantes que recurrieron a la representación sintética, sólo 2 lo hicieron correctamente. Los demás trazaron circunferencias que no fueron útiles para la solución.

De los 7 estudiantes que emplearon ambas representaciones, ninguno usó ambas correctamente.

Sobre la conversión del registro verbal al registro gráfico, 43 estudiantes ubicaron los puntos A, B, C y D en el semieje x, manteniendo el orden señalado para A, B y C, y asumiendo que D está a la derecha de C.

También sobre la conversión del registro verbal al gráfico, 47 estudiantes ubicaron los puntos A, B, C y D en el plano, no en el semieje x. Esto impidió que luego encontraran la expresión algebraica solicitada.

En la figura 2 se muestra la solución presentada por un estudiante que luego no pudo responder el apartado b), posiblemente porque tenía más variables de las necesarias.

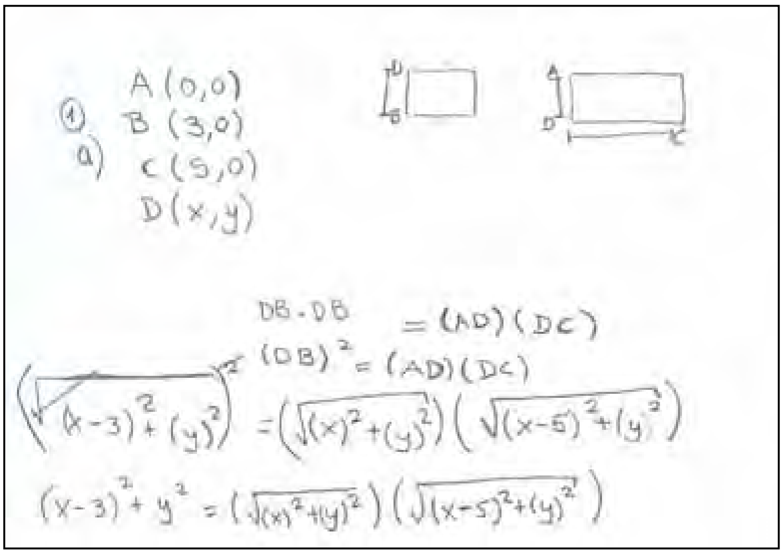


Figura 2. Solución de un estudiante que asignó más variables de las necesarias a D

Sobre la definición de variables, 63 estudiantes lo hicieron correctamente: 40 de ellos representaron la posición como variable, 23 usaron como variable la distancia entre C y D; sólo 1 usó variables para la posición y también para la distancia lo que luego complicó la solución.

La figura 3. corresponde a la solución realizada por uno de los estudiantes que considera a la posición de D como incógnita de la ecuación. Notar que esto ocurre a pesar que no declara explícitamente que x representa la abscisa del punto D. El alumno resuelve la ecuación, obtiene una de las soluciones y luego la interpreta en el contexto del problema.

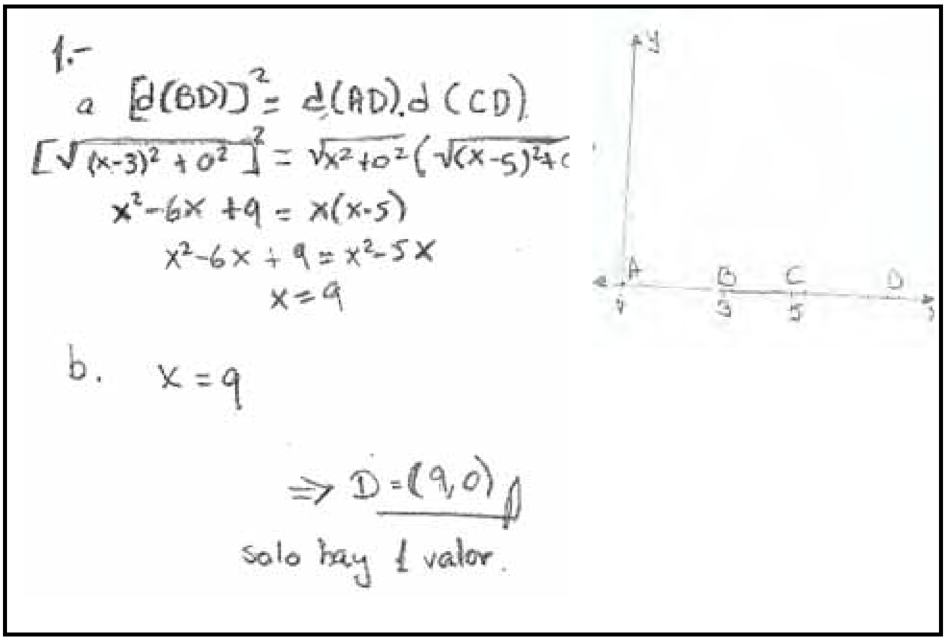


Figura 3. Definición de la posición de D como variable

Con las variables definidas, 65 estudiantes plantearon ecuaciones, pero sólo 43 lo hicieron correctamente. Hay que señalar aquí que se está considerando un planteamiento correcto aquel que iguala las áreas de los dos cuadriláteros, aunque se empleen más incógnitas de las necesarias.

Sobre la realización correcta de los procesos *representación de los datos* y *planteamiento de la ecuación*, sólo 30 estudiantes lo hicieron bien.

Sobre la realización correcta de los tres procesos: *representación de los datos, planteamiento de la ecuación* y *resolución correcta de la ecuación*, sólo 23 estudiantes lo hicieron bien. Hay que señalar aquí, que se está considerando como una respuesta correcta el dar al menos una de las tres soluciones.

Sobre la realización correcta de cuatro procesos: *representación de los datos, planteamiento de la ecuación, resolución correcta de la ecuación* e *interpretación de la respuesta en el contexto del problema*, sólo 21 estudiantes lo hicieron bien.

En la figura 4. se ilustra cómo fue decreciendo el número de estudiantes, a medida que se incrementaba el número de procesos que debían realizar correctamente:

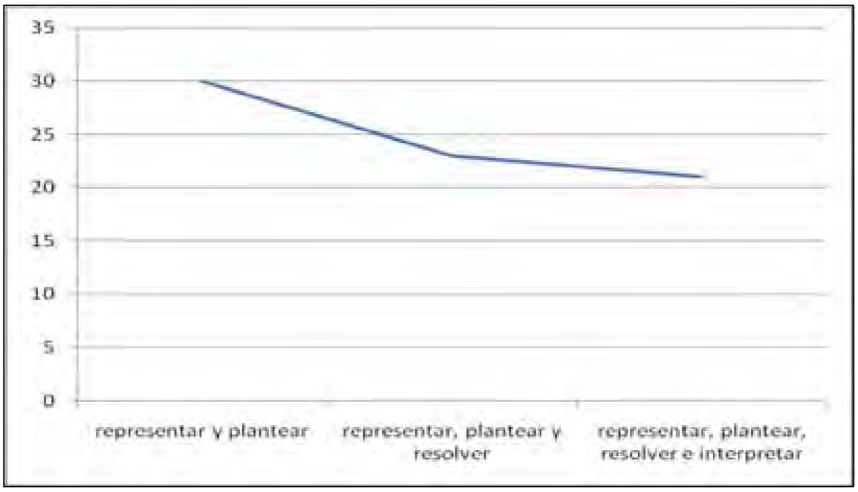


Figura 4. Número de estudiantes que responden correctamente 2, 3 y 4 procesos

Respecto a la concepción que tienen los estudiantes sobre qué argumentos se consideran válidos para resolver un problema en un contexto de geometría analítica, 8 estudiantes consideraron como válido el dar valores a la ubicación de D. Lo que denota que aunque sí comprendieron la condición dada, consideraron como argumento válido probar con números hasta encontrar la respuesta. Se asume que si hay solución, ésta estará en los números enteros y en este caso, el razonamiento seguido fue eficiente porque dos de las respuestas correspondían a valores enteros.

Considerando los 31 alumnos que dieron solución (23 realizando correctamente los tres procesos y 8 tanteando), 27 dieron sólo la respuesta D(9,0), 1 dio sólo la respuesta D(1,0), 2 estudiantes dieron dos soluciones

D(9,0) y D(1,0), mientras que sólo 1 estudiante dio las tres soluciones D(9,0), D(1,0) y D(9/2,0).

En la figura 5. se muestra el procedimiento seguido por el único estudiante que dio las tres soluciones del problema; él planteó una ecuación que involucraba valor absoluto y analizó casos, tal como se muestra en una de las soluciones ideales.

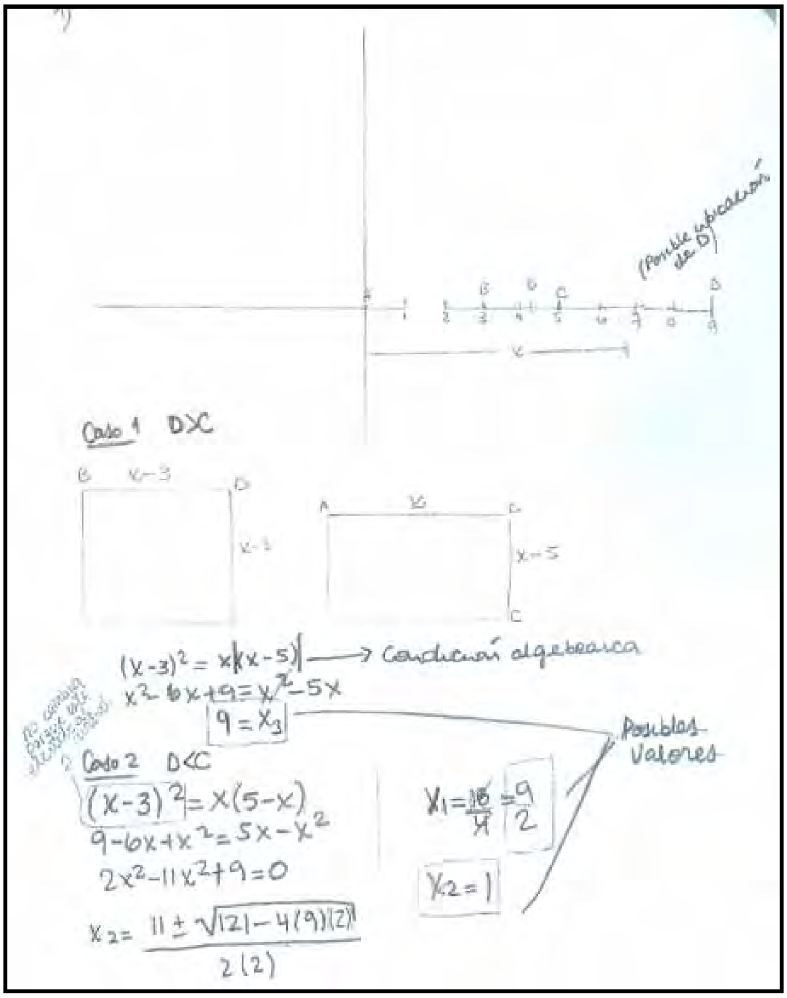


Figura 5. Solución del único alumno que encontró todas las respuestas de la pregunta 1

Sobre la concepción que tienen los estudiantes respecto a dar como respuesta una expresión algebraica, sólo 5 estudiantes declararon que la ecuación que obtuvieron al igualar áreas era la condición algebraica solicitada; 44 lo asumieron implícitamente al dar por terminado el apartado a) del problema luego de hallar la ecuación y 9 de ellos dieron otra interpretación. Por ejemplo, hicieron referencia a que era una recta que pasaba por D(9,0), o hicieron referencia a las ecuaciones canónicas de la elipse, hipérbola, parábola o recta, o dieron como respuesta $(x+9,0)$ ó $f(x)=3x$ ó D$(9,g)$.

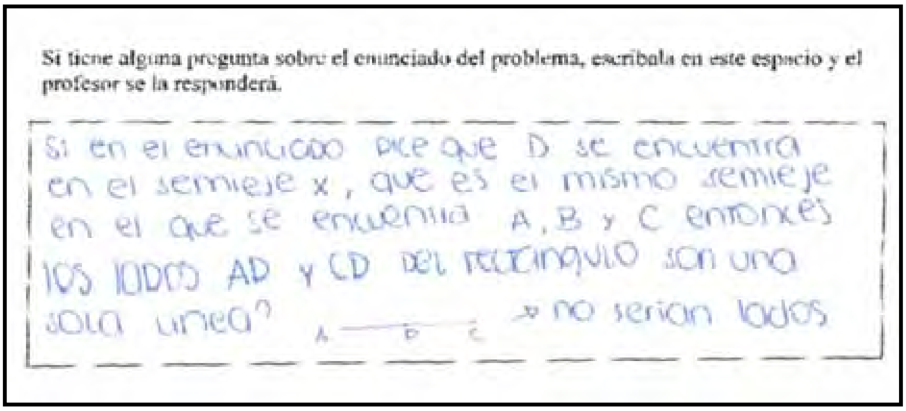
Dudas surgidas en los estudiantes en relación con la pregunta 1

Durante la aplicación de este instrumento y sólo si los estudiantes tenían alguna duda sobre el enunciado del problema, tenían la oportunidad de formular por escrito sus preguntas. A continuación se describen dos de las preguntas que aparecieron con mayor frecuencia entre los alumnos.

Se cuestiona la posibilidad de generar cuadriláteros con segmentos que están sobre una misma recta. (3 estudiantes).

Esta pregunta podría ser un indicador de que los problemas de construcción no han sido tratados antes. Si bien, es cierto que en el desarrollo del capítulo 1 del curso se realizaron algunas construcciones como la del rectángulo áureo, en ese momento no se trabajaron problemas de igualdad de áreas.

En la figura 6. se muestra, a manera de ejemplo, cómo formuló esta duda uno de los estudiantes.

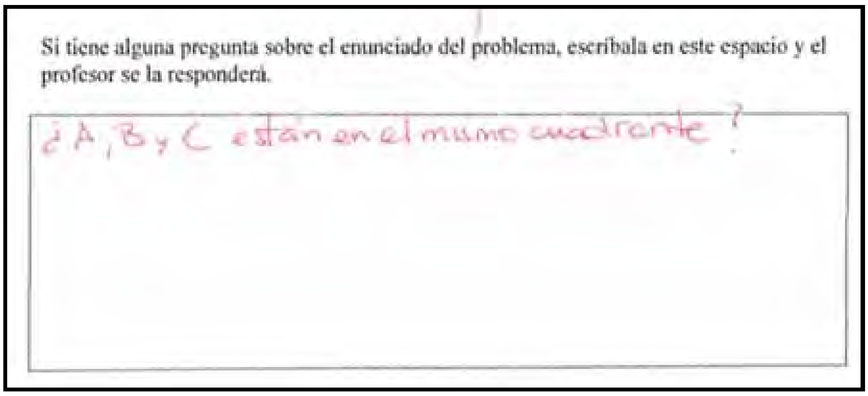

Si tiene alguna pregunta sobre el enunciado del problema, escríbala en este espacio y el profesor se la responderá.

Si en el enunciado dice que D se encuentra en el semieje x, que es el mismo semieje en el que se encuentra A, B y C entonces los lados AD y CD del rectángulo son una sola linea? A B C → no serían lados

Figura 6. Duda sobre la posibilidad de generar cuadriláteros con las condiciones dadas

Se pregunta qué quería decir semieje positivo (4 estudiantes). Esta duda, manifestada por algunos estudiantes, podría ser la explicación de por qué al no tener claro el dato principal del problema, muchos alumnos ubicaron el punto D en distintas posiciones o le asignaron coordenadas (x,y), incrementándose así la complejidad del problema.

En la figura 7. se muestra, a manera de ejemplo, cómo formuló esta duda uno de los estudiantes.


Si tiene alguna pregunta sobre el enunciado del problema, escríbala en este espacio y el profesor se la responderá.

¿A, B y C están en el mismo cuadrante?

Figura 7. Duda sobre el significado de semieje positivo

Pregunta 2

Considerando los puntos del plano A(1,5) y B(4,7), encontrar la condición algebraica que deben satisfacer los puntos P(x, y) que se encuentran alineados con A y B.

Solución experta:

Para que P(x,y) esté alineado con A y B debe cumplirse que el ángulo que formen AB y el semieje x positivo sea igual al ángulo que formen AP y el semieje positivo.

En particular, cuando estos ángulos coinciden, las tangentes de dichos ángulos deben ser las mismas:

$$\frac{7-5}{4-1}=\frac{y-5}{x-1}, \text{ que es equivalente a } \quad 2x\text{-}3y\text{+}13\text{=}0$$

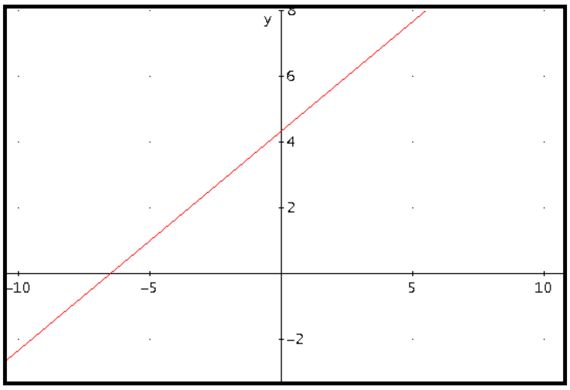


Figura 8. Solución gráfica de la pregunta 2

Comentario:

Esta pregunta requiere de traducir la condición geométrica *estar alineados* con alguna condición analítica. La solución mostrada hace uso de la igualdad de pendientes, ya que la recta dada no corresponde a una recta vertical; sin embargo, los alumnos podían recurrir también a la expresión $y = mx + b$, presentada previamente en clase, y hallar los valores de los parámetros m y b al reemplazar los puntos dados. También podían proceder señalando que para que un punto P esté alineado con A y B debe verificarse la siguiente relación vectorial: $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Como dos de los puntos de paso de dicha recta eran datos, la representación geométrica de la solución sería trivial.

La segunda pregunta brindará información sobre menos categorías que la primera; sin embargo, consideramos que era importante plantearla porque permitía explorar el dominio de los estudiantes respecto a las técnicas analíticas que fueron trabajadas durante la docencia.

Como veremos, hay algunos resultados interesantes que dan cuenta de las dificultades que tuvieron los alumnos al emplear los procedimientos que permitían asociar condiciones geométricas con expresiones analíticas.

La pregunta fue abordada por 99 estudiantes. El resto, 10 estudiantes, la dejó en blanco, como se muestra en la figura 9.

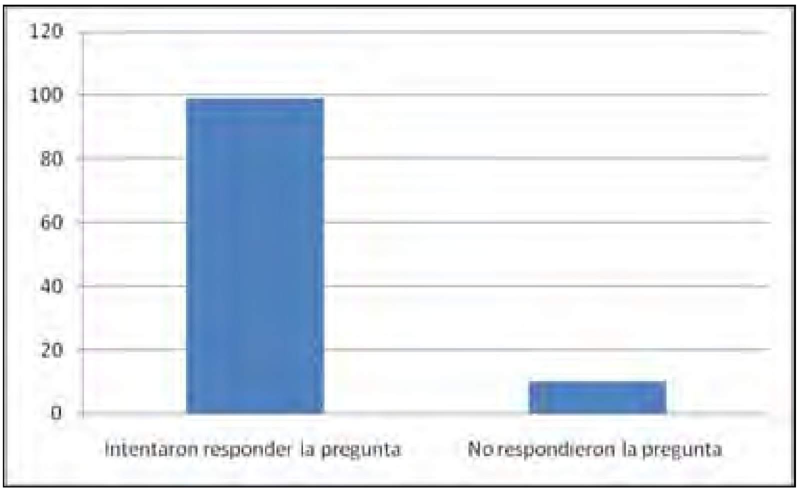


Figura 9. Respuesta de los estudiantes a la pregunta 2

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en las categorías de análisis consideradas para esta pregunta.

Tabla 2. Resultados de la pregunta 2

	Datos generales		**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje de estudiantes**[2]
	Intentaron responder la pregunta		99	90,8%
	No respondieron la pregunta		10	9,2%
	Categorías		**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje de estudiantes**
RAE	Representación analítica del enunciado	Correcta (ubica los puntos A, B y P en el plano cartesiano de modo que estén alineados)	39	35,8%
		Incompleta: Sólo ubica A y B	40	36,7%
		Incorrecta Ubica los puntos A y B pero P no está lineado con ellos No ubica correctamente a A y/o a B	6 1	5,5% 0,9%

[2] Los porcentajes a los que se hará referencia en la tabla serán respecto al total de estudiantes que participaron en la prueba (109).

		No emplea representación analítica	23	21,1%
DV	Definición de variables	Asigna coordenadas al punto P que debe estar alineado con A y B.	66	60,6%
		No asigna coordenadas al punto P.	43	39,4%
PE	Planteamiento de ecuaciones	Correcto Propone primero el cálculo de m y luego el de b en y=mx+b Plantea un sistema de ecuaciones lineales al reemplazar A y B en y=mx+b Iguala pendientes $m_{AB}=m_{AP}$	 31 13 13	 28,4% 11,9% 11,9%
		Incorrecto Plantea como condición d(A,P)=d(B,P) Otros planteamientos	 17 7	 15,6% 6,4%
		No plantea ecuación alguna	28	25,7%
RP	Resolución del problema	Correcta	40	36,7%
		Incorrecta Error en cálculos Halla sólo uno de los parámetros, m ó b, y no calcula el otro	 12 5	 11% 4,6%
		No da las respuestas del problema	52	47,7%
CCA	Concepción sobre condición algebraica	Señala explícitamente que la condición algebraica es la ecuación encontrada	21	19,3%
		Obtiene una ecuación pero no señala explícitamente que ésta sea la condición algebraica solicitada	37	33,9%
		Señala que la condición algebraica solicitada es otra.	1	0,9%
		No hay referencia ni explícita ni implícita a la condición algebraica	50	45,9%

Hay 40 estudiantes que culminaron el problema y dieron la ecuación correcta de la recta.

De los 86 estudiantes que emplearon el plano cartesiano para representar los datos, sólo 39 ubicaron correctamente a A, B y P.

Del total de estudiantes, 66 señalaron explícitamente que las variables (x, y) correspondían a las coordenadas del punto P que debía estar alineado con A y B. Luego, 23 estudiantes no asignaron coordenadas a P; esto quiere decir que en ninguna parte del enunciado escribieron *el punto P(x,y) está alineado con A y B* ni declararon qué denotaban las variables x e y que luego aparecían en la expresión y=mx+b.

Fueron 57 alumnos los que asociaron la condición algebraica correcta a la condición estar alineados, la mayoría de ellos recurrió a la expresión y=mx+b (Figura 10.); otro grupo importante la asoció al cálculo de la pendiente con los puntos conocidos y luego empleó la expresión anterior para hallar b (Figura 11.); mientras que un tercer grupo halló la ecuación de la recta directamente igualando pendientes $m_{AB}=m_{AP}$ (Figura 12.).

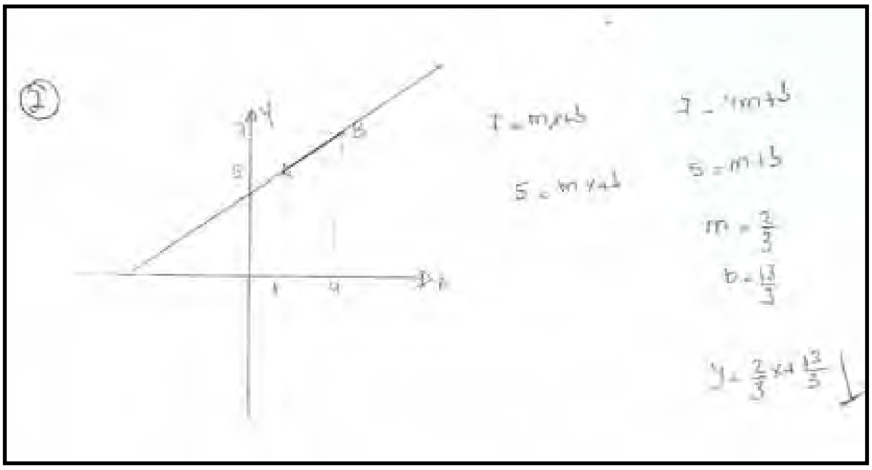


Figura 10. Asociación algebraica correcta 1

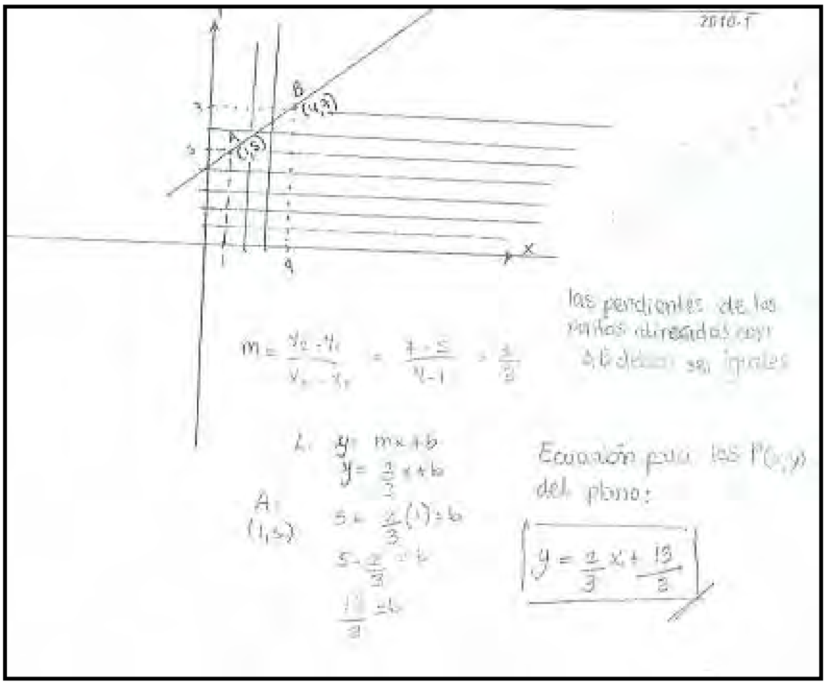


Figura 11. Asociación algebraica correcta 2

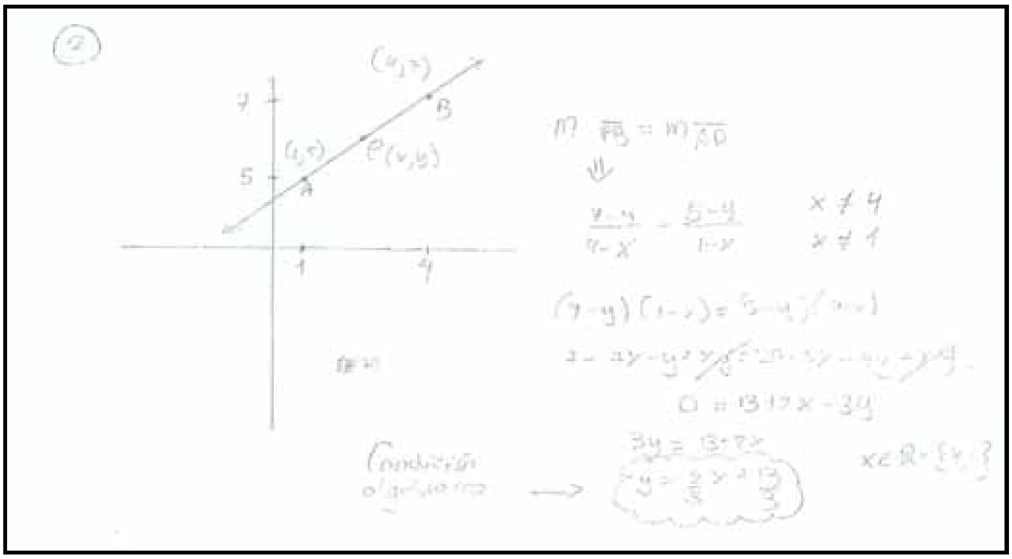


Figura 12. Asociación algebraica correcta 3

Hubo problemas en el tratamiento en el registro verbal pues la expresión *P está alineado con A y B* no resultó natural para algunos estudiantes, lo que se muestra en la figura 13. Esta condición fue interpretada de manera equivocada por 24 alumnos, siendo la interpretación más frecuente *P se encuentra a la misma distancia de A y B.*

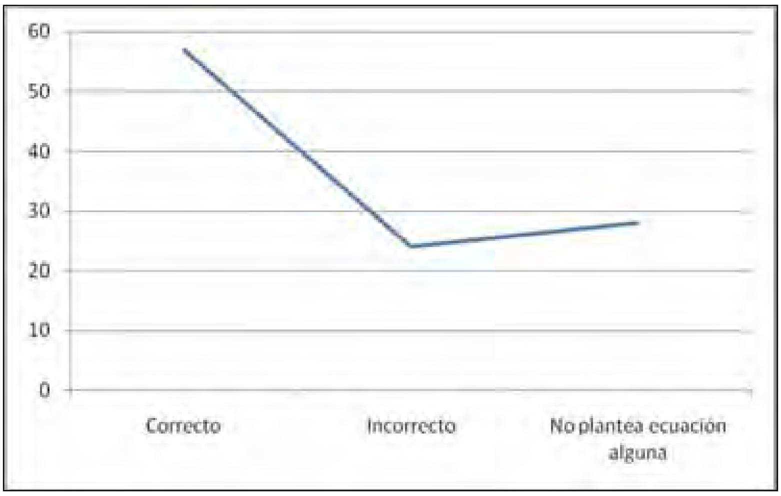


Figura 13. Interpretación analítica de la condición geométrica en la pregunta 2

Asociado a lo anterior, hubo 24 alumnos que no lograron traducir la condición geométrica *estar alineados* con una condición algebraica correcta; 17 de ellos la tradujeron con la condición de *estar a igual distancia* o usaron directamente la fórmula de distancia entre dos puntos para tratar de hallar la ecuación de la recta.

Asociado al tratamiento en el registro algebraico, hay 17 alumnos que pese a haber planteado correctamente el problema, cometieron errores realizando los cálculos. Así, se equivocaron al resolver un sistema de ecuaciones lineales o una ecuación lineal.

Sobre la realización correcta, y en simultáneo, de los tres procesos: *ubicación en el plano de A, B y P, asignación de variables y planteamiento correcto*, sólo 24 estudiantes lo hicieron bien.

Sobre la realización correcta, y en simultáneo, de los cuatro procesos: *ubicación en el plano, asignación de variables, planteamiento correcto y resolución correcta*, sólo 14 estudiantes lo hicieron bien.

En la figura 14. se ilustra cómo fue decreciendo el número de estudiantes, a medida que se incrementaba el número de procesos que debían realizar correctamente:

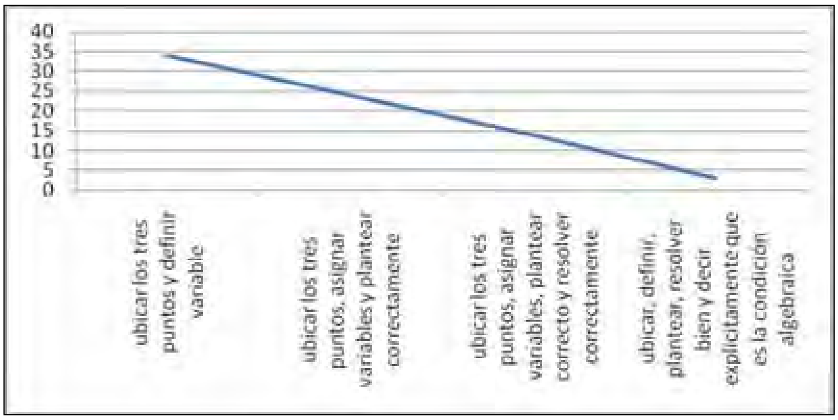


Figura 14. Número de estudiantes que responden correctamente 2, 3, 4 y 5 procesos

Sobre el reconocimiento explícito de la condición algebraica, sólo 21 lo hicieron. Sin embargo, hay 37 alumnos que al dar la ecuación de la recta consideraron que habían cumplido con el pedido y por eso decimos que implícitamente asociaron la condición algebraica a una ecuación.

La figura 15. corresponde a la solución de un alumno que señala explícitamente cuál es la condición algebraica.

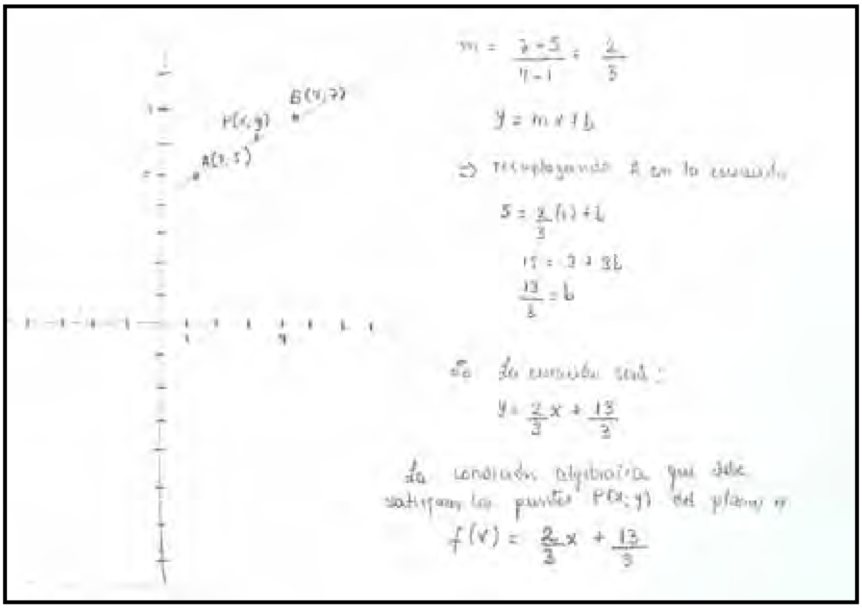


Figura 15. Solución de un estudiante que señala explícitamente la condición algebraica

Sobre la concepción de condición algebraica, hay 7 alumnos que manifestaron una concepción distinta a la de dar una ecuación. Por ejemplo, entendieron que la condición algebraica era dar el punto medio del segmento, o era dar otro punto de paso de la recta, o dar la ecuación de una hipérbola o plantearon un polinomio de grado dos.

De los 34 estudiantes que ubicaron los tres puntos y definieron la incógnita correctamente, 14 plantearon correctamente la ecuación.

De los 17 estudiantes que sólo ubicaron los puntos A y B y definieron la incógnita correctamente, 9 plantearon correctamente la ecuación.

De otro lado, se puede decir que no hubo diferencia significativa entre la proporción de estudiantes que resolvieron el problema (14 de 34), habiendo ubicado inicialmente P respecto de los que resolvieron correctamente el problema pero sólo ubicaron A y B en el gráfico inicial (9 de 17), como se ilustra en la figura 16.

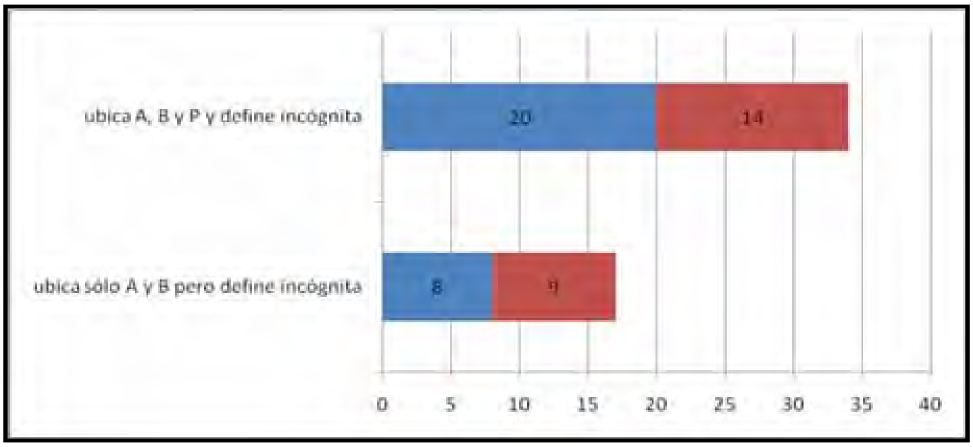


Figura 16. Relación entre definir la incógnita y ubicar los datos

La figura 17 muestra una primera barra horizontal que corresponde a los 8 estudiantes que no ubicaron puntos en el plano, sólo 2 pudieron plantear correctamente la ecuación.

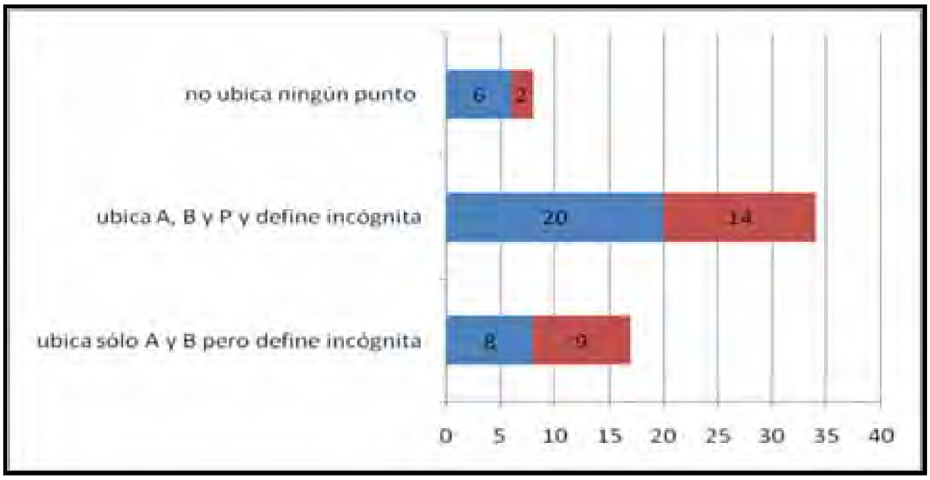


Figura 17. Cantidad de estudiantes según número de puntos ubicados

Aquí se puede notar que la proporción de éxito respecto a los que sí emplearon una representación gráfica, fue menor (2 de 8).

Sin embargo, las soluciones que presentaron los dos estudiantes que sólo trabajaron en el registro analítico fueron muy detalladas. A continuación se muestran los procedimientos seguidos por estos alumnos.

En el primer caso (figura 18), el estudiante explica que la condición geométrica solicitada equivale a que A, B y P tengan la misma pendiente (debería decir *los segmentos AB y PB tienen la misma pendiente*). Luego, cuida que el denominador no sea cero y exige que $x \neq 4$, condición que tiene presente también en la respuesta final.

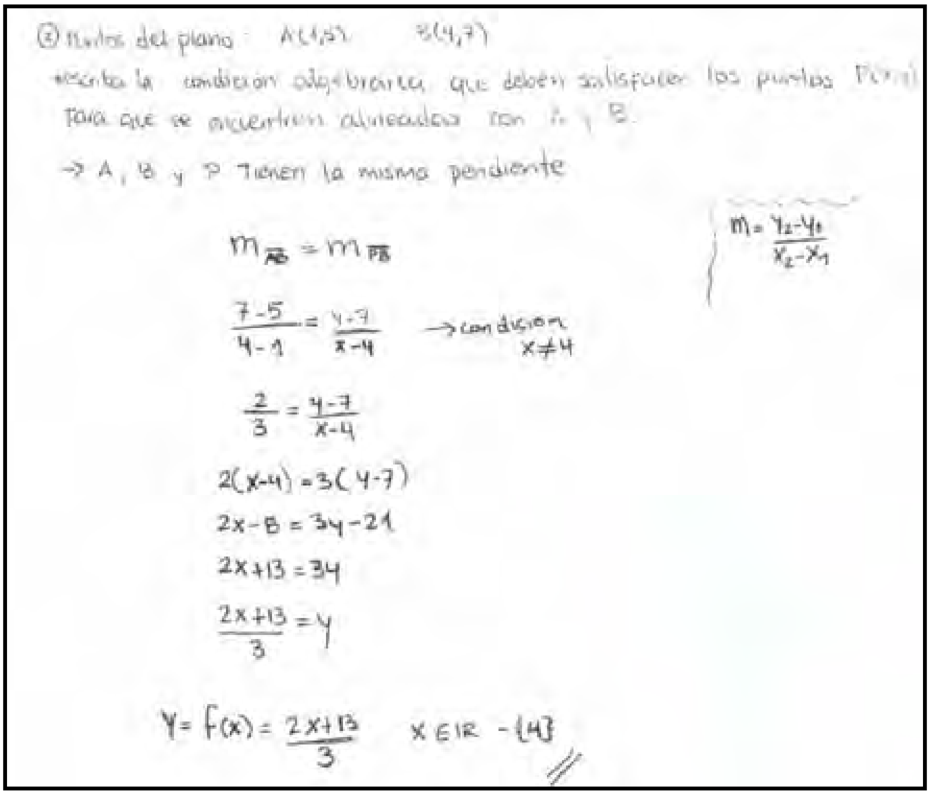


Figura 18. Respuesta correcta

En el segundo caso (figura 19), el estudiante explica que la condición geométrica solicitada equivale a hallar la ecuación de la recta que pasa por A y B. Luego explica cada paso y finalmente señala explícitamente que esa ecuación es la condición algebraica solicitada.

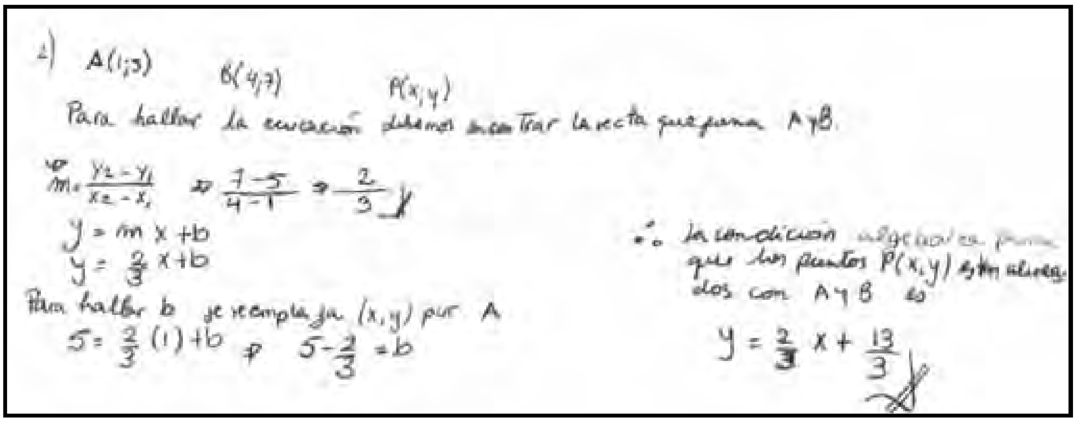


Figura 19. Respuesta correcta

Pregunta 3

Considere el triángulo ABC con A(-8,0) y B(6,0). Halle la ecuación del lugar geométrico descrito por el tercer vértice C, sabiendo que la suma de las pendientes de los lados AC y BC es una constante igual a 3.

Solución experta:

Como se hace referencia a un tercer vértice C que no se conoce, se le asignan coordenadas (x, y). Luego, como la condición geométrica hace referencia a las pendientes, se deben encontrar expresiones para cada una de ellas:

$$m_{AC} + m_{BC} = 3$$

$$\frac{y-0}{x+8} + \frac{y-0}{x-6} = 3$$

$$3x^2 - 2xy + 6x - 2y - 96 = 0, \text{ con } x \neq -8 \text{ y } x \neq 6$$

Comentario:

Esta pregunta requiere traducir una condición geométrica a una condición algebraica. La ecuación que se obtiene no corresponde a ninguna de las estudiadas en la asignatura, pues no se estudiaron curvas cuyas ecuaciones cuadráticas tuvieran el término mixto xy. Dado que el pedido era dar como respuesta la expresión algebraica, el problema quedaría resuelto al obtener la ecuación en dos incógnitas. En este caso, el representar los datos en un plano cartesiano no era un paso indispensable para la formulación de la condición algebraica.

Esta pregunta planteaba un problema para cuya solución debía emplearse principalmente la conversión del registro verbal al simbólico y, en ese proceso, se debían identificar correctamente las variables del problema. Luego se requería del tratamiento dentro del registro simbólico, empleando la concepción de pendiente desde la perspectiva analítica.

La pregunta 3 fue abordada por 69 estudiantes de los 115 que rindieron la evaluación; los resultados generales se muestran en la figura 20.

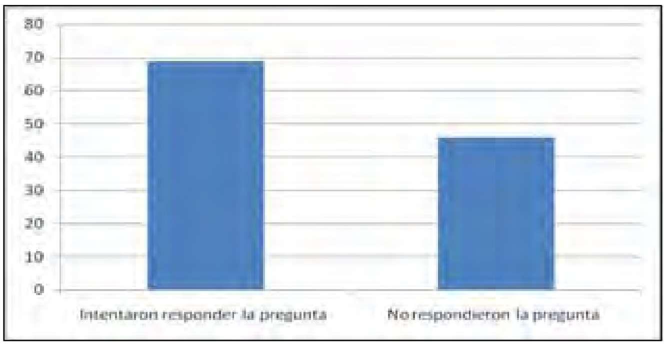


Figura 20. Respuesta de los estudiantes a la pregunta 3

A continuación se muestran los resultados obtenidos en las categorías de análisis consideradas para esa pregunta.

Tabla 3. Resultados de la pregunta 3

	Datos generales		Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes[3]
	Intentaron responder la pregunta		69	60%
	No respondieron la pregunta		46	40%
	Categorías		**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje de estudiantes**
RAE	Representación analítica del enunciado	Ubicación correcta de los puntos en el plano	39	33,9%
		Ubicación incorrecta	4	3,5%
		No emplea representación analítica pero responde la pregunta	26	22,6%
DV	Definición de variables	Asigna coordenadas explícitas a C	52	45,2%
		No asigna coordenadas explícitas a C aunque luego éstas aparecerán en la ecuación	10	8,7%
		No asigna coordenadas a C y no plantea la ecuación	7	6,1%
PE	Planteamiento de ecuaciones	Correcto	55	47,8%
		Incorrecto	3	2,6%
		No plantea ecuaciones	11	9,6%
CLG	Concepción sobre lugar geométrico	Señala explícitamente que la ecuación encontrada corresponde a la ecuación del lugar geométrico	6	5,2%
		Obtiene una ecuación pero no señala explícitamente que ésta sea la ecuación del lugar geométrico	46	40%
		Señala que la ecuación	2	1,7%

[3] Los porcentajes a los que se hará referencia en la tabla serán respecto al total de estudiantes que participaron en la prueba (115).

		del lugar geométrico es otra.		
		No hay referencia ni explícita ni implícita a la ecuación del lugar geométrico.	15	13,1%

De los 39 estudiantes que recurrieron al plano cartesiano para ubicar los datos del problema, 25 ubicaron correctamente A, B y C, mientras que 14 ubicaron correctamente a A y B pero C no aparecía en el gráfico.

Hubo inconsistencia en la representación analítica del punto C realizada por 4 estudiantes, pues lo ubicaron en el eje Y pero le asignaron coordenadas (*x*,*y*) como incógnitas

Sobre el planteamiento de la ecuación a partir de la condición geométrica, se puede decir que la mayoría de estudiantes que abordó la pregunta lo hizo correctamente, 55 de 69.

Además, 8 de ellos señalaron que esta expresión era válida sólo si x≠6 y x≠-8. La solución presentada por un alumno en la figura 21. se ilustra esta situación.

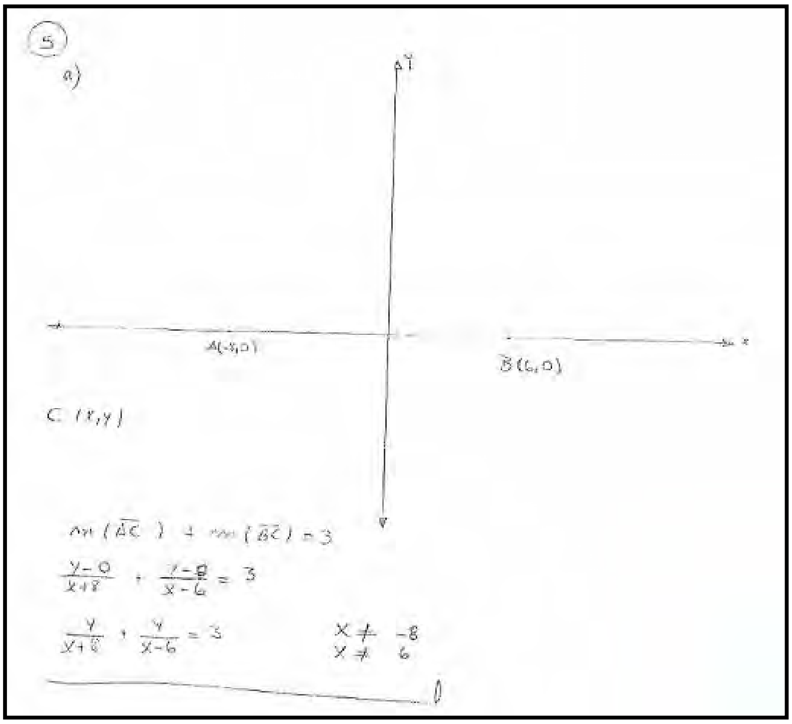


Figura 21. Solución que incorpora restricciones

Hay 5 estudiantes que al tratar de simplificar la expresión obtenida, cometieron errores siendo el más frecuente el olvidar multiplicar el término de la derecha por el producto de los denominadores de las pendientes. Uno de esos caso se muestra en la figura 22.

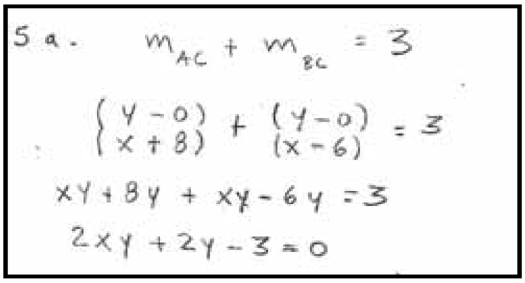


Figura 22. Solución de un estudiante que comete error en la simplificación de la expresión

Respecto al uso del registro simbólico se puede observar que de los 55 alumnos que resuelve el problema, 44 de ellos asignan explícitamente coordenadas (x,y) a C, de modo que al plantear la condición de suma de pendientes resulta claro qué representan dichas variables. Así, sobre los procesos *Asignar coordenadas explícitas a C* y *dar la condición algebraica esperada* fueron procesos realizados correctamente por 44 estudiantes.

Mientras que *Ubicar A y B correctamente, sin ubicar a C, asignar coordenadas explícitas a C* y *dar la condición algebraica esperada* fueron procesos realizados correctamente por 8 estudiantes

Respecto a los procesos *Ubicar correctamente A, B y C, asignar coordenadas explícitas a C* y *dar la condición algebraica esperada*, 18 estudiantes lo hicieron bien.

Además, se tiene que 18 estudiantes obtuvieron la respuesta esperada, sin recurrir a una representación en el plano, como se muestra en la figura 23. Esto lleva a pensar que quizás la representación en el plano en problemas como éste no es indispensable para obtener la solución correcta.

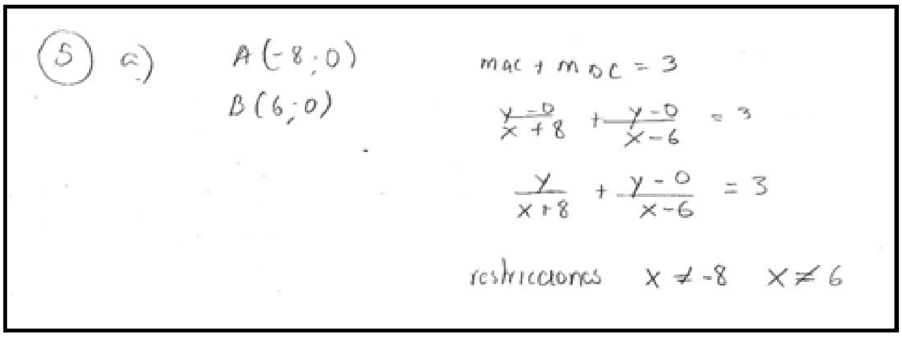


Figura 23. Solución donde no se recurre a una representación gráfica

Respecto a los procesos *Ubicar correctamente A , B y C, asignar coordenadas explícitas a C , dar la condición algebraica esperada* y *reconocer explícitamente que es la ecuación del lugar geométrico descrito por C* , sólo 1 estudiante llegó a hacerlo. La solución propuesta por este alumno se muestra en la figura 24.

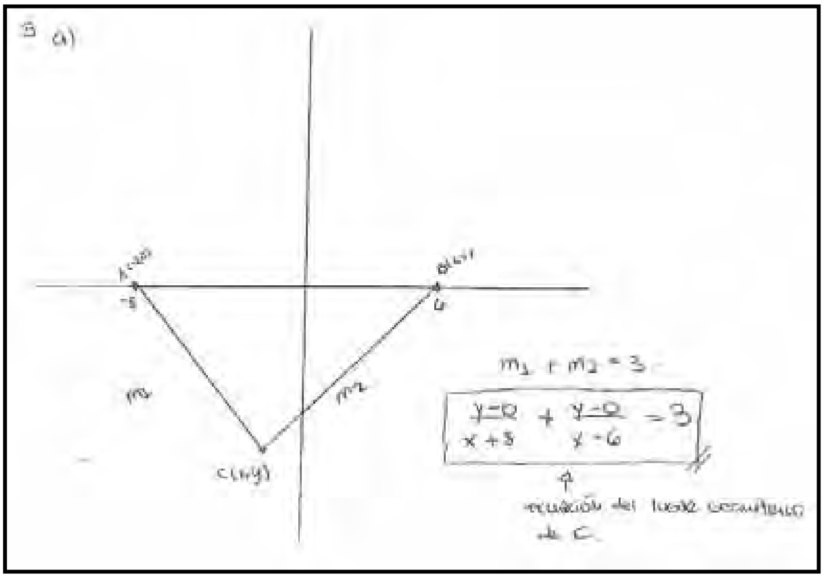


Figura 24. Solución del estudiante que reconoció explícitamente la ecuación del lugar geométrico

Como era de esperar, ya que este resultado no había sido discutido en clase, ningún estudiante reconoció que la ecuación de segundo grado obtenida correspondía a una cónica. En la docencia sólo se habían presentado las ecuaciones de las cónicas en forma canónica, lo que evidencia la dependencia de los aprendizajes respecto a lo trabajado en las clases.

Pregunta 4

Se tiene el triángulo ABC con A(0,0), B(5,0) y C(3,2). Se toma un punto M sobre BC. Desde M se traza una perpendicular a AC; al pie de dicha perpendicular se le denota por N. Y desde M se traza una perpendicular a AB; al pie de dicha perpendicular se le denota por P.

Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de NP, cuando M se mueve sobre la recta BC.

Graficar el lugar geométrico determinado en la viñeta anterior.

Solución experta:

La ecuación de la recta BC es de la forma $y= -x+5$ y la de la recta AC será $y=2/3x$.

Si se denota por m a la abscisa del punto M, su ordenada será $–m+5$ por estar sobre la recta BC.

Las coordenadas del punto P serán $(m, 0)$.

Las coordenadas de N serán $(n, 2/3n)$ al estar sobre la recta AC.

Pero además NM debe ser perpendicular a AC, luego : $\dfrac{\frac{2}{3}n-(-m+5)}{n-m}=-\dfrac{3}{2}$

de donde se tiene que $n=\dfrac{3}{13}(m+10)$.

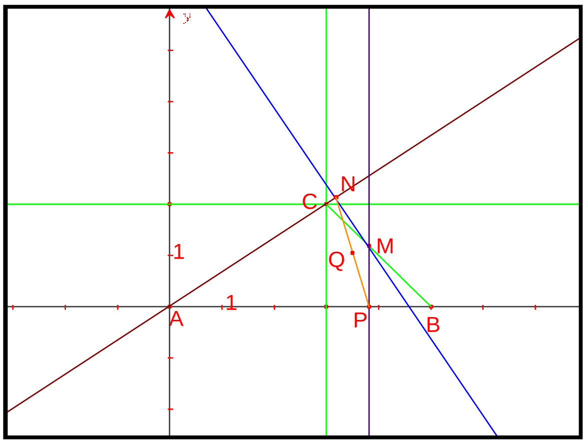


Figura 25. Representación de los datos en el plano cartesiano

Luego, si se pide la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto Q(x, y), punto medio de NP, se tendrá que:

$$x=\frac{\frac{3}{13}(m+10)+m}{2}; \quad y=\frac{\frac{2}{13}(m+10)+0}{2}$$

De donde se cumplirá que :

x-8y+5= 0 con $\dfrac{78}{26}\le x\le\dfrac{110}{26}$, cuya gráfica es un segmento.

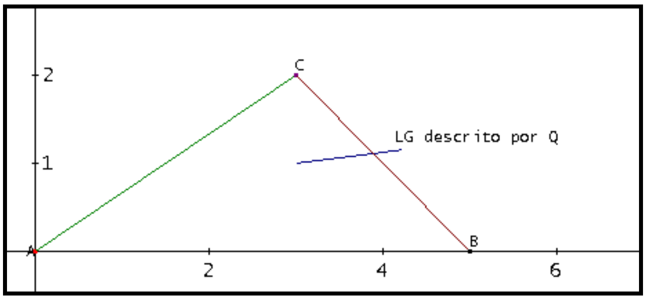


Figura 26. Gráfica del lugar geométrico descrito por Q

Comentario:

Esta pregunta explora la capacidad tanto del dominio de técnicas analíticas, al usar el menor número de variables posibles para describir las condiciones dadas, como del dominio de técnicas sintéticas para realizar eficientemente todas las construcciones descritas. Problemas similares a este no habían sido planteados antes en la asignatura, así que se esperaba que fuera un reto para los estudiantes y que permitiera distinguir a aquellos alumnos que habían logrado un dominio de las técnicas sintéticas y analíticas de los que todavía no lo habían hecho. Por otro lado, también permitiría reconocer la concepción de lugar geométrico que poseían los estudiantes.

En esta pregunta se observa que la representación gráfica de los datos en un sistema de coordenadas es una condición indispensable para continuar con la solución. A continuación se muestra cómo el ir representando geométricamente la información, permite establecer conexiones con el registro simbólico.

Tabla 4. Relación entre procedimientos en registros figural y simbólico

En el registro figural:	**En el registro simbólico:**
Ubicar A, B y C y seleccionar un punto M en CB.	Asignar coordenadas a M, considerando que satisface la ecuación de CB.
Trazar la recta perpendicular a AC desde M.	Hallar la ecuación de AC, considerando que su pendiente es la inversa negativa de la de AC.
Denotar por N al pie de dicha perpendicular	Asignar incógnitas a N, considerando que está en la recta AC.
Trazar la recta perpendicular a AB desde M. Denotar por P al pie de dicha perpendicular	Asignar a P la misma abscisa que la de M y ordenada 0.
Trazar el segmento NP y ubicar su punto medio, al que se le denotará por Q.	Determinar las coordenadas de Q, a través de la semisuma de las coordenadas de N y P.
	Encontrar una ecuación en donde las incógnitas sean la abscisa y la ordenada de Q.

Aunque esta pregunta era compleja y en la docencia no se les había planteado una situación similar, se esperaba que los estudiantes construyeran las relaciones algebraicas que satisfacían los puntos M, N, P y Q, aunque luego pudieran tener dificultad para reducir el número de incógnitas. Sin embargo, los estudiantes tampoco procedieron de esa manera. Esta pregunta tuvo un bajo nivel de respuesta.

La pregunta fue abordada sólo por 46 estudiantes de los 115 que rindieron la evaluación, de los cuales ninguno respondió correctamente la pregunta, como se observa en la figura 27.

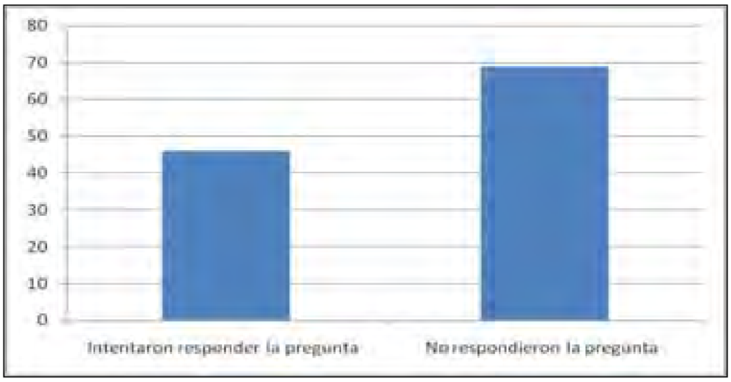


Figura 27. Respuesta de los estudiantes a la pregunta 4

A continuación se muestran los resultados obtenidos en las categorías de análisis consideradas para esa pregunta.

Tabla 5. Resultados de la pregunta 4

	Datos generales		**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje de estudiantes[4]**
	Intentaron responder la pregunta		46	40%
	No respondieron la pregunta		69	60%
	Categorías		**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje de estudiantes**
RSE	Representación sintética del enunciado	Ubicación correcta de los puntos M, N, P y Q, según las condiciones geométricas dadas	29	25,2%
		Ubicación incorrecta de algunos de los puntos M, N, P ó Q	11	9,6%
		No ubican de los puntos M, N, P y Q	75	65,2%
RAE	Representación analítica del enunciado	Ubicación correcta de A, B y C	42	36,5%
		Ubicación incorrecta de A, B ó C	4	3,5%
		No ubican los puntos A, B y C	69	60%
DV	Definición de variables	Asigna coordenadas explícitas al punto Q	14	12,2%

[4] Los porcentajes a los que se hará referencia en la tabla serán respecto al total de estudiantes que participaron en la prueba (115).

		No asigna coordenadas al punto Q.	101	87,8%
PE	Planteamiento de ecuaciones	Plantea correctamente las ecuaciones de las rectas involucradas	4	3,5%
		Plantea incorrectamente por lo menos una de las ecuaciones de las rectas involucradas	5	4,3%
		No plantea ecuación alguna	106	92,2%
RP	Resolución del problema	Obtiene la respuesta esperada al problema	0	0%
		No da respuesta al problema	115	100%
CLG	Concepción sobre lugar geométrico	Señala explícitamente que lo que se busca es una ecuación que relacione las coordenadas de Q	0	0%
		Señala que la ecuación del lugar geométrico es otra	9	7,8%
		No hay referencia ni explícita ni implícita a la ecuación del lugar geométrico	106	92,2%%

De los 46 estudiantes que abordaron la pregunta, 42 ubicaron correctamente los vértices del triángulo; los que cometieron error fue porque ubicaron a B en el eje Y. Sólo 29 estudiantes lograron representar correctamente los puntos M, N, P y Q. La mayor dificultad fue interpretar la condición que satisfacía el segmento MN y dibujarlo como paralelo a AB.

Esta situación se ilustra en la figura 28. que corresponde a la solución de uno de los estudiantes.

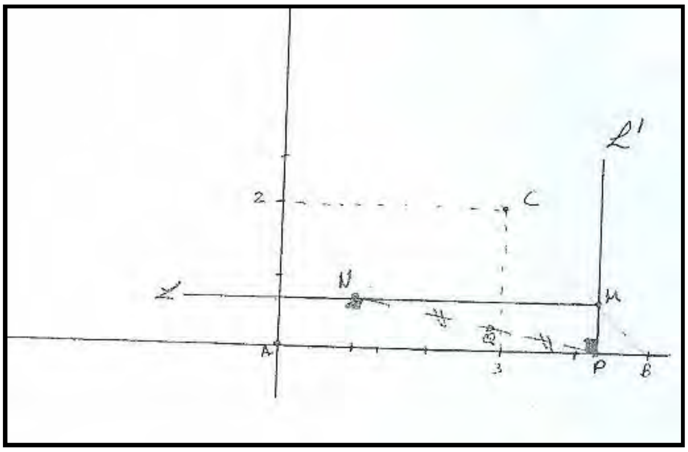


Figura 28. Solución donde se muestra la dificultad al interpretar la condición que satisfacía el segmento MN

Los pocos estudiantes que abordaron la pregunta tuvieron dificultad en realizar la conversión de las condiciones geométricas en analíticas, ni siquiera pudieron hacerlo recurriendo a muchas variables. Menos aún pudieron mostrar un dominio de las técnicas analíticas para reducir el número de incógnitas; sólo 9 estudiantes lo intentaron.

En el mismo sentido que el comentario anterior, respecto a la traducción de las condiciones geométricas al registro analítico, de los 9 estudiantes que intentaron hallar las ecuaciones de las rectas BC y AC, 4 no pudieron encontrar la ecuación de BC, sólo hallaron la de AC. Esto quizás se explique porque, a diferencia de la AC, la recta BC no pasaba por el origen y debían calcular, además de la pendiente, un parámetro adicional.

La figura 29. corresponde a la solución presentada por uno de los estudiantes, que además de representar los datos, intentó establecer relaciones entre ellos pero sólo obtuvo la ecuación de la recta AC.

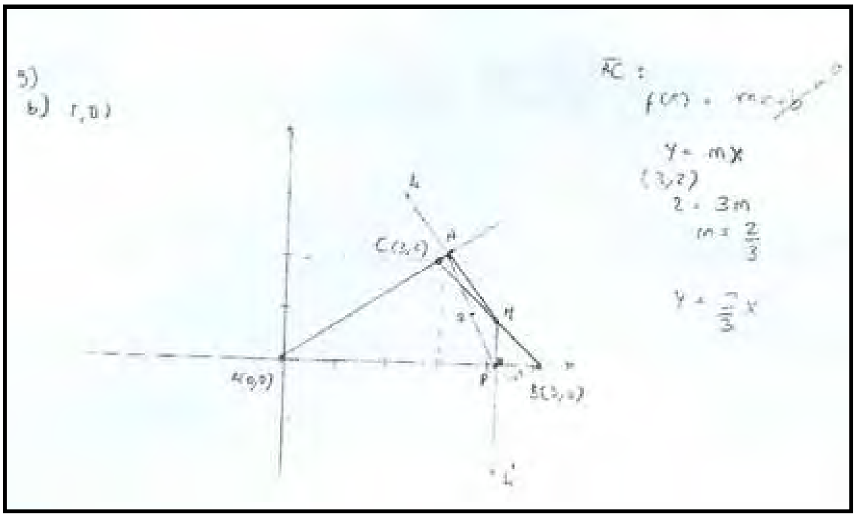


Figura 29. Solución donde se determina la ecuación de la recta AC

Hay varios aspectos interesantes por explorar que se derivan de lo observado al aplicar esta pregunta. Por ejemplo, merece la pena investigar si los estudiantes comprenden el significado de ser perpendicular a un lado, ya que para algunos, quizás el punto de intersección de un segmento y de una recta perpendicular a éste, siempre debería estar en el segmento (lo que no ocurría en la pregunta 4 porque el triángulo era obtusángulo).

Un dato interesante que sí se pudo recoger es que 9 estudiantes consideraron que el hallar la ecuación del lugar geométrico consistía en analizar un caso particular. La solución de uno de ellos se muestra en la figura 30.

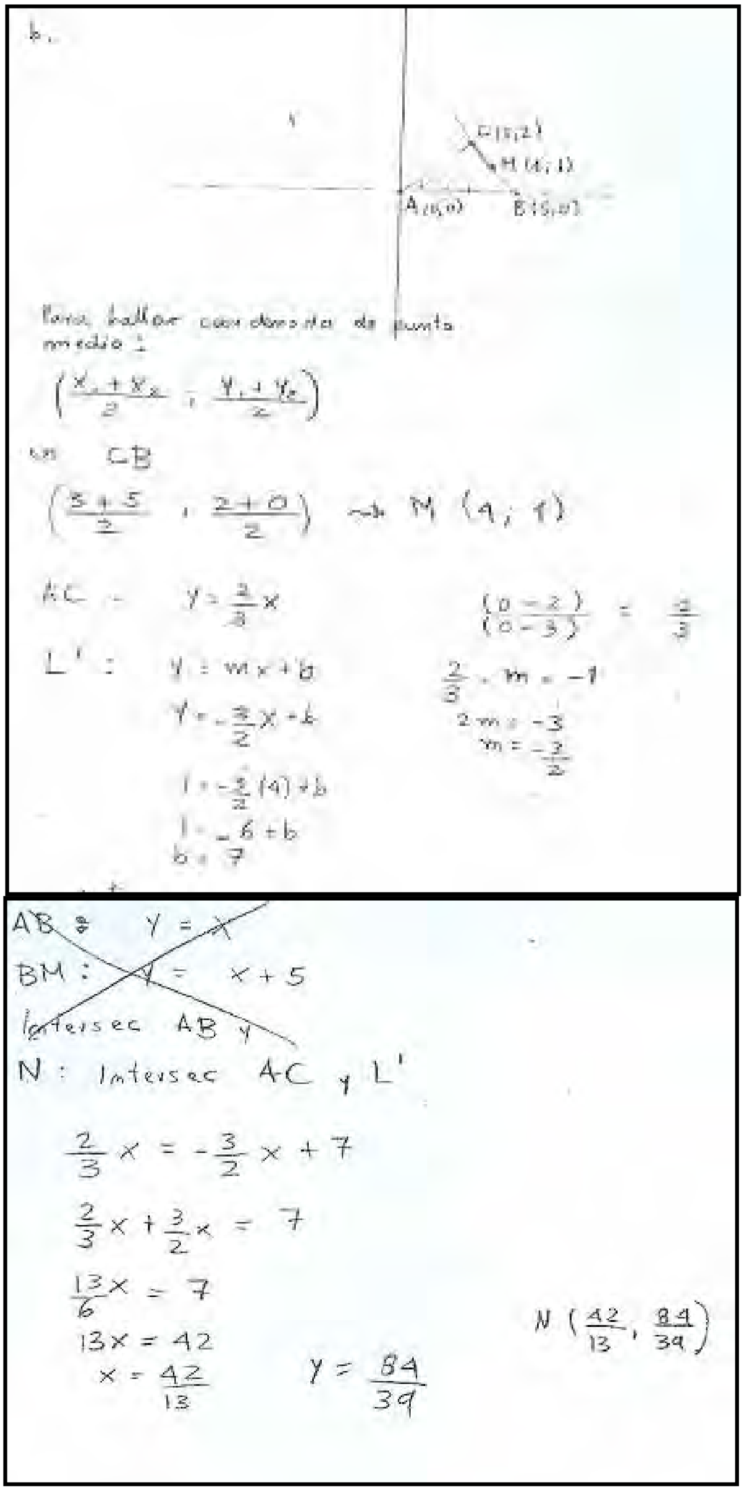


Figura 30. Solución de uno de los estudiantes que interpretó el lugar geométrico como un caso particular

En esta pregunta, los estudiantes tuvieron dificultad en transformar la condición geométrica: *ser rectas perpendiculares* con la condición algebraica: *la inversa de la pendiente de una de las rectas es la inversa negativa de la pendiente de la otra*. Esta actividad requería de una conversión entre registros; eso permite entender el por qué luego no pudieron continuar con la solución del problema.

A manera de síntesis, se presenta la tabla 6. en donde se muestran las categorías que permitiría evaluar cada una de las preguntas anteriores.

Tabla 6. Categorías de análisis en cada pregunta

Categorías	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Pregunta 4**
Representación sintética del enunciado	×			×
Representación analítica del enunciado	×	×	×	×
Definición de variables	×	×	×	×
Planteamiento de ecuaciones	×	×	×	×
Resolución del problema	×	×		×
Número de soluciones	×			
Interpretación de la solución	×			
Concepción sobre condición algebraica	×	×		
Concepción sobre lugar geométrico			×	×

ANEXO 2

PROPUESTA DIDÁCTICA

A continuación se presenta una propuesta para ser trabajada con estudiantes de arquitectura en un primer curso de matemáticas. El objetivo de la misma es justificar el paso de la geometría sintética, geometría sin coordenadas donde predominan las construcciones exactas con regla y compás, a una geometría analítica, caracterizada por el empleo de un sistema de coordenadas rectangulares y por el uso de expresiones algebraicas para describir a los objetos geométricos.

Las actividades propuestas responden a los objetivos previstos y han sido organizadas teniendo en cuenta el número de UEI identificadas en las soluciones ideales, presentadas en el anexo 3.

En la implementación de la propuesta se recomienda considerar tres etapas.

Etapa I

En una primera parte se plantean actividades sobre construcciones exactas con regla y compás, organizadas en dos bloques.

Se propone introducir el uso de dichos instrumentos en una primera sesión de clase, explicando que son herramientas que permiten construir algunos objetos geométricos de manera exacta.

El profesor debe señalar que las construcciones exactas que serán consideradas elementales serán las siguientes:

- Construir un punto sobre un objeto construido previamente
- Construir una recta conociendo dos puntos de paso
- Construir una circunferencia con centro y radio conocido.
- Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente

Se plantea que los alumnos realicen algunas de las siguientes construcciones con lápiz y papel, considerando el orden propuesto en la tabla 1., el mismo que tiene en cuenta el número de UEI que intervienen en la solución de cada problema en el marco geométrico. Por ejemplo, se sugiere construir los objetos 1, 2, 3, 4, 5 y 9.

Tabla 1. Primer bloque de actividades de geometría sintética organizadas según número de UEI

Objeto a construir	Número de UEI
1. Mediatriz	4
2. Punto medio	5
3. Recta perpendicular por un punto	6
4. Recta paralela en base a un paralelogramo	6
5. Bisectriz	7
6. Recta tangente por un punto sobre la circunferencia	7
7. Distancia de un punto a una recta	8
8. Segmento cuya longitud sea la distancia entre dos rectas paralelas	9
9. Circuncentro	9
10. Recta tangente a una circunferencia trazada desde un punto exterior	10
11. Recta paralela en base a una perpendicular	13
12. Punto que divide a un segmento en una razón dada	18

En un momento posterior se propone que los estudiantes trabajen en un laboratorio de cómputo con un programa de geometría dinámica como GeoGebra o CABRI. La intención es que realicen las construcciones que quedaron pendientes con ayuda de dicho programa ya que al tener un mayor número de UEI, podrán prestar atención al procedimiento de solución. Se sugiere construir los objetos 8, 10 y 11.

En el uso del programa los alumnos reconocerán algunas construcciones predeterminadas, como la construcción de perpendiculares y paralelas, que hará que los procedimientos de solución se desarrollen en menos pasos. Se considera que ese será un momento oportuno para mostrar cómo construir perpendiculares y paralelas con escuadras, e incluir esas construcciones como construcciones exactas. Se sugiere pedir a los estudiantes que construyan con regla, compás y escuadras los objetos que quedaron pendientes, es decir, los objetos 6, 7 y 12.

En una siguiente sesión, también en el laboratorio de cómputo, se propone que los alumnos trabajen con un segundo grupo de tareas sobre construcciones; en esa ocasión los problemas serán sobre representaciones de números construibles y sobre construcción de triángulos y cuadriláteros, como los que se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Segundo bloque de actividades de geometría sintética organizadas según número de UEI

Objeto a construir	Número de UEI
13. Un número cuya representación geométrica sea la suma de dos números construibles	2
14. Un número cuya representación geométrica sea la diferencia de dos números construibles	2
15. Un número cuya representación geométrica sea el producto de dos números construibles	19
16. Un número cuya representación geométrica sea el cociente de dos números construibles	19
17. Un número cuya representación geométrica sea la raíz cuadrada de un número construible	15
18. Un triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados donde la construcción es trivial	1
19. Un triángulo conociendo la longitud de sus tres lados.	3
20. Un triángulo conociendo un cateto	8
21. Un triángulo conociendo un cateto y la hipotenusa	8
22. Triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los dos catetos.	9
23. Un triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados donde se requiere un mayor número de construcciones	19
24. Un triángulo conociendo algunos elementos	26
25. Un cuadrado cuya área coincida con la del rectángulo de lados *a* y *b*	36
26. Un cuadrilátero semejante a otro cuyas dimensiones son dato	41

Se recomienda considerar entre ese segundo grupo de actividades alguna pregunta que requiera emplear la propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia y cuyo lado es un diámetro, como el problema 17. Esta propiedad sería empleada posteriormente para resolver algunos problemas de lugar geométrico. Se sugiere plantear a los estudiantes las tareas según el siguiente orden: 13, 14, 15, 16, 17, 19 y 23.

Etapa II

En una segunda etapa se plantea abordar problemas que permitan construir la noción de lugar geométrico. Para ello, se proponen algunas actividades para que sean resueltas por los estudiantes trabajando en parejas y empleando lápiz y papel.

Se sugiere que, previo al trabajo de los alumnos, el profesor dé la definición de lugar geométrico como *el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen una condición geométrica dada previame*nte.

Luego, se recomienda plantear las tareas de la tabla 3., con la indicación de que las discutan en parejas y coloquen por escrito sus respuestas completas. En las indicaciones que reciban los estudiantes se debe señalar que las construcciones deben ser realizadas con regla y compás.

Tabla 3. Actividades para introducir la noción de lugar geométrico

Objeto a construir	Número de UEI
27. Determinen el lugar geométrico descrito por puntos del plano que están sobre una recta dada y se encuentran a una distancia fija de un punto dado.	2
28. Construyan el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de una recta dada.	13
29. Dados los puntos A y B y el valor constante K=d(A, B), determine el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es K^2. *O, de manera equivalente:* Consideren conocidos los puntos *A* y *B*. Construyan, haciendo uso de regla y compás, puntos *P* tales que los triángulos *APB* sean rectos en *P*. ¿Qué figura describirán los puntos *P*? Es decir, ¿cuál sería el lugar geométrico descrito por *P*? ¿Por qué?	6

Etapa III

En una tercera etapa, se plantea que los estudiantes aborden un nuevo grupo de tareas, que tiene como base la noción de lugar geométrico, construida previamente. Estas actividades forman parte de una familia de problemas, que vendrá enunciada a través de un problema general. Así, a medida que se modifican las variables, los estudiantes tendrán que modificar gradualmente sus estrategias de solución.

Problema general:

Teniendo en cuenta que se conocen K, los puntos A y B, determine el lugar geométrico descrito por los puntos P del plano, tales que satisfacen la siguiente condición:

$$d^p(A;P) + (-1)^q d^p(B;P) = K,$$

De modo que p y q tomen valores en $\{1;\ 2\}$

Las variables didácticas consideradas son K y los exponentes p y q. Dependiendo de los valores que ellos tomaran, el estudiante debía recurrir a una estrategia distinta.

Caso I: *K* particular con *p*∈{1,2} y *q*∈{1,2}

a) K=$d(A, B)$, p=1 y q=2

$$d\quad(A;P)+d(P;B)=d\quad(A;B)$$

b) K=$d(A, B)$, p=1 y q=1

$$d\quad(A;P)-d(B;P)=d\quad(A;B)$$

c) K= $d^2(A;B)$, p=2 y q=1

$$d^2(A;P)-d^2(B;P)=d^2(A;B)$$

d) K= $d^2(A;B)$, p=2 y q=2

$$d^2(A;P)+d^2(B;P)=d^2(A;B)$$

La técnica de solución requiere únicamente de construcciones elementales en la figura que reúne a los datos.

Los lugares geométricos que aparecen con este grupo de problemas son únicamente rectas, segmentos, semirrectas o circunferencias.

Las actividades que se propone trabajar con los estudiantes son las que se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. Primer grupo de actividades que se desprende del problema general

Tarea propuesta	Número de UEI
30. Consideren conocidos los puntos A y B. a)Construyan **un punto P** tal que la distancia de A a P coincida con la suma de las distancias de A a B y de B a P. b)¿Qué figura describirán todos los puntos P que satisfacen la condición geométrica descrita? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por P? c)¿Por qué adoptará esa forma?	1
31. Consideren conocidos los puntos A y B. a)Construyan **un punto P** tal que la distancia de A a P coincida con la diferencia entre las distancias de A a B y de P a B. b)¿Qué figura describirán todos los puntos P que satisfacen la condición geométrica descrita? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por P? c)¿Por qué adoptará esa forma?	1

32. Consideren conocidos los puntos A y B. a)Construyan **un punto P** tal que el triángulo ABP sea recto en B. b)¿Es el punto P, construido en a), único o se puede construir otro más? c)¿Qué figura describirán todos los puntos P que satisfacen la condición geométrica dada? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por P? d)¿Cómo garantizarían que no hay otros puntos del plano que forman parte del lugar geométrico?	6
33. Consideren conocidos los puntos A y B. a)Construyan **un punto P** tal que el triángulo ABP sea recto en P. b)¿Es el punto P, construido en a), único o se puede construir otro más? c)¿Qué figura describirán todos los puntos P que satisfacen la condición geométrica dada? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por P? d)¿Cómo garantizarían que no puede haber otros puntos del plano, distintos a los señalados en c), que formen parte del lugar geométrico?	6

Y posteriormente, se propone desarrollar sesiones en el laboratorio de cómputo y resolver situaciones más complejas pero con apoyo del programa GeoGebra.

El segundo grupo de actividades corresponde al caso II del problema general.

Caso II) K cualquier número real positivo, excepto los valores considerados en el caso I.

e) $K \neq d^2(A;B)$, p=2 y q=2

$$d^2(A;P) + d^2(B;P) = K$$

f) $K \neq d^2(A;B)$, p=2 y q=1

$$d^2(A;P) - d^2(B;P) = K$$

O equivalentemente:

$$d^2(A;P) = d^2(B;P) + K$$

g) $K \neq d(A;B)$, p=1 y q=2

$$d(A;P) + d(B;P) = K,$$

Notar que para que el problema tenga solución, se debe cumplir que $d(A,B) \leq K$. Como el caso $d(A;B)=K$ ya se analizó, se considerará sólo $d(A,B) < K$.

h) $K \neq d(A;B)$, $p=1$ y $q=1$

$$d(A;P) - d(B;P) = K,$$

Notar que para que el problema tenga solución, se debe cumplir que $d(A,B) \geq K$. Como el caso $d(A;B)=K$ ya se analizó, se considerará sólo $d(A,B) > K$.

En el caso II) la técnica de solución siempre requiere construir figuras auxiliares y trasladar segmentos a la figura inicial que reúne a los datos. Los lugares geométricos que aparecen con esta familia de problemas son rectas, circunferencias, elipses e hipérbolas.

Continuando con la presentación de tareas que forman parte de la familia de problemas descrita previamente, se propone que los estudiantes trabajen las actividades de la tabla 5. en parejas y con apoyo del GeoGebra.

Tabla 5. Segundo grupo de actividades que se desprende del problema general

Tarea propuesta	**Número de UEI**
34. Dados los puntos A y B y el valor constante K, determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a cada uno de esos puntos es $K \neq d^2(A,B)$.	12
35. Dados los puntos A y B y el valor constante K, determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a cada uno de esos puntos es $K \neq d^2(A,B)$.	11
36. Dados los puntos A y B y el valor constante K, determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de las distancias de P a cada uno de esos puntos es K, con $d(A;B)<K/2$.	4*
37. Dados los puntos A y B y el valor constante K, determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de las distancias de P a A y de P a B es K, con $d(A;B)>K/2$.	5*

Donde * significa que ese es el número de UEI necesarias para hallar solo 2 puntos del LG.

Para resolver esas tareas, los estudiantes deberán recurrir a estrategias de solución distintas a las empleadas en las actividades de la tabla 4; estas nuevas estrategias se caracterizarán por realizar construcciones auxiliares fuera del área de dibujo en el que se encuentran los datos. Siguiendo los procedimientos geométricos, los estudiantes sólo podrán dar como resultado un número finito de puntos del lugar geométrico pero no la figura completa.

Esta situación generará la necesidad de contar con técnicas más eficientes que permita identificar la forma global que adoptan esos lugares geométricos. Y es en ese contexto, que la geometría analítica se presenta como una herramienta apropiada.

Así, la tarea 35 puede complementarse con una segunda pregunta:
35.b) En el caso en el que A(3,5) y B(0,0) y K=10, ¿cuál es la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P descrito en el párrafo anterior? ¿Qué forma adopta?
Como el resultado de las operaciones generará una ecuación conocida, la ecuación de una recta, con la que los estudiantes podrán obtener información sobre la forma global del lugar geométrico de manera directa.

Sin embargo, si la tarea 36.se complementa con la siguiente pregunta:
36. b) Determinar la ecuación del lugar geométrico formado por los puntos del plano tales que la suma de distancias de dichos puntos a los puntos fijos A(4,2) y B(4,-4) es 10.

Se obtendrá una ecuación que no podrá asociar directamente a una forma geométrica estudiada previamente, (al menos ese es el caso del grupo con el que se lleva a cabo la investigación).

Se propone trabajar con los alumnos siguiendo el siguiente esquema:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+4)^2}=10$$

Se obtiene:

$$3x+24=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$$

$$16(y+1)^2+25(x-4)^2=400$$

Para hacer un esbozo de su gráfica, se puede proceder como sigue:

determinar qué valores pueden tomar *x* e *y*, cuáles son los intervalos de crecimiento o decrecimiento, etc.

Despejar *y*:

$$y = 1 \pm \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$$

De donde se obtiene que $0 \le x \le 8$

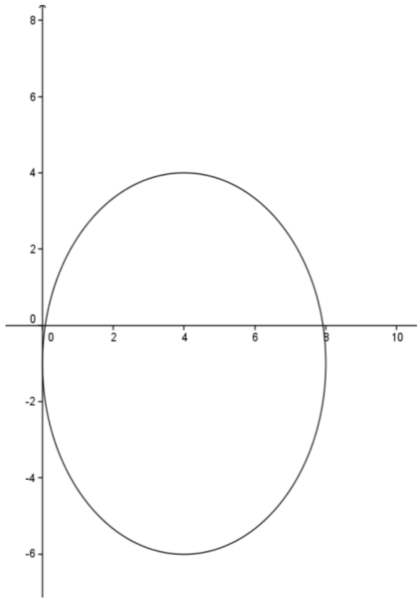
Considerando primero sólo $y = 1 + \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$

Se tiene que cuando x=0, y=1; x=4, y=6, por tanto en ese intervalo y crece.

Se tiene también que cuando x=4, y=6; x=8, y=1, por tanto en ese intervalo y decrece.

Todas estas actividades implican interpretar los resultados algebraicos en términos gráficos.

Considerando después $y = 1 - \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$ y realizando un análisis similar, se tendrá como un esbozo del lugar geométrico el siguiente:



Se debe notar que no es trivial obtener el gráfico ya que para ello se deben realizar varias conversiones entre las representaciones simbólicas y gráficas, en ambos sentidos. En ese proceso interviene una relación de dependencia para cuya comprensión se requiere desarrollar un pensamiento variacional que no se suele trabajar pero que, si se introducen los problemas de geometría analítica de esta manera, estará plenamente justificado.

ANEXO 3

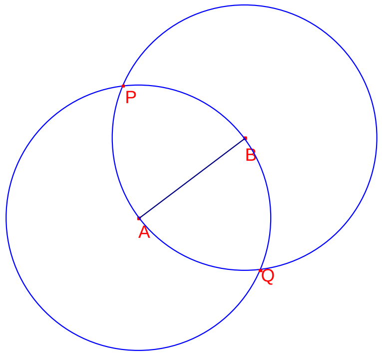
PROBLEMAS SOBRE GEOMETRÍA SINTÉTICA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA CONSIDERADOS EN LA PROPUESTA Y DESCRITOS EN TÉRMINOS DE UEI

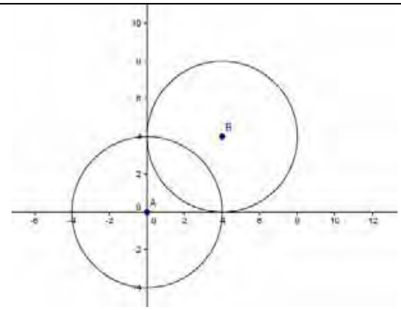
Los siguientes problemas forman parte de los descritos en la propuesta didáctica; la numeración corresponde a la empleada en dicha propuesta.

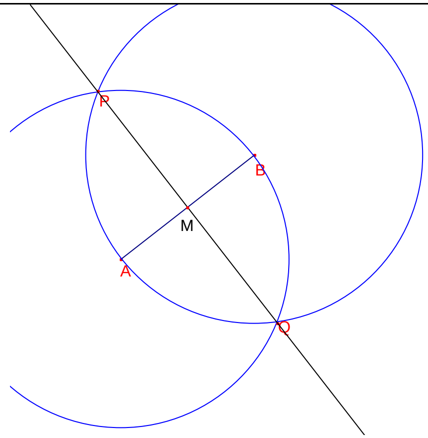
En este apartado se describe con detalle el tipo de UEI que interviene en la solución de cada uno de ellos, tanto en el marco geométrico como en el algebraico.

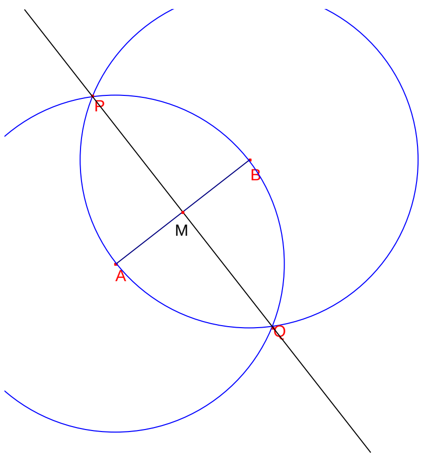
	Contexto del problema: Geometría sintética UEI que intervienen	Contexto del problema: Geometría Analítica UEI que intervienen

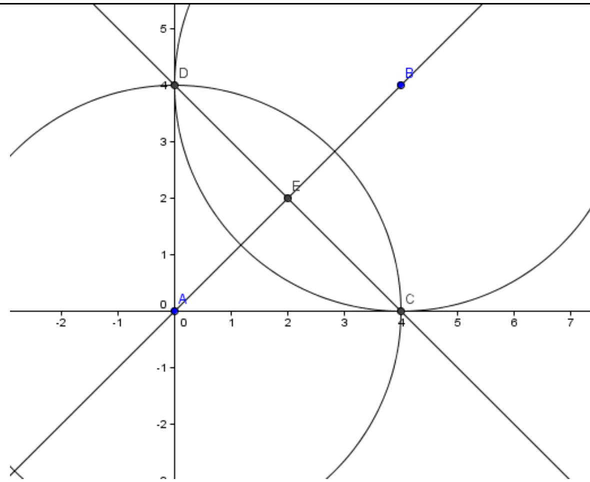
1. **Mediatriz de un segmento**	**Enunciado: Construya la mediatriz del segmento de extremos *A* y *B*.** **Enunciado: Construya la mediatriz del segmento de extremos A y B.** Solución propuesta: Considerando a la mediatriz como la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, su construcción debe seguir los siguientes pasos: Dado el segmento de extremos *A* y *B*, con centro en *A*, construir una circunferencia de radio *r*, mayor que *AB*/2. **[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido].** Con centro en *B*, construir una circunferencia de radio *r*. **[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido].** Identificar los puntos de intersección, *P* y *Q*, de las circunferencias construidas	**Enunciado: Determine la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *A*(*a*, *b*) y *B*(*c*, *d*)** **Ejemplo: Determine la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *A*(0,0) y *B*(4,4).** **Solución propuesta:** Considerando un caso concreto, *A*(0,0) y *B*(4,4), se determina la ecuación de una circunferencia de centro *A* y radio un número mayor a la mitad de la distancia de *A* a *B*, por ejemplo, 4. La ecuación será: $$x^2+y^2=16$$ **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].** Y con centro en *B* y radio 4 se determina la ecuación de otra circunferencia: $$(x-4)^2+(y-4)^2=16$$ **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].** Interpretar la solución del sistema de ecuaciones formado por dichas ecuaciones como las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la mediatriz de *AB*. Se resuelve el sistema formado por estas dos ecuaciones y se obtiene: *P*(4,0) y *Q*(0,4)

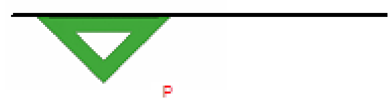
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

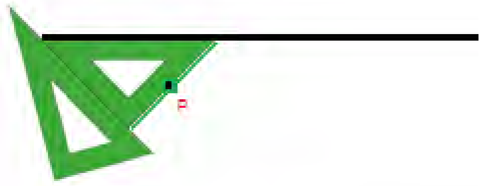
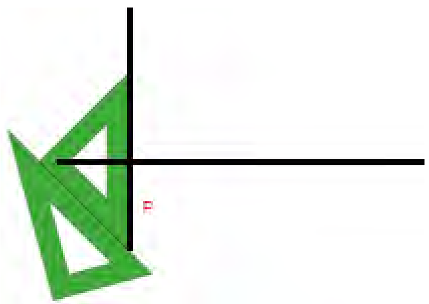
[UEI: Construir puntos de intersección de objetos dados]
Luego, trazar la recta que une los puntos de intersección de las circunferencias.
[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso]
Esta será la mediatriz de AB. </td>
<td>
[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas]
Se resuelve el sistema formado por estas dos ecuaciones y se obtiene:
P(4,0) y Q(0,4)
Dado que las soluciones del sistema son puntos de paso de la mediatriz del segmento AB, conociendo esas coordenadas se determina la ecuación de la recta mediatriz de AB.
[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso] </td>
</tr>
</table>

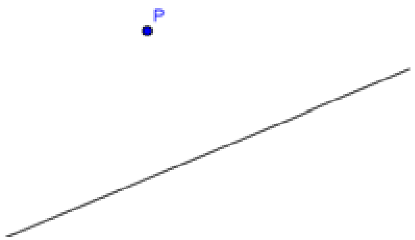
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

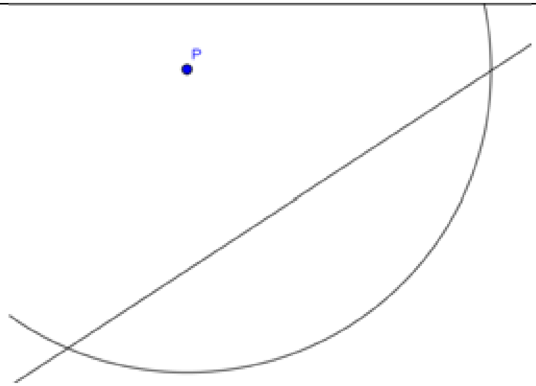
2. Punto medio de un segmento	**Enunciado: Construya el punto medio del segmento *AB*.** **Solución propuesta:** Repetir el procedimiento para trazar la mediatriz. **[UEI: Los mismos que en la construcción de la mediatriz]** Construir el punto medio como la intersección de la mediatriz y el segmento *AB.* **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos].**  	**Enunciado general: Dadas las coordenadas de los extremos de un segmento *AB*, determine las coordenadas de su punto medio.** **Ejemplo: Determine las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A*(0,0) y *B*(4,4).** **Solución propuesta**: Repetir el procedimiento para hallar la ecuación de la mediatriz de *AB*. **[UEI: Los correspondientes a determinar la ecuación de la mediatriz]** $y = -(x-4)$ Resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la mediatriz y la de la recta que contiene al segmento *AB:* $y = -(x-4)$ $y = x$ **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas]** De donde se obtiene que x=2, y=2 que es el punto medio del segmento *AB*.

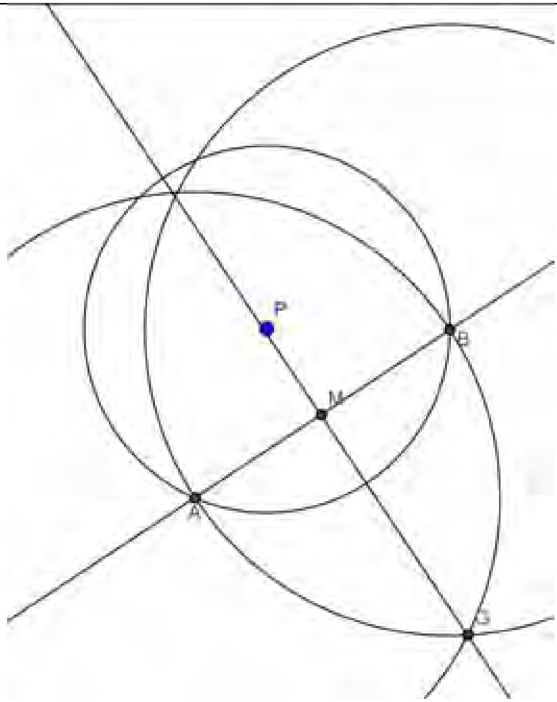
		D B E A C

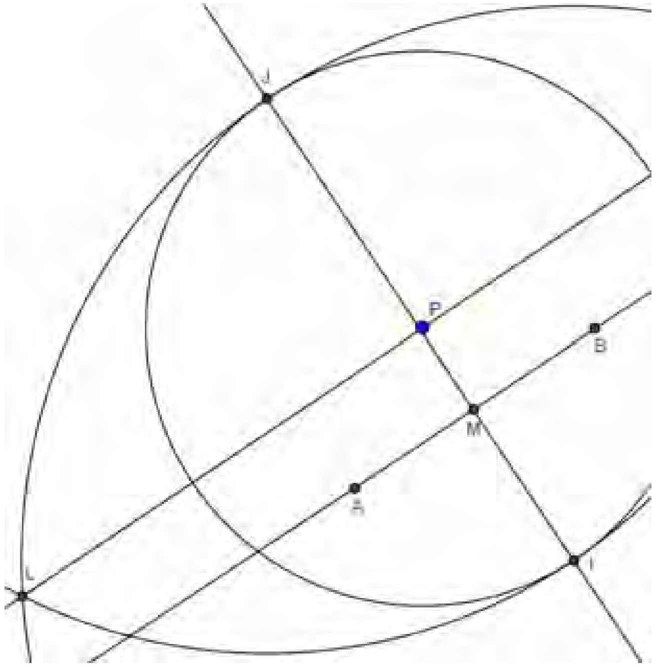
3. Recta perpendicular a una recta y que pasa por un punto dado	**Enunciado: Dados la recta *L* y el punto *P*, construya la recta perpendicular a *L* que pasa por *P*.** **Solución propuesta:** Determinar puntos *A* y *B* que resulten de intersecar un arco centrado en *P* con la recta *L* **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio]** **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos]** Reproducir el procedimiento para construir la mediatriz del segmento AB. [**UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz].** **<u>Solución propuesta con escuadras:</u>** Dada la recta mostrada y un punto de paso P, se debe colocar una escuadra en la dirección de la recta y emplear la segunda escuadra como apoyo para desplazar la primera hasta que pase por el punto P.  	**Enunciado general: Dada la recta cuya ecuación es *L*: *Ax*+*By*+*C*=0 y un punto exterior a ella, $P_0(x_0,y_0)$, halle la ecuación de la recta perpendicular a *L* que pasa por P_0.** **Solución propuesta:** Determinar la ecuación de una circunferencia con centro en P_0 y que corte a *L*. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.]** Resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de *L* y de la circunferencia. **[UEI: Resolver un sistema formado por una ecuación lineal y una cuadrática con dos incógnitas]** Repetir el procedimiento de construcción de mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos que resultan de resolver el sistema anterior. **[UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz].** **<u>Solución propuesta empleando la relación entre las pendientes de rectas perpendiculares:</u>** La solución equivalente al uso de escuadras consideraría usar la propiedad que señala que en el caso de dos rectas perpendiculares, en donde ninguna es vertical, la pendiente de una de ellas es la inversa negativa de la otra. [UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de

	 Luego la primera escuadra se gira y se apoya sobre el otro cateto. La hipotenusa se encontrará en la dirección de la recta perpendicular.  [UEI: Construir una recta conociendo un punto de paso y una dirección]	un punto de paso y su dirección]

4. Recta paralela a una recta dada por un punto dado	**Enunciado general: Dada la recta *L* y un punto *P*, construya la recta paralela a *L* que pasa por *P*.** **Solución propuesta:**  Reconocer que la recta paralela que se debe trazar será la perpendicular a la perpendicular a la recta dada que pase por *P*. Trazar el arco de radio *r* con centro en *P*. **[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido.]**	**Enunciado general: Dada la recta cuya ecuación es *L*: *Ax*+*By*+*C*=0 y un punto exterior a ella, $P_0(x_0,y_0)$, halle la ecuación de la recta paralela a *L* que pasa por P_0.** **Solución propuesta:** Se sigue el procedimiento para determinar la ecuación de la recta perpendicular a L que pasa por P_0. **[UEI: Todas las descritas en la determinación de la recta perpendicular]** Y luego se repite el procedimiento para determinar la ecuación de la perpendicular a la recta perpendicular obtenida en el paso anterior, que pasa por P_0. **[UEI: Todas las descritas en la determinación de la recta perpendicular]**

	 Construir los puntos *A* y *B*, puntos de intersección del arco y la recta. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados]** Construir el punto medio del segmento *AB*. **[UEI: Las correspondientes a construir el punto medio de un segmento]**	

	 Con centro en la intersección de las dos rectas, trazar otro arco de radio arbitrario. **[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido.]** Identificar los puntos *C* y *D* en la intersección. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos**	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>dados]
Trazar la mediatriz del segmento CD.
[UEI: Las consideradas en la construcción de la mediatriz]


La recta mediatriz será la recta paralela a la recta dada inicialmente.</td>
<td><u>Solución propuesta 2 (cuando se conoce que las rectas paralelas tienen pendientes iguales):</u>

Reconocer que la pendiente de la recta paralela coincide con la pendiente de la recta dada.

Se determina la pendiente de la recta dada reconociendo que corresponde al coeficiente de x en la expresión y=mx+b. Para ello se reescribe la ecuación dada, despejando y.

La ecuación de la recta paralela será: $y-3=-\frac{2}{3}(x-4)$, que simplificando es igual a:

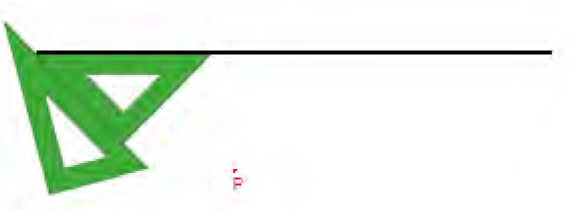
$$3y+2x-17=0$$

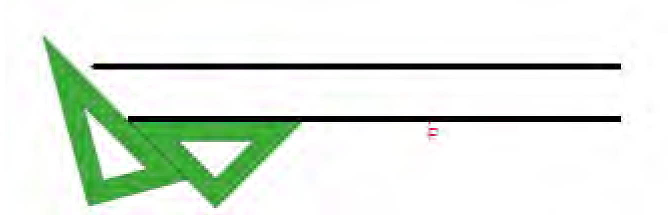
[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de un punto de paso y su pendiente].</td>
</tr>
</table>

Solución propuesta 2 (con escuadras):

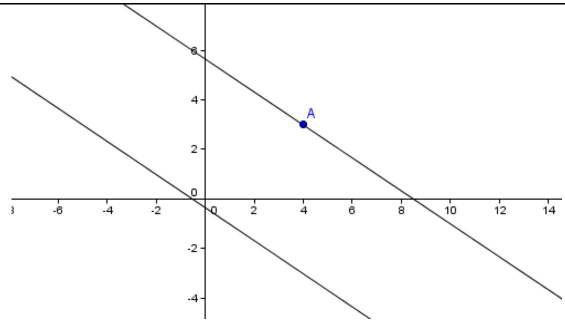
En el contexto de las construcciones, ya ha sido validado el uso de escuadras para el traslado de paralelas y perpendiculares sin necesidad de recurrir siempre al uso del compás.

Así, dada la recta mostrada y un punto de paso *P*, se debe colocar una escuadra en la dirección de la recta y emplear la segunda escuadra como apoyo para desplazar la primera hasta que pase por el punto *P*.



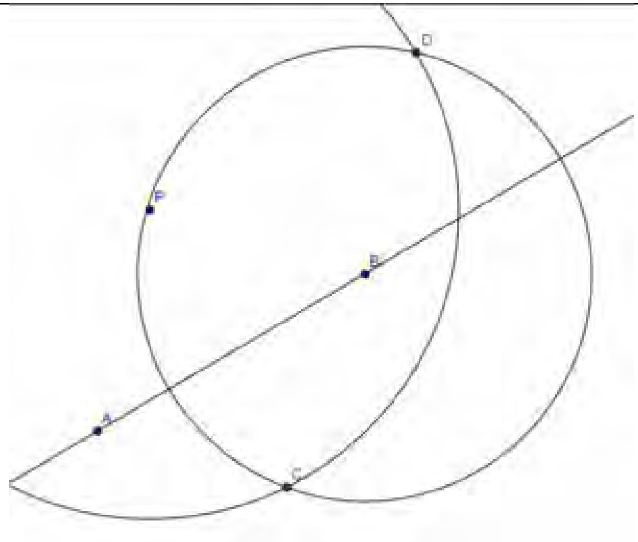


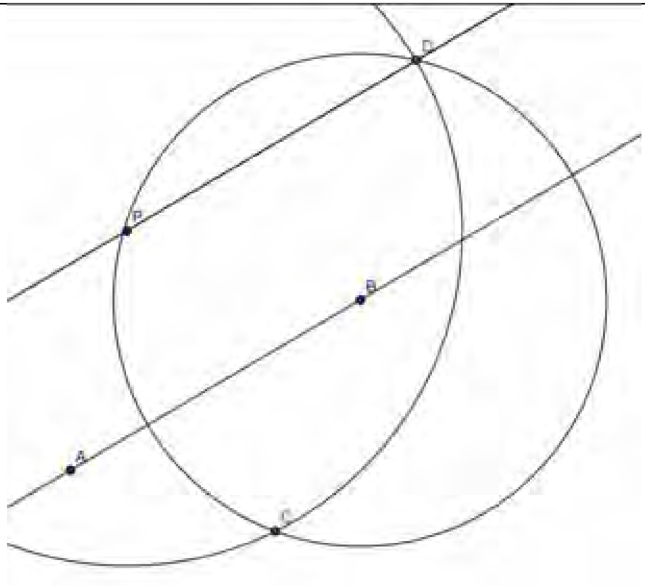
[UEI: Construir una recta conociendo su dirección y un



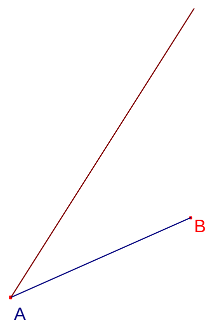
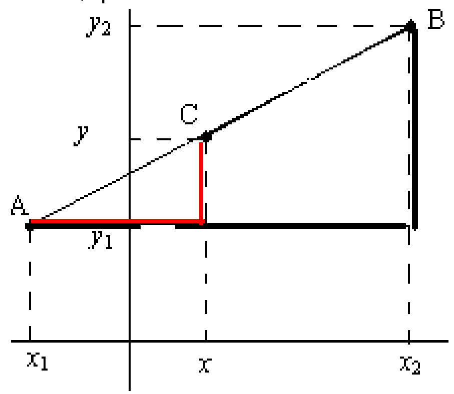
Este procedimiento es equivalente a la construcción de paralelas empleando escuadras.

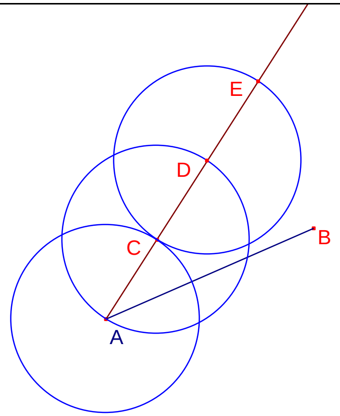
	punto de paso]	
	<u>Solución propuesta 3 (sin construir perpendiculares y construyendo un paralelogramo)</u> Elegir dos puntos *A* y *B* en la recta *L*. **[UEI: Construir puntos sobre objeto]** Construir una circunferencia con centro en *P* y radio *AB* **[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocidos].** Con centro en *B*, construir una circunferencia de radio *AP* **[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocidos]** Identificar los puntos de intersección de las dos circunferencias construidas **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados]**	**<u>Solución propuesta 3</u>** Obtener las coordenadas de dos puntos *A* y *B* que satisfacen la ecuación de la recta *L*. [**UEI: Resolver una ecuación lineal**] (2 veces) Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en *A* y radio la distancia de *B* a *L*. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia con centro y radio conocido].** Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en *P* y radio la distancia de *A* a *B*. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia con centro y radio**

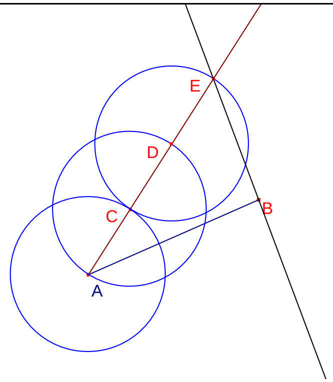
	 Uno de los puntos de intersección de las circunferencias permitirá construir un paralelogramo. En el dibujo, dicho punto es *D.* Construir la recta que pasa por *P* y *D.* **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso]**	**conocido].** Resolver un sistema de dos ecuaciones. **[UEI: Resolver un sistema dos ecuaciones cuadráticas].** Identificar en una de las soluciones otro punto de paso de la recta paralela a L. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso]**

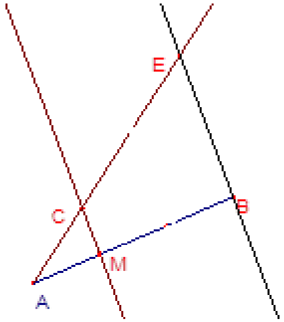
		
5. Distancia de un punto a una recta	**Enunciado: Dada una recta y un punto fuera de ella, construya un segmento cuya longitud corresponda a la distancia que separa estos dos objetos.** **Solución propuesta:** La tarea consiste en construir un segmento perpendicular a la recta, con extremos en el punto dado y en la recta. **[UEI: Las descritas en la construcción de una recta perpendicular].** Construir el punto de intersección entre la recta dada y la	**Enunciado general: Determine la distancia del punto $P_0(x_0,y_0)$ a la recta L: $Ax+By+C=0$.** **Solución propuesta:** La distancia pedida corresponde a determinar la longitud del segmento perpendicular a la recta, con extremos en el punto dado y en la recta dada. Para ello se debe determinar la ecuación de la recta *L*' perpendicular que pasa por P_0 y es perpendicular a *L*. [**UEI: Las descritas al determinar la ecuación de la recta perpendicular que pasa por un punto dado].**

	construida en el paso anterior. **[UEI: Construir un punto en la intersección de dos objetos dados].** El segmento cuyo extremo inicial es el punto dado y el final es el punto de intersección corresponde a la solución del problema. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso]**	Reconocer que el punto *Q*, punto de intersección de *L*' y *L*, permitirá calcular la distancia de P_0 a *L* ya que esta distancia coincide con la de P_0 a *Q*. Determinar las coordenadas de *Q* resolviendo un sistema determinado por las ecuaciones de *L* y *L*'. **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas].** Determinar la d(P_0,*L*) calculando d(P_0,*Q*) cuya expresión se conoce. Este procedimiento ya no es algebraico, es sólo numérico.
6. Distancia entre dos rectas paralelas	**Enunciado: Determine la distancia entre las rectas paralelas *L* y *L*'.** Solución propuesta: La tarea se reduce a seleccionar un punto sobre *L* . **[UEI: Construir un punto sobre un objeto construido previamente]** Repetir la construcción descrita para determinar la distancia de un punto a una recta. **[UEI: Las descritas al determinar la distancia de un punto a una recta].**	**Enunciado general: Determine la distancia entre las rectas cuyas ecuaciones son L: $y=mx+b$ y L': $y=mx+b'$.** Solución propuesta: Basta tomar un punto sobre una de las rectas, esto es, asignar un valor a *x* y hallar su respectivo valor de *y*. **[UEI: Resolver una ecuación lineal].** y repetir el procedimiento para determinar la distancia de un punto a una recta. **[UEI: Las descritas al calcular la distancia de un punto a una recta].**
7. División de un segmento en una razón dada	**Enunciado**: **Dado un segmento, divídalo en dos segmentos cuyas longitudes se encuentren en la relación de 1 a *n*-1 partes de igual longitud.** **Solución propuesta:** Se construye una semirrecta con origen en uno de los extremos	**Enunciado: Dados dos puntos de coordenadas $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, determine las coordenadas de los puntos sobre dicho segmento de modo que lo dividan en la relación de 1 a *n*-1**. **Solución propuesta:** Determinar la ecuación de la recta que pasa por *A* y *B*.

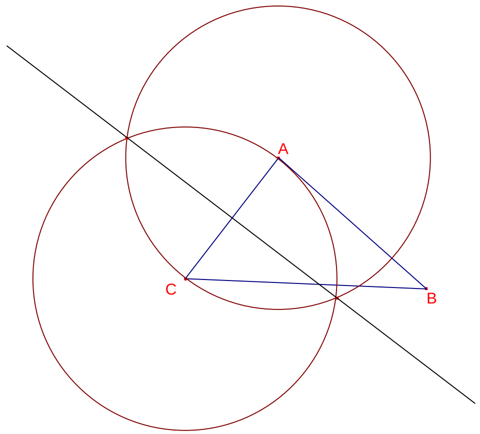
	del segmento dado, por ejemplo el punto A. **[UEI: Construir una recta teniendo como dato dos puntos de paso].**  Luego, empleando el compás, se trazan *n* arcos sobre la semirrecta anterior. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo el centro y el radio].**	**[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]** Determinar la ecuación de la recta vertical que pasa por un punto del eje *x* ubicado a una distancia de $x_1 + \frac{x_2 - x_1}{n}$ del origen de coordenadas. Esto es: $x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{n}$ **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso]** Resolver un sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la recta que pasa por *A* y *B* y la recta vertical. **[UEI: Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas]** La solución del sistema anterior corresponde a las coordenadas del punto C, sobre el segmento AB, que lo divide en la relación de 1 a *n*-1. 

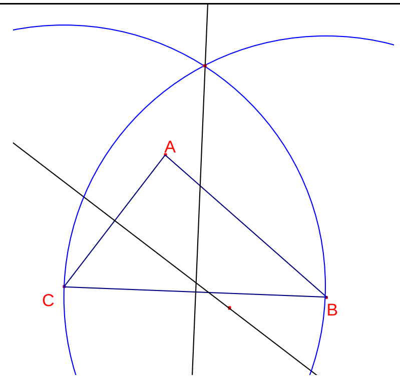
	 Se construyen los puntos de intersección de dichos arcos con la semirrecta. Al último de dichos puntos se le denota por *E.* **[UEI: Construir un punto sobre en la intersección de dos objetos dados]** Se construye la recta que une los puntos *E* y *B*. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].**	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Por C se traza la recta paralela a EB.
[UEI: Las consideradas en la construcción de una recta paralela].


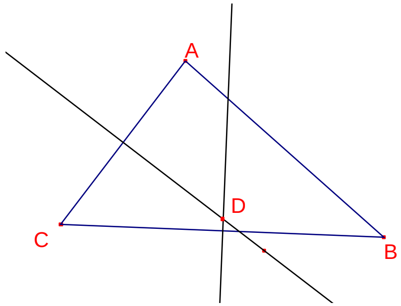
Se identifica el punto M, punto de intersección de dicha recta con la recta AB.
[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	dados] El punto *M* divide al segmento *AB* en dos segmentos cuyas longitudes están en la relación de 1 a *n*-1.	
8. Circuncentro	**Enunciado: Construya el circuncentro de un triángulo.** Solución propuesta: Construir la mediatriz del segmento AC. **[UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz].**  Construir la mediatriz del segmento BC. **[UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz].**	**Enunciado general: Determine las coordenadas del circuncentro del triángulo cuyos vértices son A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) y C(x_3,y_3).** **Ejemplo: Determinar las coordenadas del circuncentro del triángulo cuyos vértices son A(0,0), B(1,0) y C(1,2).** Solución propuesta: Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento AC. **[UEI: Las consideradas en la determinación de la mediatriz de un segmento].** $$y-1=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})$$ Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento ABC. **[UEI: Las consideradas en la determinación de la mediatriz de un segmento].** $$x=\frac{1}{2}$$ Resolver el sistema de dos ecuaciones que se obtiene considerando las ecuaciones de las mediatrices.

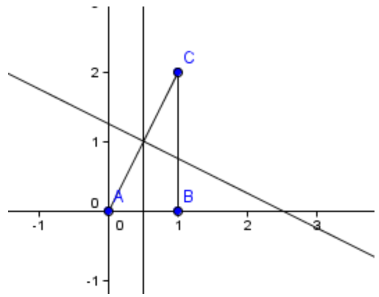
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


El circuncentro del triángulo se encuentra en la intersección de dichas mediatrices.

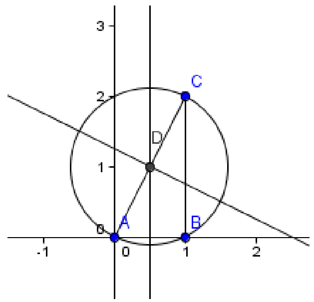
[UEI: Construir la intersección de dos objetos dados].



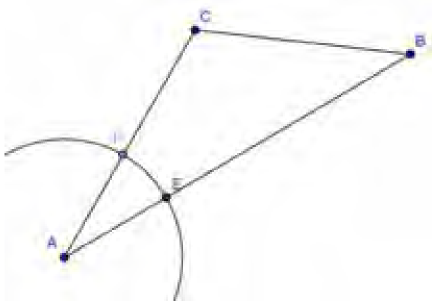
</td>
<td>
[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas].

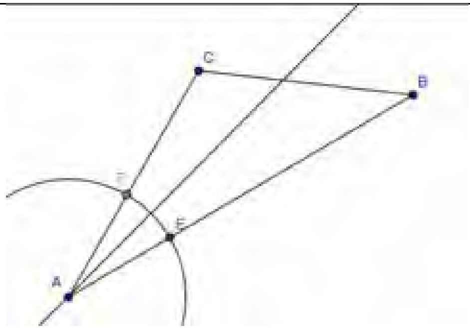
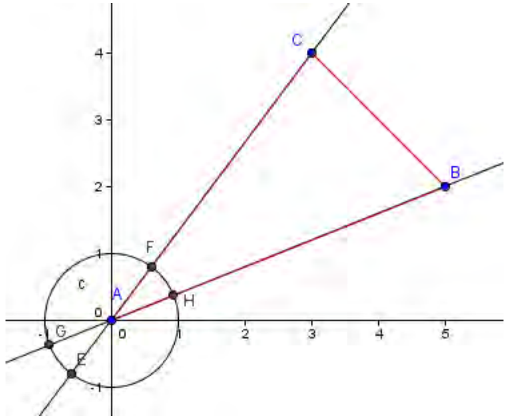


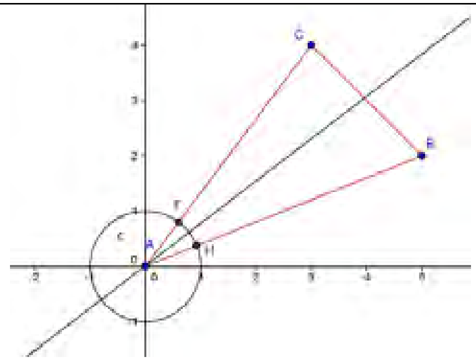
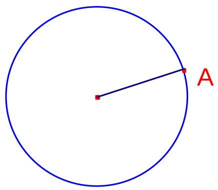
La solución es $x=\frac{1}{2}$, $y=1$. Estas son las coordenadas del circuncentro del triángulo.

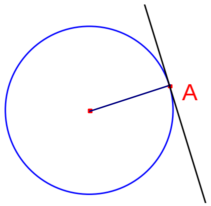
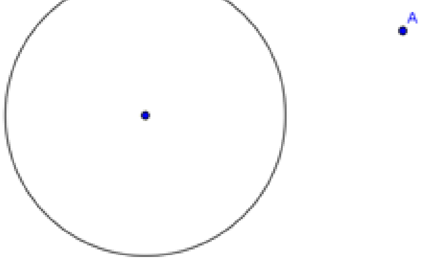


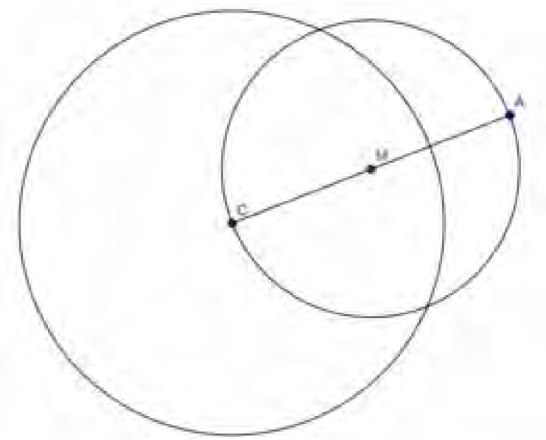
</td>
</tr>
</table>

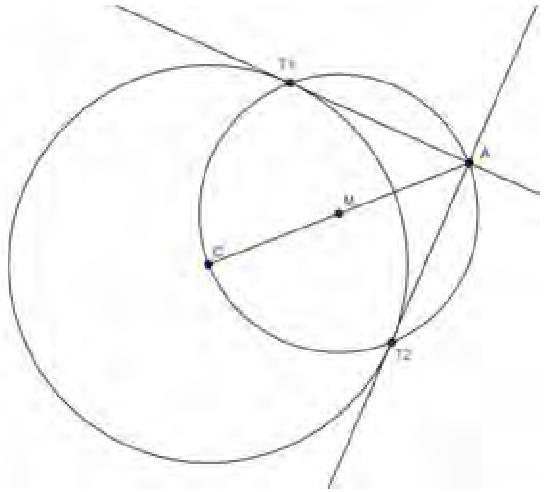
9. Bisectriz	**Enunciado: Construya la bisectriz de uno de los ángulos de un triángulo.** **Solución propuesta:** Solución propuesta: Se traza una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y cualquier radio. **[UEI: Construir una circunferencia a partir del centro y un radio].**  Se construyen los puntos de intersección, *E* y *F*, de la circunferencia con los lados del ángulo. **[UEI: Construir un punto en la intersección con dos objetos dados]** (2 veces). Se construye la mediatriz del segmento EF.	**Enunciado general: Determine la ecuación de la bisectriz del ángulo A, correspondiente al triángulo de vértices A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) y C(x_3,y_3).** **Ejemplo: Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo A, sabiendo que los vértices del triángulo tienen coordenadas A(0,0), B(3,4) y C(5,2).** **Solución propuesta:** Determinar las ecuaciones de las rectas *AB* y *AC*. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]. (2 veces)** Las ecuaciones de las rectas son: $-2x + 5y = 0$ $-4x + 3y = 0$ Determinar la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en *A* y cuyo radio es, por ejemplo, 1. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].** $x^2 + y^2 = 1$ Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta *AB* con la circunferencia.

	 [UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz]. El problema está resuelto porque la bisectriz del ángulo *A* coincide con la mediatriz de *EF* ya que el triángulo *AEF* es isósceles. Nota: También se pudo abordar el problema partiendo de la definición de bisectriz como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas que se cortan.	Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta *AC* con la circunferencia. **[UEI: Resolver un sistema de ecuaciones siendo una lineal y la otra cuadrática, y con dos incógnitas].** (2 veces)  Se deben considerar sólo aquellas soluciones que tienen sentido según el problema. Por ejemplo, en el caso de los puntos *F* y *E* que son intersección de la circunferencia y la recta *AC*, sólo considerar el punto *F*. Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *FH.* **[UEI: Las consideradas en la determinación de la ecuación de la mediatriz]**

		 La ecuación de la bisectriz del ángulo *A* es la ecuación de la mediatriz de *FH*.
10. Determinación de la recta tangente a una circunferencia por un punto de la circunferencia	**Enunciado: Construya la recta tangente a la circunferencia *C* por el punto *A*∈ *C*.** **Solución propuesta:** Trazar un segmento que una el centro de la circunferencia con el punto de tangencia. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].**  Trazar una recta que pase por el punto de tangencia y que sea	**Enunciado general: Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia *C* cuya ecuación es dato de modo que pase por el punto A∈ *C*.** **Solución propuesta:** Determinar la ecuación de la recta que pasa por el centro y el punto de tangencia. Identificar la pendiente de dicha recta. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso]** La recta tangente tendrá como pendiente el inverso negativo del número hallado en el paso anterior. Obtener la ecuación de la recta tangente a partir del punto de tangencia *A* y de la pendiente determinada en el paso

	perpendicular al segmento. **[UEI: Las descritas la construir una recta perpendicular por un punto dado]**  Dicha recta será la recta tangente.	anterior. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de un punto de paso y su pendiente].**
11. Determinación de la recta tangente a una circunferencia por un punto exterior a la circunferencia	**Enunciado: Construya la recta que pasa por el punto A y que es tangente a la circunferencia C dada inicialmente y considerando que A$\notin$ *C*.** Solución propuesta:  	**Enunciado general: Determine la ecuación de la recta que contiene al punto A y es tangente a la circunferencia *C* cuya ecuación es dato, considerando que A$\notin$ *C*.** Solución propuesta: Determinar las coordenadas del punto medio del segmento *CA* que une el centro *C* de la circunferencia dada con el punto exterior *A.* **[UEI: Las descritas al determinar el punto medio]** Calcular la distancia entre los puntos *C* y *A*. Determinar la ecuación de la circunferencia ***C*** ' cuyo centro es el punto medio de *CA* y cuyo radio es 1/2 d(*C*, *A*). **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su**

	Construir el segmento que une el centro *C* y el punto exterior *A*. **[UEI: Construir un segmento conociendo sus extremos]** Construir el punto medio de dicho segmento, construyendo primero la mediatriz del segmento. **[UEI: Las descritas en la construcción de la mediatriz]** Construir el punto de intersección de la mediatriz y el segmento *AC.* **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos]** Construir la circunferencia con centro en el punto medio y diámetro la longitud del segmento construido en el paso anterior. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio]**  Identificar los puntos de tangencia en la intersección de la circunferencia construida y la circunferencia dada inicialmente. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados].**	**radio.]** Resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la circunferencia dada inicialmente y la ecuación de ***C***’’. **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas, con dos incógnitas.]** Cada solución obtenida es uno de los puntos de tangencia de las rectas tangentes trazadas desde *A* a la circunferencia ***C***. Esto implica interpretar las dos soluciones en términos gráficos. Para cada uno de los puntos de tangencia, se determina la ecuación de la recta que pasa por ellos y por *A*. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]. (2 veces)**

	Para construir las dos rectas tangentes que pasan por *A* bastará con construir rectas que pasen por *A* y por cada punto de tangencia. [**UEI: Construir una recta que pasa por dos puntos que son dato].** (2 veces) 	

La siguiente lista de problemas corresponde a situaciones que se resuelven con regla y compás, y que también han sido consideradas en la propuesta didáctica final. Dichos problemas han sido organizados según el tipo de tarea planteada; para cada uno de ellos se identificaron las UEI que se ponían en juego durante el proceso de solución.

Se consideraron dos tipos de tareas:

Tipo 1: Construcción de representaciones geométricas de números. Se refiere a construir segmentos cuya longitud sea igual a la de un número que resulta de realizar operaciones aritméticas con números construibles. En este tipo de tarea también se incluyen problemas de construcción de cuadriláteros con áreas que mantienen relaciones de proporcionalidad o problemas de construcción de figuras semejantes.

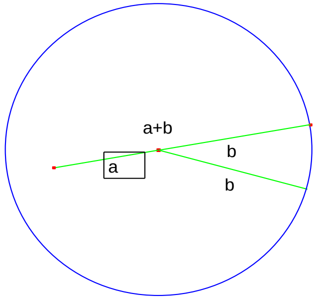
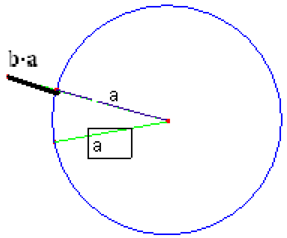
Tipo 2. Construcción de triángulos. Se refiere a problemas donde se dan tres datos, ya sean longitudes de lados, de medianas, alturas, etc. y se pide construir el triángulo.

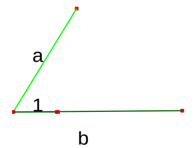
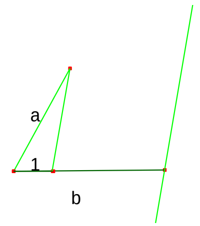
Tareas tipo 1: Construcción de representaciones geométricas de números

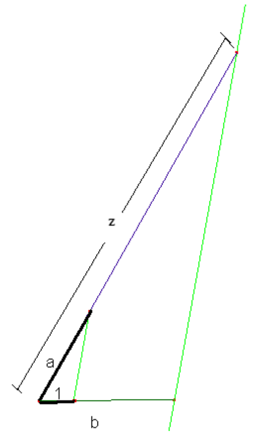
Desde la geometría sintética, la construcción de segmentos cuya longitud es el resultado de operar aritméticamente longitudes dadas tiene como función disponer de construcciones elementales para ser utilizadas en construcciones más complejas.

Para estos problemas no se ha hecho un paralelo con el procedimiento en contextos de geometría analítica. Esto se basa en que, a pesar que la aritmética es parte del álgebra y las construcciones de los resultados de operaciones aritméticas tienen una equivalencia algebraica, la introducción de un sistema de coordenadas rectangulares no será necesaria para la solución de los problemas. Por esa razón, a continuación se ha descrito la solución en términos de UEI pero sólo en el marco geométrico.

Tareas Tipo 1	Problemas considerados en la investigación sobre construcciones con regla y compás
12. **Construcción de las operaciones aritméticas**	**12.1 Enunciado: Construya a+b, dados los segmentos de longitud a y b** **Solución propuesta:** Construir la recta que contiene al segmento de longitud a **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** Sobre dicha recta, colocar el segmento de longitud b a continuación del segmento de longitud a. **[UEI: Construcción un arco con centro y radio conocido].** El nuevo segmento medirá a+b.

	 **12.2 Enunciado: Construya b-a, dados los segmentos de longitud a y b (asumiendo b>a).** **Solución propuesta:** Construir la recta que contiene al segmento de longitud b. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** Sobre dicha recta colocar el de longitud a, de modo que ambos segmentos coincidan en uno de sus extremos. **[UEI: Construcción un arco con centro y radio conocido].** El segmento restante medirá b-a. 

	12.3 Enunciado: Construya ab, dados los segmentos de longitud a y b. **Solución propuesta:** Trazar una semirrecta con origen en un extremo de b pero en una dirección distinta. **[UEI: Construir una recta conociendo un punto de paso y una dirección]** Sobre dicha semirrecta ubicar el segmento a. **[UEI: Construcción un arco con centro y radio conocido].** Sobre el segmento b, ubicar un segmento cuya longitud sea la unidad. **[UEI: Construcción un arco con centro y radio conocido].**  Construir un segmento uniendo los extremos de los segmentos de longitud a y longitud la unidad. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso]** Por el extremo del segmento de longitud b, trazar una recta paralela al segmento construido en el paso anterior. **[UEI: Las consideradas al construir rectas paralelas].**  Construir el punto de intersección de la semirrecta que contiene al segmento a y la paralela trazada en el paso anterior. El segmento z

	mide ab. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente].**  Justificación: reconociendo que se han construido triángulos semejantes, se verifica que: $\frac{1}{a}=\frac{b}{z}$, luego $z=ab$. Al procedimiento en el que se construyen triángulos semejantes adecuados y luego se emplea el teorema de Tales (o una consecuencia de éste) para verificar un resultado, se le denominará **Encaje de Tales.**
	12.4 **Enunciado: Construya a/b, dados los segmentos de longitud a y b.** Observación: En el segundo ciclo de la investigación se propuso una variante de esta pregunta: *Determinar si todo número racional es construible con regla y compás*. Este enunciado requería de un interpretación previa de la condición ser un número racional como el que se pueda expresar como un cociente de enteros.

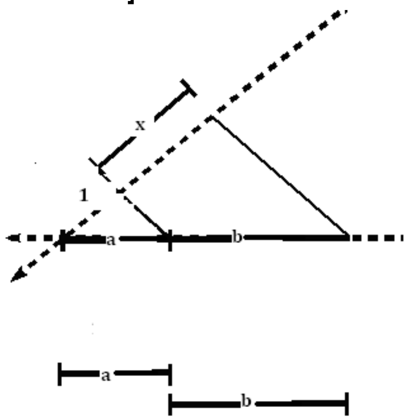
Solución propuesta:

Construir la recta que contiene al segmento de longitud a

[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].

Sobre dicha recta, colocar el segmento de longitud b a continuación del segmento de longitud a.

[UEI: Construcción un arco con centro y radio conocido].



Trazar una semirrecta con origen en un extremo de a pero en una dirección distinta.

[UEI: Construir una recta conociendo un punto de paso y una dirección]

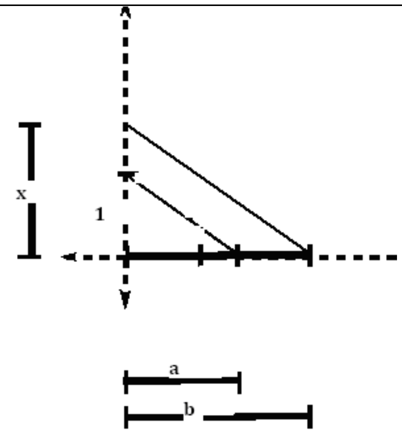
Sobre dicha semirrecta, construir un segmento de longitud la unidad.

[UEI: Construcción un arco con centro y radio conocido].

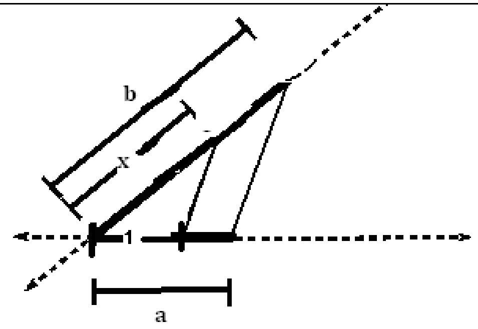
Construir el segmento cuyos extremos son el extremo final de la unidad y el extremo final del segmento de longitud a.

[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].

Construir una recta paralela a este segmento de modo que pase por el extremo final del segmento de longitud b.

	[UEI: Las consideradas en la construcción de paralelas]. Construir el punto de intersección de la semirrecta que contiene a la unidad y la paralela trazada en el paso anterior. El segmento x mide b/a. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente].** La justificación está basada en el teorema de Tales según el cual: $\frac{a}{b}=\frac{1}{x}$, luego $x=\frac{b}{a}$ A continuación se muestran otras construcciones, algunas basadas en el teorema de Tales, otras en semejanza de triángulos y otras en propiedades de las proporciones. Si bien no hay diferencia entre el número de UEI empleadas en cada una de ellas, se distinguirá entre quienes hicieron cada una de estas soluciones al analizar las respuestas de los estudiantes.
	Solución 2: $\frac{1}{a}=\frac{x}{b}$ (semejanza de triángulos) ó $\frac{a}{b}=\frac{1}{x}$ (teorema de Tales) 

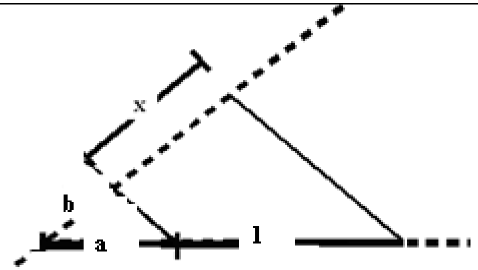
Solución 3: $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x}{b}$ (teorema de Tales)



Solución 4: $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x}{b}$

Que se desprende de $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+a}{b+x}$ (semejanza de triángulos), resultado al que luego se aplica la siguiente propiedad:

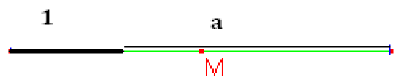
$$\frac{a}{b}=\frac{1+a}{b+x}=\frac{1+a-a}{b+x-b}=\frac{1}{x}$$

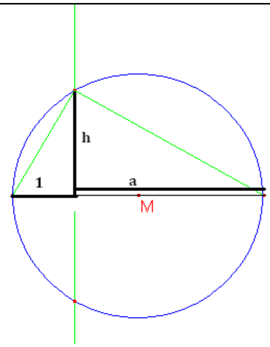


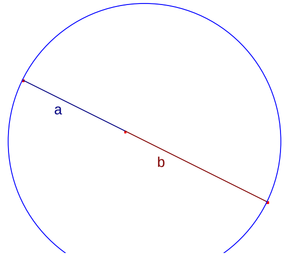
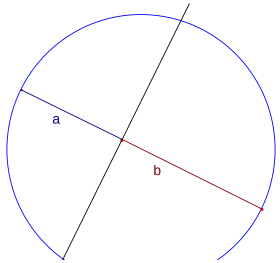
12.5

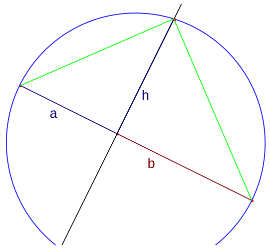
Enunciado: Construya la raíz cuadrada de *a*, siendo a un número construible

Solución propuesta:

	Dado un segmento de longitud a, Construir la recta que contiene al segmento de longitud a **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** Colocar un segmento de longitud 1 a continuación del segmento de longitud a. **[UEI: Construir arcos conociendo el centro y el radio].** **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos].** Construir el punto M, punto medio del segmento de longitud 1+a. **[UEI: Las que corresponde a la construcción del punto medio de un segmento]**  Construir la circunferencia con centro en M y diámetro el segmento de longitud 1+a. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y radio].** Trazar una perpendicular al diámetro por el punto donde se unen los segmentos 1 y a. **[UEI: Las consideradas en la construcción de una recta perpendicular].** Construir el punto de intersección de la recta perpendicular y la circunferencia **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente]** El punto de intersección corresponderá a un extremo del segmento h, cuya longitud es la raíz de a.

	 La justificación se basa en la propiedad de la altura según la cual $h^2 = 1.a$, de donde se tiene que h= $\sqrt{a}$
13. Construcción de un cuadrado cuya área coincida con la de un rectángulo dado.	**Enunciado: Construya un cuadrado cuya área coincida con la del rectángulo de lados *a* y *b*.** **Solución propuesta:** Construir el segmento de longitud a+b. **[UEI: Las descritas en la construcción de a+b]** Construir la circunferencia de diámetro a+b **[UEI: Las que corresponden a construir el punto medio de un segmento],** [**UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].**

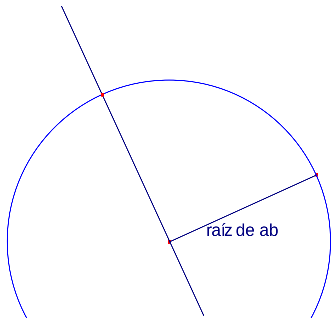
	 Trazar la recta perpendicular al segmento a+b por el extremo final de a. **[UEI: Las que corresponden a trazar una recta perpendicular]**  Construir el punto de intersección de dicha recta con la circunferencia. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente].**



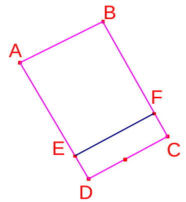
El segmento h tiene como longitud $\sqrt{ab}$.

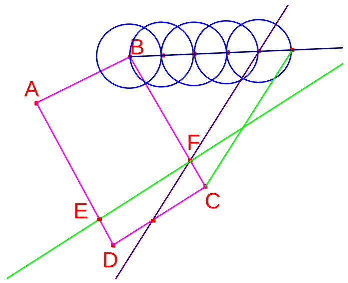
Se construye un cuadrado de lado $\sqrt{ab}$. Para ello, se construye una circunferencia con centro en cualquier punto y radio $\sqrt{ab}$.

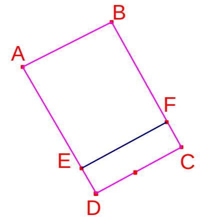
[UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido].
Se elige un radio como lado del cuadrado y por el centro de la circunferencia se traza una perpendicular a dicho lado.
[UEI: Las que corresponden a trazar una recta perpendicular]



En la intersección de la circunferencia y la recta perpendicular se encuentra otro vértice del cuadrado de lado $\sqrt{ab}$.

	[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente] Construir perpendiculares convenientemente y determinar los otros dos vértices en la intersección de las rectas. **[UEI: Las correspondientes a construir una recta perpendicular]. (2 veces)** **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente]**
14. Construcción de cuadriláteros semejantes	**Enunciado general: Dadas las dimensiones de un cuadrilátero, construya otro de modo que sea semejante al primero.** A manera de ejemplo se presentan algunos problemas considerados en este grupo. **Ejemplo 1: Determine las dimensiones (ancho y altura) de un posible rectángulo ABCD que verifique la siguiente propiedad: "Al dividir en cinco partes iguales el lado más largo del rectángulo ABCD se forman rectángulos que son proporcionales o semejantes al primero". Luego, construir, usando regla y compás, el rectángulo determinado en el paso anterior.** **Solución propuesta:** La condición es que el rectángulo FCDE sea proporcional al rectángulo ABCD.  Empleando las construcciones estudiadas previamente, se debe considerar un segmento AB de longitud la unidad. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** Construir una recta perpendicular a AB por B. **[UEI: Las que corresponden a construir rectas perpendiculares].**

	Sobre esta recta se debe construir un segmento de longitud $\sqrt{5}$. [**UEI: Las descritas al construir raíces cuadradas de números construibles].** **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente]** Este segmento se divide en 5 partes de igual longitud y se selecciona uno de ellos. [**UEI: Las descritas al dividir un segmento en una razón dada].**  **Justificación:** AB/BC=FC/CD pero AB=CD, luego AB²=FC. BC y si FC=x, entonces BC=5x. Luego, si AB=1, $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **Otras variantes del enunciado:** **Ejemplo 2: Construya, usando regla y compás, un rectángulo áureo donde el lado menor mida 3cm.** **Solución propuesta:** Con un procedimiento similar el descrito en la parte a) del problema anterior, pero en el que AB mida 3cm, BC=x cm

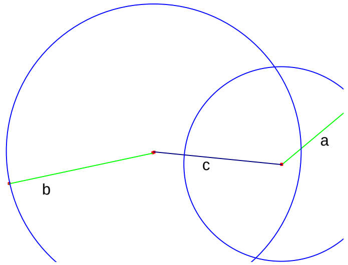
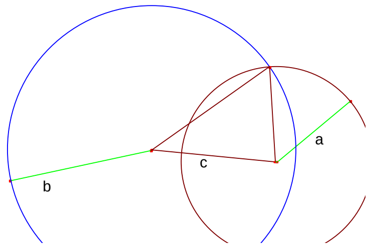
	 y la condición aritmética sea que: $$\frac{3}{x} = \frac{x-3}{3}$$ Se tendrá que $x = \frac{3(1+\sqrt{5})}{2}$. En términos de construcciones exactas, el procedimiento a seguir es similar al de la pregunta anterior con lados 3 y $x = \frac{3(1+\sqrt{5})}{2}$. **Ejemplo 3: Construya un rectángulo áureo en el que su lado mayor mida 5 unidades.** **Solución propuesta:** En términos de construcciones exactas, el procedimiento a seguir es similar al de la pregunta anterior con lados 5 y $\frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

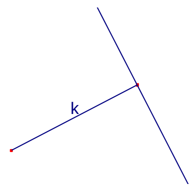
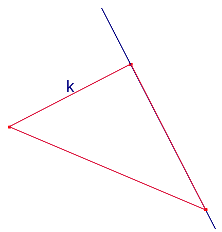
Tareas tipo 2: Construcción de triángulos

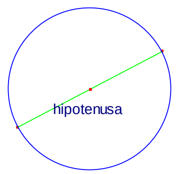
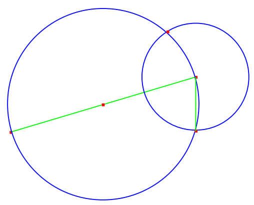
Se refiere a problemas donde se dan como datos algunos lados, vértices, líneas notables, etc. de un triángulo, de modo que el triángulo se pueda construir de manera exacta con dicha información.

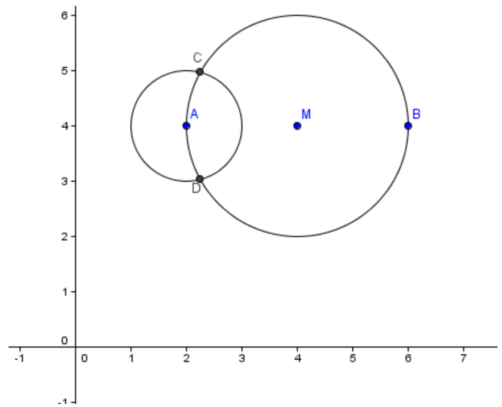
Estos problemas sí podrán ser resueltos también en contextos de geometría analítica; el objetivo será determinar las coordenadas de los vértices del triángulo.

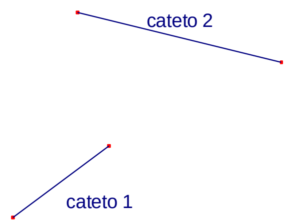
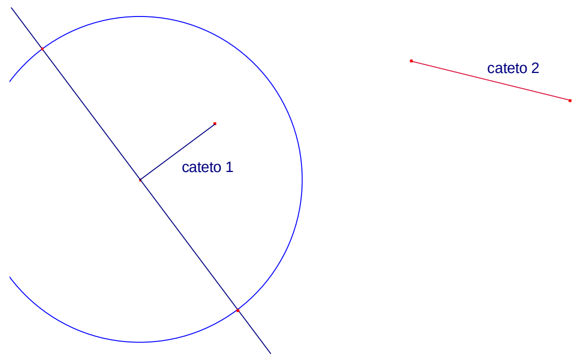
Tareas tipo 2	UEI en GS	UEI en GA
15. **Determinar un triángulo conociendo sus tres lados**	**Enunciado**: **Construya un triángulo conociendo la longitud de sus tres lados.** **Solución propuesta:** Construir una circunferencia con centro en un extremo del segmento de longitud c y radio el segmento de longitud a. [**UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].** Construir una circunferencia con centro en el otro extremo del segmento de longitud c y radio b. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].**	**Enunciado general: Dadas las coordenadas de los vértices A y B de un triángulo y conociendo las longitudes de los lados AC y BC, determine las coordenadas del tercer vértice.** **Ejemplo: Dados A(0,0) y B(4,0), vértices de un triángulo y sabiendo que las longitudes de los lados AC y BC son 6 y 5 unidades, respectivamente, determinar las coordenadas del vértice C.** **Solución propuesta:** Se tienen como dato las longitudes de los lados AC y BC, luego, el tercer vértice, C, debe cumplir las siguientes condiciones: d(A,C)= 6 d(B,C)=5 Si C(x,y), dichas condiciones se traducen en las siguientes ecuaciones:

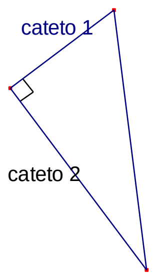
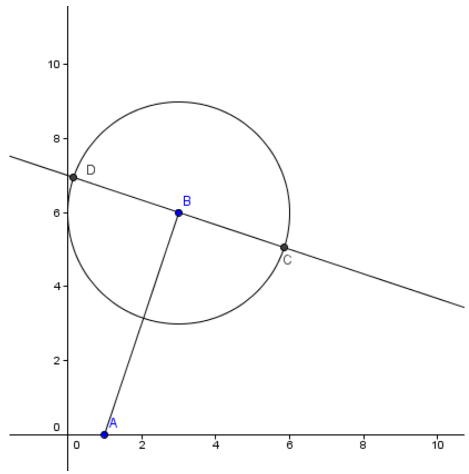
	 Construir los puntos de intersección de dichas circunferencias **[UEI: Construir puntos de intersección de dos objetos construidos previamente].**  El tercer vértice del triángulo se encontrará en cualquiera de los dos puntos de intersección de las circunferencias.	$x^2+y^2=36$ $(x-4)^2+y^2=25$ **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio] (2 veces)** Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores, se obtienen dos soluciones: x=3.38, y=4.96; x=3.38, y=-4.96 **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas]** Reconocer que las dos soluciones corresponden a las posibles ubicaciones del vértice C, (3.38, 4.96) ó (3.38, -4.96).
16. Determinar triángulos rectángulos, a partir de la longitud de sólo un cateto	**Enunciado: Construya un triángulo rectángulo tal que uno de sus catetos mida k.**	**Enunciado: Los vértices A(1,2) y B(3,4) son extremos de un cateto del triángulo ABC recto en B. Determine las coordenadas de un posible vértice C.**

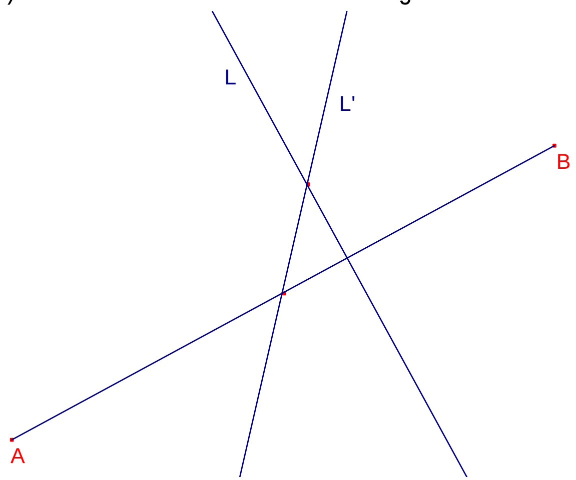
	Solución propuesta: En este caso, se debe construir una perpendicular al segmento de longitud conocida. **[UEI: Las consideradas en la construcción de una recta perpendicular].**  Para construir un triángulo rectángulo con cateto k, bastará elegir un punto en la recta trazada. **[UEI: Construir un punto sobre un objeto dado previamente].** Construir un segmento que una el extremo de longitud k y el punto dado. De esta manera se construye un triángulo rectángulo con cateto k. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** 	**Solución propuesta:** Determinar la ecuación de la recta AB. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso]** Para que C sea el tercer vértice de un triángulo recto en B, C debe desplazarse sobre la recta perpendicular a AB por el punto B. **[UEI: Las consideradas en la determinación de la ecuación de una recta perpendicular]** Obteniéndose: $y = -x + 7$ Luego, el vértice C se desplaza sobre la recta cuya ecuación es la determinada en el paso anterior. Para determinar las coordenadas de un posible vértice C, basta asignar un valor a una de las coordenadas y despejar el valor de la otra en la ecuación obtenida en el paso anterior. **[UEI: Resolver una ecuación lineal o cuadrática en una variable]**

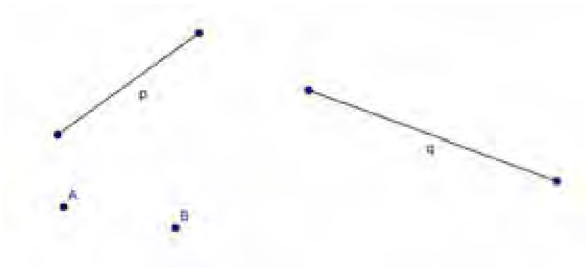
17. Determinar triángulos rectángulos, a partir de la longitud de la hipotenusa y de un cateto	**Enunciado: Construya un triángulo rectángulo si se conocen las longitudes de su hipotenusa y de un cateto.** **Solución propuesta:** Construir el punto medio de la hipotenusa. **[UEI: Las consideradas en la construcción del punto medio].** Construir la circunferencia cuyo diámetro es la hipotenusa dada. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].**  De otro lado, con centro en el extremo final de la hipotenusa y radio la longitud del cateto dado, construir una circunferencia. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].**  Construir el tercer vértice del triángulo en la intersección de las dos	**Enunciado general: Halle las coordenadas de un vértice del triángulo rectángulo ABC si se conocen los vértices de la hipotenusa y la longitud de uno de los catetos.** **Ejemplo: Hallar las coordenadas del vértice C del triángulo ABC cuya hipotenusa tiene extremos A(2,4) y B(6,4) y se cumple que AC mide 1 unidad.** **Solución propuesta:** Hallar M, punto medio de AB y la distancia de A a B. **[UEI: Las descritas al hallar las coordenadas del punto medio].** De donde se obtiene que M(4,4), y además se puede calcular la d(A;B)=4. Determinar la ecuación de la circunferencia centrada en M y radio AB/2. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.]** $$(x-4)^2+(y-4)^2=2^2$$ Se determina la ecuación de una circunferencia con centro en A y radio 1. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.]** $$(x-2)^2+(y-4)^2=1^2$$ Reconocer que en la intersección de las dos circunferencias se ubica el

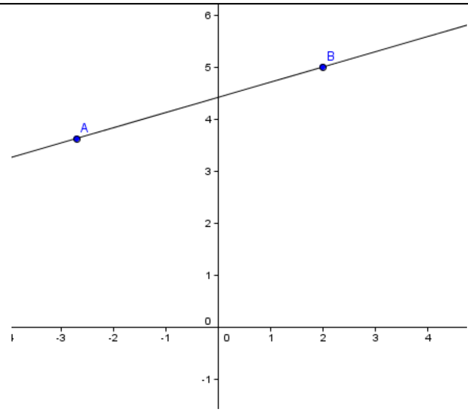
	circunferencias. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente].** Hay dos posibles ubicaciones de C.	vértice C. Resolver el sistema de ecuaciones. **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas]**  C puede tener coordenadas (2.25, 4.97) ó (2.25, 3.03)
18. Determinar triángulos rectángulos a partir de las longitudes de sus dos catetos	**Enunciado: Construya un triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los dos catetos.** **Solución propuesta:** Dadas las longitudes de dos catetos,	**Enunciado general: Se conocen los vértices de un triángulo rectángulo correspondientes a un cateto y también la longitud del otro cateto. Halle las coordenadas del tercer vértice.** **Ejemplo: Respecto al triángulo ABC, recto en B se sabe que las coordenadas de B son (3,6) y las de son A(1,0) y que el lado BC mide 3 unidades. Halle las coordenadas del vértice C.** **Solución propuesta:**

	 Construir una recta perpendicular a uno de ellos de modo que pase por uno de sus extremos. **[UEI: Las consideradas al construir una recta perpendicular].** Trasladar sobre dicha recta la longitud del segundo cateto de modo que ambos catetos tengan un extremo común. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y radio].** 	Determinar la ecuación de la recta que pasa por A y B. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso]** Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta AB. **[UEI: Las que corresponden a determinar la ecuación de una recta perpendicular]** De donde se obtiene: $4y + x = 27$ Se debe interpretar que el lado BC mida 3 unidades como *Estar sobre una circunferencia de centro B y radio 3.* $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 3^2$ **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].** Reconocer que C debe cumplir la ecuación de la recta y la de la circunferencia. Resolver el sistema. **[UEI: Resolver un sistema formado por una ecuación lineal y una**

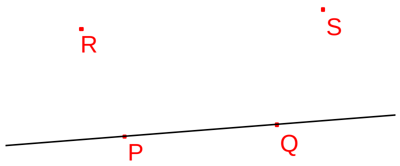
	Construir los puntos de intersección de la circunferencia y la recta. **[UEI: Construir puntos de intersección de dos objetos construidos previamente]** Construir un segmento que una el extremo del primer cateto y uno de los puntos de intersección. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].**  	**cuadrática con dos incógnitas]** Las coordenadas del punto C serán (5.85, 5.05) ó (0.15, 6.95) 

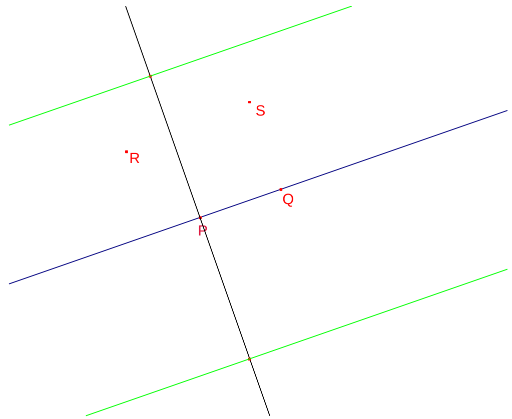
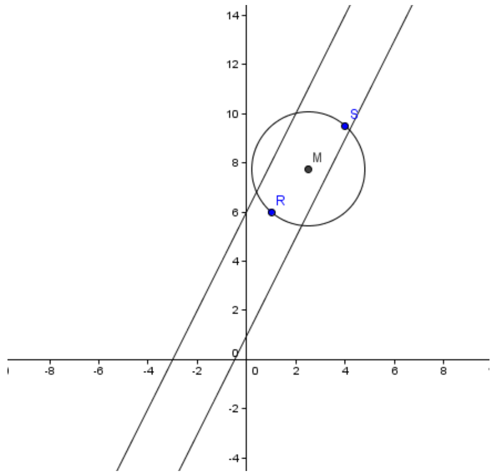
19. Determinar triángulos conociendo datos sobre una altura, una mediana y un lado	**19.1 Enunciado: Se tienen como datos el lado AB del triángulo ABC y rectas L y L' que contienen a la altura y a la mediana relativas al lado AB, respectivamente. Teniendo en cuenta estos elementos:** **a)Construya el vértice C.** **b)Señale cuántos triángulos pueden construirse con esas condiciones y constrúyalos.** **Solución propuesta:** a)Los datos son los mostrados en la figura:  Reconocer que en la intersección de L y L' se encuentra el vértice C. **[UEI: Construir un punto en la intersección de otros dos objetos dados]**	**19.1 Enunciado general: Se tienen como datos las coordenadas de los vértices A y B de un triángulo ABC, así como las ecuaciones de las rectas que contienen a la mediana de AB y a la altura relativa al lado AB; a partir de lo anterior, halle las coordenadas de C.** **Ejemplo: Dados los vértices A(-3,-2) y B(3,4), la recta de ecuación $\boldsymbol{L}$: $y = -\frac{3}{2}x + 1$ que contiene a la mediana relativa al lado AB y la recta de ecuación $\boldsymbol{L'}$: $y = -x + 3$ que contiene a la altura relativa al lado AB, halle las coordenadas del vértice C. Determine las coordenadas de los vértices de todos los triángulos que satisfacen esas condiciones.** **Solución propuesta:** Reconocer que el punto C pertenece a cada una de las rectas descritas y que, por lo tanto, satisface el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a las ecuaciones de L y L'. **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas]** El sistema de ecuaciones tiene solución única, por lo tanto, sólo existe un triángulo que satisface dichas condiciones.

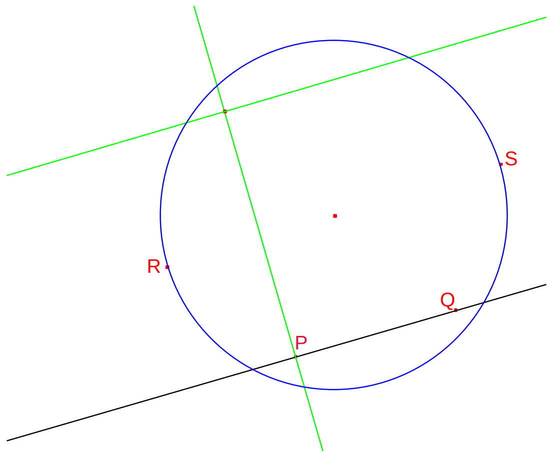
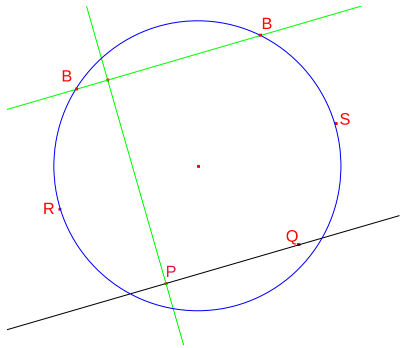
	a) Luego, uniendo los puntos A y C, y B y C, se tendrá construido el triángulo que es único.	
	19.2 Enunciado: **Se tienen como datos el lado AB del triángulo ABC y segmentos *p* y *q* correspondientes a las longitudes de la altura y la mediana relativas al lado AB, respectivamente. Teniendo en cuenta estos elementos:** **a)Construya el triángulo ABC.** **b)Señale cuántos triángulos pueden construirse con esas condiciones y constrúyalos.** **Solución propuesta:** Se tienen los siguientes datos:  i)Interpretar *estar en la mediana* como estar sobre una circunferencia de centro el punto medio y radio conocido. Para ello: Construir el punto medio de AB.	**19.2 Enunciado general: Se tienen como datos las coordenadas de los vértices A y B de un triángulo ABC, así como las longitudes de los segmentos *p* y *q* correspondientes a las medidas de la altura y la mediana relativas al lado AB, respectivamente. Teniendo en cuenta estos elementos:** **a) Halle las coordenadas del vértice C.** **b) Determine las coordenadas de los vértices de todos los triángulos que satisfacen esas condiciones.** **Solución propuesta:** Se tienen como datos los puntos A y B:

	[UEI: Las descritas al construir el punto medio de un segmento]. Construir una circunferencia con centro en dicho punto medio y radio *q*. **[UEI: Construir una circunferencia a partir de un centro y radio dado].** El vértice C se encuentra sobre la circunferencia que se acaba de construir. ii)Interpretar el dato de la altura como el conocer a qué distancia está el vértice C del segmento AB y que eso se representa geométricamente con estar sobre una recta paralela al segmento AB. La construcción de una recta paralela al lado AB a una distancia de *p* unidades se puede hacer siguiendo los siguientes pasos: Construir la mediatriz de AB **[UEI: Las descritas al construir la mediatriz de un segmento]** Construir una circunferencia de centro el punto medio de AB y radio la distancia *p* dada. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y radio]** Construir el punto de intersección de la circunferencia del paso anterior y la mediatriz de AB. **[UEI: Construir puntos de intersección de dos objetos dados previamente].** Por uno de los puntos de intersección, construir la recta paralela a AB. **[UEI: Las descritas al construir una recta paralela].** Finalmente, identificar el vértice C como el punto de intersección de esa recta y la circunferencia construida con la mediana.	 i) Determinar las coordenadas de la recta AB. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]** Calcular las coordenadas de M (x_M, y_M), punto medio del segmento AB a partir de la expresión para el punto medio. **[UEI: Las descritas al determinar el punto medio].** Con las coordenadas de M y considerando como radio el valor dado *q*, determinar la ecuación de la circunferencia con centro en M: $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=q^2$ **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].**

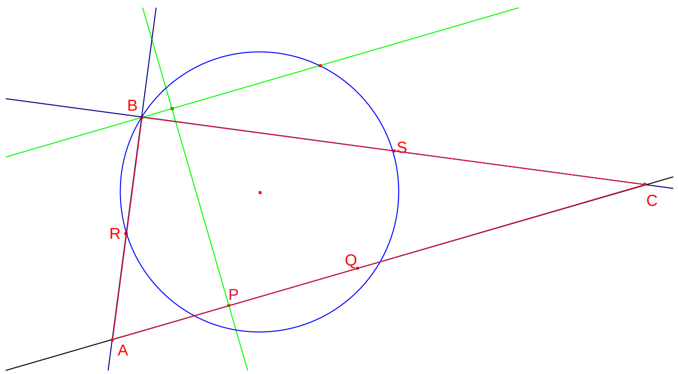
	[UEI: Construir puntos de intersección de dos objetos dados previamente]. Al considerar las dos rectas paralelas, se encontrarán cuatro soluciones.	ii) Por otro lado, se debe determinar la ecuación de una recta paralela a AB ubicada a la distancia de *p* unidades. Para ello, se determinará la ecuación de un circunferencia con centro en algún punto de la recta que pasa por A y B, llamémosle D, y radio *p*. El centro D se obtiene al seleccionar un punto que satisfaga la ecuación de AB. **[UEI: Resolver una ecuación lineal con una incógnita].** **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio].** (α) Luego se determina la ecuación de una recta perpendicular a AB y que pase por el punto D. **[UEI: Las descritas al determinar la ecuación de una recta perpendicular]** (β) Resolver el sistema determinado por la ecuación cuadrática **(α)** y la ecuación lineal **(β)** **[UEI: Resolver un sistema de ecuaciones formado por una ecuación lineal y una cuadrática en dos incógnitas]** Determinar la ecuación de una recta paralela a AB que pasa por uno de los puntos de intersección determinados en el paso anterior. **[UEI: Los descritos al determinar una recta paralela] (para efectos del número de UEI se ha considerado el procedimiento usando perpendiculares)** Resolver un sistema de ecuaciones en el que una de ellas corresponde a

		la ecuación de la circunferencia determinada en i) y la otra ecuación corresponde a la recta determinada en ii) **[UEI: Resolver un sistema de ecuaciones formado por una ecuación lineal y una cuadrática en dos incógnitas]** Interpretar las cuatro soluciones (2 para cada ecuación de la recta paralela) como las posibles ubicaciones del vértice C en el plano cartesiano.
20. Determinar triángulos rectángulos teniendo como datos la altura relativa a la hipotenusa, un punto en cada cateto y la recta que contiene a la hipotenusa.	**Enunciado: Respecto al triángulo rectángulo *ABC* se conoce la longitud (h) de la altura relativa a la hipotenusa AC, dos puntos (P y Q) del segmento AC y un punto en cada uno de los catetos (R en AB y S en BC). Construya el triángulo ABC.** **Solución propuesta:** Ubicando los datos del problema en el plano, se tiene lo siguiente:  La condición sobre la altura lleva a trazar una recta paralela a PQ a una distancia h. Para ello, se sigue un procedimiento similar al descrito en el problema 19.2	**Enunciado general: Se conocen dos puntos de la recta que contiene a la hipotenusa del triángulo ABC recto en B. Se conocen además las coordenadas de los puntos R y S, ubicados en los catetos AB y BC, respectivamente. Se conoce además la longitud de la altura relativa al vértice B.** **Determine las coordenadas de los vértices del triángulo ABC.** **Solución propuesta:** Determinar la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]** Determinar la ecuación de una recta L, paralela a la anterior y que se encuentra a una distancia dada. **[UEI: Las descritas en la parte ii del problema 19.2]**

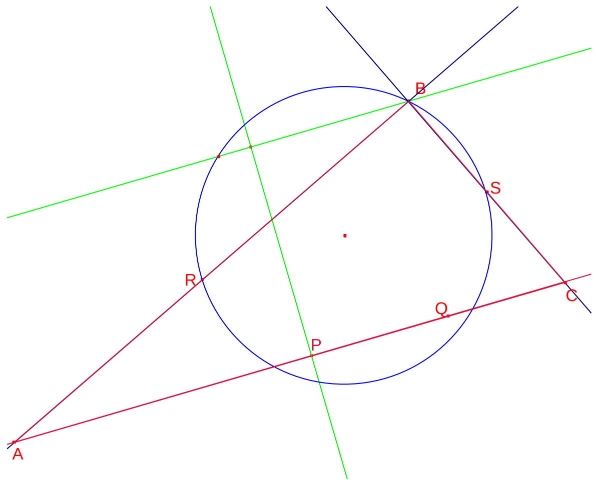
	[UEI: Las descritas en la parte ii) del problema 19.2]  Como se debe seleccionar un punto T sobre la paralela de modo que genere segmentos perpendiculares TR y TS, conviene construir una circunferencia de diámetro RS. [UEI: Las empleadas al construir el punto medio de RS] [UEI: Construir una circunferencia con centro y radio conocido] El vértice B se encontrará en la intersección de la circunferencia de diámetro RS y alguna de las rectas paralelas trazadas. **[UEI: Construir un punto en la intersección de otros dos objetos**	Determinar las coordenadas del punto medio de RS. **[UEI: Las descritas al calcular el punto medio de un segmento]** Determinar la distancia de R a S. Determinar la ecuación de una circunferencia de centro y radio conocido. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.]**  Para determinar B se debe resolver el sistema formado por la ecuación de la circunferencia hallada en el paso anterior y de la recta L. **[UEI: Resolver un sistema de dos incógnitas formado por una ecuación cuadrática y una lineal].** Se obtendrán dos soluciones de B. Interpretar geométricamente lo que

	dados]  Se observa que hay dos posibles ubicaciones para B.  Para cada una de ellas se trazan rectas por B y R, y por B y S.	significa que el sistema tenga dos soluciones. Con una de ellas, hallar la ecuación de la recta BR y BS **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso]. (2 veces)** Resolver el sistema formado por la ecuación de BR y AC para hallar las coordenadas de A. **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas].** Resolver el sistema formado por la ecuación de BS y AC para hallar las coordenadas de C **[UEI: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas].** Notar que el sistema tendrá dos soluciones, las que deberán interpretarse como las posibles ubicaciones del vértice B en el plano cartesiano.

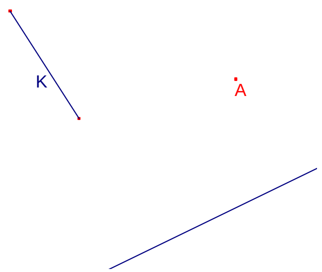
[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso]

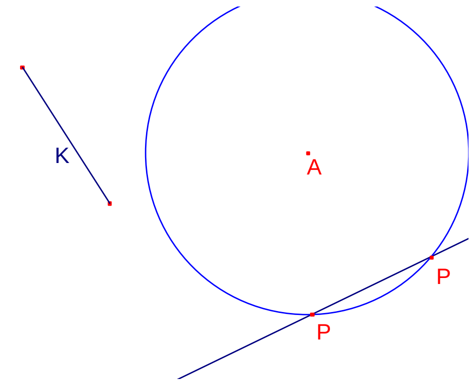


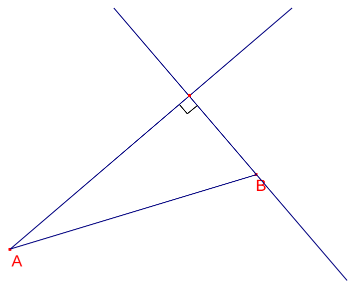
Esta es la otra solución:



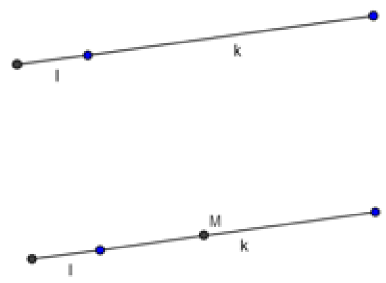
SITUACIONES CORRESPONDIENTES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS (FAMILIA DE PROBLEMAS PARA INTRODUCIR LA GA A PARTIR DE LA GS)

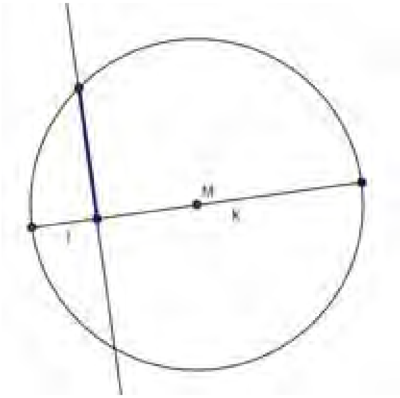
	UEI en GS	**UEI en GA**
21. Problema sobre lugar geométrico en donde el dato es una distancia	**21.1** **Enunciado: Construya el lugar geométrico descrito por puntos del plano que están sobre una recta dada y se encuentran a una distancia fija de un punto dado.** **Solución propuesta:** Esto puede interpretarse geométricamente como buscar el punto de intersección de la recta dada con una circunferencia centrada en el punto que es dato y que tiene como radio la distancia dada.  Esta actividad requiere una conversión de la condición dada en registro natural al registro figural. **[UEI: Construcción de una circunferencia a partir de su centro y de su radio]**	**21.1** **Enunciado general: Halle las coordenadas de todos los puntos del plano que se encuentran sobre una recta dada y a una distancia d respecto de un punto conocido A.** **Solución propuesta:** Los puntos que satisfacen dicha condición son aquellos que cumplen la ecuación de la recta dada y de la circunferencia de centro A y radio d. **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y radio]** **[UEI: Resolver un sistema formado por una ecuación lineal y una cuadrática]** Interpretar estas dos soluciones como los únicos puntos del lugar geométrico.

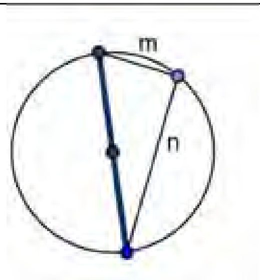
	Reconocer que las soluciones están en la intersección de este objeto con la recta dada. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente]**  El lugar geométrico está formado solo por dos puntos.	
	21.2 **Enunciado: Construya el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de una recta dada** **Solución propuesta:** El lugar geométrico corresponde a una recta paralela a la recta dada que se ubica a la distancia dada.	**21.2** **Enunciado general: Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia dada de una recta dada.** **Solución propuesta:** La ecuación del lugar geométrico corresponde a la ecuación de una recta paralela a la recta dada que se ubica a la distancia dada.

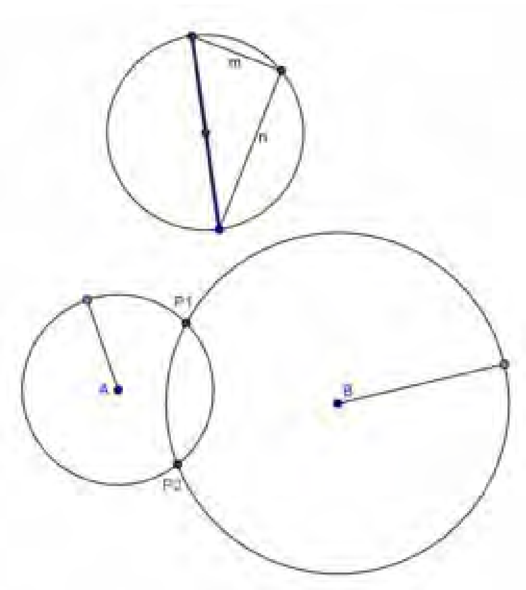
	[UEI: Las descritas en el problema en la parte ii del problema 19.2]	**[UEI: Las descritas en el problema en la parte ii del problema 19.2]**
22. **Cuando el dato es la suma de cuadrados de distancias**	**Enunciado: Dados los puntos A y B, construya el lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo APB sea recto en P.** **Solución propuesta:** Si no se sabe de antemano la forma que adopta el lugar geométrico, se pueden obtener algunos puntos. Para ello: Trazar una recta cualquiera que pase por A. **[UEI: Construir una recta conociendo un punto de paso y una dirección]** y una perpendicular a dicha recta que además pase por el punto B. **[UEI: Las consideradas al construir una recta perpendicular a una recta y que pase por un punto dado]**  	**Enunciado general: Dados los puntos A y B, halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que generan triángulos ABP rectos en P. ¿A qué curva corresponde dicha ecuación?** **Solución propuesta:** A diferencia de lo ocurrido en el procedimiento desarrollado en el marco geométrico donde inicialmente se hallaron algunos puntos y luego, para reconocer la forma global, fue necesario recurrir a una propiedad geométrica, en el marco algebraico sólo se requiere transformar la condición dada en términos de una ecuación. Donde *d*(*A*,*P*) y *d*(*B*, *P*) se expresan en términos de expresiones algebraicas. **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** Así, la condición se escribe en términos de una ecuación (proceso de conversión), $d^2(A,P) + d^2(B,P) = d^2(A,B)$ Luego se debe determinar una ecuación que relacione las

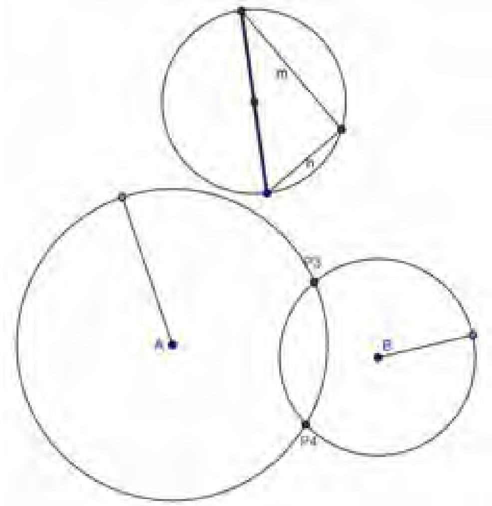
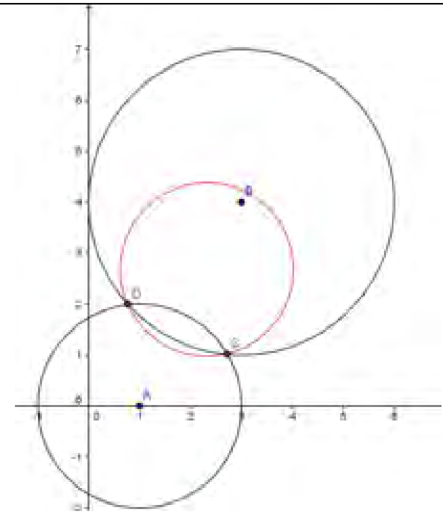
	En la intersección de las dos rectas se encuentra un punto del lugar geométrico. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente].** Pero con el procedimiento descrito se construye sólo un punto del lugar geométrico. Para obtener el lugar geométrico completo, se debe reconocer que la condición de la suma de cuadrados se refiere un triángulo rectángulo. Luego, por las condiciones dadas, dicho triángulo debe estar inscrito en una circunferencia cuyo diámetro será la hipotenusa del triángulo. **[UEI: Las consideradas al construir el punto medio y luego las consideradas al construir una circunferencia conociendo su centro y radio]**	coordenadas de un punto con los datos dados. Y desarrollando las expresiones, simplificando y completando cuadrados, se obtiene una ecuación cuadrática en dos variables que corresponde a una circunferencia.
23. Cuando el dato es la suma de cuadrados de distancias	**Enunciado: Dados los puntos A y B y el valor constante K, construya el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a cada uno de esos puntos es K≠d²(A,B).** **Solución propuesta.** Construir una circunferencia de diámetro $\sqrt{K}$:	**Enunciado general: Dados los puntos A y B, halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano tal que la suma del cuadrado de la distancia de A a P y del cuadrado de la distancia de B a P es dato.** Ejemplo: Considerar los puntos A (0; 0) y B (3; 0). Determinar el lugar geométrico descrito por los puntos P del plano tal que la suma del cuadrado de la distancia de A a P y del cuadrado de la distancia de B a P es 15**.** **Solución propuesta:**

	k
l
M
k
l	

	[UEI: Las consideradas al construir el punto medio de un segmento] **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].**  	
	Sobre dicha circunferencia se selecciona un punto Q. **[UEI: Construir un punto sobre un objeto construido previamente].** Con un extremo en uno de los extremos del diámetro y con otro extremo en Q, se construye un segmento. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** Sea m la longitud de dicho segmento.	Se denota por P(x, y) a los puntos del plano que cumplen la relación pedida. Las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* se representan con una expresión algebraica. **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** Luego se debe determinar una ecuación que relacione las coordenadas del punto P con los datos dados. Entonces debe cumplirse que:

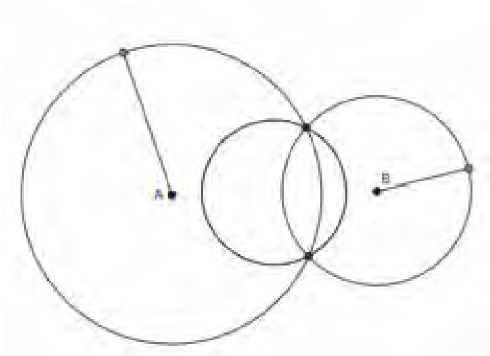
	 Se repite el procedimiento con el otro extremo del segmento K. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** Sea n la longitud de dicho segmento.	$$d^2(A,P)+d^2(B,P)=15$$ $$x^2+y^2+(x-3)^2+y^2=15$$ Desarrollando las expresiones, simplificando y completando cuadrados , se obtiene: $$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{21}{4}$$ Y se reconoce que esta ecuación corresponde a la de una circunferencia. Que corresponde a una circunferencia con centro en $(\frac{3}{2},0)$ y radio $\frac{\sqrt{21}}{2}$. Esta identificación requiere realizar una transformación de conversión. **En el ciclo II los datos fueron A(0,8) , B(0,12) y la suma de los cuadrados de las distancias fue 16.** **En el ciclo III los datos fueron A(1,0) , B(4,0) y la suma de los cuadrados de las distancias fue 16.**

	Por la propiedad del ángulo inscrito, se verifica que $m^2+n^2=K^2$ Con centro en A y radio m, se construye una circunferencia. [**UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].** Con centro en B y radio n, se construye una circunferencia. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].**  En la intersección de las dos circunferencias construidas se	**Una variante del problema:** Dados puntos fijos A y B en el plano, los puntos P(x,y) cumplen la siguiente propiedad: *La suma del cuadrado de la distancia de A a P y del doble del cuadrado de la distancia de B a P es 22.* Considerando lo anterior, si A y B tienen coordenadas (1,0) y B(3,4), respectivamente, determine la ecuación tiene dicho lugar geométrico. Grafique el lugar geométrico a partir de la ecuación obtenida. **Solución propuesta:** Similar a la dada en la pregunta anterior. Se obtiene una circunferencia de ecuación $(x\text{-}2.33)^2+(y\text{-}2.67)^2=2.89$

	encuentran puntos del lugar geométrico. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente].** 	 El número de UEI es el mismo que en el caso anterior. Sin embargo, si este problema se enuncia en un contexto sintético, para reconocer la forma del LG se debe considerar que los catetos m y n serán d(A,P) y $\sqrt{2}$ d(P,B), lo que incrementará el número de UEI en ese contexto.

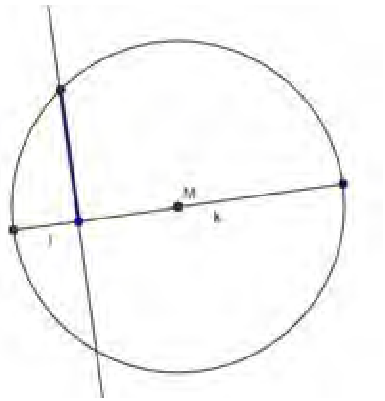
	Luego se sigue un procedimiento similar para construir otros dos puntos. Construir otro punto sobre la circunferencia de diámetro K. Con los nuevos valores de m y n, construir circunferencias centradas en A y B, respectivamente. Los puntos P3 y P4 también son parte del LG.	

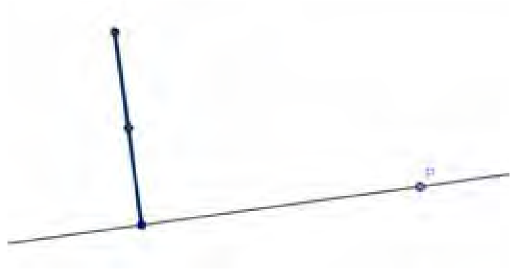
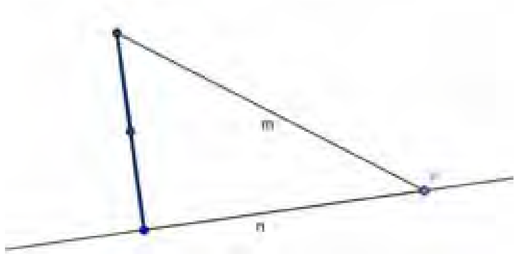
Y sobre la forma que adopta el lugar geométrico determinado por P, ésta no es evidente.



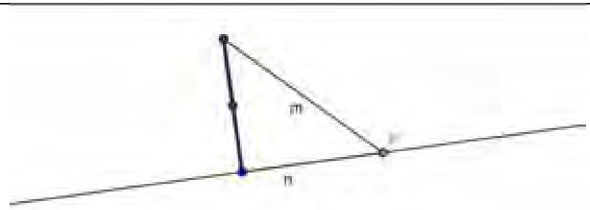
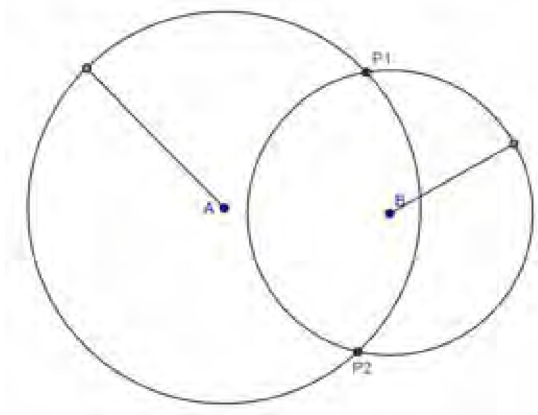
Una variante del problema:
Dados los puntos A y B y el valor constante K, construya el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma del cuadrado de la distancias de P a A y del doble del cuadrado de la distancia de P a B es K≠d^2(A,B).

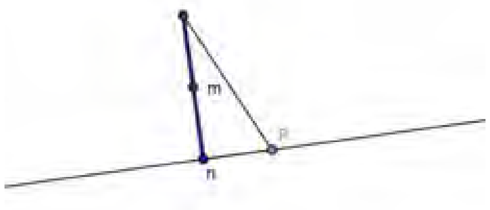
La solución sintética requiere de una construcción adicional, la construcción de $\sqrt{2}n$ a partir de *n*. Los demás pasos son similares.

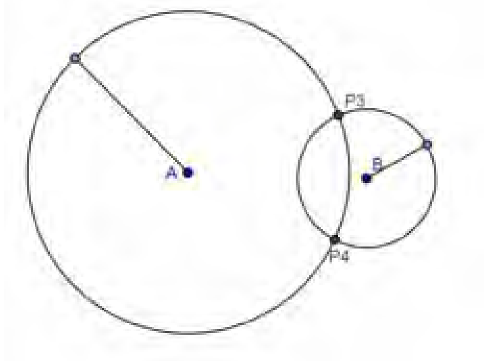
24. Cuando el dato es la diferencia de cuadrados de distancias	**Enunciado: Dados los puntos A y B y el valor constante K, construya el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es K≠d²(A,B).** **Solución propuesta:** Se construye un segmento de longitud $\sqrt{K}$  Se construye un triángulo con cateto $\sqrt{\boldsymbol{K}}$. Para ello, se traza una perpendicular al segmento de longitud K por uno de sus extremos. **[UEI: Las consideradas al construir una recta**	**Enunciado general: Dados los puntos A y B y el valor constante K, determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es conocida.** **Solución propuesta:** Se considerará un caso concreto, *A*(3,5), *B*(0,0) y *K*=10. Se denota por *P*(*x*, *y*) a los puntos del plano que cumplen la relación pedida y se plantea una ecuación que represente la condición dada. Se pueden seleccionar números *m* y *n* tales que: La condición de distancias al cuadrado se puede asociar con la condición de pertenecer a circunferencias de centros en A y B y radios *m* y *n*, respectivamente, que a su vez se asocia con satisfacer relaciones: $d^2(A,P) = (x-3)^2 + (y-5)^2 = m^2$, $d^2(B,P) = (x-0)^2 + (y-0)^2 = n^2$ **[UEI: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.] (2 veces)** Luego, la condición: $d^2(P,A) - d^2(P,B) = 100$, será equivalente a: $(x-3)^2 + (y-5)^2 - (x-0)^2 - (y-0)^2 = 100$, No es necesario interpretar los procedimientos que siguen; lo usual

	perpendicular].  Seleccionar un punto cualquiera Q sobre dicha recta. **[UEI: Construir puntos sobre un objeto dado]**  Construir un triángulo rectángulo de hipotenusa m y catetos K y n. **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].**	es simplificar la expresión anterior, e interpretar que todos los pares (x, y) que satisfacen esa ecuación forman parte de la solución. Se obtiene: $-3x-5y=33$ Reconocer que esa expresión corresponde a la ecuación de una recta y que además es perpendicular a AB. La justificación de la forma del lugar geométrico se basa en que la expresión algebraica es lineal en x e y.

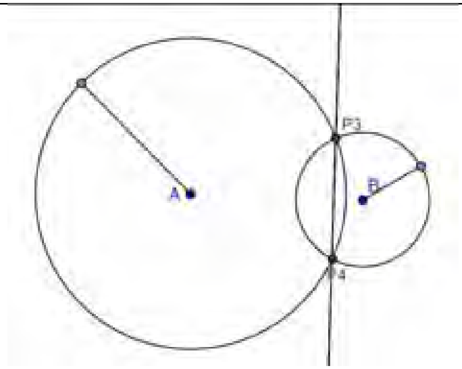
	Sea m la longitud del segmento con un extremo en el extremo de K y otro en Q. Se verifica entonces que: $m^2=K^2+n^2$. Con los segmentos de longitudes m y n se construyen circunferencias con centros en A y B y radios m y n, respectivamente. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio] (2 veces)**	

	  En la intersección de las dos circunferencias construidas se encuentran puntos del lugar geométrico. **[UEI: Construir puntos de intersección de objetos dados].** Construyendo otros puntos se tiene lo siguiente:	

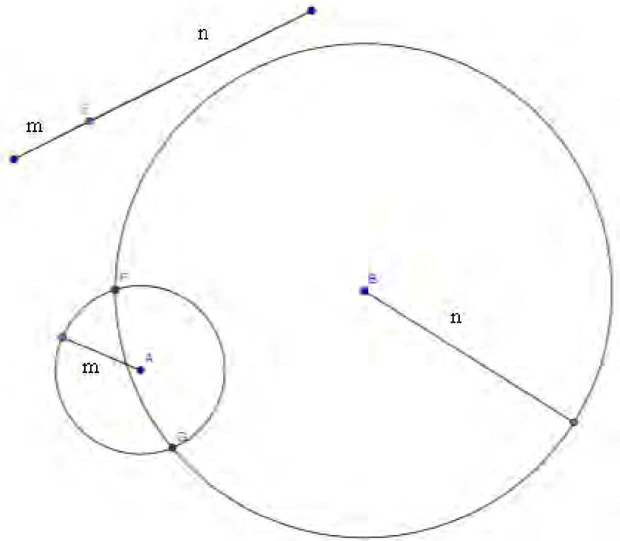
<table>
<tr>
<td></td>
<td>




El LG generado es una recta.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	 No es trivial justificar que el lugar geométrico es una recta.	

25. Cuando el dato es la suma de distancias	**Enunciado: Dados los puntos A y B y el valor constante K, construya el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de las distancias de P a cada uno de esos puntos es K.** **25.1 Con K=d(A,B)** **Solución propuesta** Construir el segmento AB, cada punto de dicho segmento es un elemento del lugar geométrico. **[UEI: Construir un segmento conociendo sus extremos]** **25.2 Con d(A;B)<K/2.** Solución propuesta: Dado el segmento de longitud K, se selecciona un punto sobre dicho segmento de modo que éste quede dividido en segmentos de longitudes m y n. **[UEI: Construir puntos sobre una recta].** Esto implica interpretar la condición de la suma de distancias como la suma de longitudes de dos segmentos. Seguir un procedimiento similar a los descritos en los casos anteriores según el cual se trasladan distancias m y n como radios de circunferencias centradas en los puntos dados, A y B, respectivamente. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su radio y centro]. (2 veces)**	**Enunciado general: Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de distancias de dichos puntos a los puntos fijos A y B es conocida** **25.1 Con K=d(A,B)** **Solución propuesta** La ecuación del segmento de extremos A y B. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso].** **25.2 Con d(A;B)<K/2.** **Ejemplo: Determinar la ecuación del lugar geométrico formado por los puntos del plano tales que la suma de distancias de dichos puntos a los puntos fijos A(4,2) y B(4,-4) es 10.** Solución propuesta: Se denota por $P(x, y)$ a los puntos del plano que cumplen la relación pedida y se plantea una ecuación que represente la condición dada. Las distancias de P a A y de P a B se representan con una expresión algebraica. **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** Luego se debe determinar una ecuación que relacione las coordenadas del punto P con los datos dados.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


En la intersección de las dos circunferencias construidas se encuentran puntos del lugar geométrico.
[UEI: Construir puntos que se encuentran en la intersección de objetos dados].
</td>
<td>
Entonces debe cumplirse que

$$d(A,P) + d(B,P) = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y+4)^2} = 10$$

Se obtiene:

$$3x + 24 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$$

$$16(y+1)^2 + 25(x-4)^2 = 400$$

Para hacer un esbozo de su gráfica, se puede proceder como sigue: determinar qué valores pueden tomar *x* e *y*, cuáles son los intervalos de crecimiento o decrecimiento, etc.
Despejar *y*:

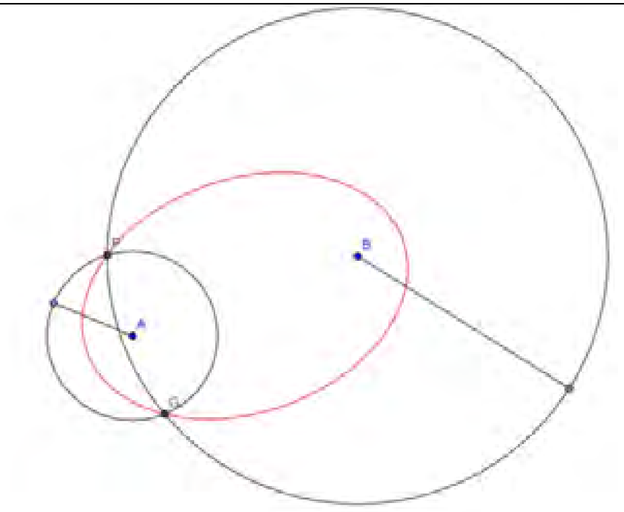
$$y = 1 \pm \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$$

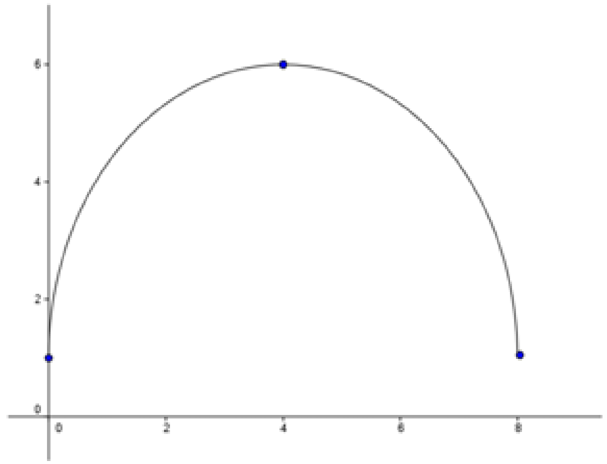
De donde se obtiene que $0 \le x \le 8$

Considerando primero sólo $y = 1 + \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$

Se tiene que cuando x=0, y=1; x=4, y=6, por tanto en ese intervalo y crece.
Se tiene también que cuando x=4, y=6; x=8, y=1, por tanto en ese intervalo y decrece.

Todas estas actividades implican interpretar los resultados
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Con regla y compás sólo se puede hallar una cantidad finita de puntos pero la curva correspondiente al LG no se puede construir de manera exacta; se trata de una elipse.</td>
<td>algebraicos en términos gráficos.


Considerando después $y = 1 - \frac{5}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}$ y realizando un análisis similar, se tendrá como un esbozo del lugar geométrico el siguiente:
Sin embargo, se debe notar que no es trivial obtener el gráfico ya que para ello se deben realizar varias conversiones entre las representaciones simbólicas y gráficas, en ambos sentidos. En ese proceso interviene una relación de dependencia para cuya comprensión se requiere desarrollar un pensamiento variacional que no se suele trabajar.</td>
</tr>
</table>

26 Cuando el dato es la diferencia de distancias	**Enunciado: Dados los puntos A y B y el valor constante K, construya el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de las distancias de P a A y de P a B es K.** **26.1 Con K=d(A,B)** **Solución propuesta** Construir la semirrecta con extremo inicial en B, en la dirección de AB y pero que no contiene a AB; cada punto de dicha semirrecta es un elemento del lugar geométrico. **[UEI: Construir una semirrecta conociendo sus extremos]** **Solución propuesta** **26.2 Con d(A;B)>K/2.** **Solución propuesta:** Dado el segmento de longitud K, se selecciona un punto sobre la prolongación de dicho segmento de modo que el nuevo segmento mida m= K+n **[UEI: Construir una recta conociendo dos puntos de paso]. [UEI: Construir un punto sobre un objeto dado].** Luego se sigue un procedimiento similar a los descritos en los casos anteriores donde se deben trasladar las distancias m y n como radios de circunferencias centradas en los puntos dados, A y B, respectivamente. **[UEI: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio] (2 veces).**	**Enunciado general: Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias de dichos puntos a los puntos fijos A y B es una cantidad conocida K.** **26.1 Con K=d(A,B)** **Solución propuesta** La ecuación de la semirrecta con extremo inicial en B, en la dirección de AB pero que no contiene a AB. **[UEI: Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso].** **26.2 Con d(A;B)>K/2.** **Ejemplo: Determinar la ecuación del lugar geométrico formado por los puntos del plano tales que la diferencia de distancias de dichos puntos a los puntos fijos A(4;2) y B(4;-4) es 4.** **Solución propuesta:** El procedimiento es esencialmente el mismo que en el caso anterior. Las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* se representan con una expresión algebraica. **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** **[UEI: Determinar una expresión cuadrática en dos variables]** Luego se debe determinar una ecuación que relacione las coordenadas del punto P con los datos dados.

	En la intersección de las dos circunferencias construidas se encuentran puntos del lugar geométrico. **[UEI: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados].** Y sobre la forma que adopta el lugar geométrico determinado por P, esto ya no es evidente pues se trata de la rama de una hipérbola. Si la condición de la diferencia de distancias se da en orden inverso, se genera la otra rama de la hipérbola. Con regla y compás sólo se puede hallar una cantidad finita de puntos pero la curva correspondiente al LG no se puede construir de manera exacta.	Sin embargo, no será trivial obtener el gráfico ya que para ello se deben realizar varias conversiones entre las representaciones simbólicas y gráficas, en ambos sentidos.

A modo de síntesis, se presentan las tablas 1. y 2. donde se indican las UEI, según tipo, que intervienen al resolver las actividades propuestas en el contexto de la geometría sintética y de geometría analítica según los procedimientos anteriores.

CONTEXTO DEL PROBLEMA: GEOMETRÍA SINTÉTICA
UEI CONSIDERADAS

UEI TIPO 1	UEI TIPO 2	UEI TIPO 3	UEI TIPO 4
Construir una recta conociendo dos puntos de paso/ Construir una recta conociendo un punto de paso y una dirección	Construir una circunferencia o un arco con centro y radio conocido.	Construir un punto sobre un objeto construido previamente	Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente.

Tabla 1. Descripción del número de UEI que intervienen al resolver las actividades propuestas en el contexto de la geometría sintética

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
1	Mediatriz	1	2		1	4
2	Punto medio	1	2		2	5
3	Perpendicular por un punto	1	3		2	6
4	Paralela en base a un paralelogramo	1	2	2	1	6
4	Paralela en base a una perpendicular	2	6		5	13
5	Distancia de un punto a una recta	2	3		3	8
6	Distancia entre dos rectas paralelas	2	3	1	3	9
7	Punto que divide a un segmento en una razón dada	4	7		7	18
8	Circuncentro	2	4		3	9
9	Bisectriz	1	3		3	7
10	Recta tangente por un punto sobre la circunferencia	2	3		2	7
11	Recta tangente por un punto exterior	4	3		3	10
12	12.1 Suma de números construibles	1	1			2
12	12.2 Diferencia de números construibles	1	1			2
12	12.3 Producto de números construibles	4	8		7	19
12	12.4 Cociente de números construibles	5	8		6	19
12	12.5 Raíz cuadrada de un número construible	3	6		6	15
13	Cuadrado cuya área coincida con la del rectángulo de lados a y b.	6	17		13	36
14	Cuadrilátero semejante a otro cuyas dimensiones se conocen	9	16		16	41
15	Triángulo conociendo la longitud de sus tres lados.		2		1	3
16	Triángulo conociendo un cateto	2	3	1	2	8

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
17	Triángulo conociendo un cateto y la hipotenusa	1	4		3	8
18	Triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los dos catetos.	2	4		3	9
19	19.1 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados				1	1
19	19.2 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados	3	9		7	19
20	Triángulo conociendo algunos elementos	4	12		10	26
21	21.1 Lugar geométrico descrito por puntos del plano que están sobre una recta dada y se encuentran a una distancia fija de un punto dado		1		1	2
21	21.2 Lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de una recta dada	3	9		7	19
22	Lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo APB sea recto en P, dados los puntos A y B.	1	3		2	6
23	Lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a cada uno de esos puntos es $K \neq d^2(A,B)$, dados los puntos A y B y el valor constante K.	3	5	1	3	12
24	Lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es K, con $K \neq d^2(A,B)$ y dados los puntos A y B y el valor constante K.	2	5	1	3	11
25	25.1 Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la suma de las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
25	25.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias de P a cada uno de esos puntos es K, con $d(A;B)<K/2$, dados los puntos A y B y el valor constante K.	1	2		1	4
26	26.1 a)Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la diferencia entre las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
26	26.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las distancias de P a A y de P a B es K, con $d(A;B)>K/2$, dados los puntos A y B y el valor constante K.	1	2	1	1	5

CONTEXTO DEL PROBLEMA: GEOMETRÍA ANALÍTICA
UES CONSIDERADAS

UEI TIPO 1	UEI TIPO 2	UEI TIPO 3	UEI TIPO 4
Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso/ Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de un punto de paso y su pendiente	Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.	Resolver una ecuación lineal o cuadrática en una variable	Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, o dos ecuaciones cuadráticas o una ecuación lineal y otra cuadrática, con dos incógnitas.

Tabla 2. Descripción del número de UEI que intervienen al resolver las actividades propuestas en el contexto de la geometría analítica

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
1	Mediatriz	1	2		1	4
2	Punto medio	1	2		2	5
3	Perpendicular por un punto	1	3		2	6
4	Paralela en base a un paralelogramo	1	2	2	1	6
4	Paralela en base a una perpendicular	2	6		4	12
5	Distancia de un punto a una recta	1	3		3	7
6	Distancia entre dos rectas paralelas	1	3	1	3	8
7	Punto que divide a un segmento en una razón dada	2			1	3
8	Circuncentro	2	4		3	9
9	Bisectriz	3	3		3	9
10	Recta tangente por un punto sobre la circunferencia	2				2
11	Recta tangente por un punto exterior	3	3		3	9
15	Triángulo conociendo la longitud de sus tres lados.		2		1	3
16	Triángulo conociendo un cateto	2	3	1	2	8
17	Triángulo conociendo un cateto y la hipotenusa	1	4		3	8
18	Triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los dos catetos.	2	4		3	9
19	19.1 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados				1	1
19	19.2 Triángulo teniendo información sobre su altura, mediana y lados	5	13	1	10	29
20	Triángulo conociendo algunos elementos	8	12	1	2	23

Nº	Actividad para construir objetos	UEI tipo 1	UEI tipo 2	UEI tipo 3	UEI tipo 4	UEI totales
21	21.1 Lugar geométrico descrito por puntos del plano que están sobre una recta dada y se encuentran a una distancia fija de un punto dado		1		1	2
21	21.2 Lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de una recta dada	3	10	1	7	21
22	Lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo APB sea recto en P, dados los puntos A y B.		2			2
23	Lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a cada uno de esos puntos es $K \neq d^2(A,B)$, dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2
24	Lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de P a A y de P a B es K, con $K \neq d^2(A,B)$ y dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2
25	25.1 Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la suma de las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
25	25.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias de P a cada uno de esos puntos es K, con d(A;B)<K/2, dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2
26	26.1 a)Un punto P tal que la distancia de A a B coincida con la diferencia entre las distancias de A a P y de B a P, considerando conocidos los puntos A y B.	1				1
26	26.2 Un punto del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las distancias de P a A y de P a B es K, con d(A;B)>K/2, dados los puntos A y B y el valor constante K.		2			2