RESUMEN:

Este trabajo intenta dar una visión de la Historia de la Geometría euclidiana como herramienta para el proceso de enseñanza-aprendizaje en Educación Primaria. A través del conocimiento de la Historia de la Geometría el profesorado puede adquirir referencias y problemas que ayuden al alumnado a entender los procesos y conceptos matemáticos derivados del deseo de conocer y comprender el mundo que los rodeaba.

Haremos un recorrido desde Mesopotamia y Egipto hasta finales del siglo III a.C, deteniéndonos en los *Elementos* de Euclides que presentan una síntesis y recopilación de todos los conocimientos que, sobre geometría, se tenían hasta el momento y cómo éstos influyeron en las obras de matemáticos posteriores.

La última parte muestra actividades que hacen referencia a algunos problemas y anécdotas de la Historia de la Geometría y que, bajo la supervisión del profesorado, pueden ser realizadas por el alumnado de Educación Primaria.

PALABRAS CLAVE:

Geometría, Elementos, exhausción, historia, proporción.

ABSTRACT:

This document tries to give a vision about History of Euclidean Geometry, as a primary school tool for learning and teaching process. Knowing History of Geometry, teachers can acquire some mentions and history problems that help pupils to understand the processes and items motivated by the desire of environment knowledge and comprehension.

We make a trip since Mesopotamia and Egypt until the end of the third century b.C. stopping off Euclid's *Elements* books that summarize and compile all the Geometry knowledge they had by that moment and how it influenced later mathematicians' jobs.

The last part of this document suggests some primary school pupil activities for being carried out under teachers' direction with reference to some History of Geometry problems and anecdotes.

KEYWORDS:

Geometry, Elements, exhaustion, History, proportion,

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN

Con su historia se trata básicamente de humanizar la Geometría, de contextualizarla, máxime en una etapa educativa organizada en áreas con un marcado carácter global e integrador, como lo es la Educación Primaria. El conocimiento de las vidas y las obras de quienes la crearon es un estímulo para los alumnos y alumnas, así como una forma de introducirlos al estudio de la Geometría desde un "por qué", "para qué sirve", que tanto echan de menos y cuya ausencia tanto dificulta el gusto por la matemática.

La Geometría es tan antigua como la humanidad y ha acompañado al ser humano a lo largo de toda su historia: los babilonios y egipcios ya la utilizaban tanto en la resolución de problemas aplicados a la vida diaria como en la creación artística. Fue posteriormente, en Grecia, donde la Geometría se transforma en una ciencia que se estructura con un razonamiento lógico-deductivo, primero como herramienta para solucionar los tres problemas clásicos (duplicación del cubo, cuadratura del círculo y trisección del ángulo), después empleando definiciones y teoremas mediante los que se ha desarrollado la Geometría considerándola como una ciencia formativa que ayudaba al ser humano a razonar, estudiándola como desarrollo de la mente humana.

La gran obra euclidiana no sólo constituyó una síntesis completa del conocimiento geométrico alcanzado hasta aquel momento, sino que ofrece una magnífica presentación ordenada del saber geométrico a través de una secuencia lógica coherente, en un alarde de rigor deductivo.

El aprendizaje de la Geometría de nuestro alumnado recapitula, de alguna forma, el mismo aprendizaje que ha realizado la humanidad. El profesorado debe tomar conciencia de las dificultades que ha costado adquirir determinados conceptos para entender algunas de las dificultades que encuentran sus alumnos y alumnas. Leyendo las biografías de los grandes matemáticos y tratando de resolver sus mismos problemas se darán cuenta de que se ilusionaban, dudaban, sufrían y se esforzaban por conseguir un fin, los verán mucho más cercanos y comprenderán que sus progresos son el fruto de su esfuerzo, perderán el miedo a cometer errores y se verán invitados a descubrir y construir las matemáticas.

Tomando como referencia la obra "Elementos" de Euclides, haré un breve recorrido, desde la prehistoria y las civilizaciones mesopotámica y egipcia, por algunos de los matemáticos que contribuyeron, con sus conocimientos y descubrimientos a la confección de la síntesis euclidiana, analizando sus aportaciones a la geometría y presentando brevemente su obra y vida, para finalizar con aquellos otros posteriores cronológicamente a Euclides que, a partir de su obra, ampliaron, hicieron nuevos descubrimientos y propusieron diferentes soluciones. A continuación, mostraré algunas actividades aplicadas al aula que toman como referencia los contenidos históricos tratados.

2.- OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Mostrar la Historia de la Geometría como parte fundamental de la cultura humana y como herramienta para el aprendizaje de la Geometría en la etapa de Educación Primaria.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Demostrar que las matemáticas son una ciencia cambiante, en desarrollo y que resuelve, a lo largo de la historia, los problemas de su tiempo.
- Estudiar la figura de Euclides y sus aportaciones a la Geometría. Profundizar en las aportaciones de algunos predecesores a los *Elementos*.
- Fomentar la presencia de la Geometría en otros ámbitos de estudio como competencia necesaria para la adquisición de nuevos aprendizajes.
- Contribuir al desarrollo de la capacidad de analizar e interpretar la realidad que los rodea.
- Proponer actividades que impliquen la aplicación de los conocimientos históricos en su resolución.

3.- JUSTIFICACIÓN

El hecho de mostrar a los alumnos y alumnas de qué modo se fueron construyendo los conceptos geométricos y de presentar a sus creadores (cosa que se hace habitualmente en otras áreas, por ejemplo ciencias sociales, ciencias de la naturaleza, literatura…) muestra a la Geometría tal cual es: un producto de la actividad humana que se formó a partir de diferentes estímulos, en ocasiones para resolver problemas prácticos y otras veces por motivos de orden artístico o espiritual y para resolver otros problemas que surgían dentro de la propia Geometría. De hecho, la propia palabra "geometría" deriva del griego geo "tierra" y metrein "medir" a modo de descripción del trabajo de medir los tamaños de los campos o trazar ángulos rectos para la construcción de las pirámides, por ejemplo. Puede servir también para presentar las matemáticas como uno de los campos en los que se manifiesta una de las características más importantes de la cultura humana: la cooperación. Los descubrimientos no son fruto, en general, de personas aisladas sino que son el resultado de un proceso de preguntas y respuestas, errores, tanteos, etc. De igual forma los alumnos y alumnas descubrirán el valor del trabajo cooperativo en la resolución de los problemas propuestos.

Jean-Paul Collette (1991) justifica recurrir a la historia como garantía de una enseñanza mejor, pues implica la adquisición de nuevas y atractivas perspectivas que ilustran al profesorado sobre la naturaleza altamente abstracta de las matemáticas e le incitan a recurrir a la historia para enseñar los conceptos matemáticos correspondientes.

Miguel de Guzman (1992) lo expone de la siguiente forma:

A mi parecer, un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel (…) en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de la cual suele estar también el matemático muy necesitado.

> La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. (…)
> La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas. (p.15)

Pedro Puig Adam (1955) propone un decálogo, sugerencias didácticas, para la enseñanza de las matemáticas, de entre las que destacamos aquí "no olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución" pues la finalidad educativa de la Matemática (y por extensión de la Geometría) no debe limitarse meramente al desarrollo del razonamiento lógico abstracto: la Geometría ha tenido su primitivo origen histórico en procesos de abstracción derivados del mundo real. Estos primeros matemáticos aplicaban sus conocimientos a la resolución de los problemas que dicho mundo le presentaba. Citando nuevamente a Puig Adam, "Los procesos genéticos del pensamiento matemático están lo suficientemente vinculados a su evolución histórica para que no nos olvidemos de dicha génesis y evolución".

Uno de los estudiosos de la importancia de la historia de las matemáticas en la educación, J. Fauvel, en el artículo "Using history in mathematics" (1991) cita una serie de líneas posibles de actuación por parte de los docentes:

- Presentar introducciones históricas de conceptos nuevos.
- Trabajar con posters, exposiciones u otros proyectos con trasfondo histórico.
- Estructurar los temas de acuerdo con su desarrollo histórico.
- Comprender problemas históricos cuya solución ha dado lugar a diferentes conceptos matemáticos.
- Mencionar anécdotas.
- Ilustrar técnicas y métodos de resolución con situaciones históricas.
- Proponer ejercicios similares a los propuestos en textos históricos.

La aplicación de la Historia de la Geometría Euclidiana en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la etapa de Educación Primaria exige a los estudiantes del Título de Grado Maestro –o Maestra– en Educación Primaria alcanzar una serie de objetivos, acorde con las Competencias Generales del Título de Grado, recogidas por el Real Decreto 1393/2007, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias, entre los que destacamos:

- Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza-aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales.
- Fomentar la lectura y el comentario crítico de textos de los diversos dominios científicos y culturales contenidos en el currículo escolar.
- Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los estudiantes.

Así mismo, este trabajo contribuye al desarrollo de las siguientes competencias generales:

- Ser capaz de reconocer, planificar, llevar a cabo y valorar buenas prácticas de enseñanza-aprendizaje.
- Ser capaz de integrar la información y los conocimientos necesarios para resolver problemas educativos, principalmente mediante procedimientos colaborativos.

En lo que se refiere a la **materia específica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**, el presente trabajo justifica razonadamente el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitiendo juicios bien fundamentados. Esta competencia se concreta en el desarrollo de habilidades que forman a la persona titulada para:

a. Adquirir competencias matemáticas básicas (geométricas y de representación espacial)
b. Analizar, razonar y comunicar la propuesta matemática de inclusión de la Historia de la Geometría en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
c. Plantear y resolver problemas geométricos de la vida cotidiana.
d. Valorar la relación entre la geometría y las ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.

4.- HISTORIA DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

4.1. LA GEOMETRÍA EN LA PREHISTORIA, MESOPOTAMIA Y EGIPTO

PREHISTORIA

Los orígenes de la Geometría son más antiguos que el arte de la escritura. Heródoto y Aristóteles no querían arriesgarse a situar los orígenes de la Geometría en una época anterior a la de la civilización egipcia, pero está claro que la Geometría en la que ellos pensaban tenía sus raíces en una antigüedad mucho mayor. Herodoto sostenía que la geometría se había originado en Egipto, porque creía que dicha materia había surgido allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del Nilo.

Sin embargo, los dibujos y diseños en la alfarería, la cestería y los tejidos del hombre del neolítico revelan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría: muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental. No hay documentos disponibles de la época prehistórica, y por lo tanto es imposible seguir la pista a la evolución de la matemática de un diseño concreto a un teorema conocido.

Figura 1

MESOPOTAMIA

En 1936 se desenterró una colección de tablillas procedentes de Susa, a unos 300 km al este de Babilonia, en las que se comparan las áreas y cuadrados de los lados de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 7 lados.

Dentro de la cultura mesopotámica ya sabían que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto (figura 2), cosa que no conocían los egipcios.

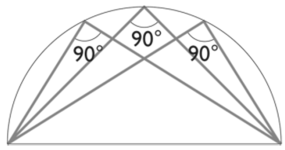


Figura 2

Junto al cálculo de áreas de los campos aparecen cálculos de los rendimientos totales de los terrenos, trataron cuestiones de proporcionalidad en el triángulo. En general π fue aproximado por 3, aunque en las tablillas de Susa aparece como razón del perímetro del hexágono regular a la circunferencia circunscrita: $3\frac{1}{8}$.

Conocían también el teorema de Pitágoras, al menos en cuanto a su contenido, que en los primeros tiempos se empleaba tan solo en problemas concretos como: una viga de longitud (…) apoyada en una pared o similar, se desliza en (…) unidades en el extremo superior. ¿Cuánto se ha alejado el extremo inferior de la pared? (figura 3)

Figura 3

El problema de determinar triángulos rectángulos cuyos lados fueran de longitud racional condujo al problema homólogo de encontrar tripletas numéricas. En este sentido quizás la más famosa de las tablillas mesopotámicas sea la tablilla Plimpton 322 que se conserva en la Universidad de Columbia, en la que aparece la primera relación de ternas pitagóricas, es decir tres números naturales que cumplen que $a^2+b^2 = c^2$ de la que se tenga conocimiento (figura 4)

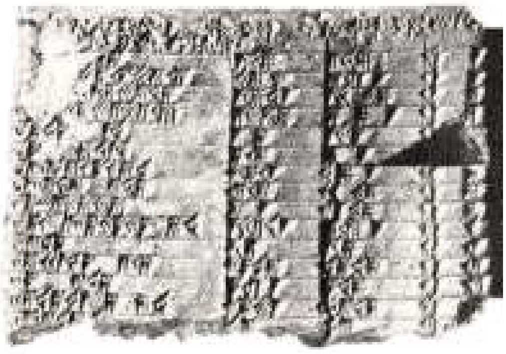


Figura 4

En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que está dibujado un triángulo rectángulo ABC (figura 5) de lados a=60, b=45 y c=75, subdividido en cuatro triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, cuyas áreas eran conocidas y a partir de cuyos valores el escriba calcula la longitud de AD utilizando aparentemente un tipo de "fórmula de semejanza" que viene a ser equivalente a nuestro teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes.

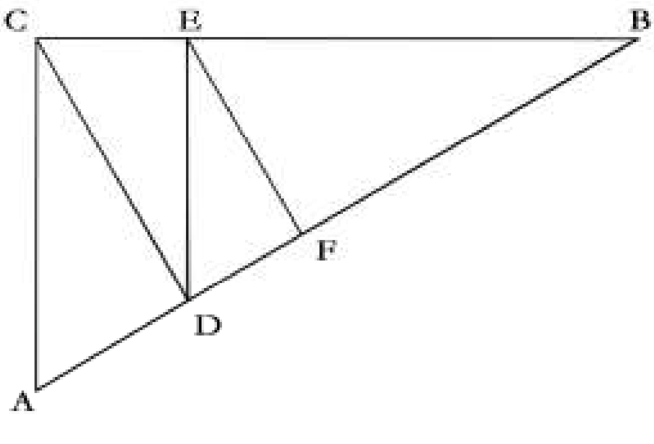


Figura 5

EGIPTO

El más antiguo de esos viejos manuscritos egipcios de los que se han descubierto hasta ahora lo escribió hacia el año 1700 a.C. un sacerdote llamado Ahmes. El manuscrito original se conserva en el museo Británico y se le conoce además de con el nombre de "Papiro de Ahmes" con el de "Papiro Rhind" por ser este el anticuario que lo compró en 1858. En el constan una colección de reglas y problemas con sus respuestas, que tratan de cuestiones aritméticas y de la medida de varias figuras geométricas (figura 6).

Figura 6

Algunos de estos problemas de los que se habla en el papiro de Rhind son:

a) Calcular el área de un triángulo isósceles, tomando la mitad de lo que nosotros llamaríamos base y multiplicarlo por la altura.

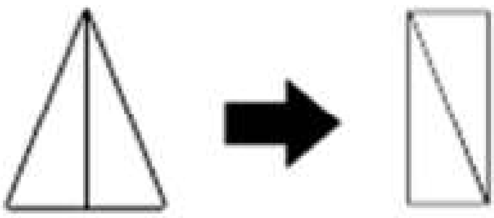


Figura 7: El área del triángulo isósceles es igual al área del rectángulo formado por sus dos mitades.

b) Conocían el teorema de Pitágoras para triángulos particulares, como el de lados 3, 4 y 5, que utilizaban para trazar ángulos rectos en el terreno.

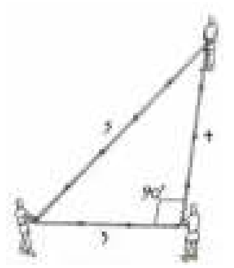


Figura 8: Ingenio egipcio; como adelantarse a Pitágoras haciendo 12 nudos

c) Calculaban el área de un círculo a través de un octógono a partir de un cuadrado de lado nueve unidades, dividiendo cada parte en tres partes iguales y suprimiendo los cuatro triángulos isósceles de las esquinas.

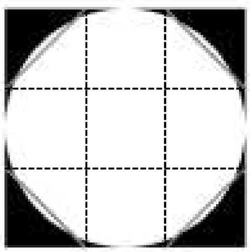
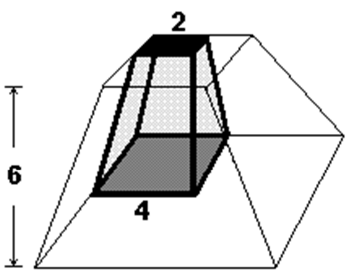


Figura 9: Cálculo del área de un círculo en el antiguo Egipto

Otro documento importante desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos de los egipcios es el "Papiro de Moscú" que fue escrito hacia el año 1890 a.C.. Entre los 25 problemas que contiene destaca el número 14 en el que aparece una figura que parece representar un trapecio isósceles; pero los cálculos asociados con esta figura indican que en realidad se trata de un tronco de pirámide cuadrangular. Las instrucciones que va dando el escriba para calcular su volumen equivalen a la fórmula moderna (figura 10). El escriba egipcio expone los pasos: eleva al cuadrado 2 y 4 (t^2, b^2), multiplica 2 por 4 (tb), suma los anteriores resultados ($t^2 + b^2 + tb$), y multiplica por un tercio de 6 (h/3); finaliza diciendo: «ves, es 56, lo has calculado correctamente».



$$V = h\,(t^2 + bt + b^2)\,/\,3$$

Figura 10

Vamos a dar un paso muy importante en la Historia de la Geometría al aparecer las primeras demostraciones. Anteriormente todos los papiros egipcios así como las tablillas que han llegado hasta nosotros contienen sólo problemas concretos y casos particulares, sin ningún tipo de formulación general. No se encuentra ninguna afirmación explícita que nos indique que se sintió la necesidad de demostraciones propiamente dichas, ni que demuestre ningún tipo de interés por las cuestiones relativas a los principios lógicos.

4.2. EUCLIDES DE ALEJANDRÍA (SIGLO III a.C.)

La ciudad de Alejandría, en el delta del Nilo, era, desde un punto de vista geográfico, el lugar de reunión adecuado para griegos, árabes y judíos. Allí se conservó, en la gran Biblioteca, lo más extraordinario de la filosofía griega; se perfeccionaron las matemáticas de los antiguos, y el genio intelectual de los griegos entró en contacto vivo con el desarrollo moral e intelectual de los judíos.

Fue aquí donde Ptolomeo creó la Biblioteca y fundó la Universidad, entre cuyos primeros maestros se encontraba Euclides en torno al año 300 a.C. Aunque de la vida de Euclides se conoce poco, se considera muy probable que pasara en Atenas sus años de instrucción, hasta aceptar la invitación de Ptolomeo para que enseñara en Alejandría.

Se nos ha transmitido la imagen de un hombre de estudio genial, modesto y escrupulosamente honrado, siempre dado a reconocer el trabajo original de otros y visiblemente amable y paciente. Uno que había empezado a estudiar geometría con Euclides preguntó al aprender el primer teorema "¿qué ganaré aprendiendo estas cosas?", Euclides llamó a un esclavo y dijo: "dale tres monedas, puesto que debe sacar algún beneficio de lo que aprende". También se dice que uno de sus discípulos fue el joven príncipe Ptolomeo, hijo del rey Ptolomeo de Egipto, y que en una ocasión, el príncipe le preguntó a su maestro si no había una manera corta y fácil de aprender geometría, a cuya pregunta Euclides contestó: "Oh, príncipe, no hay camino real que conduzca a la geometría".

Durante más de treinta años enseñó Euclides en la Universidad Ptolemaica de Alejandría, construyendo, entre otros muy notables trabajos, sus famosos *Elementos*. La doctrina enseñada por Euclides produjo excelentes discípulos, como Arquímedes y Apolonio de Perga.

Lo más importante de la obra matemática que realizaron los autores del periodo clásico ha llegado afortunadamente hasta nosotros en los escritos de Euclides, quien estructuró los descubrimientos dispares de los griegos clásicos, como puede comprobarse comparando el contenido de sus libros con los fragmentos que nos han llegado de trabajos más antiguos; constituyen así los *Elementos* tanto una historia matemática de la época precedente como el desarrollo lógico de una teoría.

Figura 11: Fragmento de los Elementos de Euclides (yacimiento de Oxirrinco, Egipto)

En los *Elementos*, Euclides comenzó a escribir una descripción exhaustiva de las matemáticas, tarea colosal aún en su tiempo. La obra estaba formada por trece libros. Los libros I, II, IV y VI sobre líneas, áreas y figuras planas, son en su mayor parte pitagóricos, mientras que el libro III, sobre círculos, sigue a Hipócrates. El libro V elabora el trabajo de Eudoxo sobre proporciones, que era necesario para justificar las propiedades de las figuras semejantes de que se habla en el libro VI. Los libros VII, VIII y IX tratan sobre la teoría de los números, su divisibilidad, los números primos, cuadrados y cúbicos… y el libro X está dedicado exclusivamente a los números irracionales (denominados inconmensurables por los antiguos griegos). El libro XI es sobre geometría elemental del espacio y en el XII se demuestra formalmente el teorema de Hipócrates para el área de un círculo. En el libro XIII proporciona y demuestra las construcciones de los cinco cuerpos geométricos regulares de Pitágoras.

Los *Elementos* es la obra geométrica maestra de Euclides, y ofrece un tratamiento definitivo de la geometría de dos dimensiones (el plano) y tres dimensiones (el espacio). Los trece libros se persiguen unos a otros en una secuencia lógica. Para los matemáticos modernos lo más interesante en la geometría de Euclides no es su contenido, sino su estructura lógica. A diferencia de sus predecesores, Euclides no se limita a afirmar que un teorema es verdadero. Él ofrece una demostración.

No obstante, si los *Elementos* hubieran tratado de ser un depósito de información exhaustivo, el autor habría incluido probablemente referencias a otros autores, información acerca de las investigaciones recientes y explicaciones informales, pero tal como están escritos, los *Elementos* se limitan austeramente al asunto de que se trata, la exposición en un orden lógico de los fundamentos de la matemática elemental.

Euclides mismo no formuló ninguna pretensión de originalidad, y está claro que debió hacer abundante uso de las obras de sus predecesores, pero se cree que la ordenación final es suya propia y presumiblemente algunas de las demostraciones se deben también a él, pero a parte de esto es difícil estimar el grado de originalidad que hay en esta obra matemática, la más famosa de la Historia (después de la Biblia, *Elementos* es el libro más editado).

<table>
<tr><th>Libro</th><th>Contenido</th><th>Matemáticos</th></tr>
<tr><td>I</td><td>Del punto hasta el teorema de Pitágoras</td><td rowspan="2">Tales
Pitágoras</td></tr>
<tr><td>II</td><td>Álgebra geométrica</td></tr>
<tr><td>III</td><td>Teoría del círculo</td><td rowspan="2">Hipócrates</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>Polígonos regulares inscritos y circunscritos</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Extensión de la teoría de las magnitudes a los irracionales</td><td>Pitágoras
Eudoxo</td></tr>
<tr><td>VI</td><td>Proporciones, aplicación a la planimetría</td><td></td></tr>
<tr><td>VII</td><td>Teoría de la divisibilidad, números primos</td><td rowspan="3">Pitágoras</td></tr>
<tr><td>VIII</td><td>Números cuadrados y cúbicos, series geométricas</td></tr>
<tr><td>IX</td><td>Teoría de lo par y lo impar</td></tr>
<tr><td>X</td><td>Clases de irracionales cuadráticos. Anexión de áreas</td><td></td></tr>
<tr><td>XI</td><td>Estereometría elemental</td><td rowspan="3">Pitágoras
Hipócrates
Eudoxo
Apolonio</td></tr>
<tr><td>XII</td><td>Método de exhaución: pirámide, cono, esfera.</td></tr>
<tr><td>XIII</td><td>Poliedros regulares</td></tr>
</table>

Figura 12: Contenidos de los *Elementos* de Euclides

El **libro I** empieza presentando 23 definiciones seguidas de 5 postulados y 5 nociones comunes:

1. Un punto es lo que no tiene partes.

2. Una línea es una longitud sin anchura.

3. Los extremos de las líneas son puntos.

4. La línea recta es una línea que está igualmente situada entre sus puntos.

5. Una superficie es lo que tiene únicamente longitud y anchura.

6. Los extremos de una superficie son líneas.

7. Una superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.

8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se tocan en un plano y que no están situadas sobre una misma línea recta.

9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.

10. Si una recta levantada sobre otra determina dos ángulos adyacentes iguales, cada uno de estos ángulos iguales es recto; y la recta situada encima se dice perpendicular a aquella sobre la que se encuentra.

11. Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.

12. Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.

13. Un límite es lo que es el extremo de algo.

14. Una figura es lo que está comprendido entre uno o varios límites.

15. Un círculo es una figura plana, limitada por una sola línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde uno de los puntos interiores de la figura son iguales entre sí.

16. Y el punto se llama centro del círculo.

17. El diámetro del círculo es una recta trazada a través del centro y limitada a ambos lados por la circunferencia del círculo. Esta recta divide al círculo en dos partes iguales.

18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia cortada por él. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

19. Las figuras rectilíneas son las que están contenidas entre dos líneas rectas, las figuras trilaterales las contenidas entre tres, las cuadrilaterales las contenidas entre cuatro y las multilaterales las contenidas entre más de cuatro.

20. De los triángulos, el equilátero es el que tiene los tres lados iguales, isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual; y el escaleno el que tiene los tres lados desiguales.

21. De los triángulos, triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso y acutángulo el que tiene los tres ángulos agudos.

22. De los cuadriláteros, cuadrado es el que tiene los lados iguales y los ángulos rectos; rectángulo el que es rectangular pero no equilátero; rombo el que es equilátero, pero no tiene los ángulos rectos; y romboide el que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, pero ni es equilátero ni tiene los ángulos rectos. Los otros cuadriláteros se llaman trapecios.

23. Rectas paralelas son rectas situadas en el mismo plano que , al ser prolongadas a un lado y a otro no se encuentran en ninguno de los dos.

Los cinco postulados son:

1. Por dos puntos diferentes pasa una sola recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado.
3. Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos, las dos rectas, suficientemente alargadas, se cortarán en el mismo lado.

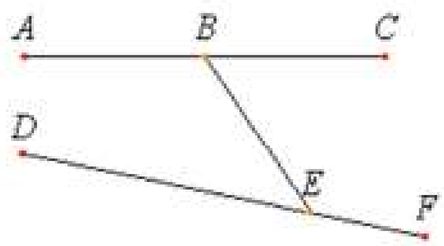


Figura 13

Las cinco nociones comunes válidas no solamente para la geometría sino para todas las ciencias y disciplinas:

1. Las cosas que son iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si iguales son sumados a iguales, los totales son iguales.

3. Si iguales son sustraídos de iguales, los restos son iguales.

4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

5. El todo es mayor que la parte.

En el **libro II** aparecen, demostradas de modo geométrico, la propiedad distributiva de la suma y el producto de la suma por la diferencia como diferencia de cuadrados:

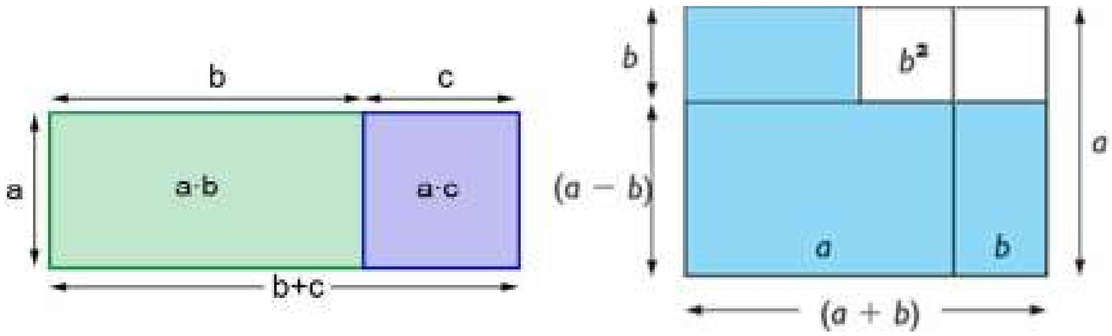


Figura 14: $a(b+c) = ab + ac$; $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

4.3. TALES DE MILETO (aprox. 640 – 550 a.C.)

La proposición que ahora conocemos como teorema de Tales, es decir, la de que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto, muy bien la pudo aprender Tales durante sus viajes a Babilonia, pero la tradición va más lejos, no obstante, y le atribuye algún tipo de demostración de este teorema. Esta tradición o leyenda se vio adornada al añadirse a este teorema otros cuatro de los que también se dice que fueron demostrados por Tales:

1. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.

2. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.

3. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas, son iguales.

4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Aunque Euclides no se refiere explícitamente a Tales, estos teoremas están recogidos, también, en sus *Elementos*, si bien se adjudica a Proclo (410-485) la tradición de atribuir estos teoremas a Tales en las primeras páginas de su *Comentario sobre el Primer Libro de los Elementos de Euclides*.

Estadista, comerciante, ingeniero, astrónomo, filósofo y matemático, hombre sumamente interesante y polifacético, que ya en la antigüedad era considerado uno de los siete sabios. Su labor de comerciante durante la primera época de su vida le proporcionó una fortuna considerable que le permitió dedicar el resto de su vida a estudiar y a viajar. Pasó algún tiempo en Egipto, y este contacto con los egipcios le familiarizó con la astronomía y las matemáticas egipcias. El historiador Herodoto relata la predicción por Tales de un eclipse de sol ocurrido en el año 585 a.C.

Numerosas leyendas rodean la vida de Tales y, lo menos que ellas se puede decir, es que son muy expresivas y bien recibidas. Un día que conducía una caravana, un mulo cargado de sal cayó al agua al pasar por un vado. Al salir del agua, el mulo sintió que su carga era más ligera. Así, en el vado siguiente, se tiró voluntariamente al agua para experimentar una vez más una disminución de la carga. Para curarle de este vicio, Tales hizo que le cargasen de esponjas. Cuando el mulo quiso satisfacer su pequeño capricho, tuvo una mala idea, ya que, su carga, en vez de aligerarse se convirtió en un peso aplastante.

Se cuenta también la siguiente historia: irritado por las observaciones de algunos de sus conciudadanos sobre su sabiduría, que no le había proporcionado riqueza, quiso demostrar que podía, fácil y rápidamente, hacerse rico; consiguió, en el momento en que juzgó que la cosecha de aceitunas sería muy abundante, hacerse con el control absoluto de los lagares de aceitunas de su país y, así, pudo imponer el precio que quiso a los que tenían que utilizar sus prensas; de esta manera hizo fortuna en una sola temporada. Después, una vez probado su punto de vista, abandonó sus negocios y volvió a sus ocupaciones de orden filosófico y matemático.

En lo referente a la proporcionalidad Diógenes Laercio, seguido por Plinio y Plutarco, nos cuentan que Tales midió las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura (figura 15)

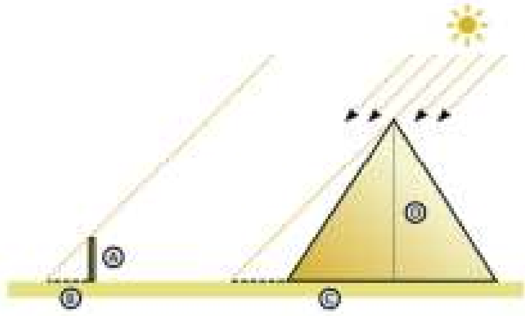


Figura 15: $\frac{D}{C} = \frac{A}{B} = 1$

Esta historia, así como aquella en la que calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de triángulos semejantes no nos permite asegurar la originalidad de Tales, porque los principios en que se basa tal cálculo eran conocidos ya desde antiguo en Egipto y en Mesopotamia. Estas historias no nos permiten zanjar la atrevida conjetura de que Tales fuera el creador de la geometría deductiva, pero en cualquier caso sí podemos decir que Tales es el primer hombre en la historia al que se le han atribuido descubrimientos matemáticos concretos.

4.4. PITÁGORAS DE SAMOS Y SU ESCUELA (569 – 500 a.C.)

Pitágoras nació en la isla de Samos, situada muy cerca de Mileto, donde vivía Tales. Tenía unos cincuenta años menos que Tales y en ocasiones se admite que fue alumno suyo, aunque es improbable que se diera tal circunstancia en vista de la diferencia de edad.

Después de numerosos viajes (Egipto, Babilonia e incluso posiblemente la India), volvió a su isla natal que se encontraba bajo la dominación del tirano Polícrates; decidió entonces fijar su residencia en la Magna Grecia (sur de Italia), más exactamente en Crotona. Allí fundó la escuela pitagórica que se regía por un código de conducta muy estricto. A sus miembros se les imponía un severo régimen vegetariano, al parecer debido a que el pitagorismo aceptaba la transmigración de las almas, con el resultado de que no debería ser sacrificado ningún animal ante el temor de que pudiera ser la morada del alma de un amigo muerto.

Se dice que Pitágoras impartía dos tipos de enseñanza distintos, uno solamente para los miembros de la orden o escuela y el otro para el resto de la comunidad ciudadana y podemos suponer que donde presentaba Pitágoras cualquier tipo de contribución a la matemática que pudiera haber hecho, era en las lecciones de la primera categoría. A su cátedra acudía una muchedumbre de auditores de todas las clases, incluso las mujeres infringían una ley que les prohibía asistir a reuniones públicas y acudían a oírle. Entre las más atentas se encontraba Theano, la joven y hermosa hija de su huésped Milo, con la cual se casó y que escribió su biografía, pero desgraciadamente se ha perdido, como también se perdió la que escribió de él Aristóteles.

Los miembros de la sociedad lo compartían todo, sostenían las mismas creencias filosóficas, se dedicaban a las mismas investigaciones y se comprometían con un juramento de no revelar los secretos y las enseñanzas de la escuela. La estrella pentagonal fue un símbolo distintivo de la hermandad y el lema era "todo es número". No podemos estar completamente seguros de la paternidad de cada teorema particular, puesto que entre los miembros de la hermandad existía la práctica generosa de atribuir toda autoridad sobre cada nuevo descubrimiento al mismo Pitágoras. Pero, en todo caso, la suya fue la influencia dominante en las matemáticas que estamos describiendo.

Los datos sobre la geometría pitagórica de la primera época son muy inciertos. Pitágoras pudo haber conocido la base del teorema que lleva su nombre en Babilonia o Egipto; una demostración podría proceder de él.

4.4.1. El teorema de Pitágoras

Este teorema era conocido, como hemos visto, en Mesopotamia y Egipto, mucho antes de los tiempos de Pitágoras. Existe una cantidad muy numerosa de demostraciones del teorema de Pitágoras, pero quizás la más famosa es la que aparece en los *Elementos* de Euclides. La idea es dividir el cuadrado mayor en dos partes de forma que cada parte sea igual al área de los cuadrados pequeños.

Demostraremos primero que el área del rectángulo A'A"BM es igual al área del cuadrado ABPQ. Comencemos viendo que los triángulos ABM y CBP son congruentes (iguales). Esto es cierto porque:

a) Los ángulos obtusos de ABM y CBP son iguales.

b) El lado AB de ABM es igual al lado BP de CBP.

c) El lado BM de ABM es igual al lado CB de CBP.

Es decir, los triángulos tienen dos lados iguales e igual al ángulo comprendido

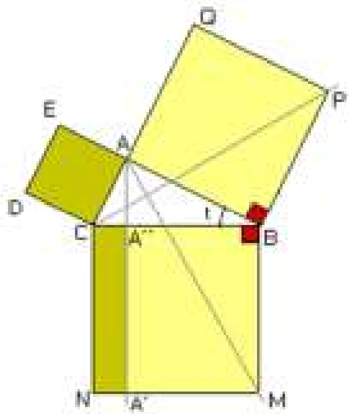


Figura 16: Demostración del teorema de Pitágoras

Ahora bien, el triángulo ABM tiene un área igual a la mitad del rectángulo A'A''BM porque tienen la misma base y altura (para verlo tomar BM como base). Asimismo, el área del triángulo CBP es la mitad de la del cuadrado ABPQ por la misma razón (tomar BP como base). Como los dos triángulos son iguales, el rectángulo y el cuadrado también lo son. De forma análoga se procede con el rectángulo y el cuadrado de la izquierda y el teorema queda demostrado.

Otra forma de demostrar el teorema de Pitágoras, atribuida a él mismo, es la que se muestra en la figura 17:

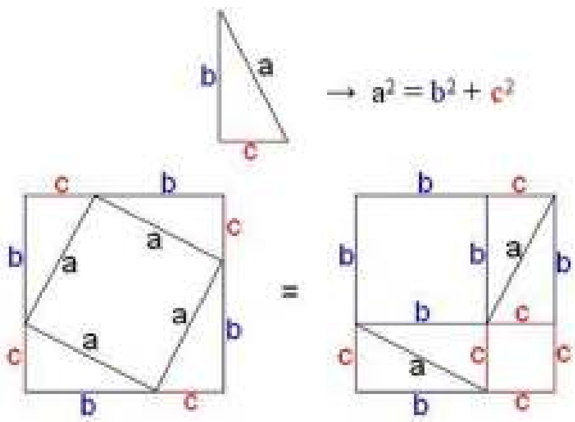


Figura 17: Demostración del teorema de Pitágoras

Con esta misma figura también podemos demostrar la fórmula $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$

4.4.2. La teoría de las proporciones

Se atribuye a Pitágoras dos descubrimientos matemáticos concretos: la construcción de los poliedros regulares y la teoría de las proporciones. Se cree que los pitagóricos poseían una teoría de la proporción, esto es, de la igualdad entre dos razones, para magnitudes conmensurables: razones expresables como cociente entre dos números enteros. Aunque no conocemos los detalles de tal teoría cabe suponer que se aplicaba a ciertas proposiciones sobre semejanzas de triángulos que el propio Pitágoras pudo aprender en Mesopotamia. No obstante, el libro V de Euclides, extiende la teoría de las proporciones a razones inconmensurables (expresadas mediante números irracionales) solucionando el problema de los pitagóricos para quienes únicamente los números enteros tenían cabida y que descubrieron que algunas razones, por ejemplo, la razón de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles a un cateto o, lo que es lo mismo, la diagonal al lado de un cuadrado, no podían expresarse por medio de números enteros.

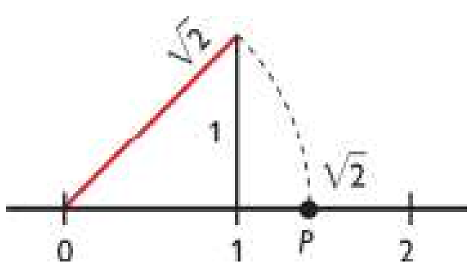


Figura 18

Dice la leyenda que este descubrimiento lo efectuó un pitagórico llamado **Hipaso de Metaponto**, al cual no se le ocurrió mejor idea que revelar este secreto durante un trayecto en barco. A parte de la mala propaganda que esto suponía para la comunidad pitagórica (puesto que el lema de los pitagóricos "todo es número" quedaba anulado ante esta proposición) sus miembros tenían prohibido revelar nada de lo que se dijese o sucediese dentro de la comunidad y en castigo lo tiraron al mar.

La demostración clásica de la inconmensurabilidad (irracionalidad) de la $\sqrt{2}$ usa lo que los matemáticos llaman "reducción al absurdo", es decir, comenzaremos suponiendo que $\sqrt{2}$ no es irracional y acabaremos en algo contradictorio. Si no es irracional debe ser obligatoriamente igual a una fracción así: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Podemos suponer sin ningún problema que el máximo común divisor de "a" y "b" es 1, es decir, que no tienen factores comunes y por tanto son "primos relativos". Elevamos al cuadrado y operando queda: $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$. Por tanto a^2 debe ser múltiplo de 2, lo que implica que "a" también es múltiplo de 2. Es decir, $a = 2k$ para un cierto k. Sustituimos este valor de "a" en la expresión anterior y simplificamos un 2 de esa igualdad: $2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$. Esta expresión nos asegura que b^2 es múltiplo de 2, y por tanto también lo es "b". Y aquí está el absurdo: habíamos supuesto que "a" y "b" no tenían factores comunes y hemos llegado a que los dos son múltiplos de 2, es decir, que tienen 2 como factor común, y por tanto su máximo común divisor debe ser al menos 2. Esa es la contradicción que buscábamos. Conclusión: $\sqrt{2}$ es irracional.

4.4.3. Poliedros regulares

Pitágoras y sus seguidores desarrollaron la teoría de las figuras que llenan el espacio. La prueba de que no existen más que cinco tipos de sólidos regulares depende de un teorema recogido por Euclides en el libro XI, que establece que las caras de un ángulo sólido deben sumar menos de 360º. Así, si juntamos triángulos equiláteros, podemos hacer que concurran tres en cada vértice sólido regular para formar un tetraedro, cuatro para formar un octaedro o cinco para formar un icosaedro. Con seis triángulos equiláteros en un vértice se obtendría una suma de 360º lo que descarta esa posibilidad. Podemos juntar tres cuadrados en cada vértice para obtener un cubo y tres pentágonos en cada vértice para formar un dodecaedro. No puede usarse ningún otro polígono regular, porque al unir tres en un punto se formaría un ángulo de 360º o más.

Los tres cuerpos geométricos regulares (cubo, tetraedro, octaedro) eran conocidos por los egipcios, pero se dejó a Pitágoras el descubrimiento de los dos restantes (el dodecaedro y el icosaedro).

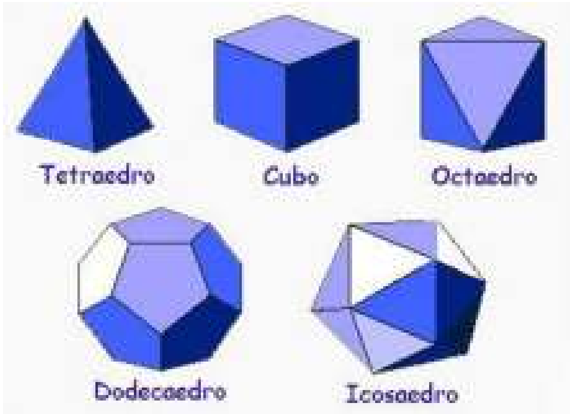


Figura 19: Poliedros regulares

El libro XIII de los *Elementos* de Euclides estudia propiedades de los polígonos regulares como tales e inscritos en círculos, y el problema de cómo inscribir los cinco poliedros regulares en una esfera. Prueba también que no existen más que esos cinco tipos de sólidos regulares (poliedros convexos).

4.4.4. Razón extrema y media. El pentágono y el número áureo.

Dos de los sólidos regulares, el dodecaedro y el icosaedro, incluyen al pentágono regular: el dodecaedro tiene caras pentagonales, y las cinco caras del icosaedro que rodean a cualquier vértice determinan un pentágono regular.

El lema de la escuela pitagórica fue "todo es número" (haciendo alusión a los números naturales y fracciones) y su emblema el pentágono y a la hora de estudiar las relaciones entre los segmentos que los formaban se encontraron con el problema de la inconmensurabilidad de algunas razones, como ya hemos visto.

Los pentágonos regulares están directamente relacionados con lo que Euclides llama "razón extrema y media". Sobre una línea recta AB, se construye un punto C de modo que la razón $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$. Es decir, la línea entera guarda la misma proporción con el segmento más grande que el segmento más grande guarda con el más pequeño.

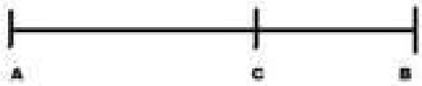


Figura 20

Si dibujamos un pentágono e inscribimos una estrella de cinco puntas, los lados de la estrella están relacionados con los lados del pentágono por esta razón particular (figura 13). Lo curioso de esta razón es que también se cumple para la expresión $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD}$

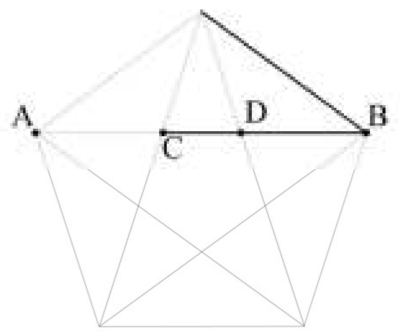


Figura 21: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \varphi$

Estos segmentos inconmensurables guardan una razón que hoy denominamos número áureo cuyo valor es igual a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Su valor numérico aproximadamente 1,618. Los griegos pudieron demostrar que era un número irracional explorando la geometría del pentágono. Por ello Euclides y sus predecesores eran conscientes de que, para tener una comprensión adecuada del dodecaedro y del icosaedro, debían entender los irracionales. Euclides trata explícitamente de ellos en su libro X.

En el Anexo I se puede ampliar contenidos acerca del número áureo.

Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza. Puede hallarse en elementos geométricos, en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el caparazón de un caracol, en los flósculos de los girasoles, etc. Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. Algunos incluso creen que posee una importancia mística.

A lo largo de la historia se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido cuestionados por los estudiosos de las matemáticas y el arte.

El propio Euclides obtiene la construcción de un rectángulo áureo en su proposición 11 del libro II (figura 22).

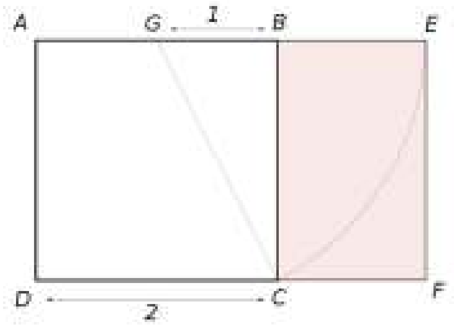


Figura 22: Euclides obtiene el rectángulo áureo AEFD a partir del cuadrado ABCD.
El rectángulo BEFC es asimismo áureo.
GC es $\sqrt{5}$ por lo que el valor de AE es $1 + \sqrt{5}$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

4.5. HIPÓCRATES DE CHÍOS (siglo V. a.C.)

Hipócrates de Chíos (distinto de Hipócrates de Cos, el célebre médico y fundador de la medicina) se marchó muy pronto, hacia el año 430 a.C., de u isla natal, Chíos, y se instaló en Atenas. ¿Por qué fue a Atenas y qué le hizo quedarse allí? Numerosas historias todas ellas verosímiles explican esta situación; sin embargo lo importante es que consiguió llegar a ser un matemático importante, una de ellas es que había perdido una considerable fortuna en un ataque de los piratas cerca de Bizancio. Después de haber soportado sus burlas en el pleito, primero por haber sido engañado y luego por la esperanza de recobrar su dinero, el ingenuo Hipócrates abandonó la pesquisa, encontrando solaz en las matemáticas y la filosofía. Su fama en geometría se debe a las siguientes razones:

1. Al parecer, Hipócrates escribió unos "Elementos de Geometría", anticipándose en más de un siglo a los conocidos *Elementos* de Euclides; sin embargo, el texto de Hipócrates se ha perdido.

2. Intentando establecer la cuadratura del círculo, demostró la cuadratura de ciertas clases de lúnulas.

3. Fue el primero que observó que el problema de la duplicación del cubo se reduce al problema de encontrar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos rectas dadas, lo que más tarde llevó a la resolución de la duplicación en términos de medias proporcionales.

Los libros III y IV de los *Elementos* de Euclides están dedicados a la geometría del círculo y aquí el material se supone que fue tomado en su mayor parte de Hipócrates de Chíos quien conocía la relación entre ángulos inscritos y arcos. Sabía construir el hexágono regular, la circunferencia circunscrita a un triángulo, etc. Utilizaba el concepto de semejanza y sabía que las áreas de figuras semejantes guardan la misma proporción que los cuadrados de sus lados respectivos. Conocía generalizaciones del teorema de Pitágoras para triángulos de ángulos obtusos y agudos y sabía transformar cualquier polígono en un cuadrado de igual superficie.

Su éxito principal es la demostración de la hipótesis de que los círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros. Esto equivale al descubrimiento de la formula πr^2, del área del círculo en función de su radio, lo cual significa que existe determinado número π y que es el mismo para todos los círculos, si bien su método no da el valor numérico real de π.

El nombre de Hipócrates está estrechamente ligado con dos de los más célebres problemas clásicos de la matemática, el problema de la **cuadratura del círculo** (consistente en hallar –con solo regla y compás– un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado) y la **duplicación del cubo**, llamado también problema délico, pues según una predicción del oráculo de Delfos, se extinguiría una epidemia cuando los habitantes duplicaran el volumen de uno de sus altares en forma de cubo. Narra la leyenda que los habitantes de Delos habían acudido en vano a los matemáticos, lo cual no es de extrañar, pues esta construcción es –como ahora se sabe– imposible (con regla y compás).

Conocemos un fragmento sobre Hipócrates que Simplicio dice haber copiado literalmente de la *Historia de la Matemática* de Eudemo (perdida también) en el que describe una parte de la obra de Hipócrates que se refiere a la cuadratura de las lúnulas (convirtiéndose así en el fragmento original más antiguo de la matemática griega que se ha conservado).

Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos; figuras de bordes curvilíneos para los cuales puede construirse con regla y compás un cuadrado de igual área. Hipócrates descubrió que podían dibujarse dos figuras en forma de luna, la suma de cuyas áreas fuera igual a la de un triángulo rectángulo y como el triángulo es igual al cuadrado construido sobre la mitad de la hipotenusa, se ha conseguido la primera cuadratura en la historia de una figura de lados curvos.

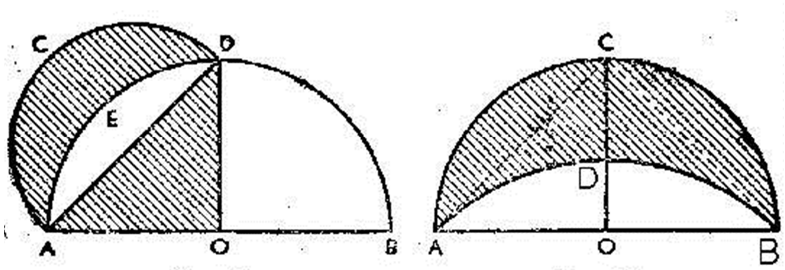


Figura 23: Lúnulas de Hipócrates

Hipócrates descubrió esto al intentar **cuadrar el círculo**, el más popular de los célebres problemas clásicos de la matemática. Sus descubrimientos hicieron concebir la esperanza de cuadrar el círculo por sucesivas cuadraturas de lúnulas, y como todos los intentos fueron estériles, se pensó en otros medios que condujeron al descubrimiento de algunas curvas notables, como la Concoide de Nicomedes y la Cisoide de Diocles.

4.6. HIPIAS DE ELLIS (siglo V a.C.)

Nació hacia el año 460 a.C. y fue probablemente contemporáneo de Sócrates. El único descubrimiento que se admite como suyo es de la "cuadratriz", curva espacial para resolver el tercer problema clásico: **la trisección del ángulo** (se pretendía trisecar un ángulo, o dicho de otra forma, dividirlo en tres partes perfectamente iguales usando sólo una regla y un compas) y también para solucionar la cuadratura del círculo.

Desarrolló su actividad en Atenas durante la segunda mitad del siglo V a.C. Se trata de uno de los primeros matemáticos de los que tenemos información sobre él en los diálogos de Platón y de quien se dice que era un hombre de carácter agrio, gran versatilidad y una memoria extraordinaria, sobre la que investigó creando varios sistema nemotécnicos. Se dice que ostentaba de no vestir nada que no hubiese hecho con sus propias manos.

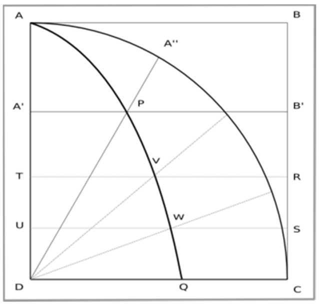


Figura 24: Trisectriz de Hipias

La trisectriz de Hipias resulta de la intersección de A'B' y DA''. A'B' es el lado AB que se traslada con velocidad uniforme desde su posición inicial hasta coincidir con DC, mientras que durante el mismo intervalo de tiempo DA gira hasta coincidir con DC.

Si utilizando esta curva quiero trisecar el ángulo PDC simplemente tengo que dividir en tres partes iguales los segmentos B'C y A'D, obteniendo los puntos R, S, T, U. Unimos T con R y U con S y en los puntos V y W que cortan a la trisectriz los uno con D; tengo así trisecado el ángulo PDC.

4.7. EUDOXO DE CNIDO (390 – 337 a.C.)

Figura como uno de los miembros más brillantes de la Academia de Platón, en torno al año 368 a.C., aunque su relación con éste no está clara puesto que algunos biógrafos comentan que Platón lo recibió hostilmente, celoso de su popularidad y que desconfiaba de sus ideas matemáticas, mientras que otros afirman que la relación fue cordial. Alrededor del año 350 a.C. Eudoxo retorno a Cnido, donde acababa de instaurarse un régimen democrático y se le encargó redactar la nueva constitución.

Como ya se mencionó con anterioridad, el libro V de los Elementos de Euclides está basado en los trabajos de Eudoxo y está considerado como el mayor logro de la geometría euclídea; su contenido y significado se han debatido más extensa e intensamente que cualquier otra porción de los *Elementos*. Solventando el problema de los pitagóricos, el libro V extiende la teoría de las proporciones a razones inconmensurables.

La noción de magnitud que presenta Euclides pretende cubrir cantidades o entidades que pueden ser conmensurables o inconmensurables entre sí. Este volumen contiene la teoría eudoxiana de la proporción a la geometría plana. Se establecen los teoremas fundamentales de los triángulos semejantes y las construcciones de la tercera, la cuarta y la media proporcional. Se establece una solución geométrica a la ecuaciones cuadráticas y la proposición de que la bisectriz interna del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Eudoxo de Cnido fue, sin lugar a dudas, el matemático más importante de su época. Sobresalió también como astrónomo, maestro en retórica, médico y geógrafo. Sus amigos lo llamaban, medio en broma, Eudoxo, el renombrado.

Creó una teoría de las magnitudes que incluía las magnitudes irracionales, pero sin llegar a avanzar explícitamente en el concepto de número irracional. El concepto de proporcionalidad estaba hasta entonces ligado a la suposición de que los números que se hallan en proporción poseen una medida común.

Eudoxo, dando un decisivo paso hacia adelante, se liberó de esta restricción e introdujo la definición siguiente:

> Se dice que ciertas magnitudes están en la misma relación, la primera a la segunda como la tercera a la cuarta, si en la multiplicación arbitraria los múltiplos correspondientes de la primera y la tercera son al mismo tiempo o mayores o iguales o menores que los múltiplos correspondientes de la segunda y la cuarta, tomados respectivamente de dos en dos. (…) de las magnitudes que están en la misma relación se dice que son proporcionales (Libro V, Definición 5)

Utilizando fórmulas más familiares para nosotros, lo anterior se expresa así: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces para números naturales cualesquiera m, n $\geq$ 1 se tiene que: de $na > mb$ se sigue siempre $nc > md$, de $na = mb$ se sigue siempre $nc = md$, y de $na < mb$ se sigue siempre $nc < md$.

Esta definición de la proporción no necesita suposiciones sobre la conmensurabilidad de las cantidades. Al mismo tiempo, es apropiada para demostrar todas las proposiciones conocidas sobre proporciones, lo cual permite en otros teoremas establecer, de una forma matemáticamente correcta, la relación entre el álgebra geométrica, la teoría de las proporciones y la teoría de las equivalencias, por una parte y, por otra, una teoría de las magnitudes, incluyendo la inconmensurabilidad y la irracionalidad.

El método de exhausción

En relación directa con lo anterior, Eudoxo llevó a cabo un trabajo pionero en la fundamentación de este particular tipo de análisis. En el siglo XVII, cuando más se intensificaba la búsqueda de métodos infinitesimales, su método recibió el nombre, algo desafortunado, de método de exhausción (del latín exhaurire, vaciar, agotar). El método consiste, esencialmente, en aproximar el área de figuras limitadas por curvas por medio de polígonos inscritos y circunscritos. Para introducir este método, designado como análisis geométrico, Eudoxo se apoyó en un teorema que determina una aproximación tan buena como se quiera a una cantidad que se ha de medir. Este resultado aparece en el libro X de los *Elementos*; en el libro XII se encuentran ejemplos de aplicación de la exhausción a superficies y sólidos –círculo, cono y esfera, entre otros–. Esta proposición afirma lo siguiente:

> Si dadas dos cantidades distintas (del mismo tipo) se quita de la mayor un trozo más grande que la mitad y del resto un trozo más grande que la mitad y se repite esto siempre, entonces tiene que quedar alguna vez una cantidad que es más pequeña que la menor de partida (Libro X, Proposición 1).

La base de este teorema y de la teoría de las proporciones de Euclides es un axioma o postulado que Arquímedes, posteriormente y citando a Euclides, daría en la siguiente forma: "La mayor de dos cantidades dadas, sea línea, superficie o sólido, excede de la menor en una diferencia que, multiplicada suficientes veces, supera a ambas cantidades".

4.8. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287 – 212 a.C.)

El más grande de los matemáticos antiguos fue Arquímedes. Hizo importantes contribuciones a la geometría, estuvo a la vanguardia de las aplicaciones de las matemáticas al mundo natural y fue un ingeniero consumado. Pero para los matemáticos, Arquímedes será siempre recordado por su obra sobre círculos, esferas y cilindros, que ahora asociamos con el número π que es aproximadamente 3,141592. Por supuesto, los griegos no trabajaban directamente con π: ellos lo veían geométricamente como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

En una crónica se dice que estuvo en Egipto, y concretamente en la Universidad de Alejandría; de hecho, parece que estudió con los sucesores de Euclides. Es posible que durante su estancia en Egipto conociera a Eratóstenes.

Los historiadores romanos cuentan numerosos hechos y gestas atribuidos a Arquímedes; todo estos relatos legendarios parecen impregnados del deseo de rendir homenaje al célebre matemático, orgullo de Siracusa. Se cuenta que, durante el sitio (entre los años 214-212), Arquímedes inventó numerosas e ingeniosas máquinas para mantener a distancia a los romanos que trataban de invadir la ciudad: catapultas de alcance variable, una máquina que incendiaba los barcos romanos, pértigas móviles que proyectaban masas considerables sobre los barcos situados demasiado cerca de los muros de la ciudad, etc.

Numerosas anécdotas hacen referencia a rasgos de la personalidad de Arquímedes o a diversas facetas de su genial inteligencia. Mencionemos, entre otras, la historia de la corona del rey Hierón, quien, sospechando que orfebre había sustituido hábilmente parte del oro por plata, pidió enseguida a su amigo Arquímedes que resolviese el problema sin estropear la pieza. Arquímedes resolvió el problema descubriendo la primera ley de la hidrostática mientras se bañaba en su bañera y se cuenta que fue en esta ocasión cuando, corriendo desnudo por la calle, pronunció la célebre palabra "eureka". En otra ocasión, estudiaba las palancas y encontró una aplicación, al menos original, de la ley general de las palancas, al decir: "Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo".

Se cuenta que sus servidores tenían que recordarle constantemente que debía comer y beber, ya que podía trabajar día y noche sin descanso en la resolución de problemas de geometría y mecánica. Arquímedes trazaba figuras geométricas en la ceniza de la leña consumida y sobre su cuerpo untado de aceite, después de un baño.

Durante el sitio de Siracusa, los soldados romanos, en cuanto veían un trozo de cuerda o de madera que caía de la muralla gritaban "allí está" y declarando que Arquímedes hacía funcionar alguna máquina contra ellos daban media vuelta y huían.

Arquímedes se imaginaba la circunferencia como la figura obtenida por exhausción de polígonos regulares inscritos y circunscritos.

Euclides, en el libro XII ya nos dice que las áreas de los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios, o dicho de otra forma que si dividimos el área de cualquier círculo entre el cuadrado de su radio siempre obtendremos el mismo número, pero ¿cuál es ese número?

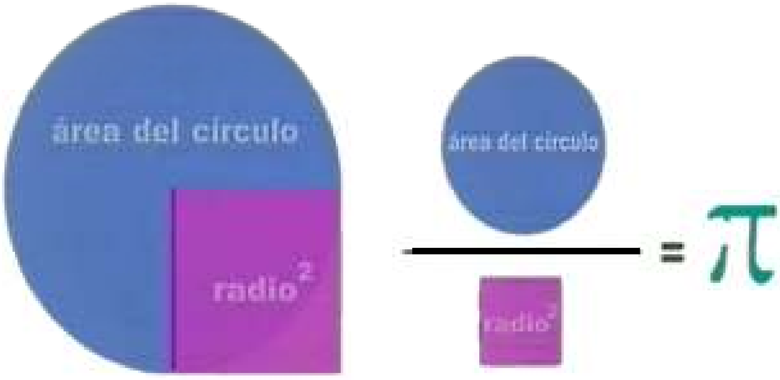


Figura 25: relación entre el área del círculo y el cuadrado de su radio

Culturas anteriores habían advertido que la circunferencia de un círculo es siempre el mismo múltiplo de su diámetro y sabían que este múltiplo era, aproximadamente $3\frac{1}{7}$, quizá un poco mayor. Los babilonios utilizaban $\frac{25}{8}$, es decir, 3,125. Los Egipcios, en 1625 a.C. según se puede leer en el papiro de Rhind, le dieron el valor de $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, es decir, 3,16. Pero Arquímedes fue mucho más lejos; sus resultados iban acompañados de demostraciones rigurosas y siguió el método de Eudoxo para tratar de calcular su valor, realizando su primer cálculo teórico: el método consiste en trazar un hexágono regular inscrito y otro circunscrito a una circunferencia. El perímetro del hexágono interior es menor que la longitud de la circunferencia y el del exterior, mayor. Dividiendo los perímetros entre el diámetro obtenemos una cota inferior y una cota superior de π. Si duplicamos el número de lados del polígono regular obtendremos una mejor aproximación. Pues bien, con suma paciencia esto es lo que hizo Arquímedes hasta alcanzar un polígono de 96 lados, con lo que demostró que π está comprendido entre $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$, es decir, entre 3,1408 y 3,1429 había comenzado la carrera para obtener, cada vez, un valor más próximo a π.

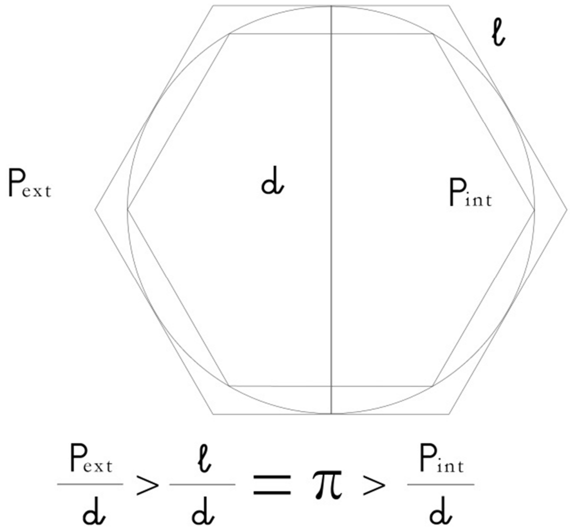


Figura 26: Aproximación a π mediante el método de exhausción de Eudoxo.
Donde l es el perímetro del círculo, d es el diámetro
P_{ext} el perímetro del polígono circunscrito y P_{int} el del inscrito

Ptolomeo, en el siglo II, obtiene un valor que se repetirá en las escuelas durante cientos de años, $\pi = 3{,}1416$. Tendríamos que esperar hasta el siglo V para que, en china, Chung Chih nos diera un valor más exacto, $\pi = 3{,}1415926$. Actualmente el record está en 5 billones de decimales.

El número π es, desde ahora, la llave para calcular las áreas y volúmenes de los cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera. Descubrir la manera de calcular las áreas laterales del cilindro y del cono no le debió suponer a Arquímedes un esfuerzo especial, ya que basta con extender en el plano estas superficies.

El área lateral del cilindro será entonces la longitud de la circunferencia de la base por la altura, es decir $Area\ lateral_{\ cilindro} = 2\pi rh$; de forma análoga podemos calcular el área lateral del cono $Area\ lateral_{\ cono} = \pi rg$; siendo g la generatriz del cono.

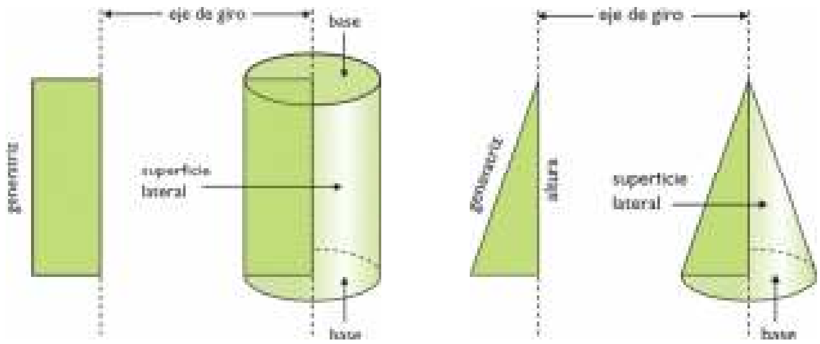


Figura 27: cilindro y cono,

como resultado de la revolución de un rectángulo y un triángulo, respectivamente.

Los volúmenes de ambos cuerpos también dependen de π : el volumen del cilindro es el resultado de multiplicar el área del círculo de su base por la altura $V_{cilindro} = \pi r^2 h$ y el volumen del cono es $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

La obra de Arquímedes sobre la esfera es de especial interés, porque no sólo conocemos su demostración rigurosa, sino la forma en que la encontró. La demostración se da en su libro "*Sobre la esfera y el cilindro*". Descubrió que el área de la esfera era cuatro veces la de su círculo máximo, y su volumen, cuatro veces el de un cono de base su círculo máximo. En lenguaje moderno, Arquímedes demostró que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio, y el área de su superficie es $4\pi r^2$. Estos hechos básicos se siguen utilizando hoy.

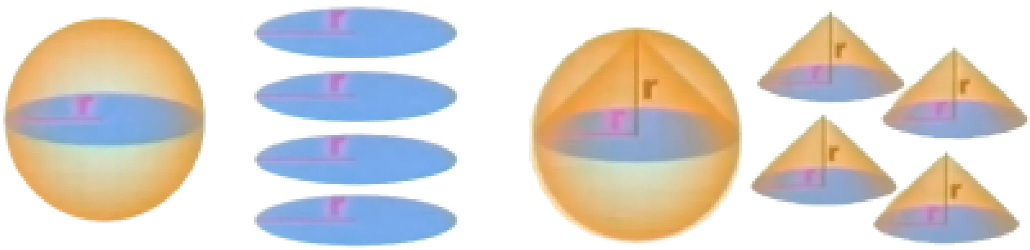


Figura 28: área y volumen de la esfera, respectivamente

Además, introduciendo en un cilindro una esfera de igual radio, descubrió las relaciones entre las áreas y los volúmenes de ambas figuras, en sus propias palabras: "Cualquier cilindro que tenga como base el círculo máximo de una esfera y la misma altura que la esfera tiene por volumen una vez y media el de la esfera, y su superficie incluyendo sus bases es también una vez y media la superficie de la esfera".

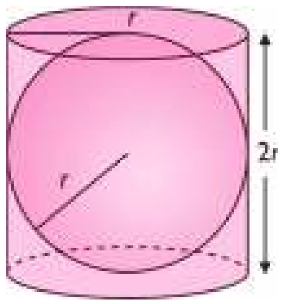


Figura 29: Relación entre el cilindro y la esfera

Arquímedes se sintió siempre tan orgulloso de esta relación entre la esfera y el cilindro que, según la leyenda, pidió que se grabara en su tumba una figura con una esfera dentro de un cilindro. Gracias a esto su tumba fue descubierta por Cicerón (75 d.C.), quien mandó restaurarla.

Se ocupó de los tres problemas clásicos ya mencionados: la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo. La espiral que lleva su nombre le sirvió para dar solución a los dos últimos y también a la cuadratura de la parábola. Matemáticamente la espiral de Arquímedes se define como el lugar geométrico de un punto del plano que partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira también uniformemente sobre uno de sus extremos. En palabras del propio Arquímedes: "Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral". Es decir, es una curva mecánica. Para definirla necesitamos recurrir al movimiento. Es de hecho la primera curva mecánica de la historia.

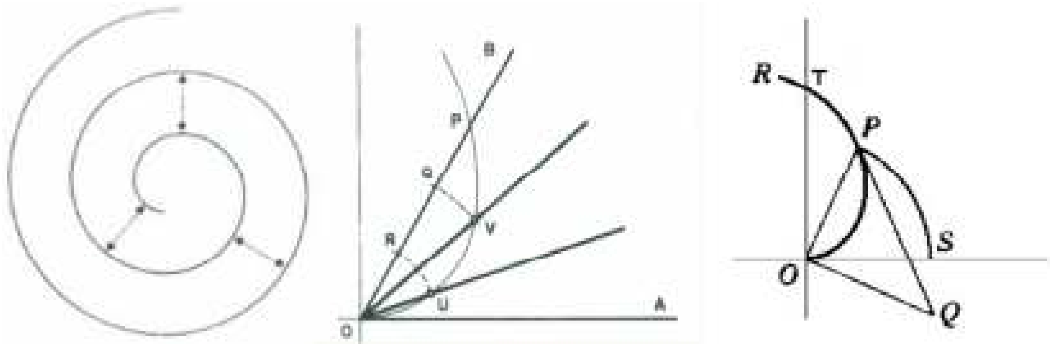


Figura 30: Espiral de Arquímedes, trisección del ángulo y cuadratura del círculo, respectivamente.

En 1906 apareció "**El método**" en el que nos revela una faceta del pensamiento de Arquímedes que no encontramos en ningún otro sitio. Los otros tratados de Arquímedes son verdaderas joyas de precisión lógica que no dan apenas pistas de los análisis preliminares que han debido conducir a las fórmulas definitivas. Las demostraciones aparecen tan desprovistas de motivación, que algunos matemáticos del siglo XVII llegaron a sospechar que Arquímedes había ocultado su método de investigación con objeto de que su obra fuera aún más admirada. Al aparecer su Método (un palimpsesto, un pergamino en el que la escritura original ha sido lavada imperfectamente, tratando de borrarla, para volver a ser utilizado con un nuevo texto) se vio cuan injustas eran esas sospechas acerca de la honestidad científica de Arquímedes.

En este tratado se dice que resulta más fácil dar una demostración de un teorema si tenemos previamente una idea de qué es lo que tratamos de obtener. Nos dice que él tenía un método "mecánico" que le permitía preparar el camino para algunas de sus demostraciones. Por ejemplo, pesó su parábola para hallar el área de un segmento y este experimento le sugirió el teorema sobre la "cuadratura de la parábola". Admite el valor de tales métodos experimentales para llegar a verdades matemáticas que luego, evidentemente, deben ser rigurosamente demostradas.

Arquímedes murió trabajando. Cuenta Plutarco en su "Vida de Marcelo" que cuando los romanos, finalmente, capturaron Siracusa, un soldado lo encontró en su casa dibujando figuras geométricas en el suelo. "No estropees mis círculos" dijo Arquímedes. Estas resultaron ser sus últimas palabras. El general romano había dado órdenes de que no debía hacerse daño a Arquímedes; pero nadie sabe si el soldado conocía o le importaba quién era su víctima.

Figura 31: Mosaico romano de la Städische Galerie Liebieghaus de Frankfurt am Main que representa el momento de la muerte de Arquímedes a manos de un soldado romano

4.9. APOLONIO DE PERGA (aprox. 262 – 190 a.C.)

El libro XI de Euclides inicia el tratamiento de los volúmenes o sólidos, aunque todavía aparecerán algunos teoremas de geometría plana. Hay también definiciones para la esfera, el cono y el cilindro. La esfera se define por el giro de un semicírculo en torno al diámetro que lo limita; el cono por el giro de un triángulo rectángulo entorno a uno de los lados del ángulo recto; el cilindro, por el giro de un rectángulo en torno a uno de sus lados. La importancia de estas tres últimas definiciones está en que todos ellos se obtienen a partir del giro de una figura plana en torno a un eje.

Apolonio se trasladó a Alejandría cuando todavía era joven y aprendió matemáticas con los sucesores de Euclides. Por lo que sabemos, permaneció en Alejandría colaborando con los grandes matemáticos que allí trabajaban. Su obra maestra es el tratado sobre las cónicas.

Las secciones cónicas (figura 32) fueron estudiadas mucho antes de Apolonio. Concretamente Menecmo (sobre todo) Aristeo el Viejo y Euclides habían escrito sobre ellas. También Arquímedes, a quien vimos en el epígrafe anterior, presentó algunos resultados sobre este tema. Fue Apolonio, no obstante, quien lo pulió, despojándolo de irrelevancias y le dio forma sistemática.

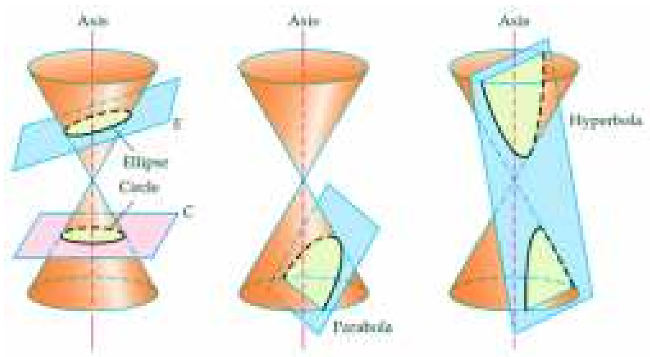


Figura 32: Elipse, parábola e hipérbola, respectivamente

Apolonio demostró por primera vez que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono. Asimismo demostró que el cono no necesita ser un cono recto. Por último llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja, por un cono de dos hojas, lo que convierte a la hipérbola en una curva de dos ramas. Hasta entonces los geómetras solían hablar de las "dos hipérbolas" en vez de las dos ramas de una única hipérbola. Parece ser que, por sugerencia de Arquímedes, Apolonio introdujo las palabras "elipse" e "hipérbola" para designar estas curvas, mientras que Arquímedes utilizaba el término "parábola" para designar la sección de un cono de ángulo recto en el vértice.

4.10. ERATÓSTENES DE CIRENE (276 – 194 a.C.)

Eratóstenes había nacido en Cirene, ciudad de la costa sur del Mediterraneo. Pasó varios años de su juventud en Atenas, y más tarde, invitado por Tolomeo III de Egipto, se convirtió en preceptor de su hijo y bibliotecario jefe de la Universidad de Alejandría a los cuarenta años. Eratóstenes destacó en varias actividades, pero su más valiosa contribución científica corresponde a sus mediciones para evaluar el perímetro de la Tierra.

Alrededor del 250 a.C. Eratóstenes de Cirene utilizó la geometría para estimar el tamaño de la Tierra. Él advirtió que a mediodía en el solsticio de verano, el Sol estaba casi exactamente encima de Siena (actualmente Asuán), porque se reflejaba en el fondo de un pozo vertical. El mismo día del año, la sombra de una alta columna indicaba que la posición del Sol en Alejandría estaba a un cincuentavo de un círculo completo (unos 7,2º) respecto a la vertical.

Los griegos sabían que la Tierra era esférica, y Alejandría estaba casi en dirección norte desde Siena, de modo que la geometría de una sección circular de la esfera implicaba que la distancia de Alejandría a Siena era la cincuentava parte de la circunferencia de la Tierra.

Eratóstenes sabía que una caravana de camellos tardaba 50 días en ir de Alejandría a Siena, y recorría una distancia de 100 estadios cada día; luego la distancia de Alejandría a Siena son 5.000 estadios, lo que hace la circunferencia de la Tierra de 250.000 estadios. Por desgracia no sabemos con seguridad qué longitud tenía un estadio, pero se estima en 157 metros, lo que lleva a una circunferencia de 39.250 km. La cifra moderna es 39.840 km.

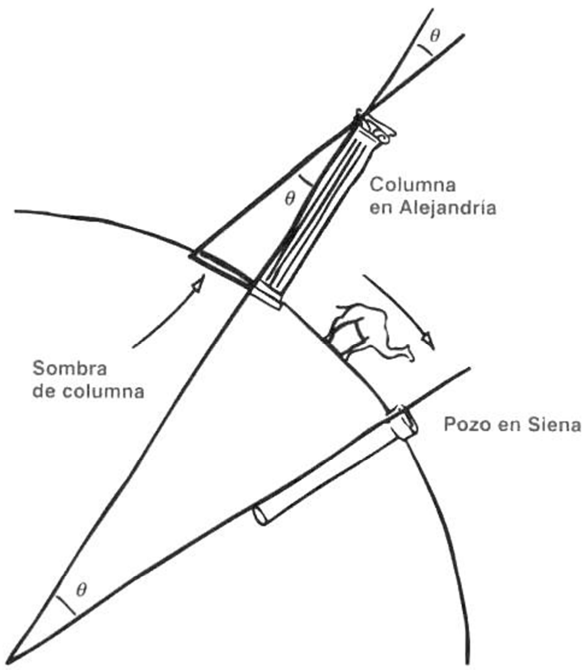


Figura 33: Cálculo de la circunferencia terrestre por Eratóstenes

Los rayos del sol son paralelos y, en este caso, aplicamos la proposición 29 del libro I de Euclides, de tal manera que el ángulo θ que forma la sombra con la columna en Alejandría es el mismo que el que forman los radios terrestres, prolongaciones, del pozo de Siena y la mencionada columna. Conociendo la distancia entre estos dos elementos y la longitud de la sombra de la columna Eratóstenes calculó el perímetro terrestre.

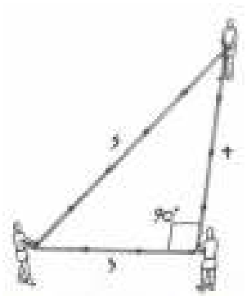
5.- APLICACIONES DIDÁCTICAS

El aprendizaje de la Geometría debe arrancar con un problema que sea sentido como tal por quien aprende y, en consecuencia, la enseñanza de la Geometría debe comenzar proponiendo a los estudiantes un problema con sentido para ellos. Esta característica, tener sentido, es muy importante.

En este apartado vamos a mostrar algunas actividades (problemas y lecturas matemáticas) que pueden ser resueltos por nuestros alumnos y alumnas, bajo la supervisión del profesorado, utilizando los mismos medios que utilizaron los matemáticos a lo largo de la historia.

Problema 1

En una salida al campo con nuestros alumnos queremos jugar un partido de futbol, para lo que necesitamos delimitar el rectángulo que forma la cancha de juego. Pediremos a nuestros alumnos y alumnas que propongan soluciones para resolver este problema. La aportación del maestro o maestra será la de explicar cómo los antiguos egipcios delimitaban los campos de labranza y trazaban ángulos rectos con el triángulo 3, 4, 5 haciendo doce nudos equidistantes en una cuerda.



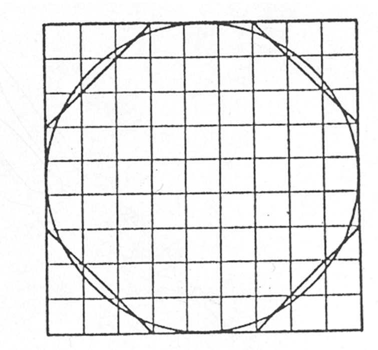
Problema 2

Nos han regalado un yate cuya vela blanca es un triángulo isósceles de 20 metros de alto y 10 metros de base. Queremos pintarla de color azul. Si cada bote de pintura nos permite pintar 6 m^2 de tela ¿cuántos botes de pintura necesitamos para pintar toda la vela? Resolver el problema utilizando el método empleado por los egipcios.

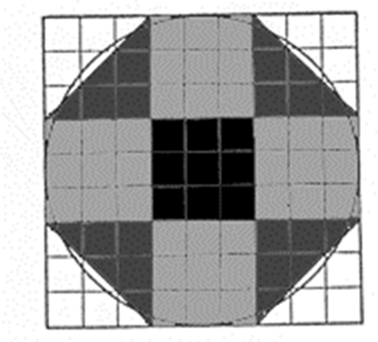
Solución: dividimos el triángulo en 2 mitades con las que podemos formar un rectángulo de medidas 20 x 5, cuya área será 100 m^2.

Problema 3

Tomando como unidad los cuadrados de tu cuaderno, calcula el área de este círculo.



Solución: Igual que en el papiro de Rhind, calculamos el área del octógono inscrito, siendo esta de 5 bloques de 3x3, es decir, 5·9 más 4 "medios" bloques o, lo que es lo mismo, 2 bloques de 3x3. En total (5·9)+(2·9) = 45+18 = 63 unidades cuadradas.



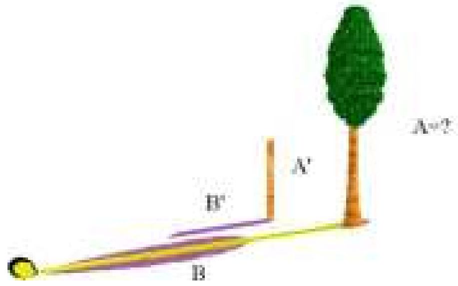
Otra solución sería calcular el área total de la zona cuadriculado, es decir 9·9 = 81 y restarle el valor de las cuatro esquinas 4(3·3)/2 = 18. El resultado es el mismo: 81 – 18 = 63 unidades cuadradas. Siendo el radio de esta circunferencia $\frac{9}{2}$ y el valor aproximado de su circunferencia 64, resulta que el valor que los egipcios daban a π fue el de:

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 64 \;\Rightarrow\; 81\pi = 64 \cdot 4 \;\Rightarrow\; \pi = \frac{256}{81} = 3{,}16$$

Problema 4

Calcular la altura del árbol que hay en el patio del colegio

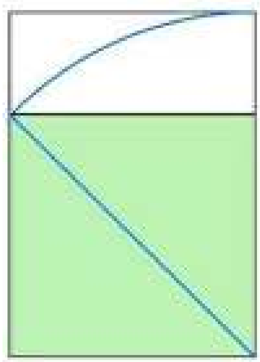
Solución: Utilizaremos el mismo sistema que utilizó Tales para medir la altura de las pirámides y para ello utilizaremos una cinta métrica para medir la longitud de la sombras del árbol por un grupo de alumnos/as y material escolar (lapicero, regla) para medir la altura y la sombra de la “estaca”. Cuando la sombra cuando la longitud de la sombra de la estaca sea igual que la longitud de la estaca misma, daremos la señal al otro grupo para medir la sombra del árbol, que será exactamente igual que la altura del árbol.



Problema 5

Construir con la regla, en el cuaderno cuadriculado un cuadrado de lado 1 dm y, a partir de él, un segmento de valor $\sqrt{2}$ dm. Comprobar que esa misma razón la encontramos en los folios de medida internacional DIN-A3, DIN-A4…

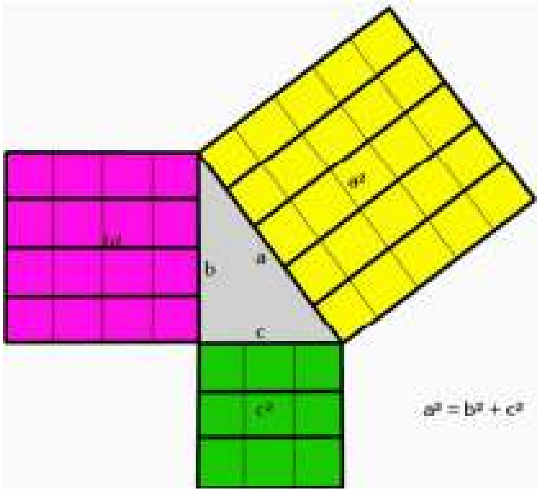
Solución: con centro en uno de los vértices del cuadrado y radio la diagonal del cuadrado, trazamos un arco que corte a la prolongación de la arista opuesta.

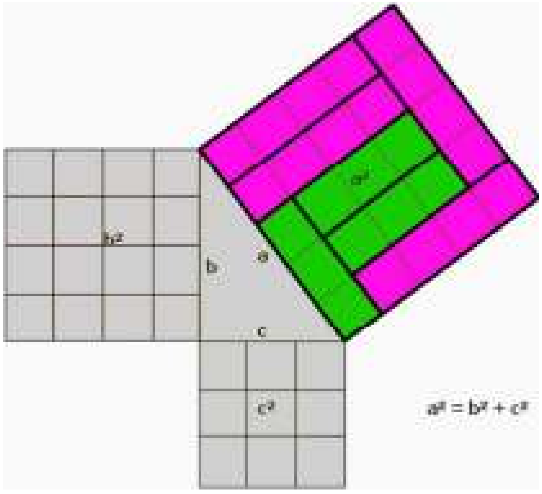


Problema 6

Demostrar el teorema de Pitágoras con regletas Cuisenaire.

Solución:

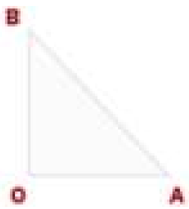




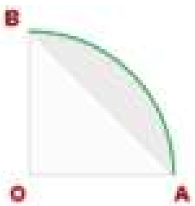
Problema 7

Construir una lúnula de Hipócrates

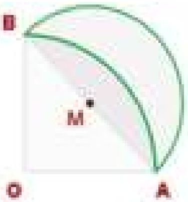
Solución:



Partimos de un triángulo isósceles rectángulo.



Con centro en O se traza el arco AB.



Con centro en M, que es el punto medio de la hipotenusa, se traza el otro arco.

La parte enmarcada por el color verde se llama **lúnula de Hipócrates**

Ejercicios de comprensión lectora tomados de Bulles, D.

Euclides está reconocido como el matemático más importante de la Grecia Clásica. De él sólo se sabe que enseñó y fundó una escuela en Alejandría hacia el año 30 a. de C., en la época del rey Ptolomeo I. Se cuenta que una vez el rey le preguntó si no había un método más sencillo para aprender geometría y que Euclides contestó: "no hay un camino real para la geometría".

Otra anécdota sobre Euclides se refiere a uno de sus discípulos, el cual, después de aprender la primera proposición de geometría, le preguntó qué iba a ganar con eso; entonces Euclides ordenó que le dieran una moneda "ya que debe obtener un beneficio de todo lo que aprende".

No obstante, Euclides es conocido como autor de una de las obras más importantes de la geomertía, *Los Elementos*. Prácticamente, hasta que en el siglo XIX se desarrollaron las geometrías no euclidianas, "Los Elementos" fueron la obra de geometría. Una idea de su importancia es el hecho de que toda la geometría escolar se encuentra contenida en ese libro. Euclides recopiló en "Los Elementos" toda la geometría conocida en su época, pero no se limitó a reunir todo el conocimiento geométrico, sino que lo ordenó y le dió estructura de ciencia.

EJERCICIO 11-1

Lee nuevamente la anterior información y luego, encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. En las respuestas que acostumbraba dar Euclides podemos encontrar:
   a. Genialidad y contradicción.
   b. Agudeza mental y fina ironía.
   c. Talento e inteligencia precoz.
   d. Suspicacia y sarcarsmo.

2. De "los Elementos", obra de Geometría escrita por Euclides podemos decir que:
   a. Allí aparece ordenado y estructurado todo el conocimiento de geometría.
   b. Es todo un compendio de la ciencia.

c. No ha sido posible sustituirla por otra.
d. Su importancia se extendió a todo lo largo del siglo XIX.

3. De Euclides se puede afirmar todo lo siguiente, con excepción de:
   a. Fue maestro y fundador de una importante institución en Alejandría.
   b. Tenía vínculos con personas notables de la Grecia Antigua.
   c. Su obra de Geometría ha sido estudiada por muchos siglos.
   d. Tiene la reputación de ser el matemático más importante del mundo antiguo.

4. El propósito del autor, en el escrito anterior es:
   a. Comparar la geometría euclidiana con otras geometrías.
   b. Destacar la importancia de Euclides y su obra en el campo científico.
   c. Demostrar que Euclides es el creador y padre de la geometría.
   d. Mostrar la evolución de la geometría, desde Euclides hasta nuestros días.

5. Según Euclides:
   a. Todos los caminos que conducen a la geometría son falsos.
   b. Sólo hay una vía directa a la geometría.
   c. A la geometría se puede acceder por diferentes caminos.
   d. Todos los caminos conducen a la geometría.

6.- CONCLUSIONES

La historia de la Geometría y en general de las matemáticas como recurso en el aula, aporta al profesorado una nueva visión más amplia de la materia. Permite mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos a través del análisis contextualizado de textos históricos significativos y del intento de solucionar algunos de los mismos problemas a los que los antiguos matemáticos se enfrentaron (Massa 2007).

Los textos históricos se pueden usar para introducir un tema o un concepto, para motivar la resolución de algunos problemas. Para ello es necesario que los maestros y maestras de matemáticas presenten a estos personajes en un contexto histórico, situándolos cronológicamente y mostrando al alumnado diferentes aspectos de la cultura de su época, su biografía, sus anécdotas y sus logros matemáticos.

El aprendizaje de las matemáticas en un niño o una niña reproduce muchos de los esquemas mentales que surgen cronológicamente a lo largo de la historia: va avanzando en el aprendizaje mediante su actividad. El conocimiento es el resultado de un proceso en el que el estudiante va construyendo su propio conocimiento de forma activa, aunque la construcción de estos conocimientos geométricos no están determinados definitivamente por el nivel de desarrollo del propio alumno sino también por la estimulación externa y el proceso, si bien las instrucciones de enseñanza que reciban los alumnos y alumnas deben estar en consonancia con sus estadios de desarrollo porque, de lo contrario, éstos no aprenderían.

De todo lo hasta aquí expuesto sacamos en conclusión que la historia de la Geometría Euclidiana:

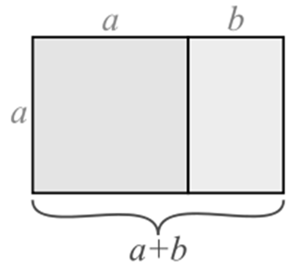
- Facilita a los profesores y profesoras materiales y recursos didácticos que favorecen el aprendizaje de sus alumnos y alumnas.
- Permite descubrir el lado ameno de la Geometría e influye favorablemente en la motivación de los estudiantes.
- Ayuda a inculcar en los alumnos y alumnas valores como el esfuerzo, la constancia, el trabajo, la humildad, la disponibilidad…
- Permite aprender con la ayuda de unos profesores muy especiales: los grandes sabios de otros tiempos.

- Permite dar una visión más humana de las matemáticas (no es obra de los dioses, es el resultado del trabajo de hombres y mujeres que pueden equivocarse). Esto contribuye a que los alumnos y alumnas no se sientan frustrados ante sus errores y pueda aprender de ellos.
- Contribuye a apreciar su utilidad en la resolución de problemas prácticos.
- Permite mostrar a los alumnos y alumnas el papel capital de las matemáticas en la construcción de la cultura humana.
- Contribuye a trabajar la comprensión lectora y fomentar el hábito de la lectura.

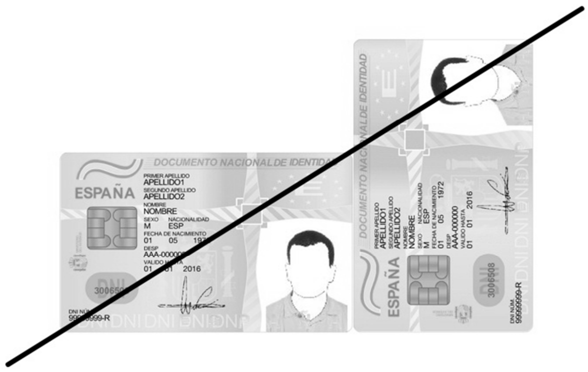
ANEXOS

1. LA PROPORCIÓN ÁUREA

Empezaremos intentando una aproximación geométrica al número de oro. Para ello dibujaremos un rectángulo en el que, si trazamos los límites de un cuadrado máximo, el rectángulo resultante sea semejante al primero.



Un rectángulo de estas características recibe el nombre de áureo. En primera instancia puede parecerse a un rectángulo de lo más convencional. Hagamos, sin embargo, un sencillo experimento con dos tarjetas de crédito cualquiera o dos DNI. Si disponemos una de ellas de forma horizontal y la otra vertical y las alineamos por sus bases se observará lo siguiente:

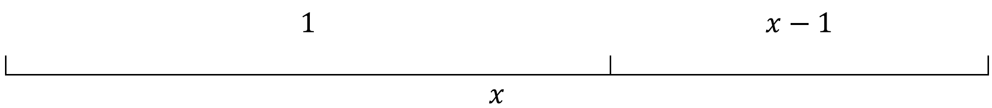


En efecto, al trazar la diagonal de la tarjeta horizontal y prolongarla, podremos comprobar con creciente admiración que coincide exactamente con el vértice superior derecho de la tarjeta vertical. Esta proporción es exclusiva de los rectángulos áureos del mismo tamaño, de lo que se deduce que muchos objetos cotidianos de forma rectangular se han diseñado con la divina proporción en mente. ¿Casualidad? Tal vez. O quizás resulta que los rectángulos y demás formas geométricas que guardan esta proporción son, por alguna razón, especialmente agradables a la vista. Si apostamos por esta última posibilidad, nos encontraremos en compañía de nombres ilustres de la pintura y la arquitectura de todas las épocas, como veremos más adelante. No es ninguna coincidencia que la denominación moderna del número de oro, la letra griega *phi* (Φ), sea también la inicial del arquitecto clásico por antonomasia, el legendario Fidias.

1.1 – Cálculo del número ϕ

En el libro VI de los *Elementos* de Euclides, como tercera definición, aparece el texto que lo empezó todo: "Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor al menor" (Euclides – Elementos. p. 56 – Madrid, Editorial Gredos).

Esta media y extrema razón, que aparece con tanta modestia, es el número que con posterioridad se llamará número de oro o número áureo y al que Luca Pacioli (1509) dedicará todo un tratado, dándole el nombre de *divina proporción*. Este número es irracional (o como lo definían los pitagóricos, una razón inconmensurable). Vamos a calcularlo:



Si tenemos un segmento y en él tomamos dos partes, la partición que hemos hecho lo será en media y extrema razón, o sea será una partición áurea cuando $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

Esta igualdad nos lleva (ya que para que dos fracciones sean iguales o equivalentes lo tienen que ser sus productos en cruz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$) a la ecuación de segundo grado:

$$x(x-1) = 1 \ \rightarrow \ x^2 - x = 1$$

Equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$

Que tiene dos soluciones, y la positiva, que es la que nos interesa, es

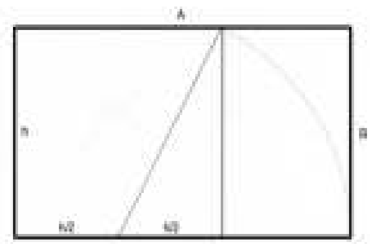
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

Ésta es la relación que buscamos y a la que llamamos $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$

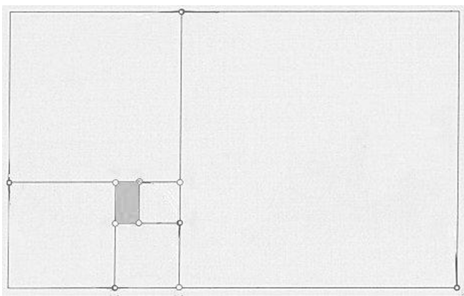
Puesto que la solución de la ecuación es la relación entre las longitudes de los segmentos, ésa será la misma cualquiera que sea el segmento del que partamos. Dicho de otra forma: la proporción áurea tendrá el mismo valor con independencia de la longitud del segmento inicial.

1.2 – Construcción del rectángulo áureo

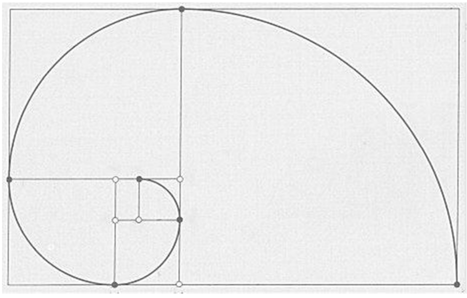
Sin duda, la forma más sencilla de construir un rectángulo áureo es partir de un cuadrado y, tomando la el punto medio de su base y, como radio de una circunferencia, el segmento definido por ese punto medio y el vértice superior, trazar la misma hasta encontrar el punto de corte con la prolongación de una de su base:



Una vez obtenido este rectángulo, podemos construir rectángulos áureos sucesivos, a partir de la construcción de cuadrados con cada nuevo rectángulo.



Con estos rectángulos sucesivos podemos trazar (tomando como radio la arista de cada nuevo cuadrado) la conocida espiral de Durero (1525) pues fue él quien publicó su construcción a partir de una sucesión de rectángulos áureos. Esta espiral está presente no sólo en numerosas obras de arte, sino también de forma natural en las conchas de los caracoles, en la posición de las hojas en los tallos de algunas plantas y en las galaxias, por ejemplo. La denominamos espiral *gnómica* porque podemos trazarla con regla y compás.



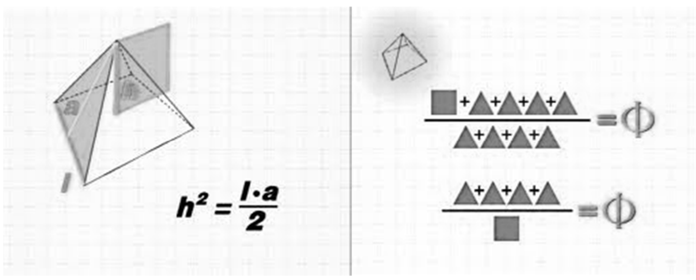
1.3 – Belleza y perfección en el arte

En 1876 el alemán Gustav Theodor Fechner, el inventor de la psicología física, hizo un estudio estadístico con personas sin experiencia artística, a las que pidió que escogieran el rectángulo que les agradase más entre varios, incluyendo el cuadrado. El rectángulo áureo y otras variantes muy próximas resultaron elegidas por una destacada mayoría.

Mucho antes de eso, sin embargo, artistas y arquitectos de todas las épocas habían llegado ya a una conclusión parecida. La influencia de la sección áurea y sus diferentes manifestaciones puede encontrarse ya en la Grecia clásica con el ingenioso arquitecto Fidias.

La proporción áurea en la arquitectura.

La proposición áurea se intuye en construcciones humanas desde los antiguos egipcios, aunque raramente puede asegurarse que ello obedeciera a una preferencia deliberada. La altura y la base de la gran pirámide de Keops, por ejemplo, guardan entre si una íntima correspondencia con ϕ.

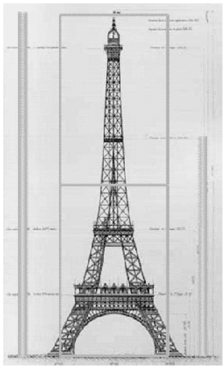


La relación entre la altura de una de sus caras y la base de la cara, así como entre dicha base y la altura de la pirámide, es ϕ. De igual modo, si sumamos las áreas de todas las caras de la pirámide más el área de su base y lo dividimos entre las áreas de su caras, obtenemos ϕ, nuevamente. Por ultimo, si dividimos las áreas laterales y las dividimos entre el área de su base, obtenemos el mismo resultado: ϕ.

Los arcos del triunfo de la Roma clásica resiguen la misma proporción, como también lo hacen las tumbas licias y las iglesias de la antigua ciudad de Mira (la actual Demre turca). Otras civilizaciones muy alejadas de la cultura clásica parecen coincidir en el aprecio por la razón de oro. No lejos del lago Titicaca, junto a la capital de Bolivia, La Paz, se encuentra la Puerta del Sol de Tiwanaku, monumento de una cultura preincaica regido completamente por el número ϕ.

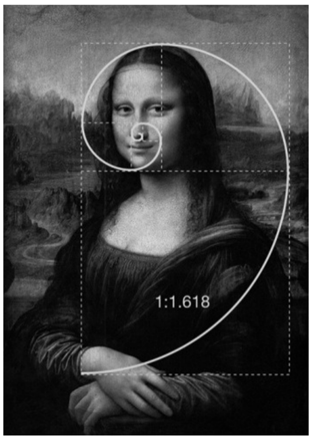
El ejemplo más representativo de uso clásico de la proporción áurea en la arquitectura ha sido el Partenón.

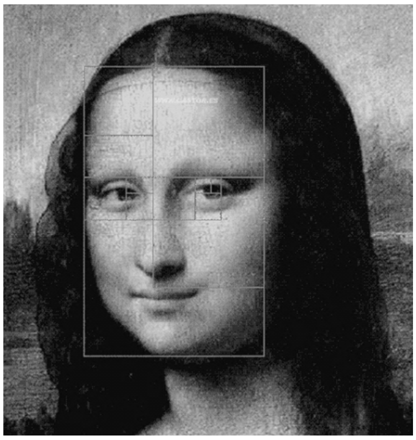
Desde entonces hasta nuestros días, encontraremos en la arquitectura, numerosas referencias a la proporción áurea: la fachada de la universidad de Salamanca, el edificio de las Naciones Unidas, la torre Eiffel, la catedral de Notre Dame…

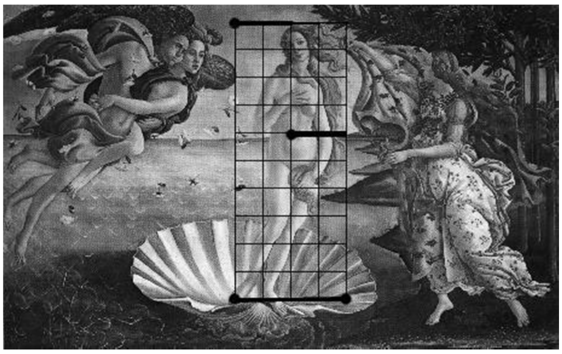
La proporción áurea en la pintura.

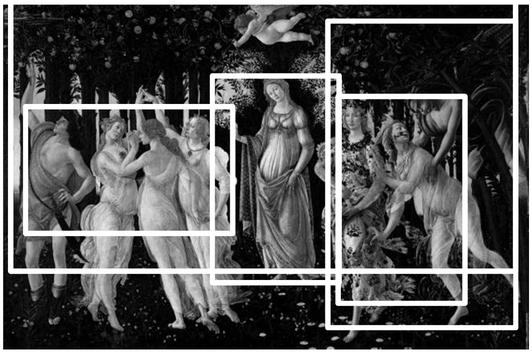
Tampoco el retrato de la Gioconda, por ejemplo, está exento de la razón áurea. Diversos estudios muestran cómo el rostro de *Mona Lisa*, tanto en su conjunto como en sus detalles, se enmarca con precisión en una elegante sucesión de varios rectángulos áureos.

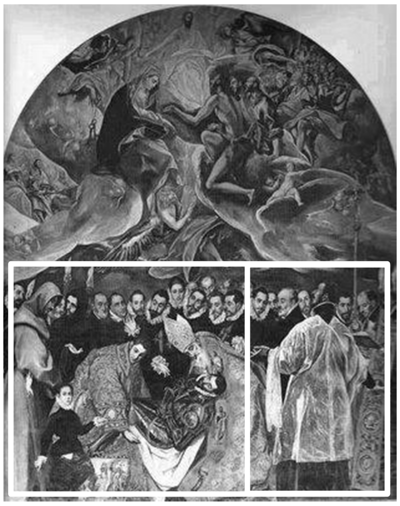




Algo similar encontramos también en obras como en *El nacimiento de Venus* y *La Primavera* de Botticelli, *El entierro del conde Orgaz* de El Greco o *La última cena* de Dalí







2. LOCALIZACIONES GEOGRÁFICAS

REFERENCIAS

Arce, M.; Blázquez, S. et al (2011) *Fundamentos de la forma y el volumen y estrategias didácticas para su enseñanza (Grado de Primaria)*. Facultad de Educación y Trabajo Social. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. *Tema 2: Fundamentos de didáctica de la geometría*. Universidad de Valladolid.

Bressan, A. M.; Bogisic, B. y Crego, K. (2000) *Razones para enseñar geometría en la educación básica.* Argentina. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*. En *Mathematics Education Library*. Gran Bretaña: Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C.B. (2001) *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Bulles, D. *Comprensión de lectura.* Talleres de comprensión lectora de matemáticas.
http://davidbuiles.wordpress.com/comprension-de-lectura/
(Consulta: 18 de junio de 2012)

Castro, E. (editor) (2001) *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Collete, J.P. (1991) *Historia de las matemáticas I*. Madrid: Siglo XXI

Corbalán, F. (2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. Colección "El mundo es matemático". Barcelona: RBA

De Guzmán, M. (1992) *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. En Olimpiadas Matemáticas Argentinas. Argentina. Buenos Aires

Euclides (1991) *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos

Euclides (1991) *Elementos. Libros V-IX.* Madrid: Gredos

Euclides (1991) *Elementos. Libros X-XIII.* Madrid: Gredos

Fauvel, J. (1991) *Using history in mathematics education.* For the learning of Mathematics, vol. 11, Num. 2

Fernández, S. (2001) *La historia de las matemáticas en el aula*. En Uno, Revista de Didáctica de las matemáticas, n. 26, pp. 9-27. Barcelona: Graó.

Gallego Lázaro, C. (2005) *Repensar el aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas para convivir comprendiendo el mundo*. Barcelona: Graó.

Gaussianos. *Demostración de la irracionalidad de raíz de 2*
http://gaussianos.com/dos-demostraciones-de-la-irracionalidad-de-raiz-de-2/
(Consulta: 18 de junio de 2012)

Goñi, J. M. (2008) *El desarrollo de la competencia matemática.* Barcelona: Graó.

Kline, M. (1994) *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* Madrid: Alianza Universidad.

Massa, M.R. (2007) *Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonométricos*. Epsilon nº 67 vol. 1.

Muñoz, J. (2010) *El rostro humano de las matemáticas.* CEP de Sevilla. http://www.slideshare.net/pepemunoz/exposicin-el-rostro-humano-de-las-matemticas (Consulta: 17 de junio de 2012)

Navarro, J. (2010) *Los secretos del número π. ¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?* Colección "El mundo es matemático". Barcelona: RBA

Puig Adam, P. (1955) *Decálogo de la didáctica matemática media* *http://es.scribd.com/doc/42385105/DECALOGO-DE-LA-DIDACTICA-MATEMATICA-MEDIA* (Consulta: 17 de Junio de 2012)

Pérez Sanz, A. (1996). Serie de matemáticas: *Más por menos – Universo Matemático*: Pitágoras, mucho más que un teorema; El número áureo; Historias de Pi. Madrid: RTVE.

Stewart, I. (2012) *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona: Graó.

Universidad de Valladolid. *Memoria del plan de estudios del título de Grado Maestro –o maestra- en Educación Primaria*. http://www.uva.es/uva/export/portal/com/bin/contenidos/gobiernoUVA/Vicerrectorados/VicerectoradoCalidadInnovacion/Planes_Estudios_Grados/EducacionPrimaria/EdPrimaria/1309953347264_uvagradoeducacionprimaria23032010v4.pdf (Consulta: 11 de junio de 2012)

VV.AA. (2002) *La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. Colección Claves para la Innovación Educativa nº 17. Barcelona: Graó.

Wussing, H. (1998) *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.