Anales de Estudios Económicos y Empresariales, Vol. XIX, 2009, 235-256

La Valoración de Opciones Reales con Múltiples Fuentes de Incertidumbre

Susana Alonso Bonis[1,2]

[1] *Departamento de Economía Financiera y Contabilidad, Universidad de Valladolid, España*

[2] *Premio Extraordinario de Doctorado (A.D.E.), Curso 2007-2008*

Resumen El presente trabajo plantea la combinación de la simulación de Monte Carlo, la programación dinámica y la regresión estadística en un modelo que permite valorar opciones reales de naturaleza cuasi-americana dependientes de múltiples fuentes de incertidumbre. La ventaja de la simulación radica en su flexibilidad para valorar opciones de naturaleza compleja dependientes de múltiples y diversas variables exógenas y procesos estocásticos no convencionales. La utilidad del modelo es analizada a partir de un análisis numérico, en el que se ponen de manifiesto las implicaciones derivadas del empleo de hipótesis inadecuadas a la naturaleza de la oportunidad evaluada.

Palabras clave Valoración, Opciones Reales, Opciones Americanas, Simulación de Monte Carlo, Múltiples Fuentes de Incertidumbre.
Clasificación JEL G31.

Correspondencia a: Susana Alonso Bonis (e-mail: salonso@eco.uva.es)

1. Introducción

Desde que Myers propusiera en 1977 la aplicación de la teoría de opciones a la valoración de la inversión empresarial, el número de trabajos teóricos y empíricos que abundan en esta idea ha venido creciendo de manera exponencial. Hoy en día son pocos los que dudan de la importancia de los resultados llamados "no monetarios" o estratégicos de la inversión empresarial y de la utilidad de la teoría de opciones para su valoración. La imagen de marca, la fidelidad de clientes, el conocimiento tecnológico o la flexibilidad operativa son buen ejemplo de resultados estratégicos, de indudable valor para la empresa, que brotan de sus inversiones. Estos resultados aportan valor a la empresa en tanto en cuanto permiten hacer algo que no podría hacer sin ellos. Es decir, en la medida en que proporcionan nuevas oportunidades, posibilidades de decisión u "opciones reales". Como apuntara Myers, estas opciones son asimilables a opciones financieras de compra y de venta y, por tanto, susceptibles de ser valoradas a partir de los mismos argumentos de réplica y arbitraje.

El enfoque de las opciones reales nos enseña la forma adecuada de valorar las distintas opciones reales. En este sentido, son numerosos los trabajos que proponen y desarrollan modelos contingentes –soluciones analíticas y procedimientos numéricos– adaptados a la valoración de opciones reales de diversa naturaleza. Estos modelos comparten el objetivo de capturar el valor de las características presentes en las oportunidades de inversión y abandono que se plantean las empresas, pero cada uno se concentra en un derecho decisión concreto definido sobre un activo subyacente de naturaleza específica.

Durante años, la carencia de un modelo general de opciones reales susceptible de aplicación a la mayor parte de las oportunidades de inversión en la empresa ha dificultado la utilización práctica del enfoque. Así, la valoración simultánea de rasgos habituales de la inversión empresarial como la posibilidad de tomar decisiones en más de una fecha futura y la dependencia de los flujos de múltiples fuentes de incertidumbre, no ha sido viable –desde un punto de vista operativo[1]– hasta que recientemente surgen en el ámbito de los derivados financieros, propuestas que combinan simulación de Monte Carlo, programación dinámica y regresión estadística (Carriere, 1996; Tsitsiklis y Van Roy, 2001; y Longstaff y Schwartz, 2001).

La conjunción de ventajas que cada una de estas técnicas proporciona, dota al procedimiento de valoración resultante de tal flexibilidad que es capaz de capturar el valor de las distintas fuentes de valor de cualquier tipo de inversión con independencia de la naturaleza de sus opciones y de sus fuentes de incertidumbre. En primer lugar, la simulación de Monte Carlo amplía significativamente el número de fuentes de incertidumbre y el espectro de los posibles procesos estocásticos a considerar en su caracterización. Segundo, la programación dinámica permite incorporar las posibilidades del ejercicio anticipado en la valoración de las opciones americanas que, por definición, otorgan a sus titulares la capacidad para ejercer el derecho en cualquier fecha anterior o coincidente con el vencimiento[2]. Y tercero, la regresión estadística permite solucionar el problema de cálculo que implica la valoración de opciones dependientes de múltiples fuentes de incertidumbre.

Como quiera que estas ventajas se antojan muy deseables para la valoración de las opciones reales, la adaptación de las anteriores propuestas al ámbito de la inversión empresarial está llamada a revolucionar la aplicación práctica del enfoque de opciones reales entre los responsables de la dirección financiera. Así se refleja en el número creciente de trabajos que incorporan múltiples factores estocásticos para recoger el riesgo asociado a la corriente de flujos subyacente y emplean la simulación de Monte Carlo, entre los que cabe destacar Schwartz y Moon (2000 y 2001), León y Piñeiro (2004), Sáenz-Diez (2004), Schwartz (2004) y

[1] El modelo binomial presenta el problema de la *maldición de la dimensionalidad* que supone un crecimiento exponencial de los recursos que requiere su implementación a medida que aumenta el número de fuentes de incertidumbre consideradas.

[2] De ahí que la valoración de estos activos resulte más compleja que la de sus homónimos europeos, cuyo ejercicio únicamente es posible al vencimiento y se determina sin más que relacionar el valor en esa fecha del subyacente y el precio de ejercicio.

Abadie y Chamorro (2006), que además consideran la presencia de correlaciones entre las variables exógenas.

Este trabajo se dirige, precisamente, al análisis de las posibilidades de flexibilización de la valoración de opciones reales a partir de la combinación de la simulación de Monte Carlo, la programación dinámica y la regresión estadística. Concretamente se plantea la adaptación al ámbito de la inversión empresarial y sus opciones del método *Least-Squares Monte Carlo* (en adelante LSM), propuesto por Longstaff y Schwartz en 2001, en aras de alcanzar un modelo que permita la valoración de opciones reales de naturaleza cuasi-americana con múltiples fuentes de incertidumbre. Adicionalmente se describen, mediante el análisis numérico de un problema de valoración, algunas de las implicaciones derivadas del empleo de hipótesis inadecuadas a la naturaleza de la oportunidad evaluada.

El resto del trabajo se articula como sigue. La sección segunda presenta el problema de valoración de opciones americanas con múltiples variables exógenas. La sección tercera se ocupa de la exposición del modelo basado en la simulación propuesto. La sección cuarta analiza la influencia de múltiples fuentes de incertidumbre mediante un análisis numérico. Cierra este trabajo la recopilación de las principales conclusiones.

2. La Valoración de Opciones Reales Americanas Dependientes de Múltiples Fuentes de Incertidumbre

Uno de los principales problemas de la aplicación práctica del enfoque de opciones reales reside en la caracterización de la evolución estocástica seguida por el valor del subyacente o, lo que es lo mismo, del valor de la empresa o proyecto de inversión sin opciones. En la mayoría de los casos, la compleja relación que existe entre las variables que determinan los flujos de tesorería y, a través de éstos, el valor estático del activo hace prácticamente imposible adivinar el patrón de comportamiento estocástico más previsible. En otros casos, la casi imposible separación del valor de las opciones reales y sus subyacentes impide la identificación de la acción gemela del activo sin opciones y su correspondiente coste de capital.

Ante este tipo de dificultades, una posible solución consiste en plantear la valoración simultánea del subyacente y sus opciones, desplazando la aplicación de los argumentos de réplica y arbitraje sobre la variable o variables de estado de las que dependen en última instancia los flujos de tesorería del activo. Así, una hipótesis habitual de los modelos convencionales de valoración de opciones reales ha sido la consideración de una única variable exógena[3,4]. Pero en la actualidad se tiende a refinar la modelización del activo subyacente a partir de múltiples fuentes de incertidumbre –volatilidad, riesgo de crédito, rentabilidad de conveniencia estocástica, ... (Gravet, 2003)– lo que requiere el empleo de herramientas de valoración flexibles.

La simulación de Monte Carlo reúne características valiosas para el desarrollo e implementación de herramientas flexibles de valoración de derivados. En primer lugar, representa un procedimiento intuitivo, al aproximar directamente el proceso estocástico de la variable incierta. Además, se trata de una técnica flexible fruto de la generalidad de activos a los que puede aplicarse y la facilidad para incluir dependencias en el tiempo. Por último, simplifica la incorporación de múltiples fuentes de incertidumbre, debido a que la convergencia del proceso de aproximación depende linealmente del número de variables de estado.

A pesar de estas ventajas, no puede decirse que hayamos llegado a explotar todo el potencial de la simulación en la valoración de opciones. La razón de este aparente retraso se halla en la propia naturaleza de los modelos tradicionales de

[3] En Lander y Pinches (1998) puede encontrarse una revisión de los modelos convencionales de valoración de opciones reales que recoge las hipótesis más habituales de los modelos planteados hasta ese momento.

[4] Otra alternativa planteada consiste en reducir las fuentes de incertidumbre a una única –la variablidad del proyecto a lo largo del tiempo– que de acuerdo con el teorema de Samuelson (1965) evoluciona en el tiempo de acuerdo con una caminata aleatoria normal con volatilidad constante (Copeland y Antikarov, 2001).

simulación que impide identificar la política óptima de ejercicio de las opciones americanas. El método de Monte Carlo es un procedimiento de inducción "hacia delante", que genera valores futuros de la variable a partir de su valor previo y, por tanto, no resulta apropiado para valorar activos cuyos flujos dependen de los acontecimientos futuros, como es el caso de las opciones americanas. De ahí que, en los últimos años, diversas investigaciones hayan propuesto superar esta limitación mediante la conjunción de la simulación con la programación dinámica, una técnica de inducción "hacia atrás" que permite su aplicación a la valoración de opciones americanas (Tilley, 1993; Barranquand y Martineau, 1995; Grant *et al.*, 1996; Longstaff y Schwartz, 2001; Broadie y Glasserman, 2004).

Y es que, la programación dinámica resume la secuencia de todas las posibles decisiones de ejercicio que conlleva la opción americana en dos únicos elementos: el valor de la decisión inmediata y un valor de continuación, que recoge las consecuencias de todas las decisiones siguientes empezando con la posición resultante de la decisión inmediata. En consecuencia, el valor de la opción en un momento concreto se determina en función de su valor en el período siguiente, lo que requiere que el procedimiento de valoración se inicie en la fecha de vencimiento y se mueva cronológicamente hacia atrás en el tiempo.

Aunque el empleo de la programación dinámica en la estimación de la política de ejercicio de los derivados americanos ya está presente en los procedimientos numéricos habituales de valoración de derivados –como el modelo binomial (Cox *et al.*, 1979) y los esquemas de diferencias finitas (Brennan y Schwartz, 1977)– la implementación de estos procedimientos resulta costosa cuando se contempla la existencia de múltiples fuentes de incertidumbre y procesos estocásticos diferentes de la familia del geométrico-browniano.

En pocos años, la combinación de la simulación de Monte Carlo y la programación dinámica ha logrado posicionarse entre los principales procedimientos numéricos de la valoración de derivados financieros y apunta a convertirse en la principal herramienta de valoración en el ámbito de las opciones reales. Para ello ha sido necesario superar los problemas de consumo de recursos –tiempo y requisitos informáticos– que requería la implementación de las primeras propuestas. El logro se debe en buena medida a los progresos alcanzados en la estimación de la política óptima de ejercicio mediante el empleo de regresiones estadísticas, tal y como plantearan Logstaff y Schwartz en su trabajo seminal del año 2001. Y precisamente, en la propuesta planteada por estos autores se apoya el modelo de valoración de opciones reales americanas dependientes de múltiples fuentes de incertidumbre que presentamos en la siguiente sección.

3. Propuesta de un Modelo de Valoración de Opciones Reales con Múltiples Fuentes de Incertidumbre

El modelo que se plantea tiene por objeto la valoración de opciones reales –tanto de crecimiento (compra) como de decrecimiento o abandono (venta)– de duración limitada, T^0, que pueden ejercerse en uno o más momentos futuros, durante la vida limitada o ilimitada de la empresa o proyecto de inversión subyacente. A efectos de la exposición de la propuesta de valoración que va a efectuarse, vamos a considerar un vencimiento para el activo subyacente de la opción, T.

El proceso de valoración comienza, con la identificación de las variables de estado últimas de las que dependen los flujos de tesorería de la empresa, $S_1, S_2, ..., S_n$, y de sus correspondientes procesos en tiempo continuo. En este sentido, una de las características que hace a la simulación tan atractiva en la valoración de derivados es que al aproximar directamente el proceso estocástico seguido por la variable de estado es posible trabajar con procesos muy diversos. Así, por ejemplo, esta técnica resulta especialmente útil para valorar aquellas opciones cuyas fuentes de incertidumbre evolucionan de acuerdo con una mezcla de procesos continuos y saltos discretos, ya que estos procesos mixtos dan lugar a ecuaciones diferenciales parciales muy complejas, pero que sin embargo no es necesario resolver cuando se utiliza la simulación[5].

[5] Una aplicación empírica donde la variable de estado sigue un proceso mixto puede

A efectos de plantear el modelo de valoración de opciones reales que depende de las técnicas de simulación, vamos a suponer el proceso estocástico más comúnmente empleado en la modelización del comportamiento de los activos, el Movimiento Geométrico Browniano, siendo la expresión que determina su evolución la siguiente,

$$dS_{j,t} = \alpha_j S_{j,t} dt + \sigma_j S_{j,t} dz_j \quad \text{siendo } j = 1, 2, \ldots, n \text{ las fuentes de incertidumbre}$$

y donde α_j representa la variación instantánea esperada de la variable exógena j; σ_j representa la volatilidad, es decir, la desviación de la tendencia esperada o término de incertidumbre; y dz_j son los respectivos incrementos de un proceso de Wiener que se definen del siguiente modo

$$dz_j = \xi_j \cdot \sqrt{dt}\,, \quad \xi_j \to N(0,1) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

La relación entre las "n" fuentes de incertidumbre se supone del tipo pareado, es decir, correlaciones dos a dos entre los cambios no anticipados en la variación de las diferentes variables, dz_j, y se modeliza a través del coeficiente de correlación $\rho_{j,k}$

$$dz_j * dz_k = \rho_{j,k}.$$

El siguiente paso de la valoración por simulación requiere la obtención de la versión discreta de los procesos ajustados al riesgo. Aplicando los principios de la valoración neutral al riesgo[6] , las expresiones que se proponen para el proceso anterior son,

$$dS_{j,t} = (r - \delta_j) S_{j,t} dt + \sigma_j S_{j,t} dz_j \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

consultarse en Alonso *et al.*, (2009).

[6] La simulación neutral al riesgo presenta una tendencia modificada, $r-\delta$, en lugar de la tendencia del proceso inicial, α . Esto es equivalente a deducir una prima de riesgo de la tendencia $\alpha - \beta\sigma = r - \delta$, donde β es la prima de riesgo del mercado correspondiente al activo subyacente (Trigeorgis, 1996, p. 102).

y donde r es el tipo de interés libre de riesgo[7] continuo; y δ_j la tasa de dividendos o "rentabilidad de conveniencia" de cada una de las fuentes de incertidumbre consideradas.

Para resolver las anteriores ecuaciones diferenciales basta aplicar el Lema de Ito, de manera que el valor de las variables de estado en un momento cualquiera, t, puede obtenerse a partir de las siguiente expresión,

$$S_{j,t} = S_{j,0} \cdot \exp \left[(r - \delta_j - 0{,}5\,\sigma_j^2)\triangle t + \sigma_j \xi_j \sqrt{\triangle t} \right],$$

siendo las respectivas ξ_j variables normales unitarias asociadas a la aleatoriedad de los procesos correlacionados de difusión. De este modo, la simulación de los valores de las variables de estado tan sólo requiere obtener un conjunto de valores muestrales de la distribución normal estándar, a partir de las cuales se obtienen los correspondientes valores para $S_{j,t}$. Una posible forma de generar las variables correlacionadas se presenta en el Anexo I.

En los diferentes intervalos temporales considerados, cada conjunto de valores simulados de las variables de estado determina un par de valores del proyecto subyacente contingentes al ejercicio de la opción, $V^i_{t,ejercicio}(S^i_{1,t}, S^i_{2,t}, \ldots, S^i_{n,t})$, y $V^i_{t,no-ejercicio}(S^i_{1,t}, S^i_{2,t}, \ldots, S^i_{n,t})$, en donde el superíndice i indica el número de simulaciones realizadas. El valor del subyacente si se ejercita la opción en t (con $t \leq T^0$) se corresponde con el valor actual de los flujos de caja del proyecto con opciones entre $t+1$ y la fecha de vencimiento del proyecto o empresa subyacente, considerando además el precio de ejercicio, X, cobrado o pagado por la venta o

[7] La simulación del proceso neutral al riesgo en la valoración de activos derivados se basa en la hipótesis de mercados completos. Obviamente, la simulación del proceso real y la actualización al tipo de descuento ajustado al riesgo del activo subyacente, proporciona el valor correcto para el valor del activo subyacente, pero proporciona un resultado equivocado para el activo derivado, ya que el riesgo del derivado y del activo subyacente son diferentes y consecuentemente también lo serán el tipo de descuento ajustado al riesgo para uno y otro.

la compra del proyecto, según se trate, respectivamente o de compra:

$$V^i_{t,ejerc.}(S^i_{1,t}, S^i_{2,t}, \ldots, S^i_{n,t}) = \pm PE + F^i_{t,no-ejerc.} + \sum_{\tau=t+1}^{T} F^i_{\tau,ejerc.} \exp\left[-r(\tau - t)\right].$$

Para determinar el valor del proyecto subyacente si la opción no se ejercita es preciso distinguir entre la fecha de vencimiento de la opción, y los restantes momentos en que se permite el ejercicio anticipado. Así, si $t = T^0$, el valor del subyacente si no se ejercita la opción y expira sin ejercicio, se corresponde con valor actual de los flujos de caja del proyecto sin opciones entre la fecha de vencimiento de la opción y la fecha de vencimiento del proyecto o empresa subyacente,

$$V^i_{T^0,no-ejerc.}(S^i_{1,t}, S^i_{2,t}, \ldots, S^i_{n,t}) = \sum_{\tau=T^0}^{T} F^i_{\tau,no-ejerc.} \exp\left[-r(\tau - T^0)\right].$$

Mientras que si la opción no se ejerce en un momento t anterior al vencimiento (es decir, $t < T^0$) y se mantiene "viva" hasta el período siguiente, el valor del proyecto se determina considerando el posible ejercicio óptimo en un instante posterior. Es decir, el valor del subyacente se calcularía a partir del valor actual de los flujos derivados del proyecto sin opciones entre t y el ejercicio óptimo de la opción en un momento posterior, t^*, más el valor actual del proyecto con opciones entre el momento siguiente al ejercicio óptimo, $t^* + 1$, y la fecha de vencimiento de la empresa o proyecto subyacente,

$$\begin{aligned} V^i_{t,no-ejerc.}(S^i_{1,t}, S^i_{2,t}, \ldots, S^i_{n,t}) = & \sum_{\tau=t}^{t^*} F^i_{\tau,no-ejerc.} \exp\left[-r(\tau - t)\right] + \\ & + \sum_{\tau=t^*+1}^{T} F^i_{\tau,ejerc.} \exp\left[-r(\tau - t^*)\right], \end{aligned}$$

donde r, como ya se ha señalado, es el tipo de interés libre de riesgo, i indica que se trata de la i-ésima trayectoria simulada y n representa el número de variables de estado.

Relacionando estos valores para el conjunto de trayectorias simuladas puede estimarse la regla de ejercicio óptimo de la opción americana en cada momento en que se permite el ejercicio anticipado de la misma. Nuestra propuesta de valoración se concreta en la estimación de la frontera de ejercicio óptimo de la opción, determinando para aquellos momentos en que se permite el ejercicio anticipado de la misma, los coeficientes asociados a las variables de estado que equiparan los flujos resultantes del ejercicio de la opción con el valor de mantenerla viva hasta el periodo siguiente.

La idea sobre la que se sustenta esta aproximación de la frontera de ejercicio óptima es que a partir de la regresión efectuada sobre el conjunto de trayectorias simuladas que se encuentren en el dinero en un determinado momento, puede estimarse la función esperada de la diferencia entre el valor derivado del ejercicio inmediato y el valor de continuación o valor esperado de mantener viva la opción. Estimando la función de esta diferencia en cada uno de los momentos en que se permite el ejercicio anticipado, se obtiene una completa especificación de la estrategia óptima en cada fecha de ejercicio.

Una vez determinados los coeficientes de la regresión asociados a las variables en los distintos momentos en que es posible el ejercicio, la simulación de un número suficiente de trayectorias de las variables de estado nos permite determinar, de acuerdo con la frontera de ejercicio óptima, el momento en que resulta óptimo el ejercicio de la opción. El valor actual de la opción puede entonces aproximarse a través del promedio de la muestra de observaciones simuladas. Nótese, que al aplicar los argumentos de réplica y arbitraje sobre las variables últimas de las que dependen los flujos y valorar de forma simultánea el subyacente y las opciones, el resultado que se deriva del procedimiento de valoración no corresponde directamente con el valor del derecho propiamente dicho, como ocurre con los derivados financieros, sino con el valor ampliado del proyecto subyacente cuya propiedad incorpora la opción real.

La resolución del problema de valoración se desarrolla, por tanto, en dos etapas: *i)* una primera que consiste en la estimación de los sucesivas regresiones a través de la combinación del método de Monte Carlo y la programación dinámica; y *ii)* una segunda que supone la determinación del valor de la opción a partir de las regresiones anteriores y que requiere únicamente el empleo de las técnicas de simulación[8]. Al tratarse de la evaluación de una opción de estilo americano, cuyo ejercicio óptimo depende en cada momento de las expectativas futuras, el procedimiento de estimación de las sucesivas funciones de la diferencia entre el valor de ejercer y no ejercer ha de seguir un proceso recursivo en el tiempo que tome como punto de partida la fecha de vencimiento de la opción.

En cada instante en que resulta factible el ejercicio anticipado, el procedimiento comienza con la determinación de las trayectorias simuladas de las variables de estado que se encuentran en el dinero, ya que, en principio, son las únicas para las que merece la pena plantearse la decisión de ejercer o no. Con estas trayectorias se plantea una regresión en la que la variable dependiente se calcula como la diferencia entre el valor del subyacente derivado del ejercicio inmediato y el correspondiente valor en caso de mantener viva la opción; y las variables independientes se basan en los valores simulados de las variables de estado (ya sea elevados al cuadrado, al cubo, ..., o como resultado de otro tipo de funciones). A partir de esta regresión, se obtienen los valores de los coeficientes asociados a los términos independientes que conforman la frontera de ejercicio óptima. Así, por ejemplo, en un momento cualquiera t, y considerando una regresión parabólica, la ecuación a estimar es,

$$\begin{aligned} Y_t^i(S_{1,t}^i, S_{2,t}^i, \ldots, S_{n,t}^i) &= a + \beta_{1,t}(S_{1,t}^i)^2 + \beta_{2,t}(S_{2,t}^i)^2 + \ldots + \beta_{n,t}(S_{n,t}^i)^2 + \\ &+ \omega_{1,t}S_{1,t}^i + \ldots + \omega_{n,t}S_{n,t}^i, \end{aligned}$$

[8] Para evitar sesgos en el valor de la opción, el conjunto de trayectorias de la/s variable/s de estado utilizado en la segunda etapa conviene que sea diferente de las simulaciones empleadas para la obtención de la frontera de ejercicio óptima (Broadie y Glasserman, 1997b).

donde

$$Y_t^i(S_{1,t}^i, S_{2,t}^i, \ldots, S_{n,t}^i) = V_{t,ejerc}^i(S_{1,t}^i, S_{2,t}^i, \ldots, S_{n,t}^i) - V_{t,no-ejerc}^i(S_{1,t}^i, S_{2,t}^i, \ldots, S_{n,t}^i).$$

Este procedimiento se repite en cada momento en que se permite el ejercicio de la opción, teniendo en cuenta que para la determinación de las trayectorias que se encuentran en el dinero en un instante es preciso considerar la posibilidad de ejercicio óptimo de la opción en un momento posterior a partir de los resultados de las regresiones que se han ido estimando en los periodos siguientes. Es decir, en un momento t, el valor del subyacente en caso de no ejercicio de la regresión anterior considera el posible ejercicio óptimo en un instante posterior.

Con este procedimiento basado en regresiones se superan los inconvenientes operativos que presentan algunos de los procedimientos propuestos en la literatura para resolver este tipo de problemas de valoración (Tilley, 1993; Barranquand y Martineau, 1995; Raymar y Zwecher, 1997; Grant *et al.*, 1996; Broadie y Glasserman, 1997a y 1997b; Broadie *et al.*, 1997; Ibáñez y Zapatero, 2001). Por último, una vez determinados los coeficientes de las regresiones que conforman la frontera de ejercicio óptima, la estimación del valor de la opción americana puede obtenerse utilizando la simulación tradicional como si de una opción europea se tratase.

4. Análisis Numérico de las Implicaciones de Múltiples Fuentes de Incertidumbre en la Valoración

Con el fin de ilustrar la utilidad de la propuesta de valoración planteada y con ello el interés de la flexibilización de la valoración de opciones reales, consideramos a continuación la valoración de un negocio que se espera que genere una corriente de flujos que depende de múltiples variables de estado. Concretamente, el estudio de la influencia de un mayor número de fuentes de incertidumbre sobre el valor actual ampliado se aborda analizando primero la valoración de un negocio con una única fuente de incertidumbre –por ejemplo, la demanda de un determinado producto, S_t– y a continuación los resultados derivados a partir de la variable anterior y otra variable adicional –por ejemplo el precio unitario de dicho producto, P_t–.

Con ánimo de simplificar la valoración, suponemos que la evolución en el tiempo de ambas variables se ajusta a un proceso geométrico browniano estándar, estando los cambios no anticipados en las variaciones de ambas variables correlacionadas, a través del coeficiente de correlación ρ. También por simplicidad, suponemos que el resto de factores que intervienen en la estimación de los flujos de caja derivados de este problema de valoración se mantienen constantes durante el período de análisis. No obstante, el modelo planteado permite incorporar fácilmente estructuras más complejas en el modelo, fundamentalmente en lo que se refiere al comportamiento estocástico de los costes, reflejando así la incertidumbre relativa a las potenciales acciones de los competidores, al cambio tecnológico, ...

El valor inicial de la demanda del mercado, se establece igual a 100 unidades físicas, el precio unitario igual a 2 unidades monetarias, la cuota de mercado atendida por la empresa es del 50 %, el flujo de tesorería viene determinado por un coste unitario conocido y constante igual a la unidad y el desembolso inicial requerido asciende a 50 unidades monetarias. En el Cuadro 1 se recogen los principales parámetros relativos al ejemplo supuesto de inversión.

A partir de la evolución estocástica de las variables últimas de las que depende la corriente de flujos, nos planteamos evaluar la posibilidad de ampliar la dimensión inicial del negocio en diferentes momentos del tiempo. Este derecho a disposición de la empresa se asimila a una opción de compra de estilo americano, que implica el incremento de la cuota de mercado en un 20 % adicional con un coste o precio de ejercicio igual a 25 u.m.

Para analizar el efecto que tiene la incorporación de una segunda variable de estado, en nuestro caso el precio unitario, el valor de la opción es estimado ensayando con volatilidades alternativas de esta segunda variable, σ_p, 10 %, 20 %

Cuadro 1: Datos iniciales del proyecto de inversión.

Valor inicial de la demanda	100 udes
Tanto de crecimiento anual de la demanda	15 %
Volatilidad de la demanda	20 %
Valor inicial del precio unitario	2 u.m.
Coste por unidad de producto	1 u.m
Rendimiento del negocio	10 %
Tasa de interés libre de riesgo	5 %
Valor residual del negocio	0 u.m
Duración del negocio	2 años
Cuota de mercado inicial	50 %
Unidad de tiempo de análisis	Semestral

y 30 %, y tasas de crecimiento anual medio, α_p, del 0 %, 7 % y 15 %; también ensayamos con diferentes parámetros de correlación del 0, -10 %, -20 %, -30 %, -40 % y -50 %.

El proceso de valoración comienza con la simulación de un conjunto de trayectorias de nuestras variables estocásticas en los distintos subintervalos de análisis considerados. En concreto, la simulación se ha realizado tomando subintervalos anuales, evaluándose la posibilidad del ejercicio anticipado de la opción en dos momentos discretos. El número de trayectorias simuladas para obtener el valor actual de la opción en los diferentes supuestos asciende a 200.000, que resulta de 100.000 aproximaciones directas más 100.000 estimaciones utilizando la técnica de reducción de varianza de las "variables antitéticas"[9].

A partir de los valores simulados de las variables de estado en cada momento estimamos los flujos netos de tesorería del problema inicial, sin opciones, y el valor actual convencional. A continuación, determinamos el valor actual ampliado mediante la aplicación del modelo de simulación propuesto, estimando el valor de

[9] Mediante esta técnica, la simulación de una trayectoria del valor de la variable de estado proporciona dos valores del derivado, el primero de ellos calculado del modo habitual y el segundo cambiando el signo de todas las muestras aleatorias obtenidas a partir de la distribución normal estándar.

la opción de naturaleza americana considerada como la diferencia entre ambos valores actuales.

La evolución del valor del derecho derivado de cada uno de los supuestos alternativos de los parámetros del proceso seguido por la segunda variable se presenta en la Figura 1. La figura representa, en el eje de ordenadas, el valor de la opción en unidades monetarias; en el eje de abscisas, los distintos niveles de correlación considerados, correspondiendo el primero de los resultados al supuesto en el que existe una única fuente de incertidumbre; y por último, en el eje restante, se incluyen los diferentes niveles de volatilidad de la segunda variable exógena considerada. Para cada nivel de volatilidad continua y correlación se incluyen tres resultados que corresponden a distintos niveles de crecimiento esperado de la variación continua de la segunda variable.

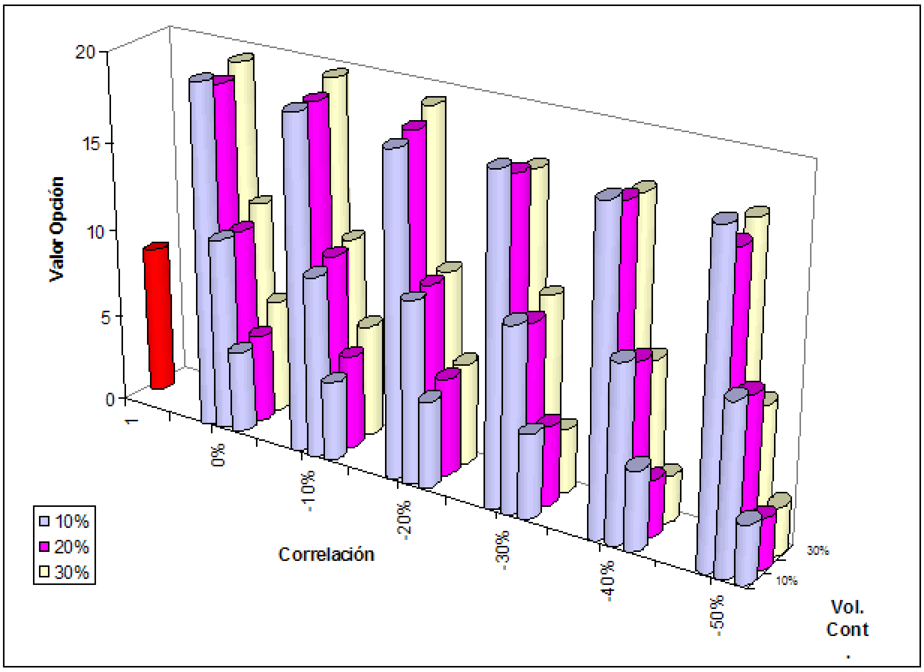

Figura 1: Valor Actual de la Opción de Ampliación Americana.

Puede observarse que los resultados obtenidos confirman la existencia de diferencias significativas en el valor de la opción analizada según se considere una o dos variables de estado y en función de los valores asignados a los distintos parámetros analizados. Respecto al valor de la opción con una o dos variables exógenas y cualquiera que sea el nivel de correlación analizado, se aprecia una infravaloración importante en el valor de la opción sobre una única fuente de incertidumbre cuando la tasa de crecimiento de la segunda variable toma el valor más elevado. Esta infravaloración puede provocar incluso el rechazo de la ejecución de negocios rentables. Mientras que cuando la tendencia esperada de esta segunda variable es nula se observa una sobrevaloración del valor de la opción sobre una variable, pudiendo ocasionar el ejercicio del derecho antes de su fecha óptima e incluso la aceptación de proyectos no rentables.

Estos resultados ponen de manifiesto que, en cualquiera de los casos, la omisión de la segunda fuente de incertidumbre relevante para el valor del activo subyacente, implica la aparición de sesgos –al alza o a la baja respectivamente– en la valoración que pueden conducir a decisiones de inversión sub-óptimas.

Asimismo, resulta destacable la diferente relación entre el nivel de volatilidad de la segunda variable y el valor de la opción en función de los distintos grados de correlación analizados. Así, podemos apreciar un incremento en el valor del derecho a medida que aumenta la incertidumbre de la segunda variable para aquellos niveles de correlación no elevados –entre 0 % y -20 %–, mientras que para niveles más negativos de correlación la relación es la contraria. La explicación a esta relación anómala debe buscarse en que ante los niveles más elevados de correlación negativa el incremento de la volatilidad reduce en gran medida el valor del activo subyacente, modificando la probabilidad de ejercicio.

Por último, los resultados evidencian el esperado incremento del valor del derecho a medida que aumenta la tasa de crecimiento anual de la segunda variable considerada para un determinado nivel de volatilidad. Obviamente, cuánto más favorable es el escenario previsto respecto al crecimiento de esta segunda variable, más valiosa resulta cualquier acción destinada a incrementar las dimensiones del proyecto o empresa inicial.

5. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo, hemos afrontado el problema de la valoración de opciones reales con múltiples fuentes de incertidumbre. La combinación de la naturaleza americana y diversas fuentes de incertidumbre dificultan tanto la resolución analítica del sistema fundamental de valoración como la aplicación de los procedimientos numéricos tradicionales.

Una técnica de valoración de opciones marginada durante muchos años al análisis de derivados de estilo europeo, ha sido recientemente rescatada para, en combinación con la programación dinámica, valorar opciones reales complejas como las descritas. La razón de este aparente retraso se halla en la propia naturaleza de los modelos tradicionales de simulación que impide identificar la política óptima de ejercicio. El método de Monte Carlo es un procedimiento de inducción *hacia delante*, que genera valores futuros de la variable a partir de su valor previo y, por tanto, no resulta apropiado para valorar cuyos flujos dependen de los acontecimientos futuros, como es el caso de las opciones americanas. Recientes trabajos proponen superar esta limitación mediante la combinación de la simulación con alguna técnica de inducción hacia atrás que permita su aplicación a la valoración de opciones americanas.

En línea con este tipo de propuestas, hemos planteado un modelo de valoración basado en la simulación de Monte Carlo que nos permite valorar opciones reales cuasiamericanas asociadas a proyectos de inversión que generan flujos de tesorería dependientes de diversas fuentes de incertidumbre y diversos procesos estocásticos. El modelo propuesto se apoya en el procedimiento desarrollado por Longstaff y Schwartz (2001) en el ámbito de los derivados financieros, y que añade a la simulación y la programación dinámica el empleo de la regresión estadística. De este modo es posible afrontar el considerable consumo de recursos informáticos que conlleva la implementación de este tipo de propuestas.

Con el fin de evaluar la utilidad de este modelo, analizamos los resultados de su aplicación a un problema de valoración en el que confrontamos sendos supuestos acerca de la dependencia de los flujos de tesorería de una única variable o exógena o de dos variables. Los resultados obtenidos de esta valoración confirman la existencia de diferencias significativas en el valor del derecho en función de que se considere o no la existencia de una segunda variable relevante, que pueden ser al alza o a la baja. Estas diferencias justifican el esfuerzo de abstracción, modelización e informatización requeridos por nuestra propuesta de valoración –que combina simulación de Monte Carlo y programación dinámica–, cuando la evolución del negocio recomiende la consideración de una segunda fuente de incertidumbre.

Referencias

1. Abadie, L. M. and J. M. Chamorro, (2006): Valuation of Natural Gas Power Plant Investment. *Presentado en X Real Options Conference*, Nueva York.
2. Alonso, S., V. Azofra y G. de la Fuente, (2009): Las opciones reales en el sector eléctrico. El caso de la expansión de Endesa en Latinoamérica. *Cuadernos de Economía y Dirección de la Empresa*, 38, 65-94.
3. Barranquand, J. and D. Martineau, (1995): Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, 383-405.
4. Brennan, M. and E. Schwarz, (1977): The valuation of American Put Options. *Journal of Finance*, 32, 449-462.
5. Broadie, M. and P. Glasserman, (1997a): Pricing American-Style Securities Using Simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1323-1352.
6. Broadie, M. and P. Glasserman, (1997b): A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options. *Working paper*.

7. Broadie, M., P. Glasserman and G. Jain, (1997): Enhanced Monte Carlo Estimates for American Options Prices. *Journal of Derivatives*, 5, 25-44.
8. Carrière, J., (1996): Valuation of Early-Exercise Price of Options Using Simulation and Non-Parametric Regression. *Insurance: Mathematics and Economics*, 19, 19-30.
9. Copeland T. and V. Antikarov, (2001): *Real Options. A practitioner's guide*. Ed. Texere LLC. New York.
10. Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein, (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
11. Grant, D., G. Vora and D. Weeks, (1996): Simulation and the Early-Exercise Option Problem. *Journal of Financial Engineering*, 5, 211-227.
12. Gravet, M. A., (2003): *Evaluación de opciones reales mediante simulación: El método de los mínimos cuadrados*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Industrial. Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile.
13. Ibáñez, A. and F. Zapatero, (2001): Monte Carlo Valuation of American Options Through Computation of the Optimal Exercise Frontier. *Working paper.*
14. Lander, D. and G. Pinches, (1998): Challenges to the practical implementation of modeling and valuing real options. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 38, 537-567.
15. León, A. and D. Piñeiro, (2004): Valuation of a biotech company: A real options approach, *Working paper* CEMFI.
16. Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz, (2001): Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *The Review of Financial Studies*, 14, 113-147.
17. Myers, S. C., (1977): Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, 5, 147-175.
18. Raymar, S. and M. Zwecher, (1997): Monte Carlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks. *The Journal of Derivaties*, 5, 7-23.
19. Sáenz-Diez, R., (2004): *Valoración de inversiones a través del método de opciones reales. El caso de una empresa tecnológica*. Tesis Doctoral, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.

20. Samuelson, P., (1965): Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, 6, 41-49.
21. Schwartz, E. S., (2004): Patents and R&D as Real Options. *Economics Notes*, 33, 23-54.
22. Schwartz, E. S. and M. Moon, (2000): Rational Pricing of Internet Companies. *Financial Analyst Journal*, 56, 62-75.
23. Schwartz, E. S. and M. Moon, (2001): Rational Pricing of Internet Companies Revisited. *Financial Review*, 36, 7-26.
24. Tilley, J.A., (1993): Valuing American Options in a Path Simulation Model. *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, 83-104.
25. Trigeorgis, L., (1990): A Real-Options Application in Natural-Resource Investments. *Advances in Futures and Options Research*, 4, 153-164.
26. Tsitsiklis, J. and B. Van Roy, (2001): Regression Methods for Pricing Complex American-Style Options. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 12, 694-703.

ANEXO I

La generación de las variables aleatorias correlacionadas, z_1 y z_2, consiste en la estimación de un vector de variables aleatorias, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, que presentan una distribución normal multivariada con una matriz de varianzas y covarianzas $V(z)$ dada por

$$V(z) = V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \text{ Como } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1, \text{ se tiene } V = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Es posible, entonces, simular los valores de z_1 y z_2 generando primero un valor para z_1 y obteniendo mediante una regresión el valor de z_2 del siguiente modo,

$$z_2 = bz_1 + e_{z_2},$$

donde b es el coeficiente de la regresión de z_2 sobre z_1 y e_{z_2} es la parte de z_2 que no depende de z_1 y que tiene una media de cero y varianza $(1-\rho_{12}^2)\sigma_2^2$ (es decir la varianza del error residual de z_2 después de permitir la correlación con z_1).

Si generamos z_1 a partir de una desviación aleatoria normal, w_1 , con varianza 1, entonces $z_1 = \sigma_1 w_1 = w_1$. Por tanto:

$$\begin{aligned} bz_1 &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\sigma_1 w_1 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} w_1, \\ bz_1 &= \sigma_2 \rho_{12} w_1. \end{aligned}$$

De forma similar $e_{z_2} = \sigma_{e_{z_2}} w_2 = \sigma_2 \sqrt{(1-\rho_{12}^2)}\, w_2$. Así, tenemos que

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \sigma_2 \rho_{12} w_1 + \sigma_2 \sqrt{(1-\rho_{12}^2)}\, w_2 \end{pmatrix},$$

y a partir de z_1 y z_2 podemos obtener los valores simulados de S_t y P_t.