



---

## **Universidad de Valladolid**

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTÓNICAS,  
INGENIERÍA DEL TERRENO Y MECÁNICA DE LOS MEDIOS  
CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TESIS DOCTORAL:

**FORMULACIÓN PARAMÉTRICA Y TÉCNICAS  
DE MODEL UPDATING PARA EL ANÁLISIS  
ELASTOPLÁSTICO DE PÓRTICOS CON DAÑO**

**(PARAMETRIC APPROACH AND MODEL UPDATING  
TECHNIQUES FOR THE DAMAGE-ELASTOPLASTIC  
ANALYSIS OF FRAMES)**

Presentada por **PABLO M. LÓPEZ REYES** para  
optar al grado de doctor por la Universidad de Valladolid.

Dirigida por:

**ANTOLÍN LORENZANA IBÁN**

Dr. Ingeniero Industrial





ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES



ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTÓNICAS,  
INGENIERÍA DEL TERRENO Y MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS  
Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TESIS DOCTORAL:

**FORMULACIÓN PARAMÉTRICA Y TÉCNICAS DE MODEL  
UPDATING PARA EL ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO  
DE PÓRTICOS CON DAÑO**

**(PARAMETRIC APPROACH AND MODEL UPDATING  
TECHNIQUES FOR THE DAMAGE-ELASTOPLASTIC  
ANALYSIS OF FRAMES)**

Presentada por **PABLO M. LÓPEZ REYES**, Ingeniero Industrial por la  
Escuela de Ingenierías Industriales de la Universidad de Valladolid

Dirigida por **ANTOLÍN LORENZANA IBÁN**, Profesor Titular en el  
Departamento de Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del Terreno y  
Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universidad de  
Valladolid

Esta Tesis Doctoral fue leída en la Escuela de Ingenierías Industriales de la  
Universidad de Valladolid, el día \_\_\_\_\_, estando compuesto  
el tribunal calificador por:

Presidente

Secretario

Vocal primero

Vocal segundo

Vocal tercero

Obteniendo la calificación de \_\_\_\_\_.

Valladolid, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2013.



*If you really want something in this life,  
you have to work for it*

H.J. Simpson



*A Cris*



# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las personas e instituciones que han hecho posible la realización de esta Tesis Doctoral:

A mi director de Tesis, Dr. Antolín Lorenzana, por sus consejos, aportaciones y conocimientos, que han permitido su desarrollo, y también por su apoyo durante los años de su realización.

A mis padres, por ser los mejores padres, por su ayuda, consejo, sacrificio y generosidad.

A mis hermanos, suegros, cuñados y sobrinos, por su apoyo y su ánimo en todo momento.

A mis amigos, por preocuparse por mí y por los buenos ratos que hemos pasado.

A la Fundación Cartif y a mis compañeros, en especial a Carlos y Ali, por saber que puedo contar con ellos y por hacer el día a día mucho más fácil.

A la Universidad de Valladolid, por fomentar y facilitar el desarrollo de la actividad investigadora, y en especial a Mariano Cacho por su colaboración.

A la Universidad de Lieja, y en especial al Prof. Gaëtan Kerschen y su departamento, por recibirme durante mi estancia, tratarme tan bien y hacerme aprender tantas cosas en tan poco tiempo. Y también al Prof. Jean-Philippe Ponthot y a su equipo, por su inestimable ayuda con el programa Metafor y su apoyo desinteresado.

Y por último, a mi mujer Cristina, mi inspiración, sin cuya fuerza, paciencia, ánimo e infinita comprensión esta Tesis no habría sido posible.

A todos ellos, muchas gracias.

*Pablo*



# Resumen

En este trabajo se desarrollan modelos de complejidad creciente que tratan de aproximar el comportamiento no lineal de estructuras planas formadas por barras, desde el comportamiento elástico hasta el colapso. Estos modelos se desarrollan en una aplicación informática basada en el elemento finito *beam* que permite realizar estudios bajo distintas condiciones, no solo de geometría de la estructura y cargas para distintas secciones de las barras, sino también incluyendo distintos comportamientos y materiales y asumiendo distintas hipótesis. Los materiales se solicitan más allá del régimen elástico, llegando a la plasticidad y a la rotura, incluyendo por tanto el daño a nivel de la sección y de la estructura.

Una de las principales ventajas de los modelos *beam* frente a otras modelizaciones típicas de elementos finitos es la posibilidad de disponer de expresiones analíticas continuas en cada barra para la descripción del comportamiento (desplazamientos, esfuerzos, etc.), en lugar de los valores puntuales en cada nodo ofrecidos por cualquier otro modelo de cálculo mediante elementos finitos. El estudio se limita a problemas planos, por lo que concretamente se utilizará el modelo *beam2D* para representar cada barra de la estructura, teniendo únicamente tres grados de libertad por nodo (dos traslaciones y una rotación) y quedando definida únicamente mediante la posición de sus dos nodos extremos.

Se parte del Método Directo de Rígidez, de forma que se calcula la respuesta elástica (desplazamientos y esfuerzos generalizados) de cualquier estructura plana formada por barras de directriz recta ante cualquier estado de cargas (puntual, distribuida, térmica, deformaciones iniciales, etc.).

Se amplía el alcance del estudio, desarrollando un método de cálculo plástico clásico, considerando la posible formación de rótulas plásticas solo por momento flector a medida que se aumenta un factor multiplicador de la carga. Se contempla la posibilidad de aparición de rótulas plásticas

en cualquier punto (sección) de cualquier barra de la estructura (y no solo en sus nodos), partiendo las barras iniciales, buscando los sucesivos puntos en los que se alcanzan los momentos máximos.

Posteriormente se completa el método de cálculo plástico incluyendo la posibilidad de interacción de los esfuerzos axil, cortante y flector, de manera que no aparece una rótula plástica para un valor concreto del momento flector sobre la sección, sino que aparece una sección plastificada por una combinación de los tres esfuerzos e incorporando además el daño del material por acumulación de deformación plástica, obteniéndose la función de plastificación. Se introduce una nueva matriz de rigidez elastoplástica degradable, que tiene en cuenta las no linealidades del material y el eventual daño de las secciones a medida que alguna de sus fibras (las más exteriores) llega al agotamiento resistente. La formulación del modelo de daño se realiza en el marco del CDM (*Continuum Damage Mechanics*), requiriendo de una serie de parámetros de daño que no pueden ser medidos directamente, propuestos por diversos autores (Bonora, Lemaitre, Wang y Chandrankanth), que arrojan diferentes resultados.

Finalmente, para caracterizar el comportamiento del material a partir del cual poder estimar la capacidad resistente de las secciones de las barras y cuantificar el daño de las mismas, se simplifica el comportamiento tensión-deformación mediante un modelo elastoplástico bilineal (tramo lineal elástico seguido de tramo plástico, también lineal, con endurecimiento) utilizando cuatro parámetros para su definición. Así, el comportamiento del material será elástico hasta el punto  $(\varepsilon_f, \sigma_f)$ , donde comienza el comportamiento plástico hasta el punto  $(\varepsilon_r, \sigma_r)$  donde el material se rompe. Las hipótesis empleadas para formular este modelo son las comúnmente aceptadas en Resistencia de Materiales, resultando unas expresiones para cada modelo y para cada sección considerada dependientes de un número reducido de parámetros.

Se hace notar que por muy sofisticados que sean los modelos, el comportamiento no lineal de la sección y del pórtico en su conjunto solo se puede aproximar, ya que en la realidad hay varios efectos que no pueden contemplarse en ningún modelo basado en elementos *beam2D*: la compleja relación tensión-deformación de los materiales reales; la plastificación, que no se produce de forma concentrada en una sola sección sino que afecta a las secciones adyacentes y que no aparece de forma súbita sino que va progresando a medida que aumentan los esfuerzos; la hipótesis de Navier-Bernoulli que solo es aplicable hasta cierto punto en régimen elástico, etc.

El interés del método desarrollado radica precisamente en que disponiendo de esos cuatro parámetros ( $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\varepsilon_r$  y  $\sigma_r$ ) y de suficiente información numérica (por simulación) o experimental (a nivel del comportamiento del material, de la sección y de alguna estructura de referencia, mediante la realización de los correspondientes ensayos), se pueden ajustar sus valores mediante técnicas de *Model Updating* de tal manera que se pueda utilizar el método para simular, con buen nivel de precisión, el comportamiento real del pórtico hasta el colapso.

Se obtiene por tanto un modelo computacional monodimensional para el análisis elastoplástico degradable de estructuras planas de barras, incluyendo daño (cuantificado a través de una variable escalar asociada a la sección para cada instante de la carga) y endurecimiento. La determinación de estas magnitudes puede ser de interés para estimar la reserva de resistencia de las estructuras ante ciertas sobrecargas o en casos de peritaciones tras sobrecargas o acciones accidentales, como terremotos, permitiendo predecir necesidades concretas de intervención sobre estructuras.

Algunos de los puntos anteriores han supuesto aportaciones originales que han dado lugar a ponencias en congresos y a distintos artículos científicos publicados en revistas internacionales, recogidos éstos en la parte final del documento.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción y objetivos . . . . .	2
1.2. Descripción del software utilizado . . . . .	5
1.3. Estado del arte . . . . .	7
<b>2. Desarrollos previos</b>	<b>13</b>
2.1. Formulación del elemento barra . . . . .	14
2.2. Función de fluencia . . . . .	17
2.3. <i>Model Updating</i> . . . . .	21
2.3.1. Descripción . . . . .	21
2.3.2. Técnicas de ajuste . . . . .	22
2.3.3. Necesidad de aplicar técnicas de actualizado . . . . .	26
2.4. Evaluación de valores para la sección a partir de resultados puntuales del MEF . . . . .	30
<b>3. Modelos</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	36
3.2. MDRCP . . . . .	38
3.2.1. Hipótesis . . . . .	38
3.2.2. Material elastoplástico ideal . . . . .	38
3.2.3. Modelo . . . . .	44
3.3. MDRCPR . . . . .	45

3.3.1.	Hipótesis . . . . .	45
3.3.2.	Material elastoplástico con daño sin endurecimiento	45
3.3.3.	Modelo . . . . .	48
3.3.3.1.	Obtención de la matriz elastoplástica . .	48
3.4.	MDRCPRE . . . . .	53
3.4.1.	Hipótesis . . . . .	53
3.4.2.	Material elastoplástico con daño y con endurecimiento . . . . .	53
3.4.3.	Modelo . . . . .	57
3.4.3.1.	Obtención de la matriz elastoplástica . .	57
<b>4.</b>	<b>Programación numérica</b>	<b>61</b>
4.1.	Introducción . . . . .	62
4.2.	Modelo MDR . . . . .	63
4.2.1.	Programación . . . . .	63
4.2.1.1.	Inicio . . . . .	64
4.2.1.2.	Entrada de datos . . . . .	66
4.2.1.3.	Cálculo . . . . .	71
4.2.2.	Salidas . . . . .	71
4.3.	Modelo MDRCP . . . . .	75
4.3.1.	Programación . . . . .	75
4.3.1.1.	Cálculo . . . . .	75
4.3.1.2.	Resultados gráficos . . . . .	80
4.3.1.3.	Gráficas . . . . .	80
4.3.2.	Salidas . . . . .	81
4.4.	Modelo MDRCPR . . . . .	87
4.4.1.	Programación . . . . .	87
4.4.1.1.	Cálculo . . . . .	87
4.4.1.2.	Paso = 1 . . . . .	88

4.4.1.3. Paso > 1 . . . . .	88
4.4.2. Salidas . . . . .	92
4.4.2.1. Comparación con el método paso a paso	95
4.5. Modelo MDRCPRE . . . . .	97
4.5.1. Programación . . . . .	97
4.5.1.1. Procedimientos . . . . .	97
4.5.1.2. Entrada de datos . . . . .	101
4.5.1.3. Cálculo . . . . .	103
4.5.2. Salidas . . . . .	107
4.5.2.1. Comparación con el método paso a paso	115
4.6. Comparación . . . . .	119
<b>5. Resultados</b>	<b>121</b>
5.1. Introducción . . . . .	122
5.2. Validación y ajuste de parámetros: viga experimental . .	124
5.2.1. Descripción del experimento . . . . .	124
5.2.2. Modelado . . . . .	124
5.2.3. Ajuste de parámetros . . . . .	126
5.2.3.1. <i>Model updating</i> 1 (Metafor) . . . . .	126
5.2.3.2. <i>Model updating</i> 2 (Maple) . . . . .	130
5.2.4. Resultados . . . . .	134
5.2.4.1. Experimento . . . . .	134
5.2.4.2. Metafor . . . . .	135
5.2.4.3. Maple . . . . .	137
5.3. Ejemplo de aplicación 1: pórtico . . . . .	140
5.3.1. Modelo de elementos finitos . . . . .	140
5.3.2. Modelo MDRCPRE . . . . .	144
5.4. Ejemplo de aplicación 2: viga apoyada - empotrada . .	149
5.4.1. Resolución analítica . . . . .	149

5.4.1.1. Paso 1 . . . . .	149
5.4.1.2. Paso 2 . . . . .	151
5.4.1.3. Acumulado . . . . .	152
5.4.2. Resolución numérica . . . . .	155
5.4.3. Comparación de modelos . . . . .	160
<b>6. Conclusiones y desarrollo futuro</b>	<b>165</b>
6.1. Principales conclusiones . . . . .	166
6.2. Aportaciones originales . . . . .	169
6.3. Posibles líneas de desarrollo futuro . . . . .	171
<b>7. Abstract, conclusions and future research</b>	<b>173</b>
7.1. Abstract . . . . .	174
7.2. Main conclusions . . . . .	177
7.3. Original contributions . . . . .	180
7.4. Future research . . . . .	182
<b>Apéndices</b>	<b>185</b>
<b>A. Método Directo de Rígidez (MDR)</b>	<b>186</b>
A.1. Hipótesis . . . . .	187
A.2. Material elástico lineal . . . . .	187
A.3. Modelo . . . . .	188
<b>B. Esfuerzos para secciones bisimétricas</b>	<b>191</b>
B.1. Clases de secciones (CTE) . . . . .	193
B.2. Secciones bisimétricas . . . . .	197
B.3. Obtención de esfuerzos . . . . .	200
B.3.1. Rectangular maciza . . . . .	203
B.3.1.1. Esfuerzos axil y cortante . . . . .	203
B.3.1.2. Momento flector . . . . .	203

---

B.3.2. Rectangular hueca . . . . .	206
B.3.2.1. Esfuerzos axil y cortante . . . . .	206
B.3.2.2. Momento flector . . . . .	207
B.3.3. Circular maciza . . . . .	211
B.3.3.1. Esfuerzos axil y cortante . . . . .	211
B.3.3.2. Momento flector . . . . .	211
B.3.4. Circular hueca . . . . .	213
B.3.4.1. Esfuerzos axil y cortante . . . . .	213
B.3.4.2. Momento flector . . . . .	215
B.3.5. Doble T . . . . .	218
B.3.5.1. Esfuerzos axil y cortante . . . . .	218
B.3.5.2. Momento flector . . . . .	219
B.3.6. Comparación . . . . .	223
B.4. Esfuerzos plásticos para secciones bisimétricas . . . . .	227
B.4.1. Rectangular maciza . . . . .	228
B.4.2. Rectangular hueca . . . . .	229
B.4.3. Circular maciza . . . . .	229
B.4.4. Circular hueca . . . . .	230
B.4.5. Doble T . . . . .	230
B.4.6. Comparación . . . . .	236
B.5. Expresiones completas de los esfuerzos plásticos . . . . .	238
B.5.1. Rectangular maciza . . . . .	238
B.5.2. Rectangular hueca . . . . .	242
B.5.3. Circular maciza . . . . .	249
B.5.4. Circular hueca . . . . .	253
B.5.5. Doble T . . . . .	263
<b>C. Códigos de los programas</b>	<b>273</b>
C.1. Maple . . . . .	274

C.1.1. MDR . . . . .	274
C.1.2. Obtención de los esfuerzos plásticos . . . . .	288
C.2. Metafor (Python) . . . . .	303
C.2.1. Viga experimental . . . . .	303
C.2.2. Pórtico . . . . .	311
C.3. Matlab . . . . .	318
C.3.1. Viga experimental: ajuste de parámetros . . . . .	318
<b>D. Méritos</b>	<b>323</b>
D.1. Congresos . . . . .	324
D.2. Otros méritos . . . . .	325
D.3. Publicaciones . . . . .	328
D.3.1. Artículo 0 . . . . .	328
D.3.2. Artículo 1 . . . . .	342
D.3.3. Artículo 2 . . . . .	347
D.3.4. Artículo 3 . . . . .	363
D.3.5. Artículo 4 . . . . .	377
D.3.6. Artículo 5 . . . . .	390
<b>Bibliografía</b>	<b>405</b>

# Índice de figuras

1.1.	Modelo bilineal con endurecimiento . . . . .	3
1.2.	Estructura de la Tesis . . . . .	4
1.3.	Software utilizado . . . . .	6
2.1.	Modelo de barras . . . . .	15
2.2.	Relación entre tensiones en el punto y los esfuerzos en la sección de la barra . . . . .	16
2.3.	Evolución de la función de fluencia con el daño . . . . .	18
2.4.	Distintas superficies de fluencia para diferentes secciones	19
2.5.	Superficies de fluencia de secciones bisimétricas [20] . . .	20
2.6.	Proceso de <i>model updating</i> general . . . . .	25
2.7.	Proceso de modelado . . . . .	27
2.8.	Reducción de los valores de una variable del MEF a un valor único . . . . .	31
2.9.	Funciones de interpolación para la obtención de un valor único . . . . .	33
3.1.	Modelo para el comportamiento del material elastoplástico ideal . . . . .	39
3.2.	Comportamiento de la sección con un material real, ideal y aproximación bilineal . . . . .	42
3.3.	Comportamiento de la sección con modelo elastoplástico ideal . . . . .	43
3.4.	Evolución del estado tensional del modelo MDRCP . . .	43

3.5. Modelo para el comportamiento del material elastoplástico con daño sin endurecimiento . . . . .	45
3.6. Modelo para el comportamiento de la sección con material elastoplástico con daño sin endurecimiento . . . . .	46
3.7. Comportamiento de la sección con modelo elastoplástico con daño sin endurecimiento . . . . .	47
3.8. Evolución del estado tensional del modelo MDRCPR . .	47
3.9. Elemento barra con desplazamiento elastoplástico en los extremos . . . . .	49
3.10. Modelo para el comportamiento del material elastoplástico con daño y endurecimiento . . . . .	54
3.11. Modelo para el comportamiento de la sección con material elastoplástico con daño y endurecimiento . . . . .	54
3.12. Evolución del estado tensional del modelo MDRCPRE .	55
3.13. Comportamiento de la sección con modelo elastoplástico con daño y endurecimiento . . . . .	56
4.1. Instrucciones del programa del MDR . . . . .	63
4.2. Diagrama de flujo del programa (MDR) . . . . .	64
4.3. Ejemplo de introducción de datos mediante Maplets . .	67
4.4. Cargas en la estructura . . . . .	70
4.5. Diagrama de flujo del bloque de cálculo . . . . .	72
4.6. Ejemplo de salida tras la introducción de datos . . .	73
4.7. Resultados . . . . .	73
4.8. Diagrama de flujo del programa (MDRCP) . . . . .	76
4.9. Diagrama de flujo del bloque de cálculo . . . . .	77
4.10. Estructura inicial en el método paso a paso . . . . .	82
4.11. Diagramas de esfuerzos en cada paso . . . . .	83
4.12. Deformadas en cada paso . . . . .	83
4.13. Resultados acumulados . . . . .	84
4.14. Desplazamiento horizontal de los nodos . . . . .	85

4.15. Desplazamiento vertical de los nodos . . . . .	85
4.16. Giro absoluto de los nodos . . . . .	85
4.17. Giro relativo de los nodos . . . . .	86
4.18. Energía disipada en los nodos . . . . .	86
4.19. Diagrama de flujo del bloque de cálculo (MDRCP) . . .	89
4.20. Diagrama de flujo simplificado del bloque de cálculo . . .	90
4.21. Estructura inicial . . . . .	93
4.22. Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPR . . .	96
4.23. Diagrama de flujo del programa (MDRCPRE) . . . . .	98
4.24. Variables que definen el material elastoplástico . . . . .	102
4.25. Secciones y materiales diferentes . . . . .	103
4.26. Diagrama de flujo del bloque de cálculo . . . . .	105
4.27. Diagrama de flujo simplificado del bloque de cálculo . . .	106
4.28. Estructura inicial . . . . .	107
4.29. Diagramas de esfuerzos en cada paso . . . . .	111
4.30. Deformadas en cada paso . . . . .	111
4.31. Esfuerzos acumulados . . . . .	112
4.32. Deformadas acumuladas . . . . .	112
4.33. Evolución de los desplazamientos, giros y energía disipada con la carga . . . . .	113
4.34. Evolución de los esfuerzos con la carga . . . . .	114
4.35. Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPRE (desplazamiento) . . . . .	116
4.36. Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPRE (energía disipada) . . . . .	117
4.37. Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPRE (momento flector) . . . . .	118
5.1. Proceso seguido de <i>model updating</i> . . . . .	123
5.2. Experimento . . . . .	124

5.3. Resultados del experimento . . . . .	125
5.4. Mallado del modelo de viga experimental . . . . .	125
5.5. Variación de la evolución del daño respecto a los parámetros . . . . .	127
5.6. Influencia de los parámetros (Metafor) . . . . .	128
5.7. Influencia de todos los parámetros (Metafor) . . . . .	129
5.8. Modelo Metafor ajustado . . . . .	130
5.9. Modelo Maple de la viga experimental . . . . .	131
5.10. Influencia de los parámetros (Maple) . . . . .	133
5.11. Influencia de todos los parámetros (Maple) . . . . .	133
5.12. Ley del material actualizada . . . . .	134
5.13. Resultados reales de la viga experimental . . . . .	134
5.14. Resultados con Metafor del modelo de viga experimental (desplazamientos y daño) . . . . .	135
5.15. Resultados con Metafor del modelo de viga experimental (tensiones) . . . . .	136
5.16. Reducción de los valores de daño a un valor único para la sección (Metafor) . . . . .	137
5.17. Evolución del valor del daño de la sección (Metafor) . . . . .	137
5.18. Resultados con Maple del modelo de viga experimental (esfuerzos y deformada) . . . . .	138
5.19. Resultados con Maple del modelo de viga experimental (giro relativo, energía disipada y daño) . . . . .	139
5.20. Esquema del pórtico . . . . .	140
5.21. Mallado del pórtico . . . . .	141
5.22. Gráficas de evolución del pórtico (Metafor) . . . . .	142
5.23. Resultados de la simulación del pórtico (Metafor) . . . . .	143
5.24. Estado tensional del pórtico para la carga máxima (Metafor)	143
5.25. Modelo inicial del pórtico (Maple) . . . . .	144
5.26. Comparación del ajuste del modelo Maple con y sin res- tricción adicional . . . . .	145

5.27. Ley del material actualizada . . . . .	146
5.28. Resultados con Maple del pórtico (esfuerzos y deformada) . . . . .	147
5.29. Evolución de las variables con la carga . . . . .	148
5.30. Ejemplo de aplicación 2 . . . . .	149
5.31. Estructura a resolver en el primer paso de cálculo . . . . .	149
5.32. Estructura a resolver en el segundo paso de cálculo . . . . .	151
5.33. Variación de las cargas de colapso con el esfuerzo axil . . . . .	154
5.34. Material y estructura de la viga apoyada-empotrada . . . . .	155
5.35. Resultados del modelo de viga apoyada-empotrada (esfuerzos y deformada) . . . . .	157
5.36. Evolución del momento frente a la carga ( $\alpha = 0,0$ ) . . . . .	163
5.37. Evolución del momento frente a la carga ( $\alpha = 3,5$ ) . . . . .	163
5.38. Evolución del momento frente a la carga ( $\alpha = 7,5$ ) . . . . .	164
5.39. Evolución del momento frente a la carga (comparación) . .	164
 7.1. Structure of the document . . . . .	176
 A.1. Ley de comportamiento elástico lineal . . . . .	187
A.2. Comportamiento de la sección con modelo elástico lineal . .	187
A.3. Elemento más sencillo y más complejo . . . . .	188
 B.1. Leyes de momento-curvatura para las secciones transversales de clases 1 a 4, [18] . . . . .	195
B.2. Elementos considerados para los límites de esbeltez . . . .	195
B.3. Tipos de secciones bisimétricas . . . . .	198
B.4. Comparativa de secciones bisimétricas de igual área . . . .	199
B.5. Estado tensional general de la sección . . . . .	200
B.6. Distribución tensional según el modelo . . . . .	202
B.7. Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección rectangular maciza . . . . .	204
B.8. Distribución de tensiones en sección rectangular maciza .	205

B.9. Evolución del momento flector en función del daño para la sección rectangular maciza . . . . .	205
B.10. Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección rectangular hueca . . . . .	207
B.11. Distribución de tensiones en sección rectangular hueca . .	208
B.12. Evolución del momento flector en función del daño para la sección rectangular hueca . . . . .	210
B.13. Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección circular maciza . . . . .	212
B.14. Distribución de tensiones en sección circular maciza . .	212
B.15. Evolución del momento flector en función del daño para la sección circular maciza . . . . .	213
B.16. Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección circular hueca . . . . .	215
B.17. Distribución de tensiones en sección circular hueca . . .	217
B.18. Evolución del momento flector en función del daño para la sección circular hueca . . . . .	217
B.19. Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección de doble T . . . . .	219
B.20. Distribución de tensiones en sección de doble T . . . .	221
B.21. Evolución del momento flector en función del daño para la sección de doble T . . . . .	222
B.22. Comparación de la evolución del esfuerzo axil en función del daño . . . . .	224
B.23. Comparación de la evolución del momento flector en función del daño . . . . .	226
B.24. Posiciones de cambio del comportamiento de los esfuerzos	226
B.25. Estado tensional general de la sección (momento flector)	227
B.26. Sección rectangular maciza: variación de $M_z/M_p$ con $D$ y $n_s$	231
B.27. Sección rectangular maciza: variación de $M_z/M_p$ con sus dimensiones . . . . .	231
B.28. Sección rectangular hueca: variación de $M_z/M_p$ con $D$ y $n_s$	232

B.29.Sección rectangular hueca: variación de $M_z/M_p$ con sus dimensiones . . . . .	232
B.30.Sección circular maciza: variación de $M_z/M_p$ con $D$ y $n_s$ . . . . .	233
B.31.Sección circular maciza: variación de $M_z/M_p$ con sus dimensiones . . . . .	233
B.32.Sección circular hueca: variación de $M_z/M_p$ con $D$ y $n_s$ . . . . .	234
B.33.Sección circular hueca: variación de $M_z/M_p$ con sus dimensiones . . . . .	234
B.34.Sección doble T: variación de $M_z/M_p$ con $D$ y $n_s$ . . . . .	235
B.35.Sección doble T: variación de $M_z/M_p$ con sus dimensiones . . . . .	235
B.36.Todas las secciones: variación de $M_z/M_p$ con $D$ y $n_s$ . . . . .	237
D.1. Programas publicados online . . . . .	327



# Índice de tablas

2.1. Expresiones de las superficies de fluencia de secciones bimétricas [20] . . . . .	20
2.2. Funciones de interpolación . . . . .	32
4.1. Diagramas de esfuerzos (valores positivos) . . . . .	73
4.2. Valores máximos de los diagramas de esfuerzos . . . . .	73
4.3. Reacciones en los nodos . . . . .	74
4.4. Desplazamientos de los nodos . . . . .	74
4.5. Orden de formación de las rótulas plásticas . . . . .	82
4.6. Desglose de pasos, incrementos e iteraciones . . . . .	94
4.7. Orden de plastificación de las secciones . . . . .	95
4.8. Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPR . . .	96
4.9. Desglose de pasos, incrementos e iteraciones . . . . .	108
4.10. Ejemplo de evolución de los valores de $Z$ en las iteraciones para secciones plastificadas en pasos anteriores . . . . .	110
4.11. Orden de plastificación de las secciones y evolución de los valores de $Z$ y $M_v$ . . . . .	110
4.12. Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPRE (cargas de plastificación) . . . . .	115
4.13. Comparación de los valores de la función de plastificación . . . . .	118
4.14. Comparación de las programaciones numéricas . . . . .	120

5.1.	Valores de referencia de los parámetros de evolución de daño [6] . . . . .	126
5.2.	Valores de los parámetros ajustados . . . . .	129
5.3.	Parámetros del material actualizados . . . . .	134
5.4.	Resultados con Maple del modelo de viga experimental (desplazamientos, fuerzas y esfuerzos) . . . . .	138
5.5.	Parámetros del material actualizados . . . . .	145
5.6.	Orden de plastificación de las secciones y evolución de los valores de $Z$ y $M_v$ . . . . .	146
5.7.	Resultados de la resolución analítica . . . . .	153
5.8.	Parámetros del material . . . . .	155
5.9.	Parámetros de la sección . . . . .	155
5.10.	Valores de las cargas y la función de plastificación respecto a un esfuerzo axil creciente . . . . .	158
5.10.	Valores de las cargas y la función de plastificación respecto a un esfuerzo axil creciente (continuación) . . . . .	159
5.11.	Comparación de los resultados analíticos y los modelos MDRCPRE y MDRCP . . . . .	161
5.12.	Parámetros de los materiales utilizados . . . . .	162
B.1.	Métodos de cálculo para cada tipo de sección (CTE) . .	194
B.2.	Límites de esbeltez ( $c/t$ máximo) para elementos planos de Clases 1 y 2, total o parcialmente comprimidos (CTE)	196
B.3.	Dimensiones de las secciones para igual área total . . . .	199
B.4.	Dimensiones de las secciones para área total $A = 0,01\pi m^2$	199
B.5.	Simplificaciones para la obtención de los modelos de material	201
B.6.	Casuística de expresiones . . . . .	202
B.7.	Valores de las variables para la obtención de esfuerzos elásticos y plásticos . . . . .	228
D.1.	Participaciones en congresos . . . . .	324
D.2.	Participaciones en congresos . . . . .	325

D.3. Datos de la publicación del Artículo 0 . . . . .	328
D.4. Datos de la publicación del Artículo 1 . . . . .	342
D.5. Datos de la publicación del Artículo 2 . . . . .	347
D.6. Datos de la publicación del Artículo 3 . . . . .	363



# Capítulo 1

## Introducción

### Contenidos

---

1.1.	Introducción y objetivos . . . . .	2
1.2.	Descripción del software utilizado . . . . .	5
1.3.	Estado del arte . . . . .	7

---

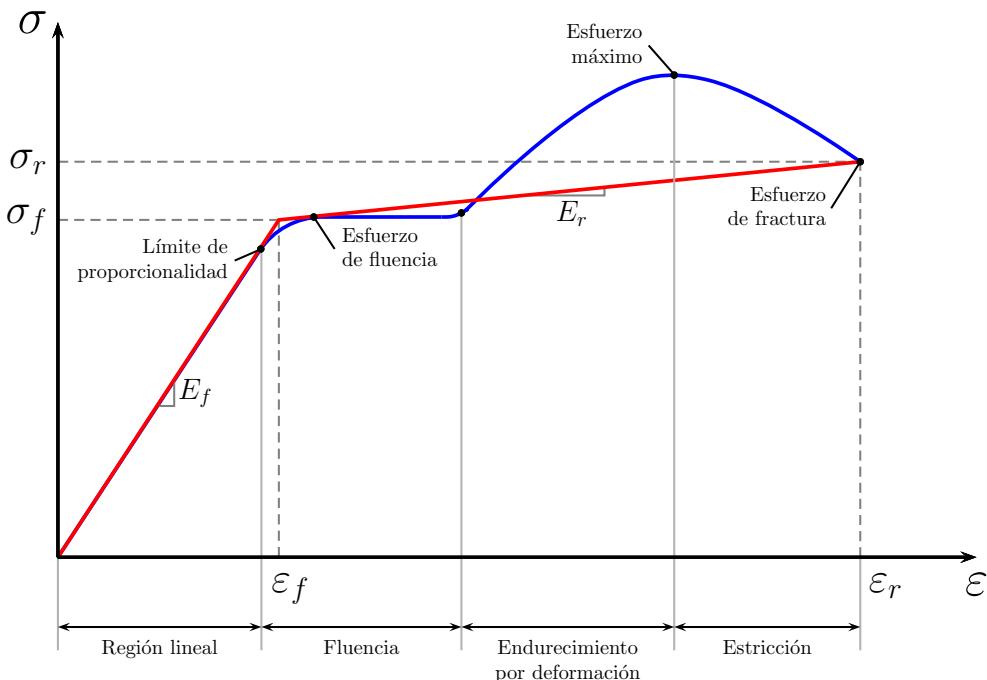
## 1.1. Introducción y objetivos

Gracias a las diferentes aplicaciones informáticas disponibles, se puede estudiar el comportamiento no lineal de estructuras planas formadas por barras, desde el comportamiento elástico hasta el colapso, para distintas geometrías, secciones, cargas y materiales.

Contemplando diferentes comportamientos e hipótesis, se desarrollan modelos de diferente exactitud: mientras que para obtener la respuesta elástica de una estructura bidimensional es suficiente con el Método Directo de Rigidez, para incluir el efecto del endurecimiento y daño del material y la formación de secciones plastificadas por todos los esfuerzos es necesario desarrollar un modelo más avanzado, en el marco de la Mecánica del Daño Continuo.

Sin embargo, existen efectos de muy difícil cuantificación en un modelo matemático (plasticidad distribuida, elastoplasticidad progresiva, efecto de las tensiones tangenciales en el agotamiento resistente de la sección según el criterio de plasticidad aplicado, hipótesis de Navier-Bernoulli aplicable para pequeños desplazamientos y giros, etc.). Además, la relación tensión-deformación en materiales reales es compleja: el esfuerzo de fluencia puede medirse con relativamente poca dificultad, mientras que el esfuerzo de rotura es muy sensible a las condiciones del experimento, especialmente a la velocidad de carga o a la axialidad de la probeta ensayada [66]. Se hace imprescindible por tanto una correlación experimental que permita aproximar la respuesta predicha por el modelo al comportamiento real de las estructuras.

De esta forma, se tomará un modelo simplificado pero suficientemente versátil en el que el material se modela con una ley bilineal con endurecimiento, en función de cuatro parámetros: los valores  $\varepsilon_f$  y  $\sigma_f$  del punto de cambio de pendiente (deformación y tensión de fluencia, respectivamente) y los valores  $\varepsilon_r$  y  $\sigma_r$  del final del segundo tramo recto (deformación y tensión de rotura, respectivamente). Se puede observar la simplificación tomada (curva roja) respecto al modelo de comportamiento habitual del acero (curva azul) sobre la curva de tensión-deformación de la Figura 1.1. Algunos autores [7, 28, 34, 35] proponen valores para el módulo de endurecimiento  $E_r$  del acero en el tramo elastoplástico:  $0,05E_f$ ,  $0,0129E_f$ ,  $0,0125E_f$  y  $0,01E_f$  respectivamente. La variabilidad existente, incluso en estos valores propuestos para diferentes modelos, aumenta la necesidad de disponer de un modelo versátil para el material.



**Figura 1.1:** Modelo bilineal con endurecimiento

El daño se cuantificará a través de una variable escalar asociada a la sección para cada instante de la carga. Seleccionando de forma adecuada, mediante técnicas de *Model Updating*, los valores de esos cuatro parámetros, se podrán reproducir los comportamientos de estructuras similares a los que se obtendrían mediante modelos basados en el concepto de sección plastificada y/o con modelos avanzados de evolución del daño, que dependen de una gran cantidad de parámetros del material de difícil obtención experimental en la práctica.

Es decir, disponiendo de esos cuatro parámetros y de suficiente información experimental (comportamiento del material, de la sección y de alguna estructura de referencia), se utilizará el método propuesto para simular, con un nivel de precisión aceptable, el comportamiento real de las estructuras hasta el colapso.

Se obtendrá por tanto un modelo computacional monodimensional ajustable para el análisis elastoplástico degradable de estructuras planas de barras.

La estructura de la presente Tesis se puede observar en la Figura 1.2.

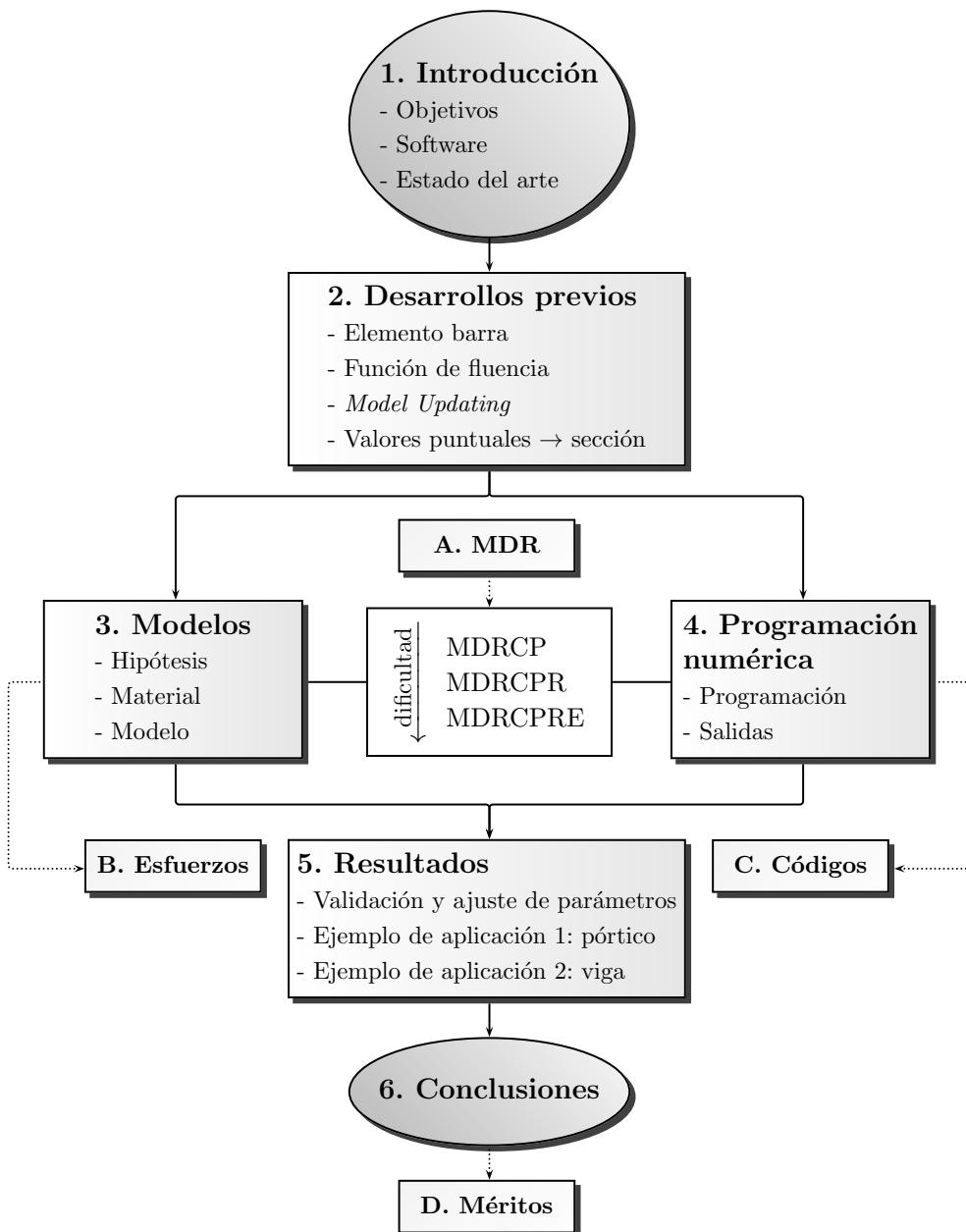


Figura 1.2: Estructura de la Tesis

## 1.2. Descripción del software utilizado

**Maple:** es un software matemático comercial de propósito general que permite realizar cálculos simbólicos, algebraicos y numéricos, además de hacer gráficas de todo tipo de funciones. El lenguaje de programación es de tipo dinámico y de estilo imperativo, similar al Pascal, y está basado en un *kernel* escrito en lenguaje de programación C. La mayoría de las funcionalidades se encuentran en librerías que vienen incorporadas en el programa, creadas por terceros o incluso por el usuario.

El nombre se considera un acrónimo de *Mathematic pleasure* o de *Mathematical programming language*, aunque en realidad hace referencia a la hoja de arce (*maple* en inglés) que aparece en la bandera del país donde se desarrolló originalmente en 1981 (Universidad de Waterloo, Ontario, Canadá), persiguiendo el objetivo de desarrollar un sistema de álgebra computacional capaz de ser ejecutado en ordenadores de bajo coste [1].

Gran parte del trabajo de esta Tesis se ha realizado con este software (desde la versión 8 hasta la 14) [45]: obtención de los esfuerzos plásticos para secciones bisimétricas (Apéndice B), modelos de comportamiento elastoplástico de estructuras de barras y modelo MDRCPRE general (Capítulo 4) y modelado de los resultados (Capítulo 5). Alguno de estos códigos se pueden ver en el Apartado C.1.

**Metafor:** es un software de simulación de problemas termomecánicos orientado a las aplicaciones fuertemente no lineales, comprendiendo los casos de grandes deformaciones. Permite tratar problemas cuasiestáticos y dinámicos (incluso combinando ambos de manera automática), definir leyes complejas para los materiales (elástico, elastoplástico, elastoviscoplástico, daño, etc.), generar situaciones complejas de contacto 3D (deformable, rígido y combinaciones), gestionar el mallado de elementos finitos en 2D y 3D y presentar los resultados en tiempo real [44].

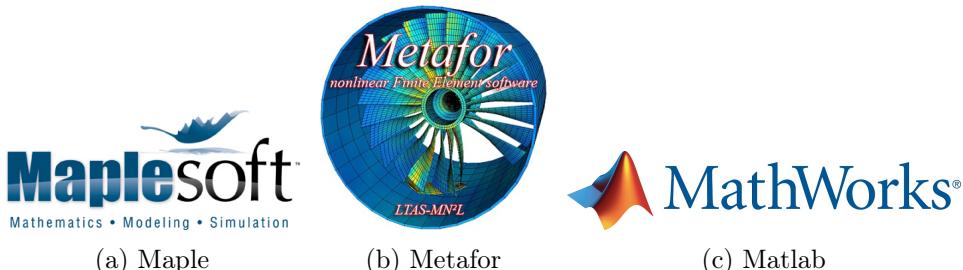
Su nombre hace referencia a una de sus aplicaciones principales, que es la simulación de conformado de metales (*Metal forming*). Fue desarrollado inicialmente en Fortran en 1992 [57] y reescrito posteriormente en C++/Python. En la actualidad continúa desarrollándose en la Universidad de Lieja.

Este programa se ha utilizado principalmente para simular el problema experimental de la viga (Apartado 5.2) y, tras ajustar los parámetros del material, tomar los resultados para los ejemplos 1 (Apartado 5.3) y 2 (Apartado 5.4) como referencia para el ajuste de los modelos. Alguno de los códigos desarrollados para las simulaciones se muestra en el Apartado C.2.

**Matlab:** es un entorno de programación para el desarrollo de algoritmos, análisis de datos, visualización y computación numérica orientada a matrices. Permite la manipulación de matrices, la representación de funciones y datos, la implementación de algoritmos o la creación de interfaces para el usuario [49].

El nombre es una abreviatura de *Matrix laboratory* y fue creado por MathWorks en 1984 tras reescribir en lenguaje C el código desarrollado por Cleve Moler a finales de la década de los 70.

Este programa se ha utilizado principalmente para el tratamiento de los datos obtenidos de las simulaciones de Metafor (Capítulo 5): ajustar los parámetros del material, obtener las curvas de evolución de los resultados, etc. Alguno de los códigos desarrollados se recoge en el Apartado C.3.



**Figura 1.3:** Software utilizado

### 1.3. Estado del arte

El método numérico principal de modelado de análisis estructural es el Método de los Elementos Finitos (MEF). En un modelo de elementos finitos, el dominio físico continuo de una estructura compleja se discretiza en pequeños componentes llamados *elementos finitos*, término que fue usado por primera vez por Clough [16] en 1960.

El estudio del comportamiento resistente de sólidos mediante dicho método puede simplificarse si el objeto del estudio presenta ciertas particularidades geométricas, como es el caso de barras prismáticas esbeltas de directriz recta. Con esta filosofía surge el modelo de barras de Navier-Bernoulli (o Euler-Navier-Bernoulli), también conocido como teoría clásica de barras. Supone una simplificación de la teoría de la elasticidad y un caso especial de la teoría de barras de Timoshenko. Su desarrollo tiene su origen en observaciones y estudios realizados por Leonardo Da Vinci y Galileo [2], aunque fue Jacob Bernoulli quien realizó descubrimientos importantes como que la curvatura de una viga es proporcional a su momento flector. Su sobrino Daniel Bernoulli trabajó junto con Leonhard Euler en el desarrollo de esta teoría, obteniendo la ecuación que lleva el nombre de ambos y que describe la relación entre la flexión de una viga y la carga aplicada sobre ella [26]. Otros autores realizaron importantes aportaciones a esta teoría, como Claude-Louis Navier (formuló la teoría de la elasticidad de Euler-Bernoulli de una forma matemática práctica), Coulomb, Saint-Venant, Mohr, John Bernoulli, etc.[68]. Gracias a estas aportaciones la teoría fue evolucionando y ampliándose. Sin embargo, su aplicación práctica a gran escala no se produciría hasta finales del siglo XIX, cuando la teoría de barras se aplicó a grandes proyectos de ingeniería, entre ellos la Torre Eiffel (diseñada por Alexandre Gustave Eiffel para la Exposición Universal de 1889 en París) o la noria (*Ferris wheel* en inglés, llamada así gracias a su diseñador y constructor George W. G. Ferris Jr., que construyó la primera para la Exposición Universal de 1893 en Chicago, también llamada *World's Columbian Exposition*). Posteriormente se convertiría en un pilar básico de la ingeniería y una de las claves de la Segunda Revolución Industrial.

El comportamiento elástico lineal de los sólidos deformables ha sido ampliamente investigado por muchos autores, estando sus leyes y fundamentos bien desarrollados y definidos. Sin embargo, el comportamiento no lineal de sólidos deformables, y en particular de estructuras sometidas a la acción de cargas externas, es menos conocido y existen menos

modelos de cálculo para ellos.

El punto de partida para la formulación de las hipótesis de la Teoría de Plasticidad fueron los resultados experimentales obtenidos en elementos metálicos sometidos a acciones tales que se superara en éstos su límite elástico, apareciendo unas deformaciones en parte irreversibles, independientes del tiempo, dependientes del historial de carga y no proporcionales con las tensiones (como sí ocurre a menores cargas). El objetivo de estos estudios elastoplásticos es la determinación del estado último de las estructuras, conocimiento crucial en casos límite, como puede ser el comportamiento ante sobrecargas, seísmos, etc.

En el estudio del comportamiento bidimensional de una estructura de barras en el dominio de la sección se pueden tener en cuenta distintos esfuerzos (flector, axil y cortante). Las funciones de plastificación, que nos indican la combinación de esfuerzos que hacen que la sección plastifique, dependen de los esfuerzos considerados y de la geometría de la sección a la que se aplica o, lo que es equivalente, del estado de tensiones existente en la sección. Estas tensiones son las que van a provocar que se alcance el estado límite de tensión elástica, según la hipótesis de plastificación elegida en algún punto de la sección, lo que genera el comienzo del proceso de la plastificación. Distintos autores [8, 48, 55] plantean funciones de plastificación para el elemento barra 2D teniendo en cuenta el efecto del momento flector, usado tradicionalmente, o combinaciones de esfuerzo flector y axil, o flector y cortante, o todos simultáneamente. Posteriores investigaciones [50] permiten determinar el comportamiento de la sección plastificada después de que se haya producido la plastificación, a partir del gradiente de su función. Sin embargo, o bien los estudios se desarrollan teniendo en cuenta solo los esfuerzos flector y axil, o flector y cortante, o bien se utilizan simplificaciones bilineales de la función de plastificación.

De forma resumida, el comportamiento elastoplástico de un elemento finito tipo barra está gobernado por la matriz de rigidez elastoplástica en la que intervienen la matriz de rigidez elástica y las derivadas de la función de plastificación respecto a las tensiones [8, 46, 54, 65, 73]. La extensión de esta formulación al caso de barras [50, 60, 70] lleva a una expresión similar donde juega un papel fundamental la función de plastificación y sus derivadas con respecto a los esfuerzos axil, cortante y momento flector. Esta función expresa la combinación de esfuerzos que llevan a la plastificación completa de la sección para una determinada carga. Para casos simples en los que se considere que esta función depende solo del momento flector, esta formulación lleva estrictamen-

te al modelo tradicional de rótula plástica. Sin embargo, este modelo es ideal, porque es obvio que en elementos reales no pueden darse curvaturas infinitas, puesto que para ello necesitarían deformaciones infinitas. Por tanto, los conceptos de momento plástico o la rotación libre en rótulas plásticas deben ser considerados como idealizaciones del comportamiento real de un acero en el que existan grandes cambios en la curvatura para pequeños aumentos del momento flector, tomando como referencia el comportamiento elástico [66].

Considerando la contribución del esfuerzo axil en el comportamiento plástico, se puede definir un momento flector reducido, que tomará un valor inferior al del momento flector plástico, debido a dicha influencia. Sin embargo, aunque se defina una rótula plástica en el momento en que una sección alcanza el valor combinado de axil y momento igual al de plastificación, con la posterior evolución de la carga se llega a la situación incompatible en que el momento en esa sección no varía (ya que la sección está plastificada y por tanto toma el valor del momento plástico reducido), mientras que el esfuerzo axil sí variará, incumpliendo por tanto la condición de que el momento flector continúe siendo igual al momento plástico reducido, definido como una combinación de ambos esfuerzos.

Sin embargo, si en la formulación de la función de plastificación adicionalmente se considera la influencia de los esfuerzos axil y cortante, los desarrollos son más complejos y aparecen fenómenos de acoplamiento entre esfuerzos y desplazamientos, obteniéndose finalmente un modelo más exacto del comportamiento elastoplástico.

Como antecedentes a esta Tesis, se ha planteado un modelo basado en el comportamiento plástico a nivel de punto, pero expresado en función de las variables tradicionales del modelo monodimensional de barra de Navier-Bernoulli. Se ha llegado, tras ciertas hipótesis, al concepto de sección plastificada, en lugar de rótula plástica, cumpliendo el modelo propuesto todas las exigencias del comportamiento plástico [67]. También se ha extendido el concepto de sección plastificada considerando el daño sobre ésta, determinando un criterio de agotamiento de la sección único, equivalente al momento plástico para el caso de rótula plástica pero que incluye muchos más efectos, con una matriz de rigidez elastoplástica degradable que tiene en cuenta las no linealidades del material [13].

En cuanto a la definición de las propiedades del acero, necesarias

para cualquier desarrollo de modelos que pretendan simular el comportamiento de estructuras construidas con él, al igual que ocurre con otros materiales, es relativamente sencillo obtener los valores de la curva de tensión-deformación en el tramo elástico. Sin embargo, otras propiedades de esta curva son más sensibles a las condiciones de ensayo y a pequeñas variaciones en la composición del material, e influyen de manera directa en el comportamiento final de la estructura simulada. Es necesario por tanto disponer de herramientas que permitan ajustar éstos y otros parámetros sujetos a cierta variabilidad.

Así, a finales del siglo XX, las técnicas de actualizado de modelos de elementos finitos (*Finite element model updating*) adquirieron gran importancia en el diseño, construcción y mantenimiento de sistemas mecánicos y estructuras de ingeniería civil [23]. A pesar del impacto que tuvieron las técnicas de computación introducidas desde la década de 1960, especialmente el método de elementos finitos, en el diseño ingenieril y el desarrollo de productos, la evolución posterior ha llevado a un punto en el que modelos de elementos finitos cada vez más detallados pueden no ser capaces de implicar las mejoras en el comportamiento de los productos que se les demanda. Es decir, como toda aproximación numérica, la predicción del comportamiento de un sistema físico está limitada por las hipótesis utilizadas en el desarrollo de modelo matemático subyacente. Con el objetivo último de corregir esas suposiciones erróneas o imprecisiones surgen las técnicas de *model updating*. Estas técnicas se desarrollaron inicialmente para el análisis del comportamiento modal de elementos y estructuras, aunque su desarrollo posterior permitió generalizar su utilización.

De forma general, los métodos de *model updating* pueden ser clasificados de la forma siguiente: [32]

**Métodos directos:** en estos métodos se espera que el modelo ajuste una serie de datos de referencia (generalmente un conjunto de valores y vectores propios derivados de medidas). De hecho, forzar el procedimiento de *model updating* para que reproduzca exactamente los datos modales medidos provoca que los errores en dichas mediciones se propaguen a los parámetros [24]. Por esta razón, este método no suele ser utilizado [23].

**Métodos de sensibilidad:** el problema de actualizado se plantea como un problema de optimización. Se crea una función objetivo que evalúa el error entre los datos analíticos y los experimentales y se trata

de minimizar dicha función haciendo cambios en unos parámetros físicos del modelo de elementos finitos seleccionado previamente. Para alcanzar la solución óptima se requerirá un proceso iterativo. Esta aproximación es capaz de actualizar parámetros físicos relevantes y localizar zonas erróneas del modelo [40, 71].

Aunque, como se ha comentado, los métodos de *model updating* se utilizaron inicialmente en el contexto de la dinámica de estructuras, su aplicación es mucho más general y permite el actualizado de parámetros de diversos modelos matemáticos que pretenden simular el comportamiento de la realidad o de otras fuentes de obtención de datos suficientemente fiables.



# Capítulo 2

## Desarrollos previos

### Contenidos

---

2.1.	Formulación del elemento barra . . . . .	14
2.2.	Función de fluencia . . . . .	17
2.3.	<i>Model Updating</i> . . . . .	21
2.3.1.	Descripción . . . . .	21
2.3.2.	Técnicas de ajuste . . . . .	22
2.3.3.	Necesidad de aplicar técnicas de actualizado .	26
2.4.	Evaluación de valores para la sección a partir de resultados puntuales del MEF . . . . .	30

---

## 2.1. Formulación del elemento barra

El estudio del comportamiento resistente de sólidos mediante modelos matemáticos puede simplificarse si el objeto del estudio presenta ciertas particularidades geométricas. En este caso, se expone brevemente el modelo matemático que caracteriza el comportamiento resistente de barras prismáticas, utilizando para ello la teoría de Resistencia de Materiales.

Se dice que un elemento estructural es una barra prismática si su volumen puede ser engendrado por una superficie plana (sección transversal) al moverse de forma que su centro de gravedad recorra una curva plana (directriz) manteniéndose siempre normal a ella y permaneciendo un eje de la sección en el plano de la directriz. Además, para que un elemento estructural pueda ser considerado como barra prismática, las dimensiones características de la sección deben ser pequeñas frente a su longitud, siendo la relación 1 a 10 entre el canto y la longitud un posible límite orientativo. La aproximación a la solución obtenida con un modelo de barras será por tanto más exacta cuanto más esbeltos sean sus elementos [25].

Así, el comportamiento de las barras prismáticas como sólido deformable se caracteriza mediante un modelo monodimensional en el que todas las magnitudes están referidas a secciones, en lugar de a puntos, dependientes de su posición en la barra, determinada por la coordenada longitudinal  $x$ .

El modelo debe permitir obtener las tensiones y desplazamientos en todos los puntos de las secciones a partir de sus magnitudes características:

**Desplazamientos:** se definen a partir de las magnitudes cinemáticas correspondientes a los puntos del eje longitudinal de la barra.

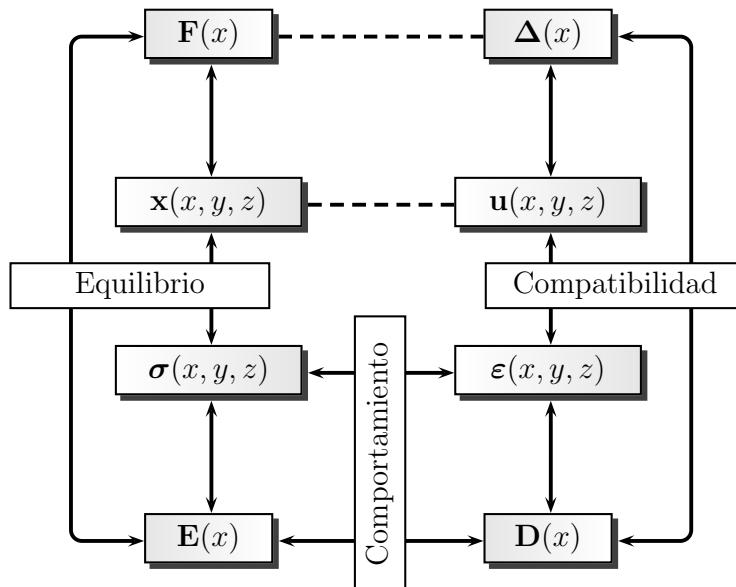
**Tensiones:** no pueden obtenerse directamente del modelo de barras, ya que aparecen en el entorno del punto. Sin embargo, su cálculo es imprescindible para saber si el material va a ser resistente, por lo que es necesario establecer su relación con el modelo continuo, a través de los esfuerzos [25].

En la Figura 2.1 se refleja una representación esquemática del modelo de barras (sus variables dependen únicamente de la coordenada  $x$ ) y

su relación con el modelo continuo (sus variables dependen de las tres coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ ).

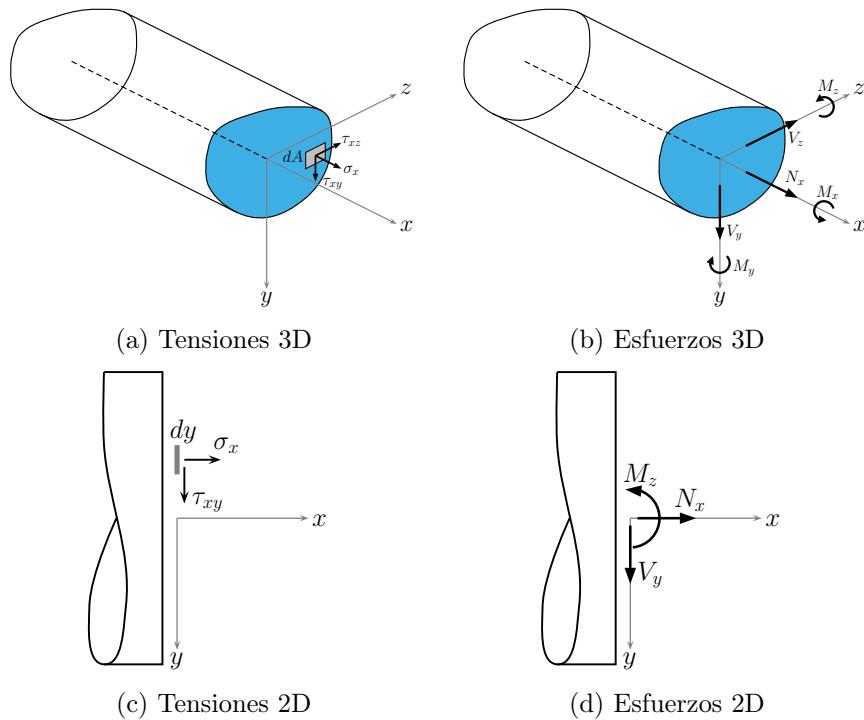
- En el modelo de barras se definen los vectores de fuerzas y momentos por unidad de longitud  $\mathbf{F}(x)$ , desplazamientos y giros de la sección  $\Delta(x)$ , esfuerzos  $\mathbf{E}(x)$  y deformación de la sección  $\mathbf{D}(x)$ .
- En el modelo continuo se definen los vectores de fuerzas por unidad de volumen y de superficie  $\mathbf{x}(x, y, z)$ , desplazamientos  $\mathbf{u}(x, y, z)$ , tensiones  $\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)$  y deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)$ .

En ambos casos, la relación entre sus variables viene establecida por las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento.



**Figura 2.1:** Modelo de barras

Los esfuerzos son las fuerzas y momentos estáticamente equivalentes a la distribución de tensiones en los puntos de una sección, expresados en el sistema de referencia local de la barra (Figura 2.2b, [67]). Limitando el modelo para el caso bidimensional y de barras rectas, siendo el eje  $x$  coincidente con la directriz, se define el esfuerzo axil  $N_x(x)$ , el esfuerzo cortante  $V_y(x)$  en dirección  $y$  y el momento flector  $M_z(x)$  en dirección  $z$  (Figura 2.2d).



**Figura 2.2:** Relación entre tensiones en el punto y los esfuerzos en la sección de la barra

La mencionada relación entre las tensiones de los puntos y los esfuerzos de la sección viene expresada mediante las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 N_x(x) &= \int_A \sigma_x(x, y, z) dA \\
 V_y(x) &= \int_A \tau_{xy}(x, y, z) dA \\
 M_z(x) &= \int_A y \sigma_x(x, y, z) dA
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $A$  es el área de la sección y  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  las tensiones normales y tangenciales, respectivamente.

## 2.2. Función de fluencia

Una de las teorías que más se ha desarrollado en las últimas décadas para el estudio de sólidos y estructuras más allá del régimen elástico es la mecánica del daño continuo (CDM) [10, 29]. Esta teoría introduce una nueva variable interna escalar: el daño isotrópico. Toma valores entre 0 y 1, donde un valor 0 corresponde con un material intacto o no dañado y el valor 1 representa un elemento totalmente dañado. Uno de los modelos más usados de CDM para metales fue propuesto por Lemaitre [38]. Dicho modelo puede integrarse con el concepto de rótula plástica [31] para simular numéricamente el proceso de daño y su influencia en el colapso de pórticos.

En trabajos anteriores [13, 67] se emplean los conceptos de la termodinámica de los medios continuos y de la mecánica del daño para acoplar la variable daño a las ecuaciones constitutivas del material, considerando entre otros aspectos que la sección de la barra se agota por el acoplamiento de los esfuerzos axil, cortante y flector y por el daño en la sección considerada mediante la denominada *función de fluencia*.

La función de fluencia o agotamiento  $Z$  de una sección depende por tanto de todos los esfuerzos sobre ella ( $N_x$ ,  $V_y$  y  $M_z$  en 2D), del nivel de daño alcanzado en ella ( $D$ ) y de la geometría de la propia sección. Puede obtenerse de forma experimental o analíticamente.

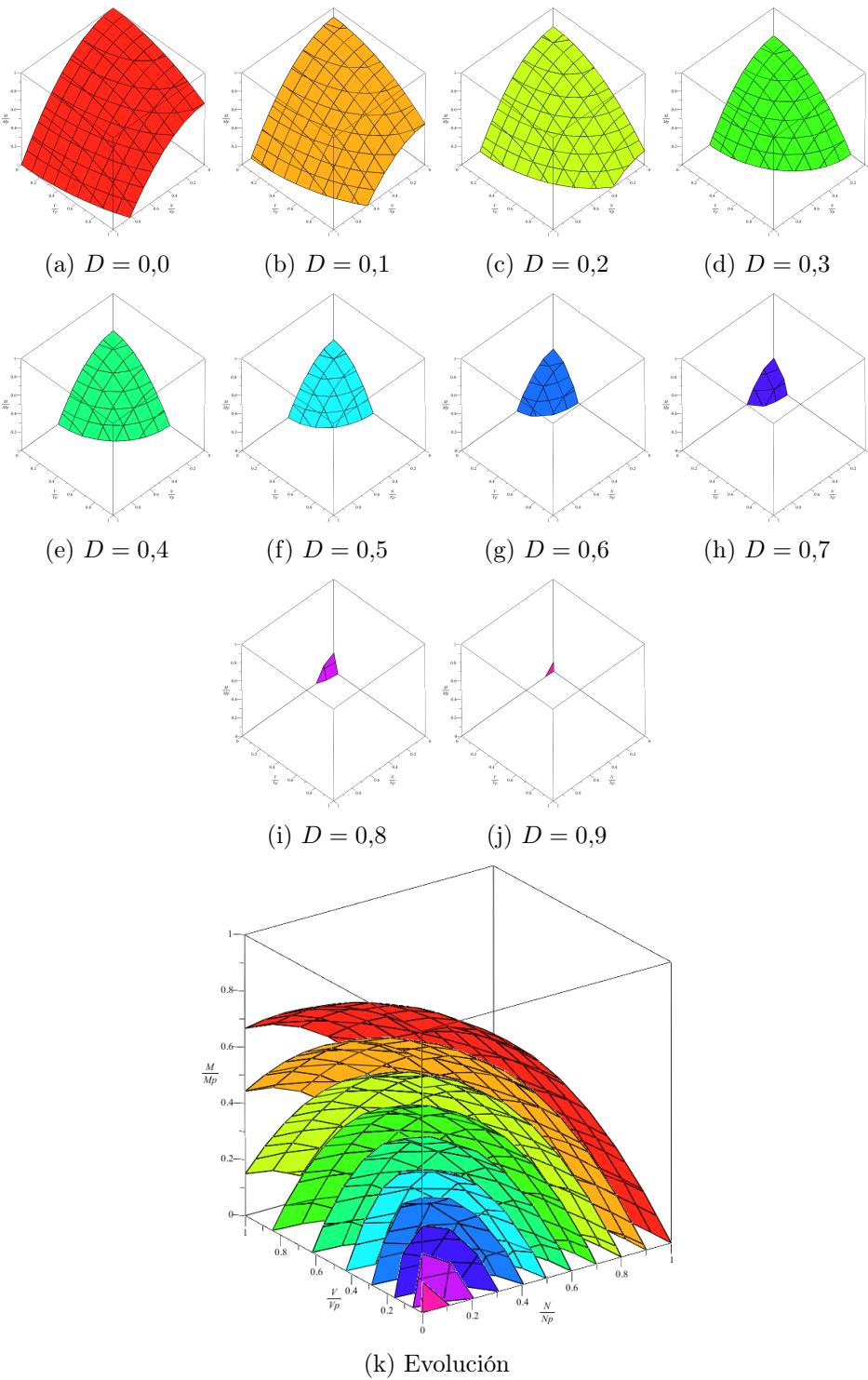
Para el caso de una barra de sección rectangular constante y comportamiento elastoplástico del material, se puede obtener analíticamente la relación entre los esfuerzos que llevan a la sección hasta su plastificación completa, suponiendo que empiezan a plastificar las fibras extremas por tensión normal: [67]

$$Z_{\text{MN}} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 - 1 = 0 \quad (2.2)$$

De forma análoga, se puede deducir la expresión para la función de fluencia incorporando daño del material: [13]

$$Z_{\text{MNVD}} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 \frac{1}{1-D} + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \quad (2.3)$$

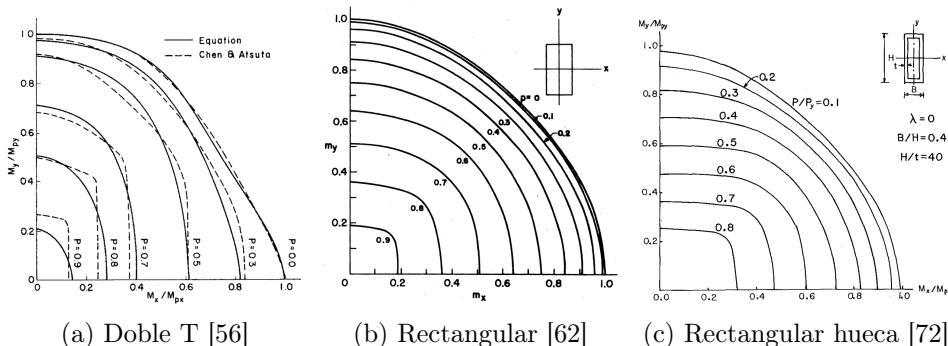
La evolución de la superficie de fluencia con el daño se puede ver en la Figura 2.3, donde se observa que la superficie es cada vez menor a medida que el daño aumenta.



**Figura 2.3:** Evolución de la función de fluencia con el daño

De esta forma, se generaliza el concepto de rótula plástica concentrada, que considera el momento flector como único esfuerzo que produce la plastificación cuando su magnitud coincide con el momento plástico de la sección, hablando en su lugar de sección plastificada, en la que el estado de plastificación se obtiene por una combinación de los esfuerzos sobre la sección. En general, el agotamiento de la sección será consecuencia de la actuación simultánea de los esfuerzos axil, cortante y flector, siendo sus valores en ese instante menores que el esfuerzo axil plástico, cortante plástico y flector plástico, respectivamente, denominándose entonces *esfuerzos reducidos*. Estos valores de los esfuerzos se relacionan mediante la Ecuación 2.3 (con daño) de forma que cuanto mayor es el valor de uno de los tres esfuerzos, menor es el valor necesario (esfuerzo reducido) de los otros dos para la plastificación de la sección, como se puede apreciar en la Figura 2.3.

Para otro tipo de secciones existen otras expresiones y diferentes aproximaciones para la función de fluencia. Muchas de las propuestas se basan en una carga biaxial de la sección, presentando los valores del momento flector reducido en la dirección débil frente a la fuerte, en función de la carga axil ([12] y Figura 2.4). En este caso se desprecia la contribución del esfuerzo cortante y únicamente se considera la reducción del momento flector a causa del esfuerzo axil y viceversa.



**Figura 2.4:** Distintas superficies de fluencia para diferentes secciones

Existen incluso aproximaciones [20] para la función de fluencia de secciones bisimétricas como las estudiadas en este Tesis (rectangular hueca, circular maciza, circular hueca y doble T) que reflejan la relación bajo carga uniaxial entre el esfuerzo axil reducido  $p$  y el momento flector reducido  $m$ , estando los esfuerzos reducidos adimensionalizados entre el correspondiente esfuerzo plástico. Los valores exactos de la función de

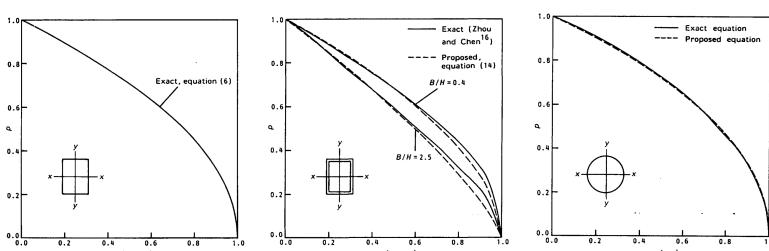
fluencia y su aproximación mediante una ecuación del tipo  $1 = p^\beta + m$  se pueden ver en la Tabla 2.1 y en la Figura 2.5.

Se hace notar que para el caso de sección rectangular maciza, la expresión  $1 = p^2 + m$  equivale a la expresión teórica de la Ecuación 2.2, despreciando la contribución del esfuerzo cortante y considerando que  $p = N_x/N_p$  y  $m = M_z/M_p$ .

**Tabla 2.1:** Expresiones de las superficies de fluencia de secciones bisimétricas [20]

Tipo de sección	Expresión exacta	Expresión aproximada
Rectangular maciza	$1 = p^2 + m$	$1 = p^2 + m$
Rectangular hueca	Ver [72]	$1 = p^\beta + m$ (*)
Circular maciza	$1 = p + \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(m^{1/3}) - \frac{1}{\pi} \sin[2 \sin^{-1}(m^{1/3})]$	$1 = p^{2,1} + m$
Circular hueca	$1 = m - \cos\left(\frac{\pi}{2}p\right)$	$1 = p^{1,75} + m$
Doble T	Ver [62]	$1 = p^{1,3} + m$

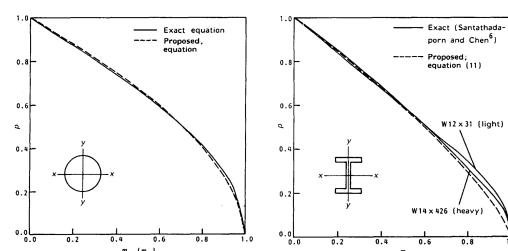
(\*)  $\beta = 2 - 0,5B/H \geq 1,3$  [19]



(a) Rect. maciza

(b) Rect. hueca

(c) Circular maciza



(d) Circular hueca

(e) Doble T

**Figura 2.5:** Superficies de fluencia de secciones bisimétricas [20]

## 2.3. *Model Updating*

### 2.3.1. Descripción

En ingeniería existe una necesidad de desarrollar modelos numéricos suficientemente precisos. Entre otras ventajas, los modelos numéricos permiten una exploración del espacio de diseño que sería prohibitivamente cara utilizando cualquier otra técnica experimental mediante prototipos y sus correspondientes ensayos [64].

Los modelos numéricos pueden, o bien requerir respuestas que otorgan predicciones cuantitativamente exactas, o bien únicamente predicciones cualitativas que asesoren sobre la tendencia que sigue la respuesta del modelo. Será el grado de complejidad del sistema el que limitará la exactitud que el usuario puede esperar del modelo numérico empleado, pero siempre deberá existir plena confianza en que el modelo prediga el comportamiento real del sistema.

El propósito de los modelos numéricos es permitir examinar diferentes configuraciones y diseños. Para ello, será necesario incluir parámetros que deberán estar directamente relacionados con los cambios en el diseño, de forma que dichos cambios impliquen variación en el valor de los parámetros. Los valores iniciales de dichos parámetros se basarán en supuestos hechos sobre el sistema. Estos supuestos introducirán cierto error, mayor cuanta más incertidumbre exista sobre el verdadero valor de dichos parámetros, pudiendo llegar a ser inaceptable como para considerar útil el modelo.

Las técnicas de actualización se basan en utilizar datos experimentales, tanto entradas como salidas, de sistemas reales para mejorar las estimaciones realizadas sobre los parámetros de un método numérico, comparando los resultados experimentales con las predicciones del modelo. Las técnicas de mejora llevarán las predicciones del modelo más cerca de la respuesta real del sistema. La medida de cuánto se mejora el modelo depende de las necesidades del usuario y de la complejidad del sistema, factores que irán cambiando según la situación.

Tras el proceso de actualización a partir de los datos experimentales, se espera que los resultados de las posteriores simulaciones sean más precisos, aunque no se puedan comparar con los resultados experimentales correspondientes en todos los casos.

### 2.3.2. Técnicas de ajuste

El método numérico principal de modelado de análisis estructural es el Método de los Elementos Finitos. Dicho método es ampliamente utilizado en actividades industriales y de investigación y es capaz de reproducir el comportamiento de estructuras reales. Sin embargo, la predicción de un modelo de elementos finitos no siempre es precisa, debido a alguna de las siguientes razones [32]:

- Limitaciones del modelo matemático para describir la realidad física.
- Estimación incorrecta de las propiedades físicas de los materiales que componen la estructura.
- Simplificaciones de las leyes de comportamiento (linealizaciones, suposición de proporcionalidad, etc.).
- Errores de mallado debidos a supuestos incorrectos en las funciones de forma y/o a una malla de mala calidad.
- Pobre aproximación de las condiciones de contorno o variabilidad de las mismas con la respuesta.
- Modelado inadecuado de uniones.
- Introducción de errores numéricos adicionales durante la fase de solución.

En realidad, las estructuras siempre diferirán en algún aspecto respecto a las idealizaciones asumidas en su modelización. Las propiedades del material y de la geometría pueden variar o ser desconocidas, pueden existir no linealidades, mecanismos de amortiguamiento o efectos acoplados que no se tienen en cuenta en el modelo. En muchos casos, no se puede confiar plenamente en un modelo hasta que éste pueda ser validado a través de una serie de pruebas. A pesar de ello, el nivel de detalle demandado a las aplicaciones actuales es demasiado elevado como para poder obtenerse únicamente a través de la actualización de sus parámetros a partir de los valores de aplicaciones experimentales. Por ello, recientemente ha crecido el interés en las técnicas de *model updating* en elementos finitos.

De forma general, además de la clasificación expuesta en el Apartado 1.3, los métodos de *model updating* en elementos finitos se pueden clasificar en [33]:

**Métodos globales:** actualizan directamente los elementos de las matrices estructurales. Dichas matrices podrán reproducir las características de la estructura real de forma precisa, pero las correcciones hechas sobre ellas no tienen por qué tener un significado físico. Como resultado, se pueden perder ciertas propiedades matemáticas esenciales del sistema, como la conectividad, o pueden crearse frecuencias falsas en el rango de interés del modelo actualizado, haciendo que las matrices de masas y rigidez puedan dejar de ser definidas positivas.

**Métodos locales:** solo consideran la estimación de parámetros físicos cuyo valor no esté completamente definido (como el espesor, el módulo de Young, etc.) y por tanto preserva las propiedades matemáticas del modelo inicial.

Aunque el proceso de *model updating* general conlleva la comparación de las respuestas medidas y predichas por el modelo, en muchas aplicaciones es preferible realizar una comparación de *características*. Se entiende por *característica* una variable identificada de la respuesta física del sistema que captura información contenida en los datos. La definición de características apropiadas en las técnicas de actualizado es interesante por varias razones:

- Existe cierto riesgo de inexactitud al estimar la bondad en la predicción de un modelo numérico basándose únicamente en su capacidad para ajustar su respuesta. Sin embargo, la comparación de características proporciona importante información sobre el sistema.
- Un conjunto de datos multivariable de  $n$  dimensiones será por lo general altamente redundante y casi nunca  $n$ -dimensional. La reducción de dicha dimensionalidad conduce a una mejora en el comportamiento del algoritmo de actualizado porque, aunque implica cierta pérdida de información, permite resaltar los contenidos relevantes de los datos disponibles.
- El ruido e inexactitud de las medidas siempre corrompe los datos y las características son menos sensibles a ellos.

Como los métodos de elementos finitos suelen requerir de la definición de un mayor número de grados de libertad (GDL) que las pruebas experimentales, será necesario, o bien reducir las matrices estructurales del modelo hasta el número de GDL del experimento, o bien aumentar el número de datos experimentales medidos hasta igualar el número de GDL del modelo.

Si la correlación entre el modelo de elementos finitos y la respuesta real no es satisfactoria, es necesario corregir el modelo. Dicha corrección comienza con la adecuada selección de los parámetros de actualizado, para la que pueden ser útiles técnicas de localización de errores, análisis de sensibilidad y siempre un criterio ingenieril basado en la experiencia. De los posibles criterios utilizables para la corrección, alguno de los más empleados [21], en orden creciente de información necesitada para plantearlos, son: minimización de distancias, Markov, máxima verosimilitud, máxima verosimilitud con información previa, y mínimo riesgo. El criterio más simple consiste en minimizar la distancia generalizada entre las variables medidas y las predichas con el modelo, utilizando para ello una norma de orden  $j$ . En concreto, la más utilizada [36] y la que se empleará en esta Tesis será la minimización de la norma de orden 2, que da lugar al *método de mínimos cuadrados*.

Por lo tanto, los nuevos valores de los parámetros de actualizado se obtendrán minimizando la función objetivo  $F$ :

$$F = \|R(p)\|^2 = \sum_{i=1}^m [x_i - M_i(\mathbf{p})]^2 \quad (2.4)$$

o, en notación matricial:

$$F = \|\mathbf{R}(\mathbf{p})\|^2 = [\mathbf{x} - \mathbf{M}(\mathbf{p})]^T [\mathbf{x} - \mathbf{M}(\mathbf{p})] \quad (2.5)$$

donde el vector  $\mathbf{p}$  contiene los parámetros de actualizado y  $\mathbf{R}(\mathbf{p})$  es el residuo, obtenido como la diferencia entre los parámetros experimentales  $\mathbf{x}$  y los obtenidos del modelo  $\mathbf{M}(\mathbf{p})$ .

Las características deben garantizar una sensibilidad suficiente de la función objetivo con respecto a los parámetros de actualizado. Como la función objetivo es generalmente no lineal respecto a los parámetros de actualizado, es necesario realizar un proceso iterativo para actualizar el modelo.

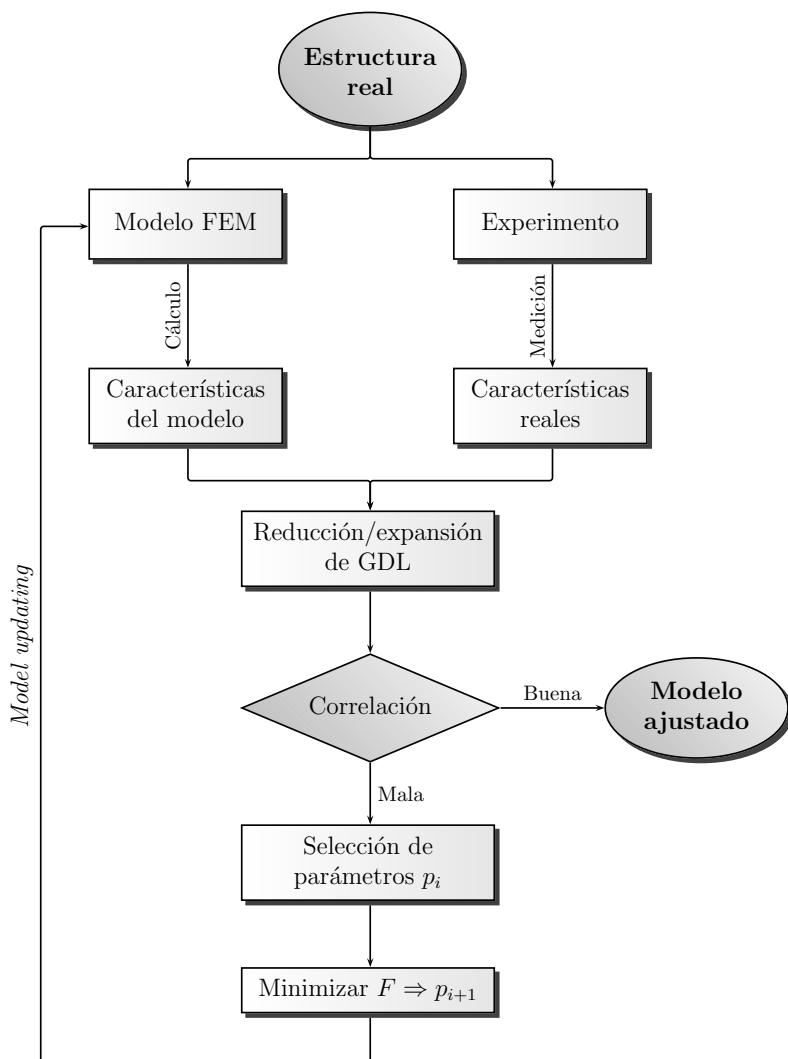


Figura 2.6: Proceso de *model updating* general

### 2.3.3. Necesidad de aplicar técnicas de actualizado al problema de cálculo plástico de estructuras de barras

Un *modelo* es una simplificación de los fenómenos del mundo real que permita comprender las situaciones complejas y poder hacer predicciones. Por lo tanto, ningún modelo es verdadero o falso, tan solo mejor o peor que otros, dependiendo del grado de representatividad que alcance sobre el fenómeno que pretende describir o explicar.

Un *modelo matemático* es un modelo científico que emplea algún tipo de formulismo matemático para expresar relaciones, proposiciones sustantivas de hechos, variables, parámetros, entidades y relaciones entre variables y/o entidades u operaciones para estudiar comportamientos de sistemas complejos ante situaciones que pueden ser difíciles de observar en la realidad [61].

Las características deseables de los modelos matemáticos [53] son:

**Parsimonia:** un modelo no es necesariamente mejor por tener muchos parámetros. A igualdad de otras consideraciones, es preferible un modelo simple a otro más complejo.

**Modestia:** solo debe tratar de alcanzarse objetivos asequibles. Un modelo no debe aspirar a imitar la realidad sino solo a resaltar aquellos aspectos de interés para su aplicación.

**Exactitud:** el modelo debe reproducir en la medida de lo posible el funcionamiento del sistema y generar valores para las variables de salida similares a los observados en la realidad.

**Verificabilidad:** los resultados del modelo deben poder compararse con datos reales y determinar de este modo el grado de exactitud del modelo.

Además, no es suficiente que un modelo funcione bien: debe funcionar bien por las razones correctas.

El *proceso de modelado* es, por tanto, una técnica que consiste en crear una representación ideal de una entidad real mediante un conjunto de simplificaciones y abstracciones cuya validez se pretende constatar. La validación del modelo se lleva a cabo comparando las observaciones

con las implicaciones predichas por el mismo, en un proceso generalmente cíclico: un primer modelo logrará predicciones sobre un sistema, que pueden ser probadas mediante la toma de datos y, al comparar ambos resultados, el modelo se podrá refinar o mejorar, lo cual implicará unas mejores predicciones. Este proceso se representa esquemáticamente en la Figura 2.7.

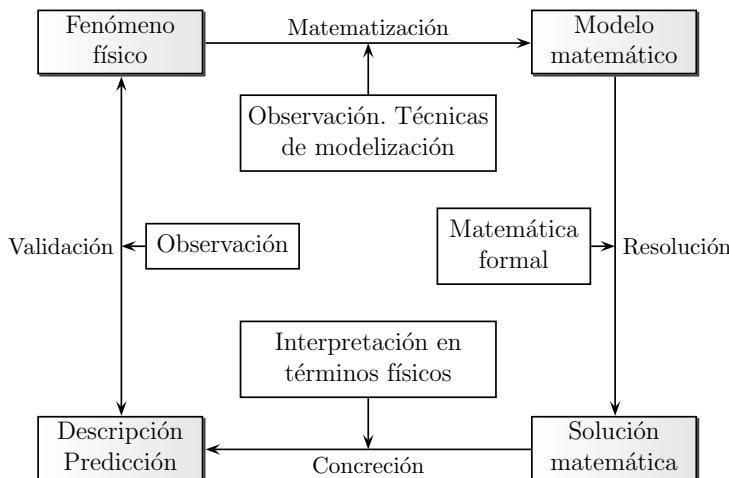


Figura 2.7: Proceso de modelado

A partir de cierta complejidad de cualquier modelo, especialmente si tiene en cuenta variaciones en el tiempo o el espacio, será necesaria la resolución de muchas operaciones matemáticas, por lo que se requerirá un ordenador para la resolución ordenada en forma de algoritmo del problema planteado.

Los modelos presentados en esta Tesis se adaptan a las definiciones anteriores, identificándose los siguientes aspectos:

- El problema real que se pretende modelar es el cálculo de estructuras de barras sometidas a una serie de acciones exteriores suficientes para alcanzar el régimen plástico y el colapso.
- El formalismo matemático empleado se corresponde con la formulación del elemento barra y las expresiones de varias ramas del cálculo de estructuras: resistencia de materiales, cálculo plástico, mecánica del daño continuo, etc.
- Las predicciones que se desean obtener se corresponden con la respuesta de la estructura bajo las condiciones iniciales impuestas:

desplazamientos, giros, esfuerzos, cargas de plastificación, estado de las secciones, etc.

- La validación del modelo se llevará a cabo mediante el proceso de *model updating* descrito, que comparará las predicciones del modelo con los resultados reales, actualizando de nuevo el modelo con unos nuevos valores de los parámetros del material.
- Las simplificaciones adoptadas en alguno o varios de los modelos son las siguientes:
  - El sistema se modela como un conjunto de elementos tipo barra, de directriz recta y sección bisimétrica constante, cuyas interconexiones se producen en los nodos, supuestos concentrados en los puntos de intersección de las directrices.
  - Las estructuras son planas y sus cargas están contenidas en ese mismo plano.
  - Se aplica la hipótesis de pequeños desplazamientos y además se asume que los desplazamientos y giros de los puntos de una sección transversal son iguales a los de la directriz de la barra en esa sección.
  - Se asume que las secciones planas transversales a la directriz de la barra permanecerán planas y ortogonales a la deformada.
  - Se modela el material a partir de relaciones lineales o bilineales entre la tensión y deformación, obviando la compleja relación real entre estas variables.
  - Las cargas exteriores se modelizan como puntuales, distribuidas, cargas térmicas o desplazamientos prescritos y se supone un estado creciente de cargas.
  - Se idealiza la relación entre momento y curvatura en la sección, por lo que se supone que la plasticidad comienza de forma súbita.
  - La plastificación de una sección se supone concentrada, de forma que las secciones adyacentes permanecerán en régimen elástico.
  - La función de fluencia utilizada supone que la plastificación de las secciones comienza a en las fibras extremas por tensión normal y que la sección se agota (plastificación completa) cuando

se produce una determinada relación entre los esfuerzos axil y cortante, el momento flector y el daño.

- El daño de la sección se estima a partir de expresiones ajustadas para diferentes materiales o a partir de relaciones teóricas entre variables de respuesta de la estructura, y se supone concentrado en los extremos de la barra.
- Se toma como válida la descomposición aditiva de los desplazamientos elastoplásticos en una componente elástica y otra plástica.
- Los resultados del MEF (con los que se realizará el ajuste de los modelos) correspondientes a una sección se estiman a partir de los valores puntuales en sus nodos.

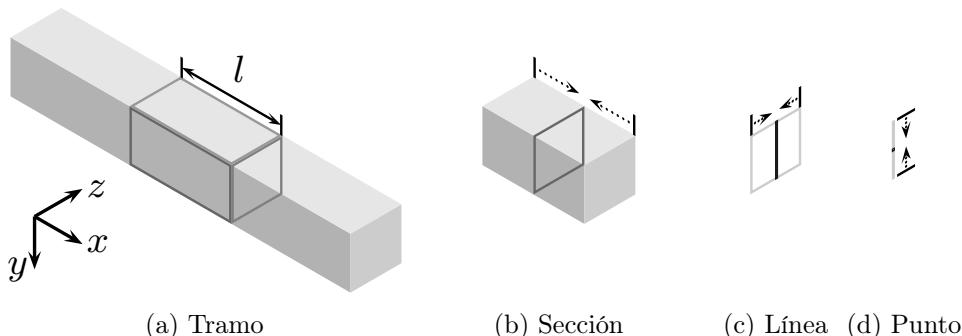
Por lo tanto, la elección de un número reducido de parámetros para el actualizado, la fuente de inexactitud de los cálculos numéricos y las hipótesis y restricciones impuestas sobre las condiciones de las estructuras de estudio, junto con la inherente necesidad de adoptar simplificaciones en toda modelización, justifica la necesidad de utilizar técnicas de actualizado del modelo para lograr predecir la respuesta de sistemas reales a partir de una traducción de la realidad física del problema en la que se aplican las técnicas matemáticas desarrolladas.

## 2.4. Evaluación de valores para la sección a partir de resultados puntuales del MEF

Los resultados de los programas de elementos finitos son siempre valores numéricos referidos a un nodo o punto, ya que precisamente están basados en la división del continuo en elementos conectados por nodos sobre los que realizar los cálculos. Sin embargo, en ocasiones es necesario disponer de un valor único para la sección (por ejemplo, cuando se quieren comparar los resultados de un cálculo por elementos finitos con los de un cálculo mediante el modelo de barras). Mientras que algunos valores de la sección se pueden asumir iguales a los de su nodo central, como por ejemplo el desplazamiento, otros necesitan de algún tipo de integración o promedio a lo largo de la misma o incluso de secciones adyacentes, como por ejemplo el daño de la sección.

La obtención de los esfuerzos axil, cortante y momento flector integrando las tensiones a lo largo de la sección está suficientemente desarrollada [26, 73]. Sin embargo, en lo que a daño se refiere, se define a continuación un procedimiento que permite obtener un valor único en una sección a partir de los valores puntuales en sus nodos y en los de las secciones contiguas afectadas. Para ello, se llevan a cabo cuatro reducciones del dominio:

1. Elección del tramo afectado en el cual se evaluará la variable, que englobe toda la zona afectada o que se deseé considerar (Figura 2.8a). Este tramo será generalmente simétrico respecto a la sección cuyo valor se desea estimar si ésta se encuentra en un punto interior de una barra. La amplitud de esa zona se fijará según el criterio del usuario o en un proceso iterativo de actualizado que ajuste el valor final de un problema conocido.
2. Reducción en dirección  $x$  de los valores de las secciones adyacentes a valores en la sección (Figura 2.8b).
3. Reducción en dirección  $z$  de los valores de la sección a valores en la línea central vertical (Figura 2.8c).
4. Reducción en dirección  $y$  de los valores de la línea central vertical a un valor final en el centro de la sección (Figura 2.8d).



**Figura 2.8:** Reducción de los valores de una variable del MEF a un valor único

Para los tres últimos pasos se define a continuación el proceso de reducción necesario de cada línea de nodos a un único valor (considerando un número total de nodos  $n$  ordenados de forma creciente:  $i = 1 \dots n$ ):

1. Definir los tres coeficientes de forma ( $C_o$ ,  $C_m$  y  $C_f$ ), con un significado similar al de las funciones de forma, que otorguen un peso relativo diferente a cada zona de la línea (inicial, central y final, respectivamente) cuyos valores se quieren reducir a un punto. Al utilizar tres valores, existe mucha más variabilidad de casos con los que dar importancia a determinadas zonas de esas líneas que utilizando únicamente dos valores en los extremos que, por ejemplo, impiden dar un peso relativo mayor a la zona central que a las extremas. Su valor absoluto no es relevante, únicamente la proporción entre ellos, ya que posteriormente se normalizarán.
  2. Definir los coeficientes de interpolación para cada nodo, interpolando linealmente entre  $C_o$  y  $C_m$ , si se encuentra en la primera mitad de la línea considerada, o entre  $C_m$  y  $C_f$ , si se encuentra en la segunda mitad. Lógicamente, el valor de  $c_i$  en los nodos en los que se fijan los valores de los coeficientes de forma será el mismo que el propio coeficiente  $C$ . Tras obtener todos los valores de  $c_i$ , éstos se normalizarán de forma que  $\sum_i^n c_i = 1$ .
  3. Multiplicar el valor de la variable considerada en cada nodo por su coeficiente de interpolación  $c_i$  correspondiente.
  4. Sumar los valores obtenidos de la operación anterior, lo que dará

como resultado un valor único para toda la línea.

Finalmente se obtienen las funciones de interpolación que permiten obtener los valores de  $c_i$  a partir de los coeficientes de forma  $C$ . Debe distinguirse entre los casos en los que el número de nodos de la línea considerada sea par o impar, como se puede observar en la Figura 2.9. Se comprueba que las expresiones correspondientes al tramo 1 y al tramo 2 coinciden en el nodo común.

**Tabla 2.2:** Funciones de interpolación

n	Tramo	Expresión	Aplicación
Impar	1	$c_i = C_o + 2 \frac{i-1}{n-1} (C_m - C_o)$	$i \leq \frac{n+1}{2}$ $n \geq 2$
	2	$c_i = C_m + \frac{2i-n-1}{n-1} (C_f - C_m)$	$i \geq \frac{n+1}{2}$ $n \geq 2$
Par <sup>a</sup>	1	$c_i = C_o + 2 \frac{i-1}{n-2} (C_m - C_o)$	$i \leq \frac{n}{2}$ $n > 2$ <sup>b</sup>
	2	$c_i = C_m + \left(2 \frac{i}{n} - 1\right) (C_f - C_m)$	$i \geq \frac{n}{2}$ $n \geq 2$

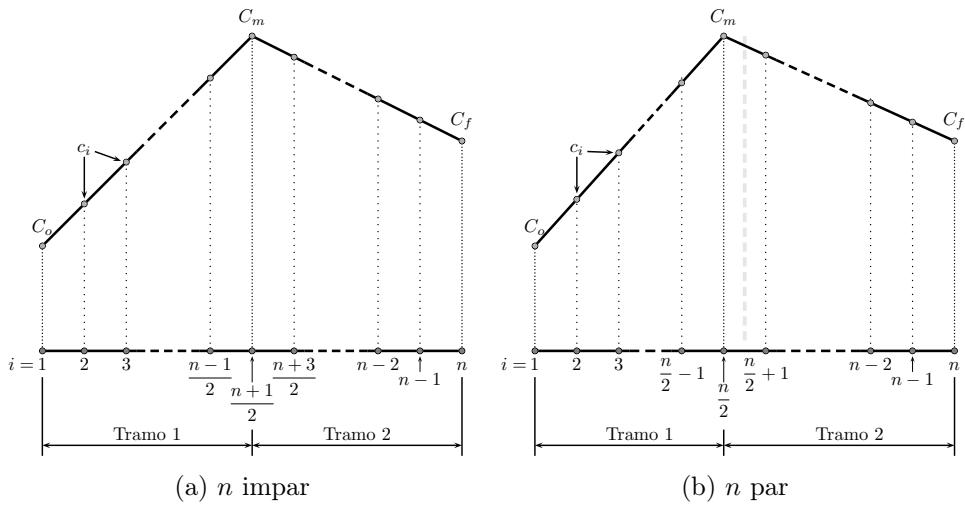
<sup>a</sup> El valor  $C_m$  se aplica en el nodo inmediatamente a la izquierda del punto central de la línea de nodos

<sup>b</sup> Si  $n = 2$ ,  $C_o = C_m$  y por tanto  $c_1 = C_o = C_m$ ,  $c_2 = C_f$

Este procedimiento es aplicable para cualquier sección plana considerada. La elección del tramo afectado y la reducción en dirección  $x$  son similares para cualquier sección, al igual que la reducción en dirección  $y$ , una vez obtenida la línea central vertical. Respecto a la reducción en dirección  $z$ , considerando las secciones estudiadas en esta Tesis, se pueden realizar los siguientes comentarios:

**Rectangular maciza:** mostrada en la Figura 2.8. La reducción en dirección  $z$  se lleva a cabo sobre un ancho útil, entendido éste como la cantidad de material que se encuentra en cada franja horizontal, constante para todo el canto de la sección, por lo que el número de nodos  $n$  será el mismo para cualquier cota.

**Rectangular hueca:** el ancho útil de la sección toma valores diferentes según se encuentre en la zona superior e inferior o en la zona central, por lo que el número de nodos  $n$  podrá variar de una zona a otra.



**Figura 2.9:** Funciones de interpolación para la obtención de un valor único

En el caso de la zona central, se reducirá la variable a un punto por cada pared lateral y, posteriormente, esos valores a un único punto central.

**Circular maciza:** el ancho útil de la sección varía, por lo que  $n$  podrá ser diferente para cada cota  $y$ , dependiendo del mallado.

**Circular hueca:** el ancho útil de la sección varía en dos sentidos (ancho total variable y existencia de dos zonas diferentes), por lo que  $n$  podrá ser diferente para cada cota  $y$ , dependiendo del mallado. En el caso de la zona central, adicionalmente se reducirá el daño a un punto por cada pared lateral y, posteriormente, esos dos valores a un único punto central.

**Doble T:** el ancho útil de la sección toma valores diferentes según se encuentre en la zona de las alas o en la del alma del perfil, por lo que  $n$  podrá variar de una zona a otra, aunque en cada una de ellas el ancho útil es constante y está centrado en el eje  $y$ .



# Capítulo 3

## Modelos

### Contenidos

---

<b>3.1.</b>	<b>Introducción</b>	<b>36</b>
<b>3.2.</b>	<b>MDRCP</b>	<b>38</b>
3.2.1.	Hipótesis	38
3.2.2.	Material elastoplástico ideal	38
3.2.3.	Modelo	44
<b>3.3.</b>	<b>MDRCPR</b>	<b>45</b>
3.3.1.	Hipótesis	45
3.3.2.	Material elastoplástico con daño sin endurecimiento	45
3.3.3.	Modelo	48
<b>3.4.</b>	<b>MDRCPRE</b>	<b>53</b>
3.4.1.	Hipótesis	53
3.4.2.	Material elastoplástico con daño y con endurecimiento	53
3.4.3.	Modelo	57

---

### 3.1. Introducción

En los siguientes apartados se presentan diferentes modelos del comportamiento de estructuras planas de dificultad y exactitud crecientes, tanto en la caracterización del material como los algoritmos de cálculo, matriz de rigidez, etc.

Los modelos son los siguientes:

- Apartado 3.2: Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso (MDRCP).
- Apartado 3.3: Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso y Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño (MDRCPR).
- Apartado 3.4: Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso, Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño, y Endurecimiento (MDRCPRE).

La base de partida de todos ellos es el Método Directo de Rigidez (MDR) aplicado a estructuras de barras, cuya formulación y notación se detalla en el Apéndice A.

Para la caracterización del material se emplea una barra sometida a flexión y se considera la teoría de barras clásica de Navier-Bernoulli [68]. Para ilustrar el comportamiento tensional se utiliza una sección rectangular, sin pérdida de generalidad, ya que cualquier otra geometría bisimétrica presenta distribuciones cualitativamente semejantes, como se puede observar en el Apartado B.3. Además, se considerará la hipótesis de material homogéneo e isótropo, aunque su relación  $\sigma - \varepsilon$  será diferente según el modelo de comportamiento del material considerado, como se explica en cada apartado.

Por lo tanto, las hipótesis comunes para los tres modelos son las siguientes:

- Respecto a la discretización:
  - Sistema modelado como un conjunto de elementos simples tipo barra, de uso común en arquitectura, ingeniería estructural e ingeniería civil.

- Aplicación a elementos de directriz recta y sección constante.
  - Interconexión entre elementos producida en los nodos, supuestos éstos concentrados en el punto de intersección de las directrices.
  - Estructura plana contenida en el plano global  $XY$  y cargada en el propio plano.
- Hipótesis de Navier-Bernoulli para la sección:
- Desplazamientos  $u_x$ ,  $u_y$  y giro  $\theta_z$  de todos los puntos de una sección transversal, pequeños e iguales a los de la directriz de la barra (eje  $x$  local) en esa sección.
  - Desplazamiento  $u_z$  y giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  nulos.
  - Secciones planas transversales a la directriz de la barra antes de la deformación permanecen planas y ortogonales a la deformada después de la deformación.
- Estado de cargas proporcional y aplicación monótona creciente.
- Material homogéneo e isótropo (diferente comportamiento según el modelo).

En cada uno de los modelos descritos se detallarán las hipótesis adicionales contempladas.

## 3.2. MDRCP

Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso. Aplicación secuencial del Método Directo de Rigidez donde, tras identificarse la sección donde aparece una rótula plástica a medida que aumenta la carga, se actualiza la estructura añadiendo la rótula, resolviendo el problema incremental y acumulando la solución hasta el instante último, marcado éste por el momento en el que la estructura incremental tiene movimiento de sólido rígido.

### 3.2.1. Hipótesis

Las hipótesis adicionales respecto al Apartado 3.1 contempladas en este modelo son las siguientes:

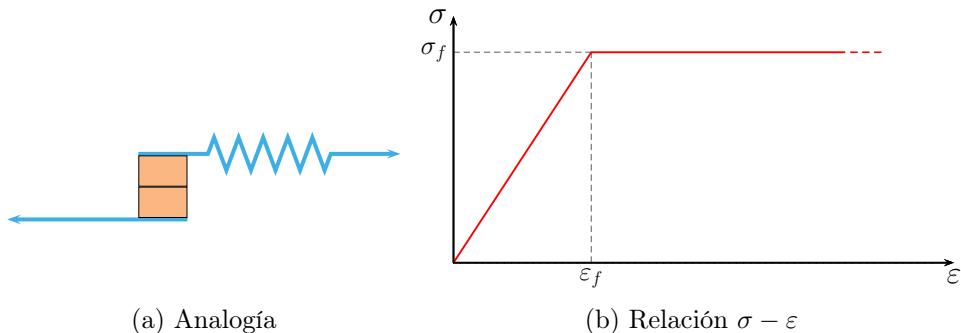
- Estado de cargas proporcional.
- Material elastoplástico ideal.
- Rótulas plásticas concentradas súbitas causadas únicamente por momento flector.

### 3.2.2. Material elastoplástico ideal

El comportamiento de cada fibra de una sección de un elemento barra 2D modelado con un material elastoplástico ideal (Figura 3.1), sometido a un momento flector, será elástico lineal hasta que alcance un nivel de tensión igual al de fluencia. A partir de ese punto se comportará de forma plástica ideal, aumentando la deformación indefinidamente sin suponer un incremento de tensión.

La hipótesis de Navier-Bernoulli de que las secciones planas transversales a la directriz de la barra antes de la deformación permanecen planas y ortogonales a la deformada después de la deformación, es aplicable también en régimen elastoplástico y plástico. En efecto, considerando las conocidas definiciones del momento flector y la relación tensión-deformación en régimen elástico siguientes:

$$M_z = \frac{I_z}{y} \sigma \quad \sigma = E_f \varepsilon \quad (3.1)$$



**Figura 3.1:** Modelo para el comportamiento del material elastoplástico ideal

(donde  $I_z$  es el momento de inercia,  $y$  es la coordenada definida en el Apartado 2.1 y  $E_f$  el módulo de Young del material en el tramo elástico), y habida cuenta de que la curvatura  $\kappa$  es proporcional al momento flector en régimen elástico y que se puede aproximar por la segunda derivada del desplazamiento transversal, se obtiene la siguiente expresión, válida para  $M < M_e$ :

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \kappa = \frac{M_z}{E_f I_z} = \frac{\sigma}{E_f y} = \frac{\varepsilon}{y} \quad (3.2)$$

El comportamiento de la sección, a medida que aumenta la carga sobre ella, puede observarse a través de la relación momento-curvatura que, para este modelo, toma la forma bilineal mostrada en la curva azul de la Figura 3.2.

La evolución del comportamiento de la sección completa (Figura 3.3 y de forma resumida en la Figura 3.4), considerando para el ejemplo una simple sección rectangular, se resume a continuación:

- (a). Comportamiento elástico lineal para unos valores de la curvatura  $0 \leq \kappa < \kappa_e$ .
- (b). Comienzo de la plastificación. En las fibras extremas de la sección se alcanza la tensión de fluencia  $\sigma_f$ , tomando el momento flector el valor  $M_e$ , el momento elástico. La curvatura toma el siguiente valor, considerando la definición de la Ecuación 3.2:

$$\kappa_e = \frac{\varepsilon_f}{h/2} \quad (3.3)$$

siendo  $\varepsilon_f = \sigma_f/E_f$  la deformación de fluencia.

- (c). Si el momento aumenta por encima del momento elástico, las distribuciones de las tensiones y de las deformaciones variarán, manteniéndose un comportamiento elástico lineal en la zona central y teniendo las fibras extremas de la sección un comportamiento plástico puro, con deformaciones mayores que la de fluencia ( $\varepsilon_f$ ). Para el cumplimiento de la hipótesis de que la sección transversal continúa plana y normal a la directriz de la barra es necesario que la ley de deformaciones en dicha sección sea lineal. Por tanto, en la zona plástica, la ley de deformaciones es continuación de la recta definida en la zona elástica, aunque las correspondientes tensiones tengan valor constante  $\sigma_f$ . En este régimen elastoplástico la curvatura tomará el siguiente valor, considerando que el valor de la deformación para  $y = y_f$  es  $\varepsilon_f$ :

$$\kappa_{ep} = \frac{\varepsilon_f}{y_f} \quad (3.4)$$

siendo  $y_f$  la coordenada del punto de cambio de pendiente de las tensiones, mostrado en la Figura 3.4. La curvatura  $\kappa_{ep}$  aumenta más rápidamente al aumentar el momento con respecto al régimen elástico según avanza la plastificación.

- (d). Comportamiento plástico de toda la sección cuando todos sus puntos han plastificado. Estáticamente el momento resultante se denota  $M_p$  y se alcanza cuando  $y_f$  se hace nulo. Cinemáticamente, la curvatura  $\kappa_{ep}$  según la Ecuación 3.4 se hace indeterminada y por tanto las barras que concurren en esta sección se comportan como si hubiesen sufrido un giro relativo de forma similar a una *rótula elástica*: existirá un cambio finito en la pendiente de la deformada, perdiéndose la continuidad C1. Desde este punto de vista ideal, la relación entre el momento y la curvatura estaría representada por la curva verde de la Figura 3.2. La existencia del tramo curvo entre  $M_e$  y  $M_p$  dificulta significativamente el cálculo de los desplazamientos. Este tramo es debido al comportamiento elastoplástico de la sección bajo estudio y de las secciones adyacentes. Para el cálculo de desplazamientos ( $u_y$ ) es preciso conocer la curvatura de la directriz a lo largo de toda la barra. Como la curvatura depende del momento flector y del régimen, será necesario además conocer la extensión de las zonas con comportamiento elastoplástico.

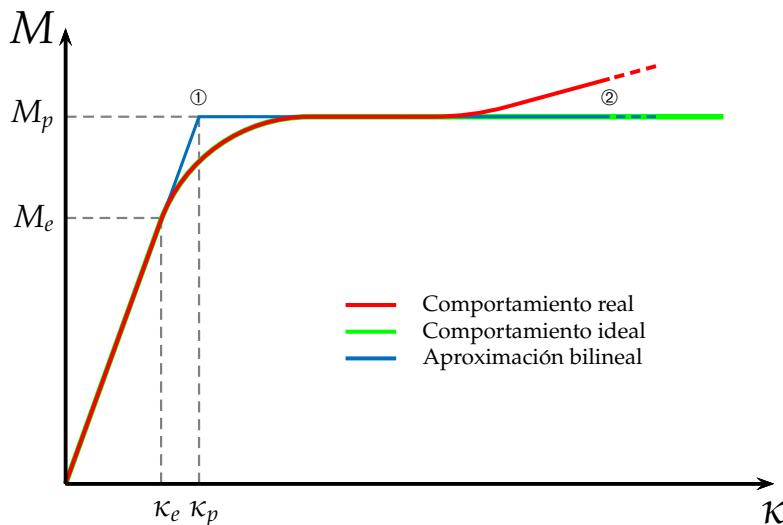
Para evitar estos complejos cálculos, es habitual en este modelo suponer que la relación entre el momento y la curvatura se mantiene

lineal hasta  $M_p$  (curva azul de la Figura 3.2). Esto equivale, desde el punto de vista cinemático, a suponer que la sección donde aparecerá el momento  $M_p$  se comporta como en régimen elástico incluso por encima de  $M_e$ , y que en el momento en que alcanza el valor de  $M_p$  se considera que puede aparecer un incremento significativo de la curvatura. Es decir, la rótula aparece por *plasticidad súbita* (entendiendo por ello que mientras no se alcance el momento plástico se considera que está en régimen elástico). También equivale a suponer que las secciones adyacentes están en régimen elástico, es decir, que no hay zona elastoplástica. Por tanto, la rótula es *concentrada* (no hay distribución de la plasticidad a su alrededor). Por todo ello, este modelo se denomina “*Rótula plástica concentrada súbita*”.

En un caso general con un material real (curva roja de la Figura 3.2), aunque un valor de curvatura infinito no sea alcanzable en la práctica, experimentalmente se obtiene que el momento máximo que puede soportar una sección es del orden del momento plástico  $M_p$ . Esto es debido a que, aunque no se llegue a una situación como la de la Figura 3.3d en la que todas las fibras plastifiquen, sí se alcanzará una situación como la de la Figura 3.3c en la que, aunque las fibras más cercanas a la neutra (y las que por tanto menos contribución tienen sobre el momento de la sección) no lleguen a plastificar, las fibras más alejadas se habrán endurecido. Con este razonamiento, la aproximación bilineal para la relación momento-curvatura mostrada en la Figura 3.2 se considera aceptable, ya que se contrarrestan las siguientes situaciones:

- La aproximación ① equivale a suponer que la plasticidad no empieza a partir de un valor del momento  $M_e$  sino que comienza de forma súbita en el momento en que se alcanza  $M_p$ . Este hecho conlleva que los desplazamientos calculados sean menores que los que aparecerán realmente, al ser las curvaturas de la zona elastoplástica en el modelo menores que las reales. El hecho de obtener desplazamientos menores que los reales hace que esta suposición no esté del lado de la seguridad, cuestionándose su validez desde el punto de vista práctico.
- La aproximación ② equivale a despreciar el endurecimiento. A partir de una determinada curvatura, la aproximación bilineal supone una mayor curvatura que la real. En efecto, en la zona de mayores curvaturas, el modelo simplificado asume un mo-

mento  $M_p$  menor que el real y por tanto, de considerar este efecto rigidizador, los desplazamientos reales serían menores que los que arroja el modelo simplificado.

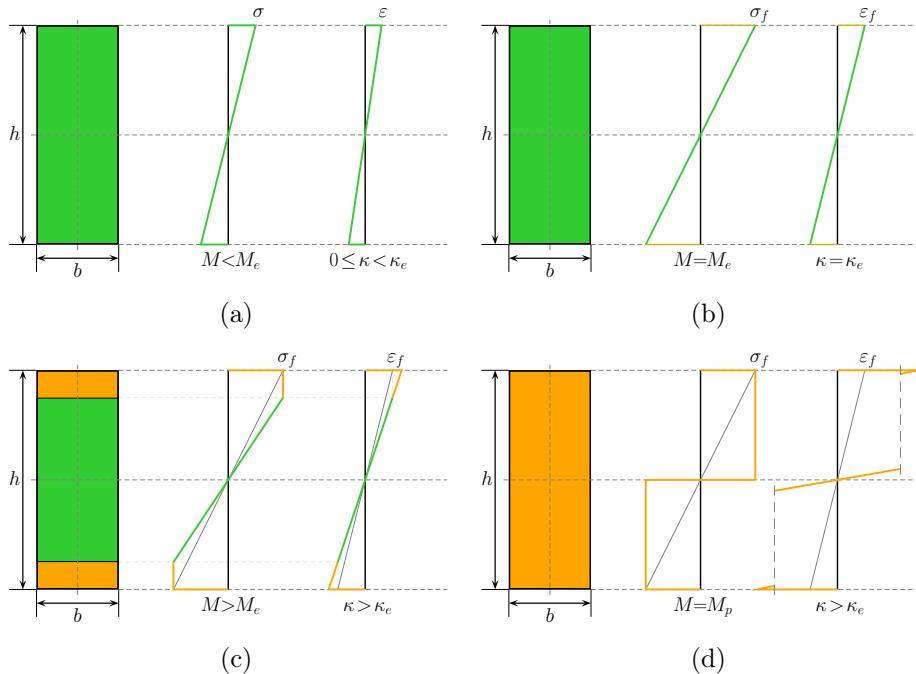


**Figura 3.2:** Comportamiento de la sección con un material real, ideal y aproximación bilineal

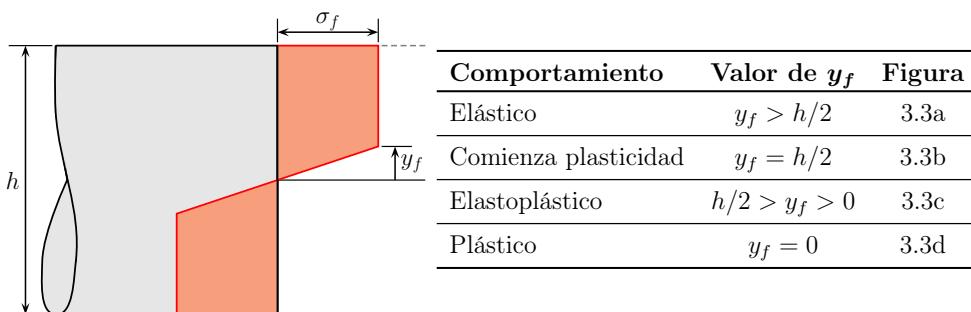
Con las consideraciones anteriores se valida el concepto teórico de *rótula plástica concentrada súbita*, que permite, junto con otras simplificaciones [55, 66]:

- Suponer continuidad del comportamiento lineal entre el momento y la curvatura hasta que se alcanza el valor  $M_p$ .
- Suponer que, hasta que no se alcanza el valor  $M_p$ , la sección está en régimen elástico y que por tanto la rótula plástica aparece de forma instantánea cuando se alcanza dicho valor de momento flector.
- Suponer que las secciones adyacentes a aquélla en la que se ha formado la rótula plástica permanecen en régimen elástico.

Por lo tanto, con las hipótesis adoptadas, se considera que, excepto en las rótulas plásticas, el comportamiento del resto de la estructura es elástico. Para cargas crecientes, se pueden ir determinando progresivamente las secciones donde aparecen rótulas plásticas y resolver el problema no lineal global como sucesión de problemas incrementales lineales.



**Figura 3.3:** Comportamiento de la sección con modelo elastoplástico ideal



**Figura 3.4:** Evolución del estado tensional del modelo MDRCP

### 3.2.3. Modelo

En una estructura sometida a un sistema de cargas proporcionalmente creciente, se formarán rótulas concentradas en determinados puntos de la estructura. La formación de cada una de éstas marcará el cambio de un paso al siguiente.

El modelo presentado se basa en resolver la estructura original mediante el método matricial estándar MDR. Considerando un estado proporcional de cargas, se busca el valor de dicha carga que haga plastificar una sección y, por tanto, haga aparecer allí la primera rótula plástica.

Para ese valor de carga, se acumulan los resultados y se resuelve el mismo problema (misma estructura original y cargas) pero con una rótula en la sección anteriormente calculada. La solución incremental, que depende de la carga, se añade a la acumulada y se busca el valor de la carga que provoca la aparición de la siguiente rótula plástica. De esta forma, en determinados puntos de la estructura se formarán progresivamente rótulas concentradas, que irán disminuyendo progresivamente su rigidez hasta que finalmente se alcance el mecanismo de colapso, en el cual la estructura no será capaz de resistir las cargas a las que está sometida sin realizar movimientos de sólido rígido.

Únicamente se considera la formación de rótulas debida al momento flector, de manera que la sección en la que aparezca la siguiente rótula sea aquélla cuyo valor del momento flector acumulado sea mayor. La rótula considerada es una rótula estándar, con momento flector nulo y que permite el giro relativo entre los elementos que une. Tras la formación de una rótula plástica, en los sucesivos incrementos no se modificarán los momentos en esa sección, aunque sí lo podrán hacer los esfuerzos axil y cortante. Sin embargo, como únicamente se considera plastificación debida al momento flector, esas modificaciones no influirán en las rótulas plásticas ya formadas.

De este modo, con estas simplificaciones, incremento tras incremento, se cumplen las condiciones de equilibrio requeridas sin necesidad de procedimientos adicionales.

### 3.3. MDRCPR

Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso y Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño. Es necesario recurrir al concepto de *sección plastificada* en lugar de *rótula plástica* e iterar, ya que, a medida que progresá la carga, las condiciones en las secciones agotadas anteriormente van cambiando.

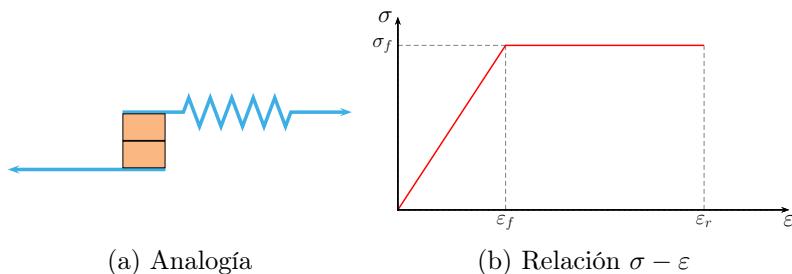
#### 3.3.1. Hipótesis

Las hipótesis adicionales respecto al Apartado 3.1 contempladas en este modelo son las siguientes:

- Estado de cargas proporcional.
- Rótulas plásticas concentradas causadas por combinación de esfuerzos (axil, cortante y momento flector).
- Material elastoplástico con daño sin endurecimiento.

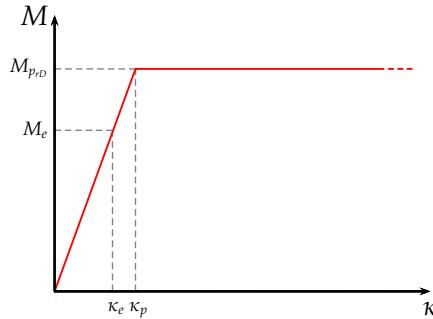
#### 3.3.2. Material elastoplástico con daño sin endurecimiento

El comportamiento de cada fibra de una sección de un elemento barra 2D, modelado con un material elastoplástico con daño sin endurecimiento (Figura 3.5) y sometido a un momento flector, será elástico lineal hasta que alcanza un nivel de tensión igual al de fluencia. A partir de ese momento se comportará de forma plástica ideal, aumentando la deformación sin suponer un incremento de tensión hasta que finalmente se rompa.



**Figura 3.5:** Modelo para el comportamiento del material elastoplástico con daño sin endurecimiento

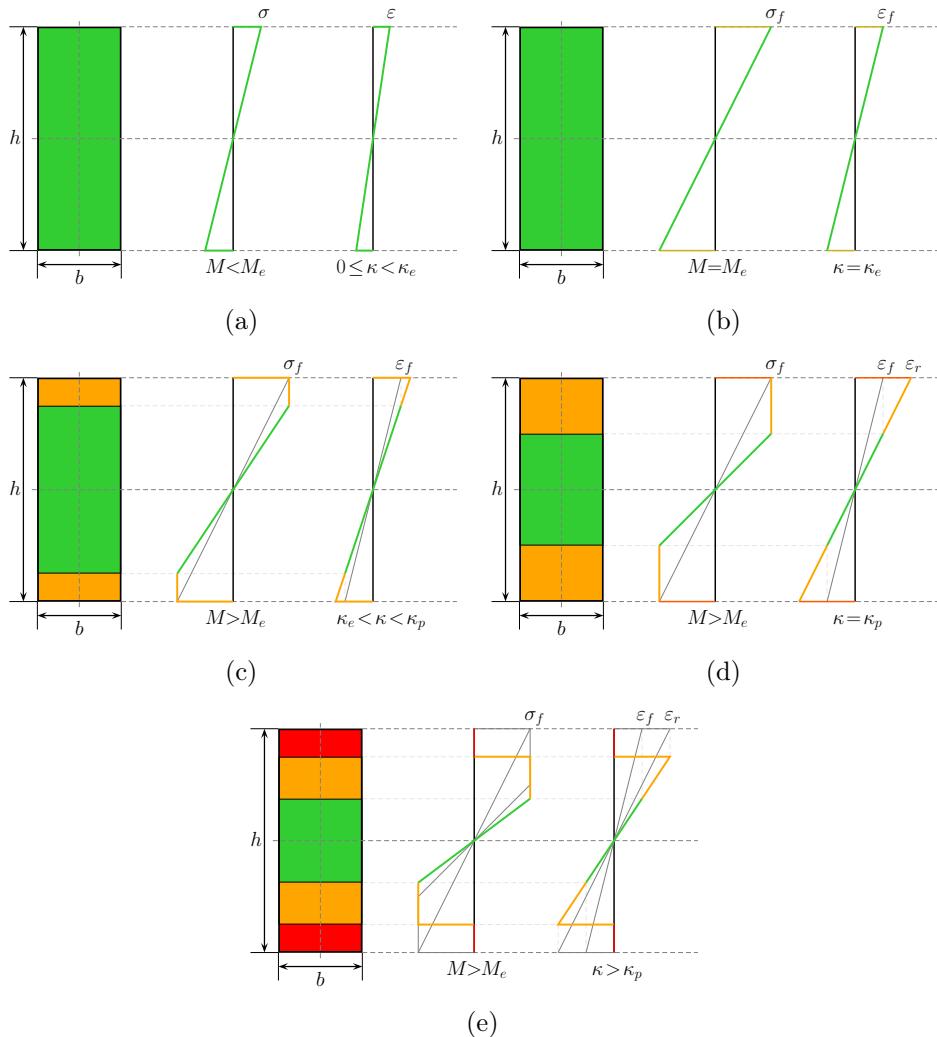
El comportamiento de la sección, a medida que aumenta la carga sobre ella, puede observarse a través de la relación momento-curvatura que para este modelo toma la forma bilineal mostrada en la Figura 3.6, donde  $M_{p,r,D}$  (momento plástico reducido y con daño) va disminuyendo a medida que aumentan las cargas y evoluciona la plastificación.



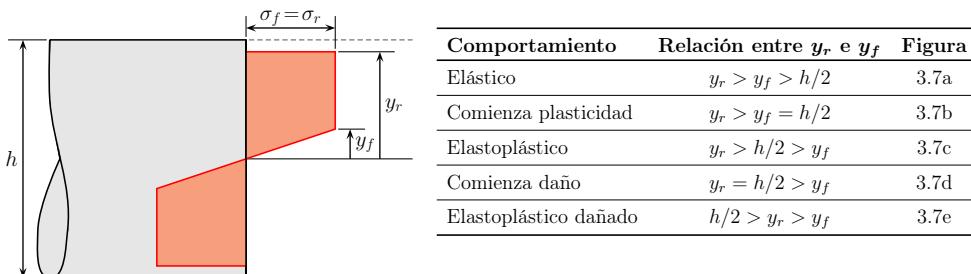
**Figura 3.6:** Modelo para el comportamiento de la sección con material elastoplástico con daño sin endurecimiento

La evolución del comportamiento de la sección completa (Figura 3.7 y de forma resumida en la Figura 3.8), considerando para el ejemplo una simple sección rectangular, se resume a continuación:

- Comportamiento elástico lineal sobre toda la sección transversal para valores de curvatura  $0 \leq \kappa < \kappa_e$ . El daño de la sección es nulo.
- Comienzo de la plastificación. La curvatura toma un valor  $\kappa_e = 2\varepsilon_f/h$  y la deformación de fluencia es  $\varepsilon_f = \sigma_f/E_f$ , siendo  $E_f$  el módulo de Young del material en el tramo elástico. En las fibras extremas de la sección se alcanza la tensión de fluencia  $\sigma_f$ .
- Comportamiento elástico lineal en la zona central. Comportamiento plástico en las fibras extremas de la sección, con deformaciones mayores que la de fluencia ( $\varepsilon_f$ ) correspondientes a curvaturas  $\kappa_e < \kappa < \kappa_p$  y tensión constante  $\sigma_f$ . El daño de la sección aún es nulo.
- Comienzo del proceso de daño al romperse las fibras extremas de la sección. La curvatura toma un valor  $\kappa_p = 2\varepsilon_r/h$ , alcanzándose la deformación de rotura ( $\varepsilon_r$ ).
- Comportamiento elástico lineal en la zona central. Comportamiento plástico con tensión constante  $\sigma_f$  en las fibras intermedias de la sección. Sección dañada: fibras rotas en los extremos de la sección, mientras que las fibras centrales aún están en régimen elástico.



**Figura 3.7:** Comportamiento de la sección con modelo elastoplástico con daño sin endurecimiento



**Figura 3.8:** Evolución del estado tensional del modelo MDRCPR

### 3.3.3. Modelo

En una estructura sometida a un sistema de cargas proporcionalmente creciente, se formarán secciones plastificadas y dañadas en sus barras, con lo que la rigidez de la estructura irá disminuyendo.

Basándose en los conceptos de la Mecánica del Daño Continuo (CDM) [4, 10, 37, 69] se introducen una serie de variables que cuantifican el nivel de degradación de las secciones de la estructura. De esta forma, se generaliza el método paso a paso, considerando plastificación debida no solo al momento flector, sino a una combinación de los esfuerzos axil, cortante y flector y del daño de la sección, según la función de plastificación siguiente:

$$Z = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 \frac{1}{1-D} + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \quad (3.5)$$

donde  $N_x$ ,  $V_y$  y  $M_z$  son los esfuerzos axil, cortante y flector, respectivamente, que actúan sobre la sección, y  $N_p$ ,  $V_p$  y  $M_p$  son el esfuerzo axil plástico, esfuerzo cortante plástico y momento plástico, respectivamente, que causan la plastificación completa de la sección, como ya se expuso en el Apartado 2.2. Se hace notar que dicha ecuación es válida cuando predomina el esfuerzo flector y por tanto la plastificación comienza por tensiones normales en las fibras extremas de la sección, que es el comportamiento más habitual. Aunque existe otro dominio de comportamiento en el que la penetración de la plastificación se produce únicamente por uno de los extremos [67], por simplicidad no es considerado en esta Tesis.

Considerando dicha función de agotamiento ( $Z = 0$ ) y las condiciones de consistencia plástica [58], se puede establecer

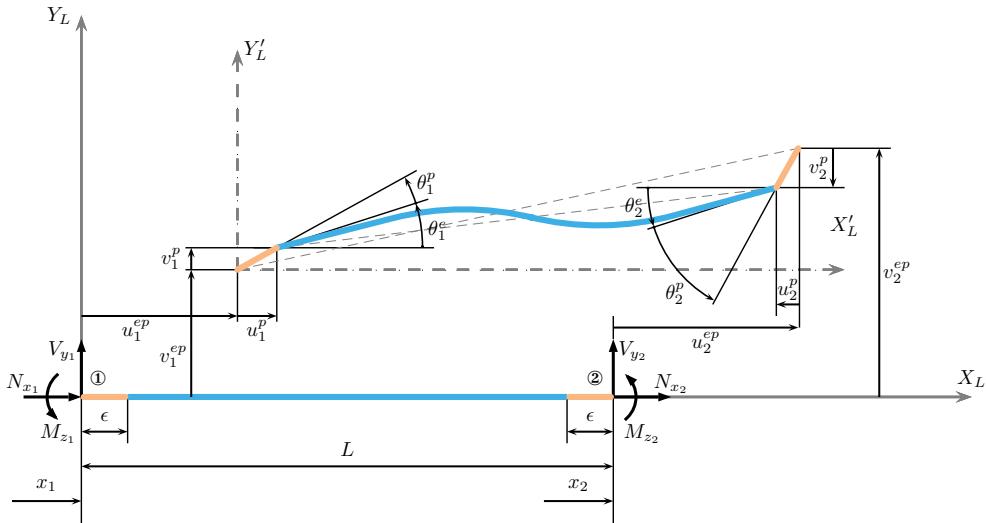
$$\dot{Z} = \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \{dF\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \{dD\} = 0 \quad (3.6)$$

Se obtendrán a continuación los diferentes factores de la ecuación anterior para obtener la matriz elastoplástica.

#### 3.3.3.1. Obtención de la matriz elastoplástica

El elemento barra elastoplástico utilizado en este modelo se muestra en la Figura 3.9. El dominio de comportamiento plástico con posibilidad de daño se representa como un segmento de pequeña longitud  $\epsilon$  en cada

extremo del elemento. En estos segmentos se suponen concentradas la plastificación y el daño de la barra.



**Figura 3.9:** Elemento barra con desplazamiento elastoplástico en los extremos

La variación de los esfuerzos en los extremos de la barra puede escribirse como

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} \quad (3.7)$$

siendo  $[K]$  la matriz de rigidez elástica del elemento barra.

La variación de los desplazamientos en los extremos puede descomponerse en una componente elástica y en una componente plástica: [3, 5, 30, 56, 63]

$$\{du^{ep}\} = \{du^e\} + \{du^p\} \quad (3.8)$$

Por tanto, se obtiene:

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} = [K](\{du^{ep}\} - \{du^p\}) \quad (3.9)$$

Por otro lado, el desplazamiento plástico se puede expresar, considerando las leyes para el caso de flujo asociado, mediante

$$\{du^p\} = \{d\lambda\} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \quad (3.10)$$

siendo  $\{d\lambda\} = \{d\lambda_1, d\lambda_2\}^T$  los multiplicadores plásticos de los extremos de la barra, determinados mediante la condición de consistencia [59]:

$$\begin{cases} d\lambda = 0 & \text{si } Z < 0 \text{ o } p < p_{th} \\ d\lambda > 0 & \text{si } Z = 0 \text{ o } p \geq p_{th} \end{cases} \quad (3.11)$$

Así, la expresión de los esfuerzos es la siguiente:

$$\{dF\} = [K] (\{du^{ep}\} - \{du^p\}) = [K] \left( \{du^{ep}\} - \{d\lambda\} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \right) \quad (3.12)$$

Los multiplicadores plásticos también se utilizan para definir el incremento de daño producido en los extremos de la barra:

$$\{dD\} = \left\{ \frac{-\partial\phi^*}{\partial Y} \right\} \{d\lambda\} \quad (3.13)$$

siendo el primer factor la derivada de la función de disipación  $\phi^*$  con respecto a la energía de deformación  $Y$  asociada al daño. Marca la evolución del daño mecánico en materiales dúctiles, y su expresión es diferente según el modelo considerado, aunque siempre entrarán en juego varios parámetros del material en cuestión. Alguno de los modelos más utilizados son el de Bonora [4], Lemaitre [37], Wang [69] o Chandrakanth [11].

Por tanto, sustituyendo las expresiones de  $\{dF\}$  y  $\{dD\}$  (ecuaciones 3.12 y 3.13 respectivamente) en la función de agotamiento (Ecuación 3.6), queda:

$$\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left( \{du^{ep}\} - \{d\lambda\} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \right) - \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \left\{ \frac{\partial\phi^*}{\partial Y} \right\} \{d\lambda\} = 0 \quad (3.14)$$

Despejando  $d\lambda$ :

$$\{d\lambda\} = \frac{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \{du^{ep}\}}{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \left\{ \frac{\partial\phi^*}{\partial Y} \right\}} \quad (3.15)$$

Sustituyendo esta expresión de  $d\lambda$  en la Ecuación 3.12 se obtiene

$$\{dF\} = [K] \left[ I - \frac{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\}}{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \left\{ \frac{\partial\phi^*}{\partial Y} \right\}} \right] \{du^{ep}\} \quad (3.16)$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

Como los esfuerzos en los extremos de la barra también pueden calcularse utilizando el desplazamiento elastoplástico mediante el uso de la matriz de rigidez elastoplástica  $[K^{ep}]$ ,

$$\{dF\} = [K^{ep}]\{du^{ep}\} \quad (3.17)$$

se puede identificar en la Ecuación 3.16 la matriz de rigidez elastoplástica

$$[K^{ep}] = [K] \left[ I - \frac{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\}}{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \right\}} \right] \quad (3.18)$$

donde  $[K]$  es la matriz elástica (que tomará la forma de las ecuaciones A.1 a la A.4 según las condiciones de unión de sus nodos),  $\left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \right\}$  es la mencionada derivada de la función de disipación con respecto a la energía de deformación,  $\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\}$  es la matriz gradiente de la función de fluencia  $Z$  respecto a los esfuerzos (Ecuación 3.19) y  $\left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\}$  la matriz gradiente de la función de fluencia  $Z$  respecto al daño (Ecuación 3.20).

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial N_{x1}} & \frac{\partial Z_1}{\partial V_{y1}} & \frac{\partial Z_1}{\partial M_{z1}} & \frac{\partial Z_1}{\partial N_{x2}} & \frac{\partial Z_1}{\partial V_{y2}} & \frac{\partial Z_1}{\partial M_{z2}} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial N_{x1}} & \frac{\partial Z_2}{\partial V_{y1}} & \frac{\partial Z_2}{\partial M_{z1}} & \frac{\partial Z_2}{\partial N_{x2}} & \frac{\partial Z_2}{\partial V_{y2}} & \frac{\partial Z_2}{\partial M_{z2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ZF_{N_1} & ZF_{V_1} & \frac{1}{M_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ZF_{N_2} & ZF_{V_2} & \frac{1}{M_p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

siendo  $ZF_{N_i} = \frac{N_{x_i}}{N_p^2} \frac{2}{1 - D_i}$ , y  $ZF_{V_i} = \frac{2}{3} \frac{V_{y_i}}{V_p^2} \frac{1}{(1 - D_i)^3}$ .

$$\left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial D_1} & \frac{\partial Z_1}{\partial D_2} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial D_1} & \frac{\partial Z_2}{\partial D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZD_1 & 0 \\ 0 & ZD_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

siendo  $ZD_i = \left( \frac{N_{x_i}}{N_p} \right)^2 \frac{1}{(1 - D_i)^2} + \left( \frac{V_{y_i}}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1 - D_i)^4} + 1$ .

La particularización de estas expresiones al modelo MDRCP es inmediata, considerando que en éste únicamente se considera el momento flector, por lo que la matriz gradiente de la función de plastificación respecto a los esfuerzos únicamente dependerá del valor de  $M_p$ , y la matriz gradiente de la función de plastificación respecto al daño será nula (despreciando de esta forma la influencia del daño, que en el modelo MDRCP no existe). Este modelo utilizará, por tanto, la matriz de rigidez elástica y evaluará únicamente la influencia del momento flector respecto al factor  $1/M_p$ .

## 3.4. MDRCPRE

Método Directo de Rígidez con Cálculo Plástico paso a paso, Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño, y Endurecimiento. En este método también se utiliza el concepto de sección plastificada y también será necesario iterar para lograr el equilibrio en todas las secciones agotadas anteriormente a medida que aumenta la carga. Es un caso general que engloba a los anteriores y en el que tiene sentido aplicar las técnicas de *model updating*, ya que recoge en su formulación todos los parámetros que se tratan de ajustar.

### 3.4.1. Hipótesis

Las hipótesis adicionales respecto al Apartado 3.1 contempladas en este modelo son las siguientes:

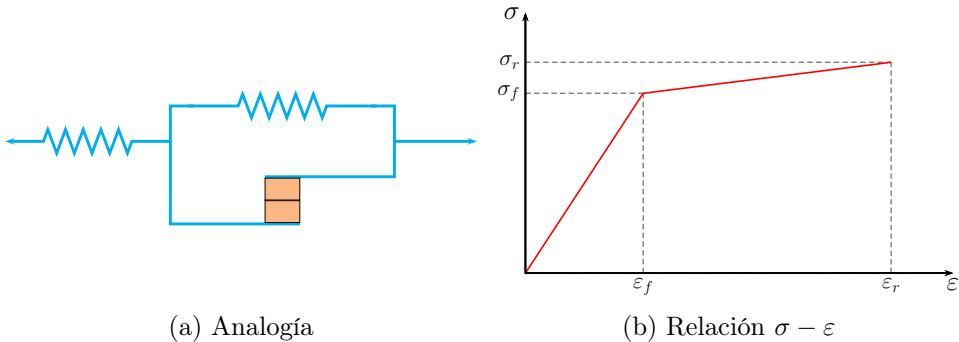
- Estado de cargas proporcional.
- Secciones plastificadas concentradas causadas por combinación de esfuerzos (axil, cortante y momento flector) y daño.
- Secciones bisimétricas (rectangulares macizas y huecas, circulares macizas y huecas, doble T).
- Material elastoplástico con daño y con endurecimiento.

En cualquier sección agotada anteriormente puede aumentar o disminuir el momento que soporta a medida que aumenta la deformación, de forma que la combinación existente de esfuerzos y daño anule la función de plastificación en todas las secciones agotadas, y no solo la última.

### 3.4.2. Material elastoplástico con daño y con endurecimiento

El comportamiento de cada fibra de una sección de un elemento barra 2D modelado con un material elastoplástico con daño y endurecimiento (Figura 3.10), sometido a un momento flector, será elástico lineal hasta que alcanza un nivel de tensión igual al de fluencia. A partir de ese

momento se comportará de forma elastoplástica, aumentando la deformación pero también la tensión (endurecimiento del material), aunque de forma menos acusada. Cuando se alcance un valor de deformación igual al de rotura, las fibras extremas de la sección se romperán.

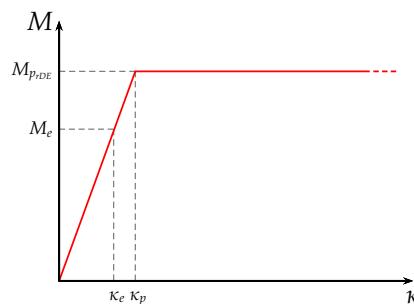


**Figura 3.10:** Modelo para el comportamiento del material elastoplástico con daño y endurecimiento

A partir de la relación tensión-deformación de este material, se puede definir el valor  $n_s$  como

$$n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f} \quad (3.21)$$

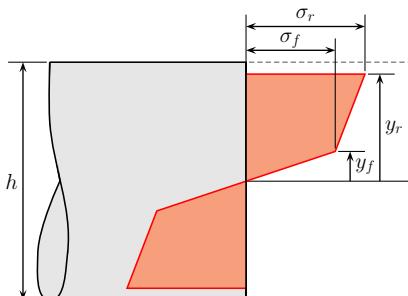
El comportamiento de la sección a medida que aumenta la carga sobre ella puede observarse a través de la relación momento-curvatura que para este modelo toma la forma bilineal mostrada en la Figura 3.11, donde  $M_{p,DE}$  (momento plástico reducido, con daño y endurecimiento) varía a medida que aumentan las cargas y evoluciona la plastificación, disminuyendo por efecto del aumento de cargas y del daño y aumentando por efecto del endurecimiento.



**Figura 3.11:** Modelo para el comportamiento de la sección con material elastoplástico con daño y endurecimiento

La evolución del comportamiento de la sección completa (Figura 3.13 y de forma resumida en la Figura 3.12), considerando para el ejemplo una simple sección rectangular, se resume a continuación:

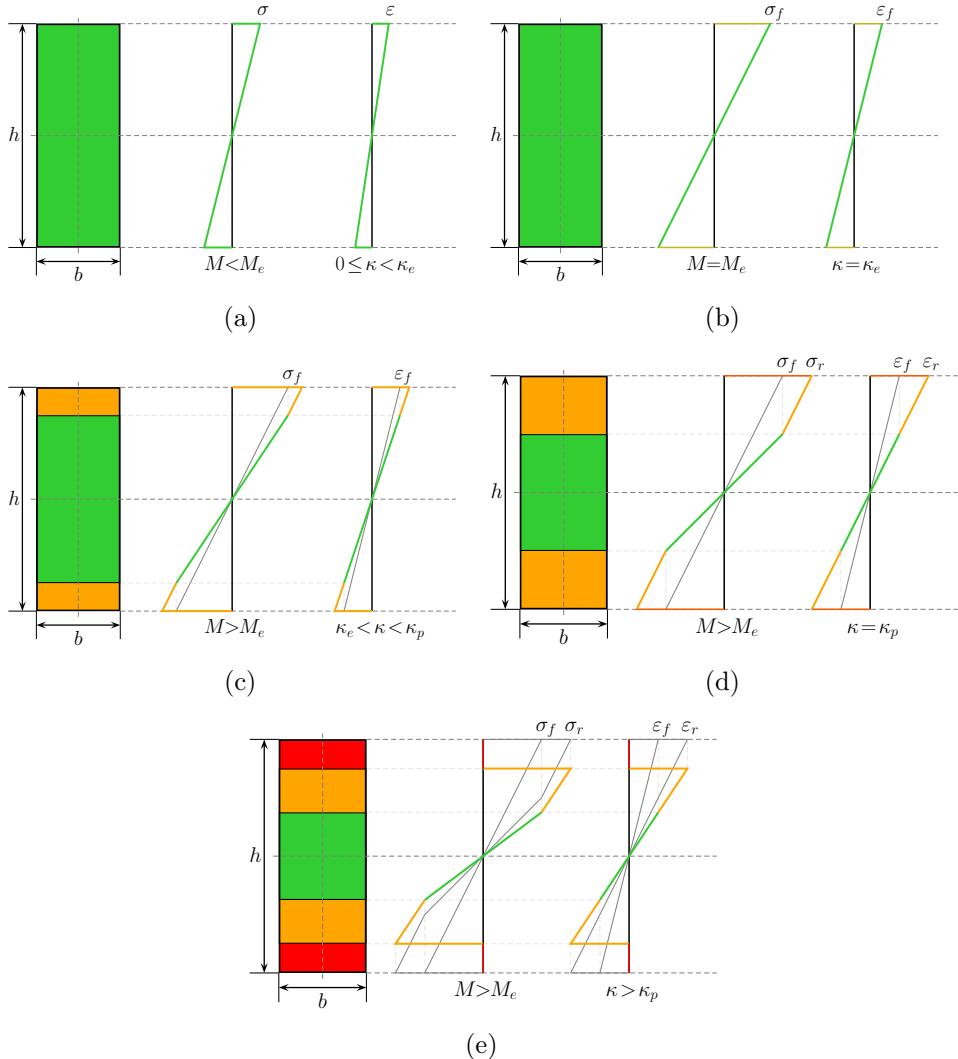
- (a). Comportamiento elástico lineal sobre toda la sección transversal para valores de curvatura  $0 \leq \kappa < \kappa_e$ . El daño de la sección es nulo.
- (b). Comienzo de la plastificación. La curvatura toma un valor  $\kappa_e = 2\varepsilon_f/h$  y la deformación de fluencia es  $\varepsilon_f = \sigma_f/E_f$ , siendo  $E_f$  el módulo de Young del material del tramo elástico. En las fibras extremas de la sección se alcanza la tensión de fluencia  $\sigma_f$ .
- (c). Comportamiento elástico lineal en la zona central. Comportamiento elastoplástico en las fibras extremas de la sección, con deformaciones mayores que la de fluencia ( $\varepsilon_f$ ) correspondientes a curvaturas  $\kappa_e < \kappa < \kappa_p$  y tensión mayor cuanto más alejado de la fibra neutra se encuentre el punto en cuestión. El daño de la sección aún es nulo.
- (d). Comienzo del proceso de daño al romperse las fibras extremas de la sección. La curvatura toma un valor  $\kappa_p = 2\varepsilon_r/h$ , alcanzándose la deformación de rotura ( $\varepsilon_r$ ) y la tensión de rotura ( $\sigma_r$ ) en dichos extremos.
- (e). Comportamiento elástico lineal en la zona central. Comportamiento elastoplástico con tensión creciente comprendida entre  $\sigma_f$  y  $\sigma_r$  en las fibras intermedias de la sección. Sección dañada: fibras rotas en los extremos de la sección.



Comportamiento	Relación entre $y_r$ e $y_f$	Figura
Elástico	$y_r > y_f > h/2$	3.13a
Comienza plasticidad	$y_r > y_f = h/2$	3.13b
Elastoplástico	$y_r > h/2 > y_f$	3.13c
Comienza daño	$y_r = h/2 > y_f$	3.13d
Elastoplástico dañado	$h/2 > y_r > y_f$	3.13e

**Figura 3.12:** Evolución del estado tensional del modelo MDRCPRE

En el Apéndice B se determinan los esfuerzos y funciones de plastificación para una serie de secciones seleccionadas, teniendo en cuenta las hipótesis adoptadas en este apartado y que engloban a las de los otros modelos.



**Figura 3.13:** Comportamiento de la sección con modelo elastoplástico con daño y endurecimiento

### 3.4.3. Modelo

Para el desarrollo del modelo, se utiliza la función de agotamiento y las condiciones de consistencia plástica recogidas en la Ecuación 3.6.

$$\dot{Z} = \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \{dF\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \{dD\} = 0 \quad (3.22)$$

Se obtendrán a continuación los diferentes factores de la ecuación anterior para obtener la matriz elastoplástica (se omite la notación matricial para aligerar las expresiones).

#### 3.4.3.1. Obtención de la matriz elastoplástica

El elemento barra elastoplástico utilizado en este modelo es similar al del modelo MDRCPR (Figura 3.9) y la expresión de los esfuerzos puede representarse de igual forma que en dicho modelo hasta la Ecuación 3.12.

$$dF = K (du^{ep} - du^p) = K \left( du^{ep} - d\lambda \frac{\partial Z}{\partial F} \right) \quad (3.23)$$

Sin embargo, el modelo desarrollado depende únicamente de cuatro constantes para describir el comportamiento de su material ( $\sigma_f$ ,  $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_r$  y  $\varepsilon_r$ ), a diferencia del modelo MDRCPR que requiere otros parámetros adicionales del material para describir su comportamiento, muchos de ellos de difícil obtención en la práctica, porque no pueden ser medidos directamente, como los necesarios para evaluar la función de disipación  $\Phi^*$  que aparece en la formulación de la matriz elastoplástica y para cuya evolución respecto a la energía de deformación asociada al daño se toman diferentes expresiones según los autores (Bonora, Lemaître, Wang, Chandrananth, etc.), requiriendo distintos parámetros para cada una de ellas. Por esta razón, la matriz elastoplástica se obtendrá forma diferente.

El daño de la sección puede expresarse en función de los desplazamientos:

$$D = 1 - \frac{n_s}{\frac{u^p}{u^e} + 1} = 1 - \frac{n_s u^e}{u^p + u^e} = 1 - \frac{n_s u^e}{u^{ep}} \quad (3.24)$$

El daño comienza cuando los desplazamientos elastoplásticos superan el valor de  $n_s u^e$  y se alcanza el valor máximo  $D = 1$  cuando  $u^{ep} \rightarrow \infty$ .

El vector  $dD$ , cuyas componentes son los valores del daño de los extremos de la barra será por tanto:

$$\begin{cases} dD = 0 & \text{si } Z < 0 \text{ o } u^{ep} < n_s u^e \\ dD > 0 & \text{si } Z = 0 \text{ o } u^{ep} \geq n_s u^e \end{cases} \quad (3.25)$$

Derivando la Ecuación 3.24 respecto a los desplazamientos elastoplásticos, se obtiene:

$$\frac{dD}{du^{ep}} = -\frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{du^e}{du^{ep}} - \frac{u^e}{u^{ep}} \right) \quad (3.26)$$

Considerando la descomposición aditiva de los desplazamientos, se deduce:

$$dD = -\frac{n_s}{u^{ep}} \left[ du^{ep} - du^p - \frac{u^e}{u^{ep}} du^{ep} \right] \quad (3.27)$$

Por tanto, sustituyendo las expresiones de  $dF$  y  $dD$  (ecuaciones 3.23 y 3.27 respectivamente) en la función de agotamiento (Ecuación 3.22), se verifica:

$$\frac{\partial Z}{\partial F} [K (du^{ep} - du^p)] + \frac{\partial Z}{\partial D} \left[ -\frac{n_s}{u^{ep}} \left( du^{ep} - du^p - \frac{u^e}{u^{ep}} du^{ep} \right) \right] = 0 \quad (3.28)$$

La expresión de la variación del desplazamiento plástico, teniendo en cuenta las leyes para el caso de flujo asociado [27] es

$$du^p = d\lambda \frac{\partial Z}{\partial F} \quad (3.29)$$

donde  $d\lambda$  es un vector cuyas componentes son los multiplicadores plásticos de los extremos de la barra y se determinan de la manera usual mediante la condición de consistencia:

$$d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{si } Z < 0 \text{ o } u^{ep} < n_s u^e \\ > 0 & \text{si } Z = 0 \text{ o } u^{ep} \geq n_s u^e \end{cases} \quad (3.30)$$

Por tanto, sustituyendo la Ecuación 3.29 en la Ecuación 3.28 y despejando  $d\lambda$  se obtiene:

$$d\lambda = \frac{\left[ \frac{\partial Z}{\partial F} K + \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{u^e}{u^{ep}} - 1 \right) \right] du^{ep}}{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} - \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \frac{\partial Z}{\partial F}} \quad (3.31)$$

Sustituyendo la Ecuación 3.31 en la Ecuación 3.23

$$dF = K \left[ I - \frac{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} + \frac{\partial Z}{\partial F} \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{u^e}{u^{ep}} - 1 \right)}{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} - \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \frac{\partial Z}{\partial F}} \right] du^{ep} \quad (3.32)$$

o, expresado de otra forma:

$$dF = K^{ep} du^{ep} \quad (3.33)$$

Por tanto,

$$K^{ep} = K \left[ I - \frac{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} + \frac{\partial Z}{\partial F} \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{u^e}{u^{ep}} - 1 \right)}{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} - \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \frac{\partial Z}{\partial F}} \right] \quad (3.34)$$

donde  $K^{ep}$  es la matriz de rigidez elastoplástica degradable del elemento barra 2D que relaciona los esfuerzos con los desplazamientos.



# Capítulo 4

## Programación numérica

### Contenidos

---

<b>4.1.</b>	<b>Introducción</b>	62
<b>4.2.</b>	<b>Modelo MDR</b>	63
4.2.1.	Programación	63
4.2.2.	Salidas	71
<b>4.3.</b>	<b>Modelo MDRCP</b>	75
4.3.1.	Programación	75
4.3.2.	Salidas	81
<b>4.4.</b>	<b>Modelo MDRCPR</b>	87
4.4.1.	Programación	87
4.4.2.	Salidas	92
<b>4.5.</b>	<b>Modelo MDRCPRE</b>	97
4.5.1.	Programación	97
4.5.2.	Salidas	107
<b>4.6.</b>	<b>Comparación</b>	119

---

## 4.1. Introducción

Se presenta a continuación un resumen de la estructura, programación y resultados de cada uno de los códigos, programados en el manipulador simbólico Maple [47, 51, 52], en diferentes versiones del programa, y que permiten un análisis cada vez más completo del comportamiento de las estructuras planas de barras ante la acción de cargas externas, considerando la formación de secciones plastificadas, daño de la sección, endurecimiento del material, etc.

En el Apartado 4.2 se explican brevemente los aspectos más relevantes de la programación del MDR y se presentan los resultados gráficos y numéricos de la aplicación del programa a un ejemplo de un pórtico 2D.

En el Apartado 4.3 se marcan las principales diferencias en la programación de este modelo MDRCP respecto al del Método Directo de Rígidez y se exponen los resultados gráficos y numéricos de la aplicación del programa al mismo ejemplo que en el modelo anterior.

En el Apartado 4.4 se implementa el método de cálculo plástico que considera el daño del material por acumulación de los esfuerzos y por acumulación de deformación plástica en los extremos de las barras (MDRCPR). Se exponen las principales diferencias con el método anterior y se presentan los resultados gráficos y numéricos obtenidos en un ejemplo equivalente al utilizado en los modelos anteriores.

En el Apartado 4.5 se implementa el método de cálculo plástico que considera el daño y el endurecimiento del material (MDRCPRE). Se exponen las principales diferencias con el método anterior y se presentan los resultados gráficos y numéricos obtenidos en un ejemplo similar al del modelo anterior.

En todos ellos se detallan los diagramas de flujo de los programas, y en especial de sus bloques de cálculo.

Finalmente, en el Apartado 4.6 se exponen las principales conclusiones de la comparación entre los cuatro modelos.

Todos los valores, salvo que se especifique lo contrario, estarán en el Sistema Internacional.

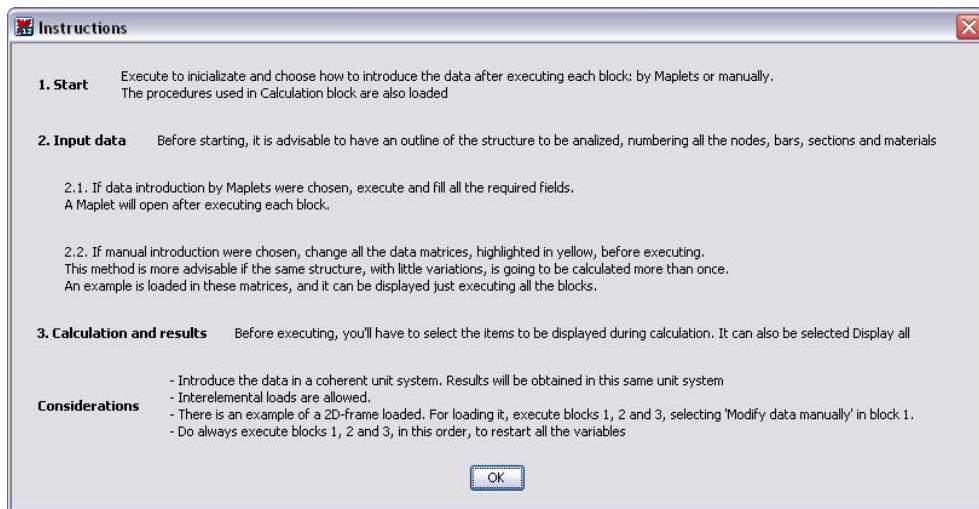
## 4.2. Modelo MDR

En este apartado se presenta el programa de cálculo desarrollado que implementa el Método Directo de Rígidez.

### 4.2.1. Programación

El programa está dividido en 4 secciones:

0. *Instrucciones*: se detallan, en una ventana emergente (Figura 4.1), las instrucciones a seguir para el correcto funcionamiento de la hoja de trabajo y las opciones de elección posibles.

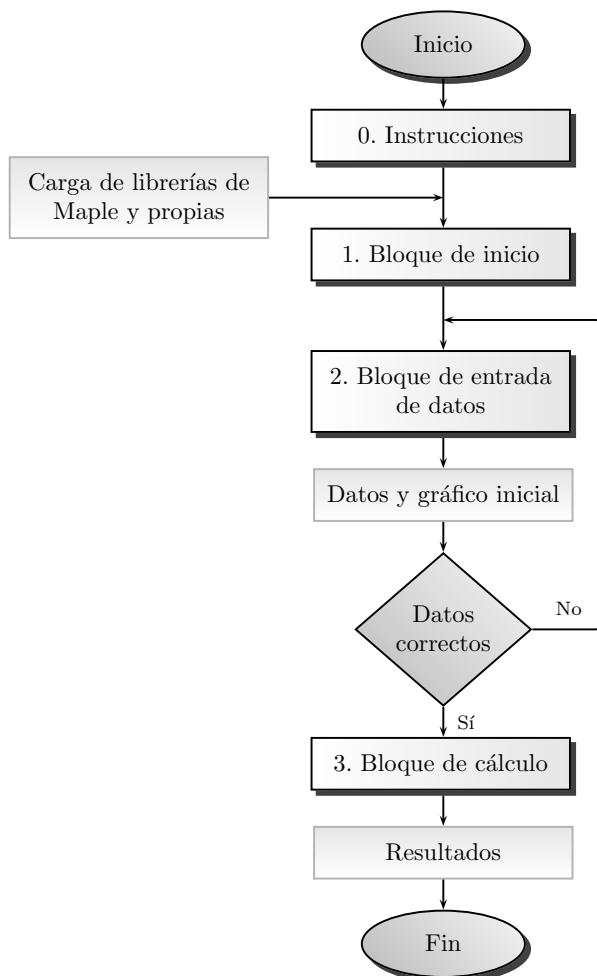


**Figura 4.1:** Instrucciones del programa del MDR

1. *Inicio*.
2. *Entrada de datos*.
3. *Cálculo y resultados*.

El diagrama de flujo del programa se puede ver en la Figura 4.2.

A continuación se resumen las características más importantes de los tres apartados principales del programa.



**Figura 4.2:** Diagrama de flujo del programa (MDR)

#### 4.2.1.1. Inicio

En este bloque de programación se cargan las librerías necesarias para el posterior funcionamiento del programa, tanto las del programa Maple (LinearAlgebra, plots, plottools, Maplets), como unas librerías propias, desarrolladas en ficheros separados para que la estructura del programa fuera más clara.

Desde el programa principal se llama a las funciones (*procedimientos*) contenidas en estas librerías. Algunos de los procedimientos propios desarrollados son:

**Símbolos básicos:** procedimientos para crear las representaciones gráficas básicas utilizadas en la representación de las estructuras planas (empotramiento, apoyo fijo, apoyo móvil, empotramiento móvil, muelle translacional, muelle rotacional, momento, fuerza, desplazamiento prescrito, giro prescrito, giro nulo, carga trapezoidal, carga térmica, sistema de coordenadas, rótula). Todos los procedimientos que crean los símbolos tienen parámetros de entrada que permiten posicionarlos, girarlos o cambiarlos de tamaño.

**Dibujos:** procedimientos para realizar las representaciones gráficas de cada estructura completa (autoescalado gráfico, dibujar las barras de la estructura, dibujar los números, dibujar los apoyos, dibujar las cargas nodales, dibujar las cargas interelementales). Todos los procedimientos que crean los dibujos tienen parámetros de entrada que permiten posicionarlos, girarlos, variar sus dimensiones o cambiar el color.

**Lógica:** procedimientos para la gestión de los errores en la introducción de los datos y en las opciones del cálculo, tanto manualmente como utilizando Maplets, y procedimientos para crear los Maplets.

**Funciones:** procedimientos que crean funciones que van a ser utilizadas más de una vez. De esta forma, se disminuye el tamaño del código y se simplifica la programación del MDR.

- *Matriz de rigidez:* matriz de rigidez elemental, transformación de coordenadas, matriz de rigidez global, matriz de rigidez global dividida en submatrices  $3 \times 3$ .
- *Cargas interelementales y diagramas de esfuerzos que causan:* cargas puntuales, distribuidas, térmicas y deformación inicial.
- *Fuerzas equivalentes.*
- *Dibujar todos los elementos de la estructura:* según las opciones, lo autoescalará y dibujará las barras, números, sistema de coordenadas, apoyos, fuerzas nodales y/o fuerzas interelementales.
- *Cálculo de la matriz de rigidez completa:* ordenando las submatrices, modificándola según los apoyos elásticos o alfa nodal.
- *Grados de libertad y desplazamientos no nulos:* condiciones de contorno, desplazamientos no nulos.
- *Fuerzas de empotramiento.*

- *Cálculo de los esfuerzos*: según las uniones y los grados de libertad.
- *Desplazamientos y reacciones*: se calculan los desplazamientos y reacciones incógnita en los apoyos rectos, apoyos inclinados o muelles. Se evalúan los posibles errores numéricos obtenidos.
- *Diagramas de esfuerzos*: se calculan con los grados de libertad condensados.

En el bloque de inicio se cargan todas estos procedimientos y, además, se le pregunta al usuario el método de introducción de datos que se utilizará en el bloque siguiente:

- Entrada de datos manual.
- Entrada de datos mediante Maplets.

#### 4.2.1.2. Entrada de datos

Este bloque actuará de diferente manera según el método de introducción de datos elegido:

**Entrada de datos manual:** se deberán modificar las matrices que contienen los datos antes de ejecutar este bloque.

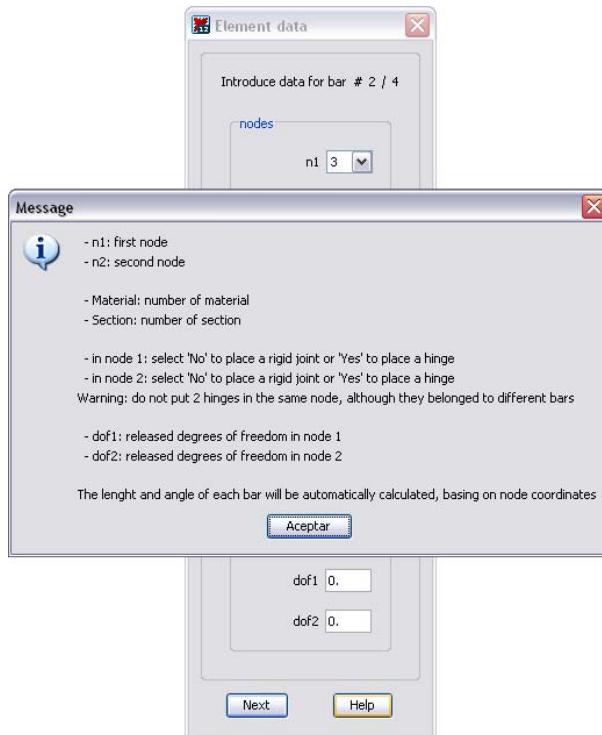
**Entrada de datos mediante Maplets:** los datos a llenar se le piden al usuario en una serie de campos en ventanas emergentes. En cada campo se especifica el dato requerido, y además en cada ventana se encuentra un botón de ayuda (ejemplo en la Figura 4.3).

El resultado final de la introducción manual o mediante Maplets es el mismo. Se introdujeron las dos opciones por comodidad para el usuario.

Los datos introducidos están organizados en las siguientes variables y matrices:

##### Variables:

- *nmt* : número de materiales diferentes.
- *nsc* : número de secciones diferentes.
- *nbr* : número de barras.



**Figura 4.3:** Ejemplo de introducción de datos mediante Maplets

- $nnd$  : número de nodos.
- $nbc$  : número de cargas interelementales.

### Matrices:

- *Matriz de materiales*: tendrá un número de filas igual al número de materiales diferentes introducido. En sus columnas se guardarán, para cada material, los valores del módulo de Young ( $E$ ) y del coeficiente de expansión térmica ( $\alpha$ ).

$$dmt = \begin{bmatrix} E_1 & \alpha_1 \\ E_2 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_{nmt} & \alpha_{nmt} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

- *Matriz de secciones*: tendrá un número de filas igual al número de secciones diferentes introducido. En sus columnas se guardarán, para cada sección, los valores del área ( $A$ ), inercia

$(I_z)$ , canto ( $h$ ) y momento plástico ( $M_p$ ) de la sección.

$$dsc = \begin{bmatrix} A_1 & I_{z_1} & h_1 & M_{p_1} \\ A_2 & I_{z_2} & h_2 & M_{p_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{nsc} & I_{z_{nsc}} & h_{nsc} & M_{p_{nsc}} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- *Matriz de elementos:* tendrá un número de filas igual al número de barras introducido. En sus columnas se guardarán, para cada barra, los valores de los nodos inicial y final ( $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente); número del material ( $mt$ ); número de la sección ( $sc$ ); longitud ( $L_0$ ); ángulo de la barra ( $\alpha_0$ );  $erc_1$  y  $erc_2$  (siglas de *End Release Code*: si  $erc_i = 0$  significa que en el nodo  $i$  de esa barra no hay rótula y si  $erc_i = 1$  significa que sí hay rótula); grados de libertad liberados en los nodos 1 y 2 ( $gdl_1$  y  $gdl_2$ , respectivamente);  $erc_I$  y  $erc_{II}$  (mismo significado que  $erc_1$  y  $erc_2$ , excepto que tomarán valor 1 si hay rótula en cualquier barra que confluya a ese nodo, aunque la barra en cuestión no tenga rótula en ese nodo); y el número de barra ( $N_b$ ).

$$dbr = \begin{bmatrix} n_{1_1} & n_{2_1} & mt_1 & sc_1 & L_{0_1} & \alpha_{0_1} & erc_{1_1} & erc_{2_1} & gdl_{1_1} & gdl_{2_1} & erc_{I_1} & erc_{II_1} & N_{b_1} \\ n_{1_2} & n_{2_2} & mt_2 & sc_2 & L_{0_2} & \alpha_{0_2} & erc_{1_2} & erc_{2_2} & gdl_{1_2} & gdl_{2_2} & erc_{I_2} & erc_{II_2} & N_{b_2} \\ \vdots & \vdots \\ n_{1_{nbr}} & n_{2_{nbr}} & mt_{nbr} & sc_{nbr} & L_{0_{nbr}} & \alpha_{0_{nbr}} & erc_{1_{nbr}} & erc_{2_{nbr}} & gdl_{1_{nbr}} & gdl_{2_{nbr}} & erc_{I_{nbr}} & erc_{II_{nbr}} & N_{b_{nbr}} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Los valores  $L_0$  y  $\alpha_0$  (longitud y ángulo iniciales, respectivamente) no se introducen, sino que los calculará el programa, basándose en las coordenadas de los nodos introducidos en la matriz de nodos. Igualmente,  $erc_I$  y  $erc_{II}$  también serán calculados automáticamente.

- *Matriz de nodos:* tendrá un número de filas igual al número de barras introducido. En sus columnas se guardarán, para cada nodo, los valores de las coordenadas  $x$  e  $y$ ; las fuerzas nodales en dirección  $x$  e  $y$  y momento flector ( $F_x$ ,  $F_y$  y  $M_z$ , respectivamente); los desplazamientos en dirección  $x$  e  $y$  y giro ( $u$ ,  $v$  y  $\theta$ , respectivamente); los apoyos elásticos en dirección  $x$  e  $y$  y torsional ( $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_t$ , respectivamente); alfa nodal ( $\alpha_n$ ); y número de nodo ( $N_n$ ).

$$dnd = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & F_{x_1} & F_{y_1} & M_{z_1} & u_1 & v_1 & \theta_1 & k_{x_1} & k_{y_1} & k_{t_1} & \alpha_{n_1} & N_{n_1} \\ x_2 & y_2 & F_{x_2} & F_{y_2} & M_{z_2} & u_2 & v_2 & \theta_2 & k_{x_2} & k_{y_2} & k_{t_2} & \alpha_{n_2} & N_{n_2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{nn} & y_{nn} & F_{x_{nn}} & F_{y_{nn}} & M_{z_{nn}} & u_{nn} & v_{nn} & \theta_{nn} & k_{x_{nn}} & k_{y_{nn}} & k_{t_{nn}} & \alpha_{n_{nn}} & N_{n_{nbr}} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

- *Matriz de cargas interelementales:* tendrá un número de filas igual al número de cargas interelementales introducido. En sus columnas se guardarán diferentes variables, según el tipo de carga considerada. En todas ellas, la primera columna guardará el número de la barra en la que se aplica esa carga ( $N_b$ ) y la segunda columna guardará *pun*, *dis*, *ter* o *def*, según sea el tipo de carga: puntual, distribuida, térmica o deformación inicial, respectivamente.

**Carga puntual:**  $N_b$  (número de la barra en la que se aplica la carga); *pun* (tipo de carga puntual); *fd* (siglas de *Foot Distance*, valor normalizado entre 0 y 1 donde se aplica la carga, siendo 0 el comienzo de la barra y 1 el final); y  $F_x$ ,  $F_y$  y  $\theta$  (valores de la fuerza en  $x$ ,  $y$  y momento, respectivamente). En las columnas 7 y 8 es indiferente lo que se ponga.

**Carga distribuida:**  $N_b$  (número de la barra en la que se aplica la carga); *dis* (tipo de carga distribuida);  $fd_1$  y  $fd_2$  (comienzo de la carga y final);  $F_{x_1}$ ,  $F_{x_2}$ ,  $F_{y_1}$  y  $F_{y_2}$  (valores en dirección  $x$  e  $y$  al comienzo y al final de la carga).

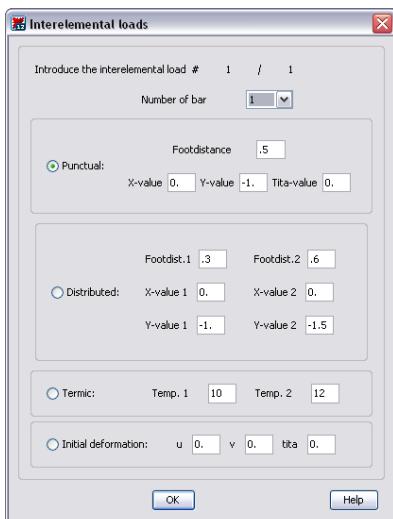
**Carga térmica:**  $N_b$  (número de la barra en la que se aplica la carga); *ter* (tipo de carga térmica);  $T_1$  y  $T_2$  (temperatura a un lado y a otro de la barra). En las columnas 5 a 8 es indiferente lo que se ponga.

**Deformación inicial:**  $N_b$  (número de la barra en la que se aplica la carga); *def* (tipo de carga de deformación inicial);  $u$ ,  $v$  y  $\theta$  (coordenadas  $x$ ,  $y$  y giro, respectivamente, de la deformación inicial impuesta). En las columnas 6 a 8 es indiferente lo que se ponga.

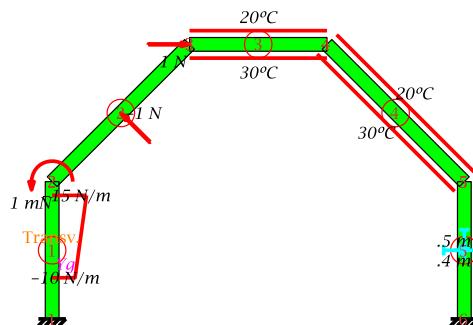
La matriz *dbc* podrá tener alguno o todos los tipos de carga, ordenados o desordenados, una vez o repetidos, en alguna o en todas las barras de la estructura. La matriz que se muestra a continuación es un ejemplo que incluye todos los tipos de carga.

$$\begin{aligned}
 dbc &= \begin{bmatrix} N_{b_3} & ter & T_{1N_{b_3}} & T_{2N_{b_3}} \\ N_{b_1} & dis & fd_{1N_{b_1}} & fd_{2N_{b_1}} & x_{1N_{b_1}} & x_{2N_{b_1}} & y_{1N_{b_1}} & y_{2N_{b_1}} \\ N_{b_2} & pun & fd_{N_{b_2}} & x_{N_{b_2}} & y_{N_{b_2}} & \theta_{N_{b_2}} \\ N_{b_2} & ter & T_{1N_{b_2}} & T_{2N_{b_2}} \\ N_{b_5} & def & y_{N_{b_5}} & v_{N_{b_5}} & \theta_{N_{b_5}} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & ter & 20 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & dis & 0,3 & 0,9 & 0 & 0 & -10 & -15 \\ 2 & pun & 0,5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & ter & 20 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & def & 0,5 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

El resultado de estas cargas en una estructura de 5 barras, que además tiene un momento y una carga nodales en sus nodos 2 y 3, es la mostrada en la Figura 4.4.



(a) Introducción de los datos



(b) Ejemplo de estructura cargada

**Figura 4.4:** Cargas en la estructura

Tras la introducción de datos, se hace una evaluación de los mismos para ver posibles errores: datos incorrectos u omitidos, nodos o barras coincidentes, valores no permitidos (por ejemplo,  $fd > 1$  ó  $fd < 0$ ), etc. En caso de error, se avisa al usuario de las variables o elementos incorrectos en cada matriz, para su rápida corrección.

Para finalizar, se calculan las longitudes y ángulos de las barras, y las rótulas de la estructura, y se imprimen por pantalla todos los datos

introducidos y calculados y también un dibujo de la estructura. En caso de detectar algún fallo al ver el dibujo de la estructura, se pueden volver a introducir los datos tantas veces como sea necesario.

#### 4.2.1.3. Cálculo

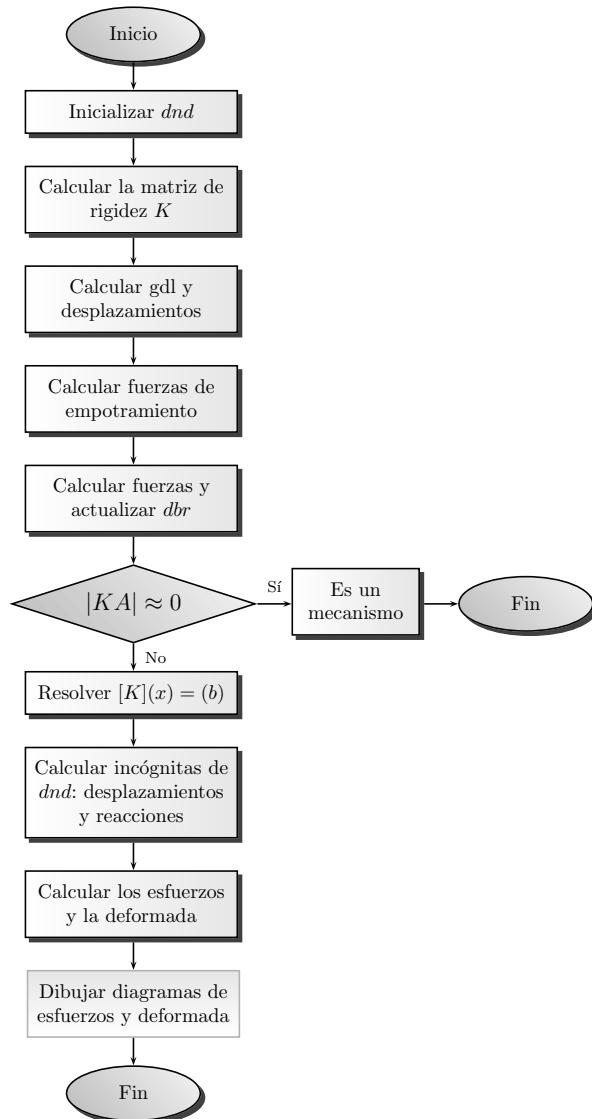
El proceso de cálculo se realizará automáticamente, después de que el usuario elija ciertas opciones de visualización de los resultados. El diagrama de flujo seguido en el proceso de cálculo se puede ver en la Figura 4.5.

#### 4.2.2. Salidas

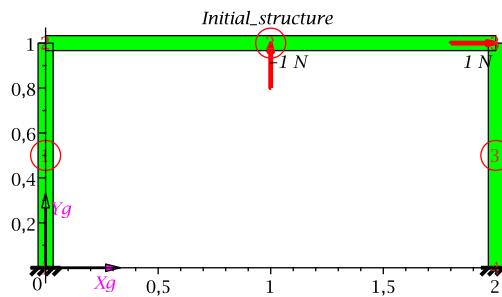
Las propiedades del ejemplo elegido para ilustrar el proceso (Figura 4.6) son:

- Las barras de la estructura son todas iguales, de directriz recta.
- Las barras son de sección constante de  $0,1m \times 0,1m$ .
- El material de las barras es acero, con  $E = 2,1 \cdot 10^{11} Pa$  y  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}C)^{-1}$ .
- Los dos pilares del pórtico están empotrados.
- El pórtico está sometido a una carga vertical de valor  $1N$  en el centro de su vano, y a una carga horizontal del mismo valor en cabeza del pilar.

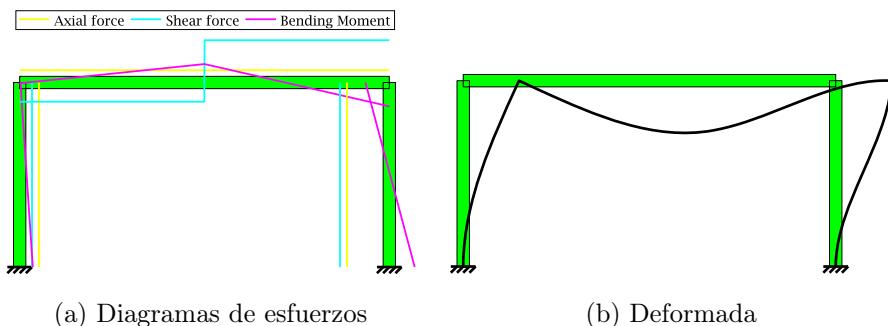
Los resultados obtenidos se pueden ver en las Tablas 4.1 hasta la 4.4 y en la Figura 4.7.



**Figura 4.5:** Diagrama de flujo del bloque de cálculo



**Figura 4.6:** Ejemplo de salida tras la introducción de datos



(a) Diagramas de esfuerzos

(b) Deformada

**Figura 4.7:** Resultados

**Tabla 4.1:** Diagramas de esfuerzos (valores positivos)

Barra	Nodo	Axil	Cortante	Flector
1	1	0,31251	0,19990	0,21244
	2	0,00000	0,00000	0,00000
2	1	0,00000	0,31251	0,01254
	2	0,19990	0,68749	0,00000
3	1	0,68749	0,80001	0,38751
	2	0,00000	0,00000	0,41259

**Tabla 4.2:** Valores máximos de los diagramas de esfuerzos

Esfuerzo	Valor máximo	Barra	Posición
Axil	0,68749	3	Nodo 1
Cortante	0,80010	3	Nodo 1
Flector	0,41259	3	Nodo 2

**Tabla 4.3:** Reacciones en los nodos

Nodo	$F_x$	$F_y$	$M_z$
1	-0,19990	0,31251	0,21244
2	0,00000	0,00000	0,00000
3	1,00000	0,00000	0,00000
4	-0,80010	0,68749	0,41259

**Tabla 4.4:** Desplazamientos de los nodos

Nodo	$u_x$	$u_y$	$\theta$
1	0,0000	0,0000	0,0000
2	$3,4716 \cdot 10^{-13}$	$-1,4882 \cdot 10^{-16}$	$-5,3567 \cdot 10^{-13}$
3	$3,4735 \cdot 10^{-13}$	$-3,2737 \cdot 10^{-16}$	$-5,9705 \cdot 10^{-14}$
4	0,0000	0,0000	0,0000

## 4.3. Modelo MDRCP

En este apartado se presenta el programa de cálculo desarrollado que implementa el Método Directo de Rígidez con Cálculo Plástico paso a paso. En él, se formarán rótulas plásticas de forma secuencial según aumentan las cargas, que pueden ser de cualquier tipo: concentradas, distribuidas, térmicas y desplazamientos impuestos. Además, éstas podrán formarse en cualquier punto de la estructura, y no solo en sus nodos.

### 4.3.1. Programación

El programa está dividido en varias secciones:

0. *Instrucciones*: se detallan, en una ventana emergente, las instrucciones a seguir para el correcto funcionamiento de la hoja de trabajo y las opciones de elección posibles.
1. *Inicio*.
2. *Entrada de datos*.
3. *Cálculo*.
4. *Resultados gráficos*.
5. *Gráficas*.

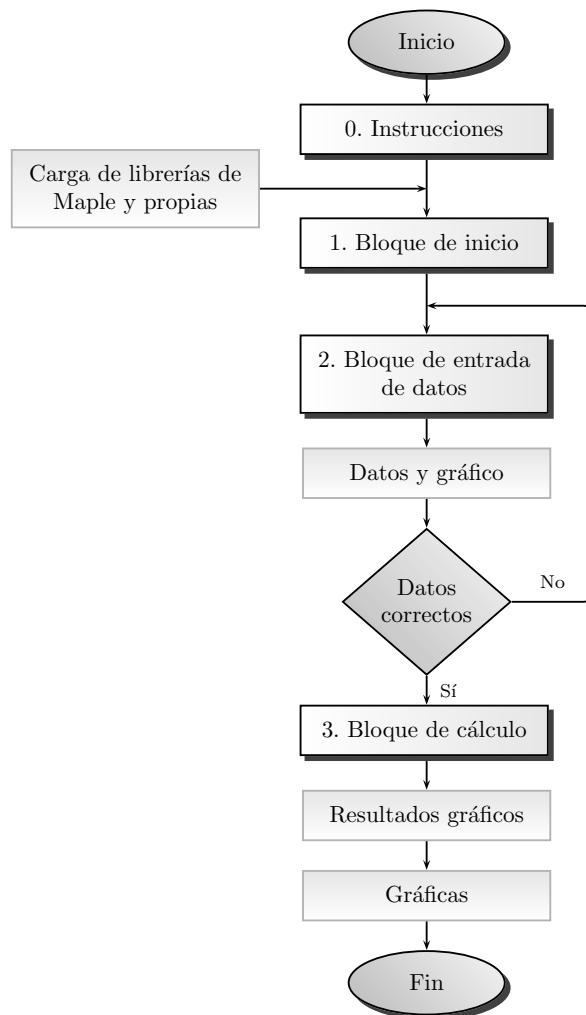
El diagrama de flujo del programa se puede ver en la Figura 4.8.

Los bloques de Inicio y de Entrada de datos son similares a los expuestos para el MDR en los Apartados 4.2.1.1 y 4.2.1.2. Los tres bloques restantes se explican a continuación.

#### 4.3.1.1. Cálculo

El proceso de cálculo se realizará automáticamente, después de que el usuario elija ciertas opciones de visualización de los resultados.

El diagrama de flujo seguido en el proceso de cálculo se puede ver en la Figura 4.9.



**Figura 4.8:** Diagrama de flujo del programa (MDRCP)

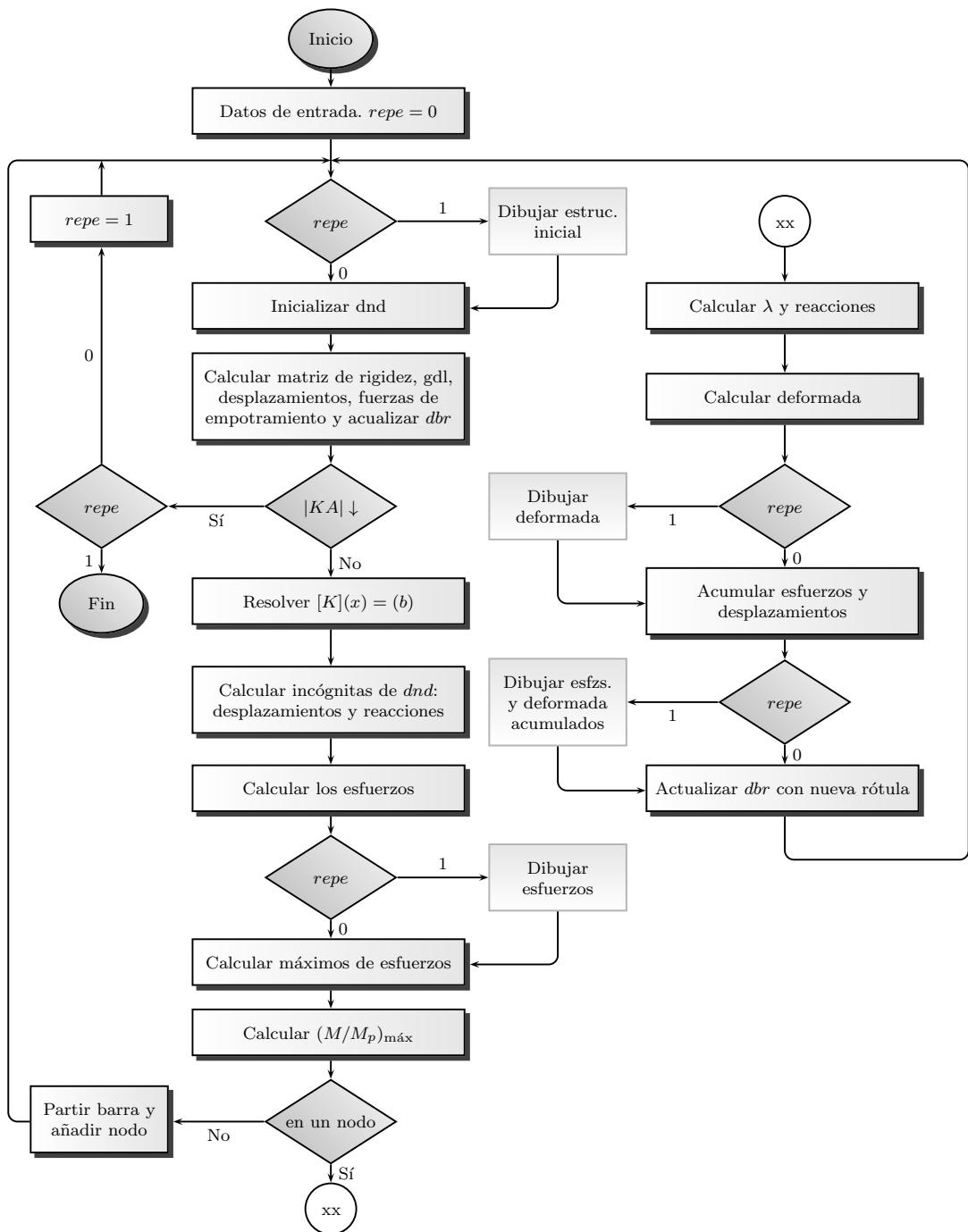


Figura 4.9: Diagrama de flujo del bloque de cálculo

El cálculo se inicia con los datos iniciales y se realiza sin mostrar resultados.

Si en algún paso de cálculo, determinado por la formación de una rótula plástica, se produce una rótula en medio de alguna barra, el cálculo se para. Se introduce un nuevo nodo en ese punto, partiendo la barra en dos y se cambian los datos de todas las matrices para esta nueva configuración, de forma que la nueva estructura sea igual (con las condiciones de contorno y cargas de la estructura inicial), pero con un nodo en el punto en cuyo paso intermedio se formaría una rótula interelemental.

Tras cambiar los datos, se reinicia el cálculo y, al llegar a ese mismo paso, la rótula se formará en el nuevo nodo introducido y será, por tanto, interelemental, y se continúa con el cálculo.

Este proceso se repetirá hasta que todas las rótulas necesarias para llegar hasta el mecanismo de colapso se produzcan en nodos de la estructura, los nodos originales o los introducidos posteriormente.

Cuando se completa el cálculo y se comprueba que esto sucede, se vuelve a calcular todo, mostrando los resultados elegidos por pantalla.

#### 4.3.1.1. Nuevo nodo

Los cambios a realizar para introducir el nuevo nodo son los siguientes:

1. Habrá un nuevo nodo, que tomará un número igual al número máximo de nodos +1. Si el nodo se encuentra donde anteriormente había una carga puntual interelemental, ésta pasará a ser una carga nodal.
2. Habrá una nueva barra que tendrá las características de la original, excepto los nodos que conecta y por tanto su longitud. Se numera la nueva barra y se actualiza la tabla de conectividades entre los nodos de la estructura.
3. Las cargas sobre la barra original deberán ser repartidas entre las dos barras resultantes, de forma que el problema sea el mismo. Para ello, se procede de la siguiente manera:

##### **Carga puntual:**

- Si se encuentra entre el nodo inicial de la barra original y el nuevo nodo formado, únicamente cambiará la distancia

relativa a la que se aplica, puesto que la primera parte de la barra no cambia su nomenclatura.

- Si se encuentra en el punto en que se formará la nueva sección, como ya se ha comentado, se convertirá en una carga nodal en el nuevo nodo.
- Si se encuentra entre el punto en que se forma la rótula y el segundo nodo, esta carga pasará a estar en la nueva barra formada (segunda parte de la barra original).

#### Carga distribuida:

- Si toda la carga se encuentra entre el nodo inicial de la barra original y el nuevo nodo, únicamente cambiarán las distancias relativas que la definen, puesto que la primera parte de la barra no cambia su nomenclatura.
- Si el nuevo nodo se encuentra en medio de la carga distribuida, la carga quedará dividida. Para la primera parte de la barra, la distancia relativa en que comienza la carga variará, y la distancia relativa donde acaba la carga será 1 (la carga distribuida llega hasta el final de la barra). Para la segunda parte de la barra, la carga comenzará con la distancia relativa 0 (inicio de la barra) y terminará con una distancia relativa tal que acaba en la misma posición que la carga original. Las dos partes en que se divide la carga mantendrán la forma y el valor iniciales.
- Si toda la carga se encuentra entre el nuevo nodo y el nodo final, esta carga pasará a estar en la nueva barra formada (segunda parte de la barra original).

**Carga térmica:** se mantendrán en la barra que conserva la numeración, y se añadirá una nueva carga con el mismo valor para la nueva barra.

**Deformación inicial:** se reparte proporcionalmente a la longitud de cada barra resultante.

A efectos de programación, los datos iniciales variarán de la siguiente forma:

- El número de nodos (*nnd*) se incrementará en uno.
- El número de barras (*nbr*) se incrementará en uno.

- El número de cargas interelementales podrá disminuir en uno (si una carga interelemental puntual se convierte en nodal), podrá mantenerse igual (si una carga puntual o distribuida no se encuentra en medio de la nueva sección plastificada formada), o se incrementará en uno (si la sección parte una carga distribuida, térmica o de deformación inicial).
- El número de materiales (*nmt*) y secciones (*nsc*) no variará, puesto que la nueva barra tiene las mismas características que la original.
- En la matriz de nodos (*dnd*) se introducirá una nueva fila, que almacenará las coordenadas de este nuevo nodo y sus características.
- En la matriz de barras (*dbr*) se cambiará el nodo final de fila correspondiente a la barra que se parte, y se añadirá una nueva fila con la nueva barra y sus características.
- En la matriz de cargas (*dbc*) se eliminarán, añadirán o cambiarán las filas correspondientes a las variaciones provocadas en las cargas.
- Las matrices de secciones (*dsc*) y materiales (*dmt*) no variarán.

#### 4.3.1.2. Resultados gráficos

En este apartado, el usuario elige en primer lugar los elementos a mostrar (estructura, número de elementos, sistema de coordenadas, apoyos, cargas, fuerzas). Dependiendo de la opción elegida en el paso anterior respecto a mostrar los diagramas de esfuerzos y/o la deformada de forma estática o animada, al ejecutar este bloque se mostrarán los diagramas de esfuerzos y la deformada de cada paso en colores graduales y con la aparición sucesiva de las rótulas formadas, para resumir el comportamiento de la estructura en dos gráficos.

#### 4.3.1.3. Gráficas

En este apartado, el usuario elige qué gráficos desea mostrar (desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical, giros absolutos, giros relativos y energía disipada) y además si desea exportar los datos a Excel para su posterior postprocesado.

En las opciones de desplazamientos y giro absoluto, se mostrará una tabla con estos valores en cada nodo para cada paso de carga.

En la opción de giro relativo, dicha tabla tendrá tantas columnas como giros relativos haya, pudiendo haber más de uno por nodo si a éste confluyen más de dos barras. Así, se utiliza la notación  $N(i)B(j-k)$  para referirse al giro relativo en el nodo  $i$  entre las barras  $j$  y  $k$ .

En estas cuatro opciones se mostrará además una gráfica de la carga ( $\lambda$ ) de cada paso en el eje de ordenadas frente al valor correspondiente a cada caso en el eje de abscisas.

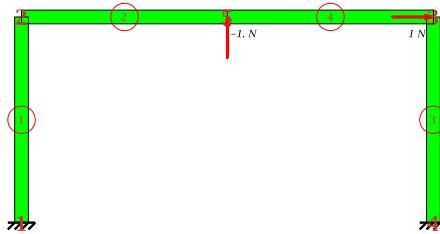
En la opción de energía disipada, dicha tabla contendrá además una columna con el total de energía disipada en cada paso. La gráfica se mostrará en este caso con el valor de la energía en el eje de ordenadas y el de la carga en el eje de abscisas, siendo así más fácil de interpretar, tanto el valor (positivo) en cada nodo, como la suma total.

#### 4.3.2. Salidas

El ejemplo elegido para ilustrar el proceso de cálculo es el mismo que el elegido para el MDR (Figura 4.6), aunque con alguna consideración adicional:

- Las barras de la estructura son todas iguales, de directriz recta.
- Las barras son de sección constante  $0,1m \times 0,1m$ , aunque se mayorá virtualmente el área para obviar los efectos del esfuerzo axil ( $A = 1000m^2$ ), con  $I_z = 1m^4$ ,  $h = 0,1m$  (canto de la sección) y  $M_p = 1Nm$  (momento plástico).
- El material de las barras es acero, con  $E = 2,1 \cdot 10^{11} Pa$ ,  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$  y  $\sigma = 275 MPa$ .
- Los dos pilares del pórtico están empotrados.
- El pórtico está sometido a una carga vertical de valor  $1N$  en el centro de su vano, y a una carga horizontal del mismo valor en cabeza del pilar. Dicha carga será incrementada por un factor  $\lambda$  hasta el colapso.

En este caso, se creará un nodo adicional en el punto de aplicación de la carga vertical, antes de iniciar el cálculo final, con lo que la nomenclatura de las barras y de los nodos será la reflejada en la Figura 4.10.



**Figura 4.10:** Estructura inicial en el método paso a paso

Se formarán cuatro rótulas hasta que la estructura alcance el mecanismo de colapso. El nodo en que se forman, el factor de carga necesario y el orden en que aparecen las rótulas se pueden ver en la Tabla 4.5.

**Tabla 4.5:** Orden de formación de las rótulas plásticas

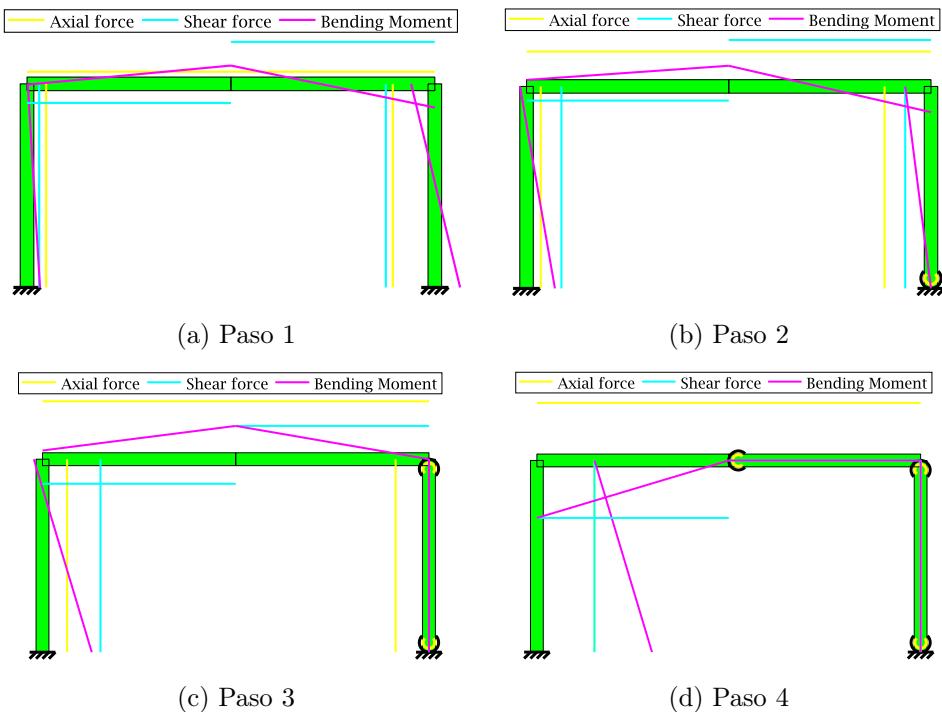
	1°	→	2°	→	3°	→	4°
<b>Nodo</b>	4		3		5		1
<b>Barra</b>	3		3		4		1
<b>Extremo</b>	2		1		1		1
$\lambda$	166378		176422		203276		206250
$\lambda/M_p$	2,42005		2,56614		2,95675		3,00000

Los diagramas de esfuerzos y las deformadas en cada paso se pueden ver en la Figura 4.11 y en la Figura 4.12, y sus gráficos acumulados en la Figura 4.13.

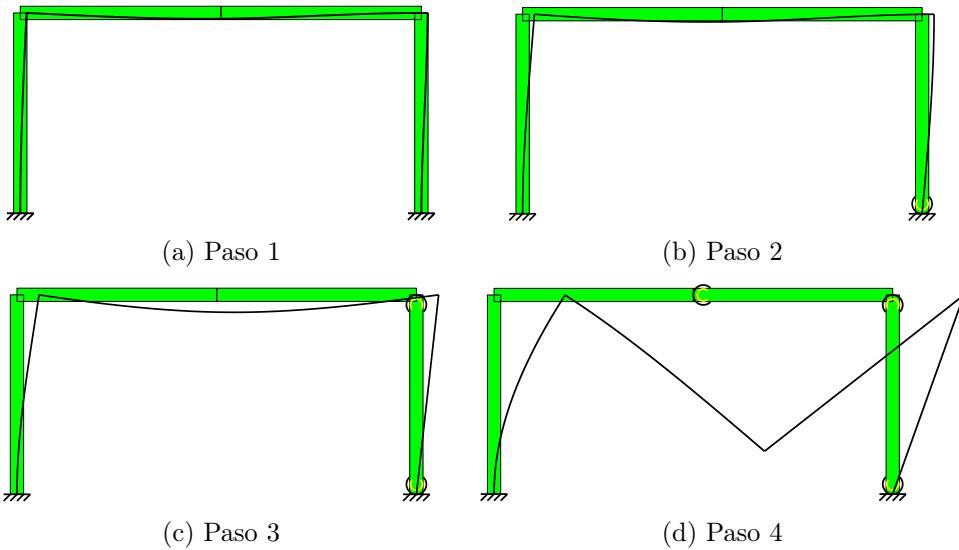
Las gráficas y tablas obtenidas son:

**Desplazamiento horizontal vs. carga:** a medida que se forman rótulas plásticas, la rigidez de la estructura disminuye, por lo que los desplazamientos se hacen mayores con incrementos de carga más pequeños. Se observa que los nodos 2, 3 y 5 (los nodos no empotrados) tienen desplazamientos horizontales muy similares (Figura 4.14).

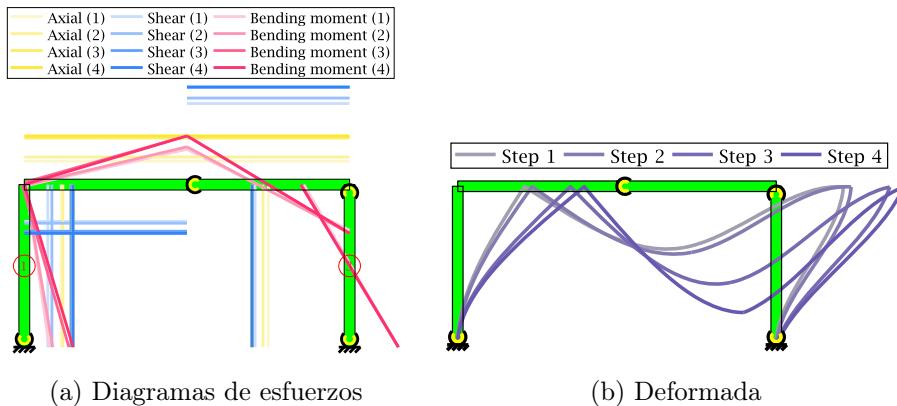
**Desplazamiento vertical vs. carga:** el comportamiento del nodo 5 es similar al observado para el desplazamiento horizontal, tomando valores negativos porque se desplaza en la dirección contraria al eje  $z$ . En los nodos 2 y 3 se observa también un cierto descenso, pero mucho menor, ya que son los nodos que se encuentran en la cabeza de los pilares verticales (Figura 4.15).



**Figura 4.11:** Diagramas de esfuerzos en cada paso



**Figura 4.12:** Deformadas en cada paso



**Figura 4.13:** Resultados acumulados

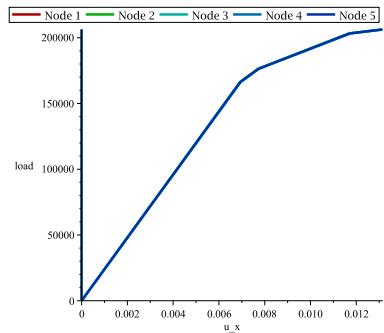
**Giro absoluto vs. carga:** los giros absolutos varían en algunos casos drásticamente con la formación de cada nueva rótula plástica (Figura 4.16).

**Giro relativo vs. carga:** los giros relativos siempre aumentan con cada nueva rótula plástica formada (Figura 4.17).

**Energía disipada vs. carga:** la energía disipada en cada nodo aumenta con cada rótula creada, y por tanto la energía total disipada por la rótula también aumenta (Figura 4.18).

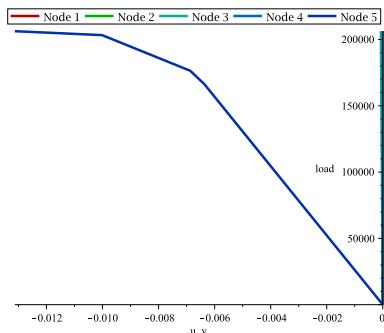
En todas ellas, los cambios de pendiente en las curvas corresponden con la formación de una nueva rótula plástica, mientras que los tramos entre la formación de dos rótulas plásticas consecutivas son rectos, puesto que la carga se incrementa de forma proporcional.

Se pueden exportar los datos obtenidos a Excel (mediante la elección de una variable por parte del usuario), por medio de una aplicación ya implementada en Maple, para su posterior tratamiento



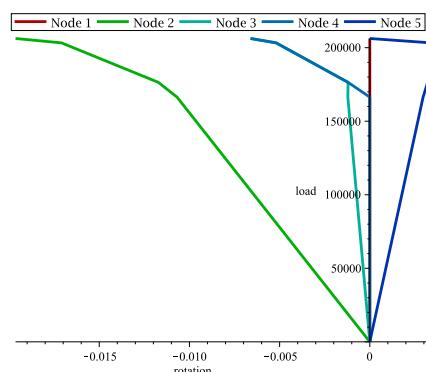
Paso	$\lambda$	Desplazamiento horizontal ( $\times 10^{-3}$ )				
		Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5
1	166378	0,00	6,92	6,95	0,00	6,94
2	176422	0,00	7,71	7,75	0,00	7,73
3	203276	0,00	11,68	11,74	0,00	11,71
4	206250	0,00	13,10	13,16	0,00	13,13

Figura 4.14: Desplazamiento horizontal de los nodos



Paso	$\lambda$	Desplazamiento vertical ( $\times 10^{-3}$ )				
		Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5
1	166378	0,00	-0,025	-0,055	0,00	-6,37
2	176422	0,00	-0,026	-0,058	0,00	-6,87
3	203276	0,00	-0,031	-0,065	0,00	-10,01
4	206250	0,00	-0,033	-0,065	0,00	-13,13

Figura 4.15: Desplazamiento vertical de los nodos



Paso	$\lambda$	Giro absoluto ( $\times 10^{-3}$ )				
		Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5
1	166378	0,00	-10,69	-1,22	0,00	2,95
2	176422	0,00	-11,72	-1,20	-1,20	3,21
3	203276	0,00	-17,09	-5,19	-5,19	3,40
4	206250	0,00	-19,64	-6,61	-6,61	0,00

Figura 4.16: Giro absoluto de los nodos

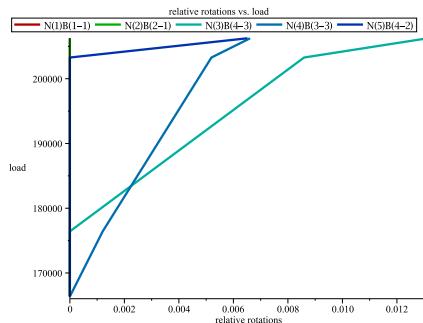
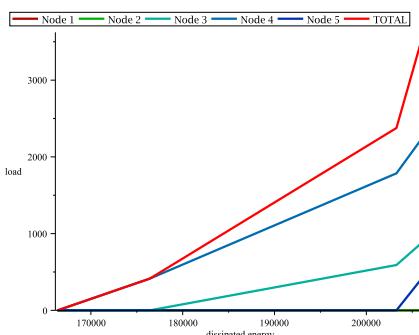


Figura 4.17: Giro relativo de los nodos



Paso	$\lambda$	Energía disipada ( $\times 10^3$ )				
		Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5
1	166378	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	176422	0,00	0,00	0,00	0,41	0,00
3	203276	0,00	0,00	0,59	1,78	0,00
4	206250	0,00	0,00	0,90	2,27	0,48
						3,62

Figura 4.18: Energía disipada en los nodos

## 4.4. Modelo MDRCPR

En este apartado se presenta el programa de cálculo desarrollado que implementa el Método Directo de Rígidez con Cálculo Plástico paso a paso y Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño. Además de los pasos de cálculo marcados por la formación de secciones agotadas, incorpora unos bucles incrementales, para aumentar la carga en pasos adaptativos, e iterativos en cada uno de ellos, para alcanzar el equilibrio.

### 4.4.1. Programación

El programa tiene una estructura general similar a la del cálculo plástico paso a paso (Figura 4.8). Sin embargo, existen varias diferencias:

1. *Inicio.* Se cargan nuevas librerías con funciones para el cálculo de: la matriz elastoplástica,  $d\lambda$ , el incremento de daño ( $dd$ ), la deformación plástica acumulada ( $dP$ ) o la función de fluencia ( $Z$ ). Se modifican algunas funciones de las librerías usadas en los otros programas.
2. *Entrada de datos.* Se introducen más datos, relativos al daño: incrementos de carga, tolerancias para considerar  $Z$  o el residuo nulos, deformación plástica umbral y crítica, daño inicial y crítico, coeficiente de endurecimiento,  $\alpha$ , y variables de elección del tipo de cálculo (considerar daño, axil, cortante y/o flector; calcular la deformación plástica mediante un procedimiento iterativo o mediante una fórmula simplificada; modelo de daño elegido; etc.).
3. *Cálculo.* Cambia completamente, porque será un proceso incremental e iterativo, considerando la matriz elastoplástica y la no linealidad del problema. Este bloque se describe a continuación.

#### 4.4.1.1. Cálculo

El proceso de cálculo se realizará automáticamente, después de que el usuario elija ciertas opciones de visualización de los resultados.

El diagrama de flujo completo seguido en el proceso de cálculo se puede ver en la Figura 4.19, y una versión simplificada, en la que se

observan con más claridad los bucles llevados a cabo en el cálculo, se puede ver en la Figura 4.20.

El primer paso, incremento e iteración son diferentes al resto y por ello están programados por separado.

#### 4.4.1.2. Paso = 1

El cálculo se realiza como en el programa de cálculo plástico paso a paso, con la matriz elástica. De igual forma que en el caso anterior, si el determinante de la matriz es cero o suficientemente pequeño, significa que los datos introducidos inicialmente corresponden a un mecanismo, no con una estructura, y se finaliza el proceso.

Se calculan los desplazamientos y reacciones, y se calcula el valor mínimo de la carga  $Q_{\min}$  que hace que un nodo plastique. Esta plastificación se evalúa considerando el primer nodo en el que se alcanza un valor del momento flector igual al momento plástico, puesto que en este primer paso aún no hay daño en ninguna sección. Se identifica dicho nodo que plastifica y se calculan y dibujan los esfuerzos que origina esa carga. Para la acumulación de todas las variables, se considera el factor multiplicador  $\lambda = 1$ , se calculan las reacciones y se calcula y dibuja la deformada de la estructura. Finalmente, se acumulan los esfuerzos y desplazamientos.

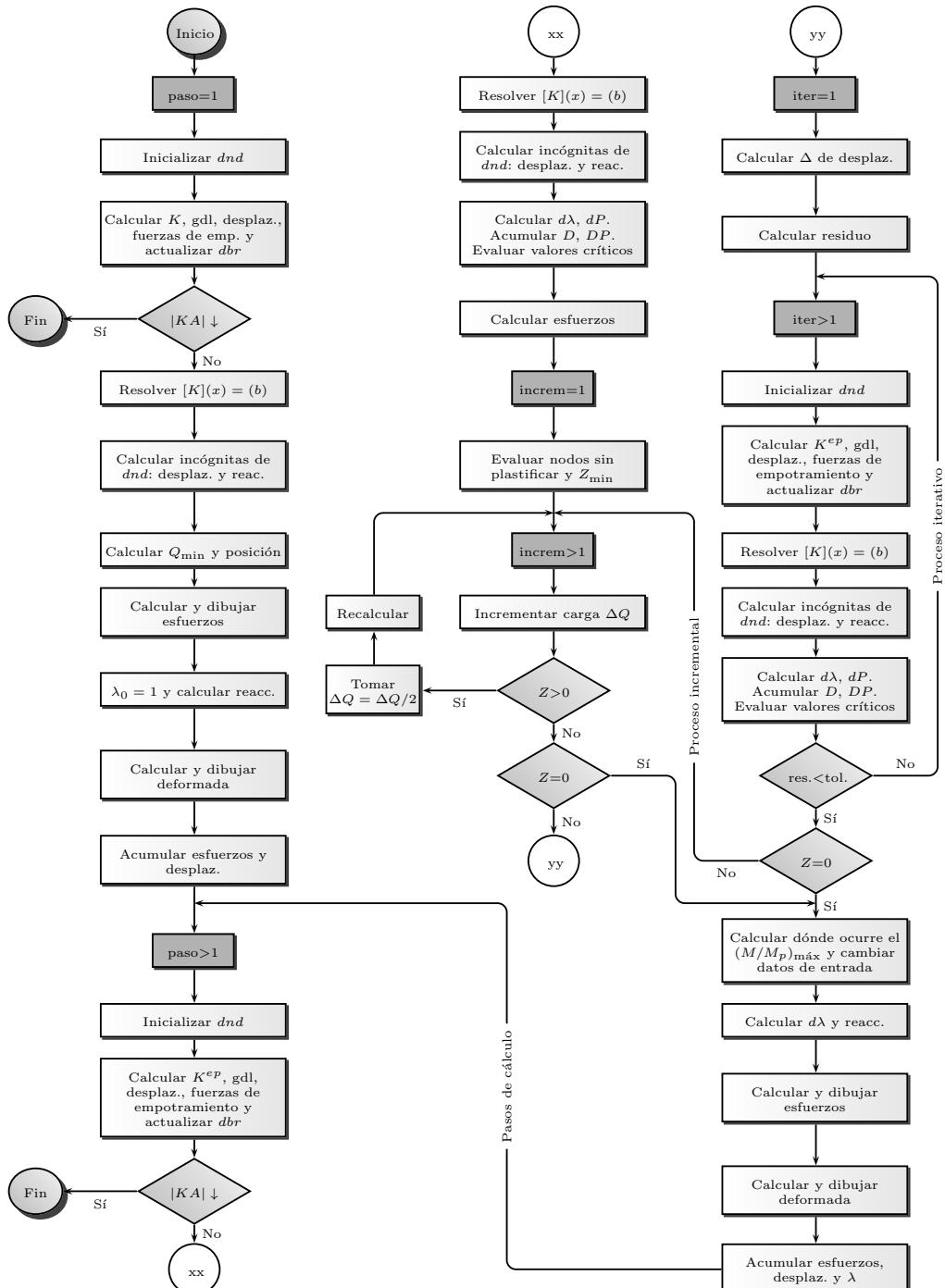
Al final de este paso, se inicializan las matrices de acumulación del daño y de la deformación plástica.

#### 4.4.1.3. Paso > 1

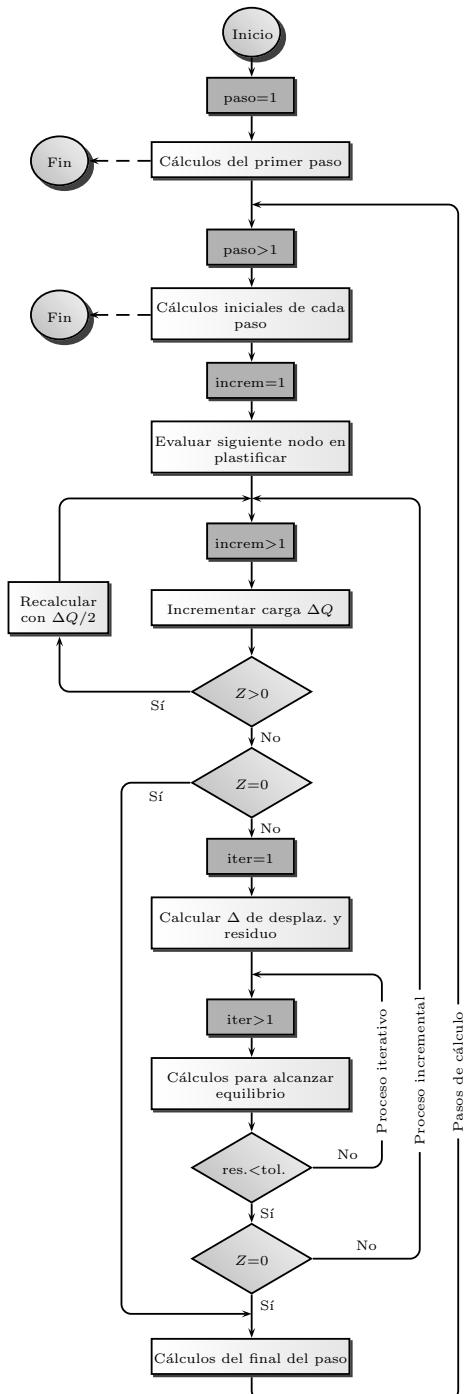
El cálculo de la matriz de rigidez es diferente, puesto que se utilizará la matriz de rigidez elastoplástica en aquellos elementos en los que ya haya comenzado la plastificación.

El resto del análisis inicial (calcular los desplazamientos y reacciones) es similar. De igual forma, si el determinante de la matriz de rigidez disminuye drásticamente de valor de un paso al siguiente, se considerará una plastificación de un número de nodos suficiente como para hacer que la estructura se convierta en un mecanismo.

Tras el cálculo de los desplazamientos actualizados, se acumula el daño producido (según la ley de evolución elegida) y la deformación plástica, y se evalúa el estado de los nodos de la estructura. Posteriormente, se



**Figura 4.19:** Diagrama de flujo del bloque de cálculo (MDRCPR)



**Figura 4.20:** Diagrama de flujo simplificado del bloque de cálculo

calculan los esfuerzos iniciales de este paso.

Tras este cálculo inicial al principio de cada paso, comienza el proceso incremental, que es necesario debido a su no linealidad y a su dependencia con el historial de cargas.

#### 4.4.1.3.1. Incremento = 1:

En el primer incremento únicamente se calcula qué sección será la siguiente en plastificar, que será aquella cuyo valor de  $Z$  (función de fluencia, con valor máximo cero) esté más cercano a cero. Es decir, será aquella sección que con el menor incremento de carga posible plastifique en primer lugar.

#### 4.4.1.3.2. Incremento > 1:

En los sucesivos incrementos posteriores, se incrementará la carga en una cantidad elegida inicialmente en la introducción de datos, y se distinguirá entre los siguientes casos posibles:

- $Z > 0$ : con el incremento de carga tomado, la función de fluencia toma un valor superior a 0. Como eso no es posible, significa que el incremento de carga tomado ha sido demasiado grande, y la sección considerada se ha salido de la superficie de fluencia, puesto que ha sido superior al mínimo incremento de carga necesario para lograr únicamente la plastificación ( $Z = 0$ ) del nodo hallado en el incremento 1. Para retornar a la superficie de fluencia se cambia el valor del incremento de carga por la mitad, y se vuelve a evaluar  $Z$ .
- $Z = 0$ : con el incremento de carga tomado, la función de fluencia toma un valor igual a 0 (con las tolerancias consideradas). Significa que el nodo considerado plastifica, ya que está justamente en la superficie de fluencia. Cuando esto ocurre, se termina el proceso incremental y se va directamente a los cálculos del final del paso.
- $Z < 0$ : con el incremento de carga tomado, la función de fluencia del nodo que antes plastificará aún no ha llegado al valor necesario para que esto ocurra ( $Z = 0$ ), por lo que deberá incrementarse la carga. Sin embargo, primeramente deberá pasarse por un proceso iterativo, para llegar a una solución de equilibrio.

**Iteración = 1:** en la primera iteración se calcula el incremento de desplazamiento ( $\Delta u$ ) y el residuo (res), que es el valor que deberá ser minimizado en las iteraciones posteriores.

$$\begin{cases} \text{res}_1 = \|F(\Delta Q)\|_\infty \\ \Delta u_1 = K_1^{ep} \cdot \text{res}_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

**Iteración > 1:** en las sucesivas iteraciones, se calcula todo de nuevo (matriz de rigidez elastoplástica, grados de libertad, desplazamientos, fuerzas de empotramiento, reacciones, esfuerzos, etc.) y además se calculan y acumulan tanto el daño como la deformación plástica de las secciones. Las iteraciones se repetirán hasta que el residuo sea suficientemente pequeño como para ser considerado cero, en base a la tolerancia elegida. En ese momento se considera que la solución obtenida está en equilibrio, y se finaliza el proceso iterativo.

$$\begin{cases} \Delta u_i = K_i^{ep} \cdot \text{res}_i \\ \text{res}_i = \|\text{res}_{i-1} - K_{i-1}^{ep} \cdot \Delta u_{i-1}\|_\infty \end{cases} \quad (4.7)$$

Si al final del proceso iterativo el nodo considerado (el que se calculó en el incremento 1 que sería el siguiente en plastificar) aún no ha plastificado ( $Z < 0$ ), se volverá a incrementar la carga, repitiendo el proceso incremental.

Sin embargo, si al final del proceso iterativo el nodo considerado plastifica ( $Z = 0$ ), se pasará a los cálculos del final del paso.

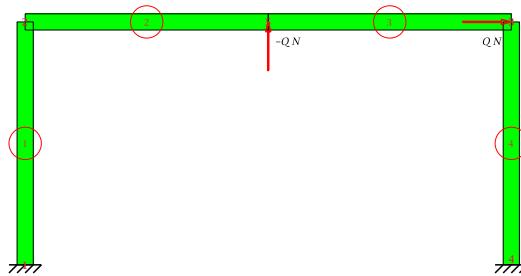
#### 4.4.1.3.3. Cálculos del final del paso:

Tras plastificar el siguiente nodo, se calcula dónde se produce el valor máximo del momento flector reducido, que será el siguiente nodo que plastifique. Se calcula el factor multiplicador como el cociente de la nueva carga entre la anterior. Se calculan y dibujan los esfuerzos y la deformada y, tras acumular los esfuerzos y los desplazamientos utilizando el factor multiplicador, se va al siguiente paso de cálculo.

## 4.4.2. Salidas

El ejemplo elegido para ilustrar el proceso (Figura 4.21) es similar al elegido para el Método Paso a Paso (Figura 4.6), sustituyendo la carga

inicial de valor  $1N$  por una carga de valor  $QN$ . Sin embargo, el significado es el mismo, puesto que en el Método Paso a Paso todas las cargas se multiplicaban por un factor  $\lambda$  que se incrementaba, mientras que ahora, considerando daño de la sección, se incrementa directamente la carga  $Q$ , no su factor multiplicador.



**Figura 4.21:** Estructura inicial

En este ejemplo, se dieron cuatro pasos, correspondientes a la plástificación de los nodos 5, 4, 3 y 1, en ese orden. Al comienzo del quinto paso se evaluó el nuevo valor del determinante de la matriz de rigidez y se comprobó que su valor era más de  $10^{19}$  veces menor (decrecimiento relativo del 100 %), con lo que se consideró que la estructura había alcanzado el mecanismo de colapso. El número de incrementos e iteraciones dados en cada paso se puede ver en la Tabla 4.6. El modelo de evolución de daño tomado es el de Bonora.

Se tomó una tolerancia para considerar nula la función de fluencia de  $1 \cdot 10^{-3}$ . Es decir, se considera  $Z = 0$  siempre que  $|Z| < 0,001$ . Por ello, cuando el valor de  $Z$  sea menor de  $-0,001$ , se seguirá incrementando la carga  $Q$ , y cuando el valor de  $Z$  sea mayor de  $+0,001$  se considerará que se ha pasado y se repetirá el cálculo con un incremento de carga la mitad.

En la Tabla 4.6 no se detallan los valores de los residuos en cada una de las iteraciones que tienen lugar en cada incremento, pero se puede ver que 5 iteraciones son suficientes en todos los casos para llegar desde el valor inicial del residuo (que es  $\Delta Q$  en ese momento) hasta la tolerancia que se le pone al residuo para considerarlo nulo (que es  $1 \cdot 10^{-5}$ ).

Tanto la tolerancia de la función de fluencia como la del residuo pueden ser modificadas para incrementar precisión del modelo, aunque lógicamente invirtiendo más tiempo de cálculo.

Un ejemplo de los valores que toman los sucesivos residuos en las

**Tabla 4.6:** Desglose de pasos, incrementos e iteraciones

Paso	$ KA $	$Q_{\text{final}}$	Increm.	Nodo	$\Delta Q$	$Z_{\text{mín}}$	Nº iter.
1	$2,955 \cdot 10^{73}$	165061	—	4	—	—	—
2	$1,455 \cdot 10^{73}$	170061	1	3	—	-0,06154	—
			2		1000	-0,04910	4
			3		1000	-0,03664	4
			4		1000	-0,02416	4
			5		1000	-0,01165	4
			6		1000	+0,00089	—
3	$2,720 \cdot 10^{72}$	179811	1	5	—	-0,24505	—
			2		1000	-0,22010	4
			3		1000	-0,19510	4
			4		1000	-0,17005	4
			5		1000	-0,14494	4
			6		1000	-0,11978	4
			7		1000	-0,09457	4
			8		1000	-0,06929	4
			9		1000	-0,04397	4
			10		1000	-0,01859	4
			11		1000	+0,00685	—
			12		500	-0,00587	4
			13		500	+0,00687	—
			14		250	+0,00050	—
4	$9,490 \cdot 10^{70}$	190936	1	2	—	-0,32422	—
			2		1000	-0,29509	5
			3		1000	-0,26595	5
			4		1000	-0,23682	5
			5		1000	-0,20768	5
			6		1000	-0,17854	5
			7		1000	-0,14940	5
			8		1000	-0,12026	5
			9		1000	-0,09112	4
			10		1000	-0,06198	4
			11		1000	-0,03284	4
			12		1000	-0,00369	4
			13		1000	+0,02545	—
			14		500	+0,01087	—
			15		250	+0,00359	—
			16		125	-0,00005	—
5	$6,344 \cdot 10^{53}$	—	—	—	—	—	—

iteraciones (paso = 3, incremento = 8) es el siguiente:

$$1000 \rightarrow 0,607179 \rightarrow 0,000607774 \rightarrow 0,000000607697 \quad (4.8)$$

Se observa que, partiendo de un residuo inicial elevado, el proceso iterativo converge rápidamente y se detiene cuando el valor es menor que la tolerancia fijada ( $1 \cdot 10^{-5}$  en este ejemplo).

El orden de plastificación de las secciones de la estructura se puede ver en la Tabla 4.7.

**Tabla 4.7:** Orden de plastificación de las secciones

	$1^\circ$	$\rightarrow$	$2^\circ$	$\rightarrow$	$3^\circ$	$\rightarrow$	$4^\circ$
<b>Nodo</b>	4		3		5		1
<b>Barra</b>	4		4		3		1
<b>Extremo</b>	2		1		1		1
<b><math>Q</math></b>	165061		170061		179811		190936
<b><math>Q/M_p</math></b>	2,40089		2,47180		2,61543		2,78089

#### 4.4.2.1. Comparación con el método paso a paso

En la Tabla 4.8 se puede ver una comparación entre los resultados obtenidos con el método MDRCP (cálculo plástico considerando reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño de la sección) y el método matricial paso a paso MDRCP. La variación porcentual se realiza respecto al valor de la carga de este último.

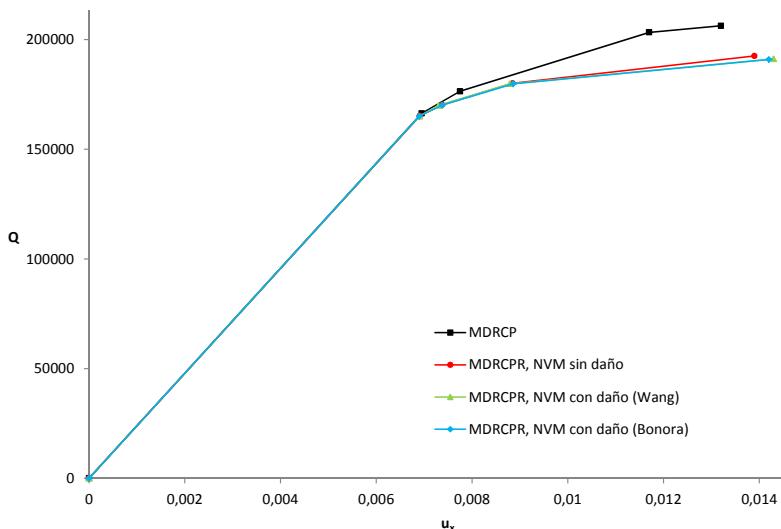
El orden de plastificación de los nodos de la estructura por ambos métodos coincide<sup>1</sup> con el orden de formación de las rótulas plásticas de la Tabla 4.5. Se puede observar que la carga necesaria para agotar la sección en el modelo con daño es ligeramente inferior a la necesaria para crear una rótula plástica. Este resultado era el esperado, puesto que para considerar una rótula plástica, únicamente se consideraba el momento flector en esa sección, mientras que para considerar la plastificación de la sección en el modelo con daño se consideraban los esfuerzos axil, cortante y flector y además el daño acumulado de la sección.

<sup>1</sup>Los nodos se introdujeron en el método considerando daño de la sección de forma que su nomenclatura coincidiera con los ejemplos anteriores, aunque no fuera ésta la forma más natural de hacerlo. Sin embargo, la nomenclatura de las barras sí varía.

**Tabla 4.8:** Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPR

Orden de formación		1°	2°	3°	4°
	Nodo	4	3	5	1
$Q$	MDRCP	166378	176422	203276	206250
	MDRCPR	165061	170061	179811	190936
$Q/M_p$	MDRCP	2,42005	2,56614	2,95675	3,00000
	MDRCPR	2,40089	2,47180	2,615431	2,78089
Variación		-0,79 %	-3,68 %	-11,54 %	7,30 %

En la Figura 4.22 se muestra la gráfica de carga frente al desplazamiento horizontal del nodo 4. Se puede observar cómo la curva de cálculo paso a paso (con la formación de rótula plástica por momento) está formada por tramos rectos entre los puntos de cambio de pendiente, y siempre se encuentra por encima de cualquiera de las curvas que consideran plastificación de la sección, utilizando para su cálculo la matriz elastoplástica, que tiene en cuenta todos los esfuerzos que actúan sobre la sección sin considerar daño (curva roja) o considerando adicionalmente el daño, cuya evolución viene marcada por los modelos de Bonora (curva azul) o Wang (curva verde).

**Figura 4.22:** Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPR

## 4.5. Modelo MDRCPRE

En este apartado se presenta el programa de cálculo desarrollado que implementa el Método Directo de Rígidez con Cálculo Plástico paso a paso, Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño, y Endurecimiento.

### 4.5.1. Programación

El programa está dividido en varias secciones:

0. *Inicio*: se cargan las librerías necesarias para el posterior funcionamiento del programa, tanto las del programa Maple como librerías propias, similares a las utilizadas en los modelos anteriores.
1. *Procedimientos*.
2. *Entrada de datos*.
3. *Cálculo*.
4. *Resultados gráficos*: similar al método implementado en el Apartado 4.3.1.2, aunque al haberse introducido nuevas funciones para diferentes materiales elastoplásticos con endurecimiento y para admitir secciones bisimétricas, los resultados de este bloque serán diferentes.
5. *Gráficas*: similar al método implementado en el Apartado 4.3.1.3.

La estructura general del programa se puede ver en la Figura 4.23 (aunque el proceso de actualizado de los datos en el *model updating* en realidad tiene lugar dentro del bloque de cálculo, como se verá en el Apartado 4.5.1.3, se muestra además en este diagrama de forma explícita).

A continuación se resumen las características más importantes de los tres apartados restantes del programa.

#### 4.5.1.1. Procedimientos

En este bloque se definen varios procedimientos adicionales necesarios para los bloques de entrada de datos y de cálculo.

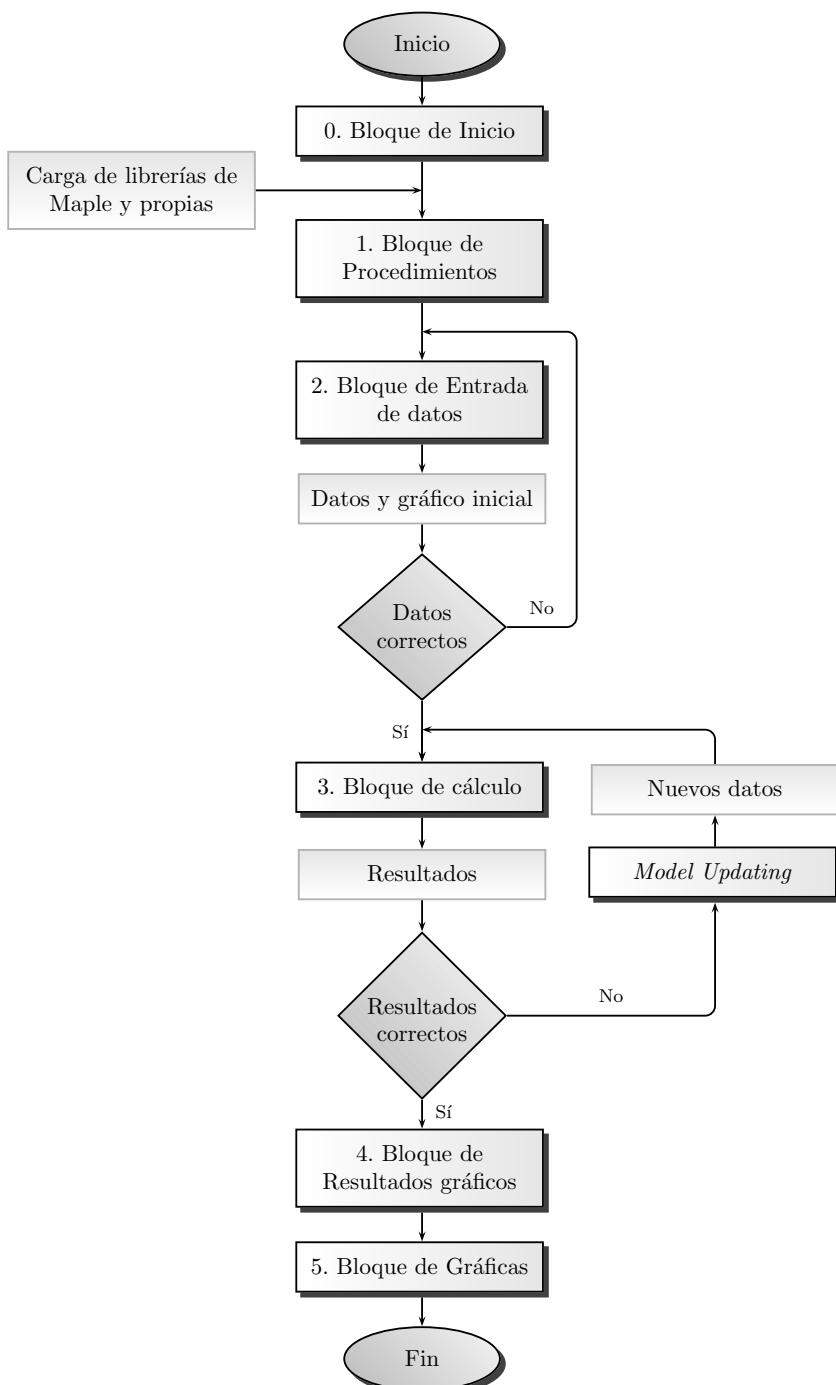


Figura 4.23: Diagrama de flujo del programa (MDRCPRE)

#### 4.5.1.1.1. Rellenar matrices de datos

A partir de los datos que introduce el usuario, estas funciones calculan y rellenan los valores restantes de las matrices de datos iniciales, además de comprobar que los valores introducidos y calculados son correctos.

Consta de las funciones siguientes:

- *Rellenarmt*: rellena la matriz con los datos de los materiales. De entre los tres valores necesarios para definir cada tramo del comportamiento del material elastoplástico con endurecimiento y daño ( $E$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ), el usuario introducirá dos de ellos, siendo calculado el tercero por esta función.
- *Rellenarbr*: rellena la matriz con los datos de las barras de la estructura, calculando las longitudes de cada una y los ángulos entre ellas a partir de las coordenadas de sus nodos, los nodos con rótula y los esfuerzos plásticos.
- *Rellenarsc*: rellena la matriz con los datos de las secciones. Así, a partir del tipo de sección, de sus dimensiones y de los datos del material correspondiente a su barra, se obtienen y almacenan para cada una el área de la sección, su inercia y los valores iniciales de sus esfuerzos plásticos.
- *Rellenarbc*: rellena la matriz con los datos de las cargas, principalmente de cargas distribuidas que comienzan y/o terminan exactamente en un nodo (es decir, el valor de *footdistance* igual a 0 o a 1 respectivamente), para ajustar su extensión hasta una distancia muy pequeña de los nodos. Esta tolerancia puede ser modificada por el usuario y ser tan pequeña como se desee, pero no debe tomar un valor nulo, ya que produce problemas numéricos en la computación.

#### 4.5.1.1.2. Funciones gráficas

En este bloque se encuentran diferentes procedimientos para el tratamiento gráfico del programa, adicionales a los ya mencionados para modelos anteriores:

- *Paleta*: crea las paletas de colores a utilizar por los procedimientos siguientes y las muestra por pantalla a elección del usuario.

- *Diagsigeps*: dibuja, a partir de los datos introducidos por el usuario y completados por la función *Rellenarmt*, los diagramas  $\sigma - \varepsilon$  de todos los materiales de la estructura, en el mismo gráfico.
- *DibujaBarrasSec*: asigna un color a las diferentes secciones de la estructura para dibujar sus barras. Esta función será llamada cuando únicamente se quieran distinguir las diferentes secciones por su color.
- *DibujaBarrasMat*: de forma similar al procedimiento anterior, asignará un color a cada material para dibujar las barras de la estructura.
- *SecRect*, *SecRectH*, *SecCirc*, *SecCircH*, *SecDobleT*: funciones que crean la sección de cada barra a partir de los datos introducidos por el usuario. Dichos dibujos serán utilizados por la función siguiente.
- *DibSecc*: esta función toma los dibujos de las secciones creados en las funciones anteriores y los coloca en el punto medio de su barra correspondiente, girada de acuerdo a su orientación y con un tamaño adecuado y proporcional a sus dimensiones.

#### 4.5.1.1.3. Esfuerzos plásticos

En este bloque se calculan los esfuerzos plásticos  $M_p$ ,  $V_p$  y  $N_p$ .

Para el cálculo del momento flector plástico existe un procedimiento (*MPglobal*) que, dependiendo de la sección de que se trate, llamará a la función correspondiente (*MPrect*, *MPrectH*, *MPcirc*, *MPcircH*, *MPdobleT*) con las variables necesarias. En las funciones particulares para cada tipo de sección se utilizarán las variables de geometría de ésta, junto con las variables necesarias del material ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_f$ ,  $n_s$ ) y el valor del daño. Existe además una variable para determinar si en el resultado de la función debe sustituirse el valor del daño (que será lo habitual) o debe dejarse indicado (necesario para calcular la derivada de los esfuerzos respecto al daño para el cálculo de la matriz elastoplástica).

El cálculo del esfuerzo axil y cortante será cualitativamente similar, aunque con sus expresiones correspondientes.

Las expresiones implementadas en estas funciones son las recogidas en el Apéndice B.

#### 4.5.1.1.4. Matrices de rigidez

En este bloque se recoge el código necesario para la programación de las matrices elástica ( $K^e$ ) y elastoplástica ( $K^{ep}$ ): incluye las matrices de cada elemento, su ordenación y ensamblaje.

Para la obtención de la matriz elastoplástica desarrollada en el Apartado 3.4.3.1 se utilizan las funciones de fluencia en cada extremo de la barra, su derivada respecto a los esfuerzos y su derivada respecto al daño, para la cual se utiliza a su vez la derivada de los esfuerzos plásticos (como se ha indicado en el apartado anterior).

Además, desde esta función se llama a las funciones para el cálculo de los desplazamientos  $u^e$  y  $u^{ep}$ , necesarios también para la matriz elastoplástica.

#### 4.5.1.2. Entrada de datos

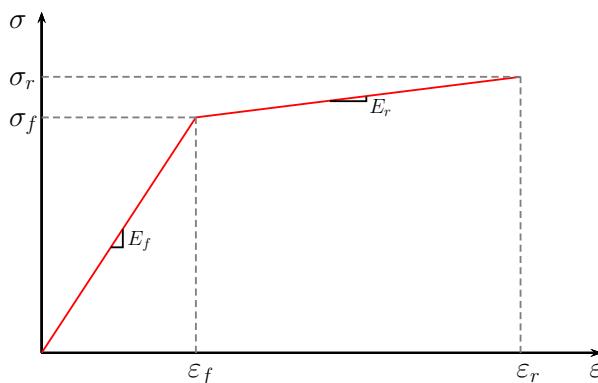
En este bloque se encuentra el código necesario para la adquisición de los datos de la estructura necesarios para su cálculo posterior. Tras su adquisición, se mostrarán por pantalla los datos y la estructura resultante, para comprobar la exactitud y repetir su entrada si se considera necesario.

Las variables y matrices de entrada de datos son similares a las utilizadas en los modelos anteriores (descritas en el Apartado 4.2.1.2), con las diferencias resaltadas a continuación:

- *Matriz de materiales:* constará de siete datos por cada material diferente de la estructura.

$$dmt = \begin{bmatrix} \alpha_1 & E_{f_1} & \varepsilon_{f_1} & \sigma_{f_1} & E_{r_1} & \varepsilon_{r_1} & \sigma_{r_1} \\ \alpha_2 & E_{f_2} & \varepsilon_{f_2} & \sigma_{f_2} & E_{r_2} & \varepsilon_{r_2} & \sigma_{r_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{nmt} & E_{f_{nmt}} & \varepsilon_{f_{nmt}} & \sigma_{f_{nmt}} & E_{r_{nmt}} & \varepsilon_{r_{nmt}} & \sigma_{r_{nmt}} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica,  $E_{i_j}$  el módulo de Young,  $\varepsilon_{i_j}$  la deformación y  $\sigma_{i_j}$  la tensión, siendo  $i = f$  los valores correspondientes al primer tramo (fluencia) y  $i = r$  los correspondientes al segundo tramo (rotura), como se puede observar en la Figura 4.24.



**Figura 4.24:** Variables que definen el material elastoplástico

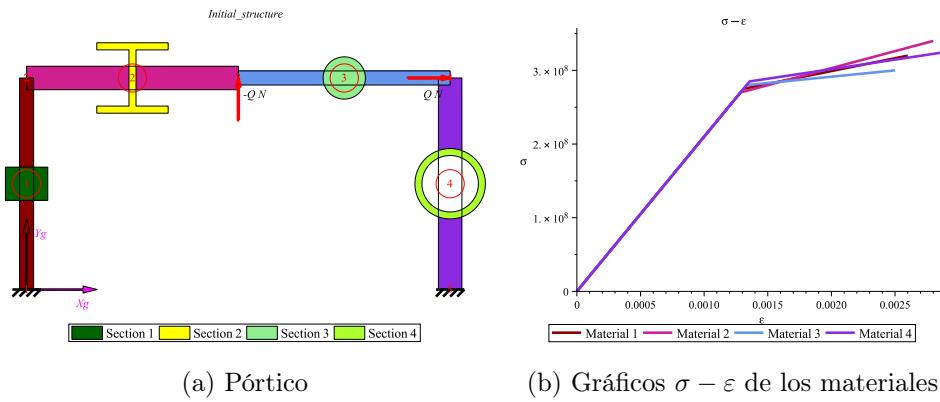
El usuario introducirá el valor de  $\alpha_i$  y 2 de cada 3 datos de los grupos  $\{E_{ij}, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$ . El tercer dato se calculará automáticamente utilizando la relación entre ellos:  $E_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}}$ .

- *Matriz de secciones:* tendrá un número de filas igual al número de secciones consideradas, y los datos guardados en sus columnas dependerán del tipo de sección elegida, ya que se requieren variables diferentes para definir completamente cada tipo de sección. Así, para la sección rectangular maciza (1) únicamente son necesarios el canto  $h$  y el ancho  $b$ ; para la sección rectangular hueca (2) el canto  $h$ , el ancho  $b$  y los espesores de las paredes  $e_h$  y  $e_b$ ; para la sección circular maciza (3) el radio  $r$ ; para la sección circular hueca (4) el radio  $r$  y el espesor  $e$ ; para la sección de doble T (5) el canto  $h$ , el ancho  $b$  y los espesores de las paredes  $e_h$  y  $e_b$ .

En la primera columna se guardará el valor del área de la sección (calculada automáticamente), en la segunda su inercia (calculada automáticamente) y en la séptima el tipo de sección (tomará un valor de 1 a 5 según se ha indicado anteriormente). En las cuatro columnas restantes se guardarán los valores mencionados.

Un ejemplo de una matriz con distintos tipos de secciones (rectangular maciza, doble T, circular maciza y circular hueca respectivamente) se puede observar en la Ecuación 4.10 y en la Figura 4.25, donde además se aprecian cuatro materiales diferentes, uno por cada barra, con sus gráficos  $\sigma - \varepsilon$  correspondientes.

$$\begin{aligned}
 dsc &= \begin{bmatrix} A & I_z & h & b & & 1 \\ A & I_z & h & b & e_h & e_b & 5 \\ A & I_z & r & & & & 3 \\ A & I_z & r & e & & & 4 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} A & I_z & 0,200 & 0,157 & & 1 \\ A & I_z & 0,333 & 0,337 & 0,0333 & 0,0337 & 5 \\ A & I_z & 0,200 & & & & 3 \\ A & I_z & 0,333 & 0,033 & & & 4 \end{bmatrix} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$



(a) Pórtico

(b) Gráficos  $\sigma - \varepsilon$  de los materiales**Figura 4.25:** Secciones y materiales diferentes

- Matriz de elementos:* para cada elemento, además de las variables contempladas en el anterior modelo, se incluye además el valor de los esfuerzos plásticos y del daño en cada uno de los dos extremos del elemento ( $N_{p1}$ ,  $N_{p2}$ ,  $V_{p1}$ ,  $V_{p2}$ ,  $M_{p1}$ ,  $M_{p2}$ ,  $D_1$  y  $D_2$ ), entre otras variables.

Tras la introducción de los datos, se rellenan las matrices con las funciones correspondientes y se muestran los datos por pantalla, tanto numéricos como gráficos, para repetir su introducción si no son correctos.

#### 4.5.1.3. Cálculo

El cálculo se realizará automáticamente después de que el usuario elija determinadas opciones para el mismo:

- Tolerancias:* para considerar que el proceso de *model updating* ha ajustado correctamente los parámetros ( $tolM$ ), para considerar una

disminución suficiente de la matriz de rigidez que marque la formación del mecanismo de colapso ( $tolK$ ) y para considerar que se ha alcanzado la superficie de plastificación  $Z = 0$  ( $tolZ$ ), tanto para la sección que plastifica en cada paso de cálculo, como para aquéllas que plastificaron en pasos anteriores.

- *Opciones de cálculo:* se activarán determinadas variables para tener en cuenta o no en los cálculos el daño de la sección ( $considD$ ), para considerar o no la influencia en la plastificación de cada uno de los esfuerzos ( $considN/considV/considM$ ) o para realizar o no el proceso iterativo ( $iterac$ ).
- *Divisor de Q:* se elige un divisor de la carga que teóricamente haría plastificar la siguiente sección, si se calculara el paso siguiente sin incrementos ni iteraciones, para fijar el incremento de carga inicial del paso. Este valor será modificado automáticamente en los siguientes incrementos para adaptarlo al cálculo, si es necesario.

El diagrama de flujo completo seguido en el proceso de cálculo se puede ver en la Figura 4.26, y una versión simplificada, en la que se observan con más claridad los bucles llevados a cabo en el cálculo se puede ver en la Figura 4.27. El primer paso es diferente al resto, ya que se puede calcular directamente la carga necesaria que hará plastificar la sección porque el comportamiento es elástico, y por ello está programado por separado.

Los diferentes subíndices utilizados tienen el siguiente significado:

- $i$ : todos los nodos de la estructura. Se utiliza al evaluar si en alguno de ellos existe un daño superior o igual al daño crítico.
- $j$ : en cada paso de cálculo, el nodo  $j$  es el que plastifica.
- $k$ : en cada incremento, los nodos  $k$  son aquéllos que plastificaron en pasos anteriores, excluyendo por tanto el nodo  $j$  que ha plastificado en el paso actual.
- $m$ : parámetros utilizados para actualizar el modelo en el proceso de *model updating*. Este proceso se lleva a cabo al final del cálculo y en él se comparan los valores elegidos de las características (desplazamientos y reacciones) calculadas por el programa respecto a los valores tomados como reales (provenientes de experimentos

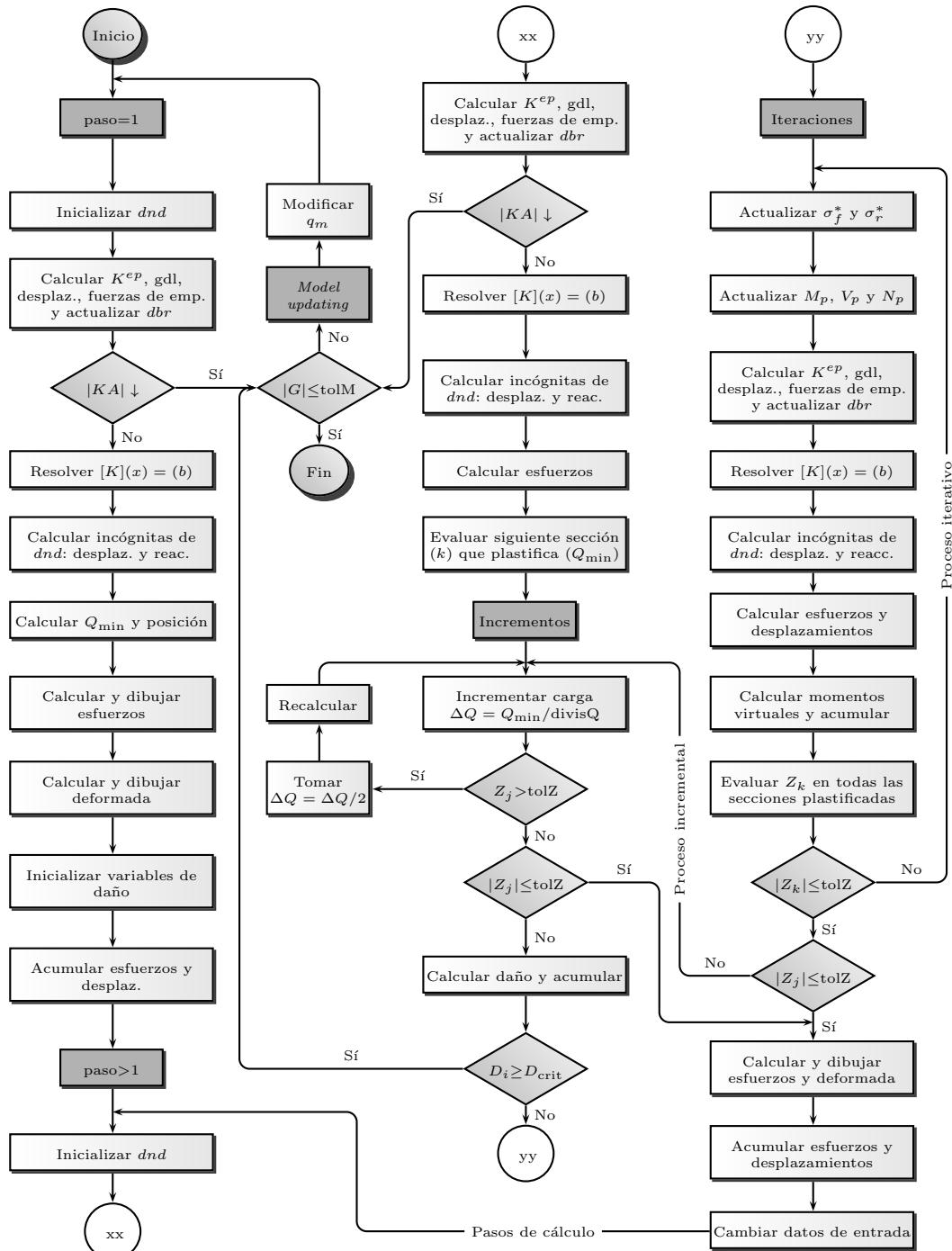
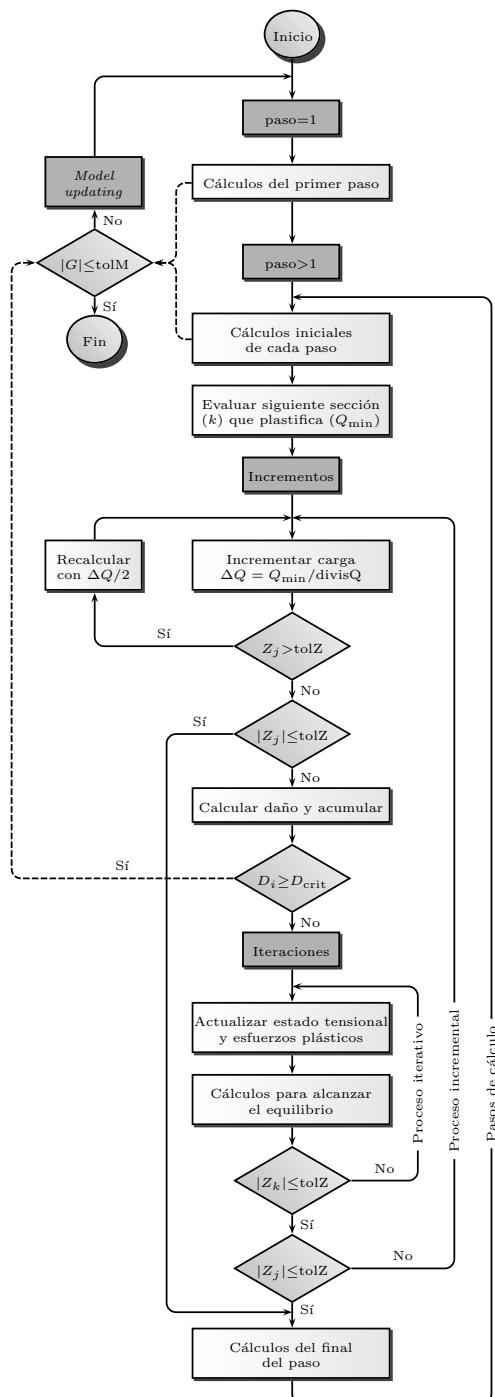


Figura 4.26: Diagrama de flujo del bloque de cálculo

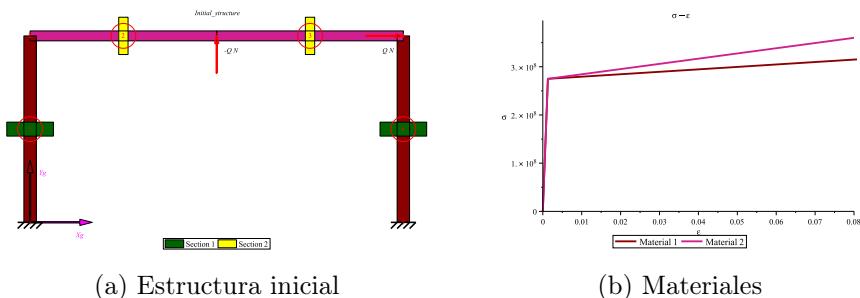


**Figura 4.27:** Diagrama de flujo simplificado del bloque de cálculo

reales o de cálculos con otros programas previamente ajustados a la realidad). En caso de existir una buena correlación entre ambos, evidenciada cuando la función objetivo  $G$  toma un valor inferior a la tolerancia  $tolM$ , el proceso de cálculo finaliza. En caso contrario, se varía alguno o todos los parámetros que se han definido para el proceso de actualizado ( $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_r$  y  $\sigma_f$ ) y se repetirán de nuevo los cálculos.

#### 4.5.2. Salidas

El ejemplo elegido para ilustrar el proceso (Figura 4.28) es cualitativamente similar al elegido para el método MDRCPR (Figura 4.21), aunque de mayores dimensiones e incorporando dos materiales diferentes y dos secciones diferentes, de forma que se modela un pórtico de 4m de alto y 8m de luz, en el que las columnas tienen una sección rectangular maciza mayor que las vigas, pero el material de estas últimas tiene un endurecimiento mayor.



**Figura 4.28:** Estructura inicial

En este ejemplo, se dieron cuatro pasos, correspondientes a la clasificación de los nodos 4, 3, 5 y 2, en ese orden. Al comienzo del quinto paso se evaluó el nuevo valor del determinante de la matriz de rigidez y se comprobó que el decrecimiento relativo era del 100 %, por lo que se consideró que la estructura había alcanzado el mecanismo de colapso. El número de incrementos e iteraciones dados en cada paso se puede ver en la Tabla 4.9.

Se tomó un valor de la tolerancia  $tolZ = 1 \cdot 10^{-3}$  para considerar nula la función de fluencia<sup>2</sup>. Es decir, se considera  $Z = 0$  siempre que

<sup>2</sup>Valor no demasiado pequeño para que la longitud de la Tabla 4.9 sea razonable

**Tabla 4.9:** Desglose de pasos, incrementos e iteraciones

Paso	$ KA $	$Q_{\text{final}} (\cdot 10^6)$	Increm.	Nodo	$\Delta Q$	$Z_{j_{\min}}$	Nº iter.
1	$4,497 \cdot 10^{85}$	4,54453	—	4	—	—	—
2	$1,205 \cdot 10^{85}$	5,44944	1	3	111374	-0,22396	1
			2		111374	-0,19490	2
			3		111374	-0,14765	3
			4		111374	-0,12321	3
			5		111374	-0,09261	4
			6		111374	-0,06297	3
			7		111374	-0,03325	1
			8		111374	-0,00505	2
			9		111374	+0,02547	0
			10		55687,2	+0,01091	0
			11		27843,6	+0,00363	0
			12		13921,8	-0,00005	5
3	$1,081 \cdot 10^{84}$	5,95250	1	5	51595,5	-0,15375	4
			2		51595,5	-0,13575	5
			3		51595,5	-0,11775	5
			4		51595,5	-0,09975	3
			5		51595,5	-0,08174	4
			6		51595,5	-0,06373	3
			7		51595,5	-0,04572	4
			8		51595,5	-0,02771	3
			9		51595,5	-0,00970	4
			10		51595,5	+0,00832	0
			11		25797,8	-0,00167	3
			12		25797,8	+0,00635	0
			13		12898,9	+0,00136	0
			14		6449,4	-0,00114	1
			15		6449,4	-0,00060	1
4	$3,868 \cdot 10^{83}$	6,69250	1	1	81096,0	-0,38347	4
			2		81096,0	-0,33604	4
			3		81096,0	-0,28860	4
			4		81096,0	-0,24116	5
			5		81096,0	-0,19370	3
			6		81096,0	-0,14625	4
			7		81096,0	-0,09879	5
			8		81096,0	-0,05131	4
			9		81096,0	-0,00384	4
			10		81096,0	+0,04364	0
			11		40548,0	+0,01872	0
			12		20274,0	+0,00627	0
			13		10137,0	-0,00003	4
5	$1,045 \cdot 10^{76}$	—	—	—	—	—	—

$|Z| < \text{tolZ}$ , tanto para la sección plastificada en el paso actual ( $Z_j$ ), como las secciones plastificadas en pasos anteriores ( $Z_k$ ):

- Si  $Z_j < -\text{tolZ}$  en la sección plastificada en el paso actual, se seguirá incrementando la carga  $Q$ . Si  $Z_j > \text{tolZ}$ , se considerará que se ha pasado y se repetirá el cálculo con un incremento de carga la mitad y cuando  $|Z_j| < \text{tolZ}$  se considerará que en esa sección se ha alcanzado la superficie de plastificación.
- Si  $|Z_k| > \text{tolZ}$  en alguna sección plastificada anteriormente, se seguirá iterando hasta conseguir un estado de equilibrio para todas las secciones, mediante el actualizado de sus parámetros tras sumar unos momentos virtuales en dichas secciones, obteniendo finalmente un valor  $|Z_k| < \text{tolZ}$ .

En el primer incremento de cada paso se toma un incremento de carga inicial igual al incremento teórico  $Q_{\min}$  que haría plastificar la siguiente sección si no se llevaran a cabo incrementos ni iteraciones, dividido entre una cantidad elegida por el usuario y que en este caso se tomó de valor  $\text{divisQ} = 8,7$ . Así, se comprueba que el número de iteraciones llevado a cabo siempre será al menos 9, puesto que el paso máximo que se toma es  $\Delta Q = Q_{\min}/\text{divisQ}$ , aunque al disminuir dicho incremento para alcanzar el equilibrio se producirán más repeticiones.

En la Tabla 4.9 no se detallan los valores de la función de plastificación en las secciones plastificadas anteriormente en las iteraciones de cada incremento, pero se puede ver que 5 iteraciones son suficientes en todos los casos para conseguir en todas ellas valores menores que la tolerancia  $\text{tolZ}$ . Se muestra en la Tabla 4.10 un ejemplo de los valores que toma la función de plastificación de las secciones plastificadas anteriormente en el paso 4 e incremento 4.

El orden de plastificación de las secciones de la estructura y la carga total, junto con los valores de la función de plastificación para cada paso en todas las secciones plastificadas y el valor de los momentos virtuales añadidos en ellas se pueden ver en la Tabla 4.11. Se observa que para la primera sección plastificada el valor de  $Z$  es tan pequeño ( $-3,48 \cdot 10^{-18}$ ) como lo permite la precisión fijada para el programa (20 dígitos), puesto que se calculó el valor de  $Q$  precisamente para anular dicho valor. Sin embargo, los restantes valores de  $Z$  cumplen únicamente con la condición impuesta de ser menores que la tolerancia  $\text{tolZ}$  fijada.

**Tabla 4.10:** Ejemplo de evolución de los valores de  $Z$  en las iteraciones para secciones plastificadas en pasos anteriores

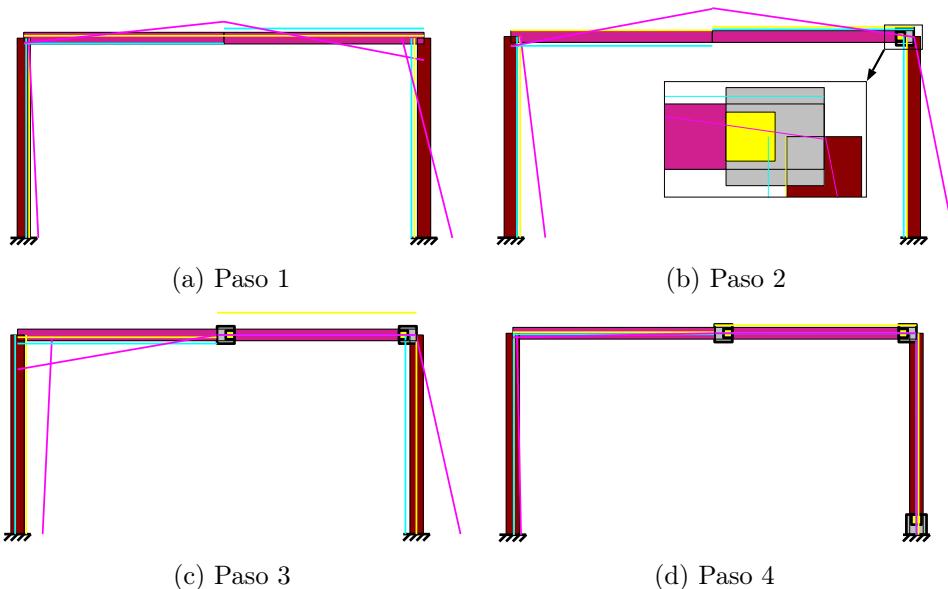
Barra	3	3	4
Extremo	1	2	2
Iteración 1	+0,00190344	+0,00253153	-0,00283034
Iteración 2	-0,00109831	-0,00210685	-0,00356546
Iteración 3	-0,00222029	-0,00423746	+0,00004068
Iteración 4	-0,00448818	-0,00852267	+0,00008183
Iteración 5	+0,00009605	+0,00009635	+0,00016459

**Tabla 4.11:** Orden de plastificación de las secciones y evolución de los valores de  $Z$  y  $M_v$

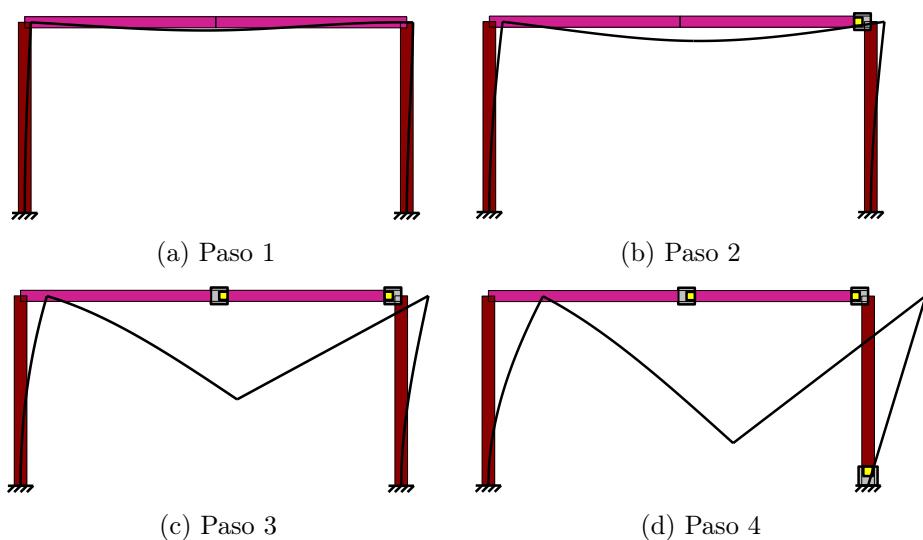
		1°	→	2°	→	3°	→	4°
<b>Nodo</b>		4		3		5		1
<b>Barra</b>		3		3		4		1
<b>Extremo</b>		2		1		2		1
<b><math>Q(\cdot 10^6)</math></b>		4,544		5,449		5,952		6,692
<hr/>								
<b><math>Z</math></b>								
Paso 1		$-3,48 \cdot 10^{-18}$		--		--		--
Paso 2		$-6,33 \cdot 10^{-5}$		$+1,24 \cdot 10^{-4}$		--		--
Paso 3		$-2,18 \cdot 10^{-4}$		$-6,05 \cdot 10^{-4}$		$-6,01 \cdot 10^{-4}$		--
Paso 4		$+6,52 \cdot 10^{-5}$		$-8,99 \cdot 10^{-10}$		$-2,79 \cdot 10^{-5}$		$+3,73 \cdot 10^{-4}$
<hr/>								
<b><math>M_v</math></b>								
Paso 1		0,0		0,0		0,0		0,0
Paso 2		+25330,2		0,0		0,0		0,0
Paso 3		+4114,9		+11252,6		0,0		0,0
Paso 4		-7820,6		-13966,2		-11583,6		0,0

Se presentan también los diagramas de esfuerzos y las deformadas en cada paso de cálculo (Figura 4.29 y Figura 4.30) y acumulados (Figura 4.31 y Figura 4.32). Cabe resaltar la diferencia cualitativa esencial de estos resultados con respecto a los de modelos anteriores en algún aspecto, como en la evolución del momento flector en secciones plastificadas. En el modelo de rótula plástica, una vez se formaba ésta, el momento flector en esa sección permanecía constante e igual al valor del flector plástico correspondiente. Sin embargo, en este modelo que considera sección plastificada, daño y endurecimiento, se observa que dicho valor puede variar, a pesar de haber plastificado su sección correspondiente: en el detalle del

paso 2 de los diagramas de esfuerzos de cada paso se aprecia un valor para el momento flector distinto de cero en la sección del nodo 4 plastificado anteriormente y en el diagrama de esfuerzos acumulado se observa dicha evolución.



**Figura 4.29:** Diagramas de esfuerzos en cada paso



**Figura 4.30:** Deformadas en cada paso

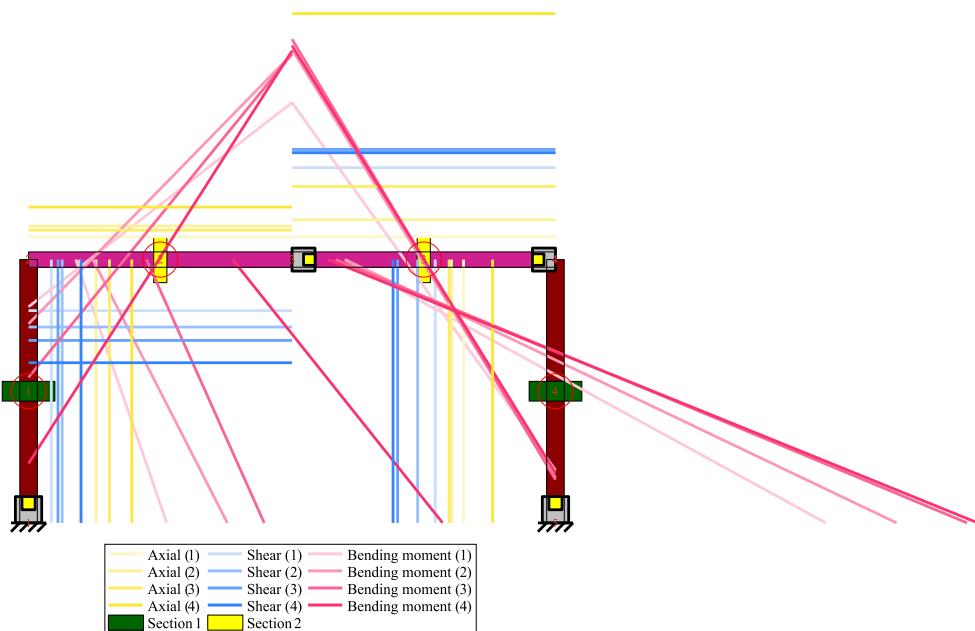


Figura 4.31: Esfuerzos acumulados

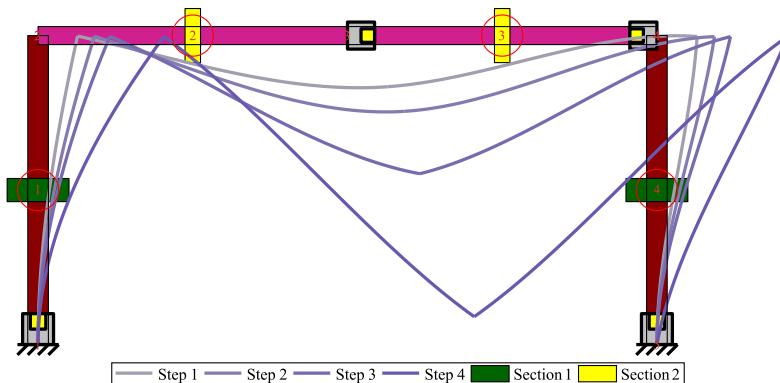
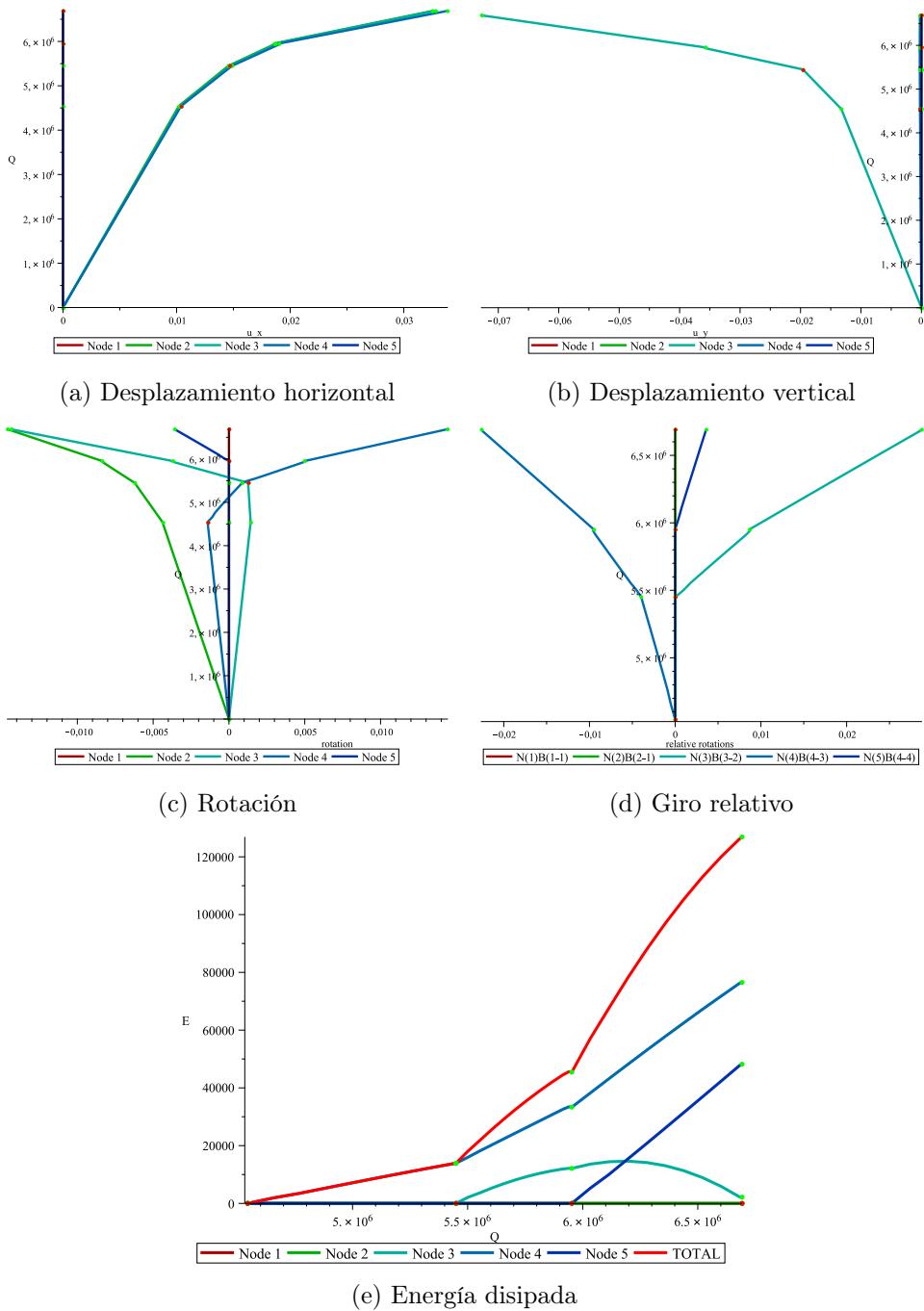
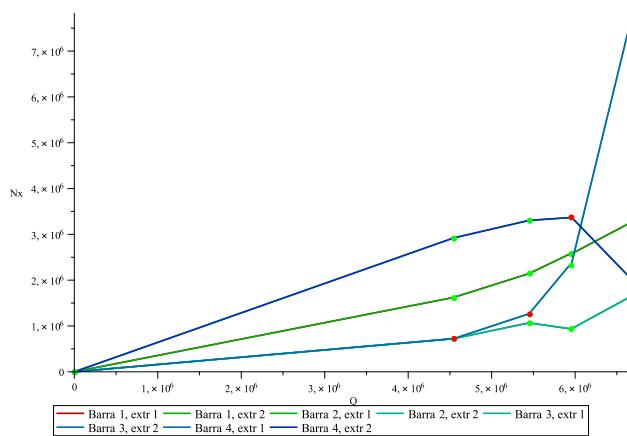


Figura 4.32: Deformadas acumuladas

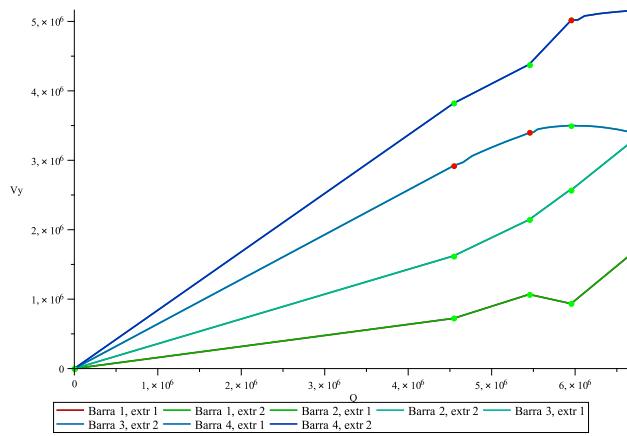
Finalmente, se presentan las gráficas de evolución de los desplazamientos, giros y energía disipada (Figura 4.33) y de los esfuerzos en los nodos (Figura 4.34). Para estos últimos es necesario distinguir la barra a la que pertenecen. Existen dos valores hacia los que tienden los momentos en los nodos según aumenta la carga, correspondientes al momento plástico de cada nodo:  $1,32 \cdot 10^7 N \cdot m$  para las barras 1 y 4, y  $6,74 \cdot 10^6 N \cdot m$  para las barras 2 y 3. Se observa en algunos casos que después de la plastificación, marcada por los puntos rojos, el momento fletor varía.



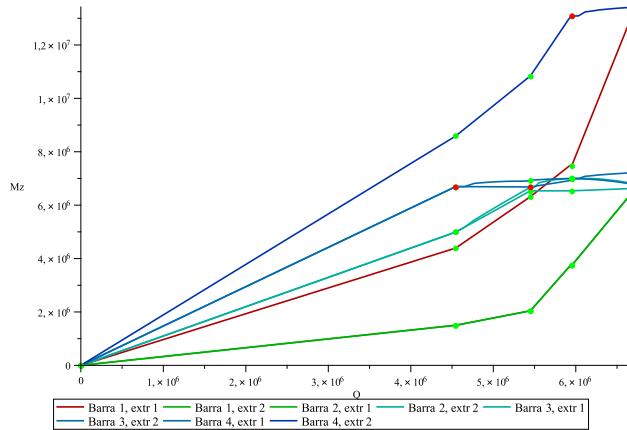
**Figura 4.33:** Evolución de los desplazamientos, giros y energía disipada con la carga



(a) Esfuerzo axil



(b) Esfuerzo cortante



(c) Momento flector

**Figura 4.34:** Evolución de los esfuerzos con la carga

#### 4.5.2.1. Comparación con el método paso a paso

En la Tabla 4.12 se puede ver una comparación entre los resultados obtenidos con el método MDRCPRE de cálculo plástico considerando endurecimiento y reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño de la sección, y el método matricial paso a paso MDRCP. La variación porcentual se realiza respecto al valor de la carga de este último.

**Tabla 4.12:** Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPRE (cargas de plastificación)

Orden de formación	1°	2°	3°	4°	
Nodo	4	3	5	1	
$Q(\cdot 10^6)$	MDRCP	4,57312	5,57928	5,99489	6,66875
	MDRCPRE	4,54453	5,44944	5,95250	6,69250
Variación	-0,63 %	-2,33 %	-0,71 %	0,36 %	

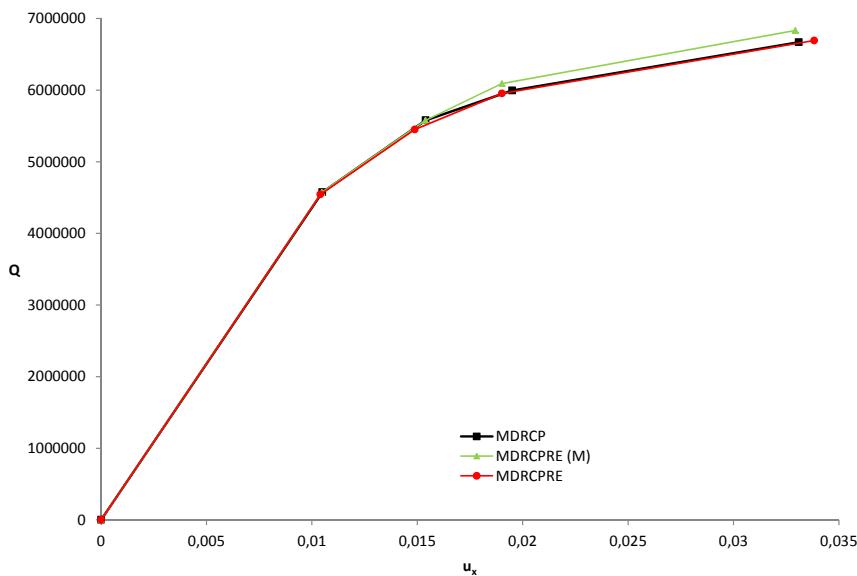
El orden de plastificación de los nodos de la estructura (MDRCPRE) coincide con el orden de formación de las rótulas plásticas (MDRCP). Se puede observar que la carga necesaria para agotar la sección comienza siendo menor en el modelo MDRCPRE, debido al efecto de la combinación de esfuerzos, pero posteriormente el endurecimiento de las secciones agotadas contrarresta dicho efecto y el del daño, obteniéndose una carga final superior. En este caso, la variación de las cargas de plastificación no es demasiado elevada, ya que la influencia de otros esfuerzos adicionales al momento flector y del endurecimiento y daño es limitada, aunque el comportamiento descrito por ambos modelos sí es diferente.

Se comprueba, por tanto, que la consideración del endurecimiento y de la reducción de momentos por combinación de esfuerzos y daño tienen efectos opuestos que cobran diferente importancia según el estado de plastificación de la estructura, llevando a una predicción más acertada del comportamiento del pórtico que cuando se asume plastificación súbita únicamente por momento flector.

En la Figura 4.35 se muestra la gráfica de carga frente a desplazamiento horizontal del nodo 4. Se constata que, considerando endurecimiento y reducción del momento flector por los esfuerzos axil y cortante y el daño, las cargas de plastificación son inicialmente menores que las correspon-

dientes al cálculo de rótulas plásticas, aunque para cargas elevadas el endurecimiento cobra mayor importancia, superando finalmente la carga de colapso. La contribución del endurecimiento se contrarresta en parte con la del daño de la sección y la reducción del momento flector, y por ello no existe gran diferencia entre las gráficas de MDRCP (línea negra) y MDRCPRE (línea roja).

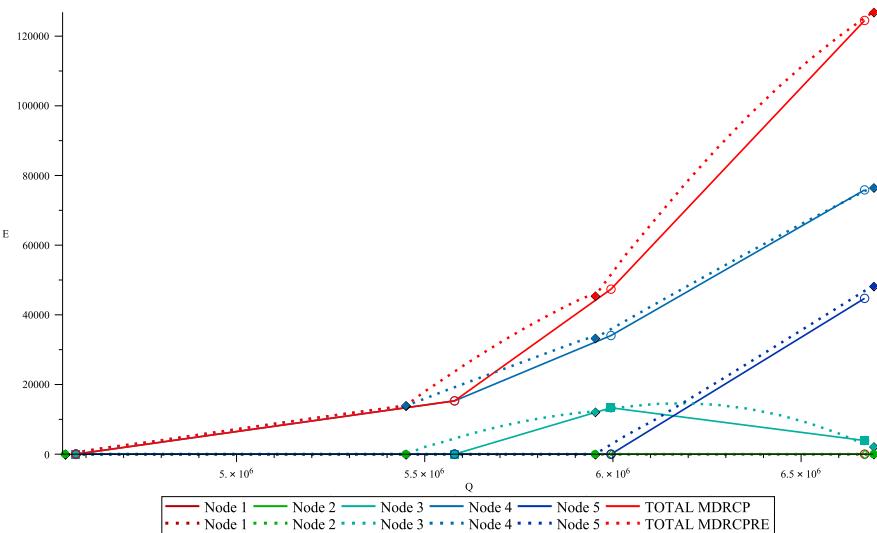
Se muestra además la evolución del modelo MDRCPRE con endurecimiento y daño pero sin reducción del momento flector a causa de los esfuerzos axil y cortante (línea verde). Se obtienen cargas muy similares al modelo MDRCP, que igualmente considera solo momento flector para la formación de rótulas plásticas, para las dos primeras plastificaciones (se contrarrestan los efectos de endurecimiento y daño), aunque posteriormente la mayor contribución del endurecimiento incrementa los valores de los dos últimos valores de las cargas de plastificación.



**Figura 4.35:** Comparación de los modelos MDRCP y MDRCPRE (desplazamiento)

En la Figura 4.36 se muestra la diferencia en la energía disipada en todos los nodos según ambos modelos. Se observa que la consideración únicamente de los puntos de formación de rótulas plásticas por momento flector (modelo MDRCP en línea continua) en lugar de la evolución con pequeños incrementos de carga en los que se equilibra considerando todos los esfuerzos, además de daño y endurecimiento (modelo MDRCPRE en línea punteada), conlleva un comportamiento totalmente diferente del

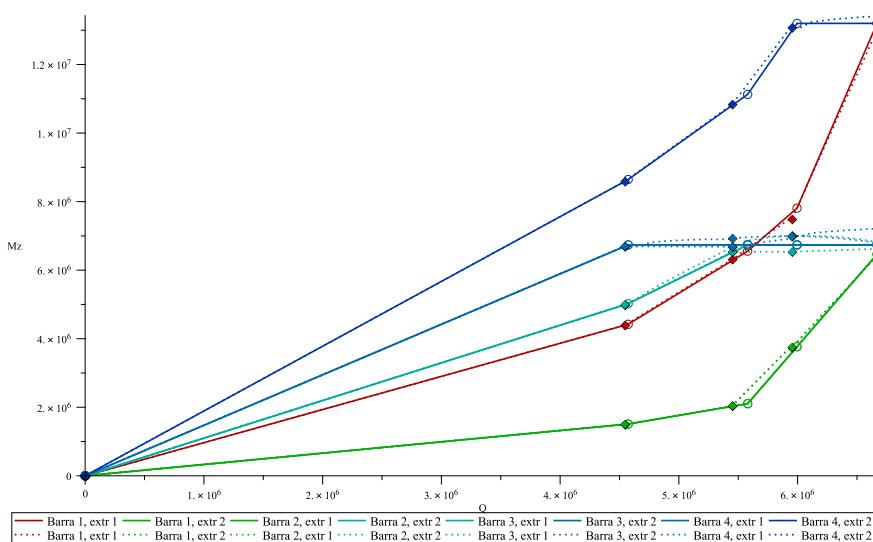
momento plástico desarrollado en las secciones, tomando incluso valores totales diferentes.



**Figura 4.36:** Comparación de los modelos MDRCP y MDRC-PRE (energía disipada)

En la Figura 4.37 se muestra la evolución del momento flector en cada extremo de cada barra. Se observa claramente la diferencia entre el modelo MDRCP (línea continua), en el que, una vez una sección alcanza el momento plástico, permanece constante en ese valor, y el modelo MDRC-PRE (línea punteada), en el que, tras alcanzar su valor correspondiente de momento plástico, éste puede evolucionar.

Finalmente, se compara en la Tabla 4.13 el estado de plastificación de las rótulas plásticas formadas en el modelo MDRCP respecto al estado de plastificación de las secciones agotadas en el modelo MDRC-PRE. En este problema, los valores de los esfuerzos axil y cortante obtenidos en el modelo MDRCP son pequeños (respecto a sus correspondientes valores plásticos), por lo que su contribución no será demasiado importante. Sin embargo, utilizando la función de plastificación definida en la Ecación 2.2 (sin daño), se puede estimar cómo de lejos se encuentra el estado tensional de esas secciones de la superficie de plastificación  $Z$  y compararlo con los valores obtenidos para el modelo MDRC-PRE. Se hace notar que la tolerancia  $\text{tolZ}$  fijada para el cálculo mediante el modelo MDRCPRE es variable, por lo que los valores de  $Z$  pueden hacerse tan pequeños como se desee a costa de aumentar el número de incrementos e iteraciones. Para ilustrar este aspecto, los valores de la Tabla 4.13 se



**Figura 4.37:** Comparación de los modelos MDRCP y MDRC-PRE (momento flector)

obtuvieron resolviendo el problema con  $\text{tolZ} = 1 \cdot 10^{-5}$  (en lugar de  $1 \cdot 10^{-3}$  en la Tabla 4.11). La evolución de dichos resultados se podría recoger como en la Tabla 4.9, aunque obteniendo un número mayor de incrementos (16, 22 y 18 para los pasos 2, 3 y 4, respectivamente) y de iteraciones (generalmente 7 u 8 aunque alcanzando un valor máximo de 11).

**Tabla 4.13:** Comparación de los valores de la función de plastificación

	1°	→	2°	→	3°	→	4°
<b>Nodo</b>	4		3		5		1
<b>Barra</b>	3		3		4		1
<b>Extremo</b>	2		1		2		1
<b>MDRCP</b>	<b>Paso 1</b>	$+1,13 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—	—
	<b>Paso 2</b>	$+2,00 \cdot 10^{-3}$	$+2,00 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—
	<b>Paso 3</b>	$+1,85 \cdot 10^{-3}$	$+1,85 \cdot 10^{-3}$	$+3,35 \cdot 10^{-3}$	—	—	—
	<b>Paso 4</b>	$+3,07 \cdot 10^{-3}$	$+3,07 \cdot 10^{-3}$	$+3,35 \cdot 10^{-3}$	$+2,53 \cdot 10^{-3}$	—	—
<b>MDRC-PRE</b>	<b>Paso 1</b>	$-3,48 \cdot 10^{-18}$	—	—	—	—	—
	<b>Paso 2</b>	$+8,38 \cdot 10^{-7}$	$+1,28 \cdot 10^{-6}$	—	—	—	—
	<b>Paso 3</b>	$-3,15 \cdot 10^{-9}$	$+7,06 \cdot 10^{-7}$	$+7,01 \cdot 10^{-6}$	—	—	—
	<b>Paso 4</b>	$+7,80 \cdot 10^{-14}$	$+7,78 \cdot 10^{-14}$	$+5,19 \cdot 10^{-7}$	$+3,24 \cdot 10^{-6}$	—	—

## 4.6. Comparación

Mientras que la programación numérica del MDR es lineal, calculando a partir de los datos iniciales la solución final, para los otros tres casos la programación tiene bucles de cálculo (pasos), necesarios para determinar el número final de rótulas plásticas o secciones agotadas, desconocido a priori. La programación del MDRCPR y MDRCPRE tienen además procesos incrementales e iterativos en cada paso de cálculo.

El comportamiento del material para los modelos MDR, MDRCP, MDRCPR y MDRCPRE será, respectivamente, elástico (E), elastoplástico (EP), elastoplástico con daño (EPD) y elastoplástico con daño y endurecimiento (EPDE). Además, ajustando las variables de los modelos más complejos se puede conseguir modelar el comportamiento de los más sencillos.

Por otro lado, el único modelo optimizado para poder realizar un ajuste de sus parámetros del material (*model updating*) es del MDRCPRE. Aunque en los modelos MDR y MDRCP también sería posible este proceso, la poca o nula versatilidad de los mismos para ajustar comportamientos elastoplásticos reales convierte este proceso de *model updating* en poco útil en la práctica. En el caso del MDRCPR, la gran cantidad de parámetros del material que influyen en la evolución del daño, muchos de ellos de difícil obtención y medida, hacen poco viable un ajuste de su comportamiento.

Los perfiles admisibles en la programación de todos los modelos serán las cinco secciones bisimétricas comentadas: rectangular maciza, rectangular hueca, circular maciza, circular hueca y doble T.

El daño de la sección se calcula a partir de modelos, basados en la mecánica del daño continuo (CDM) y propuestos por diversos autores (Bonora, Lemaitre, Wang, Chandrankanth) en el modelo MDRCPR o a partir de expresiones de la Resistencia de Materiales (RM) en el modelo MDRCPRE. En los otros dos modelos más simples no se contempla el daño.

El MDR calcula directamente la respuesta de la estructura introducida bajo las cargas propuestas, mientras que los otros modelos incrementan gradualmente la carga para ver la evolución elastoplástica de la estructura, por lo que solo en estos últimos modelos se graficarán diversos parámetros (desplazamientos, giros, energía disipada) frente a la carga o a cualquier otro parámetro.

Existen también diferencias en la consideración de los esfuerzos para el cálculo plástico: mientras que en el MDRCP únicamente se considera la formación de la rótula plástica debido al momento flector, en los modelos MDRCPR y MDRCPRE se considera la acción de los tres esfuerzos para conseguir llegar a la superficie de plastificación.

Alguno de estos programas se encuentra disponible de forma libre en el Centro de Aplicaciones de Maplesoft: MDR [42] y MDRCP [43]. No se ha optado por publicar los programas más sofisticados, por no ser tan robustos para cualquier usuario, al ser necesaria cierta experiencia en la elección de los distintos parámetros de partida y en su modificación ante posibles casos de divergencia.

Un resumen de las principales diferencias entre las características de las programaciones de los diferentes modelos se puede ver en la Tabla 4.14.

**Tabla 4.14:** Comparación de las programaciones numéricas

Modelo	MDR	MDRCP	MDRCPR	MDRCPRE <sup>a</sup>
Programación	Lineal	Bucle	Bucles	Bucles
Material	E	EP	EPD	EPDE
<i>Model updating</i>	✓	✓	✗	✓
Daño	—	—	Modelos CDM	RM
Gráficas evolución	✗	✓	✓	✓
Cálculo plástico	✗	✓	✓	✓
Esfuerzos plastificación	—	M	N, V, M	N, V, M
Maplesoft	✓	✓	✗	✗

<sup>a</sup> Incluye a los modelos MDRCP y MDRCPR por lo que sus características podrían aplicarse también a éstos

# Capítulo 5

## Resultados

### Contenidos

---

5.1.	Introducción . . . . .	122
5.2.	Validación y ajuste de parámetros: viga experimental . . . . .	124
5.2.1.	Descripción del experimento . . . . .	124
5.2.2.	Modelado . . . . .	124
5.2.3.	Ajuste de parámetros . . . . .	126
5.2.4.	Resultados . . . . .	134
5.3.	Ejemplo de aplicación 1: pórtico . . . . .	140
5.3.1.	Modelo de elementos finitos . . . . .	140
5.3.2.	Modelo MDRCPRE . . . . .	144
5.4.	Ejemplo de aplicación 2: viga apoyada - empotrada . . . . .	149
5.4.1.	Resolución analítica . . . . .	149
5.4.2.	Resolución numérica . . . . .	155
5.4.3.	Comparación de modelos . . . . .	160

---

## 5.1. Introducción

En este capítulo se presentan algunos de los resultados obtenidos con los modelos descritos anteriormente.

En los Ejemplos de aplicación 1 y 2 (Apartados 5.4 y 5.3 respectivamente) se tomarán como resultados reales los datos obtenidos mediante el modelado con Metafor y procesados mediante rutinas en Matlab. A partir de estos datos, se podrán actualizar los modelos de Maple mediante las técnicas mencionadas de *Model Updating*. Para poder asumir esta exactitud en los resultados de la modelización con Metafor, se llevará a cabo inicialmente (Apartado 5.2) una validación y un ajuste de los parámetros del material del modelo Metafor para reproducir el comportamiento real de una viga de acero.

De esta forma, el proceso llevado a cabo en este capítulo se puede ver en la Figura 5.1, donde se aprecia que en realidad se hace un primer proceso de actualizado para ajustar los parámetros  $\varepsilon_D^{pl}$ ,  $S$ ,  $s$  y  $D_0$  de Metafor y después se hace un actualizado de los parámetros  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_r$  y  $\sigma_f$  de Maple, ya que son las variables con mayor incertidumbre e influencia en los modelos con material elastoplástico con daño y endurecimiento (Apartado 3.4.2). Se minimizará la función objetivo formada por la diferencia entre sus valores hasta que se obtenga una buena correlación. En ambos procesos, de entre las características obtenidas para los modelos y para el experimento se seleccionará alguno de los desplazamientos o reacciones en los nodos de la estructura para comprobar la correlación.

Se hace notar que, respecto a las clasificaciones de métodos de *model updating* mostradas en los Apartados 1 y 2.3.2, en este caso se utilizará un *método local* (se estiman parámetros físicos y se preservan las propiedades matemáticas del modelo inicial) y *de sensibilidad* (planteado como un problema de optimización entre los datos analíticos y los experimentales), respectivamente.

Uno de los valores añadidos por la modelización en Maple frente a la modelización en Metafor es la posibilidad de disponer de expresiones analíticas continuas para la descripción del comportamiento (desplazamientos, esfuerzos, etc.) en lugar de los valores puntuales en cada nodo ofrecido por Metafor y, en general, por cualquier otro programa de cálculo mediante elementos finitos, además de disponer del historial de formación de rótulas, el control sobre las propiedades del material con únicamente cuatro parámetros, etc.

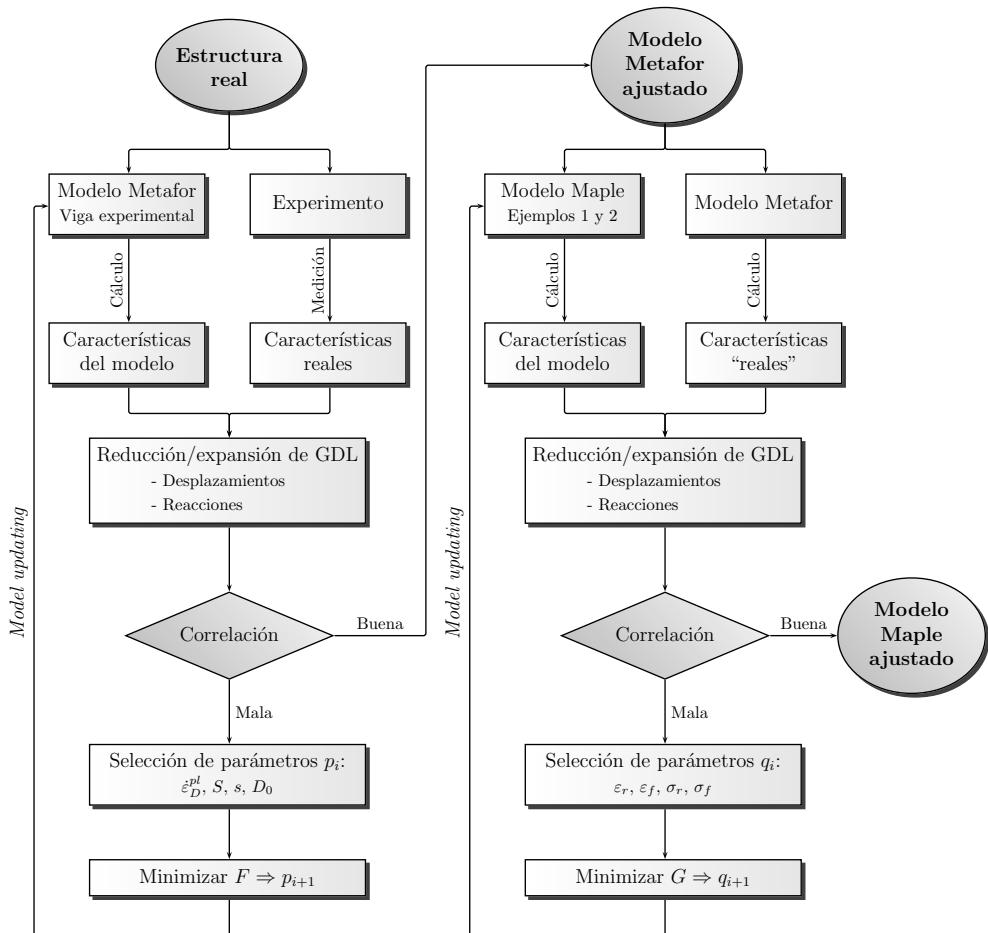


Figura 5.1: Proceso seguido de *model updating*

## 5.2. Validación y ajuste de parámetros: viga experimental

### 5.2.1. Descripción del experimento

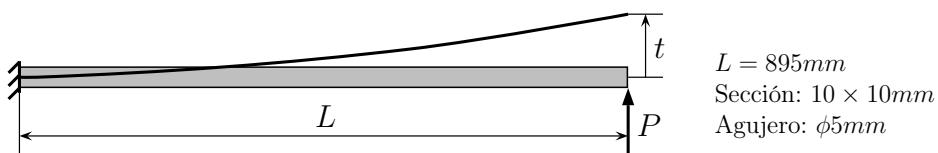
Se realiza un experimento para ajustar los parámetros de los diferentes modelos y así caracterizar el material de acuerdo a valores realistas.

El experimento consiste en ensayar una barra de acero de sección cuadrada maciza, empotrada en un extremo y libre en el otro, donde se aplica un desplazamiento creciente (ver Figura 5.2). El desplazamiento  $t$  se mide con un LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*) y la carga  $P$  con una célula de carga calibrada con la máquina Instron. En el extremo empotrado se practica un agujero de 5mm de diámetro para asegurar que el daño producido esté concentrado en esta sección.



(a) Disposición

(b) Agujero



(c) Modelado

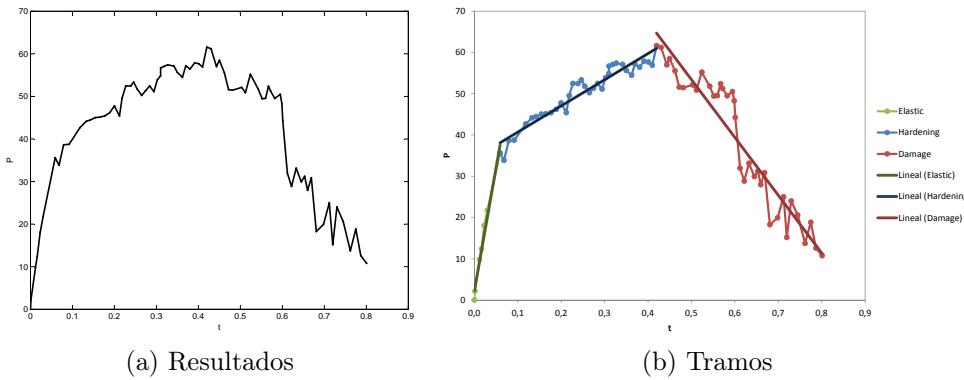
(d) Datos

**Figura 5.2:** Experimento

Los resultados se pueden ver en la Figura 5.3a. Se puede apreciar un primer tramo elástico, un tramo plástico con endurecimiento, con una pequeña zona de fluencia entre estos dos, y una rotura final (Figura 5.3b).

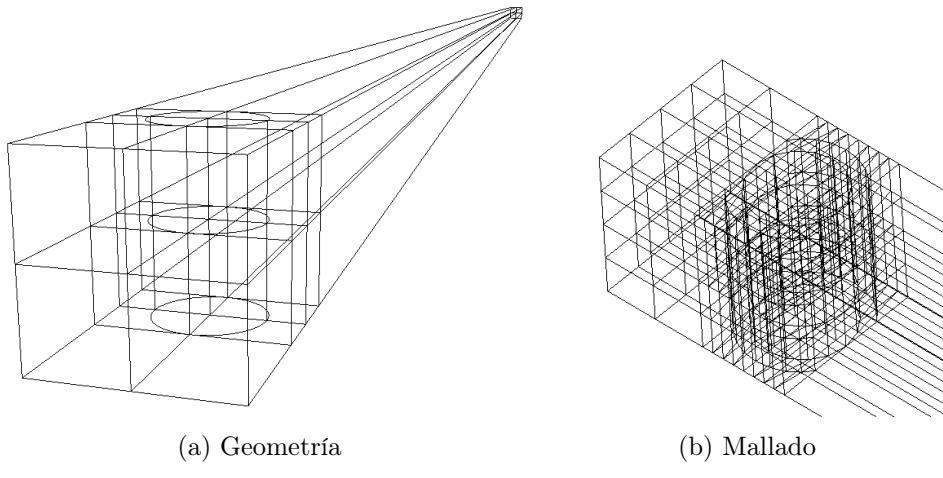
### 5.2.2. Modelado

Mediante el programa Metafor, se modela la viga en 3D (ver Figura 5.4a) con las dimensiones reales y se malla con 320 elementos, con un



**Figura 5.3:** Resultados del experimento

mallado fino alrededor del agujero para asegurar su correcto comportamiento bajo carga (Figura 5.4b).



**Figura 5.4:** Mallado del modelo de viga experimental

Para modelar el acero se elige un material con comportamiento elasto-visco-plástico y con daño, eligiendo, de entre las opciones disponibles para la evolución del daño, la fórmula de Lemaître y Chaboche [39]:

$$\Delta D = \left( \frac{\bar{\sigma}_{eq}^2 R_\nu}{2ES(1-D)^2} \right)^s \dot{\varepsilon}^{pl} \quad \text{si} \quad \varepsilon^{pl} > \varepsilon_D^{pl} \quad (5.1)$$

donde  $R_\nu$  es la función de triaxialidad:

$$R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}_{eq}}\right)^2 \quad (5.2)$$

$E$  es el módulo de Young del material,  $\nu$  el coeficiente del material,  $\sigma_H$  la tensión hidrostática,  $\bar{\sigma}_{eq}$  la tensión equivalente de Von Mises,  $\dot{\varepsilon}^{pl}$  la tasa de deformación plástica,  $\varepsilon^{pl}$  la deformación plástica actual y  $\varepsilon_D^{pl}$  la deformación plástica umbral. El coeficiente  $S$  y el exponente  $s$  son los parámetros a obtener para ajustar el modelo de elementos finitos a los resultados del experimento.

Se dispone de al menos una referencia, [6] en la bibliografía, para los valores de los parámetros de un acero dúctil mencionados (ver Tabla 5.1). Sin embargo, se llevará a cabo un ajuste de los mismos a partir de los resultados experimentales para caracterizar completa e independiente-mente el acero empleado.

**Tabla 5.1:** Valores de referencia de los parámetros de evolución de daño [6]

$E$	$\nu$	$\varepsilon_D^{pl}$	$S$	$s$
$2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	0,3	0,06	$1,0 \cdot 10^7 \text{ Pa}$	0,43

La variación de la evolución del daño respecto a los parámetros que se ajustarán en el proceso posterior de *Model Updating* se puede ver en la Figura 5.5, considerando los valores adicionales siguientes para el resto de parámetros:  $\bar{\sigma}_{eq} = 275 \text{ MPa}$ ,  $R_\nu = 2,17$ . Se puede comprobar que valores crecientes de  $\varepsilon^{pl}$  y del coeficiente  $s$  proporcionan valores mayores del daño y de su incremento, ocurriendo lo contrario con el coeficiente  $S$ .

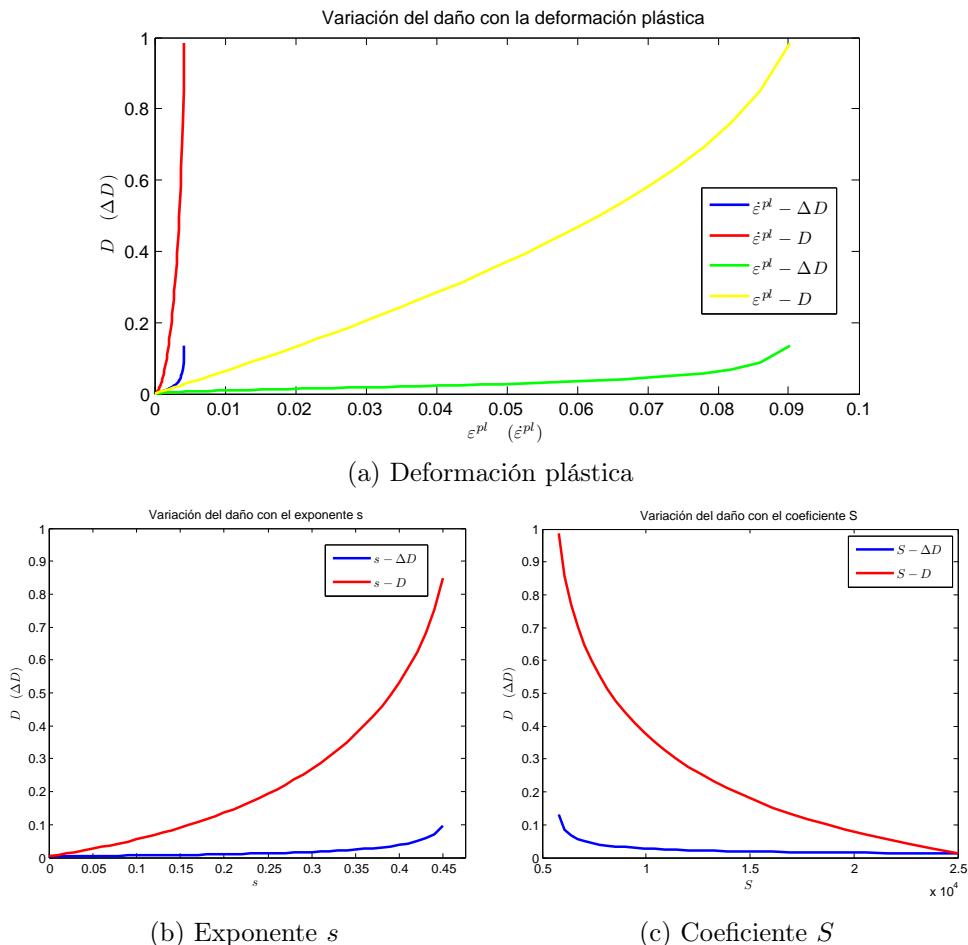
### 5.2.3. Ajuste de parámetros

#### 5.2.3.1. *Model updating 1* (Metafor)

En este apartado se llevará a cabo el ajuste del material, según la primera parte del diagrama indicado en la Figura 5.1, de forma que se disponga de una buena correlación entre los parámetros reales y los del modelo Metafor.

Se toma para el acero los valores del módulo de Young y coeficiente de Poisson habituales ( $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  y  $\nu = 0,3$ ). El endurecimiento se toma como  $h = 0,05 \cdot E = 1,05 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$  después de ajustar la pendiente de la zona plástica.

Se llevan a cabo distintas simulaciones, variando de forma gradual los

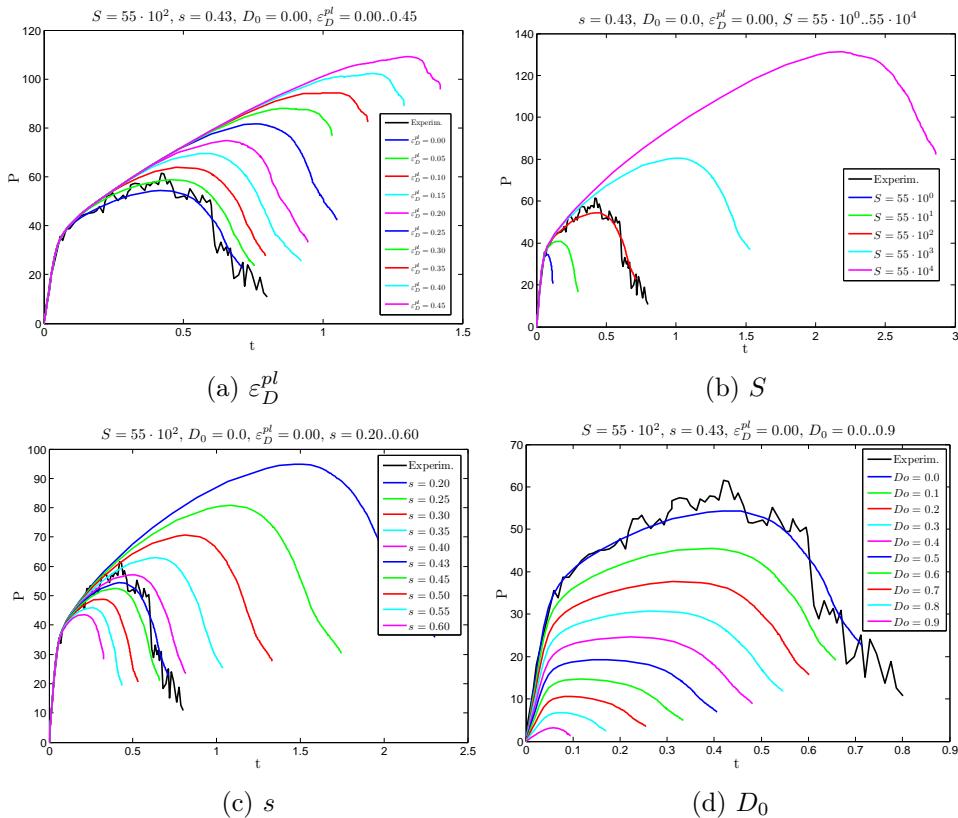


**Figura 5.5:** Variación de la evolución del daño respecto a los parámetros

parámetros  $\varepsilon_D^{pl}$ ,  $S$  y  $s$  mencionados anteriormente, y además  $D_0$ , el daño inicial. En la Figura 5.6 se muestran los resultados variando cada uno de estos cuatro parámetros, tomando como referencia para los parámetros que no varían los valores finalmente adoptados como correctos.

En la Figura 5.7 se puede ver la variación de todos los parámetros y su influencia relativa en el resultado final:

- Valores crecientes de  $\varepsilon_D^{pl}$ , empezando desde 0,00 y equiespaciados a 0,05 hasta 0,45, mantienen igual la zona elástica y la elastoplástica. Sin embargo, la pendiente de la zona plástica es cada vez mayor, al igual que el punto de rotura. Se comprueba que el valor que mejor

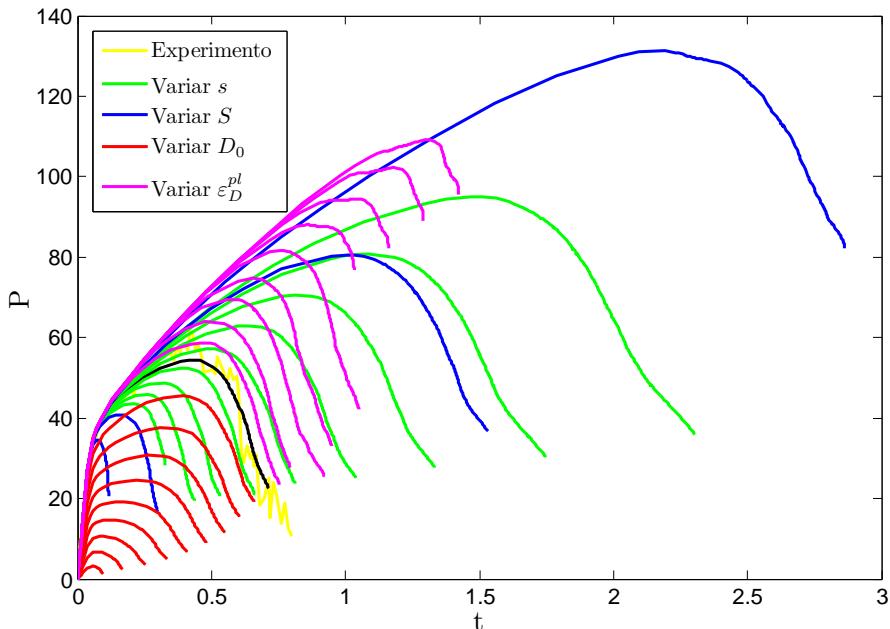


**Figura 5.6:** Influencia de los parámetros (Metafor)

ajusta el experimento es una deformación umbral de 0,00.

- Valores crecientes de  $S$ , empezando en 1 y equiespaciados logarítmicamente hasta  $55 \cdot 10^4$ , mantienen igual la zona elástica, aunque tanto la pendiente de la zona plástica como la zona elastoplástica y de rotura son cada vez mayores. Se comprueba que el valor que mejor ajusta el experimento es un coeficiente  $S = 55 \cdot 10^2$ .
- Valores crecientes de  $s$ , empezando desde 0,20 y equiespaciados a 0,05 hasta 0,60, mantienen igual la zona elástica, al igual que los dos casos anteriores, porque solo influyen en la ley de evolución del daño, y también la zona elastoplástica. Sin embargo, la pendiente de la zona plástica y el punto de rotura son cada vez mayores. Se comprueba que el valor que mejor ajusta el experimento es un exponente  $s = 0,43$ .
- Valores crecientes de  $D_0$ , empezando desde 0,00 equiespaciados a

0,10 hasta 0,90, dan valores menores tanto de la pendiente de la zona elástica como de la plástica, así como de las zonas elastoplásticas y de rotura. Se comprueba que el valor que mejor ajusta el experimento es un daño inicial de 0,00.

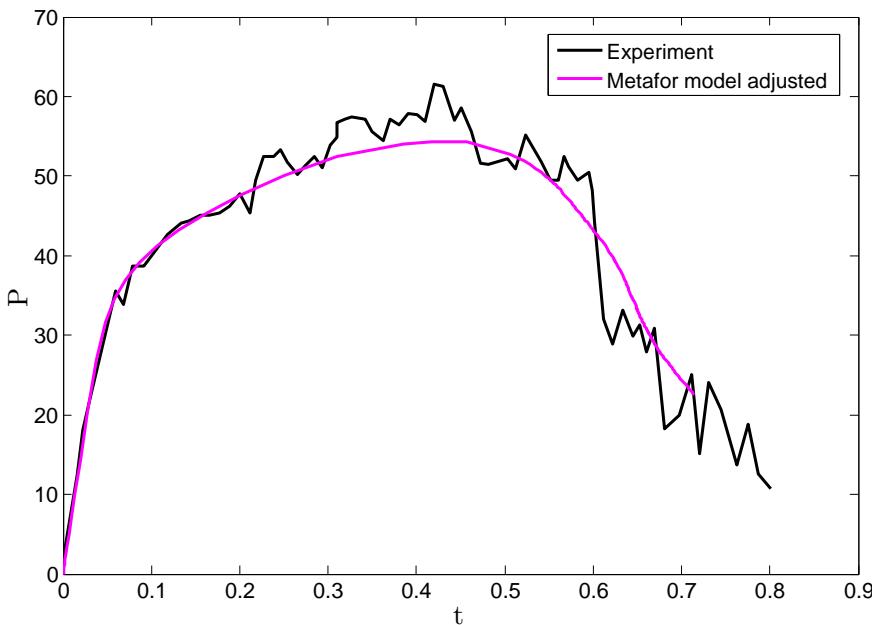


**Figura 5.7:** Influencia de todos los parámetros (Metafor)

Los valores finalmente tomados como los que mejor ajustan a la curva del experimento se pueden ver en la Tabla 5.2. Comparando con los valores mostrados en la Tabla 5.1, llama la atención la diferencia obtenida en el coeficiente  $S$  ( $1 \cdot 10^7$  en [6] frente a  $5,5 \cdot 10^3$ ), además de las menores diferencias en  $E$  ( $2,0 \cdot 10^{11}$  frente a  $2,1 \cdot 10^{11}$ ) y en  $\varepsilon_D^{pl}$  (0,06 frente a 0,00). Se puede observar dicho ajuste en la Figura 5.8.

**Tabla 5.2:** Valores de los parámetros ajustados

$E$	$\nu$	$h$	$\varepsilon_D^{pl}$	$S$	$s$	$D_0$
$2,1 \cdot 10^{11}$ Pa	0,3	$0,05E$	0,00	$5,5 \cdot 10^3$ Pa	0,43	0,0



**Figura 5.8:** Modelo Metafor ajustado

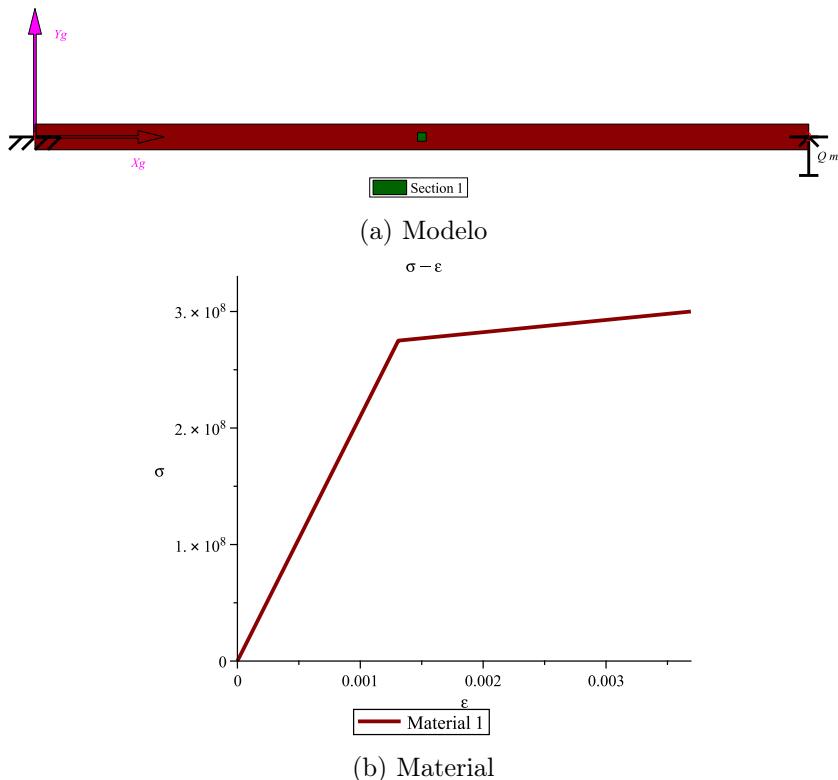
### 5.2.3.2. *Model updating 2 (Maple)*

En este apartado se llevará a cabo el ajuste del material según la segunda parte del diagrama indicado en la Figura 5.1, de forma que se disponga de una buena correlación entre los parámetros del modelo Metafor previamente ajustados en el apartado anterior y los parámetros del modelo MDRCPRE.

La estructura inicial se puede ver en la Figura 5.9a. Al tratarse de un modelo de barras, resulta evidente que no puede modelarse el agujero de la sección empotrada, aunque sí debe ser considerado para el cálculo. Para ello se utilizará la sección reducida, pasando a tomar un valor de  $40\text{mm}^2$ .

El material inicial utilizado en el modelo se puede ver en la Figura 5.9b. Estos valores de las cuatro constantes que definen la ley de comportamiento variarán en el proceso de actualizado implementado para lograr que la solución ofrecida por este método aproxime, de forma suficientemente exacta, los resultados del modelo de elementos finitos, en un proceso iterativo de actualización de los parámetros.

Las características que se tratarán de aproximar mediante el proceso



**Figura 5.9:** Modelo Maple de la viga experimental

de actualizado serán los puntos del diagrama  $M_{z_1} - u_{y_2}$ , siendo  $M_{z_2}$  el momento flector en el empotramiento y  $u_{y_2}$  el desplazamiento vertical del extremo opuesto. Dicho valor de desplazamiento vendrá marcado por la evolución del problema, ya que es el valor que varía en cada incremento, por lo que la función objetivo a minimizar dependerá de los valores del esfuerzo  $M_{z_1}$ . Teniendo en cuenta la Ecuación 2.4 y la Figura 5.1, será:

$$G = \|R(\mathbf{q})\|^2 = \sum_{i=1}^3 \left[ M_{z_{\text{Met}_i}} - M_{z_i}(\sigma_f, \sigma_r, \varepsilon_f, \varepsilon_r) \right]^2 \quad (5.3)$$

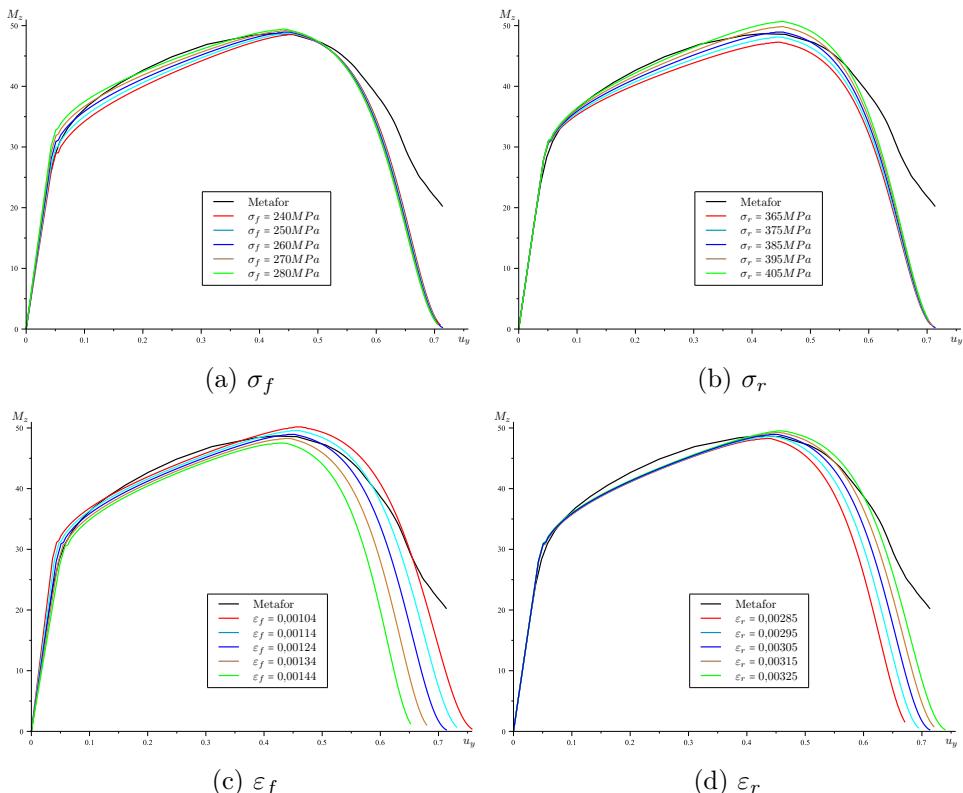
donde  $M_{z_{\text{Met}_i}}$  son los valores del momento flector obtenidos mediante el modelo Metafor y  $M_{z_i}$  los valores obtenidos con el modelo Maple (dependientes de los cuatro parámetros de actualizado), en los tres puntos del diagrama considerados.

A modo ilustrativo, en las Figuras 5.10 y 5.11 se muestra la influencia relativa de la variación de cada uno de los cuatro parámetros (manteniendo

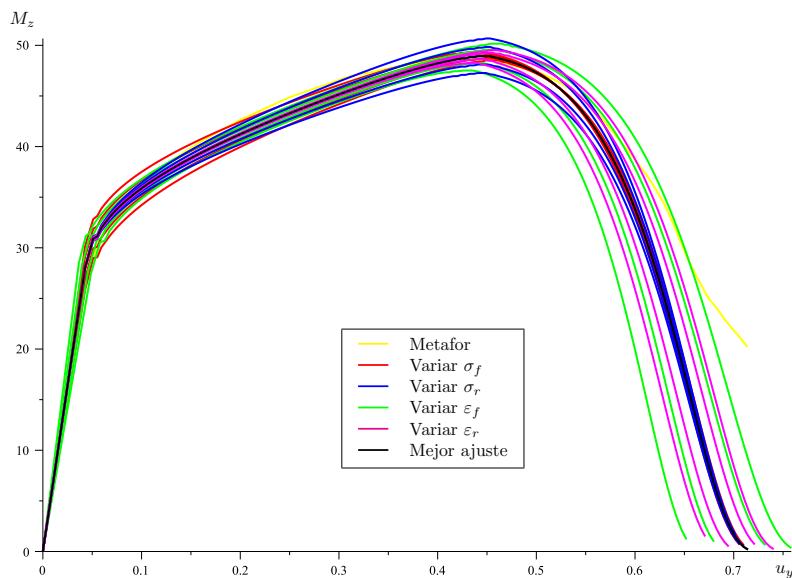
do los otros tres constantes con los valores finalmente adoptados como correctos) en la curva  $M_z - u_y$ , observándose el siguiente comportamiento:

- Valores crecientes de  $\sigma_f$ , empezando desde  $240\text{ MPa}$  y equiespaciados a  $10\text{ MPa}$  hasta  $280\text{ MPa}$ , hacen crecer la pendiente del tramo elástico y del momento flector del punto de fluencia. No varían apreciablemente el punto de rotura (máximo de  $M_z$ ) ni la zona dañada final. Se comprueba que el valor de tensión de fluencia que mejor ajusta el modelo Metafor es de  $260\text{ MPa}$ .
- Valores crecientes de  $\sigma_r$ , empezando desde  $365\text{ MPa}$  y equiespaciados a  $10\text{ MPa}$  hasta  $405\text{ MPa}$ , hacen crecer la pendiente del tramo elastoplástico y del momento flector del punto de rotura. No varían apreciablemente ni la pendiente del tramo elástico ni la zona dañada final. Se comprueba que el valor de tensión de rotura que mejor ajusta el modelo Metafor es de  $510\text{ MPa}$ .
- Valores crecientes de  $\varepsilon_f$ , empezando desde  $0,00104$  y equiespaciados a  $0,0001$  hasta  $0,00144$ , hacen disminuir la pendiente del tramo elástico y crecer el desplazamiento del punto de fluencia. No varían apreciablemente el tramo elastoplástico pero sí hacen disminuir los valores de momento flector y desplazamiento del punto de rotura y de la zona dañada final. Se comprueba que el valor de deformación de fluencia que mejor ajusta el modelo Metafor es de  $0,00124$ .
- Valores crecientes de  $\varepsilon_r$ , empezando desde  $0,00285$  y equiespaciados a  $0,0001$  hasta  $0,00325$ , hacen aumentar el momento flector, el desplazamiento del punto de rotura y el desplazamiento de la zona dañada final. Se comprueba que el valor de deformación de rotura que mejor ajusta el modelo Metafor es de  $0,00300$ .

Tras el proceso de actualizado de los parámetros del material, se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.3, dando lugar a la ley de material mostrada en la Figura 5.12, comparándose en ambos casos con los valores originales. Las restricciones impuestas sobre los nuevos valores de las constantes del material (parámetros  $q_i$ ) fueron las obvias:  $\sigma_r \geq \sigma_f$  y  $\varepsilon_r \geq \varepsilon_f$ .



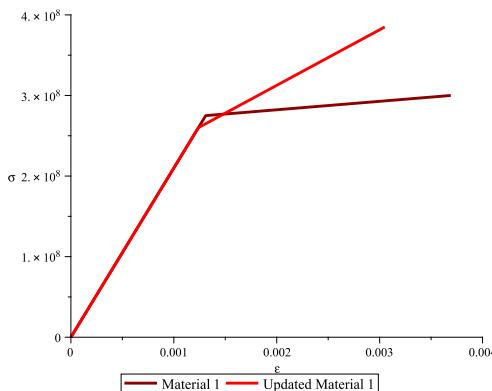
**Figura 5.10:** Influencia de los parámetros (Maple)



**Figura 5.11:** Influencia de todos los parámetros (Maple)

**Tabla 5.3:** Parámetros del material actualizados

	$\varepsilon \cdot 10^{-3}$	$\sigma [MPa]$	$E [GPa]$			
	$\varepsilon_f$	$\varepsilon_r$	$\sigma_f$	$\sigma_r$	$E_f$	$E_r$
Inicial	1,310	3,691	275,0	300,0	210,0	10,5
Actualizado	1,238	3,050	260,0	385,0	210,0	68,9

**Figura 5.12:** Ley del material actualizada

## 5.2.4. Resultados

### 5.2.4.1. Experimento

Los resultados del experimento se pueden observar en la Figura 5.13, donde se puede apreciar el daño en la sección del empotramiento y el desplazamiento final en la sección opuesta.



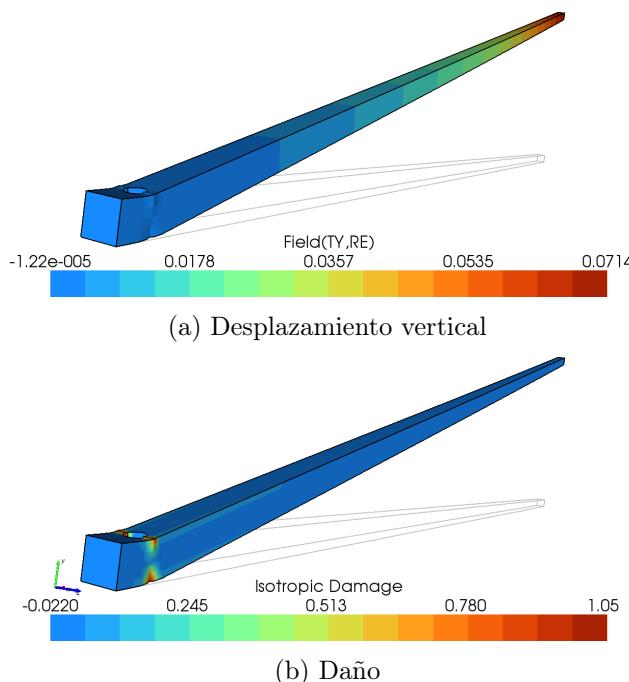
(a) Deformada

(b) Empotramiento

**Figura 5.13:** Resultados reales de la viga experimental

### 5.2.4.2. Metafor

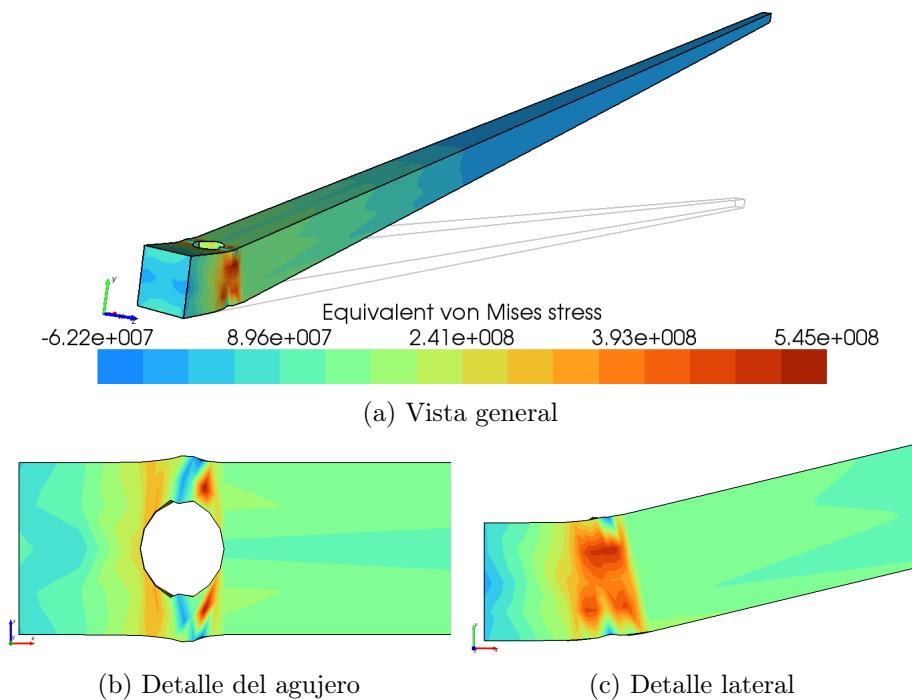
Los resultados obtenidos mediante el programa Metafor, utilizando el valor ajustado de los parámetros, se pueden observar en la Figura 5.14 (desplazamiento vertical y daño) y Figura 5.15 (tensiones de Von Mises), con un valor final del desplazamiento de  $0,7136m$ . Se aprecia incluso un ensanchamiento en la zona del empotramiento (Figura 5.15b) similar al observado en el experimento.



**Figura 5.14:** Resultados con Metafor del modelo de viga experimental (desplazamientos y daño)

Para obtener un valor de daño de la sección a partir de los valores de daño puntuales ofrecidos por el MEF se utiliza el procedimiento descrito en la Apartado 2.4 para cada instante de tiempo. Tomando un tramo de zona afectada de longitud  $l = 5mm$ , simétrico respecto al centro del agujero, las reducciones a efectuar son las siguientes:

1. Tramo a sección (Figura 5.16a): se reduce el tramo de  $l = 5mm$  a la sección, formada en este caso por dos zonas rectangulares adyacentes al agujero, utilizando unos coeficientes de forma simétricos y de valores  $C_o = C_f = 0,5$  y  $C_m = 1$ , de manera que se otorgue

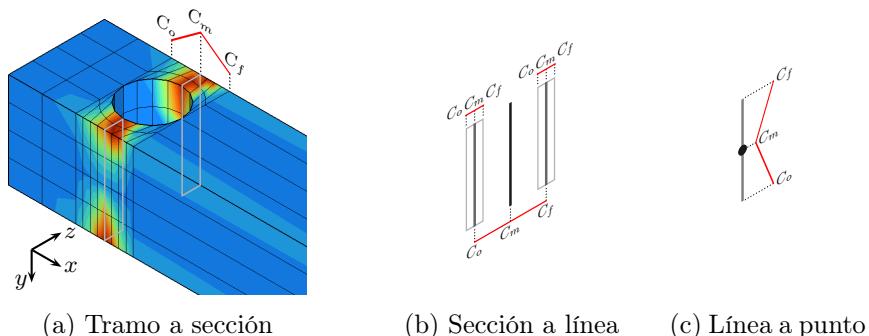


**Figura 5.15:** Resultados con Metafor del modelo de viga experimental (tensiones)

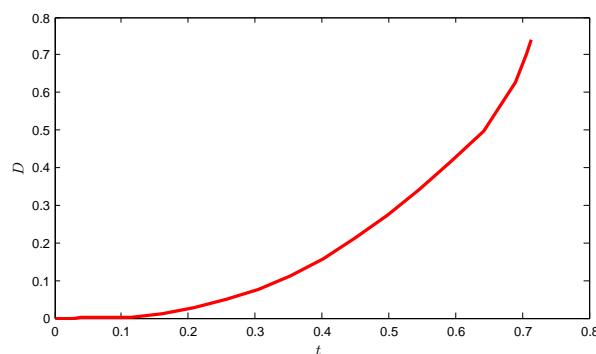
una importancia mayor a las zonas centrales.

2. Sección a línea (Figura 5.16b): se reduce cada una de las zonas rectangulares a una línea y posteriormente ambas líneas a una central, utilizando en ambos casos coeficientes de forma iguales ( $C_o = C_m = C_f = 1$ ).
3. Línea a punto (Figura 5.16c): se reduce la línea central a un único punto, utilizando en este caso coeficientes de forma mayores en los extremos ( $C_o = C_f = 1$  y  $C_m = 0,5$ ) y obteniendo finalmente un valor único para el daño en cada instante de tiempo.

La evolución de dicho valor se muestra en la Figura 5.17, donde puede observarse que al reducir los resultados puntuales del MEF, otorgando diferente importancia a distintas zonas con los coeficientes de forma, el valor final obtenido para el daño puede considerarse el crítico para esta sección, siendo  $D_{cr} = 0,74$ .



**Figura 5.16:** Reducción de los valores de daño a un valor único para la sección (Metafor)

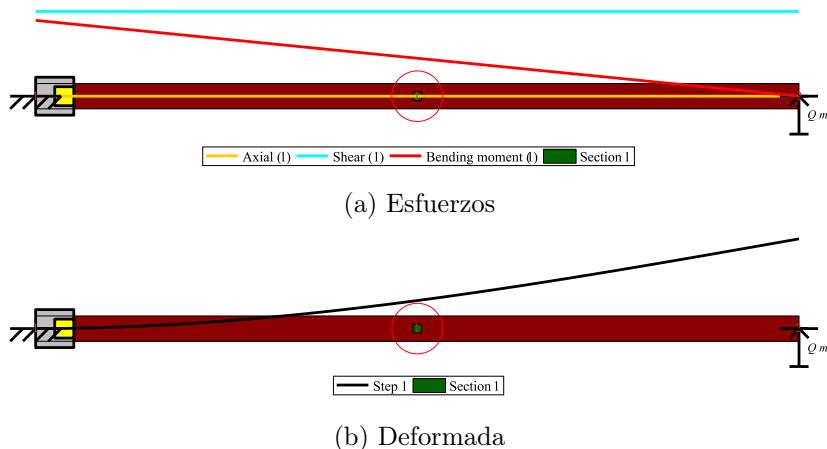


**Figura 5.17:** Evolución del valor del daño de la sección (Metafor)

### 5.2.4.3. Maple

Los resultados obtenidos mediante el programa Maple con el método MDRCPRE desarrollado, tras actualizar los cuatro parámetros del material, se pueden observar en la Figura 5.18 (tensiones y deformada en el paso 1) y en la Figura 5.19 (giro relativo, energía disipada y daño).

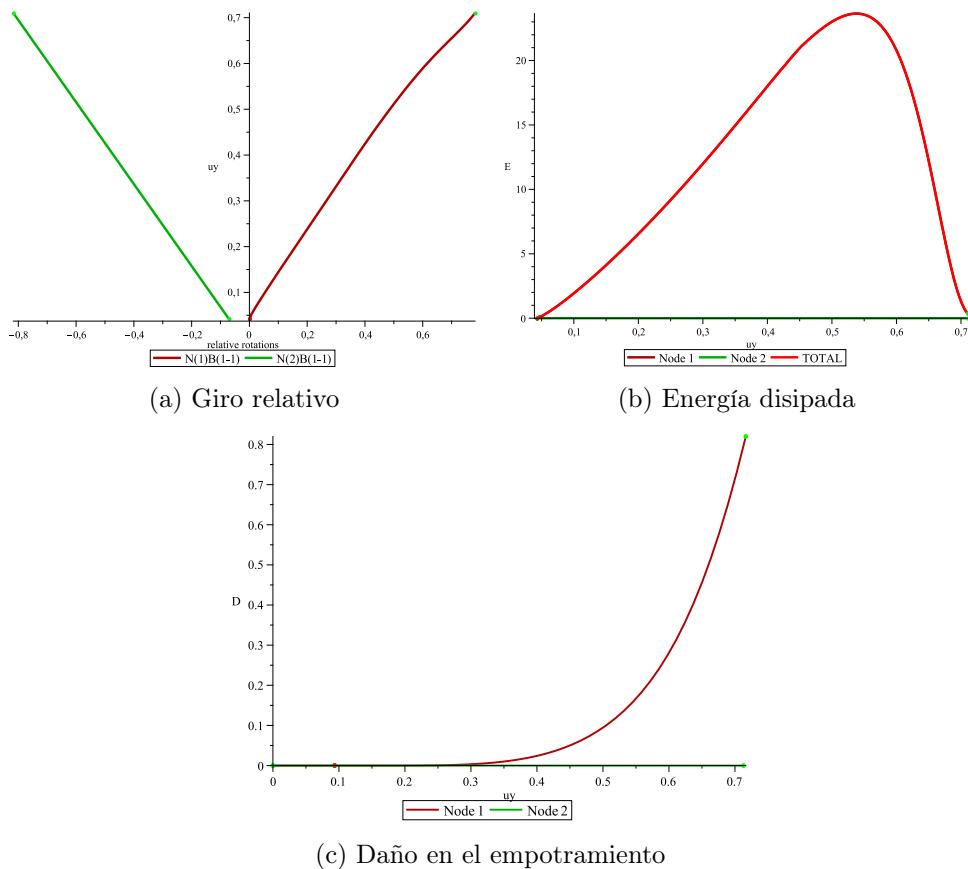
Se hace notar que la energía disipada por la sección plastificada en el empotramiento (nodo 1) crece a medida que aumenta el desplazamiento del extremo opuesto (nodo 2), ya que el giro relativo también crece. Sin embargo, la evolución del daño en la sección ocasiona que el momento plástico del empotramiento disminuya, llegando a tomar valores muy pequeños y occasionando que la energía disipada decrezca de manera rápida para desplazamientos cercanos al de colapso.



**Figura 5.18:** Resultados con Maple del modelo de viga experimental (esfuerzos y deformada)

**Tabla 5.4:** Resultados con Maple del modelo de viga experimental (desplazamientos, fuerzas y esfuerzos)

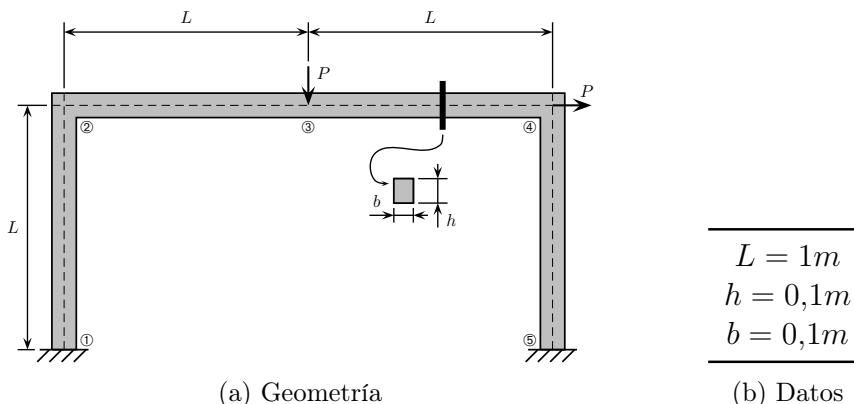
	Paso 1		Paso 2	
	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 1	Nodo 2
Desplazamientos	$u_x$	0,00000	0,00000	0,00000
	$u_y$	0,00000	0,04271	0,00000
	$\theta_z$	0,00000	0,07157	0,90366
Esfuerzos	$N_x$	0,000	0,000	0,000
	$V_y$	31,274	31,274	-166,4644
	$M_z$	27,990	0,000	-89,9979



**Figura 5.19:** Resultados con Maple del modelo de viga experimental (giro relativo, energía disipada y daño)

### 5.3. Ejemplo de aplicación 1: pórtico

En este primer ejemplo de aplicación se calculará la respuesta de un pórtico formado por tres barras de sección rectangular cuyo material se corresponde con el obtenido tras el ajuste del apartado anterior (Tabla 5.2). De esta forma, se asumirá que la respuesta dada para este problema por el programa Metafor, cuyos parámetros del material han sido convenientemente ajustados para reproducir el comportamiento del experimento real, es suficientemente aproximada a la que se obtendría si se realizara un experimento con las características recogidas en la Figura 5.20.



**Figura 5.20:** Esquema del pórtico

#### 5.3.1. Modelo de elementos finitos

Se modela mediante el programa Metafor el pórtico en tres dimensiones, realizando diversas pruebas de mallado hasta obtener uno satisfactorio en el que cada curva correspondiente a los tramos rectos de longitud  $0,95\text{m}$  se divide en 80 partes y las curvas de  $0,10\text{m}$ , correspondientes a las otras dos dimensiones, se dividen en 4 partes, obteniéndose por tanto un número total de elementos igual a 21504 (Figura 5.21). Las cargas puntuales se aplican en los puntos medios de las secciones de las barras correspondientes, dándoles un valor igual para ambas y suficientemente elevado como para que se alcance antes el colapso del pórtico que el valor final de dichas cargas.

Los resultados de esta simulación se pueden observar en la Figura 5.23.

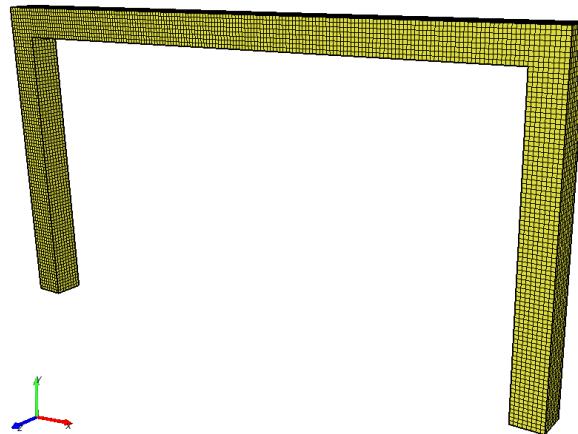


Figura 5.21: Mallado del pórtico

Las principales conclusiones que se pueden extraer sobre ellas son las siguientes:

**Tensiones:** se observa un mayor nivel de tensiones en torno a los nodos en los que se produce plastificación (Figura 5.23a). En los nodos empotrados se redistribuyen las tensiones según aumenta la carga. En la situación inmediatamente anterior a la de colapso, cuando se alcanza la carga máxima, se pueden observar claramente las zonas donde plastifica el pórtico: los nodos 1, 3, 4 y 5 (Figura 5.24). Se puede ver en la escala que el nivel de tensiones tiene un límite inferior negativo y un límite superior demasiado elevado. Estas aparentes incongruencias tienen su base en que el programa Metafor calcula las diferentes variables en los puntos de Gauss del elemento finito, siendo éstos interiores al propio elemento, y extrapolá el valor hasta los nodos de cada elemento, pudiéndose obtener valores no reales en este proceso [44].

**Desplazamientos  $u_x$ :** el valor del desplazamiento horizontal es el esperado, siendo la parte superior del pórtico la que alcanza valores mayores. Debido a la extrapolación mencionada, en las bases empotradas se muestran ciertos valores negativos de pequeña magnitud.

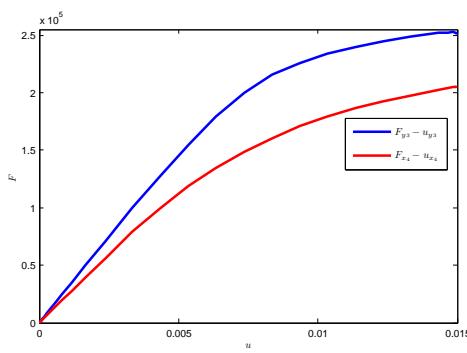
**Desplazamientos  $u_y$ :** el valor del desplazamiento vertical es el esperado, siendo la zona central del vano la que alcanza valores mayores. De nuevo, los valores positivos de desplazamiento de pequeña magnitud mostrados se deben a la extrapolación.

**Desplazamientos  $u_z$ :** los valores del desplazamiento en la dirección  $z$  son todos próximos a 0. Sin embargo, al haberse modelado el problema en tres dimensiones, existirán ciertos valores de desplazamiento fuera del plano central especialmente en las zonas próximas a los nodos donde las barras pueden sufrir ciertos aplastamientos (zonas con  $u_z > 0$  en la cara frontal del pórtico) o estiramientos (zonas con  $u_z < 0$  en la cara frontal del pórtico). Estos valores no podrán ser reproducidos de ninguna forma mediante un planteamiento bidimensional, aunque sus magnitudes son reducidas y también se aplican las consideraciones debidas a la extrapolación ya mencionada.

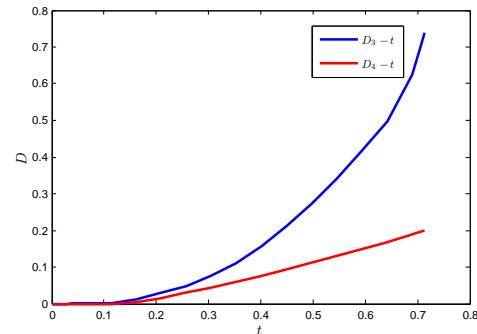
**Daño:** se observan cuatro zonas diferenciadas donde el daño isotrópico es positivo, correspondientes a los nodos 1, 3, 4 y 5 que plastifican. De nuevo, aunque los valores mostrados sean superiores a 1 o incluso negativos, los valores reales estarán acotados entre 0 y el valor de daño crítico 0,98.

**Deformación plástica:** las consideraciones para estos resultados son similares a las mencionadas para el daño.

Las gráficas de la evolución de alguna de las variables se pueden observar en la Figura 5.22.

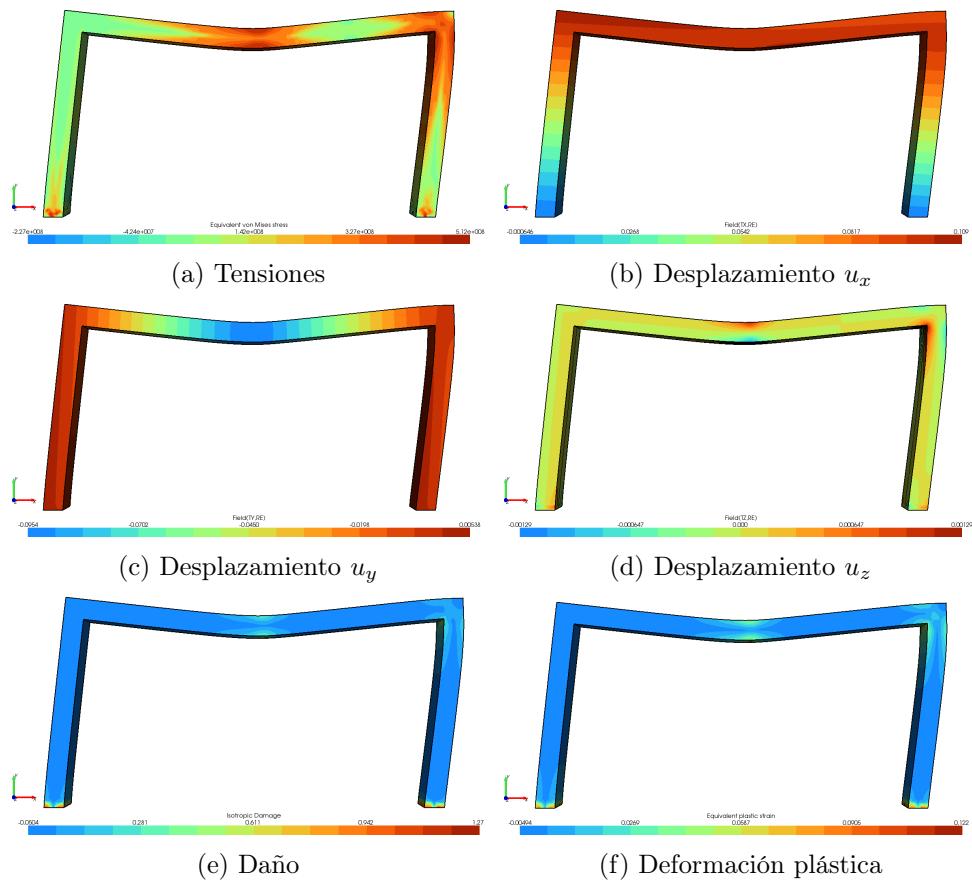


(a) Fuerza-desplaz. (valor absoluto)

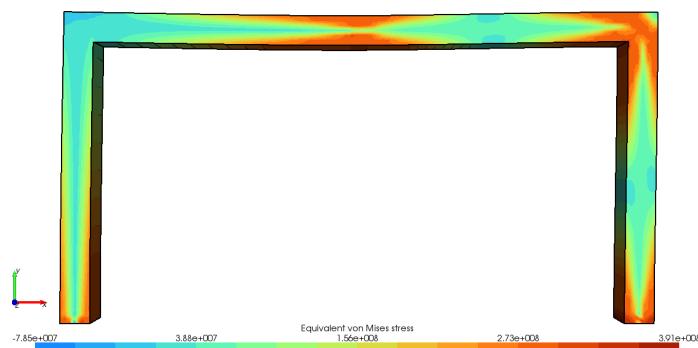


(b) Evolución del daño

**Figura 5.22:** Gráficas de evolución del pórtico (Metafor)



**Figura 5.23:** Resultados de la simulación del pórtico (Metafor)



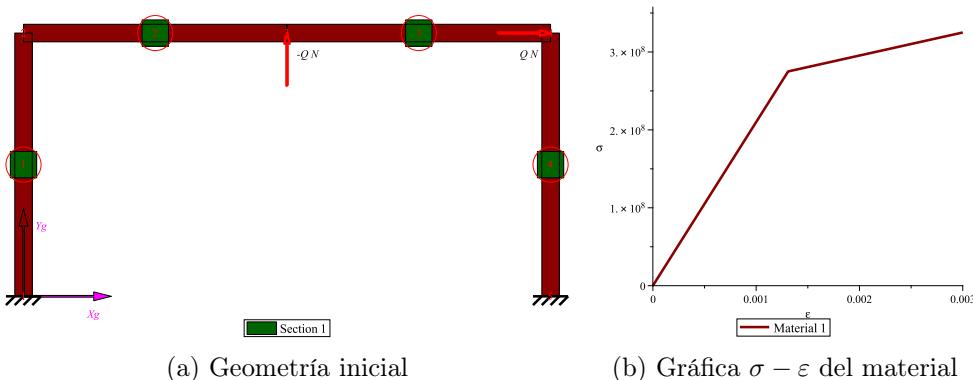
**Figura 5.24:** Estado tensional del pórtico para la carga máxima (Metafor)

### 5.3.2. Modelo MDRCPRE

A continuación se reproduce el problema utilizando el modelo MDRCPRE desarrollado. La estructura inicial y el material se muestran en la Figura 5.25, aunque esta ley de comportamiento del material variará en el proceso de actualizado posterior que tratará de aproximar los resultados del modelo de elementos finitos, concretamente los puntos de los diagramas  $Q - u_y$ . En este caso, la función objetivo dependerá de los desplazamientos (se elige el desplazamiento vertical por ser el más representativo, como se puede ver en la Figura 5.22a), ya que el control del problema se realiza aumentando gradualmente las fuerzas sobre la estructura:

$$G = \|R(\mathbf{q})\|^2 = \sum_{i=1}^4 \left[ u_{y_{\text{Met}_i}} - u_{y_i}(\sigma_f, \sigma_r, \varepsilon_f, \varepsilon_r) \right]^2 \quad (5.4)$$

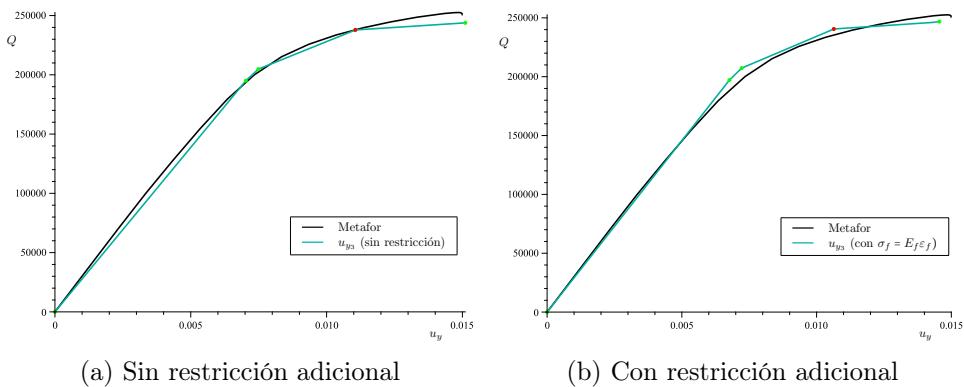
donde  $u_{y_{\text{Met}_i}}$  son los valores del desplazamiento vertical obtenidos mediante el modelo Metafor y  $u_{y_i}$  los valores obtenidos con el modelo Maple (dependientes de los cuatro parámetros de actualizado), en los cuatro puntos del diagrama considerados.



(a) Geometría inicial

(b) Gráfica  $\sigma - \varepsilon$  del material**Figura 5.25:** Modelo inicial del pórtico (Maple)

Se llevaron a cabo dos procesos de actualizado: uno de ellos sin ninguna restricción (además de las habituales de  $\sigma_r \geq \sigma_f$  y  $\varepsilon_r \geq \varepsilon_f$ ) y otro considerando la restricción  $\sigma_f = E_f \varepsilon_f$  (es decir, manteniendo la pendiente del tramo elástico). Los resultados finales del desplazamiento vertical del nodo 3 se muestran en la Figura 5.26, donde se comprueba que el mejor ajuste se produce sin introducir restricciones adicionales sobre los parámetros, logrando unos valores muy similares en los cuatro puntos considerados para dicho ajuste.



**Figura 5.26:** Comparación del ajuste del modelo Maple con y sin restricción adicional

Tomando la mejor solución, la nueva ley del material toma la forma y los valores mostrados en la Figura 5.27 y en la Tabla 5.5. Con este material actualizado, los resultados se muestran en la Figura 5.28 (diagramas de esfuerzos y deformada) y en la Figura 5.29 (desplazamientos, giros y energía disipada en las secciones plastificadas). Utilizando una tolerancia  $\text{tolZ} = 1 \cdot 10^{-3}$ , se muestran en la Tabla 5.6 los valores de la función de plastificación para cada paso en todos los nodos y los momentos virtuales añadidos para obtenerlos.

**Tabla 5.5:** Parámetros del material actualizados

	$\varepsilon$ ( $\cdot 10^{-3}$ )		$\sigma$ [MPa]		$E$ [GPa]	
	$\varepsilon_f$	$\varepsilon_r$	$\sigma_f$	$\sigma_r$	$E_f$	$E_r$
Inicial	1,310	3,000	275,0	325,0	210,0	29,6
Actualizado	1,325	4,000	265,0	375,0	200,0	93,7

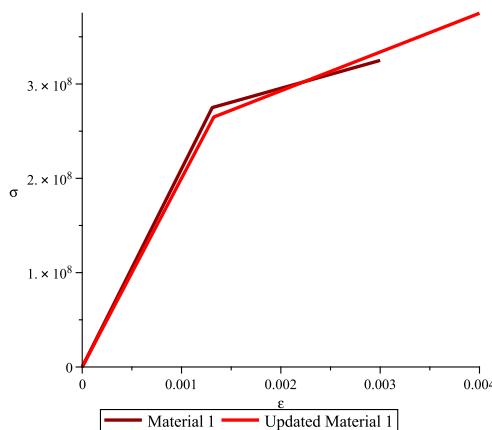
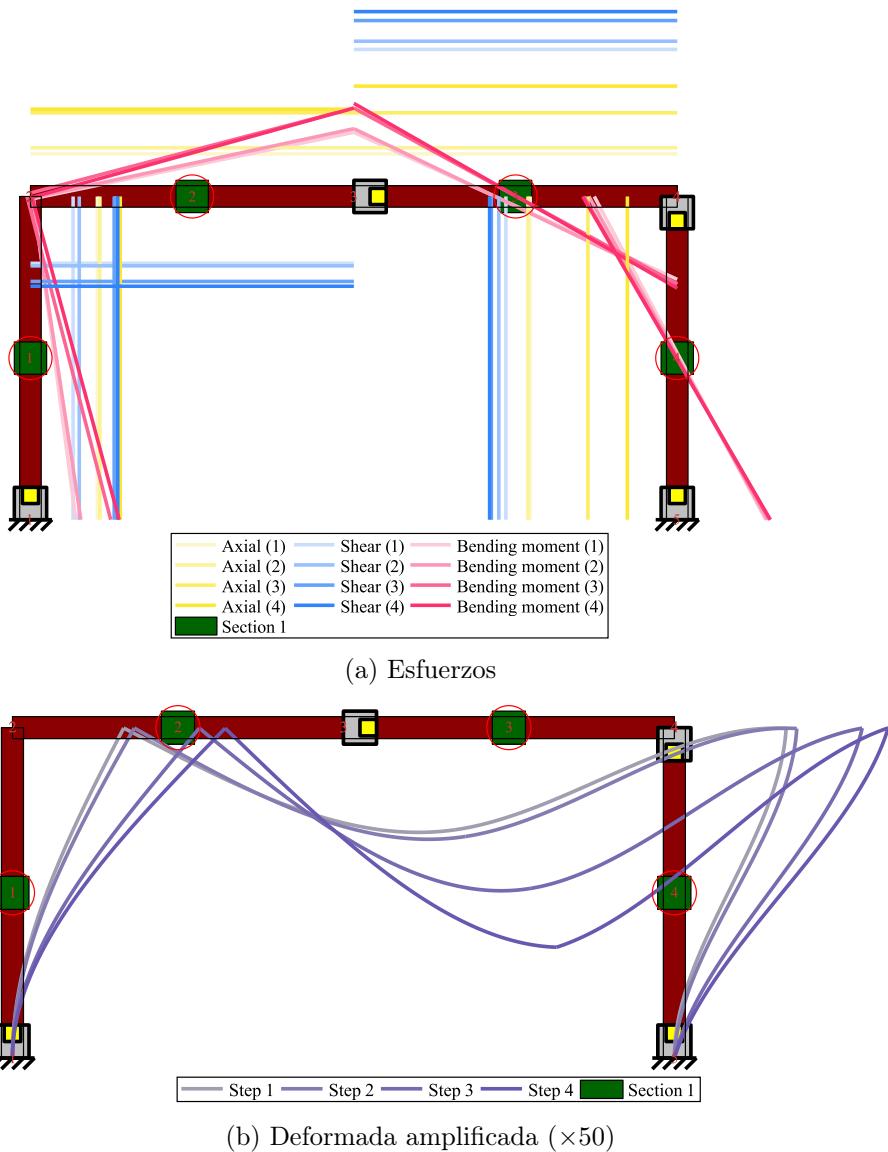


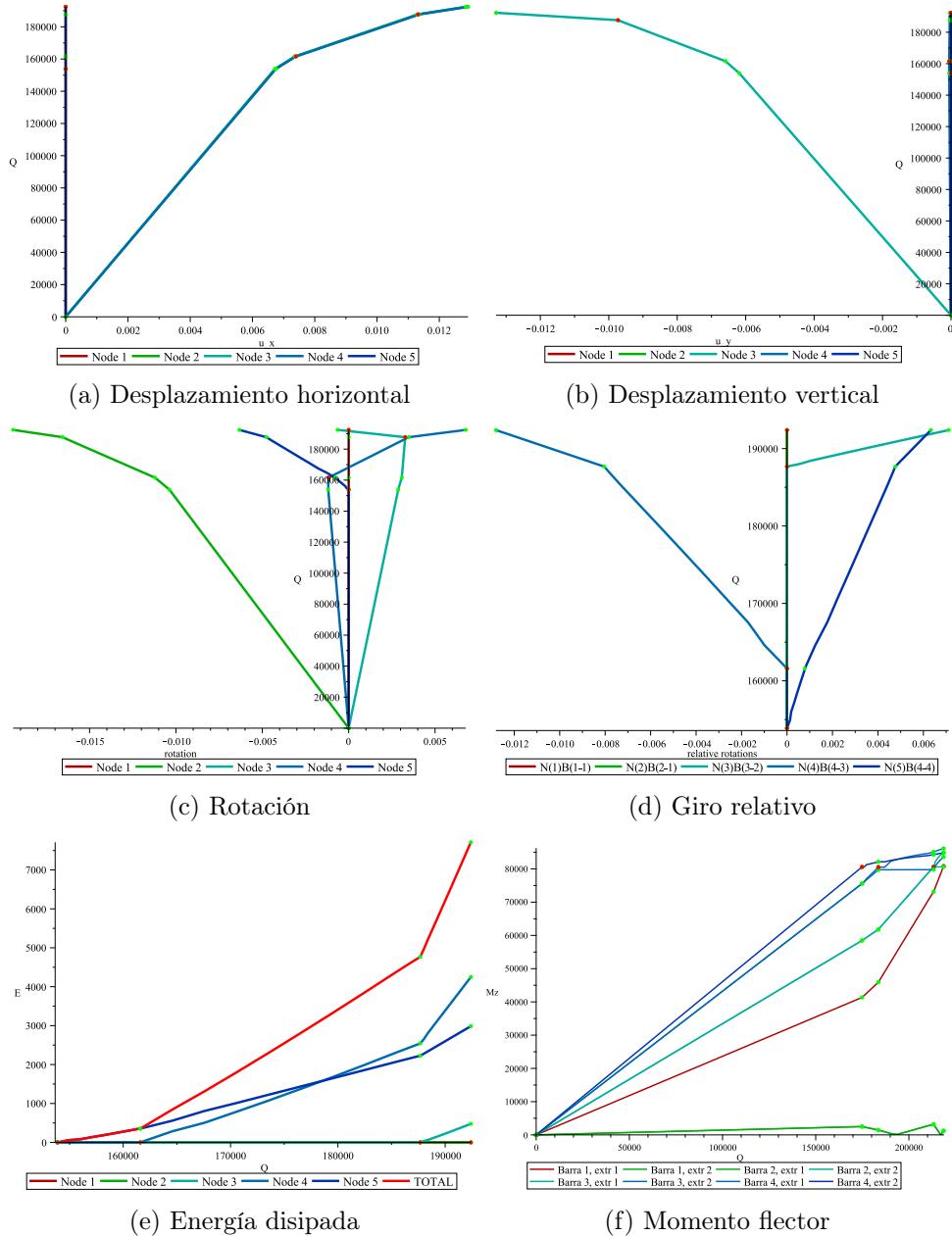
Figura 5.27: Ley del material actualizada

Tabla 5.6: Orden de plastificación de las secciones y evolución de los valores de  $Z$  y  $M_v$

		1°	→	2°	→	3°	→	4°
<b>Nodo</b>		5		4		3		1
<b>Barra</b>		4		4		3		1
<b>Extremo</b>		2		1		1		1
<b><math>Q(\cdot 10^5)</math></b>		1,539		1,616		1,877		1,924
<hr/>								
<b><math>Z</math></b>	Paso 1	$-5,83 \cdot 10^{-18}$		--		--		--
	Paso 2	$-1,08 \cdot 10^{-5}$		$-5,91 \cdot 10^{-4}$		--		--
	Paso 3	$+2,54 \cdot 10^{-5}$		$+1,66 \cdot 10^{-4}$		$-5,97 \cdot 10^{-4}$		--
	Paso 4	$+1,26 \cdot 10^{-5}$		$-7,77 \cdot 10^{-6}$		$-3,04 \cdot 10^{-5}$		$+2,56 \cdot 10^{-4}$
<hr/>								
<b><math>M_v</math></b>	Paso 1	0,0		0,0		0,0		0,0
	Paso 2	-91,1		0,0		0,0		0,0
	Paso 3	-66,1		-96,2		0,0		0,0
	Paso 4	-31,9		-57,6		134,2		0,0



**Figura 5.28:** Resultados con Maple del pórtico (esfuerzos y deformada)



**Figura 5.29:** Evolución de las variables con la carga

## 5.4. Ejemplo de aplicación 2: viga apoyada - empotrada

En este ejemplo de aplicación se estudiará el caso de una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, sometida a compresión mediante una carga puntual en el extremo apoyado y otra perpendicular a la directriz de la barra en su punto medio, como se puede ver en la Figura 5.30. Este ejemplo permite la resolución analítica de la evolución plástica y por tanto se puede comprobar la exactitud de los resultados a medida que aumenta la carga para los diferentes modelos.

El material que se utilizará será elastoplástico sin endurecimiento (Figura 3.1), por lo que el colapso de la estructura se alcanzará cuando se formen dos rótulas plásticas. Se tomarán diferentes valores de  $\alpha$  para evaluar la influencia del esfuerzo axil en las cargas de colapso y en la evaluación de las funciones de plastificación.

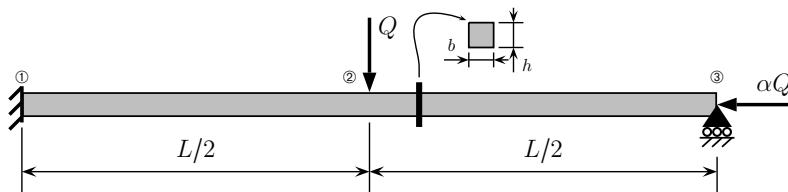


Figura 5.30: Ejemplo de aplicación 2

### 5.4.1. Resolución analítica

#### 5.4.1.1. Paso 1

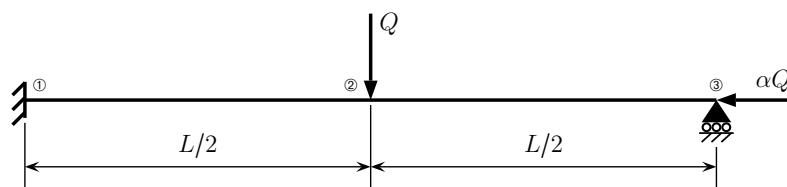


Figura 5.31: Estructura a resolver en el primer paso de cálculo

Resolviendo analíticamente el problema inicial planteado en la Figu-

ra 5.31 se obtienen los siguientes esfuerzos:

$$\begin{aligned} N_1 &= \alpha Q \\ V_1 &= \begin{cases} \frac{11}{16}Q & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ -\frac{5}{16}Q & \text{si } x \geq \frac{L}{2} \end{cases} \\ M_1 &= \begin{cases} \frac{1}{16}Q(11x - 3L) & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ \frac{5}{16}Q(L - x) & \text{si } x \geq \frac{L}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Recordando la función de plastificación sin daño (Ecuación 2.2), se evalúa a continuación la carga necesaria para anular esta función, según los esfuerzos considerados en cada caso:

- Considerando únicamente el momento flector, la función de plastificación  $Z_M$  es la siguiente:

$$Z_M = \frac{|M_z|}{M_p} - 1 \quad (5.6)$$

El valor absoluto máximo del momento flector se produce en el empotramiento, con lo que se obtiene la carga  $Q_{1_M}$  que anula  $Z_M$  en esa sección:

$$|M_1| = M_p \Rightarrow \frac{3}{16}Q_{1_M}L = \frac{bh^2}{4}\sigma_f \Rightarrow Q_{1_M} = \frac{4}{3}\frac{bh^2}{L}\sigma_f \quad (5.7)$$

- Considerando el momento flector y el esfuerzo axil, la función de plastificación  $Z_{MN}$  es la siguiente:

$$Z_{MN} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x}{N_p}\right)^2 - 1 \quad (5.8)$$

La combinación máxima de esfuerzos axil y flector se produce también en el empotramiento, con lo que se obtiene la carga  $Q_{1_{MN}}$  que anula  $Z_{MN}$  en esa sección:

$$Q_{1_{MN}} = \frac{b}{8\alpha^2} \left[ \sqrt{(3L)^2 + (8h\alpha)^2} - 3L \right] \sigma_f \quad (5.9)$$

- Finalmente, considerando el momento flector y los esfuerzos axil y cortante, la función de plastificación  $Z_{MNV}$  es la siguiente:

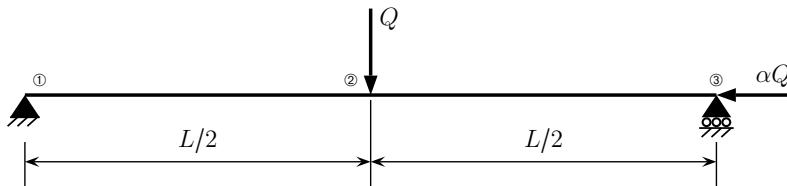
$$Z_{MNV} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 - 1 \quad (5.10)$$

La combinación máxima de esfuerzos axil, cortante y flector se produce también en el empotramiento, con lo que se obtiene la carga  $Q_{1_{MNV}}$  que anula  $Z_{MNV}$  en esa sección:

$$Q_{1_{MNV}} = \frac{16b}{(16\alpha)^2 + 11^2} \left[ \sqrt{(6L)^2 + (16h\alpha)^2 + (11h)^2} - 6L \right] \sigma_f \quad (5.11)$$

Tras el paso 1, en esta resolución analítica se ha formado una rótula plástica en la sección del empotramiento.

#### 5.4.1.2. Paso 2



**Figura 5.32:** Estructura a resolver en el segundo paso de cálculo

Resolviendo analíticamente el problema planteado en la Figura 5.32, correspondiente a la estructura inicial de la Figura 5.30 tras la formación de la primera sección plastificada en el empotramiento, se obtienen los siguientes esfuerzos:

$$\begin{aligned} N_2 &= \alpha Q \\ V_2 &= \pm \frac{1}{2} Q \quad \text{si } x \gtrless \frac{L}{2} \\ M_2 &= \begin{cases} \frac{1}{2} Qx & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2} Q(L-x) & \text{si } x \geq \frac{L}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Se evalúa a continuación la carga necesaria para anular la función de plastificación según los esfuerzos considerados en cada caso, acumulando los obtenidos en el paso 1.

- Considerando únicamente el momento flector, se obtiene la carga  $Q_{2_M}$  que anula la función de plastificación (Ecuación 5.6) en el nodo 2, donde se produce el máximo del momento flector acumulado de los dos pasos:

$$\begin{aligned} |M_1(Q_{1_M}) + M_2| = M_p &\Rightarrow \frac{5}{24}bh^2\sigma_f + \frac{1}{4}Q_{2_M}L = \frac{bh^2}{4}\sigma_f \\ &\Rightarrow Q_{2_M} = \frac{1}{6}\frac{bh^2}{L}\sigma_f \end{aligned} \quad (5.13)$$

- Considerando el momento flector y el esfuerzo axil, se obtiene la carga  $Q_{2_{MN}}$  que anula la función de plastificación (Ecuación 5.8) en el nodo 2, donde se produce la máxima combinación de estos esfuerzos acumulados:

$$Q_{2_{MN}} = \frac{b}{8\alpha^2} \left[ \sqrt{7L^2 + 3L\sqrt{(3L)^2 + (8h\alpha)^2} + (8h\alpha)^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{(3L)^2 + (8h\alpha)^2} - L \right] \sigma_f \quad (5.14)$$

- Finalmente, considerando el momento flector y los esfuerzos axil y cortantes se obtiene la carga  $Q_{2_{MNV}}$  que anula la función de plastificación (Ecuación 5.10) en el nodo 2, donde se produce la máxima combinación de estos esfuerzos acumulados:

$$Q_{2_{MNV}} = \frac{2b}{[(16\alpha)^2 + (11)^2][(2\alpha)^2 + 1]} \left\{ \left[ L^2(28672\alpha^4 + 23504\alpha^2 + 5929) + \right. \right. \\ \left. + h^2 [(16\alpha)^2 + 11^2] (32\alpha^2 + 11)^2 + \right. \\ \left. + 12L\sqrt{(6L)^2 + (16h\alpha)^2 + (11h)^2} (512\alpha^4 + 534\alpha^2 + 121) \right]^{\frac{1}{2}} - \\ \left. - 3\sqrt{(6L)^2 + (16h\alpha)^2 + (11h)^2} - L [(16\alpha)^2 + 103] \right\} \sigma_f \quad (5.15)$$

Tras el paso 2 se ha formado una rótula plástica en la sección central (nodo 2) por lo que se llega al mecanismo de colapso.

#### 5.4.1.3. Acumulado

Tras la resolución paso a paso del problema planteado se han obtenido las cargas  $Q_{1_i}$  y  $Q_{1_i} + Q_{2_i}$  que hacen plastificar las secciones 1 y 2 respectivamente. Los esfuerzos acumulados serán la suma de los esfuerzos

del paso 1 evaluados en  $Q_{1_i}$  y de los esfuerzos del paso 2 evaluados en  $Q_{2_i}$ .

Para la resolución numérica se utilizarán los siguientes datos:  $L = 2m$ ,  $h = b = 0,2m$ ,  $\sigma_f = 275MPa$  y un valor de  $\alpha$  comprendido entre 0 y 7,5.

Los resultados de las cargas de plastificación totales, según los esfuerzos tenidos en cuenta, se recogen en la Tabla 5.7. Se comprueba que  $Q_M$  no depende de  $\alpha$  (como se puede ver en sus expresiones), que para  $\alpha = 0$  coinciden  $Q_M$  y  $Q_{MV}$ , pero no así  $Q_{MNV}$ , y que para valores crecientes de  $\alpha$  las cargas de plastificación son cada vez menores.

**Tabla 5.7:** Resultados de la resolución analítica

$\alpha$	Paso	$Q_{\text{plast}}(\cdot 10^6)$		
		M	MV	MNV
0,0	1	1,46667	1,46667	1,46667
	2	1,65000	1,65000	1,65000
0,5	1	1,46667	1,46021	1,44829
	2	1,65000	1,64145	1,62640
1,0	1	1,46667	1,44148	1,43016
	2	1,65000	1,61679	1,60256
1,5	1	1,46667	1,41227	1,40182
	2	1,65000	1,57863	1,56560
2,0	1	1,46667	1,37500	1,36557
	2	1,65000	1,53045	1,51883
2,5	1	1,46667	1,33221	1,32385
	2	1,65000	1,47583	1,46564
3,0	1	1,46667	1,28620	1,27888
	2	1,65000	1,41785	1,40903
3,5	1	1,46667	1,23880	1,23243
	2	1,65000	1,35890	1,35133
4,0	1	1,46667	1,19139	1,18587
	2	1,65000	1,30069	1,29420
4,5	1	1,46667	1,14492	1,14015
	2	1,65000	1,24431	1,23875
5,0	1	1,46667	1,10000	1,09587
	2	1,65000	1,19043	1,18566
5,5	1	1,46667	1,05700	1,05342
	2	1,65000	1,13938	1,13528
6,0	1	1,46667	1,01612	1,01300
	2	1,65000	1,09129	1,08775
6,5	1	1,46667	0,97742	0,97469
	2	1,65000	1,04616	1,04309
7,0	1	1,46667	0,94088	0,93850
	2	1,65000	1,00390	1,00123
7,5	1	1,46667	0,90645	0,90435
	2	1,65000	0,96436	0,96202

Para evaluar la influencia del esfuerzo axil y estimar la inexactitud en la evaluación de las cargas de plastificación cuando se desprecian otros esfuerzos, se grafican en la Figura 5.33 dichas cargas de plastificación de los nodos 1 y 2 ( $Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente) respecto a valores crecientes de  $\alpha$ , observándose lo siguiente:

- Si solo se considera el momento flector, ambas cargas permanecen constantes para cualquier valor de  $\alpha$ , ya que la carga de compresión no provoca ningún esfuerzo flector en la barra.
- Considerando además el esfuerzo axil, se observa que valores crecientes de éste provocan cargas de plastificación cada vez menores, ya que se alcanza antes la superficie de fluencia. Para un valor  $\alpha = 0$  el valor de las cargas de plastificación coincide con el obtenido considerando únicamente momento flector y cuanto más aumenta el esfuerzo axil más disminuyen éstas.
- Si se considera además el esfuerzo cortante, se observa una ligera disminución de las cargas de plastificación, incluso con  $\alpha = 0$ , ya que existe esfuerzo cortante independientemente de la carga de compresión. Sin embargo, se observa que la contribución de este esfuerzo no es demasiado elevada.

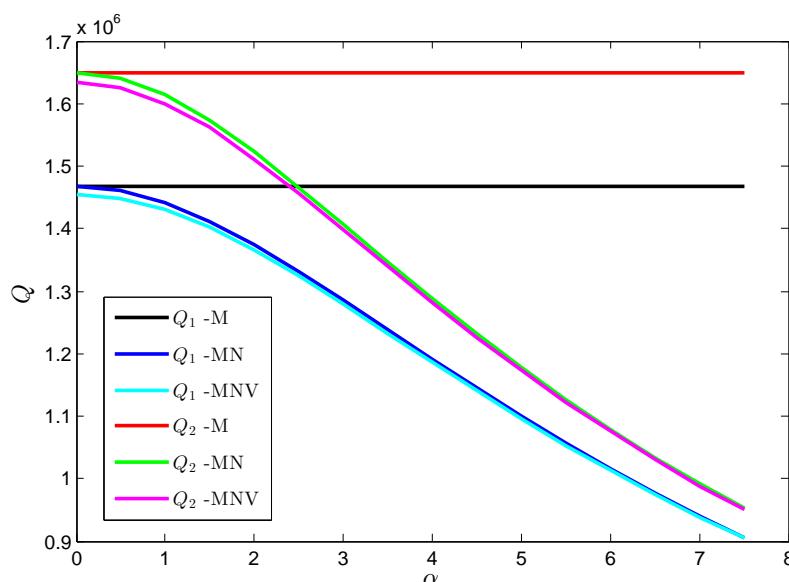


Figura 5.33: Variación de las cargas de colapso con el esfuerzo axil

### 5.4.2. Resolución numérica

A continuación se resuelve el mismo problema pero utilizando para ello el modelo MDRCPRE desarrollado.

Para simular el comportamiento con un material elastoplástico ideal se tomarán las constantes reflejadas en la Tabla 5.8.

**Tabla 5.8:** Parámetros del material

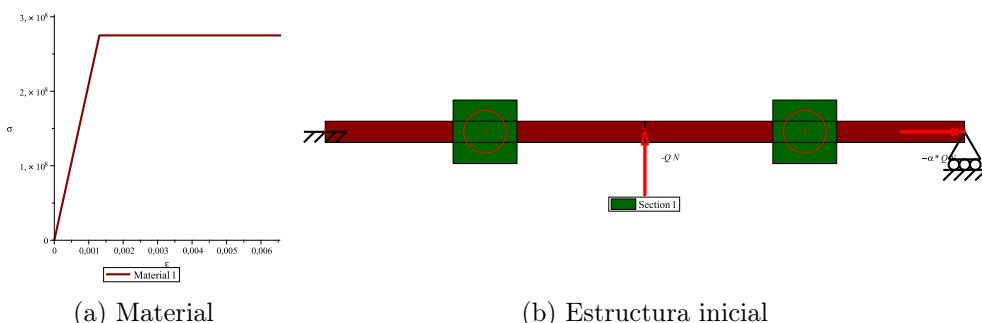
$\varepsilon \cdot 10^{-3}$		$\sigma [MPa]$		$E [GPa]$	
$\varepsilon_f$	$\varepsilon_r$	$\sigma_f$	$\sigma_r$	$E_f$	$E_r$
1,31	$\infty$	275,0	275,0	210,0	0,0

Para la dimensiones consideradas y el material descrito, los diferentes parámetros de la sección se recogen en la Tabla 5.9.

**Tabla 5.9:** Parámetros de la sección

Dimensiones		Características		Esfuerzos plásticos		
$h$	$b$	$A$	$I_z$	$N_p$	$V_p$	$M_p$
0,2	0,2	0,04	$1,33 \cdot 10^{-4}$	$1,10 \cdot 10^7$	$6,35 \cdot 10^6$	$5,5 \cdot 10^5$

Por lo tanto, el material utilizado y la estructura inicial se muestran en la Figura 5.34.



**Figura 5.34:** Material y estructura de la viga apoyada-empotrada

En la Tabla 5.10 se recogen los valores de las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  que provocan la plastificación de los nodos 1 y 2, en ese orden, y los valores

de la función de plastificación según el método MDRCPRE (que considera plastificación debida a la combinación de esfuerzos y daño, tomando una tolerancia  $\text{tolZ}=1 \cdot 10^{-3}$ ). Se distinguen tres casos para cada valor de  $\alpha$  considerado, según los esfuerzos tenidos en cuenta para evaluar las funciones de plastificación. Se muestran los valores reales de la función de plastificación (considerando los tres esfuerzos) en las columnas  $Z_{\text{MNV}}$  para compararlos con los valores  $Z_i$  obtenidos considerando en cada caso únicamente los esfuerzos marcados ( $i = M, MN$  o  $MNV$ ). Se muestran además los momentos virtuales añadidos para lograr dichos valores de  $Z$  en los nodos plastificados anteriormente. Se hace notar que, al utilizar un material elastoplástico ideal, el daño y del endurecimiento no tienen influencia.

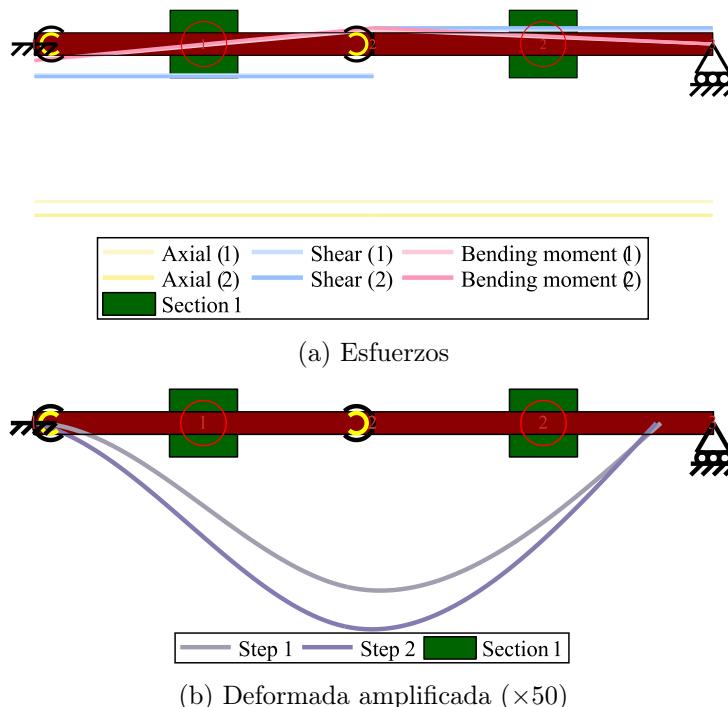
Se pueden resaltar las siguientes conclusiones:

- Con  $\alpha = 0$  (es decir, sin esfuerzo axil), los resultados son evidentemente iguales para los casos M y MN.
  - $Z_i = 0$  (según la precisión del cálculo impuesta, valores del orden de  $10^{-19}$  o  $10^{-20}$ ) para la primera sección que plastifica, ya que precisamente se calcula la carga  $Q_1$  para anular dicho valor en el paso 1.
  - $Z_i < \text{tolZ}$  (es decir, valores del orden de  $10^{-4}$  o menores) para la segunda sección que plastifica, ya que se incrementa  $Q_2$  hasta que dicho valor sea menor que la tolerancia, y también para el nodo 1, plastificado anteriormente, ya que se calculan los momentos virtuales  $M_v$  para lograr que dicho valor también sea menor que la tolerancia en el paso 2.
- Sin embargo, los valores reales de la función de plastificación  $Z_{\text{MNV}}$  son:
  - Iguales a los del método MDRCPRE para los casos MNV.
  - $Z_{\text{MNV}} = 0$  (con la precisión de cálculo impuesta) para la primera sección que plastifica.
  - Para los casos M y MN, al haberse calculado la carga de plastificación sin tener en cuenta algunos esfuerzos, la función de

plastificación  $Z_{MN}$  ya no se anula en el paso 2, tomando valores cada vez mayores según aumenta la influencia del esfuerzo axil. Por ejemplo, con factor  $\alpha = 6$ , los valores de la función de plastificación en el paso 2 y para el caso M son  $+0,82$  y  $+0,81$  para los nodos 1 y 2 respectivamente, siendo claramente inasumibles, ya que significa que la carga de plastificación  $Q_2$  calculada en ese caso ( $1,65000 \cdot 10^6$ ) en realidad debería haber sido mucho menor, concretamente  $1,07569 \cdot 10^6$ , correspondiente al caso MNV, más exacto.

Se comprueba por tanto que la diferencia entre considerar los tres esfuerzos para evaluar la carga de plastificación de las secciones y excluir el axil o el cortante (utilizando  $Z_M$  o  $Z_{MN}$  en el modelo MDRCPRE) puede llegar a ser considerable en los casos en que estos esfuerzos sean suficientemente grandes.

En la Figura 5.35 se muestran los resultados de esfuerzos y deformadas para el caso  $\alpha = 3,5$  y considerando los tres esfuerzos en la plastificación.



**Figura 5.35:** Resultados del modelo de viga apoyada-empotrada (esfuerzos y deformada)

**Tabla 5.10:** Valores de las cargas y la función de plastificación respecto a un esfuerzo axial creciente

$\alpha$	Esf. (i)	Paso	$Q_{\text{plast}}$ (·10 <sup>6</sup> )	$Z_{\text{MNV}}$		$Z_i$		$M_v$	
				Nodo 1	Nodo 2	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 1	Nodo 2
0,0	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+1,0 · 10 <sup>-2</sup>	+2,5 · 10 <sup>-3</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+1,0 · 10 <sup>-2</sup>	+2,5 · 10 <sup>-3</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MNV	1	1,45454	-3,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	-3,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,63410	+5,2 · 10 <sup>-4</sup>	+2,8 · 10 <sup>-18</sup>	+5,2 · 10 <sup>-4</sup>	+2,8 · 10 <sup>-18</sup>	1036	0
0,5	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+1,6 · 10 <sup>-2</sup>	+8,1 · 10 <sup>-3</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,46020	-2,3 · 10 <sup>-18</sup>	--	-2,3 · 10 <sup>-18</sup>	--	0	0
		2	1,64145	+9,1 · 10 <sup>-3</sup>	+1,1 · 10 <sup>-2</sup>	-7,6 · 10 <sup>-4</sup>	-9,6 · 10 <sup>-4</sup>	639	0
	MNV	1	1,44829	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,62547	+8,9 · 10 <sup>-4</sup>	+2,9 · 10 <sup>-18</sup>	+8,9 · 10 <sup>-4</sup>	+2,9 · 10 <sup>-18</sup>	1766	0
1,0	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+3,2 · 10 <sup>-2</sup>	+2,5 · 10 <sup>-2</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,44148	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,61454	+9,7 · 10 <sup>-3</sup>	+9,6 · 10 <sup>-3</sup>	+1,6 · 10 <sup>-4</sup>	+4,0 · 10 <sup>-19</sup>	826	0
	MNV	1	1,43016	-4,4 · 10 <sup>-19</sup>	--	-4,4 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,59993	+6,4 · 10 <sup>-4</sup>	-5,0 · 10 <sup>-20</sup>	+6,4 · 10 <sup>-4</sup>	-5,0 · 10 <sup>-20</sup>	1229	0
1,5	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+6,1 · 10 <sup>-2</sup>	+5,3 · 10 <sup>-2</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,41227	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,57447	+1,0 · 10 <sup>-2</sup>	+9,1 · 10 <sup>-3</sup>	+9,6 · 10 <sup>-4</sup>	+2,0 · 10 <sup>-19</sup>	1836	0
	MNV	1	1,40181	-1,1 · 10 <sup>-19</sup>	--	-1,1 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,56263	+1,0 · 10 <sup>-3</sup>	-2,3 · 10 <sup>-19</sup>	+1,0 · 10 <sup>-3</sup>	-2,3 · 10 <sup>-19</sup>	1872	0
2,0	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+1,0 · 10 <sup>-1</sup>	+9,2 · 10 <sup>-2</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,37500	-3,3 · 10 <sup>-19</sup>	--	-3,3 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,52291	+8,6 · 10 <sup>-3</sup>	+7,9 · 10 <sup>-3</sup>	+1,2 · 10 <sup>-4</sup>	-5,9 · 10 <sup>-4</sup>	631	0
	MNV	1	1,36557	-4,5 · 10 <sup>-19</sup>	--	-4,5 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,51101	+1,4 · 10 <sup>-4</sup>	-6,2 · 10 <sup>-4</sup>	+1,4 · 10 <sup>-4</sup>	-6,2 · 10 <sup>-4</sup>	684	0
2,5	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+1,5 · 10 <sup>-1</sup>	+1,4 · 10 <sup>-1</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,33221	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,46610	+8,0 · 10 <sup>-3</sup>	+1,8 · 10 <sup>-3</sup>	+1,5 · 10 <sup>-4</sup>	-7,2 · 10 <sup>-4</sup>	730	0
	MNV	1	1,32385	+1,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	+1,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,45579	+1,6 · 10 <sup>-4</sup>	-7,8 · 10 <sup>-4</sup>	+1,6 · 10 <sup>-4</sup>	-7,8 · 10 <sup>-4</sup>	779	0
3,0	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+2,1 · 10 <sup>-1</sup>	+2,0 · 10 <sup>-1</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,28620	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,40728	+7,9 · 10 <sup>-3</sup>	+1,9 · 10 <sup>-3</sup>	+6,2 · 10 <sup>-4</sup>	-2,1 · 10 <sup>-19</sup>	1124	0
	MNV	1	1,27888	+1,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	+1,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,39848	+6,5 · 10 <sup>-4</sup>	-5,0 · 10 <sup>-20</sup>	+6,5 · 10 <sup>-4</sup>	-5,0 · 10 <sup>-20</sup>	1154	0
3,5	M	1	1,46667	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,65000	+2,9 · 10 <sup>-1</sup>	+2,8 · 10 <sup>-1</sup>	-2,0 · 10 <sup>-20</sup>	-4,0 · 10 <sup>-20</sup>	0	0
	MN	1	1,23880	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	-1,0 · 10 <sup>-20</sup>	--	0	0
		2	1,34641	+7,1 · 10 <sup>-3</sup>	+5,7 · 10 <sup>-3</sup>	+4,2 · 10 <sup>-4</sup>	-9,1 · 10 <sup>-4</sup>	951	0
	MNV	1	1,23243	+2,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	+2,0 · 10 <sup>-19</sup>	--	0	0
		2	1,33893	+4,5 · 10 <sup>-4</sup>	-8,9 · 10 <sup>-4</sup>	+4,5 · 10 <sup>-4</sup>	-8,9 · 10 <sup>-4</sup>	965	0

Continúa

**Tabla 5.10:** Valores de las cargas y la función de plastificación respecto a un esfuerzo axial creciente (continuación)

$\alpha$	Esf. (i)	Paso	$Q_{\text{plast}}$ (·10 <sup>6</sup> )	$Z_{\text{MNV}}$		$Z_i$		$M_v$	
				Nodo 1	Nodo 2	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 1	Nodo 2
4,0	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+3,7 \cdot 10^{-1}$	$+3,6 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
	MN	1	1,19139	$-1,0 \cdot 10^{-19}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-19}$	--	0	0
		2	1,28809	$+5,7 \cdot 10^{-3}$	$+6,4 \cdot 10^{-3}$	$-3,8 \cdot 10^{-4}$	$+2,7 \cdot 10^{-4}$	4424	0
4,5	MNV	1	1,18587	$-1,5 \cdot 10^{-19}$	--	$-1,5 \cdot 10^{-19}$	--	0	0
		2	1,28170	$-3,9 \cdot 10^{-4}$	$+2,6 \cdot 10^{-4}$	$-3,9 \cdot 10^{-4}$	$+2,6 \cdot 10^{-4}$	4384	0
	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+4,7 \cdot 10^{-1}$	$+4,6 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
5,0	MN	1	1,14492	$+1,0 \cdot 10^{-19}$	--	$+1,0 \cdot 10^{-19}$	--	0	0
		2	1,23118	$+6,4 \cdot 10^{-3}$	$+4,9 \cdot 10^{-3}$	$+8,0 \cdot 10^{-4}$	$-6,3 \cdot 10^{-4}$	1375	0
	MNV	1	1,14014	$-1,4 \cdot 10^{-19}$	--	$-1,4 \cdot 10^{-19}$	--	0	0
		2	1,22576	$+7,9 \cdot 10^{-4}$	$-6,1 \cdot 10^{-4}$	$+7,9 \cdot 10^{-4}$	$-6,1 \cdot 10^{-4}$	1371	0
5,5	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+5,7 \cdot 10^{-1}$	$+5,6 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
	MN	1	1,10000	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,17724	$+6,0 \cdot 10^{-3}$	$+5,6 \cdot 10^{-4}$	$+8,9 \cdot 10^{-4}$	$-7,1 \cdot 10^{-4}$	1365	0
6,0	MNV	1	1,09587	$-5,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-5,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,17263	$+8,9 \cdot 10^{-4}$	$-6,9 \cdot 10^{-4}$	$+8,9 \cdot 10^{-4}$	$-6,9 \cdot 10^{-4}$	1360	0
	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+6,9 \cdot 10^{-1}$	$+6,8 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
6,5	MN	1	1,05700	$-3,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-3,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,12662	$+3,8 \cdot 10^{-3}$	$+5,3 \cdot 10^{-3}$	$-8,8 \cdot 10^{-4}$	$+6,2 \cdot 10^{-4}$	4525	0
	MNV	1	1,05342	$-8,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-8,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,12264	$-8,9 \cdot 10^{-4}$	$+5,9 \cdot 10^{-4}$	$-8,9 \cdot 10^{-4}$	$+5,9 \cdot 10^{-4}$	4472	0
7,0	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+8,2 \cdot 10^{-1}$	$+8,1 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
	MN	1	1,01612	$-8,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-8,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,07911	$+4,6 \cdot 10^{-3}$	$+1,6 \cdot 10^{-3}$	$+3,4 \cdot 10^{-4}$	$+5,2 \cdot 10^{-4}$	1480	0
7,5	MNV	1	1,01300	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,07569	$+3,3 \cdot 10^{-4}$	$+5,1 \cdot 10^{-4}$	$+3,3 \cdot 10^{-4}$	$+5,1 \cdot 10^{-4}$	1467	0
	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+9,6 \cdot 10^{-1}$	$+9,5 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
8,0	MN	1	0,97742	$-1,3 \cdot 10^{-19}$	--	$-1,3 \cdot 10^{-19}$	--	0	0
		2	1,03361	$+3,6 \cdot 10^{-3}$	$+3,7 \cdot 10^{-4}$	$-3,7 \cdot 10^{-4}$	$-6,1 \cdot 10^{-4}$	4094	0
	MNV	1	0,97469	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,03069	$-3,6 \cdot 10^{-4}$	$-6,1 \cdot 10^{-4}$	$-3,6 \cdot 10^{-4}$	$-6,1 \cdot 10^{-4}$	4053	0
8,5	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+1,1$	$+1,1$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
	MN	1	0,94088	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	0,99256	$+4,0 \cdot 10^{-3}$	$+4,2 \cdot 10^{-3}$	$+4,2 \cdot 10^{-4}$	$+5,6 \cdot 10^{-4}$	1488	0
9,0	MNV	1	0,93849	$-3,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-3,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	0,98863	$-4,4 \cdot 10^{-4}$	$-7,0 \cdot 10^{-6}$	$-4,4 \cdot 10^{-4}$	$-7,0 \cdot 10^{-6}$	1416	0
	M	1	1,46667	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-1,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	1,65000	$+1,3$	$+1,3$	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	$-4,0 \cdot 10^{-20}$	0	0
9,5	MN	1	0,90645	$-6,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-6,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	0,95269	$+2,8 \cdot 10^{-3}$	$+2,6 \cdot 10^{-3}$	$-5,1 \cdot 10^{-4}$	$-7,6 \cdot 10^{-4}$	3706	0
	MNV	1	0,90435	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	--	$-2,0 \cdot 10^{-20}$	--	0	0
		2	0,95047	$-4,9 \cdot 10^{-4}$	$-7,6 \cdot 10^{-4}$	$-4,9 \cdot 10^{-4}$	$-7,6 \cdot 10^{-4}$	3672	0

### 5.4.3. Comparación de modelos

En este apartado se llevará a cabo una comparación entre los resultados analíticos y los resultados obtenidos utilizando los modelos MDRCP y MDRCPRE.

En la Tabla 5.11 se recogen los valores de las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  que provocan la plastificación de los nodos 1 y 2 respectivamente, calculadas analíticamente (considerando los tres esfuerzos), según el método MDRCPRE (tomando una tolerancia  $\text{tolZ}=1 \cdot 10^{-3}$  y considerando la plastificación según los tres esfuerzos  $Z_{\text{MNV}}$ ) y según el método MDRCP (que considera plastificación únicamente por momento flector y por tanto no tiene en cuenta la influencia de los demás esfuerzos en la plastificación).

Para el método MDRCPRE se muestra el error relativo frente a los valores analíticos. El valor de la función de plastificación ya está recogido en la Tabla 5.10, donde se comprobó que siempre tomaba valores menores que la tolerancia y que por tanto pueden ajustarse a 0 tanto como se desee. Para el método MDRCP se muestra, además del error relativo, los valores de la función de plastificación.

Se comprueba que el error entre los resultados analíticos y los obtenidos con el método MDRCPRE considerando los tres esfuerzos es virtualmente cero para la primera sección plastificada y para la segunda tiene un pequeño error (se obtiene incrementando la carga hasta encontrar la carga de plastificación, por lo que toma un valor ligeramente menor) que puede ser corregido disminuyendo la tolerancia tolZ para considerar nula la función de plastificación. Es decir, el método MDRCPRE puede aproximar con la exactitud deseada el resultado analítico.

Sin embargo, si no se consideran todos los esfuerzos en la plastificación (en el modelo MDRCPRE, reflejado en la Tabla 5.10 y especialmente en el modelo MDRCP) los errores serán inasumiblemente grandes, como se puede ver en la Tabla 5.11, mayores cuanta más importancia relativa tienen los esfuerzos axil y cortante.

Finalmente se recogen la evolución del momento flector desarrollado en las secciones 1 y 2 a medida que aumenta la carga en el modelo MDRCPRE, para tres valores de  $\alpha$  y para diferentes materiales, cuyas constantes se recogen en la Tabla 5.12.

Se observa que con  $\alpha = 0$  (Figura 5.36) se obtiene un comportamiento similar al teórico cuando no se considera daño ni endurecimiento.

**Tabla 5.11:** Comparación de los resultados analíticos y los modelos MDRCPRE y MDRCP

$\alpha$	Paso	Analítico $Q_{\text{plast}}\left(\cdot 10^6\right)$	MDRCPRE			MDRCP		
			$Q_{\text{plast}}\left(\cdot 10^6\right)$	Error	$Q_{\text{plast}}\left(\cdot 10^6\right)$	Error	$Z_M$	Nodo 1
0,0	1	1,45455	1,45454	-0,00 %	1,46667	0,83 %	$+8,4 \cdot 10^{-3}$	--
	2	1,63465	1,63410	-0,03 %	1,65000	0,94 %	$+1,0 \cdot 10^{-2}$	$+1,0 \cdot 10^{-2}$
0,5	1	1,44829	1,44829	-0,00 %	1,46667	1,27 %	$+1,3 \cdot 10^{-2}$	--
	2	1,62640	1,62547	-0,06 %	1,65000	1,45 %	$+1,6 \cdot 10^{-2}$	$+1,6 \cdot 10^{-2}$
1,0	1	1,43016	1,43016	-0,00 %	1,46667	2,55 %	$+2,6 \cdot 10^{-2}$	--
	2	1,60256	1,59993	-0,16 %	1,65000	2,96 %	$+3,3 \cdot 10^{-2}$	$+3,3 \cdot 10^{-2}$
1,5	1	1,40182	1,40181	-0,00 %	1,46667	4,63 %	$+4,8 \cdot 10^{-2}$	--
	2	1,56560	1,56264	-0,19 %	1,65000	5,39 %	$+6,1 \cdot 10^{-2}$	$+6,1 \cdot 10^{-2}$
2,0	1	1,36557	1,36557	-0,00 %	1,46667	7,40 %	$+8,0 \cdot 10^{-2}$	--
	2	1,51883	1,51101	-0,51 %	1,65000	8,64 %	$+1,0 \cdot 10^{-1}$	$+1,0 \cdot 10^{-1}$
2,5	1	1,32385	1,32385	-0,00 %	1,46667	10,79 %	$+1,2 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,46564	1,45579	-0,67 %	1,65000	12,58 %	$+1,5 \cdot 10^{-1}$	$+1,5 \cdot 10^{-1}$
3,0	1	1,27888	1,27888	-0,00 %	1,46667	14,68 %	$+1,7 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,40903	1,39848	-0,75 %	1,65000	17,10 %	$+2,1 \cdot 10^{-1}$	$+2,1 \cdot 10^{-1}$
3,5	1	1,23243	1,23243	-0,00 %	1,46667	19,01 %	$+2,3 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,35133	1,33893	-0,92 %	1,65000	22,10 %	$+2,9 \cdot 10^{-1}$	$+2,9 \cdot 10^{-1}$
4,0	1	1,18587	1,18587	-0,00 %	1,46667	23,68 %	$+2,9 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,29420	1,28170	-0,97 %	1,65000	27,49 %	$+3,7 \cdot 10^{-1}$	$+3,7 \cdot 10^{-1}$
4,5	1	1,14015	1,14014	-0,00 %	1,46667	28,64 %	$+3,7 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,23875	1,22576	-1,05 %	1,65000	33,20 %	$+4,7 \cdot 10^{-1}$	$+4,7 \cdot 10^{-1}$
5,0	1	1,09587	1,09587	-0,00 %	1,46667	33,84 %	$+4,5 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,18566	1,17263	-1,10 %	1,65000	39,16 %	$+5,7 \cdot 10^{-1}$	$+5,7 \cdot 10^{-1}$
5,5	1	1,05342	1,05342	-0,00 %	1,46667	39,23 %	$+5,5 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,13528	1,12264	-1,11 %	1,65000	45,34 %	$+6,9 \cdot 10^{-1}$	$+6,9 \cdot 10^{-1}$
6,0	1	1,01300	1,01300	-0,00 %	1,46667	44,78 %	$+6,5 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,08775	1,07569	-1,11 %	1,65000	51,69 %	$+8,2 \cdot 10^{-1}$	$+8,2 \cdot 10^{-1}$
6,5	1	0,97470	0,97470	-0,00 %	1,46667	50,47 %	$+7,6 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,04309	1,03069	-1,19 %	1,65000	58,18 %	$+9,6 \cdot 10^{-1}$	$+9,6 \cdot 10^{-1}$
7,0	1	0,93850	0,93850	-0,00 %	1,46667	56,28 %	$+8,8 \cdot 10^{-1}$	--
	2	1,00123	0,98863	-1,26 %	1,65000	64,80 %	$+1,1$	$+1,1$
7,5	1	0,90435	0,90435	-0,00 %	1,46667	62,18 %	$+1,0$	--
	2	0,96202	0,95047	-1,20 %	1,65000	71,51 %	$+1,3$	$+1,3$

**Tabla 5.12:** Parámetros de los materiales utilizados

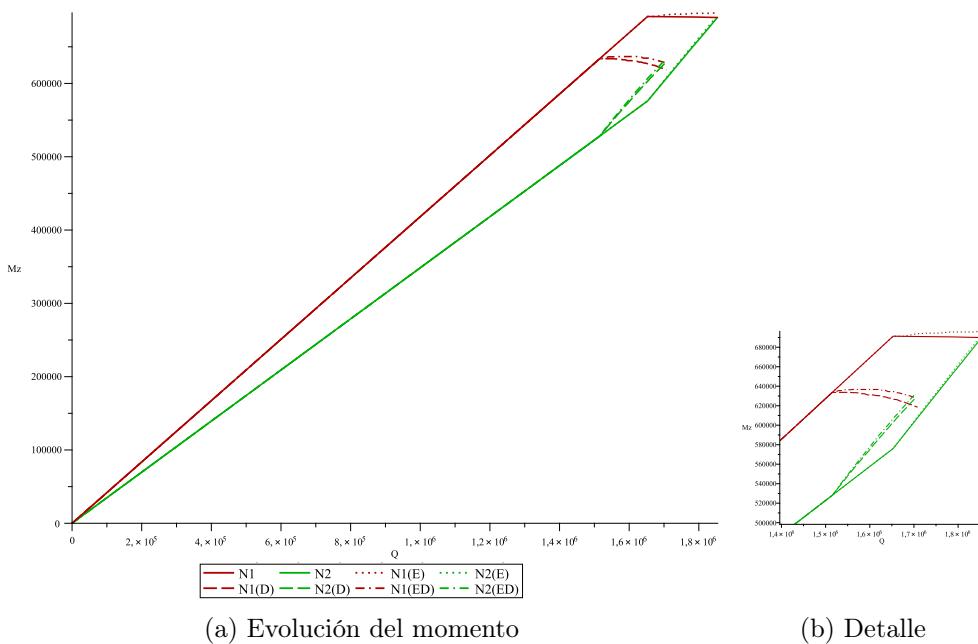
Not.	Descripción	$\varepsilon \cdot 10^{-3}$		$\sigma [MPa]$		$E [GPa]$	
		$\varepsilon_f$	$\varepsilon_r$	$\sigma_f$	$\sigma_r$	$E_f$	$E_r$
N	Material elastoplástico ideal	1,310	$1,0 \cdot 10^3$	275	275	210,0	0,00
N (E)	Material elastoplástico con endurecimiento	1,310	$1,0 \cdot 10^3$	275	325	210,0	$5,00 \cdot 10^{-4}$
N (D)	Material elastoplástico con daño	1,310	2,6	275	275	210,0	0,00
N (ED)	Material elastoplástico con daño y endurecimiento	1,310	2,6	275	325	210,0	38,75

Así, el momento en la sección plastificada (nodo 1, líneas rojas) permanece prácticamente constante (disminuye levemente a causa del aumento del esfuerzo cortante). Sin embargo, con endurecimiento dicho momento aumenta progresivamente, con daño disminuye y cuando se consideran ambos primero crece y después disminuye, ya que sus efectos son opuestos. La línea verde indica la evolución del momento en el nodo 2, que plastifica en el instante de colapso y por tanto su valor final es exactamente el momento plástico de esa sección con ese material, mientras que el valor final del momento en el nodo 1 podrá ser inferior o superior, dependiendo del material considerado. Al tomar diferentes materiales en cada caso, el momento plástico de la sección es diferente y por ello las secciones pueden plastificar a diferentes cargas.

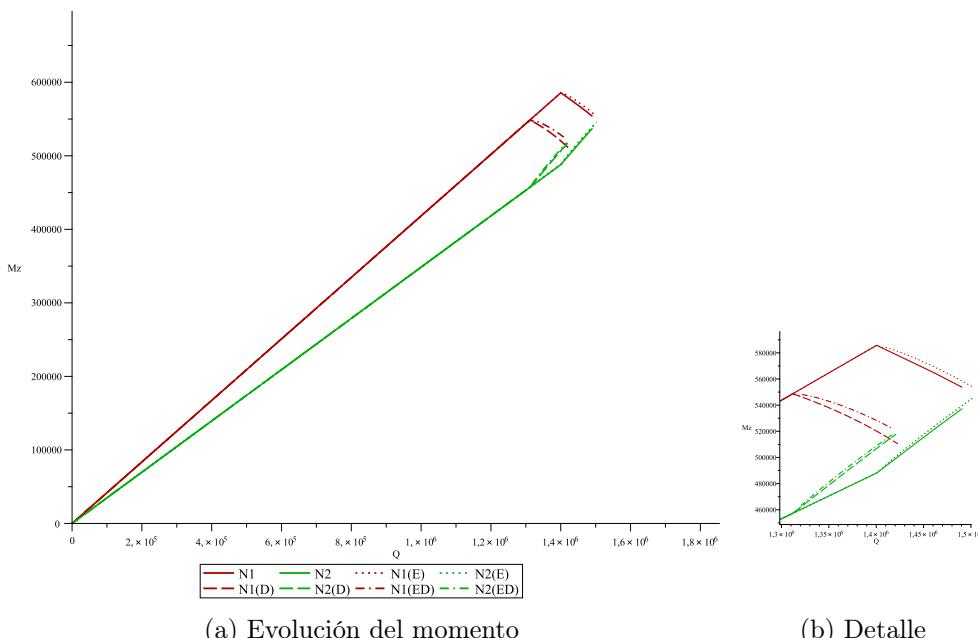
Aumentando el valor de  $\alpha$  a 3,5 el axil adquiere mayor importancia y se observa en la Figura 5.37 que los momentos necesarios para la plastificación de las secciones son mucho menores. Además, tras la plastificación de la primera sección, el momento siempre decrece por el aumento del esfuerzo axil en cada incremento de carga, aunque en mayor o menor medida según el material considerado, gracias al efecto del daño o del endurecimiento.

Tomando un valor  $\alpha = 7,5$  se observa en la Figura 5.38 que los momentos plásticos son aún menores y la disminución de éstos tras la plastificación mucho más acusada, resultando más irrelevante la elección del material en la evolución de su estado.

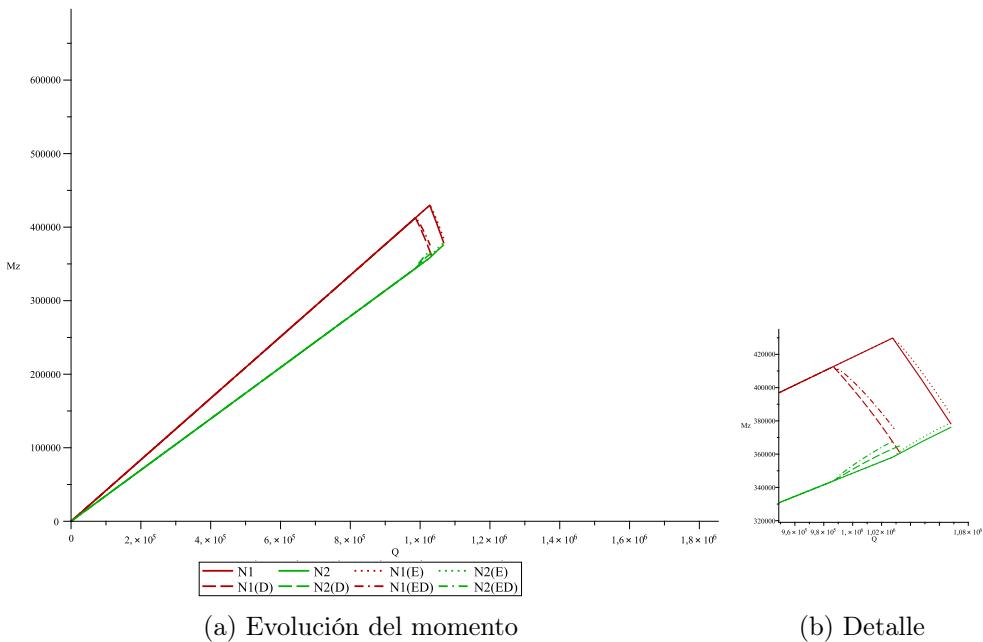
En la Figura 5.39 se puede observar la comparación entre los diferentes resultados.



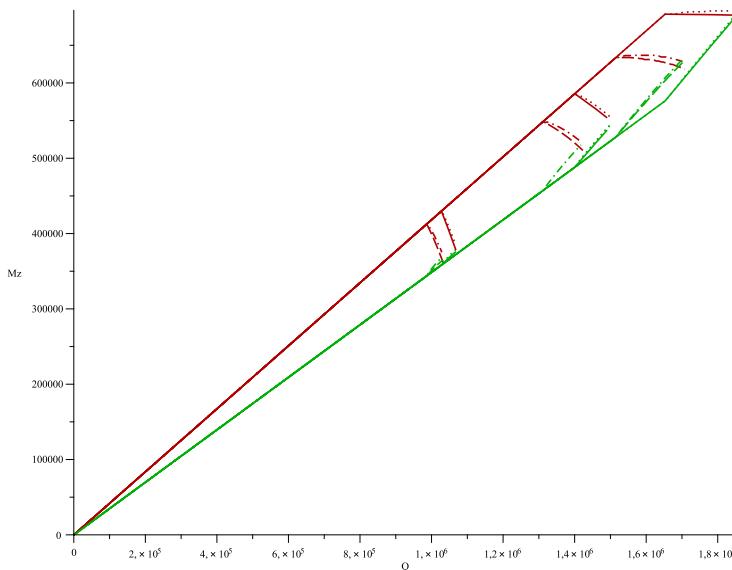
**Figura 5.36:** Evolución del momento frente a la carga ( $\alpha = 0,0$ )



**Figura 5.37:** Evolución del momento frente a la carga ( $\alpha = 3,5$ )



**Figura 5.38:** Evolución del momento frente a la carga ( $\alpha = 7,5$ )



**Figura 5.39:** Evolución del momento frente a la carga (comparación)

# Capítulo 6

## Conclusiones y desarrollo futuro

### Contenidos

---

6.1.	Principales conclusiones . . . . .	166
6.2.	Aportaciones originales . . . . .	169
6.3.	Posibles líneas de desarrollo futuro . . . . .	171

---

## 6.1. Principales conclusiones

En esta Tesis se han desarrollado una serie de modelos simplificados para aproximar el comportamiento no lineal de estructuras planas de barras. Los materiales se solicitan más allá del régimen elástico, llegando a la plasticidad, a la rotura y a un eventual colapso de la estructura.

El punto de partida es el Método Directo de Rigidez, método matricial que calcula las incógnitas de un problema estructural considerando su matriz de rigidez y las condiciones de contorno a las que está sometida. Se consideran únicamente estructuras planas formadas por barras rectas. Con este método pueden determinarse todos los desplazamientos y fuerzas en los nodos, las reacciones en los apoyos, los esfuerzos en todas las barras y la deformada de la estructura bajo carga.

La aplicación secuencial de dicho método forma la base del cálculo plástico paso a paso desarrollado posteriormente. En éste se identifica la sección donde aparece una rótula plástica a medida que aumenta la carga, se resuelve el problema incremental para dicho valor y se actualiza posteriormente la estructura añadiendo la rótula en ese punto. Acumulando las sucesivas soluciones incrementales, se obtiene la evolución de la estructura a medida que se van formando rótulas plásticas en diferentes secciones, hasta el instante último en el que la estructura incremental tiene un movimiento de sólido rígido. Las limitaciones de este modelo se reflejan en el concepto utilizado de rótula plástica concentrada súbita, causada únicamente por momento flector: se modela el material como elastoplástico lineal, de forma que a partir de la tensión de fluencia se supone un incremento nulo de tensión para cualquier incremento de deformación, y se obvia la contribución de los esfuerzos axil y cortante en la reducción de la carga necesaria para la formación de las sucesivas rótulas plásticas.

Dicho modelo secuencial se amplía posteriormente con la introducción del concepto de sección plastificada en lugar de rótula plástica. De esta forma, se llevará a cabo un cálculo plástico que, por un lado, considerará un material elastoplástico con daño, asumiendo que para cierto valor de deformación la fibra del material se romperá, y por otro, tendrá en cuenta la combinación de los tres esfuerzos para evaluar la plastificación de las secciones. Ambas contribuciones se recogen en la función de plastificación que permite calcular la carga necesaria para la plastificación de las secciones. Sin embargo, no se puede calcular directamente la siguiente sección

en plastificar, puesto que, a medida que progresá la carga, las condiciones en las secciones varían, por lo que se recurre a pequeños incrementos de carga, y en cada uno de ellos a iteraciones que aseguran el equilibrio. En este modelo se introduce una nueva matriz de rigidez elastoplástica degradable que tiene en cuenta los efectos del acoplamiento de esfuerzos y del daño de las secciones. La formulación del modelo de daño se realiza en el marco de la Mecánica del Daño Continuo, utilizando una serie de parámetros de daño para evaluar su evolución.

Finalmente, se considera un material con un comportamiento bilineal, con un tramo elástico hasta el punto ( $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_f$ ) y plástico con endurecimiento hasta ( $\varepsilon_r$ ,  $\sigma_r$ ), definido por tanto de forma completa con cuatro parámetros. Las hipótesis empleadas para formular este modelo son las comúnmente aceptadas en Resistencia de Materiales. Se utilizarán cinco tipos de secciones bisimétricas (rectangulares macizas y huecas, circulares macizas y huecas y doble T) y se considerará plastificación por una combinación de los tres esfuerzos considerados y daño. Sin embargo, tras el agotamiento de una sección, con los posteriores incrementos de carga aumentará su deformación y el momento soportado por ellas podrá variar (aumentando por efecto del endurecimiento o disminución por efecto del daño) de forma que la combinación existente de esfuerzos y daño anule la función de plastificación en todas las sección agotadas. En este modelo se han determinado los esfuerzos y las funciones de plastificación para cada sección considerada y se ha desarrollado una matriz elastoplástica degradable para el elemento barra 2D que relaciona los esfuerzos con los desplazamientos y el daño. La formulación del problema es incremental e iterativa, de forma que las sucesivas soluciones obtenidas para cada incremento de carga cumplan en todo momento con las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento (elástico y plástico) y se evalúe en todas las secciones plastificadas anteriormente la variación de esfuerzos y daño. Este modelo incluye a los anteriores, ya que los valores de los cuatro parámetros que definen el material pueden ajustarse para obtener los comportamientos descritos anteriormente y la función de plastificación puede particularizarse para la consideración de los distintos esfuerzos.

El interés de este método desarrollado radica en que los valores de los cuatro parámetros que definen el material ( $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\varepsilon_r$  y  $\sigma_r$ ) pueden ajustarse mediante técnicas de *Model Updating* para simular con un buen nivel de precisión el comportamiento real de las estructuras, conocido éste a partir de información experimental, mediante ensayos, o numérica,

mediante simulación. Con esta filosofía, a partir de los resultados de un experimento real se han ajustado los parámetros del programa de elementos finitos Metafor, considerando por tanto sus resultados como referencia para los procesos de *Model Updating* de ajuste de los cuatro parámetros mencionados, realizados sobre el modelo elastoplástico con daño y endurecimiento desarrollado. Para ello ha sido necesario formular un método incremental e iterativo capaz de llegar a una solución que, cumpliendo con todos los requerimientos del problema, se ajusta al comportamiento de la estructura conocido mediante otras técnicas numéricas o experimentales. Se resuelve el problema en términos de las variables monodimensionales del modelo de barras (esfuerzos en cada sección y desplazamientos y giros de la directriz de la barra) y en cada instante de carga se garantizan las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento, elástico y plástico.

Aunque tras la formulación matricial y la discretización solo un número reducido de estas variables (esfuerzos axil, cortante y momento flector, desplazamientos y giros) es expresamente conocido en los nodos, es posible obtener su distribución en toda la estructura (diagramas de esfuerzos y forma deformada), lo cual supone una ventaja sobre los modelos generales de elementos finitos. Adicionalmente, aunque la capacidad actual de las aplicaciones numéricas basadas en el método de los elementos finitos permite abordar con éxito el problema, el esfuerzo computacional necesario para ello es muy alto, su manejo exige dilatados tiempos de formación y los resultados obtenidos no son interpretables de forma directa. En general es preciso recurrir a discretizaciones finas mediante elementos volumétricos donde las variables de cálculo son tensiones, deformaciones y desplazamientos a nivel de punto, en los nodos.

La formulación monodimensional realizada permite conocer la solución para cada carga en términos de las magnitudes de uso común en ingeniería civil y en arquitectura y realizar comprobaciones siguiendo las recomendaciones de las normativas respecto al comportamiento elastoplástico de las secciones.

## 6.2. Aportaciones originales

Se resumen a continuación algunas de las aportaciones originales de la presente Tesis:

- Estudio de los esfuerzos elásticos y plásticos de las secciones rectangular maciza, rectangular hueca, circular maciza, circular hueca y doble T.
- Desarrollo de un modelo versátil de análisis elastoplástico de estructuras con daño y endurecimiento, de forma que las condiciones en las secciones agotadas pueden cambiar tras la plastificación, aumentando el momento por causa del endurecimiento o disminuyendo a causa del daño, de forma que todas ellas se encuentren sobre la superficie de plastificación.
- Proceso de actualizado (*model updating*) de parámetros del material del modelo de análisis elastoplástico para ajustar el comportamiento de estructuras reales.
- Modelo para la obtención del daño de la sección a partir de los resultados puntuales ofrecidos por los métodos de elementos finitos basados en elementos 3D.
- Procesos numéricos y algoritmos informáticos:
  - Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso. Aplicación secuencial del Método Directo de Rigidez donde, tras identificarse la sección en la que aparece una rótula plástica a medida que aumenta la carga, se actualiza la estructura añadiendo la rótula, resolviendo el problema incremental y acumulando la solución hasta el instante último, marcado por el momento en el que la estructura incremental tiene movimiento de sólido rígido. El material utilizado es elastoplástico ideal y las rótulas se forman únicamente a causa del momento flector en la sección.
  - Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso y Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño. Incluye el concepto de sección plastificada en lugar de rótula plástica, ya que la sección se agota por una combinación de esfuerzos y la acción del daño. En este modelo se incrementa

la carga de forma gradual y se itera en cada incremento, ya que a medida que progresá la carga las condiciones en las secciones agotadas van cambiando. El material utilizado es elastoplástico con daño y para calcular la evolución del daño se utiliza un modelo basado en la mecánica del daño continuo.

- Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso, Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño y Endurecimiento. En este método también se utiliza el concepto de sección plastificada y también será necesario iterar para lograr el equilibrio en todas las secciones agotadas anteriormente a medida que aumenta la carga. El material utilizado es elastoplástico con daño y endurecimiento, por lo que las condiciones en las secciones plastificadas pueden cambiar de manera que el momento en ellas crezca por acción del endurecimiento y/o disminuya como consecuencia del daño, para cuya evolución se utiliza un modelo basado en la resistencia de materiales. Es un caso general que engloba a los anteriores y será por tanto en éste en el que se apliquen las técnicas de *model updating* desarrolladas, que cambian los valores de los cuatro parámetros que definen el material hasta que la respuesta predicha coincide con la respuesta real.
- Los algoritmos informáticos permiten la resolución de estructuras con diferentes materiales y secciones para cada barra, además de poder definir las cargas externas y las condiciones de las uniones y apoyos.

Todo ello permite analizar el comportamiento elastoplástico de estructuras planas de secciones bisimétricas hasta el colapso con unos modelos de diferente exactitud que además pueden ajustarse para lograr que sus respuestas coincidan con las consideradas correctas en cada caso, obtenidas mediante experimentación o simulación.

Algunas de estas aportaciones originales han dado lugar a ponencias en congresos y a distintos artículos científicos publicados en revistas internacionales.

### 6.3. Posibles líneas de desarrollo futuro

Alguna de las líneas de desarrollo futuro relacionadas con este trabajo son las siguientes:

- Optimización y ampliación del código: implementación de técnicas de convergencia acelerada, interfaz gráfica para la introducción de la estructura y sus propiedades, etc.
- Ampliación del estudio a otras secciones u otras orientaciones espaciales.
- Aplicación al comportamiento dinámico del sistema, lo cual además permitiría utilizar los resultados de un análisis modal (respuesta en frecuencia, forma modal, frecuencia natural, etc.) para los procesos de *model updating*. Aplicación de dicho análisis para la detección de daño en estructuras.
- Introducción de cargas secuenciales, cíclicas y de procesos de descarga, lo cual implica la reformulación de los algoritmos, planteados como acumulativos ante cargas monótonas crecientes.
- Ampliación del cálculo para sistemas de barras tridimensionales. Implica una reestructuración de los procesos teóricos y numéricos y además la consideración de todos los esfuerzos (aparecen en la Figura 2.2b), tanto para el comportamiento general de la estructura, como para la determinación de una nueva función de fluencia que los tenga en cuenta junto con el daño.
- Estudio de la temperatura, no solo como carga externa (ya considerado en este estudio), sino también como factor de influencia en las propiedades del material (tensiones límite, módulo de Young, etc.) lo cual incrementará la no linealidad del modelo. De esta forma se podría calcular la temperatura máxima que sería capaz de aguantar una estructura sometida a determinadas acciones exteriores, modelando así una situación de incendio.
- Consideración de otros fenómenos: abolladuras locales (ampliación a secciones de clase 3 y 4), estudios de inestabilidad local y global, plastificación distribuida, estudios de carga y descarga, otros dominios de plastificación, etc.

Estos desarrollos son en algunos casos laboriosos, ya que implican la reestructuración de procesos teóricos, numéricos y de programación, pero factibles en general. No se ha considerado necesario incluirlos en esta Tesis y se dejan como futuras líneas que completarán el estudio de estructuras de barras con comportamiento elastoplástico hasta el colapso.

# **Capítulo 7**

## **Abstract, conclusions and future research**

Cumpliendo con las regulaciones para la obtención de la Mención Internacional en el título de Doctor del Art. 15 del RD 99/2011 del 28 de enero, por el que se regulan las enseñanzas oficiales de doctorado, en este capítulo se recoge el Resumen y el Capítulo 6: Conclusiones y desarrollo futuro en el idioma inglés.

### **Contents**

---

<b>7.1. Abstract . . . . .</b>	<b>174</b>
<b>7.2. Main conclusions . . . . .</b>	<b>177</b>
<b>7.3. Original contributions . . . . .</b>	<b>180</b>
<b>7.4. Future research . . . . .</b>	<b>182</b>

---

## 7.1. Abstract

In this study we develop increasingly complex models that try to approximate the nonlinear behavior of 2D beam structures from elastic behavior until collapse. These models are developed in an application based on the *beam* element, which allows us to conduct studies under different conditions, not only with changes in the structure geometry and loads for different beam sections, but also with the inclusion of different materials and behaviors and the proposal of various hypotheses. The materials are loaded beyond the elastic regime, reaching plasticity and rupture, thus including section and structural damage.

One of the main advantages of *beam* models versus other typical finite element modeling is the possibility of having continuous analytical expressions for describing each beam behavior (displacements, forces, etc.), instead of the point values at each node offered by any other calculation model using finite elements. In particular, the study was limited to 2D problems, so the *beam2D* model was used to represent each bar of the structure, with only three degrees of freedom per node (two translations and one rotation) and being defined solely by the position of their two end nodes.

The starting point is the Direct Stiffness Method, in which the elastic response (displacements and generalized stresses) is calculated for any 2D structure formed by straight beams for any load state (point or distributed load, temperature, initial deformation, etc.).

Expanding the scope of the study, a classic plastic calculation method is developed, considering the possible formation of plastic hinges due only to bending moment as a multiplier factor is increased. The plastic hinges can be formed at any point (section) of any beam of the structure (not only at its nodes), dividing the initial bars, looking for the successive points where the maximum moments are reached.

Then the plastic calculation method is completed, including the possibility of interaction between axial and shear stress and bending moment, so that instead of a plastic hinge appearing for a particular value of the bending moment on the section, a yield section would appear for a combination of all the stresses (axial, shear and bending moment) and also including the material damage due to the accumulation of plastic strain, obtaining the yield function. A new degradable elastoplastic stiffness matrix, which takes into account non-linearities of the material and damage

of the section as the outermost fibers reach the ultimate strength is introduced. The formulation of the damage model follows the CDM (*Continuum Damage Mechanics*), requiring a number of damage parameters that cannot be measured directly, proposed by various authors (Bonora, Lemaitre, Wang and Chandrankanth), which entail different results.

Finally, in order to estimate the bearing capacity of the beam sections and quantify their damage, the behavior of the material is characterized, simplifying the stress-strain behavior using a elastoplastic bilinear model (linear elastic followed by linear plastic with hardening) using four parameters for its definition. Therefore, the behavior of the material is elastic until the point  $(\varepsilon_f, \sigma_f)$  is reached and plastic behavior begins. It continues until the point  $(\varepsilon_r, \sigma_r)$  is reached and the material breaks. The hypotheses used to develop this model are the commonly accepted premises in Strength of Materials, resulting in some expressions for each model and for each section depending on a short number of parameters.

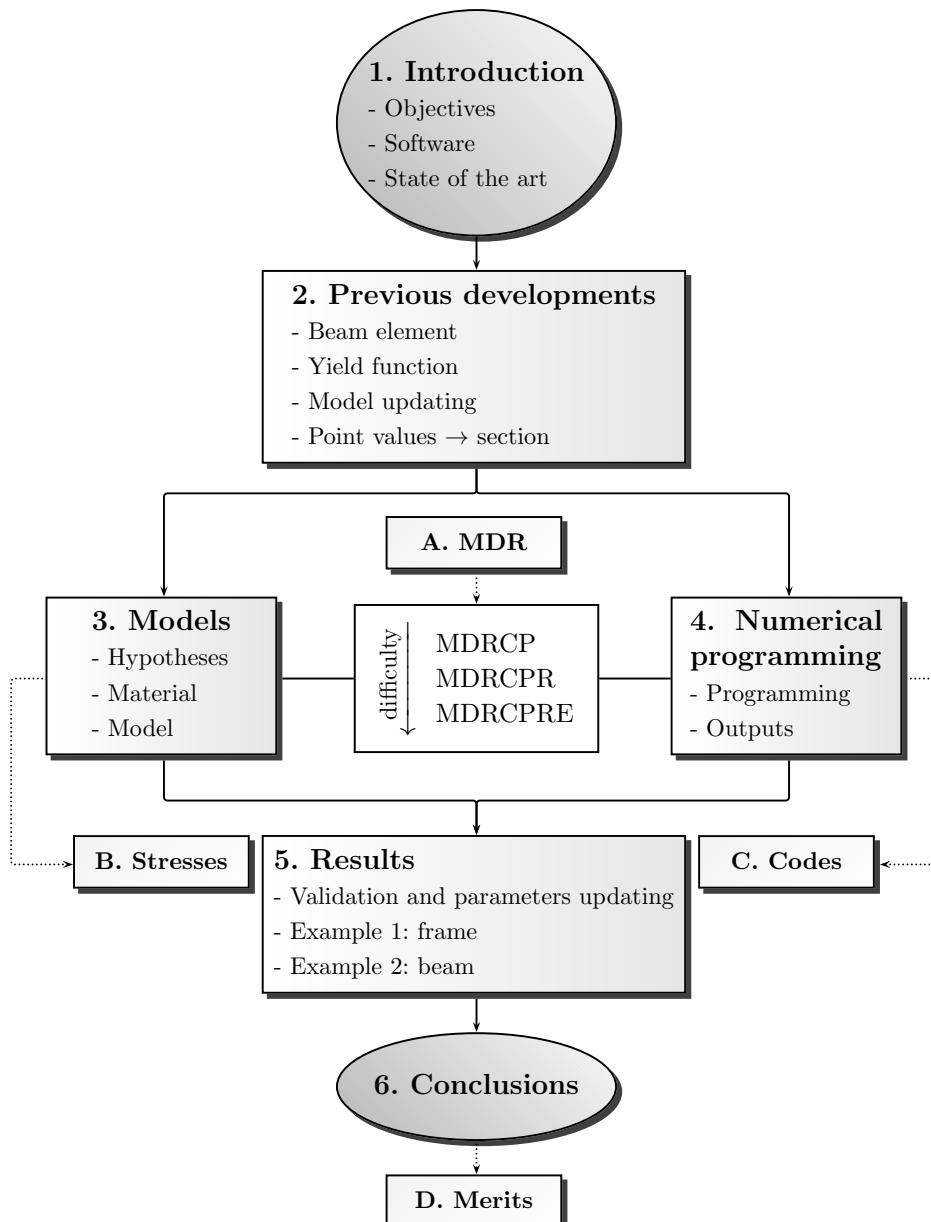
It is noted that however sophisticated the models are, the nonlinear behavior of the section and the frame as a whole can only be approximated, because there are several real effects that cannot be taken into account in any model based on *beam2D* elements: the complex stress-strain relationship of real materials; the residual stresses after hot rolling; the yielding, which does not occur in a single concentrated area but affects adjacent sections and which does not appear suddenly but progresses with increasing stresses; the Navier-Bernoulli hypothesis is applicable only to a certain extent in the elastic regime, etc.

The interest of the developed method lies precisely in the fact that, with these four parameters  $(\varepsilon_f, \sigma_f, \varepsilon_r$  and  $\sigma_r)$  and having enough numerical information (from simulations) and experimental information (behavior of the material and section and some reference structures, from tests), their values can be adjusted using *Model Updating* techniques and hence the method can be used to simulate, with good level of accuracy, the actual behavior of the frame until collapse.

Therefore, in this work a monodimensional computational model for the degradable elastoplastic analysis of 2D beam structures, including damage (quantified using a scalar variable of the section for each load) and hardening, is developed. The determination of these values may be interesting in order to estimate the reserve of resistance of certain structures undergoing overloads or accidental actions, such as earthquakes, allowing us to predict specific needs of intervention on the structures.

Some of the above have led to original contributions that have resulted in some conference presentations and scientific articles published in international journals. Some of them are collected at the end of this document.

The structure of this document is shown in Figure 7.1.



**Figura 7.1:** Structure of the document

## 7.2. Main conclusions

In this thesis, some simplified models have been developed to approximate the nonlinear behavior of 2D beam structures. The materials are loaded beyond the elastic regime, reaching plasticity, breakage and a possible collapse of the structure.

The starting point is the Direct Stiffness Method, a matrix method used to calculate the unknowns of a structural problem considering the stiffness matrix and the boundary conditions to which it is subjected. Only 2D structures formed by straight beams are considered. This method can determine all displacements and forces at the nodes, the reactions at the supports, the stresses in all beams and the deformed shape of the structure under loading.

The sequential application of this method is the basis of the classic plastic methods of structural analysis. After finding the section where the next plastic hinge will appear as the load increases, the incremental problem is solved for this value of the load and then the structure is updated by adding the hinge at this node. The accumulation of the successive incremental solutions gives the evolution of the structure as plastic hinges appear in different sections, until the last moment at which the incremental structure has rigid body motions. The limitations of this model are reflected in the use of the concept of a concentrated sudden plastic hinge caused solely by bending moment: the material is modeled as linear elastoplastic, so that after the yield stress is reached, a zero stress increase is assumed for any strain increase, and it also neglects the contribution of axial and shear stress on the reducing of the load necessary for the formation of successive plastic hinges.

This sequential model is then expanded with the introduction of the concept of yield section instead of plastic hinge. In this way, the plastic analysis will consider an elastoplastic material with damage, assuming that for a certain value of strain the fiber material will break; and it will also take into account the combination of the three stresses in order to evaluate the yielding of the sections. Both contributions are included in the yield function for calculating the necessary load for the yielding of sections. However, the next section which will yield cannot be calculated directly in a single step, because as the load increases, the conditions may change in the sections. Instead, the method uses small load increments with iterations within each of them to ensure the equilibrium. In this

model, a new degradable elastoplastic stiffness matrix is developed, and it takes into account the effects of coupling between stresses and damage of the sections. The formulation of the damage model is carried out in the framework of Continuum Damage Mechanics, using a number of damage parameters to evaluate its evolution.

Finally, a material with a bilinear behavior is considered, with an elastic zone until the point  $(\varepsilon_f, \sigma_f)$  is reached and a plastic with hardening zone until the point  $(\varepsilon_r, \sigma_r)$  is reached, thus defining it entirely with four parameters. The hypotheses used to formulate this model are commonly accepted in the Strength of Materials area. Five types of bisymmetrical sections will be used (solid and hollow rectangular, solid and hollow circular and wide flange) and yielding will be caused by a combination of the three considered stresses and damage. However, after the section has reached its ultimate strength, with the following load increments its strain will increase and the bending moment in this section will vary (increasing due to hardening or decreasing due to damage), so that the combination of stresses and damage will make the yield function zero in all the yield sections of the structure. In this model the plastic stresses and yield functions have been obtained for the five sections considered, and a degradable elastoplastic stiffness matrix has been developed, relating the stresses of a 2D beam with its displacements and damage at its nodes. The formulation of the problem is incremental and iterative, so that the successive solutions obtained for each load increment verify at all times the equilibrium, compatibility and constitutive (elastic and plastic) equations and also to evaluate in every yield section the variation of stress and damage. This model includes the previous models, since the values of the four parameters that define the material can be adjusted to obtain the behaviors described above and the yield function can be particularized to consider different stresses.

The advantage of this method is that the values of the four parameters which define the material ( $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\varepsilon_r$  and  $\sigma_r$ ) can be adjusted using model updating techniques to accurately simulate the actual behavior of structures, known from experimental data, by testing, or numerical simulation. Therefore, based on the results of an actual experiment, the parameters of the finite element program Metafor have been adjusted, considering its results as a reference for the modal updating processes of the four parameters mentioned above, performed on the elastoplastic model with damage and hardening. For this reason, it has been necessary to formulate an incremental and iterative method able to obtain a

solution which meets all the requirements of the problem and to adjust the behavior of the structure, known by other numerical or experimental techniques. This solves the problem in terms of the beam model variables (stresses in each section and displacements and rotations in the center line of the beam) and for each loading increment all the equilibrium, compatibility and constitutive (elastic and plastic) equations are fulfilled.

Although after the matrix formulation and the discretization only a small number of these variables (axial and shear stress, bending moment, displacements and rotations) are explicitly known at the nodes, it is possible to obtain their distribution throughout the structure (beam diagrams and deformed shape), which is an advantage over other general finite element models. Additionally, while the current capacity of numerical applications based on finite element method can solve the problem properly, the computational effort required for this is very high, its use requires lengthy training times and results are not interpretable directly. In general it is necessary to use fine discretizations using volumetric elements where the calculations include variables such as stresses, strains and displacements in the nodes.

Once that the one-dimensional formulation has been developed, the solution for each load can be obtained in terms of quantities commonly used in civil engineering and architecture, allowing to check the recommendations of the regulations regarding the elastoplastic behavior of the sections.

### 7.3. Original contributions

Some of the original contributions of this thesis are summarized below:

- Study of elastic and plastic stress of solid and hollow rectangular, solid and hollow circular and wide flange sections.
- Development of a versatile elastoplastic structure analysis model with damage and hardening. The conditions in the sections which have reached its ultimate strength can change after yielding, increasing the bending moment due to hardening or decreasing due to damage, so all of them stay in the yielding surface.
- Model updating process of material parameters of the elastoplastic analysis to accurately simulate the actual behavior of structures.
- Model for obtaining section damage from point results of finite element methods based on 3D elements.
- Computer algorithms and numerical processes:
  - Direct Stiffness Method with step-by-step plastic calculation. Sequential application of the Direct Stiffness Method where, after an incremental problem is solved for a value of the load calculated to make the next hinge of the section appear, the structure data are updated with the new hinge and a new incremental problem is solved. The evolution of the structure is obtained by accumulating the successive incremental solutions until a rigid body motion is detected. The material used in this model is perfectly elastoplastic and hinges appear due only to bending moment in the section.
  - Direct Stiffness Method with step-by-step plastic calculation and reduction of the plastic moment by combination of stresses and damage. It includes the concept of yield section instead of plastic hinge: the section reaches its ultimate strength with a combination of stresses and the effect of damage. In this model the load is gradually increased, having iterations within each increment, because the conditions on the sections can change with the load. The material used in this model is elastoplastic with damage and the evolution of damage is calculated using some models based on the Continuum Damage Mechanics.

- Direct Stiffness Method with step-by-step plastic calculation and reduction of the plastic moment by combination of stresses and damage and hardening. This method uses the concept of yield section and it also uses iterations within each load increment to ensure the equilibrium in all the sections of the structure which have previously reached their ultimate strength. The material used in this model is elastoplastic with damage and hardening, in order to allow the bending moment in these sections to increase due to hardening or to decrease due to damage. For the evolution of damage, a model based on the Strength of Materials is used. This model is a general case that covers all of the above and it is therefore the one where the model updating techniques developed are applied, changing the values of the four parameters which define the material until the predicted response matches the actual response.
- The computer algorithms can solve structures with different materials and sections on each beam, and they allow us to define external loads and conditions of the joints and supports.

This allows us to analyze the behavior of 2D elastoplastic structures with bisymmetrical sections until collapse, with models of different accuracy that may also be updated to ensure that their results match the actual responses, obtained by experiment or simulation.

Some of these original contributions have resulted in several conference presentations and scientific articles published in international journals.

## **7.4. Future research**

Some of the future research lines related to this work are the following:

- Optimization and extension of the code: implementation of accelerated convergence techniques, graphical interface for data introduction, etc.
- Expansion of the study to other sections or other spatial orientations.
- Application to the dynamic behavior of the system, which would also allow to use the results of a modal analysis (frequency response, modal shape, natural frequency, etc.) for the model updating processes. Application of this analysis to damage detection in structures.
- Introduction of sequential loads, cyclic loads and discharge processes, which involves the reformulation of algorithms, posed as cumulative with monotonic loads.
- Extension of the calculations for 3D beam structures. It involves a restructuring of the theoretical and numerical processes and also the consideration of all stresses (shown in Figure 2.2b) for both the general behavior of the structure and for the determination of a new yield function that takes all of them into account along with the damage.
- Study of the temperature not only as an external load (as considered in this study), but also as a factor influencing the properties of the material (limit stress, Young's modulus, etc.), which would increase the nonlinearity of the model. This way, the maximum temperature that a structure would be capable of supporting when subjected to certain external loads could be calculated, modeling a fire situation.
- Consideration of other phenomena: local buckling phenomena (extension to class sections 3 and 4), studies of local and global instability, distributed yielding, loading and unloading studies, other yielding domains, etc.

Some of these developments are laborious, since they involve restructuring theoretical, numerical and programming processes, but they are generally feasible. It was not considered necessary to include them in this thesis and they are left as future research lines that will complete the study of beam structures with elastoplastic behavior until collapse.



# Apéndices

# Apéndice A

## Método Directo de Rigidez (MDR)

### Contenidos

---

A.1. Hipótesis . . . . .	187
A.2. Material elástico lineal . . . . .	187
A.3. Modelo . . . . .	188

---

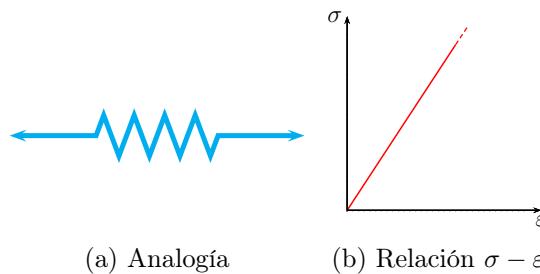
## A.1. Hipótesis

La única hipótesis adicional respecto a las mencionadas en el Apartado 3.1 se refiere al comportamiento del material, que en este caso será elástico lineal.

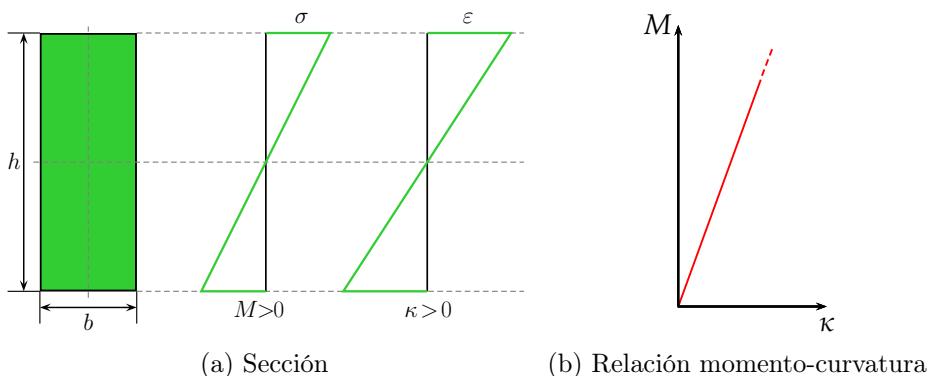
## A.2. Material elástico lineal

El comportamiento de una sección de un elemento barra 2D modelada con un material elástico lineal (Figura A.1) y sometida a flexión es sencillo: el estado tensional se adaptará de forma lineal para permanecer en equilibrio. La deformación de la sección será siempre plana y con un máximo proporcional a la curvatura  $\kappa$ , de forma que  $\varepsilon_{\max,\min} = \pm h\kappa/2$ , siendo  $h$  el canto de la sección (Figura A.2).

Dicho comportamiento es análogo al de un muelle a tracción dentro de su rango elástico.



**Figura A.1:** Ley de comportamiento elástico lineal

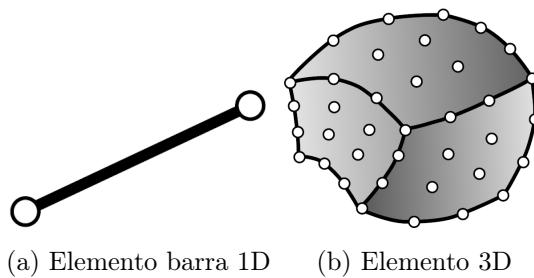


**Figura A.2:** Comportamiento de la sección con modelo elástico lineal

### A.3. Modelo

El Método Directo de Rigidez (MDR) es un método matricial que calcula las incógnitas de un determinado problema estructural (fuerzas o desplazamientos), considerando la matriz de rigidez de la estructura y las condiciones de contorno, en desplazamientos o fuerzas, a las que está sometida. Es la aplicación más simple del Método de los Elementos Finitos (MEF).

Este método discretiza en elementos la estructura completa. Los elementos pueden ser tan simples como una barra unidimensional, definida por la posición de sus puntos inicial o final (2 nodos) o tan complejos como un cuerpo tridimensional de 64 nodos (Figura A.3). El MDR tratará a todos sus elementos de la misma forma [22].



**Figura A.3:** Elemento más sencillo y más complejo

Como se ha mencionado, se consideran únicamente estructuras planas formadas por barras de directriz recta, definidas por sus nodos inicial y final, las constantes elásticas de su material y las propiedades de su sección. A cada elemento barra se le asigna una matriz de rigidez elemental, que relaciona las fuerzas en sus nodos, equivalentes a las fuerzas aplicadas sobre la barra, con los desplazamientos y giros de dichos nodos, que a su vez determinan la deformada de la barra. Dicha matriz de rigidez depende de su longitud y sección, de su material y de las condiciones de enlace de sus extremos.

Considerando una viga de longitud  $L$ , sección transversal  $A$  y módulo de inercia  $I_z$ , sobre la que actúa una serie de cargas contenidas en el plano  $xy$  (plano principal de inercia de la sección transversal), se puede determinar la matriz de rigidez del elemento barra, suponiendo que no se presentan fenómenos de inestabilidad elástica [13]. Despreciando las deformaciones debidas al cortante, se puede obtener la matriz de rigidez

del elemento barra 2D considerando los seis grados de libertad nodal total:

$$[K_{00}] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

De forma similar, se presentan a continuación las matrices de rigidez del elemento barra con el primer nodo articulado y el segundo rígido (Ecación A.2), con el primer nodo rígido y el segundo articulado (Ecación A.3) y con ambos nodos articulados (Ecación A.4).

$$[K_{10}] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$[K_{01}] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Dichas barras se unirán unas con otras considerando común alguno de los nodos de cada barra de la unión. En cada elemento discretizado se plantean las ecuaciones de rigidez, que se ensamblarán en una matriz global que incluya todos los elementos, con los correspondientes cambios de ejes de referencia. De esta forma se obtiene la matriz de rigidez global de la estructura, que relaciona los desplazamientos y giros de los nodos con las fuerzas y momentos equivalentes sobre los mismos.

Después de imponer las condiciones de contorno se pueden determinar todos los desplazamientos (variables primarias) en todos los nodos y, tras ello, determinar los valores de los esfuerzos en los nodos y los diagramas de los esfuerzos en todas las barras. Asimismo, es posible calcular las reacciones en los apoyos.

# Apéndice B

## Esfuerzos para secciones bisimétricas

### Contenidos

---

<b>B.1.</b> Clases de secciones (CTE) . . . . .	<b>193</b>
<b>B.2.</b> Secciones bisimétricas . . . . .	<b>197</b>
<b>B.3.</b> Obtención de esfuerzos . . . . .	<b>200</b>
B.3.1. Rectangular maciza . . . . .	203
B.3.2. Rectangular hueca . . . . .	206
B.3.3. Circular maciza . . . . .	211
B.3.4. Circular hueca . . . . .	213
B.3.5. Doble T . . . . .	218
B.3.6. Comparación . . . . .	223
<b>B.4.</b> Esfuerzos plásticos para secciones bisimétricas	<b>227</b>
B.4.1. Rectangular maciza . . . . .	228
B.4.2. Rectangular hueca . . . . .	229
B.4.3. Circular maciza . . . . .	229
B.4.4. Circular hueca . . . . .	230
B.4.5. Doble T . . . . .	230
B.4.6. Comparación . . . . .	236
<b>B.5.</b> Expresiones completas de los esfuerzos plásticos . . . . .	<b>238</b>
B.5.1. Rectangular maciza . . . . .	238

---

B.5.2. Rectangular hueca . . . . .	242
B.5.3. Circular maciza . . . . .	249
B.5.4. Circular hueca . . . . .	253
B.5.5. Doble T . . . . .	263

---

## B.1. Clases de secciones (CTE)

El Código Técnico de la Edificación (CTE) vigente en España actualmente desde su publicación en el BOE del 28 de marzo de 2006, establece una clasificación de las secciones de acero en función de la capacidad de deformación y de desarrollo de la resistencia plástica de los elementos planos comprimidos de éstas al estar solicitadas por un momento flector [17].

Esta clasificación divide a las secciones transversales solicitadas por momentos flectores en cuatro clases:

**Clase 1: plástica.** Permite la formación de la rótula plástica con la capacidad de rotación suficiente para la redistribución de momentos. Es decir, alcanza el momento plástico sin presentar problemas de inestabilidad y además existe una rotación suficiente como para considerar una rótula plástica tal y como se entiende en un análisis plástico.

**Clase 2: compacta.** Permite el desarrollo del momento plástico con una capacidad de rotación limitada. Es decir, alcanza el momento plástico, pero su capacidad de rotación no es suficiente para formar rótulas plásticas. Estas secciones pueden aprovechar al máximo el material, pero no permiten considerar para la estructura mecanismos de rotura de tipo plástico.

**Clase 3: semicompacta o elástica.** En la fibra más comprimida se puede alcanzar el límite elástico del acero pero la abolladura impide el desarrollo del momento plástico. Es decir, la abolladura local se produce antes de alcanzar el momento plástico, pero una vez superado el momento elástico. Por ello, el momento resistente de la sección se considerará igual al elástico.

**Clase 4: esbelta.** Los elementos total o parcialmente comprimidos de las secciones esbeltas se abullan antes de alcanzar el límite elástico en la fibra más comprimida.

La clasificación de secciones de acero en una u otra clase depende del límite elástico del material, de las posibles vinculaciones laterales de las zonas comprimidas y de la geometría y extensión de las zonas del panel comprimidas, que a su vez depende de la geometría de la sección

y los esfuerzos que producen tensiones normales en ella: esfuerzo axil y momentos flectores.

Para la verificación de la seguridad estructural de cada uno de estos tipos de secciones se emplean los métodos de cálculo recogidos en la Tabla B.1, tanto para las solicitudes, como para la resistencia de las secciones.

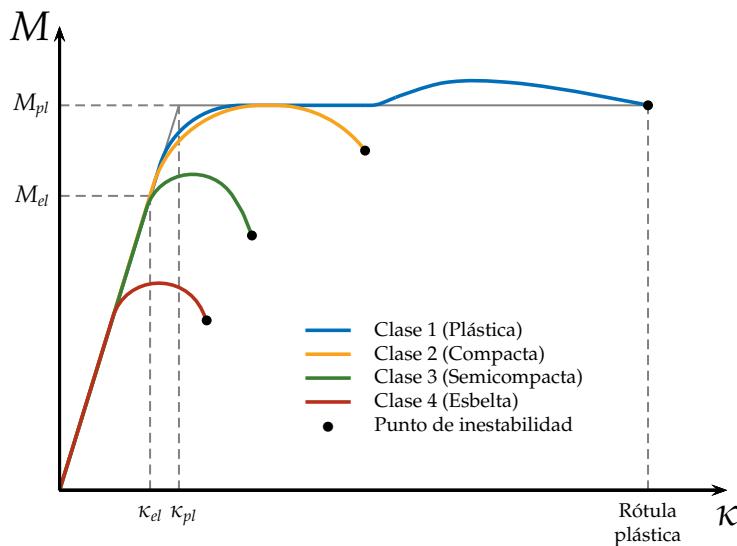
**Tabla B.1:** Métodos de cálculo para cada tipo de sección (CTE)

Clase de sección	Solicitudes		Resistencia	
	Elástico	Plástico	Elástico	Plástico
Plástica	✓	✓	✓	✓
Compacta	✓		✓	✓
Semicompacta	✓		✓	
Esbelta	✓ <sup>a</sup>		✓ <sup>b</sup>	

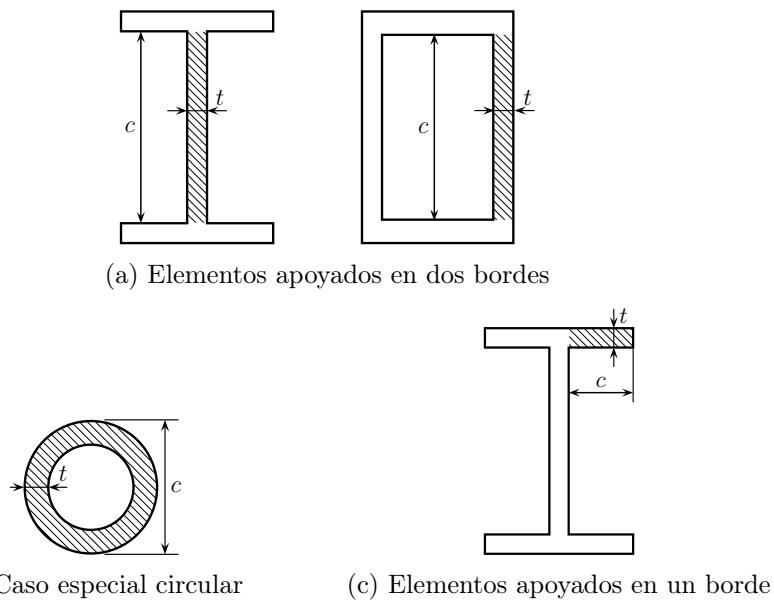
<sup>a</sup> Con posible reducción de rigidez

<sup>b</sup> Con resistencia reducida

El comportamiento del material de estas secciones se muestra a través del diagrama momento-curvatura de la Figura B.1 incluido en la Instrucción de Acero Estructural (EAE) [18]. En él se aprecia que la clase 1 de sección es la única en la que se llega a una rótula plástica antes de que se produzca una inestabilidad local (abolladura) y que la clase 2 también alcanza el momento plástico sin presentar problemas de inestabilidad aunque con una capacidad de rotación menor. Por ello, desde este punto de vista, la aplicación de la presente Tesis se limita a dichas secciones de clases 1 y 2, cuyas limitaciones geométricas recomendadas, en función del tipo de acero, se recogen en la Tabla B.2 para los elementos de las geometrías mostrados en la Figura B.2.

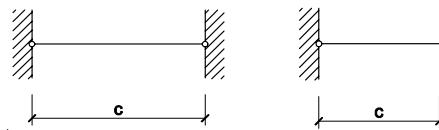


**Figura B.1:** Leyes de momento-curvatura para las secciones transversales de clases 1 a 4, [18]



**Figura B.2:** Elementos considerados para los límites de esbeltez

**Tabla B.2:** Límites de esbeltez ( $c/t$  máximo) para elementos planos de Clases 1 y 2, total o parcialmente comprimidos (CTE)



Sección	Solicitud	Figura B.2a	Figura B.2b	Figura B.2c
Clase 1	Compresión	$33\varepsilon$	$50\varepsilon^2$	$9\varepsilon$
	Flexión simple	$72\varepsilon$	$50\varepsilon^2$	--
	Flexocompresión $\alpha \geq 0,5$	$\frac{396\varepsilon}{13\alpha - 1}$	$50\varepsilon^2$	$\frac{9\varepsilon_a}{\alpha}$ $\frac{9\varepsilon_b}{\alpha^{1,5}}$
	Flexotracción $\alpha \leq 0,5$	$\frac{36\varepsilon}{\alpha}$	--	--
	Compresión	$38\varepsilon$	$70\varepsilon^2$	$10\varepsilon$
	Flexión simple	$83\varepsilon$	$70\varepsilon^2$	--
Clase 2	Flexocompresión $\alpha \geq 0,5$	$\frac{456\varepsilon}{13\alpha - 1}$	$70\varepsilon^2$	$\frac{10\varepsilon_a}{\alpha}$ $\frac{10\varepsilon_b}{\alpha^{1,5}}$
	Flexotracción $\alpha \leq 0,5$	$\frac{41,5\varepsilon}{\alpha}$	--	--
	$\alpha$ : % de longitud comprimida $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{\sigma_f}}$ : factor de reducción			

<sup>a</sup> Borde libre comprimido

<sup>b</sup> Borde libre traccionado

## B.2. Secciones bisimétricas

En este apartado se describen los cinco tipos de secciones que podrán utilizarse con el modelo MDRCPRE desarrollado:

**Rectangular maciza:** las expresiones de los esfuerzos para esta sección son las más sencillas, puesto que su ancho es constante al variar la cota vertical. Incluye el caso evidente de sección cuadrada.

**Rectangular hueca:** su ancho sufre una variación brusca al pasar de la zona maciza superior o inferior a la zona hueca. Incluye el caso de sección rectangular de pared delgada e incluso el caso de sección rectangular maciza en el límite, haciendo que el ancho o el alto del hueco tome un valor nulo.

**Circular maciza:** su ancho varía de forma progresiva.

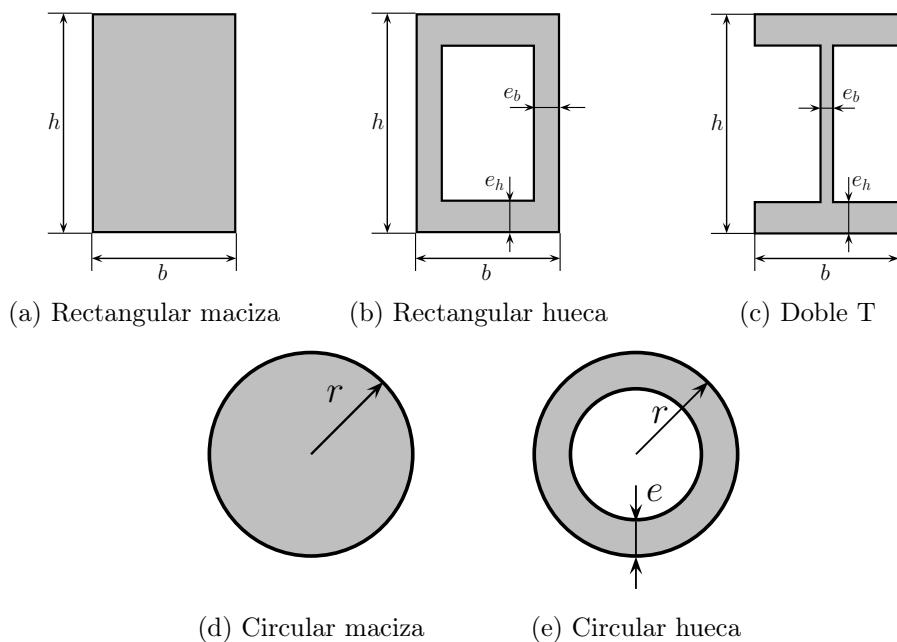
**Circular hueca:** su ancho varía de forma progresiva aunque con un comportamiento diferente según se encuentre en la zona maciza correspondiente al espesor de la sección o en la zona del hueco.

**Doble T:** su ancho sufre una variación brusca al pasar de la zona maciza superior (ala del perfil) a la zona intermedia (alma del perfil), aunque al igual que el caso de la sección rectangular hueca, el comportamiento en estas dos zonas es similar al de la sección rectangular maciza, puesto que su ancho es constante al variar la cota vertical.

La orientación de las secciones rectangulares y doble T es tal que sus lados son paralelos a los ejes  $y$  y  $z$  que definen la sección plana del elemento barra, siendo el eje  $x$  su directriz. Las secciones rectangulares se pueden definir de forma que su dimensión más larga sea tanto perpendicular como paralela al eje  $y$  vertical, siendo este segundo caso más favorable desde el punto de vista resistente. Sin embargo, el modelo se ha desarrollado de forma que la orientación de la sección de doble T implique que el alma del perfil sea paralela al eje  $y$  (es decir, en la orientación habitual y más favorable de este tipo de perfiles), por lo que la carga, vertical y centrada, sobre ellos se aplica en el plano del alma del perfil.

Como es lógico, la orientación de las secciones circulares es indiferente mientras no se encuentren dañadas.

Las dimensiones necesarias para definir cada tipo de sección se muestran en la Figura B.3.



**Figura B.3:** Tipos de secciones bisimétricas

A continuación, a título comparativo, se establecerán unos criterios para poder tener una referencia del tamaño relativo de las secciones si todas tuvieran igual peso por unidad de longitud.

Los criterios tomados son los siguientes:

1. Igual área total  $A$  para todas las secciones.
2. Espesor de las secciones huecas: 10 % del lado correspondiente.
3. Igual canto para las secciones del mismo tipo.

Tomando dichos criterios, se tiene que:

- El canto de la sección circular maciza ya viene definido por el criterio 1 y es  $D = \frac{1}{0,5} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ . Por el criterio 3, el canto de la sección rectangular maciza será el mismo y por tanto su ancho queda fijado.
- El canto de la sección circular hueca viene definido por los criterios 1 y 2 y es  $D = \frac{1}{0,3} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ . Por el criterio 3, los cantos de las sec-

ciones rectangular hueca y doble T serán los mismos, y sus anchos quedarán fijados considerando el criterio 2.

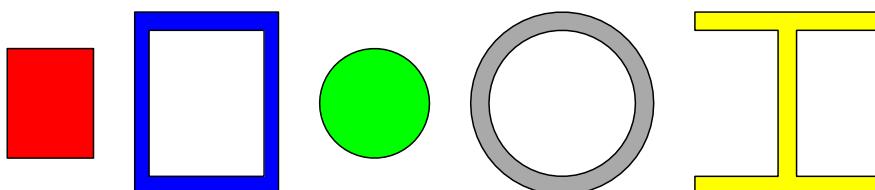
Las dimensiones obtenidas para las secciones son las mostradas en la Tabla B.3. En la Tabla B.4 se puede ver un ejemplo numérico con  $A = 0,01\pi m^2$ , que será utilizado en los dos siguientes apartados para la comparación del comportamiento de dichas secciones. Su imagen escalada se muestra en la Figura B.4, donde además se puede apreciar el código de colores que se utilizará en las comparaciones.

**Tabla B.3:** Dimensiones de las secciones para igual área total

Rect. maciza	Rect. hueca	Circ. maciza	Circ. hueca	Doble T
$h = \frac{1}{0,5} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	$h = \frac{1}{0,3} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	$r = \frac{1}{0,6} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	$h = \frac{1}{0,3} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
$b = \frac{1}{2} \sqrt{\pi A}$	$b = \frac{1}{1,2} \sqrt{\pi A}$		$e = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	$b = \frac{3}{2,8} \sqrt{\pi A}$
	$e_h = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$			$e_h = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
	$e_b = \frac{1}{12} \sqrt{\pi A}$			$e_b = \frac{3}{28} \sqrt{\pi A}$

**Tabla B.4:** Dimensiones de las secciones para área total  $A = 0,01\pi m^2$

Rect. maciza	Rect. hueca	Circ. maciza	Circ. hueca	Doble T
$h = 0,200$	$h = 0,333$	$r = 0,100$	$r = 0,167$	$h = 0,333$
$b = 0,157$	$b = 0,262$		$e = 0,0333$	$b = 0,337$
	$e_h = 0,0333$			$e_h = 0,0333$
	$e_b = 0,0262$			$e_b = 0,0337$

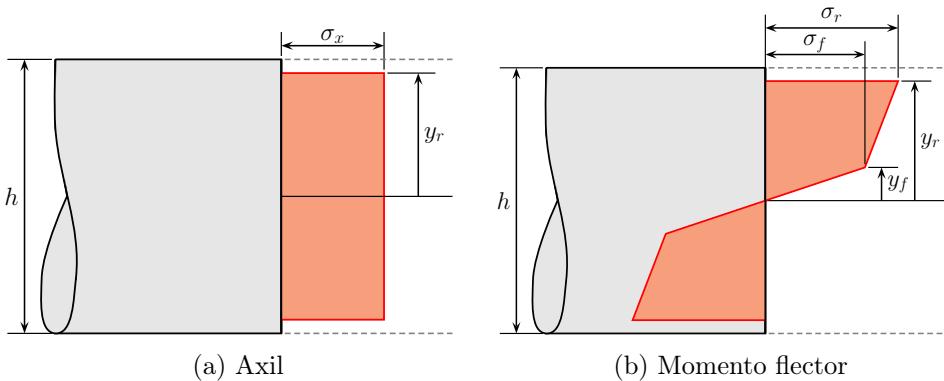


**Figura B.4:** Comparativa de secciones bisimétricas de igual área

### B.3. Obtención de esfuerzos

A continuación se obtendrán los esfuerzos axil, cortante y momento flector para el modelo MDRCPRE, considerando las ecuaciones de equilibrio (Ecuación 2.1) y los diferentes casos que se pueden dar según la sección considerada.

En la Figura B.5 se puede observar el estado tensional general de cualquier sección, con una zona central elástica, una zona elastoplástica y una zona dañada en los extremos.



**Figura B.5:** Estado tensional general de la sección

Por analogía, las cotas de cambio de pendiente se denominan  $y_r$  e  $y_f$  ya que marcan, respectivamente, la cota del límite entre la última fibra rota y la primera sin romper y la cota del cambio de pendiente del diagrama  $\sigma - \varepsilon$ . Considerando la antisimetría de la distribución de tensiones, dichas cotas tomarán el mismo valor a ambos lados de la línea neutra que coincide además con el punto medio de la sección.

La relación entre las posiciones  $y$  de la zonas de cambio de la tensión y las deformaciones  $\varepsilon$  se puede establecer a partir de la Figura 3.13e donde, por semejanza de triángulos en la deformación, se puede establecer

$$\frac{\varepsilon_r}{y_r} = \frac{\varepsilon_f}{y_f} \quad (\text{B.1})$$

Además, considerando la Ecuación 3.21, queda

$$\frac{y_r}{y_f} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f} = n_s \quad (\text{B.2})$$

Se define además el daño como:

$$D = \begin{cases} 1 - \frac{y_r}{h/2} & \text{para secciones rectangulares y doble T} \\ 1 - \frac{y_r}{r} & \text{para secciones circulares} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

de forma que el daño es nulo mientras que la posición  $y_r$  coincide con la fibra más alejada de la sección.

Se hace notar que el modelo MDRCPRE del material definido incluye a los otros tres modelos (MDR, MDRCP y MDRCPR) con las simplificaciones oportunas, recogidas en la Tabla B.5, en cuanto a las cuatro variables utilizadas:  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_r$  y  $\sigma_f$  (ya que  $y_r$  e  $y_f$  se relacionan con  $\varepsilon_r$  y  $\varepsilon_f$  mediante la Ecuación B.2). Se muestran los diferentes tipos de distribuciones tensionales en la Figura B.6.

Por tanto, se obtendrán las expresiones para el modelo MDRCPRE, ya que a partir de ellas y de las simplificaciones indicadas, se podrán obtener las correspondientes para el resto de modelos contemplados.

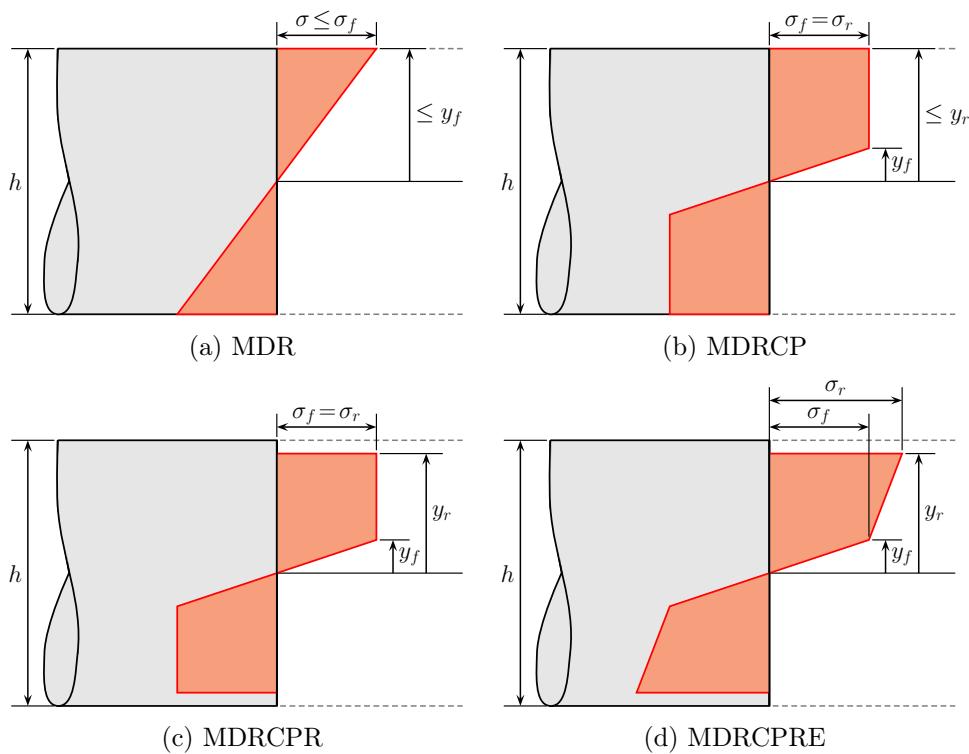
Considerando la posición relativa entre las cotas  $y_r$  e  $y_f$  y las posiciones de cambio brusco de sección, en caso de existir, se puede establecer un resumen de la casuística del número de expresiones diferentes necesario para expresar cada esfuerzo, recogido en la Tabla B.6.

A continuación se recogen las expresiones generales para cada uno de los tipos de sección estudiados, en función de sus dimensiones. Para las gráficas se han utilizado los datos de ejemplo de las secciones recogidos en el Apartado B.2.

**Tabla B.5:** Simplificaciones para la obtención de los modelos de material

Modelo	Tensiones	Deformaciones	Posiciones <sup>a</sup>
MDR	$\sigma_r = \sigma_f = \infty$	$\varepsilon_r = \varepsilon_f = \infty$	$y_r > y_f \geq h/2$
MDRCP	$\sigma_r = \sigma_f$	$\varepsilon_r = \infty$	$y_r \geq h/2 > y_f$
MDRCPR	$\sigma_r = \sigma_f$	$\varepsilon_r > \varepsilon_f$	$h/2 > y_r > y_f$
MDRCPRE	$\sigma_r > \sigma_f$	$\varepsilon_r > \varepsilon_f$	$h/2 > y_r > y_f$

<sup>a</sup> Expresiones para secciones circulares: sustituir  $h/2$  por  $r$



**Figura B.6:** Distribución tensional según el modelo

**Tabla B.6:** Casuística de expresiones

Secciones	Daño	$N_x$	$V_y$	$M_z$
Macizas <sup>a</sup>	$D = 0$	1	1	1
	$D > 0$	1	1	1
Huecas <sup>b</sup>	$D = 0$	1	1	2
	$D > 0$	2	2	3

<sup>a</sup> Rectangular y circular macizas

<sup>b</sup> Rectangular y circular huecas y doble T

### B.3.1. Rectangular maciza

El caso de la sección rectangular maciza es el más sencillo, puesto que el ancho es constante para cualquier posición  $y$ , y por lo tanto el diferencial de área será siempre el mismo:  $b\,dy$ .

#### B.3.1.1. Esfuerzos axil y cortante

Comenzando a partir de la definición de esfuerzo axil proporcionada por las ecuaciones de equilibrio, y considerando que la tensión  $\sigma$  es constante, se obtiene:

$$N_x(x) = \int_A \sigma_x(x, y, z) dA = \int_{-y_r}^{y_r} \sigma_x b\,dy = 2b\sigma y_r \quad (\text{B.4})$$

Teniendo en cuenta la Ecuación B.3, queda

$$N_x(x) = bh\sigma(1 - D) \quad (\text{B.5})$$

Considerando que la tensión cortante para el caso bidimensional se puede expresar como  $\tau_{xy} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}$ , siendo la tensión ( $\sigma$ ) constante, la expresión del esfuerzo cortante será similar sustituyendo el valor de la tensión:

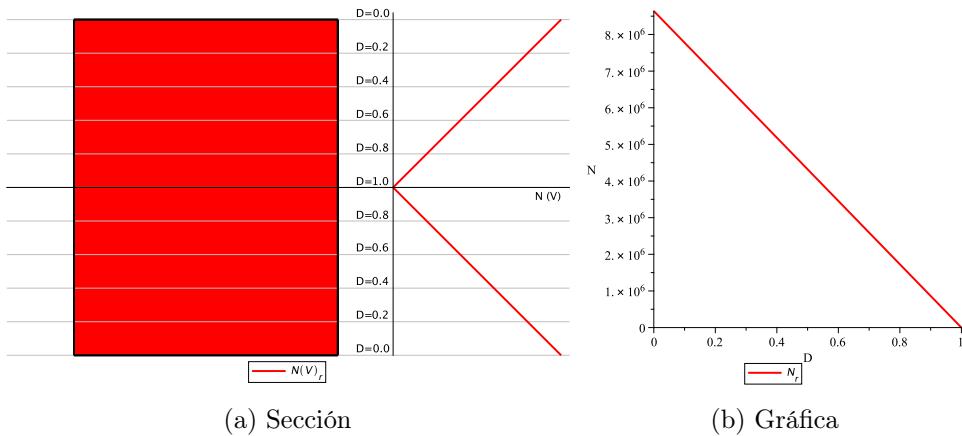
$$V_y(x) = \int_A \tau_{xy}(x, y, z) dA = \int_{-y_r}^{y_r} \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}} b\,dy = \frac{\sqrt{3}}{3} bh\sigma(1 - D) \quad (\text{B.6})$$

La evolución del esfuerzo axil a medida que avanza el daño en la sección rectangular maciza se puede ver en la Figura B.7. La gráfica del esfuerzo cortante será cualitativamente similar aunque multiplicada por un factor  $1/\sqrt{3}$ . La evolución de estos esfuerzos respecto al daño viene marcada por una línea recta, ya que su dependencia con el daño es lineal, según se observa en la Ecuación B.5 para el esfuerzo axil y en la Ecuación B.6 para el esfuerzo cortante.

#### B.3.1.2. Momento flector

Comenzando a partir de la definición de momento flector proporcionada por las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$M_z(x) = \int_A y\sigma_x(x, y, z) dA = \int_{-y_r}^{y_r} \sigma_x by\,dy \quad (\text{B.7})$$



**Figura B.7:** Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección rectangular maciza

Sin embargo, a diferencia de los casos anteriores de tensión constante, en el caso del momento flector la tensión sí depende de la coordenada  $y$  (Figura B.8), debiéndose integrar por tramos:

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_r - \sigma_f}{y_r - y_f} y - \left[ \sigma_r - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{y_r - y_f} y_r \right] & \text{si } -y_r \leq y \leq -y_f \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_f}{y_f} y & \text{si } -y_f \leq y \leq y_f \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_r - \sigma_f}{y_r - y_f} y + \left[ \sigma_f + \frac{\sigma_r - \sigma_f}{y_r - y_f} y_f \right] & \text{si } y_f \leq y \leq y_r \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

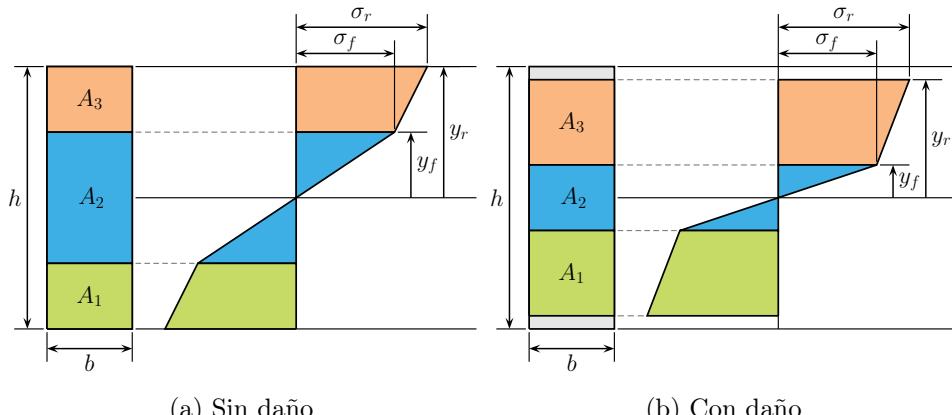
Por tanto, la expresión del momento flector es la siguiente:

$$M_z(x) = \int_{-y_f}^{-y_f} \sigma_1 b y dy + \int_{-y_f}^{y_f} \sigma_2 b y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 b y dy \quad (\text{B.9})$$

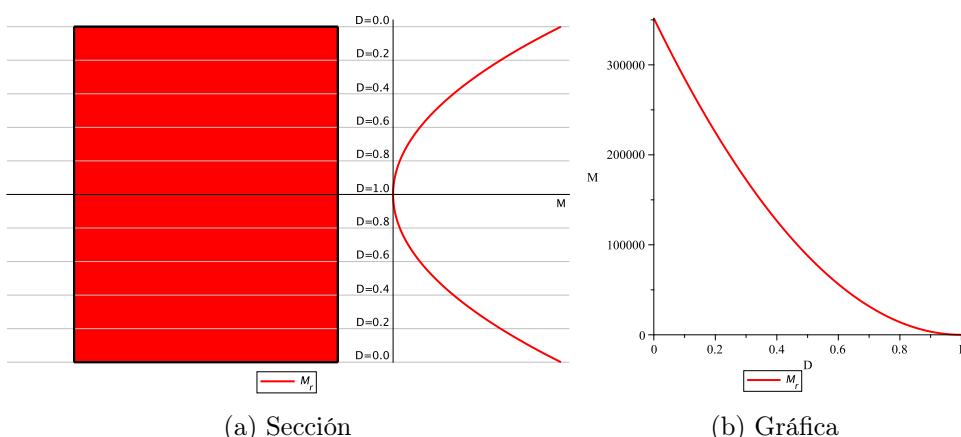
Considerando las expresiones de la tensión (Ecuación B.8), la relación entre las posiciones  $y_i$  (Ecuación B.2) y la definición de daño (Ecuación B.3), se obtiene la expresión del momento flector para la sección rectangular maciza:

$$M_z(x) = (1 - D)^2 \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) \quad (\text{B.10})$$

La evolución del momento flector a medida que avanza el daño en la sección rectangular maciza se muestra en la Figura B.9, donde se comprueba la dependencia cuadrática entre dicho esfuerzo y el daño.



**Figura B.8:** Distribución de tensiones en sección rectangular maciza



**Figura B.9:** Evolución del momento flector en función del daño para la sección rectangular maciza

### B.3.2. Rectangular hueca

Para la sección rectangular hueca el ancho no es constante para cualquier posición  $y$ , por lo que el diferencial de área tomará un valor distinto:  $b\,dy$  o  $2e_b\,dy$ . Además, en este tipo de sección las fórmulas serán diferentes según la evolución del daño y su posición relativa al espesor de las paredes superior e inferior, siendo la carga sobre ellas vertical.

#### B.3.2.1. Esfuerzos axil y cortante

Considerando que la tensión  $\sigma$  es constante, pero el ancho de la sección no lo es, se obtendrán dos expresiones diferentes cuando aparece daño en la sección, según la posición relativa del punto que marca el comienzo de la zona dañada,  $y_r = \frac{h}{2}(1 - D)$  respecto a la cota de la parte interior del ala  $y_a$ :

$$y_a = \frac{h}{2} - e_h \quad (\text{B.11})$$

Así, las posibilidades serán:

- El punto se encuentra dentro de la zona del ala:  $y_r > y_a$ . Equivalentemente, sustituyendo  $y_r$  e  $y_a$  por su expresión,  $D < \frac{2e_h}{h}$ .
- El punto se encuentra en la zona hueca:  $y_r < y_a$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_h}{h}$ .

Ambas expresiones coinciden para  $y_r = y_a$ , es decir  $D = \frac{2e_h}{h}$ .

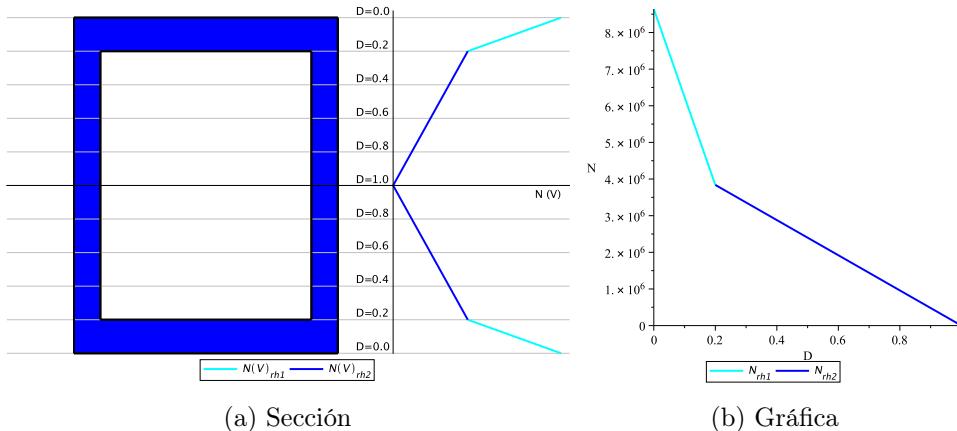
Comenzando a partir de la definición de esfuerzo axil proporcionada por las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} N_x(x) &= \int_A \sigma_x(x, y, z) dA = \\ &= \begin{cases} \int_{-y_r}^{-y_a} \sigma_x b\,dy + \int_{-y_a}^{y_a} \sigma_x 2e_b\,dy + \int_{y_a}^{y_r} \sigma_x b\,dy & \text{si } y_r \geq y_a \\ \int_{-y_r}^{y_r} \sigma_x 2e_b\,dy & \text{si } y_r \leq y_a \end{cases} = (\text{B.12}) \\ &= \begin{cases} [hb(1 - D) - (h - 2e_h)(b - 2e_b)]\sigma & \text{si } y_r \geq y_a \\ 2he_b(1 - D)\sigma & \text{si } y_r \leq y_a \end{cases} \end{aligned}$$

La expresión del esfuerzo cortante será similar sustituyendo el valor de la tensión  $\sigma$  por  $\sigma/\sqrt{3}$ :

$$V_y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}[hb(1-D) - (h-2e_h)(b-2e_b)]\sigma & \text{si } y_r \geq y_a \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}he_b(1-D)\sigma & \text{si } y_r \leq y_a \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

La evolución del esfuerzo axil a medida que avanza el daño en la sección rectangular hueca se puede ver en la Figura B.10. La gráfica del esfuerzo cortante será cualitativamente similar aunque multiplicada por un factor  $1/\sqrt{3}$ . Se aprecian claramente dos tramos diferenciados, marcados por el cambio brusco de sección y correspondientes a las dos expresiones desarrolladas para cada esfuerzo. En cada uno de ellos, la evolución viene marcada por una línea recta.

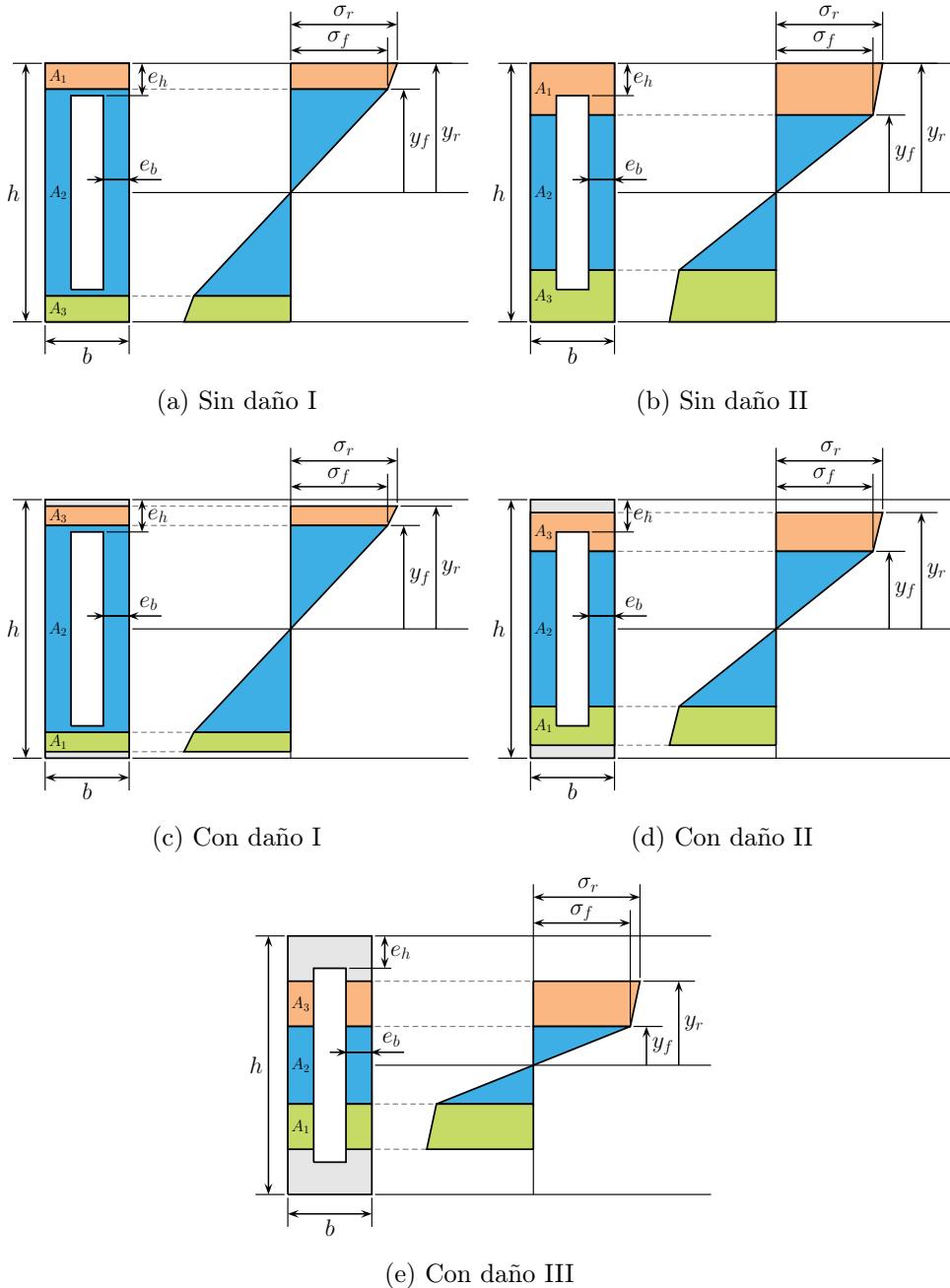


**Figura B.10:** Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección rectangular hueca

### B.3.2.2. Momento flector

La expresión del momento flector tomará formas diferentes según la posición relativa entre  $y_r$ ,  $y_f$  e  $y_a$  (Ecuación B.11), ya que ni la tensión ni el espesor de la sección son constantes.

El momento flector sin daño tomará dos expresiones diferentes, según  $y_f \leqslant y_a$ . Considerando además que  $n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f}$ , se obtiene lo siguiente:



**Figura B.11:** Distribución de tensiones en sección rectangular hueca

$$y_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_r} \frac{h}{2} \Leftrightarrow n_s = \frac{1}{y_f} \frac{h}{2}, \text{ y por tanto } y_f \geq y_a \Leftrightarrow n_s \leq \frac{h}{h - 2e_h}.$$

De esta forma, se podrán distinguir los siguientes casos:

- El punto se encuentra dentro de la zona del ala:  $y_f > y_a$ . Equivalentemente,  $n_s \leq \frac{h}{h - 2e_h}$  (Figura B.11a).
- El punto se encuentra en la zona hueca:  $y_f < y_a$ . Equivalentemente,  $n_s \geq \frac{h}{h - 2e_h}$  (Figura B.11b).

Cuando aparece daño en una sección rectangular hueca, en función de la posición del punto  $y_r = \frac{h}{2}(1 - D)$ , que marca el comienzo de la zona dañada, y la posición del punto  $y_f = \frac{y_r}{n_s}$ , de cambio de pendiente del diagrama  $\sigma - \varepsilon$  (siempre  $y_r > y_f$ ), se distinguen los siguientes tres casos excluyentes:

- Ambos puntos se encuentran dentro de la zona del ala:  $y_r > y_f > y_a$ . Equivalentemente  $D < 1 - n_s \left(1 - \frac{2e_h}{h}\right)$  (Figura B.11c).
- La zona dañada ( $y_r$ ) comienza dentro de la zona del ala pero  $y_f$  se encuentra en la zona hueca:  $y_r > y_a > y_f$ . Equivalentemente  $1 - n_s \left(1 - \frac{2e_h}{h}\right) < D < \frac{2e_h}{h}$  (Figura B.11d).
- Ambos puntos se encuentran dentro de la zona hueca:  $y_a > y_r > y_f$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_h}{h}$  (Figura B.11e).

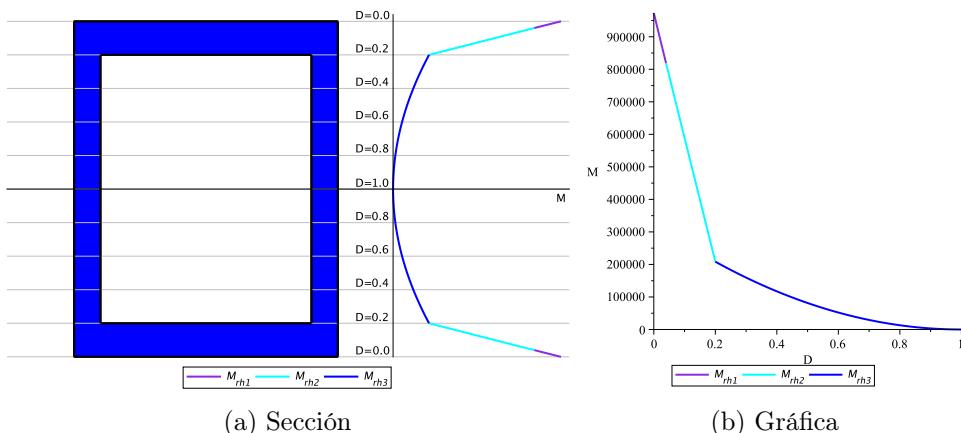
Es decir, los dos primeros casos son equivalentes a los expuestos para momento sin daño, pero el tercer caso se añade debido a que la posición de  $y_r$  varía con el daño.

El momento flector de la sección será, por tanto:

$$\begin{aligned}
 M_z(x) &= \\
 &= \begin{cases} \int_{-y_r}^{-y_f} \sigma_1 b y dy + \int_{-y_f}^{-y_a} \sigma_2 b y dy + \int_{-y_a}^{y_a} \sigma_2 2e_b y dy + \int_{y_a}^{y_f} \sigma_2 b y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 b y dy & \text{si } y_r > y_f \geq y_a \\ \int_{-y_r}^{-y_a} \sigma_1 b y dy + \int_{-y_a}^{-y_f} \sigma_1 2e_b y dy + \int_{-y_f}^{y_f} \sigma_2 2e_b y dy + \int_{y_f}^{y_a} \sigma_3 2e_b y dy + \int_{y_a}^{y_r} \sigma_3 b y dy & \text{si } y_r \geq y_a \geq y_f = \\ \int_{-y_r}^{-y_f} \sigma_1 2e_b y dy + \int_{-y_f}^{y_f} \sigma_2 2e_b y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 2e_b y dy & \text{si } y_a \geq y_r > y_f \end{cases} \quad (B.14) \\
 &= \begin{cases} \text{Ecuación B.66 si } y_r > y_f \geq y_a \\ \text{Ecuación B.67 si } y_r \geq y_a \geq y_f \\ \text{Ecuación B.68 si } y_a \geq y_r > y_f \end{cases}
 \end{aligned}$$

Debido a la extensión de las expresiones, se hace referencia a las del Apartado B.5.

La evolución del momento flector a medida que avanza el daño en la sección rectangular hueca se muestra en la Figura B.12. Se aprecian tres zonas diferentes, correspondientes a las tres expresiones tomadas por dicho esfuerzo. Se comprueba la dependencia cuadrática entre el momento flector y el daño en la zona hueca, ya que el comportamiento de esta zona central, cuando la carga es vertical y centrada, es equivalente al comportamiento de una sección rectangular de ancho  $2e_b$ .



**Figura B.12:** Evolución del momento flector en función del daño para la sección rectangular hueca

### B.3.3. Circular maciza

Para el caso de la sección circular maciza, aunque no existen cambios bruscos de sección, el ancho no es constante, variando según la cota  $y$ , y por lo tanto el diferencial de área dependerá de dicha cota, tomando un valor  $2\sqrt{r^2 - y^2}dy$ .

#### B.3.3.1. Esfuerzos axil y cortante

Comenzando a partir de la definición de esfuerzo axil proporcionada por las ecuaciones de equilibrio y considerando que la tensión  $\sigma$  es constante se obtiene:

$$\begin{aligned} N_x(x) &= \int_A \sigma_x(x, y, z)dA = \int_{-y_r}^{y_r} \sigma_x 2\sqrt{r^2 - y^2}dy = \\ &= 2r^2\sigma \left[ \arcsin(1 - D) + (1 - D)\sqrt{1 - (1 - D)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

La expresión del esfuerzo cortante será similar sustituyendo el valor de la tensión  $\sigma$  por  $\sigma/\sqrt{3}$ :

$$\begin{aligned} V_y(x) &= \int_A \tau_{xy}(x, y, z)dA = \int_{-y_r}^{y_r} \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}} 2\sqrt{r^2 - y^2}dy = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} r^2 \sigma \left[ \arcsin(1 - D) + (1 - D)\sqrt{1 - (1 - D)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

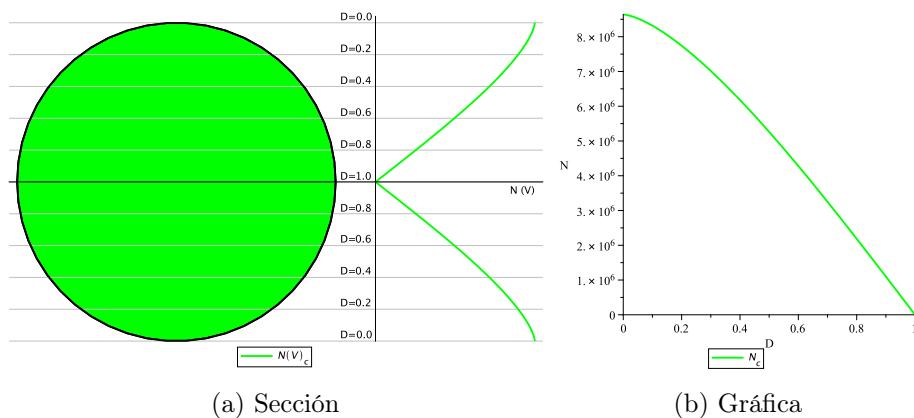
La evolución del esfuerzo axil a medida que avanza el daño en la sección circular se puede ver en la Figura B.13. La gráfica del esfuerzo cortante será cualitativamente similar aunque multiplicada por un factor  $1/\sqrt{3}$ .

La evolución de estos esfuerzos no sigue líneas rectas, debido a la variación del ancho que se traduce en las dependencias cuadráticas y de tipo arcoseno mostradas en la Ecuación B.15 para el esfuerzo axil y en la Ecuación B.16 para el esfuerzo cortante.

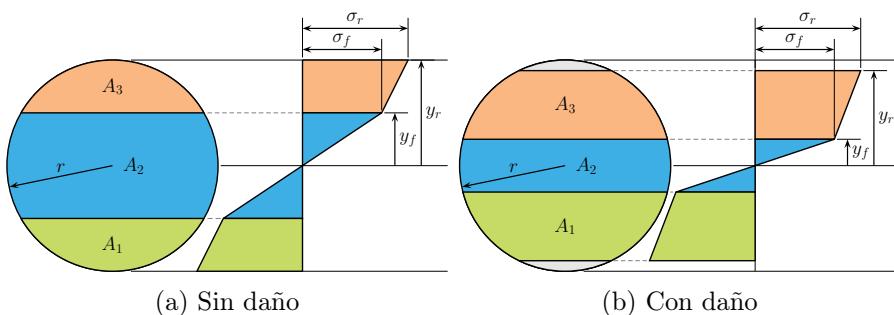
#### B.3.3.2. Momento flector

Comenzando a partir de la definición de momento flector proporcionada por las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$M_z(x) = \int_A y\sigma_x(x, y, z)dA = \int_{-y_r}^{y_r} \sigma_x 2\sqrt{r^2 - y^2}ydy \quad (\text{B.17})$$



**Figura B.13:** Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección circular maciza

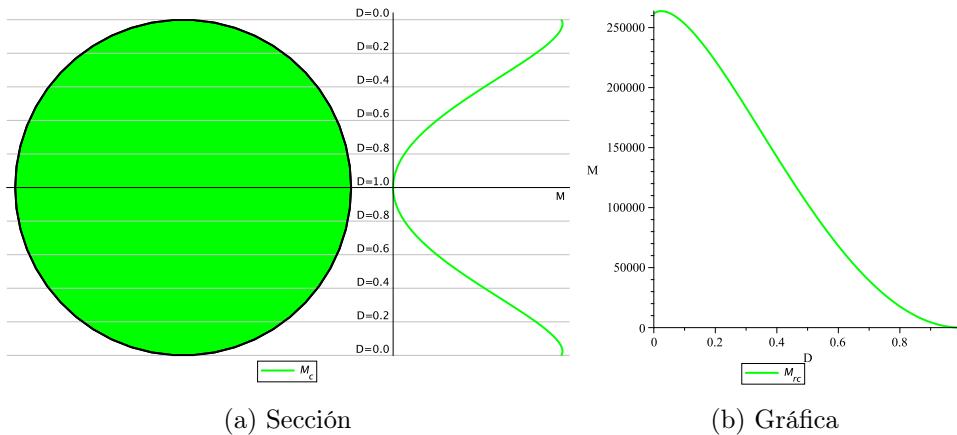


**Figura B.14:** Distribución de tensiones en sección circular maciza

Considerando las expresiones de la tensión (Ecuación B.8), la relación entre las posiciones  $y_i$  (Ecuación B.2) y la definición de daño (Ecuación B.3), se obtiene la expresión del momento fletor para la sección circular maciza (Figura B.14):

$$M_z(x) = \frac{r^3}{6(n_s - 1)} \left\{ \frac{3n_s}{1 - D} \left[ (\sigma_r - \sigma_f) \arcsin(1 - D) - \right. \right. \\ \left. \left. - \arcsin\left(\frac{1 - D}{n_s}\right) (\sigma_r - n_s \sigma_f) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_r - n_s \sigma_f}{n_s^3} \sqrt{n_s^2 - (1 - D)^2} [5n_s^2 - 2(1 - D)^2] + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - (1 - D)^2} \{2[1 - (1 - D)^2](4\sigma_r - 3\sigma_r n_s - \sigma_f n_s) + \right. \\ \left. \left. + 3n_s(\sigma_r - \sigma_f)\} \right\} \right. \quad (B.18)$$

La evolución del momento flector a medida que avanza el daño en la sección circular maciza se muestra en la Figura B.15.



**Figura B.15:** Evolución del momento flector en función del daño para la sección circular maciza

### B.3.4. Circular hueca

Para la sección circular hueca el ancho no es constante para cualquier cota  $y$ , por lo que el elemento diferencial de área tomará un valor distinto:  $2\sqrt{r^2 - y^2}dy$  o  $2(\sqrt{r^2 - y^2} - \sqrt{(r - e)^2 - y^2})dy$ . Además, en este tipo de sección las fórmulas serán diferentes según la evolución del daño y su posición relativa al espesor de las paredes.

#### B.3.4.1. Esfuerzos axil y cortante

Considerando que la tensión  $\sigma$  es constante, pero el ancho de la sección no lo es, se obtendrán dos expresiones diferentes cuando aparece daño en la sección, según la posición relativa del punto que marca el comienzo de la zona dañada,  $y_r = r(1 - D)$  respecto a la cota de la parte interior  $y_b$ :

$$y_b = r - e \quad (\text{B.19})$$

Así, las posibilidades serán:

- El punto se encuentra dentro de la zona del ala:  $y_r > y_b$ . Equivalentemente, sustituyendo  $y_r$  e  $y_b$  por su expresión, se obtiene  $D < \frac{e}{r}$ .

- El punto se encuentra en la zona hueca:  $y_r < y_b$ . Equivalentemente  $D > \frac{e}{r}$ .

Ambas expresiones coinciden para  $y_r = y_b$ , es decir  $D = \frac{e}{r}$ .

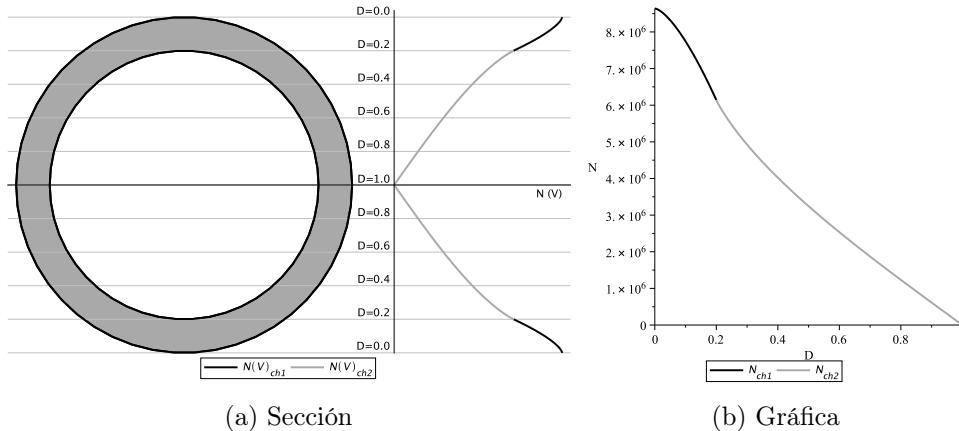
Comenzando a partir de la definición de esfuerzo axil proporcionada por las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}
 N_x(x) &= \int_A \sigma_x(x, y, z) dA = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{-y_r}^{-y_b} \sigma_x 2\sqrt{r^2 - y^2} dy + \\ + \int_{-y_b}^{y_b} \sigma_x 2 \left( \sqrt{r^2 - y^2} - \sqrt{(r-e)^2 - y^2} \right) dy + \\ + \int_{y_b}^{y_r} \sigma_x 2\sqrt{r^2 - y^2} dy \end{array} \right\} \text{ si } y_r \geq y_b \\
 &\quad \left. \begin{array}{l} \int_{-y_r}^{y_r} \sigma_x 2(\sqrt{r^2 - y^2} - \sqrt{(r-e)^2 - y^2}) dy \end{array} \right. \text{ si } y_r \leq y_b \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 2r^2 [(1-D)\sqrt{1-(1-D)^2} - \\ - \arcsin(1-D)] - \pi(r-e)^2 \end{array} \right\} \sigma \quad (B.20) \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 2 \left\{ r(1-D)[r\sqrt{1-(1-D)^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{(r-e)^2 - [r(1-D)]^2}] - \right. \\ \left. - (r-e)^2 \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{r-e} \right) + \right. \\ \left. + r^2 \arcsin(1-D) \right\} \sigma \end{array} \right\} \text{ si } y_r \leq y_b
 \end{aligned}$$

La expresión del esfuerzo cortante será similar sustituyendo el valor de la tensión  $\sigma$  por  $\sigma/\sqrt{3}$ .

La evolución del esfuerzo axil a medida que avanza el daño en la sección circular hueca se puede ver en la Figura B.16. La gráfica del esfuerzo cortante será cualitativamente similar aunque multiplicada por un factor  $1/\sqrt{3}$ . La evolución de estos esfuerzos no sigue líneas rectas, debido a la variación del ancho que se traduce en las dependencias cuadráticas y de tipo arcoseno mostradas en la Ecuación B.20 para el esfuerzo axil y en una expresión equivalente para el esfuerzo cortante. Además se aprecia

un cambio de curvatura en las dos curvas de evolución de estos esfuerzos cuando se pasa de la zona maciza extrema a la zona hueca, correspondientes a las dos expresiones desarrolladas para cada esfuerzo.



**Figura B.16:** Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección circular hueca

#### B.3.4.2. Momento flector

La expresión del momento flector tomará formas diferentes según la posición relativa entre  $y_r$ ,  $y_f$  e  $y_b$  (Ecuación B.19), ya que ni la tensión ni el espesor de la sección son constantes.

El momento flector sin daño tomará dos expresiones diferentes, según  $y_f \leq y_b$ . Considerando además que  $n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f}$ , se obtiene  $y_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_r}r \Leftrightarrow n_s = \frac{1}{y_f}r$ , y por tanto  $y_f \geq y_b \Leftrightarrow n_s \leq \frac{r}{r-e}$ . En consecuencia, se podrán distinguir los siguientes casos:

- El punto se encuentra dentro de la zona maciza superior:  $y_f > y_b$ . Equivalentemente,  $n_s \leq \frac{r}{r-e}$  (Figura B.17a).
- El punto se encuentra en la zona hueca:  $y_f < y_b$ . Equivalentemente,  $n_s \geq \frac{r}{r-e}$  (Figura B.17b).

Cuando aparece daño en una sección circular hueca, en función de la posición del punto  $y_r = r(1-D)$ , que marca el comienzo de la zona

dañada, y la posición del punto  $y_f = \frac{y_r}{n_s}$ , de cambio de pendiente del diagrama  $\sigma - \varepsilon$  (siempre  $y_r > y_f$ ), se distinguen los siguientes tres casos excluyentes:

- Ambos puntos se encuentran en la zona maciza superior:  $y_r > y_f > y_b$ . Equivalentemente  $D < 1 - n_s \left(1 - \frac{e}{r}\right)$  (Figura B.17c).
- La zona dañada ( $y_r$ ) comienza dentro de la zona maciza superior pero  $y_f$  se encuentra en la zona hueca:  $y_r > y_b > y_f$ . Equivalentemente  $1 - n_s \left(1 - \frac{e}{r}\right) < D < \frac{e}{r}$  (Figura B.17d).
- Ambos puntos se encuentran dentro de la zona hueca:  $y_b > y_r > y_f$ . Equivalentemente  $D > \frac{e}{r}$  (Figura B.17e).

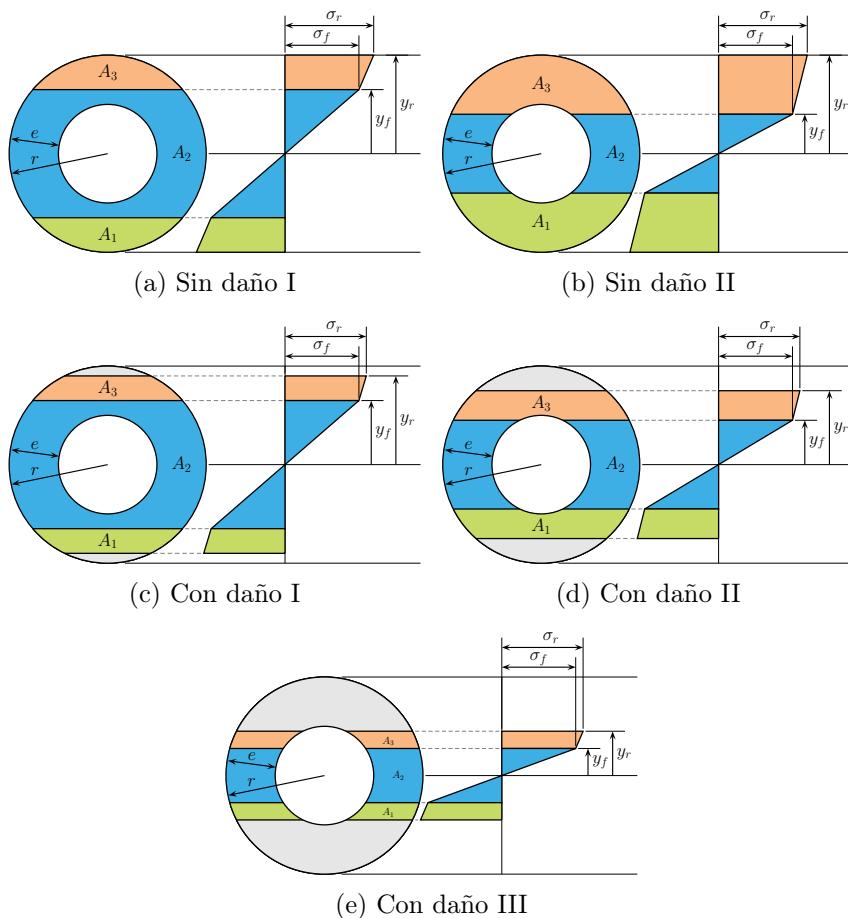
Es decir, los dos primeros casos son equivalentes a los expuestos para momento sin daño, pero el tercer caso se añade debido a que la posición de  $y_r$  varía con el daño.

El momento flector de la sección será por tanto

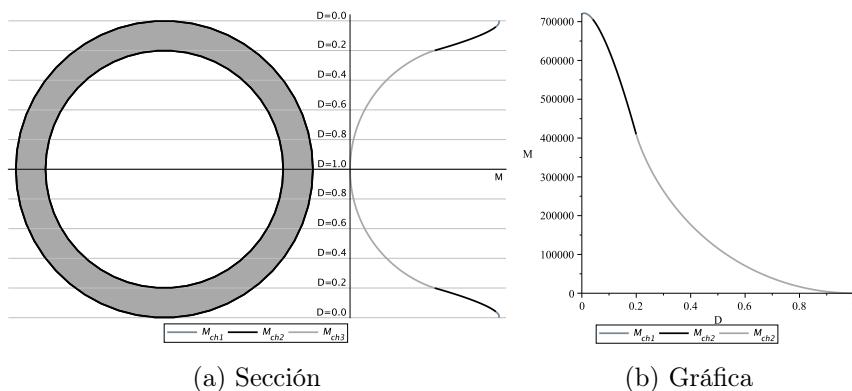
$$\begin{aligned}
 M_z(x) &= \\
 &= \begin{cases} \int_{-y_r}^{-y_f} \sigma_1 b_1 y dy + \int_{-y_f}^{-y_b} \sigma_2 b_1 y dy + \int_{-y_b}^{y_b} \sigma_2 b_2 y dy + \int_{y_b}^{y_f} \sigma_2 b_1 y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 b_1 y dy & \text{si } y_r > y_f \geq y_b \\ \int_{-y_r}^{-y_b} \sigma_1 b_1 y dy + \int_{-y_b}^{-y_f} \sigma_1 b_2 y dy + \int_{-y_f}^{y_f} \sigma_2 b_2 y dy + \int_{y_f}^{y_b} \sigma_3 b_2 y dy + \int_{y_b}^{y_r} \sigma_3 b_1 y dy & \text{si } y_r \geq y_b \geq y_f \\ \int_{-y_r}^{-y_f} \sigma_1 b_2 y dy + \int_{-y_f}^{y_f} \sigma_2 b_2 y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 b_2 y dy & \text{si } y_b \geq y_r > y_f \end{cases} \quad (B.21) \\
 &= \begin{cases} \text{Ecuación B.107} & \text{si } y_r > y_f \geq y_b \\ \text{Ecuación B.108} & \text{si } y_r \geq y_b \geq y_f \\ \text{Ecuación B.109} & \text{si } y_b \geq y_r > y_f \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde  $b_1 = 2\sqrt{r^2 - y^2}$  y  $b_2 = 2(\sqrt{r^2 - y^2} - \sqrt{(r - e)^2 - y^2})$ . Debido a la extensión de las expresiones, se hace referencia a las del Apartado B.5.

La evolución del momento flector a medida que avanza el daño en la sección circular hueca se muestra en la Figura B.18. Se aprecian tres zonas diferentes, correspondientes a las tres expresiones tomadas por dicho esfuerzo. Existe un cambio de curvatura al pasar de la zona superior a la central hueca, en la que el comportamiento es más estable, puesto que el ancho total de la sección varía poco.



**Figura B.17:** Distribución de tensiones en sección circular hueca



**Figura B.18:** Evolución del momento flector en función del daño para la sección circular hueca

### B.3.5. Doble T

Para la sección de doble T el ancho no es constante para cualquier posición  $y$ , por lo que el elemento diferencial de área tomará un valor distinto:  $b\delta y$  o  $e_b\delta y$ . Además, en este tipo de sección, las fórmulas serán diferentes según la evolución del daño y su posición relativa al espesor de las alas superior e inferior, siendo la carga sobre ellas vertical.

#### B.3.5.1. Esfuerzos axil y cortante

Considerando que la tensión  $\sigma$  es constante, pero el ancho de la sección no lo es, se obtendrán dos expresiones diferentes cuando aparece daño en la sección, según la posición relativa del punto que marca el comienzo de la zona dañada,  $y_r = \frac{h}{2}(1 - D)$  respecto a la cota de la parte interior del ala  $y_a$  (Ecuación B.11).

Así, las posibilidades serán:

- El punto se encuentra dentro de la zona del ala:  $y_r > y_a$ . Equivalentemente, sustituyendo  $y_r$  e  $y_a$  por su expresión, se obtiene  $D < \frac{2e_h}{h}$ .
- El punto se encuentra en la zona hueca:  $y_r < y_a$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_h}{h}$ .

Ambas expresiones coinciden para  $y_r = y_a$ , es decir  $D = \frac{2e_h}{h}$ .

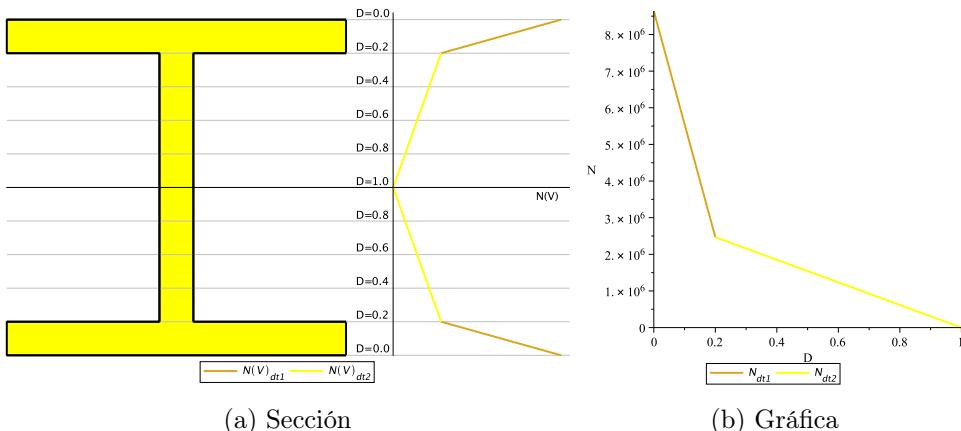
Comenzando a partir de la definición de esfuerzo axil proporcionada por las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}
 N_x(x) &= \int_A \sigma_x(x, y, z) dA = \\
 &= \begin{cases} \int_{-y_r}^{-y_a} \sigma_x b\delta y + \int_{-y_a}^{y_a} \sigma_x e_b\delta y + \int_{y_a}^{y_r} \sigma_x b\delta y & \text{si } y_r \geq y_a \\ \int_{-y_r}^{y_r} \sigma_x e_b\delta y & \text{si } y_r \leq y_a \end{cases} = \quad (\text{B.22}) \\
 &= \begin{cases} [hb(1 - D) - (h - 2e_h)(b - e_b)]\sigma & \text{si } y_r \geq y_a \\ he_b(1 - D)\sigma & \text{si } y_r \leq y_a \end{cases}
 \end{aligned}$$

La expresión del esfuerzo cortante será similar sustituyendo el valor de la tensión  $\sigma$  por  $\sigma/\sqrt{3}$ :

$$V_y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}[hb(1-D) - (h-2e_h)(b-e_b)]\sigma & \text{si } y_r \geq y_a \\ \frac{\sqrt{3}}{3}he_b(1-D)\sigma & \text{si } y_r \leq y_a \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

La evolución del esfuerzo axil a medida que avanza el daño en la sección de doble T se puede ver en la Figura B.19. La gráfica del esfuerzo cortante será cualitativamente similar aunque multiplicada por un factor  $1/\sqrt{3}$ . Se aprecian claramente dos tramos diferenciados, marcados por el cambio brusco de sección y correspondientes a las dos expresiones desarrolladas para cada esfuerzo. En cada uno de ellos la evolución viene marcada por una línea recta.



**Figura B.19:** Evolución del esfuerzo axil en función del daño para la sección de doble T

### B.3.5.2. Momento flector

La expresión del momento flector tomará formas diferentes según la posición relativa entre  $y_r$ ,  $y_f$  e  $y_a$  (Ecuación B.11), ya que ni la tensión ni el espesor de la sección son constantes.

El momento flector sin daño tomará dos expresiones diferentes, según  $y_f \leqslant y_a$ . Considerando además que  $n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f}$ , se obtiene lo siguiente:

$$y_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_r} \frac{h}{2} \Leftrightarrow n_s = \frac{1}{y_f} \frac{h}{2}, \text{ y por tanto } y_f \geq y_a \Leftrightarrow n_s \leq \frac{h}{h - 2e_h}.$$

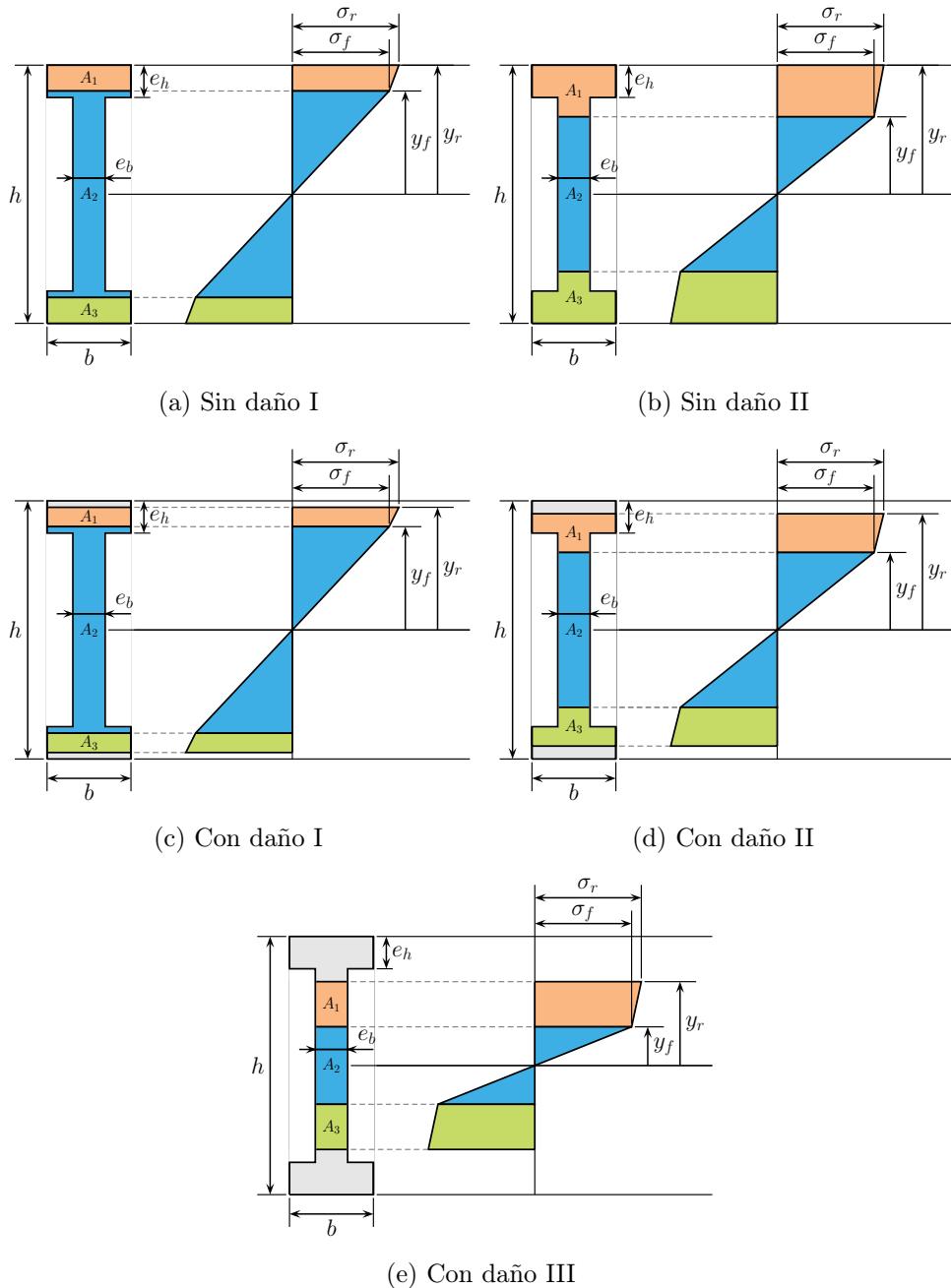
De esta forma, se podrán distinguir los siguientes casos:

- El punto se encuentra en la zona del ala:  $y_f > y_a$  o  $n_s \leq \frac{h}{h - 2e_h}$  (Figura B.20a).
- El punto se encuentra en la zona hueca:  $y_f < y_a$ . Equivalentemente,  $n_s \geq \frac{h}{h - 2e_h}$  (Figura B.20b).

Cuando aparece daño en una sección de doble T, en función de la posición del punto  $y_r = \frac{h}{2}(1 - D)$ , que marca el comienzo de la zona dañada, y la posición del punto  $y_f = \frac{y_r}{n_s}$ , de cambio de pendiente del diagrama  $\sigma - \varepsilon$  (siempre  $y_r > y_f$ ), se distinguen los siguientes tres casos excluyentes:

- Ambos puntos se encuentran dentro de la zona del ala:  $y_r > y_f > y_a$ . Equivalentemente  $D < 1 - n_s \left(1 - \frac{2e_h}{h}\right)$  (Figura B.20c).
- La zona dañada ( $y_r$ ) comienza dentro de la zona del ala pero  $y_f$  se encuentra en la zona hueca:  $y_r > y_a > y_f$ . Equivalentemente  $1 - n_s \left(1 - \frac{2e_h}{h}\right) < D < \frac{2e_h}{h}$  (Figura B.20d).
- Ambos puntos se encuentran dentro de la zona hueca:  $y_a > y_r > y_f$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_h}{h}$  (Figura B.20e).

Es decir, los dos primeros casos son equivalentes a los expuestos para momento sin daño, pero el tercer caso se añade debido a que la posición de  $y_r$  varía con el daño.



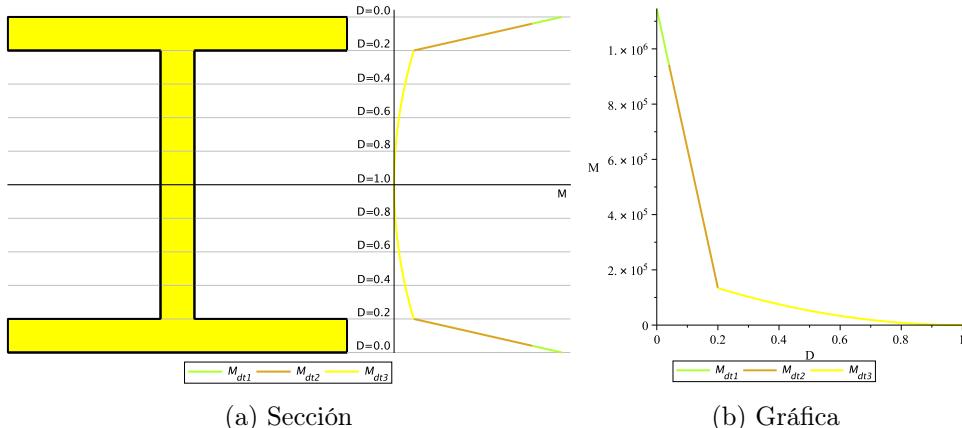
**Figura B.20:** Distribución de tensiones en sección de doble T

El momento flector de la sección será, por tanto:

$$\begin{aligned}
 M_z(x) &= \\
 &= \begin{cases} \int_{-y_r}^{-y_f} \sigma_1 b y dy + \int_{-y_f}^{-y_a} \sigma_2 b y dy + \int_{-y_a}^{y_a} \sigma_2 e_b y dy + \int_{y_a}^{y_f} \sigma_2 b y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 b y dy & \text{si } y_r > y_f \geq y_a \\ \int_{-y_r}^{-y_a} \sigma_1 b y dy + \int_{-y_a}^{-y_f} \sigma_1 e_b y dy + \int_{-y_f}^{y_f} \sigma_2 e_b y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 e_b y dy + \int_{y_a}^{y_r} \sigma_3 b y dy & \text{si } y_r \geq y_a \geq y_f = \\ \int_{-y_r}^{-y_f} \sigma_1 e_b y dy + \int_{-y_f}^{y_f} \sigma_2 e_b y dy + \int_{y_f}^{y_r} \sigma_3 e_b y dy & \text{si } y_a \geq y_r > y_f \end{cases} \quad (B.24) \\
 &= \begin{cases} \text{Ecuación B.133} & \text{si } y_r > y_f \geq y_a \\ \text{Ecuación B.134} & \text{si } y_r \geq y_a \geq y_f \\ \text{Ecuación B.135} & \text{si } y_a \geq y_r > y_f \end{cases}
 \end{aligned}$$

Debido a la extensión de las expresiones, se hace referencia a las del Apartado B.5.

La evolución del momento flector a medida que avanza el daño en la sección de doble T se muestra en la Figura B.21. Se aprecian tres zonas diferentes, correspondientes a las tres expresiones tomadas por dicho esfuerzo. Se comprueba la dependencia cuadrática entre el momento flector y el daño en la zona del alma, ya que una vez rotas las fibras superiores e inferiores, queda una zona central rectangular de ancho  $e_b$ .



**Figura B.21:** Evolución del momento flector en función del daño para la sección de doble T

El comportamiento de esta sección de doble T es equivalente al de una sección rectangular hueca con un espesor de caras horizontales igual al espesor de las alas del perfil de doble T y un espesor de caras verticales

igual a la mitad del espesor del alma del perfil de doble T, de forma que el área total sea la misma, cuando las cargas sobre ellos se producen en dirección vertical, es decir, perpendicularmente a las caras horizontales del perfil rectangular hueco o las alas del perfil de doble T, ya que de esta forma la posición horizontal de las paredes verticales es irrelevante.

### B.3.6. Comparación

Se analiza primero la continuidad de las expresiones obtenidas. Para ello se definen previamente los tipos de continuidad:

**Continuidad C0 (o de posición):** las curvas son continuas físicamente pero presentan puntos angulosos.

**Continuidad C1 (o de tangencia):** las curvas tienen continuidad de posición y además las tangentes en el punto de unión coinciden. Sin embargo, existe entre ambas curvas una discontinuidad de curvatura.

**Continuidad C2 (o de curvatura):** las curvas tienen continuidad de tangencia y además presentan la misma curvatura a ambos lados de la unión.

Existe continuidad entre las expresiones de cada esfuerzo para todos los casos:

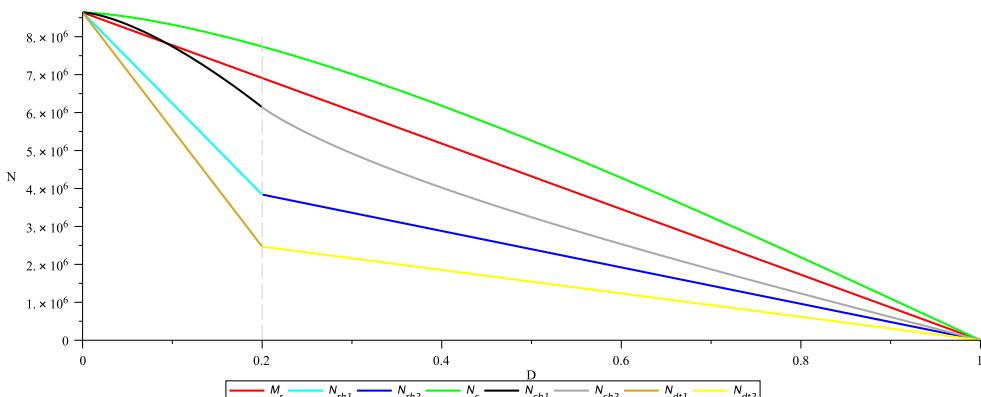
#### Esfuerzos axil y cortante:

- Para las secciones macizas existe continuidad C2, ya que únicamente existe una expresión continua, suave y sin cambios de signo de su curvatura para expresar cada esfuerzo.
- Para la sección circular hueca, la continuidad es de tipo C1, ya que la curvatura cambia en la zona de unión.
- Para la sección rectangular hueca y de doble T, la gráfica, que es continua, se compone de dos tramos rectos unidos en ángulo en el daño correspondiente a la cota de cambio de sección, por lo que se aprecia una continuidad de tipo C0 para cada esfuerzo.

### Momento flector:

- Para la sección rectangular maciza existe continuidad C2, ya que únicamente existe una expresión continua, suave y sin cambios de signo de su curvatura para expresar su evolución.
- Para la sección circular maciza, aunque únicamente existe una expresión continua y suave para expresar su evolución, tiene un cambio de signo de curvatura para un daño  $D = 0,34575$ , por lo que su continuidad será de tipo C1.
- Para la sección circular hueca, la continuidad es de tipo C1, ya que aunque las expresiones sean tangentes en los dos puntos de unión, su curvatura sí varía.
- Para la sección rectangular hueca y de doble T, la unión de sus expresiones en el daño correspondiente a la cota de cambio de sección se produce de forma angulosa, por lo que se aprecia una continuidad de tipo C0 para cada esfuerzo.

En la Figura B.22 se puede ver la comparación del comportamiento de la evolución del esfuerzo axil para los cinco tipos de secciones. Las gráficas del esfuerzo cortante serán cualitativamente similares aunque multiplicadas por un factor  $1/\sqrt{3}$ . Se puede apreciar que el valor inicial de todas ellas es el mismo, ya que precisamente las secciones utilizadas se tomaron con igual área.



**Figura B.22:** Comparación de la evolución del esfuerzo axil en función del daño

Los cambios de comportamiento de los esfuerzos axil y cortante en las secciones rectangular hueca, circular hueca y doble T se producen en  $D = 0,20$ . Esto es debido a que el daño se define como se muestra en la Ecuación B.3, el espesor se toma para todos los casos como la décima parte del canto y en la posición de dicho punto de cambio se tiene que  $y_r = y_a$  o, equivalentemente:

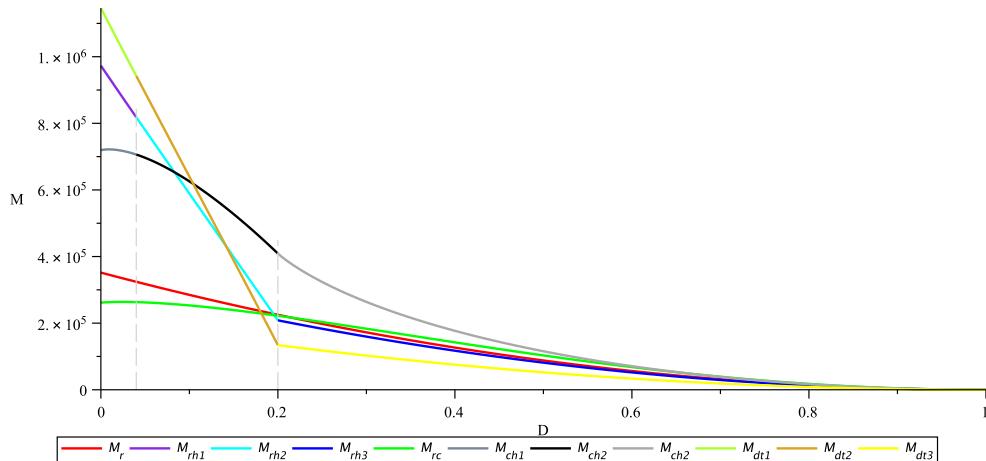
$$y_r = y_a \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{2e_h}{h} = \frac{2(h/10)}{h} = 0,20 & (\text{rect. hueca y doble T}) \\ D = \frac{e}{r} = \frac{2r/10}{r} = 0,20 & (\text{circular hueca}) \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

Es decir, para ese valor del daño se rompen las fibras de material correspondientes a la zona de cambio de ancho de la sección, ubicadas en una cota  $y_a = \pm h/10$  o  $y_a = \pm r/5$  según el tipo de sección. En la Figura B.24a se puede observar esta situación para el caso de una sección de doble T.

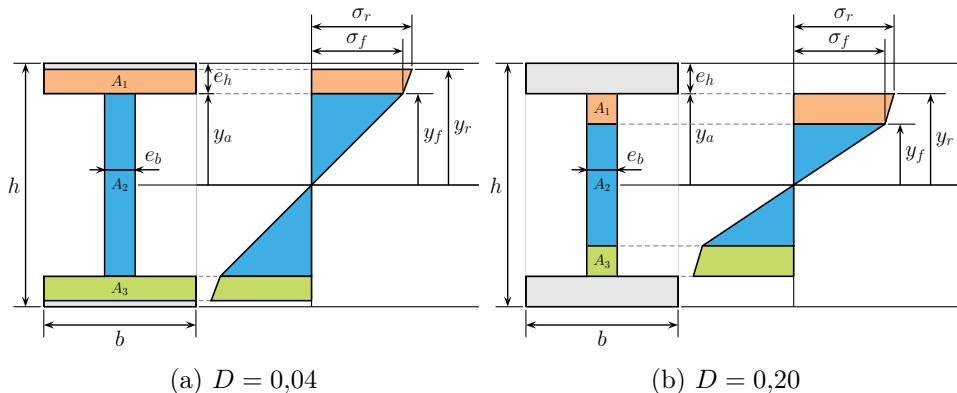
En la Figura B.23 se puede ver la comparación del comportamiento de la evolución del momento flector para los cinco tipos de secciones. Se observa que, además del valor de cambio en  $D = 0,2$  descrito, existe otro punto de cambio de comportamiento en  $D = 0,04$ , correspondiente al paso del punto  $y_f$  de fluencia por la cota  $y_a$  de cambio de ancho de la sección. En la Figura B.24b se puede observar esta situación para el caso de una sección de doble T. Es decir:

$$y_f = y_a \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1 - n_s \left(1 - \frac{2e_h}{h}\right) = 0,04 & (\text{rect. hueca y doble T}) \\ D = 1 - n_s \left(1 - \frac{e}{r}\right) = 0,04 & (\text{circular hueca}) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Se hace notar que para los ejemplos numéricos se tomaron los siguientes valores  $\sigma_f = 275 MPa$ ,  $\sigma_r = 355 MPa$  y  $n_s = 1,2$ .



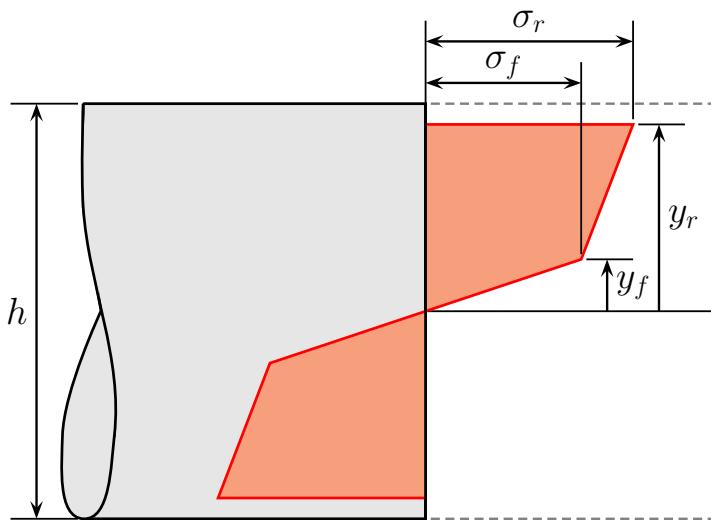
**Figura B.23:** Comparación de la evolución del momento flector en función del daño



**Figura B.24:** Posiciones de cambio del comportamiento de los esfuerzos

## B.4. Esfuerzos plásticos para secciones bisimétricas

En este apartado se recogen las conclusiones sobre los esfuerzos plásticos para los cinco tipos de secciones bisimétricas consideradas, con un modelo de daño con endurecimiento. Las expresiones completas se recogen en el Apartado B.5.



**Figura B.25:** Estado tensional general de la sección (momento flector)

Recordando la expresión de  $n_s$ , se puede definir el momento elástico y el momento plástico según sus valores  $y$ , por tanto, según el valor de  $y_f$  (Figura B.25), ya que  $y_r$  siempre tomará el valor de la mitad del canto para obtener los esfuerzos plásticos:

$$n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f} = \frac{y_r}{y_f} = \begin{cases} \frac{h/2}{y_f} & \text{secciones rectangulares y doble T} \\ \frac{r}{y_f} & \text{secciones circulares} \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

Por lo tanto, los valores límite de las variables para obtener los esfuerzos elásticos y plásticos son los recogidos en la Tabla B.7.

En cada uno de los apartados siguientes se muestra la expresión del momento plástico y las gráficas de la variación del momento flector reducido (es decir, normalizado con el momento plástico) con el daño y con

**Tabla B.7:** Valores de las variables para la obtención de esfuerzos elásticos y plásticos

Esfuerzo	$y_r^a$	$y_f^a$	$n_s$
Elástico	$h/2$	$h/2$	1
Plástico	$h/2$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow \infty$

<sup>a</sup> Expresiones para secciones circulares: sustituir  $h/2$  por  $r$

el factor  $n_s$ , por un lado, y con sus dimensiones, por otro. Finalmente, en el Apartado B.4.6 se comparan las diferentes secciones y se resaltan algunas conclusiones.

#### B.4.1. Rectangular maciza

La sección rectangular maciza, cuyas dimensiones se presentan en la Figura B.3a, es la más sencilla, puesto que su ancho no varía en ningún momento al realizar la integración a lo largo del canto. Por esta razón, para esta sección sí se muestran las expresiones completas de sus esfuerzos plásticos en su caso general (comportamiento elastoplástico con endurecimiento y daño, Apartado B.5.1):

- Axil plástico:

$$N_{rD} = hb(1 - D)\sigma \quad (\text{B.28})$$

- Cortante plástico:

$$V_{rD} = hb(1 - D) \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.29})$$

En los casos de axil y cortante plásticos, la tensión  $\sigma$  puede ser  $\sigma_f$  o  $\sigma_r$  según el criterio elegido para denominar a estos esfuerzos plásticos.

- Momento flector plástico: la expresión general del momento con daño es

$$M_{rD} = (1 - D)^2 \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) \quad (\text{B.30})$$

El momento plástico se obtendrá haciendo  $n_s \rightarrow \infty$ :

$$M_{r_p} = \frac{bh^2}{12} (2\sigma_r + \sigma_f) \quad (\text{B.31})$$

Se puede observar que para el caso de un material elastoplástico sin endurecimiento, con  $\sigma_f = \sigma_r$ , se obtiene el valor habitual del momento plástico:  $\frac{bh^2}{4}\sigma$ .

Además, el valor del momento elástico, obtenido con  $n_s = 1$ , sería igual, tanto para el material elastoplástico sin endurecimiento, como para otro con endurecimiento, tomando el valor:  $\frac{bh^2}{6}\sigma$ .

La variación del momento flector reducido  $M_z/M_p$  respecto al daño y al factor  $n_s$  se puede ver en la Figura B.26, y la influencia de las dimensiones en la Figura B.27.

#### B.4.2. Rectangular hueca

En la sección rectangular hueca, cuyas dimensiones se presentan en la Figura B.3b, existen diferencias entre las expresiones dependiendo de si el ancho de la sección es  $b$  (zona de longitud  $e_h$  en cada extremo) o  $2e_b$  (zona central de longitud  $h - 2e_h$ ). Las diferentes expresiones se recogen en el Apartado B.5.2.

La variación del momento flector reducido respecto al daño y al factor  $n_s$  se puede ver en la Figura B.28 y la influencia de las dimensiones en la Figura B.29. En todas las figuras se observa un cambio súbito en el comportamiento cuando varía el daño. Esto es debido a que el daño marca la posición  $y_r$  de la ruptura de las fibras, desde los puntos más alejados hacia el centro. Es decir, en el tramo inicial, cada fibra de material rota tiene un ancho  $b$ , mientras que en el tramo central dicho ancho se reduce a  $2e_b$ , por lo que la disminución del momento flector será más acusada en los instantes iniciales, con menor valor del daño.

#### B.4.3. Circular maciza

En la sección circular maciza, cuyas dimensiones se presentan en la Figura B.3d, no existen diferencias bruscas entre las expresiones según el

ancho de la sección, puesto que éste varía pero de forma suave, desde 0 hasta  $2r$  y viceversa (en la Figura B.31 se ha obviado la zona con  $r = 0$ ). Las diferentes expresiones se recogen en el Apartado B.5.3.

La variación del momento flector reducido respecto al daño y al factor  $n_s$  se puede ver en la Figura B.30 y la influencia de las dimensiones en la Figura B.31.

#### B.4.4. Circular hueca

En la sección circular hueca, cuyas dimensiones se presentan en la Figura B.3e, existen diferencias entre las expresiones según el ancho de la sección. Aunque éstas no son bruscas, serán diferentes si se trata de la zona extrema, hasta una longitud  $e$ , o la zona central hueca, de longitud total  $2(r - e)$ . Las diferentes expresiones se recogen en el Apartado B.5.4.

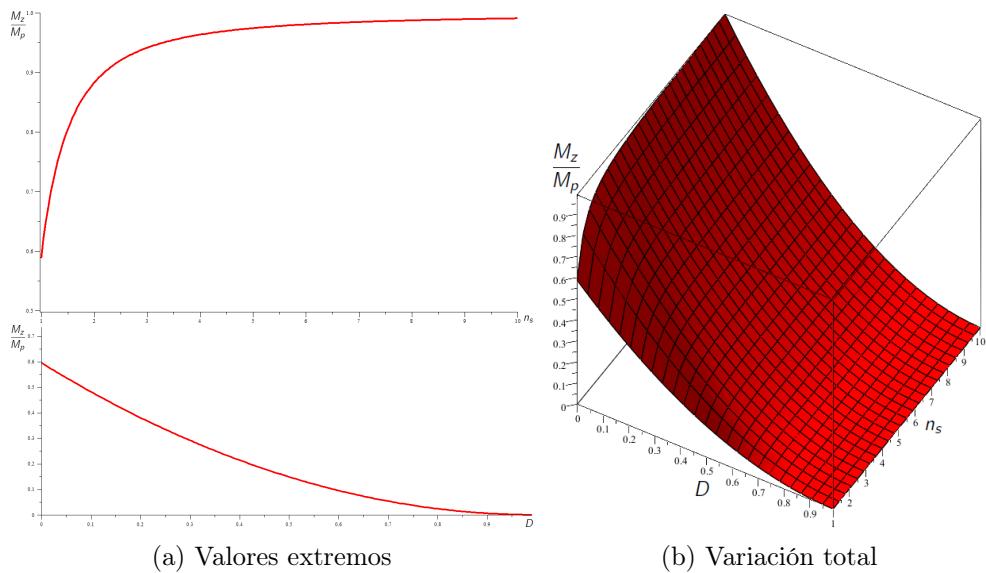
La variación del momento flector reducido respecto al daño y al factor  $n_s$  se puede ver en la Figura B.32 y la influencia de las dimensiones en la Figura B.33. Se puede observar que aunque las superficies varían de curvatura al pasar de una zona a otra, lo hacen de forma progresiva.

#### B.4.5. Doble T

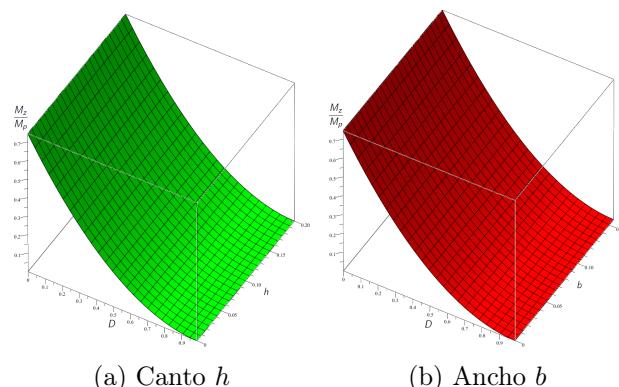
En la sección doble T, cuyas dimensiones se presentan en la Figura B.3c, existen diferencias entre las expresiones dependiendo de si el ancho de la sección es  $b$  (zona de longitud  $e_h$  en cada extremo) o  $e_b$  (zona central de longitud  $h - 2e_h$ ). Las diferentes expresiones se recogen en el Apartado B.5.5.

La variación del momento flector reducido respecto al daño y al factor  $n_s$  se puede ver en la Figura B.34 y la influencia de las dimensiones en la Figura B.35. En todas las figuras se observa un cambio súbito en el comportamiento cuando varía el daño, de forma similar a la sección rectangular hueca.

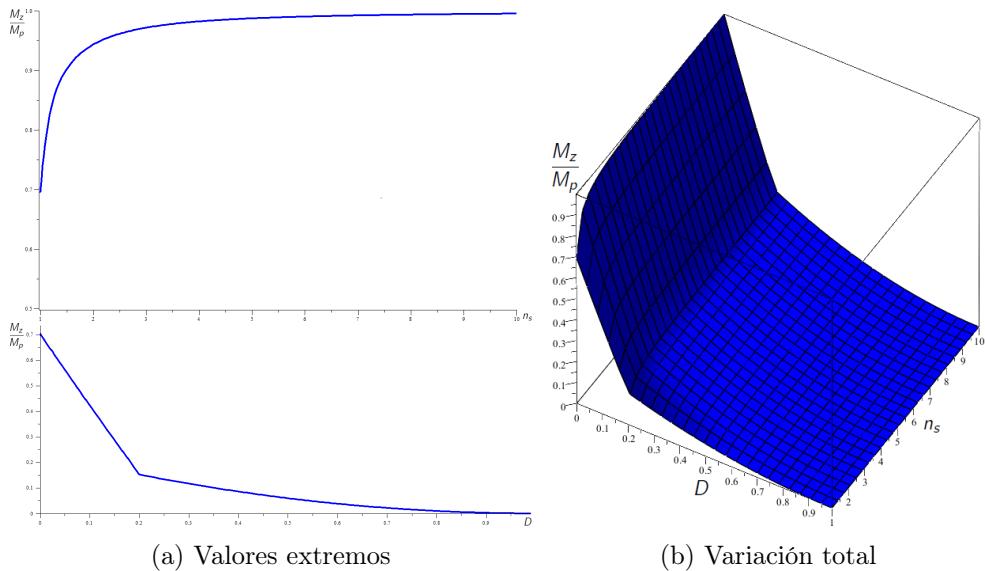
De hecho, el comportamiento cualitativo es igual que el de la sección rectangular hueca si está sometida a una carga en su dirección fuerte, como ya se comentó en el Apartado B.3.5.



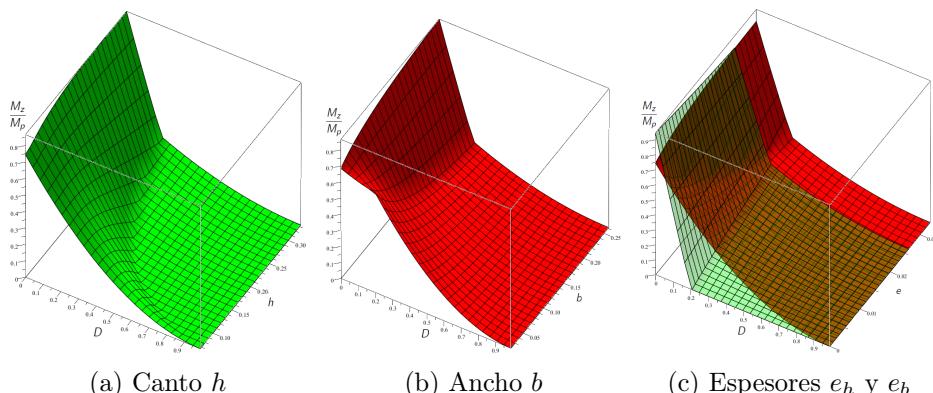
**Figura B.26:** Sección rectangular maciza: variación de  $M_z/M_p$  con  $D$  y  $n_s$



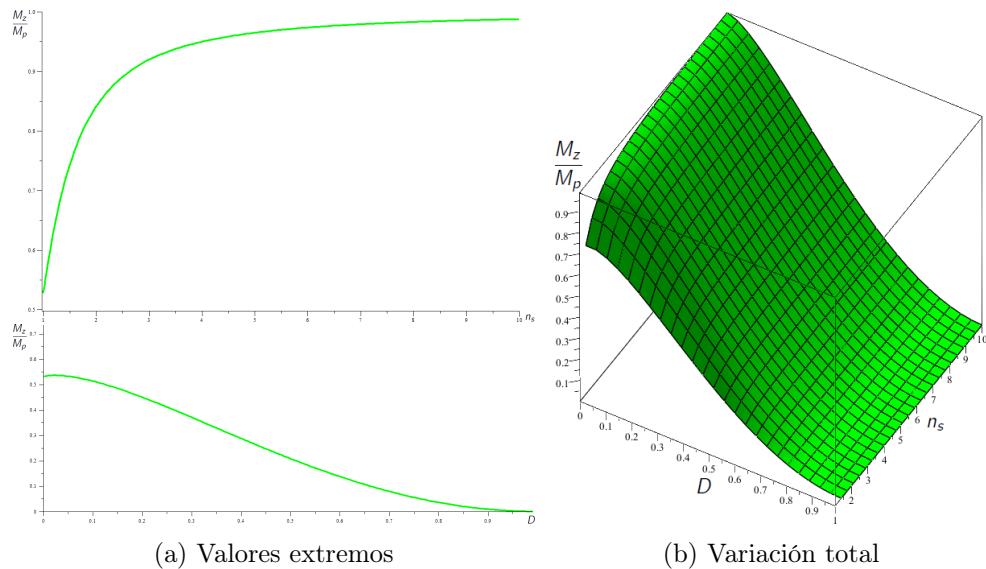
**Figura B.27:** Sección rectangular maciza: variación de  $M_z/M_p$  con sus dimensiones



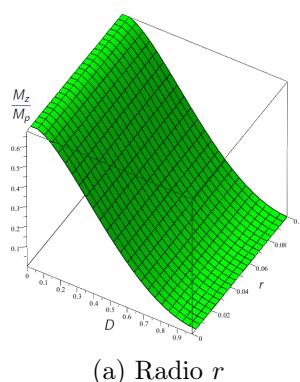
**Figura B.28:** Sección rectangular hueca: variación de  $M_z/M_p$  con  $D$  y  $n_s$



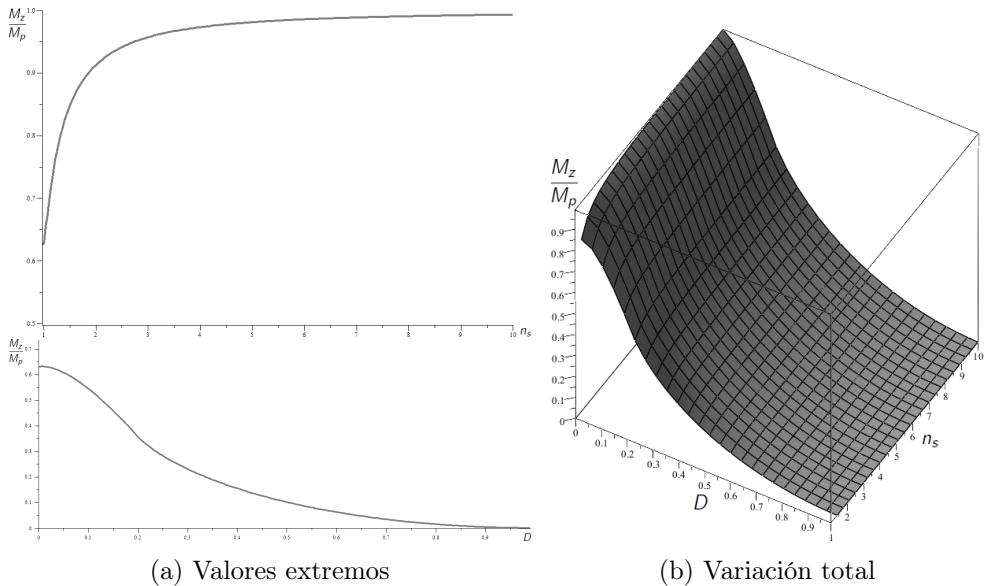
**Figura B.29:** Sección rectangular hueca: variación de  $M_z/M_p$  con sus dimensiones



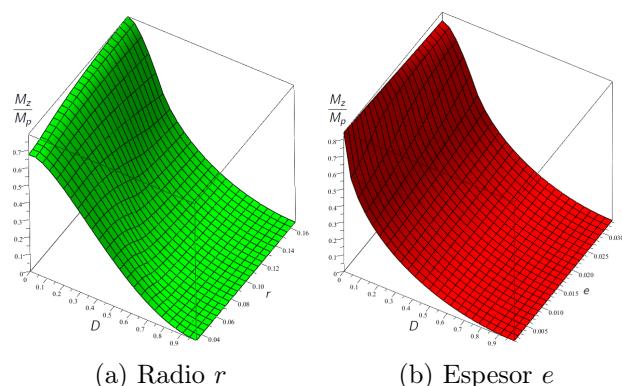
**Figura B.30:** Sección circular maciza: variación de  $M_z/M_p$  con  $D$  y  $n_s$



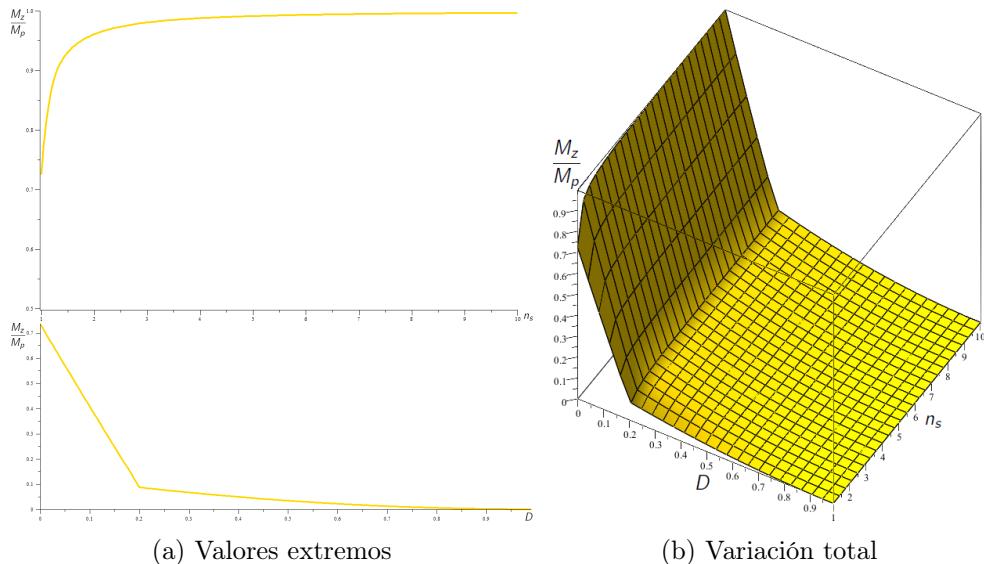
**Figura B.31:** Sección circular maciza: variación de  $M_z/M_p$  con sus dimensiones



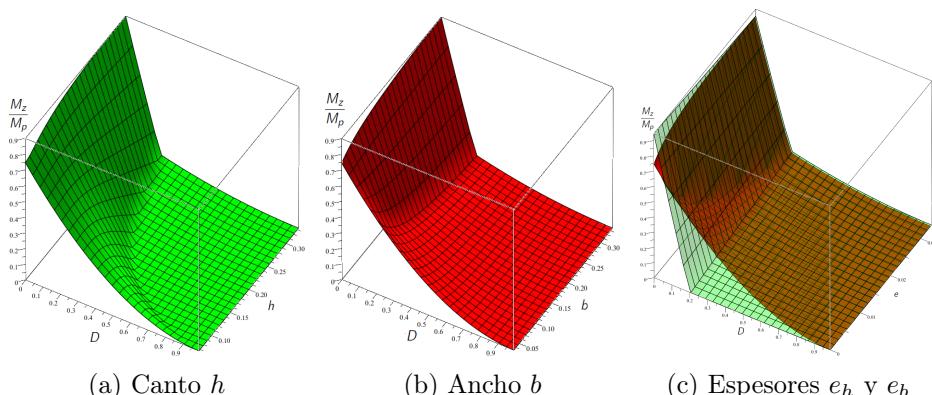
**Figura B.32:** Sección circular hueca: variación de  $M_z/M_p$  con  $D$  y  $n_s$



**Figura B.33:** Sección circular hueca: variación de  $M_z/M_p$  con sus dimensiones



**Figura B.34:** Sección doble T: variación de  $M_z/M_p$  con  $D$  y  $n_s$



**Figura B.35:** Sección doble T: variación de  $M_z/M_p$  con sus dimensiones

### B.4.6. Comparación

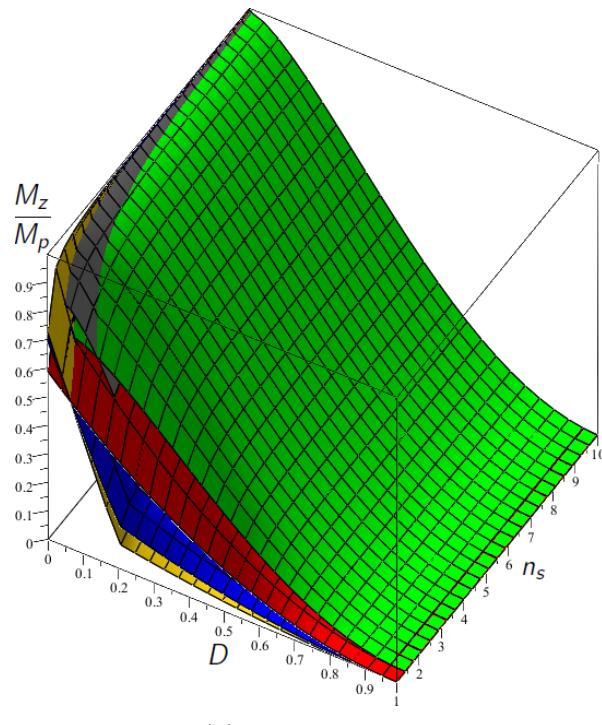
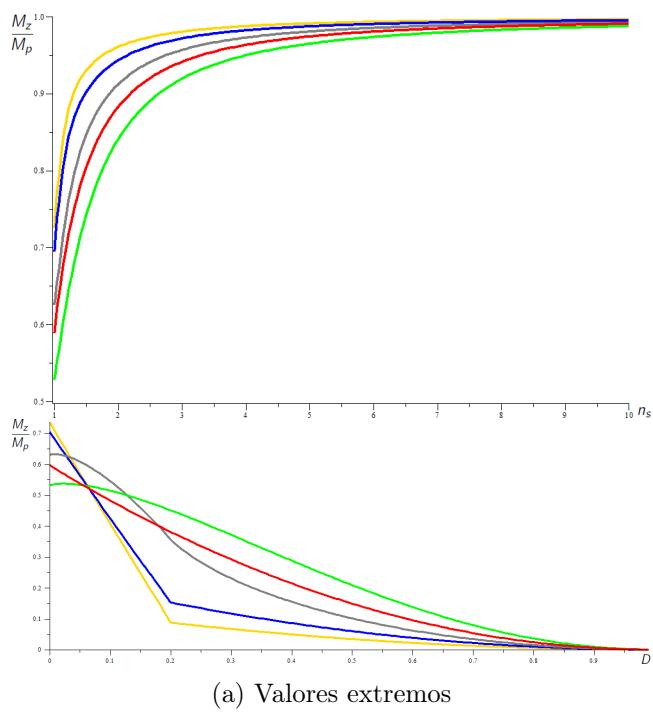
En este apartado se comparará el comportamiento de las secciones bisimétricas descritas.

En la Figura B.36 se puede ver la comparación del comportamiento de todas las secciones. Se observa que, independientemente del valor de  $n_s$ , el momento plástico reducido con  $D = 0$  es siempre superior para la sección doble T seguido, en este orden, de rectangular hueca, circular hueca, rectangular maciza y circular maciza. Este comportamiento es evidente, teniendo en cuenta que la cantidad relativa de material en los extremos de esas secciones también sigue ese orden. Es decir: de las secciones de igual área, con los criterios descritos, la que mejor comportamiento a flexión tiene es la doble T.

Sin embargo, se observa que, cuando el daño crece, el comportamiento varía, invirtiéndose completamente a partir de un valor  $D = 0,20$ . Esto es debido a que, al avanzar el daño y romperse fibras de las secciones, saldrán más perjudicadas relativamente aquéllas que acumulen mayor material en los extremos y a partir de cierto valor del daño solo trabajarán las fibras centrales, penalizando en este caso al que menos cantidad de material tenga en esta zona.

Se observa también que las únicas secciones que para ningún valor del daño se comportan mejor que el resto son las rectangulares, tanto maciza como hueca.

Además, en todas las figuras se observa que el valor del momento flector reducido disminuye progresivamente cuando el daño aumenta, llegando a tomar valor nulo cuando  $D = 1$ , independientemente de  $n_s$  o de las dimensiones, puesto que la sección se encuentra totalmente dañada.



**Figura B.36:** Todas las secciones: variación de  $M_z/M_p$  con  $D$  y  $n_s$

## B.5. Expresiones completas de los esfuerzos plásticos

### B.5.1. Rectangular maciza

Se obtendrán los esfuerzos plásticos para las secciones bisimétricas descritas, con un material de diagrama  $\sigma - \varepsilon$  bilineal con endurecimiento ( $\sigma_r > \sigma_f$ ).

#### B.5.1.1. Esfuerzo axil plástico

##### B.5.1.1.1. Axil con $D = 0$

Fórmula general:

$$N_r = hb\sigma \quad (\text{B.32})$$

Axil elástico:

$$N_{r_e} = hb\sigma_f \quad (\text{B.33})$$

Axil plástico:

$$N_{r_p} = hb\sigma_r \quad (\text{B.34})$$

##### B.5.1.1.2. Axil con $D > 0$

Fórmula general:

$$N_{r_D} = hb(1 - D)\sigma \quad (\text{B.35})$$

Se comprueba que tomando  $D = 0$  se obtiene la expresión B.32, correspondiente al axil sin daño.

### B.5.1.2. Esfuerzo cortante plástico

#### B.5.1.2.1. Cortante con $D = 0$

Fórmula general:

$$V_r = hb \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.36})$$

Cortante elástico:

$$V_{r_e} = hb \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.37})$$

Cortante plástico:

$$V_{r_p} = hb \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.38})$$

#### B.5.1.2.2. Cortante con $D > 0$

Fórmula general:

$$V_{r_D} = hb(1 - D) \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.39})$$

Se comprueba que tomando  $D = 0$  se obtiene la expresión B.36, correspondiente al cortante sin daño.

### B.5.1.3. Momento flector plástico

#### B.5.1.3.1. Momento con $D = 0$

##### B.5.1.3.1.1. En función de $y_f$

Fórmula general:

$$M_r(y_f) = \frac{b}{12} [h^2(2\sigma_r + \sigma_f) - 2hy_f(\sigma_r - \sigma_f) - 4y_f^2\sigma_r] \quad (\text{B.40})$$

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = h/2$ .

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0$ .

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \text{General: } M_{r_i} = \frac{b}{12} \sigma_f (3h^2 - 4y_f^2) \right\} \quad (\text{B.41})$$

#### B.5.1.3.1.2. En función de $n_s$

Donde  $n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f}$  y por tanto:  $y_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_r} \frac{h}{2} \Leftrightarrow n_s = \frac{1}{y_f} \frac{h}{2}$

Fórmula general:

$$M_r(n_s) = \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right)$$

(B.42)

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = h/2 \Rightarrow n_s = 1$ :

$$M_{r_e} = \frac{bh^2}{6} \sigma_f \quad (\text{B.43})$$

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0 \Rightarrow n_s \rightarrow \infty$ :

$$M_{r_p} = \frac{bh^2}{12} (2\sigma_r + \sigma_f) \quad (\text{B.44})$$

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{General: } & M_{r_i} = \frac{bh^2}{12} \sigma_f \left( 3 - \frac{1}{n_s^2} \right) \\ \text{Elástico: } & M_{r_{e_i}} = \frac{bh^2}{6} \sigma_f \\ \text{Plástico: } & M_{r_{p_i}} = \frac{bh^2}{4} \sigma_f \end{array} \right\} \quad (\text{B.45})$$

**B.5.1.3.2. Momento con  $D > 0$** 

Fórmula general:

$$\begin{aligned} M_{r_D} &= (1 - D)^2 \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) = \\ &= (1 - D)^2 M_{D=0} \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Se comprueba que tomando  $D = 0$  se obtiene la expresión B.42, correspondiente al momento sin daño.

### B.5.2. Rectangular hueca

#### B.5.2.1. Esfuerzo axil plástico

##### B.5.2.1.1. Axil con $D = 0$

Fórmula general:

$$N_{rh} = [hb - (h - 2e_1)(b - 2e_b)]\sigma \quad (\text{B.47})$$

Axil elástico:

$$N_{rhe} = [hb - (h - 2e_1)(b - 2e_b)]\sigma_f \quad (\text{B.48})$$

Axil plástico:

$$N_{rh_p} = [hb - (h - 2e_1)(b - 2e_b)]\sigma_r \quad (\text{B.49})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $e_b = b/2$  en las expresiones anteriores, se obtienen las fórmulas correspondiente al caso rectangular:  $hb\sigma$ .

##### B.5.2.1.2. Axil con $D > 0$

- El punto se encuentra dentro del espesor del tramo horizontal:  $y_r > h/2 - e_1$ . Equivalentemente  $D < \frac{2e_1}{h}$ .

$$N_{rh1_D} = [hb(1 - D) - (h - 2e_1)(b - 2e_b)]\sigma \quad (\text{B.50})$$

Se comprueba que, al sustituir  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.47, correspondiente al axil sin daño.

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b/2$ , se obtiene la expresión B.35, correspondiente al axil con daño para una sección rectangular maciza.

- El punto se encuentra en la zona hueca:  $h/2 - e_1 > y_r$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_1}{h}$ .

$$N_{rh2_D} = 2he_b(1 - D)\sigma \quad (\text{B.51})$$

### B.5.2.2. Esfuerzo cortante plástico

#### B.5.2.2.1. Cortante con $D = 0$

Fórmula general:

$$V_{rh} = [hb - (h - 2e_1)(b - 2e_b)] \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.52})$$

Cortante elástico:

$$V_{rh_e} = [hb - (h - 2e_1)(b - 2e_b)] \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.53})$$

Cortante plástico:

$$V_{rh_p} = [hb - (h - 2e_1)(b - 2e_b)] \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.54})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $e_b = b/2$  en las expresiones anteriores, se obtienen las fórmulas correspondiente al caso rectangular:  $hb \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ .

#### B.5.2.2.2. Cortante con $D > 0$

- El punto se encuentra dentro del espesor del tramo horizontal:  $y_r > h/2 - e_1$ . Equivalentemente  $D < \frac{2e_1}{h}$ .

$$V_{rh1_D} = [hb(1 - D) - (h - 2e_1)(b - 2e_b)] \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.55})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.52, correspondiente al cortante sin daño.

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b/2$ , se obtiene la expresión B.39, correspondiente al cortante con daño para una sección rectangular maciza.

- El punto se encuentra en la zona hueca:  $h/2 - e_1 > y_r$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_1}{h}$ .

$$V_{rh2D} = 2he_b(1 - D) \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.56})$$

### B.5.2.3. Momento flector plástico

#### B.5.2.3.1. Momento con $D = 0$

##### B.5.2.3.1.1. En función de $y_f$

Fórmula general ( $y_f > h/2 - e_1$ ):

$$\begin{aligned} M_{rh1}(y_f) = & \frac{2}{3} \frac{\sigma_f}{y_f} \left[ by_f^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] + \\ & + \frac{b}{y_f - h/2} \left\{ \left( \sigma_r y_f - \sigma_f \frac{h}{2} \right) \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_f^2 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} (\sigma_r - \sigma_f) \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^3 - y_f^3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Fórmula general ( $y_f < h/2 - e_1$ ):

$$\begin{aligned} M_{rh2}(y_f) = & \frac{1}{y_f - h/2} \left\{ \left( \sigma_r y_f - \sigma_f \frac{h}{2} \right) \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^2 - 2e_b y_f^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\sigma_r - \sigma_f) \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2e_b y_f^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] \right\} + \frac{4}{3} e_b \sigma_f y_f^2 \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Se comprueba que, para  $y_c = \frac{h}{2} - e_1$ , las funciones  $M_{\text{rh1}}(y_c)$  y  $M_{\text{rh2}}(y_c)$  coinciden.

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = h/2$  (se utiliza  $M_{\text{rh1}}$ ).

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0$  (se utiliza  $M_{\text{rh2}}$ ).

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{General: } M_{\text{rh1}_i} = \sigma_f \left\{ \frac{2}{3y_f} \left[ by_f^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] + b \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_f^2 \right] \right\} \\ M_{\text{rh2}_i} = \sigma_f \left[ (h - e_1)(b - 2e_b)e_1 + \left( \frac{h^2}{4} - \frac{y_f^2}{3} \right) 2e_b \right] \end{array} \right\} \quad (\text{B.59})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $\sigma_r = \sigma_f$ ,  $e_b = b/2$  en las expresiones anteriores, se obtienen las fórmulas correspondiente al caso rectangular sin endurecimiento:  $\frac{b}{12}\sigma_f(3h^2 - 4y_f^2)$ .

#### B.5.2.3.1.2. En función de $n_s$

Fórmula general  $\left( n_s < \frac{h}{h - 2e_1} \right)$ :

$$\boxed{M_{\text{rh1}}(n_s) = \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) - \frac{1}{6} \frac{\sigma_f n_s (b - 2e_b)}{h} (h - 2e_1)^3} \quad (\text{B.60})$$

Fórmula general  $\left( n_s > \frac{h}{h - 2e_1} \right)$ :

$$\boxed{M_{\text{rh2}}(n_s) = \frac{e_b \sigma_f}{3} \left( \frac{h}{n_s} \right)^2 + \frac{4 \sigma_r - \sigma_f}{3} \frac{n_s}{h - 2e_b} \left[ \left( b - \frac{2e_b}{n_s^3} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] - \frac{\sigma_r - n_s \sigma_f}{n_s - 1} \left[ \left( b - \frac{2e_b}{n_s^2} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^2 \right]} \quad (\text{B.61})$$

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = h/2 \Rightarrow n_s = 1$  (se utiliza  $M_{rh1}$ ):

$$M_{rh1_e} = \frac{4}{3} \frac{\sigma_f}{h} \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] \quad (B.62)$$

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0 \Rightarrow n_s \rightarrow \infty$  (se utiliza  $M_{rh2}$ ):

$$\begin{aligned} M_{rh2_p} &= \frac{4}{3} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{h} \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] + \\ &\quad + \sigma_f \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^2 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (B.63)$$

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{General: } M_{rh1_i} = \sigma_f \left\{ b \left( \frac{h}{2} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{n_s^2} \right) + \frac{4}{3} \frac{n_s}{h} \left[ b \left( \frac{h}{2n_s} \right)^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] \right\} \\ M_{rh2_i} = \sigma_f \left[ \frac{e_b}{3} \left( \frac{h}{n_s} \right)^2 + \left( b - \frac{2e_b}{n_s^2} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^2 \right] \\ \text{Elástico: } M_{rh1_{e_i}} = \sigma_f \frac{4}{3h} \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right] \\ \text{Plástico: } M_{rh2_{p_i}} = \sigma_f \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^2 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (B.64)$$

Se comprueba que, para  $n_{s_c} = \frac{h}{h - 2e_1}$ , ambas funciones coinciden:

$$\begin{aligned} M_{rh1}(n_{s_c}) &= M_{rh2}(n_{s_c}) = \\ &= \frac{be_1}{6} [3h(\sigma_r + \sigma_f) - 2e_1(\sigma_r + 2\sigma_f)] + \frac{e_b\sigma_f}{3}(h - 2e_1)^2 \end{aligned} \quad (B.65)$$

### B.5.2.3.2. Momento con $D > 0$

Fórmula general con  $y_r > y_f > h/2 - e_1 \Leftrightarrow D < 1 - n_s \left( 1 - \frac{2e_1}{h} \right)$

$$\begin{aligned} M_{rh1_D} &= \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) (1 - D)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{\sigma_f n_s (b - 2e_b)}{h(1 - D)} (h - 2e_1)^3 \end{aligned} \quad (B.66)$$

Se comprueba que, al sustituir  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.60, correspondiente al momento sin daño con  $n_s < h/(h - 2e_1)$ .

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b/2$ , se obtiene la expresión B.46, correspondiente al momento con daño para una sección rectangular maciza.

Fórmula general con  $y_r > h/2 - e_1 > y_f \Leftrightarrow 1 - n_s \left(1 - \frac{2e_1}{h}\right) < D < \frac{2e_1}{h}$ :

$$\boxed{M_{rh2_D} = \frac{e_b \sigma_f}{3} \left[ \frac{h(1-D)}{n_s} \right]^2 + \frac{4}{3} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{h(1-D)} \frac{n_s}{n_s - 1} \left\{ \left( b - \frac{2e_b}{n_s^3} \right) \left[ \frac{h(1-D)}{2} \right]^3 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^3 \right\} - \frac{\sigma_r - n_s \sigma_f}{n_s - 1} \left\{ \left( b - \frac{2e_b}{n_s^2} \right) \left[ \frac{h(1-D)}{2} \right]^2 - (b - 2e_b) \left( \frac{h}{2} - e_1 \right)^2 \right\}} \quad (B.67)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.61, correspondiente al momento sin daño con  $n_s > h/(h - 2e_1)$ .

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b/2$ , se obtiene la expresión B.46, correspondiente al momento con daño para una sección rectangular maciza.

Fórmula general con  $h/2 - e_1 > y_r > y_f \Leftrightarrow D > \frac{2e_1}{h}$ :

$$\boxed{M_{rh3_D} = \frac{e_b h^2}{6} (1-D)^2 \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right)} \quad (B.68)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $e_b$  por  $b/2$ , se obtiene la expresión B.46, correspondiente al momento con daño para una sección rectangular maciza.

Las funciones  $M_{rh1_D}$  (Ecuación B.66) y  $M_{rh2_D}$  (Ecuación B.67) coinciden cuando  $y_f = \frac{h}{2} - e_1$ , es decir, con  $D_c = 1 - n_s \left(1 - \frac{2e_1}{h}\right)$ .

$$\begin{aligned} M_{rh1_D}(D_c) &= M_{rh2_D}(D_c) = \\ &= \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) \left[ n_s \left( 1 - \frac{2e_1}{h} \right) \right]^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6} \sigma_f (b - 2e_b) (h - 2e_1)^2 \end{aligned} \quad (B.69)$$

Las funciones  $M_{\text{rh}2_D}$  (Ecuación B.67) y  $M_{\text{rh}3_D}$  (Ecuación B.68) coinciden cuando  $y_1 = y_r = \frac{h}{2}(1 - D) = \frac{h}{2} - e_1$ , es decir, con  $D_c = \frac{2e_1}{h}$ :

$$\begin{aligned} M_{\text{rh}2}(D_c) &= M_{\text{rh}3}(D_c) = \\ &= \frac{e_b}{6}(2e_1 - h)^2 \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

### B.5.3. Circular maciza

#### B.5.3.1. Esfuerzo axial plástico

##### B.5.3.1.1. Axil con $D = 0$

Fórmula general:

$$N_c = \pi r^2 \sigma \quad (B.71)$$

Axil elástico:

$$N_{c_e} = \pi r^2 \sigma_f \quad (B.72)$$

Axil plástico:

$$N_{c_p} = \pi r^2 \sigma_r \quad (B.73)$$

##### B.5.3.1.2. Axil con $D > 0$

Fórmula general:

$$N_{c_D} = 2r^2 \sigma \left[ \arcsin(1 - D) + (1 - D)\sqrt{1 - (1 - D)^2} \right] \quad (B.74)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.71, correspondiente al axil sin daño.

### B.5.3.2. Esfuerzo cortante plástico

#### B.5.3.2.1. Cortante con $D = 0$

Fórmula general:

$$V_c = \pi r^2 \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (B.75)$$

Cortante elástico:

$$V_{c_e} = \pi r^2 \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \quad (B.76)$$

Cortante plástico:

$$V_{c_p} = \pi r^2 \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.77})$$

### B.5.3.2.2. Cortante con $D > 0$

Fórmula general:

$$V_{c_D} = 2r^2 \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \left[ \arcsin(1 - D) + (1 - D)\sqrt{1 - (1 - D)^2} \right] \quad (\text{B.78})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.75, correspondiente al cortante sin daño.

### B.5.3.3. Momento flector plástico

#### B.5.3.3.1. Momento con $D = 0$

##### B.5.3.3.1.1. En función de $y_f$

Fórmula general:

$$M_c(y_f) = \frac{1}{12y_f(r - y_f)} \left\{ (\sigma_r y_f - \sigma_f r) \left[ 2y_f \sqrt{r^2 - y_f^2} (2y_f^2 - 5r^2) - 6r^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r} \right) \right] + 3\pi y_f r^4 (\sigma_r - \sigma_f) \right\} \quad (\text{B.79})$$

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = r$ .

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0$ .

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \text{General: } M_{c_i} = \frac{\sigma_f}{6y_f} \left[ y_f \sqrt{r^2 - y_f^2} (5r^2 - 2y_f^2) + 3r^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.80})$$

### B.5.3.3.1.2. En función de $n_s$

Donde  $n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f}$  y por tanto:  $y_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_r}r \Leftrightarrow n_s = \frac{1}{y_f}r$

Fórmula general:

$$M_c(n_s) = \frac{1}{n_s - 1} \frac{r^3}{12} \left\{ 2(\sigma_r - \sigma_f n_s) \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{n_s^2}} \left( \frac{2}{n_s^2} - 5 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 3n_s \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right] + 3\pi n_s (\sigma_r - \sigma_f) \right\} \quad (B.81)$$

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = r \Rightarrow n_s = 1$ :

$$M_{c_e} = \frac{1}{4}\pi r^3 \sigma_f \quad (B.82)$$

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0 \Rightarrow n_s \rightarrow \infty$ :

$$M_{c_p} = \frac{4}{3}r^3 \sigma_f + \frac{1}{4}\pi r^3 (\sigma_r - \sigma_f) \quad (B.83)$$

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{General: } M_{c_i} = \frac{\sigma_f r^3}{6} \left[ \left( 5 - \frac{2}{n_s^2} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{n_s^2}} + 3n_s \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right] \\ \text{Elástico: } M_{c_{e_i}} = \frac{1}{4}\pi r^3 \sigma_f \\ \text{Plástico: } M_{c_{p_i}} = \frac{4}{3}r^3 \sigma_f \end{array} \right\} \quad (B.84)$$

### B.5.3.3.2. Momento con $D > 0$

Fórmula general:

$$M_{cD} = \frac{r^3}{6(n_s - 1)} \left\{ \frac{3n_s}{1 - D} \left[ (\sigma_r - \sigma_f) \arcsin(1 - D) - \right. \right. \\ \left. \left. - \arcsin\left(\frac{1 - D}{n_s}\right) (\sigma_r - n_s \sigma_f) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_r - n_s \sigma_f}{n_s^3} \sqrt{n_s^2 - (1 - D)^2} [5n_s^2 - 2(1 - D)^2] + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - (1 - D)^2} \{2[1 - (1 - D)^2](4\sigma_r - 3\sigma_r n_s - \sigma_f n_s) + \right. \\ \left. \left. + 3n_s(\sigma_r - \sigma_f)\} \right\} \right\} \quad (B.85)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.81, correspondiente al momento sin daño.

### B.5.4. Circular hueca

#### B.5.4.1. Esfuerzo axil plástico

##### B.5.4.1.1. Axil con $D = 0$

Fórmula general:

$$N_{ch} = \pi e(2r - e)\sigma \quad (B.86)$$

Axil elástico:

$$N_{ch_e} = \pi e(2r - e)\sigma_f \quad (B.87)$$

Axil plástico:

$$N_{ch_p} = \pi e(2r - e)\sigma_r \quad (B.88)$$

##### B.5.4.1.2. Axil con $D > 0$

- El punto se encuentra en la zona maciza superior:  $y_r > r - e$ . Equivalentemente  $D < \frac{e}{r}$ .

$$N_{ch1_D} = \left\{ 2r^2 \left[ (1 - D) \sqrt{1 - (1 - D)^2} - \arcsin(1 - D) \right] - \pi(r - e)^2 \right\} \sigma \quad (B.89)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.86, correspondiente al axil sin daño.

Además, sustituyendo  $e$  por  $r$ , se obtiene la expresión B.74, correspondiente al axil con daño para una sección circular maciza.

- El punto se encuentra en la zona hueca:  $r - e > y_r$ . Equivalentemente

mente  $D > \frac{e}{r}$ .

$$N_{ch2_D} = 2 \left\{ r(1-D) \left[ r\sqrt{1-(1-D)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{(r-e)^2 - [r(1-D)]^2} \right] - \right. \\ \left. - (r-e)^2 \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{r-e} \right) + \right. \\ \left. + r^2 \arcsin(1-D) \right\} \sigma \quad (B.90)$$

#### B.5.4.2. Esfuerzo cortante plástico

##### B.5.4.2.1. Cortante con $D = 0$

Fórmula general:

$$V_{ch} = \pi e (2r - e) \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (B.91)$$

Cortante elástico:

$$V_{ch_e} = \pi e (2r - e) \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \quad (B.92)$$

Cortante plástico:

$$V_{ch_p} = \pi e (2r - e) \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}} \quad (B.93)$$

##### B.5.4.2.2. Cortante con $D > 0$

- El punto se encuentra en la zona maciza superior:  $y_r > r - e$ . Equivalentemente  $D < \frac{e}{r}$ .

$$V_{ch1_D} = \left\{ 2r^2 \left[ (1-D) \sqrt{1-(1-D)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \arcsin(1-D) \right] - \pi(r-e)^2 \right\} \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (B.94)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.91, correspondiente al cortante sin daño.

Además, sustituyendo  $e$  por  $r$ , se obtiene la expresión B.78, correspondiente al cortante con daño para una sección circular maciza.

- El punto se encuentra en la zona hueca:  $r - e > y_r$ . Equivalentemente  $D > \frac{e}{r}$ .

$$V_{ch2_D} = 2 \left\{ r(1-D) \left[ r\sqrt{1-(1-D)^2} - \sqrt{(r-e)^2 - [r(1-D)]^2} \right] - (r-e)^2 \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{r-e} \right) + r^2 \arcsin(1-D) \right\} \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (B.95)$$

#### B.5.4.3. Momento flector plástico

##### B.5.4.3.1. Momento con $D = 0$

###### B.5.4.3.1.1. En función de $y_f$

Fórmula general ( $y_f > r - e$ ):

$$M_{ch1}(y_f) = \frac{1}{12} \frac{\sigma_r y_f - \sigma_f r}{y_f(r-y_f)} \left\{ 3r^4 \left[ \pi - 2 \arcsin \left( \frac{y_f}{r} \right) \right] - 2y_f \sqrt{r^2 - y_f^2} (5r^2 - 2y_f^2) \right\} - \frac{\pi}{4} \frac{e}{y_f} \sigma_f (2r - e) [r^2 + (r - e)^2] \quad (B.96)$$

Fórmula general ( $y_f < r - e$ ):

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ch}2}(y_f) = & \frac{1}{2} \frac{\sigma_r y_f - \sigma_f r}{r - y_f} \left\{ \frac{3}{y_f} \left[ (r - e)^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r - e} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - r^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r} \right) \right] + \right. \\
 & + \sqrt{(r - e)^2 - y_f^2} [5(r - e)^2 - 2y_f^2] - \\
 & \left. - \sqrt{r^2 - y_f^2} (5r^2 - 2y_f^2) \right\} + \\
 & + \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{r - y_f} e (2r - e) [r^2 + (r - e)^2]
 \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

Esta expresión se puede resumir más fácilmente mediante la siguiente función:

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ch}2_{\text{aux}}}(e) = & \frac{1}{2} \frac{\sigma_r y_f - \sigma_f r}{r - y_f} \left\{ \frac{3}{y_f} (r - e)^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r - e} \right) + \right. \\
 & + \sqrt{(r - e)^2 - y_f^2} [5(r - e)^2 - 2y_f^2] \left. \right\} + \\
 & + \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{r - y_f} e (2r - e) [r^2 + (r - e)^2]
 \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

quedando

$$M_{\text{ch}2} = M_{\text{ch}2_{\text{aux}}}(e) - M_{\text{ch}2_{\text{aux}}}(0) \quad (\text{B.99})$$

Se comprueba que, para  $y_c = r - e$ , las funciones  $M_{\text{ch}1}(y_c)$  y  $M_{\text{ch}2}(y_c)$  coinciden.

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = r$  (se utiliza  $M_{\text{ch}1}$ ).

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0$  (se utiliza  $M_{\text{ch}2}$ ).

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ch1_i} = \frac{\sigma_f}{y_f} \left\{ \frac{1}{6} \sqrt{r^2 - y_f^2} (5r^2 - 2y_f^2) - \frac{r^4}{4} [\pi - 2 \arcsin \left( \frac{y_f}{r} \right)] + \right. \\ \quad \left. + \frac{\pi e}{4} (2r - e) [r^2 + (r - e)^2] \right\} \\ M_{h2_i} = \frac{\sigma_f}{6} \left\{ \frac{3}{y_f} \left[ r^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r} \right) - (r - e)^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r - e} \right) \right] + \right. \\ \quad \left. + \sqrt{r^2 - y_f^2} (5r^2 - 2y_f^2) - \sqrt{(r - e)^2 - y_f^2} [5(r - e)^2 - 2y_f^2] \right\} \end{array} \right\} \quad (B.100)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $\sigma_r = \sigma_f$ ,  $e = r$  en la expresión anterior de  $M_{ch1_i}$ , se obtiene la fórmula correspondiente al caso circular macizo sin endurecimiento:  $\frac{\sigma_f}{6y_f} \left[ y_f \sqrt{r^2 - y_f^2} (5r^2 - 2y_f^2) + 3r^4 \arcsin \left( \frac{y_f}{r} \right) \right]$ .

#### B.5.4.3.1.2. En función de $n_s$

Fórmula general  $\left( n_s < \frac{r}{r - e} \right)$ :

$$M_{ch1}(n_s) = \frac{1}{12} \left( \frac{r}{n_s} \right)^3 \frac{\sigma_f n_s - \sigma_r}{n_s - 1} \left\{ 2\sqrt{n_s^2 - 1} (5n_s^2 - 2) - \right.$$

$$- 3n_s^4 \left[ \pi - 2 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right] \left. \right\} +$$

$$+ \frac{\pi e}{4r} \sigma_f n_s (2r - e) [r^2 + (r - e)^2] \quad (B.101)$$

Fórmula general  $\left(n_s > \frac{r}{r-e}\right)$ :

$$\begin{aligned}
 M_{ch2}(n_s) = & \frac{1}{6} \frac{\sigma_f n_s - \sigma_r}{n_s - 1} \left\{ 3 \frac{n_s}{r} \left[ r^4 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) - \right. \right. \\
 & - (r-e)^4 \arcsin \left( \frac{r}{n_s(r-e)} \right) \left. \right] + \\
 & + \sqrt{r^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left[ 5r^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right] - \\
 & - \sqrt{(r-e)^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left[ 5(r-e)^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{\pi e}{4 r} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s - 1} n_s (2r-e) [r^2 + (r-e)^2]
 \end{aligned} \tag{B.102}$$

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = r \Rightarrow n_s = 1$  (se utiliza  $M_{ch1}$ ):

$$M_{ch1_e} = \frac{\pi e}{4 r} \sigma_f (2r-e) [r^2 + (r-e)^2] \tag{B.103}$$

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0 \Rightarrow n_s \rightarrow \infty$  (se utiliza  $M_{ch2}$ ):

$$\begin{aligned}
 M_{ch2_p} = & \frac{\pi e}{4 r} (\sigma_r - \sigma_f) (2r-e) [r^2 + (r-e)^2] + \\
 & + \frac{4}{3} \sigma_f e [(r-e)^2 + r(2r-e)]
 \end{aligned} \tag{B.104}$$

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \text{General: } M_{ch1_i} = \frac{\sigma_f}{12} \left\{ \left( \frac{r}{n_s} \right)^3 \left[ 2\sqrt{n_s^2 - 1} (5n_s^2 - 2) - \right. \right. \\
 \left. \left. - 3n_s^4 \left( \pi - 2 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right) \right] + 3 \frac{n_s}{r} \sigma_f \pi e (2r-e) [r^2 + (r-e)^2] \right\} \\
 M_{ch2_i} = \frac{\sigma_f}{6} \left\{ 3 \frac{n_s}{r} \left[ r^4 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) - (r-e)^4 \arcsin \left( \frac{r}{n_s(r-e)} \right) \right] + \right. \\
 \left. + \sqrt{r^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left[ 5r^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right] - \right. \\
 \left. - \sqrt{(r-e)^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left[ 5(r-e)^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right] \right\} \\
 \text{Elástico: } M_{ch1_{e_i}} = \sigma_f \frac{\pi e}{4 r} (2r-e) [r^2 + (r-e)^2] \\
 \text{Plástico: } M_{ch2_{p_i}} = \sigma_f \frac{4}{3} e (3r(r-e) + e^2)
 \end{array}
 \right\} \tag{B.105}$$

Se comprueba que, para  $n_{s_c} = \frac{r}{r - e}$ , ambas funciones coinciden:

$$\begin{aligned} M_{ch1}(n_{s_c}) &= M_{ch2}(n_{s_c}) = \\ &= \frac{1}{12} \frac{\sigma_r(r - e) - \sigma_f r}{(r - e)e} \left\{ 3r^4 \left[ \pi - 2 \arcsin \left( \frac{r - e}{r} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{r^2 - (r - e)^2}(r - e)[5r^2 - 2(r - e)^2] \right\} + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_f e}{r - e} (2r - e)[r^2 + (r - e)^2] \end{aligned} \quad (B.106)$$

#### B.5.4.3.2. Momento con $D > 0$

Fórmula general, con  $y_r > y_f > r - e \Leftrightarrow D < 1 - n_s \left( 1 - \frac{e}{r} \right)$ :

$$\begin{aligned} M_{ch1D} &= \frac{1}{6} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{(n_s - 1)(1 - D)} \left( \frac{r}{n_s} \right)^3 \left\{ 3n_s^4 \left[ \arcsin \left( \frac{1 - D}{n_s} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sigma_f - \sigma_r}{n_s \sigma_f - \sigma_r} \arcsin(1 - D) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{n_s^2 - (1 - D)^2}(1 - D)[5n_s^2 - 2(1 - D)^2] \right\} - \\ &\quad - \frac{\pi}{4} \frac{n_s}{r} \sigma_f \frac{(r - e)^4}{1 - D} - \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{r^3}{n_s - 1} \sqrt{1 - (1 - D)^2} \left\{ 3n_s(\sigma_f - \sigma_r) + \right. \\ &\quad \left. + 2[1 - (1 - D)^2][n_s(3\sigma_r + \sigma_f) - 4\sigma_r] \right\} \end{aligned} \quad (B.107)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.101, correspondiente al momento sin daño con  $n_s < r/(r - e)$ .

Además, sustituyendo  $e$  por  $r$ , se obtiene la expresión B.85, correspondiente al momento con daño para una sección circular maciza.

Fórmula general, con  $y_r > r - e > y_f \Leftrightarrow 1 - n_s \left(1 - \frac{e}{r}\right) < D < \frac{e}{r}$ :

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ch}2_D} = & \frac{1}{2} \frac{n_s(\sigma_r - n_s\sigma_f)}{r(1-D)(n_s-1)} \left\{ (r-e)^4 \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{n_s(r-e)} \right) - \right. \\
 & - r^4 \arcsin \left( \frac{1-D}{n_s} \right) \Big\} + \\
 & + \frac{1}{4} \frac{n_s(\sigma_f - \sigma_r)}{r(1-D)(n_s-1)} [(r-e)^4\pi - 2r^4 \arcsin(1-D)] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{n_s r^2 (\sigma_f - \sigma_r)}{n_s - 1} \sqrt{r^2 - [r(1-D)]^2} [1 - 2(1-D)^2] - \\
 & - \frac{4}{3} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{n_s - 1} [r^2 - (r(1-D))^2]^{\frac{3}{2}} - \\
 & - \frac{1}{6} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{n_s - 1} \left\{ \sqrt{(r-e)^2 - \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2} \left[ 5(r-e)^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - \sqrt{r^2 - \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2} \left[ 5r^2 - 2 \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.108}$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.102, correspondiente al momento sin daño con  $n_s > r/(r-e)$ .

Fórmula general, con  $r - e > y_r > y_f \Leftrightarrow D > \frac{e}{r}$ :

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ch}3_D} = & \frac{n_s}{2(1-D)(n_s-1)} \left\{ \frac{(r-e)^4}{r} \left[ (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{r-e} \right) - \right. \right. \\
 & - (n_s \sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{n_s(r-e)} \right) \left. \right] - \\
 & - r^3 \left[ (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin(1-D) - (n_s \sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( \frac{1-D}{n_s} \right) \right] \left. \right\} - \\
 & - \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{6(n_s-1)} \left\{ \sqrt{(r-e)^2 - \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2} \left[ 5(r-e)^2 - 2 \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2 \right] - \right. \\
 & - \sqrt{r^2 - \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2} \left[ 5r^2 - 2 \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2 \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{6(n_s-1)} \left\{ \sqrt{(r-e)^2 - [r(1-D)]^2} [4(r-e)^2(n_s \sigma_f - \sigma_r) + \right. \\
 & + (n_s(3\sigma_r + \sigma_f) - 4\sigma_r)((r-e)^2 - 2(r(1-D))^2)] - \\
 & - \sqrt{(r^2 - (r(1-D))^2)^2} [4r^2(n_s \sigma_f - \sigma_r) + \\
 & \left. \left. + (n_s(3\sigma_r + \sigma_f) - 4\sigma_r)(r^2 - 2(r(1-D))^2) \right] \right\} \\
 \end{aligned} \tag{B.109}$$

Esta expresión se puede resumir más fácilmente mediante la siguiente función:

$$\begin{aligned}
 M_{\text{aux}}(e) = & \frac{n_s}{2(1-D)(n_s-1)} \frac{(r-e)^4}{r} \left[ (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{r-e} \right) - \right. \\
 & - (n_s \sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( \frac{r(1-D)}{n_s(r-e)} \right) \left. \right] - \\
 & - \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{6(n_s-1)} \sqrt{(r-e)^2 - \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2} \left[ 5(r-e)^2 - 2 \left( \frac{r(1-D)}{n_s} \right)^2 \right] - \\
 & + \frac{\sqrt{(r-e)^2 - [r(1-D)]^2}}{6(n_s-1)} \left\{ 4(r-e)^2(n_s \sigma_f - \sigma_r) + \right. \\
 & \left. + [n_s(3\sigma_r + \sigma_f) - 4\sigma_r] [(r-e)^2 - 2(r(1-D))^2] \right\} \\
 \end{aligned} \tag{B.110}$$

quedando

$$M_{\text{ch}3_D} = M_{\text{aux}}(e) - M_{\text{aux}}(0) \tag{B.111}$$

Además, sustituyendo  $e$  por  $r$ , se obtiene la expresión B.85, correspondiente al momento con daño para una sección circular maciza.

Las funciones  $M_{\text{ch}1_D}$  (Ecuación B.107) y  $M_{\text{ch}2_D}$  (Ecuación B.108) coin-

ciden cuando  $y_f = r - e$ , es decir, con  $n_{sc} = \frac{r(1-D)}{r-e}$ .

$$\begin{aligned}
 M_{ch1_D}(n_{sc}) &= M_{ch2_D}(n_{sc}) = \\
 &= \frac{r^4}{2} \frac{(\sigma_f - \sigma_r)r(1-D) + \sigma_r e}{e[r(1-D) - e]} \left\{ \arcsin \left( 1 - D - \frac{e}{r} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \arcsin(1-D)(\sigma_f - \sigma_r)[r(1-D) - e] \right\} - \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_f(r-e)^4}{r(1-D) - e} + \\
 &+ \frac{1}{6} \frac{(\sigma_f - \sigma_r)r(1-D) + \sigma_r e}{e} \sqrt{r^2 - [r(1-D) - e]^2} \left\{ 5r^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2[r(1-D) - e]^2 \right\} - \\
 &- \frac{1}{6} \frac{r^3}{e} \sqrt{1 - (1-D)^2} \left\{ 2[1 - (1-D)^2][(\sigma_f - \sigma_r)r(1-D) + \right. \\
 &\quad \left. + 4\sigma_r e] + 3(\sigma_f - \sigma_r)r(1-D) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.112}$$

Las funciones  $M_{ch2_D}$  (Ecuación B.108) y  $M_{ch3_D}$  (Ecuación B.109) coinciden cuando  $y_f = r - e$ , es decir, con  $n_{sc} = \frac{r(1-D)}{r-e}$ .

$$\begin{aligned}
 M_{ch2_D}(D_c) &= M_{ch3_D}(D_c) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{n_s(r-e)^3}{n_s - 1} \left[ \frac{\pi}{2} (\sigma_f - \sigma_r) - (n_s \sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right] + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{n_s r^4}{(r-e)(n_s - 1)} \left[ (n_s \sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( \frac{r-e}{n_s r} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin \left( 1 - \frac{e}{r} \right) \right] - \\
 &- \frac{1}{2} \frac{n_s r^2 (\sigma_f - \sigma_r)}{n_s - 1} \sqrt{r^2 - (r-e)^2} + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{n_s - 1} \left[ r^2 \sqrt{r^2 - \left( \frac{r-e}{n_s} \right)^2} - (r-e)^3 \sqrt{1 - \left( \frac{1}{n_s} \right)^2} \right] - \\
 &- \frac{1}{3} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{n_s - 1} \left\{ (r-e)^3 \left[ 1 - \left( \frac{1}{n_s} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} - \left[ r^2 - \left( \frac{r-e}{n_s} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{3} \frac{\sigma_r(4-3n_s) - n_s \sigma_f}{n_s - 1} \left[ r^2 - (r-e)^2 \right]^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned} \tag{B.113}$$

### B.5.5. Doble T

#### B.5.5.1. Esfuerzo axil plástico

##### B.5.5.1.1. Axil con $D = 0$

Fórmula general:

$$N_{dt} = [hb - (h - 2e_h)(b - e_b)]\sigma \quad (\text{B.114})$$

Axil elástico:

$$N_{dt_e} = [hb - (h - 2e_h)(b - e_b)]\sigma_f \quad (\text{B.115})$$

Axil plástico:

$$N_{dt_p} = [hb - (h - 2e_h)(b - e_b)]\sigma_r \quad (\text{B.116})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $e_b = b$  en las expresiones anteriores, se obtienen las fórmulas correspondiente al caso rectangular:  $hb\sigma$ .

##### B.5.5.1.2. Axil con $D > 0$

- El punto se encuentra dentro del espesor del tramo horizontal:  $y_r > h/2 - e_h$ . Equivalentemente  $D < \frac{2e_h}{h}$ .

$$N_{dt1_D} = [hb(1 - D) - (h - 2e_h)(b - e_b)]\sigma \quad (\text{B.117})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.114, correspondiente al axil sin daño.

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b$ , se obtiene la expresión B.35, correspondiente al axil con daño para una sección rectangular maciza.

- El punto se encuentra en la zona hueca:  $h/2 - e_h > y_r$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_h}{h}$ .

$$N_{r2_D} = he_b(1 - D)\sigma \quad (\text{B.118})$$

### B.5.5.2. Esfuerzo cortante plástico

#### B.5.5.2.1. Cortante con $D = 0$

Fórmula general:

$$V_{dt} = [hb - (h - 2e_h)(b - e_b)] \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.119})$$

Cortante elástico:

$$V_{dte} = [hb - (h - 2e_h)(b - e_b)] \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.120})$$

Cortante plástico:

$$V_{dtp} = [hb - (h - 2e_h)(b - e_b)] \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.121})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $e_b = b$  en las expresiones anteriores, se obtienen las fórmulas correspondiente al caso rectangular:  $hb\sigma$ .

#### B.5.5.2.2. Cortante con $D > 0$

Cuando aparece daño en una sección rectangular hueca hay que distinguir los siguientes dos casos excluyentes, según la posición del punto que marca el comienzo de la zona dañada,  $y_r = \frac{h}{2}(1 - D)$ :

- El punto se encuentra dentro del espesor del tramo horizontal:  $y_r > h/2 - e_h$ . Equivalentemente  $D < \frac{2e_h}{h}$ .

$$V_{dt1_D} = [hb(1 - D) - (h - 2e_h)(b - e_b)] \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.122})$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.119, correspondiente al cortante sin daño.

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b$ , se obtiene la expresión B.39, correspondiente al cortante con daño para una sección rectangular maciza.

- El punto se encuentra en la zona hueca:  $h/2 - e_h > y_r$ . Equivalentemente  $D > \frac{2e_h}{h}$ .

$$V_{r2D} = he_b(1 - D)\frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.123})$$

### B.5.5.3. Momento flector plástico

#### B.5.5.3.1. Momento con $D = 0$

En una sección de doble T sin daño hay que distinguir los siguientes dos casos excluyentes, según la posición ( $y_f$ ) del punto ( $\sigma_f, \varepsilon_f$ ) de cambio de pendiente del diagrama  $\sigma - \varepsilon$ :

- El punto se encuentra dentro del ala:  $y_f > h/2 - e_h$
- El punto se encuentra dentro del alma:  $y_f < h/2 - e_h$

##### B.5.5.3.1.1. En función de $y_f$

Fórmula general ( $y_f > h/2 - e_h$ ):

$$\begin{aligned} M_{dt1}(y_f) = & \frac{2\sigma_f}{3y_f} \left[ by_f^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] + \\ & + \frac{1}{y_f - h/2} \left\{ \frac{2}{3} (\sigma_f - \sigma_r) b \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^3 - y_f^3 \right] + \right. \\ & \left. + \left( \sigma_r y_f - \sigma_f \frac{h}{2} \right) b \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_f^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.124})$$

Fórmula general ( $y_f < h/2 - e_h$ ):

$$\boxed{M_{dt2}(y_f) = \frac{2}{3}e_b\sigma_f y_f^2 + \frac{1}{y_f - h/2} \left\{ \frac{2}{3}(\sigma_f - \sigma_r) \left[ b\left(\frac{h}{2}\right)^3 - e_b y_f^3 - (b - e_b)\left(\frac{h}{2} - e_h\right)^3 \right] + \left( \sigma_r y_f - \sigma_f \frac{h}{2} \right) \left[ b\left(\frac{h}{2}\right)^2 - e_b y_f^2 - (b - e_b)\left(\frac{h}{2} - e_h\right)^2 \right] \right\}} \quad (B.125)$$

Se comprueba que, para  $y_c = \frac{h}{2} - e_h$ , las funciones  $M_{dt1}(y_c)$  y  $M_{dt2}(y_c)$  coinciden.

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = h/2$  (se utiliza  $M_{dt1}$ ).

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0$  (se utiliza  $M_{dt2}$ ).

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{General: } M_{dt1_i} = \sigma_f \left\{ \frac{2}{3y_f} \left[ by_f^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] + b \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_f^2 \right] \right\} \\ M_{dt2_i} = \sigma_f \left[ (h - e_h)(b - e_b)e_h + \left( \frac{h^2}{4} - \frac{y_f^2}{3} \right) e_b \right] \\ \text{Elástico: } M_{dt1_{ei}} = \sigma_f \frac{4}{3h} \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] \\ \text{Plástico: } M_{dt2_{pi}} = \sigma_f \left[ \frac{h^2}{4} e_b + (h - e_h)(b - e_b)e_h \right] \end{array} \right\} \quad (B.126)$$

Se comprueba que, sustituyendo  $\sigma_r = \sigma_f$ ,  $e_b = b$  en las expresiones anteriores, se obtienen las fórmulas correspondiente al caso rectangular sin endurecimiento:  $\frac{b}{12}\sigma_f(3h^2 - 4y_f^2)$ .

#### B.5.5.3.1.2. En función de $n_s$

Donde  $n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f}$ . Por tanto:  $y_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_r} \frac{h}{2} \Leftrightarrow n_s = \frac{1}{y_f} \frac{h}{2}$  y además  $y_f \gtrless h/2 - e_h \Leftrightarrow n_s \leqslant \frac{h}{h - 2e_h}$

Fórmula general  $\left(n_s < \frac{h}{h - 2e_h}\right)$ :

$$\boxed{M_{dt1}(n_s) = \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) - \frac{1}{6} \frac{\sigma_f n_s (b - e_b)}{h} (h - 2e_h)^3} \quad (B.127)$$

Fórmula general  $\left(n_s > \frac{h}{h - 2e_h}\right)$ :

$$\boxed{M_{dt2}(n_s) = \frac{e_b \sigma_f}{6} \left( \frac{h}{n_s} \right)^2 + \frac{4 \sigma_r - \sigma_f}{3} \frac{n_s}{h - 2e_h} \left[ \left( b - \frac{e_b}{n_s^3} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] - \frac{\sigma_r - n_s \sigma_f}{n_s - 1} \left[ \left( b - \frac{e_b}{n_s^2} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^2 \right]} \quad (B.128)$$

Momento elástico  $\Rightarrow y_f = h/2 \Rightarrow n_s = 1$  (se utiliza  $M_{dt1}$ ):

$$M_{dt1_e} = \frac{4 \sigma_f}{3} \frac{h}{h} \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] \quad (B.129)$$

Momento plástico  $\Rightarrow y_f = 0 \Rightarrow n_s \rightarrow \infty$ :

$$\boxed{M_{dt2_p} = \frac{4 \sigma_r - \sigma_f}{3} \frac{h}{h} \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] + \sigma_f \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^2 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^2 \right]} \quad (B.130)$$

Comprobación con  $\sigma_r = \sigma_f$  (sin endurecimiento):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{General: } M_{dt1_i} = \sigma_f \left\{ b \left( \frac{h}{2} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{n_s^2} \right) + \frac{4}{3} \frac{n_s}{h} \left[ b \left( \frac{h}{2n_s} \right)^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] \right\} \\ M_{dt2_i} = \sigma_f \left[ \frac{e_b}{6} \left( \frac{h}{n_s} \right)^2 + \left( b - \frac{e_b}{n_s^2} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^2 \right] \\ \text{Elástico: } M_{dt1_{ei}} = \frac{4}{3} \frac{\sigma_f}{h} \left[ b \left( \frac{h}{2} \right)^3 - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \right] \\ \text{Plástico: } M_{dt2_{pi}} = \sigma_f \left[ e_b \frac{h^2}{4} + e_h (b - e_b) (h - e_h) \right] \end{array} \right\} \quad (\text{B.131})$$

Se comprueba que, para  $n_{sc} = \frac{h}{h - 2e_h}$ , ambas funciones coinciden:

$$\begin{aligned} M_{dt1}(n_{sc}) &= M_{dt2}(n_{sc}) = \\ &= \frac{be_h}{6} [3h(\sigma_r + \sigma_f) - 2e_h(\sigma_r + 2\sigma_f)] + \\ &\quad + \frac{e_b\sigma_f}{6} (h - 2e_h)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.132})$$

### B.5.5.3.2. Momento con $D > 0$

Cuando aparece daño en una sección de doble T, en función de la posición del punto  $y_r = \frac{h}{2}(1 - D)$ , que marca el comienzo de la zona dañada, y la posición del punto  $y_f = \frac{y_r}{n_s}$ , de cambio de pendiente del diagrama  $\sigma - \varepsilon$  (siempre  $y_r > y_f$ ), se distinguen los siguientes tres casos excluyentes:

- Ambos puntos se encuentran dentro del ala:  $y_r > y_f > h/2 - e_h$ .  
Equivalentemente  $D < 1 - n_s \left( 1 - \frac{2e_h}{h} \right)$ .
- La zona dañada ( $y_r$ ) comienza dentro del ala pero  $y_f$  se encuentra en el alma:  $y_r > h/2 - e_h > y_f$ . Equivalentemente  $1 - n_s \left( 1 - \frac{2e_h}{h} \right) < D < \frac{2e_h}{h}$ .
- Ambos puntos se encuentran dentro del alma:  $h/2 - e_h > y_r > y_f$ .  
Equivalentemente  $D > \frac{2e_h}{h}$ .

Es decir, los dos primeros casos son equivalentes a los expuestos para funciones sin daño, pero el tercer caso se añade debido a que la posición de  $y_r$  varía con el daño.

$$\text{Fórmula general con } y_r > y_f > h/2 - e_h \Leftrightarrow D < 1 - n_s \left( 1 - \frac{2e_h}{h} \right)$$

$$M_{dt1_D} = \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) (1 - D)^2 - \frac{1}{6} \frac{\sigma_f n_s (b - e_b)}{h(1 - D)} (h - 2e_h)^3$$

(B.133)

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.127, correspondiente al momento sin daño con  $n_s < h/(h - 2e_h)$ .

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b$ , se obtiene la expresión B.46, correspondiente al momento con daño para una sección rectangular maciza.

Fórmula general con  $y_r > h/2 - e_h > y_f \Leftrightarrow 1 - n_s \left( 1 - \frac{2e_h}{h} \right) < D < \frac{2e_h}{h}$ :

$$\begin{aligned}
 M_{dt2D} = & \frac{e_b \sigma_f}{6} \left[ \frac{h(1-D)}{n_s} \right]^2 + \\
 & + \frac{4}{3} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{h(1-D)} \frac{n_s}{n_s - 1} \left\{ \left( b - \frac{e_b}{n_s^3} \right) \left[ \frac{h(1-D)}{2} \right]^3 - \right. \\
 & - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^3 \left. \right\} - \\
 & - \frac{\sigma_r - n_s \sigma_f}{n_s - 1} \left\{ \left( b - \frac{e_b}{n_s^2} \right) \left[ \frac{h(1-D)}{2} \right]^2 - \right. \\
 & \left. - (b - e_b) \left( \frac{h}{2} - e_h \right)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{B.134}$$

Se comprueba que, sustituyendo  $D = 0$ , se obtiene la expresión B.128, correspondiente al momento sin daño con  $n_s > h/(h - 2e_h)$ .

Además, sustituyendo  $e_b$  por  $b$ , se obtiene la expresión B.46, correspondiente al momento con daño para una sección rectangular maciza.

Fórmula general con  $h/2 - e_h > y_r > y_f \Leftrightarrow D > \frac{2e_h}{h}$ :

$$M_{dt3D} = \frac{e_b h^2}{12} (1 - D)^2 \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) \tag{B.135}$$

Se comprueba que, sustituyendo  $e_b$  por  $b$ , se obtiene la expresión B.46, correspondiente al momento con daño para una sección rectangular maciza.

Las funciones  $M_{dt1_D}$  (Ecuación B.133) y  $M_{dt2_D}$  (Ecuación B.134) coinciden cuando  $y_f = \frac{h}{2} - e_h$ , es decir, con  $D_c = 1 - n_s \left(1 - \frac{2e_h}{h}\right)$ .

$$\begin{aligned} M_{dt1_D}(D_c) &= M_{dt2_D}(D_c) = \\ &= \frac{bh^2}{12} \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) \left[ n_s \left( 1 - \frac{2e_h}{h} \right) \right]^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6} \sigma_f (b - e_b) (h - 2e_h)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.136})$$

Las funciones  $M_{dt2_D}$  (Ecuación B.134) y  $M_{dt3_D}$  (Ecuación B.135) coinciden cuando  $y_1 = y_r = \frac{h}{2}(1 - D) = \frac{h}{2} - e_h$ , es decir, con  $D_c = \frac{2e_h}{h}$ :

$$\begin{aligned} M_{dt2_D}(D_c) &= M_{dt3_D}(D_c) = \\ &= \frac{e_b}{12} (2e_h - h)^2 \left( 2\sigma_r + \sigma_f - \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s} - \frac{\sigma_r}{n_s^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.137})$$



# Apéndice C

## Códigos de los programas

### Contenidos

---

<b>C.1. Maple</b> . . . . .	<b>274</b>
C.1.1. MDR . . . . .	274
C.1.2. Obtención de los esfuerzos plásticos . . . . .	288
<b>C.2. Metafor (Python)</b> . . . . .	<b>303</b>
C.2.1. Viga experimental . . . . .	303
C.2.2. Pórtico . . . . .	311
<b>C.3. Matlab</b> . . . . .	<b>318</b>
C.3.1. Viga experimental: ajuste de parámetros . . .	318

---

Debido al gran número y extensión de los códigos desarrollados, solamente se expondrá a continuación alguno de ellos.

## C.1. Maple

### C.1.1. MDR

Se reproduce a continuación parte del código desarrollado para implementar el Método Directo de Rigidez (MDR). Este programa está disponible de forma libre en el Centro de Aplicaciones de Maplesoft [42].

El resto de códigos desarrollados para implementar los modelos numéricos son los siguientes:

- MDRCP: Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso. Este programa está disponible de forma libre en el Centro de Aplicaciones de Maplesoft [43].
- MDRCPR: Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso y Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño.
- MDRCPRE: Método Directo de Rigidez con Cálculo Plástico paso a paso, Reducción del momento plástico por combinación de esfuerzos y daño, y Endurecimiento.

La extensión de dichos códigos es demasiado grande como para reproducirlos aquí.

# Application Demonstration



## 2D-Direct Stiffness Method

*This worksheet contains an implementation of the Direct Stiffness Method for 2D frames, in which numeric information (displacements, reactions and beam diagrams) and graphic information (animated or static beam diagrams and deformed shape) are obtained.*

© 2008 A.L.I. & P.L.R.

Engineering School, University of Valladolid, Spain.  
Structural Design Area, CARTIF Technology Center, Valladolid, Spain

### Instructions

Instructions to open the document:

- Open this document by double-clicking on it (or "right-click > Open with"). The folder "libr" must be in the same Directory as the Maple archive.
- Please **DO NOT open Maple first** and then open this document from here, it would affect the definition of the Current Directory, and it wouldn't work.

Execute to read the instructions of this program:

```
> restart:with(Maplets[Elements]):
dirant:=currentdir():currentdir("libr"):
libname:=currentdir(), libname:
with(logis3):currentdir(dirant):
instruc();
```

Don't worry if some warnings are displayed here or in the next block: 'Warning, system/system calls have been disabled in the options dialog'. That's because of the use of 'currentdir()' to read the libraries. It depends on your Maple Configuration (Tools>Options>Security), and it does not affect the program.

### 1. Start

Start and load of the standard libraries and our own libraries and procedures.

```
> restart: Digits:=20:
Standard libraries
> with(linalg): with(plottools):with(LinearAlgebra):with(plots):
with(Maplets[Elements]):setoptions(scaling=CONSTRAINED):
Our own libraries
> dirant:=currentdir():currentdir("libr"):
libname:=currentdir(), libname:
with(simbolos): with(dibujos): with(logis3):
currentdir(dirant):
```

Maplet to choose how to introduce the data

```
> mpltin():
> #conmap[2]:="true":
If you always want the same data introduction method, without being asked to choose one, put '#' before mpltin().
remove '#' before conmap[2], and put conmap[2]:="true" to always introduce the data manually, or "false" to always use Maplets.
```

### PROCEDURES: (displayed here for its academic use)

#### Stiffness matrix:

Elemental stiffness matrix

```
> kei:=proc(E,A,Iz,L,erc1,erc2)
  if (erc1=0 and erc2=0) then    #Stiffness matrix with rigid joints
    array([[A*E/L, 0, 0, -A*E/L, 0, 0],
           [0, 12*E*Iz/L^3, 6*E*Iz/L^2, 0, -12*E*Iz/L^3, 6*E*Iz/L^2 ],
           [0, 6*E*Iz/L^2, 4*E*Iz/L, 0, -6*E*Iz/L^2, 2*E*Iz/L ],
           [-A*E/L, 0, 0, A*E/L, 0, 0 ],
           [0, -12*E*Iz/L^3, -6*E*Iz/L^2, 0, 12*E*Iz/L^3, -6*E*Iz/L^2],
           [0, 6*E*Iz/L^2, 2*E*Iz/L, 0, -6*E*Iz/L^2, 4*E*Iz/L ]]):
  elif (erc1=1 and erc2=0) then  #Hinge in the first extreme
    array([[A*E/L, 0, 0, -A*E/L, 0, 0 ],
           [0, 3*E*Iz/L^3, 0, 0, -3*E*Iz/L^3, 3*E*Iz/L^2 ],
           [0, 0, 0, 0, 0, 0 ],
           [-A*E/L, 0, 0, A*E/L, 0, 0 ],
           [0, -3*E*Iz/L^3, 0, 0, 3*E*Iz/L^3, -3*E*Iz/L^2],
           [0, 3*E*Iz/L^2, 0, 0, -3*E*Iz/L^2, 3*E*Iz/L ]]):
  elif (erc1=0 and erc2=1) then  #Hinge in the second extreme
    array([[A*E/L, 0, 0, -A*E/L, 0, 0 ],
           [0, 3*E*Iz/L^3, 3*E*Iz/L^2, 0, -3*E*Iz/L^3, 0],
```

```

[0,      3*E*Iz/L^2, 3*E*Iz/L,   0,      -3*E*Iz/L^2,0],
[-A*E/L, 0,      0,      A*E/L, 0,      0],
[0,      -3*E*Iz/L^3,-3*E*Iz/L^2,0,      3*E*Iz/L^3,0],
[0,      0,      0,      0,      0,      0]):

elif (erc1=1 and erc2=1) then #Hinge in both extremes
  array([[A*E/L, 0,0,-A*E/L,0,0],
         [0,      0,0,0, 0,0],
         [0,      0,0,0, 0,0],
         [-A*E/L,0,0,A*E/L, 0,0],
         [0,      0,0,0, 0,0],
         [0,      0,0,0, 0,0]]):
end if:
end:
Coordinates transformation (from global to local coordinates)
> T:=proc(alfa)
  array([[cos(alfa), sin(alfa),0,      0,      0,0],
         [-sin(alfa),cos(alfa),0,      0,      0,0],
         [0,      0,      1,      0,      0,0],
         [0,      0,      0,cos(alfa), sin(alfa),0],
         [0,      0,      0,-sin(alfa),cos(alfa),0],
         [0,      0,      0,      0,      0,1]]):
end:
Ln:=proc(alfa)
  array([[cos(alfa), sin(alfa),0],
         [-sin(alfa),cos(alfa),0],
         [0,      0,      1]]):
end:
Stiffness matrix in global coordinates
> kg:=proc(E,A,Iz,L,alfa,erc1,erc2)
  evalm(transpose(T(alfa)) &* ke(E,A,Iz,L,erc1,erc2) &* T(alfa)):
end:
Stiffness matrix, divide in 3x3 sub-matrices
> k_ii:=proc(kr)
  array([[kr[1,1],kr[1,2],kr[1,3]],
         [kr[2,1],kr[2,2],kr[2,3]],
         [kr[3,1],kr[3,2],kr[3,3]]]):
end:
k_ij:=proc(kr)
  array([[kr[1,4],kr[1,5],kr[1,6]],
         [kr[2,4],kr[2,5],kr[2,6]],
         [kr[3,4],kr[3,5],kr[3,6]]]):
end:
k_ji:=proc(kr)
  array([[kr[4,1],kr[4,2],kr[4,3]],
         [kr[5,1],kr[5,2],kr[5,3]],
         [kr[6,1],kr[6,2],kr[6,3]]]):
end:
k_jj:=proc(kr)
  array([[kr[4,4],kr[4,5],kr[4,6]],
         [kr[5,4],kr[5,5],kr[5,6]],
         [kr[6,4],kr[6,5],kr[6,6]]]):
end:
Interclemental loads and beam diagrams obtained
Punctual load:
> f_pun:=proc(Px,Py,Mz,a,L)
  array([Px*(-1+a), -(1-a)*(2*L*Py*a^2-Py*a*L+6*Mz*a-Py*L)/L, -(1-a)*(L*Py*a^2+3*Mz*a-Py*a*L-Mz), -Px*a,
  a*(-3*Py*a*L-6*Mz+2*L*Py*a^2+6*Mz*a)/L, -a*(-Py*a*L-2*Mz+L*Py*a^2+3*Mz*a)]):
end:

#NVM_pun:=array([1,2,3]):
NVM_pun := proc (Px, Py, Mz, a, L)
  [piecewise(x < a*L, -Px*(-1+a), a*L < x, -Px*(-1+a)-Px), piecewise(x < a*L, (-1+a)*(2*L*Py*a^2-2*Py*a*L+6*Mz*a-Py*L)/L, a*L < x, -(1-a)*(2*L*Py*a^2+3*Mz*a-Py*a*L-Mz)), -a*(-3*Py*a*L-6*Mz+2*L*Py*a^2+6*Mz*a)/L, -a*(-Py*a*L-2*Mz+L*Py*a^2+3*Mz*a)]: end:
Distributed load:
> f_dis:=proc(qxa,qxb,qya,qyb,a,b,L)
  array([-1/6*(-b+a)*(a*qxb+2*qxa*a-3*qxa+qxa*b-3*qxb+2*qxb*b)*L, 1/20*L*(-b+a)*(2*qyb*a^3+8*qya*a^3-15*qya*a^2+6*qya*b*a^2+4*qyb*b*a^2-5*qyb*a^2-10*qya*b*a+6*qyb*b^2*a+4*qya*b^2*a-10*qyb*b*a-5*qya*b^2+10*qyb+2*qya*b^3+10*qya+8*qyb*b^3-15*qyb*b^2), 1/60*L^2*(-b+a)*(3*qyb*a^3+12*qya*a^3-10*qyb*a^2+6*qyb*b*a^2-30*qya*a^2+9*qya*b*a^2-20*qya*b*a+6*qya*b^2*a+10*qya*b+9*qyb*b^2*a+20*qya*a-20*qyb*b*a+10*qya*b+12*qyb*
```

```

b^3+3*qya*b^3+20*qyb*b-30*qyb*b^2-10*qya*b^2), 1/6*L*(-b+a)*(a*qxb+2*qxa*a+qxa*b+2*qxb*b), -1/20*L*(-b+a)
*(2*qyb*a^3+8*qya*a^3-15*qya*a^2+6*qya*b*a^2+4*qyb*b*a^2-5*qyb*a^2-10*qya*b*a+6*qyb*b^2*a+4*qya*b^2*a-10*
qyb*b*a+2*qya*b^3-15*qyb*b^2+8*qyb*b^3-5*qya*b^2), 1/60*L^2*(-b+a)*(3*qyb*a^3+12*qya*a^3+9*qya*b*a^2-5*
qyb*a^2-15*qya*a^2+6*qyb*b*a^2-10*qya*b*a+9*qyb*b^2*a+6*qya*b^2*a-10*qyb*b*a+12*qyb*b^3-5*qya*b^2+3*qya*
b^3-15*qyb*b^2))]:
end;
NVM_Dis := proc (qxa, qxb, qya, qyb, a, b, L)
  [piecewise(x < a*L, 1/6*(-b+a)*(qxb*a+2*qxa*a-3*qxa+qxa*b-3*qxb+2*qxb*b)*L, a*L-x < 0 and x-b*L < 0, 1/6*(-
b+a)*(qxb*a+2*qxa*a-3*qxa+qxa*b-3*qxb+2*qxb*b)*L-qxa*(x-a*L)-1/2*(qxb-qxa)/(b-a)/L*(x-a*L)^2, b*L < x, 1/6*
(-b+a)*(qxb*a+2*qxa*a-3*qxa+qxa*b-3*qxb+2*qxb*b)*L-1/2*(qxa+qxb)*(b-a)*L), piecewise(x < a*L, -1/20*L*(-b+
a)*(2*qyb*a^3+8*qya*a^3-15*qya*a^2+6*qyb*b*a^2+4*qyb*b*a^2-5*qyb*a^2-10*qya*b*a+6*qyb*b^2*a+4*qya*b^2*a-
10*qyb*b*a-5*qya*b^2+10*qyb+2*qya*b+3+10*qya+8*qyb*b^3-15*qyb*b^2), a*L-x < 0 and x-b*L < 0, -1/20*L*(-b+
a)*(2*qyb*a^3+8*qya*a^3-15*qya*a^2+6*qya*b*a^2+4*qyb*b*a^2-5*qyb*a^2-10*qya*b*a+6*qyb*b^2*a+4*qya*b^2*a-
10*qyb*b*a-5*qya*b^2+10*qyb+2*qya*b+3+10*qya+8*qyb*b^3-15*qyb*b^2)-qya*(x-a*L)-1/2*(qyb-qya)/(b-a)/L*
(x-a*L)^2, b*L < x, -1/20*L*(-b+a)*(2*qyb*a^3+8*qya*a^3-15*qya*a^2+6*qya*b*a^2+4*qyb*b*a^2-5*qyb*b^2*a-10*
qya*b*a+6*qyb*b^2*a+4*qya*b^2+10*qyb*b*a-5*qya*b^2+2*qya*b^3+10*qya+8*qyb*b^3-15*qyb*b^2)-1/2*(qya+qyb)*(b-a)*L),
piecewise(x < a*L, 1/20*L*(-b+a)*(2*qyb*a^3+8*qya*a^3-15*qya*a^2+6*qya*b*a^2+4*qyb*b^2*a-5*qyb*a^2-10*qya*b*a+6*qyb*b^2*a+4*qya*b^2+10*qyb+2*qya*b+3+10*qya+8*qyb*b^3-15*qyb*b^2)-1/2*(qya+qyb)*(b-a)*L), piecewise(x < a*L, 1/60*L^2*(-b+a)*(3*qyb*a^3+12*qya*a^3-10*qyb*a^2+6*qyb*b*a^2-30*qya*a^2+9*qya*b*a^2-20*
qya*b*a+6*qyb*a^2+10*qyb*b^2*a+20*qya*a-20*qyb*b*a+10*qya*b+12*qyb*b^3+3*qya*b^3+20*qyb*b^2-10*qya*b^2, a*L-x < 0 and x-b*L < 0, 1/20*L*(-b+a)*(2*qyb*a^3+8*qya*a^3-15*qya*a^2+6*qya*b*a^2+4*qyb*b*a^2-5*qyb*a^2-10*qya*b*a+6*qyb*b^2*a+4*qya*b^2*a-10*qyb*b^2+10*qyb+2*qya*b^3+10*qya+8*qyb*b^3-15*qyb*b^2)*x-1/60*L^2*(-b+a)*(3*qyb*a^3+12*qya*a^3-10*qyb*a^2+6*qyb*b*a^2-30*qya*a^2+9*qya*b*a^2-20*qyb*b^2+12*qyb+2*qya*b^3+3+20*qyb*b-30*qyb*b^2-10*qya*b^2)+qya*(b-a)*L*(x-a*L-1/2*(b-a)*L)+1/2*(qyb-qya)*(b-a)*L*(x-a*L-2/3*(b-a)*L))]:
end;
Termic load:
> f_ter:=proc(E,A,Iz,L,alf,t1,t2,h)
  array([1/2*A*E*alf*(t1+t2),0,-E*Iz*alf*(t1-t2)/h,-1/2*A*E*alf*(t1+t2),0,E*Iz*alf*(t1-t2)/h]):
end;
NVM_ter := proc (E, A, Iz, L, alf, t1, t2, h)
  [-1/2*A*E*alf*(t1+t2), 0, E*Iz*alf*(t1-t2)/h]:
end;
Initial deformation:
> f_def:=proc(E,A,Iz,L,du,dv,dt)
  array([A*E/L*du, 12*E*Iz/L^3*dv-6*E*Iz/L^2*dt, 6*E*Iz/L^2*dv-2*E*Iz/L*dt, -A*E/L*du, -12*E*Iz/L^3*dv+6*
E*Iz/L^2*dt, 6*E*Iz/L^2*dv-4*E*Iz/L*dt]):
end;
NVM_def := proc (E,A,Iz,L,du,dv,dt)
  [-A*E/L*du, -12*E*Iz/L^3*dv+6*E*Iz/L^2*dt, (12*E*Iz/L^3*dv-6*E*Iz/L^2*dt)*x-6*E*Iz/L^2*dv+2*E*Iz/L*dt]:
end;
Equivalent forces:
> feq:=proc(fep,alfa)
  evalm(transpose(-T(alfa))) &*& fep):
end;
> feq_i:=proc(feq)
  array([feq[1],feq[2],feq[3]]):
end;
feq_j:=proc(feq)
  array([feq[4],feq[5],feq[6]]):
end;
Display of the frame
> dibuja:=proc(dnd,nnd,dbr,dsc,nbr,dbc)
  local dib_a,dib_c,dib_n,dib_f;
  global esc_g,sico1,dib_b;
Graphic autoscale:
> esc_g:=autoscala(dnd,nnd,1);
Geometry:
> dib_b:=dibuja_barras(dnd,dbr,dsc,nbr,esc_g):
  display(dib_b):
> dib_n:=dibuja_numeros(dnd,dbr,nbr,esc_g,color=orange,font=[TIMES,BOLD,12]):
  display(dib_b,dib_n):
Coordinate system:
> sico1:=sico_p(0,0,0,esc_g,['Xg','Yg'],color=magenta,font=[HELVETICA,BOLD,12]):
  display(dib_b,sico1):
Supports:
> dib_a:=dibuja_apoyos(dnd,nnd,esc_g,color=black,thickness=3):
  display(dib_b,dib_a):

```

```

| Nodal forces:
> dib_ci:=dibuja_cargas(dnd,nnd,esc_g,color=red,thickness=3,font=[TIMES,BOLD,12]):
  display(dib_b,dib_c):
Interelement loads:
> dib_f:=dibuja_fuerzas(dbc,dnd,dbr,nbc,esc_g,color=red,thickness=3,font=[TIMES,BOLD,10]):
  display(dib_b,dib_f):
Complete drawing:
> display(dib_b,dib_n,dib_a,dib_c,sicol,dib_f);
  end proc:
Stiffness matrix calculation:
> matrizK:=proc(nbr,dmt,dbr,dsc,nnd,dnd)
  global kbr,k3,kest;
  local ibr,ind,jnd,izd,ide,i,j;
Stiffness matrix:
> for ibr from 1 to nbr do
  kbr[ibr]:=kg(dmt[dbr[ibr,3],1],dsc[dbr[ibr,4],1],dsc[dbr[ibr,4],2],dbr[ibr,5],dbr[ibr,6],dbr[ibr,7],dbr
  [ibr,8]):
  od:
Order basing on nodes. Inicializate first:
> for ind from 1 to nnd do
  for jnd from 1 to nnd do
    k3[ind,jnd]:=[[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]:
  od:
Assembly sub-matrices in blocks:
> for ibr from 1 to nbr do
  k3[dbr[ibr,1],dbr[ibr,1]]:=k3[dbr[ibr,1],dbr[ibr,1]]+k_ii(kbr[ibr]):
  k3[dbr[ibr,1],dbr[ibr,2]]:=k3[dbr[ibr,1],dbr[ibr,2]]+k_ij(kbr[ibr]):
  k3[dbr[ibr,2],dbr[ibr,1]]:=k3[dbr[ibr,2],dbr[ibr,1]]+k_ji(kbr[ibr]):
  k3[dbr[ibr,2],dbr[ibr,2]]:=k3[dbr[ibr,2],dbr[ibr,2]]+k_jj(kbr[ibr]):
  od:
Modify K basing on nodal alpha: (L)-(K)-(L)t:
> for ind from 1 to nnd do
  if (dnd[ind,12]<>0.) then
    for izd from 1 to nnd do
      k3[ind,izd]:=evalm((Ln(dnd[ind,12])) &* k3[ind,izd]):
    od:
    for ide from 1 to nnd do
      k3[ide,ind]:=evalm(k3[ide,ind] &* transpose(Ln(dnd[ind,12]))):
    od:
  end if:
  od:
Frame stiffness matrix:
> kest:=array(1..3*nnd,1..3*nnd):
  for ind from 1 to nnd do
    for i from 1 to 3 do
      for jnd from 1 to nnd do
        for j from 1 to 3 do
          kest[i+3*(ind-1),j+3*(jnd-1)]:=evalm(k3[ind,jnd])[i,j]:
        od:od:od:od:
      evalm(kest):
Modify K, basing on elastic supports:
> for ind from 1 to nnd do
  if (dnd[ind,9]<>0.) then
    kest[3*ind-2,3*ind-2]:=kest[3*ind-2,3*ind-2]+dnd[ind,9]:
  end if:
  if (dnd[ind,10]<>0.) then
    kest[3*ind-1,3*ind-1]:=kest[3*ind-1,3*ind-1]+dnd[ind,10]:
  end if:
  if (dnd[ind,11]<>0.) then
    kest[3*ind,3*ind]:=kest[3*ind,3*ind]+dnd[ind,11]:
  end if:
  od:
  end proc:
Degrees of freedom and not null displacements:
> gdldesp:=proc(nnd,dnd)
  global gd1,ncoco,bk;
  local i,j,ind,jnd,knd;
Boundary conditions
> gd1:=array(1..3*nnd):
  j:=0:
  for ind from 1 to nnd do
    for i from 6 to 8 do
      if dnd[ind,i]='x' then

```

```

j:=j+1:
gdl[j]:=i-5+3*(ind-1):
end if:
od:od:
ncoco:=3*nnd-j:
Not null displacements
> bk:=array(1..3*nnd):
for knd from 1 to 3*nnd do
  bk[knd]:=0.0:
od:
for ind from 1 to nnd do
  for i from 1 to 3 do
    if (dnd[ind,5+i]<>0 and dnd[ind,5+i]<>'x') then
      for jnd from 1 to nnd do
        for j from 1 to 3 do
          bk[3*(jnd-1)+j]:=bk[3*(jnd-1)+j]+kest[3*(jnd-1)+j,3*(ind-1)+i]*dnd[ind,5+i]:
        od:od:
      end if:
    od:od:
  end proc:
Fix forces
> empo:=proc(nbr,nbc,dbc,dbr,dmt,dsc)
global fep,fep_:
local ibr,ibc;
for ibr from 1 to nbr do
  fep[ibr]:=[0,0,0,0,0,0]:
od:
for ibc from 1 to nbc do
  if (dbc[ibc,2]='pun') then
    fep_:=f_pun(dbc[ibc,4],dbc[ibc,5],dbc[ibc,6],dbc[ibc,3],dbr[dbc[ibc,1],5]):
  end if:
  if (dbc[ibc,2]='dis') then
    fep_:=f_dis(dbc[ibc,5],dbc[ibc,6],dbc[ibc,7],dbc[ibc,8],dbc[ibc,3],dbc[ibc,4],dbr[dbc[ibc,1],5]):
  end if:
  if (dbc[ibc,2]='ter') then
    fep_:=f_ter(dmt[dbr[dbc[ibc,1],3],1],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],1],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],2],dbr[dbc[ibc,1],5],dmt[dbr[dbc[ibc,1],3],2],dbc[ibc,3],dbc[ibc,4],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],3]):
  end if:
  if (dbc[ibc,2]='def') then
    fep_:=f_def(dmt[dbr[dbc[ibc,1],3],1],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],1],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],2],dbr[dbc[ibc,1],5],dbc[ibc,3],dbc[ibc,4],dbc[ibc,5]):
  end if:
  fep[dbc[ibc,1]]:=evalm(fep[dbc[ibc,1]]+fep_):
od:
end proc:
Forces and reloading of matrix dbr:
> fuerzas:=proc(nbr,nbc,dbc,dbr,dmt,dsc,fep)
global erc1,erc2,fm,Mza,Mzb,fequ,f3,bf,KA,bA,b;
local i,j,ind,ibr,ibc,dbrM;

dbrM:=array(1..nbr,1..12):
for i from 1 to nbr do
  for j from 1 to 12 do
    dbrM[i,j]:=dbr[i,j]:
  od: od:
Modify basing on joints with degrees of freedom. External bending moment is not considered here, but as interelemental load.
> for ibr from 1 to nbr do
  erc1:=dbrM[ibr,11]:
  erc2:=dbrM[ibr,12]:
  if (erc1=0 and erc2=0) then
    fm:=[0,0,0,0,0,0]:
  elif (erc1=1 and erc2=0) then
    Mza:=fep[ibr][3]:
    dbrM[ibr,9]:=-Mza:
    fm:=[0, 3/2/dbrM[ibr,5]*Mza, Mza, 0, -3/2/dbrM[ibr,5]*Mza, 1/2*Mza]:
  elif (erc1=0 and erc2=1) then
    Mzb:=fep[ibr][6]:
    dbrM[ibr,10]:=-Mzb:
    fm:=[0, 3/2/dbrM[ibr,5]*Mzb, 1/2*Mzb, 0, -3/2/dbrM[ibr,5]*Mzb, Mzb]:
  elif (erc1=1 and erc2=1) then
    Mza:=fep[ibr][3]:
    Mzb:=fep[ibr][6]:
  end if:
end proc:

```

```

dbrM[ibr,9]:=-Mza;
dbrM[ibr,10]:=-Mzb;
fm:=[0, (Mza+Mzb)/dbrM[ibr,5], Mza, 0, -(Mza+Mzb)/dbrM[ibr,5], Mzb];
end if;
fep[ibr]:=evalm(fep[ibr]-fm);
od;
Equivalent forces:
> for ibr from 1 to nbr do
  fequ[ibr]:=feq(fep[ibr],dbrM[ibr,6]);
  od;
> for ind from 1 to nnd do
  f3[ind]:=[0,0,0];
  od;
Matrix assembly
> for ibr from 1 to nbr do
  f3[dbrM[ibr,1]]:=f3[dbrM[ibr,1]]+feq_i(fequ[ibr]):
  f3[dbrM[ibr,2]]:=f3[dbrM[ibr,2]]+feq_j(fequ[ibr]):
  od;
Modify feq basing on nodal_alpha:
> for ind from 1 to nnd do
  if (dnd[ind,12]<>0.) then
    f3[ind]:=evalm((Ln(dnd[ind,12])) &* f3[ind]);
  end if;
  od;
> bf:=array(1..3*nnd):
> for ind from 1 to nnd do
  for i from 1 to 3 do
    bf[3*(ind-1)+i]:=evalm(f3[ind])[i];
  od:od;
Forces vector:
> b:=array(1..3*nnd):
for ind from 1 to nnd do
  for i from 1 to 3 do
    b[3*(ind-1)+i]:=dnd[ind,2+i]-bk[3*(ind-1)+i]+bf[3*(ind-1)+i];
  od:od;
Loads matrix and vector (considering boundary conditions)
> KA:=array(1..3*nnd-ncoco,1..3*nnd-ncoco):
bA:=array(1..3*nnd-ncoco):
for i from 1 to 3*nnd-ncoco do
  bA[i]:=b[gdl[i]]:
  for j from 1 to 3*nnd-ncoco do
    KA[i,j]:=kest[gdl[i],gdl[j]]:
  od: od;
> eval(dbrM);      #returns the new matrix dbr
end proc;
Displacements and reactions, and solves the dnd unknowns:
> despreatc:=proc(nnd,ncoco,gdl,dnd,sol,kest,bf)

  global fest,r_muelle_x,r_muelle_y,r_muelle_t,reac,uest;
  local i,j,ind,valor,err_a,err_r,dndM;

  dndM:=array(1..nnd,1..12):
  for i from 1 to nnd do
    for j from 1 to 12 do
      dndM[i,j]:=dnd[i,j];
    od: od;
  Nodal displacements (global or local coordinates)
> for i from 1 to 3*nnd-ncoco do
  dndM[ceil((gdl[i])/3), gdl[i]-ceil((gdl[i])/3)*3+8]:=sol[i];
  od;
  evalm(dndM);
> uest:=array(1..3*nnd):
  for ind from 1 to nnd do
    for i from 1 to 3 do
      uest[i+3*(ind-1)]:=dndM[ind,5+i];
    od:od;
    evalm(uest);
  Global reactions (kest*uest-feqest (global or nodal coordinates), because F_est+Feeq_est=K_est * u_est)
> fest:=array(1..3*nnd):
  fest:=evalm((kest &* uest - bf));
  Reaction in the spring Rmuelle:=kmuelle*ub[]
> for ind from 1 to nnd do

```

```

if (dndM[ind,9]<>0.) then
  r_muelle_x:=-dndM[ind,9]*uest[3*ind-2];
end if;
if (dndM[ind,10]<>0.) then
  r_muelle_y:=-dndM[ind,10]*uest[3*ind-1];
end if;
if (dndM[ind,11]<>0.) then
  r_muelle_t:=-dndM[ind,11]*uest[3*ind];
end if;
od;
Reactions in inclined supports in global coordinates Lt*fest_nodal
> for ind from 1 to nnd do
  if (dndM[ind,12]<>0) then
    reac:=evalm(transpose(Ln(dndM[ind,12])) &* [fest[3*ind-2],fest[3*ind-1],fest[3*ind]]):
    printf("Reacciones del nodo %d en globales = (%g,%g,%g)\n",ind,reac[1],reac[2],reac[3]);
  end if;
od;
Errors in the solution obtained
> for i from 1 to 3*nnd-ncoco do
  valor:=dnd[ceil(gdl[i]/3),gdl[i]-ceil(gdl[i]/3)*3+5]:
  err_a:=fest[gdl[i]]-valor:
  err_r:=if (valor<>0,abs(100*err_a/valor),99999):
od;
Complete dnd matrix with the data obtained (unknowns and also some known data).
> for ind from 1 to nnd do
  for i from 1 to 3 do
    dndM[ind,2+i]:=fest[i+3*(ind-1)]:
  od:od;
  evalm(dndM);
> end proc;

Beam diagrams: mediante F=K*u+Femp
In bars with degrees of freedom, it could be done in two ways:
  a) with all the data condensed
  b) with the original data (knowing the degrees of freedom). Here is done this way
> esfu:=proc(nnd,dnd,nbr,dbr,dmt,dsc,nbc,dbc)
  global uncd,lb,Eb,Izb,Mza,Mzb,fep,fep_,esf,uloc;
  local ind,ibr,ibc;
Nodal displacements, in nodal or global coordinates are stored in dnd: ug=lt*un
> for ind from 1 to nnd do
  if (dnd[ind,12]<>0.) then
    unod:=evalm(transpose(Ln(dnd[ind,12])) &* [dnd[ind,6],dnd[ind,7],dnd[ind,8]]):
    dnd[ind,6]:=unod[1]:
    dnd[ind,7]:=unod[2]:
    dnd[ind,8]:=unod[3]:
  end if;
od;
Condensed degrees of freedom, in local coordinates, and uloc vector is loaded in each bar, with local displacements
> for ibr from 1 to nbr do
  Lb:=dbr[ibr,5]:
  Eb:=dmt[dbr[ibr,3],1]:
  Izb:=dsc[dbr[ibr,4],2]:
  uloc[ibr]:=evalm((dbr[ibr,6]) &* [dnd[dbr[ibr,1],6],dnd[dbr[ibr,1],7],dnd[dbr[ibr,1],8],dnd[dbr[ibr,2],6],dnd[dbr[ibr,2],7],dnd[dbr[ibr,2],8]]):
  if (dbr[ibr,11]=1 and dbr[ibr,12]=0) then
    Mza:=dbr[ibr,9]:
    uloc[ibr][3]:=1/4/Lb*(Mza*Lb^2-6*Eb*Izb*uloc[ibr][2]+6*Eb*Izb*uloc[ibr][5]-2*Eb*Izb*uloc[ibr][6]*Lb)/Eb/Izb:
    elif (dbr[ibr,11]=0 and dbr[ibr,12]=1) then
      Mzb:=dbr[ibr,10]:
      uloc[ibr][6]:=1/4/Lb*(Mzb*Lb^2-6*Eb*Izb*uloc[ibr][2]-2*Eb*Izb*uloc[ibr][3]*Lb+6*Eb*Izb*uloc[ibr][5])/Eb/Izb:
    elif (dbr[ibr,11]=1 and dbr[ibr,12]=1) then
      Mza:=dbr[ibr,9]:
      Mzb:=dbr[ibr,10]:
      uloc[ibr][3]:=-1/6/Lb*(-2*Mza*Lb^2+6*Eb*Izb*uloc[ibr][2]-6*Eb*Izb*uloc[ibr][5]+Mzb*Lb^2)/Eb/Izb:
      uloc[ibr][6]:=-1/6/Lb*(Mza*Lb^2+6*Eb*Izb*uloc[ibr][2]-6*Eb*Izb*uloc[ibr][5]-2*Mzb*Lb^2)/Eb/Izb:
    end if:
  od;
  Beam diagrams are calculated with esf=Kloc*uloc+Femp. But Ke and Fep can't be modified with hinges: Ke is calculated with erc1=erc2=0, and Fep is calculated again.
> empo(nbr,nbc,dbc,dbr,dmt,dsc):
  Finally, beam diagrams are calculated: esf=Kloc*uloc+Femp
> for ibr from 1 to nbr do

```

```

    esf[ibr]:=evalm(ke(dmt[dbr[ibr,3],1],dsc[dbr[ibr,4],1],dsc[dbr[ibr,4],2],dbr[ibr,5],0,0) &* uloc[ibr]+
    fep[ibr]):
    od:
  > end proc:
```

## 2. Input data

Depending on the chosen option:

a) To introduce data with Maplets, execute next block.

b) To introduce data manually, first change data matrixes and then execute the block.

```

> dataerror:=0:           #if there is any error during data introduction, this variable is set to 1
rstrt:=0:                 #if restart is needed in Calculation block, this variable is set to 1
if commap[2]="true" then
```

### MANUAL DATA INTRODUCTION

#### Frame data

```

> nnd:=5: #number of nodes
nbr:=4: #number of bars
nbc:=0: #number of interelemental loads
nmt:=1: #number of materials
nsc:=1: #number of sections
```

#### Material data (E, alpha):

E: Young's modulus  
alpha: thermal expansion coefficient

```
> dmt:=array(1..nmt,1..2):
dmt:=[[2,1e11,1.2e-5]]:
(1,2,3,4)
```

#### Section data (A,lz,h,Mp)

```
> dsc:=array(1..nsc,1..4):
dsc:=[[10000,1,1,1]]:
```

#### Element data

```
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)
(n1,n2,material,section,length,angle,erc1,erc2,gdl1,gdl2,ercI,ercII,number of bar)
erc1 & erc2: erc=end_release_code(u,v,tit). erc=0 <=> rigid, erc=1 <=> hinge.
ercI & ercII: they take value 1 if, in nodes n1 or n2, respectively, there is a hinge in any bar.
gdl1 & gdl2: released d.o.f.
```

Lenght & angle will be calculated later, basing on node coordinates.

```
> dbr:=array(1..nbr,1..13):
dbr:=[[1,2,1,1,L0,alf0,0,0,0.,ercI,ercII,1],
[2,3,1,1,L0,alf0,0,0,0.,ercI,ercII,2],
[3,4,1,1,L0,alf0,0,0,0.,ercI,ercII,3],
[4,5,1,1,L0,alf0,0,0,0.,ercI,ercII,4]]:
```

**Nodal data** (coordinates | forces | displacements | elastic supports | alpha\_nodal | number of node)
$$(x_1, y_1, fx_1, fy_1, mz_1, u_1, v_1, \text{tit}_1, kx_1, ky_1, kt_1, \text{alpha\_nodal}_1, \text{number of node}_1)$$

$$(x_2, y_2, fx_2, fy_2, mz_2, u_2, v_2, \text{tit}_2, kx_2, ky_2, kt_2, \text{alpha\_nodal}_2, \text{number of node}_2)$$

Always place 'x' where force or displacement were unknown. If force is unknown, displacement must be known, and vice versa

```
> dnd:=array(1..nnd,1..13):
dnd:=[[ 0, 0, 'x','x','x', 0, 0, 0, 0,0,0, 0, 1],
[ 0, 1, 0, 0, 0, 'x','x','x', 0,0,0, 0, 2],
[ 1, 1, 0, -1, 0, 'x','x','x', 0,0,0, 0, 3],
[ 2, 1, 1, 0, 0, 'x','x','x', 0,0,0, 0, 4],
[ 2, 0, 'x','x','x', 0, 0, 0, 0,0,0, 0, 5]]:
```

#### Interelemental loads in bars data

(loaded bar , kind of load , data for each load ..... ) in local coordinates
$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$(, Punctual (pun) , foot_distance, valor_x, valor_y, valor_tita)$$

$$(, Distributed (dis) , foot_distance_1, foot_distance_2, valor_x_1, valor_x_2 , valor_y_1 , valor_y_2 )$$

$$(, Termic (ter) , T1, T2)$$

$$(, Initial deformation (def) , u , v , tit )$$

```
> if (nbc <> 0) then
  dbc:=array(1..nbc,1..8);
  dbc:=[[2,'pun',0.5,0,-1,0,0,0]];
end if:
```

### end of manual data introduction

```
> dataerror:=errman(nnd,nbr,nmt,nsc,nbc,dnd,dbr,dmt,dscdbc); #error handling in manual data
introduction
else
  mapldat(); #data introduction with Maplets
end if:
Now, length, angles and hinges of each bar will be completed
Lengths
> for ibr from 1 to nbr do
  dbr[ibr,5]:=evalf(sqrt((dnd[dbr[ibr,2],1]-dnd[dbr[ibr,1],1])^2+(dnd[dbr[ibr,2],2]-dnd[dbr[ibr,1],2])^2));
od:
Angles and hinges
> for ibr from 1 to nbr do
  dbr[ibr,6]:=arctan(dnd[dbr[ibr,2],2]-dnd[dbr[ibr,1],2],dnd[dbr[ibr,2],1]-dnd[dbr[ibr,1],1]):
```

```

od:
Hinges
> for ibr from 1 to nbr do
    #there will be a hinge if any bar converging to the node has a hinge
    nodoA:=0:           #first, it is considered a rigid joint
    nodoB:=0:           #if it has a hinge, a 1 will be placed in the next loop
    for i from 1 to nbr do
        if dbr[ibr,1]=dbr[i,1] and dbr[i,7]=1 then
            nodoA:=1:
        end if;
        if dbr[ibr,1]=dbr[i,2] and dbr[i,8]=1 then
            nodoA:=1:
        end if;
        if dbr[ibr,2]=dbr[i,1] and dbr[i,7]=1 then
            nodoB:=1:
        end if;
        if dbr[ibr,2]=dbr[i,2] and dbr[i,8]=1 then
            nodoB:=1:
        end if;
    od:
    dbr[ibr,11]:=nodoA:
    dbr[ibr,12]:=nodoB:
od:
Data and structure
> if dataerror=0 then
    printf("\n\t\t\tStructure data: \n\t\t\t\tNumber of nodes: %d\n\t\t\t\tNumber of bars: %d",nnd,nbr);
    printf("\n\t\t\tNumber of interelemental loads: %d\n\t\t\t\tNumber of materials: %d",nbc,nmt);
    printf("\n\t\t\tNumber of sections: %d\n",nsc);
    printf("\n\t\t\tMaterial data for each section:"); evalm(dmt);
    printf("\n\t\t\tSection data:"); evalm(dsc);
    printf("\n\t\t\tInterelemental loads data:"); evalm(dbc);
    printf("\n\t\t\tNodal data:"); evalm(dnd);
    printf("\n\t\t\tComplete element data:"); evalm(dbr);
    printlevel:=0:
> esc_g:=autoscal(a,dnd,nnd,1):
dib_b:=dibuja_barras(dnd,dbr,dsc,nbr,esc_g):
dib_n:=dibuja_numeros(dnd,dbr,nbr,esc_g,color=orange,font=[TIMES,BOLD,12]):
sico_l:=sico_p(0,0,0,esc_g,['Xg','Yg'],color=magenta,font=[HELVETICA,BOLD,12]):
dib_a:=dibuja_apoyos(dnd,nnd,esc_g,color=black,thickness=3):
dib_c:=dibuja_cargas(dnd,nnd,esc_g,color=red,thickness=3,font=[TIMES,BOLD,12]):
dib_f:=dibuja_fuerzas(dbc,dnd,dbr,nbc,esc_g,color=red,thickness=3):
for kk from 1 to 1 do for kkk from 1 to 1 do printlevel:=2:od:od:
> display(dib_b,dib_n,dib_a,dib_c,sico_l,dib_f,'title'='Initial_structure');
end if;

```

↑ Repeat data introduction

### 3. Calculation and results

To introduce the data manually, write "true" on the items you want to be displayed during calculation, and write "false" to hide them.  
You can also place a "true" in "Display all".

```

> detnull:=0:           #if det(KA)=0, the structure is a mechanism, and it won't be calculated
printlevel:=1:           -----'restart' IF -----
> if rstrt=1 then      #only if restart is not needed
    printf("\n");
    error 'please, press 'Go up' and execute blocks 1 and 2 before Calculation';
else
    if conmap[2]="true" then
        calcerror:=0:       #if there is any error during data introduction, this variable is set to 1
        qq:=array(1..2):   ww:=array(1..6): anim:=array(1..2): dibuj:=array(1..6):
        MANUAL DATA INTRODUCTION #####
>     qq[1]:="false": #Display all                                \ displaying options
     qq[2]:="true":  #Select (if "true", then select some of the followings:) /
     #-----
     ww[1]:="true":  #Value of det(KA)                                \
     ww[2]:="true":  #Initial, final and maximum values of beam diagrams | Data
     ww[3]:="true":  #Forces/reaction in nodes                         /
     ww[4]:="true":  #Node displacements                                /
     ww[5]:="true":  #Beam diagrams                                     \
     anim[1]:="false": #Animate beam diagrams                           \
     ww[6]:="true":  #Deformed shape                                 \
     anim[2]:="false": #Animate deformed shape                         \

```

```

#-----| Graphics
dibuj[1]:="true": #Bars \
dibuj[2]:="true": #Numbers \
dibuj[3]:="false": #Coordinate system |Items to be displayed in / \
dibuj[4]:="true": #Supports |graphics, if selected / \
dibuj[5]:="false": #Loads / \
dibuj[6]:="false": #Forces / \
end of manual data introduction //////////////////////////////////////////////////

> errcalc(qq,ww,anim,dibuj); #error handling in manual data introduction
else calcerror:=0:maplcalc(); #maplet
end if;
-----'calcerror' IF -----
> if calcerror=0 then #only if there is no error in display options
Before calculation loop, values are initialized and an array is created to store the values of det(KA).
> rstrt:=1;
printlevel:=0:
esca_dia:=0.0: esca_def:=0.0: #autoscale
Direct Stiffness Method Analysis
> matrixK(nbr,dmt,dbr,dsc,nnd,dnd): #calculates stiffness matrix
> gdldesp(nnd,dnd): #calculates d.o.f. and displacements
> empo(nbr,nbc,dbc,dbr,dmt,dsc): #calculates beam end forces
> dbr:=fuerzas(nbr,nbc,dbc,dbr,dmt,dsc,fep): #calculates forces and updates dbr matrix
If the initial structure is a mechanism, it's not calculated:
> Ar:=abs(det(KA));
if ww[1]="true" or qq[1]=="true" then
printf("\nValue of det(KA): %g\n",Ar);
end if;
if det(KA)=0 then
printf("\nThe determinant of KA is Null. It's a mechanism\n");
detnull:=1;
end if;
If the initial structure is not a mechanism, it's calculated:
-----'detnull' IF -----
> if detnull=0 then
sol:=linsolve(KA,bA); #solves the system of equations
dnd:=despreac(nnd,ncoco,gdl,dnd,sol,kest,bf): #calculates displacements, reactions and the
unknowns of dnd
> esfu(nnd,dnd,nbr,dmt,dsc,nbc,dbc): #calculates beam diagrams
if ww[2]=="true" or qq[1]=="true" then
printf("\nBeam diagrams (positive values):\n");
Axial force      Shear force
Bending moment:
esf2:=array(1..nbr):
for ibr from 1 to nbr do
for j from 1 to 6 do
if evalf(10^(Digits-4)*abs(esf2[ibr][j]))<1 then esf2[ibr][j]:=0.:
else esf2[ibr][j]:=esf[ibr][j];
end if;
od;
printf("\n Bar %d", ibr);
printf(" First node    %+4e    %+4e    %+4e \n ",abs(esf2[ibr][1]),abs(esf2[ibr][2]),
abs(esf2[ibr][3]));
printf(" Second node   %+4e    %+4e    %+4e ",abs(esf2[ibr][4]),abs(esf2[ibr][5]),
abs(esf2[ibr][6]));
od;
printf("\n\n");
end if;

RESULTS
>BEAM DIAGRAMS
Autoscale
> if (esca_dia=0.) then esca_dia:=0.02/autoscala(dnd,nnd,2)/2: end if;
Initialization of the vector that will store the beam diagrams equations.
> for ibr from 1 to nbr do NVM[ibr]:=[0,0,0]: od:
Laws due to interelemental loads
> for ibc from 1 to nbc do
if (dbc[ibc,2]='pun') then
NVM_:=NVM_pun(dbc[ibc,4],dbc[ibc,5],dbc[ibc,6],dbc[ibc,3],dbr[dbc[ibc,1],5]):
end if:
if (dbc[ibc,2]='dis') then
NVM_:=NVM_dis(dbc[ibc,5],dbc[ibc,6],dbc[ibc,7],dbc[ibc,8],dbc[ibc,3],dbc[ibc,4],dbr[dbc[ibc,
1],5]):
end if:
if (dbc[ibc,2]='ter') then

```

```

NVM_:=NVM_ter(dmt[dbr[dbc[ibc,1],3],1],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],1],
                dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],2],dbr[dbc[ibc,1],5],dmt[dbr[dbc[ibc,1],3],2],
                dbc[ibc,3],dbc[ibc,4],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],3]):
end if;
if (dbc[ibc,2]='def') then
    NVM_:=NVM_def(dmt[dbr[dbc[ibc,1],3],1],dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],1],
                    dsc[dbr[dbc[ibc,1],4],2],dbr[dbc[ibc,1],5],dbc[ibc,3],dbc[ibc,4],dbc[ibc,5]):
end if;
NVM[dbc[ibc,1]]:=evalm(NVM[dbc[ibc,1]]+NVM_):
od:
Adding the laws of displacements in the extremes.
> for ibr from 1 to nbr do
    NVM[ibr]:=evalm(NVM[ibr]+[-esf[ibr][1]+fep[ibr][1],-esf[ibr][2]+fep[ibr][2],-esf[ibr][3]+esf[ibr]
[2]*x+fep[ibr][3]-fep[ibr][2]*x]):
od:
> #This arrays store: [maximum value, bar where it's reached, extreme where it's reached].
Nmax:=array(1..3,[0,0,0]):Vmax:=array(1..3,[0,0,0]):Mmax:=array(1..3,[0,0,0]):
Now, the maximum values of beam diagrams are calculated.
In case that beam diagrams were constant or they had the same value in two different points, the criterion adopted is taking the maximum in:
- the first bar having this value
- the second node of the bar, if they have the same value.
for ibr from 1 to nbr do
    funcobjN:=unapply((abs(NVM[ibr][1]))(x),x);
    for rrr from 1 to 2 do aauxN:=Optimization[Maximize](funcobjN,0..dbr[ibr,5],method=quadratic),
od:
if abs(aauxN[1])>=Nmax[1] then
    Nmax[1]:=abs(aauxN[1]): Nmax[2]:=ibr; Nmax[3]:=aauxN[2][1];
end if;
funcobjV:=unapply((abs(NVM[ibr][2]))(x),x);
for rrr from 1 to 2 do aauxV:=Optimization[Maximize](funcobjV,0..dbr[ibr,5],method=quadratic),
od:
if abs(aauxV[1])>=Vmax[1] then
    Vmax[1]:=abs(aauxV[1]): Vmax[2]:=ibr; Vmax[3]:=aauxV[2][1];
end if;
funcobjM:=unapply((abs(NVM[ibr][3]))(x),x);
for rrr from 1 to 2 do aauxM:=Optimization[Maximize](funcobjM,0..dbr[ibr,5],method=quadratic),
od:
if abs(aauxM[1])>=Mmax[1] then
    Mmax[1]:=abs(aauxM[1]): Mmax[2]:=ibr; Mmax[3]:=aauxM[2][1];
end if;
od:

if ww[2]="true" or qq[1]="true" then
    printf("\nMaximum values of beam diagrams:\n");
Position\n");
    if Nmax[3]/dbr[Nmax[2],5]<0.001 or Nmax[3]/dbr[Nmax[2],5]>0.999 then
        if Nmax[3]/dbr[Nmax[2],5]<0.001 then Nmax[3]:=1: #maximun reached almost in node 1
        elif Nmax[3]/dbr[Nmax[2],5]>0.999 then Nmax[3]:=2: #maximun reached almost in node 2
        end if;
        printf(" Maximum axial force %+.4e %d node %d\n",Nmax[1],Nmax[2],Nmax[3]);
    else
        printf(" Maximum axial force %+.4e %d lenght %g\n",Nmax[1],Nmax[2],Nmax[3]);
    end if;
    if Vmax[3]/dbr[Vmax[2],5]<0.001 or Vmax[3]/dbr[Vmax[2],5]>0.999 then
        if Vmax[3]/dbr[Vmax[2],5]<0.001 then Vmax[3]:=1: #maximun reached almost in node 1
        elif Vmax[3]/dbr[Vmax[2],5]>0.999 then Vmax[3]:=2: #maximun reached almost in node 2
        end if;
        printf(" Maximum shear force %+.4e %d node %d\n",Vmax[1],Vmax[2],Vmax[3]);
    else
        printf(" Maximum shear force %+.4e %d lenght %g\n",Vmax[1],Vmax[2],Vmax[3]);
    end if;
    if Mmax[3]/dbr[Mmax[2],5]<0.001 or Mmax[3]/dbr[Mmax[2],5]>0.999 then
        if Mmax[3]/dbr[Mmax[2],5]<0.001 then Mmax[3]:=1: #maximun reached almost in node 1
        elif Mmax[3]/dbr[Mmax[2],5]>0.999 then Mmax[3]:=2: #maximun reached almost in node 2
        end if;
        printf(" Maximum bending moment %+.4e %d node %d\n",Mmax[1],Mmax[2],Mmax[3]);
    else
        printf(" Maximum bending moment %+.4e %d lenght %g\n",Mmax[1],Mmax[2],Mmax[3]);
    end if;
    printf("\n");
end if;

```

```

> Items to be displayed in graphics
  zz:=NULL:
  if dibuj[1]=="true" or qq[1]=="true" then zz:=zz,dib_b: end if:
  if dibuj[2]=="true" or qq[1]=="true" then zz:=zz,dib_n: end if:
  if dibuj[3]=="true" then zz:=zz,sicol: end if: if dibuj[4]=="true" then zz:=zz,dib_a: end if:
  if dibuj[5]=="true" then zz:=zz,dib_c: end if: if dibuj[6]=="true" then zz:=zz,dib_f: end if:

> Display beam diagrams:
  if ww[5]=="true" or qq[1]=="true" then
    pNVM:=array(1..nbr):
    for ibr from 1 to nbr do
      if anim[1]=="true" or qq[1]=="true" then
        pNVM[ibr]:=animate(esfzs, [t], t=0..esca_dia);
      else
        pp:=plot(NVM[ibr],x=0..dbr[ibr,5],color=[yellow,cyan,magenta],thickness=2,legend=["Axial
force", "Shear force", "Bending Moment"]):
        pNVM[ibr]:=translate(rotate(scale(pp,1,esca_dia),dbr[ibr,6]),dnd[dbr[ibr,1],1],dnd[dbr[ibr,
1],2]);
      end if:
    od:
  dNVM:=NULL:
  for ibr from 1 to nbr do
    dNVM:=dNVM,pNVM[ibr]:
  od:
  for kk from 1 to 1 do for kkk from 1 to 1 do printlevel:=6:od:od:
  if anim[1]=="true" or qq[1]=="true" then display(zz,dNVM,title='Beam diagrams_(animated)');
  else display(zz,dNVM,title='Beam diagrams_(static)');
  end if:
  printlevel:=0:
end if;

Forces in nodes
> if ww[3]=="true" or qq[1]=="true" then
  fest2:=array(1..3*nnd):
  printf("\nForces in nodes:\n") Fx Fy Mz";
  n:=0:
  for i from 1 to 3*nnd do
    for j from 1 by 3 to 3*nnd do
      if i=j then n:=n+1:printf("\n Node %d ",n); end if;
    od:
    if evalf(10^(Digits-4)*abs(fest[i]))<1 then fest2[i]:=0.:
    else fest2[i]:=fest[i];
    end if:
    printf("%+.4e ",fest2[i]);
  od;
end if;

> >DEFORMED SHAPE
Autoscale
> if (esca_def = 0.) then esca_def:=0.005/autoscal(dnd,nnd,3) end if;
The Principle of Virtual Forces method is used (not considering shear force). The deformed shape is calculated taking into account possible thermic
loads, or previous deformations.
> def:=array(1..nbr):

  for ibr from 1 to nbr do
    delt_u[ibr]:=int(NVM[ibr][1]/dsc[dbr[ibr,4],1]/dmt[dbr[ibr,3],1],x=0..d):
    delt_v[ibr]:=uloc[ibr][3]*d+int(NVM[ibr][3]*(d-x)/dsc[dbr[ibr,4],2]/dmt[dbr[ibr,3],1],x=0..d):
    if nbc>0 then
      for ibc from 1 to nbc do
        if dbc[ibc,1]:=ibr then
          if (dbc[ibc,2]='ter') then
            delt_u[ibr]:=delt_u[ibr]+dmt[dbr[ibr,3],2]*d*(dbc[ibc,3]+dbc[ibc,4])/2:
            delt_v[ibr]:=delt_v[ibr]-dmt[dbr[ibr,3],2]*d^2*(dbc[ibc,3]-dbc[ibc,4])/2/dsc[dbr[ibr,4],
3]:
          end if:
        end if:
      od:
    end if:
  end if;
end if;

```

```

if anim[2]="true" or qq[1]=="true" then
    def[ibr]:=animate(dibujillo, [t], t=0..esca_def,frames=40);
else
    ppp:=plot([d+delt_u[ibr]*esca_def,delt_v[ibr]*esca_def,d=0..dbr[ibr,5]],color=black,thickness=
3):
    def[ibr]:=translate(rotate(ppp,dbr[ibr,6]),dnd[dbr[ibr,1],1]+dnd[dbr[ibr,1],6]*esca_def,dnd[dbr
[ibr,1],2]+dnd[dbr[ibr,1],7]*esca_def);
    end if;
od:

Node displacements
> if ww[4]=="true" or qq[1]=="true" then
    printf("\n\nNode displacements:\n"
    for ind from 1 to nnd do
        printf("\n Node %d ", ind);
        for i from 6 to 8 do printf(" %.4e ", dnd[ind,i]); od;
    od;
end if;

Deformed shape
> if ww[6]=="true" or qq[1]=="true" then
    defo:=NULL:
    for ibr from 1 to nbr do defo:=defo,def[ibr]: od: #diagrams of all bars are stored in the
same drawing
    for kk from 1 to 1 do for kkk from 1 to 1 do printlevel:=6: od:od:
    if anim[2]=="true" or qq[1]=="true" then
        display(zz,defo,title=`Deformed_shape_(animated)`);
    else
        display(zz,defo,title=`Deformed_shape_(static)`);
    end if:
    printlevel:=0:
end if;

end if: #if the structure is not a mechanism ( 'detnull' if )
end if; #if there is no error in display options ('calcerror' if )
end if; #if restart is not needed ( 'restart' if )

```

[Go up](#)



Optimized for MapleV-11.

- Legal Notice: The copyright for this application is owned by the author(s). Neither Maplesoft nor the author are responsible for any errors contained within and are not liable for any damages resulting from the use of this material.
- This application is intended for non-commercial, non-profit use only. Contact the authors for permission if you wish to use this application in for-profit activities.
- Please report any error in the document, or any suggestion about it, to improve its next versions, to: Lorenzana Ibán, Antolin ([ali@eis.uva.es](mailto:ali@eis.uva.es)) and López Reyes, Pablo ([pablop@cartif.es](mailto:pablop@cartif.es)).

### C.1.2. Obtención de los esfuerzos plásticos

De los distintos códigos desarrollados para la obtención de los esfuerzos plásticos (esfuerzo axil, esfuerzo cortante y momento flector para las secciones rectangular maciza, rectangular hueca, circular maciza, circular hueca y doble T), solo se reproduce aquí el correspondiente a la **sección circular hueca**. En él se obtienen las distintas expresiones para los esfuerzos plásticos (el número de expresiones se muestra en la Tabla B.6), se simplifican éstas para obtener fórmulas más compactas, y además se constata que los valores límite en diferentes casos coinciden con el valor teórico. Es decir, se comprueba que:

- la expresión de los esfuerzos para  $e \rightarrow r$ , haciendo que el espesor sea igual que el radio  $y$ , por tanto, cuando en el límite sea una sección circular maciza, coincide con la correspondiente al caso circular macizo.
- la expresión de los esfuerzos obtenidos considerando el daño, tomando  $D = 0$ , coincide con la expresión de los esfuerzos sin considerarlo.

```
#####
#SFUERZO AXIL#
#####
```

### 1. Axil con D=0

```
> restart:
assume(el>0,rd>1,y1>0,y4<0):
Nxcpd:=int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma, y=rd-el..y1)
+int(2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*sigma,y=-rd+el..rd-el)
+int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma, y=y4..-rd+el);
Nxcpd:=-2*sigma*sqrt(el~*sqrt(2*rd~-el~) rd~-+2*sigma*el~^(3/2)*sqrt(2*rd~-el~)+sigma*sqrt(rd~^2-yl~^2)*yl~-+sigma*rd~^2*arcsin(yl~/rd~)-sigma*pi*rd~^2+2*sigma*sqrt(el~*(2*rd~-el~))*rd~-+2*sigma*rd~*el~-2*sigma*sqrt(el~*(2*rd~-el~))*el~-sigma*pi*el~^2-sigma*sqrt(rd~^2-y4~^2)*y4~-sigma*rd~^2*arcsin(y4~/rd~)
> Nx_circularPD:=simplify(eval(Nxcpd,[y1=rd,y4=-rd]));
Nx_circularPD_resumido:=sigma*Pi*el~*(2*rd-el);
simplify(Nx_circularPD_resumido-Nx_circularPD);
Nx_circularPD:=2*sigma*pi*rd~*el~-sigma*pi*el~^2
Nx_circularPD_resumido:=sigma*pi*el~*(2*rd~-el~)
0
> #Evaluación del momento para el caso elástico (sigma=sigma_f) y para el caso plástico (sigma=sigma_r):
print("Axil elástico");
eval(Nx_circularPD_resumido,sigma=sigma[f]);
print("Axil plástico");
eval(Nx_circularPD_resumido,sigma=sigma[r]);
"Axil elástico"
sigma*pi*el~*(2*rd~-el~)
"Axil plástico"
sigma_r*pi*el~*(2*rd~-el~)
> #Comparación con el caso circular macizo (haciendo el=rd):
print("Comprobaciones con el caso circular macizo");
simplify(limit(Nx_circularPD_resumido,el=rd));
"Comprobaciones con el caso circular macizo"
sigma*pi*rd~^2
```

### 2. Axil con D>0

#### yr>rd-el

```
> assume(Dam>0):
NxcpdD1:=int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma, y=rd-el..y1)
+int(2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*sigma,y=-rd+el..rd-el)
+int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma, y=y4..-rd+el);
NxcpdD1:=-2*sigma*sqrt(el~*sqrt(2*rd~-el~)*rd~-+2*sigma*el~^(3/2)*sqrt(2*rd~-el~)+sigma*sqrt(rd~^2-yl~^2)*yl~-+sigma*rd~^2*arcsin(yl~/rd~)-sigma*pi*rd~^2
+2*sigma*sqrt(el~*(2*rd~-el~))*rd~-+2*sigma*pi*rd~*el~-2*sigma*sqrt(el~*(2*rd~-el~))*el~-sigma*pi*el~^2-sigma*sqrt(rd~^2-y4~^2)*y4~-sigma*rd~^2*arcsin(y4~/rd~)
> Nx_circularPDD1:=simplify(eval(NxcpdD1,[y1=rd*(1-Dam),y4=-rd*(1-Dam)]));
Nx_circularPDD1_resumido:=sigma*(2*rd~^2*(1-Dam)*sqrt(1-(1-Dam)^2)+arcsin(1-Dam))-Pi*(rd-el)^2;
simplify(Nx_circularPDD1_resumido-Nx_circularPDD1);
Nx_circularPDD1_resumido:=sigma*(2*rd~^2*((1-Dam)*sqrt(2*Dam~-Dam~^2)-arcsin(-1+Dam~))-pi*(rd~-el~)^2)
0
> #Evaluación del momento para el caso elástico (sigma=sigma_f) y para el caso plástico (sigma=sigma_r):
print("Axil elástico");
eval(Nx_circularPDD1_resumido,sigma=sigma[f]);
print("Axil plástico");
eval(Nx_circularPDD1_resumido,sigma=sigma[r]);
"Axil elástico"
sigma_f*(2*rd~^2*((1-Dam)*sqrt(2*Dam~-Dam~^2)-arcsin(-1+Dam~))-pi*(rd~-el~)^2)
"Axil plástico"
sigma_r*(2*rd~^2*((1-Dam)*sqrt(2*Dam~-Dam~^2)-arcsin(-1+Dam~))-pi*(rd~-el~)^2)
> #Comparación con el caso circular macizo (haciendo el=rd):
print("Comprobaciones con el caso circular macizo");
Nx_circPDD1_macizo:=simplify(limit(Nx_circularPDD1_resumido,el=rd));
Nx_circPDD1_resumido:=2*sigma*rd~^2*(arcsin(1-Dam)+(1-Dam)*sqrt(1-(1-Dam)^2));
simplify(Nx_circPDD1_macizo-Nx_circPDD1_resumido);
"Comprobaciones con el caso circular macizo"
```

```

0
> #Comprobación con D=0
limit(Nx_circularPDD1,Dam=0);
2 σ π rd~ el~ - σ π el~2

▼ yr<rd-el
0
> NxcpdD2:=int(2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*sigma,y=y4..y1):
> Nx_circularPDD2:=simplify(eval(NxcpdD2,[y1=rd*(1-Dam),y4=-rd*(1-Dam)]));
Nx_circularPDD2_resumido:=2*sigma*(-arcsin(rd*(1-Dam)/(rd-el))*(rd-el)^2
+rd^2*arcsin(1-Dam)+rd*(1-Dam)*(rd*sqrt(1-(1-Dam)^2)-sqrt((rd-el)^2-rd^2*(1-Dam)^2)));
simplify(Nx_circularPDD2_resumido-Nx_circularPDD2);
Nx_circularPDD2_resumido:=2 σ 
$$\left( -\arcsin\left(\frac{rd~(1-Dam)}{rd~-el~}\right) (rd~-el~)^2 - rd~^2 \arcsin(-1 + Dam~) + rd~(1 - Dam~) \left( rd~\sqrt{2 Dam~ - Dam~^2} - \sqrt{-2 rd~ el~ + el~^2 + 2 rd~^2 Dam~ - rd~^2 Dam~^2} \right) \right)$$

0
> #Evaluación del momento para el caso elástico (sigma=sigma_f) y para el caso plástico (sigma=sigma_r):
print("Axil elástico");
eval(Nx_circularPDD2_resumido,sigma=sigma[f]);
print("Axil plástico");
eval(Nx_circularPDD2_resumido,sigma=sigma[r]);
"Axil elástico"
2 σf 
$$\left( -\arcsin\left(\frac{rd~(1-Dam)}{rd~-el~}\right) (rd~-el~)^2 - rd~^2 \arcsin(-1 + Dam~) + rd~(1 - Dam~) \left( rd~\sqrt{2 Dam~ - Dam~^2} - \sqrt{-2 rd~ el~ + el~^2 + 2 rd~^2 Dam~ - rd~^2 Dam~^2} \right) \right)$$

"Axil plástico"
2 σr 
$$\left( -\arcsin\left(\frac{rd~(1-Dam)}{rd~-el~}\right) (rd~-el~)^2 - rd~^2 \arcsin(-1 + Dam~) + rd~(1 - Dam~) \left( rd~\sqrt{2 Dam~ - Dam~^2} - \sqrt{-2 rd~ el~ + el~^2 + 2 rd~^2 Dam~ - rd~^2 Dam~^2} \right) \right)$$


```

#####
 ESFUERZO CORTANTE
 #####

### 1. Cortante con D=0

```

> restart;
assume(el>0,rd>el,y1>0,y4<0):
Vycopd:=int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma/sqrt(3),
y=rd-el..y1)
+int(2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*sigma/sqrt(3),y=rd+el..rd-el)
+int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma/sqrt(3),
y=y4..-rd+el);
Vycopd:=- 
$$\frac{2}{3} \sigma \sqrt{3} \sqrt{el~} \sqrt{2 rd~ - el~} rd~ + \frac{2}{3} \sigma \sqrt{3} el~^{3/2} \sqrt{2 rd~ - el~} + \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} \sqrt{rd~^2 - yl~^2} yl~ + \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} rd~^2 \arcsin\left(\frac{yl~}{rd~}\right) - \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} \pi rd~^2 + \frac{2}{3} \sigma \sqrt{3} \sqrt{el~(2 rd~ - el~)} rd~ + \frac{2}{3} \sigma \sqrt{3} \pi rd~ el~ - \frac{2}{3} \sigma \sqrt{3} \sqrt{el~(2 rd~ - el~)} el~ - \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} \pi el~^2 - \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} \sqrt{rd~^2 - yl~^2} yl~ - \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} rd~^2 \arcsin\left(\frac{yl~}{rd~}\right)$$

> Vy_circularPD:=simplify(eval(Vycopd,[y1=rd,y4=-rd]));
Vy_circularPD_resumido:=sigma*Pi*el*(2*rd-el);
simplify(Vy_circularPD_resumido-Vy_circularPD);
Vy_circularPD:= 
$$\frac{2}{3} \sigma \sqrt{3} \pi rd~ el~ - \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} \pi el~^2$$

Vy_circularPD_resumido:=σ π el~ (2 rd~ - el~)
2 σ π el~ rd~ - σ π el~2 - 
$$\frac{2}{3} \sigma \sqrt{3} \pi rd~ el~ + \frac{1}{3} \sigma \sqrt{3} \pi el~^2$$

> #Evaluación del momento para el caso elástico (sigma=sigma_f) y para el caso plástico (sigma=sigma_r):
print("Cortante elástico");
eval(Vy_circularPD_resumido,sigma=sigma[f]);
print("Cortante plástico");
eval(Vy_circularPD_resumido,sigma=sigma[r]);
"Corriente elástico"
σf π el~ (2 rd~ - el~)
"Corriente plástico"
σr π el~ (2 rd~ - el~)
> #Comparación con el caso circular macizo (haciendo el=rd):

```

```

print("Comprobaciones con el caso circular macizo");
simplify(limit(Vy_circularPD_resumido,el=rd));
"Comprobaciones con el caso circular macizo"
rd^2 σ π

```

## 2. Cortante con D>0

```

▼ yr>rd-el
> assume(Dam>0):
VycpdD1:=int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma/sqrt(3),
                           y=rd-el..y1)
+int(2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*sigma/sqrt(3),y=-rd+el..rd-el)
+int( 2*sqrt(rd^2-y^2)*sigma/sqrt(3),
                           y=y4..-rd+el);
VycpdD1:=- $\frac{2}{3}$  σ √3 √el~ √2 rd~ - el~ rd~ +  $\frac{2}{3}$  σ √3 el~3/2 √2 rd~ - el~ +  $\frac{1}{3}$  σ √3 √rd~2 - yl~2 yl~ +  $\frac{1}{3}$  σ √3 rd~2 arcsin( $\frac{yl~}{rd~}$ )
-  $\frac{1}{3}$  σ √3 π rd~2 +  $\frac{2}{3}$  σ √3 √el~ (2 rd~ - el~) rd~ +  $\frac{2}{3}$  σ √3 π rd~ el~ -  $\frac{2}{3}$  σ √3 √el~ (2 rd~ - el~) el~ -  $\frac{1}{3}$  σ √3 π el~2
-  $\frac{1}{3}$  σ √3 √rd~2 - y4~2 y4~ -  $\frac{1}{3}$  σ √3 rd~2 arcsin( $\frac{y4~}{rd~}$ )
> Vy_circularPDD1:=simplify(eval(VycpdD1,[yl=rd*(1-Dam),y4=-rd*(1-Dam)]));
Vy_circularPDD1_resumido:=sigma*(2*rd^2*(1-Dam)*sqrt(1-(1-Dam)^2)+arcsin(1-Dam)-Pi*(rd-el)^2);
simplify(Vy_circularPDD1_resumido-Vy_circularPDD1);
Vy_circularPDD1_resumido:=σ (2 rd~2 ((1-Dam~) √2 Dam~ - Dam~2) - arcsin(-1 + Dam~)) - π (rd~ - el~)2
 $\frac{1}{3}$  σ (6 rd~2 √Dam~ √2 - Dam~ - 6 rd~2 Dam~3/2 √2 - Dam~ - 6 rd~2 arcsin(-1 + Dam~) - 3 π rd~2 + 6 π rd~ el~ - 3 π el~2
- 2 √3 rd~2 √Dam~ √2 - Dam~ + 2 √3 rd~2 Dam~3/2 √2 - Dam~ + 2 √3 rd~2 arcsin(-1 + Dam~) + √3 π rd~2 - 2 √3 π rd~ el~ + √3 π el~2)
> #Evaluación del momento para el caso elástico (sigma=sigma_f) y para el caso plástico (sigma=sigma_x):
print("Cortante elástico");
eval(Vy_circularPDD1_resumido,sigma=sigma[f]);
print("Cortante plástico");
eval(Vy_circularPDD1_resumido,sigma=sigma[r]);
" " "Cortante elástico"
σf (2 rd~2 ((1 - Dam~) √2 Dam~ - Dam~2) - arcsin(-1 + Dam~)) - π (rd~ - el~)2
" " "Cortante plástico"
σr (2 rd~2 ((1 - Dam~) √2 Dam~ - Dam~2) - arcsin(-1 + Dam~)) - π (rd~ - el~)2
> #Comparación con el caso circular macizo (haciendo el=rd):
print("Comprobaciones con el caso circular macizo");
Vy_circPD1_macizo:=simplify(limit(Vy_circularPDD1_resumido,el=rd));
Vy_circD_resumido:=2*sigma*rd^2*(arcsin(1-Dam)+(1-Dam)*sqrt(1-(1-Dam)^2));
simplify(Vy_circPD1_macizo-Vy_circD_resumido);

"Comprobaciones con el caso circular macizo"
0
> #Comprobación con D=0
limit(Vy_circularPDD1,Dam=0);
 $\frac{2}{3}$  σ √3 π rd~ el~ -  $\frac{1}{3}$  σ √3 π el~2

```

```

▼ yr<rd-el
> VycpdD2:=int(2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*sigma/sqrt(3),y=y4..y1):
> Vy_circularPDD2:=simplify(eval(VycpdD2,[yl=rd*(1-Dam),y4=-rd*(1-Dam)]));
Vy_circularPDD2_resumido:=2*sigma*(-arcsin(rd~*(1-Dam)/(rd-el))*(rd-el)^2
+rd~2*arcsin(1-Dam)+rd~*(1-Dam)*(rd~*sqrt(1-(1-Dam)^2)-sqrt((rd-el)^2-rd~2(1-Dam)^2)));
simplify(Vy_circularPDD2_resumido-Vy_circularPDD2);
Vy_circularPDD2_resumido:=2 σ (-arcsin( $\frac{(rd~ - (1 - Dam~)}{rd~ - el~}$ ))(rd~ - el~)2 - rd~2 arcsin(-1 + Dam~) + rd~ (1 - Dam~) (rd~ √2 Dam~ - Dam~2
- √-2 rd~ el~ + el~2 + 2 rd~2 Dam~ - rd~2 Dam~2))
 $\frac{2}{3}$  σ (-3 arcsin( $\frac{rd~ (-1 + Dam~)}{-rd~ + el~}$ ) rd~2 + 6 arcsin( $\frac{rd~ (-1 + Dam~)}{-rd~ + el~}$ ) rd~ el~ - 3 arcsin( $\frac{rd~ (-1 + Dam~)}{-rd~ + el~}$ ) el~2 - 3 rd~2 arcsin(-1 + Dam~)
+ 3 rd~2 √Dam~ √2 - Dam~ - 3 √-2 rd~ el~ + el~2 + 2 rd~2 Dam~ - rd~2 Dam~2 rd~ - 3 rd~2 Dam~3/2 √2 - Dam~
+ 3 √-2 rd~ el~ + el~2 + 2 rd~2 Dam~ - rd~2 Dam~2 rd~ Dam~ + √3 arcsin( $\frac{rd~ (-1 + Dam~)}{-rd~ + el~}$ ) rd~2 - √3 rd~2 √Dam~ √2 - Dam~
+ √3 rd~2 Dam~3/2 √2 - Dam~ + √3 √-2 rd~ el~ + el~2 + 2 rd~2 Dam~ - rd~2 Dam~2 rd~
- √3 √-2 rd~ el~ + el~2 + 2 rd~2 Dam~ - rd~2 Dam~2 rd~ Dam~ + √3 rd~2 arcsin(-1 + Dam~) + √3 arcsin( $\frac{rd~ (-1 + Dam~)}{-rd~ + el~}$ ) el~2

```

```
#####
MOMENTO FLECTOR
#####
```

### 1. Momento con D=0

#### En función de y2

```
y2>r-e
Mz_circularPD1 =  $\frac{1}{12} \frac{\sigma_r y_2 - \sigma_f r}{y_2(r - y_2)} \left\{ 3r^4 \left[ \pi - 2 \arcsin \left( \frac{y_2}{r} \right) \right] - 2y_2 \sqrt{r^2 - y_2^2} (5r^2 - 2y_2^2) \right\} - \frac{\pi}{4} \frac{e}{y_2} \sigma_f (2r - e)[r^2 + (r - e)^2]$ 

> restart;
assume(rd>0,rd>y2,rd>el,e1>0,Dam>0,Dam<1);
> #Suma de las 5 integrales:
Mzcpd11:=int( y*2*(sqrt(rd^2-y^2))*(K*y+F), y=y2..rd) #Integral en función de
y_i
+int(y^2*2*(sqrt(rd^2-y^2))*G, y=rd-el..y2)
+int(y^2*2*(sqrt(rd^2-y^2))-sqrt((rd-el)^2-y^2))*G, y=-rd+el..rd-el)
+int(y^2*2*(sqrt(rd^2-y^2))*G, y=-y2..-rd+el)
+int( y*2*(sqrt(rd^2-y^2))*(M*y-H), y=-rd..-y2):
Mzcpd13:=eval(Mzcpd11,[M=(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd),
constantes
K=(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd),
F=sigma[f]-(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd)*y2,
H=sigma[r]+(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd)*(-rd),
G=sigma[f]/y2]):
> Mz_circularPD1:=simplify(Mzcpd13);

Mz_circularPD1_resumida:=
(y2*sigma[r]-sigma[f]*rd)/(y2*(rd-y2)*12)*(3*rd^4*(Pi-2*arcsin(y2/rd))-sqrt(rd^2-y2^2)*y2*2*(5*rd^2
-2*y2^2))
+1/(4*y2)*Pi*el*(2*rd-el)*(rd^2+(rd-el)^2));
simplify(Mz_circularPD1_resumida-Mz_circularPD1),
Mz_circularPD1_resumida:=  $\frac{1}{12} \frac{(y^2 - \sigma_r - \sigma_f r d) \left( 3 r d^{-4} \left( \pi - 2 \arcsin \left( \frac{y^2}{r d} \right) \right) - 2 \sqrt{r d^2 - y^2} y^2 (5 r d^2 - 2 y^2) \right)}{y^2 (r d - y^2)}$ 
+  $\frac{1}{4} \frac{\sigma_f \pi e l (-e l + 2 r d) (r d^2 + (r d - e l)^2)}{y^2}$ 
0
> #Evaluación del momento para el caso elástico (y2=h/2) y plástico (y2=0), con sigma[r]>sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], ">", sigma[f]);
print("Momento elástico");
orig:=limit(Mz_circularPD1_resumida,y2=rd);
simp:=1/(4*rd)*Pi*el*sigma[f]*(2*rd-el)*(rd^2+(rd-el)^2);
simplify(orig-simp);
print("Momento plástico");
print("Para el cálculo del momento plástico se hace y2=0, y eso no tiene sentido en esta parte con
y2>r-e");
"Comprobaciones con", sigma_r > sigma_f
"Momento elástico"
orig :=  $\frac{1}{4} \frac{-6 \sigma_f \pi e l^2 r d^2 + 4 \sigma_f \pi e l^3 r d - \sigma_f \pi e l^4 + 4 \sigma_f \pi e l r d^3}{r d}$ 
simp :=  $\frac{1}{4} \frac{\pi e l \sigma_f (-e l + 2 r d) (r d^2 + (r d - e l)^2)}{r d}$ 
0
"Momento plástico"
"Para el cálculo del momento plástico se hace y2=0, y eso no tiene sentido en esta parte con y2>r-e"
> #Evaluación del momento para el caso elástico (y2=h/2) y plástico (y2=0), con sigma[r]=sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], "=", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=((eval(Mz_circularPD1_resumida,[sigma[r]=sigma[f]])));
simp:=sigma[f]/y2*(1/6*sqrt(rd^2-y2^2)*y2*(5*rd^2-2*y2^2)-rd^4/4*(Pi-2*arcsin(y2/rd))-1/4*Pi*el*(el
-2*rd)*(rd^2+(rd-el)^2));
simplify(orig-simp);

print("Momento elástico");
orig:=limit((eval(Mz_circularPD1_resumida,[sigma[r]=sigma[f]])),y2=rd);
simp:=1/(4*rd)*Pi*el*sigma[f]*(2*rd-el)*(rd^2+(rd-el)^2);
simplify(orig-simp);
```

```

"Comprobaciones con", sigma_r "=" , sigma_f
"Momento"
simp := 
$$\frac{\sigma_f \left( \frac{1}{6} \sqrt{rd^2 - y2^2} y2 \left( 5 rd^2 - 2 y2^2 \right) - \frac{1}{4} rd^4 \left( \pi - 2 \arcsin \left( \frac{y2}{rd} \right) \right) - \frac{1}{4} \pi e l \left( e l - 2 rd \right) \left( rd^2 + (rd - el)^2 \right) \right)}{y2}$$

0
"Momento elástico"
simp := 
$$\frac{\frac{1}{4} \pi e l \left( \sigma_f - el + 2 rd \right) \left( rd^2 + (rd - el)^2 \right)}{rd}$$

0

> #Comparación con el caso circular macizo (haciendo el=rd):
print("Comprobaciones con el caso circular macizo ", sigma[r], ">", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=(eval(Mz_circularPD1_resumida,[el=rd]));
simp:=1/(6*y2*(rd-y2));
simplify(orig-simp);
print("Momento elástico");
simplify(limit(simplify(limit(Mz_circularPD1_resumida,el=rd)),y2=rd));
print("\n");
print("Comprobaciones con el caso circular macizo ", sigma[r], "=", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=simplify(eval(Mz_circularPD1_resumida,[sigma[r]=sigma[f],el=rd]));
simp:=sigma[f]/(6*y2)*(y2*sqrt(rd^2-y2^2)*(5*rd^2-2*y2^2)+3*rd^4*arcsin(y2/rd))*(sigma[f]*rd-sigma[r]*y2)+(rd^4/4*Pi*(sigma[r]-sigma[f]))/(rd-y2);
simplify(orig-simp);
print("Momento elástico");
limit(eval(Mz_circularPD1_resumida,[sigma[r]=sigma[f],el=rd]),y2=rd);
"Comprobaciones con el caso circular macizo ", sigma_r ">", sigma_f
"Momento"
simp := 
$$\frac{1}{6} \frac{\left( \sqrt{rd^2 - y2^2} y2 \left( 5 rd^2 - 2 y2^2 \right) + 3 rd^4 \arcsin \left( \frac{y2}{rd} \right) \right) \left( \sigma_f rd - y2 - \sigma_r \right)}{y2 \left( rd - y2 \right)} + \frac{1}{4} \frac{rd^4 \pi \left( \sigma_f - \sigma_r \right)}{rd - y2}$$

0
"Momento elástico"

$$\frac{1}{4} \sigma_f rd^3 \pi$$

"
"
"Comprobaciones con el caso circular macizo ", sigma_r "=" , sigma_f
"Momento"
simp := 
$$\frac{\sigma_f \left( \sqrt{rd^2 - y2^2} y2 \left( 5 rd^2 - 2 y2^2 \right) + 3 rd^4 \arcsin \left( \frac{y2}{rd} \right) \right)}{y2}$$

0
"Momento elástico"

$$\frac{1}{4} \sigma_f rd^3 \pi$$


y2<rd-e
Mz_circularPD2 = 
$$\frac{\sigma_f r - \sigma_r y_2}{2 y_2 (r - y_2)} \left[ (r - e)^4 \arcsin \left( \frac{y_2}{e - r} \right) + r^4 \arcsin \left( \frac{y_2}{r} \right) \right] + \frac{\sigma_f r - \sigma_r y_2}{6 (r - y_2)} \left\{ \sqrt{r^2 - y_2^2} (5 r^2 - 2 y_2^2) - \sqrt{(r - e_1)^2 - y_2^2} [5(r - e)^2 - 2 y_2^2] \right\} + \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{r - y_2} e (2 r - e) [r^2 + (r - e)^2]$$

Mz_circularPD2 = 
$$\frac{\sigma_f r - \sigma_r y_2}{6 (r - y_2)} \left[ \frac{3}{y_2} \left[ (r - e)^4 \arcsin \left( \frac{y_2}{e - r} \right) + r^4 \arcsin \left( \frac{y_2}{r} \right) \right] + \sqrt{r^2 - y_2^2} (5 r^2 - 2 y_2^2) - \sqrt{(r - e_1)^2 - y_2^2} [5(r - e)^2 - 2 y_2^2] \right] + \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{r - y_2} e (2 r - e) [r^2 + (r - e)^2]$$

> #Suma de las 5 integrales:
Mzcpd21:=int( y*2*sqrt(rd^2-y^2)*(K*y+F), y=y2..rd-el..rd)      #Integral en función
de y_i
+int( y*2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*((K*y+F), y=y2..rd-el)
+int( y^2*2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*G, y=-y2..y2)
+int( y*2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*((M*y-H), y=-rd+el..-y2)
+int( y*2*sqrt(rd^2-y^2)*(M*y-H), y=-rd..-rd+el);

Mzcpd23:=eval(Mzcpd21,[M=(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd)],           #evaluar con los valores de las

```

```

constantes
K=(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd),
F=(sigma[f]-(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd)*y2,
H=sigma[r]+(sigma[f]-sigma[r])/(y2-rd)*(-rd),
G=sigma[f]/y2];
> Mz_circularPD2:=eval(Mzcpd23):
Mz_circularPD2_resumida:=
1/((rd-y2)*y2^2)*((sigma[f]*rd-sigma[r])*y2)*((rd-e1)^4*arcsin(y2/(-rd+e1))+rd^4*arcsin(y2/rd))
+1/6*((sigma[f]*rd-y2^2*sigma[r])/(rd-y2)*(sqrt(rd^2-y2^2)*5*rd^2-2*y2^2)-sqrt((rd-e1)^2-y2^2)*(5*(rd-e1)^2-2*y2^2));
+(1/4)*e1*Pi*(sigma[r]-sigma[f])/(rd-y2)*((2*rd-e1)*((rd-e1)^2+rd^2));
Mz_circularPD2_resumida:=
1/((rd-y2)*6)*((sigma[f]*rd-sigma[r])*y2)*(3/y2*
(rd-e1)^4*arcsin(y2/(-rd+e1))+rd^4*arcsin(y2/rd))
+(sqrt(rd^2-y2^2)*(5*rd^2-2*y2^2)-sqrt((rd-e1)^2-y2^2)*(5*(rd-e1)^2-2*y2^2));
+(1/4)*e1*Pi*(sigma[r]-sigma[f])/(rd-y2)*(2*rd-e1)*((rd-e1)^2+rd^2));
simplify(Mz_circularPD2_resumida-Mzcpd23);
Mz_circularPD2_resumida:= 
$$\frac{1}{2} \frac{\left(\sigma_f rd - y2 - \sigma_r\right) \left((rd - e1)^4 \arcsin\left(\frac{y2}{-rd + e1}\right) + rd^4 \arcsin\left(\frac{y2}{rd}\right)\right)}{(rd - y2) y2}$$

+ 
$$\frac{1}{6} \frac{\left(\sigma_f rd - y2 - \sigma_r\right) \left(\sqrt{rd^2 - y2^2} (5 rd^2 - 2 y2^2) - \sqrt{rd^2 - 2 rd - e1 + e1^2 - y2^2} (5 (rd - e1)^2 - 2 y2^2)\right)}{rd - y2}$$

+ 
$$\frac{1}{4} \frac{e1 \pi (\sigma_r - \sigma_f) (-e1 + 2 rd) (rd^2 + (rd - e1)^2)}{rd - y2}$$

Mz_circularPD2_resumida:= 
$$\frac{1}{6 rd - 6 y2} \left( \left( \sigma_f rd - y2 - \sigma_r\right) \left( \frac{3 \left( (rd - e1)^4 \arcsin\left(\frac{y2}{-rd + e1}\right) + rd^4 \arcsin\left(\frac{y2}{rd}\right)\right)}{y2}\right.\right.$$

+ 
$$\left.\left. + \sqrt{rd^2 - y2^2} (5 rd^2 - 2 y2^2) - \sqrt{rd^2 - 2 rd - e1 + e1^2 - y2^2} (5 (rd - e1)^2 - 2 y2^2)\right) \right)$$

+ 
$$\frac{1}{4} \frac{e1 \pi (\sigma_r - \sigma_f) (-e1 + 2 rd) (rd^2 + (rd - e1)^2)}{rd - y2}$$

0
> #Evaluación del momento para el caso plástico (y2=0), con sigma[r]>sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], ">", sigma[f]);
print("Momento elástico");
print("Para el cálculo del momento plástico se hace y2=r, y eso no tiene sentido en esta parte con y2<r-e");
print("Momento plástico");
orig:=(limit(Mz_circularPD2_resumida,y2=0));
simp:=Pi*e1*(4*rd)*(sigma[r]-sigma[f))*(2*rd-e1)*(rd^2+(rd-e1)^2)+4/3*sigma[f]*e1*((rd-e1)^2+rd*(2*rd-e1));
simplify(orig-simp);
"Comprobaciones con", sigma_r, ">", sigma_f
"Momento elástico"
"Para el cálculo del momento plástico se hace y2=r, y eso no tiene sentido en esta parte con y2<r-e"
"Momento plástico"
simp:= 
$$\frac{1}{4} \frac{\pi e1 \left(\sigma_r - \sigma_f\right) \left(-e1 + 2 rd\right) \left(rd^2 + (rd - e1)^2\right)}{rd} + \frac{4}{3} \sigma_f e1 \left((rd - e1)^2 + rd \left(-e1 + 2 rd\right)\right)$$

0
> #Evaluación del momento para el caso plástico (y2=0), con sigma[r]=sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], "=", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=factor(simplify(eval(Mz_circularPD2_resumida,[sigma[r]=sigma[f]])));
simp:=1/(y2*2)*(sigma[f]*((rd-e1)^4*arcsin(y2/(-rd+e1))+rd^4*arcsin(y2/rd)))
+sigma[f]/6*((sqrt(rd^2-y2^2)*(5*rd^2-2*y2^2)-sqrt((rd-e1)^2-y2^2)*(5*(rd-e1)^2-2*y2^2));
simplify(orig-simp);
#comprobación de que con sigma[r]=sigma[f] da lo mismo que en libro de NEAL
print("Momento plástico");
orig:=limit(eval(Mz_circularPD2_resumida,[sigma[r]=sigma[f]]),y2=0);
simp:=4*sigma[f]*e1*((1/3)*e1^2-e1*rd+rd^2);
simplify(orig-simp);
sort(expand(simp/sigma[f]),[rd,e1],plex);

print("Libro de Neal");
4/3*sigma[f]*rd^3*(1-(1-e1/rd)^3);
sort(expand(4/3*rd^3*(1-(1-e1/rd)^3)),[rd,e1],plex);
"Comprobaciones con", sigma_r, "=", sigma_f

```

```

"Momento"
simp :=  $\frac{1}{2} \frac{\sigma_f \left( (rd - eI)^4 \arcsin\left(\frac{y^2 -}{rd - eI}\right) + rd^4 \arcsin\left(\frac{y^2 -}{rd -}\right) \right)}{y^2} + \frac{1}{6} \sigma_f \left( \sqrt{rd^2 - y^2} (5 rd^2 - 2 y^2) \right)$ 
 $- \sqrt{rd^2 - 2 rd - eI + eI^2 - y^2} (5 (rd - eI)^2 - 2 y^2)$ 
0
"Momento plástico"
orig :=  $\frac{4}{3} \sigma_f eI^3 - 4 \sigma_f eI^2 rd - 4 \sigma_f eI - rd^2$ 
simp :=  $4 \sigma_f eI \left( \frac{1}{3} eI^2 - rd - eI + rd^2 \right)$ 
0
 $4 rd^2 eI - 4 rd - eI^2 + \frac{4}{3} eI^3$ 
"Libro de Neal"
 $\frac{4}{3} \sigma_f rd^3 \left( 1 - \left( 1 - \frac{eI}{rd} \right)^3 \right)$ 
 $4 rd^2 eI - 4 rd - eI^2 + \frac{4}{3} eI^3$ 

> #Comparación con el caso circular macizo (haciendo el=rd):
print("Comprobaciones con el caso circular macizo ", sigma[r], ">", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=simplify(limit(Mz_circularPD2_resumida,el=rd));
print("El momento no tiene sentido si e=r, porque y2 no puede ser entonces menor que r-e=r-r=0");

print("Momento plástico");
orig:=simplify(limit(limit(Mz_circularPD2_resumida,el=rd),y2=0));
simp:=4/3*sigma[f]*rd^3+Pi/4*rd^3*(sigma[r]-sigma[f]);
simplify(orig-simp);

print("\n");
print("Comprobaciones con el caso rectangular", sigma[r], "=", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=simplify(eval(limit(Mz_circularPD2_resumida,el=rd),sigma[r]=sigma[f]));
print("El momento no tiene sentido si e=r, porque y2 no puede ser entonces menor que r-e=r-r=0");

print("Momento plástico");
simplify(eval(limit(limit(Mz_circularPD2_resumida,el=rd),y2=0),sigma[r]=sigma[f]));
"Comprobaciones con el caso circular macizo ", sigma_r ">", sigma_f
"Momento"
"El momento no tiene sentido si e=r, porque y2 no puede ser entonces menor que r-e=r-r=0"
"Momento plástico"
simp :=  $\frac{4}{3} \sigma_f rd^3 + \frac{1}{4} \pi rd^3 (\sigma_r - \sigma_f)$ 
0
"
"
"Comprobaciones con el caso rectangular", sigma_r "=" , sigma_f
"Momento"
orig :=  $\frac{1}{6} \frac{\left( 3 rd^4 \arcsin\left(\frac{y^2 -}{rd -}\right) + 5 \sqrt{rd^2 - y^2} y^2 rd^2 + 2 I y^3 y^2 - 2 \sqrt{rd^2 - y^2} y^3 \right) \sigma_f}{y^2}$ 
"El momento no tiene sentido si e=r, porque y2 no puede ser entonces menor que r-e=r-r=0"
"Momento plástico"
 $\frac{4}{3} \sigma_f rd^3$ 

Comprobación de que en y2=r-e coinciden ambas
> asdf1:=(eval(Mz_circularPD1_resumida,y2=rd-e1));
asdf2:=(eval(Mz_circularPD2_resumida,y2=rd-e1));
simplify(asdf1-asdf2);
simp:=(1/12)*(sigma[r]*(rd-e1)-rd*sigma[f])*(3*rd^4*(Pi-2*arcsin((rd-e1)/rd))-2*sqrt(rd^2-(rd-e1)^2)*
(rd-e1)*(5*rd^2-2*(rd-e1)^2))/((rd-e1)*e1)-(1/4)*Pi*sigma[f]*e1*(-2*rd+e1)*(rd^2+(rd-e1)^2)/(rd-e1);
simplify(asdf1-simp);
0
simp :=  $\frac{1}{12} \frac{\left( (rd - eI) \sigma_r - \sigma_f rd \right) \left( 3 rd^4 \left( \pi - 2 \arcsin\left(\frac{rd - eI}{rd -}\right) \right) - 2 \sqrt{2 rd - eI - eI^2} (rd - eI) (5 rd^2 - 2 (rd - eI)^2) \right)}{(rd - eI) eI}$ 
 $- \frac{1}{4} \frac{\pi \sigma_f eI - (eI - 2 rd) (rd^2 + (rd - eI)^2)}{rd - eI}$ 
0

```

### ▼ En función de n[s]

```

▼ y2>r-e ⇔ ns>r/(r-e)

Mz_circularPD1=- $\frac{1}{12} \left( \frac{r}{n_s} \right)^3 \frac{\sigma_f n_s - \sigma_r}{n_s - 1} \left\{ 3 n_s^4 \left[ \pi - 2 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right] - 2 \sqrt{n_s^2 - 1} (5 n_s^2 - 2) \right\} + \frac{\pi}{4} \frac{n_s}{r} \sigma_f e (2 r - e) [r^2 + (r - e)^2]$ 
> assume(n[s]>1):
Mz_circPD1:=subs(y2=rd/n[s],Mz_circularPD1_resumida); #n[s]=eps_r/eps_f
> Mz_circPD1_resumida:=
-(1/12)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])*rd^3*(3*n[s]^4*(Pi-2*arcsin(1/n[s]))-2*sqrt(n[s]^2-1)*(5*n[s]^2-2))/(
n[s]^3*(n[s]-1))
+(1/4)*n[s]*sigma[f]*Pi*e1*(2*rd-el)*(rd^2+(rd-el)^2)/rd;
#comprobación de que la resumida da igual que la original
simplify(Mz_circPD1-Mz_circPD1_resumida);

Mz_circPD1_resumida:=- $\frac{1}{12} \frac{\left( n_s \sigma_f - \sigma_r \right) rd^3 \left( 3 n_s^4 \left( \pi - 2 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right) - 2 \sqrt{n_s^2 - 1} (5 n_s^2 - 2) \right)}{n_s^3 (n_s - 1)}$ 
+  $\frac{1}{4} \frac{n_s \sigma_f \pi el - (-el + 2 rd) (rd^2 + (rd - el)^2)}{rd}$ 
0

> #Evaluación de las funciones para el caso elástico (n[s]=1), con sigma[r]>sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], ">", sigma[f]);
print("Momento elástico");
orig:=eval(limit(Mz_circPD1_resumida,n[s]=1));
simp:=(sigma[f]*Pi*e1/4)/rd*(2*rd-el)*(rd^2+(rd-el)^2);
simplify(orig-simp);
"Comprobaciones con", sigma_f, ">", sigma_r
"Momento elástico"
simp :=  $\frac{1}{4} \frac{\sigma_f \pi el - (-el + 2 rd) (rd^2 + (rd - el)^2)}{rd}$ 
0

> #Evaluación de las funciones para el caso elástico (n[s]=1), con sigma[r]=sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], "=", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=eval(Mz_circPD1_resumida,[sigma[r]=sigma[f]]);
simp:=(1/12)*sigma[f]*rd^3*n[s]^3*(2*sqrt(n[s]^2-1)*(5*n[s]^2-2)-3*n[s]^4*(Pi-2*arcsin(1/n[s])))+(1/4)*sigma[f]*n[s]*Pi*e1*(-el+2*rd)*(rd^2+(rd-el)^2)/rd;
simplify(orig-simp);
print("Momento elástico");
orig:=eval(limit(Mz_circPD1_resumida,n[s]=1),[sigma[r]=sigma[f]]);
simp:=(sigma[f]*Pi*e1/4)/rd*(2*rd-el)*(rd^2+(rd-el)^2);
simplify(orig-simp);
"Comprobaciones con", sigma_r, "=", sigma_f
"Momento"
simp :=  $\frac{1}{12} \frac{\sigma_f rd^3 \left( 2 \sqrt{n_s^2 - 1} (5 n_s^2 - 2) - 3 n_s^4 \left( \pi - 2 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) \right) \right)}{n_s^3} + \frac{1}{4} \frac{n_s \sigma_f \pi el - (-el + 2 rd) (rd^2 + (rd - el)^2)}{rd}$ 
0
"Momento elástico"
simp :=  $\frac{1}{4} \frac{\sigma_f \pi el - (-el + 2 rd) (rd^2 + (rd - el)^2)}{rd}$ 
0

▼ y2<r-e ⇔ ns>r/(r-e)

Mz_circularPD2= $\frac{1}{2} \frac{n_s}{r} \frac{\sigma_f n_s - \sigma_r}{n_s - 1} \left[ r^4 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) - (r - e)^4 \arcsin \left( \frac{r}{n_s(r - e)} \right) \right] + \frac{1}{6} \frac{\sigma_f n_s - \sigma_r}{n_s - 1} \left[ \sqrt{r^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left( 5 r^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right) \right.$ 
 $\left. - \sqrt{(r - e)^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left( 5 (r - e)^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right) \right] + \frac{1}{4} \frac{n_s}{r} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s - 1} \pi e (2 r - e) [r^2 + (r - e)^2]$ 
Mz_circularPD2= $\frac{1}{6} \frac{\sigma_f n_s - \sigma_r}{n_s - 1} \left[ 3 \frac{n_s}{r} \left[ r^4 \arcsin \left( \frac{1}{n_s} \right) - (r - e)^4 \arcsin \left( \frac{r}{n_s(r - e)} \right) \right] + \sqrt{r^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left( 5 r^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right) - \sqrt{(r - e)^2 - \left( \frac{r}{n_s} \right)^2} \left( 5 (r - e)^2 - 2 \left( \frac{r}{n_s} \right)^2 \right) \right]$ 
 $+ \frac{1}{4} \frac{n_s}{r} \frac{\sigma_r - \sigma_f}{n_s - 1} \pi e (2 r - e) [r^2 + (r - e)^2]$ 
> Mz_circPD2:=subs(y2=rd/n[s],Mz_circularPD2_resumida); #n[s]=eps_r/eps_f
> Mz_circPD2_resumida:=(1/6)*(sigma[f]*n[s]-sigma[r])/(n[s]-1)*(
3*n[s]/rd^4*arcsin(1/n[s])-(rd-el)^4*arcsin(rd/(n[s]*(rd-el)))+
(sqrt(rd^2-2*rd^2/n[s]^2)*(5*rd^2-2*rd^2/n[s]^2)-sqrt((rd-el)^2-2*rd^2/n[s]^2)*(5*(rd-el)^2-2*rd^2/n[s]^2))

```

```

^2)))
+n[s]/(4*rd)*(2*rd-e1)*(rd^2+(rd-e1)^2)*e1*Pi*(sigma[r]-sigma[f])/(n[s]-1);

#comprobación de que la resumida da igual que la original
simplify(Mz_circPD2-Mz_circPD2_resumida);

Mz_circPD2_resumida:= 1/6 * 1/(n~_s - 1) * 
  
$$\left( n~_s (\sigma_f - \sigma_r) \left( \frac{3 n~_s \left( rd~^4 \arcsin\left(\frac{1}{n~_s}\right) - (rd~ - eI~)^4 \arcsin\left(\frac{rd~}{n~_s (rd~ - eI~)}\right) \right)}{rd~} \right. \right.$$


$$+ \sqrt{\frac{rd~^2 - rd~^2}{n~_s^2}} \left( 5 rd~^2 - \frac{2 rd~^2}{n~_s^2} \right) - \sqrt{\frac{(rd~ - eI~)^2 - rd~^2}{n~_s^2}} \left( 5 (rd~ - eI~)^2 - \frac{2 rd~^2}{n~_s^2} \right) \left. \right) \left. \right)$$


$$+ \frac{1}{4} \frac{n~_s (-eI~ + 2 rd~) (rd~^2 + (rd~ - eI~)^2) eI~ \pi (\sigma_r - \sigma_f)}{rd~ (n~_s - 1)}$$

0

> #Evaluación de las funciones para el caso elástico (n[s]=1) y plástico (n[s]->infinity), con sigma[r]>sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], ">", sigma[f]);
print("Momento plástico");
orig:=(limit(Mz_circPD2_resumida,n[s]=infinity));
simp:=Pi*e1/(4*rd)*(sigma[r]-sigma[f))*(2*rd-e1)*(rd^2+(rd-e1)^2)+4/3*sigma[f]*e1*((rd-e1)^2+rd*(2*rd-e1));
simplify(orig-simp);
"Comprobaciones con", sigma_r > sigma_f
"Momento plástico"
simp := 1/4  $\frac{\pi eI~ (\sigma_r - \sigma_f) (-eI~ + 2 rd~) (rd~^2 + (rd~ - eI~)^2)}{rd~} + \frac{4}{3} \sigma_f eI~ ((rd~ - eI~)^2 + rd~ (-eI~ + 2 rd~))$ 
0

> #Evaluación de las funciones para el caso elástico (n[s]=1) y plástico (n[s]->infinity), con sigma[r]=sigma[f]
print("Comprobaciones con", sigma[r], "=", sigma[f]);
print("Momento");
orig:=eval(Mz_circPD2_resumida,[sigma[r]=sigma[f]]):
simp:=(1/2)*n[s]*sigma[f]*( (rd-e1)^4*arcsin(rd/(n[s]*(-rd+e1)))+rd^4*arcsin(1/n[s]))/rd
+(1/6)*sigma[f]*(sqrt(rd^2-rd^2/n[s]^2)*(5*rd^2-2*rd^2/n[s]^2)-sqrt((rd-e1)^2-rd^2/n[s]^2)*(5*(rd-e1)^2-2*rd^2/n[s]^2));
simplify(orig-simp);
print("Momento plástico");
orig:=eval(limit(Mz_circPD2_resumida,n[s]=infinity),[sigma[r]=sigma[f]]):
simp:=4*sigma[f]*e1*((1/3)*e1^2-e1*rd+rd^2);
simplify(orig-simp);
"Comprobaciones con", sigma_r = sigma_f
"Momento"
simp := 1/2  $\frac{n~_s \sigma_f \left( (rd~ - eI~)^4 \arcsin\left(\frac{rd~}{n~_s (-rd~ + eI~)}\right) + rd~^4 \arcsin\left(\frac{1}{n~_s}\right) \right)}{rd~} + \frac{1}{6} \sigma_f \left( \sqrt{\frac{rd~^2 - rd~^2}{n~_s^2}} \left( 5 rd~^2 - \frac{2 rd~^2}{n~_s^2} \right) \right.$ 

$$- \sqrt{\frac{(rd~ - eI~)^2 - rd~^2}{n~_s^2}} \left( 5 (rd~ - eI~)^2 - \frac{2 rd~^2}{n~_s^2} \right) \left. \right)$$

0
"Momento plástico"
simp := 4 sigma_f eI~  $\left( \frac{1}{3} eI~^2 - rd~ eI~ + rd~^2 \right)$ 
0

Comprobación de que en ns=r/(r-e) coinciden ambas
> asdf1:=(eval(Mz_circPD1_resumida,n[s]=rd/(rd-e1)));
asdf2:=(eval(Mz_circPD2_resumida,n[s]=rd/(rd-e1)));
simplify(asdf1-asdf2);
simp:=(1/12)*(sigma[r]*(rd-e1)-rd*sigma[f])*(3*rd^4*(Pi-2*arcsin((rd-e1)/rd))-2*sqrt(rd^2-(rd-e1)^2)*
(rd-e1)*(5*rd^2-2*(rd-e1)^2))/((rd-e1)*e1)-(1/4)*Pi*sigma[f]*e1*(-2*rd+e1)*(rd^2+(rd-e1)^2)/(rd-e1);
simplify(asdf1-simp);
0
simp := 1/12  $\frac{\left( (rd~ - eI~) \sigma_r - \sigma_f rd~ \right) \left( 3 rd~^4 \left( \pi - 2 \arcsin\left(\frac{rd~ - eI~}{rd~}\right) \right) - 2 \sqrt{2 rd~ eI~ - eI~^2} (rd~ - eI~) (5 rd~^2 - 2 (rd~ - eI~)^2) \right)}{(rd~ - eI~) eI~}$ 

$$- \frac{1}{4} \frac{\pi \sigma_f eI~ (eI~ - 2 rd~) (rd~^2 + (rd~ - eI~)^2)}{rd~ - eI~}$$

0

```

## ▼ 2. Momento con D>0

▼ yr>y2>r-e

```

McircPD1(D):= - $\frac{\pi}{4} \frac{\sigma_p n_s}{r(1-D)} (r-e)^4 + \frac{1}{12} \frac{r^3}{n_s^3} \frac{\sigma_p n_s - \sigma_r}{(1-D)(n_s-1)} \left[ 6 n_s^4 \arcsin\left(\frac{1-D}{n_s}\right) - \frac{\sigma_f - \sigma_r}{\sigma_p n_s - \sigma_r} \arcsin(1-D) \right] + 2 \sqrt{\frac{n_s^2}{n_s-1} - (1-D)^2} (1-D) [5 n_s^2 - 2(1-D)^2] \left[ -\frac{r^3}{n_s-1} \sqrt{1-(1-D)^2} \left[ (1-(1-D)^2) \left[ \frac{4}{3} (\sigma_p n_s - \sigma_r) - (\sigma_f - \sigma_r) n_s \right] + \frac{1}{2} (\sigma_f - \sigma_r) n_s \right] \right]$ 

> #Suma de las 5 integrales:
Mzcpd1D1:=int(y*2*sqrt(rd^2-y^2)*(K*y+F), y=y2..y1)      #Integral en función de y_1
+int(y*2*sqrt(rd^2-y^2)*G*y, y=rd-e1..y2)
+int(y*2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-e1)^2-y^2))*G*y, y=-rd+e1..rd-e1)
+int(y*2*sqrt(rd^2-y^2)*G*y, y=y3..-rd+e1)
+int(y*2*sqrt(rd^2-y^2)*(M*y-H), y=y4..y3):
Mzcpd1D2:=eval(Mzcpd1D1,[M=(sigma[f]-sigma[r])/(y4-y3)], #evaluar con los valores de las constantes
K=(sigma[f]-sigma[r])/(y2-y1),
F=sigma[f]-(sigma[f]-sigma[r])/(y2-y1)*y2,
H=sigma[r]+(sigma[f]-sigma[r])/(y4-y3)*y4,
G=sigma[f]/y2):
Mzcpd1D3:=eval(Mzcpd1D2,[y1=y[r],y2=y[p],y3=-y[p],y4=-y[r]]): #sustituyo y_i por sus valores
Mzcpd1D4:=eval(Mzcpd1D3,[y[p]=y[r]/n_s]): #sustituyo y_p=y[r]/n_s
Mzcpd1D5:=eval(Mzcpd1D4,[y[r]=rd*(1-D)]): #sustituyo y_r=r*(1-D)

> Mzcpd1D5_resumido:=-1/4*sigma[f]*n[s]*Pi*(rd-e1)^4/(rd*(1-Dam))
+1/((6*(1-Dam)*(n[s]-1)*n[s]^3)*rd^3*(n[s]*sigma[f]-sigma[r]))*(3*n[s]^4*(-(sigma[f]-sigma[r])/(n[s]*sigma[f]-sigma[r])*arcsin(1-Dam)+arcsin((1-Dam)/n[s]))+sqrt(n[s]^2-(1-Dam)^2)*(1-Dam)*(5*n[s]^2-2*(1-Dam)^2))
-1/6*rd^3/(n[s]-1)*sqrt(1-(1-Dam)^2)*(2*(1-(1-Dam)^2)*(n[s]*sigma[f]-4*sigma[r]+3*n[s]*sigma[r])+3*(sigma[f]-sigma[r])*n[s]);
simplify(Mzcpd1D5_resumido-Mzcpd1D5);
Mzcpd1D5_resumido:=- $\frac{1}{4} \frac{\sigma_j n_s \pi (rd - e1)^4}{rd (1 - Dam)} + \frac{1}{6} \frac{1}{(1 - Dam) (n_s - 1) n_s^3} \left( rd^3 (n_s \sigma_f - \sigma_r) \left( 3 n_s^4 \left( \frac{(\sigma_f - \sigma_r) \arcsin(-1 + Dam)}{n_s \sigma_f - \sigma_r} \right. \right. \right.$ 
 $\left. \left. \left. + \arcsin\left(\frac{1 - Dam}{n_s}\right)\right) + \sqrt{n_s^2 - 1 + 2 Dam - Dam^2} (1 - Dam) \left( 5 n_s^2 - 2 (1 - Dam)^2 \right) \right) \right)$ 
 $- \frac{1}{6} \frac{rd^3 \sqrt{2 Dam - Dam^2} (2 (1 - (1 - Dam)^2) (n_s \sigma_f - 4 \sigma_r + 3 n_s \sigma_r) + 3 (\sigma_f - \sigma_r) n_s)}{n_s - 1}$ 
0

> #comprobación de que la función con daño en D=0 es igual que la función sin daño
print("M con daño en D=0 - M sin daño =", simplify(eval(Mzcpd1D5,[Dam=0])-Mz_circPD1_resumida));
"M con daño en D=0 - M sin daño =", 0

> #Valor del cociente entre la función con daño y la función sin daño
#print("M con daño / M sin daño =", simplify(MzrpDD5/Mz_circPD2_resumida)): # => no sale nada coherente
> #Comparo esta función Mzcpd1D (con el=r, circular maciza) con MzcD5, para ver si en el límite, la sección es circular
MzcD5_resumido:=rd^3/(6*(n[s]-1))*(#sqrt(Dam*(2-Dam))*n[s]*(3*sigma[r]*(2*Dam^2-4*Dam+1)+sigma[f]*(2*Dam^2-4*Dam-3)) +8*Dam*sigma[r]*(2-Dam))
-sqrt(1-(1-Dam)^2/n[s]^2)*((sigma[r]-sigma[f])*n[s])/n[s]^2*(5*n[s]^2-2*(1-Dam)^2))
+3*n[s]/(1-Dam)*((sigma[r]-n[s]*sigma[f])*arcsin((Dam-1)/n[s])-(sigma[r]-sigma[f])*arcsin(Dam-1)):#resto para ver si son iguales
simplify(eval(Mzcpd1D5_resumido, [el=rd])-MzcD5_resumido);
0

```

▼ yr>r-e>y2

```

Mz_rectPDDAÑO= - $\frac{1}{2} \frac{n_s (n_s \sigma_f - \sigma_r)}{r(1-D)(n_s-1)} \left[ (r-e)^4 \arcsin\left(\frac{r(1-D)}{n_s(r-e)}\right) - r^4 \arcsin\left(\frac{1-D}{n_s}\right) \right] + \frac{1}{4} \frac{n_s (\sigma_f - \sigma_r)}{r(1-D)(n_s-1)} [(r-e)^4 \pi - 2 r^4 \arcsin(1-D)]$ 
+  $\frac{1}{2} \frac{r^3 (n_s \sigma_f - \sigma_r)}{n_s (n_s-1)} \sqrt{n_s^2 - (1-D)^2} - \frac{1}{6} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{n_s^2 (n_s-1)} \sqrt{(r-e)^2 - \left[\frac{r(1-D)}{n_s}\right]^2} [5 n_s^2 (r-e)^2 - 2 r^2 (1-D)^2]$ 
+  $\frac{n_s (\sigma_f - \sigma_r) r^2}{n_s-1} \sqrt{r^2 - [r(1-D)]^2} \left[ \frac{1}{2} - (1-D)^2 \right] + \frac{1}{3} \frac{(n_s \sigma_f - \sigma_r)^3}{n_s-1} \left[ \left[ 1 - \left( \frac{1-D}{n_s} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} - 4 [1 - (1-D)^2]^{\frac{3}{2}} \right]$ 

> #Suma de las 5 integrales:
Mzcpd2D1:=int(y*2*sqrt(rd^2-y^2) * (K*y+F), y=rd-e1..y1)      #Integral en función de

```

```

y_i
+int(y^2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-e1)^2-y^2))*(K*y+F),y=y2..rd-e1)
+int(y^2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-e1)^2-y^2))*(G*y), y=y3..y2)
+int(y^2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-e1)^2-y^2))*(M*y-H),y=rd+e1..y3)
+int(y^2* sqrt(rd^2-y^2) *(M*y-H),y=y4..-rd+e1):
Mzcpd2D2:=eval(Mzcpd2D1,[M=(sigma[f]-sigma[r])/(y4-y3)], #evaluar con los valores de las
constants
K=(sigma[f]-sigma[r])/(y2-y1),
F=sigma[f]-(sigma[f]-sigma[r])/(y2-y1)*y2,
H=sigma[r]+(sigma[f]-sigma[r])/(y4-y3)*y4,
G=sigma[f]/y2):
Mzcpd2D3:=eval(Mzcpd2D2,[y1=y[r],y2=y[p],y3=-y[p],y4=-y[r]]): #sustituyo y_i por sus valores
Mzcpd2D4:=eval(Mzcpd2D3,[y[p]=y[r]/n[s]]): #sustituyo y_p=y[r]/n_s
Mzcpd2D5:=eval(Mzcpd2D4,[y[r]=rd*(1-Dam)]): #sustituyo y_r=r*(1-D)

> Mzcpd2D5_resumido:=
(1/2)/(rd*(1-Dam)*(n[s]-1))*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])*n[s]*(rd^4*arcsin((1-Dam)/n[s])-(rd-e1)^4*arcsin
(rd*(1-Dam)/(n[s]*(rd-e1))))
+(1/4)*(sigma[f]-sigma[r])*n[s]/(rd*(1-Dam)*(n[s]-1))*(2*rd^4*arcsin(-1+Dam)+Pi*((rd-e1)^4))
-(1/6)*sqrt((rd-e1)^2-rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])*(5*n[s]^2*(rd-e1)^2-2*rd^2*(1-
Dam)^2)/((n[s]-1)*n[s]^2)
+(1/2)*sqrt(rd^2-rd^2*(1-Dam)^2)*rd^2*n[s]*(sigma[f]-sigma[r])*(1-2*(1-Dam)^2)/(n[s]-1)
+(1/6)*rd^3*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])/(n[s]*(n[s]-1))*(sqrt(n[s]^2-2*(1-Dam)^2)*(3+2*(1-((1-Dam)/n[s])^2))-
8*n[s]*(1-(1-Dam)^2)^(3/2)):

Mzcpd2D5_resumido:=
(1/2)/(rd*(1-Dam)*(n[s]-1))*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])*n[s]*(rd^4*arcsin((1-Dam)/n[s])-(rd-e1)^4*arcsin
(rd*(1-Dam)/(n[s]*(rd-e1))))
+(1/4)*(sigma[f]-sigma[r])*n[s]/(rd*(1-Dam)*(n[s]-1))*(2*rd^4*arcsin(-1+Dam)+Pi*((rd-e1)^4))

-((1/6)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r]))/(n[s]-1)*(sqrt((rd-e1)^2-rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2)*(5*(rd-e1)^2-2*rd^2*-
(1-Dam)^2/n[s]^2)
-sqrt(rd^2*(rd*(1-Dam)/n[s])^2)*(5*rd^2-2*rd^2*((1-Dam)/n[s])^2))

+(1/2)*(sigma[f]-sigma[r])/(n[s]-1)*sqrt(rd^2-rd^2*(1-Dam)^2)*rd^2*n[s]*(1-2*(1-Dam)^2)
-(4/3)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])/(n[s]-1)*(rd^2-(rd*(1-Dam))^2)^(3/2) #los 2 últimos no tienen "e1"

;
#comprobación de que la resumida da igual que la original
simplify(Mzcpd2D5-Mzcpd2D5_resumido);

Mzcpd2D5_resumido := 
$$\frac{1}{2} \frac{\left(n_{\sim s} (\sigma_f - \sigma_r)\right) n_{\sim s} \left(r d^4 \arcsin\left(\frac{1 - Dam}{n_{\sim s}}\right) - (r d - e l)^4 \arcsin\left(\frac{r d (1 - Dam)}{n_{\sim s} (r d - e l)}\right)\right)}{r d (1 - Dam) (n_{\sim s} - 1)}$$


$$+ \frac{1}{4} \frac{\left(\sigma_f - \sigma_r\right) n_{\sim s} \left(2 r d^4 \arcsin(-1 + Dam) + (r d - e l)^4 \pi\right)}{r d (1 - Dam) (n_{\sim s} - 1)} - \frac{1}{6} \frac{1}{n_{\sim s} - 1} \left( \left(n_{\sim s} \sigma_f - \sigma_r\right) \left( \sqrt{\frac{(r d - e l)^2 - r d^2 (1 - Dam)^2}{n_{\sim s}^2}} \left(5 (r d - e l)^2 - \frac{2 r d^2 (1 - Dam)^2}{n_{\sim s}^2}\right) - \sqrt{r d^2 - r d^2 (1 - Dam)^2} \left(5 r d^2 - \frac{2 r d^2 (1 - Dam)^2}{n_{\sim s}^2}\right)\right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2 r d^2 Dam - r d^2 Dam^2} r d^2 n_{\sim s} (\sigma_f - \sigma_r) (1 - 2 (1 - Dam)^2)}{n_{\sim s} - 1} \right.$$


$$- \frac{4}{3} \frac{\left(n_{\sim s} \sigma_f - \sigma_r\right) \left(r d^2 - r d^2 (1 - Dam)^2\right)^{3/2}}{n_{\sim s} - 1}$$

0

> (1/4)*(sigma[f]-sigma[r])*n[s]/(rd*(1-Dam)*(n[s]-1))*((rd-e1)^4*Pi-2*rd^4*arcsin(1-Dam));
(1/4)*(sigma[f]-sigma[r])*n[s]/(rd*(1-Dam)*(n[s]-1))*((rd)^4*Pi-2*rd^4*arcsin(1-Dam));

$$\frac{1}{4} \frac{\left(\sigma_f - \sigma_r\right) n_{\sim s} \left(2 r d^4 \arcsin(-1 + Dam) + (r d - e l)^4 \pi\right)}{r d (1 - Dam) (n_{\sim s} - 1)}$$


$$+ \frac{1}{4} \frac{\left(\sigma_f - \sigma_r\right) n_{\sim s} \left(r d^4 \pi + 2 r d^4 \arcsin(-1 + Dam)\right)}{r d (1 - Dam) (n_{\sim s} - 1)}$$

> evalf(arcsin(-1));
-1.570796327

> #comprobación de que la función con daño en D=0 es igual que la función sin daño
print("M con daño en D=0 - M sin daño =", simplify(eval(Mzcpd2D5,[Dam=0])-Mz_circPD2_resumida));
" M con daño en D=0 - M sin daño =", 0

> #Valor del cociente entre la función con daño y la función sin daño

```

```

    #print("M con daño / M sin daño =", simplify(MzrpD5/Mz_circPD2_resumida)); # => no sale nada coherente
> #Comparo esta función Mzcpd2D (con el=r, circular maciza) con MzcD5, para ver si en el límite, la
seción es circular
#simplify(limit(Mzcpd2D5_resumido, el=rd)-MzcD5_resumido);

```

Comprobación de que las funciones 1 y 2 coinciden:

Mzch1D = Mzch2D en  $y=2-r \Rightarrow n_s = r(1-D)/(r-e)$

```

> orig:=eval(Mzcpd1D5_resumido,n[s]=rd*(1-Dam)/(rd*(1-Dam)-el));

simp:=-((1/4)*sigma[f]*Pi*(rd-el)^4/(rd*(1-Dam)-el)
+(1/2)/((1-Dam)^3*el)*rd^4*(1-Dam)^3/(rd*(1-Dam)-el)*(arcsin((1-Dam)-el/rd)*((sigma[f]-sigma[r])*rd*(1-
Dam)+sigma[r]*el)-arcsin(1-Dam)*(sigma[f]-sigma[r))*(rd*(1-Dam)-el)))
+(1/6)*((sigma[f]-sigma[r])*rd*(1-Dam)+sigma[r]*el)*sqrt(rd^2/(rd*(1-Dam)-el)^2-1)*(5*rd^2*(rd*(1-Dam)-
el)-2*(rd*(1-Dam)-el)^3)/el
-1/6*(rd^3*el)*sqrt(1-(1-Dam)^2)*(2*(1-(1-Dam)^2)*(1*(sigma[f]-sigma[r])*rd*(1-Dam)+4*sigma[r]*el)
+3*(sigma[f]-sigma[r])*rd*(1-Dam));

```

```

print("orig-simp =",simplify(orig-simp));
simplify(eval(Mzcpd1D5-Mzcpd2D5,n[s]=rd*(1-Dam)/(rd-el)));

```

$$\begin{aligned} \text{simp} := & -\frac{1}{4} \frac{\sigma_f \pi (rd - el)^4}{rd - (1 - Dam) - el} \\ & + \frac{1}{2} \frac{rd^4 \left( -\arcsin \left( -1 + Dam + \frac{el}{rd} \right) \left( (\sigma_f - \sigma_r) rd - (1 - Dam) + \sigma_r el \right) + \arcsin(-1 + Dam) (\sigma_f - \sigma_r) (rd - (1 - Dam) - el) \right)}{el - (rd - (1 - Dam) - el)} \\ & + \frac{1}{6} \frac{\left( (\sigma_f - \sigma_r) rd - (1 - Dam) + \sigma_r el \right) \sqrt{\frac{rd^2}{(rd - (1 - Dam) - el)^2} - 1} \left( 5 rd^2 (rd - (1 - Dam) - el) - 2 (rd - (1 - Dam) - el)^3 \right)}{el} \\ & - \frac{1}{6} \frac{rd^3 \sqrt{2 Dam - Dam^2} \left( 2 (1 - (1 - Dam)^2) \left( (\sigma_f - \sigma_r) rd - (1 - Dam) + 4 \sigma_r el \right) + 3 (\sigma_f - \sigma_r) rd - (1 - Dam) \right)}{el} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{"orig-simp"} &= 0 \\ 0 \end{aligned}$$

$r-e > y_r > y_2$

Mz\_rectPD<sub>DAÑO</sub> = xxx

```

> #Suma de las 5 integrales:
Mzcpd3D1:=int(y*2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*(K*y+F),y=y2..y1)
+int(y*2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*(G*y), y=y3..y2)
+int(y*2*(sqrt(rd^2-y^2)-sqrt((rd-el)^2-y^2))*(M*y-H),y=y4..y3):
#Suma de las 3 integrales:
Mzcpd3D2:=eval(Mzcpd3D1,[M=(sigma[f]-sigma[r])/(y4-y3)], #evaluar con los valores de las
constantes
K=(sigma[f]-sigma[r])/(y2-y1),
F=sigma[f]-(sigma[f]-sigma[r])/(y2-y1)*y2,
H=sigma[r]+(sigma[f]-sigma[r])/(y4-y3)*y4,
G=sigma[f]/y2):
Mzcpd3D3:=eval(Mzcpd3D2,[y1=y[r],y2=y[p],y3=-y[r],y4=-y[r]]); #sustituyo y_i por sus valores
Mzcpd3D4:=eval(Mzcpd3D3,[y[p]=y[r]/n[s]]); #sustituyo y_p=y[r]/n_s
Mzcpd3D5:=eval(Mzcpd3D4,[y[r]=rd*(1-Dam)]); #sustituyo y_r=r*(1-D)
> simplify((sigma[f]-sigma[r])/n[s]-1)+1/3*(4*sigma[r]-sigma[f]*(n[s]+3))/(n[s]-1));-(1/3)*(n[s]*sigma
[f]-sigma[r])/(n[s]-1)

```

$$-\frac{1}{3} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{n_s - 1}$$

Warning, inserted missing semicolon at end of statement

$$-\frac{1}{3} \frac{n_s \sigma_f - \sigma_r}{n_s - 1}$$

```

> Mzcpd3D5_resumido:=
+(1/2)*(rd-el)^4*n[s]/(rd*(1-Dam)*(n[s]-1))*((sigma[f]-sigma[r])*arcsin(rd*(1-Dam)/(rd-el))-arcsin(rd*
(1-Dam)/(n[s]*(rd-el)))*(sigma[f]*n[s]-sigma[r]))
+(1/2)*rd^3*n[s]/((1-Dam)*(n[s]-1))*(arcsin((1-Dam)/n[s])*n[s]*sigma[f]-sigma[r])-(sigma[f]-sigma[r])*
arcsin(1-Dam))
+(1/2)*(sigma[f]-sigma[r])*n[s]/(n[s]-1)*(sqrt((rd-el)^2-rd^2*(1-Dam)^2)*((rd-el)^2)-rd^2*sqrt(rd^2-
rd^2*(1-Dam)^2))
-(1/2)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])/(n[s]-1)*((rd-el)^2*sqrt((rd-el)^2-rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2)-rd^2*sqrt(
rd^2-rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2))
-(1/3)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])/(n[s]-1)*(((rd-el)^2-rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2)^(3/2)-(rd^2-rd^2*(1-Dam)-
^n[s]^2)^(3/2))
-(1/3)*(sigma[r]*(4-3*n[s])-sigma[f]*n[s])/(n[s]-1)*(((rd-el)^2-rd^2*(1-Dam)^2)^(3/2)-(rd^2-rd^2*(1-
Dam)^2)^(3/2));

```

```

Mzcpd3D5_resumido:=
+(1/2)*[s]/((1-Dam)*(n[s]-1))*(
(rd-el)^4/rd*((sigma[f]-sigma[r])*arcsin(rd*(1-Dam)/(rd-el))-arcsin(rd*(1-Dam)/(n[s]*(rd-el)))*(sigma[f]*[s]-sigma[r]))
+rd^3*(arcsin((1-Dam)/n[s])*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])- (sigma[f]-sigma[r])*arcsin(1-Dam)))
-(1/6)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])/(n[s]-1)*(
sqrt((rd-el)^2*rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2)*(5*(rd-el)^2-2*rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2)
-sqrt((rd^2-rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2)*(5*rd^2-2*rd^2*(1-Dam)^2/n[s]^2))
+(1/6)/(n[s]-1)*(
sqrt((rd-el)^2*rd^2*(1-Dam)^2)*(4*(rd-el)^2*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])+(n[s]*sigma[f]+3*n[s]*sigma[r]-4*
sigma[r]))*(rd-el)^2-2*rd^2*(1-Dam)^2)
-sqrt((rd^2-rd^2*(1-Dam)^2)*(4*(rd-el)^2*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])+(n[s]*sigma[f]+3*n[s]*sigma[r]-4*sigma[r]-
)*(rd)^2*rd^2*(1-Dam)^2));
Mzcpd3D5_resumido:=func-eval(func,el=0):
#comprobación de que la resumida da igual que la original
simplify(Mzcpd3D5-Mzcpd3D5_resumido);

Mzcpd3D5_resumido:=

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(1-Dam) (n-s-1)} \left[ n-s \left( \frac{(rd-el)^4 \left( (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin\left(\frac{rd-(1-Dam)}{rd-el}\right) - \arcsin\left(\frac{rd-(1-Dam)}{n-s (rd-el)}\right) (\sigma_f - \sigma_r) \right)}{rd} \right. \right.$$


$$+ rd^3 \left( \arcsin\left(\frac{1-Dam}{n-s}\right) (\sigma_f - \sigma_r) + (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin(-1 + Dam) \right) \left. \right) \left. \right] - \frac{1}{6} \frac{1}{n-s-1} \left( (n-s \sigma_f \right.$$


$$- \sigma_r) \left( \sqrt{(rd-el)^2 - \frac{rd^2 (1-Dam)^2}{n-s^2}} \left( 5 (rd-el)^2 - \frac{2 rd^2 (1-Dam)^2}{n-s^2} \right) - \sqrt{rd^2 - \frac{rd^2 (1-Dam)^2}{n-s^2}} \left( 5 rd^2 \right. \right. \right.$$


$$- \frac{2 rd^2 (1-Dam)^2}{n-s^2} \left. \right) \left. \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{n-s-1} \left( \sqrt{-2 rd-el + el^2 + 2 rd^2 Dam - rd^2 Dam^2} \left( 4 (rd-el)^2 (\sigma_f - \sigma_r) + (n-s \sigma_f - 4 \sigma_r \right. \right.$$


$$+ 3 n-s \sigma_r) ((rd-el)^2 - 2 rd^2 (1-Dam)^2) \left. \right) - \sqrt{2 rd^2 Dam - rd^2 Dam^2} \left( 4 rd^2 (\sigma_f - \sigma_r) + (n-s \sigma_f - 4 \sigma_r + 3 n-s \sigma_r) (rd^2 \right. \right.$$


$$- 2 rd^2 (1-Dam)^2) \left. \right) \left. \right)$$


$$func := \frac{1}{2} \frac{(rd-el)^4 n-s \left( (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin\left(\frac{rd-(1-Dam)}{rd-el}\right) - \arcsin\left(\frac{rd-(1-Dam)}{n-s (rd-el)}\right) (\sigma_f - \sigma_r) \right)}{rd (1-Dam) (n-s-1)}$$


$$- \frac{1}{6} \frac{(n-s \sigma_f - \sigma_r) \sqrt{(rd-el)^2 - \frac{rd^2 (1-Dam)^2}{n-s^2}} \left( 5 (rd-el)^2 - \frac{2 rd^2 (1-Dam)^2}{n-s^2} \right)}{n-s-1}$$


$$+ \frac{1}{6} \frac{1}{n-s-1} \left( \sqrt{-2 rd-el + el^2 + 2 rd^2 Dam - rd^2 Dam^2} \left( 4 (rd-el)^2 (\sigma_f - \sigma_r) + (n-s \sigma_f - 4 \sigma_r + 3 n-s \sigma_r) ((rd-el)^2 \right. \right.$$


$$- 2 rd^2 (1-Dam)^2) \left. \right) \left. \right)$$

0
> #comprobación de que la función con daño en D=0 es igual que la función sin daño
#printf("M con daño en D=0 - M sin daño =", simplify(eval(Mzcpd3D5,[Dam=0])-Mz_circPD3_resumida));
#no tiene sentido xq solo está en el alma
> #Valor del cociente entre la función con daño y la función sin daño
#printf("M con daño / M sin daño =", simplify(Mzrpdd5/Mz_circPD2_resumida)); # => no sale nada coherente
Comprobación de que las funciones 1 y 2 coinciden:
Mzch2D = Mzch3D en y2=r-e => ns=r(1-D)/[r-e]
> orig:=eval(Mzcpd3D5_resumido,Dam=el/rd);

simp:=
(1/2)*(rd-el)^3*n[s]*(sigma[f]-sigma[r])*Pi/2-arcsin(1/n[s])*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])/((n[s]-1)
+(1/2)*rd^4*n[s]*(arcsin((rd-el)/(rd*n[s]))*(n[s]*sigma[f]-sigma[r])-(sigma[f]-sigma[r])*arcsin((rd-el)/
/rd))/((rd-el)*(n[s]-1))
-(1/2)*(sigma[f]-sigma[r])*n[s]*rd^2*sqrt(rd^2-(rd-el)^2)/(n[s]-1)
+(1/2)*(n[s]*sigma[f]-sigma[r))*(rd^2*sqrt(rd^2-(rd-el)^2/n[s]^2)-(rd-el)^3*sqrt(1-1/n[s]^2))/(n[s]-1)

+(1/3)/ (n[s]-1)*(sigma[r]-n[s]*sigma[f])*((rd-el)^3*(1-1/n[s]^2)^(3/2)-(rd^2-(rd-el)^2/n[s]^2)^(3/2))

```

```

+(1/3)*(sigma[r]*(4-3*n[s])-n[s]*sigma[f])*((rd^2-(rd-e1)^2)^(3/2))/(n[s]-1);

print("orig-simp =",simplify(orig-simp));
simplify(eval(Mzcpd2D5-Mzcpd3D5,Dam=e1/rd));
simp:=1/2*
$$\frac{(rd - e1)^3 n_s \left(\frac{1}{2} (\sigma_f - \sigma_r) \pi - \arcsin\left(\frac{1}{n_s}\right) (n_s \sigma_f - \sigma_r)\right)}{n_s - 1}$$

+ 1/2*
$$\frac{rd^4 n_s \left(\arcsin\left(\frac{rd - e1}{rd n_s}\right) (n_s \sigma_f - \sigma_r) - (\sigma_f - \sigma_r) \arcsin\left(\frac{rd - e1}{rd}\right)\right)}{(rd - e1) (n_s - 1)} - \frac{1}{2} \frac{(\sigma_f - \sigma_r) n_s r d^2 \sqrt{2 rd e1 - e1^2}}{n_s - 1}$$

+ 1/2*
$$\frac{(n_s \sigma_f - \sigma_r) \left(r d^2 \sqrt{r d^2 - \frac{(rd - e1)^2}{n_s^2}} - (rd - e1)^3 \sqrt{1 - \frac{1}{n_s^2}}\right)}{n_s - 1}$$

+ 1/3*
$$\frac{(\sigma_r - n_s \sigma_f) \left((rd - e1)^3 \left(1 - \frac{1}{n_s^2}\right)^{3/2} - \left(r d^2 - \frac{(rd - e1)^2}{n_s^2}\right)^{3/2}\right)}{n_s - 1} + \frac{1}{3} \frac{(\sigma_f (4 - 3 n_s) - n_s \sigma_f) (r d^2 - (rd - e1)^2)^{3/2}}{n_s - 1}$$

"orig-simp =",0
0

```

## C.2. Metafor (Python)

### C.2.1. Viga experimental

Se reproduce a continuación el código Python, procesado por el programa Metafor [44], necesario para el cálculo de la viga ensayada experimentalmente. Con este mismo código se pueden realizar diferentes simulaciones:

- Con y sin agujero
- Con y sin simetría
- Carga por desplazamientos o por fuerza
- Carga lineal o puntual
- Con y sin ruptura de material
- Con material elástico o elastoviscoplástico con y sin daño y con endurecimiento lineal o de Ramberg.

```

# -*- coding: latin-1; -*-
# $ Id: Experimento. PMLR. (c)2012 $ 
#####
#   Experiment
#####
from wrap import *           # Import all Metafor commands
import math                  # Import math commands: "math.cos()", p.e.
metafor = Metafor()          # Create object Metafor
domain = metafor.getDomain() # Shorter name
def getMetafor(p={}): return metafor # function getMetafor: the only mandatory function
# parameter p (dictionary for parametric studies)

#####
#==== Parameters =====#
print ##### 1 Parameters #####
#####

### OPTIONS
material = 3      # Material: 1 = elastic    2 = evp linear hard. 3 = + damage 4 = evp Ramberg hard. with dam.
#-----
ruptura = 0       # Rupture: 1 = yes      0 = no
#-----
carga = 1         # Load:     1 = punctual  2 = line
#-----
tipo = 1          # Load type: 1 = displazs. 2 = force
#-----
agujero = 1        # Hole:      0 = no       1 = yes (circular)
#-----
simetria = 0      # Simmetry: 0 = no      1 = yes
#-----


vergeometria = 0   # 1=visualize geometry 0=no
vermallado = 0     # 1=visualize meshing 0=no

## Geometry
# Section
L=0.895           #Length
h=0.01            #Height
b=0.01            #Width
D=0.006           #Hole diameter
d1=0.01           #Distance to hole
d2=D/2             #Distance near the hole

## Meshing
nc=4               # hole or hole distance
nx1=10             # dir. X long
nx2=2               # dir. X extreme
ny=2               # dir. Y
nz=2               # dir. Z
dm = 1.             # mesh densification

## Material
Density = 7860.    # Density
E1 = 2.1e11         # Young modulus (elastic material)
Nu = 0.28          # Poisson Coeff.

LimElas1 = 275.e6  # Elastic limit, material 1
LimElas2 = 355.e9  # Elastic limit, material 1

CoefEnd = 0.05*E1  # Hardening coeff.

Do = 0.0            # Initial damage
exps = 0.43          # Damage evolution law exponent
densS = 55e2          # Damage evolution law coeff.
eth = 0.00           # Strain threshold

coefA = 1.766        # RambergOsgoodIsotropicHardening Coeff.
expn = 1/0.5465      # RambergOsgoodIsotropicHardening Exponent

critValue = 0.98     # Critical rupture value

## Time
Tini = 0.0           # Initial time
Tend = 1.0            # Final time
dtini = 1.0           # Initial time step
dtmax = 0.02          # Max. time step
NumRes = 5             # Number of saved results (equally spaced on time)

## Loading
if tipo==1:          # Displacement loading
    Dend = 5.0          # Final displacement
if tipo==2:          # Force loading
    Qend = 5.e5          # Total force

## Auxiliar functions for loops.
def f1(a): # d1
    if a==0:
        val=0
    elif a==1:
        val=1

```

```

elif a==2:
    val=1
elif a==3:
    val=1
else:
    val=0
return val
def f2(a): # d2
    if a==0:
        val=0
    elif a==1:
        val=-1
    elif a==2:
        val=0
    elif a==3:
        val=1
    else:
        val=0
    return val
def f1(a): # L
    if a<=3:
        val=0
    else:
        val=1
    return val

#####
print '##### 2 Geometry #####'
#####

geometry = domain.getGeometry()      #change name
geometry.setDim3D()                  #choose type of geometry
#geometry.setDimPlaneStrain()
#geometry.setDimAxisymmetric()

pointset = geometry.getPointSet()
# Define points: first number = LABEL.
pp=1
for i in range(0,3):    # dir. Y (height)
    for j in range(0,3): # dir. X (front and rear faces)
        for k in range(0,5): # dir. X (evolution)
            pointset.define(pp, f1(k)*d1+f2(k)*d2+f1(k)*L, i*h/2, j*b/2)
            pp=pp+1
if agujero:                      # circle
    for i in range(0,3):
        for j in range(1,4):
            pointset.define(pp,d1-D/2*math.cos(j*math.pi/4),i*h/2,b/2-D/2*math.sin(j*math.pi/4))
            pp=pp+1
        for j in range(5,8):
            pointset.define(pp,d1-D/2*math.cos(j*math.pi/4),i*h/2,b/2-D/2*math.sin(j*math.pi/4))
            pp=pp+1

    # Define curves between points
curveset = geometry.getCurveSet()

pp=1
for i in range(0,9):      # parallels to axis X
    for j in range(0,4):
        curveset.add(Line(pp, pointset(5*i+j+1), pointset(5*i+j+2)))
        pp=pp+1
for i in range(0,3):      # parallels to axis Z
    for j in range(0,10):
        curveset.add(Line(pp, pointset(15*i+j+1), pointset(15*i+j+6)))
        pp=pp+1
for i in range(0,2):      # parallels to axis Y
    for j in range(0,15):
        curveset.add(Line(pp, pointset(15*i+j+1), pointset(15*i+j+16)))
        pp=pp+1

if agujero:                # circle
    curveset.add( Arc(pp, pointset( 7 ), pointset(46), pointset(47) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset(47), pointset(48), pointset( 9 ) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset( 9 ), pointset(49), pointset(50) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset(50), pointset(51), pointset( 7 ) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset(22), pointset(52), pointset(53) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset(53), pointset(54), pointset(24) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset(24), pointset(55), pointset(56) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset(56), pointset(57), pointset(22) ))
    pp=pp+1
    curveset.add( Arc(pp, pointset(37), pointset(58), pointset(59) ))
    pp=pp+1

```

```

curveset.add( Arc(pp, pointset(59), pointset(60), pointset(39) ))
pp=pp+1
curveset.add( Arc(pp, pointset(39), pointset(61), pointset(62) ))
pp=pp+1
curveset.add( Arc(pp, pointset(62), pointset(63), pointset(37) ))
pp=pp+1
for i in range(0,2):    # dir. Z from the hole
    for j in range(0,3):
        curveset.add(Line(pp, pointset(10*i+15*j+3), pointset(3*i+6*j+47)))
    pp=pp+1
for i in range(0,2):    # dir. Y between holes
    for j in range(0,2):
        curveset.add(Line(pp, pointset(3*i+6*j+47), pointset(3*i+6*j+53)))
    pp=pp+1

# Define wires: sets of curves
wireset = geometry.getWireSet()
pp=1
for i in range(0,3):    # Faces XZ
    for j in range(0,2):
        for k in range(0,4):
            wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (12*i+4*j+k+1,10*i+5*j+k+38,12*i+4*j+k+5,10*i+5*j+k+37)]))
    pp=pp+1
for i in range(0,3):    # Faces XY
    for j in range(0,2):
        for k in range(0,4):
            wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (4*i+12*j+k+1,5*i+15*j+k+67,4*i+12*j+k+13,5*i+15*j+k+68)]))
    pp=pp+1
for i in range(0,2):    # Faces ZY
    for j in range(0,2):
        for k in range(0,5):
            wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (5*i+10*j+k+37,5*i+15*j+k+67,5*i+10*j+k+47,5*i+15*j+k+72)]))
    pp=pp+1

if agujero:           #circle
    for i in range(0,3):    # sup. XZ
        wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in ( 2+12*i,109+ i, 97+ 4*i, 38+10*i)]))
    pp=pp+1
    wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in ( 3+12*i, 40+10*i, 98+ 4*i,109+ i)]))
    pp=pp+1
    wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (100+ 4*i,112+ i, 10+12*i, 43+10*i)]))
    pp=pp+1
    wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in ( 99+ 4*i, 45+10*i, 11+12*i,112+ i)]))
    pp=pp+1
    for i in range(0,2):    # sup. YZ
        wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (109+i, 69+15*i,110+i,115+ i)]))
    pp=pp+1
    wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (112+i,117+ i,113+i, 79+15*i)]))
    pp=pp+1
    for i in range(0,2):    # sup. circle
        wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in ( 97+4*i,115+ i,101+4*i, 73+15*i)]))
    pp=pp+1
    wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in ( 98+4*i, 75+15*i,102+4*i,115+ i)]))
    pp=pp+1
    wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in ( 99+4*i,117+ i,103+4*i, 75+15*i)]))
    pp=pp+1
    wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (100+4*i, 73+15*i,104+4*i,117+ i)]))
    pp=pp+1

    # Define sides. Its orientation depends on its wires
sideset = geometry.getSideset()
for i in range(1,pp):
    sideset.add(Side(i,[wireset(i)]))

    # Define skins
skinset = geometry.getSkinSet()
pp=1
for i in range(0,2):
    for j in range(0,2):
        for k in range(0,4):
            skinset.add(Skin(pp,[sideset(w) for w in (8*i+4*j+k+1,8*i+4*j+k+9,4*i+8*j+k+33,5*i+10*j+k+50,4*i+8*j+k+25
            ,5*i+10*j+k+49)]))
    pp=pp+1
if agujero:           # circle
    for i in range(0,2):
        skinset.add(Skin(pp,[sideset(w) for w in (69+4*i,73+4*i,85+4*i,81+2*i,26+4*i,50+5*i)]))
    pp=pp+1
    skinset.add(Skin(pp,[sideset(w) for w in (70+4*i,74+4*i,86+4*i,52+5*i,27+4*i,81+2*i)]))
    pp=pp+1
    skinset.add(Skin(pp,[sideset(w) for w in (71+4*i,75+4*i,42+4*i,82+2*i,88+4*i,60+5*i)]))
    pp=pp+1
    skinset.add(Skin(pp,[sideset(w) for w in (72+4*i,76+4*i,43+4*i,62+5*i,87+4*i,82+2*i)]))
    pp=pp+1

    # Define volumes
volumeneset = geometry.getVolumeSet()
for i in range(1,pp):
    volumeneset.add(Volume(i,[skinset(i)]))

```

```

if vergeometria:          # New window to visualize the geometry: 0=yes, 1=no
    win1 = VizWin()
    win1.add(pointset)   # Add points
    win1.add(curveset)   # Add curves
    win1.add(wireset)    # Add wires
    win1.add(sideset)    # Add faces
    win1.add(volumeset)  # Add volumes
    win1.open()           # Open window
    raw_input()           # Keep open until any key is pressed

#=====
#print ' ##### 3 Mesh #####'
#=====

# Meshing of curves
for i in range(0,3):      # Long dir. X sides, circle and left
    for j in range(0,3):
        SimpleMesher1D(curveset(12*i+4*j+4)).execute(nx1)
        SimpleMesher1D(curveset(12*i+4*j+3)).execute(nc)
        SimpleMesher1D(curveset(12*i+4*j+2)).execute(nc)
        SimpleMesher1D(curveset(12*i+4*j+1)).execute(nx2)
for i in range(0,3):      # Dir. Z sides
    for j in range(0,2):
        for k in range(0,5):
            SimpleMesher1D(curveset(10*i+5*j+k+37)).execute(ny)
for i in range(0,2):      # Dir. Y sides
    for j in range(0,3):
        for k in range(0,5):
            SimpleMesher1D(curveset(15*i+5*j+k+67)).execute(nz)

if agujero:
    for i in range(97,109): # Circle arcs
        SimpleMesher1D(curveset(i)).execute(nc)
    for i in range(109,115): # Dir. Z from the circle
        SimpleMesher1D(curveset(i)).execute(nz)
    for i in range(115,119): # Dir. Y between circles
        SimpleMesher1D(curveset(i)).execute(ny)

# Meshing of sides
for i in range( 1, 69):   # Sides are meshed: autodetection only
    TransfiniteMesher2D(sideset(i)).execute(True)   # works with 4 independent lines
if agujero:
    for i in range(69,93):
        TransfiniteMesher2D(sideset(i)).execute(True)

# Meshing of volumes
if simetria==0:
    if agujeros==0:
        for i in range(0,17):
            TransfiniteMesher3D(volumeset(i)).execute(True)
    if agujeros==1:
        for i in range(0,4):
            for j in range(0,2):
                TransfiniteMesher3D(volumeset(4*i+3*j+1)).execute(True)
        for i in range(17,25):
            TransfiniteMesher3D(volumeset(i)).execute(True)
if simetria==1:
    if agujeros==0:
        for i in range(0,2):
            for j in range(0,4):
                TransfiniteMesher3D(volumeset(8*i+j+1)).execute(True)
    if agujeros==1:
        for i in range(0,2):
            for j in range(0,2):
                TransfiniteMesher3D(volumeset(8*i+3*j+1)).execute(True)
        for i in range(0,2):
            for j in range(0,2):
                TransfiniteMesher3D(volumeset(4*i+j+17)).execute(True)

if vermallado:           # New window for visualize the mesh
    win2 = VizWin()
    win2.add(geometry.getMesh().getPointSet())
    win2.add(geometry.getMesh().getCurveSet())
    win2.add(geometry.getMesh().getSideSet())
    win2.open()
    raw_input()

#=====
#print ' ##### 4 Material #####'
#=====

materialset = domain.getMaterialSet()           # Short name
laws = domain.getMaterialLawSet()
# Material definition
if material==1:       # elastic
    materialset.define(1, ElastHypoMaterial)      # Create material 1
    materialset(1).put(MASS_DENSITY, Density)     # Density
    materialset(1).put(BLASTIC_MODULUS, E1)        # Young modulus
    materialset(1).put(POISSON_RATIO, Nu)          # Poisson coeff.

```

```

materialset.define(2, ElastHypoMaterial)           # Create material 2: simple elastic
materialset(2).put(MASS_DENSITY, Density)          # Density
materialset(2).put(ELASTIC_MODULUS, E1)            # Young modulus
materialset(2).put(POISSON_RATIO, Nu)              # Poisson coeff.
if material==2: # elasto-visto-plastic with linear hardening, no damage
    materialset.define(1, EvpIsoHypoMaterial)        # Create material 1
    materialset(1).put(MASS_DENSITY, Density)          # Density
    materialset(1).put(ELASTIC_MODULUS, E1)            # Young modulus
    materialset(1).put(POISSON_RATIO, Nu)              # Poisson coeff.
    materialset(1).put(YIELD_NUM, 1)                  # Yield law 1

    laws.define (1, LinearIsotropicHardening)         # Law of sigma_yield 1
    laws(1).put(IH_SIGEL, LimEelas)                  # Elastic limit
    laws(1).put(IH_H, CoefEnd)                       # Hardening coeff.

    materialset.define (2, EvpIsoHypoMaterial)        # Create material 2
    materialset(2).put(MASS_DENSITY, Density)          # Density
    materialset(2).put(ELASTIC_MODULUS, E1)            # Young modulus
    materialset(2).put(POISSON_RATIO, Nu)              # Poisson coeff.
    materialset(2).put(YIELD_NUM, 2)                  # Yield law 2

    laws.define (2, LinearIsotropicHardening)         # Law of sigma_yield 2
    laws(2).put(IH_SIGEL, LimElas2)                  # Elastic limit
    laws(2).put(IH_H, CoefEnd)                       # Hardening coeff.
if material==3: # elasto-visto-plastic with linear hardening and damage
    materialset.define(1, ContinuousDamageEvpIsoHypoMaterial) #Create el material 1
    materialset(1).put(MASS_DENSITY, Density)          # Density
    materialset(1).put(ELASTIC_MODULUS, E1)            # Young modulus
    materialset(1).put(POISSON_RATIO, Nu)              # Poisson coeff.
    materialset(1).put(YIELD_NUM, 1)                  # Yield law 1
    materialset(1).put(DAMAGE_NUM, 3)                # Damage evolution law 3
    materialset(1).put(DAMAGE_INIT, Do)              # Initial damage
    materialset(1).put(TYPE_INTEG, 0)                 # Iterative integration method

    materialset.define(2, ContinuousDamageEvpIsoHypoMaterial) #Crear el material 2
    materialset(2).put(MASS_DENSITY, Density)          # Density
    materialset(2).put(ELASTIC_MODULUS, E1)            # Young modulus
    materialset(2).put(POISSON_RATIO, Nu)              # Poisson coeff.
    materialset(2).put(YIELD_NUM, 2)                  # Yield law 2
    materialset(2).put(DAMAGE_NUM, 3)                # Damage evolution law 3
    materialset(2).put(DAMAGE_INIT, Do)              # Initial damage
    materialset(2).put(TYPE_INTEG, 0)                 # Iterative integration method

    laws.define (1, LinearIsotropicHardening)         # Law of sigma_yield 1
    laws(1).put(IH_SIGEL, LimEelas)                  # Elastic limit
    laws(1).put(IH_H, CoefEnd)                       # Hardening coeff.

    laws.define (2, LinearIsotropicHardening)         # Law of sigma_yield 1
    laws(2).put(IH_SIGEL, LimElas2)                  # Elastic limit
    laws(2).put(IH_H, CoefEnd)                       # Hardening coeff.

    laws.define (3,LemaireChabocheContinuousDamage) # Damage evolution law 3
    laws(3).put(LEMAITRE_YOUNG, E1)                  # Young modulus
    laws(3).put(LEMAITRE_NU, Nu)                     # Poisson coeff.
    laws(3).put(LEMAITRE_BIG_S, densS)              # Damage evolution law coeff.
    laws(3).put(LEMAITRE_SMALL_S, exps)              # Damage evolution law exponent
    laws(3).put(LEMAITRE_EPL_THRESHOLD, eth)         # Strain threshold
if material==4: # elasto-visto-plastic with Ramberg hardening and damage
    materialset.define(1, ContinuousDamageEvpIsoHypoMaterial) #Create el material 1
    materialset(1).put(MASS_DENSITY, Density)          # Density
    materialset(1).put(ELASTIC_MODULUS, E1)            # Young modulus
    materialset(1).put(POISSON_RATIO, Nu)              # Poisson coeff.
    materialset(1).put(YIELD_NUM, 1)                  # Law of sigma_yield 1
    materialset(1).put(DAMAGE_NUM, 3)                # Damage evolution law 3
    materialset(1).put(DAMAGE_INIT, Do)              # Initial damage
    materialset(1).put(TYPE_INTEG, 0)                 # Iterative integration method

    materialset.define(2, ContinuousDamageEvpIsoHypoMaterial) #Crear el material 2
    materialset(2).put(MASS_DENSITY, Density)          # Density
    materialset(2).put(ELASTIC_MODULUS, E1)            # Young modulus
    materialset(2).put(POISSON_RATIO, Nu)              # Poisson coeff.
    materialset(2).put(YIELD_NUM, 2)                  # Law of sigma_yield 2
    materialset(2).put(DAMAGE_NUM, 3)                # Damage evolution law 3
    materialset(2).put(DAMAGE_INIT, Do)              # Initial damage
    materialset(2).put(TYPE_INTEG, 0)                 # Iterative integration method

    laws.define (1,RambergOsgoodIsotropicHardening) # Elastic limit
    laws(1).put(IH_SIGEL, LimEelas1)                # RambergOsgoodIsotropicHardening Coeff.
    laws(1).put(IH_A, coefA)                         # RambergOsgoodIsotropicHardening exponent

    laws.define (2,RambergOsgoodIsotropicHardening) # Elastic limit
    laws(2).put(IH_SIGEL, LimElas2)                # RambergOsgoodIsotropicHardening Coeff.
    laws(2).put(IH_A, coefA)                         # RambergOsgoodIsotropicHardening exponent

    laws.define (3,LemaireChabocheContinuousDamage) # Damage evolution law 3
    laws(3).put(LEMAITRE_YOUNG, E1)                  # Young modulus
    laws(3).put(LEMAITRE_NU, Nu)                     # Poisson coeff.

```

```

laws(3).put(LEMAITRE_BIG_S,           denS)      # Damage evolution law coeff.
laws(3).put(LEMAITRE_SMALL_S,         exps)      # Damage evolution law exponent
laws(3).put(LEMAITRE_EPL_THRESHOLD, eth)        # Strain threshold

#=====#
print ' ##### 5 Body FE definition #####'
#=====#

# Properties of the elements to be associated to the material = ElementProperties
prpl = ElementProperties(Volume3DElement)          # Create a property for the volume finite elements
prpl.put(MATERIAL, 1)                             # Number of the associated material

appl = FieldApplicator(1)                         # Define the interaction used for the volume elements

# Rupture criterion
if ruptura==1:
    RC = IFRuptureCriterion()
    RC.setInternalField(IF_ISO_DAMAGE)            # Criterion rupture: damage
    RC.put(RUPT_CRIT_VALUE, critValue)            # Limite value for damage
    RC.put(RUPT_TYPE_CRIT, ONEBROKEN)             # Broken if the criterion is verified in:
                                                # ONEBROKEN (Gauss Point), ALLBROKEN (all) or MEANBROKEN (average in the element)
    appl.addRuptureCriterion(RC)

# Apply properties
if simetria==0:
    if agujero==0:
        for i in range(0,17):
            appl.push(volumeset(i))
    if agujero==1:
        for i in range(0,4):
            for j in range(0,2):
                appl.push(volumeset(4*i+3*j+1))
        for i in range(17,25):
            appl.push(volumeset(i))
if simetria==1:
    if agujero==0:
        for i in range(0,2):
            for j in range(0,4):
                appl.push(volumeset(8*i+j+1))
    if agujero==1:
        for i in range(0,2):
            for j in range(0,2):
                appl.push(volumeset(8*i+3*j+1))
        for i in range(0,2):
            for j in range(0,2):
                appl.push(volumeset(4*i+j+17))

appl.addProperty(prpl)                            # Associate the ElementProperties

interactionset = domain.getInteractionSet()      # Add to the list of interactions
interactionset.add(appl)

print domain.getInteractionSet()

#=====#
print ' ##### 6 Constrained dofs #####'
#=====#

loadingset = domain.getLoadingSet()
for i in [49,54]:      # Fixed end (left)
    loadingset.define(sideset(i),FieldID(TX,RE))  # Applied on geometry. Translation X, RElative value. 0 by default
    loadingset.define(sideset(i),FieldID(TY,RE))
    loadingset.define(sideset(i),FieldID(TZ,RE))
if simetria==0:
    for i in [59,64]:  # Fixed end (left)
        loadingset.define(sideset(i),FieldID(TX,RE))
        loadingset.define(sideset(i),FieldID(TY,RE))
        loadingset.define(sideset(i),FieldID(TZ,RE))

#=====#
print ' ##### 7 Loading #####'
#=====#

fct = PieceWiseLinearFunction()      # Piecewise function: evolution of the load
fct.setData(0.0, 0.0)
#fct.setData(0.1, 0.6)
fct.setData(1.0, 1.0)

if tipo==1:      # Displacement loading
    if carga==1:  # Punctual load
        loadingset.define(pointset(25),FieldID(TY,RE), Dend, fct)
    if carga==2:  # Line load
        for i in [76,91]:
            loadingset.define(curveset(i),FieldID(TY,RE), Dend, fct)

if tipo==2:      # Force load
    if carga==1:  # Punctual load
        loadingset.define(pointset(76),FieldID(TY,GF1), Qend, fct)

```

```

if carga==2:      # Line load: points of the line
    for i in [4,18]:   # Extreme points
        loadingset.define(pointset(i),FieldID(TY,GF1), Qend/(4*nz2), fct)
    for i in [11]:     # Central point
        loadingset.define(pointset(i),FieldID(TY,GF1), Qend/(2*nz2), fct)

#####
#====#
print ##### 8 Time integration schemes #####
#====#

## Time management
tsm = metafor.getTimeStepManager()

tsm.setInitialTime(Tini, dTini)           # Initial time and initial time step
tsm.setNextTime(Tend, NumRes, dTmax)       # Final time, number of results and maximum time step

#tsm.setTimeStepComputationMethod(TSM_INTEGRATIONERRORMETHOD)
#tsm.setIntegrationErrorTolerance(1.e-4)    # Precision in integration error
#tsm.setExplicitTimeStepSecurity(2.0)         # Security parameter for critical time step in explicit evaluation
#tsm.setNbofStepsForCriticalTimeStepUpdate(1) # Number of time steps between critical step updates

## Iteration management
mim = metafor.getMechanicalIterationManager()
mim.setResidualComputationMethod(RCM_METHOD1) # Normalization of the residual method
mim.setResidualTolerance(1.0e-6)             # Precision for the residual
mim.setMaxNbOfIterations(10)                 # Maximum number of iterations
#mim.setNbofIterationsForStiffUpdate(1)       # l=update stiffness matrix in each iteration, n=update when <n
#mim.setMaxNbOfLineSearchIterations(0)         # Maximum number of iteration in line-search
#mim.setLineSearchTolerance(1.0)               # Precision for the residual of line-search
#mim.setLineSearchTolerance2(1.e-8)            # Stop criterion when line-search parameter does not grow
#mim.setPredictorComputationMethod(EXTRAPOLATION_DEFAULT) # Extrapolation method

## Additional calculation parameters
metafor.setIntegerData(MDE_NDYN, 0)          # Quasistatic analysis

#####
#====#
print ##### 9 Archive values on hard-disk #####
#====#

valuesmanager = metafor.getValuesManager() # Save results. Can be visualized in a VizWin
valuesmanager.add( 1, DbValueExtractor(pointset(25), FieldID(TY,GF1)), SumOperator(), 'totalForceY')
valuesmanager.add( 2, DbValueExtractor(pointset(25), FieldID(TY, RE)), SumOperator(), 'displacY')
valuesmanager.add( 3, MiscValueExtractor(metafor,EXT_T), 'time')
valuesmanager.add( 4, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(7), IF_ISO_DAMAGE), 'Damage')
valuesmanager.add( 5, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(7), IF_EPL ), 'PlastDef')
valuesmanager.add( 6, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(7), IF_DEPL ), 'PlastDefRate')

testSuite = metafor.getTestSuiteChecker() # Check the extrated values
for i in range(1,7):
    testSuite.checkExtractor(i)

#####
#====#
print ##### 10 Real time visualization #####
#====#

curva = valuesmanager.getDataVector

try:
    dataCurve = VectorDataCurve(1, curva(2), curva(1)) # Graphic of the archived values
    dataCurveSet1 = DataCurveSet()
    dataCurveSet1.add(dataCurve)
    wincl = VizWin()
    wincl.addDataCurveSet1()
    metafor.addObserver(wincl)

    dataCurve = VectorDataCurve(2, curva(3), curva(4)) # Graphic of the archived values
    dataCurveSet2 = DataCurveSet()
    dataCurveSet2.add(dataCurve)
    winc2 = VizWin()
    winc2.addDataCurveSet2()
    metafor.addObserver(winc2)
except NameError:
    pass

testSuite = metafor.getTestSuiteChecker()
testSuite.checkExtractor(1)                # Final value of curve 1 on the screen
testSuite.checkExtractor(2)                # Final value of curve 2 on the screen
testSuite.checkExtractor(4)                # Final value of curve 4 on the screen

print getMetafor().getDomain().getMesh().getVolumeSet().size() # Print the total number of elements created

```

### C.2.2. Pórtico

Se reproduce a continuación el código Python, procesado por el programa Metafor [44], necesario para el cálculo del pórtico del ejemplo de aplicación 1 (Apartado 5.3). Con este mismo código se pueden realizar diferentes simulaciones:

- Carga por desplazamientos o por fuerza
- Con y sin ruptura de material
- Con y sin endurecimiento
- Con material elástico o elastoviscoplástico con y sin daño

```

# -*- coding: latin-1; -*-
# $ Id: Portico 3D. PMLR. (c)2012 $
#####
# Portico 3D
#####
from wrap import *           # Import all Metafor commands
import math                  # Import math commands: "math.cos()", p.e.
metafor = Metafor()          # Create object Metafor
domain = metafor.getDomain() # function getMetafor: the only mandatory function
def getMetafor(p={}): return metafor # parameter p (dictionary for parametric studies)

#####
print ##### 1 Parameters #####
#####

###OPCIONES
material = 3      # Material:    1 = elastic      2 = evp linear hard.  3 = + damage
#-----
carga   = 1       # Load type:   1 = load        2 = displacements
#-----
endr    = 1       # Hardening:   0 = without hard. 1 = with hard.
#-----
ruptura = 0       # Rupture:     0 = no         1 = yes
#-----


vergeometria = 0   # l=visualize geometry 0=no
vermallado   = 0   # l=visualize meshing 0=no

## Geometría
h1 = 0.1          # Height of the section (left column)
h2 = 0.1          # Height of the section (horizontal beam)
h3 = h1           # Height of the section (right column)
b = 0.1           # Width of the section
vano = 2           # Length between mid points
va = vano/2-h1    # Semi length between columns
alto = 1           # Height (middle line)
al = alto-h2/2    # Height (horizontal beam)

## Mallado
cortos = 4
largos = 80
nx1 = cortos      # number of elements (short dir. X lines)
nx2 = largos      # number of elements (long dir. X lines)
ny1 = cortos      # number of elements (short dir. Y lines)
ny2 = largos      # number of elements (long dir. Y lines)
nz1 = cortos      # number of elements (short dir. Z lines)
nz2 = 2            # number of elements (long dir. Z lines)

## Material
Density = 7860.    # Density
E1 = 2.1e11         # Young modulus (elastic material)
Nu = 0.30           # Poisson Coeff.

LimElas1 = 275e6    # Elastic limit, material 1

if endr==0:          # Without hardening
    Endur=0.0
elif endr==1:         # With hardening
    Endur=0.05

CoefEnd = Endur*E1  # Hardening coeff.

Do = 0.              # Initial damage
expS = 0.43          # Damage evolution law exponent
densS = 5.5e3         # Damage evolution law coeff.
eth = 0.0             # Strain threshold

critValue = 0.98      # Critical rupture value

## Loading
if carga==1:          # Force loading
    carga= 1e6          # Total load (central point)
if carga==2:          # Displacement loading
    Dend = 0.04          # Final displacement

## Time
Tend = 1              # Initial time
Tstep = 0.01           # Final time
NumRes = 5              # Number of saved results (equally spaced on time)

opc="mat"+str(material)+"M"+str(cortos)+str(largos)
print opc

## Auxiliar functions for loops.
f1 = PieceWiseLinearFunction()
def f1(a):
    if a==1:
        val=0

```

```
if a==2:
    val=1
if a>=3:
    val=2
return val

def f2(a):      #function for h2/2
    if a<2:
        val=0
    if a==3:
        val=1
    if a>=4:
        val=2
    return val

def f3(a):      #function for h3/2
    if a<5:
        val=0
    if a==6:
        val=1
    if a==7:
        val=2
    return val

def f4(a):      #function for va
    if a<3:
        val=0
    if a==4:
        val=1
    if a>=5:
        val=2
    return val

def f5(a):      #function for al
    if a==1:
        val=0
    if a>=2:
        val=1
    return val

def f6(a):      #function for b
    if a==1:
        val=0
    if a==2:
        val=1
    if a>=3:
        val=2
    return val

#####
# 2 Geometry #####
#####

geometry = domain.getGeometry()      #change name
geometry.setDim3D()
#geometry.setDimPlaneStrain()        #choose type of geometry
#geometry.setDimAxisymmetric()

pointset = geometry.getPointSet()
    # Define points: first number = LABEL.
pp=1
for i in range(1,8):
    for j in range(1,5):
        for k in range(1,4):
            pointset.define(pp, f1(i)*h1/2+f4(i)*va+f3(i)*h3/2, f5(j)*al+f2(j)*h2/2, f6(k)*b/2)
            pp=pp+1

    # Define curves between points
curveset = geometry.getCurveSet()

pp=1      # parallels to axis X
for i in range(1,73):
    curveset.add(Line(pp, pointset(i), pointset(i+12)))
    pp=pp+1

    # parallels to axis Z
for i in range(0,28):
    for j in range(1,3):
        curveset.add(Line(pp, pointset(3*i+j), pointset(3*i+j+1)))
        pp=pp+1

    # parallels to axis Y
for i in range(0,3):
    for j in range(0,3):
        for k in range(0,7):
            curveset.add(Line(pp, pointset(i+3*j+12*k+1), pointset(i+3*j+12*k+4)))
            pp=pp+1
```

```

    # Define wires: sets of curves
wireset = geometry.getWireSet()
pp=1           # Faces XZ
for i in range(0,6):
    for j in range(0,4):
        for k in range(0,2):
            wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (12*i+3*j+k+1, 8*i+2*j+k+73, 12*i+3*j+k+2, 8*i+2*j+k+81)]) )
            pp=pp+1
    # Faces XY
for i in range(0,6):
    for j in range(0,3):
        for k in range(0,3):
            wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (12*i+3*j+k+1, i+7*j+21*k+130, 12*i+3*j+k+4, i+7*j+21*k+129)]) )
            pp=pp+1
    # Faces YZ
for i in range(0,7):
    for j in range(0,3):
        for k in range(0,2):
            wireset.add(Wire(pp, [curveset(w) for w in (8*i+2*j+k+73, i+7*j+21*k+129, 8*i+2*j+k+75, i+7*j+21*k+150)]) )
            pp=pp+1

qq=pp      #total number of wires, useful to mesh

    # Define sides. Its orientation depends on its wires
sideset = geometry.getSideSet()
for i in range(1,pp):
    sideset.add(Side(i,[wireset(i)]))

    # Define skins
skinset = geometry.getSkinSet()
pp=1
for k in range(0,2):
    for j in range(0,3):
        for i in range(0,6):
            skinset.add(Skin(pp,[sideset(w) for w in (8*i+2*j+k+1, 8*i+2*j+k+3, 9*i+3*j+k+49, 6*i+2*j+k+103, 9*i+3*j+k+50, 6*i+2*j+k+109)]))   # pieles piso 1
            pp=pp+1

rr=pp      #total number of skins, useful to mesh

    # Define volumes
volumeset = geometry.getVolumeSet()
for i in range(1,pp):
    volumeset.add(Volume(i,[skinset(i)]))

if vergeom:          # New window to visualize the geometry: 0=yes, 1=no
    winl = VizWin()          # Graphic window
    winl.add(pointset)        # Add points
    winl.add(curveset)        # Add curves
    winl.add(wireset)         # Add wires
    winl.add(sideset)         # Add faces
    winl.add(volumeset)       # Add volumes
    winl.open()               # Open window
    raw_input()               # Keep open until any key is pressed

#####
#=====#
print ' ##### 3 Mesh #####'
#=====#


    # Meshing of curves
for i in range(0,2):          # Short dir. X lines
    for j in range(0,24):
        SimpleMesher1D(curveset(48*i+j+1)).execute(nx1)
for i in range(0,24):          # Long dir. X lines
    SimpleMesher1D(curveset(i+25)).execute(nx2)

for i in range(0,3):          # Short dir. Y lines
    for j in range(0,14):
        SimpleMesher1D(curveset(21*i+j+136)).execute(ny1)
for i in range(0,3):          # Long dir. Y lines
    for j in range(0,7):
        SimpleMesher1D(curveset(21*i+j+129)).execute(ny2)

for i in range(0,56):          # Short dir. Z lines
    SimpleMesher1D(curveset(i+73)).execute(nz1)

    # Meshing of sides
for i in range( 1, qq):        # Sides are meshed: autodetection only
    TransfiniteMesher2D(sideset(i)).execute(True)    # works with 4 independent lines

    # Meshing of volumes
for i in range(1,rr):
    TransfiniteMesher3D(volumeset(i)).execute(True)

    # Print number of elements on screen
print "numero elementos finitos total"
print getMetafor().getDomain().getMesh().getVolumeSet().size()

```

```

print "numero elementos finitos portico"
numele = 16*cortos*cortos*(largos+cortos)
print numele

if vermallado:      # New window for visualize the mesh
    win2 = VizWin()
    win2.add(geometry.getMesh().getPointSet())
    win2.add(geometry.getMesh().getCurveSet())
    win2.add(geometry.getMesh().getSideSet())
    win2.add(geometry.getMesh().getVolumeSet())
    win2.open()
    raw_input()

#####
#===== 4 Material =====#
#####
materialset = domain.getMaterialSet()           # Short name
laws = domain.getMaterialLawSet()                # Material definition
if material==1: # elastic
    materialset.define(1, ElastHypoMaterial)      # Create material 1
    materialset(1).put(MASS_DENSITY, Density)     # Density
    materialset(1).put(ELASTIC_MODULUS, E1)        # Young modulus
    materialset(1).put(POISSON_RATIO, Nu)          # Poisson coeff.

    materialset.define(2, ElastHypoMaterial)      # Create material 2: simple elastic
    materialset(2).put(MASS_DENSITY, Density)     # Density
    materialset(2).put(ELASTIC_MODULUS, E1)        # Young modulus
    materialset(2).put(POISSON_RATIO, Nu)          # Poisson coeff.

if material==2: # elasto-visto-plastic with linear hardening, no damage
    materialset.define (1, EvpIsoHypoMaterial)    # Create material 1
    materialset(1).put(MASS_DENSITY, Density)     # Density
    materialset(1).put(ELASTIC_MODULUS, E1)        # Young modulus
    materialset(1).put(POISSON_RATIO, Nu)          # Poisson coeff.
    materialset(1).put(YIELD_NUM, 1)               # Yield law 1

    laws.define (1, LinearIsotropicHardening)     # Law of sigma_yield 1
    laws(1).put(IH_SIGEL, LimElast1)              # Elastic limit
    laws(1).put(IH_H, CoefEnd)                    # Hardening coeff.

    materialset.define (2, EvpIsoHypoMaterial)    # Create material 2
    materialset(2).put(MASS_DENSITY, Density)     # Density
    materialset(2).put(ELASTIC_MODULUS, E1)        # Young modulus
    materialset(2).put(POISSON_RATIO, Nu)          # Poisson coeff.
    materialset(2).put(YIELD_NUM, 2)               # Yield law 2

    laws.define (2, LinearIsotropicHardening)     # Law of sigma_yield 2
    laws(2).put(IH_SIGEL, LimElast2)              # Elastic limit
    laws(2).put(IH_H, CoefEnd)                    # Hardening coeff.

if material==3: # elasto-visto-plastic with linear hardening and damage
    materialset.define(1, ContinuousDamageEvpIsoHypoMaterial) #Create el material 1
    materialset(1).put(MASS_DENSITY, Density)     # Density
    materialset(1).put(ELASTIC_MODULUS, E1)        # Young modulus
    materialset(1).put(POISSON_RATIO, Nu)          # Poisson coeff.
    materialset(1).put(YIELD_NUM, 1)               # Yield law 1
    materialset(1).put(DAMAGE_NUM, 3)             # Damage evolution law 3
    materialset(1).put(DAMAGE_INIT, Do)           # Initial damage
    materialset(1).put(TYPE_INTEG, 0)              # Iterative integration method

    materialset.define(2, ContinuousDamageEvpIsoHypoMaterial) #Crear el material 2
    materialset(2).put(MASS_DENSITY, Density)     # Density
    materialset(2).put(ELASTIC_MODULUS, E1)        # Young modulus
    materialset(2).put(POISSON_RATIO, Nu)          # Poisson coeff.
    materialset(2).put(YIELD_NUM, 2)               # Yield law 2
    materialset(2).put(DAMAGE_NUM, 3)             # Damage evolution law 3
    materialset(2).put(DAMAGE_INIT, Do)           # Initial damage
    materialset(2).put(TYPE_INTEG, 0)              # Iterative integration method

    laws.define (1, LinearIsotropicHardening)     # Law of sigma_yield 1
    laws(1).put(IH_SIGEL, LimElast1)              # Elastic limit
    laws(1).put(IH_H, CoefEnd)                    # Hardening coeff.

    laws.define (2, LinearIsotropicHardening)     # Law of sigma_yield 1
    laws(2).put(IH_SIGEL, LimElast2)              # Elastic limit
    laws(2).put(IH_H, CoefEnd)                    # Hardening coeff.

    laws.define (3,LemaitreChabocheContinuousDamage) # Damage evolution law 3
    laws(3).put(LEMAITRE_YOUNG, E1)               # Young modulus
    laws(3).put(LEMAITRE_NU, Nu)                  # Poisson coeff.
    laws(3).put(LEMAITRE_BIG_S, denS)             # Damage evolution law coeff.
    laws(3).put(LEMAITRE_SMALL_S, exps)            # Damage evolution law exponent
    laws(3).put(LEMAITRE_EPL_THRESHOLD, eth)       # Strain threshold

```

```

#####
print '##### 5 Body FE definition #####'
#####

# Properties of the elements to be associated to the material = ElementProperties
prpl = ElementProperties(Volume3DElement)           # Create a property for the volume finite elements
prpl.put(MATERIAL, 1)                                # Number of the associated material
appl = FieldApplicator(1)                            # Define the interaction used for the volume elements

# Rupture criterion
if ruptura==1:
    RC = IFRuptureCriterion()
    RC.setInternalField(IF_ISO_DAMAGE)              # Criterion rupture: damage
    RC.put(RUPT_CRIT_VALUE, critValue)               # Limite value for damage
    RC.put(RUPT_TYPE_CRIT, ONEBROKEN)                # Broken if the criterion is verified in:
                                                    # ONEBROKEN (Gauss Point), ALLBROKEN (all) or MEANBROKEN (average in the element)
    appl.addRuptureCriterion(RC)

for i in range(0,2):
    for j in range(0,2):
        for k in range(0,2):
            appl.push(volumeset(i+4*j+18*k+1))

for i in range(0,2):
    for j in range(0,12):
        appl.push(volumeset(18*i+j+7))

appl.addProperty(prpl)                                # Associate the ElementProperties
interactionset = domain.getInteractionSet()          # Add to the list of interactions
interactionset.add(appl)

print domain.getInteractionSet()

#####
print '##### 6 Constrained dofs #####'
#####

loadingset = domain.getLoadingSet()
for i in [1,2,3,13,14,15,49,50,51,61,62,63,73,74,81,82,89,90,105,106,113,114,121,122]:
    loadingset.define(curveset(i),FieldID(TX,RE))    # Applied on geometry. Transl. X, RELative value. 0 by default
    loadingset.define(curveset(i),FieldID(TY,RE))    # Applied on geometry. Transl. Y, RELative value. 0 by default
    loadingset.define(curveset(i),FieldID(TZ,RE))    # Applied on geometry. Transl. Z, RELative value. 0 by default

#####
print '##### 7 Loading #####'
#####

fct = PieceWiseLinearFunction()          # Piecewise functions: evolution of the load
fct.setData(0.0, 0.0)
#fct.setData(0.1, -0.6)
fct.setData(1.0, -1.0)

fct2 = PieceWiseLinearFunction()
fct2.setData(0.0, 0.0)
fct2.setData(1.0, 1.0)

if carga==1:
    loadingset.define(pointset(44),FieldID(TY,GF1), Qpunt, fct)
    loadingset.define(pointset(68),FieldID(TX,GF1), Qpunt, fct2)
elif carga==2:
    loadingset.define(pointset(44),FieldID(TY,RE), Dend, fct)
    loadingset.define(pointset(68),FieldID(TX,RE), Dend, fct2)

#####
print '##### 8 Time integration schemes #####'
#####

## Time management
tsm = metafor.getTimeStepManager()
tsm.setInitialTime(0.0, Tstep)                 # Initial time and initial time step
tsm.setNextTime(Tend, NumRes, Tstep)             # Final time, number of results and maximum time step

## Iteration management
mim = metafor.getMechanicalIterationManager()
mim.setMaxNbOfIterations(10)
mim.setResidualTolerance(1.0e-6)

# Aditonal calculation parameters
metafor.setIntegerData(MDE_NDYN, 0)      # Quasistatic analysis

#####
print '##### 9 Archive values on hard-disk #####'
#####

valuesmanager = metafor.getValuesManager()       # Save results. Can be visualized in a VizWin

valuesmanager.add( 1, DbValueExtractor( pointset(20), FieldID(TX, RE)), SumOperator(), opc+'Ux2')
valuesmanager.add( 2, DbValueExtractor( pointset(44), FieldID(TX, RE)), SumOperator(), opc+'Ux3')
valuesmanager.add( 3, DbValueExtractor( pointset(68), FieldID(TX, RE)), SumOperator(), opc+'Ux4')

```

```

valuesmanager.add( 4, DbValueExtractor( pointset(20), FieldID(TY, RE)), SumOperator(), opc+'Uy2')
valuesmanager.add( 5, DbValueExtractor( pointset(44), FieldID(TY, RE)), SumOperator(), opc+'Uy3')
valuesmanager.add( 6, DbValueExtractor( pointset(68), FieldID(TY, RE)), SumOperator(), opc+'Uy4')

valuesmanager.add( 7, DbValueExtractor( pointset(14), FieldID(TX,GF1)), SumOperator(), opc+'Fx1')
valuesmanager.add( 8, DbValueExtractor( pointset(20), FieldID(TX,GF1)), SumOperator(), opc+'Fx2')
valuesmanager.add( 9, DbValueExtractor( pointset(44), FieldID(TX,GF1)), SumOperator(), opc+'Fx3')
valuesmanager.add(10, DbValueExtractor( pointset(68), FieldID(TX,GF1)), SumOperator(), opc+'Fx4')
valuesmanager.add(11, DbValueExtractor( pointset(62), FieldID(TX,GF1)), SumOperator(), opc+'Fx5')

valuesmanager.add(12, DbValueExtractor( pointset(14), FieldID(TY,GF1)), SumOperator(), opc+'Fy1')
valuesmanager.add(13, DbValueExtractor( pointset(20), FieldID(TY,GF1)), SumOperator(), opc+'Fy2')
valuesmanager.add(14, DbValueExtractor( pointset(44), FieldID(TY,GF1)), SumOperator(), opc+'Fy3')
valuesmanager.add(15, DbValueExtractor( pointset(68), FieldID(TY,GF1)), SumOperator(), opc+'Fy4')
valuesmanager.add(16, DbValueExtractor( pointset(62), FieldID(TY,GF1)), SumOperator(), opc+'Fy5')

valuesmanager.add(17, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(14), IF_ISO_DAMAGE), opc+'D1')
valuesmanager.add(18, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(20), IF_ISO_DAMAGE), opc+'D2')
valuesmanager.add(19, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(44), IF_ISO_DAMAGE), opc+'D3')
valuesmanager.add(20, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(68), IF_ISO_DAMAGE), opc+'D4')
valuesmanager.add(21, NodalInternalFieldValueExtractor(pointset(62), IF_ISO_DAMAGE), opc+'D5')
valuesmanager.add(22, MiscValueExtractor(metafor,EXT_T),opc+'time')

testSuite = metafor.getTestSuiteChecker() # Check the extracted values
for i in range(1,23):
    testSuite.checkExtractor(i)

if 1: # File with the options to be read with Matlab to create legends
    ff=file(opc+"Opciones.txt","w+")# Created in other folder (Metafor deletes folders in current)

    if material==1:
        Material="Mat. el. lineal "
    elif material==2:
        Material="Mat. evp end. lineal "
    elif material==3:
        Material="Mat. evp end. lineal + damage "

    if endr==0:
        Endr="sin endurec. "
    elif endr==1:
        Endr="con endurec. "

    if ruptura==0:
        Ruptura="sin ruptura, "
    elif ruptura==1:
        Ruptura="con ruptura, "

Mallado=Mallado: "+str(nx1)+" , "+str(nx2)+" , "+str(nyl)+" , "+str(ny2)+" , "+str(nz1)
seqq=[Material, Endr, Ruptura, Mallado]

ff.writelines(seqq)
ff.close()

ff2=file(opc+"V.txt","w+")
ff2.writelines([str(material)+"\n", str(endr)+"\n", str(ruptura)])
ff2.close()

#=====#
print ##### 10 Real time visualization #####
#=====#

curva = valuesmanager.getDataVector

try:
    dataCurve = VectorDataCurve(1, curva(2), curva(22)) # Graphic of the archived values
    dataCurveSet1 = DataCurveSet()
    dataCurveSet1.add(dataCurve)
    winc1 = VizWin()
    winc1.add(dataCurveSet1)
    metafor.addObserver(winc1)

    dataCurve = VectorDataCurve(2, curva(5), curva(14)) # Graphic of the archived values
    dataCurveSet2 = DataCurveSet()
    dataCurveSet2.add(dataCurve)
    winc2 = VizWin()
    winc2.add(dataCurveSet2)
    metafor.addObserver(winc2)

except NameError:
    pass

testSuite = metafor.getTestSuiteChecker() # Final value of curve 2 on the screen
testSuite.checkExtractor(2) # Final value of curve 5 on the screen
testSuite.checkExtractor(5)

print "numero elementos finitos" # Print the total number of elements created
print getMetafor().getDomain().getMesh().getVolumeSet().size()

```

## C.3. Matlab

### C.3.1. Viga experimental: ajuste de parámetros

Mediante el siguiente código de Matlab [49] se procesan los datos obtenidos con el programa Metafor en las simulaciones de la viga empotrada-libre del experimento (Apartado 5.2), usando diferentes valores de los parámetros del material para la obtención de las figuras 5.6 y 5.7, a partir de las cuales se pudieron tomar los valores óptimos de los mencionados parámetros  $\dot{\varepsilon}_D^{pl}$ ,  $S$ ,  $s$  y  $D_0$ .

```

close all
clear all

%Parámetros
h=0.01; %canto
b=1.00; %ancho
L=0.895; %longitud
x=0; %longitud de cálculo
A=0; %posición de la carga (desde la izq)
E=2.1e11; %módulo de Young
sigmaf=355e6; %límite elástico

%Cálculos previos
B=L-A; %posición de la carga (desde la dcha)
Iz=b*h^3/12; %inercia
Mp=b*h^2/4*sigmaf; %momento plástico
Me=sigmaf*Iz/(h/2); %momento elástico
Fe=2*Me/x; %fuerza hasta momento elástico
Fp=2*Mp/x; %fuerza hasta momento plástico
Fe=16*Me/(3*L);
Fp=16*Mp/(3*L);

%Cálculos teóricos
Pe=linspace(0,Fe,10); %fuerza elástica (pendiente)
del=Pe/(5*E*Iz)*(3*B^2*x-2*L^3+3*A*L^2-A^3); %desplazamiento elástico (pendiente)
deF= Fe/(5*E*Iz)*(3*B^2*x-2*L^3+3*A*L^2-A^3); %final del desplz. elástico

Pe2=linspace(Fe,Fe); %fuerza elástica (constante)
de2=linspace(deF,0.04); %desplazamiento elástico (constante)
Pp= linspace(Fp,Fp); %fuerza plástica
dp= linspace(deF,0.06); %desplazamiento plástico

%Maple
Pt=[0,1.125,1.125]*229167;
dt=[0,0.0611111111,0.0785714286,0.2];

%%%Gráfica
%Experimentos
load Dantiguo.txt; load Dantiguo2.txt; load Dnuevo.txt
load Fantiguo.txt; load Fantiguo2.txt; load Fantiguo3.txt; load Fnuevo.txt;
%S=55e2, ss=0.43, De=0.0, eth=0.00
load displacySS55e2s043D00eth000.ascii; load totalForceYS55e2s043D00eth000.ascii
%Variar s=0.20..0.60
load displacySS55e2s020D00eth000.ascii; load displacySS55e2s025D00eth000.ascii;
load displacySS55e2s030D00eth000.ascii; load displacySS55e2s035D00eth000.ascii;
load displacySS55e2s040D00eth000.ascii; load displacySS55e2s045D00eth000.ascii;
load displacySS55e2s050D00eth000.ascii; load displacySS55e2s055D00eth000.ascii;
load displacySS55e2s060D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s020D00eth000.ascii; load totalForceYS55e2s025D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s030D00eth000.ascii; load totalForceYS55e2s035D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s040D00eth000.ascii; load totalForceYS55e2s045D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s050D00eth000.ascii; load totalForceYS55e2s055D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s060D00eth000.ascii;
%Variar S=55e0..55e4
load displacySS55e0s043D00eth000.ascii; load displacySS55e1s043D00eth000.ascii;
load displacySS55e3s043D00eth000.ascii; load displacySS55e4s043D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e0s043D00eth000.ascii; load totalForceYS55e1s043D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s043D00eth000.ascii; load totalForceYS55e3s043D00eth000.ascii;
load totalForceYS55e4s043D00eth000.ascii;
%Variar D=0.0..0.9
load displacySS55e2s043D01eth000.ascii; load displacySS55e2s043D02eth000.ascii;
load displacySS55e2s043D03eth000.ascii; load displacySS55e2s043D04eth000.ascii;
load displacySS55e2s043D05eth000.ascii; load displacySS55e2s043D06eth000.ascii;
load displacySS55e2s043D07eth000.ascii; load displacySS55e2s043D08eth000.ascii;
load displacySS55e2s043D09eth000.ascii
load totalForceYS55e2s043D01eth000.ascii; load totalForceYS55e2s043D02eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s043D03eth000.ascii; load totalForceYS55e2s043D04eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s043D05eth000.ascii; load totalForceYS55e2s043D06eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s043D07eth000.ascii; load totalForceYS55e2s043D08eth000.ascii;
load totalForceYS55e2s043D09eth000.ascii
%Variar eth=0.00..0.45
load displacySS55e2s043D00eth001.ascii; load displacySS55e2s043D00eth002.ascii;
load displacySS55e2s043D00eth003.ascii; load displacySS55e2s043D00eth004.ascii;
load displacySS55e2s043D00eth005.ascii; load displacySS55e2s043D00eth006.ascii;
load displacySS55e2s043D00eth007.ascii; load displacySS55e2s043D00eth008.ascii;
load displacySS55e2s043D00eth009.ascii
load totalForceYS55e2s043D00eth001.ascii; load totalForceYS55e2s043D00eth002.ascii;
load totalForceYS55e2s043D00eth003.ascii; load totalForceYS55e2s043D00eth004.ascii;
load totalForceYS55e2s043D00eth005.ascii; load totalForceYS55e2s043D00eth006.ascii;
load totalForceYS55e2s043D00eth007.ascii; load totalForceYS55e2s043D00eth008.ascii;
load totalForceYS55e2s043D00eth009.ascii

%%Experimento + resultados
figure
plot(Dantiguo2,Fantiguo3,'k-',...
      displacySS55e2s043D00eth000, totalForceYS55e2s043D00eth000, 'm-',...
      'LineWidth',2)

xlabel('t'); ylabel('P')
legend('Experiment', 'Metafor model adjusted')*

```

```

%%%Experimento solo
figure
plot(Dantiguo2,Fantigo3,'k-',...
      'LineWidth',2) %Experimento antiguo

xlabel('t'); ylabel('P')
legend('Experimen.nuevo', 'Experim.antiguo', 'Experim.antiguo', 'S=55e2, s=0.43, D=0.00, eth=0.00')%
title('S=55e2, Do=0.0, eth=0.00. Variar exp. s=0.20..0.60')

%%%Variar s=0.20..0.60
figure
subplot(2,2,1); %Experimento antiguo
plot(Dantiguo2,Fantigo3,'k-',...
      'LineWidth',2)
displacySS55e2s020D00eth000, totalForceYS55e2s020D00eth000,'b-',...
displacySS55e2s025D00eth000, totalForceYS55e2s025D00eth000,'g-',...
displacySS55e2s030D00eth000, totalForceYS55e2s030D00eth000,'r-',...
displacySS55e2s035D00eth000, totalForceYS55e2s035D00eth000,'c-',...
displacySS55e2s040D00eth000, totalForceYS55e2s040D00eth000,'m-',...
displacySS55e2s043D00eth000, totalForceYS55e2s043D00eth000,'b-',...
displacySS55e2s045D00eth000, totalForceYS55e2s045D00eth000,'g-',...
displacySS55e2s050D00eth000, totalForceYS55e2s050D00eth000,'r-',...
displacySS55e2s055D00eth000, totalForceYS55e2s055D00eth000,'c-',...
displacySS55e2s060D00eth000, totalForceYS55e2s060D00eth000,'m-',...
'LineWidth',2)

xlabel('t'); ylabel('P')
legend('Experim', 's=0.20', 's=0.30', 's=0.35', 's=0.40', 's=0.43', 's=0.45', 's=0.50', 's=0.55', 's=0.60')%
title('S=55e2, Do=0.0, eth=0.00, s=0.20..0.60')

%%%Variar S=55e0..55e4
subplot(2,2,2); %Experimento antiguo
plot(Dantiguo2,Fantigo3,'k-',...
      'LineWidth',2)
displacySS55e0s043D00eth000, totalForceYS55e0s043D00eth000,'b-',...
displacySS55e1s043D00eth000, totalForceYS55e1s043D00eth000,'g-',...
displacySS55e2s043D00eth000, totalForceYS55e2s043D00eth000,'r-',...
displacySS55e3s043D00eth000, totalForceYS55e3s043D00eth000,'c-',...
displacySS55e4s043D00eth000, totalForceYS55e4s043D00eth000,'m-',...
'LineWidth',2)

xlabel('t'); ylabel('P')
legend('Experim', 'S=55e0', 'S=55e1', 'S=55e2', 'S=55e3', 'S=55e4')%
title('s=0.43, Do=0.0, eth=0.00, S=55e0..55e4')

%%%Variar Do=0.0..0.9
subplot(2,2,3); %Experimento antiguo
plot(Dantiguo2,Fantigo3,'k-',...
      'LineWidth',2)
displacySS55e2s043D00eth000, totalForceYS55e2s043D00eth000,'b-',...
displacySS55e2s043D01eth000, totalForceYS55e2s043D01eth000,'g-',...
displacySS55e2s043D02eth000, totalForceYS55e2s043D02eth000,'r-',...
displacySS55e2s043D03eth000, totalForceYS55e2s043D03eth000,'c-',...
displacySS55e2s043D04eth000, totalForceYS55e2s043D04eth000,'m-',...
displacySS55e2s043D05eth000, totalForceYS55e2s043D05eth000,'b-',...
displacySS55e2s043D06eth000, totalForceYS55e2s043D06eth000,'g-',...
displacySS55e2s043D07eth000, totalForceYS55e2s043D07eth000,'r-',...
displacySS55e2s043D08eth000, totalForceYS55e2s043D08eth000,'c-',...
displacySS55e2s043D09eth000, totalForceYS55e2s043D09eth000,'m-',...
'LineWidth',2)

xlabel('t'); ylabel('P')
legend('Experim', 'Do=0.0', 'Do=0.1', 'Do=0.2', 'Do=0.3', 'Do=0.4', 'Do=0.5', 'Do=0.6', 'Do=0.7', 'Do=0.8', 'Do=0.9')%
title('S=55e2, s=0.43, eth=0.00, Do=0.0..0.9')

%%%Variar eth=0.00..0.45
subplot(2,2,4); %Experimento antiguo
plot(Dantiguo2,Fantigo3,'k-',...
      'LineWidth',2)
displacySS55e2s043D00eth000, totalForceYS55e2s043D00eth000,'b-',...
displacySS55e2s043D00eth001, totalForceYS55e2s043D00eth001,'g-',...
displacySS55e2s043D00eth002, totalForceYS55e2s043D00eth002,'r-',...
displacySS55e2s043D00eth003, totalForceYS55e2s043D00eth003,'c-',...
displacySS55e2s043D00eth004, totalForceYS55e2s043D00eth004,'m-',...
displacySS55e2s043D00eth005, totalForceYS55e2s043D00eth005,'b-',...
displacySS55e2s043D00eth006, totalForceYS55e2s043D00eth006,'g-',...
displacySS55e2s043D00eth007, totalForceYS55e2s043D00eth007,'r-',...
displacySS55e2s043D00eth008, totalForceYS55e2s043D00eth008,'c-',...
displacySS55e2s043D00eth009, totalForceYS55e2s043D00eth009,'m-',...
'LineWidth',2)

xlabel('t'); ylabel('P')
legend('Experim', 'eth=0.00', 'eth=0.05', 'eth=0.10', 'eth=0.15', 'eth=0.20', 'eth=0.25', 'eth=0.30', 'eth=0.35', 'eth=0.40',...
      'eth=0.45')%
title('S=55e2, s=0.43, Do=0.0, eth=0.00..0.45')

```

```

%%%%TODAS JUNTAS
figure
hold all
experim=[plot(Dantiguo2,Fantiguo3,'y-','LineWidth',2)];;

variars=[plot(displacyS55e2s020D00eth000, totalForceYS55e2s020D00eth000,'g-','LineWidth',2),...%Variar s
          plot(displacyS55e2s025D00eth000, totalForceYS55e2s025D00eth000,'g-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s030D00eth000, totalForceYS55e2s030D00eth000,'g-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s035D00eth000, totalForceYS55e2s035D00eth000,'g-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s040D00eth000, totalForceYS55e2s040D00eth000,'g-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth000, totalForceYS55e2s043D00eth000,'k-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s045D00eth000, totalForceYS55e2s045D00eth000,'g-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s050D00eth000, totalForceYS55e2s050D00eth000,'g-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s055D00eth000, totalForceYS55e2s055D00eth000,'g-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s060D00eth000, totalForceYS55e2s060D00eth000,'g-','LineWidth',2)];
variarsG=[plot(displacyS55e0s043D00eth000, totalForceYS55e0s043D00eth000,'b-','LineWidth',2),...%Variar S
          plot(displacyS55e1s043D00eth000, totalForceYS55e1s043D00eth000,'b-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e3s043D00eth000, totalForceYS55e3s043D00eth000,'b-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e4s043D00eth000, totalForceYS55e4s043D00eth000,'b-','LineWidth',2)];
variard=[plot(displacyS55e2s043D0leth000, totalForceYS55e2s043D0leth000,'r-','LineWidth',2),...%Variar Do
          plot(displacyS55e2s043D02eth000, totalForceYS55e2s043D02eth000,'r-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D03eth000, totalForceYS55e2s043D03eth000,'r-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D04eth000, totalForceYS55e2s043D04eth000,'r-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D05eth000, totalForceYS55e2s043D05eth000,'r-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D06eth000, totalForceYS55e2s043D06eth000,'r-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D07eth000, totalForceYS55e2s043D07eth000,'r-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D08eth000, totalForceYS55e2s043D08eth000,'r-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D09eth000, totalForceYS55e2s043D09eth000,'r-','LineWidth',2)];
variare=[plot(displacyS55e2s043D00eth001, totalForceYS55e2s043D00eth001,'m-','LineWidth',2),...%Variar eth
          plot(displacyS55e2s043D00eth002, totalForceYS55e2s043D00eth002,'m-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth003, totalForceYS55e2s043D00eth003,'m-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth004, totalForceYS55e2s043D00eth004,'m-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth005, totalForceYS55e2s043D00eth005,'m-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth006, totalForceYS55e2s043D00eth006,'m-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth007, totalForceYS55e2s043D00eth007,'m-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth008, totalForceYS55e2s043D00eth008,'m-','LineWidth',2),...
          plot(displacyS55e2s043D00eth009, totalForceYS55e2s043D00eth009,'m-','LineWidth',2)];

experimG=hgroup; %One legend entry for a group of objects
variarsG=hgroup;
variarsG=legend('Experimento','Variar s','Variar S','Variar Do','Variar eth');
variardG=legend('Variar s','Variar S','Variar Do');
variareG=legend('Variar eth');

set(experim,'Parent',experimG);
set(variars,'Parent',variarsG);
set(variarsG,'Parent',variarsG);
set(variard,'Parent',variardG);
set(variardG,'Parent',variardG);
set(variare,'Parent',variareG);
set(variareG,'Parent',variareG);
set(get(get(experimG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
set(get(get(variarsG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
set(get(get(variarsG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
set(get(get(variarsG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
set(get(get(variardG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
set(get(get(variardG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
set(get(get(variareG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
set(get(get(variareG,'Annotation'),'LegendInformation'),'IconDisplayStyle','on');
legend('Experimento','Variar s','Variar S','Variar Do','Variar eth')

xlabel('t'); ylabel('P')
title('Todas juntas')

```



# Apéndice D

## Méritos

### Contenidos

---

<b>D.1.</b> Congresos . . . . .	<b>324</b>
<b>D.2.</b> Otros méritos . . . . .	<b>325</b>
<b>D.3.</b> Publicaciones . . . . .	<b>328</b>
D.3.1. Artículo 0 . . . . .	328
D.3.2. Artículo 1 . . . . .	342
D.3.3. Artículo 2 . . . . .	347
D.3.4. Artículo 3 . . . . .	363
D.3.5. Artículo 4 . . . . .	377
D.3.6. Artículo 5 . . . . .	390

---

## D.1. Congresos

Parte del trabajo realizado durante el periodo de desarrollo de la Tesis se ha presentado en los congresos internacionales indicados en la Tabla D.1.

**Tabla D.1:** Participaciones en congresos

Autores	Título	Congreso	Siglas	Fecha	Partic.
E. Chica, J.M.G. Terán, A. Lorenzana, P.M. López-Reyes	“Computational model for elastoplastic and damage analysis of 2D frames”	Fourth International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering	ACoMEN 2008	Mayo 2008	Coautor y ponente
E. Chica, P.M. López-Reyes, J.M.G. Terán, A. Lorenzana	“Damage coupled elastoplastic analysis of a frame”	X International Conference on Computational Plasticity	COMPLAS X	Sept. 2009	Coautor y ponente
M. Cacho, A. Lorenzana, P.M. López-Reyes, R. Sáiz	“Method to determine in a simple way the critical buckling load of frames with variable cross-section members under any type of load”	IV European Conference on Computational Mechanics	ECCM 2010	Mayo 2010	Coautor y ponente
P.M. López-Reyes, A. Lorenzana, M. Cacho, E. Chica	“Model for elastoplastic analysis of 2D frames including hardening and damage”	XI International Conference on Computational Plasticity	COMPLAS XI	Sept. 2011	Coautor y ponente

Adicionalmente, en la Tabla D.2 se listan otros congresos no relacionados con la temática de esta Tesis Doctoral.

**Tabla D.2:** Participaciones en congresos

Autores	Título	Congreso	Siglas	Fecha	Partic.
A. Vasallo, A. Lorenzana, A. Foces, R. Rossi, P.M. López-Reyes	“Vortex-induced vibrations: simplified numerical method for understanding the aeroelastic response of line slender structures in the lock-in range”,	Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering	COUPLED PROBLEMS 2009	Junio 2009	Coautor
P.M. López-Reyes, A. Lorenzana, A.V. Belver, C.E. Lavín	“Response of a Pendulum TMD with Large Displacements”	A Conference and Exposition on Structural Dynamics	IMAC XXXI	Febr. 2013	Coautor

## D.2. Otros méritos

### ■ Participación en proyectos de investigación

- Subvencionados internamente. Líneas financiadas por la Fundación CARTIF de apoyo a la investigación básica:
  - “*Simulación Avanzada de Sistemas Deformables*”.  
Centro: Fundación CARTIF.  
Fecha: 2008 - 2010.  
Investigador principal: PhD. Antolín Lorenzana Ibán.
  - “*Monitorizado, análisis, simulación y control de estructuras civiles*”.  
Centro: Fundación CARTIF.  
Fecha: 2010 - 2012.  
Investigador principal: Phd. Alfonso Poncela Méndez.
- Subvencionados externamente. Participación activa en los siguientes proyectos subvencionados por el Ministerio de Ciencia e Innovación:

- “*Técnicas experimentales y numéricas para la valoración del comportamiento vibratorio de pasarelas peatonales*”. Código: BIA2011-28493-C02-02.  
Entidades participantes: Fundación CARTIF, Universidad de Valladolid y Universidad Politécnica de Madrid.  
Fecha: 2012 - 2014.  
Investigador principal: Antolín Lorenzana Ibán (Subproyecto del proyecto coordinado por la Universidad Politécnica de Madrid, BIA 2011-28493-C01-01 liderado por Enrique Alarcón).  
○ “*Red de investigación cooperativa en monitorización, control de vibraciones y detección de daños en estructuras inteligentes*”. Código: DPI-2011-14607-E.  
Entidades participantes: Universidad Politécnica de Cataluña, Fundación CARTIF, Universidad Politécnica de Madrid, Universidad de Castilla-La Mancha, Centro de Investigaciones Tecnológicas Ikerlan, Universidad de Oviedo, Universidad de Gerona, Universidad de Granada.  
Fecha: 2012 - 2014.  
Investigador principal: José Rodellar Benedé.

■ **Publicación de programas online:**

- “*2D Direct Stiffness Method*”.  
P.M. López-Reyes, A. Lorenzana.  
Application Center. Maplesoft. Julio 2008 (Figura D.1a).
- “*Plastic method of structural analysis*”.  
P.M. López-Reyes, A. Lorenzana.  
Application Center. Maplesoft. Marzo 2011 (Figura D.1b).

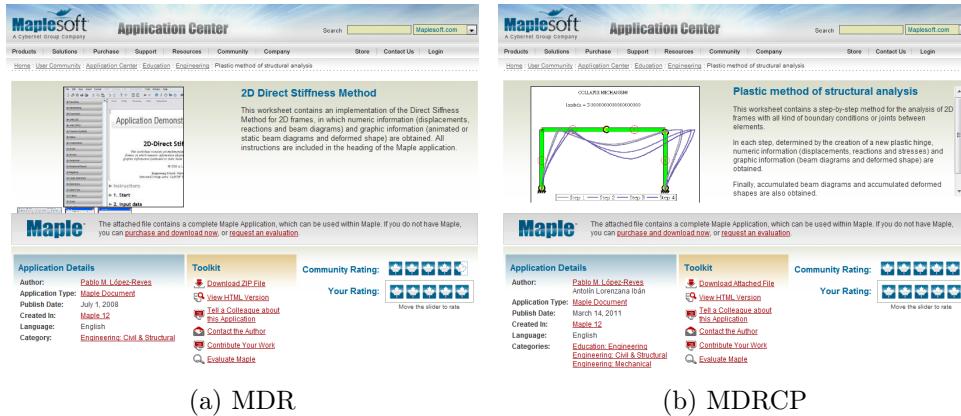
■ **Estancia doctoral:**

Centro: Universidad de Lieja, Bélgica.

Duración: Septiembre 2011 - Noviembre 2011.

Resumen de actividad: estudio de los NNM (*Nonlinear Normal Modes*), que representan una herramienta muy útil para el estudio de las no linealidades en estructuras reales que vibran; estudio de técnicas de actualizado de elementos finitos en estructuras no lineales; asistencia al curso “Introducción al análisis no lineal y con grandes deformaciones de sólidos por el método de los elementos finitos” e

introducción al programa Metafor; aprendizaje de software: Matlab, Metafor y Fcont (NNM).



**Figura D.1:** Programas publicados online

## D.3. Publicaciones

### D.3.1. Artículo 0

El artículo “*Damage Coupled to Yield Function for the Elastoplastic Analysis of Framed Structures*”, de los autores E. Chica, J.M.G. Terán, A.L. Ibán y P. López, fue publicado (Tabla D.3) en la revista *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, en el Volumen 9(6) de Diciembre de 2008 [14].

**Tabla D.3:** Datos de la publicación del Artículo 0

Fecha			Factor de Impacto	
Envío	Aceptación	Publicación	2007 <sup>a</sup>	2011 <sup>b</sup>
Marzo 2008	Julio 2008	Diciembre 2008	—	—

<sup>a</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha de aceptación

<sup>b</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha actual

Se reproduce a continuación con el formato final publicado.

ASIAN JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING (BUILDING AND HOUSING) VOL. 9, NO. 6 (2008)  
PAGES 549-561

## DAMAGE COUPLED TO YIELD FUNCTION FOR THE ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES

E. Chica<sup>\*a</sup>, J.M.G. Teran<sup>b</sup>, A.L. Iban<sup>b</sup> and P. López<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Department of Mechanical Engineering, University of Antioquia, C/ 67 No 53-108,  
AA 1226, Medellín-Colombia*

<sup>b</sup>*Solid Mechanics and Structures Group. E.T.S.I.I. (Industrial Engineering), University of  
Valladolid, C/Paseo del Cause s/n, CP 47011, Valladolid-Spain*

<sup>c</sup>*Structural Design Area, CARTIF. Technological Park of Boecillo, CP 47151 Valladolid-Spain*

### Abstract

A method for coupling the variable damage to the yield function of a 2D beam element is presented. The damage is represented by a scalar internal variable which expresses the loss of strength of the material during ductile or fatigue processes and it is concentrated at the ends of the element.

Yield surfaces, considering the interaction of bending moment, axial force, shear force and damage of material are also given. And the yield function obtained can be used to determine the elastoplastic stiffness matrix of beam element used for the structural analysis.

**Keywords:** Elastoplasticity; damage; yield function; yield surface

### 1. Introduction

It is well known that the usual numerical way for the determination of the plastic collapse load of framed structures is the use of one-dimensional finite element models (2D beam element) together with the plastic hinge concept and an incremental procedure. We present an approach that takes into account the extended plastic cross section concept (that includes the plastic hinge concept) and Continuum Damage Mechanics (CDM) concepts for coupling the variable damage to the yield function of the cross section. We try to apply this approach to determine an explicit form of the tangent stiffness matrix called “elastoplastic degradation stiffness matrix” and also to determine more exactly the collapse load of the frame.

The yield function  $Z(F)$  includes the effect of the stress components  $F$ (axial  $N$ , shear  $V$  and bending moment  $M$ ) acting in the system to predict the yielding of the material. This can be graphically represented as the place of the points of space of stress (yield surface) that constitute the limit for a given state of the material [1, 2]. To define the yield function  $Z(F, D)$  for damaged material, it has been necessary take into account: the Navier hypothesis for

---

\* E-mail address of the corresponding author: echica@udea.edu.co (E. Chica)

beams, the Von Mises yield criterion and the hypothesis of strain equivalence of CDM formulated by Lemaitre [3] that assumes that the strain associated with a damage state under the applied stress is equivalent to the strain associated with its undamaged state under the effective stress [4]. The plasticity is supposed to be concentrated only in the cross section of the ends of the beams and it is in plastic state by the combination of stress that satisfies the yielding condition  $Z(N,V,M,D)$  at damage D. The evolution of damage can be determined using the kinetic law of damage evolution, where the damage rate and the effective accumulated plastic strain rate are coupled by mean of the definition of the plastic multiplier.

In the next section a description of an analytical procedure used for determine the yield function of elastoplastic 2D beam element of rectangular cross section is presented. The function obtained can be used in framework of plastic analysis of structures to calculate the loss of rigidity of the material due to its deterioration and its influence on the collapse load of the structure.

## 2. Materials and Methods

An analytical yield surface equation of 2D beam element (Figure 1), based on CDM and the classical hypothesis of Solid Mechanics is presented, taking into account the combined action of axial and shear forces, bending moment and the effects of damage of material. Basic assumptions, such as the following, have been taken into account [1,2,3,4]:

- Material nonlinearity is simulated by the formation of plastic zones of zero length at the ends of the each beam element.
- The effect of strain hardening is not considered.
- For the plastic behavior, Von Mises yield criterion and associated flow rule are adopted.
- Damage (D) is isotropic and, like plasticity, it is supposed to be concentrated at the beam ends.
- For simplicity, all expressions are only applicable for rectangular cross section of base (b) and heigh (h).

Under combined forces, the elastic limit is defined mathematically by a certain yield criterion or yield condition. The initial yield criterion depends only on the stress, and can be generally expressed as:

$$f = (\sigma_{eq} - R - \sigma_f) \leq 0 \quad (1)$$

Where f is the yield function,  $\sigma_{eq}$  is the Von Mises equivalent stress, R is the isotropic hardening (although it is not considered) and  $\sigma_f$  is the yield stress. The equivalent stress  $\sigma_{eq}$  associated with a damaged state has to be replaced by  $\overline{\sigma_{eq}}$  (damage effective equivalent stress) given according to the CDM concept of effective stress as:

$$\overline{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} \quad (2)$$

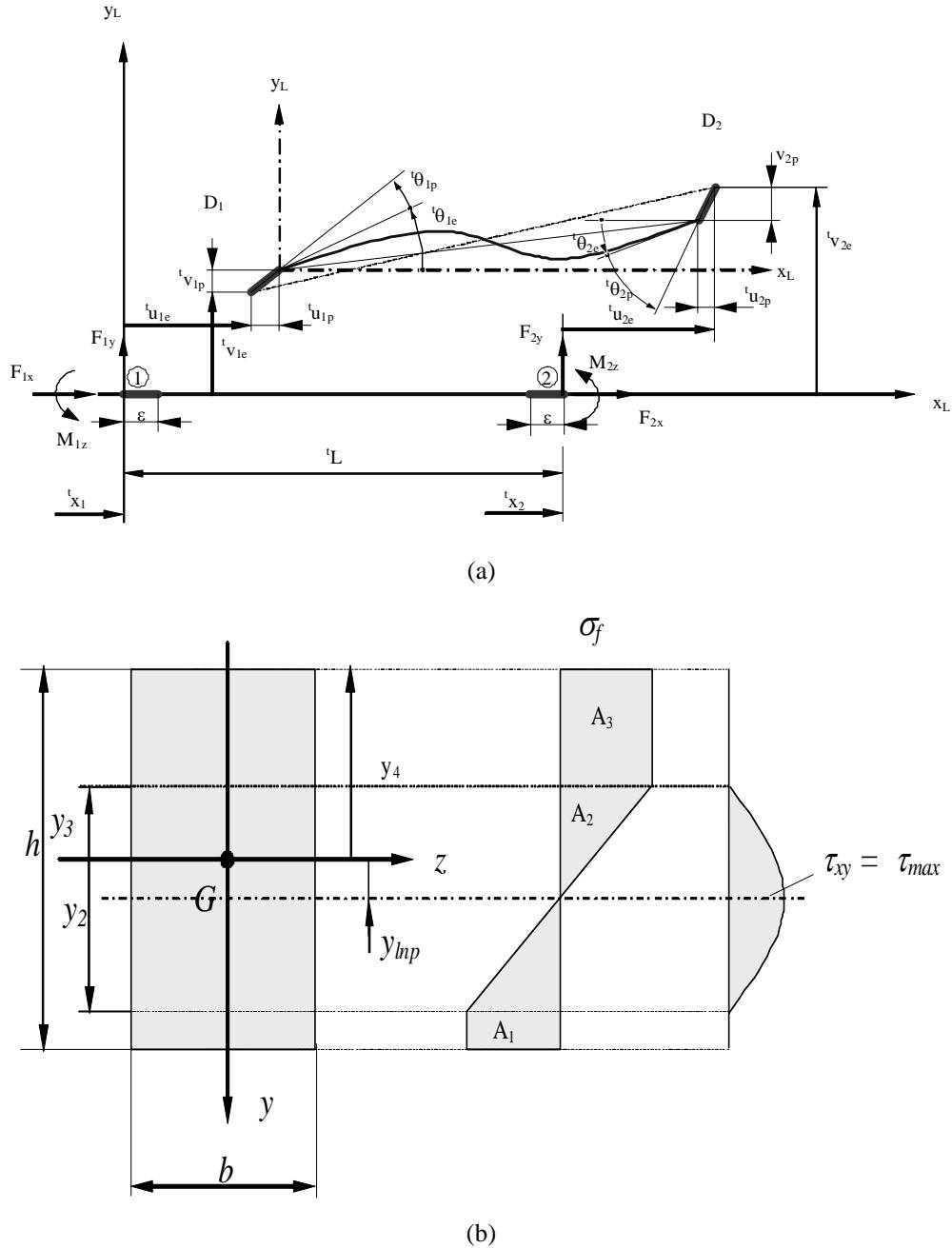


Figure 1. (a) Beam element with elastoplastic displacement at the end of the element and damage. (b) Stress distributions in a rectangular cross section

Substituting Eq. (2) into Eq. (1) we obtain the constitutive yield function for damaged material.

$$f = \left( \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - \sigma_f \right) \leq 0 \quad (3)$$

In 2D beam elements  $\sigma_{eq}$  is given by:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2} \quad (4)$$

and if the normal stress  $\sigma_y$  is not considered, then we can write:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \tau_{xy}^2} \quad (5)$$

where  $\sigma_x$  is the normal stress in the beam due to axial force and bending moment and  $\tau_{xy}$  is the shear stress. In the points of the cross section of the beam where the normal stress is null (neutral axis  $\sigma_x = 0$ ), yielding is only due to the effects of the shear stress ( $\tau_{xy}$ ). Therefore, in order to achieve yielding in the neutral fibre, the shear stress would have to be equal to the yield shear stress ( $\sigma_f$ ), given as:

$$\tau_f = \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

and

$$f = \left( \frac{\sqrt{3}\tau_f}{1-D} - \sigma_f \right) \leq 0 \text{ or } f = \tau_f \leq \frac{(1-D)\sigma_f}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

In the case of a section subjected to bending moment ( $M_z$ ), axial stress ( $N_x$ ) and shear stress ( $V_y$ ) simultaneously, when the yielding of section takes place, the elastic area diminishes ( $y_2-y_3$ ) and simultaneously the position of the neutral axis of the section varies ( $y_{lmp}$ , Figure 2) i.e when the loading process continues, yielding starts at the top or the bottom fibres, and the plastic zone propagates to the interior of the cross section. During the elastoplastic stage, the cross section has an elastic zone with linear stress variation, and one or two plastic zones with constant stress equal to the positive or negative yield stress. This process is continuum until the total yielding of the cross section that appear when the shear stress ( $\tau_{xy}$ ) is equal to the yield shear stress ( $\tau_f$ ).

The normal stress ( $\sigma_x$ ) in the elastic zone of the material of the cross section of Figure 1(b) is given by

$$\frac{\sigma_f}{y_2 - y_{\text{inp}}} = \frac{\sigma_{xp}}{y - y_{\text{inp}}} \Rightarrow \sigma_{xp} = \frac{\sigma_f}{y_2 - y_{\text{inp}}} (y - y_{\text{inp}}) \quad (8)$$

And considering that the resultant normal force on the cross section must be cero we can write that the axial force is equal to

$$N_x(x) = \int_A \sigma_x(x) dA \quad (9)$$

Considering the Eq. (9) for each one of the areas of stress distributions shown in the Figure 1(b) corresponding to the plastic behavior ( $A_1, A_3$ ) and elastic ( $A_2$ ) we write the following expression for the resultant normal force:

$$N_x = - \int_{A_1} \sigma_f dA - \int_{A_2} \sigma_{xp} dA + \int_{A_3} \sigma_f dA \quad (10)$$

Now, taking into account the laws of variation of the normal stress in the elastic and plastic domain on the cross section according to Eq. (8) and substituting in Eq. (10) we get

$$N_x = \sigma_f \left[ - \int_{y_2}^{y_1} z(y) dy - \frac{1}{y_2 - y_{\text{inp}}} \int_{y_3}^{y_2} (y - y_{\text{inp}}) z(y) dy + \int_{y_4}^{y_3} z(y) dy \right] \quad (11)$$

Using the same procedure described for the normal force, we can write the equilibrium equation for bending moment considering the elastic or plastic behavior of section:

$$M_z = \sigma_f \left[ \int_{y_2}^{y_1} y z(y) dy + \frac{1}{y_2 - y_{\text{inp}}} \int_{y_3}^{y_2} (y - y_{\text{inp}}) y z(y) dy - \int_{y_4}^{y_3} y z(y) dy \right] \quad (12)$$

In the Eqs. (11) and (12) the limits of the section ( $y_1$  and  $y_4$ ) are known for a rectangular cross section, however the penetration of yielding ( $y_2$  and  $y_3$ ) and the position of the neutral axis ( $y_{\text{inp}}$ ) are dependent variables of the bending moment ( $M_z$ ) and the axial stress ( $N_x$ ) in each instant of the loading process. Since the number of equations is two and the number of unknown variables is three, it is necessary to introduce an additional equation to solve the system. This equation will depend on the geometry of the section, for what an application for the case of a concrete section is carried out.

In this way for the case of a beam of a constant rectangular section of width  $b$  and height  $h$ , with an elastoplastic behaviour of the material (Figure 1(b)) the position of the neutral axis will be defined as

$$y_{\text{inp}} = \frac{y_2 + y_3}{2} \quad (13)$$

Using the equilibrium equation Eq. (11) and Eq. (12) and the position of the neutral axis Eq. (13) we can obtain the penetration of the yielding of the section ( $y_2$  and  $y_3$ ) in function of the bending moment ( $M_z$ ) and axial stress ( $N_x$ ) and behavior of the material (characterized by the yield stress  $\sigma_f$ )

$$y_2 = \frac{N_x + \sqrt{-3N_x^2 - +3b^2\sigma_f^2h^2 - 12\sigma_f bM_z}}{2b\sigma_f} \quad (14)$$

$$y_3 = \frac{N_x - \sqrt{-3N_x^2 + 3b^2\sigma_f^2h^2 - 12\sigma_f bM_z}}{2b\sigma_f} \quad (15)$$

$$y_{lhp} = \frac{N_x}{2b\sigma_f} \quad (16)$$

In the different domains of behavior of the section (elastoplastic), the normal stress doesn't follow the law of Navier, as it has been indicated in the Eq. (8), but can be expressed as

$$\begin{aligned} h/2 > y > y_2 & \quad \sigma_x = \sigma_f \\ y_2 > y > y_3 & \quad \sigma_x = \frac{\sigma_f}{y_2 - y_{lhp}}(y - y_{lhp}) \\ y_3 > y > -h/2 & \quad \sigma_x = -\sigma_f \end{aligned} \quad (17)$$

From the position of the neutral axis ( $y_{lhp}$ ) and of the penetration of the yielding ( $y_2$ ,  $y_3$ ) given by the Eqs. (16), (14) and (15) respectively, the normal stress is obtained in the elastic domain of the section with behavior elastoplastic

$$\sigma_x(M_z, N_x) = \frac{\sigma_f(2y\sigma_f b + N_x)\sqrt{3}}{3\sqrt{-N_x^2 + b^2\sigma_f^2h^2 - 4\sigma_f bM_z}} \quad (18)$$

The distribution of the shear stress on the section with elastoplastic behavior must comply the equations of internal balance. Therefore for the case of a two-dimensional study with null forces of mass we can write:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

The variation of the shear stress can be written as:

$$\tau_{xy} = \int_{y_2}^y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy \quad (20)$$

To determine the distribution of shear stress ( $\tau_{xy}$ ) it is necessary to evaluate the normal stress ( $\sigma_x$ ) deriving with respect to X. The normal stress ( $\sigma_x$ ) Eq. (18) doesn't depend explicitly on that variable but if does on the bending moment ( $M_z$ ) and axial stress ( $N_x$ ). Therefore is possible to write the normal stress derived with respect to X as

$$\frac{\partial \sigma_x(M_z, N_x)}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial M_z} \frac{dM_z}{dx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial N_x} \frac{dN_x}{dx} \quad (21)$$

Where, considering only the axial force ( $N_x$ ) due to a punctual force we can rewrite the Eq. (21) as:

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_x(M_z, N_x)}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial M_z} \frac{dM_z}{dx} \quad (22)$$

Substituting Eq. (22) in Eq. (18) we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial M_z} &= -\frac{2\sqrt{3}\sigma_f^2 b(N_x + 2yb\sigma_f)}{\sqrt{(-N_x^2 + b^2\sigma_f^2 h^2 - 4\sigma_f b M_z)^3}} \\ \frac{dM_z}{dx} &= V_y \end{aligned} \quad (23)$$

Therefore the distribution of shear stress in the elastic area of the elastoplastic behavior of the cross section Eq. (20) can be expressed by:

$$\tau_{xyp}(y) = -\frac{\sqrt{3}\sigma_f V_y \left( -4N_x^2 + 3b^2\sigma_f^2 h^2 - 12b\sigma_f M_z - 4y^2 b^2\sigma_f^2 + 4N_x y b\sigma_f \right)}{\sqrt{(-N_x^2 + b^2\sigma_f^2 h^2 - 4\sigma_f b M_z)^3}} \quad (24)$$

The variation of the shear stress of the cross section of the Figure 1(b) for each one of its domains is defined by:

$$\begin{aligned} h/2 > y > y_2 &\quad \tau_{xy} = 0 \\ y_2 > y > y_3 &\quad \tau_{xy}(y) = \tau_{xyp}(y) \\ y_3 > y > -h/2 &\quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

The distribution of the shear stress in the elastic domain of the material allows to

determine the combination of values of the bending moment ( $M_z$ ), axial stress ( $N_x$ ) and shear stress ( $V_y$ ) that makes the section reach its limit state of complete yielding, and starting from them to obtain the yield surface of the section. This occurs if the maximum value of the shear stress of the elastic area ( $\tau_{xypmax}$ ) is equal to the shear yield stress ( $\tau_f$ ).

The maximum shear stress ( $\tau_{xypmax}$ ) appears in the neutral axis of the yielding section, therefore substituting the position of the neutral axis of the section ( $y = y_{lnp}$ ) Eq. (16) in the law of variation of the shear stress  $\tau_{xyp}$  (24), we get

$$\tau_{xypmax}(y) = -\frac{\sqrt{3}\sigma_f V_y \left(-3N_x^2 + 3b^2\sigma_f^2 h^2 - 12b\sigma_f M_z\right)}{6\sqrt[3]{\left(-N_x^2 + b^2\sigma_f^2 h^2 - 4\sigma_f b M_z\right)^3}} \quad (26)$$

As the yielding begins when  $\tau_{xypmax} = \tau_f$  it is possible to write:

$$M_z = \frac{\sigma_f b h^2}{4} - \frac{N_x^2}{4b\sigma_f} - \frac{9}{16} \frac{V_y^2}{b\sigma_f (1-D)^2} \quad (27)$$

If the stress that causes the yielding is considered independently, it is possible to write the value of the plastic bending moment ( $M_p$ ), plastic axial force ( $N_p$ ) and the value of the plastic shear force ( $V_p$ ) that cause the full yielding of the cross section of the beam.[9,10,11,12]  $M_p = \frac{\sigma_f b h^2}{4}$   $V_p = \frac{2\sigma_f b h}{3\sqrt{3}}$   $N_p = \sigma_f b h$ . Now, under the hypothesis of strain equivalence [2,22] these expressions are modified to consider the possibility of damage, so we can write  $M_p = \frac{\sigma_f b h^2}{4(1-D)}$   $V_p = \frac{2\sigma_f b h}{3\sqrt{3}(1-D)}$   $N_p = \frac{\sigma_f b h}{(1-D)}$ . Substituting this formulas in the expression of  $M_z$ , we can obtain the yield function ( $Z_{MNVD}$ ) for the 2D beam element, taking into account the effects of damage of material and also the stress due to axial force, shear force and bending moment. [9]

$$Z_{MNVD} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x}{N_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D)} + \frac{1}{3} \left(\frac{V_y}{V_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \quad (28)$$

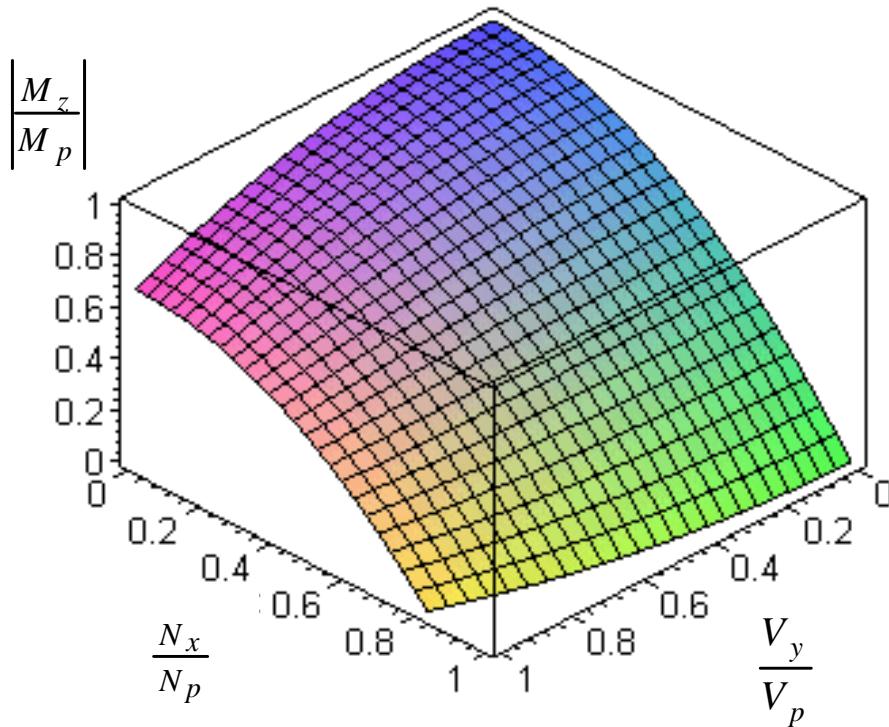
### 3. Results and Result Analysis

If we represent the expression  $|M_z|/M_p$  graphically in the normalized domain  $(0 \leq N_x/N_p \leq 1)$  and  $(0 \leq V_y/V_p \leq 1)$  for  $D=0$ , we obtain the yield function and yield surface without considering the damage of the material.

DAMAGE COUPLED TO YIELD FUNCTION FOR THE ELASTOPLASTIC...

557

$$Z_{MNV} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 - 1 = 0 \quad (29)$$

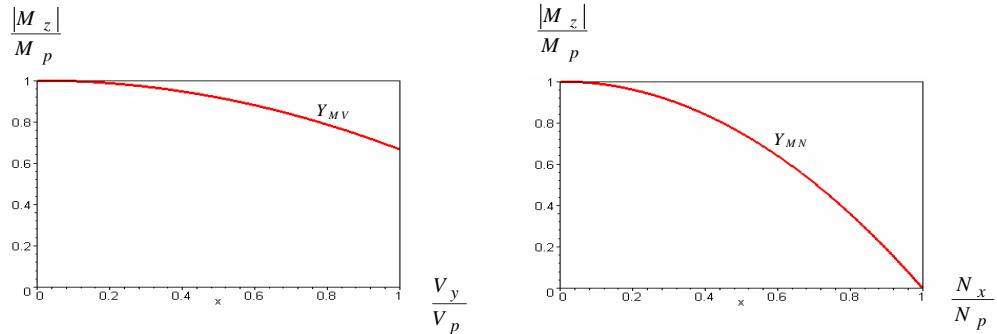
Figure 2. Yield function  $Z_{MNV}$  for rectangular cross section

The yield function associated to the rectangular section Eq. (29) has a curve of contour expressed by Eq. (30).

$$\begin{cases} \text{For } N_x = 0 \quad d = 0 & \Rightarrow \quad Z_{MNV} = Z_{MV} \\ \text{For } V_y = 0 \quad d = 0 & \Rightarrow \quad Z_{MNV} = Z_{MN} \end{cases} \quad (30)$$

$$Z_{MV} = \frac{|M_z|}{M_p} + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 - 1 = 0 \quad (31)$$

$$Z_{MN} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 - 1 = 0 \quad (32)$$

Figure 3. Yield function  $Z_{MV}$  and  $Z_{MN}$ .

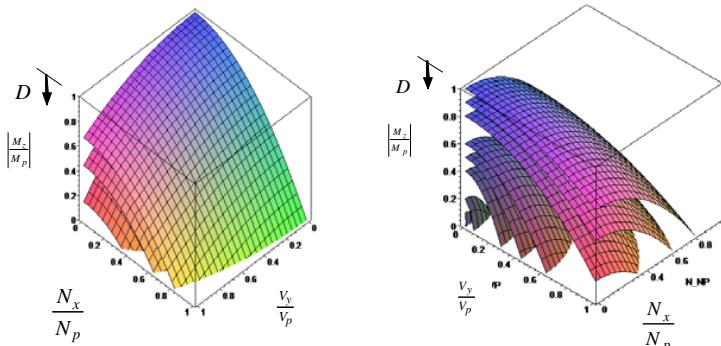
The yield surfaces for a damaged material are shown in Figures 4, 5, 6 and the yield functions associated to the section and each Figure areas follows:

$$\begin{cases} \text{For } N_x = 0 \quad D = 0-1 \quad \Rightarrow \quad Z_{MNVd} = Z_{Mvd} \\ \text{For } V_y = 0 \quad D = 0-1 \quad \Rightarrow \quad Z_{MNVd} = Z_{MNd} \\ \text{For } N_x = 0 \quad V_y = 0 \quad D = 0-1 \quad \Rightarrow \quad Z_{MNVd} = Z_{Md} \end{cases} \quad (33)$$

$$Z_{Mvd} = \frac{|M_z|}{M_p} + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \quad (34)$$

$$Z_{MNd} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D)} - (1-D) = 0 \quad (35)$$

$$Z_{Md} = \frac{|M_z|}{M_p} - (1-D) = 0 \quad (36)$$

Figure 4. Yield surface for rectangular cross section depending on the stresses and damage  $Z_{MNVd}$

## DAMAGE COUPLED TO YIELD FUNCTION FOR THE ELASTOPLASTIC... 559

In the Figure 4, there are graphically represented several yield surfaces for ten values of the variable damage D, which varies between 0 and 1. Notice that the yield surface decreases as damage of the cross section increases because the accumulation of the damage of the section implies a decrease of its capacity of load.

The expression (28) can be used for determining the elastoplastic stiffness matrix of the beam element and therefore, it will be possible to consider damage material in the structural analysis of frame i.e.  $dF = K^{ep}du^{ep}$  where  $dF$  is the stress vector at each beam end,  $K^{ep}$  is the elasticplastic degradation stiffness matrix and  $du^{ep}$  is the elastoplastic displacement vector at the ends of the element. [9,10]

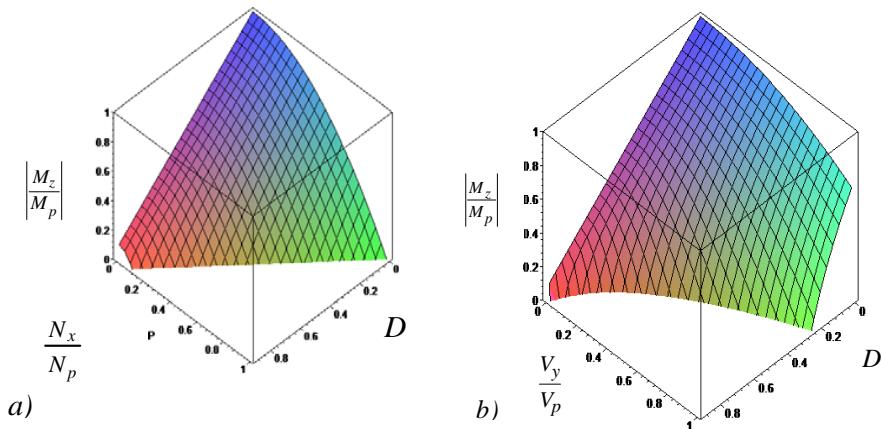


Figure 5. a) Yield surface  $Z_{MNd}$ . b) Yield surface  $Z_{MVd}$ .

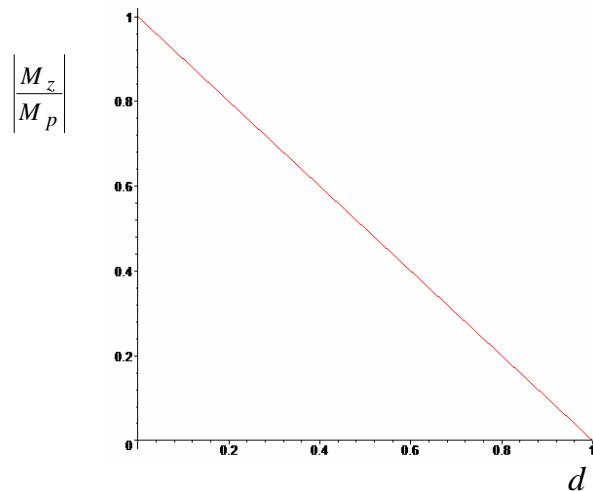


Figure 6. Yield function  $Z_{Md}$

$$dF = K^{ep} du^{ep}$$

$$K^{ep} = K \left[ 1 - \frac{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F}}{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} + \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{\partial \phi^*}{\partial Y}} \right] \quad (37)$$

Where, K is the tangent stiffness matrix of each beam,  $\phi^*$  is the damage dissipation potential (that depends on the internal variable associated to damage, the Y-Damage energy release rate and the accumulated effective plastic strain. An incremental and iterative algorithm can be used for the analysis of frame [11,13,14].

#### 4. Conclusions

In this work, the bases for the numeric study of the beam 2D element in regime elastoplastic have been presented, considering the different stresses that can take part in the yielding of each cross section and the damage that it the material can suffer. The variable damage was introduced considering the theory of the Continuous Damage Mechanics, specifically the principle of equivalent deformation formulated by Lemaître. The yield function considered here can be used to obtain the degradable elastoplastic stiffness matrix of the 2D beam element.

Depending on the stresses considered in the study of the yielding of sections different yield surfaces are showed. When the degradation of the material is considered, there is a yield surface for each value of the variable damage that defines the combination of the stresses that cause the yielding of the cross section of the beam (Figure 4). The existence of damage modifies the characteristics of the rigidity of the beam causing a smaller load capacity of the structure in general.

#### References

1. Timoshenko S, Goodier JN. *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill , New York, 1951.
2. García-Terán JM. Formulación y análisis del comportamiento elasto-plástico acoplado y no lineal geométrico de sistemas estructurales de barras, Tesis Doctoral, Dpto. Resistencia de Materiales y Estructuras, Universidad de Valladolid, Valladolid, España 2002.
3. Lemaître J. *A Course in Damage Mechanics*, Springer, New York, 1992.
4. Rabotnov Y. Creep Rupture in: Applied Mechanics, *Proceedings of the 12th International congress of Applied Mechanics*, Stranford Springer-Verlag, Bberlin, 1968, pp. 342-49.
5. Krenk S, Vissing-J C, Thesbjerg L. Efficient collapse analysis techniques for framed structures, *Computers and Structures*, No. 4, 72(1999)81-96.
6. Neal BG. *The Plastic Methods of Structural Analysis*, Science Paperbacks, 1985.

## DAMAGE COUPLED TO YIELD FUNCTION FOR THE ELASTOPLASTIC... 561

7. Olsen PC. Rigid plastic analysis of plane frame structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **179**(1999)19-30.
8. Ibijola EA. On some fundamental concepts of Continuum damage mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**(2002)1505-20.
9. Chica E, Teran JMG, Iban AL. Yield surface for elastoplastic beam 2D element considering damage material, *8<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5<sup>th</sup> European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Eccomas 2008)*, Venice, Italy, 2008.
10. Chica E, Teran JMG, Iban AL. Lopez P. Analysis of frame involving damage material, geometrical and material nonlinearities, *Fourth International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*, University of Liege, Liege, Belgium, 2008.
11. Bonora N. A non-linear CDM damage model for ductile failure, *Engineering Fracture Mechanics*, **58**(1997)11-28.
12. Ibijola EA. On some fundamental concepts of continuum damage mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**(2002)1505-20.
13. Yingchun X. A multi-mechanism damage coupling model, *International Journal of Fatigue*, **26**(2004)1241-50.
14. Faleiro J, Oller S, Barbat A. Plastic-damage seismic model for reinforced concrete frames, *Computers and Structures*, Nos. 7-8, **86**(2008)581-97.

### D.3.2. Artículo 1

El artículo “*Influence of Ductile Damage Evolution on the Collapse Load of Frames*”, de los autores Edwin L. Chica, Antolín L. Ibán, José M.G. Terán y Pablo M. López-Reyes, fue publicado (Tabla D.4) en la revista *Journal of Applied Mechanics* de la ASME (American Society of Mechanical Engineers), en el Volumen 77 de Mayo de 2010 [15].

**Tabla D.4:** Datos de la publicación del Artículo 1

Fecha			Factor de Impacto	
Envío	Aceptación	Publicación	2008 <sup>a</sup>	2011 <sup>b</sup>
Febrero 2009	Julio 2009	Mayo 2010	1,232	0,949

<sup>a</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha de aceptación

<sup>b</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha actual

Se reproduce a continuación con el formato final publicado.

## Influence of Ductile Damage Evolution on the Collapse Load of Frames

**Edwin L. Chica<sup>1</sup>**

Department of Mechanical Engineering,  
University of Antioquia,  
C/67 No. 53-108,  
AA 1226 Medellín, Colombia  
e-mail: echica@udea.edu.co

**Antolín L. Ibán**

e-mail: ali@eis.uva.es

**José M. G. Terán**

e-mail: teran@uva.es

Solid Mechanics and Structures Group,  
E.T.S.I.I. (Industrial Engineering),  
University of Valladolid,  
C/Paseo del Cauce, 59,  
CP 47011 Valladolid, Spain

**Pablo M. López-Reyes**

Structural Design Area,  
CARTIF,  
Technological Park of Boecillo,  
CP 47151 Valladolid, Spain  
e-mail: pablop@cartif.es

*In this note we analyze the influence of four damage models on the collapse load of a structure. The models considered here have been developed using the hypothesis based on the concept of effective stress and the principle of strain equivalence and they were proposed by Lemaitre and Chaboche (1990, *Mechanics of Solid Materials*), Wang (1992, “Unified CDM Model and Local Criterion for Ductile Fracture—I. Unified CDM Model for Ductile Fracture,” *Eng. Fract. Mech.*, **42**, pp. 177–183), Chandrananth and Pandey (1995, “An Isotropic Damage Model for Ductile Material,” *Eng. Fract. Mech.*, **50**, pp. 457–465), and Bonora (1997, “A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure,” *Eng. Fract. Mech.*, **58**, pp. 11–28). The differences between them consist mainly in the form of the dissipative potential from which the kinetic law of damage is derived and also in the assumptions made about some parameters of the material.*

[DOI: 10.1115/1.4000427]

### 1 Introduction

The continuum damage mechanics (CDM) is a new approach through which the material degradation can be quantified as a measurable parameter called the *damage variable*. It is considered as an internal variable in the framework of thermodynamics and it is a measure of the degradation of the material. The constitutive model of a postulated damage parameter should be a function of

the local stress, strain, strain rate, etc. Integrating over the loading history, the damage law will predict the material failure dynamically [1,2]. The dissipation potential function ( $\phi$ ) is a scalar function of all the *observable variables* (elastic strain tensor  $\epsilon_{ij}$  and temperature  $T$ ; their associated variables are the stress tensor  $\sigma_{ij}$  and the entropy  $s$ ) and the *internal variables* (accumulated plastic strain  $p$  and damage variable  $D$ ; their associated variables are the increment of yield surface  $R$  and the damage strain energy release rate  $Y$ ) as parameters [2–4]. The differences between many ductile models are mainly based on the form of this potential.

### 2 Materials and Methods

The analysis of frames considering damaged material can be done using the same concepts of equivalence of stress and strain as in continuum mechanics. Therefore, if we consider a 2D beam element of a frame between nodes 1 and 2 (Fig. 1), generalized damage, stresses, and displacements can be defined, respectively, at the beam-ends as

$$\{D\} = \{D_1, D_2\} \quad (1)$$

$$\{dF\} = \{dN_{x1}, dV_{y1}, dM_{z1}, dN_{x2}, dV_{y2}, dM_{z2}\} \quad (2)$$

$$\{du^{ep}\} = \{u_{x1}^{ep}, v_{y1}^{ep}, \theta_1^{ep}, u_{x2}^{ep}, v_{y2}^{ep}, \theta_2^{ep}\} \quad (3)$$

A constitutive model for the 2D beam element can be defined as the set of equations that relates the generalized stress with the history of generalized displacements. For the elastic case considering that the variation in the elastoplastic displacement  $du^{ep}$  at the beam-ends can be split into its elastic ( $du^e$ ) and its plastic ( $du^p$ ) components, in a vectorial form  $\{du^{ep}\} = \{du^e\} + \{du^p\}$ ,

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} = [K](\{du^{ep}\} - \{du^p\}) \quad (4)$$

where  $[K]$  is the elastic stiffness matrix for the 2D beam element.

The variation in plastic displacement  $\{du^p\}$ , taking into account the laws in the case of associated flow, can be expressed through

$$\{du^p\} = \{d\lambda\} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \quad (5)$$

where  $Z$  is the yield function for the beam element and  $\{d\lambda\}$  is a  $2 \times 1$  column vector of so-called plastic multipliers  $d\lambda_1, d\lambda_2$  that measure the total plastic flow of the beam-ends.

The classic CDM formulation from Chaboche and Lemaitre [5], in the form specifically related to damage evolution, can be generically expressed as

$$\{dD\} = \{d\lambda\} \left\{ -\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \right\} \quad \text{and} \quad \dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)} \quad (6)$$

Equation (6), the kinetic law of damage evolution, shows the coupling between the damage rate and the effective accumulated plastic strain rate  $\dot{p}$  by means of the plastic multiplier.  $\phi^*$  is the damage dissipation potential.

From the plastic consistency condition, we can write

$$\dot{Z} = \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \{dF\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \{dD\} = 0 \quad (7)$$

By substituting Eqs. (4)–(6) into Eq. (7), isolating  $\{d\lambda\}$  and substituting it in Eqs. (6) and (4) yields

$$\begin{aligned} \{dF\} &= [K] \left[ 1 - \frac{[K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\}}{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \right\}} \right] \{du^{ep}\} \\ &= [K^{ep}] \{du^{ep}\} \end{aligned} \quad (8)$$

where  $[K^{ep}]$  is the elastoplastic degradation stiffness matrix for the 2D beam element.

<sup>1</sup>Corresponding author.

Contributed by the Applied Mechanics Division of ASME for publication in the JOURNAL OF APPLIED MECHANICS. Manuscript received February 10, 2009; final manuscript received July 17, 2009; published online February 4, 2010. Assoc. Editor: Yonggang Huang.

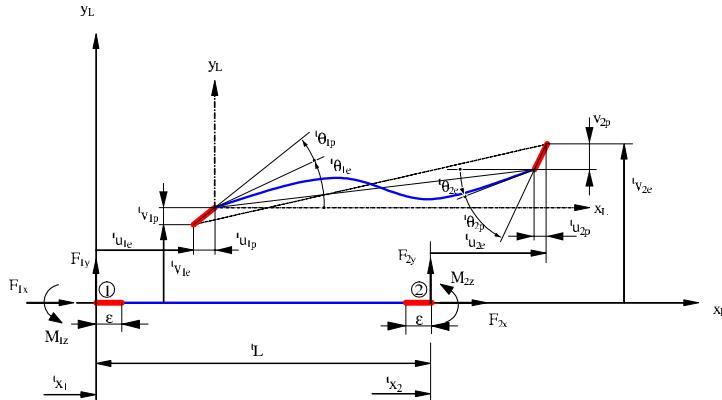


Fig. 1 Beam element with plasticity and damage at its ends

To determine the elastoplastic degradation stiffness matrix, it is necessary to evaluate the potential derivative with respect to the damage strain energy  $Y$ .

$$Y = -\frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \quad \text{where}$$

$$f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) = \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)^2 \right] \quad (9)$$

where  $\sigma_m$  is the hydrostatic stress,  $\sigma_{eq}$  is the von Mises equivalent stress,  $\nu$  is the Poisson's ratio, and  $E$  is the Young's modulus.

The next step consists of deriving the damage dissipation potential (Table 1) with respect to  $Y$  for obtaining the damage evolution law. Now we describe the procedure for Lemaitre's model [6].

For a ductile material, the effective equivalent von Mises stress can be written as a function of the accumulated plastic strain, using the Ramberg-Osgood power law, as follows:

$$\frac{\sigma_{eq}}{1-D} = \kappa p^n \quad p^n = \frac{\sigma_{eq}}{\kappa(1-D)} \quad \text{or} \quad \sigma_{eq} = \kappa p^n (1-D) \quad (10)$$

where  $\kappa$  is a material constant. Then, by substituting Eqs. (9) and (10) into Lemaitre's damage evolution law (Table 1), we get

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = -\left[ \frac{\kappa^2}{2ES_L} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \right] \frac{p^{2n}}{1-D} = -[B_0] \frac{p^{2n}}{1-D} \quad (11)$$

Table 1 Damage evolution law for different approaches

Bonora [3]	$\phi^* = \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{Y}{S_o} \right)^2 \frac{S_o}{1-D} \right] \frac{(D_{cr}-D)^{\alpha_B-1/\alpha_B}}{p^{(2+n)/n}}$
Lemaitre [5]	$\phi^* = \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{Y}{S_L} \right)^2 \frac{S_L}{1-D} \right]$
Wang [1]	$\phi^* = \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{Y}{S_w} \right)^2 \frac{S_w}{1-D} \right] \frac{(p_{cr}-p)^{\alpha_w-1}}{p^{2n}}$
Chandrakanth [2]	$\phi^* = \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{Y}{S_c} \right)^2 \frac{S_c}{1-D} \right] \frac{1}{D^{\alpha_c/n} \cdot p^{2n}}$

$D_{cr}$  and  $p_{cr}$  are the damage and deformation at failure initiation, respectively. The terms  $S_o$ ,  $S_L$ ,  $S_w$ ,  $S_c$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_w$ , and  $\alpha_c$  are the material constants and  $n$  is the hardening constant of the material.

In the case of proportional loading, the ratio  $\sigma_m/\sigma_{eq}$  can be considered as a constant with respect to time so, for simplicity, the term  $[(\kappa^2/2ES_L)f(\sigma_m/\sigma_{eq})]$  is renamed as  $[B_0]$ .

By substituting Eq. (11) in the damage evolution law given in Eq. (6), we obtain

$$\dot{D} = [B_0]p^{2n}\dot{p} \quad \text{or} \quad \frac{dD}{dp} = [B_0]p^{2n} \quad (12)$$

Then, we integrate Eq. (12) between the initial condition  $D=D_o$  and  $D=D_{cr}$ . The damage process remains inactivated (i.e.,  $D=D_o$ ) until the effective accumulated plastic strain  $p$  reaches a threshold strain  $p_{th}$  (i.e.,  $dD=0$  and  $D=0$  or  $D=D_o$ ). When  $p=p_{th}$ , nucleation is the dominating void growth state [3]. When  $D=D_{cr}$ , coalescence dominates the void growth process and the effective accumulated plastic strain  $p$  reaches the critical value  $p_{cr}$  for which failure occurs.

$$D_{cr} - D_o = [B_0] \left( \frac{p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}}{2n+1} \right) \quad \text{and}$$

$$D_{cr} - D = [B_0] \left( \frac{p_{cr}^{2n+1} - p^{2n+1}}{2n+1} \right) \quad (13)$$

By eliminating  $[B_0]$  in these equations, we obtain a general integrated evolution law for ductile plastic damage

$$p^{2n+1} = p_{cr}^{2n+1} - \left( \frac{D_{cr} - D}{D_{cr} - D_o} \right) (p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}) \quad (14)$$

By substituting the same term into Eq. (11), we obtain the derivative of the dissipation potential with respect to  $Y$ .

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = -\frac{p^{2n}}{1-D} \left( \frac{D_{cr} - D_o}{p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}} \right) (2n+1) \quad (15)$$

Similar procedures are used for obtaining the expressions for other models (Table 2). Figure 2 shows the evolution law for ductile plastic damage of the models considered. The material coefficients are taken from Ref. [3].

The next step is to determine  $\{\partial Z/\partial F\}$  and  $\{\partial Z/\partial D\}$ . It is necessary to define the yield function  $Z$  for the beam element in function of the stress and the damage of the material. For the following assumptions (material nonlinearity simulated by the formation of plastic zones of zero length at the beam-ends, effect of strain hardening not considered, and rectangular cross sections  $b \times h$ ) [7], we get

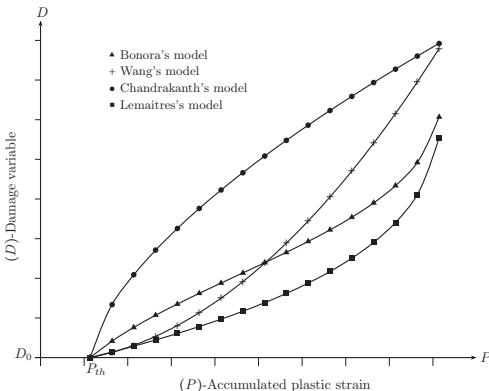
**Table 2**  $\{\partial\phi^*/\partial Y\}$  and ductile plastic damage evolution law for different models

	$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = -\alpha \left( \frac{(D_{cr}-D_o)^{1/\alpha}}{\ln(p_{cr}/p_{th})} \right) \frac{(D_{cr}-D)^{\alpha-1/\alpha}}{(1-D)p}$
Bonora ( $PA_{MNVD}B$ )	$D = D_o + (D_{cr}-D_o) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\ln(p/p_{th})}{\ln(p_{cr}/p_{th})} \right)^\alpha \right]$ $p = e^A$ , where $e$ is the base of the Neperian logarithm $A = \ln(p_{cr}) - \ln(p_{cr}/p_{th}) \left( \frac{D_{cr}-D}{D_{cr}-D_o} \right)^{1/\alpha}$
Lemaitre ( $PA_{MNVD}L$ )	$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = -\frac{p^{2n}}{1-D} \left( \frac{D_{cr}-D_o}{p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}} \right) (2n+1)$ $D = D_{cr} - (D_{cr}-D_o) \left( \frac{p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}}{p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}} \right)$ $p^{2n+1} = p_{cr}^{2n+1} - \left( \frac{D_{cr}-D}{D_{cr}-D_o} \right) (p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1})$
Wang ( $PA_{MNVD}W$ )	$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = -\alpha \left( \frac{D_{cr}-D_o}{(p_{cr}-p_{th})^\alpha} \right) \frac{(p_{cr}-p)^{\alpha-1}}{1-D}$ $D = D_{cr} - (D_{cr}-D_o) \left( \frac{p_{cr}-p}{p_{cr}-p_{th}} \right)^\alpha$ $p = p_{cr} - (p_{cr}-p_{th}) \left( \frac{D_{cr}-D}{D_{cr}-D_o} \right)^{1/\alpha}$
Chandrakanth ( $PA_{MNVD}C$ )	$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = -\frac{1}{\alpha_n} \left( \frac{D_{cr}-D_o}{p_{cr}-p_{th}} \right) \frac{1}{D^{\alpha/n}(1-D)}$ $D = \left[ D_o^{\alpha_n} + (D_{cr}^{\alpha_n} - D_o^{\alpha_n}) \left( \frac{p-p_{th}}{p_{cr}-p_{th}} \right) \right]^{1/\alpha_n}$ $p = p_{th} + (p_{cr}-p_{th}) \left( \frac{D^{\alpha_n}-D_o^{\alpha_n}}{D_{cr}^{\alpha_n}-D_o^{\alpha_n}} \right)$ $\alpha_n = \frac{\alpha}{n} + 1$

$$Z = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 \frac{1}{1-D} + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \quad (16)$$

$M_z$ ,  $N_x$ , and  $V_y$  are the stresses on the cross section of the beam and  $M_p$ ,  $N_p$ , and  $V_p$  are the plastic bending moment, plastic axial force, and plastic shear force, respectively, that cause the full yielding of the cross section of the beam.

Considering the yielding function of Eq. (16), we get

**Fig. 2** Damage ( $D$ ) versus accumulated plastic strain ( $p$ )

$$\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \frac{1}{M_p} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{where}$$

$$A_i = \frac{2N_{xi}}{N_p^2(1-D_i)}; \quad B_i = \frac{2}{3} \frac{V_{yi}}{V_p^2(1-D_i)^3} \quad (17)$$

$$\left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{where}$$

$$C_i = \left( \frac{N_{xi}}{N_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D_i)^2} + \left( \frac{V_{yi}}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D_i)^4} + 1 \quad (18)$$

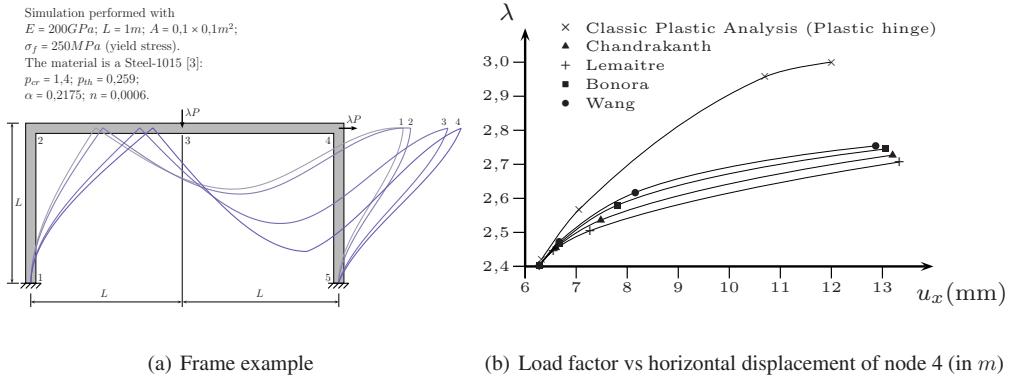


Fig. 3 Test on a 2D frame

### 3 Results and Result Analysis

The accuracy of the model is verified by simulating one experiment for which the data were available in literature [8]. We can conclude that the model is simple but it still represents accurately the behavior of the structure.

After this validation, we apply the method to compare the collapse load of the 2D frame shown in Fig. 3(a). We consider yielding by bending moment and axial and shear forces. The loads are proportionally increased from zero to their collapse values using an incremental and iterative procedure. Within each load increment, the equilibrium equations are solved by Newton-Raphson methods. Figure 3(a) shows the accumulated deformed shape of the frame for different load factors ( $\lambda$ ) for the model ( $PA_{MNVD}$ ) $B$ . In all the models, the sequence of the cross section yielding is 5, 4, 3, and 1 and the collapse load is  $P = \lambda \cdot M_p$ .

The response curves for the classic plastic analysis and the elastoplastic degradation analysis are shown in Fig. 3(b). They were obtained considering the material nonlinear effect and the elastoplastic damage model proposed, using the hypothesis of strain equivalence and dissipative potential from which the kinetic law of damage is derived. The curves of damage models are below the curve of the plastic analysis model due to the loss of stiffness of some sections: The load factor is lower and the displacements are higher. The effective accumulated plastic strain plays an important role on the damage evolution law. The evolution of the damage variable is much greater with Wang's model than with the other models. Therefore, the progressive reduction in material ductility is much higher.

### 4 Conclusions

The damage model shows a nonlinear variation with respect to plastic strain and it can be identified with a quantitative evaluation of the parameters  $D_{cr}$ ,  $D_o$ ,  $p_{th}$ ,  $p_{cr}$  and also the hardening param-

eter, which defines the real stress-strain curve. The effects of axial and shear forces and bending moment have been taken into account for determining the yielding of the cross section of the beam.

The results lead to a more accurate prediction of the load that causes the yielding of the sections of the beam until the mechanism of collapse is formed. We can observe that the transmission of the load state among all the beams of a system is affected by the behavior of the plastic material and the accumulation of plastic strain, which leads to damage in the section and to the subsequent decreasing in the load-bearing capacity of the structure.

### Acknowledgment

This work is partially supported by the PSE-HABITAT\_2030 and funded by the M.E.C. (Spanish Government).

### References

- [1] Wang, T., 1992, "Unified CDM Model and Local Criterion for Ductile Fracture—I. Unified CDM Model for Ductile Fracture," *Eng. Fract. Mech.*, **42**, pp. 177–183.
- [2] Chandrasekaran, S., and Pandey, P., 1995, "An Isotropic Damage Model for Ductile Material," *Eng. Fract. Mech.*, **50**, pp. 457–465.
- [3] Bonora, N., 1997, "A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure," *Eng. Fract. Mech.*, **58**, pp. 11–28.
- [4] Le Roy, G., Embury, J., Edwards, G., and Ashby, M., 1981, "A Model of Ductile Fracture Based on the Nucleation and Growth of Void," *Acta Metall.*, **29**, pp. 1509–1522.
- [5] Lemaître, J., 1992, *A Course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [6] Lemaître, J., and Chaboche, J. L., 1990, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] Chica, E., Terán, J., and Ibán, A., 2008, "Yield Surface for Elastoplastic 2D Beam Element Considering Damaged Material," Eighth World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), Venice, Italy, Jun. 30–Jul. 4.
- [8] Inglessis, P., Gómez, G., Quintero, G., and Flórez, J., 1999, "Model of Damage for Steel Frame Members," *Eng. Struct.*, **21**, pp. 954–964.

### D.3.3. Artículo 2

El artículo “*A Nonlinear model for the Elastoplastic Analysis of 2D Frames Accounting for Damage*”, de los autores A. Lorenzana, Pablo M. López-Reyes, E. Chica, J.M.G. Terán y M. Cacho, fue publicado (Tabla D.5) en la revista *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, en el Volumen 49(2) de Abril de 2011 [41].

**Tabla D.5:** Datos de la publicación del Artículo 2

Fecha			Factor de Impacto	
Envío	Aceptación	Publicación	2009 <sup>a</sup>	2011 <sup>b</sup>
Septiembre 2010	Diciembre 2010	Abril 2011	0,328	0,283

<sup>a</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha de aceptación

<sup>b</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha actual

Se reproduce a continuación con el formato final publicado.

## A NONLINEAR MODEL FOR THE ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF 2D FRAMES ACCOUNTING FOR DAMAGE

ANTOLÍN LORENZANA

*ITAP, University of Valladolid, Valladolid, Spain; e-mail: ali@eis.uva.es*

PABLO M. LÓPEZ-REYES

*CARTIF Centro Tecnológico, Valladolid, Spain; e-mail: pablop@cartif.es*

EDWIN CHICA

*University of Antioquia, Medellín, Colombia; e-mail: echica@udea.edu.co*

JOSÉ M.G. TERÁN, MARIANO CACHO

*EII, University of Valladolid, Valladolid, Spain; e-mail: teran@uva.es; cacho@eis.uva.es*

A simple and efficient procedure for non-linear analysis of frames is presented, under the hypothesis that the non-linear effects, if appear, are concentrated in the beam-ends. We consider a damage model based on Continuum Damage Mechanics, but affecting the cross-section as a whole. The elasto-plastic behaviour is included formulating the tangent elastoplastic stiffness matrix in such a way that the yield function, in terms of internal forces (axial, shear and bending moment), is affected by the damage in each plastic cross-section. After the verification of the model, an example of application is solved for different assumptions on the yield function (depending on the internal forces considered) with the damage being taken into account or disregarded. The differences on the collapse load, for each case, are shown and some conclusions obtained, among them that the method can evaluate in a more accurate way the load that causes the collapse of frames under increasing loading, considering a fully plastic non-linear analysis.

*Key words:* plastic methods, structural analysis, material nonlinearities, elastoplastic stiffness matrix, Bonora damage model

### 1. Introduction

In the civil and structural engineering, there are several approaches to deal with damage. The structural damage can be quantified through a damage index, which is the value of damage normalized to the failure level of the

structure: a value equal to 1 corresponds to the complete structural failure (Faleiro *et al.*, 2008), so the structure can not withstand further loadings.

In this paper, the damage index is derived from Continuum Mechanics and Ductile Fracture theories applied to metallic materials. Using standard stress-strain relationships in elastoplasticity together with thermodynamic laws for irreversible processes, and assuming that fracture takes place at a certain rate of plastic deformation, after several mathematical manipulations it is possible to couple general plasticity theory with damage theory through the hypothesis of strain equivalence (Lemaitre, 1985) to relate equivalent plastic deformation with damage.

The Continuum Damage Mechanics (CDM) approach, initially proposed by Lemaitre, takes into account the effects associated to a given damage state through the definition of an internal state variable. The set of constitutive equations for the damaged material is then derived within a thermodynamic framework. Many authors have modified Lemaitre's linear damage accumulation law in order to be able to incorporate experimental damage measurements with different types of materials fitting in it. A nonlinear CDM model, recently proposed by Bonora (Bonora, 1997, 1998; Bonora *et al.*, 2005) is able to precisely describe the damage evolution for different types of metals and has been used by other authors (Bobiński and Tejchman, 2006; Chaboche, 1984; Chandrakanth and Pandey, 1993, 1995a; Tai and Yang, 1986; Tai, 1990).

The aim of this paper is to develop a general, accurate, efficient and simple procedure for solving the fully non-linear problem of framed structures, using elastoplastic beam finite elements and considering material nonlinearities and the loss of rigidity due to the increase of damage in the cross-section and using an explicit form of the tangent stiffness matrix, called the *elastoplastic damaged stiffness matrix* (Ibijola, 2002; Yingchun, 2004). The basis of this method is a direct combination of existing formulations (Navier-Bernoulli's beam theory and Bonora's CDM damage model) to determine in a more accurate way the collapse load of standard frames.

## 2. Damage model for cross-sections of beams based on CDM

From a general point of view, damage can be defined as a progressive loss of load carrying capability as a result of some irreversible processes that occur in the material microstructure during the deformation process (Lemaitre,

1985). Assuming that micro-cracks and micro-voids have a uniformly distributed orientation, the scalar  $D$  can be defined in terms of the relative reduction of the cross-section (Lemaitre, 1984)

$$D = 1 - \frac{A_{eff}}{A_0} \quad (2.1)$$

where  $A_0$  is the initial section and  $A_{eff}$  is the effective area:  $A_{eff} = A_0(1-D)$ .

For every value of  $D \in [0, 1]$ , the effective stress and strain for uniaxial behaviour can be defined (Simo and Ju, 1987)

$$\text{Effective stress: } \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} = \frac{F}{A_{eff}} \quad (2.2)$$

$$\text{Effective strain: } \bar{\varepsilon} = (1-D)\varepsilon \quad (2.3)$$

where  $\varepsilon$  and  $\sigma$  are the usual strain and stress Cauchy tensors. For a virgin material,  $D = D_0 \approx 0$  and for an exhausted state  $D = D_{cr} < 1$ , where  $D_0$  is the initial amount of damage and  $D_{cr}$  is the critical damage.

Then, assuming the hypothesis of strain and stress equivalence, the material behaviour for a damaged material can be written as

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (2.4)$$

and now it is necessary to show the evolution of  $D$  from its initial value  $D_0$  (usually 0) to  $D_{cr}$ , value less than or equal to 1 from which the former expressions are not considered valid.

For the Bonora (1997) model assumed,  $D$  depends only, for each material and temperature  $T$ , on the amount of equivalent plastic strain through the following expressions

$$\begin{aligned} \phi &= F_p(\sigma_{eq}, R, \sigma_y) + \phi^*(Y, D, \dot{p}, T) \\ Y &= -\frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

where  $\phi$  is the total dissipation potential (in function of the equivalent stress  $\sigma_{eq}$ , material hardening  $R$  and yield stress  $\sigma_y$ ),  $\phi^*$  is the damage dissipation potential and  $Y$  is the damage energy release rate.  $F_p$  is the dissipation potential associated with plastic deformation,  $\dot{p}$  is the accumulated effective plastic strain,  $\sigma_m$  is the hydrostatic stress,  $\sigma_{eq}$  is the Von Mises equivalent stress,  $\nu$  is the Poisson ratio,  $E$  is the Young modulus and the relation  $\sigma_m/\sigma_{eq}$  is called the *triaxiality ratio* or *stress rigidity parameter* (Lebedev *et al.*, 2001).

Bonora proposed the following expression for the damage dissipation potential

$$\phi^* = \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{Y}{S_o} \right)^2 \frac{S_o}{1-D} \right] \frac{(D_{cr} - D)^{\alpha-1/\alpha}}{p^{(2+n)/n}} \quad (2.6)$$

where  $S_o$  is a material constant,  $n$  is the Ramberg-Osgood material exponent,  $\alpha$  is the damage exponent that determines the shape of the damage evolution and  $p$  is the accumulated plastic strain.

Assuming that the rate of the plastic multiplier  $\dot{\lambda}$  is proportional to the rate of the effective accumulated plastic strain  $\dot{p}$

$$\dot{\lambda} = \dot{p}(1-D) \quad (2.7)$$

and that for proportional loading the kinetic law, according to Lemaitre's model, is

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \quad (2.8)$$

the relationship between damage and effective plastic strain is, finally

$$D = D_0 + (D_{cr} - D_0) \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\ln \frac{p}{p_{th}}}{\ln \frac{p_{cr}}{p_{th}}} \right]^\alpha \right\} \quad (2.9)$$

where  $p_{th}$  is the plastic threshold value and  $p_{cr}$  is the critical plastic value corresponding to  $D_{cr}$  (Bonora, 1997).

### 3. Elastoplastic stiffness matrix considering damage

Assuming standard elastoplastic behaviour (Deierlein *et al.*, 2001) for the beam element, with additive decomposition of displacements  $\{du^{ep}\}$  at the ends of the element into elastic  $\{du^e\}$  and plastic  $\{du^p\}$  components

$$\{du^{ep}\} = \{du^e\} + \{du^p\} \quad (3.1)$$

and that plastic deformation takes place only on the beam-ends (concentrated plasticity), and hence also damage, the resulting beam model is represented in Fig. 1, where the initial and deformed configurations are shown (note that the length of small segments at the beam-ends should be infinitesimal).

This concentrated plasticity model does not account for the spreading of plasticity from outer fibers inwards. This behaviour could be considered using more advanced models like the layered approach (Chandrakanth and Pandey,

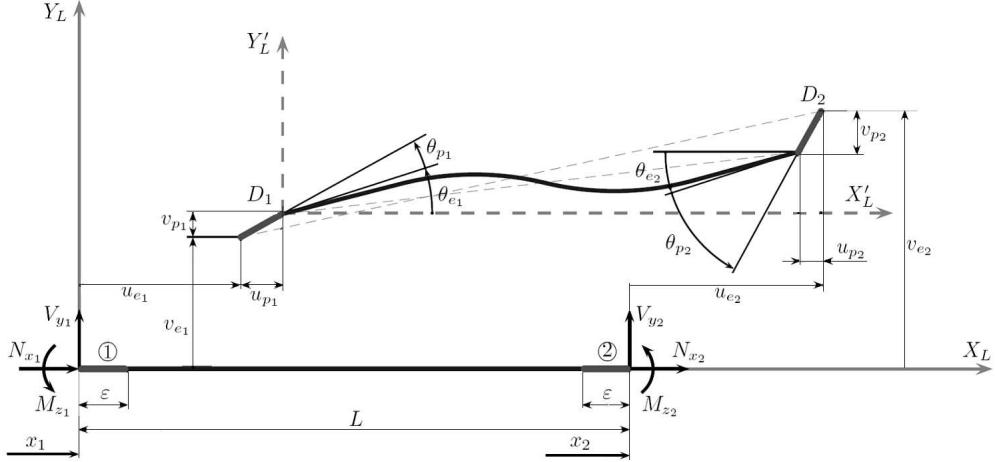


Fig. 1. Beam element with plasticity and damage at its ends

1997) but, in engineering practice, the distributed plasticity models are less frequently used than frame theories with concentrated plastic hinges (Inglessis *et al.*, 1999).

The linear elastic response is governed by

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} \quad (3.2)$$

where  $[K]$  is the standard elastic stiffness matrix of a beam element and  $\{dF\}$  is the beam-end force vector which for the 2D case presented in this paper is  $\{dF\}^\top = \{dN_{x1}, dV_{y1}, dM_{z1}, dN_{x2}, dV_{y2}, dM_{z2}\}^\top$ , and the displacement vector is  $\{du^e\}^\top = \{u_{x1}, u_{y1}, \theta_1, u_{x2}, u_{y2}, \theta_2\}^\top$ .

In a similar way, it is necessary to determine the relationship between the increment of force and the increment of elastoplastic displacement  $\{du^{ep}\}$

$$\{dF\} = [K^{ep}]\{du^{ep}\} \quad (3.3)$$

From Eqs. (3.1) and (3.2)

$$\{dF\} = [K]\left(\{du^{ep}\} - \{du^p\}\right) \quad (3.4)$$

so the increment of plastic displacement  $\{du^p\}$ , assuming associated flow rule, can be expressed as

$$\{du^p\} = \{d\lambda\} \left\{ \frac{dZ}{dF} \right\} \quad (3.5)$$

where  $Z$  is the yield function for the beam element and  $\{d\lambda\}$  is the vector of so-called plastic multipliers  $d\lambda_1, d\lambda_2$  in each beam-end. Using the plastic

consistency condition

$$d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{if } Z < 0 \\ > 0 & \text{if } Z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{lll} \text{or} & p < p_{th} \\ \text{or} & p \geq p_{th} \end{array} \quad (3.6)$$

together with Eq. (2.8) for the elastoplastic beam element

$$\{dD\} = \{d\lambda\} \left\{ \frac{-\partial\phi^*}{\partial Y} \right\} \quad (3.7)$$

and the plastic flow rule condition

$$\dot{Z} = \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \{dF\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \{dD\} = 0 \quad (3.8)$$

and substituting Eqs. (3.4) and (3.7) into Eq. (3.8), the following expression for  $\{d\lambda\}$  can be found

$$\{d\lambda\} = \frac{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \{du^{ep}\}}{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \left\{ \frac{\partial\phi^*}{\partial Y} \right\}} \quad (3.9)$$

and taking former equations to Eq. (3.3), the final (Chica *et al.*, 2010) relationship between forces and displacements for the elastoplastic beam element is

$$\{dF\} = [K] \left( 1 - \frac{[K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\}}{\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} [K] \left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} \left\{ \frac{\partial\phi^*}{\partial Y} \right\}} \right) \{du^{ep}\} = [K^{ep}] \{du^{ep}\} \quad (3.10)$$

Now it is necessary to relate the term  $\{\partial\phi^*/\partial Y\}$  with known parameters for the beam element. Using Eq. (2.6)

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = \frac{Y}{S_o} \frac{(D_{cr} - D)^{\alpha-1/\alpha}}{p^{(2+n)/n}} \frac{1}{1-D} \quad (3.11)$$

and substituting the expression for  $Y$  given in Eq. (2.5) in Eq. (3.11)

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = -\frac{\sigma_{eq}^2}{(1-D)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{1}{2ES_o} \frac{(D_{cr} - D)^{\alpha-1/\alpha}}{p^{(2+n)/n}} \frac{1}{1-D} \quad (3.12)$$

and using Von Mises plastic criterion for ductile materials, together with the Ramberg-Osgood (Ramber and Osgood, 1943) power law, the effective equivalent stress can be given as a function of the accumulated plastic strain as

$$\frac{\sigma_{eq}}{1-D} = \kappa p^{1/n} \quad (3.13)$$

where  $\kappa$  is a material constant. Then, substituting Eq. (3.13) into Eq. (3.12),  $n$  vanishes, resulting

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = -f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{\kappa^2}{2ES_o} \frac{(D_{cr} - D)^{\alpha-1/\alpha}}{p} \frac{1}{1-D} \quad (3.14)$$

To determine the term  $f(\sigma_m/\sigma_{eq})[\kappa^2/(2ES_o)]$ , the following procedure is used. Equations (2.7) and (2.8), together with Eq. (3.14) leads to

$$\dot{D} = \frac{\kappa^2}{2ES_o} (D_{cr} - D)^{\alpha-1/\alpha} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{\dot{p}}{p} \quad (3.15)$$

and integrating between  $D_0$  and  $D_{cr}$

$$(D_{cr} - D_0)^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\kappa^2}{2ES_o} \ln \frac{p_{cr}}{p_{th}} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \quad (3.16)$$

where it is possible to identify

$$\frac{\kappa^2}{2ES_o} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) = \alpha \frac{(D_{cr} - D_0)^{1/\alpha}}{\ln \frac{p_{cr}}{p_{th}}} \quad (3.17)$$

so that finally the referred factor in Eq. (3.10) is now known

$$\left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \right\} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

with

$$A_i = -\alpha \frac{(D_{cr} - D_0)^{1/\alpha}}{\ln \frac{p_{cr}}{p_{th}}} \frac{(D_{cr} - D_i)^{\alpha-1/\alpha}}{p_i} \frac{1}{1-D_i}$$

and only the terms involving  $Z$  are not yet identified.  $Z$  is the so-called yield function, which includes damage, meaning, for any cross-section, the values of damage, axial and shear forces and bending moment from which plastic and damage levels can increase, according to the flow rule.

For simplicity but without loss of generality, we present the derivation of the yield function for a rectangular  $b \times h$  cross-section in a 2D beam, assuming the Von Mises yield criterion, associated flow rule and damage as defined previously. According to the CDM and neglecting plastic hardening, the yield criterion is expressed in terms of the effective stress as

$$Z = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - \sigma_y \leq 0 \quad (3.19)$$

where  $\sigma_y$  is the elastic limit of the material, and  $\sigma_{eq}$  is given, according to the von Mises yield criterion, by

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (3.20)$$

where  $\sigma_x$  is the normal stress in the beam due to the axial force and bending moment and  $\tau_{xy}$  is the shear stress due to the shear force. Although real materials exhibit some kind of hardening, its effects can be neglected for some ductile steels as the one used in this paper (S-1015).

As it is common for undamaged materials, the values of the plastic bending moment  $M_p$ , plastic axial force  $N_p$  and plastic shear force  $V_p$  that cause the full yielding of the cross-section of the beam are (Krenk *et al.*, 1999; Neal, 1985; Olsen, 1999)

$$M_p = \frac{\sigma_y b h^2}{4} \quad N_p = \sigma_y b h \quad V_p = \frac{2\sigma_y b h}{3\sqrt{3}} \quad (3.21)$$

and including the hypothesis of strain equivalence (Lemaitre, 1985), these expressions change

$$M_p = \frac{\sigma_y b h^2}{4(1 - D)} \quad N_p = \frac{\sigma_y b h}{1 - D} \quad V_p = \frac{2\sigma_y b h}{3\sqrt{3}(1 - D)} \quad (3.22)$$

In the case of a section simultaneously subjected to the bending moment  $M_z$ , axial  $N_x$  and shear forces  $V_y$ , for the usual case in which plasticity first appears in the outer part of the cross-section due to  $M_z$ , and considering that the section is fully plastic when the shear stress reaches its maximum value  $\sigma_y/\sqrt{3}$  in any internal point of the section, the resulting equation is

$$M_z = \frac{\sigma_y b h^2}{4} - \frac{N_x^2}{4b\sigma_y} - \frac{9}{16} \frac{V_y^2}{b\sigma_y(1 - D)^2} \quad (3.23)$$

Substituting the former expressions into Eq. (3.19), the yield function  $Z$  is obtained and shown in Fig. 2 for different values of  $D$

$$Z = \frac{|M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x}{N_p}\right)^2 \frac{1}{1 - D} + \frac{1}{3} \left(\frac{V_y}{V_p}\right)^2 \frac{1}{(1 - D)^3} - (1 - D) = 0 \quad (3.24)$$

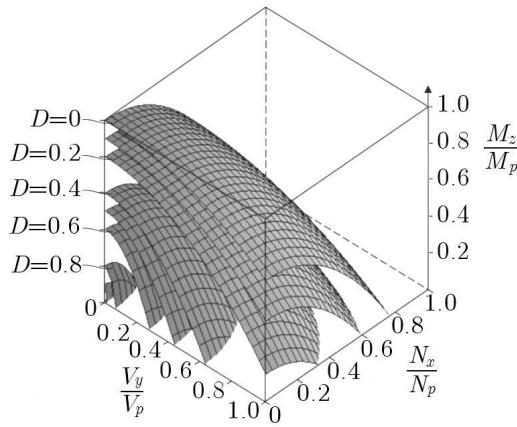


Fig. 2. Yield function for different values of  $D$

Finally, once  $Z$  is known, the following factors that appear in Eq. (3.10) can be determined. Substituting Eq. (3.24) into Eq. (3.17) and Eq. (3.18)

$$\left\{ \frac{\partial Z}{\partial F} \right\} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \frac{1}{M_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & B_2 & \frac{1}{M_p} \end{bmatrix}^\top \quad (3.25)$$

$$\left\{ \frac{\partial Z}{\partial D} \right\} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

where

$$A_i = \frac{2N_{xi}}{N_p^2(1-D_i)} \quad B_i = \frac{2}{3} \frac{V_{yi}}{V_p^2(1-D_1i^3)}$$

$$C_i = \left( \frac{N_{xi}}{N_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D_i)^2} + \left( \frac{V_{yi}}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D_i)^4} + 1$$

and so, the elastoplastic damaged stiffness matrix is completely defined. All the former expressions are put together in a standard incremental algorithm and implemented in a computer code. In each increment, iterations are needed to ensure that in any plastic (and damaged) cross-section all the conditions are fulfilled. The code is checked using a test problem (Fig. 3) and applied to a standard building frame as the one shown in Fig. 5.

#### 4. Validation

The method was used to solve the problem shown in Fig. 3, for which the data was available in the literature (Inglessis *et al.*, 1999) or could be obtained by experimental or statistical methods (Rucka and Wilde, 2010; Rinaldi *et al.*, 2006).

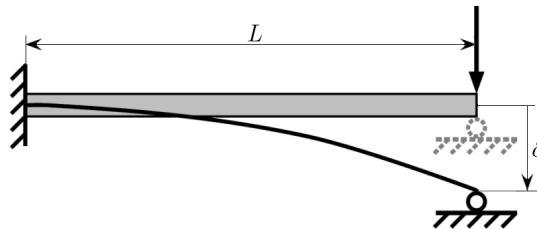


Fig. 3. Test on steel member: specimen and loading

The load is applied by increasing the value of  $\delta$  in the free end. The reaction  $F$  in this point is plotted vs.  $\delta$  in Fig. 4 where a comparison between the experimental and numerical results obtained by Inglessis (Inglessis *et al.*, 1999) and the results using the proposed method is shown.

The parameters for the simulation were  $L = 665$  mm,  $E \cdot I = 1.906 \cdot 10^7$  N mm $^2$ ,  $p_{cr} = 1.4$ ,  $p_{th} = 0.259$ ,  $\alpha = 0.2175$ ,  $D_0 = 0$  and  $D_{cr} = 1$ . In spite of the simplicity of the proposed method, the results are accurate enough even for this demanding test, where the damage value in the clamped end reaches the value of 0.520.

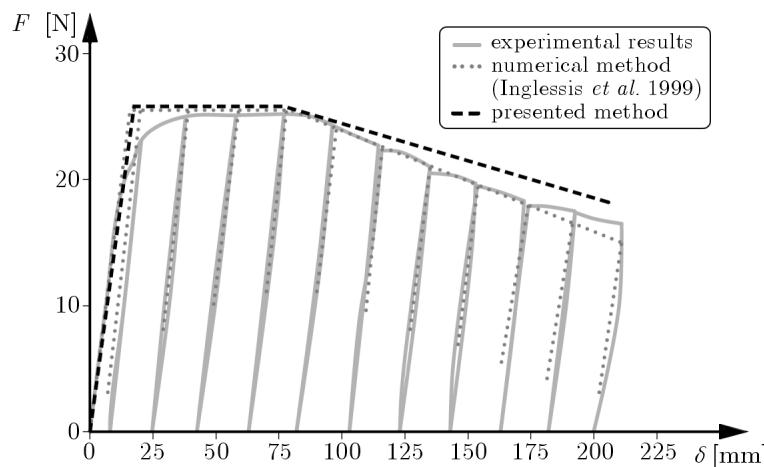


Fig. 4. Experimental vs. numerical results

## 5. Example

After validation, we use the method to compare the collapse load of the 2D frame shown in Fig. 5 under different yielding assumptions. The frame is clamped on the bottom of its two columns and subjected to a horizontal load in node 4 of magnitude  $P = 62.5$  kN and vertical loads in nodes 2, 3 and 4 of the same magnitude, which are proportionally increased using the parameter  $\lambda$ . The assumed properties are:  $L = 1$  m,  $E = 200$  GPa,  $A = 0.1 \times 0.1$  m $^2$ ,  $\sigma_y = 250$  MPa (yield stress). The material is a Steel-1015 and its parameters of evolution of damage are reported in the literature (Le Roy, 1981; La Rosa *et al.*, 2001) so that  $p_{cr} = 1.4$ ,  $p_{th} = 0.259$  and  $\alpha = 0.28$ .

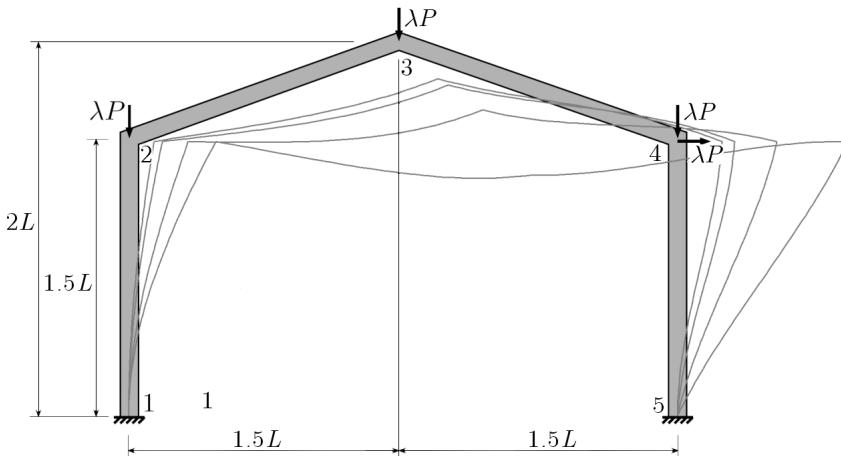


Fig. 5. Progressive collapse

Three different considerations for the yield function are considered. In the first one (1), we use the classic plastic method so that plastic hinges can appear only due to a bending moment. In the second one (2), the axial and shear forces and bending moment are considered in the yield function, but damage is not. Finally, in the third case (3), all effects are taken into account. For all the three cases, the order of appearance of the plastic hinges (1) or the plastic sections (2) and (3) is 5 → 4 → 3 → 1. The response curves, for  $\lambda$  vs. horizontal displacement of node 4, are shown in Fig. 6.

For case 1, in which only the bending moment is considered, the response follows a polygonal curve of decreasing slope. When  $N$  and  $V$  are considered, together with  $M$  (case 2), the response is a continuous curve that is below the previous polygonal one. When, in addition, damage is considered (case 3), the

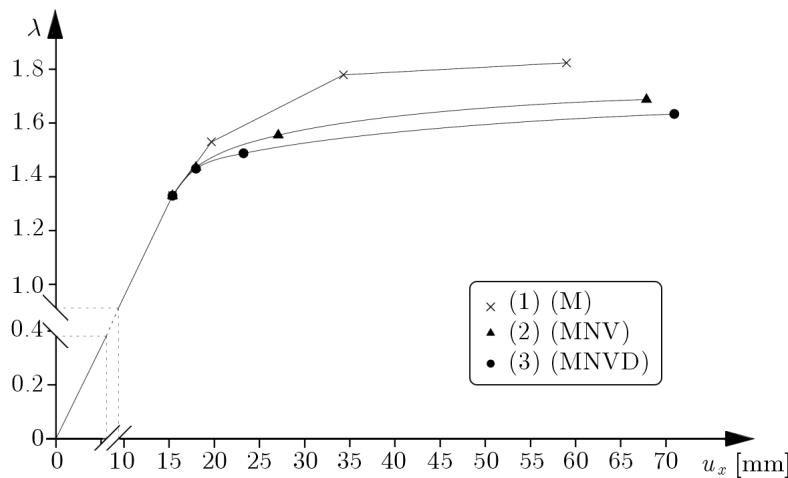


Fig. 6. Load factor  $\lambda$  vs. horizontal displacement of node 4

response is even lower, showing that the stiffness of the frame decreases when more sophisticated models are taken into account.

The deformed shape, amplified  $\times 25$ , is shown in Fig. 5 for the loads 1.348, 1.433, 1.486 and 1.633, corresponding to the formation of plastic sections at 5, 4, 3 and 1, respectively, for case 3 (1.348, 1.436, 1.541 and 1.672 for case 2, and 1.348, 1.531, 1.765 and 1.833 for case 1).

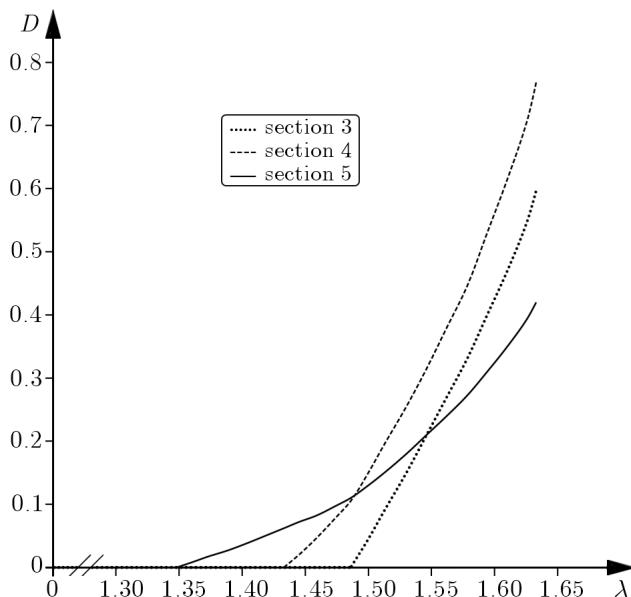


Fig. 7. Evolution of the damage with the load

For case 3, the evolution of the damage with the load is shown in Fig. 7. Note that the analysis fails to converge once the plastic state is reached in section 1, so damage can not be evaluated in this section.

## 6. Conclusions

Using Continuum Damage Mechanics assumptions, a simple and efficient procedure for the analysis of frames has been developed. One-dimensional finite elements (elastoplastic beams) are formulated and non-linear effects (plasticity and damage) are supposed to be concentrated in the beam-ends. The resultant numerical method is incremental and iterations are needed in each increment to ensure that all the beam-ends would be balanced and comply with plastic conditions for each level of damage. The stiffness matrix depends on geometry and on material properties, as usual, but also on the yield function  $Z$ , plastic deformation and damage in the beam-ends.

Under increasing loading, once plastic deformation appears in any cross-section, damage increases and the stiffness of the beam decreases, and hence the frame becomes more flexible. More plastic and damaged cross-sections can appear and, eventually, for some loading factor, convergence would not be achieved: it has reached the collapse state. The more effects are included in  $Z$  (internal forces, damage), the less the collapse load is. For the simplest case ( $Z$  depending only on the bending moment) the results obtained coincide with the standard plastic analysis based on plastic hinges.

## References

1. BOBIŃSKI J., TEJCHMAN J., 2006, Modeling of strain localization in quasi-brittle materials with a coupled elasto-plastic-damage model, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **44**, 4, 767-782
2. BONORA N., 1997, A nonlinear CDM model for ductile failure, *Engineering Fracture Mechanics*, **58**, 11-28
3. BONORA N., 1998, On the effect of triaxial state of stress on ductility using nonlinear CDM Model, *International Journal of Fracture*, **88**, 359-371
4. BONORA N., GENTILE D., PIRONDI A., NEWAZ G., 2005, Ductile damage evolution under triaxial state of stress: theory and experiments, *International Journal of Plasticity*, **21**, 981-1007

5. CHABOCHE J., 1984, Anisotropic creep damage in the framework of the Continuum Damage Mechanics, *Nuclear Engineering and Design*, **79**, 309-319
6. CHANDRAKANTH S., PANDEY P., 1993, A new ductile damage evolution model, *International Journal of Fracture*, **60**, 73-76
7. CHANDRAKANTH S., PANDEY P., 1995, An exponential ductile damage model for metals, *International Journal of Fracture*, **72**, 293-310
8. CHANDRAKANTH S., PANDEY P., 1997, Damage coupled elasto-plastic finite element analysis of a Timoshenko layered beam, *Computers and Structures*, **69** 411-420
9. CHICA E., TERÁN J., IBÁN A., LÓPEZ-REYES P., 2010, Influence of ductile damage evolution on the collapse load of frames, *Journal of Applied Mechanics*, **77**, 3, 034502-034505
10. DEIERLEIN G., HAJJAR J., KAVINDE A., 2001, Material nonlinear analysis of structures: a concentrated plasticity approach, *Report SE*
11. FALEIRO J., OLLER S., BARBAT A., 2008, Plastic-damage seismic model for reinforced concrete frames, *Computer and Structures*, **86**, 7/8, 581-597
12. IBIJOLA E., 2002, On some fundamental concepts of Continuum Damage Mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 1505-1520
13. INGLESSIS P., GÓMEZ G., QUINTERO G., FLÓREZ J., 1999, Model of damage for steel frame members, *Engineering Structures*, **21**, 954-964
14. KRENK S., VISSING J., THESBJERG L., 1999, Efficient collapse analysis techniques for framed structures, *Computers and Structures*, **72**, 481-496
15. LA ROSA G., MIRONE G., RISITANO A., 2001, Effect of stress triaxiality corrected plastic flow on ductile damage evolution in the framework of continuum damage mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, **68**, 417-434
16. LE ROY G., 1981, A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of void, *Acta Metallurgica*, **29**, 1509-1522
17. LEBEDEV A., KOVAL CHUK B., GIGINJAK F., LAMASHEVSKY V., 2001, *Handbook of Mechanical Properties of Structural Materials at a Complex Stress State*, Begell House, Inc.
18. LEMAÎTRE J., 1984, How to use damage mechanics, *Nuclear Engineering and Design*, **80**, 233-245
19. LEMAÎTRE J., 1985, Continuous damage mechanics model for ductile fracture, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 83-89
20. NEAL B., 1985, *The Plastic Methods of Structural Analysis*, Science Paperbacks
21. OLSEN P., 1999, Rigid plastic analysis of plane frame structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **179**, 19-30

22. RAMBER W., OSGOOD W., 1943, Description of stress-strain curves by three parameters, *National Advisory Committee for Aeronautics* (Technical Note 902)
23. RINALDI A., KRAJCINOVIC D., MASTILOVIC S., 2006, Statistical damage mechanics – constitutive relations, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **44**, 3, 585-602
24. RUCKA M., WILDE K., 2010, Neuro-wavelet damage detection technique in beam, plate and shell structures with experimental validation, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **48**, 3, 579-604
25. SIMO J., JU J., 1987, Strain- and stress-based continuum damage models: I – formulations; II – computational aspects, *International Journal of Solids and Structures*, **23**, 7, 821-869
26. TAI H., 1990, Plastic damage and ductile fracture in mild steels, *Engineering Fracture Mechanics*, **36**, 4, 853-880
27. TAI H., YANG B., 1986, A new microvoid-damage model for ductile fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, **25**, 3, 377-384
28. YINGCHUN X., 2004, A multi-mechanism damage coupling model, *International Journal of Fatigue*, **26**, 1241-1250

### Nieliniowy model do sprężysto-plastycznej analizy problemu uszkodzeń dwuwymiarowych ram

#### Streszczenie

W pracy zaprezentowano prostą i skuteczną metodę nieliniowej analizy dwuwymiarowych ram przy założeniu hipotezy, że efekty nieliniowe, jeśli występują, są skoncentrowane na końcach belek tworzących układ ramy. Rozważono kontynualny model procesu zniszczenia obejmujący przekrój belki jako całość. Właściwości elasto-sprężyste materiału ujęto poprzez zdefiniowanie macierzy stycznej sztywności sprężysto-plastycznej w taki sposób, że funkcja uplastycznienia wyrażona w kategoriach obciążień wewnętrznych (sił osiowych, tnących oraz momentu gnącego) zależy od stanu zniszczenia w każdym uplastycznionym przekroju. Po zweryfikowaniu modelu, rozwiązano przykład zastosowania analizy dla różnych założeń narzuconych na funkcję uplastycznienia (w zależności od wziętych pod uwagę obciążień wewnętrznych) z uwzględnieniem zniszczenia lub bez. Dla każdego przypadku pokazano różnice w wartościach obciążenia zewnętrznego prowadzącego do wyboczenia ramy oraz sformułowano wnioski. Wykazano, że przedstawiona metoda nieliniowej analizy uplastycznienia pozwala na bardziej precyzyjne określenie krytycznych obciążzeń prowadzących do zniszczenia konstrukcji.

### D.3.4. Artículo 3

El artículo “*Exact formulation for the instability problem of frames and its direct numerical solution*”, de los autores M. Cacho, A. Lorenzana y Pablo M. López-Reyes, está aceptado para publicación (Tabla D.6) en la revista *Mechanics of Solids* en 2013 [9].

**Tabla D.6:** Datos de la publicación del Artículo 3

Fecha			Factor de Impacto	
Envío	Aceptación	Publicación	2011 <sup>a</sup>	2011 <sup>b</sup>
Septiembre 2010	Mayo 2012	–	0,148	0,148

<sup>a</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha de aceptación

<sup>b</sup> Factor de Impacto vigente en la fecha actual

Se reproduce a continuación con el formato final aceptado.

## Exact formulation for the instability problem of frames and its direct numerical solution

Mariano Cacho\* and Antolin Lorenzana\*\*

*ITAP, University of Valladolid, Paseo del Cauce 59, 47011. Valladolid, Spain*

Pablo M. López-Reyes\*\*\*

*CARTIF Centro Tecnológico. Parque Tecnológico de Boecillo 205, 47151. Valladolid. Spain*

(Dated: September 28, 2010)

### Abstract

A general approach for the systematic evaluation of the critical buckling load and the determination of the buckling mode is presented. The Navier-Bernoulli beam model is considered, having the possibility of variable cross-section under any type of load (including pressures and thermal loading). With this purpose, the equilibrium equations of each beam element in its deformed configuration, under the hypothesis of infinitesimal strains and displacements is considered, resulting in a system of differential equations with variable coefficients for each element. In order to obtain the nonlinear response of the frame, it is necessary to impose the compatibility of displacements and the equilibrium of forces and moments in each beam-end, also in the deformed configuration. The solution is obtained by requiring that the total variation of potential energy is zero at the instant of buckling. The objective of this work is to develop a systematic method to determine the critical buckling load and the buckling mode of any frame, without using the common simplifications usually assumed in matrix analysis or finite element approaches. In this way, precise results can be obtained regardless of the discretization done.

Keywords: Critical buckling load; Buckling mode; Variable inertia; Thermal loading

---

\* Electronic address: [cacho@eis.uva.es](mailto:cacho@eis.uva.es)

\*\* Also at CARTIF Centro Tecnológico; Electronic address: [ali@eis.uva.es](mailto:ali@eis.uva.es)

\*\*\* Electronic address: [pablop@cartif.es](mailto:pablop@cartif.es)

## 1. INTRODUCTION

As it is well known, commercial software, based on the Finite Element Method, can manage the buckling problem, usually using linear approximations, by means of the geometrical stiffness matrix, as explained in classical texts [1, 2]. With these approaches, several elements in each beam member are required to obtain accurate results.

In this work, a simple mathematical tool is developed to calculate, in an accurate way, the critical buckling load of any frame structure, without the need of member discretization.

To reach this target, the paper has been organized as follows. Firstly, after this introduction, the nonlinear behaviour of any beam is presented. Then, this formulation is extended to the analysis of any 2D-frame subjected to any load and boundary condition, in order to determine the critical load and the buckling mode. After that, the numerical results for three different examples are shown, together with the main conclusions.

## 2. BEAM BEHAVIOUR

Navier-Bernoulli beam model with linear behaviour is assumed and also that the displacements of the structure under loading are small compared with the dimensions of the original frame. Under these hypothesis, the equilibrium, compatibility and constitutive equations for each beam element are the following:

### 2.1. Equilibrium

The equilibrium conditions for every differential portion  $ds$  must be posed in the deformed configuration. The coordinate system to which the magnitudes are referred will be denoted by  $(X, Y, Z)$  (Fig. 1).

Considering the equilibrium of forces along the axes ( $X$  and  $Y$ ) and the equilibrium of moments along  $Z$ -axis, we obtain the following system of equations (1), in terms of Piola-Kirchhoff stresses [3–5]:

$$\begin{cases} H'(s) + q_X(s) = 0 \\ V'(s) + q_Y(s) = 0 \\ M'(s) - H(s)\theta(s) + V(s) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where  $()'$  means derivatives with respect to coordinate  $s$ . Using the hypothesis of small displacements,  $\sin(\theta)$  has been approximated to  $\theta$  and  $\cos(\theta)$  to 1.

## 2.2. Compatibility and constitutive equations

The equations that relate internal forces and displacements  $(u, v, \theta)$  are [6, 7]:

$$\begin{cases} H(s) = EA(s) \left[ u'(s) - \frac{\alpha}{2}(T_1 + T_2) \right] \\ \theta(s) = v'(s) \\ M(s) = EI_z(s) \left[ \theta'(s) + \frac{\alpha}{h(s)}(T_1 - T_2) \right] \end{cases} \quad (2)$$

where  $E$  is Young's modulus, and  $I_z(s)$  and  $A(s)$  are the inertia and the area of the cross-section of the beam, respectively. The thermal effect is included supposing, as usual, a linear variation of the temperature along the beam depth  $h(s)$  between  $T_1$  and  $T_2$ , being  $\alpha$  the coefficient of thermal expansion.

The previous equations (1), together with the compatibility and constitutive equations (2), lead to a system of linear differential equations with variable coefficients which, in general, has not an explicit solution. The solution can be obtained for each case by means of a numerical analysis [8, 9]. Once the behaviour of each beam is known, the response of the whole frame will be determined by imposing the compatibility and constitutive equations between all the beam-ends of the structure.

## 2.3. Stability equations

The nonlinear behaviour of each beam is obtained solving the system of differential equations (1) and (2) as the loading factor  $\lambda$  increases, considering the boundary conditions. This solution is usually stable and well defined. Nevertheless, there are some values of the loading factor for which indeterminate transverse displacements can appear (instant of buckling).

A method for determining the critical value  $\lambda_{cri}$  that causes this phenomenon consists in introducing a small perturbation in the equilibrium, supposing an infinitesimal flexural deformation  $\Delta\underline{u}$  with respect to the stable state. The structure in this new state must also satisfy equations (1) and (2), so the incremental displacements  $(\Delta u, \Delta v, \Delta \theta)$  and the

incremental forces ( $\Delta H, \Delta V, \Delta M$ ) must satisfy the following stability equations [6]:

$$\begin{cases} \Delta H'(s) = 0 \\ \Delta V'(s) = 0 \\ \Delta M'(s) - H(s)\Delta\theta(s) - \theta(s)\Delta H(s) + \Delta V(s) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta H(s) = EA(s)\Delta u'(s) \\ \Delta\theta(s) = \Delta v'(s) \\ \Delta M(s) = EI_z(s)\Delta\theta'(s) \end{cases} \quad (4)$$

$\lambda_{cri}$  can be determined solving equations (3) and (4), together with the boundary conditions of the original problem with no external loadings.

### 3. FRAME BUCKLING ANALYSIS

#### 3.1. Equilibrium and compatibility

When analyzing frames, firstly it is necessary to set a common reference system for all its beams, called *global reference system* ( $X_g, Y_g, Z_g$ ).

Once the response of each beam is known, the next step is to discretize the frame into its beam elements. Due to the formulation used in this work, with the assumed hypothesis, it is enough to take the minimum number of elements, that is, one per member (the straight parts between nodes).

The magnitudes of each beam have to be expressed in the global reference system (Fig. 2), depending on the initial angle  $\alpha_b$  for each beam, using standard matrix procedures:

$$\begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}_{(X_g, Y_g, Z_g)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 \\ \sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}_{(X, Y, Z)}$$

Similarly, conditions on displacements between beam-ends at any node must be imposed, together with the equilibrium conditions, including external forces and moments. All these external loads are multiplied by the unique loading parameter  $\lambda$ , assuming proportional loading.

Magnitudes of the pre-buckling state appear in the stability equations. Therefore, it is necessary to solve simultaneously the constitutive equations of each beam and the compati-

bility and equilibrium equations in the nodes. These equations, together with the boundary conditions, lead a system of linear differential equations with variable coefficients. Its solution can be found using numerical techniques, like the Shooting Method [8, 9], as most of the times there is not a close or explicit mathematical expression for this solution.

It is known that, in the instant of buckling, the deformed shape of the frame will correspond to the buckling mode, so the critical load value will be the one that cancels the increment of the potential energy functional:

$$\Delta W(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \int_0^{L_i} \left\{ \Delta M_i(s) \Delta \theta'_i(s) + H_i(s) [\Delta \theta_i(s)]^2 \right\} ds$$

where  $b$  is the total number of members of the structure.

Using some numerical procedure as the Secant Algorithm or the Newton-Raphson Algorithm [8, 9],  $\Delta W(\lambda) = 0$  can be solved for the critical load value.

To determine the buckling mode, the stability equations (3) and (4) have to be solved for  $\lambda_{cri}$ , but replacing one equilibrium equation by an additional condition on displacements. That is, an arbitrary value for one of the transversal degrees of freedom of the frame has to be imposed [10].

#### 4. NUMERIC RESULTS

Some examples of increasing complexity are presented, showing the methodology and the reliability of the proposed procedure.

##### 4.1. Beam under compression (Validation)

###### 4.1.1. Case a

For the fixed-free beam under compression  $P$  (Fig. 3), the boundary conditions of the nonlinear problem are:

$$\begin{cases} H(0) = -P \\ V(0) = M(0) = u(L) = v(L) = \theta(L) = 0 \end{cases}$$

and the boundary conditions of the stability equations are:

$$\begin{cases} \Delta v(0) = v_0 \\ \Delta H(0) = \Delta V(0) = \Delta M(0) = \Delta u(L) = \Delta \theta(L) = 0 \end{cases}$$

where  $v_0$  is an arbitrary sufficiently small value.

The solution of the stability equations (3) and (4) subjected to the mentioned boundary conditions is:

$$\begin{cases} \Delta H(s) = 0 \\ \Delta V(s) = \frac{EI_z K^3 v_0 \cos(KL)}{KL \cos(KL) - \sin(KL)} \\ \Delta M(s) = -\frac{EI_z K^2 v_0 \sin(Ks)}{KL \cos(KL) - \sin(KL)} \\ \Delta u(s) = 0 \\ \Delta \theta(s) = \frac{Kv_0 [\cos(KL) - \cos(Ks)]}{\sin(KL) - KL \cos(KL)} \\ \Delta v(s) = \frac{e^{-iK(L+s)} v_0}{2 [KL \cos(KL) - \sin(KL)]} \left\{ ie^{iKL} - ie^{iL(L+2s)} + e^{iKs} [K(L-s) - i] + e^{iK(2L+s)} [i + K(L-s)] \right\} \end{cases}$$

where  $K = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$ . The increment of the potential energy functional is:

$$\Delta W(P) = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \Delta M(s) \Delta \theta'(s) - P [\Delta \theta(s)]^2 \} ds = \frac{EI_z K^3 v_0^2 \cos(KL)}{\sin(KL) - KL \cos(KL)}$$

so the critical buckling load is:

$$P_{cri} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2}$$

because it is the value that cancels it. This result is the expected [1] (classical buckling problem).

#### 4.1.2. Case b

In this case (Fig. 4), the beam is subjected to a load distribution that causes a linear axial force (for example, a column subjected to its dead weight). In this problem, the resulting differential equation has variable coefficients and it can be solved using the classical approach (roots of the determinant of the stiffness matrix). Nevertheless, the computational effort is

lower with the energy approach proposed: it only requires the calculation of one integral. After that, the resulting critical buckling load is  $\lambda_{cri} = 6.47176$ .

Comparing this value with the result provided by standard FEM analysis [11, 12] (based on the linearization using the geometric stiffness matrix), at least 10 elements are necessary to have results with an error less than 0.5% (Table 1).

#### 4.1.3. Case c

A more interesting case, from a practical point of view, appears when some of the dimensions of the beam are variable along the longitudinal axis (Fig. 5). The differential equations in this case are linear, but they have variable coefficients, so the energy approach is clearly advantageous against the matrix approach, specially when the structure is made of a large number of beams. The resulting critical buckling load is  $\lambda_{cri} = 13.5635$ .

As it can be seen in Table 2, with the matrix approach, very fine discretizations are needed to obtain similar numerical values.

#### 4.1.4. Case d

In the last validation example (Fig. 6), the instability by thermal effect of a fixed-fixed beam is considered. Table 3 shows that the result obtained for the beam with constant dimensions (with  $I_z(s) = I_{z_{max}}$ ) coincides with the theoretical one:

$$N_{cri} = \frac{(2\pi)^2 EI_z}{L^2} = EA\alpha\lambda_{cri}\Delta T$$

for which  $\lambda_{cri} = 46.0077$ . For the variable cross-section beam, as specified in Fig. 6, the solution is  $\lambda_{cri} = 35.9735$ . Table 3 shows the numerical values for different discretizations.

As a conclusion, it is important to note that the proposed method can deal with variable depth sections and any type of loading, including the effect of dead weight and thermal effects in the same way, with no additional effort.

### 4.2. Lee frame (Application 1)

The structure of Fig. 7, called ‘Lee frame’ [13] shows in a clear and easy way the objective of this work and the possibilities of generalization of the numerical technique presented.

For simplicity both members of the frame have the same lenght ( $L$ ), material ( $E$ ) and section ( $h(s)$ ,  $A(s)$ ,  $I_z(s)$ ) with a rigid joint in node  $b$ . Applying the method, the critical load factor for constant cross-section (of  $I_z = I_{z_{\max}}$ ) is  $\lambda_{cri} = 47.5063$ , whereas for the frame with variable cross-section shown in Fig. 7, the critical loading factor is  $\lambda_{cri} = 14.5092$ .

To achieve similar results (error less than 0.5%) using standard FEM codes, at least 50 elements per member would be necessary in the first case, and 200 in the second.

#### 4.3. Four beam frame (Application 2)

Finally, the proposed method is applied to the frame of Fig. 8. With a four-element discretization (elements coinciding only with beam members) and assuming a proportional loading state (except the temperature and dead weight, which remain constant), the critical value for a constant cross-section ( $I_z(s) = I_{z_{\max}}$ ) is  $\lambda_{cri} = 29.1906$  and for the case of Fig. 8, with a variable cross-section, the critical buckling load becomes  $\lambda_{cri} = 9.39849$ .

The buckling mode is indicated in each figure in a thick line.

## 5. CONCLUSIONS

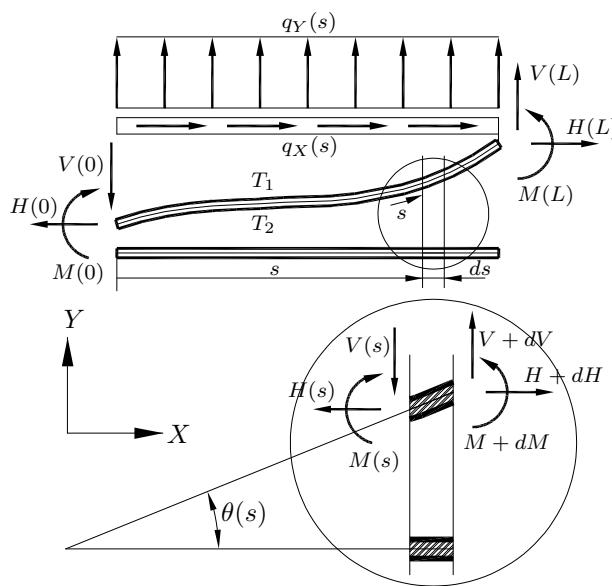
The main conclusions of this work can be summarized as follows:

Firstly, for the mathematical model, the starting point has been Euler's buckling theory. It assumes small strains and displacements, and leads to the concepts of critical load and buckling mode, as a consequence of the mathematical approach. Therefore, it is not possible to know the displacements for the buckling mode or to determine post-buckling behaviour.

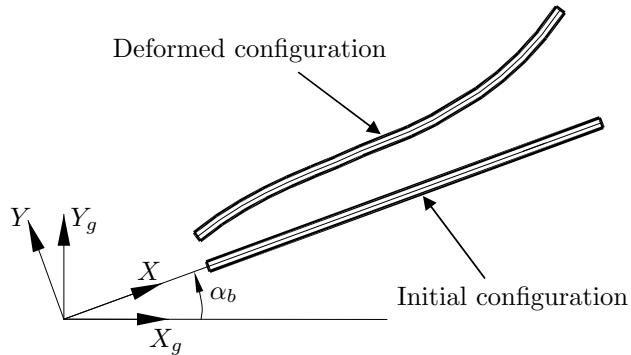
Secondly, the numerical tool developed is a systematic and easy tool that can deal with more general cases, such as variable section beams, distributed loads, etc. Although the computer implementation has been developed within a symbolic manipulation software, it is not possible, in general, to obtain analytical solutions according to all the parameters, but only numerical solutions.

Lastly, with regard to the numerical results, thanks to an exact mathematical formulation, accurate results are obtained with a minimum number of elements, and the results are almost the same for finer discretizations, with the computational effort being significantly smaller.

1. A. Chajes, *Principles of Structural Stability Theory* (Prentice Hall, 1974).
2. S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability* (McGraw-Hill, 1963).
3. M. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol.1: Essentials* (John Wiley & Sons, 2000).
4. W. Koiter, SIAM J. Appl. Math. **25**, 424 (1973).
5. S. Machado, Int. J. Non-Linear Mech. **43**, 345 (2008).
6. G. Simitses and D. Hodges, *Fundamentals of Structural Stability* (Elsevier Inc., 2006).
7. J. Marsden and T. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity* (Dover Publications, 1994).
8. R. Burden and J. Faires, *Numerical Analysis* (Thomson, Mexico, 1998).
9. D. Fertis, *Nonlinear structural engineering* (Springer-Verlag, 2006).
10. D. Gulyaev, A. Zagordan, and V. Shalashilin, Mech. Solids **41**, 87 (2006).
11. COSMOS/M, v.2.95 (Los Angeles: Structural Research and Analysis Corp., 2006).
12. V. Postnov and G. Tumashik, Mech. Solids **41**, 72 (2006).
13. H. Chen and G. Blandford, Int. Jour. of Num. Meth. in Eng. **36**, 909 (1993).



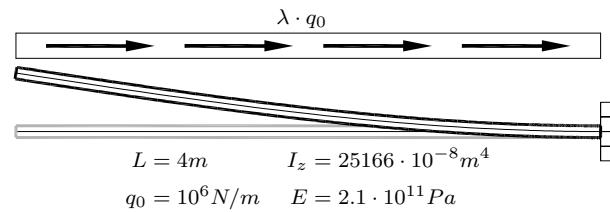
**Figure 1.** Equilibrium



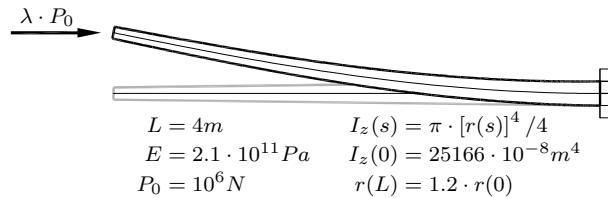
**Figure 2.** Initial orientation of the beam



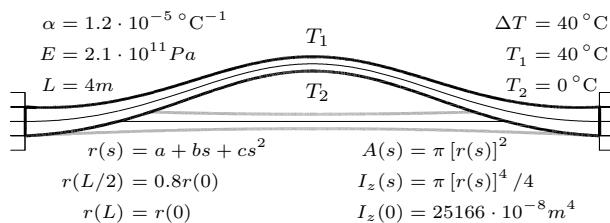
**Figure 3.** Constant cross-section beam (case a)



**Figure 4.** Linear axial force (case b)



**Figure 5.** Variable cross-section beam (case c)



**Figure 6.** Temperature (case d)

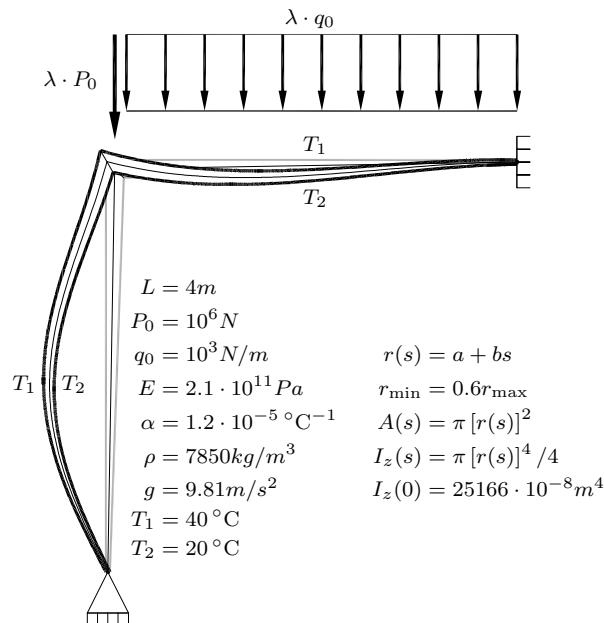


Figure 7. Lee frame. Variable inertia beams

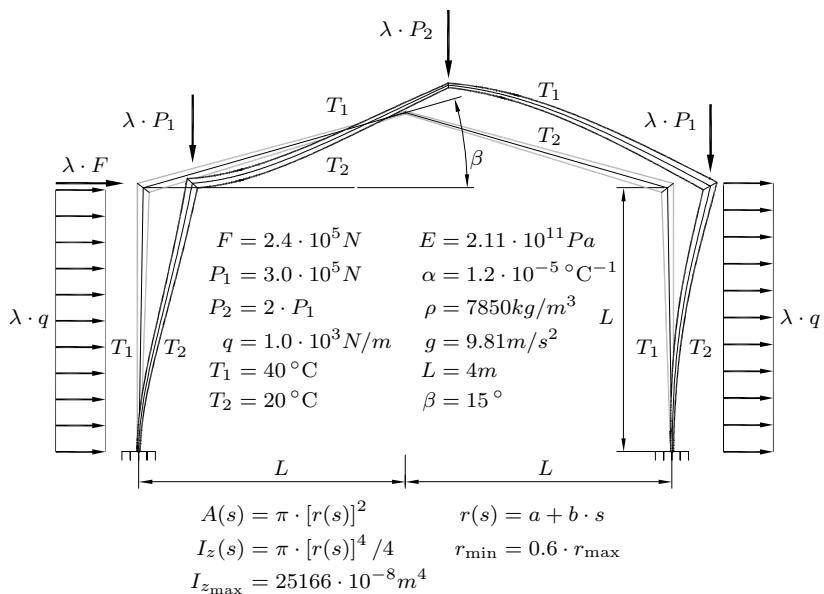


Figure 8. Four beam frame. Variable inertia beams

**Table 1.** Beam under linear axial force. Standard FEM results

Number of elements	2	10	50	100	200
$\lambda_{cri}$	5.81257	6.44510	6.47070	6.47151	6.47170
$\varepsilon_r$ (%)	10.19	0.4119	0.01638	0.003863	0.0007726

**Table 2.** Variable cross-section beam. Standard FEM results

Number of elements	2	10	50	100	200
$\lambda_{cri}$	10.9825	13.0753	13.4672	13.5154	13.5395
$\varepsilon_r$ (%)	19.03	3.599	0.7080	0.3546	0.1769

**Table 3.** Fixed-fixed beam. Thermal effect. Standard FEM results

Number of elements		2	10	50	100	200
Constant cross-section	$\lambda_{cri}$	46.0547	46.0431	46.0272	46.0261	46.0242
	$\varepsilon_r$ (%)	0.1022	0.07694	0.04238	0.03999	0.03586
Variable cross-section	$\lambda_{cri}$	38.5335	36.0012	35.9883	35.9881	35.9881
	$\varepsilon_r$ (%)	7.116	0.07700	0.04114	0.04059	0.04059

### D.3.5. Artículo 4

El artículo “*Estabilidad de pórticos 2D en régimen elastoplástico*”, de los autores M. Cacho-Pérez, P.M. López-Reyes, A. Lorenzana y J.M.G. Terán, ha sido enviado para su publicación.

Se reproduce a continuación.

## Estabilidad de pórticos 2D en régimen elastoplástico 2D-Frames Stability and Limit Analysis

M. Cacho-Pérez<sup>a</sup>, P.M. López-Reyes<sup>b</sup>, A. Lorenzana<sup>a,b</sup>, J.M.G. Terán<sup>a</sup>

<sup>a</sup>E.I.I., Universidad de Valladolid. Paseo del Cauce 59, 47011. Valladolid, Spain

<sup>b</sup>CARTIF Centro Tecnológico. Parque Tecnológico de Boecillo 205, 47151. Valladolid, Spain

---

### Abstract

En este trabajo se determina el nivel de carga máximo de pórticos metálicos planos constituidos por barras rectas esbeltas. Se aplica un método paso a paso basado en un elemento barra con comportamiento elástico en su dominio y posibilidad de comportamiento plástico localizado en sus secciones extremas. La plasticidad se alcanza por combinación de esfuerzos, se considera que aparece de forma concentrada y súbita y origina desplazamientos relativos acoplados asociados a un único grado de libertad. Este modelo incluye al tradicional de rótula plástica, el cual sólo considera giro relativo por plastificación debida al efecto del momento flector. La aparición secuencial de grados de libertad acoplados afecta a la estabilidad del conjunto, la cual se va evaluando en cada uno de los instantes representativos de aplicación de la carga marcados por la plastificación de las secciones.

The evaluation of the maximum level of load that any 2D framed structure can undergo, before plastic collapse or buckling, is addressed in this paper. The method, based on a beam element with elastic behaviour except on its ends, uses an incremental approach to determine when changes appear due to plastic behaviour. When the combination of axial force and bending moment in any cross-section reaches the plastic function, that section is considered to yield suddenly and relative displacements can appear because of the yielding. The model includes the traditional plastic hinge, which only considers relative rotation due to the effect of the bending moment. The sequential loading and yielding reduces the stiffness and stability of the frame, which is evaluated with the proposed method and compared with the classic plastic method of analysis.

**Keywords:** pandeo, colapso, grandes desplazamientos, nudos semirrígidos; buckling, collapse, large displacements, semi-rigid connections

---

### 1. Introducción

Es bien conocida la importancia que tienen los sistemas estructurales de barras en muchos campos de la ingeniería y su capacidad de soportar más carga de aquella para la que fueron diseñados. Esto en parte se debe a que su diseño suele estar basado en el comportamiento elástico en vez de estar basado en régimen

plástico. Supone una reserva de resistencia que permitiría conseguir un diseño más optimizado de la estructura, conocer el factor de seguridad real ante ciertas sobrecargas, realizar una evaluación de la vulnerabilidad de estructuras existentes ante determinados estados límites últimos, o bien evaluar el daño acumulado y proponer las correspondientes intervenciones. Para ello, resulta imprescindible disponer de modelos numéricos que permitan una adecuada simulación de los complejos fenómenos no lineales que tienen lugar incluso en régimen estático, a partir de los cuales se pueda conocer y cuantificar el comportamiento límite de estructuras de barras.

La forma más eficiente para llevar a cabo una modelización numérica del comportamiento lineal de las estructuras de barras es mediante elementos monodimensionales [1, 2, 3, 4]. El uso de estos elementos para problemas en los que existe no linealidad del material está muy limitado, fundamentalmente porque las formulaciones utilizadas asumen hipótesis muy simplificadas que no pueden reproducir fielmente el comportamiento plástico real. Ante esta situación, es deseable desarrollar un elemento simple pero riguroso, que permita abordar eficientemente la descripción numérica de adaptación plástica de las estructuras hasta su colapso, incluyendo el efecto de posibles grandes desplazamientos.

Basándose en el comportamiento plástico a nivel de punto, pero expresado en función de las variables tradicionales del modelo 1D de barra de Navier-Bernoulli, se llega, tras ciertas hipótesis, al concepto de sección agotada por plastificación, como extensión del concepto de rótula plástica, cumpliendo la teoría general de la plasticidad. A este modelo se incorpora la no linealidad geométrica (teoría de segundo orden) que permite realizar un análisis de estabilidad [5, 6] y conocer por tanto la carga crítica para valores superiores a los que han provocado plasticidad local.

De forma resumida y desde el punto de vista teórico, el comportamiento elastoplástico de un determinado elemento finito viene usualmente descrito por la matriz de rigidez elastoplástica tangente [7, 8], e intervienen la matriz de rigidez y las derivadas de la función de plastificación con respecto a las tensiones. La extensión de esta formulación al caso de barras lleva a una expresión similar en la que juega un papel fundamental la función de plastificación y sus derivadas con respecto a los esfuerzos [9, 10, 11, 12]. Esta función expresa la combinación de esfuerzos que llevan a la plastificación completa de la sección. Para casos simples en los que se considere que esta función depende sólo del momento flector, y tomando equilibrio en la configuración indeformada, la formulación lleva estrictamente al modelo tradicional de rótula plástica. Sin embargo, si de manera adicional se impone el equilibrio en la configuración deformada y se considera la influencia de los esfuerzos axil y/o cortante, los desarrollos son más complejos y aparecen fenómenos de acoplamiento entre esfuerzos y desplazamientos [3, 13, 14, 15, 16], siendo éste el objeto de este estudio.

## 2. Modelo barra 2D

A las limitaciones tradicionales del modelo de barra de Navier-Bernoulli aplicado al estudio de pórticos planos se añade la hipótesis de estado proporcional

de cargas usualmente aceptada en los métodos de cálculo plástico.

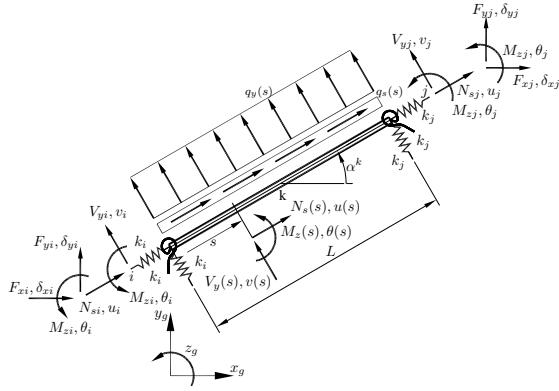


Figura 1: Modelo barra 2D

### 2.1. Equilibrio, compatibilidad y comportamiento

Para el elemento barra mostrado en la Figura 1, bajo un estado genérico de cargas y vinculaciones en sus secciones extremas, las ecuaciones de equilibrio son [5, 6]:

$$\begin{cases} N'_s(s) + q_s(s) = 0 \\ V'_y(s) + q_y(s) = 0 \\ M'_z(s) + V_y(s) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde las variables con notación prima indican derivada respecto de la coordenada espacial ( $s$ ). Los esfuerzos y los grados de libertad, en coordenadas locales en los extremos de la barra se definen como:

$$\begin{cases} \underline{\underline{E}}_i^k = (N_{si}, V_{yi}, M_{zi})^T = (N_s(0), V_y(0), M_z(0))^T \\ \underline{\underline{E}}_j^k = (N_{sj}, V_{yj}, M_{zj})^T = (N_s(L), V_y(L), M_z(L))^T \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \underline{u}_i^k = (u_i, v_i, \theta_i)^T = (u(0), v(0), \theta(0))^T \\ \underline{u}_j^k = (u_j, v_j, \theta_j)^T = (u(L), v(L), \theta(L))^T \end{cases} \quad (3)$$

mientras que en coordenadas globales ( $x_g, y_g, z_g$ ) se expresan como:

$$\underline{Q}_l^k = (F_{xl}, F_{yl}, M_{zl})^T = (\underline{\underline{L}}^k)^T \underline{\underline{E}}_l^k; \quad l = i, j \quad (4)$$

$$\underline{\delta}_l^k = \left( \underline{\underline{L}}^k \right)^T \left( \underline{u}_l^k + \left( \underline{k}_l^k \right)^{-1} \left( \underline{\underline{E}}_l^k - \underline{\underline{F}}_l^k \right) \right); \quad l = i, j \quad (5)$$

donde ( $\underline{\underline{F}}_l^k$ ) es la solicitud de tipo concentrado/puntual en el extremo ( $l$ ) de la barra ( $k$ ),  $\underline{k}_l^k$  son las rigideces en el extremo de cada barra en el sistema de coordenadas local y  $\underline{\underline{L}}^k$  es la correspondiente matriz de cambio de base.

Por tanto, este modelo de barra 2D considera en sus secciones extremas nudos semirrígidos de rigidez longitudinal, transversal y rotacional dada. Se ha optado por este tipo de elemento en lugar del clásico de nudos rígidos porque permite incluir de forma sencilla cualquier tipo de libertad entre barras de la estructura.

### 2.2. No linealidad geométrica

Debido a que un análisis de estabilidad requiere que el equilibrio se plantea en la configuración real, es decir, en la deformada, se hace necesario fijar el sistema de referencia en el que expresar los desplazamientos y esfuerzos de la barra. Para ello, se considera un sistema de referencia cartesiano de orientación fija para cada barra independiente de su deformación, denotado por  $(X, Y, Z)$ . Del equilibrio de fuerzas según los ejes  $(X, Y)$  y de momentos según  $(Z)$ , resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (en términos de los que podrían denominarse pseudo esfuerzos o esfuerzos de Piola-Kirchhoff [17]):

$$\begin{cases} N'(s) + q_s(s) = 0 \\ V'(s) + q_y(s) = 0 \\ M'(s) - N(s)\theta(s) + V(s) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

donde  $\theta(s) = v'(s)$  y las variables con notación prima indican derivada respecto de la coordenada espacial  $(s)$  y donde se ha aproximado el seno del ángulo por el ángulo y su coseno por la unidad. También se asume la hipótesis de pequeñas deformaciones y se considera que el comportamiento intrabarra del material es de tipo elástico y lineal, las ecuaciones que relacionan los esfuerzos  $(N_s, V_y, M_z)$  con los desplazamientos  $(u, v, \theta)$  de un punto de la directriz de la barra son:

$$\begin{cases} N_s(s) = EA(s)u'(s) \\ M_z(s) = EI_z(s)\theta'(s) \end{cases} \quad (7)$$

siendo  $E$  el módulo de Young del material,  $I_z(s)$  el momento de inercia y  $A(s)$  el área de cada sección transversal de la barra.

### 2.3. No linealidad material

Como consecuencia de la actuación simultánea de todos los esfuerzos, la capacidad de la sección para soportar momento flector disminuye, siendo menor que el momento plástico ( $M_P$ ). La relación entre el momento flector y el esfuerzo axial y cortante necesarios para la plastificación completa de una determinada sección se denomina función de plastificación ( $Y_{MNV}$ ). Como caso particular simplificado, para una barra de sección rectangular de canto  $h$  y ancho  $b$ , y despreciando el efecto del esfuerzo cortante, dicha función vale:

$$Y_{MNV} = \frac{M_z}{M_P} + \left( \frac{N_s}{N_P} \right)^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

donde,

$$M_P = \frac{bh^2}{4}\sigma_F; \quad N_P = bh\sigma_F \quad (9)$$

Asumiendo ley de flujo asociada, la variación del vector de desplazamientos plásticos en los extremos de la barra se puede expresar de forma vectorial como:

$$d\underline{u}^p = (du_p(0) \ 0 \ d\theta_p(0) \ du_p(L) \ 0 \ d\theta_p(L))^T \quad (10)$$

y definiendo el vector de esfuerzos en los extremos de la barra, de componentes:

$$d\underline{E} = (dN_s(0) \ 0 \ dM_z(0) \ dN_s(L) \ 0 \ dM_z(L))^T \quad (11)$$

y considerando el vector normal ( $\underline{n}$ ) a la superficie de plastificación ( $Y_{MN}$ ) en función del gradiente de la función de plastificación

$$\underline{n} = \left( \frac{\partial Y_{MN}}{\partial \underline{E}} \right) \Bigg/ \sqrt{\left( \frac{\partial Y_{MN}}{\partial \underline{E}} \right) \cdot \left( \frac{\partial Y_{MN}}{\partial \underline{E}} \right)} \quad (12)$$

se puede obtener la respuesta elastoplástica en términos de la función de plastificación ( $Y_{MN}$ ) y de los esfuerzos de la sección ( $\underline{E}$ ). La derivada de la función de plastificación respecto de los esfuerzos resulta:

$$\left( \frac{\partial Y_{MN}}{\partial \underline{E}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2N_s(0)}{N_P^2} & 0 & \frac{1}{M_P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2N_s(L)}{N_P^2} & 0 & \frac{1}{M_P} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

Si se impone la condición de que en una sección agotada ante carga adicional debe permanecer en la curva de plastificación se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} dM_z(i) = -(2N_s(i) - dN_s(i)) \frac{M_z(i)}{|M_z(i)|} \frac{M_P}{N_P^2} dN_s(i) \\ du_p(i) = \frac{2N_s(i)}{N_P} \frac{M_z(i)}{|M_z(i)|} d\theta_p(i) \end{cases} \quad i = 0, L \quad (14)$$

que se pueden incorporar de forma relativamente sencilla en el modelo de barra de la Figura 1 como condiciones de contorno en sus extremos.

### 3. Análisis estructural

Con las hipótesis adoptadas, el comportamiento no lineal material sólo afecta a la sección que alcanza la plastificación y no a las de su entorno. Además, al aparecer de forma súbita no se considera el comportamiento elastoplástico transitorio en el dominio de la sección. Estas simplificaciones, usualmente aceptadas en estructuras de barras, permiten plantear el siguiente proceso de resolución.

Tras los correspondientes cambios de sistemas de coordenadas que permitan expresar las ecuaciones de todas las barras en una única referencia y a la vista del orden del sistema de ecuaciones (1), (6) y (7), es necesario imponer en cada instante 6 condiciones de contorno por barra en desplazamientos y/o esfuerzos.

Ya sólo resta resolver las ecuaciones diferenciales para todas las barras de la estructura, junto con las condiciones de contorno en los apoyos, para determinar

la respuesta en función de la carga aplicada. Dicha solución será válida mientras no cambien las condiciones de definición del problema. Por el planteamiento realizado, sólo habrá cambios cuando una determinada sección plastifique. Por tanto, se plantea una resolución incremental, determinando en cada paso la carga máxima a partir de la cual cambian las condiciones y en ese caso proceder a acumular la solución y a iniciar el paso siguiente. A diferencia de los métodos matriciales donde se resuelven en cada paso sistemas lineales de ecuaciones, en este caso, al estar planteado el problema en términos de las correspondientes ecuaciones diferenciales, dentro de cada paso se obtiene la solución exacta (lineal o no lineal, según corresponda). Nótese que la aparición del esfuerzo axil en la Ecuación 6 hace que disminuya la rigidez si es de compresión o aumente si es de tracción. Por tanto, este planteamiento permite en cada paso buscar la carga para la que se anula la rigidez de la estructura, pudiendo determinar de esta manera el valor de la carga de pandeo. Para ello, se añade una solución arbitraria a los desplazamientos y se busca el valor del incremento de carga que hace que las magnitudes incrementales en desplazamientos ( $\Delta u, \Delta v, \Delta\theta$ ) y esfuerzos ( $\Delta N, \Delta V, \Delta M$ ) satisfagan las siguientes ecuaciones de estabilidad [18]:

$$\begin{cases} \Delta N'(s) = 0 \\ \Delta V'(s) = 0 \\ \Delta M'(s) - N(s)\Delta\theta(s) + \Delta V(s) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

siendo  $N(s)$  el esfuerzo axil acumulado en cada barra. Las condiciones de contorno de este sistema de ecuaciones diferenciales son las mismas que las del problema estático que se está resolviendo pero con cargas exteriores nulas. Desde el punto de vista matemático supone un problema de valor frontera cuyos autovalores son los valores del factor de carga de interés. Si para el autovalor mínimo se resuelve la Ecuación 15 imponiendo un valor arbitrario de algún desplazamiento transversal, se puede obtener el correspondiente modo de pandeo.

#### 4. Ejemplos de aplicación

Como aplicaciones a casos concretos se presentan seguidamente dos ejemplos. Por simplicidad, se ha considerado una sección rectangular maciza de 50 mm de ancho y 200 mm de canto, de material acero de límite elástico 275 MPa y módulo de elasticidad  $2,1 \cdot 10^{11}$  Pa. Se pretende mostrar la metodología de cálculo expuesta y realizar una comparación de los resultados entre los distintos modelos, bien sea considerando plastificación sólo por momento flector ( $Y_M = \frac{M_z}{M_p} - 1 = 0$ ) o por el efecto combinado de esfuerzos axil y flector ( $Y_{MN}$ ) y considerando o no grandes desplazamientos (es decir, equilibrio en la configuración deformada). En todos los casos se supone que la estructura no padea fuera de su plano.

##### 4.1. Viga apoyada-empotrada

A modo de validación, se resuelve el problema de una barra apoyada - empotrada sometida a una carga de compresión  $P$  y a carga distribuida transversal  $q$ , tal y como se indica en la Figura 2. Según la longitud  $L$  y las proporciones relativas entre las cargas  $P$  y  $q$  se presentan tres casos.

#### 4.1.1. Caso a: $L = 4\text{ m}$ , $P = 10^3\text{ N}$ , $q = 10^3\text{ N/m}$

Este caso corresponde a una viga poco esbelta donde el nivel de compresión es bajo y predominan la carga y los esfuerzos de flexión. En régimen elástico el factor de carga máximo antes del inicio de la plastificación es 45,08, mientras que hasta que no se alcance el valor de 8833,44 no aparece el fenómeno de pandeo.

La Figura 2 muestra para el caso más sencillo con el modelo ( $Y_M$ ) la deformada de la viga para un instante justo antes de que se forme la primera rótula plástica (sección c, línea azul), y justo un instante antes del colapso plástico tras formarse otra rótula plástica (sección b, línea roja).

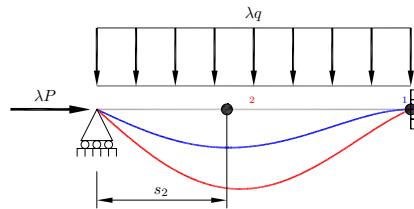


Figura 2: Viga apoyada-empotrada, deformada (amplificada  $\times 3600$ )

El factor de carga ( $\lambda$ ) para el que se forma la primera rótula es 68,7502 y tras ella el factor de carga requerido para que se produzca el pandeo es 4249,20. Pero mucho antes, para un factor incremental de carga de valor 31,4259 se formaría la segunda rótula plástica y con ella se llegaría al estado de agotamiento resistente de la viga. Por tanto, el factor de carga máximo acumulado es de 100,176. Cuando se resuelve considerando la plastificación por efecto combinado de flector y axil (usando la función de plastificación  $Y_{MN}$  y equilibrio en la configuración deformada) los resultados cualitativos son similares. Todos estos valores numéricos se presentan de forma condensada en la Tabla 1, junto con las ubicaciones ( $s$ ) de las rótulas plásticas y secciones agotadas. Nótese que al ser el valor del esfuerzo axil relativamente bajo los resultados son muy parecidos.

#	Rótula plástica ( $Y_M$ )			Sección agotada ( $Y_{MN}$ )		
	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$
1	68,7502	$L$	4249,20	68,3490	$L$	4274,00
2	31,4259	$0,414214 \cdot L$		31,4282	$0,414300 \cdot L$	
$\lambda_u$	100,176			99,7772		

Tabla 1: Viga apoyada-empotrada con predominio de la flexión (caso a)

#### 4.1.2. Caso b: $L = 4\text{ m}$ , $P = 10^4\text{ N}$ , $q = 10^3\text{ N/m}$

En este caso las diferencias entre ambos modelos comienzan a ser más significativas, al ser mayor el efecto del esfuerzo axil el factor de carga con el que comienza el régimen plástico es 39,29 y para 883,34 pandearía en régimen

elástico. Pero para ambos modelos el estado último de la viga se corresponde con el colapso plástico para un factor de carga de 100,1761 con el modelo  $Y_M$  y para valor 87,1538 para el modelo  $Y_{MN}$  (supone una reducción del 13%). Los factores de carga y las posiciones de las secciones plastificadas aparecen en la Tabla 2 y se interpretan de igual manera que en el caso anterior. En la Fig. 3(a) se muestra cómo evolucionan el momento flector y el esfuerzo axil a medida que aumenta la carga en el modelo  $Y_M$ , y en la Fig. 3(b) la correspondiente evolución para el modelo  $Y_{MN}$ . Los puntos de color rojo corresponden a los estados de esfuerzos de la sección del empotramiento  $c$  y los puntos de color azul a los de la sección intraelemental  $b$ , donde se formará la última rótula plástica (caso  $Y_M$ ) o la última sección agotada (caso  $Y_{MN}$ ).

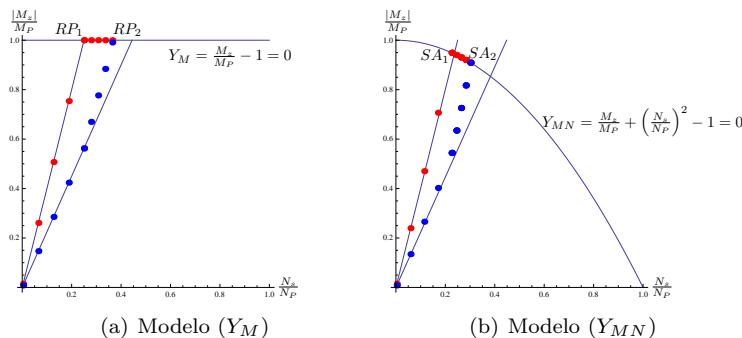


Figura 3: Viga apoyada-empotrada, evolución de la plastificación cuando el axial es significativo

#	Rótula plástica ( $Y_M$ )			Sección agotada ( $Y_{MN}$ )		
	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$
1	68,7502	$L$	363,045	62,0983	$L$	372,136
2	31,4259	$0,414214 \cdot L$		25,0555	$0,417354 \cdot L$	
$\lambda_u$	100,176			87,1538		

Tabla 2: Viga apoyada-empotrada con compresión axial significativa (caso b)

#### 4.1.3. Caso c: $L = 8 m, P = 2 \cdot 10^4 N, q = 10^2 N/m$

Conforme aumenta la esbeltez de la viga o la carga de compresión, puede ocurrir antes el pandeo que el colapso plástico, como ocurre en este caso, donde se ha doblado tanto la longitud de la viga como el valor del esfuerzo axial. El factor de carga con el que comienza el régimen plástico es 62,50 y para 110,42 pandearía en régimen elástico. Los correspondientes valores numéricos se muestran en la Tabla 3. Dado que para el modelo  $Y_M$  la primera rótula aparecería para un factor de 171,875, se produce el pandeo elástico antes que la plastificación de la sección  $c$ . En cambio, si se considera el modelo  $Y_{MN}$ , plastifica primero la

sección del empotramiento por combinación de axil y flector para un factor de carga de 66,5746 e inmediatamente sobreviene el pandeo de la viga, al obtenerse que el incremento de factor de carga que anula la rigidez es nulo. Por lo tanto, el factor de la carga máxima sería solo 66,5746, un 40 % menor que con el modelo  $Y_M$  y sólo un 7 % superior al máximo factor de carga en régimen elástico.

#	Rótula plástica ( $Y_M$ )			Sección agotada ( $Y_{MN}$ )		
	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$
1	171,875	$L$	0,0	66,5746	$L$	0,0
$\lambda_u$	110,418			66,5746		

Tabla 3: Viga apoyada-empotrada con mayor esbeltez (caso c)

#### 4.2. Pórtico de Lee

La estructura de la Figura 4, denominada en la literatura ‘Pórtico de Lee’[19], permite ilustrar de forma clara y sencilla las posibilidades de generalización de la técnica numérica empleada. Se considera por simplicidad que el pórtico está formado por barras iguales, y se supone unión rígida pilar-dintel. Se resuelven dos casos particulares correspondientes a la misma sección y material del ejemplo anterior, longitud  $L = 4 m$  y carga distribuida de valor  $q = 100 N/m$ . En el primer caso las cargas concentradas  $P_1$  y  $P_2$  valen  $1000 N$  y en el segundo  $10000 N$ . Si se analizara la estructura en régimen elástico se obtendría un factor de 444,06 para llegar al inicio de la plastificación y un factor de 8019,27 para el pandeo.

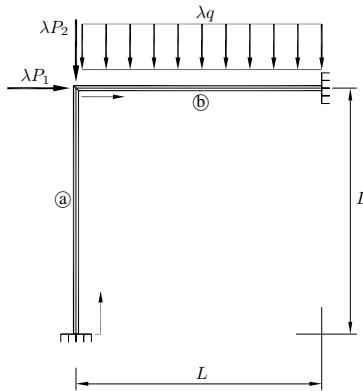


Figura 4: Pórtico de Lee

En la Tabla 4 se muestra que para un factor de carga de 797,784 se forma la primera rótula plástica en la sección  $d$  y la segunda en la sección  $c$  para un incremento de carga de 488,767 tras el cual se produce el pandeo. Por otro lado, cuando se considera el modelo  $Y_{MN}$  las secciones agotadas aparecen en las

mismas secciones pero para valores algo menores (709,563 y 340,479 respectivamente). Del mismo modo, tras la plastificación de la sección  $c$  sobreviene el pandeo inmediatamente. En ningún caso se produce el colapso por pérdida de estabilidad, al ser las cargas críticas correspondientes muy superiores a las que provocan la plastificación.

Rótula plástica ( $Y_M$ )				Sección agotada ( $Y_{MN}$ )			
#	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$	
1	797,784	⊕	$L$	4397,98	709,563	⊕	$L$
2	488,767	⊕	$0,483098 \cdot L$	0,0	340,479	⊕	$0,486419 \cdot L$
$\lambda_u$	1286,55				1050,04		

Tabla 4: Pórtico de Lee para esfuerzos axiles bajos

En el segundo caso, cuando las cargas puntuales son diez veces mayores, el comportamiento es cualitativamente distinto. En esta situación el factor para el inicio de la plastificación es de 166,50 y para el pandeo en régimen elástico 876,38. Cuando se considera plastificación sólo por flector ( $Y_M$ ) aparece la primera rótula plástica en la sección  $d$  para un factor de 632,936. En este instante además sobreviene el fenómeno de pandeo (el incremento de carga es  $\Delta\lambda_{cri} = 0$ ). Sin embargo, cuando se considera el modelo con plastificación combinada de axil y flector, para un factor de carga mucho menor de valor 216,364 plastifica la sección  $d$  y hasta que no plastifica adicionalmente la sección  $c$  para un factor incremental de 25,6792 no se produce simultáneamente el pandeo global, lo que corresponde a un valor de la carga acumulada de tan solo 242,043.

Rótula plástica ( $Y_M$ )				Sección agotada ( $Y_{MN}$ )			
#	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$	$\Delta\lambda$	$s$	$\Delta\lambda_{cri}$	
1	632,936	⊕	$L$	0,0	216,364	⊕	$L$
2				25,6792	⊕	$0,467481 \cdot L$	0,0
$\lambda_u$	632,936				242,043		

Tabla 5: Pórtico de Lee para esfuerzos axiles altos

## 5. Conclusiones

Se ha presentado una formulación directa para la determinación de la máxima carga soportada por pórticos planos considerando que pueden agotarse por colapso plástico o por inestabilidad global. Dentro del modelo de plasticidad, se ha considerado la interacción de los esfuerzos sobre la sección, y se han comparado ejemplos considerando plastificación sólo por momento flector o por los efectos combinados de flector y esfuerzo axil.

Para llevar a cabo el análisis se formula un elemento de barra 2D con comportamiento elástico lineal en el dominio y comportamiento plástico localizado en las secciones extremas, modelizado mediante nudos semirrígidos. El método de cálculo es novedoso ya que está basado en la formulación diferencial a nivel de barra y en el cumplimiento riguroso de las condiciones de equilibrio y compatibilidad a nivel de estructura. Tiene la ventaja de que no hay necesidad de calcular ni actualizar la matriz de rigidez para cada barra y para cada iteración del proceso de cálculo. Tampoco requiere conocer de antemano las fuerzas equivalentes para los distintos tipos de carga aplicados en el dominio del elemento barra, lo que supone un serio inconveniente de los métodos de equilibrio (o de rigidez) aplicados a la resolución de problemas no lineales de estructuras de barras. A pesar de la mayor complejidad respecto a los planteamientos matriciales clásicos para el análisis de estructuras, proporciona gran generalidad y permite tratar de forma sistemática cualquier tipo de carga, condición de contorno y unión interelemental (nudos articulados, rígidos o semirrígidos).

La capacidad portante del pórtico se reduce cada vez que se produce plastificación en alguna nueva sección, y cada plastificación introduce una libertad interna. En el caso simplificado de considerar plastificación sólo por el efecto del momento flector, esta libertad es de giro en la rótula plástica. En el caso general de plastificación por combinación de esfuerzos, la libertad corresponde a una combinación de los desplazamientos y giros plásticos relativos de la sección agotada correspondiente. En cualquier caso, en cada plastificación disminuye el grado de hiperestaticidad del pórtico y por tanto se ve afectada su estabilidad global. En cada instante del proceso de cálculo se puede determinar, mediante las ecuaciones de estabilidad correspondientes, el factor de carga que provoca el pandeo y determinar si se puede proceder a buscar el nuevo incremento de factor de carga que provoca la aparición de una nueva plastificación o si por el contrario el límite resistente viene fijado por dicha pérdida de estabilidad.

Por último, reseñar que en determinados casos ocurre que tras la plastificación de una nueva sección el incremento de carga que provoca el pandeo es nulo, lo que se interpreta como que la capacidad resistente adicional es despreciable al disminuir súbitamente la hiperestaticidad de la estructura y con ella, su rigidez.

## Referencias

- [1] M. Doblaré, E. Alarcón, Elementos de plasticidad, 1994.
- [2] A. Lorenzana, J. Garrido, Analysis of the elastoplastic problem involving finite plastic strain using the boundary element method, *Comput. Struct.* 73 (1999) 147–159.
- [3] O. Möller, M. Rubinstein, Análisis dinámico no lineal físico y geométrico de barras: discusión del campo de aplicación de teorías aproximadas, *Rev. Int. Metod. Numer.* 11 (1995) 151–182.
- [4] J. Richard-Liew, H. Chen, N. Shanmugam, W. Chen, Improved nonlinear hinge analysis of space frame structures, *Eng. Struct.* 22 (2000) 1324–1338.

- [5] M. Cacho-Pérez, A. Lorenzana, Cálculo directo de la carga crítica de pandeo de pórticos. Parte II, *Rev. Int. Metod. Numer.* 26 (2010) 31–38.
- [6] A. Lorenzana, M. Cacho-Pérez, Cálculo directo de la carga crítica de pandeo de pórticos. Parte I, *Rev. Int. Metod. Numer.* 25 (2009) 247–258.
- [7] S. Kim, M. Kim, W. Chen, Improved refined plastic hinge analysis accounting for strain reversal, *Eng. Struct.* 20 (2000) 15–25.
- [8] M. Saka, M. Hayalioglu, Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames, *Comput. Struct.* 38 (1991) 329–344.
- [9] E. Chica, A. Lorenzana, J. Terán, P. López-Reyes, Influence of ductile damage evolution on the collapse load of frames, *J. Appl. Mech.-T. ASME* 77 (2010) 34502–34505.
- [10] A. Lorenzana, P. López-Reyes, E. Chica, J. Terán, M. Cacho-Pérez, A nonlinear model for the elastoplastic analysis of 2D frames accounting for damage, *J. Theor. App. Mech.-Pol.* 49 (2) (2011) 515–529.
- [11] J. Lubliner, Plasticity theory, Maxwell Macmillan Intern. Editions, 1990.
- [12] D. Reynolds, J. McConnachie, P. Bettess, W. Christie, J. Bull, Reverse adaptivity. A new evolutionary tool for structural optimization, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 45 (1999) 529–552.
- [13] J. Terán, Formulación y análisis del comportamiento elastoplástico acoplado y no lineal geométrico de sistemas estructurales de barras, Ph.D. thesis, Universidad de Valladolid, 2002.
- [14] F. Tin-Loi, J. Misa, Large displacement elastoplastic analysis of semirigid steel frames, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 87 (1996) 741–762.
- [15] F. Tin-Loi, S. Tangaramvong, Limit analysis of elastoplastic frames considering 2nd-order geometric nonlinearity and displacement constraints, *Int. J. Mech. Sci.* 51 (2009) 179–191.
- [16] D. White, Plastic hinge methods for advanced analysis of steel frames, *J. Constr. Steel Res.* 24 (1993) 121–152.
- [17] S. Monleón, Análisis de vigas, arcos, placas y láminas, una presentación unificada, Universidad Politécnica de Valencia, 1999.
- [18] G. Simitses, D. Hodges, Fundamentals of Structural Stability, Elsevier Inc., 2006.
- [19] M. Ortega, J. Romero, E. Rosa, A historical study of the problem of straight prismatic elements subjected to compression, *Inf. Constr.* 59, 507 (1997) 69–81.

### D.3.6. Artículo 5

El artículo “*Limit analysis of frames based on Navier-Bernoulli beam model with local plasticity, damage and hardening*”, de los autores P.M. López-Reyes, A. Lorenzana y M. Cacho, ha sido enviado para su publicación.

Se reproduce a continuación.

# Limit analysis of frames based on Navier-Bernoulli beam model with local plasticity, damage and hardening

P.M. López-Reyes<sup>a</sup>, A. Lorenzana<sup>a,b</sup>, M. Cacho-Pérez<sup>b</sup>

<sup>a</sup>CARTIF Centro Tecnológico. Parque Tecnológico de Boecillo 205, 47151. Valladolid, Spain

<sup>b</sup>ITAP, University of Valladolid. Paseo del Cauce 59, 47011. Valladolid, Spain

---

## Abstract

A simple and efficient procedure for the non-linear analysis of frames is presented, being the elastoplastic behavior included through the tangent elastoplastic stiffness matrix and the yield function affected by damage in each plastic beam-end. An actual experiment and its modeling with Finite Element software are used for the verification of the approach. An example is solved and compared with the Finite Element study and the classic plastic method. The proposed method can evaluate in a simple and accurate way the collapse load of frames, considering a fully plastic non-linear analysis and a bilinear constitutive law with hardening and damage.

*Keywords:* plastic methods, structural analysis, elastoplastic stiffness matrix, hardening, damage

---

## 1. Introduction

In engineering applications, the material behavior can be modeled in several ways, depending on the level of accuracy required or the phenomena taken into account: ideal plasticity, hardening, fracture, etc. Although any kind of structure can be analyzed in the context of Continuum Mechanics, using proper 3D finite elements, the simplicity of beam theory makes it an important tool for civil, structural and mechanical engineering. In this context, when dealing with the nonlinear behavior of beam structures, it is necessary to include plasticity and damage in the beam model. In this paper, these effects are supposed to be concentrated in the beam-ends and are derived from a bilinear constitutive law, with an elastic zone up to the yielding point ( $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_f$ ) and a plastic with hardening zone up to the rupture point ( $\varepsilon_r$ ,  $\sigma_r$ ), as shown in Fig. 1(a). The evolution of damage is considered in the framework of the Continuum Damage Mechanics (CDM) approach, initially proposed by Lemaitre [1], which takes into account the effects associated to a given damage state through the definition of an internal state variable. The set of constitutive equations for the damaged material is then derived within a thermodynamic framework. Many

authors have modified Lemaitre's linear damage accumulation law in order to be able to incorporate experimental damage measurements with different types of materials fitting in it. For example, a nonlinear model proposed by Bonora [2] describes the damage evolution for different engineering materials, including construction steel.

In this paper a new approach is proposed for solving the fully non-linear problem of framed structures. Using elastoplastic beam finite elements and considering material nonlinearities, the loss of rigidity due to the increase of damage in the cross section and the strain hardening of sections after yielding, it is possible to establish an explicit form of the tangent stiffness matrix and to get a general, accurate and efficient procedure of analysis [3, 4]. With this method, it will be able to determine in an accurate way the collapse load, plastic rotations, displacements, damage and other magnitudes for standard frames.

## 2. Calculation

### 2.1. Hypotheses

Some hypotheses are necessary to develop the model. The structure will be discretized into 2D straight slender beam elements, each of them having a constant cross-section and standard rigid joints, obtaining the typical 2D framed structures.

The Navier-Bernoulli hypothesis for beams under axial ( $N_x$ ) and shear ( $V_y$ ) forces and bending moment ( $M_z$ ) assumes linearity for the normal strains  $\varepsilon$  along the cross-section. In this way,  $\varepsilon = -y/\rho$ , where  $y$  is the transverse coordinate in the cross-section and  $\rho$  is the curvature radius of the deflection curve. This hypothesis is considered valid beyond the elastic zone and the usual relationship between the stress  $\sigma$  and the strain  $\varepsilon$  will be applicable:  $\sigma = E\varepsilon$ , where  $E$  is the Young's modulus. In the elastoplastic zone  $E$  is replaced by  $E_r$ , the tangent modulus. As an example, the distribution of strains and stresses in a simple rectangular cross-section undergoing pure bending moment is presented in Fig. 1(b), where 3 zones can be identified: elastic, plastic and break zone, so the cross-section has some damage. Another standard hypotheses, always considered in the plastic methods for structural analysis is the so called *proportional loading*, meaning that all the loads increase in the same proportion until collapse.

### 2.2. Mathematical modeling

From the stress-strain relationship previously stated, the value  $n_s$  can be defined as

$$n_s = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_f} \quad (1)$$

Although classic plastic methods only consider plasticity due to the formation of plastic hinges when the bending moment  $M_z$  reaches the plastic moment  $M_p$ , more accurate methods [5, 6] also include the effect of axial  $N_x$  and shear  $V_y$  forces and damage can also be taken into account. With this objective, the

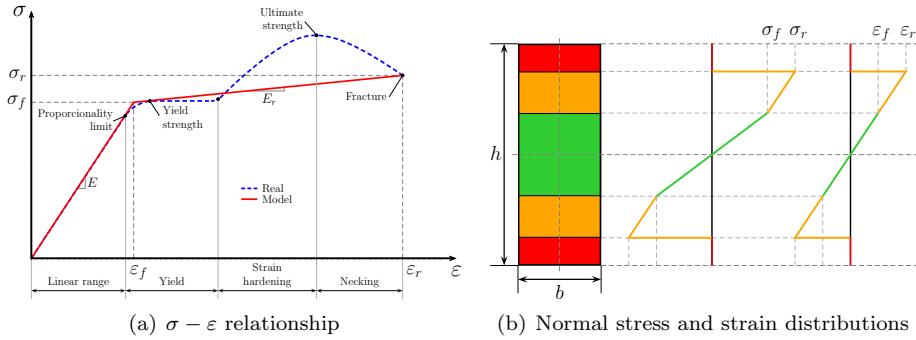


Figure 1: Material and section behavior for the elastoplastic model with damage and hardening

yield function  $Z$  is defined and changes in the structure will appear when  $Z$  is null, meaning that the cross-section has no remaining strength. For the simple rectangular cross-section,  $Z$  becomes:

$$Z = \frac{|M_z|}{M_p} + \left( \frac{N_x}{N_p} \right)^2 \frac{1}{1-D} + \frac{1}{3} \left( \frac{V_y}{V_p} \right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \quad (2)$$

$N_p$ ,  $V_p$  and  $M_p$  are the respective fully plastic forces and  $D$  is the damage in the section. Fig. 2 shows three yield surfaces for the damage values  $D = 0.00$ ,  $D = 0.25$  and  $D = 0.50$ .

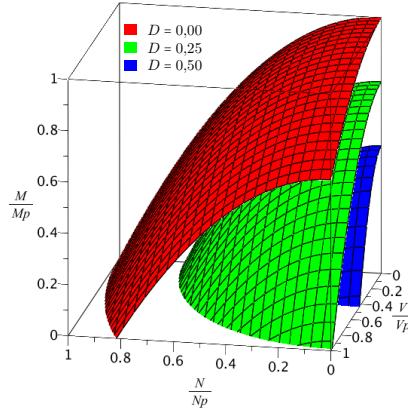


Figure 2: Yield function

Considering this function ( $Z = 0$ ) and the plastic consistency condition [7], the changes in  $Z$  must satisfy

$$\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial F} dF + \frac{\partial Z}{\partial D} dD = 0 \quad (3)$$

where  $F = [N_x, V_y, M_z]$  and  $D$  are the forces and the damage, respectively, at

the beam-ends, where plastic effects and damage are supposed to be located, while the rest of the beam (Fig. 3) remains in elastic regime. Note that distance  $\epsilon$  is infinitesimal.

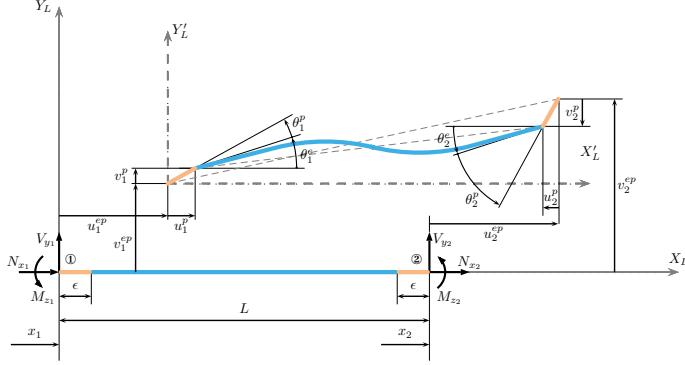


Figure 3: Beam element with elastoplastic displacements at its nodes

Following the standard matrix formulation [8],  $K$  is the stiffness matrix that relates the change in the beam-end forces to the change in the displacement at the ends of the elastic part of the beam:

$$dF = Kdu^e \quad (4)$$

The change in the displacements can be split into an elastic and a plastic component [9, 10, 11, 12].

$$du^{ep} = du^e + du^p \quad (5)$$

obtaining

$$dF = Kdu^e = K(du^{ep} - du^p) \quad (6)$$

The plastic displacement can be expressed in terms of the yield function using the associated flow rule [13]:

$$du^p = d\lambda \frac{\partial Z}{\partial F} \quad (7)$$

where  $d\lambda = [d\lambda_1, d\lambda_2]^T$  are the plastic multipliers at the beam-ends, obtained through the consistency condition [7]:

$$\begin{cases} d\lambda = 0 & \text{if } Z < 0 \\ d\lambda > 0 & \text{if } Z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Eq. 4 then becomes

$$dF = K(du^{ep} - du^p) = K \left( du^{ep} - d\lambda \frac{\partial Z}{\partial F} \right) \quad (9)$$

The damage of the cross-section can be expressed in terms of its displacements:

$$D = 1 - \frac{n_s}{\frac{u^p}{u^e} + 1} = 1 - \frac{n_s u^e}{u^p + u^e} = 1 - \frac{n_s u^e}{u^{ep}} \quad (10)$$

where, following [14],  $u^e$  and  $u^p$  are the equivalent elastic and plastic displacements, respectively.

According to [15], damage begins when the elastoplastic displacements are greater than  $n_s u^e$ , and its maximum value  $D = 1$  is obtained when  $u^{ep} \rightarrow \infty$ . Considering that

$$\begin{cases} dD = 0 & \text{if } Z < 0 \text{ or } u^{ep} < n_s u^e \\ dD > 0 & \text{if } Z = 0 \text{ or } u^{ep} \geq n_s u^e \end{cases} \quad (11)$$

and after differentiation of Eq. 10 with respect to the elastoplastic displacements

$$\frac{dD}{du^{ep}} = -\frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{du^e}{du^{ep}} - \frac{u^e}{u^{ep}} \right) \quad (12)$$

and considering Eq. 5, the change in the damage index can be expressed as:

$$dD = -\frac{n_s}{u^{ep}} \left[ du^{ep} - du^p - \frac{u^e}{u^{ep}} du^{ep} \right] \quad (13)$$

Then, substituting the expressions for  $dF$  and  $dD$  (equations 9 and 13 respectively) in the consistency condition of the yielding function (Eq. 3):

$$\frac{\partial Z}{\partial F} [K(du^{ep} - du^p)] + \frac{\partial Z}{\partial D} \left[ -\frac{n_s}{u^{ep}} \left( du^{ep} - du^p - \frac{u^e}{u^{ep}} du^{ep} \right) \right] = 0 \quad (14)$$

Substituting Eq. 7 in Eq. 14, the value of  $d\lambda$  can be obtained:

$$d\lambda = \frac{\left[ \frac{\partial Z}{\partial F} K + \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{u^e}{u^{ep}} - 1 \right) \right] du^{ep}}{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} - \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \frac{\partial Z}{\partial F}} \quad (15)$$

And finally, substituting Eq. 15 in Eq. 9, a relationship between beam-end forces and total displacements at its ends is found:

$$dF = K \left[ I - \frac{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} + \frac{\partial Z}{\partial F} \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{u^e}{u^{ep}} - 1 \right)}{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} - \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \frac{\partial Z}{\partial F}} \right] du^{ep} = K^{ep} du^{ep} \quad (16)$$

where the elastoplastic stiffness matrix has been defined as

$$K^{ep} = K \left[ I - \frac{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} + \frac{\partial Z}{\partial F} \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \left( \frac{u^e}{u^{ep}} - 1 \right)}{\frac{\partial Z}{\partial F} K \frac{\partial Z}{\partial F} - \frac{\partial Z}{\partial D} \frac{n_s}{u^{ep}} \frac{\partial Z}{\partial F}} \right] \quad (17)$$

Once the elastoplastic beam finite elements are defined, standard incremental finite element procedures based on the updated Lagrangian approach are implemented for the solution of the problem under increasing loads. Iterations are also needed to verify that all elastoplastic beam-ends remain in its plastic condition ( $Z = 0$ ).

### 3. Results

#### 3.1. Validation

To validate the former procedure, the following experiment was conducted and checked using Metafor [16], a finite element software focused on domain nonlinearities.

A slender beam was clamped in one extreme and simply supported in the other. The load consists of an increasing transverse displacement between both ends. The cross-section of the beam is a solid square of  $10 \times 10\text{mm}$ , and the clamped end was weakened by a  $5\text{mm}$  diameter hole to ensure that damage would be concentrated at this point (Fig. 4). Displacement and reactions were registered using proper instrumental techniques (calibrated load cells and LVDT devices). The results of the experiment are shown in Fig. 5(a).

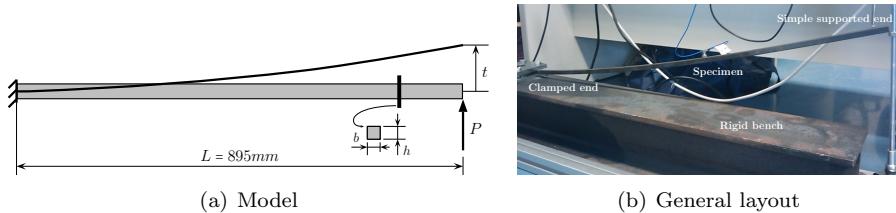


Figure 4: Verification problem

The beam is meshed in 320 quadratic brick elements, paying special attention to the hole area. Table 1 shows the parameters for the elastoplastic constitutive law, together with the parameters for the damage evolution according to the adopted Lematre and Chaboche formula [17]:

$$\Delta D = \left( \frac{\bar{\sigma}_{eq}^2 R_\nu}{2ES(1-D)^2} \right)^s \Delta \varepsilon^{pl} \quad \text{if} \quad \varepsilon^{pl} > \varepsilon_D^{pl} \quad (18)$$

where  $R_\nu$  is the triaxiality function:

$$R_\nu = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}_{eq}} \right)^2 \quad (19)$$

$E$  is the Young modulus,  $\nu$  the material coefficient,  $\sigma_H$  the hydrostatic stress,  $\bar{\sigma}_{eq}$  the equivalent Von Mises stress,  $\varepsilon^{pl}$  the change in the equivalent plastic strain,  $\varepsilon^{pl}$  the current equivalent plastic strain value,  $\varepsilon_D^{pl}$  the threshold plastic

strain,  $s$  and  $S$  the Lematre exponent and coefficient, respectively. The values for  $s$ ,  $S$  and  $E_r$  were obtained taking the reference data for mild steels [18] and updating their values to get the best fitting to the experimental results. Fig. 5 shows both experimental and computational results and also von Mises stresses and damage for the final displacement considered ( $t = 0.72m$ ). The roughness of the experimental curve is due to the manual procedure used to apply the load through the nut shown in Fig. 4(b).

Table 1: Metafor parameters

$E = 210\text{GPa}$	$\nu = 0.3$	$S = 5.5 \cdot 10^3\text{Pa}$	$\bar{\sigma}_{eq} = 275\text{MPa}$
$E_r = 0.05E$	$\varepsilon_D^{pl} = 0.00$	$s = 0.43$	

The dotted line also shows the solution if classic plastic methods for structural analysis were applied and assuming just ideal plasticity ( $E_r = 0$ , no rupture regardless the plastic strain). In this case, as the plastic moment is  $34375\text{Nm}$ , when  $t = 0.044m$  the maximum load carrying capacity is reached ( $P = 38.4\text{kN}$ ) and from that point onwards, displacements are unknown, as the plastic mechanism is reached. It can be noted that the actual behavior first undergoes greater loads due to hardening and then, for displacements larger than  $0.42m$ , the load decreases due to damage.

Once the experimental and computational results are known, the next step is to select the right values for the only four parameters ( $\varepsilon_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\sigma_r$ ) that are needed in the proposed approach. Fig. 6 shows the response for different cases together with the final values selected.

Computational values for damage are obtained by postprocessing the Metafor analysis in the following way. Metafor, as any other finite element software, only provides nodal values for variables as stress, strain and damage when dealing with volumetric meshing. If one-dimensional magnitudes are required, they have to be obtained following some postprocessing procedure. The process by which axial and shear forces can be obtained together with bending moment through integration across the cross-section is well established [19, 20]. Also, representative displacements for the centroid of the cross-section can be assimilated to the closer nodes or obtained through interpolation. Computing the plastic rotation is not so easy, as plasticity is spread in a volume and not just concentrated in a cross-section, as assumed in the proposed method. In order to overcome this problem, for the verification problem it is easy to compute the rotations of the centroid of the cross-sections at both sides of the hole and subtract these values. However, a damage value representative of the all plastic area is more complicated to obtain. Among other possibilities, the one used here consists of a reduction of the nodal damage values first in the beam axis direction to get the averaged values in the nodes of the target cross-section, then in one transversal direction to get averaged values in the middle line and finally average those values into the middle point. Any of the three reductions are weighted using linear shape functions as depicted in Fig. 7. Values for the

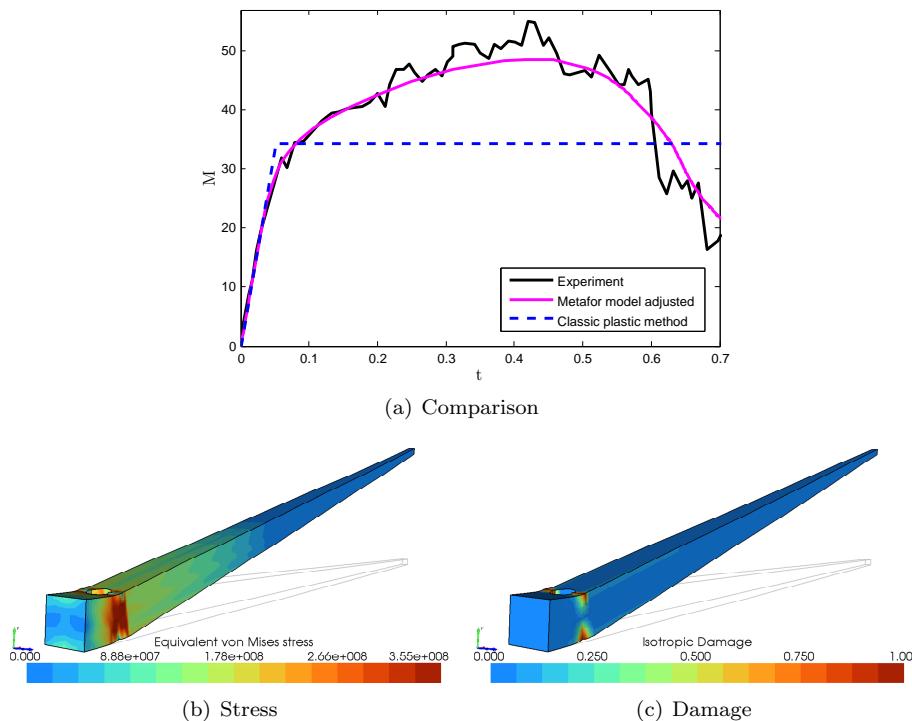


Figure 5: Metafor model

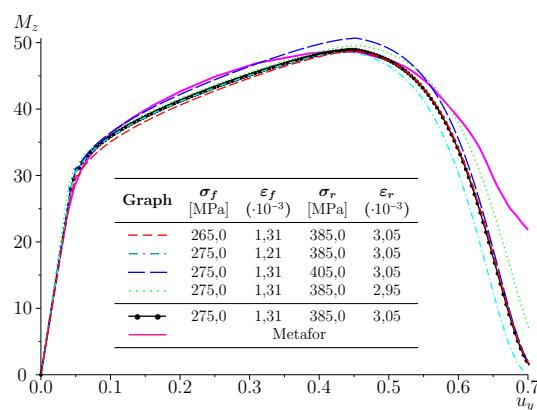


Figure 6: Damage-hardening elastoplastic model

weight coefficients  $C_i$  are related to the averaged damage nodal values in that area.

Following this procedure, the computed reduced value for the clamped end is shown in Fig. 8, where the damage obtained by the proposed unidimensional method (Eq. 10) is also obtained. The curves are obviously different, although the magnitudes and type of evolution are similar.

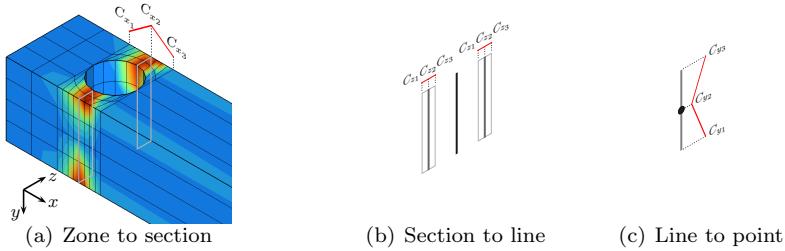


Figure 7: Weighted average procedure for dimension reduction

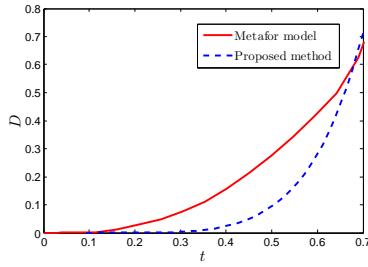


Figure 8: Evolution of damage in the clamped end

### 3.2. Example

Following a similar methodology, the framed structure shown in Fig. 9(a) is analyzed. The material is the same as in the former structure and the dimensions are  $L = 1m$ ,  $b = h = 0.1m$ . Both loads are proportionally increased until the elastoplastic collapse is reached

Fig. 9(b) shows the von Mises stresses, in the deformed configuration for  $P = 2.52 \cdot 10^5$ , using Metafor software with 21504 brick elements. In this case, no weakened areas have been induced, so plasticity is spread around sections 1, 3, 4 and 5. The vertical displacement in section 3 and the horizontal displacement in section 4 are shown in Fig. 9(c) versus the load  $P$ . Also, damage in sections 3 and 4 is shown in Fig. 9(d). Representative Metafor values are obtained as commented in Section 3.1.

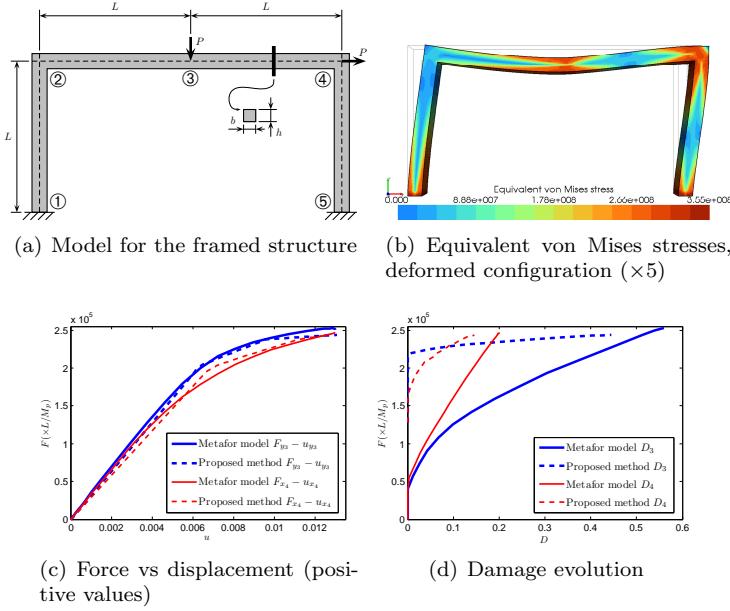


Figure 9: Equivalent stresses obtained with Metafor (a) and displacements (b) and damage (c) in cross-sections 3 and 4

Using the same values for  $(\varepsilon_f, \sigma_f, \varepsilon_r, \sigma_r)$  as in the verification problem, the solutions obtained using the proposed unidimensional method are also shown in Fig. 9, for comparison. In this case, just 4 finite elements and 5 nodes are enough. The deformed shapes for the loads  $153884N$ ,  $161591N$ ,  $187675N$  and  $192390N$ , that correspond to the plastification of the sections 5, 4, 3 and 1, respectively, are shown in Fig. 10(a) in a magnified scale ( $\times 50$ ).

Fig. 10 also shows the differences between the proposed method (solid line) and the solution assuming ideal plasticity and classic plastic methods (plastic hinges formed when the bending moment reaches the value  $M_p = 68750Nm$ , not taking into account the effects of the axial and shear forces, hardening or damage), plotted in dotted lines. With both methods, the order of formation of the plastic sections is the same (5, 4, 3, 1) and corresponds with the loads shown in Table 2. Horizontal displacement for cross-section 4, shown with solid line in Fig. 10(b), is the same than the one shown in dashed line in Fig. 9(c) and it is compared with the classic solution (dotted line). In Fig. 10(c) the plastic rotations evaluated with the two methods are also shown. Both displacements and rotations are greater in the proposed method than in the classic one for the same load.

Table 2: Load values ( $\times L/M_p$ )

Step	Plastic section	Proposed method	Classic method	Difference
1	5	2.238	2.420	-8.12%
2	4	2.350	2.567	-9.21%
3	3	2.730	2.959	-8.40%
4	1	2.798	3.000	-7.20%

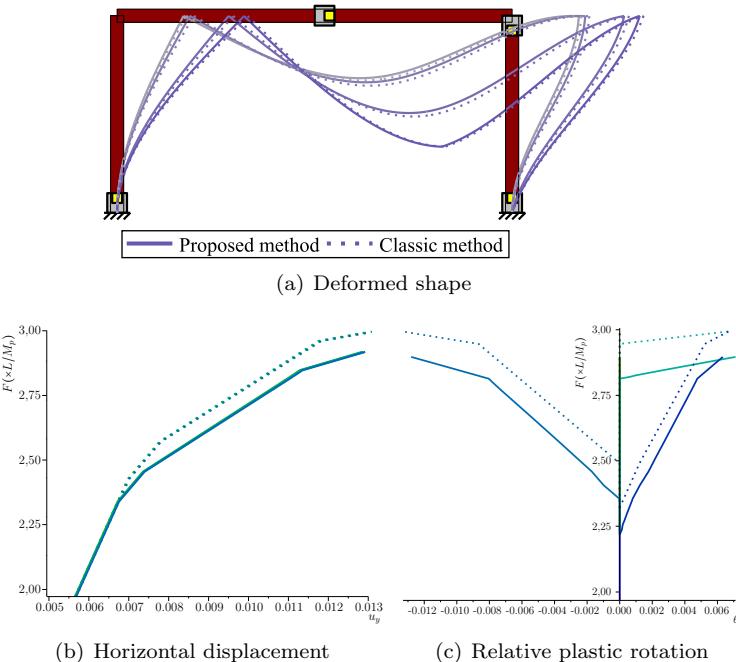


Figure 10: Comparison between classic method and proposed one

#### 4. Conclusions

In this work, an elastoplastic model for the analysis of Navier-Bernoulli frames, considering hardening and damage of the section is presented. The material is modeled using a bilinear behavior, with an elastic zone until the yield point  $(\varepsilon_f, \sigma_f)$  and a plastic zone with hardening until the break point  $(\varepsilon_r, \sigma_r)$ .

Once the yield function is known in terms of the geometry of the cross-section and its axial force, shear force, bending moment and damage, the degradable elastoplastic stiffness matrix is formulated, relating the generalized forces of the 2D beam element with its displacements and damage at its nodes. The

formulation of the problem is incremental and iterative, so that the successive solutions obtained for each load increment verify at all times the equilibrium, compatibility and constitutive (elastic and plastic) equations.

The advantage of this method is that the values of the four parameters which define the material can be adjusted using model updating techniques to accurately simulate the actual behavior of structures, known from experimental data (by testing) or from numerical simulation. Therefore, based on the results of an actual experiment, the parameters of the finite element program Metafor have been adjusted, considering its results as a reference for the model updating processes of the four parameters. With the best fitting values of these parameters, the response of the model for a 2D frame has been compared with the results of a 3D FEM simulation, obtaining a good correlation between them.

Although after the discretization and the matrix formulation only a small number of variables (axial and shear forces, bending moment, displacements and rotations) are explicitly known at the nodes, it is possible to obtain their distribution throughout the structure.

Additionally, with the one-dimensional formulation developed, the solution for any value of the load can be obtained directly in terms of magnitudes commonly used in civil engineering and architecture (without the need to post-process the results, in terms of stresses and strains obtained through Finite Element volume meshing), enabling to check on the requirements and recommendations of the regulations and building codes regarding the elastoplastic behavior of the cross-sections and global stability and serviceability.

## 5. Acknowledgements

The authors wish to thank the University of Liège, Belgium, especially Dr. G. Kerschen and Dr. J.P. Ponthot for their support in teaching and allowing us to use some of their software.

## References

- [1] J. Lemaître, How to use damage mechanics, Nuclear Engineering and Design 80 (1984) 233–245.
- [2] N. Bonora, A nonlinear CDM model for ductile failure., Engineering Fracture Mechanics 58 (1997) 11–28.
- [3] E. Ibijola, On some fundamental concepts of continuum damage mechanics, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 191 (2002) 1505–1520.
- [4] X. Yingchun, A multi-mechanism damage coupling model, International Journal of Fatigue 26 (2004) 1241–1250.
- [5] C. Massonnet, M. Save, Cálculo plástico de las construcciones, Montaner y Simón, 1966.

- [6] B. Neal, The plastic methods of structural analysis, Science Paperbacks (1985).
- [7] W. Prager, Recent developments of the mathematical theory of plasticity, *Journal of Applied Physics* 20 (1949) 235–241.
- [8] C. A. Felippa, Introduction fo Finite Element Methods (ASEN 5007), Department of Aerospace Engineering Sciences. University of Colorado at Boulder (2008).
- [9] N. Bonora, D. Gentile, A. Pirondi, G. Newaz, Ductile damage evolution under triaxial state of stress: theory and experiments, *International Journal of Plasticity* 21 (2005) 981–1007.
- [10] L. Shen, Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations, *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 5613–5627.
- [11] A. Benallal, R. Billardon, J. Lemaitre, Continuum damage mechanics and local approach to fracture: Numerical procedures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92 (1991) 144–.
- [12] J. Orbison, W. McGuire, J. Abel, Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 33 (1982) 557–573.
- [13] R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences Series, Clarendon Press, 1998.
- [14] A. Lorenzana, J. Garrido, Analysis of the elastic-plastic problem involving finite plastic strain using the boundary element method, *Computers and Structures* 73 (1999) 147–159.
- [15] E. Chica, Modelo de comportamiento elastoplástico degradable: aplicación al elemento barra 2D, Ph.D. thesis, E.I.I. Valladolid, 2009.
- [16] J. Ponthot, Metafor, large strains thermo-mechanical finite element software, LTAS-MN2L, University of Liège (2013).
- [17] J. Lemaitre, J. Chaboche, Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, 1994.
- [18] P. Bouchard, L. Bourgeon, S. Fayolle, K. Mocellin, An enhanced Lemaitre model formulation for processing damage computation, *The International Journal of Material Forming* 4 (2011) 299–315.
- [19] J. Gere, S. Timoshenko, Mechanics of Materials, Van Nostrand Company, 1972.
- [20] O. Zienkiewicz, R. Taylor, The Finite Element Method: Solid Mechanics, Oxford, 2000.



# Bibliografía

- [1] P. Adams, K. Smith, and R. Vyborny. *Introduction to Mathematics with Maple*. World Scientific Publishing, 2004. 5
- [2] R. Ballarini. The Da Vinci-Euler-Bernoulli beam theory? *Mechanical Engineering Magazine Online*, 2003. 7
- [3] A. Benallal, R. Billardon, and J. Lemaître. Continuum damage mechanics and local approach to fracture: Numerical procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(2):144–155, 1991. 49
- [4] N. Bonora. A nonlinear CDM model for ductile failure. *Engineering Fracture Mechanics*, 58:11–28, 1997. 48, 50
- [5] N. Bonora, D. Gentile, A. Pirondi, and G. Newaz. Ductile damage evolution under triaxial state of stress: theory and experiments. *International Journal of Plasticity*, 21:981–1007, 2005. 49
- [6] P.O. Bouchard, L. Bourgeon, S. Fayolle, and K. Mocellin. An enhanced Lemaitre model formulation for processing damage computation. *The International Journal of Material Forming*, 4:299–315, 2011. XXX, 126, 129
- [7] M.P. Byfield, J.M. Davies, and M. Dhanalakshmi. Calculation of the strain hardening behaviour of steel structures based on mill tests. *Journal of Constructional Steel Research*, 61(2):133–150, 2005. 2
- [8] J. Cañas. *Análisis y diseño elastoplástico de estructuras planas formadas por barras prismáticas*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 1986. 8
- [9] M. Cacho, A. Lorenzana, and P.M. López-Reyes. Exact formulation for the instability problem of frames and its direct numerical solution. 2013. 363

- [10] L. Chaboche. Continuum Damage Mechanics: present state and future trends. *Nuclear Engineering and Design*, 105:19–33, 1987. 17, 48
- [11] S. Chandrakanth and P.C. Pandey. An isotropic damage model for ductile material. *Engineering Fracture Mechanics*, 50:457–465, 1995. 50
- [12] W.F. Chen and T. Atsuta. *Theory of Beam Columns, Vol. 2, Space Behaviour and Design*. McGraw-Hill, New York, 1977. 19
- [13] E. Chica. *Modelo de comportamiento elastoplástico degradable: aplicación al elemento barra 2D*. PhD thesis, E.I.I. Valladolid, 2009. 9, 17, 188
- [14] E. Chica, J.M.G. Terán, A.L. Ibán, and P. López. Damage coupled to yield function for the elastoplastic analysis of framed structures. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, 9(6): 549–561, 2008. 328
- [15] E.L. Chica, A.L. Ibán, J.M.G. Terán, and P.M. López-Reyes. Influence of Ductile Damage Evolution on the Collapse Load of Frames. *Journal of Applied Mechanics*, 77:034502–034505, 2010. 342
- [16] R.W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. *Proceedings of American Society of Civil Engineers, 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, US-PA*, 1960. 7
- [17] Boletín Oficial del Estado. *Código Técnico de la Edificación (CTE)*. Ministerio de Vivienda, 2006. 193
- [18] Boletín Oficial del Estado. *Instrucción de Acero Estructural (EAE)*. Ministerio de Fomento, 2011. XXV, 194, 195
- [19] L. Duan and W.F. Chen. *Design Interaction Equations for Box Beam-columns*. School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, 1988. 20
- [20] L. Duan and W.F. Chen. A yield surface equation for doubly symmetrical sections. *Engineering Structures*, 12:114–119, 1990. XXI, XXIX, 19, 20
- [21] P. Eyringhoff. *System identification: parameter and state estimation*. Wiley-Interscience, 1974. ISBN 9780471249801. 24

- [22] C.A. Felippa. Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007). *Department of Aerospace Engineering Sciences. University of Colorado at Boulder*, 2008. URL <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/>. 188
- [23] M.I. Friswell and J.E. Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*. Kluwer Academic Publishers Group, 1995. 10
- [24] M.I. Friswell and J.E. Mottershead. Physical understanding of structures by model updating. *Proceedings of COST F3 International Conference on Structural System Identification, Kassel, Germany*, pages 81–96, 2001. 10
- [25] J.A. Garrido and A. Foces. *Resistencia de materiales*. Universidad de Valladolid. Secretariado de publicaciones, 1994. 14
- [26] J.M. Gere and S. Timoshenko. *Mechanics of Materials*. Van Nostrand Company, 1972. 7, 30
- [27] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences Series. Clarendon Press, 1998. ISBN 9780198503675. 58
- [28] M.R. Horne and L.J. Morris. *Plastic design of low-rise frames*. London Collins, 1981. 2
- [29] E.A. Ibijola. On some fundamental concepts of continuum damage mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191:1505–1520, 2002. 17
- [30] P. Inglessis, G. Gómez, G. Quintero, and J. Flórez. Modelos simplificados de daño para el análisis de estructuras de acero. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14(3):279–292, 1998. 49
- [31] P. Inglessis, G. Gómez, G. Quintero, and J. Flórez. Model of damage for steel frame members. *Engineering Structures*, 21:954–964, 1999. 17
- [32] B. Jaishi. *Finite element model updating of civil engineering structures under operational conditions*. PhD thesis, Fuzhou University, 2005. 10, 22

- [33] G. Kerschen. *On the Model Validation in Non-linear Structural Dynamics*. PhD thesis, Université de Liège, 2002. 23
- [34] S. Krenk, J. Vissing, and L. Thesbjerg. Efficient collapse analysis techniques for framed structures. *Computers and Structures*, 72: 481–496, 1999. 2
- [35] G. Lay and P.D. Smith. Role of strain hardening in plastic design. *Journal of Structural Division*, 91(3):25–44, 1965. 2
- [36] A. Ledesma. *Identificación de Parámetros en Geotecnia*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 1987. 24
- [37] J. Lemaitre. How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 80:233–245, 1984. 48, 50
- [38] J. Lemaitre. *A course on damage mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 17
- [39] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1994. ISBN 9780521477581. 125
- [40] M. Link. Updating of analytical models - Basic procedures and extensions. *Modal Analysis & Testing, NATO Science Series*, Kluwer, 1999. 11
- [41] A. Lorenzana, P.M. López-Reyes, E. Chica, J.M.G. Terán, and M. Cacho. A Nonlinear model for the Elastoplastic Analysis of 2D Frames Accounting for Damage. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 49(2):515–529, 2011. 347
- [42] P.M. López-Reyes and A. Lorenzana. 2D Direct Stiffness Method. *Maplesoft Application Center (<http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=6400>)*, 2008. 120, 274
- [43] P.M. López-Reyes and A. Lorenzana. Plastic method of structural analysis. *Maplesoft Application Center (<http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=102534>)*, 2011. 120, 274
- [44] University of Liège LTAS-MN2L. Metafor, large strains thermo-mechanical finite element software. URL <http://metafor.ltas.ulg.ac.be>. 5, 141, 303, 311

- [45] Maplesoft (Cybernet Systems Co. Ltd), 2012. URL <http://www.maplesoft.com/products/maple>. 5
- [46] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Dover Books on Engineering. Dover Publications, 2008. ISBN 9780486462905. 8
- [47] Maplesoft. *User Manual*, 2007. 62
- [48] C. Massonnet and M. Save. *Cálculo plástico de las construcciones*. Montaner y Simón, 1966. 8
- [49] MathWorks. Matlab documentation center, 2012. URL <http://www.mathworks.nl/help/matlab/index.html>. 6, 318
- [50] O. Möller and M. Rubinstein. Análisis dinámico no lineal físico y geométrico de barras: discusión del campo de aplicación de teorías aproximadas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 11:151–182, 1995. 8
- [51] M.B. Monagan, K.O. Geddes, K.M. Heal, G. Labahn, S. Vorkoetter, J. McCarron, and P. DeMarco. *Maple Introductory Programming Guide*. Maplesoft, 2007. 62
- [52] M.B. Monagan, K.O. Geddes, K.M. Heal, G. Labahn, S. Vorkoetter, J. McCarron, and P. DeMarco. *Maple Advanced Programming Guide*. Maplesoft, 2007. 62
- [53] I.D. Moore, A.K. Turner, J.P. Wilson, S.K. Jenson, L.E. Band, M.F. Goodchild, B.O. Parks, L.T. Steyaert, et al. GIS and land-surface-subsurface modeling. *Environmental modeling with GIS*, pages 196–230, 1993. 26
- [54] NAFEMS. *Introduction to Non-linear Finite Element Analysis*. NAFEMS, 1992. 8
- [55] B.G. Neal. *The plastic methods of structural analysis*. Science Paperbacks, 1985. 8, 42
- [56] J.G. Orbison, W. McGuire, and J.F. Abel. Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33:557–573, 1982. 19, 49
- [57] J.P. Ponthot. *Traitment unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par le method des éléments finis*. PhD thesis, University of Liège, 1995. 5

- [58] W Prager. Recent developments of the mathematical theory of plasticity. *Journal of Applied Physics*, 20:235–241, 1949. 48
- [59] W. Prager. The theory of plasticity: a survey of recent achievements. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 169:41–51, 1955. 50
- [60] J.Y. Richard, H. Chen, N.E. Shanmugam, and W.F. Chen. Improved nonlinear hinge analysis of space frame structures. *Engineering Structures*, 22:1324–1338, 2000. 8
- [61] S.A. Ríos and S.R. García. *Modelización*. Alianza Universidad. Alianza, 1995. ISBN 9788420628226. 26
- [62] S. Santathadaporn and W.F. Chen. Interaction curves for sections under combined biaxial bending and axial force. *WRC Bulletin*, 148: 11, 1970. 19, 20
- [63] L.J. Shen. Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations. *International Journal of Solids and Structures*, 43:5613–5627, 2006. 49
- [64] E. Siethoff. *A Formulation for Updating Finite Element Models Through Consistent Use of Laser Vibrometer Data*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998. 21
- [65] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998. 8
- [66] P.S. Symonds and B.G. Neal. Recent progress in the plastic methods of structural analysis. *Journal of the Franklin Institute*, 252(5):383–407, 1951. 2, 9, 42
- [67] J.M.G. Terán. *Formulación y análisis del comportamiento elasto-plástico acoplado y no lineal geométrico de sistemas estructurales de barras*. PhD thesis, Dpto. Resistencia de Materiales y Estructuras, Universidad de Valladolid, 2002. 9, 15, 17, 48
- [68] S. Timoshenko. *History of strength of materials*. Mc Graw-Hill, NY, 1953. 7, 36
- [69] T.J. Wang. Unified CDM model and local criterion for ductile fracture-I. unified CDM model for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 42:177–183, 1992. 48, 50

- [70] M.B. Wong. Plastic frame analysis under fire conditions. *Journal of Structural Engineering*, 127(3):290–295, 2001. 8
- [71] X.Y. Zhang, S.H. Sim, and B.F. Spencer Jr. Finite element model updating of a truss model using incomplete modal data. *Proceedings of the World Forum on Smart Materials and Smart Structures Technology*, 2007. 11
- [72] S.P. Zhou and W.F. Chen. Design criteria for box columns under biaxial loading. *Journal of Structural Engineering*, 111(12):2643–2658, 1985. 19, 20
- [73] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method: Solid Mechanics*. Oxford, 2000. ISBN 9780750650557. 8, 30

