



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Estudio de la influencia del número de Reynolds  
en la transferencia de masa a través de membranas.**

***Autor: Miguel Santamaría Cervantes***

***Tutor/es: Pedro Prádanos del Pico***

***Antonio Hernández Giménez***



# Índice

<b>1. Abstract</b>	<b>2</b>
<b>2. Resumen</b>	<b>2</b>
<b>3. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>4. Teoría</b>	<b>4</b>
4.1. Método analítico . . . . .	4
4.2. Método de las perturbaciones . . . . .	10
<b>5. Metodología experimental</b>	<b>17</b>
5.1. Equipo de medida . . . . .	17
5.2. Metodología . . . . .	20
5.3. Tratamiento de datos . . . . .	20
<b>6. Resultados</b>	<b>22</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>28</b>
<b>8. Bibliografía</b>	<b>29</b>
<b>9. Anexo</b>	<b>30</b>
9.1. Nomenclatura . . . . .	30
9.2. Tablas . . . . .	32
9.2.1. Sin pintar . . . . .	32
9.2.2. Pintado . . . . .	34

## 1. Abstract

The use of membranes in industry plays an essential role in different processes. Their behaviour is described by Darcy's law, which is used in this study to develop a solution that correlates a tubular membrane's permeability with the Reynolds's number ( $Re$ ). Through an analytical method and a perturbative one, we obtain a solution that indicates an increase of the permeability with  $Re$ . Moreover, a cross flow filtration system is used to measure the permeability of two nanofiltration membranes, one of them having a painted length to study the influence of the development of the velocity profile; concluding that permeability depends strongly on the effective pressure, the velocity profile state, Reynolds number and the membrane geometry, all important factors to take into account when designing membranes.

## 2. Resumen

El uso de membranas en industria desempeña un papel esencial para la realización de distintas tareas. Su comportamiento viene descrito por la Ley de Darcy, que en este trabajo utilizamos para desarrollar una solución que relacione la permeabilidad de una membrana tubular con el número de Reynolds,  $Re$ , utilizando un método analítico y otro perturbativo, hallándose una solución que indica un aumento de la permeabilidad con  $Re$ . Además, se ha utilizado un dispositivo de filtración tangencial para realizar las medidas de la permeabilidad de dos membranas de nanofiltración, una de ellas con una longitud pintada para ver el efecto que tiene el desarrollo del perfil de velocidad en la permeabilidad, obteniéndose como resultado que existe una gran dependencia de la permeabilidad con la presión efectiva, el estado del perfil de velocidad, el número de Reynolds y la geometría de la membrana; siendo su determinación y ajuste esencial para el diseño de estas membranas.

### 3. Introducción

A mediados del siglo XIX Henry Darcy publicó en su estudio sobre las fuentes de la ciudad de Dijon [1] la conocida Ley de Darcy, que indica la existencia de una relación lineal entre el flujo que atraviesa un medio poroso y la presión.

Este descubrimiento y su posterior deducción teórica de las ecuaciones de Navier-Stokes [2] llevó consigo un gran avance en distintos campos de la investigación e industria, siendo el diseño y uso de membranas uno de los más relevantes, teniendo un amplio rango de usos en industria, desde procesos para la desalinización, tratamiento de aguas residuales, concentración de antibióticos o en la industria alimenticia sus usos son ilimitados.

Sin embargo, el uso de membranas en distintos procesos tiene factores limitantes como la colmatación, debido a la cuál la membrana se va obstruyendo y se impide el flujo a través de ella. Por lo que para evitar esta acumulación de residuos el uso de membranas de filtración tangencial como membranas planas, tubulares o en espiral es habitual. Esto por su parte no viene sin complicaciones, ya que la geometría de estas hace difícil la determinación de la presión efectiva en cada punto de la membrana, lo que lleva a una dificultad añadida a la hora de diseñar estos dispositivos de filtración. Además, la geometría del sistema influye en la generación de turbulencia y esta en el perfil de velocidad y por lo tanto en la presión efectiva de la membrana.

En nuestro estudio nos centramos en desarrollar una expresión para la variación de la permeabilidad de una membrana tubular, en función del número de Reynolds,  $Re$ , para flujo laminar teniendo en cuenta la caída de presión que se produce debido a la filtración. Esto lo hacemos utilizando dos métodos diferentes, uno analítico, y otro utilizando el método de las perturbaciones.

Además, para comprobar la validez del resultado medimos experimentalmente la permeabilidad para distintos valores de  $Re$  tanto en la zona laminar como turbulenta. También se comprueba la influencia que tiene que el perfil de velocidad esté completamente desarrollado antes de entrar a la membrana, utilizando dos tipos de membranas, una normal y otra con una longitud pintada para que se desarrolle el perfil de velocidad en esa zona.

## 4. Teoría

En esta sección se presentan dos métodos diferentes para abordar el problema, partiendo del desarrollo planteado en “An Introduction to Fluid Dynamics: Principles of Analysis and Design” [3].

El primero consiste en utilizar las aproximaciones de flujo estable, axialmente simétrico y zona laminar para resolver el problema de forma analítica.

El otro se basa en el método de las perturbaciones [4], que consiste en resolver el problema partiendo de la solución exacta de un problema parecido y rescribiendo la solución en forma de una serie de potencias en función de un parámetro perturbativo  $\varepsilon$  que tiene que ser pequeño.

### 4.1. Método analítico

Consideramos una membrana con forma tubular, de longitud L y radio R; suponemos que el flujo está en un estado estacionario, que es axialmente simétrico y que estamos a Re bajos (zona laminar).

Partimos de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas para r (ver figura 1):

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) + \rho g_r \quad (1)$$

y para la coordenada z:

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (2)$$

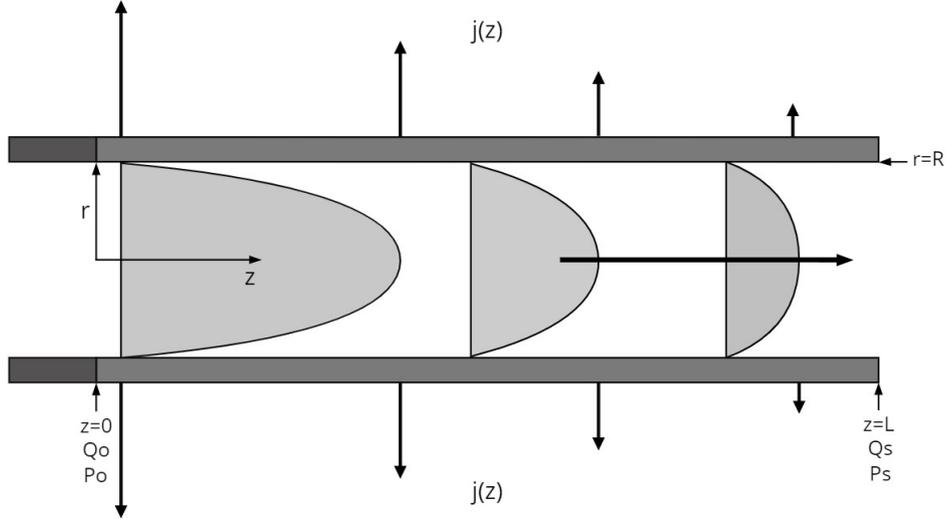
Aproximando con las suposiciones de Re bajos, flujo axialmente simétrico y estable se llega a:

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \quad (4)$$

Además se utiliza también la ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5)$$



**Figura 1:** Diagrama del fluido a su paso a través de la membrana. La caída de presión hace que disminuya el flujo que atraviesa la membrana y el perfil de velocidad se va haciendo más pequeño.

Ahora tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, pero debemos incluir una cuarta ecuación para dar cuenta del flujo permeado. Asumiendo que existe una relación lineal con la presión escribimos:

$$j(z) = K [p(z) - p_a] \quad (6)$$

con la que definimos el coeficiente de permeabilidad  $K$ .

En la pared de la membrana, la velocidad radial tiene que ser igual a la del flujo permeado que ha atravesado la membrana. Con esto definimos la condición de contorno:

$$j(z) = u_r(R, z) = u_R(z) \quad (7)$$

Ahora suponemos que el flujo permeado es pequeño, esto implica que el flujo interno es paralelo excepto cerca de la pared, donde la velocidad axial es pequeña y la velocidad

radial es finita.

Si la permeabilidad es lo suficientemente pequeña, como hemos supuesto, la velocidad radial puede tener una dependencia funcional con la posición radial como en el caso de tubos normales. Se propone entonces la ecuación:

$$u_z = 2U(z) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] = 2U_o \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] f(z) \quad (8)$$

Donde  $U_o$  definida como  $U_o = Q_o/\pi R^2$  es la velocidad media a la entrada del tubo y  $f(z)$  una función desconocida. Despejando  $u_r$  de la ecuación de continuidad tenemos:

$$u_r = -\frac{1}{r} \int_0^r r \frac{\partial u_z}{\partial z} dr \quad (9)$$

y derivando la ecuación (8) y sustituyendo en (9) obtenemos:

$$u_r = -RU_o f'(z) \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (10)$$

y en la superficie del tubo:

$$u_r(R, z) = u_R(z) = -\frac{RU_o}{2} f' \quad (11)$$

Para comprobar el supuesto que hemos hecho en (8) sustituimos  $u_z$  en (4):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left[ -\frac{8U_o}{R^2} f + 2U_o \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) f'' \right] \quad (12)$$

Para calcular  $\partial p/\partial z$  despejamos  $p(z)$  de (6) y derivamos:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{K} \frac{\partial j(z)}{\partial z} = \frac{1}{K} \frac{\partial u_R(z)}{\partial z} \quad (13)$$

y sustituyendo la ecuación (11):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{RU_o}{2K} f'' \quad (14)$$

e introduciendo este resultado en (12):

$$f'' = \frac{16K\eta}{R^3} f - \frac{4K\eta}{R} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] f'' \quad (15)$$

Vemos que aparece la variable  $r$  en esta ecuación diferencial, lo que significa que la suposición de que  $f$  solo es una variable de  $z$  no es verdadera. Sin embargo, si el término  $\frac{4K\eta}{R}$  es pequeño en comparación con la unidad podemos despreciar el término dependiente de  $r$  y aproximamos a:

$$f'' - \frac{16K\eta}{R^3} f = 0 \quad (16)$$

Tenemos dos condiciones de contorno, la primera da cuenta de que el flujo debe estar totalmente desarrollado a la entrada:

$$f = 1 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (17)$$

y la segunda:

$$f \quad \text{es finito para} \quad z \rightarrow \infty \quad (18)$$

Que implica que la velocidad no puede ser infinita. Entonces resolviendo la ecuación (16) y aplicando las condiciones de contorno llegamos a:

$$f(x) = e^{-4\beta \frac{z}{R}} \quad (19)$$

Donde se ha definido un nuevo parámetro, el de la permeabilidad adimensional:

$$\beta = \left( \frac{K\eta}{R} \right)^{1/2} \quad (20)$$

Despejando  $f''$  de (16), sustituyendo en (14) e introduciendo  $f$  obtenemos:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{8\eta U_o}{R^2} f = -\frac{8\eta U_o}{R^2} e^{-4\beta \frac{z}{R}} \quad (21)$$

e integrando con la condición de contorno:

$$p = p_o \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (22)$$

llegamos a la ecuación:

$$p(z) = p_o + \frac{2\eta U_o}{\beta R} \left[ e^{-4\beta \frac{z}{R}} - 1 \right] \quad (23)$$

A continuación aplicamos la condición de contorno para la salida del tubo:

$$z = L \rightarrow p = p_s \quad (24)$$

$$p_s = p(L) = p_o + \frac{2\eta U_o}{\beta R} \left[ e^{-4\beta \frac{L}{R}} - 1 \right] \quad (25)$$

y entonces obtenemos la diferencia de presión entre la entrada y la salida del tubo:

$$\Delta p = p_o - p_s = \frac{2\eta U_o}{\beta R} \left[ 1 - e^{-4\beta \frac{L}{R}} \right] \quad (26)$$

Ahora podemos escribir la presión en función de  $p_s$  :

$$p(z) = p_s + \frac{2\eta U_0}{\beta R} \left[ e^{-4\beta \frac{z}{R}} - e^{-4\beta \frac{L}{R}} \right] \quad (27)$$

Utilizando la ecuación (6) podemos calcular el flujo permeado que atraviesa la membrana:

$$j(z) = Kp(z) = 2\beta U_0 \left[ e^{-4\beta \frac{z}{R}} - e^{-4\beta \frac{L}{R}} \right] + \frac{R\beta^2}{\eta} p_s \quad (28)$$

y con ello podemos calcular el caudal en toda la longitud del tubo como:

$$\begin{aligned} Q_L &= \int_0^L 2\pi R j(z) dz \\ &= 2\pi R \left[ 2\beta U_0 \left[ -\frac{R}{4\beta} e^{-4\beta \frac{z}{R}} - z e^{-4\beta \frac{L}{R}} \right]_0^L + \frac{R\beta^2 L}{\eta} p_s \right] \\ &= \pi R^2 U_0 \left[ 1 + \frac{2\beta^2 L}{\eta U_0} p_s - \left( 1 + 4\beta \frac{L}{R} \right) e^{-4\beta \frac{L}{R}} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Vemos que todo el término de la derecha está multiplicado por el caudal de entrada, por lo que lo podemos pasar dividiendo y obtenemos la fracción del fluido que atraviesa la membrana, que es además una magnitud adimensional:

$$\Phi_L = \frac{Q_L}{Q_o} = 1 + \frac{2\beta^2 L}{\eta U_0} p_s - \left( 1 + 4\beta \frac{L}{R} \right) e^{-4\beta \frac{L}{R}} \quad (30)$$

Se puede observar que la exponencial de esta ecuación aparece en la ecuación (26) de la diferencia de presión. Despejando de esa ecuación obtenemos:

$$-e^{-4\beta \frac{L}{R}} = \frac{\beta R}{2\eta U_0} \Delta p - 1 \quad (31)$$

y si sustituímos en la ecuación (30), multiplicando y agrupando términos, llegamos a un polinomio de segundo grado en el factor de la permeabilidad adimensional:

$$\frac{2Lp_0}{\eta U_0} \beta^2 + \left( \frac{R\Delta p}{2\eta U_0} - 4\frac{L}{R} \right) \beta - \Phi_L = 0 \quad (32)$$

Sin embargo la podemos simplificar más si desarrollamos  $\Phi_L$ :

$$\Phi_L = \frac{Q_L}{Q_o} = \frac{Q_o - Q_s}{Q_o} = 1 - \frac{Q_s}{Q_o} = 1 - \frac{U_s}{U_0} \quad (33)$$

Utilizando las ecuaciones (8) y (19) tenemos el perfil de velocidad:

$$u_z = 2U_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-4\beta \frac{z}{R}} \quad (34)$$

y podemos calcular la velocidad media del fluido a la salida como:

$$\begin{aligned}
U_s &= \frac{\int u_z(L) dA}{\int dA} = \frac{2U_0 e^{-4\beta \frac{L}{R}} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] 2\pi r dr}{\pi R^2} \\
&= U_0 e^{-4\beta \frac{L}{R}}
\end{aligned} \tag{35}$$

Sustituyendo esto en (33) obtenemos:

$$\Phi_L = 1 - e^{-4\beta \frac{L}{R}} \tag{36}$$

Introduciendo la ecuación (31) en (36) se obtiene:

$$\Phi_L = \frac{\beta R}{2\eta U_0} \Delta p \tag{37}$$

que si lo sustituimos en la ecuación (32):

$$\frac{2Lp_0}{\eta U_0} \beta^2 - 4\frac{L}{R} \beta = \beta \left( \frac{2Lp_0}{\eta U_0} \beta - 4\frac{L}{R} \right) = 0 \tag{38}$$

Eligiendo la solución no trivial:

$$\beta = \frac{2\eta U_0}{Rp_0} \tag{39}$$

y sustituyendo en la fórmula del factor de permeabilidad (20) queda:

$$K = \frac{\beta^2 R}{\eta} = \frac{4\eta U_0^2}{Rp_0^2} \tag{40}$$

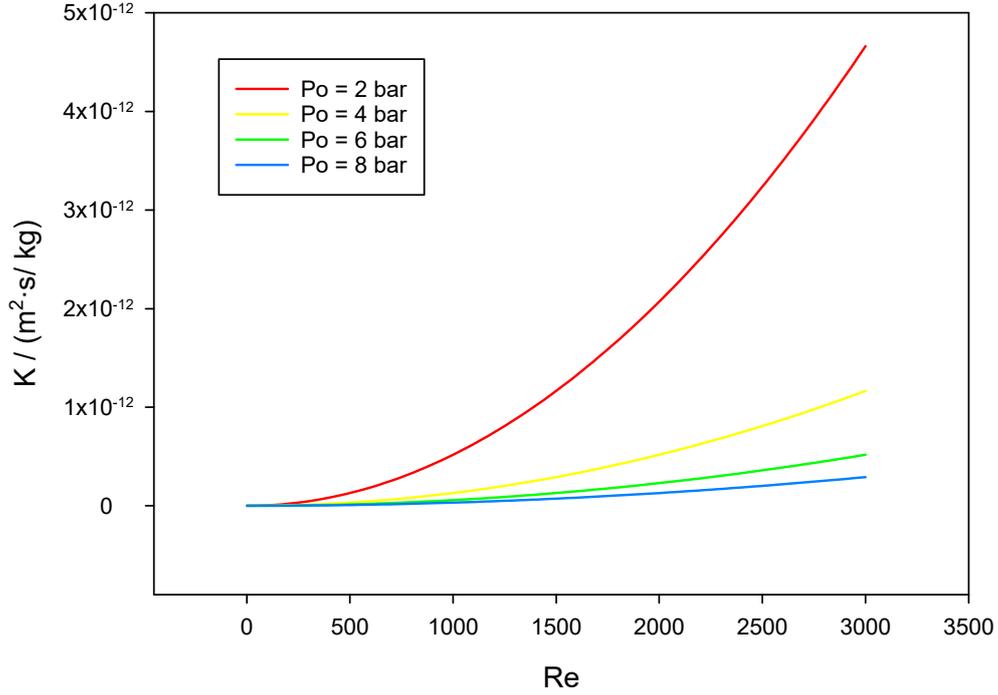
Por último, despejando  $U_0$  del número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho U_0 D}{\eta} \rightarrow U_0 = \frac{\eta Re}{\rho D} = \frac{\eta Re}{2\rho R} \tag{41}$$

podemos calcular  $K$  en función del número de Reynolds:

$$K(Re) = \frac{\eta^3}{\rho^2 p_0^2 R^3} Re^2 \tag{42}$$

Representando en la figura 2 se observa que existe una dependencia creciente de la permeabilidad con el número de Reynolds y que esta dependencia aumenta cuanto menor es la presión. Sin embargo, hay que tener en cuenta que partimos de la hipótesis de flujo laminar, por lo que para  $Re > 2000$  el modelo deja de ser válido.



**Figura 2:** Representación teórica de la solución (42) para la permeabilidad en función de Re para valores de  $p_0=8$  bar,  $R=0,00325$ m y  $\eta$  y  $\rho$  los valores del agua a  $T=25^\circ\text{C}$ .

## 4.2. Método de las perturbaciones

En este apartado utilizamos el método de las perturbaciones para encontrar una solución aproximada. Los pasos que se siguen en este método son [4]:

1. Se transforma el problema introduciendo un parámetro perturbativo ( $\varepsilon$ ) que tiene que ser pequeño.
2. Se asume una solución en forma de una serie de potencias del parámetro perturbativo y se calculan los coeficientes de la serie.
3. Se recupera la solución original del problema sumando los términos de la serie con el valor de  $\varepsilon$

Ahora que tenemos los pasos que constituyen este método se comienza adimensionalizando la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes. Primero se definen las siguientes variables adimensionales:

$$s = \frac{r}{R} \quad \zeta = \frac{z}{L} \quad v_z = \frac{u_z}{U_o} \quad (43)$$

con esto la ecuación de continuidad queda:

$$0 = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} s \left[ \frac{u_r}{(R/L)U_o} \right] + \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} \quad (44)$$

Vamos a considerar tubos en los que el radio es mucho menor que su longitud:

$$\varepsilon = \frac{R}{L} \ll 1 \quad (45)$$

Ahora bien, si nos fijamos en la definición de las variables de (43) podemos ver que todas ellas van a ser de orden 1 y esto hace que el segundo término de (44) también lo sea. Entonces la velocidad radial adimensional  $v_r$  que definimos como:

$$v_r = \frac{u_r}{\varepsilon U_o} \quad (46)$$

es también de orden 1, ya que la suma de los dos términos en (44) tiene que ser 0. Esto nos indica que  $u_r$  es del orden de  $\varepsilon U_o$  y confirmamos que la velocidad radial es muy pequeña en comparación con la velocidad en la dirección del tubo. Para quitar el resto de constantes de las ecuaciones de Navier-Stokes definimos la presión adimensional como:

$$\varphi = p \frac{\varepsilon R}{\eta U_o} \quad (47)$$

Con las nuevas variables (45), (46) y la presión adimensional escribimos las ecuaciones (3) y (4) como:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_r) \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial \zeta^2} \right] \quad (48)$$

$$0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial v_z}{\partial s} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial \zeta^2} \quad (49)$$

Definiendo la permeabilidad adimensional como:

$$\Lambda = \frac{K \eta}{\varepsilon^2 R} \quad (50)$$

se escribe la condición de contorno (7) como:

$$v_r = \Lambda \varphi \quad \text{para } s = 1 \quad (51)$$

y el resto de condiciones:

$$v_z = 0 \quad \text{para } s = 1 \quad (52)$$

que da cuenta de que la velocidad del fluido en contacto con la pared del tubo debe ser nula. Y:

$$v_z \quad \text{y} \quad v_r \quad \text{finitos para } s = 0 \quad (53)$$

Que indica que la velocidad no puede hacerse infinita en el centro del tubo. Se puede observar que si se hace  $\varepsilon = 0$  en las ecuaciones (44), (48) y (49) y  $\Lambda = 0$  en (51) se obtiene la solución del flujo de Poiseuille:

$$v_{rP} = 0 \quad (54)$$

$$v_{zP} = \frac{1}{4} \left( -\frac{d\varphi}{d\zeta} \right)_P (1 - s^2) \quad (55)$$

$$\left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)_P = \text{constante} \quad (56)$$

Para valores de  $\Lambda$  distintos de 0 se ve que las soluciones a las ecuaciones (44), (48) y (49) solo dependen de  $s, \zeta, \varepsilon$  y  $\Lambda$ . Ahora podemos hacer una aproximación para este flujo considerando  $\Lambda$  constante y  $\varepsilon$  pequeño pero distinto de cero. Suponemos que las soluciones sean de la forma:

$$\begin{aligned} v_z &= f_z(s, \zeta; \Lambda, \varepsilon) \\ v_r &= f_r(s, \zeta; \Lambda, \varepsilon) \\ \varphi &= f_p(s, \zeta; \Lambda, \varepsilon) \end{aligned} \quad (57)$$

Esperamos que el efecto de la filtración en el flujo dependa de la geometría en el sentido de que si el flujo filtrado está distribuido a lo largo de un tubo muy largo, la solución varíe poco respecto a la solución de Poiseuille. Además esperamos que las soluciones dependan de  $\varepsilon$  de manera suave. Entonces podemos expresar las soluciones como una serie de potencias en  $\varepsilon$ :

$$v_z = v_{z,0} + \varepsilon v_{z,1} + \varepsilon^2 v_{z,2} + \dots \quad (58)$$

$$v_r = v_{r,0} + \varepsilon v_{r,1} + \varepsilon^2 v_{r,2} + \dots \quad (59)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots \quad (60)$$

Nos referimos a  $\varepsilon$  como el parámetro de perturbación y a las ecuaciones (58) (59) y (60) como las expansiones de perturbaciones regulares de cada función.

Ahora sustituimos estas expansiones en (44), (48) y (49). Por ejemplo la ecuación (49) es:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{\partial\varphi_o}{\partial\zeta} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial v_{z,o}}{\partial s}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_{z,o}}{\partial\zeta^2} \\
& - \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta} + \varepsilon\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial v_{z,1}}{\partial s}\right) + \varepsilon^3\frac{\partial^2 v_{z,1}}{\partial\zeta^2} \\
& - \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta} + \varepsilon^2\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial v_{z,2}}{\partial s}\right) + \varepsilon^4\frac{\partial^2 v_{z,2}}{\partial\zeta^2}\dots
\end{aligned} \tag{61}$$

Como se supone que estas ecuaciones tienen que ser válidas para cualquier elección de  $\varepsilon$  solo se pueden satisfacer si cada coeficiente  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots$  es idénticamente cero. Entonces de (61) se obtienen:

$$0 = -\frac{\partial\varphi_o}{\partial\zeta} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial v_{z,o}}{\partial s}\right) \tag{62}$$

$$0 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial v_{z,1}}{\partial s}\right) \tag{63}$$

$$0 = \frac{\partial^2 v_{z,o}}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial v_{z,o}}{\partial s}\right) \tag{64}$$

y sucesivamente para las siguientes potencias de  $\varepsilon$ .

Tenemos que escribir las condiciones de contorno en términos de las expansiones de potencias de  $\varepsilon$  (58-60). De la ecuación (52) obtenemos:

$$v_z = 0 = v_{z,o} + \varepsilon v_{z,1} + \varepsilon^2 v_{z,2} + \dots \quad \text{a lo largo de } s = 1 \tag{65}$$

Por lo que:

$$v_{z,i} = 0 \quad \text{para } s = 1 \tag{66}$$

La condición de contorno (53) se mantiene igual, y (51) se convierte en:

$$v_r = v_{r,o} + \varepsilon v_{r,1} + \varepsilon^2 v_{r,2} + \dots = \Lambda \left[ \varphi_o + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 \dots \right] \quad \text{para } s = 1 \tag{67}$$

y entonces para cada  $\varphi_i$  obtenemos:

$$v_{r,i} = \Lambda\varphi_i \quad \text{para } s = 1 \tag{68}$$

Ahora podemos calcular una solución. Las ecuaciones de orden cero son:

$$0 = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sv_{r,o}) + \frac{\partial v_{z,o}}{\partial\zeta} \tag{69}$$

$$0 = -\frac{\partial\varphi_o}{\partial\zeta} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial v_{z,o}}{\partial s}\right) \tag{70}$$

$$0 = -\frac{\partial \varphi_o}{\partial s} \quad (71)$$

Si nos fijamos en la ecuación (71) podemos ver que  $\varphi_o$  no depende de  $s$  y entonces podemos integrar  $v_{z,o}$  directamente, obteniendo:

$$v_{z,o} = \frac{1}{4} \left( \frac{d\varphi_o}{d\zeta} \right) (s^2 - 1) \quad (72)$$

Calculando la velocidad axial media obtenemos:

$$\langle v_{z,o} \rangle = \frac{\int_0^1 2\pi s v_{z,o} ds}{\int_0^1 2\pi s ds} = 2 \int_0^1 \frac{1}{4} \left( \frac{d\varphi_o}{d\zeta} \right) (s^2 - 1) s ds = -\frac{1}{8} \frac{d\varphi_o}{d\zeta} \quad (73)$$

entonces escribimos la ecuación (72) como:

$$v_{z,o} = 2 \langle v_{z,o} \rangle (1 - s^2) \quad (74)$$

que es idéntica a la ecuación (8), sin embargo aquí la ecuación (74) es solo el primer término de la expansión de esa función.

Sustituyendo (72) en (69) obtenemos la velocidad radial como:

$$v_{r,o} = -\frac{1}{4} \left( \frac{d^2 \varphi_o}{d\zeta^2} \right) \left( \frac{s^3}{4} - \frac{s}{2} \right) \quad (75)$$

Ahora introduciendo este resultado en (68):

$$\frac{1}{16} \left( \frac{d^2 \varphi_o}{d\zeta^2} \right) - \Lambda \varphi_o(\zeta) = 0 \quad (76)$$

resolviendo la ecuación obtenemos:

$$\varphi_o(\zeta) = c_1 e^{4\sqrt{\Lambda}\zeta} + c_2 e^{-4\sqrt{\Lambda}\zeta} \quad (77)$$

y si aplicamos las condiciones de contorno:

$$\zeta = 0 \rightarrow \varphi_o(0) = \varphi_i \quad (78)$$

$$\zeta = 1 \rightarrow \varphi_o(1) = \varphi_f \quad (79)$$

sustituyendo obtenemos dos ecuaciones:

$$\varphi_i = c_1 + c_2 \quad (80)$$

$$\varphi_f = c_1 e^{4\sqrt{\Lambda}} + c_2 e^{-4\sqrt{\Lambda}} \quad (81)$$

despejando y sustituyendo obtenemos los valores de  $c_1$  y  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{\varphi_i e^{-4\sqrt{\Lambda}} - \varphi_f}{e^{-4\sqrt{\Lambda}} - e^{4\sqrt{\Lambda}}} \quad (82)$$

$$c_2 = \frac{\varphi_f - \varphi_i e^{4\sqrt{\Lambda}}}{e^{-4\sqrt{\Lambda}} - e^{4\sqrt{\Lambda}}} \quad (83)$$

y sustituyendo en (77), agrupando términos y sustituyendo por funciones hiperbólicas obtenemos:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \frac{\varphi_i \left( e^{4\sqrt{\Lambda}(1-\zeta)} - e^{-4\sqrt{\Lambda}(1-\zeta)} \right) + \varphi_f \left( e^{4\sqrt{\Lambda}\zeta} - e^{-4\sqrt{\Lambda}\zeta} \right)}{e^{4\sqrt{\Lambda}} - e^{-4\sqrt{\Lambda}}} \\ &= \frac{\varphi_i \sinh \left( 4\sqrt{\Lambda} (1 - \zeta) \right) + \varphi_f \sinh \left( 4\sqrt{\Lambda} \zeta \right)}{\sinh \left( 4\sqrt{\Lambda} \right)} \end{aligned} \quad (84)$$

y si calculamos el flujo a través de la membrana sustituyendo (47) y (50) en (6):

$$j(z) = Kp(z) = \Lambda \frac{\varepsilon^2 R}{\eta} \varphi \frac{\eta U_0}{\varepsilon R} = \Lambda \varphi \varepsilon U_0 \quad (85)$$

Ahora podemos calcular el caudal que atraviesa la membrana:

$$Q_L = \int_0^L 2\pi R \varepsilon U_0 \Lambda \varphi dz \quad (86)$$

y haciendo un cambio de variable con (43):

$$\zeta = \frac{z}{L} \rightarrow dz = L d\zeta \quad (87)$$

y podemos calcular el caudal:

$$\begin{aligned} Q_L &= 2\pi R^2 U_0 \Lambda \int_0^1 \varphi d\zeta \\ &= 2Q_o \Lambda \int_0^1 \frac{\varphi_i \sinh \left( 4\sqrt{\Lambda} (1 - \zeta) \right) + \varphi_f \sinh \left( 4\sqrt{\Lambda} \zeta \right)}{\sinh \left( 4\sqrt{\Lambda} \right)} d\zeta \\ &= Q_o \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} \left( 4\sqrt{\Lambda} \right) \left[ (\varphi_f + \varphi_i) \left( \cosh \left( 4\sqrt{\Lambda} \right) - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (88)$$

y la fracción de fluido que atraviesa la membrana la calculamos como en (30):

$$\Phi_L = \frac{Q_L}{Q_o} = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} \left( 4\sqrt{\Lambda} \right) \left[ (\varphi_f + \varphi_i) \left( \cosh \left( 4\sqrt{\Lambda} \right) - 1 \right) \right] \quad (89)$$

Ahora vamos a calcular el término  $\Phi_L$ . Para ello seguimos un procedimiento parecido al del apartado anterior en (33) y utilizamos la ecuación de la velocidad adimensional  $v_z = \frac{u_z}{U_0}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \frac{Q_L}{Q_o} = 1 - \frac{Q_s}{Q_o} = 1 - \frac{U_s}{U_0} = 1 - \frac{\langle v_{z,s} \rangle U_0}{U_0} \\ &= 1 - \langle v_{z,s} \rangle \end{aligned} \quad (90)$$

Calculando ahora la velocidad media adimensional a la salida del tubo, según la fórmula (73):

$$\begin{aligned}
\langle v_{z,s} \rangle &= -\frac{1}{8} \left[ \frac{d\varphi_0}{d\zeta} \right]_{\zeta=1} \\
&= -\frac{1}{8} \left[ 4\sqrt{\Lambda} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left( \varphi_f \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}\zeta) - \varphi_i \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}(1-\zeta)) \right) \right]_{\zeta=1} \quad (91) \\
&= -\frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left( \varphi_f \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}) - \varphi_i \right)
\end{aligned}$$

sustituyendo en (90) obtenemos:

$$\Phi_L = 1 + \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left( \varphi_f \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}) - \varphi_i \right) \quad (92)$$

e introduciendo esta expresión en (89) llegamos a:

$$1 = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left( \varphi_i \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}) - \varphi_f \right) \quad (93)$$

sustituyendo con la diferencia de presión:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left( \varphi_i \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}) + \Delta\varphi - \varphi_i \right) \\
&= \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left[ \varphi_i \left( \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}) - 1 \right) + \Delta\varphi \right] \quad (94)
\end{aligned}$$

cambiando con la expresión de la presión adimensional:

$$1 = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left[ \left( p_i \frac{\varepsilon R}{\eta U_0} \right) \left( \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}) - 1 \right) + \Delta p \frac{\varepsilon R}{\eta U_0} \right] \quad (95)$$

y finalmente sustituyendo el valor de la velocidad media:

$$1 = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} \operatorname{csch} (4\sqrt{\Lambda}) \left[ \left( p_i \frac{2\rho\varepsilon R^2}{\eta^2 Re} \right) \left( \operatorname{cosh} (4\sqrt{\Lambda}) - 1 \right) + \Delta p \frac{2\rho\varepsilon R^2}{\eta^2 Re} \right] \quad (96)$$

Al representar esta ecuación solo se encuentran soluciones válidas para  $Re$  muy altos del orden de 100000. Como partíamos de la solución del apartado anterior, donde asumíamos  $Re$  bajos, este resultado no es válido en la zona turbulenta, que es en la que se encuentran las soluciones. Calculando más términos de la expansión se podrían tal vez hallar soluciones válidas para la zona laminar, pero su resolución es complicada y lleva un gran esfuerzo.

## 5. Metodología experimental

### 5.1. Equipo de medida

Para estudiar el comportamiento real del sistema se ha utilizado un equipo de filtración tangencial mostrado en en la figura 3, donde se indican los componentes más importantes del mismo.

Se han utilizado dos membranas tubulares de nanofiltración (ver figura 4), fabricadas por la empresa Inopor (Inopor, Rauschert Distribution GmbH, Veilsdorf, Thuringia, Germany), named as Inopor® Nano.[5] Estas membranas son de material cerámico, con nanoporos de 0,9 nm y radio  $R=0,325$  cm. La primera tiene una longitud de 23.66 cm y la otra tiene una longitud de 23.48 cm de la cuál 7,25cm están sellados con pintura para ver el efecto del perfil desarrollado en la permeabilidad.

Al realizar el montaje la membrana se coloca en una celda que se cierra herméticamente mediante unas juntas de goma para separar la parte interna de la externa por donde sale el agua filtrada.

En la figura 5 se muestra un esquema del funcionamiento del dispositivo. Se utiliza agua desionizada, almacenada en un tanque que está recubierto por una camisa a través de la cuál circula el agua del baño térmico para mantener la temperatura constante a  $T=25^{\circ}\text{C}$ . El agua es impulsada con una bomba a través del circuito, atravesando el primer transductor de presión antes de entrar a la celda con la membrana. El agua que no atraviesa la pared porosa de la membrana sale por el otro extremo de la celda, pasa por el segundo transductor y luego por el caudalímetro para volver finalmente al tanque de agua. El agua que se filtra sale por dos orificios de la celda y se dirige a la báscula donde se pesa.

El sistema está informatizado, de tal manera que se puede elegir el caudal deseado desde el ordenador y se toman automáticamente los datos de presión, caudal y masa en función del tiempo.

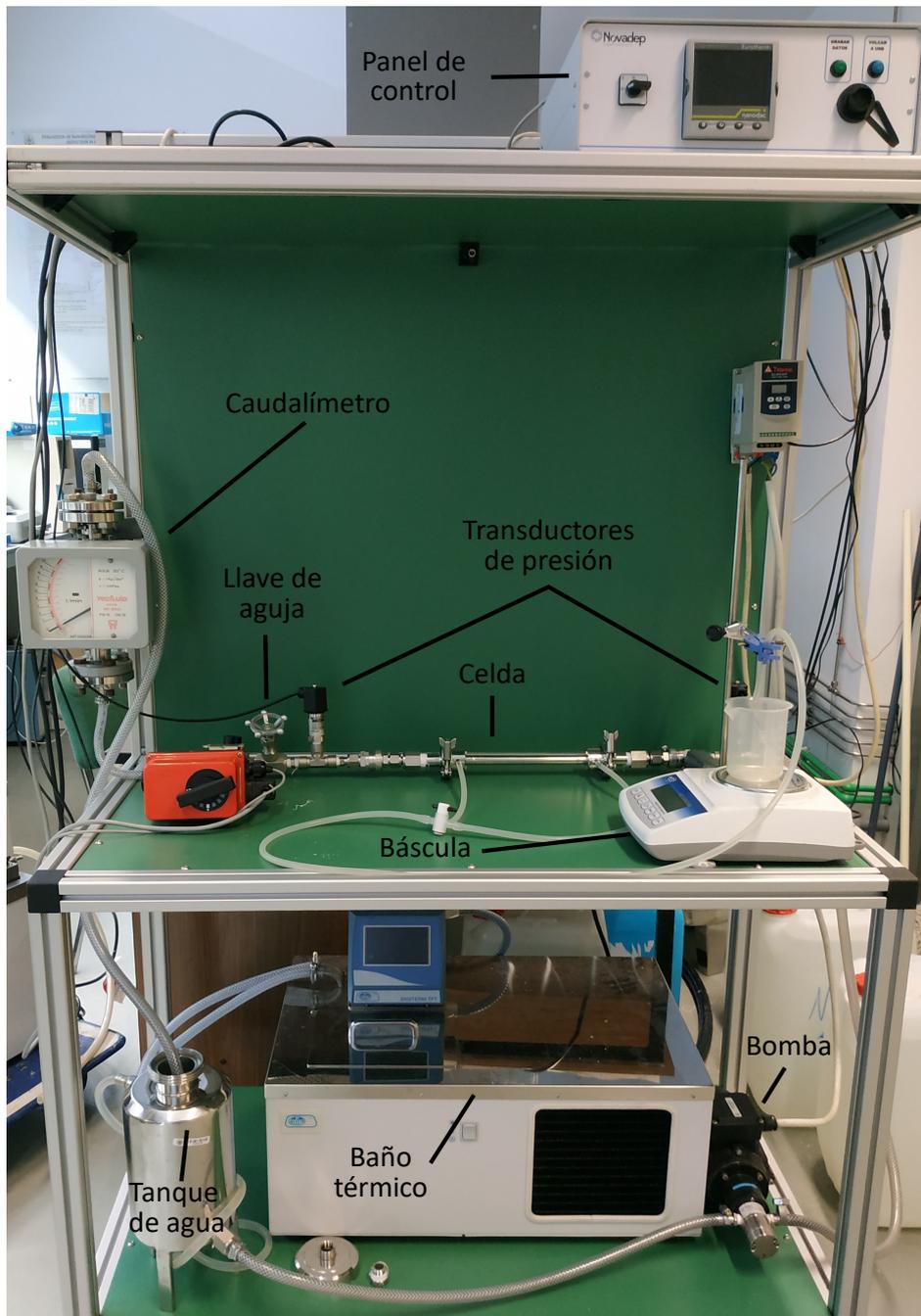
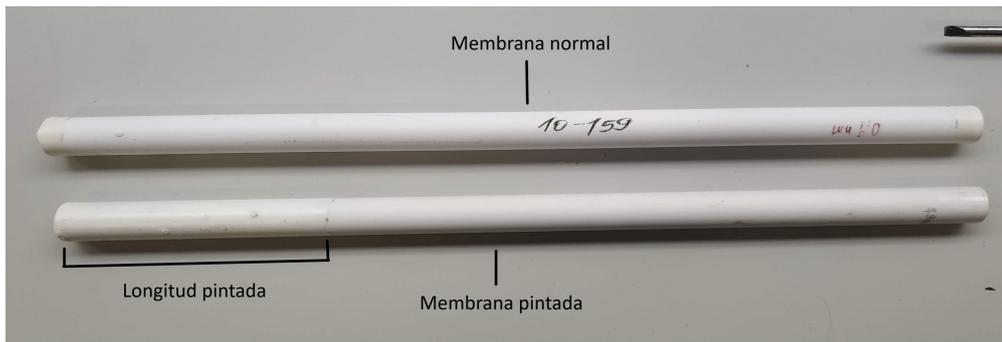
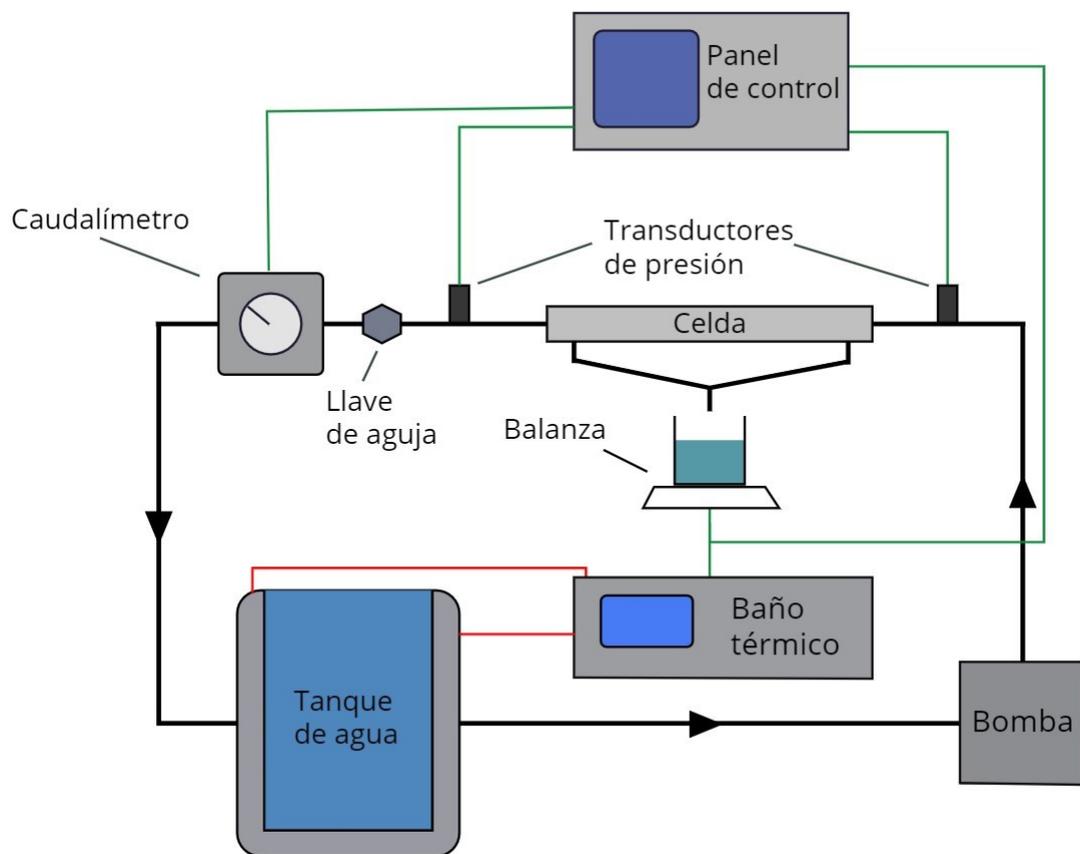


Figura 3: Equipo experimental.



**Figura 4:** Membrana normal y pintada usadas en el experimento



**Figura 5:** Esquema del equipo experimental.

## 5.2. Metodología

Para calibrar el sistema se necesita acondicionar la membrana. Esto es debido a que se genera una interfase agua-aire a la entrada de los poros de la membrana, formándose burbujas de aire que van escapando poco a poco con el funcionamiento. La eliminación de aire dentro de poros pequeños requiere altas presiones tal como predice la formula de Laplace [6] y tiempo suficiente para que la interfase se desplace dentro del poro [7]. Esto hace que la permeabilidad aumente con el tiempo.

Para evitar esto antes de realizar una medida se enciende el sistema, y se elige un valor de la presión alto  $p_o > 10$  bar y el máximo flujo que permite el sistema en estas condiciones  $Q > 5$  L/min y se mantiene en funcionamiento durante varias horas, considerándose que la membrana está acondicionada cuando la permeabilidad se mantiene constante dentro del margen de error.

Para tomar las medidas con el baño térmico funcionando se enciende el resto del sistema, se elige el caudal de entrada y se ajusta la presión con la llave de aguja hasta obtener el valor deseado. Desde el ordenador se toman los datos automaticamente, obteniendo los valores del caudal, la presión en cada uno de los transductores y la masa en la balanza en función del tiempo. Para cada caudal se realizan medidas largas de diez minutos o mas de tal forma que se tengan puntos suficientes para aproximar a una recta, ya que debido a la baja filtración de la membrana las gotas caen en un intervalo de quince segundos.

Las medidas se han realizado para caudales de: 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 1 2 3 4 y 5 L/min. Los primeros cinco valores se encuentran en la zona de flujo laminar y el resto en la zona turbulenta de manera que se pueda comparar el comportamiento en ambas zonas. Se realizan las medidas a temperatura de  $T=25^\circ\text{C}$  y de presión a la entrada  $p_o = 5$  bar o  $p_o = 8$  bar.

Las medidas se realizan de la misma manera para la membrana pintada, colocando el extremo pintado en el lado por el que entra el agua a la celda.

## 5.3. Tratamiento de datos

Conocida la masa y la densidad del agua se puede obtener el valor del volumen de agua filtrado en función del tiempo y haciendo una regresión lineal del volumen frente al tiempo obtenemos el caudal de agua que se ha filtrado.

Para calcular la velocidad de agua (flujo de permeado) que atraviesa la pared de la membrana se divide el caudal filtrado entre el área de la membrana:

$$j(z) = \frac{Q}{2\pi RL} \quad (97)$$

conocido este valor se puede utilizar la fórmula (6) para calcular la permeabilidad aproximando a que la variación de la presión es lineal dentro del sistema y toma el valor de la presión media entre la entrada y la salida de la celda:

$$K = \frac{j}{p_{med} - p_a} \quad (98)$$

De esta manera se obtiene para cada flujo permeado un valor de la permeabilidad y representando frente a  $Re$  que se calcula como:

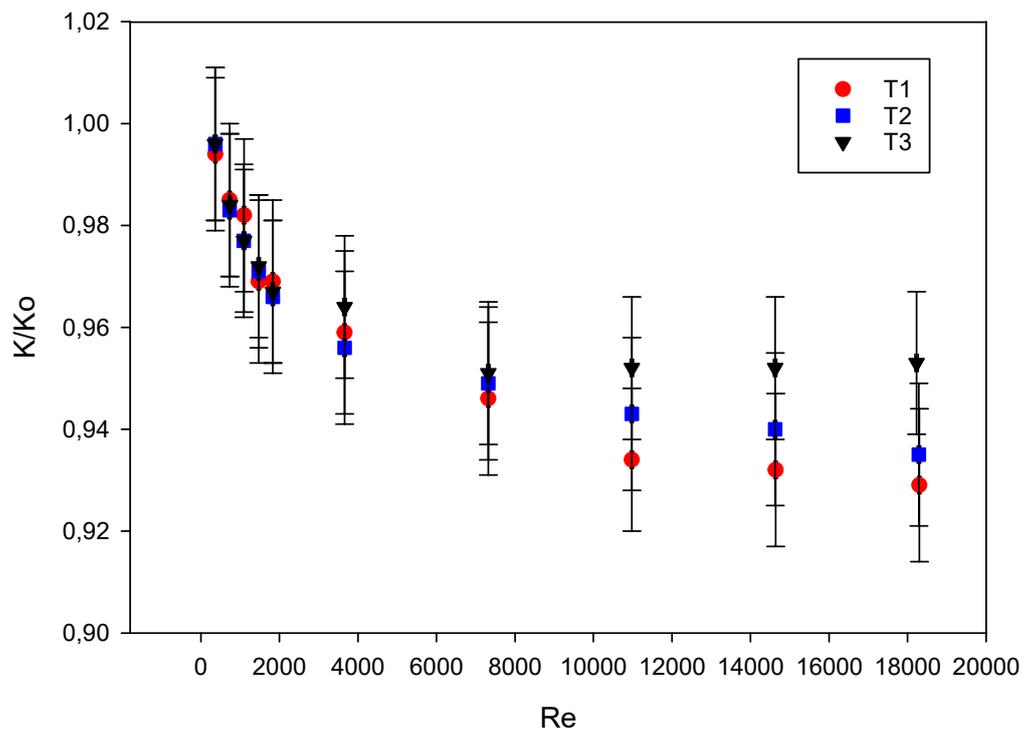
$$Re = \frac{\rho U_o 2R}{\eta} \quad (99)$$

se obtiene una curva del comportamiento de la permeabilidad para cada medida.

## 6. Resultados

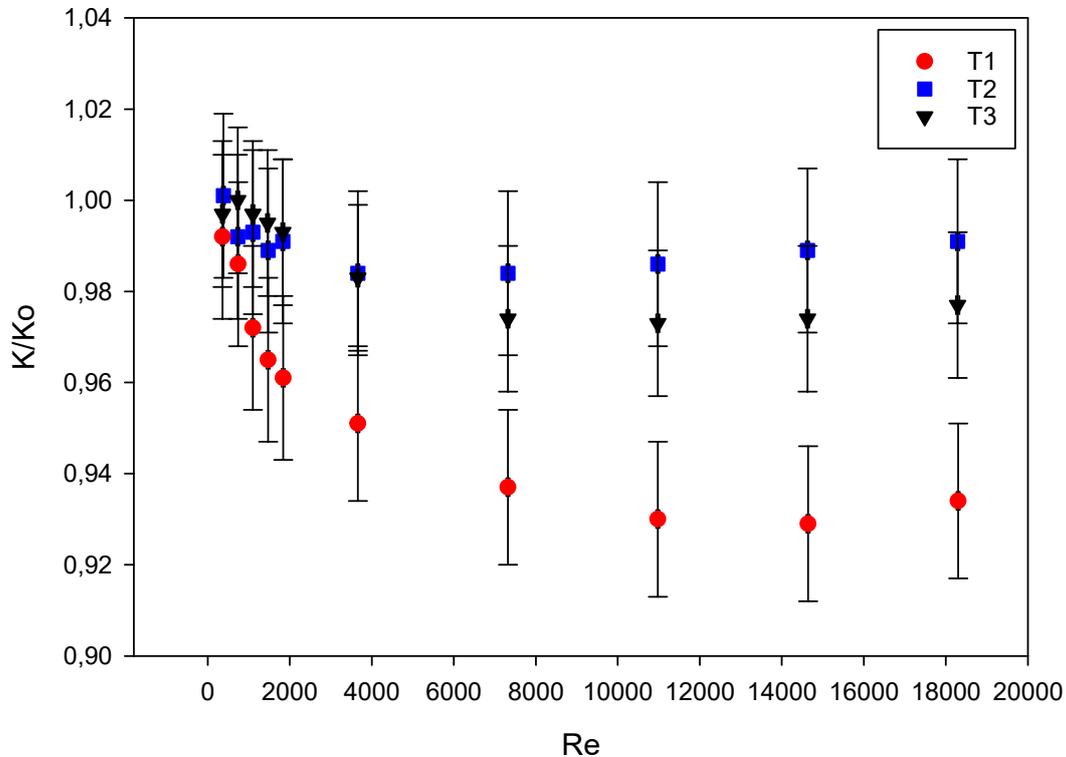
En primer lugar, debido a que la permeabilidad varía en el tiempo, en un intento de poder comparar mejor los valores de las distintas medidas, se han normalizado los resultados a un valor de la permeabilidad  $K_o$  para  $Re=0$ , calculado haciendo una regresión lineal de los resultados obtenidos en la zona laminar. De esta manera se presenta  $K/K_o$  frente a  $Re$ .

Primero se han representado los perfiles de la permeabilidad para distintas medidas a  $p_o = 8$  bar, que tienen una diferencia de acondicionamiento de más de cuatro horas entre ellas y donde se puede ver bien la variación de la permeabilidad en el tiempo. Estas medidas se han realizado a  $p_o = 8$  bar ya que la membrana no estaba completamente acondicionada y su permeabilidad era menor, lo que hacía necesaria un valor alto de la presión para que el flujo permease lo suficiente para poder tomar las medidas de manera adecuada. En la figura 6 (tablas 1, 2 y 3 del anexo) se representan los resultados para la membrana sin pintar:



**Figura 6:** Evolución temporal del perfil de permeabilidad para la membrana normal con una separación de más de 4 horas de acondicionamiento a  $p_o > 10$  bar entre cada perfil teniendo  $T1 < T2 < T3$ , realizándose las medidas a  $p_o = 8$  bar. Los datos se pueden consultar en las tablas 1, 2 y 3 del anexo.

Y en la figura 7 (tablas 5, 6 y 7 del anexo) los resultados para la membrana pintada:

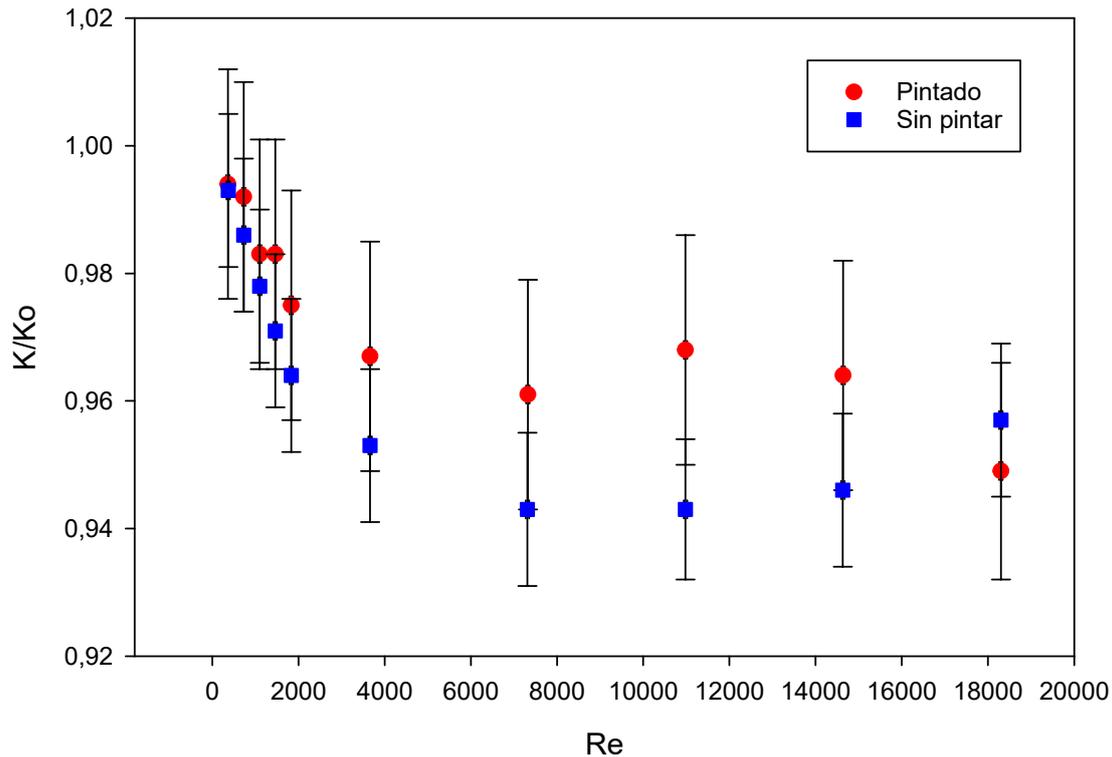


**Figura 7:** Evolución temporal del perfil de permeabilidad para la membrana pintada con una separación de más de 4 horas de acondicionamiento a  $p_o > 10$  bar entre cada perfil teniendo  $T1 < T2 < T3$  realizándose las medidas a  $p_o = 8$  bar. Los datos se pueden consultar en las tablas 5, 6 y 7 del anexo.

Se puede ver en la figura 7 que para la tercera medida T3, el perfil está por debajo del de la segunda T2, esto se debe a que llegado al punto de acondicionamiento total en el que no quedan burbujas de aire, y a partir de ese punto la permeabilidad disminuye debido al ensuciamiento que se va produciendo. Debido a este comportamiento se decidió acondicionar las membranas durante 10 horas a  $p_o > 10$  bar y realizar las medidas a  $p_o = 5$  bar ya que según lo visto en la figura 2 la variación de la permeabilidad debe ser más apreciable a presión más baja. No se realizaron medidas a presión más baja ya que esto alargaba el tiempo de medida de manera desmesurada.

En vista de las aspadas de error que se muestran en las figuras 6 y 7 (y las siguientes de  $K/K_o$  vs  $Re$ ) se podría pensar que no podemos decir nada respecto a la evolución de los resultados de cada una de las membranas y de la diferencia entre ellas. No obstante, debemos considerar que estas aspadas de error cuantifican los errores absolutos de cada una de los puntos experimentales, es decir, expresan la exactitud de cada una de las

medidas. No obstante, si consideramos la precisión, es decir la reproducibilidad de los puntos en cuanto a diferencias entre muestras y la tendencia en función de  $Re$  (sin tener en cuenta los efectos de calibración de los instrumentos de medida) el comportamiento tiene una alta fiabilidad. Esto se ha comprobado mediante la repetición rutinaria de las medidas, obteniendo resultados similares entre medidas.



**Figura 8:** Comparación del perfil de permeabilidad para la membrana normal y para la pintada a  $p_o = 5$  bar. Los datos se pueden consultar en las tablas 4 y 8 del anexo.

En la figura 8 se han representado los resultados obtenidos para ambas membranas acondicionadas a  $p_o > 10$  bar y medidas a una presión de entrada  $p_o = 5$  bar.

Se puede ver que los resultados no concuerdan con lo esperado teóricamente en la figura 1, ya que en vez de aumentar la permeabilidad con el Número de Reynolds en la zona laminar, se ve que esta disminuye, comenzando a aumentar para  $Re > 7000$ .

Esto se explica teniendo en cuenta que para el desarrollo teórico asumíamos que en nuestro sistema el perfil de velocidad estaba completamente desarrollado. Sin embargo, en ninguno de nuestros casos esto es así ya que si tenemos en cuenta que la longitud de

entrada necesaria para que el perfil de velocidad esté completamente desarrollado viene dado por la expresión [8]:

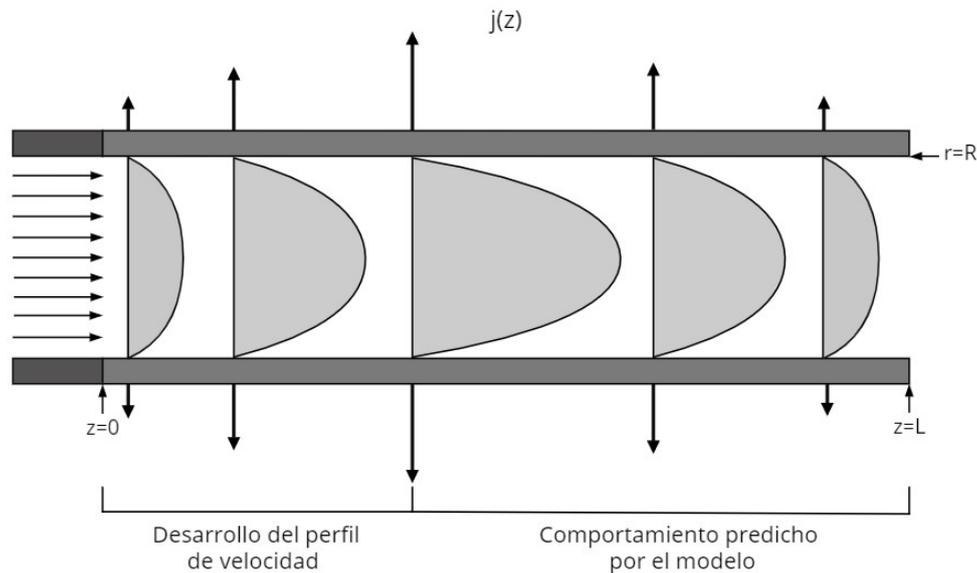
$$L_{entrada} \approx 0,05ReD \quad (100)$$

Según esta fórmula para el caso de  $Re$  más bajo que tenemos:  $0,1L/min \rightarrow Re = 365,9$  tenemos que la longitud necesaria para que el perfil este completamente desarrollado es:

$$L_{entrada} \approx 11cm \quad (101)$$

que es mayor que la longitud que está pintada en la membrana ( $L=7,25$  cm), y para  $Re$  más altos la longitud necesaria será mayor. Esto explica el comportamiento decreciente, ya que según aumenta  $Re$  el perfil de velocidad esta menos desarrollado a la entrada. En nuestro sistema experimental, a la entrada de la membrana, hay una longitud en la que el perfil está desarrollándose en la cuál el modelo no es válido y el flujo permeado es menor. A partir de esta zona el modelo es válido, sin embargo para  $Re$  más altos la longitud necesaria para que se desarrolle el perfil es más larga que la membrana y no se alcanza el comportamiento del modelo (ver figura 9).

Además cuando el perfil de velocidad no está desarrollado a la entrada de un tubo el valor del producto  $fRe$  depende de  $\frac{ReD}{L}$  y de factores geométricos [3], el factor de fricción  $f$  se relaciona con la caída de presión [9] y esta con la permeabilidad. Por lo que el estado del perfil de velocidad tiene amplios efectos en la permeabilidad.



**Figura 9:** Comportamiento real del flujo a través de la membrana.

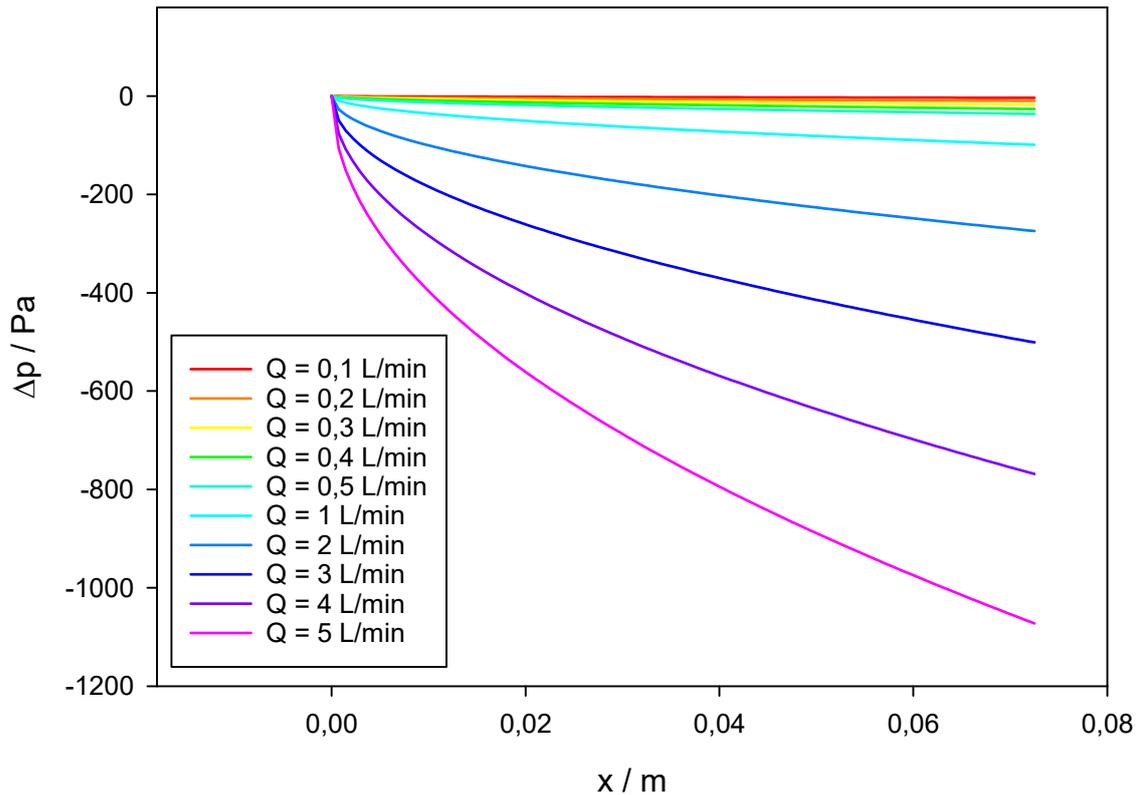
Si nos fijamos en la zona turbulenta (figura 8) se ve que la permeabilidad comienza a aumentar a partir del punto  $Re=7000$ , esto es esperable ya que la turbulencia está completamente desarrollada. Sin embargo vemos que para la membrana pintada la permeabilidad vuelve a decrecer, la explicación aquí se encuentra en la caída de presión que se produce a lo largo del tubo en esa longitud. Esta caída se puede calcular con la fórmula [9]:

$$\frac{\Delta p}{\rho u_m^2 / 2g_c} = 13,74\sqrt{x^+} + \frac{1,25 + 64x^+ - 13,74\sqrt{x^+}}{1 + \frac{0,00021}{(x^+)^2}} \quad (102)$$

Donde  $x^+$  es:

$$x^+ = \frac{x}{DRe} \quad (103)$$

De esta manera si representamos para la longitud pintada que tenemos, obtenemos los siguientes perfiles de la caída de presión:



**Figura 10:** Caída de presión a lo largo de la longitud pintada para distintos caudales de entrada.

Se puede ver que la caída de presión no es lineal al principio y que este tramo no lineal es más pronunciado cuanto mayor sea  $Re$ . Esto explica el porqué la permeabilidad

comienza a disminuir en esta zona, para  $Re$  más bajos la caída de la presión es apenas apreciable, sin embargo toma importancia para  $Re$  altos. Al calcular  $p_{med}$  como  $\frac{p_o - p_s}{2}$  estábamos suponiendo un caída de presión constante, en el caso de la membrana sin pintar  $p_o$  es próxima siempre a la entrada de la membrana, y por eso observamos un comportamiento creciente de  $K$  con  $Re$  en la zona turbulenta. Sin embargo, en el caso de la membrana pintada,  $p_o$  se aleja de la presión al inicio de la zona porosa y esto se acrecienta con  $Re$ . De esta forma, en la ecuación (98) estamos usando una  $p_{med}$  mayor de la que debemos usar, subestimando  $K$ . Este efecto se acrecienta con  $Re$ , por eso para  $Re$  grandes con la membrana pintada se observa una caída de  $K$  que debe ser ficticia.

## 7. Conclusiones

En esta sección resumimos los resultados principales del trabajo en una serie de conclusiones:

- El modelo analítico da buenos resultados, prediciendo un aumento de la permeabilidad con el número de  $Re$  y un decrecimiento con la presión a la entrada del tubo.
- El modelo perturbativo no da buenos resultados para el problema, al no hallarse soluciones válidas en la zona laminar.
- La variabilidad de la permeabilidad de las membranas debido a interfase agua-aire que se produce a la entrada de los poros de la membrana en función del tiempo hace necesario un acondicionamiento a presión alta  $>10$  bar durante periodos de 10 horas para su correcta determinación.
- Cuando el perfil de velocidad no tiene longitud suficiente para desarrollarse completamente antes de entrar a la membrana la permeabilidad disminuye con  $Re$  en la zona laminar.
- En la zona turbulenta la permeabilidad tiende a aumentar con  $Re$ . Sin embargo, para la membrana pintada se produce una caída de la permeabilidad para  $Re$  altos en los resultados debida a la caída de la presión que se produce en la longitud pintada.
- La permeabilidad en este tipo de membranas depende en gran medida de  $Re$ , el perfil de velocidad, la presión efectiva y la geometría; por lo que su determinación y ajuste es esencial a la hora de diseñar membranas.
- De acuerdo con la predicción del modelo y los resultados experimentales obtenidos, para conseguir una mayor eficacia en estos dispositivos es necesario diseñarlos de tal forma que cuando el perfil de velocidad alcance la zona porosa este esté completamente desarrollado.
- Debido a las limitaciones del dispositivo experimental no se ha podido realizar una evaluación completa de los modelos. Sería necesario utilizar una membrana de mayor longitud (1m) y una celda que permitiese alojar esta membrana. Además la precisión de las medidas está limitada por la precisión con la que podemos ajustar las variables en el dispositivo experimental.

## 8. Bibliografía

- [1] Henry Darcy, Les Fontaines Publiques De La Ville De Dijon: Exposition Et Application Des Principes A Suivre Et Des Formules A Employer Dans Les Questions De Distribution Déau. Victor Dalmont, Libraire des Corps imperiaux des ponts et chaussées et des mines, 1856.
- [2] Whitaker, S. Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law. *Transp Porous Med* 1, 3–25 (1986).
- [3] Middleman, Stanley. *An Introduction to Fluid Dynamics: Principles of Analysis and Design* . New York etc: John Wiley & Sons, 1998. Print. Apartados 6.2 , 6.9 y 5.3.2
- [4] Bender, Carl M., and Steven A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I Asymptotic Methods and Perturbation Theory* . 1st ed. 1999. New York, NY: Springer New York, 1999. Web. pp. 319-321.
- [5] Sara Alvarez-Quintana a, Francisco Javier Carmona b, Laura Palacio a, Antonio Hernandez a, Pedro Pradanos, Water viscosity in confined nanoporous media and flow through nanofiltration membranes, *Microporous and Mesoporous Materials* 303 (2020) 110289,
- [6] Landau, Lev Davidovich, and E. M. Lipshitz. *Capítulo VII. Mecánica de Fluidos*. Barcelona. Reverté, 1986.
- [7] Bechhold, H.; Schlesinger, M.; Silbereise, K.; Maier, L.; and Nurnberger, W.; Porer diameters of ultrafilters, *Kolloid Z.*, 55 (1931) 172.
- [8] L., Bergman, T.; P., Incropera, Frank (2011-01-01). *Fundamentals of heat and mass transfer*. Wiley. pp. 487.
- [9] Shah, R. K. (June 1, 1978). *.<sup>A</sup> Correlation for Laminar Hydrodynamic Entry Length Solutions for Circular and Noncircular Ducts..<sup>A</sup>ASME. J. Fluids Eng.* June 1978; 100(2): pp. 177–179.

## 9. Anexo

### 9.1. Nomenclatura

- $A$  : Area,  $m^2$
- $D$  : Diámetro,  $m$
- $f(z)$  : Función que determina el comportamiento de la velocidad axial en esa dirección, Adimensional
- $g_r, g_z$  : Gravedad en la dirección r y z respectivamente,  $m/s^2$
- $g_c$  : Factor de conversión,
- $j(z)$  : Velocidad del flujo filtrado a la salida de la membrana,  $m/s$
- $K$  : Permeabilidad de la membrana,  $m^2s/Kg$
- $K_o$  : Permeabilidad a  $Re=0$  obtenida a partir de una regresión lineal,  $m^2s/Kg$
- $L$  : Longitud de la membrana,  $m$
- $L_{entrada}$  : Longitud necesaria para que el perfil de velocidad esté completamente desarrollado,  $m$
- $p$  : Presión,  $Pa$
- $p_a, p_0, p_s, p_{med}$  : Presión atmosférica, a la entrada, a la salida del tubo y media dentro del tubo respectivamente  $Pa$
- $Q$  : Caudal  $m^3/s$
- $Q_L, Q_o, Q_s$  : Caudal filtrado, a la entrada del tubo y a la salida del tubo respectivamente  $m^3/s$
- $r$  : Coordenada radial  $m$
- $R$  : Radio del tubo  $m$
- $s$  : Magnitud adimensional definida por (43) Adimensional
- $T$  : Temperatura  $^{\circ}C$
- $u_r, u_{\theta}, u_z$  : velocidad en la dirección radial, azimutal y axial respectivamente  $m/s$
- $U(z)$  : Velocidad media en la dirección axial en función de la coordenada  $z$   $m/s$
- $U_o, U_s$  : Velocidad media en la dirección axial a la entrada del tubo y a la salida respectivamente  $m/s$
- $v_z$  : Velocidad adimensional en la dirección azimutal definida por (43) Adimensional

- $v_r$  : Velocidad adimensional en la dirección radial definida por (46) Adimensional
- $v_{z,i}, v_{r,i}$  : Términos de la velocidad azimutal y radial, adimensional para orden  $i$  en la expansión Adimensional
- $x^+$  : parámetro definido por (103) Adimensional
- $z$  : Coordenada axial  $m$
- $\beta$  : Premeabilidad adimensional definida por (20) Adimensional
- $\Delta p$  : Caída de presión entre  $p_0$  y  $p_s$   $Pa$
- $\Delta \varphi$  : Caída de presión entre  $\varphi_0$  y  $\varphi_f$   $Pa$
- $\varepsilon$  : Parámetro definido por (45) Adimensional
- $\zeta$  : Coordenada axial adimensional definida por (43) Adimensional
- $\eta$  : Viscosidad cinemática  $Kg/m^2s$
- $\theta$  : Coordenada azimutal radianes
- $\Lambda$  : Permabilidad adimensional definida por (50) Adimensional
- $\rho$  : Densidad  $Kg/m^3$
- $\varphi$  : Presión adimensional definida por (47) Adimensional
- $\varphi_i, \varphi_f, \varphi_0$  : son las presiones adimensionales a la entrada del tubo, a la salida y a orden cero en la expansión. Adimensional
- $\Phi_L$  : Fracción del caudal de entrada filtrado a través de la membrana. Adimensional.

## 9.2. Tablas

### 9.2.1. Sin pintar

**Tabla 1:** Medida T1 a  $p_o = 8$  bar para la membrana sin pintar.

Re	$K \cdot 10^{12} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$370 \pm 40$	$1,56 \pm 0,02$	$0,994 \pm 0,015$
$730 \pm 40$	$1,55 \pm 0,02$	$0,985 \pm 0,015$
$1100 \pm 40$	$1,54 \pm 0,02$	$0,982 \pm 0,015$
$1470 \pm 40$	$1,52 \pm 0,02$	$0,969 \pm 0,016$
$1830 \pm 40$	$1,52 \pm 0,02$	$0,969 \pm 0,016$
$3660 \pm 40$	$1,50 \pm 0,02$	$0,959 \pm 0,016$
$7320 \pm 40$	$1,48 \pm 0,02$	$0,946 \pm 0,015$
$10980 \pm 40$	$1,46 \pm 0,02$	$0,934 \pm 0,014$
$14640 \pm 40$	$1,46 \pm 0,02$	$0,932 \pm 0,015$
$18300 \pm 40$	$1,46 \pm 0,02$	$0,929 \pm 0,015$

**Tabla 2:** Medida T2 a  $p_o = 8$  bar para la membrana sin pintar.

Re	$K \cdot 10^{12} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$370 \pm 40$	$2,01 \pm 0,02$	$0,996 \pm 0,015$
$730 \pm 40$	$1,99 \pm 0,02$	$0,983 \pm 0,015$
$1090 \pm 40$	$1,98 \pm 0,02$	$0,977 \pm 0,015$
$1470 \pm 40$	$1,96 \pm 0,02$	$0,971 \pm 0,015$
$1830 \pm 40$	$1,95 \pm 0,02$	$0,966 \pm 0,015$
$3660 \pm 40$	$1,93 \pm 0,02$	$0,956 \pm 0,015$
$7320 \pm 40$	$1,92 \pm 0,02$	$0,949 \pm 0,015$
$10980 \pm 40$	$1,91 \pm 0,02$	$0,943 \pm 0,015$
$14630 \pm 40$	$1,90 \pm 0,02$	$0,940 \pm 0,015$
$18290 \pm 40$	$1,89 \pm 0,02$	$0,935 \pm 0,014$

**Tabla 3:** Medida T3 a  $p_o = 8$  bar para la membrana sin pintar.

Re	$K \cdot 10^{12} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$360 \pm 40$	$2,98 \pm 0,03$	$0,996 \pm 0,015$
$740 \pm 40$	$2,94 \pm 0,03$	$0,984 \pm 0,014$
$1100 \pm 40$	$2,92 \pm 0,03$	$0,977 \pm 0,014$
$1470 \pm 40$	$2,91 \pm 0,03$	$0,972 \pm 0,014$
$1830 \pm 40$	$2,89 \pm 0,03$	$0,967 \pm 0,014$
$3660 \pm 40$	$2,88 \pm 0,03$	$0,964 \pm 0,014$
$7320 \pm 40$	$2,84 \pm 0,03$	$0,951 \pm 0,014$
$10980 \pm 40$	$2,85 \pm 0,03$	$0,952 \pm 0,014$
$14630 \pm 40$	$2,85 \pm 0,03$	$0,952 \pm 0,014$
$18230 \pm 40$	$2,85 \pm 0,03$	$0,953 \pm 0,014$

**Tabla 4:** Medida a  $p_o = 5$  bar para la membrana sin pintar.

Re	$K \cdot 10^{12} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$370 \pm 40$	$3,96 \pm 0,05$	$0,993 \pm 0,012$
$730 \pm 40$	$3,93 \pm 0,05$	$0,986 \pm 0,012$
$1100 \pm 40$	$3,90 \pm 0,05$	$0,978 \pm 0,012$
$1460 \pm 40$	$3,87 \pm 0,05$	$0,971 \pm 0,012$
$1830 \pm 40$	$3,84 \pm 0,05$	$0,964 \pm 0,012$
$3660 \pm 40$	$3,80 \pm 0,05$	$0,953 \pm 0,012$
$7310 \pm 40$	$3,76 \pm 0,04$	$0,943 \pm 0,012$
$10980 \pm 40$	$3,76 \pm 0,04$	$0,943 \pm 0,011$
$14630 \pm 40$	$3,77 \pm 0,04$	$0,946 \pm 0,012$
$18300 \pm 40$	$3,81 \pm 0,05$	$0,957 \pm 0,012$

### 9.2.2. Pintado

**Tabla 5:** Medida T1 a  $p_o = 8$  bar para la membrana pintada.

Re	$K \cdot 10^{12} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$360 \pm 40$	$2,03 \pm 0,03$	$0,992 \pm 0,018$
$740 \pm 40$	$2,02 \pm 0,03$	$0,986 \pm 0,018$
$1100 \pm 40$	$1,99 \pm 0,03$	$0,972 \pm 0,018$
$1470 \pm 40$	$1,97 \pm 0,03$	$0,965 \pm 0,018$
$1840 \pm 40$	$1,96 \pm 0,03$	$0,961 \pm 0,018$
$3660 \pm 40$	$1,94 \pm 0,03$	$0,951 \pm 0,017$
$7320 \pm 40$	$1,92 \pm 0,03$	$0,937 \pm 0,017$
$10980 \pm 40$	$1,90 \pm 0,03$	$0,93 \pm 0,017$
$14640 \pm 40$	$1,90 \pm 0,03$	$0,929 \pm 0,017$
$18300 \pm 40$	$1,91 \pm 0,03$	$0,934 \pm 0,017$

**Tabla 6:** Medida T2 a  $p_o = 8$  bar para la membrana pintada.

Re	$K \cdot 10^{12} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$380 \pm 40$	$2,00 \pm 0,03$	$1,001 \pm 0,018$
$730 \pm 40$	$1,98 \pm 0,03$	$0,992 \pm 0,018$
$1100 \pm 40$	$1,98 \pm 0,03$	$0,993 \pm 0,018$
$1470 \pm 40$	$1,98 \pm 0,03$	$0,989 \pm 0,018$
$1830 \pm 40$	$1,98 \pm 0,03$	$0,991 \pm 0,018$
$3660 \pm 40$	$1,97 \pm 0,03$	$0,984 \pm 0,018$
$7320 \pm 40$	$1,97 \pm 0,03$	$0,984 \pm 0,018$
$10980 \pm 40$	$1,97 \pm 0,03$	$0,986 \pm 0,018$
$14630 \pm 40$	$1,98 \pm 0,03$	$0,989 \pm 0,018$
$18290 \pm 40$	$1,98 \pm 0,03$	$0,991 \pm 0,018$

**Tabla 7:** Medida T3 a  $p_o = 8$  bar para la membrana pintada.

Re	$K \cdot 10^{12} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$360 \pm 40$	$2,00 \pm 0,03$	$0,997 \pm 0,016$
$730 \pm 40$	$1,99 \pm 0,03$	$1,000 \pm 0,016$
$1100 \pm 40$	$2,00 \pm 0,03$	$0,997 \pm 0,016$
$1460 \pm 40$	$1,99 \pm 0,03$	$0,995 \pm 0,016$
$1830 \pm 40$	$1,99 \pm 0,03$	$0,993 \pm 0,016$
$3660 \pm 40$	$1,98 \pm 0,03$	$0,983 \pm 0,016$
$7320 \pm 40$	$1,96 \pm 0,03$	$0,974 \pm 0,016$
$10980 \pm 40$	$1,94 \pm 0,03$	$0,973 \pm 0,016$
$14630 \pm 40$	$1,94 \pm 0,03$	$0,974 \pm 0,016$
$18290 \pm 40$	$1,94 \pm 0,03$	$0,977 \pm 0,016$

**Tabla 8:** Medida a  $p_o = 5$  bar para la membrana pintada.

Re	$K \cdot 10^{13} / \frac{m^2 \cdot s}{Kg}$	K/Ko
$360 \pm 40$	$9,89 \pm 0,14$	$0,994 \pm 0,018$
$730 \pm 40$	$9,87 \pm 0,14$	$0,992 \pm 0,018$
$1100 \pm 40$	$9,78 \pm 0,14$	$0,983 \pm 0,018$
$1460 \pm 40$	$9,78 \pm 0,14$	$0,983 \pm 0,018$
$1830 \pm 40$	$9,70 \pm 0,14$	$0,975 \pm 0,018$
$3660 \pm 40$	$9,62 \pm 0,14$	$0,967 \pm 0,018$
$7320 \pm 40$	$9,56 \pm 0,14$	$0,961 \pm 0,018$
$10980 \pm 40$	$9,63 \pm 0,14$	$0,968 \pm 0,018$
$14640 \pm 40$	$9,59 \pm 0,14$	$0,964 \pm 0,018$
$18300 \pm 40$	$9,44 \pm 0,14$	$0,949 \pm 0,017$