



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

**Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y
Automática**

**CONTROL DE LA RESPUESTA AEROLÁSTICA
DE LA SUPERFICIE ALA DE UN UAV DE
MATERIAL COMPUESTO DE FIBRA DE
ALÚMINA**

Autor:

San Miguel Salas, Jesús

Tutor:

Grossi Calleja, Rafael

**Departamento de Ingeniería de Sistemas y
Automática**

Valladolid, 9 de Julio de 2014

Resumen

Modelado de las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de los UAV y aplicación de algoritmos de control no lineal. Validación de los modelos por medio de simulaciones en simulink.

Palabras Clave: UAV, MODELO, CONTROL, LYAPUNOV, SATURACIÓN.

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Motivación	11
1.2. Objetivos	12
1.3. Estructura del proyecto	12
1.4. Materiales Compuestos	13
1.4.1. Características	14
1.4.2. Matrices	14
1.4.3. Fibras de refuerzo	16
1.4.4. Usos aeroespaciales de los materiales compuestos	19
1.4.5. Materiales compuestos más utilizados en la industria aeroespacial .	26
1.5. Navegación Inercial	27
1.5.1. Principios básicos	28

1.5.2.	Componentes INS	28
1.5.3.	Sistema INS	29
1.5.4.	Strapdown System	31
1.6.	Vehículos Aéreos no tripulados	34
1.6.1.	Introducción	34
1.6.2.	Aplicaciones de los UAVs	38
1.6.3.	Configuraciones aerodinámicas	39
1.6.3.1.	Configuración para un vehículo uni-rotor	39
1.6.3.2.	Configuración de vehículos con dos rotores	40
1.6.3.3.	Configuración de vehículos multirotores	41
1.6.3.4.	Dirigibles	43
1.6.3.5.	Aviones	43
1.6.3.6.	Flapping-wing UAV	44
2.	Estado del Arte	46
2.1.	Historia de la Teoría de control	46
2.2.	Control de Sistemas No lineales.	50
2.2.1.	Control de Sistemas No lineales Subactuados.	50
3.	Fundamentos matemáticos	54

3.1.	Función Lipschitziana	54
3.2.	Estabilidad de Lyapunov.	57
3.2.1.	Estabilidad en el sentido de Lyapunov	58
3.2.2.	Definiciones	59
3.2.3.	Definiciones	61
3.2.3.1.	Teorema de Lyapunov	62
3.2.3.2.	Sobre la Región de Atracción. Estabilidad asintótica Global	63
3.2.3.3.	Teorema de Chataev (Inestabilidad)	64
3.2.3.4.	Estabilidad del Origen en Sistemas lineales	65
3.2.4.	Método Indirecto de Lyapunov	66
3.3.	Funciones anidadas de saturación	67
3.3.1.	Función de saturación lineal	67
4.	Modelado de las ecuaciones de un UAV	72
4.1.	Modelo dinámico	72
4.1.1.	Metodo de Euler-Lagrange	73
4.1.2.	Modelo dinámico de un quad-rotor	79
5.	Control de saturación para estabilizar el modelo PVTOL	88
5.1.	Introducción	88

5.2.	Modelo dinámico PVTOL	89
5.2.1.	Estrategia de control	91
5.2.2.	Control del desplazamiento vertical	91
5.2.3.	Control del ángulo (roll) y del desplazamiento horizontal	93
5.2.3.1.	Con la intención de definir una frontera para $\dot{\theta}$	97
5.2.3.2.	Con la intención de definir una frontera para θ	98
5.2.3.3.	Con la intención de definir una frontera para \dot{x}	101
5.2.3.4.	Con la intención de definir una frontera para x	103
5.2.3.5.	Convergencia de $\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}$ a 0	107
5.3.	Simulaciones	108
6.	Diseño, modelado y Control de un mini-UAV con dos rotores:VTOL	123
6.1.	Introducción	123
6.2.	Modelo dinámico	124
6.2.1.	Cinemática	125
6.2.2.	Dinámica	126
6.2.2.1.	Fuerzas que actúan en el vehículo	128
6.2.2.2.	Momentos que actúan en el vehículo	131
6.2.3.	Estrategia de control	134

6.2.3.1.	Modelo para el analisis de control	134
6.2.4.	Estrategia de control	136
6.2.4.1.	Control de la altitud y angulo Yaw	136
6.2.4.2.	Control de y del ángulo roll	137
6.2.4.3.	Control de x y del ángulo pitch	138
6.3.	simulaciones	139

Índice de figuras

1.1. Gimbal	29
1.2. Actuación de los Servos	30
1.3. Funcionamiento del sistema Strap Down	32
1.4. Giróscopo RLG	33
1.5. Avión 3D	40
1.6. Avión T-wing	41
1.7. Quad-copter	42
1.8. Dirigible	43
1.9. UAV configuración en forma de avión	44
1.10. UAV biomimetizando a un insecto	45
3.1. A y B asintóticamente estables C no estable, D estable (no asintótico) . . .	57
4.1. Representación geométrica del cuerpo rígido	74

4.2. Representación de los ángulos de Euler	76
4.3. Representacion quad-rotor	80
4.4. Fuerzas presentes	83
5.1. Avión PVTOL	90
5.2. Función de saturacion	92
5.3. Modelo de PVTOL en smulink.	108
5.4. Modelo de PVTOL en smulink (u1).	109
5.5. Modelo de PVTOL en smulink (u2).	109
5.6. Modelo de PVTOL en smulink (funciones de saturación).	110
5.7. Evolución de la altura del PVTOL	111
5.8. Evolución de θ del PVTOL	112
5.9. Evolución de x PVTOL	112
5.10. Evolución dela entrada u_2	113
5.11. Evolución de la altura del PVTOL	114
5.12. Evolución del ángulo θ del PVTOL	115
5.13. Evolución del movimiento horizontal del PVTOL	115
5.14. Evolución de la entrada u_2 del modelo del PVTOL	116
5.15. Evolución de la altura del modelo del PVTOL	117

5.16. Evolución del ángulo θ en el modelo PVTOL	117
5.17. Evolución del movimiento horizontal del modelo del PVTOL	118
5.18. Evolución de la altura del modelo del PVTOL	119
5.19. Evolución de la variable θ del modelo del PVTOL	119
5.20. Evolución del movimiento horizontal del modelo del PVTOL	120
6.1. Diagrama que muestra el marco de referencia y fuerzas	125
6.2. Esquema que muestra las fuerzas aplicadas en el vehículo	133
6.3. Modelo del VTOL en simulink.	139
6.4. Ecuaciones de traslación en simulink.	140
6.5. Linealización mediante realimentación para altitud.	141
6.6. Linealización mediante realimentación para el ángulo Yaw.	141
6.7. Control del subsistema $y-\phi$	142
6.8. Control del subsistema $x-\theta$	142
6.9. Control del subsistema $x-\theta$	143
6.10. Control de la altitud del VTOL	145
6.11. Control del ángulo ψ	145
6.12. Control del ángulo ϕ	146
6.13. Control del ángulo θ	146

6.14. Control de y	147
6.15. Control de x	147
6.16. Control de la altitud del VTOL	148
6.17. Control del ángulo ψ	149
6.18. Control del ángulo ϕ	149
6.19. Control del ángulo θ	150
6.20. Control de y	150
6.21. Control de x	151
6.22. Control de la altitud del VTOL	152
6.23. Control del ángulo ψ	152
6.24. Control del ángulo ϕ	153
6.25. Control del ángulo θ	153
6.26. Control de y	154
6.27. Control de x	154
6.28. Control de la altitud del VTOL	155
6.29. Control del ángulo ψ	156
6.30. Control del ángulo ϕ	156
6.31. Control del ángulo θ	157

6.32. Control de y	157
6.33. Control de x	158

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Desde hace muchos años hasta la actualidad se han desarrollado numerosas técnicas de control para el control de diversas máquinas en los distintos campos de investigación en los que está presente la ingeniería. Estos desarrollos han permitido crear máquinas automáticas con mucho impacto en diversas áreas como la producción, construcción, tele-operación y vehículos autónomos entre otras. Sin embargo pese a los avances han ido surgiendo a lo largo de los años numerosos problemas. Por lo que es necesario desarrollar nuevas técnicas de control que solucionen esos problemas.

En este proyecto se aplicarán algunas técnicas de control no-lineal a un tipo de sistemas muy importantes como son los sistemas subactuados, que se caracterizan por tener un menor número de actuadores que de grados de libertad, este es el caso de los dos modelos de UAV desarrollados en este proyecto, el PVTOL y el VTOL.

Actualmente existen técnicas de control que fueron desarrolladas a finales del siglo pasado aplicables en sistemas subactuados como pueden ser las técnicas basadas en pasividad, la teoría de Lyapunov o la teoría de linealización por retroalimentación. En el presente proyecto se harán uso de algunas de estas teorías para el control y la estabilización

de los modelos no-lineales de los UAV.

1.2. Objetivos

- Desarrollar distintos modelos dinámicos basados en la formulación de Euler-Lagrange, dividiendo el sistema total en los correspondientes subsistemas que permitan poder aplicar y desarrollar convenientemente las distintas teorías de control.
- Aplicar los distintos algoritmos de control, desarrollando sus bases teóricas de tal modo que en final del desarrollo se pueda concluir el buen funcionamiento del algoritmo y por lo tanto darle validez a la aplicación de la teoría.
- Mostrar mediante simulaciones el correcto funcionamiento de los modelos dinámicos y de los algoritmos de control a través de la herramienta de software Simulink (MATLAB)

1.3. Estructura del proyecto

El proyecto consta de 6 capítulos:

- El primer capítulo es la introducción, en el cual se tratarán temas de interés en el campo de los UAV como puedan ser los materiales compuestos, los sistemas de navegación etc.

- El segundo capítulo es la historia del arte sobre la teoría de control, principal tema de desarrollo del presente proyecto, se hará un breve repaso histórico sobre las distintas técnicas de control desarrolladas a lo largo de los años.
- El tercer capítulo contiene los fundamentos de los distintos teoremas matemáticos que se usarán a lo largo del proyecto, y que son imprescindibles para el correcto uso de la teoría necesaria para el proyecto.
- El cuarto capítulo muestra como se ha de abordar el desarrollo de un modelo dinámico para los distintos UAV, mostrando como ejemplo el modelo de un Quadcopter.
- En el quinto y en el sexto capítulo se expone el modelo dinámico y el algoritmo de control para dos tipos de UAVs como son los modelos PV-TOL y VTOL. Al final de cada capítulo se muestran las correspondientes simulaciones dando validez a los fundamentos teóricos

1.4. Materiales Compuestos

Los composites están formados por dos o más materiales para conseguir unas propiedades finales con un efecto SINÉRGICO, obteniéndose un material con unas prestaciones muy superiores a los componentes individuales.

- Presentan una discontinuidad estructural, deben ser distinguidos físicamente y pueden ser separados mediante física o química.
- Son materiales NOVEDOSOS y su mezcla mejora las características globales de los materiales individuales.

Los composites están formados:

Por una matriz que aporta la forma final gracias a su buen procesado y por los materiales de refuerzo que le aportan al material las propiedades mecánicas. Los materiales compuestos se aprovechan de las buenas características de los materiales por separado para juntarlas y tener en un solo material mejores características que los materiales en forma individual.

1.4.1. Características

- Alta resistencia mecánica a tracción y flexión.
- Alta ligereza.
- Alta relación tracción/ligereza
- Alta estabilidad dimensional.
- Elevada resistencia a los agentes químicos y atmosféricos.
- Baja transmisión de vibraciones, buen comportamiento a fatiga.
- Elevada resistencia térmica y buen comportamiento ante carga de fuego.

1.4.2. Matrices

La matriz aporta la coherencia y la procesabilidad del material compuesto, que son precisamente las propiedades que complementan a las fibras de refuerzo. Los materiales usados como matrices, pueden ser de diferente naturaleza.

Cerámica

Son la Base de los CMC (Ceramic Matrix Composites), tienen un difícil procesamiento y sus principales usos se dan en biocompatibilidad y aplicaciones de altas temperaturas.

Metálica

Son la base de los MMC(Metallic Matrix Composites) al igual que las matrices de cerámica se usan en aplicaciones muy avanzadas a altas temperaturas. En la industria aeroespacial fundamentalmente se emplean aluminio y sus aleaciones de titanio magnesio, cobre ,níquel y aceros inoxidables.

Orgánica o polimérica

Debido a su procesabilidad las matrices de componentes orgánicos son las preferidas, además aportan muy buena cohesión con los elementos de refuerzo y cubren un rango de propiedades muy alto. La matriz da coherencia actúa como soporte, permitiendo moldear las fibras de forma adecuada, también protege a estas de agentes externos y soporta los esfuerzos de compresión en los que no hay trabajo de las fibras. Además evitan la propagación de grietas a lo largo del material y transmiten los esfuerzos a las fibras mediante cortadura.

Dentro de las matrices orgánicas se pueden establecer tres tipos:

- Termoestable: Se pueden procesar a temperatura ambiente ya que son resinas de colada líquida, la mayoría de los composites orgánicos son de este tipo debido a esta característica , también tienen excelentes propiedades adhesivas permitiendo una buena interacción matriz-fibras.
- Termoplástica.
- Elastomérica.

1.4.3. Fibras de refuerzo

Proporcionan las propiedades mecánicas del material unos ejemplos de fibras de refuerzo de alto rendimiento mecánico son : aramidas, copoli-aramidas, LCP, polietileno. Que junto con las fibras metálicas y cerámicas aportan principalmente, rigidez y resistencia.

Los refuerzos pueden presentar varias tipologías:

Tamaño de las fibras

- Fibra Larga
- Fibra corta

Arquitectura material de refuerzo

- Unidireccional.
- Fieltros.
- No tejidos.
- Tejidos 2D/3D
- Trenzados

Según la naturaleza de las fibras, podemos distinguir dos tipos

- **Inorgánicas** : Tienen una elevada resistencia mecánica, mayor rigidez, puntos de fusión elevados... Las fibras de naturaleza cerámica son muy frágiles.

Dentro de las fibras inorgánicas destacan: las fibras de vidrio, de carburos, de boro, de acero. Comparando las fibras de vidrio, con las del acero cuyo uso en aplicaciones de ingeniería es muy grande, se tienen las siguientes propiedades:

Fibra	Designación	Modulo elástico (Gpa)	Densidad (g/cm³)	Modulo específico
Vidrio E	GF-E	75	2.58	29.1
Acero	Acero	198	7.80	25.4
Boro	BF	415	2.50	166

Las características globales del acero son buenas, pero las relativas del vidrio tomando como base la densidad pueden ser incluso mejores. El Boro, en comparación con los otros dos tipos de fibra aporta unas propiedades mecánicas muy superiores a cambio de un coste muy superior.

- **Orgánicas:** Se ha mejorado mucho en las características mecánicas de estas fibras en los últimos años, esta mejora ha sido motivada debido a la ligereza de estas fibras en comparación con las fibras inorgánicas. Las mejoras mecánicas, se deben a una mejora en la cristalinidad, en el nivel de orientación, en la interacción entre distintas cadenas poliméricas etc.

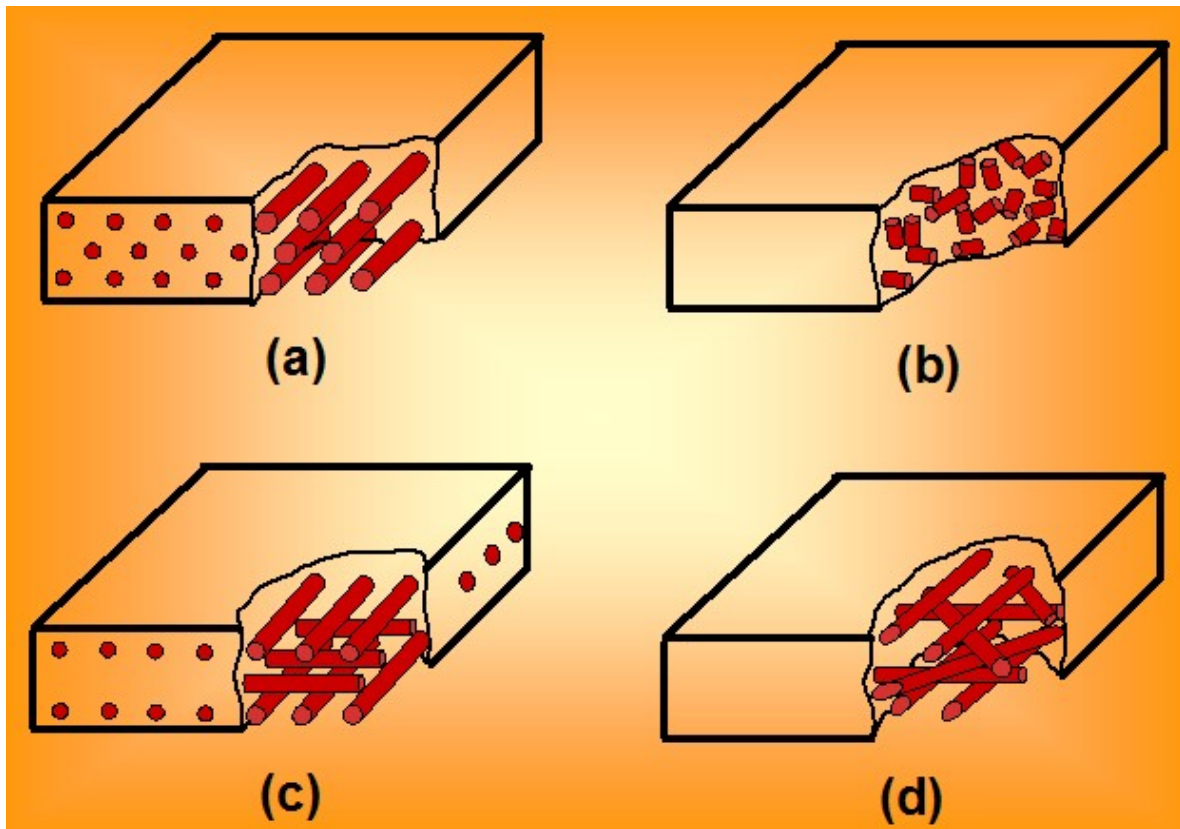
Dentro del grupo de las fibras orgánicas destacan, las aramidias como el Kevlar, Polietileno, LCP y Carbono.

Comparando las fibras de carbono con acero:

Fibra	Designación	Modulo elástico (Gpa)	Densidad (g/cm³)	Modulo específico
Acero	Acero	198	7.80	25.4
GY-70	Carbono	520	1.96	265.3

Combinando las dos listas anteriores, se tienen un montón de elementos de refuerzo aplicables a muchos campos de ingeniería. Con el uso de las fibras, debido a que las propiedades de estas son direccionales, utilizando estructuras laminadas se pueden obtener materiales con distintos grados de anisotropía según la orientación de las fibras.

Para los 4 casos de la figura 1, tenemos en la imagen a, fibras unidireccionales, donde estas aportan sus propiedades en una sola dirección (Muy anisotrópica), en el caso b las fibras cortas tienen direcciones aleatorias (Cuasi-Isotrópico), en el caso c se tienen fibras bidireccionales largas, y en el d, fibras largas aleatorias, teniendo el caso d unas prestaciones globales inferiores, pero teniendo un mayor grado de isotropía que el c.

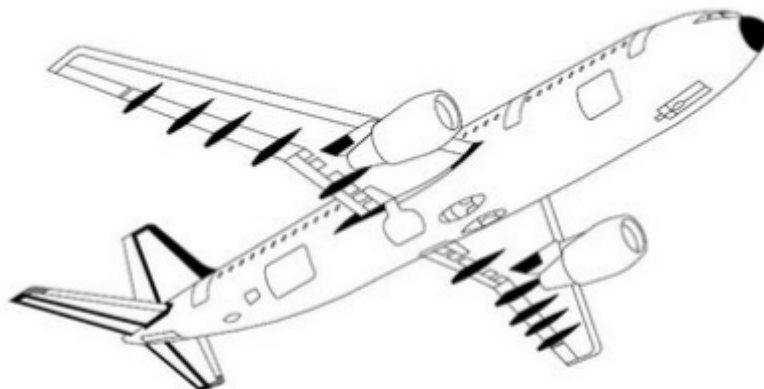
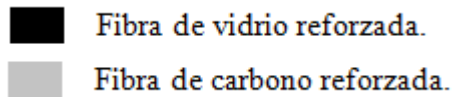


1.4.4. Usos aeroespaciales de los materiales compuestos




Los composites se empezaron a usar en la industria aeroespacial en la década de los 80 siendo la aviación militar su principal valedor, su uso y evolución ha sido cada vez mayor tanto en la industria aeroespacial como en otras aplicaciones de la ingeniería y la tecnología. En la actualidad están presentes dentro de la industria aeroespacial en aviación militar, aviación civil, helicópteros modernos (85% del peso) y aviones no tripulados (60% del peso). En el año 2010 se utilizaron 7.250 toneladas de composites, los estudios y previsiones, indican que para el año 2019, se alcanzará el consumo

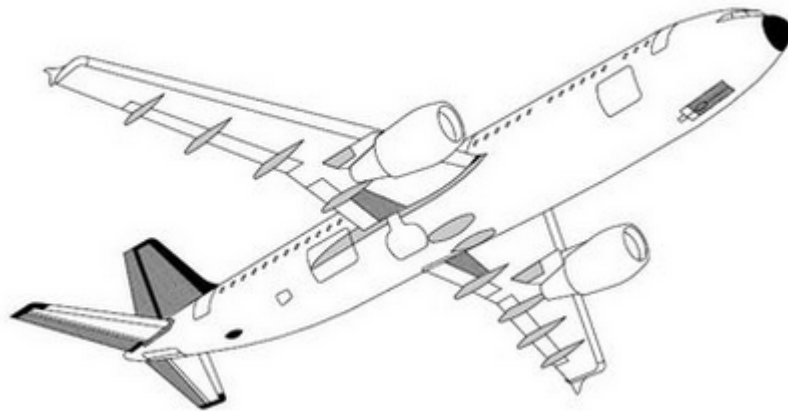
de 18.100 toneladas. Las primeras aplicaciones de los composites fueron en estructuras y elementos secundarios debido a que el composite utilizado era la fibra de vidrio cuyo módulo de elasticidad es bastante menor que el módulo de los metales. La fibra de carbono, fue el gran detonante de los materiales compuestos, y permitió que estos adquirieran una importancia tremenda, su evolución ha ido permitiendo sustituir los elementos metálicos por composites, ganando en ligereza y en propiedades mecánicas. Los composites están en una fase de crecimiento y aprendizaje dentro de la industria aeroespacial, se tendrá que seguir evolucionando, si se pretende que este tipo de materiales puedan dar todo su potencial. A continuación se muestra la evolución en el uso de composites mediante la comparación de la fabricación de modelos de Airbus.

- 1972: El modelo Airbus A-300 incorpora un 5% de composite.



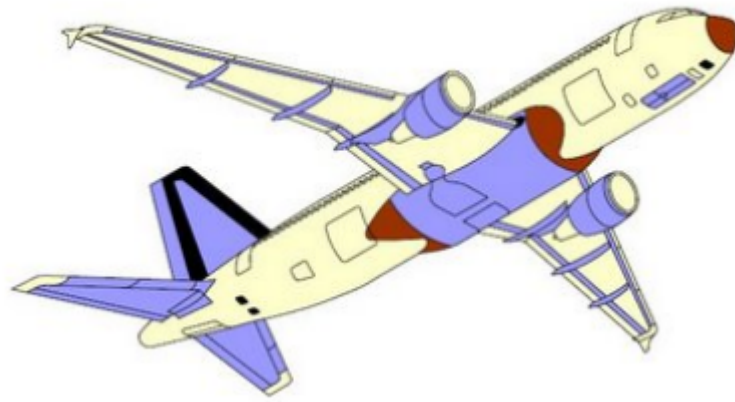
- 1982: Airbus fabrica su modelo A-310 con un total de un 6 % de material compuesto.

-  Fibra de aramida reforzada.
-  Fibra de vidrio reforzada.
-  Fibra de carbono reforzada.



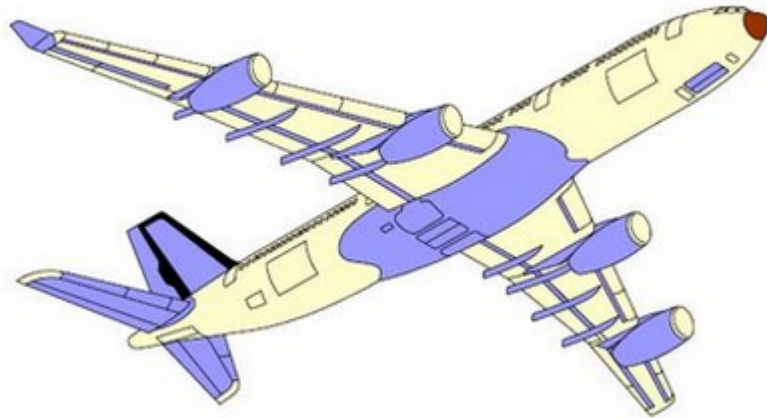
- En el 87 se utiliza por primera vez el A-320 10 % de peso de composites.

- Fibra de carbono reforzada.
- Fibra de aramida reforzada.
- Fibra de vidrio reforzada.

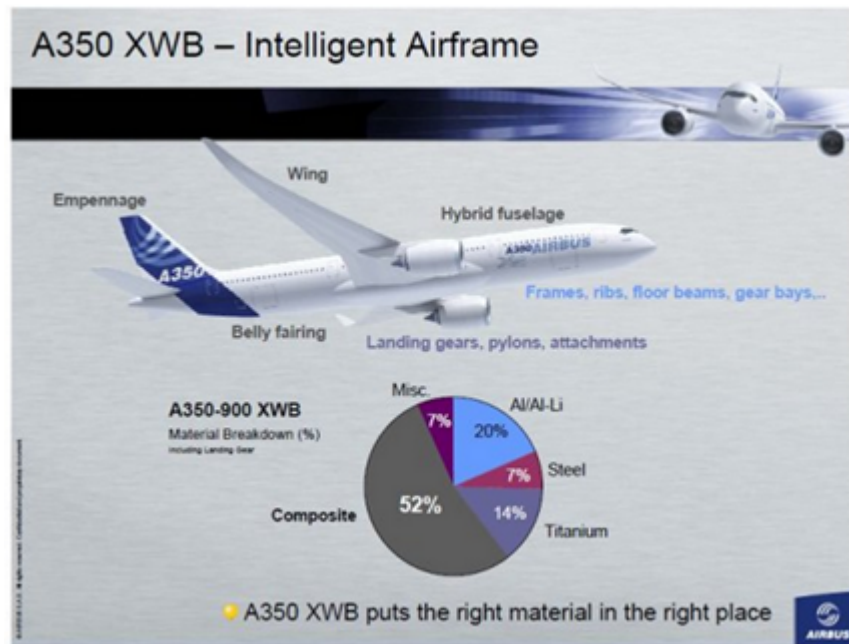


- En 1992 y 2002 el A-330 y el A-340 elevaron el uso de composites solamente un 2% hasta situarse en el 12%.

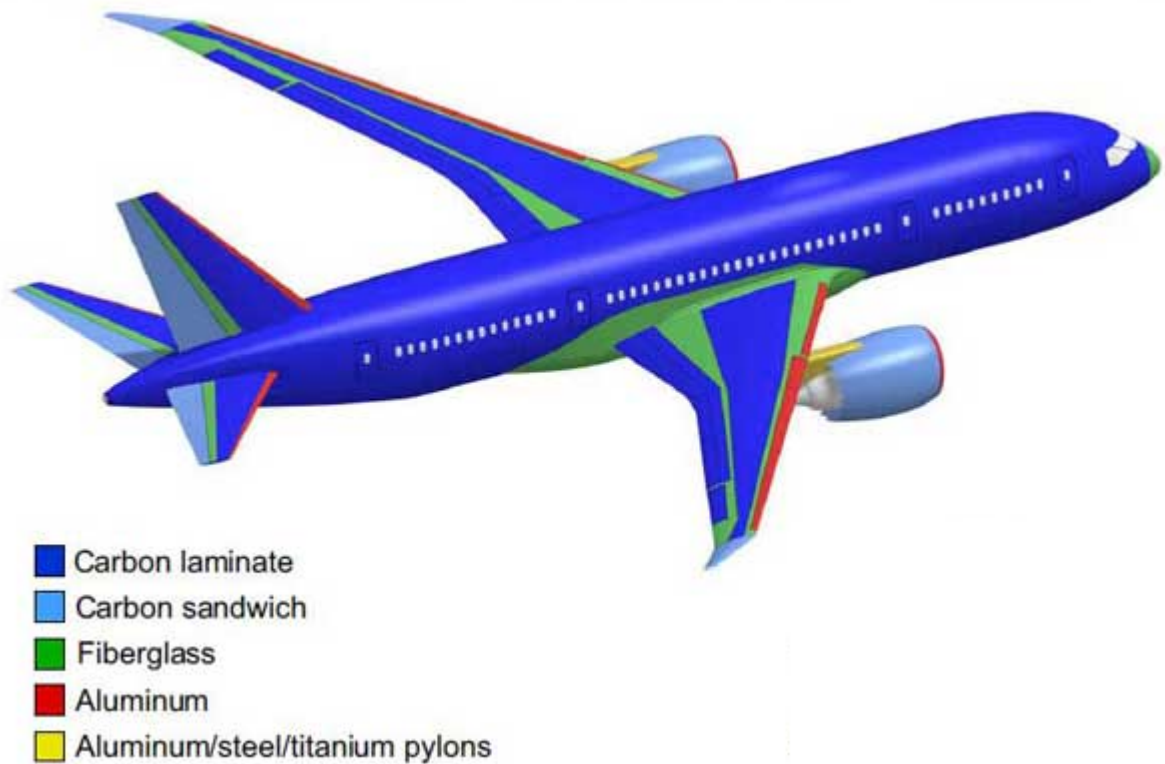
- Fibra de carbono reforzada.
- Fibra de aramida reforzada.
- Fibra de vidrio reforzada.



- El último modelo es el Airbus A-350 cuya utilización de composite es de un 52%.



En la actualidad el modelo con mayor relación peso/composites es el Boeing 787-dreamliner con más de un 50% de peso debido a los composites, el fuselaje está construido prácticamente en su totalidad con fibra de carbono, las alas tiene un gran porcentaje de fibra de carbono y también fibra de vidrio, los bordes principales se hacen con aluminio. Los alerones y los flaps se fabrican con fibra de carbono, el viento inferior y el viento superior, el timón y los elevadores con paneles sándwich de carbono.



1.4.5. Materiales compuestos más utilizados en la industria aeroespacial

- **Fibra de vidrio.** Pequeños hilos de gel de sílice tejidos en forma de tela, su principal ventaja es el precio respecto a otro tipo de materiales, a cambio tiene unas características mecánicas bastante peores y también un peso mayor. Se utiliza actualmente en elementos secundarios sin extrema importancia, combinándose con otros elementos como el Kevlar, se pueden obtener materiales de buenas propiedades mecánicas y de bajo coste. Existen dos tipos comunes de fibra de vidrio, S-glass, E-glass.

- **Fibra de Aramida.** Tiene un color amarillo, un peso ligero, una elevada resistencia mecánica y es muy flexible. Sus cadenas moleculares están orientadas en el eje longitudinal. Los dos tipos de aramiditas más conocidos son el Kevlar y el Nomex. Su gran flexibilidad, hace a este tipo de fibras muy resistente frente a esfuerzos a tracción. El kevlar usado en la industria aeroespacial es el Kevlar49 , ideal para elementos que soportan muchas vibraciones y esfuerzos.
- **Fibras de carbono.** Es el composite más conocido, tiene una elevada resistencia mecánica, dureza y una elevada rigidez, sus grandísimas propiedades mecánicas permiten su uso en estructuras primarias de los aviones, como pueden ser las alas . En comparación con el Kevlar tiene una mayor resistencia a compresión, pero es más quebradizo. Soporta mucho mayores esfuerzos que el aluminio y su densidad es una cuarta parte de la densidad del aluminio.
- **Fibras cerámicas.** Son usadas en aplicaciones que operan a altas temperaturas, los transbordadores espaciales son hechos de un compuesto cerámico especial para soportar los altos rozamientos.

1.5. Navegación Inercial

Es un sistema de navegación aéreo basado en la estima de medidas, obtienen los distintos parámetros necesarios a través de una serie de medidas relativas respecto de una posición inicial. Este tipo de sistema acumula errores con el paso del tiempo de navegación, por lo tanto debe ser reiniciado periódicamente. Es un tipo de navegación autónomo, que no depende de medidas externas y que está exenta de interferencias o manipulaciones externas. La navegación inercial se encarga de medir mediante giróscopos y acelerómetros, la aceleración calculando posteriormente la velocidad y posicionamiento

que junto con el punto de partida del vuelo, hacen posible el cálculo de la posición y la actitud de la aeronave respecto al punto inicial.

1.5.1. Principios básicos

- Consiguiendo medir la aceleración de la nave, es posible calcular la velocidad y la posición usando sucesivamente métodos de integración de la aceleración respecto del tiempo
- Con el fin de poder volar respecto del sistema de referencia inercial es necesario conocer la dirección de los acelerómetros en cada instante.
- Las rotaciones que sufre la aeronave pueden ser medidas mediante giróscopos que son usados para determinar la orientación de los acelerómetros.

1.5.2. Componentes INS

- IMU, formado por acelerómetros y giróscopos y algún elemento opcional como pueden ser magnetómetros y barómetros.
- Hardware, sistemas electrónicos de acondicionamiento de la señal, que permiten llevar la medida de los sensores, hasta los controladores.
- Computadores de navegación, reciben como entrada las medidas realizadas por los sensores, calculan la aceleración gravitacional (los acelerómetros no pueden hacerlo) y se encargan de la doble integración numérica de la aceleración para estimar la posición del vehículo.

1.5.3. Sistema INS

Hay dos tipos de navegación inercial los INS gimbaled y los INS strap-down. El sistema gimbaled, está formado por giróscopos montados sobre un soporte de cardan que permite aislar la plataforma que contiene los sensores inerciales de las rotaciones externas apuntando estos sensores siempre hacia la misma dirección. La plataforma que se mantiene estable está situada en el gimbal interior, para que los sensores de esta plataforma apunten siempre hacia la misma dirección, serán necesarios tres anillos rotatorios con una serie de restricciones: Las uniones de los anillos mayor y mediano y los anillos mediano y menor, serán perpendiculares entre sí , también ambas uniones serán perpendiculares al eje de giro del anillo externo.

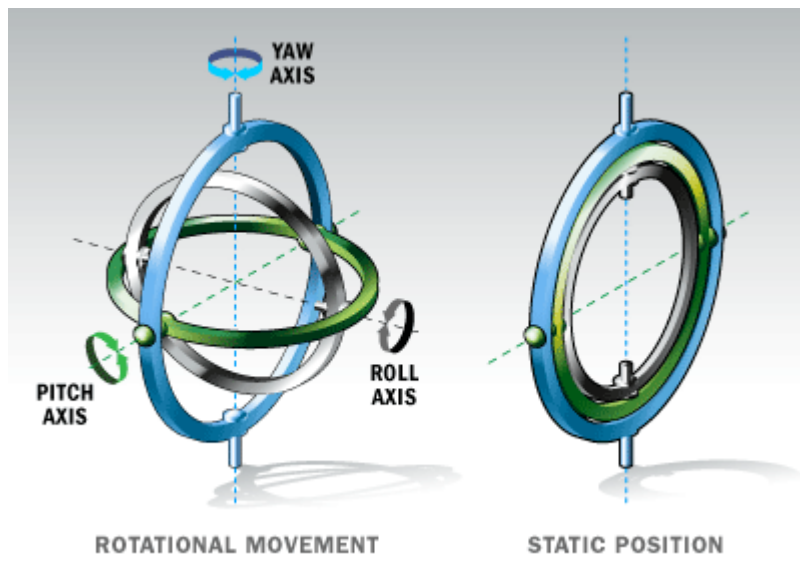


Figura 1.1: Gimbal

Es imposible alcanzar un total aislamiento, por lo que siempre se tendrá un pequeño error debida a una pequeña rotación.

¿Cómo funciona el GINS?

- La presencia de desbalances o perturbaciones obliga a introducir actuadores para compensar los desplazamientos angulares.
- Los giróscopos proporcionan una salida proporcional al ángulo que han rotados.
- La salida de cada giróscopo está conectada a un servo-motor que mantiene al gimbal con una orientación constante.
- Los giróscopos contienen un generador eléctrico que puede crear entradas ficticias a este.
- Estas entradas eléctricas “forzadas” sirven para compensar los diferentes errores causados.

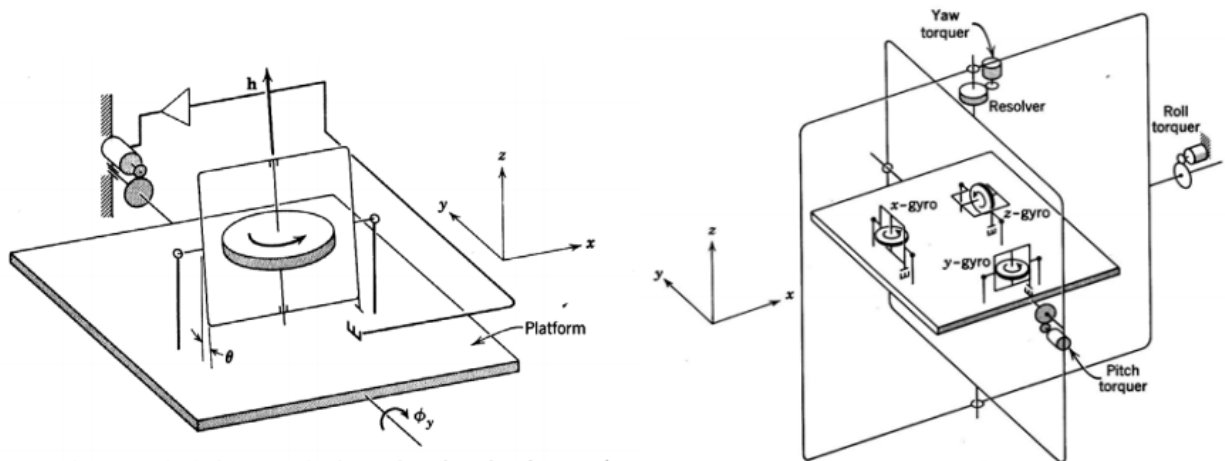


Figura 1.2: Actuación de los Servos

Las principales desventajas de este tipo de sistema es su alta complejidad del sistema mecánico lo que implica un alto coste de mantenimiento, los motores disipan calor, variando las condiciones del entorno pudiendo afectar al sistema. También hay una debilidad patente a las resonancias mecánicas, que son casi inevitables.

1.5.4. Strapdown System

Es una sustitución del sistema mecánico anterior por un sistema matemático, Los giróscopos ahora no compensan el movimiento para tener orientados los acelerómetros, con este sistema los giróscopos miden las variaciones de los ángulos para saber cómo están orientados los ejes de los acelerómetros. En GINS los giróscopos necesitan miles de ángulos por hora, sin embargo estos ángulos toman valores de unos 10° de media. En strapdown-system, se necesitan la recogida de cientos de medidas por segundo, siendo la carga computacional unas 10000 mil veces mayor que para GINS. Las medidas de estos ángulos deben ser extremadamente precisas, diminutas variaciones pueden provocar un error total desproporcionado.

Funcionamiento: Los giróscopos, miden la velocidad angular, mediante integración numérica calculan la actitud de la aeronave, estos ángulos se utilizarán para transformar las aceleraciones medidas por los acelerómetros (ahora coinciden con los ejes de la aeronave) en aceleraciones sobre los ejes de referencia, se integra numéricamente en serie, y se obtienen la posición y la velocidad.

Los acelerómetros usados para strapdown system, deben de tener mejores prestaciones que los usados en gimbaled system, (entorno a un factor (X2 X5) en ancho de banda, factor de escala y exactitud del sesgo.

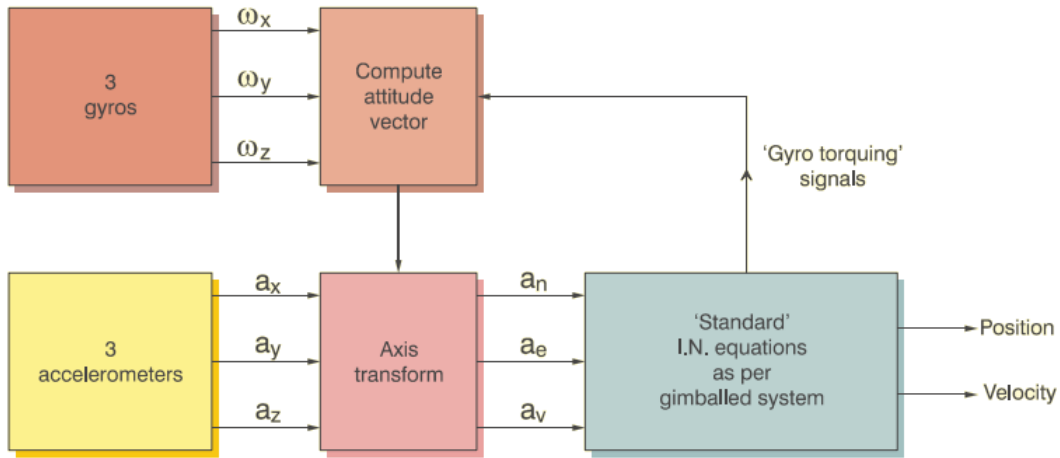


Figura 1.3: Funcionamiento del sistema Strap Down

Sin embargo el principal problema era la calidad de los giróscopos, el problema se solucionó con el desarrollo de la capacidad de computación y con el desarrollo y evolución de los giróscopos ópticos , en concreto los giróscopos RLG.

El **funcionamiento** de los textbf RLG es el siguiente:

Los RLG son un sólido de vidrio con tres estrechos tubos perforados en el interior del cuerpo ,los espejos están situados en las esquinas, formando un camino resonador óptico triangular.

Los tubos están llenos de una combinación de helio y neón a baja presión.

Entre el cátodo y cada uno de los dos ánodos se produce una alta tensión, en torno a 1KV. La diferencia de potencial, suministra suficiente energía causando una acción regenerativa en los gases, provocando que los haces

de luz circulen alrededor del camino triangular. Hay dos diodos láseres que emiten luz dentro de la misma cavidad, uno circula en sentido horario y otro en sentido anti horario.

Cuando el giróscopo está en posición estacionaria los dos haces, tienen la misma frecuencia (normalmente 633 nanómetros). Si el sólido se mueve en sentido horario el camino del haz en sentido horario será más largo ya que suponiendo que el haz parte de uno de los espejos, en el retorno, se encontrará más cerca este espejo al contrario el camino del haz en sentido anti-horario será más corto. Midiendo la diferencia de frecuencia se puede calcular la velocidad angular.

Si se gira el giróscopo óptico en sentido anti-horario, ocurrirá justamente lo contrario que lo expuesto en el párrafo anterior.

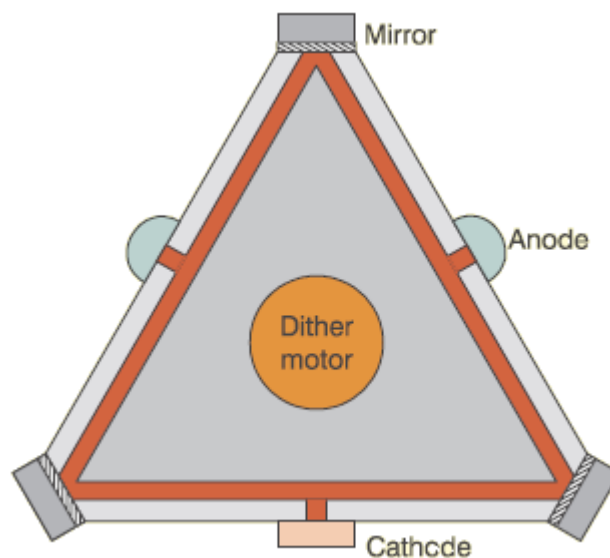


Figura 1.4: Giróscopo RLG

El strapdown es un método moderno desarrollado para ser usado por la tecnología actualmente disponible, como microcontroladores con alta capacidad de cálculo. . . La principal desventaja del método strapdown como ya ha sido expuesto es su necesaria alta capacidad de cálculo un ejemplo de esta característica se da al método necesario para conocer la actitud de la aeronave donde para conocer los ángulos es necesario integrar numéricamente la velocidad angular proporcionada por los giróscopos.

1.6. Vehículos Aéreos no tripulados

1.6.1. Introducción

Los UAV o vehículos aéreos no tripulados, también conocidos como drones, son aeronaves que no necesitan de un piloto humano a bordo para poder llevar a cabo una trayectoria aérea.

Estos vehículos nacieron y se desarrollaron con el propósito de realizar acciones militares, aunque en la actualidad se incorporan poco a poco a un mercado con fines civiles como pueden ser la vigilancia contra incendios, o de amplios terrenos. Todavía no se pueden usar abundantemente ya que el espacio aéreo está inhabilitado para los UAV, se espera que este se abra en el año 2015 en EE.UU y en el año 2016 en Europa.

Se suelen usar en tareas peligrosas o en tareas que un ser humano no podría realizar, en años futuros se utilizarán como un recurso de automatización, como pueden ser los "drones carteros" planteados por Amazon, que permitirán mejorar los tiempos de entrega notablemente.

La diferencia entre este tipo de vehículos y un vehículo aéreo RC es que estos últimos necesitan de la acción del ser humano para su despegue, vuelo o aterrizaje, siendo los UAV autónomos (pueden operar sin intervención humana) durante alguna de sus acciones. La diferencia con un misil es que los UAV son reutilizables, mientras que los misiles solo pueden ser lanzados una única vez.

Los drones, pueden ser guiados remotamente a través de un operador humano o con un plan de vuelo predefinido.

Hay muchos tipos de clasificación de vehículos aéreos no tripulados una de ella se establece a partir del tipo o número de hélices que tiene:

- Avión no tripulado.
- Helicoptero no tripulado.
- Quadcopter.
- Hexacopter.
- Octacopter.
- Decacopter.
- Dodecacopter
- Dirigible.

Otra clasificación se enfoca en las características de vuelo como se puede en ver en la siguiente tabla.

Categoría	Acrónimo	Alcance (km)	Altitud de vuelo (m)	Autonomía (h)	Carga máxima (kg)
Micro < 250 gr	Micro	< 10	250	1	< 5
Mini < 25 kg	Mini	< 10	150 y 300	< 2	< 30
Alcance cercano	CR	10 a 30	3.000	2 a 4	150
Alcance corto	SR	30 a 70	3.000	3 a 6	200
Alcance medio	MR	70 a 200	5.000	6 a 10	1.250
Altitud baja	LADP	> 250	50 a 9.000	0,5 a 1	350
Autonomía media	MRE	> 500	8.000	10 a 18	1.250
Autonomía alta Altitud baja	LALE	> 500	3.000	> 24	< 30
Autonomía alta Altitud media	MALE	> 500	14.000	24 a 48	1.500
Autonomía alta Altitud alta	HALE	> 2.000	20.000	24 a 48	12.000
Combate	UCAV	1500	10.000	2	10.000
Ofensivo	LETH	300	4.000	3 a 4	250
Señuelo	DEC	500	5.000	< 4	250
Estratosférico	STRATO	>2.000	20.000 y 30.000	>48	ND
EXO-estratosférico	EXO	ND	>30.000	ND	ND

La mayoría de los UAV de aplicaciones civiles se pueden encontrar en las tres primeras categorías de la tabla anterior.

La ventajas de los aeroplanos son tanto la facilidad de guiado y control ,también destaca su alta fiabilidad en condiciones extremas. El principal problema que pueden presentar es su falta de maniobralidad en espacios reducidos.

Los dirigibles destacan por su estabilidad en el aire y su gran autonomía

aunque tienen una muy alta relación Volumen/Capacidad, lo que les hace tener muy poca maniobrabilidad. Los UAVS más utilizados para aplicaciones civiles son los vehículos aéreos no tripulados derivados de los helicópteros dado que tienen una relación capacidad de carga / volumen muy grande, su principal desventaja es la dificultad para realizar el control

En los quadcopters tanto su dinámica como su capacidad de vuelo lo hacen único en maniobrabilidad. Esta gran maniobrabilidad hace que los quadrotores sean los mas utilizados en multitud de aplicaciones .

Característica	Helicóptero	Aeroplanos	Dirigibles	Quadrotor
Capacidad de vuelo estacionario	***		****	***
Velocidad de desplazamiento	***	****	*	**
Maniobrabilidad	***	*	*	****
Autonomía de vuelo	**	***	****	*
Resistencia a perturbaciones externas	**	****	*	**
Auto Estabilidad	*	***	***	**
Capacidad de vuelos verticales	****	*	**	****
Capacidad de carga	***	****	*	**
Capacidad de vuelo en interiores	**	*	***	****
Techo de vuelo	**	****	***	*

1.6.2. Aplicaciones de los UAVs

A continuación se exponen las principales aplicaciones de los UAV.

Misiones militares . Con diferencia es la aplicación donde más se usan los UAV se crearon y desarrollaron para aplicaciones militares. Dentro de aplicaciones militares destaca por encima de todo la labor de espionaje, donde por sus características y reducido tamaño pasan inadvertidos para los radares.

Busqueda de personas desaparecidas. Los drones pueden buscar a personas desaparecidas en lugares de difícil acceso como pueden ser las zonas nevadas o montañosas. El bajo coste de los drones comparados con un helicóptero permiten que sea una opción a tener en cuenta .

Fotografía y Vídeo. Permiten tomar imágenes desde el aire permitiendo por ejemplo construir mapas más precisos o cubrir eventos donde es necesaria una cámara aérea.

Prevención y control de incendios. En las zonas boscosas y forestales permiten la supervisión constante. El UAV puede supervisar amplias zonas desde el aire, sin riesgo de vidas humanas y reduciendo el costo de un vuelo tripulado.

Medio Ambiente. Monitorización de la eficiencia de las medidas energéticas, seguimiento de accidentes industriales donde intervienen vertidos tóxicos, almacenaje de residuos industriales...

Agricultura. Control del estado de los cultivos por medio de imágenes aéreas.

Exploración de lugares de difícil acceso. Como cuevas, precipicios...

Movilidad y tráfico. Monitorización del tráfico a través de cámaras en tiempo real.

1.6.3. Configuraciones aerodinámicas

En este capítulo, se presenta la configuración aerodinámica usada para diseñar el control de los UAV que se desarrollará mas adelante. Esta presentación está focalizada hacia los mini-vehículos como el avión (modelo de ala fija) o los helicópteros (modelos de ala rotatoria). Estos helicopteros como ya se ha comentado anteriormente estan clasificados dependiendo del número de rotores.

1.6.3.1. Configuración para un vehículo uni-rotor

Este tipo de configuración esta formado por un unico rotor y alerones para compensar el torque producido por el rotor (control de guiñada (yaw)). Como el rotor no puede mantenerse estable por si mismo el swashplate (plato oscilante) el vehículo tiene alerones extra para producir los torques pitch y roll. Este tipo de máquina voladora es particularmente difícil de controlar.

La configuración de un solo rotor es mecánicamente más simple que la configuración de helicópteros estándar pero no tiene tanta capacidad de control. En ambos casos se utiliza una cantidad significativa de la energía en el anti-par para detener el giro del fuselaje alrededor del eje vertical. Sin embargo debido a la simplicidad mecánica este tipo de configuración es muy utilizada en los mini drones. Se pueden encontrar diferentes tipos de vehículos

que se basan en esta configuración como pueden ser los aviones llamados 3D o STOL como en la Figura 1.5.

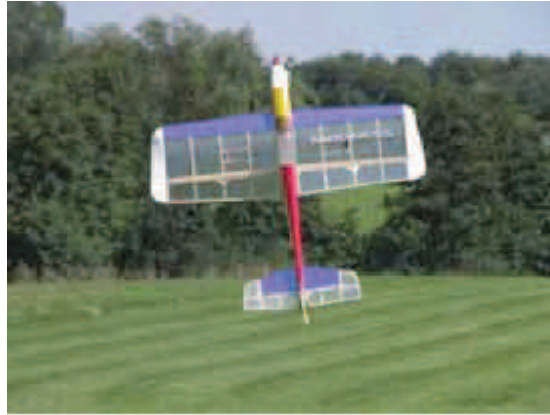


Figura 1.5: Avión 3D

1.6.3.2. Configuración de vehículos con dos rotores

Hay dos tipos de configuraciones en los vehículos con dos rotores las que utilizan uno o dos swashplates (paso colectivo) y las que utilizan paso fijo. Entre las configuraciones que utilizan swashplates, se pueden citar los siguientes: el helicóptero clásico, el helicóptero en tándem y el helicóptero coaxial.

En la clasificación de aeronaves con dos rotores sin swashplate se pueden encontrar aeronaves de rotores gemelos con alerones, es decir, dos rotores situados en diferentes ejes y los alerones orientados en la dirección del flujo de aire con el fin de obtener los pares de torsión requeridos para controlar el vehículo. Los rotores pueden girar en dirección opuesta o en la misma dirección. Para describir esta configuración, se pueden mencionar, por ejemplo, el T-Wing de la Universidad de Sydney como se puede ver en la Figura 1.6.

También es posible obtener dos rotores contra-rotativos en el mismo eje y los alerones en la dirección del flujo de aire de los rotores. Esta última configuración es muy compacta, pero difícil de controlar.

Por último, se pueden tener dos rotores de ejes inclinados (bi-rotor con contra-rotación de las hélices en tándem). En esta configuración, las hélices no tienen swashplate y los rotores pueden inclinarse en dos direcciones diferentes para generar el los torques pitch y roll . El par rol se obtiene por la diferencia de velocidad entre los dos rotores.



Figura 1.6: Avión T-wing

1.6.3.3. Configuración de vehículos multirotores

En esta categoría se encuentran los rotorcrafts de tres rotores, los rotorcrafts cuatro rotores y los rotorcrafts con más de cuatro rotores.

La helicópteros de cuatro rotores o quad-rotor es el más popular helicópteros multi-rotor (Figura 1.7). Con este tipo de helicópteros que se logra un vuelo estable y preciso mediante el equilibrio de las fuerzas producidas por los cuatro rotores. Una de las ventajas de utilizar un helicóptero multi-rotor

es el aumento de la capacidad de carga útil. Por lo tanto se puede conseguir una mayor elevación para altos pesos.

Como ya se ha comentado en fases anteriores de este proyecto los Quadcopter son altamente maniobrables y permiten el despegue y aterrizaje vertical, así como volar en condiciones difíciles para llegar a las zonas especificadas. Las principales desventajas son el gran peso de la aeronave y el elevado consumo de energía debido a los motores adicionales. El quadrotor es superior a las configuraciones de otros vehículos con menos motores desde el punto de vista de la capacidad de control como se demuestra en la flotación controlada y el vuelo a baja velocidad.

Sin embargo estos drones necesitan mejoras evidentes en diversos aspectos, por ejemplo, cuando se usan motores de combustión interna, las configuraciones multirotor están en desventaja con las configuraciones uni-rotor debido a la complejidad de la transmisión.

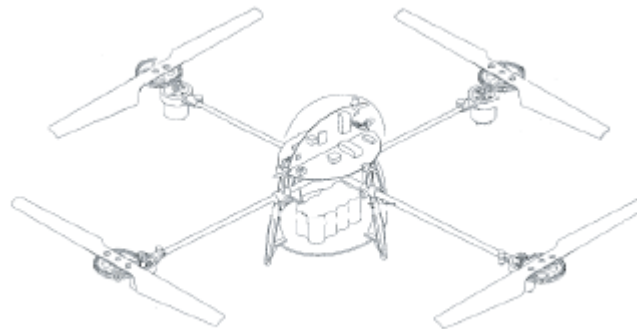


Figura 1.7: Quad-copter

1.6.3.4. Dirigibles

Un dirigible es la aeronave mas ligera que puede ser dirigida e impulsada por el aire mediante helices y timones. A diferencia de otras aeronaves que aprovechan el efecto de la sustentación para poder volar, los dirigibles vuelan llenando una gran cavidad al igual que hacen los globos llenos de helio. Hay tres tipos de naves : no rígidas, semirígidas o rígidas.

La mayoría de naves de este tipo son naves no rígidas (no poseen esqueleto interno). Las naves semi-rígidas son un poco mas grandes y tienen una estructura interna.



Figura 1.8: Dirigible

1.6.3.5. Aviones

Un avión utiliza las alas con el fin de generar la elevación necesaria para volar a la altura deseada. El fuselaje (cuerpo del avión) por lo general es un tubo largo que se encarga de dar la forma deseada. Las superficies de las alas

son lisas lo que ayuda a empujar el aire sobre la parte superior del ala a más velocidad de la que viaja el aire. A medida que el ala se mueve, el aire que fluye sobre la parte superior avanza (obligado a salir al mismo tiempo que el aire que se desvió por la parte baja del ala) y se mueve más rápido que el aire que pasa por debajo del ala, (ya que recorre mas distancia), ocasionando una diferencia de presiones que produce el efecto de elevación.

1.6.3.6. Flapping-wing UAV

La nueva tendencia en la comunidad UAV, es utilizar la biomimética para desarrollar nuevos dispositivos de vuelo. Los ingenieros que desarrollan estos UAV intentan modelar y copiar los aleteos de los insectos o de las aves. Sin embargo el diseño es un reto ya que la eficiencia aerodinámica está condicionada por los movimientos complejos de las alas y porque existen muchas interacciones entre la morfología del UAV (superficie alar...) y los parámetros cinemáticos (frecuencia de aleteo, ala de despliegue...).



Figura 1.9: UAV configuración en forma de avión



Figura 1.10: UAV biomimetizando a un insecto

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Historia de la Teoría de control

La teoría de control ha tenido mucha importancia a lo largo de la historia en el avance de la ciencia y de la ingeniería. Hoy en día es muy importante en muchos ambitos, como son los procesos automatizados de manufactura, la industria de procesos, los vehículos autopilotados...

A continuación se mostrará un desarrollo histórico de la teoría de control:

Un artículo de O. Mayr escrito en 1970 muestra el panorama histórico, en el cual se explica con detalle el control de diversos mecanismos desde la antigüedad. Algunos de estos mecanismos son descritos a continuación.

En el año 1788 **James Watt** desarrolló el regulador centrífugo de velocidad, para el control de la velocidad de la máquina de vapor.

J. C. Maxwell desarrolló en 1868 un estudio de la estabilidad del con-

trol automático en el artículo denominado "On Governors". En este artículo se describen las ecuaciones diferenciales del regulador creado por J.Watt. Linealizando las ecuaciones diferenciales cerca del punto de equilibrio Maxwell encontró la ecuación característica del sistema. Esta linealización permite estudiar la estabilidad en función del efecto que tienen los distintos parámetros del sistema. Siendo el sistema estable si las raíces tienen parte real negativa. Maxwell solo trabajo con ecuaciones de hasta tercer orden.

E.J. Routh. Propuso un método para determinar cuando las ecuaciones que describen un sistema, tienen parte real negativa y por lo tanto son estables, este método. es conocido como Criterio de estabilidad de Routh, fue desarrollado en el artículo denominado "Tratado sobre la estabilidad de un estado de movimiento dado". Este método de estudio de la estabilidad sólo se aplica a ecuaciones con una cantidad finita de términos. Con este método, se obtienen directamente los coeficientes de la ecuación característica que describe el sistema

En 1893, **A.M Lyapunov** realizó un ensayo, considerado uno de los más importantes y relevantes de la Teoría de control. Este artículo se basa en el estudio de la ecuación no lineal descriptora de un sistema y en el desarrollo de las funciones de energía, incluyendo resultados para ecuaciones diferenciales, equivalentes a los resultados obtenidos por Routh. Este trabajo empezó a tener importancia en 1958.

A. Hurwitz en 1895 planteó otra manera de determinar la estabilidad del sistema utilizando la ecuación característica: El criterio de estabilidad de Hurwitz, que ofrece una condición suficiente para que todas las raíces de la ecuación del sistema, tengan parte real negativa. Este criterio define una Matriz de Hurwitz que se compone de los coeficientes de la ecuación característica, esta matriz, tiene raíces con parte real negativa, si y sólo si, los menores principales de la diagonal de la matriz, son todos positivos.

En 1932, **H. Nyquist** desarrolló la teoría de regeneración para el diseño de amplificadores estables, este método es conocido como **criterio de estabilidad de Nyquist**, el cual se basa en la teoría de los residuos, del campo de los números complejos. El criterio de Nyquist determina a partir de la respuesta en frecuencia de un sistema en lazo cerrado, si este es estable o no. Este método es muy útil en la teoría de control debido a que permite determinar gráficamente la estabilidad del sistema (en lazo cerrado), a partir de las curvas de respuesta en frecuencia del sistema en lazo abierto.

En 1940 **H. Bode** uso también un método gráfico, basado en el estudio de la repuesta de frecuencia, representada a través de gráficas de magnitud y fase para el estudio de la estabilidad en lazo cerrado. Lo expuesto, se desarrolla en su ensayo "Network Analysis and Feedback Amplifier Design"

W.R. Evans, propuso otro enfoque en en diseño de controladores. Evans, trabajaba en el control de aviones, se dió cuenta que los métodos frecuenciales eran muy difíciles de aplicar en estos casos. Por este motivo, desarrolló su propio método, el cual se conoce como **método del lugar de las raíces**En este aloritmo se representan las raices de la ecuación del sistema para todos los valores posibles de un parámetro. Este método debe su nombre al lugar de las raices del polinomio característico de un sistema en lazo cerrado (cuando un determinado parámetro varía de - infinito a + infinito). Dicho algoritmo revela como influye el valor de este parámetro en los polos y ceros del sistema.

R. Bellman propuso un nuevo método , para ello desarrolló algoritmos de programación dinámica para el control óptimo de sistemas discretos, demostrando que la manera de solucionar los prolemas que sufría el control óptimo se resuelven mediante retrasos en el tiempo. Su procedimiento, dió lugar a esquemas en lazo cerrado no lineales.

En 1958 **L. S. Pontryagin** propuso un método que actualmente se utiliza en la teoría de control óptimo, el cual da una solución al problema de control utilizando el cálculo variacional.

En 1960, **Kalman** y sus colaboradores escribieron una serie de ensayos, de gran relevancia, abordando temas como el control óptimo, proporcionando las ecuaciones para el Regulador Cuadrático Lineal, como el filtrado óptimo y la teoría de la estimación, donde se dieron a conocer los conceptos necesarios para que finalmente se desarrollaran el filtro de Kalman discreto y el filtro de Kalman continuo.

Todas las técnicas previamente descritas que se basan en la respuesta en frecuencia del sistema corresponden a la llamada **Teoría de Control Clásica**. Fue con los conceptos introducidos por Kalman y otros investigadores de la década de los 60 cuando se dió paso a una nueva forma de control, denominada **Teoría de Control moderna** basada en el dominio del tiempo y en el control del espacio de estados. Dando lugar a dos tipos de sistemas.

I) Sistemas **MIMO** sistemas de múltiples entradas y salidas

II) Sistemas **SISO** sistemas de una entrada y de una salida.

Las herramientas matemáticas principales son el álgebra lineal y las matrices.

La Teoría de Control Moderna estableció los conceptos necesarios para que se generasen distintas ramas del Control Automático como son:

-Control Lineal.

-Control No Lineal.

- Control Óptimo.
- Control Robusto.
- Control Adaptativo.
- Control Jerárquico.
- Control Inteligente.

Las distintas ramas de la teoría de control moderna han proporcionado las bases para que se hayan desarrollado distintas ramas dentro del ámbito de la ingeniería como puede ser la Mecatrónica. Debido al avance tanto de las comunicaciones como de la informática hoy en día se ofrecen numerosas posibilidades para que la teoría de control se desarrolle enormemente ampliando sus contribuciones como las que se han realizado en diversas áreas como: los sistemas biológicos, las aplicaciones biomédicas y los sistemas socioeconómicos.

2.2. Control de Sistemas No lineales.

En esta sección se presentan algunos de los trabajos propuestos, para el control de sistemas subactuados.

2.2.1. Control de Sistemas No lineales Subactuados.

El término subactuado, se refiere a que no todos los grados de libertad, tienen un actuador para que este GL pueda ser controlado. En muchísimos

casos existe este problema, vease el problema planteado en este mismo proyecto. Muchos investigadores han centrado sus esfuerzos en encontrar algoritmos y métodos que puedan solucionar el problema de los sistemas subactuados, algunas investigaciones, han dado sus frutos y en la actualidad sus estrategias son usadas para controlar sistemas subactuados, es el caso de: control por back-stepping, control basado en energía o pasividad, control adaptativo, control fuzzy o iteligente control por modos deslizantes...

Existen números artículos dedicados a este tipo sistemas.

En la práctica hay unos sistemas que tienen mucha popularidad y hay numerosos artículos que desarrollan los controladores a utilizar. Obviamente también esta el caso contrario de numerosos sistemas que no tienen ningún tipo de base para empezar a desarrollar un controlador. En los siguientes parrafos se exponen algunos ejemplos de investigaciones realizadas para controlar sistemas subactuados.

M.Spong desarrolló para el sistema Acrobot un control basado en la linealización parcial por retroalimentación. Para este mismo tipo de robot Yan Zheng propuso una ley de control fuzzy de estructura variable que utiliza la teoría de la estabilidad de Lyapunov para garantizar la estabilidad asintótica global. Asi mismo el mismo autor, presentó un esquema de control inteligente para controlar el problema de trasladar de la posición colgante hasta la posición invertida.

Para otro sistema similar como es pendubot M. Spong presenta un tipo de control basado en la linealización parcial por retroalimentación y en la dinámica cero. Otro autor como Fantoni propone un algoritmo de estabilización utilizando métodos basados en energía considerando las propiedades pasivas de Pendubot para desarrollar y diseñar la ley de control. El análisis de la estabilidad se hace por medio de la teoría de Lyapunov.

Otro sistema muy interesante es el péndulo desarrollado en el Instituto tecnológico de Tokio. Furuta, el ingeniero que desarrolló el péndulo propone un método de control por realimentación del pseudoestado. Otros autores como Iwashiro y Olfati-Saber propusieron distintas estrategias de control como son el uso de métodos basados en energía y la estabilización semiglobal con controladores de punto fijo. Fantoni propone una estrategia de estabilización en una órbita homoclínica. Aguilar -Ibañez a través de la platitud diferencial propone un controlador de estabilización y seguimiento de trayectoria. Brown y Passino diseñan un controlador basándose en el modelado que considera al péndulo colgante como un péndulo plano más un giróscopo. Gordillo a través del gradiente de velocidad desarrolla un algoritmo de control para trasladar el péndulo desde la posición colgante hasta la posición invertida.

Otro sistema muy estudiado por los investigadores, es el sistema viga-bola. Se han propuesto numerosos métodos para el control de este sistema como pueden ser, la estrategia de retroalimentación, saturaciones anidadas, estabilización por retroalimentación de salida, teoría de Lyapunov...

El Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), ha sido un sistema no-lineal estándar utilizado como conejillo de indias.^a la hora de probar distintos algoritmos y estrategias de control.

El sistema de aterrizaje y despegue de un (PVTOL) (estudiado en este proyecto) es también un sistema subactuado del cual existen diversas metodologías para poder controlarlo y estabilizar el sistema. Teel aplicó el teorema de pequeña ganancia al avión PVTOL, este teorema fue un punto de partida para analizar las saturaciones en los sistemas de control. Olfati-Saber, presentan para el sistema de aterrizaje y despegue de un avión (VTOL) una configuración de estabilización global, usando una técnica de retroalimentación de estado estático. Muchos otros métodos para este tipo de sistemas se

basan en la teoría de Lyapunov y en el control Híbrido

Brockett propuso unos teorema que aportan las condiciones necesarias para estabilizar asintóticamente un sistema mediante una ley de control por realimentación, hay muchos sistemas que no cumplen estas condiciones necesarias , por lo tanto es imposible controlarlos y estabilizarlos mediante retroalimentación.

En los últimos años han surgido numerosos avances tanto teóricos como experimentales, pese a esto, no se han conseguido generalizar los sistemas subactuados, el mayor avance conseguido hasta el momento, es distinguir entre dos tipos de sistemas subactuados:

I) Sistemas subactuados divididos: El sistema completo se divide en dos subsistemas no lineales independientes el uno del otro.

II) Un sistema subactuado no holonómico con dos entradas se transforma a una forma de cadena, Murray Y Sastry desarrollaron esta teoría proporcionando las condiciones suficientes, para hacer la transformación a través de la retroalimentación de estado y de una transformación de coordenadas.

El estado del arte de estos sistemas subactuados esta lejos de encontrar métodos de control generales para todo tipo de sistemas, ya que los modelos de control desarrollados hasta ahora, son específicos para cada problema.

Capítulo 3

Fundamentos matemáticos

3.1. Función Lipschitziana

La condición de Lipschitz o funciones lipschitzianas fueron introducidas por R. Lipschitz en 1876. Las funciones que cumplen esta condición garantizan un grado de regularidad entre la continuidad de la función y su derivabilidad. Se presenta, porque es un conocimiento necesario, para comprender la estabilidad de Lyapunov, usada a lo largo de este proyecto.

Sea una función definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^M$ tal que $f : M \rightarrow N$ entre espacios métricos, se dice que es lipschitziana (cumple la condición de Lipschitz) si existe una constante $K > 0$ tal que para todo $x, y \in D$ se cumpla:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K |u - v| \quad (3.1)$$

Donde L se denomina constante de Lipschitz. La condición de Lipschitz

es un problema muy fuerte si se estudia un problema global, por eso muchas veces, se impone una condición de Lipschitz local.

Se dice que una función $f(t,x)$ definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^M$ tal que $f : M \rightarrow N$ es localmente lipschitziana en D si para los rectángulos $R \subset D$ existe una constante $K > 0$ tal que para todo $x,y \in D$ y para

$$R := \{(t, p) : t \in [a, b], |p - a| \leq B\} \quad (3.2)$$

se cumpla:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K |u - v| \quad (3.3)$$

Que una función sea lipschitziana implica que esta función es continua en el dominio donde se ha definido la función pero que una función sea continua no implica que esta función sea lipschitziana.

Las funciones de Lipschitz están directamente relacionadas con las derivadas parciales, de modo que existe una condición suficiente relacionada con las derivadas parciales, que si se cumple, garantiza que la función es Lipschitz.

Si $f(t,y)$ es continua en $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$ y existen las derivadas parciales respecto de la segunda variable y además estas están acotadas en D , se verifica que $f(t,y)$ es lipschitziana respecto de la segunda variable.

lema1 Una función es Lipschitz si:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq K \quad \forall (t, y) \in D \quad (3.4)$$

Demostración:

Por el teorema fundamental del cálculo para todo $(t,u), (t,v) \in D$:

$$f(t, u) - f(t, v) = \int_v^u \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dy$$
$$|f(t, u) - f(t, v)| = \left| \int_v^u \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dy \right|$$

Por el lema 1:

$$f(t, u) - f(t, v) \leq \int_v^u \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dy$$
$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq \left| \int_v^u K dy \right|$$
$$|f(t, u) - f(t, v)| = K(u - v)$$

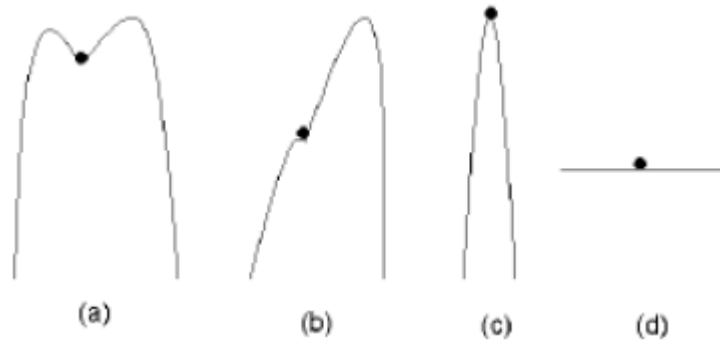


Figura 3.1: A y B asintóticamente estables C no estable, D estable (no asintótico)

3.2. Estabilidad de Lyapunov.

La teoría de estabilidad juega un rol muy importante en los sistemas de control. Existen diferentes tipos de problemas de estabilidad. La estabilidad es una propiedad fundamental de los sistemas de control. El análisis de estabilidad difícil problema complejo, en el cual no hay una técnica estandar facilmente aplicable que pueda resolver cualquier caso. No fue hasta 1892 cuando Lyapunov formuló el concepto de estabilidad.

Considerando el movimiento de la canica de la figura siguiente, se puede explicar , el concepto de estabilidad.

En las 4 figuras ,el estado inicial de la canica es estable, pero que pasará si se la mueve un poco. En los casos A y B la canica no solo se mantendrá cerca de su posición de equilibrio, sino que con el avance del tiempo, la canica tornará a la posición de equilibrio (asintóticamente estable). La diferencia entre los dos casos reside en la magnitud de la perturbación que hace falta para sacar a la canica del equilibrio. En el caso c, cualquier perturbación sacará a la canica del equilibrio, por eso se dice que es inestable. En el caso d

para cualquier perturbación, la canica permanecerá cerca"de la posición de equilibrio, pero no tenderá a acercarse a dicha posición a lo largo del tiempo

3.2.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La teoría de Lyapunov sobre la estabilidad de sistemas dinámicos es la generalización del principio de Torricelli sobre la mínima energía total de un sistema. La teoría de Lyapunov, permite obtener información sobre la estabilidad del punto de equilibrio, sin resolver la ecuación diferencial.

Un punto de equilibrio será estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio a lo largo del tiempo, será asintóticamente estable, no solo si permanece cerca del punto de equilibrio, sino que además deberá aproximarse a él.

Los Teoremas de Lyapunov (metodo directo e indirecto) junto con el principio de invariancia de LaSalle, proporcionan una fuerte metodología aplicable a sistemas variantes (no autónomos) o invariantes en el tiempo (autónomos). Existen dos métodos :

-Método indirecto: Aborda la estabilidad local alrededor de un punto de equilibrio del sistema linealizado. Justificando que la estabilidad de un sistema linealizado en las cercanías de un punto de equilibrio es muy parecida a la estabilidad de un sistema sin linealizar.

-Método directo: Se basa en proponer funciones de energía y después analizar como evoluciona la potencia (derivada de la energía respecto del tiempo) lo largo del tiempo, si la potencia es negativa o cero el sistema sera estable, si es positiva, el sistema será inestable. Es la generalización de los

conceptos de energía asociados a un sistema mecánico. El movimiento de un sistema mecánico cualquiera es estable si la energía decrece cuando $t \rightarrow \infty$. Basado en lo expuesto, se define una función que simula a la energía y se analiza.

3.2.2. Definiciones

Considerando la ecuación diferencial autónoma.

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.5}$$

con $f(t, x) [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y asumiendo que la función $f(t, x)$ es localmente lipschitziana, satisface las condiciones que aseguran la existencia y unicidad y dependendencia continua de las condiciones iniciales , si se cumple:

I) B_ρ es la bola de \mathbb{R}^n con centro en el origen, es decir $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho, \rho > 0\}$

II) $f : B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \rightarrow f(x)$ es una función de clase C^1

III) $f(0)=0$

La solución de la ecuación 3.5 cumple con la condición (II) que garantiza la existencia y unicidad de las soluciones, la condición (III) implica que la función cero es la solución, esta solución es el equilibrio.

Sea $x_0 \in B_\rho$ la solución de $\dot{x} = f(x)$ que en $t = 0$ pasa por x_0 se denota como $\phi(t, x_0)$, es decir la solución es tal que $\phi(0, x_0) = x_0$, lo que sugiere que

se estudia la estabilidad respecto del punto de equilibrio.

Un sistema de ecuaciones diferenciales tal como $\dot{t}(x) = f(x)$, tiene infinito número de soluciones. Para encontrar ciertas soluciones es necesario especificar unas condiciones iniciales. Sean dos condiciones iniciales $(0, c_1)$ y $(0, c_2)$ ambas en $[0, \infty] \times R^n$. Si c_1 y c_2 están próximos ¿cómo se comportan las soluciones a lo largo del tiempo?

Definiendo:

$$y = \phi(t, c_1) - \phi(t, c_2) \quad (3.6)$$

Donde y , denota la diferencia entre las dos soluciones, estudiando las propiedades de y relativo a la solución de equilibrio. Derivando y reordenando términos de la solución anterior.

$$\dot{\phi}(t, c_1) = \dot{y} + \dot{\phi}(t, c_2) \quad (3.7)$$

Puesto que $\dot{\phi}(t, c_1)$ es solución de 3.5, se tiene que:

$$\dot{\phi}(t, c_1) = f(t, \phi(t, c_1)) \quad (3.8)$$

Combinando las dos últimas ecuaciones:

$$\dot{y} = f(t, \phi(t, c_1)) - \dot{\phi}(t, c_2) = f(t, y + \phi(t, c_2)) - f(t, \phi(t, c_2)) = g(t, y) \quad (3.9)$$

En la ecuación 3.9 si $y=0$ entonces $g(t, 0) = 0$

En la mayoría de casos, no interesan lo cerca que dos soluciones arbitrarias permanecen cuando $t \rightarrow \infty$ como indica la ecuación 3.6 , lo importante es como de proximo permanece la solución en las cercanías de una solución de equilibrio.

Una solución de equilibrio es una solución denotada por \tilde{x} que satisface la ecuación:

$$f(t, \tilde{x}) = 0 \forall t \in [0, \infty)$$

Se puede repetir todo el análisis hecho para que no haya perdida de generalidad trasladando la solución de equilibrio \tilde{x} a la solución 0.

3.2.3. Definiciones

El equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ se dice en el sentido de Lyapunov:

I)Definición: **Estable**. Si para cada $\epsilon > 0$, $p \geq \epsilon$ existe η tal que si $\|x_0\| < \eta$ entonces $\|\phi(t, x_0)\| < \epsilon \forall t \geq 0$. El punto de equilibrio en el origen $x_e = 0$ es un punto de equilibrio estable si para cada $t_0 \geq 0$ y $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$ tal que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t, x_0)\| < \epsilon \forall t \geq 0$$

II) Definición : **Atractivo**. Si existe $\eta > 0$, $\rho \geq \eta$ tal que si $\|x_0\| < \eta$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0)\| = 0$.

III) Definición: **Asintóticamente Estable**. Si δ se puede elegir tal que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

IV) Definición:**Inestable**. Si el sistema no es estable.

3.2.3.1. Teorema de Lyapunov

En su escrito, Lyapunov demostró que no solo la energía es válida para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio, sino que también se pueden utilizar otras funciones. Sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset R^n$ que contiene el origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ está dada por :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

Teorema: Sea el origen $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ y sea un $D \subset R^n$ un dominio que contiene el origen: Sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (3.10)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \quad (3.11)$$

Entonces $x = 0$ es estable. Más aún, si:

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (3.12)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Una función $V(x)$ que satisface la ecuación 3.10 se dice definida positiva. Si satisface una condición más débil, vease $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$ se dice que es una función semidefinida positiva. Una función es negativa o semidefinida negativa si $-V(x)$ es definida positiva o semidefinida positiva respectivamente. Si $V(x)$ no tiene signo definido, se dice que es una función indefinida.

El **teorema de Lyapunov** se puede enunciar del siguiente modo: El origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable de modo que $\dot{v}(x)$ es semidefinida negativa y es asintóticamente estable si $\dot{v}(x)$ es definida negativa.

3.2.3.2. Sobre la Región de Atracción. Estabilidad asintótica Global

Sea $\phi(t, x)$ la solución de la ecuación 3.5 que comienza en $t=0$ y supongamos que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Se define como Región de Atracción del punto de equilibrio al conjunto de todos los puntos x tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = 0$. Es en general difícil o imposible encontrar analíticamente la Región de atracción. Sin embargo se pueden usar funciones de Lyapunov para estimarla con conjuntos contenidos en la Región de Atracción.

Se sabe que si existe una función de Lyapunov que satisface las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio D y si $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) < c\}$ está acotado y contenido en D , entonces toda trayectoria que comience en Ω_c permanece en Ω_c y tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto Ω_c es una estimación de la Región de Atracción. Esta estimación puede ser conservada, es decir, puede ser mucho más pequeña que la Región de Atracción real.

Teorema de LaSalle-Krasovski. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de la ecuación 3.5. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ y } V(x) > 0 \forall x \neq 0 \\ \|x\| \rightarrow \infty &\Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \\ \dot{V}(x) &< 0 \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

entonces $x = 0$ tiene estabilidad asintótica global.

3.2.3.3. Teorema de Chataev (Inestabilidad)

sea $x = 0$ un Punto de equilibrio (217). Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $V(0) = 0$ y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 con $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña. Definiendo el conjunto Δ y suponiendo que $\dot{V}(x) > 0$ en Δ . Entonces $x = 0$ es inestable

3.2.3.4. Estabilidad del Origen en Sistemas lineales

. El punto de equilibrio $x = 0$ es estable si y solo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa y los autovalores con parte real nula tienen un bloque de Jordan asociado de orden 1.

El punto de equilibrio $x = 0$ es estable u globalmente asintótica si y solo si todos los autovalores de A son negativos.

También puede estudiarse la estabilidad de los sistemas lineales aplicando el método de Lyapunov. Tomando como función de Lyapunov:

$$V(x) = x^T P x \quad (3.13)$$

Donde P es una matriz simétrica positiva. Su derivada viene dada por:

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^t P)x = -x^T Q x \quad (3.14)$$

Si Q es definida positiva, se puede decir que el origen es asintóticamente estable.

Para sistemas lineales se puede revertir el método. Definiendo una matriz Q positiva, resolviendo:

$$(PA + A^t P) = -x^T Q x \quad (3.15)$$

Si P es definida positiva, el origen, es asintóticamente estable. La ecua-

ción anterior, es conocida como ecuación de Lyapunov

3.2.4. Método Indirecto de Lyapunov

. Sea en un sistema no lineal $x = 0$ el punto de equilibrio. Estando el sistema definido por:

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.16}$$

Siendo F una función continuamente diferenciable. Siendo A:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \tag{3.17}$$

Entonces para $x=0$:

I) El origen es asintóticamente estable si todos os los autovalores de A, tienen parte real negativa.

II)El origen es asintóticamente inestable, si uno o más valores de A, tienen parte real positiva.

3.3. Funciones anidadas de saturación

Esta técnica fue desarrollada por A. R. Teel . Al principio, se usaba para estabilizar una cadena de integradores lineales, recientemente se esta utilizando en otros casos como en sistemas subactuados.

3.3.1. Función de saturación lineal

Dadas dos constantes definidas positivas, L y M con $L \leq M$ y una función $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina para (L, M) una saturación lineal si σ es una función continua, no decreciente y satisface:

$$\text{I) } s\sigma(s) > 0 \forall s \neq 0$$

$$\text{II) } \sigma(s) = s \text{ cuando } |s| \leq L$$

$$\text{III) } |\sigma(s)| \leq M \forall s \in \mathbb{R}$$

Considerando un sistema lineal formado por varios integradores de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\dot{x}_n &= u
\end{aligned} \tag{3.18}$$

La idea al utilizar esta técnica es encontrar una ley de control que se encargue de estabilizar asintóticamente de una forma global, el sistema formado por las ecuaciones anteriores.

Definición Existe una función lineal $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que , para cualquier conjunto de constantes (L, M) donde $L_i \leq M_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y $M_i < \frac{L_{i+1}}{2}$ para $i = 1, \dots, n - 1$ y para cualquier conjunto de funciones σ_i que son saturaciones lineales para L_i, M_i , entonces el control acotado toma la forma:

$$u = -\sigma_n(f_n(x) + \sigma_{n-1}(f_{n-1}(x) + \dots + \sigma_1(f_1(x))))...$$

Que como resultado ofrece una estabilización asintótica global del sistema 3.18 .

Demostración Considerando la siguiente transformación de coordenadas $y = Tx$, este cambio de coordenadas transforma el sistema 3.18 en $\dot{y} = Ay$ donde A y B son definidas como.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teniendo la transformación las siguientes características.

$$y_{n-1} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x_{n-j}$$

donde:

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

y la transformación inversa se caracteriza por:

$$x_{n-1} = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} y_{n-j}$$

Entonces, a partir de la siguiente ecuación de control u:

$$u = -\sigma_n(y_n + \sigma_{n-1}(y_{n-1} + \dots + \sigma_1(y_1))\dots)$$

se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 + \dots + y_n + u \\
 \dot{y}_2 &= y_3 + \dots + y_n + u \\
 &\vdots \\
 \dot{y}_{n-1} &= y_n + u \\
 \dot{y}_n &= u
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Considerando la evolución del estado Y_n , para lo cual se propone la función de Lyapunov $V_n = y_n^2$ cuya derivada es \dot{V}_n es de la forma.

$$\dot{V}_n = -2y_n[\sigma_n(y_n + \sigma_{n-1}(y_{n-1} + \dots + \sigma_1(y_1(x)))\dots)]$$

Aplicando la condición 1 a σ_n y la condición 3 a σ_{n-1} , así como el hecho de que $M_{n_i} < \frac{L_n}{2}$ entonces $\dot{V}_n < 0 \forall y_n \notin Q_n\{y_n : |y_n| \leq \frac{L_n}{2}\}$. Por consiguiente, existirá un tiempo finito en el cual y_n pertenece en Q_n . Además, debido a que el lado derecho del sistema 3.19 es globalmente Lipschitz, los estados restantes son acotados.

Considerando la evolución del estado y_{n-1} . Observando que y_n es parte de Q_n por lo cual σ_n está acotado por:

$$|\sigma_{n-1}(y_{n-1} + \dots + \sigma_1(y_1(x))\dots)| \leq L_n$$

Por tanto , σ_n opera en la región lineal como establece la condición 2, Quedando la evolución de y_{n-1} como:

$$\dot{y}_{n-1} = -\sigma_{n-1}(y_{n-1} + \dots + \sigma_1(y_1(x))\dots)$$

Utilizando el mismo razonamiento y_n se demuestra que y_{n-1} pertenece a Q_{n-1} . Utilizando el mismo procedimiento tambien se puede demostrar que las funciones σ_i se comportan como funciones lineales pasado un tiempo finito. Por lo que al final se tendrá:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - y_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{y}_n &= -y_1 - y_2 \dots y_n \end{aligned} \tag{3.20}$$

Se observa que el sistema anterior es asintoticamente estable después de un tiempo finito.

Capítulo 4

Modelado de las ecuaciones de un UAV

4.1. Modelo dinámico

La representación dinámica de un vehículo es por supuesto uno de los principales objetivos que deben resolverse antes de llevar a cabo la utilización estrategias de control. En sección, se desarrollará un modelo basandose en el metodo de Euler-Lagrange. El vehículo aereo es consideraro un sólido con 6 grados de libertad. 3 de estos grados de libertad describen el espacio 3D por el que se puede mover un vehiculo, los otros 3 grados de libertad restantes, son debidos a los angulos que puede tener el vehículo .Este vehiculo estará sometido a fuerzas y pares, que también deberán ser considerados en el modelo.

4.1.1. Metodo de Euler-Lagrange

Para representar el modelo dinámico por el método de Euler-Lagrange, se definen las coordenadas generalizadas del UAV como:

$$q = (r, \eta)^T = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)^T \quad (4.1)$$

Donde (r, η) representan la posición y la orientación del helicóptero respecto del sistema de referencia. El cambio a coordenadas generalizadas permite un trabajo más fácil y visible.

Se considera la Figura 4.1 como una manera de representar el cuerpo en el espacio. $I = E_x, E_y, E_z$ denota un sistema de referencia inercial estacionario respecto de la tierra en el cual E_z indica la dirección vertical. El vector r expresa la posición del centro de masas del cuerpo rígido respecto del sistema de referencia. $C = E_1, E_2, E_3$ es el marco de referencia del cuerpo donde E_1 es la dirección de ataque del UAV E_2 es perpendicular a E_1 y E_3 es perpendicular al plano E_1, E_2 . La orientación del sólido está dada por la rotación $\mathbf{R}: C \rightarrow I$, la rotación se representa mediante una matriz de rotación ortonormal como viene a continuación.

Usando el convenio ZYX :

$$R((z, \psi), (y, \theta), (x, \phi)) = R(z, \psi)R(y, \theta)R(x, \phi)$$

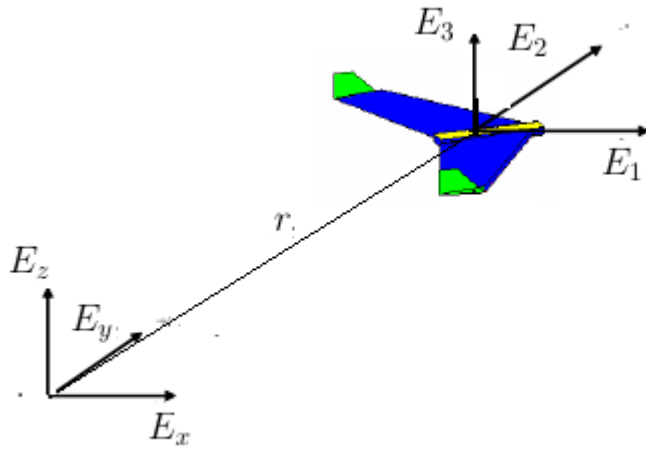


Figura 4.1: Representación geométrica del cuerpo rígido

donde:

$$R(z, \psi) = \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(y, \theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}$$

$$R(x, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{pmatrix}$$

Se obtiene:

$$R^{C \rightarrow I} = \begin{pmatrix} c_{\theta}c_{\psi} & c_{\theta}s_{\psi} & -s_{\theta} \\ c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} - c_{\phi}s_{\psi} & c_{\phi}c_{\psi} + s_{\phi}s_{\theta}s_{\psi} & c_{\theta}s_{\phi} \\ s_{\phi}s_{\psi} + c_{\phi}s_{\theta}c_{\psi} & c_{\phi}s_{\theta}s_{\psi} - c_{\psi}s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Siendo ψ , θ , ϕ Los ángulos de euler correspondientes a Yaw, Pitch y Roll. En ingeniería aeroespacial se llama angulos de euler a lo que en realidad son ángulos de Tait-Bryan, que son los que se tratan en este trabajo.

A partir de la matriz de rotacion dada en la ecuación 4.2 sin olvidar su propiedad de ortonormalidad se pueden establecer las ecuaciones cinemáticas de rotación a través de dicha matriz y del tensor de la velocidad angular.

Se define:

Siendo Ω la velocidad angular del vehículo medida desde el sistema de referencia solidario al cuerpo.

Definiendo W como el tensor de inercia asociado a la velocidad angular Ω .

$$W(\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix}$$

La velocidad se expresa mediante la siguiente relación:

$$\dot{r}(t) = \Omega \times r \quad (4.3)$$

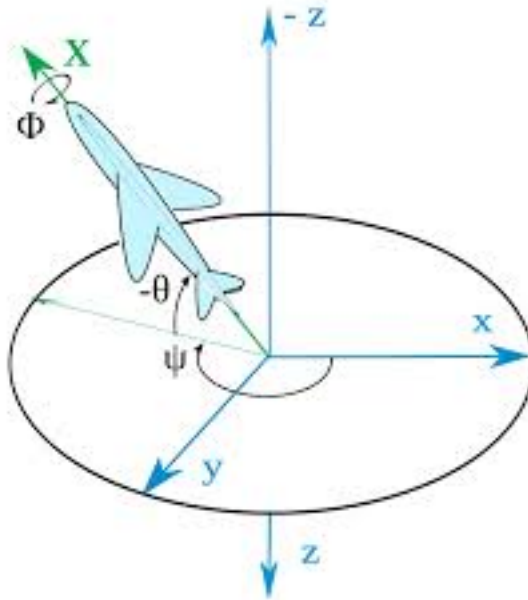


Figura 4.2: Representación de los ángulos de Euler

En la cual $\Omega = [u, v, w]^T$ representan la velocidad angular de los ejes solidarios al vehículo. El tensor W , actúa como el operador $(\omega \times)$.

Redefiniendo 4.3 como

$$\dot{r}(t) = W(t).r(t)$$

Teniendo en cuenta que R tiene propiedades de ortonormalidad, y que para tres vectores de un mismo sistema de referencia la velocidad angular es la misma, entonces se define:

$$\dot{R}(t) = W(t).R(t)$$

Reordenando términos:

$$\dot{R}(t).R^T(t) = W(t)$$

Por lo que se demuestra que se puede escribir la velocidad angular en función de los ángulos de euler. Esta velocidad angular se puede conseguir a través de la definición de los ángulos de euler :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + ROT(x, -\phi) * \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + ROT(x, -\phi) * ROT(y, -\theta) * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Por lo tanto Ω toma la forma:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}s_{\theta} \\ \dot{\theta}c_{\phi} + \dot{\psi}c_{\theta}s_{\phi} \\ \dot{\psi}c_{\theta}c_{\phi} - \dot{\theta}s_{\phi} \end{bmatrix}$$

Definiendo la ecuación:

$$W_{\eta}\dot{\eta} = \Omega$$

donde $\dot{\eta} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ y $\Omega = [u, v, w]^T$. Se define la matriz W_n como:

$$W_{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & c_{\theta}s_{\phi} \\ 0 & -s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix}$$

Se pueden reordenar los terminos quedando:

$$\dot{\eta} = W_{\eta}^{-1}\Omega$$

Ahora que se puede expresar la velocidad angular en términos de los ángulos de euler, se puede definir la energía cínética de translación y la energía cínética de rotación como:

$$E_{C_{trans}} = \frac{m}{2}\dot{r}^T\dot{r} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.5)$$

$$E_{C_{rot}} = \frac{1}{2}\Omega^T I \Omega = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (4.6)$$

Teniendo en cuenta la propiedad de las matrices transpuestas que afirma que :

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (4.7)$$

Se define J como:

$$J = W_{\eta}^T I W_{\eta}$$

Donde I representa la matriz de inercia. Tambien se considera la energía potencial como:

$$E_p = mgz \quad (4.8)$$

Con las ecuaciones anteriores, se puede definir el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$L = E_{c_{trans}} + E_{c_{rot}} - Ep$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\Omega^T I \Omega - mgz \quad (4.9)$$

Definiendo la ecuación de Euler-Lagrange como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_L \quad (4.10)$$

En la cual F_L representa las fuerzas externas referidas al sistema de referencia fijo a tierra y los momentos generalizados. Después de varios pasos algebraicos (que se mostrarán en el modelo dinámico del quad-copter que se desarrollará a continuación) se obtiene la siguiente ecuación estandar:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F_L \quad (4.11)$$

$M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz que representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q)$ es el vector que representa la gravedad.

4.1.2. Modelo dinámico de un quad-rotor

En esta sección se aplicará el modelo deducido anteriormente para desarrollar el modelo dinámico de un quad-rotor como el de la Figura 4.3

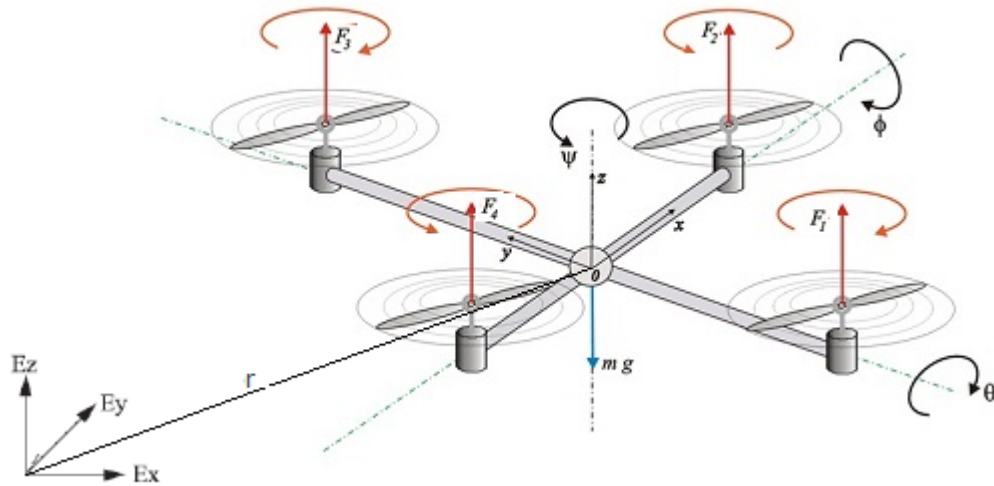


Figura 4.3: Representacion quad-rotor

Definiendo el Lagrangiano como:

$$L = E_{c_{trans}} + E_{c_{rot}} - E_p$$

Siendo la energía cinética de translación y la energía cinética de rotación:

$$E_{c_{trans}} = \frac{m}{2} \dot{r}^T \dot{r} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.12)$$

$$E_{c_{rot}} = \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (4.13)$$

Y la energía potencial:

$$E_p = mgz \quad (4.14)$$

Donde z representa la altitud del helicóptero.

Definiendo:

$$J = J(\eta) = W_n^T I W_n \quad (4.15)$$

Donde I es la matriz de inercia, suponiendo que el cuerpo sea simétrico se define como:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dado que el lagrangiano no contiene terminos cruzados entre la energía cinética de rotación y la energía cinética de translación, se puede estudiar por separado la coordenada generalizada referida al movimiento de translación r y la referida a movimiento de rotación τ .

El modelo dinámico completo se presenta con las dos ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas generalizadas y momentos generalizados.

La primera de ellas:

$$f = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L_{trans}}{\partial q} \quad (4.16)$$

donde:

$$L_{trans} = E_{c_{trans}} - E_p = \frac{m}{2} \dot{r}^T \dot{r} - mgz \quad (4.17)$$

y:

$f = RF_B$ representa las fuerza debido al empuje de los motores:

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix}$$

Donde e representa el empuje debido a los cuatro motores:

$$e = f_{m_1} + f_{m_2} + f_{m_3} + f_{m_4} \quad (4.18)$$

Siendo f_{m_i} :

$$f_{m_i} = c_i w_i^2 \quad (4.19)$$

Donde c representa una constate tal que $c > 0$ y w la velocidad angular de los rotores.

La segunda Langrangiana

$$\tau = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L_{rot}}{\partial q} \quad (4.20)$$

donde:

$$L_{rot} = E c_{rot} = \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (4.21)$$

y τ los momentos generalizados en los ejes de alabeo, cabeceo y guiñada.

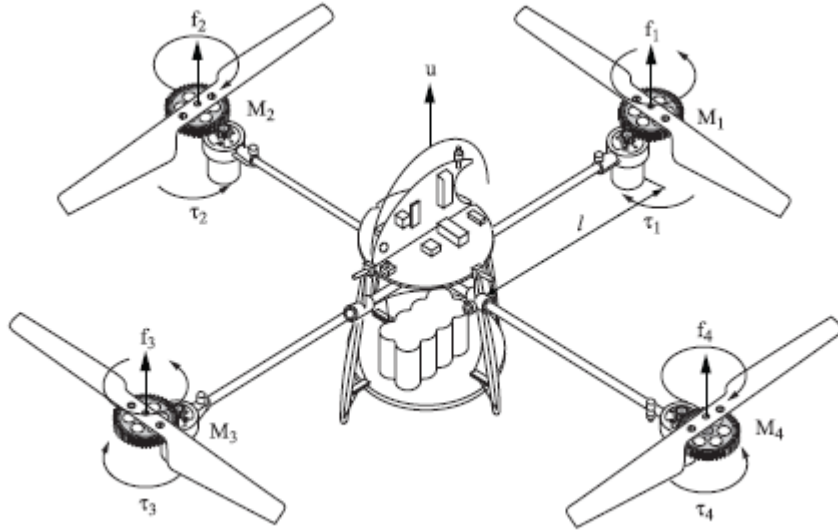


Figura 4.4: Fuerzas presentes

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_3 - f_1)l \\ (f_2 - f_4)l \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

En la cual l representa la distancia entre los centros de los rotores y el centro de gravedad y τ_i es el momento producido por el rotor correspondiente. Se observa, que los momentos generados en pitch y roll, se deben a la diferencia de velocidad angular entre motores del mismo eje de unión como se ve en la figura 4.3.

La ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento de translación es

$$\frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = \begin{bmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \\ m\dot{z} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial L_{trans}}{\partial r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Sustituyendo en la Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L_{trans}}{\partial r} = f \quad (4.26)$$

se obtiene :

$$f = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} + mg \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Para la energía cinetica de rotación la lagrangiana es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L_{rot}}{\partial \eta} = \tau \quad (4.28)$$

Para hallar el primer termino de la Lagrangiana:

$$\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}} = J\dot{\eta} \quad (4.29)$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}}\right) = J\ddot{\eta} + \dot{J}\dot{\eta} \quad (4.30)$$

Sustituyendo en la ecuación de la Lagrangiana:

$$J\ddot{\eta} + J\dot{\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\dot{\eta}^T J\dot{\eta}) = \tau \quad (4.31)$$

Definiendo el vector de coriolis como:

$$V(\eta, \dot{\eta}) = J\dot{\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\dot{\eta}^T J\dot{\eta}) \quad (4.32)$$

Se reescribe la ecuación 4.31 :

$$J\ddot{\eta} + V(\eta, \dot{\eta}) = \tau \quad (4.33)$$

Reescribiendo $V(\eta, \dot{\eta})$ como:

$$V(\eta, \dot{\eta}) = \left(J - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\dot{\eta}^T J\right)\dot{\eta} = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \quad (4.34)$$

Donde $C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}$ se refiere a los terminos de corioliolis , giroscopo y centrifugo.

Se obtiene:

$$\tau = J\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \quad (4.35)$$

Recopilando, las dos ecuaciones que definen el sistema son:

$$f = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} + mg \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$J\ddot{\eta} = \tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \quad (4.37)$$

Para simplificar el modelo, se propone el siguiente cambio de variable.

$$\tilde{\tau} = J^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}) \quad (4.38)$$

Donde $\tilde{\tau} = \ddot{\eta}$ se define como:

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_\phi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\psi \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Rescribiendo las ecuaciones 4.36 y 4.37 obtenemos el modelo final, listo para aplicar el control:

$$m\ddot{x} = -es_\theta \quad (4.40)$$

$$m\ddot{y} = ec_{\theta}s_{\phi} \quad (4.41)$$

$$m\ddot{z} = ec_{\theta}c_{\phi} - mg \quad (4.42)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_{\phi} \quad (4.43)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_{\theta} \quad (4.44)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_{\psi} \quad (4.45)$$

Donde x e y son las coordenadas del plano horizontal, z es la posición vertical, ψ es el ángulo yaw alrededor del eje- z . θ es el ángulo pitch alrededor del (nuevo) eje- y (después de la primera rotación de euler), y ϕ es el ángulo roll alrededor del nuevo eje- x (después de la segunda rotación de euler). Las entradas de control serían el empuje (e) y los momentos angulares sobre los nuevos ejes $\tilde{\tau}_{\phi}, \tilde{\tau}_{\theta}, \tilde{\tau}_{\psi}$ que están relacionados con los momentos generalizados $\tau_{\phi}, \tau_{\theta}, \tau_{\psi}$, por medio de la siguiente ecuación:

$$\tilde{\tau} = J^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}) \quad (4.46)$$

Capítulo 5

Control de saturación para estabilizar el modelo PVTOL

5.1. Introducción

En esta sección se estudiará este modelo de avión de despegue vertical por varios motivos. El primero de ellos es que este modelo se basa en una aeronave normal pero con un estudio mas simplificado, ya que solo posee 3 grados de libertad (x, y, θ) , de tal modo que puede ser un buen estudio preliminar que después puede ser aplicado a naves con un modelo de mayor complejidad.

El modelo de esta nave tiene dos entradas (u_1, u_2) y se mueve en un plano 2D como el de la Figura 5.1. El avión PVTOL tiene dos motores independientes encargados de producir la fuerzas y los momentos necesarios. El empuje que obtiene el avión es la suma del empuje de los dos motores, mientras que el momento se obtiene por la diferencia de velocidades angulares

de los dos motores.

El control del avión PVTOL es complejo, debido a su naturaleza no lineal y a sus propiedades particulares. Por ejemplo si se linealiza el sistema se obtiene que el sistema tiene un 0 inestable debido al acoplamiento entre el momento de balanceo y la aceleración lateral de la aeronave.

En el modelo de control propuesto. lo que primero se estabilizará será la altitud, después, el ángulo formado con la horizontal y la posición horizontal convergerán a 0.

5.2. Modelo dinámico PVTOL

Para desarrollar el modelo dinámico del PVTOL se fija como referencia los ejes de la figura 5.1, siendo u_1 la fuerza aplicada al centro de masas (empuje) y u_2 el torque (aceleración angular) las entradas aplicadas al sistemas., el parametro ϵ es un coecifiente de bajo valor que relaciona el momento con la aceleración lateral y -1 es la constante de gravedad normalizada.

Entonces el modelo dinámico queda:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -u_1 s_\theta + \epsilon u_2 c_\theta \\ \ddot{y} &= u_1 c_\theta + \epsilon u_2 s_\theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= u_2\end{aligned}\tag{5.1}$$

Como se ha comentado x e y denotan la posición horizontal y vertical (del centro de masas) respectivamente. θ es el ángulo que forma el avión con

la horizontal. u_1 y u_2 son las entradas del sistema, el empuje y la aceleración angular respectivamente. La constante -1 es la aceleración de la gravedad normalizada

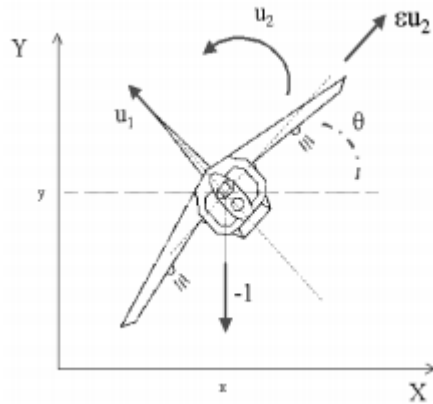


Figura 5.1: Avión PVTOL

Algunos autores como Olfat iy Saber recomiendan un cambio de coordenadas para que ϵ no aparezca implícitamente en el conjunto de ecuaciones del sistema. El cambio de coordendas es el siguiente.

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x - \epsilon s(\theta) \\
 \bar{y} &= y + \epsilon(c(\theta) - 1) \\
 \bar{u}_1 &= u_1 - \epsilon \dot{\theta}^2
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

De tal modo que el conjunto de ecuaciones que queda aplicando el cambio de variable es (* A partir de ahora se reconocera $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}_1)$ como (x, y, u_1)) :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -s(\theta)u_1 \\
\ddot{y} &= c(\theta)u_1 - 1 \\
\ddot{\theta} &= u_2
\end{aligned}
\tag{5.3}$$

Que es el mismo sistema que se obtiene al despreciar ϵ , que también podría ser una buena aproximación.

5.2.1. Estrategia de control

La estrategia de control que se desarrollará se basa en las funciones de saturación propuestas por A.R Tee] para el control de sistemas con integradores en cascada que a su vez estan basadas en el analisis de estabilidad de Lyapunov.

Como se menciona anteriormente primero se controlara la altitud, despues el posicionamiento horizontal y el ángulo. Se dividirá el sistemas en dos subsistemas. El primer subsistema lo formará la altitud y se tratará con un metodo de control por realimentación, el segundo subsistema lo formarán el desplazamiento horizontal y el ángulo cuyo control se realizará a traves de fuciones de saturación anidadas.

5.2.2. Control del desplazamiento vertical

El control del desplazamiento vertical, se desarrollará a traves de la teoría de control por realimentación de estado.

El desplazamiento vertical viene dado por la fórmula:

$$\ddot{y} = c(\theta)u_1 - 1 \quad (5.4)$$

Para establecer un control lineal, la teoría de la realimentación lineal define u_1 como:

$$u_1 = \frac{r_1 + 1}{\cos\sigma_p(\theta)} \quad (5.5)$$

donde $0 < p < \frac{\pi}{2}$ y σ_n es la función de saturación para $\eta > 0$:

$$\sigma_M(s) = \begin{cases} M & \text{si } s > M \\ s & \text{si } -M < s < M \\ -M & \text{si } s < -M \end{cases}$$

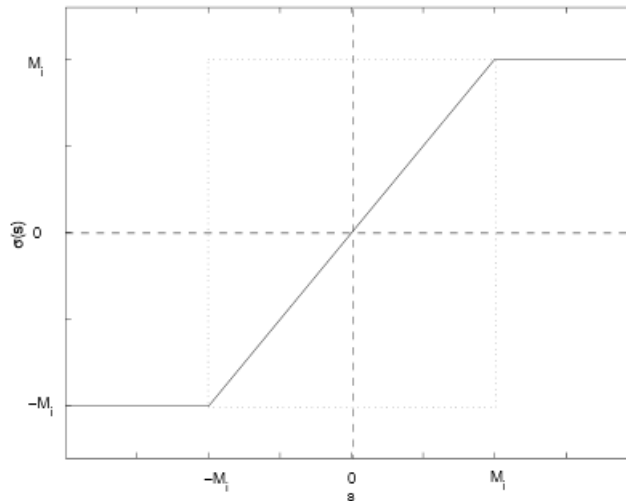


Figura 5.2: Función de saturación

Según la citada teoría de control, hay un método que permite diseñar un controlador externo r_1 para que estabilice los estados de dinámica externa (bloque linealizado, altitud) y conseguir una estabilización asintótica local, para ello r_1 debe ser un polinomio característico tal que en lazo cerrado sea un polinomio Hurwitz, entonces se define r_1 como :

$$r_1 = -a_1\dot{y} - a_2(y - y_d) \quad (5.6)$$

Donde y_d es la altura deseada. Para cumplir la característica de polinomio Hurwitz, a_1, a_2 son constantes positivas tal que el polinomio $s^2 + a_1s + a_2$ sea estable. Asumiendo que en un tiempo finito, θ está comprendido entre $(-\frac{\pi}{2} + \xi, \frac{\pi}{2} - \xi)$ donde $\xi > 0$ es infinitamente pequeño.

Introduciendo la ecuación 5.5 y la ecuación 5.6, el modelo general queda de la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\tan(\theta)(r_1 + 1) \\ \ddot{y} &= -a_1\dot{y} - a_2(y - y_d) \\ \ddot{\theta} &= u_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Las ecuaciones del sistema de arriba describen el sistema tal que $y \rightarrow y_d$ y $r_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

5.2.3. Control del ángulo (roll) y del desplazamiento horizontal

En esta sección se muestra paso a paso la expresión de la entrada u_2 que servirá para controlar tanto el ángulo como el desplazamiento vertical.

El subsistema (x, θ) está representado por cuatro integrales en cascada.

También se demostrará que tras un tiempo finito θ estará comprendido en el intervalo $(-\frac{\pi}{2} + \xi, \frac{\pi}{2} - \xi)$.

u_2 será la entrada de control dada por la teoría de las funciones de saturación anidadas dada por A.R. Teel, de la foma:

$$u_2 = -\sigma_n(y_n + \sigma_{n-1}(y_{n-1} + \dots + \sigma_1(y_1)))\dots)$$

Donde σ_{n_i} representan las funciones de saturación anidadas.

Lo primero que se hace, es definir los integradores que tomarán parte en la señal de control:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x \\ x_2 &= -\dot{x} \\ x_3 &= \theta \\ x_4 &= \dot{\theta} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Aplicando los cambios de variable, la cadena de integradores toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tan(x_3)(r_1 + 1) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Como $r_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y como se demostrará $\theta \rightarrow 0$ a partir de un determinado tiempo a partir, entonces existirá un tiempo finito a partir del cual se podrá suponer que $|\theta| \approx 0$ y entonces se podrá aproximar $\tan(\theta) \approx \theta$. por lo que la cadena de integradores quedará definida a partir de ese tiempo con la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Aplicando las transformaciones dadas por A.R Teel:

$$y_{n-i} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x_{n-j}$$

donde:

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_4 + 3x_3 + 3x_2 + x_1 \\
y_2 &= x_4 + 2x_3 + x_2 \\
y_3 &= x_4 + x_3 \\
y_4 &= x_4
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Si se tiene en cuenta el conjunto de ecuaciones (5.8), se obtiene:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \dot{\theta} + 3\theta - 3\dot{x} - x \\
y_2 &= \dot{\theta} + 2\theta - \dot{x} \\
y_3 &= \dot{\theta} + \theta \\
y_4 &= \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Por lo que la entrada de control queda definida como:

$$u_2 = -\sigma_a(\dot{\theta} + \sigma_b(\theta + \dot{\theta} + \sigma_c(2\theta + \dot{\theta} - \dot{x} + \sigma_d(3\theta + \dot{\theta} - 3\dot{x} - x)))) \tag{5.13}$$

En los siguientes pasos se demostrará como las funciones de saturación son estables, y se pueden acotar los diferentes estados y por lo tanto concluir la estabilidad asintótica del sistema.

Se definirá para las funciones de saturación, el valor de las constantes como : σ_n : $M_n = L_n$ y $M_{n-1} \leq \frac{1}{2}L_n - \epsilon$. Siendo $\epsilon > 0$ infinitamente pequeño para satisfacer la condición de las funciones de saturación que obliga a que $M_{n-1} < L_n$.

5.2.3.1. Con la intención de definir una frontera para $\dot{\theta}$

Por lo desarrollado anteriormente se tiene que:

$$y_4 = \dot{\theta} \quad (5.14)$$

Por lo que derivando, según A.R Teel, se podrá definir la entrada como:

$$\dot{y}_4 = u_2 = \ddot{\theta} \quad (5.15)$$

$$\dot{y}_4 = -\sigma_a(y_4 + \sigma_b(z_1)) \quad (5.16)$$

Haciendo los cambios de variables correspondientes:

$$u_2 = -\sigma_a(\dot{\theta} + \sigma_b(z_1)) \quad (5.17)$$

Donde $a > 0$ es el valor de frontera superior desado para u_2 . Se quiere demostrar la estabilidad de la función de saturación, para ello se define la siguiente función de Lyapunov:

$$V_1 = \dot{y}_4^2 = \dot{\theta}^2 \quad (5.18)$$

Derivando a lo largo del tiempo se obtiene:

$$\dot{V}_1 = -2\dot{y}_4\sigma_a(\dot{y}_4 + \sigma_b(z_1)) \quad (5.19)$$

Para que \dot{V}_1 sea negativo, se tiene que cumplir que \dot{y}_4 y $\sigma_a(\cdot)$ tengan el mismo signo por lo que \dot{y}_4 y $\dot{y}_4 + \sigma_b(z_1)$ tienen que tener el mismo signo, por la condición III) ($|\sigma(s)| \leq M \forall s$) aplicada a σ_b . Y asumiendo que $M_b < \frac{L_a}{2}$ es decir $b \leq \frac{a}{2} - \epsilon$ Se observa que $\dot{V}_1 < 0 \forall \dot{y}_4 > \frac{a}{2}$. Como consecuencia habrá un tiempo finito T_1 en el cual $y_4 \leq \frac{a}{2}$. Teniendo en cuenta que $y_4 = \dot{\theta}$ y $M_{n-1} \leq \frac{1}{2}L_n - \epsilon$, se puede realizar la siguiente acotación:

$$|\dot{\theta}| \leq b + \epsilon \quad (5.20)$$

Consecuentemente se obtiene que para $t \geq T_1$ $|\dot{\theta}|$ estará acotado siendo $|\dot{\theta}| \leq b + \epsilon \leq \frac{a}{2}$ por lo que la función de saturación opera en la región lineal, tal que la forma de la ecuación 5.17 es ahora:

$$u_2 = \ddot{\theta} = -\dot{\theta} - \sigma_b(z_1) \quad (5.21)$$

5.2.3.2. Con la intención de definir una frontera para θ

Se define:

$$z_1 = y_3 + \sigma_c(z_2) \quad (5.22)$$

Tal y como se define en las ecuaciones 5.12 se tiene que:

$$y_3 = \dot{\theta} + \theta \quad (5.23)$$

Derivando:

$$\dot{y}_3 = y_4 + u_2 \quad (5.24)$$

Como $y_4 = \dot{\theta}$ y estamos en un tiempo $t > T_1$ por lo que σ_a opera en la región lineal:

$$\dot{y}_3 = -\sigma_b(z_1) = -\sigma_b(y_3 + \sigma_c(z_2)) \quad (5.25)$$

Se define la función de Lyapunov.

$$V_2 = \dot{y}_3^2 \quad (5.26)$$

Derivando:

$$\dot{V}_2 = -2\dot{y}_3\sigma_b(y_3 + \sigma_c(z_2)) \quad (5.27)$$

Para que \dot{V}_2 sea negativo, se tiene que cumplir que \dot{y}_3 y $\sigma_b(z_1)$ tengan el mismo signo por lo que \dot{y}_3 y $\dot{y}_3 + \sigma_c(z_2)$ tienen que tener el mismo signo, por la condición III) ($|\sigma(s)| \leq M \forall s$) aplicada a σ_b . Y asumiendo que $M_c < \frac{L_b}{2}$ es decir $c \leq \frac{b}{2} - \epsilon$ Se observa que $\dot{V}_2 < 0 \forall \dot{y}_3 > \frac{b}{2}$. Como consecuencia habrá un tiempo finito $T_2 > T_1$ en el cual $y_3 \leq \frac{b}{2}$. Teniendo en cuenta que $y_3 = \dot{\theta} + \theta$ y $M_{n-1} = \frac{1}{2}L_n - \epsilon$, se puede realizar la siguiente acotación:

$$\left| \dot{\theta} + \theta \right| \leq c + \epsilon \quad (5.28)$$

Consecuentemente se obtiene que para $t \geq T_2$ $\left| \dot{\theta} + \theta \right|$ estará acotado

siendo $|\dot{\theta} + \theta| \leq c + \epsilon \leq \frac{b}{2}$ por lo que la función de saturación opera en la región lineal, tal que la forma de la ecuación 5.25 es ahora:

$$\dot{y}_3 = -(y_3 + \sigma_c(z_2)) = -(\dot{\theta} + \theta + \sigma_c(z_2)) \quad (5.29)$$

Si se tiene en cuenta:

$$\begin{aligned} |\dot{\theta} + \theta| &\leq c + \epsilon \\ |\dot{\theta}| &\leq b + \epsilon \\ c &\leq \frac{1}{2}b - \epsilon \end{aligned}$$

Se puede acotar θ para $t > T_2$ tal que:

$$|\theta| \leq c + 2\epsilon \quad (5.30)$$

Para $t \geq T_2$, se puede hallar θ como:

$$\theta(t) = \theta(T_2)e^{-(t-T_2)} + \int_{T_2}^t e^{-(t-\tau)} y_3(\tau) d\tau \quad (5.31)$$

si:

$$c + 2\epsilon \leq \frac{\pi}{2} - \xi \quad (5.32)$$

Para $t \geq T_2$ θ esta comprendido entre $(-\frac{\pi}{2} + \xi, \frac{\pi}{2} - \xi)$

A partir de ahora se asumirá, que ha transcurrido un tiempo finito $T_3 > T_2$ tal que $|\theta| \leq 1 \text{ rad}$ por lo que se asume que $\tan(\theta) \approx \theta$.

Si se quiere que el tiempo T_3 sea lo mas bajo posible se podría acotar mas el rango para θ seleccionando un valor pequeño de c , asi se podría suponer en todo momento el teorema de los ángulos pequeños.

5.2.3.3. Con la intención de definir una frontera para \dot{x}

Se define:

$$z_2 = y_2 + \sigma_d(z_3) \quad (5.33)$$

Según la ecuación 5.12.

$$y_2 = \dot{\theta} + 2\theta - \dot{x} \quad (5.34)$$

Derivando:

$$\dot{y}_2 = \ddot{\theta} + 2\dot{\theta} - \ddot{x} = u_2 + 2\dot{\theta} - \ddot{x} \quad (5.35)$$

Si se tiene en cuenta que se esta ante un tiempo $T_4 > T_3$:

$$\dot{y}_2 = -(2\dot{\theta} + \theta + \sigma_c(z_2)) + 2\dot{\theta} - \ddot{x} \quad (5.36)$$

Teniendo en cuenta la ecuacion 5.7 y asumiendo que para T_4 los valores de θ son pequeños y como ya se ha hecho anteriormente $r_1 \rightarrow 0$:

$$\dot{y}_2 = -\sigma_c(z_2) = -\sigma_c(y_2 + \sigma_d(z_3)) \quad (5.37)$$

Se define la siguiente ecuación de Lyapunov para estudiar el estado de y_2 :

$$V_3 = y_2^2 \quad (5.38)$$

Derivando:

$$\dot{V}_3 = -2y_2\sigma_c(y_2 + \sigma_d(z_3)) \quad (5.39)$$

Para que \dot{V}_2 sea negativo, se tiene que cumplir que \dot{y}_2 y $\sigma_c(z_2)$ tengan el mismo signo por lo que \dot{y}_2 y $\dot{y}_2 + \sigma_d(z_3)$ tienen que tener el mismo signo, por la condición III) ($|\sigma(s)| \leq M \forall s$) aplicada a σ_c . Y asumiendo que $M_d < \frac{L_c}{2}$ es decir $d \leq \frac{c}{2} - \epsilon$ Se observa que $\dot{V}_3 < 0 \forall \dot{y}_2 > \frac{c}{2}$. Como consecuencia habrá un tiempo finito $T_4 > T_3$ en el cual $y_2 \leq \frac{c}{2}$. Teniendo en cuenta que $y_2 = \dot{\theta} + 2\theta - \dot{x}$ y $M_{n-1} = \frac{1}{2}L_n - \epsilon$, se puede realizar la siguiente acotación:

$$\left| \dot{\theta} + 2\theta - \dot{x} \right| \leq d + \epsilon \quad (5.40)$$

Consecuentemente se obtiene que para $t \geq T_4$ $\left| \dot{\theta} + 2\theta - \dot{x} \right|$ estará acotado siendo $\left| \dot{\theta} + 2\theta - \dot{x} \right| \leq d + \epsilon \leq \frac{c}{2}$ por lo que la función de saturación

opera en la región lineal, tal que la forma de la ecuación 5.37 es ahora:

$$\dot{y}_2 = -(y_2 + \sigma_d(z_3)) = -(\dot{\theta} + 2\theta - \dot{x} + \sigma_d(z_3)) \quad (5.41)$$

Si se tiene en cuenta:

$$\begin{aligned} |\theta| &\leq c + 2\epsilon \\ |\dot{\theta}| &\leq b + \epsilon \\ c &\leq \frac{1}{2}b - \epsilon \\ d &\leq \frac{1}{2}c - \epsilon \end{aligned}$$

Se puede acotar \dot{x} para $t > T_4$ tal que:

$$|\dot{x}| \leq 9d + 14\epsilon \quad (5.42)$$

5.2.3.4. Con la intención de definir una frontera para x

Al ser el último paso del algoritmo de control, la función z_3 no tendrá otra función de saturación anidada por lo que directamente:

$$z_3 = y_1 \quad (5.43)$$

y_1 está definida como:

$$y_1 = \dot{\theta} + 3\theta - 3\dot{x} - x \quad (5.44)$$

Derivando

$$\dot{y}_1 = \ddot{\theta} + 3\dot{\theta} - 3\ddot{x} - \dot{x} \quad (5.45)$$

Si se tiene en cuenta que se esta ante un tiempo $T_5 > T_4$:

$$\dot{y}_1 = -(2\dot{\theta} + \theta + \dot{\theta} + 2\theta - \dot{x} + \sigma_d(z_3)) + 3\dot{\theta} - 3\ddot{x} - \dot{x} \quad (5.46)$$

Teniendo en cuenta la ecuacion 5.7 y asumiendo que para T_5 los valores de θ son pequeños y como ya se ha hecho anteriormente $r_1 \rightarrow 0$:

$$\dot{y}_1 = -\sigma_d(z_3) = -\sigma_d(y_1) \quad (5.47)$$

Se define la siguiente ecuación de Lyapunov para estudiar el estado de y_1 :

$$V_4 = y_1^2 \quad (5.48)$$

Derivando:

$$\dot{V}_4 = -2y_1\sigma_d(y_1) \quad (5.49)$$

Si se tiene en cuenta la condición I de las funciones de saturacion de Teel I: ($s\sigma_s(s) > 0 \forall s \neq 0$) la función de Lyapunov definida siempre será negativa. Por lo tanto para un un tiempo $T_5 > T_4$ se tendrá que $y_1 < d$ y la ecuación 5.47 se convierte en:

$$\dot{y}_1 = -y_1 \quad (5.50)$$

Entonces para el tiempo $t \geq T_5$ se puede acotar y_1 como:

$$y_1 < d \quad (5.51)$$

$$\left| \dot{\theta} + 3\theta - 3\dot{x} - x \right| < d \quad (5.52)$$

Si se tiene en cuenta:

$$\begin{aligned} |\theta| &\leq c + 2\epsilon \\ |\dot{\theta}| &\leq b + \epsilon \\ |\dot{x}| &\leq 9d + 14\epsilon \\ \left| \dot{\theta} + 3\theta - 3\dot{x} - x \right| &< d \\ c &\leq \frac{1}{2}b - \epsilon \\ d &\leq \frac{1}{2}c - \epsilon \end{aligned}$$

Se puede acotar x como:

$$|x| \leq 44d + 67\epsilon \quad (5.53)$$

Recopilando las desigualdades de los parámetros a, b, c, d y θ :

$$\begin{aligned} a &\geq 2b + 2\epsilon \\ |\theta| &\leq c + 2\epsilon \\ b &\geq 2c + 2\epsilon \\ c &\geq 2d + 2\epsilon \\ d &\geq \epsilon \end{aligned}$$

Despejando las ecuaciones en función de c se obtiene:

$$\begin{aligned} a &\geq 4c + 6\epsilon \\ b &\geq 2c + 2\epsilon \\ |\theta| &\leq c + 2\epsilon \\ c &\geq 2d + 2\epsilon \\ d &\geq \epsilon \end{aligned}$$

Con la elección de c se podrá acotar el valor máximo de θ de tal modo que cuanto mayor sea, mayor será el tiempo en que θ converge a 0 y por lo tanto mayor el tiempo en el que se puede aplicar el teorema de los ángulos pequeños. Por lo tanto es conveniente seleccionar un valor de c pequeño

5.2.3.5. Convergencia de $\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}$ a 0

Para valores de tiempo tal que $t > T_5$, la cadena de integradores toma la forma:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - y_2 \\ \dot{y}_3 &= -y_1 - y_2 - y_3 \\ \dot{y}_4 &= -y_1 - y_2 - y_3 - y_4\end{aligned}$$

Que se puede reescribir de la forma:

$$\dot{y} = Ay \tag{5.54}$$

Siendo la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el meotodo indirecto de Lyapunov, dado que todos los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa, se puede concluir que el sistema es asintoticamente estable, y por tanto $\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}$ convergerán a 0

5.3. Simulaciones

Para probar la veracidad del modelo de control anterior se realizan unas simulaciones en simulink (MATLAB), software elegido para realizar las correspondientes simulaciones. El modelo dinámico y el algoritmo de control se implementa en simulink mediante el lenguaje de bloques disponibles como se muestra en la siguiente figura.

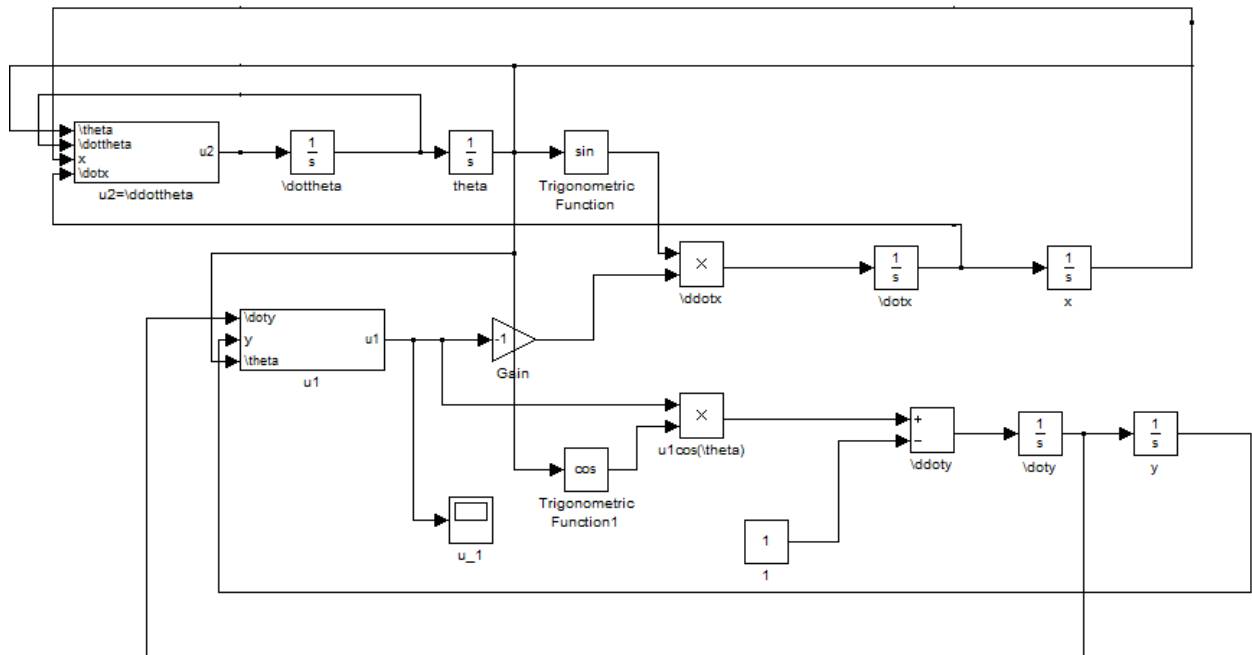


Figura 5.3: Modelo de PVTOL en smulink.

El bloque que tiene como salida la entrada u_1 está definido como se muestra en la siguiente figura.

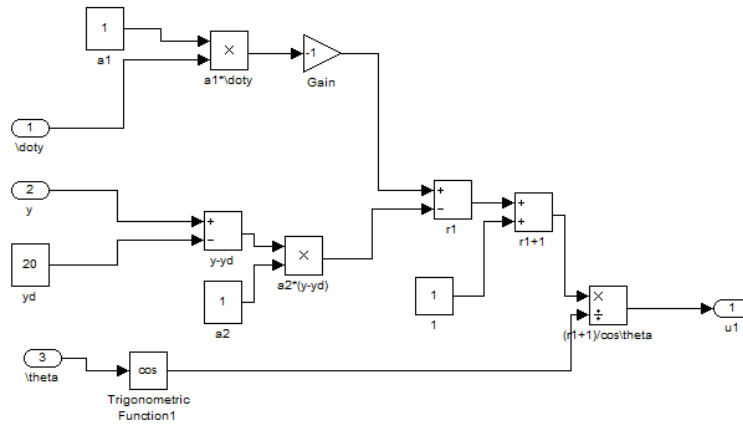


Figura 5.4: Modelo de PVTOL en smulink ($u1$).

Asimismo el bloque de la entrada u_2 queda definido como muestra la captura de abajo.

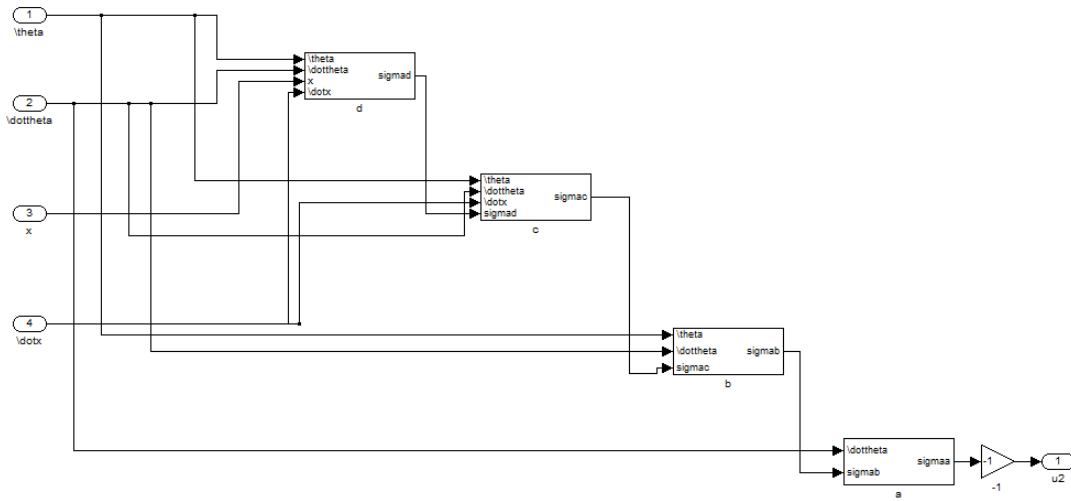


Figura 5.5: Modelo de PVTOL en smulink ($u2$).

Donde los bloques de las funciones de saturación toman la forma:

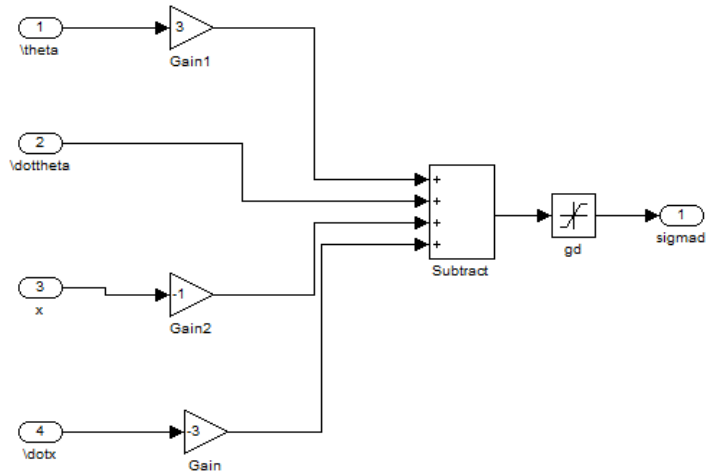


Figura 5.6: Modelo de PVTOL en smulink (funciones de saturación).

Se han procedido a realizar 4 simulaciones, para la primera de ellas el valor de las funciones de saturación es:

$$\begin{aligned} d &= 0.5 \\ c &= 1.001 \\ b &= 2.003 \\ d &= 4.007 \end{aligned}$$

Los valores de las funciones de saturación son consecuencia de querer limitar a $|\theta| \leq 1$ rad en cuanto la función de saturación σ_b actúe en la región lineal.

El valor de las constantes para el control de linealización mediante realimentación : $a_1=5$, $a_2=5$.

La primera simulación toma los siguientes valores iniciales:

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ y &= 10 \\ y_d &= 20 \\ \theta &= 0.5\end{aligned}$$

En la primera imagen se observa como la altura deseada se alcanza mas o menos a los 3 segundos, asi como se ha deseado, la altura será la primera variable en estabilizarse.

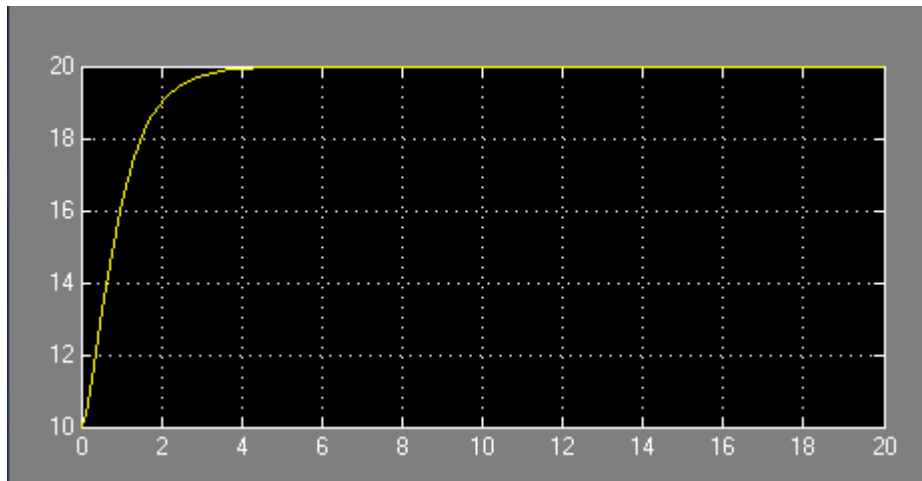


Figura 5.7: Evolución de la altura del PVTOL

El ángulo θ será la siguiente variable en estabilizarse. La variable de estado consigue llegar a 0 .

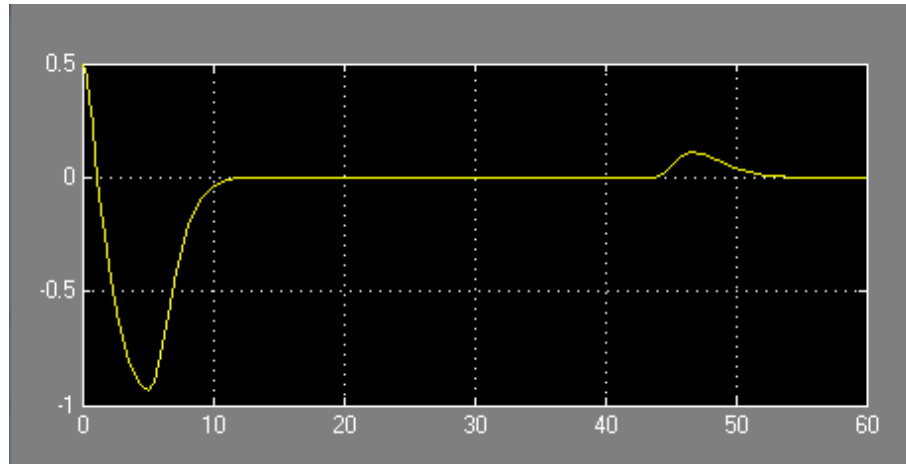


Figura 5.8: Evolución de θ del PVTOL

Por último, la variable de estado x consigue llegar al valor 0. Por lo que el control de las tres variables de estado, se cumple tal y como se había propuesto en la teoría.

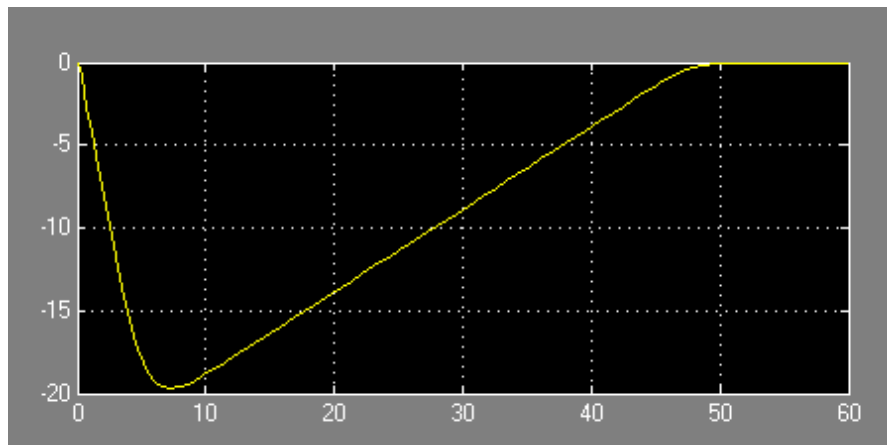


Figura 5.9: Evolución de x PVTOL

Se puede observar como x , es totalmente dependiente de θ en el aspecto que x no empieza a crecer hasta que θ no lo hace (cumple el modelo). Comparando la gráfica de θ con la gráfica de abajo se ve como ahora θ es la que depende de u_2 , cuando u_2 valga 0, θ se mantendrá constante debido a que $u_2 = \ddot{\theta}$

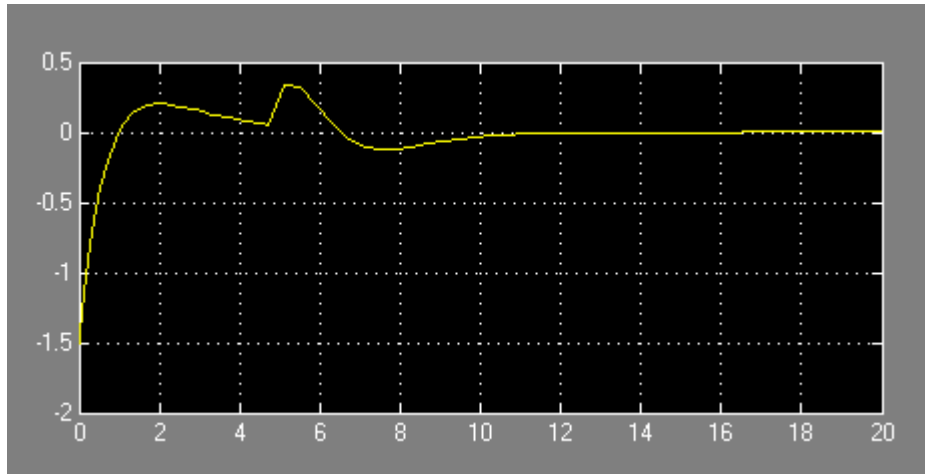


Figura 5.10: Evolución de la entrada u_2

x evoluciona a 0 ya que para un tiempo finito T la cadena de integradores tomará la forma:

$$\dot{y}_1 = -y_1$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - y_2$$

$$\dot{y}_3 = -y_1 - y_2 - y_3$$

$$\dot{y}_4 = -y_1 - y_2 - y_3 - y_4$$

Y como ya se ha demostrado antes, es asintóticamente estable, por eso

\dot{x} y $x \rightarrow 0$.

La segunda simulación, se hace con los mismos valores iniciales que en la primera. Se divide entre 10 el valor de los límites de las funciones de saturación, con la intención de que u_2 , pueda tomar valores mas pequeños, y por lo tanto los estados θ y x se estabilicen en un tiempo mayor a la anterior simulación.

A continuación se puede ver como al no cambiar el valor de las constantes de la linealización por realimentación, la altura alcanza la altura deseada en el mismo tiempo.

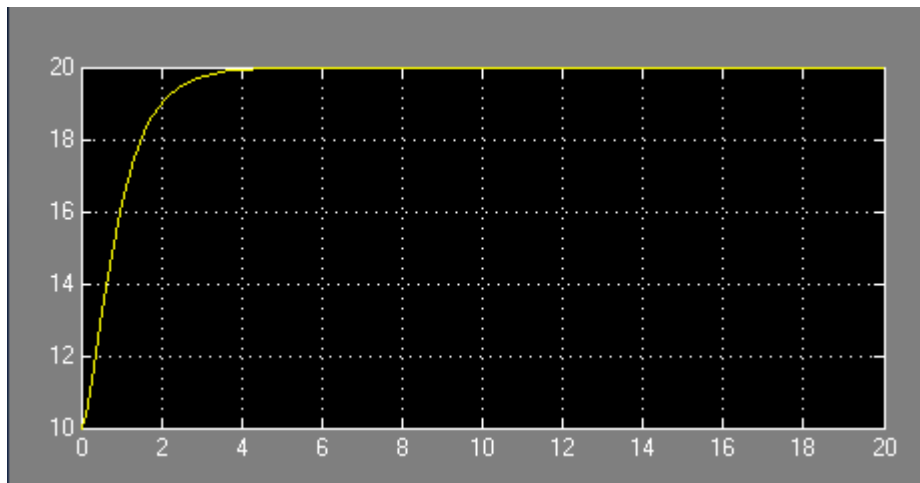


Figura 5.11: Evolución de la altura del PVTOL

En las dos siguientes imagenes se observa como los estados θ y x convergen a 0 mucho después que en la simulación anterior Debido a que la acotación de $\dot{\theta}$, θ , \dot{x} y x tiene unos valores inferiores respecto a los valores de acotación de la simulación previa .

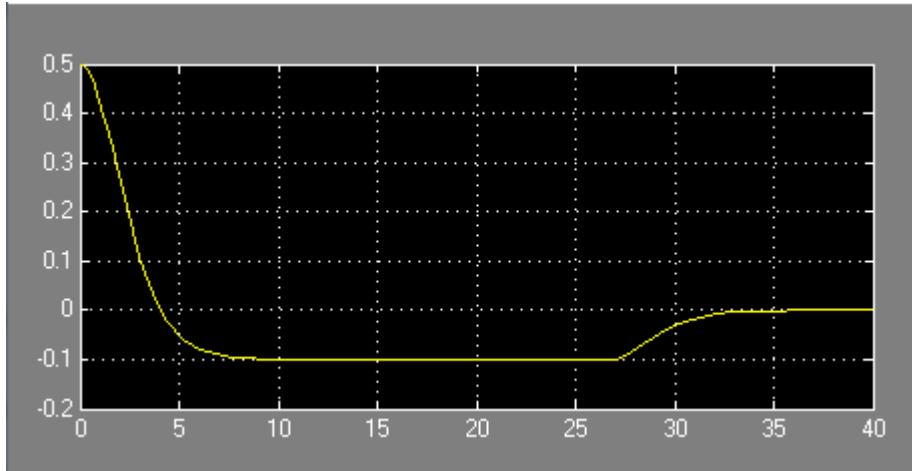


Figura 5.12: Evolución del ángulo θ del PVTOL

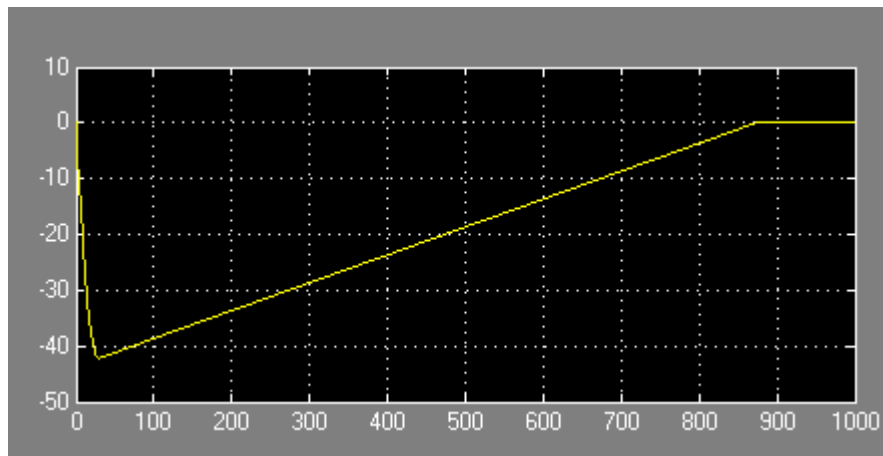


Figura 5.13: Evolución del movimiento horizontal del PVTOL

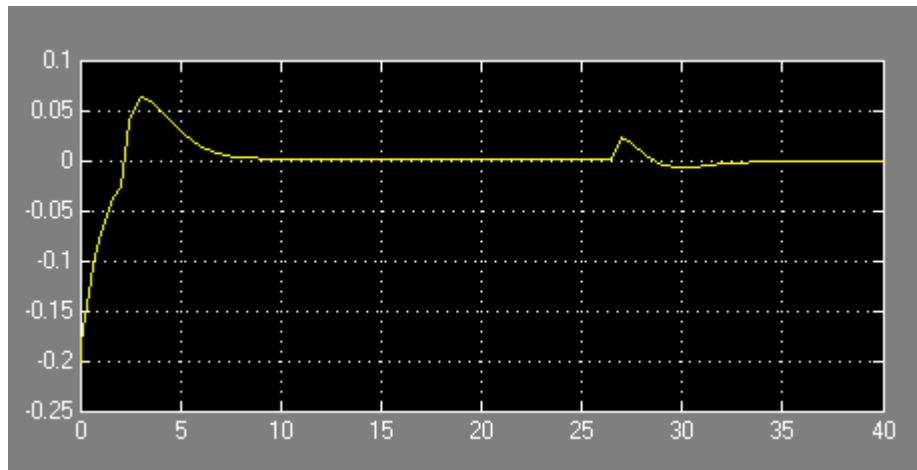


Figura 5.14: Evolución de la entrada u_2 del modelo del PVTOL

Para la tercera simulación, se han escogido para las funciones de saturación y para las condiciones iniciales los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 d &= 0.5 \\
 c &= 1.001 \\
 b &= 2.003 \\
 d &= 4.007
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= 5 \\
 y &= 0 \\
 y_d &= 20 \\
 \theta &= -0.5
 \end{aligned}$$

Estos son los resultados:

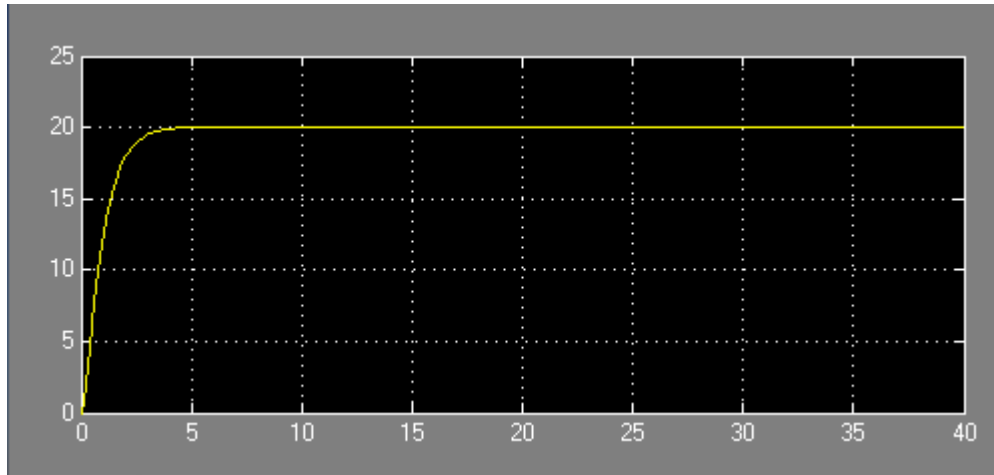


Figura 5.15: Evolución de la altura del modelo del PVTOL

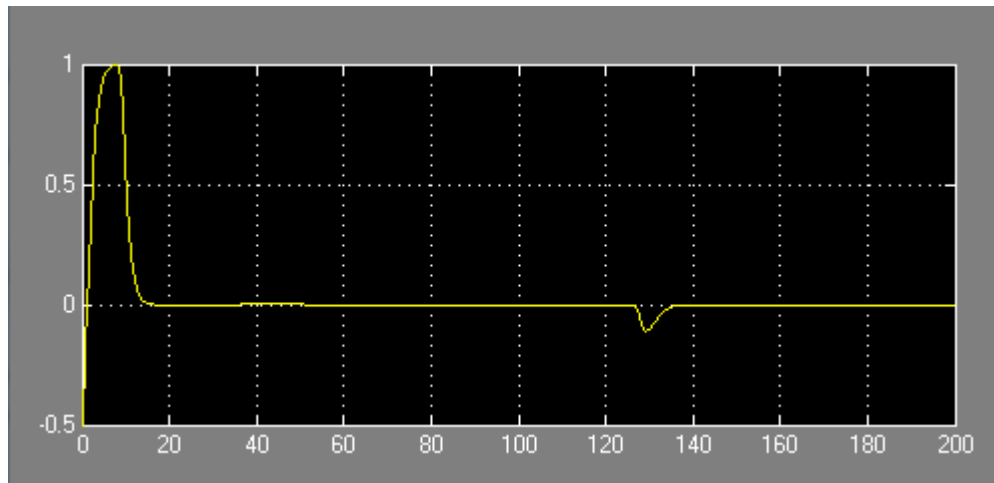


Figura 5.16: Evolución del ángulo θ en el modelo PVTOL

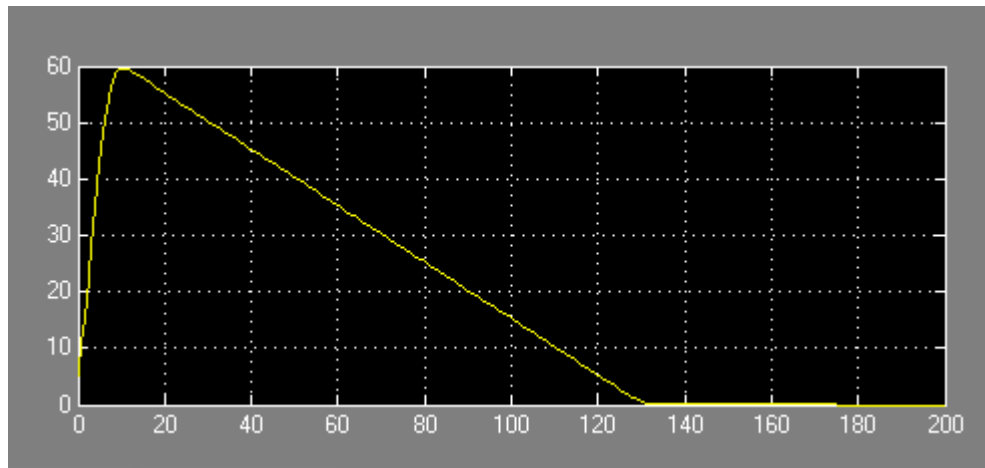


Figura 5.17: Evolución del movimiento horizontal del modelo del PVTOL

Para la última simulación se han elegido los mismos valores iniciales que antes, pero sustituyendo los valores de las condiciones iniciales por:

$$d=0.8$$

$$c=1.7$$

$$b=3.5$$

$$d=7.1$$

Los resultados son:

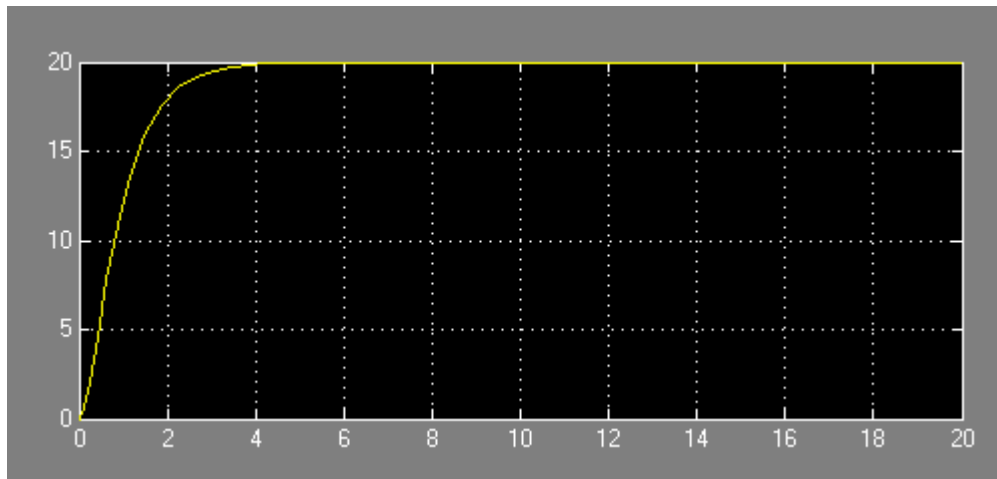


Figura 5.18: Evolución de la altura del modelo del PVTOL

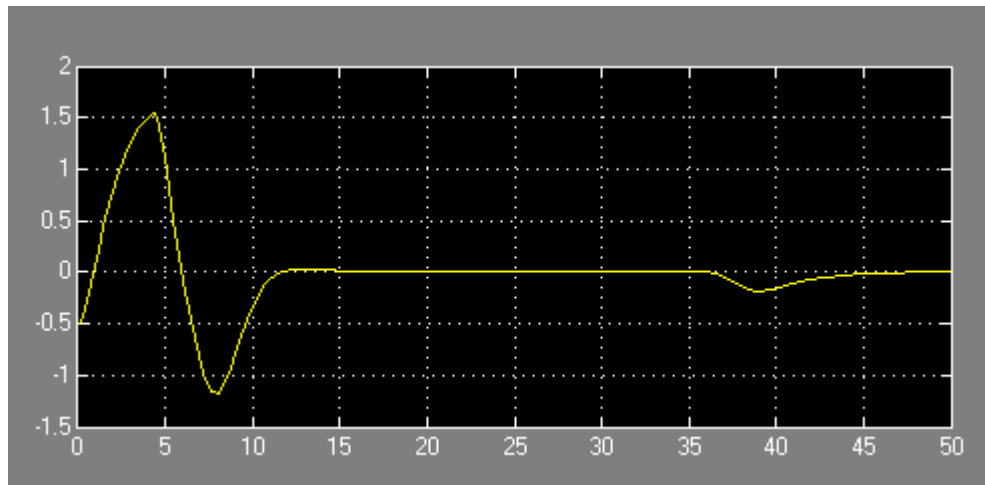


Figura 5.19: Evolución de la variable θ del modelo del PVTOL

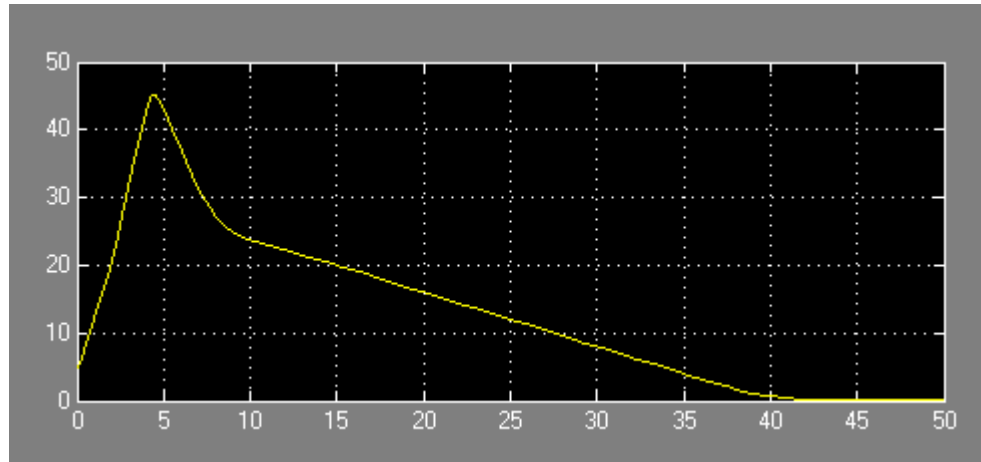


Figura 5.20: Evolución del movimiento horizontal del modelo del PVTOL

Los picos que surgen en θ y que provocan sus cambios son debidos a que alguna de las funciones de saturación pasa a actuar en estado lineal. Llama mucho la atención el pico que surge cuando θ lleva un tiempo cuyo valor es 0, este pico se debe a que la función de saturación σ_d abandona el estado de saturación y accede a la región lineal.

Todos tipos de control estudiados para el control del PTOL, utilizan funciones de saturación, ya sea con un conjunto de funciones, o funciones de una forma separada. El control propuesto en PALOMINO A., CASTILLO P., FANTONI I., LOZANO R. and PÉCARD C., “Control strategy using vision for the stabilization of an experimental PVTOL aircraft setup”, IEEE Transactions on Control Systems and Technology, es uno de los metodos que ha sido probado en una plataforma experimenta. En este método la dinámica deseada para la altitud y del vehículo es primeramente diseñada mediante la entrada u_1 . Mediante la aplicación de u_1 se deduce una expresión para el movimiento horizontal x . Tomando $\tan(\theta)$ como la entrada artificial del

movimiento horizontal. Se organiza de modo que la entrada converja a la entrada ideal de modo que la dinamica deseada , sea igual a la dinamica del movimiento horizontal. Se demuestra que el estado estacionario del sistema esta acotado y converge a un valor constante que corresponde a un vuelo estacionario.

La técnica propuesta en FANTONI I., LOZANO R. and PALOMINO A., “Global stabilizing control design for the PVTOL aircraft using saturation functions on the inputs”, European Control Conference ECC’03, September 2003. De manera similar al caso anterior, primero, se estabiliza la altitud de la aeronave, después se estabilizan la posición horizontal y el ángulo de balanceo (roll). La técnica de control, se basa en el uso de funciones de saturación lineales que delimitan la entrada para el control de empuje, y el momento de balanceo mediante límites de saturación arbitrarios.

En ZAVALA A., FANTONI I. and LOZANO R., “Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded inputs”, International Journal of Control, vol. 76, no. 18. También considera las entradas u_1 y u_2 de control acotadas, teniendo en cuenta el carácter positivo de u_1 . La convergencia y estabilidad del sistema, se prueba mediante la teoría de Lyapunov.

En SÁNCHEZ A., CASTILLO P., ESCARENO J., ROMERO H. and LOZANO R., “Simple real-time control strategy to stabilize the PVTOL aircraft using bounded inputs”, European Control Conference, 2007, SÁNCHEZ A., GARCIA P., CASTILLO P. and LOZANO R., “Simple real-time stabilization of a VTOL aircraft with bounded signals”, AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 31, no. 4, SANAHUJA G., CASTILLO P. and SÁNCHEZ A., “Stabilization of n integrators in cascade with bounded input with experimental application to a VTOL laboratory system”, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009. Se utilizan técnicas de funciones de saturación separadas, también tienen en cuenta, estados de saturación

separados. Estos artículos muestran que los controladores de estados de saturación separados, son más eficientes que los controladores de saturación embebida porque cada ganancia, solo afecta a un estado y se puede ser más eficiente en la sintonía para las ganancias en las aplicaciones reales.

Capítulo 6

Diseño, modelado y Control de un mini-UAV con dos rotores:VTOL

6.1. Introducción

El desarrollo de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) ha aumentado durante el transcurso de los últimos años, debido a la amplia gama de aplicaciones, ya sean militares o civiles. En el campo militar, existen aplicaciones como el kit de supervivencia que entregan a las tropas que posee un enlace de comunicación con una estación terrestre para el intercambio de información, evaluación del riesgo de zonas sensibles o evaluación de daños, entre otros. En el ámbito civil, el desarrollo no ha surgido a la misma velocidad. Sin embargo, podemos encontrar aplicaciones en las ciencias naturales como el estudio de la volcánica, monitorización del clima y la cartografía, evaluación de desastres, tales como la detección de incendios, búsqueda y rescate , suministros de entrega; vigilancia de áreas sensibles, como los puertos, fronteras, centrales eléctricas, ferrocarriles y oleoductos. El desarrollo de este tipo de vehículos representa un proyecto multi-disciplinario , que comprende áreas

como la mecánica, la electrónica, el control automático y la aeronáutica.

Una de las últimas tendencias en el dominio de los UAV es el desarrollo de mini vehículos aéreos, con especial interés en aquellos de despegue y aterrizaje vertical. Estas características son requeridas, cuando no hay una pista de despegue. Por otra parte, los mini UAV son apropiados para operaciones especiales como proporcionar la perspectiva visual de los lugares ciegos. Con la disminución del tamaño de los UAV las especificaciones deseadas son más difíciles de satisfacer.

Los Mini VTOL UAV se han tratado por varios autores, proponiendo distintas configuraciones y estrategias de control. En esta sección se presenta el modelado y el control de un mini UAV de dos rotores que pretende realizar un vuelo de forma autónoma.

La estrategia de control que se propone en este capítulo es el uso de la posición angular de la aeronave para controlar el desplazamiento horizontal.

6.2. Modelo dinámico

En esta sección se presentan de manera detallada el modelado dinámico de un VTOL de dos rotores mediante la formulación de Euler-Lagrange. Los torques requeridos para controlar el vehículo aéreo en vuelo, son obtenidos mediante los rotores y las superficies de control. La altitud del VTOL, es regulada incrementando o decrementando el empuje de las hélices. El ángulo con la horizontal (roll) se obtiene por la diferencia de empuje. Como las superficies de control siguen la estela de las hélices, la deflexión de los elevadores y alerones proporcionan los ángulos pitch y yaw respectivamente, como se muestra en la Figura 6.1

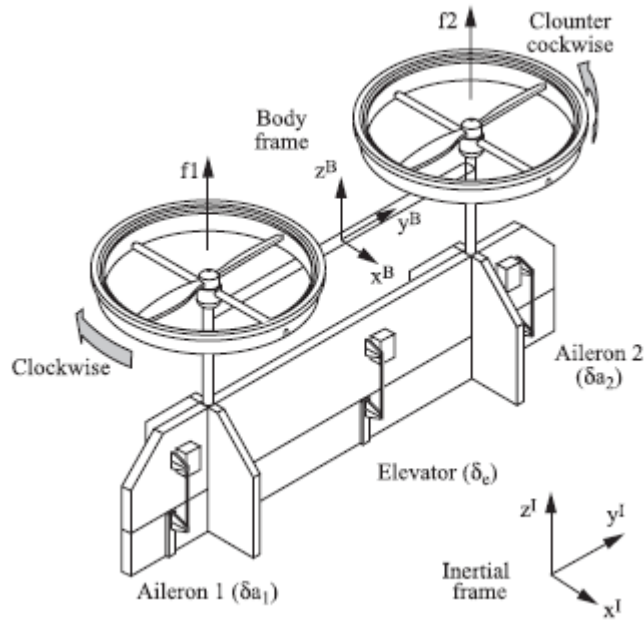


Figura 6.1: Diagrama que muestra el marco de referencia y fuerzas

6.2.1. Cinemática

- I denota el sistema inercial estacionario de referencia con el origen en la superficie de la tierra. Este marco de referencia esta asociado con el vector $[e_x, e_y, e_z]^T$.

- B denota el marco de referencia fijo en el centro de gravedad del vehículo. Este marco esta asociado con el vector $[e_1^B, e_2^B, e_3^B]^T$.

- $q = (r, \eta)^T$ denota el vector generalizado de coordenadas donde $r = (x, y, z)^T$ son las coordenadas traslacionales del avión y $(\phi, \theta, \psi)^T$ describen la orientación angular, con los ángulos de Euler roll pitch y yaw.

- R es la matriz de rotación "ZYX", se gira primero el angulo yaw, después pitch y finalmente roll.

$$R^{B \rightarrow I} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - c_\phi s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & c_\theta s_\phi \\ s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

6.2.2. Dinámica

La energía cinética total del avión es:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^T \dot{r} + \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega \quad (6.2)$$

Donde m denota la masa, $\Omega = [u, v, w]$ denota la velocidad angular, I , representa la matriz de inercia, que al ser el UAV estudiado un vehículo simétrico, solo tiene elementos en la diagonal, por lo tanto I puede ser descrita como:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

La velocidad angular puede ser expresada en función de las coordenadas de Euler al igual que en el tema 3 desarrollado en este proyecto:

$$\Omega = W_\eta \dot{\eta} \quad (6.3)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}s_\theta \\ \dot{\theta}c_\phi + \dot{\phi}c_\theta s_\phi \\ \dot{\phi}c_\theta c_\phi - \dot{\theta}s_\phi \end{bmatrix}$$

Definiendo $J(\eta) = W_\eta^T I W_\eta$, se puede reescribir la energía cinética como:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^T \dot{r} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J(\eta) \dot{\eta} \quad (6.5)$$

La energía potencial se describe como:

$$E_p = mgz \quad (6.6)$$

Por lo tanto se tiene que la lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^T \dot{r} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T I(\eta) \dot{\eta} - mgz \quad (6.7)$$

Aplicando la formulación de Euler-Lagrange se obtiene el modelo dinámico para el vehículo:

$$m\ddot{r} + mge_z = F^I$$

$$J(\eta)\ddot{\eta} + \dot{J}(\eta)\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J(\eta) \dot{\eta}) = \tau \quad (6.8)$$

Donde $F^I = R^{B \rightarrow I} F^B$ es el vector fuerza en terminos del sistema inercial de coordenadas , y τ es el momento generalizado.

Definiendo ahora la matriz de Inercia, y la matriz de Coriolis:

$$\begin{aligned} M(\eta) &= J(\eta) \\ M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} &= \tau \end{aligned} \quad (6.9)$$

Se puede redefinir el modelo dinámico como:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} + mge_z &= F^I \\ M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} &= \tau \end{aligned} \quad (6.10)$$

Modelo que tiene las siguientes propiedades:

-Propiedad 1 : $M(\eta)$ es una matriz simétrica positiva.

-Propiedad 2: $\dot{M}(\eta) - 2C(\eta, \dot{\eta})$ es una matriz oblicua positiva.

6.2.2.1. Fuerzas que actuan en el vehículo

El vector de empuje surge cuando las helices rotan para poder regular la altitud. Tenemos dos empujes, uno de cada rotor:

$$\begin{aligned} F_1^B &= (0, 0, f_1)^T \\ F_2^B &= (0, 0, f_2)^T \end{aligned} \quad (6.11)$$

Con :

$$f_i = \frac{1}{2}K_i w_i^2. \quad (6.12)$$

Donde K_i es una constante que contiene la densidad del aire , area del disco de las hélices,número de palas,longitud de la cuerda de las palas, coeficiente de sustentación. El vector total de empuje expresado en el sistema de referencia fijo a tierra es:

$$E_e^I = \begin{bmatrix} -e s_\theta \\ e s_\phi c_\theta \\ e c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Donde $E = (f_1 + f_2)$. Además las palas del rotor y el combustible produce una fuerza de arrastre dada por:

$$\begin{aligned} F_{d1}^I &= (0, f_{d1}, 0)^T \\ F_{d2}^I &= (0, f_{d2}, 0)^T \end{aligned} \quad (6.14)$$

Con :

$$f_{di} = \frac{1}{2}K_{d_i} w_{d_i}^2. \quad (6.15)$$

Donde K_{d_i} es una constante que contiene la densidad del aire , area del disco de las hélices,número de palas,longitud de la cuerda de las palas, coeficiente de sustentación.

El vector de peso aplicado al centro de gravedad es:

$$W^I = (0 \ 0 \ -mg)^T \quad (6.16)$$

Las fuerzas proporcionadas por los elevadores y los alerones respectivamente son:

$$\begin{aligned} F_e^B &= (0, -f_e, 0)^T \\ F_{a1}^B &= (0, -f_{a1}, 0)^T \\ F_{a2}^B &= (0, -f_{a2}, 0)^T \end{aligned} \quad (6.17)$$

Con:

$$\begin{aligned} f_e^B &= \frac{1}{2} \rho S V_s^2 C l_e \\ f_{ai}^B &= \frac{1}{2} \rho S V_s^2 C l_a \end{aligned} \quad (6.18)$$

Donde: V_s es el flujo de aire, S el area del ala , $C l_e$ y $C l_a$ son coecifientes aerodinámicos de los elevadores y alerones respectivamente. Estos coecifientes estan descritos por:

$$\begin{aligned} C l_e &= C l_\alpha \alpha_s + C l_{\delta_e} \delta_e \\ C l_a &= C l_\alpha \alpha_s + C l_{\delta_a} \delta_a \end{aligned} \quad (6.19)$$

Siendo $C l_\alpha$ y $C l_\delta$ obtenidos de la curva de sustentación de un perfil aerodinámico con plano simétrico.

Considerando el perfil operacional VTOL, se puede asumir las siguientes propuestas.

-El ángulo de ataque α se descuida porque la velocidad del flujo es normal a la velocidad del vehículo.

-La superficie aerodinámica del vehículo, esta sumergida en su propio flujo de aire.

-Las fuerzas de arrastre son muy pequeñas en comparación con las fuerzas de sustentación y empuje.

-El vector de flujo de aire V_s coincide con la línea de elevación cero de la superficie de sustentación simétrica, es decir, no dispone de sustentación, lo que implica que las fuerzas aerodinámicas sólo dependen de la deflexión de las superficies de control.

6.2.2.2. Momentos que actúan en el vehículo

El vector total τ aplicado en el cuerpo, está compuesto de tres torques ver Figura 6.2. -El torque que proporcionan los actuadores es:

$$\tau_c = \sum_{i=1}^2 L_{ri}^B \times F_i^B + L_c \times F_e^B + \sum_{i=1}^2 L_{ai}^B \times F_{ai}^B \quad (6.20)$$

Con $L_{r1} = (0, -l, 0)^T$ $L_{r2} = (0, l, 0)^T$ $L_e = (0, -l_c, 0)^T$ $L_{a1} = (0, -l, 0)^T$ $L_{a2} = (0, l, 0)^T$ donde l_x representa la distancia del centro de gravedad a los rotores, elevadores y alerones respectivamente. Formulando la ecuación anterior

de forma matricial, se obtiene:

$$\tau_g = - \begin{bmatrix} l(f_2 - f_1) \\ l_e f_e \\ l(f_{a1} + f_{a2}) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

El par giroscópico generado por las helices rotatorias se modela como:

$$\tau_c = - \sum_{i=1}^2 I_r (\Omega \times w_{r1}) = I_r \begin{bmatrix} q(-w_{r1} + w_{r2}) \\ p(w_{r1} - w_{r2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Donde I_r es el momento de inercia de las hélices y w_r su velocidad angular. El par giroscópico es atenuado debido a dos factores:

- Los rotores giran en sentido opuesto.
- El balanceo del vehículo amortigua la velocidad angular del vehículo.

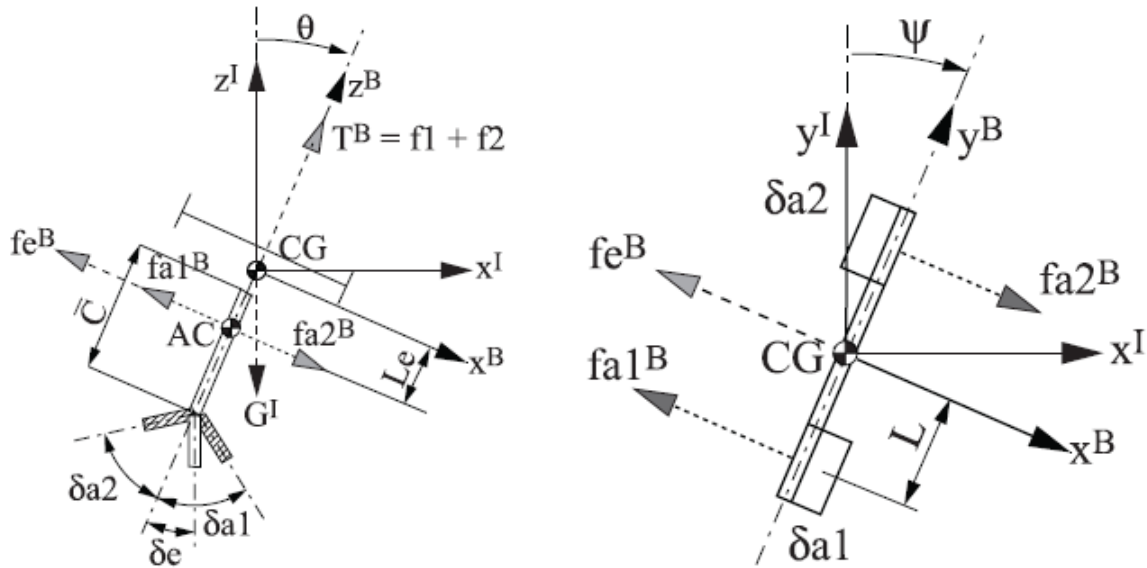


Figura 6.2: Esquema que muestra las fuerzas aplicadas en el vehículo

El par debido a la fuerza de arrastre de la hélice en el aire puede ser escrito como:

$$\tau_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l(f_{d2} - f_{d1}) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

El par de arrastre se reduce por:

- Las rotaciones opuestas de los rotores.
- Pequeño diametro de giro de las hélices.

6.2.3. Estrategia de control

6.2.3.1. Modelo para el analisis de control

Despejando y substituyendo \ddot{r} de la ecuacion 6.8, se puede obtener un modelo para poder realizar el control de una forma mas fácil:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -E \sin(\theta) \\ E \sin(\phi) \cos(\theta) \\ E \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau = \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix}$$

Donde solo se ha tenido en cuenta la fuerza de empuje y el parproducido por los actuadores.

Al igual que se hizo en el quadcopter se van a reescribir las ecuaciones para dejarlas listas para aplicar el algoritmo de control. Reescribiendo la segunda ecuación del modelo 6.24.

$$M(\eta)\ddot{\eta} = \tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \quad (6.25)$$

Se propone el mismo cambio de variable que antes.

$$\tilde{\tau} = M^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}) \quad (6.26)$$

Donde $\tilde{\tau} = \ddot{\eta}$ se define como:

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_\phi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\psi \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Rescribiendo las ecuaciones 6.24 obtenemos el modelo final, listo para aplicar el control:

$$m\ddot{x} = -Es_\theta \quad (6.28)$$

$$m\ddot{y} = Ec_\theta s_\phi \quad (6.29)$$

$$m\ddot{z} = Ec_\theta c_\phi - mg \quad (6.30)$$

Siendo E la fuerza total de empuje que ejercen los dos rotores

$$\tau = M\tilde{\tau} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \quad (6.31)$$

Con $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_\phi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\psi]^T$ quedando el modelo rotacional:

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (6.32)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \quad (6.33)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi \quad (6.34)$$

Donde x e y son las coordenadas del plano horizontal, z es la posición vertical, ψ es el ángulo yaw alrededor del eje- z . θ es el ángulo pitch alrededor del (nuevo) eje- y , y ϕ es el ángulo roll alrededor del nuevo eje- x . Las entradas de control serían el empuje (e) y los momentos angulares sobre los nuevos ejes $\tilde{\tau}_\phi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\psi$ que están relacionados con los momentos generalizados $\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$.

6.2.4. Estrategia de control

En esta estrategia, la posición y velocidad (lineales) se obtienen mediante la modulación de la actitud para cerrar los bucles de los errores de posición y velocidad.

6.2.4.1. Control de la altitud y ángulo Yaw

Del modelo anterior se obtiene que la altitud z se puede estabilizar utilizando la siguiente entrada de control de linealización por realimentación:

$$E = \frac{r_1 + mg}{\cos\phi\cos\theta} \quad (6.35)$$

Siendo E la entrada del sistema linealizado:

$$r_1 = -k_{v_z}\dot{z} - k_{p_z}(z - z_d) \quad (6.36)$$

Donde K_v y $K_p > 0$ y z_d es la altura deseada. De la ecuación 6.35 que la región de estabilidad del lazo cerrado está acotada para: $-\frac{\pi}{2} < \phi, \theta < \frac{\pi}{2}$. Este intervalo es totalmente satisfactorio, en el sentido de que el vuelo de un avión VTOL siempre lo cumplirá. Las ganancias, se eligen de tal manera que lo primero en estabilizarse sea \ddot{z} después convergerán \ddot{x} , $e \ddot{y}$.

Para el control del ángulo Yaw, la entrada de control por realimentación será:

$$\tilde{\tau}_\psi = -k_{\tau_{\psi_1}}\dot{\psi} - k_{\tau_{\psi_2}}(\psi - \psi_d) \quad (6.37)$$

Donde $k_{\tau_{\psi_1}}$ y $k_{\tau_{\psi_2}} > 0$ y ψ_d es la altura deseada. Introduciendo las ecuaciones, el modelo queda:

$$m\ddot{x} = (r_1 + mg)\frac{\tan\theta}{\cos\phi} \quad (6.38)$$

$$m\ddot{y} = -(r_1 + mg)\tan\phi \quad (6.39)$$

$$m\ddot{z} = -k_{v_z}\dot{z} - k_{p_z}(z - z_d) \quad (6.40)$$

$$m\ddot{\psi} = -k_{\tau_{\psi_1}}\dot{\psi} - k_{\tau_{\psi_2}}(\psi - \psi_d) \quad (6.41)$$

6.2.4.2. Control de y del ángulo roll

En esta sección se determina la entrada τ_ϕ para que y y ϕ puedan converger a 0. Se asume que $\psi_d = 0$ y por lo tanto $\psi \rightarrow 0$. Para el control tanto de y como del ángulo roll se usará una estrategia basada en funciones de saturación. No se detallará tanto como en el control del PVTOL. Asumiendo que tras un tiempo finito, ϕ estará en el intervalo $-1 \text{ rad} \leq \phi \leq 1 \text{ rad}$. Se tiene que para ese tiempo finito (t_1) $|\tan\phi - \phi| < 0.54$. Por lo que se aproxima $\phi = \tan\phi$. Teniendo en cuenta que $r_1 \rightarrow 0$. Se puede escribir el subsistema (y, ϕ) como:

$$\ddot{y} = -g\phi \quad (6.42)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (6.43)$$

Por lo desarrollado en el control del PVTOL, se sabe que la entrada:

$$\tilde{\tau}_\phi = -\sigma_a(\dot{\phi} + \sigma_b(\phi + \dot{\phi} + \sigma_c(2\phi + \dot{\phi} - \frac{\dot{y}}{g} + \sigma_d(\dot{\phi} + 3\phi - \frac{3\dot{y}}{g} - \frac{y}{g})))) \quad (6.44)$$

Convierte al sistema en lazo cerrado en asintoticamente estable y además $\phi, \dot{\phi}, y, \dot{y}$ convergen a cero.

6.2.4.3. Control de x y del ángulo pitch

Asumiendo que para un tiempo finito $t_2 > t_1$, $\phi \approx 0$ se puede escribir el subsistema (x, θ) como :

$$\ddot{x} = g\theta \quad (6.45)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \quad (6.46)$$

Definiendo la entrada de control como:

$$\tilde{\tau}_\theta = -\sigma_1(\dot{\theta} + \sigma_2(\theta + \dot{\theta} + \sigma_3(2\theta + \dot{\theta} + \frac{\dot{x}}{g} + \sigma_4(\dot{\theta} + 3\theta + \frac{3\dot{x}}{g} + \frac{x}{g})))) \quad (6.47)$$

Se tendrá que el sistema en lazo cerrado en asintoticamente estable y además $\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}$ convergen a cero.

6.3. simulaciones

Al igual que para el control del PVTOL, se mostrarán unas simulaciones realizadas mediante simulink, para mostrar el buen funcionamiento del algoritmo de control. El modelo del VTOL expresado mediante lenguaje de bloques es el siguiente:

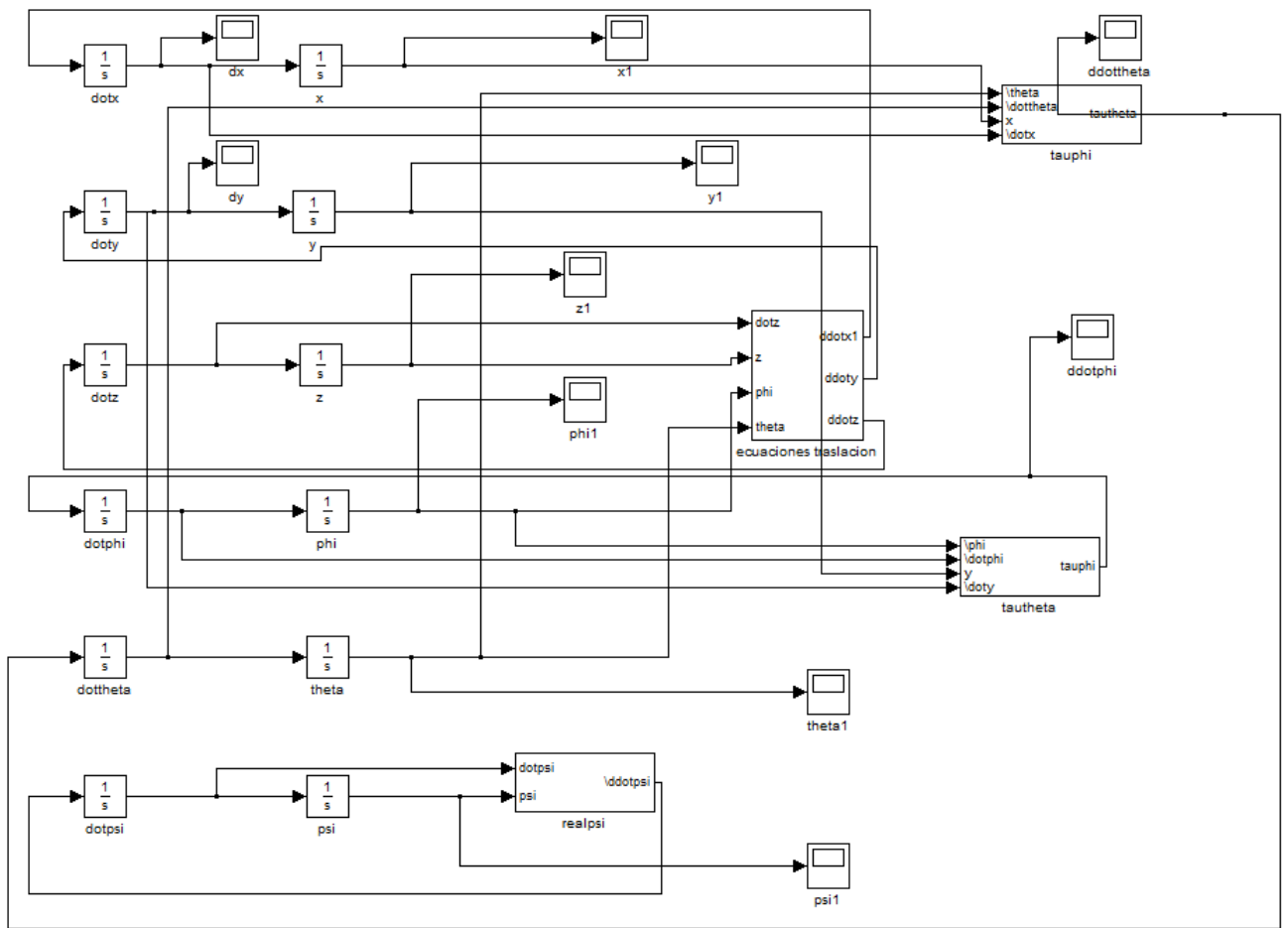


Figura 6.3: Modelo del VTOL en simulink.

El bloque de ecuaciones de traslación ofrece como salidas $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$:

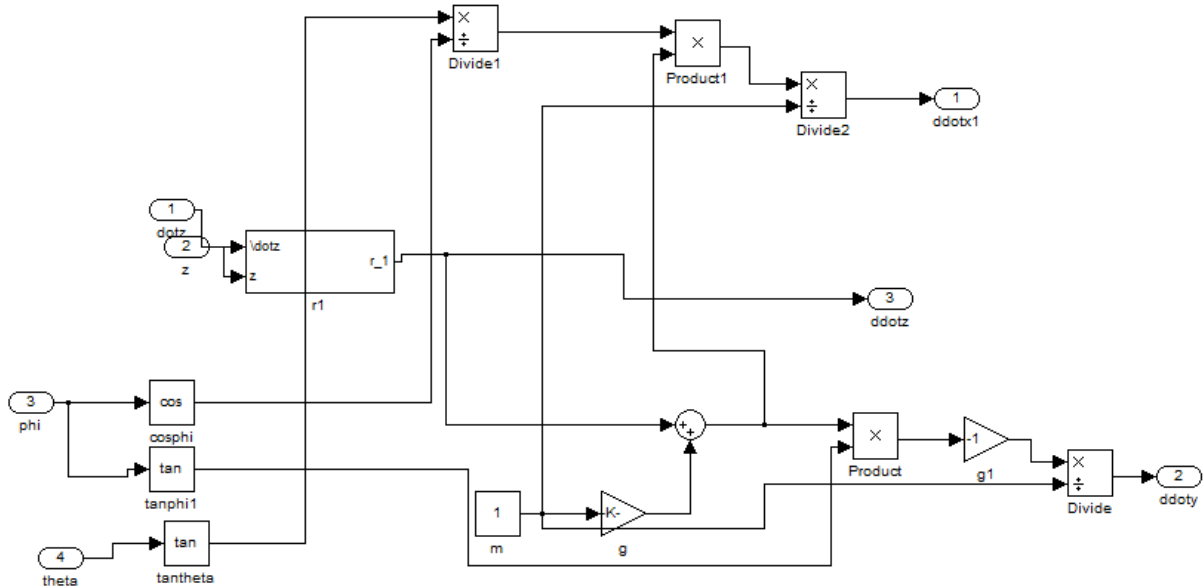


Figura 6.4: Ecuaciones de traslación en simulink.

Donde el subsistema r_1 representa el control de linealización mediante realimentación para la altitud.

El bloque realpsi situado en la parte inferior de la imagen 6.3 representa una entrada de control de linealización por realimentación para el ángulo Yaw. Como se ve en la citada imagen el ángulo ψ es un subsistema independiente de otras variables del modelo.

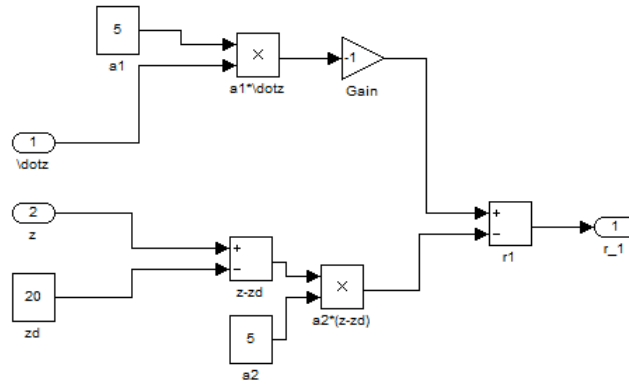


Figura 6.5: Linealización mediante realimentación para altitud.

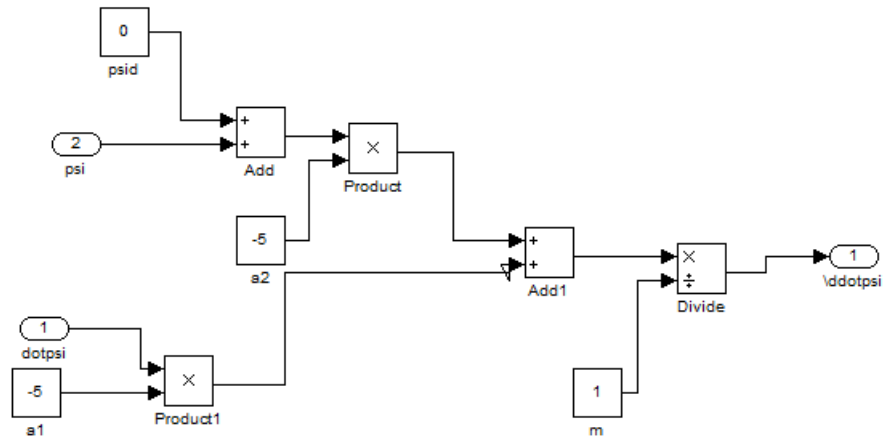


Figura 6.6: Linealización mediante realimentación para el ángulo Yaw.

Los bloques tauphi y tautheta, son los encargados de realizar el control mediante funciones de saturación de los subsistemas $(y-\phi)$ y $(x-\theta)$ respectivamente

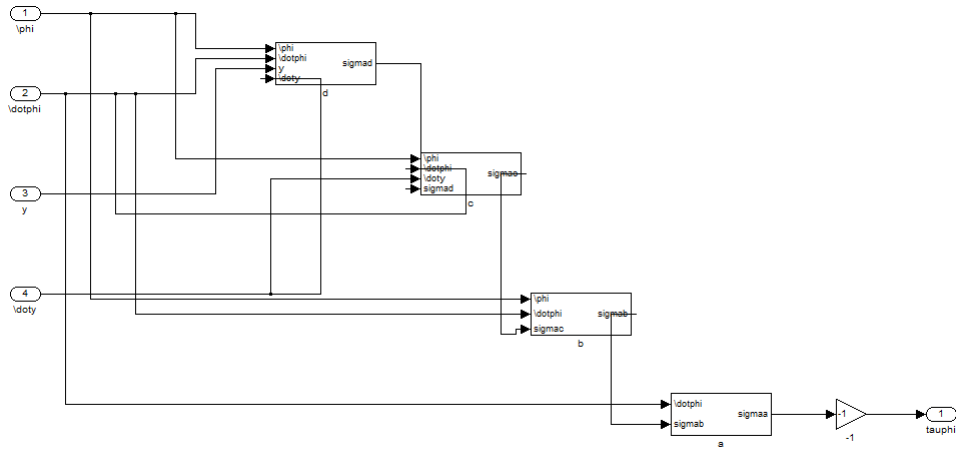


Figura 6.7: Control del subsistema $y-\phi$.

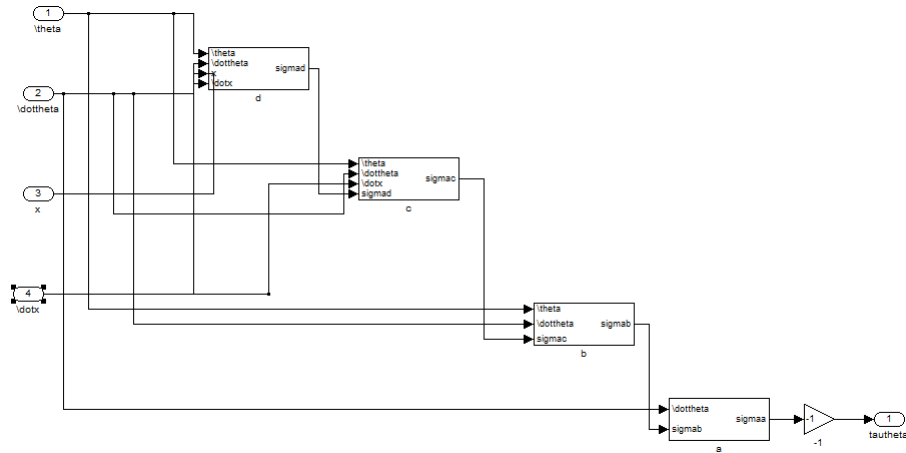


Figura 6.8: Control del subsistema $x-\theta$.

En los dos subsistemas anteriores, las funciones de saturación tienen el siguiente aspecto.

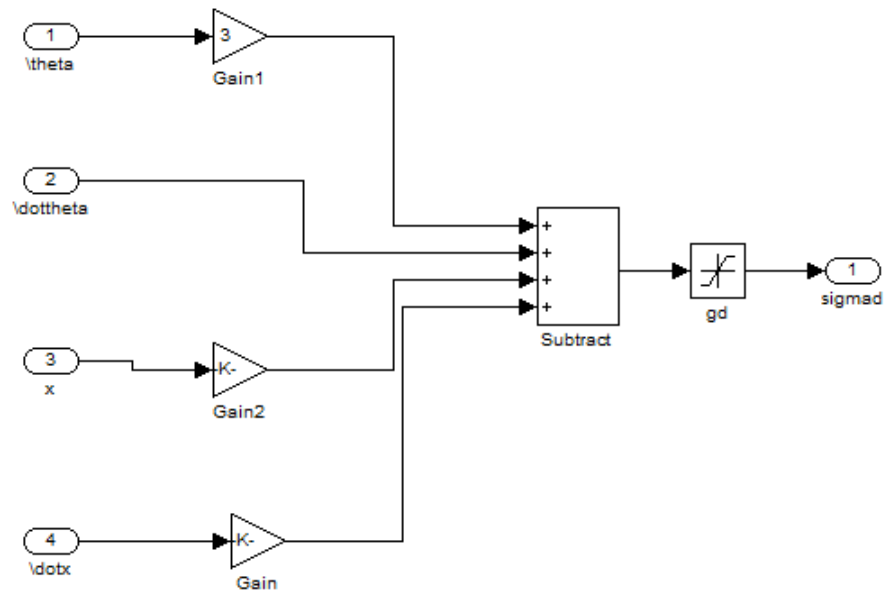


Figura 6.9: Control del subsistema $x-\theta$.

A continuación, se muestran los resultados de las simulaciones, donde se podrá observar como los primeros estados en estabilizarse serán z y ψ . Seguidamente los subsistemas $y-\phi$ y $x-\theta$ convergerán a 0, siendo las variables de estado ψ y θ las que primero lo hagan. Finalmente se estabilizarán x e y .

El valor de los límites de las funciones de saturación para ambos subsistemas ($y-\phi$, $x-\theta$) es:

$$\begin{aligned}
 d &= 0.5 \\
 c &= 1.001 \\
 b &= 2.003 \\
 d &= 4.007
 \end{aligned}$$

Los valores de las funciones de saturación son consecuencia de querer limitar a $|\phi| \leq 1$ rad y $|\theta| \leq 1$ rad en cuanto la función de saturación σ_b actúe en la región lineal.

El valor de todas las constantes para el control de linealización mediante realimentación es de 5.

Las condiciones iniciales impuestas son las siguientes.

$$\begin{aligned}z &= 10 \\z_d &= 20 \\\psi &= 0.3 \\\psi_d &= 0 \\\phi &= -0.2 \\y &= 2 \\\theta &= 1 \\x &= -5\end{aligned}$$

Estos son los resultados de las simulaciones.

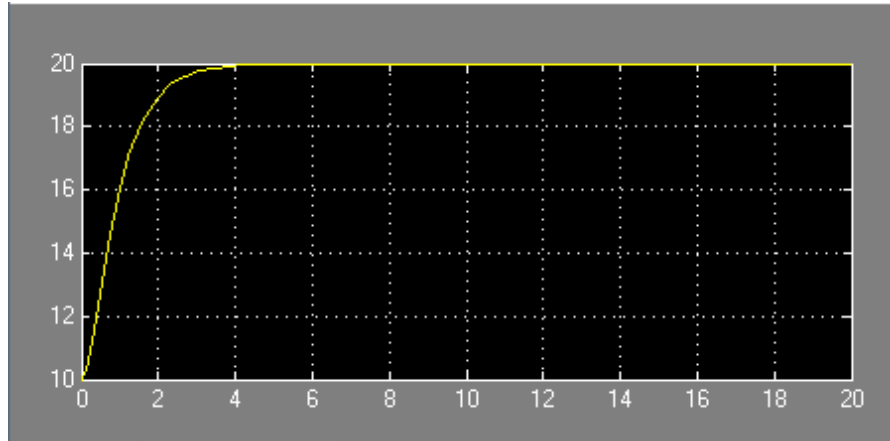


Figura 6.10: Control de la altitud del VTOL .

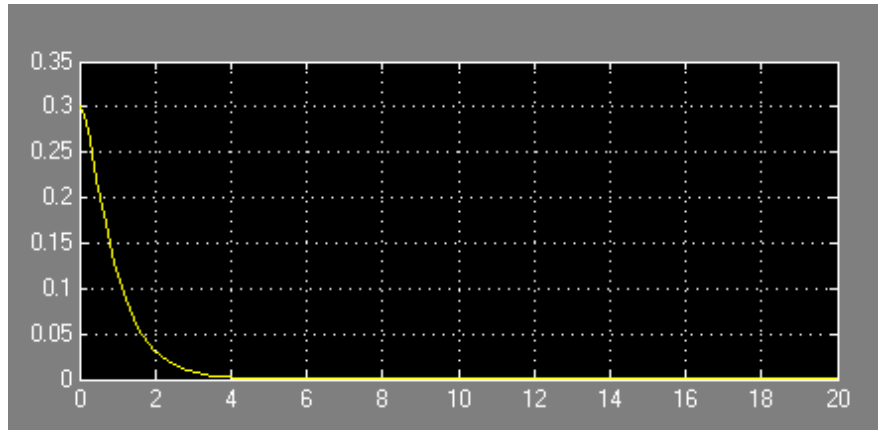


Figura 6.11: Control del angulo ψ .

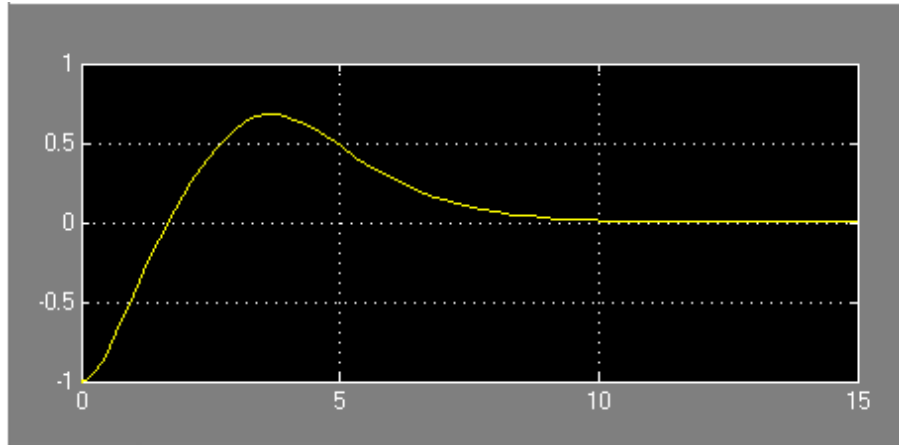


Figura 6.12: Control del ángulo ϕ .

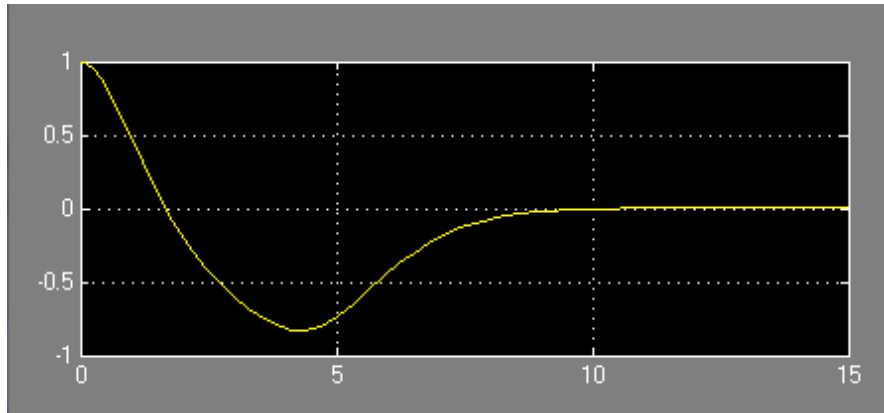


Figura 6.13: Control del ángulo θ .

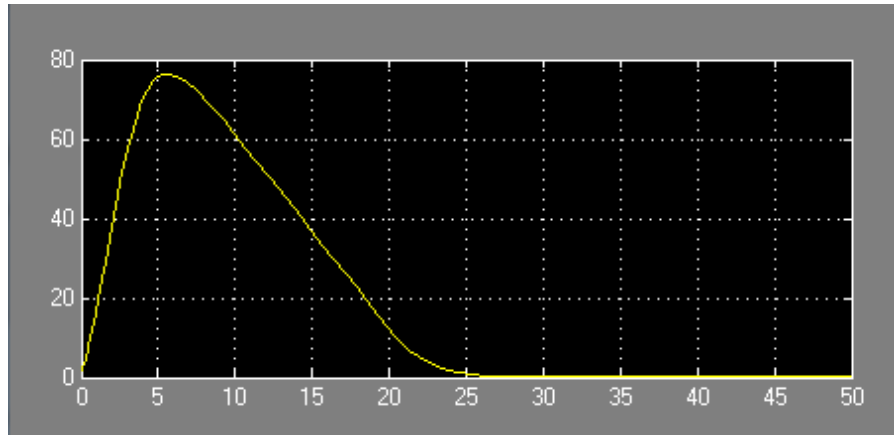


Figura 6.14: Control de y .

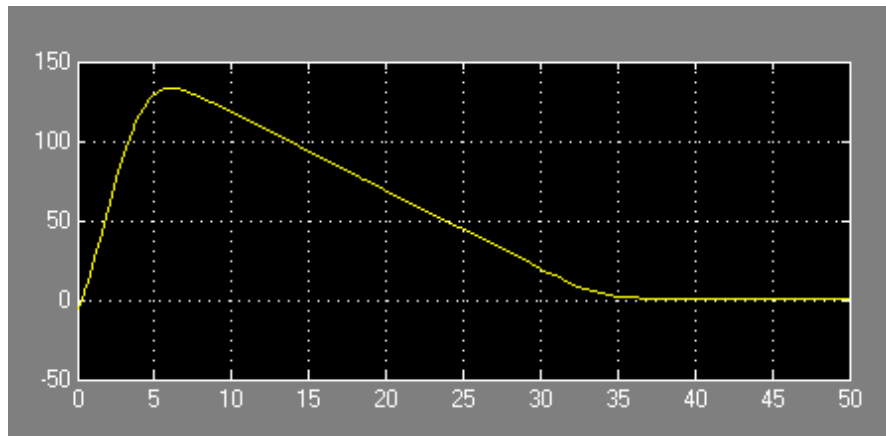


Figura 6.15: Control de x .

Para la segunda simulación se mantienen los valores de las funciones de saturación, pero se cambian las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} z &= 10 \\ z_d &= -10 \\ \psi &= -0.3 \\ \psi_d &= 0 \\ \phi &= 0.2 \\ y &= 2 \\ \theta &= 1 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Estos son los resultados:

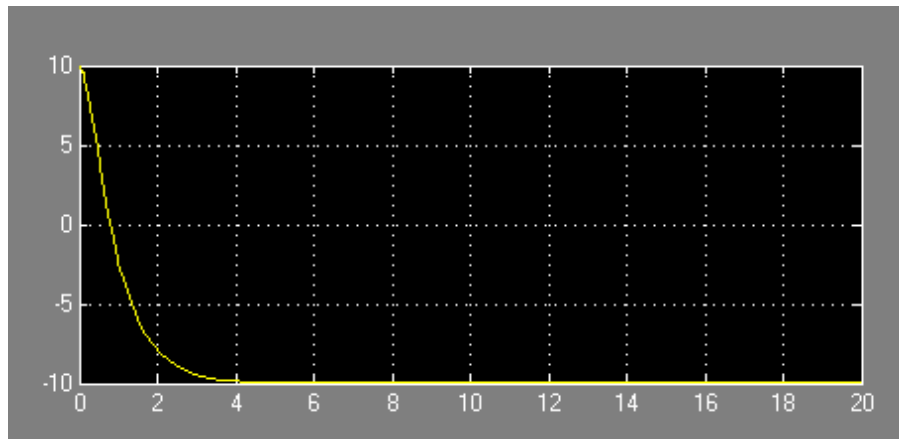


Figura 6.16: Control de la altitud del VTOL .

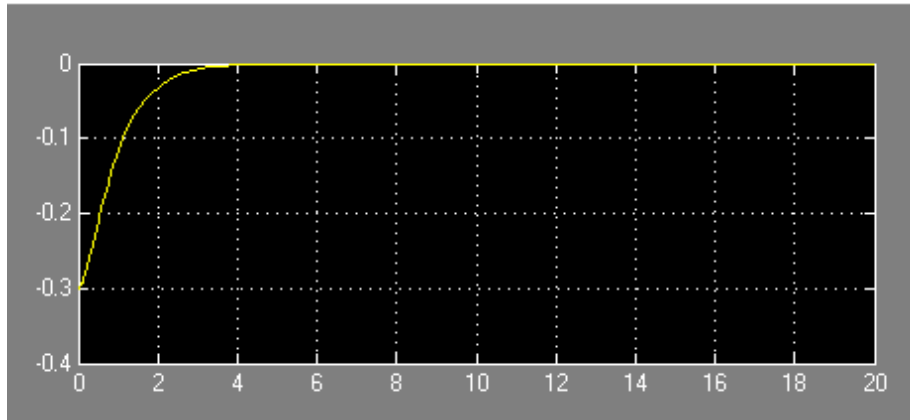


Figura 6.17: Control del ángulo ψ .

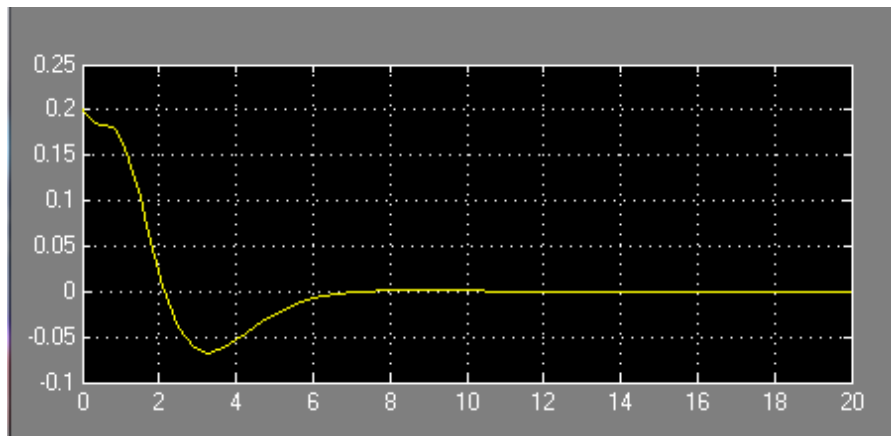


Figura 6.18: Control del ángulo ϕ .

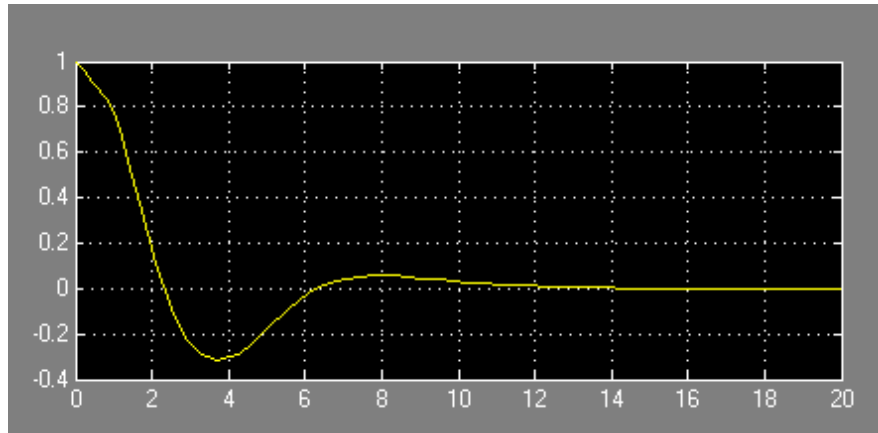


Figura 6.19: Control del ángulo θ .

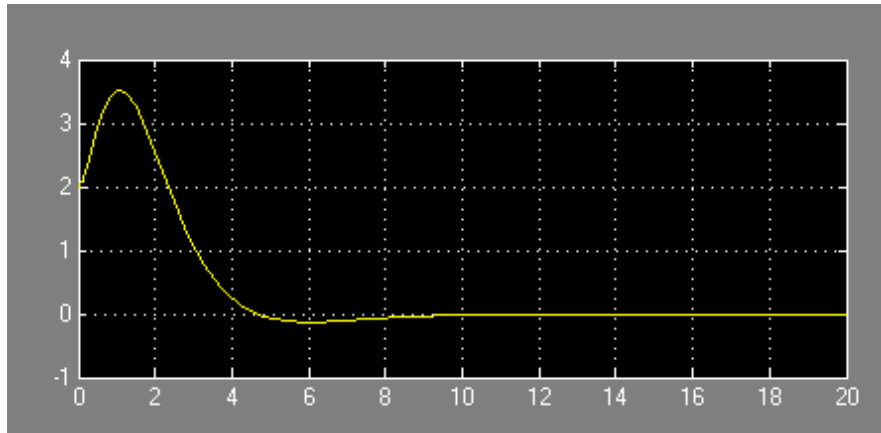


Figura 6.20: Control de y .

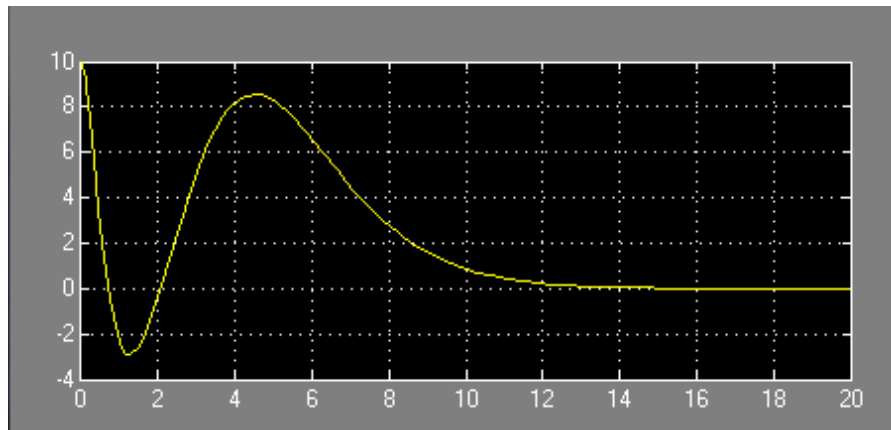


Figura 6.21: Control de x .

En la tercera simulación se mantienen las condiciones iniciales anteriores, pero cambian los valores de las funciones de saturación a:

$$d=0.8$$

$$c=1.7$$

$$b=3.5$$

$$d=7.1$$

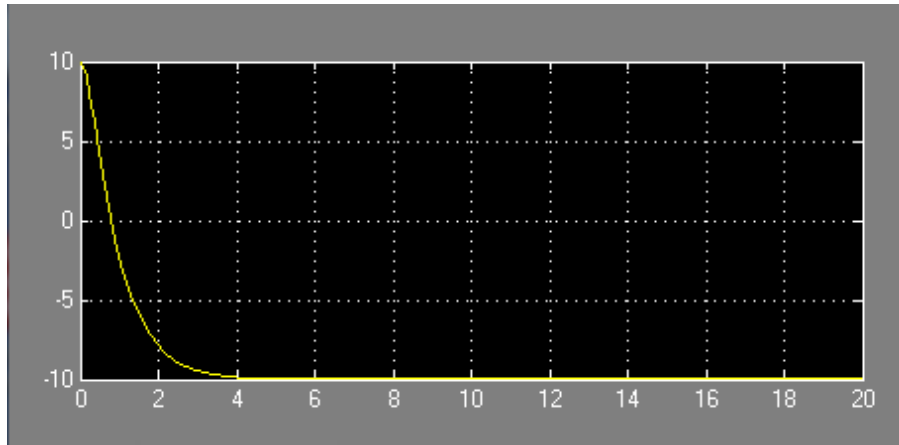


Figura 6.22: Control de la altitud del VTOL .

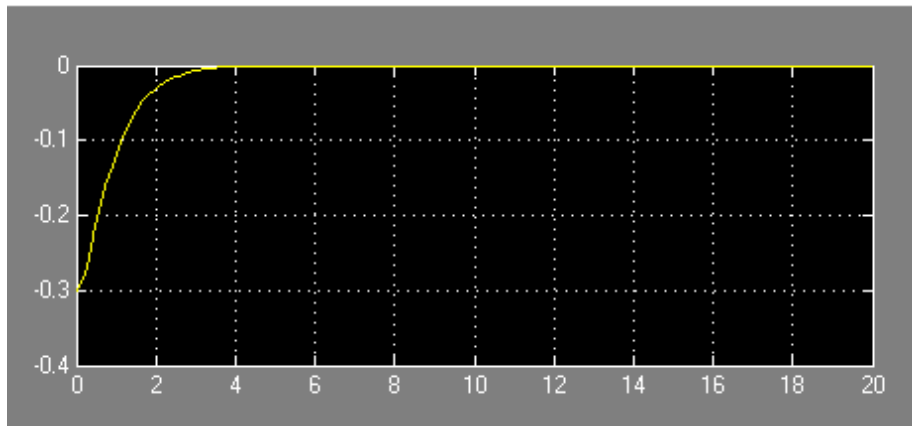


Figura 6.23: Control del angulo ψ .

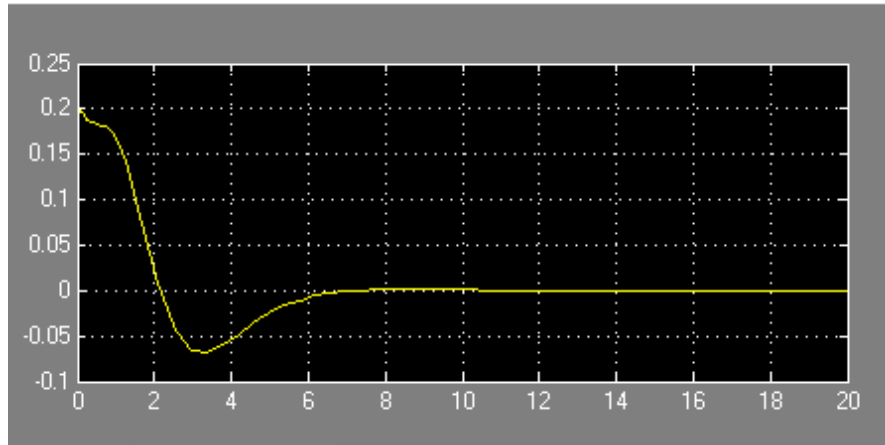


Figura 6.24: Control del ángulo ϕ .

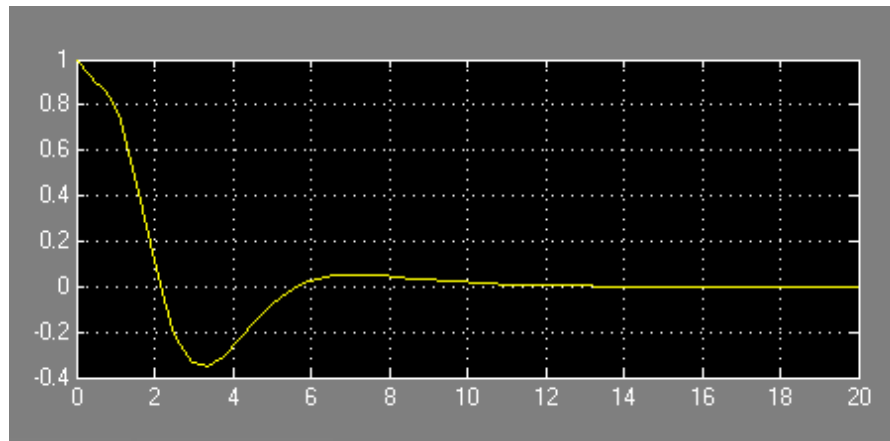


Figura 6.25: Control del ángulo θ .

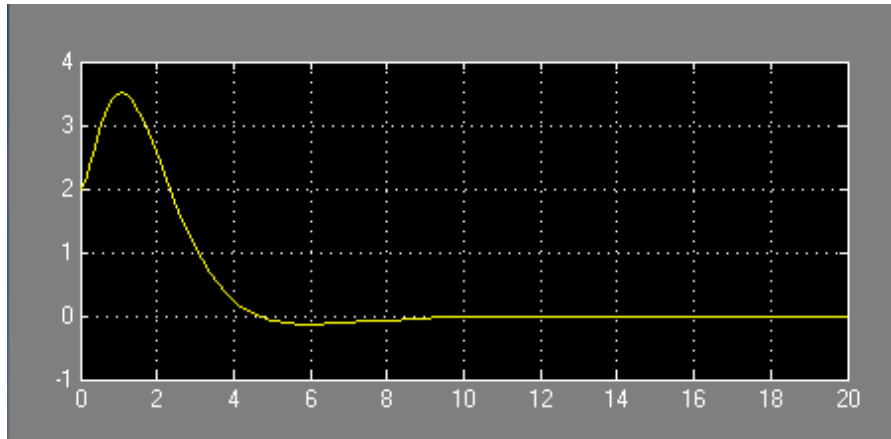


Figura 6.26: Control de y .

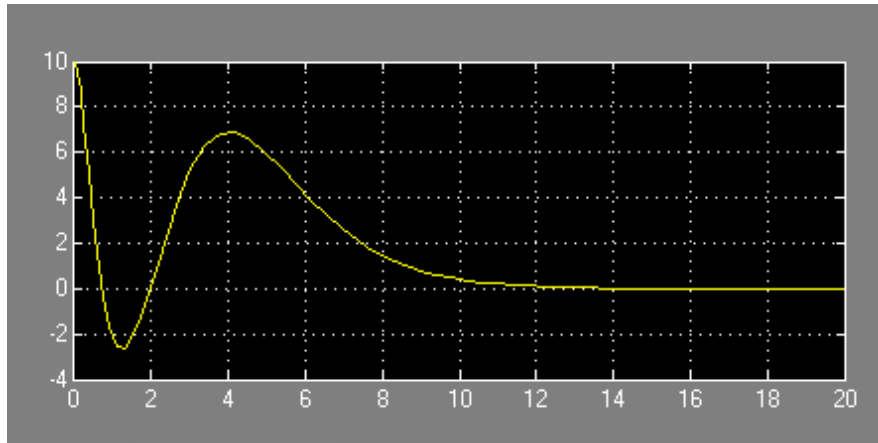


Figura 6.27: Control de x .

Para la última simulación se han mantenido los últimos valores de las funciones de saturación, y se han cambiado las condiciones iniciales por:

$z=10$
 $z_d=65$
 $\psi=-1$
 $\psi_d=0.5$
 $\phi=1$
 $y=20$
 $\theta=1$
 $x=10$

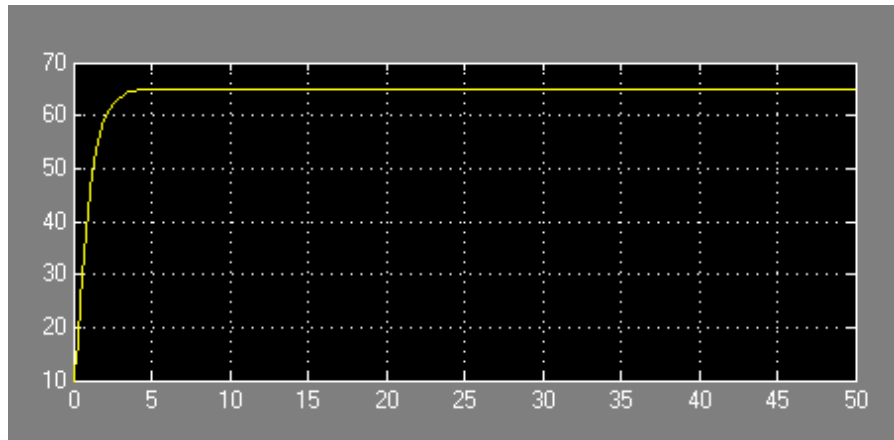


Figura 6.28: Control de la altitud del VTOL .

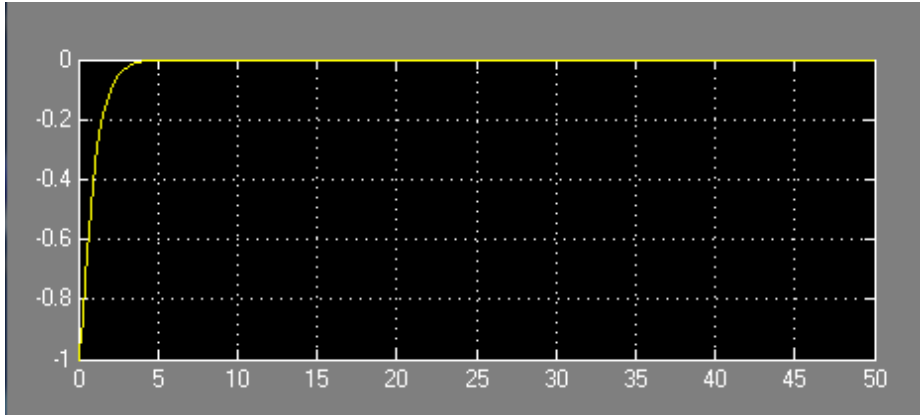


Figura 6.29: Control del angulo ψ .

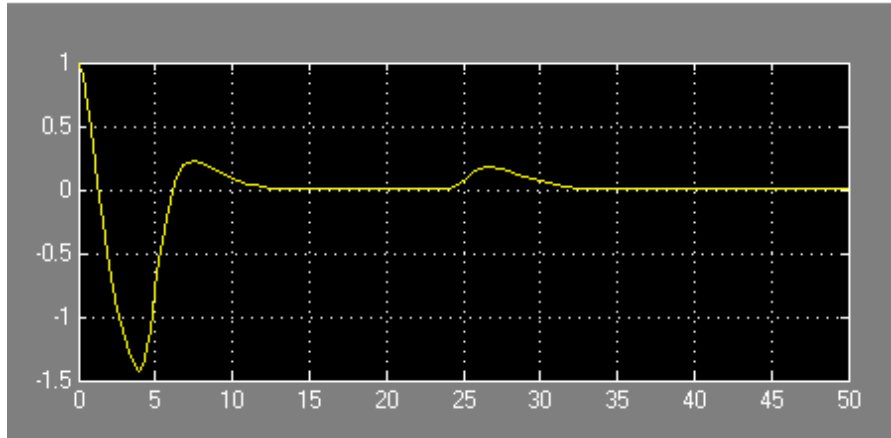


Figura 6.30: Control del ángulo ϕ .

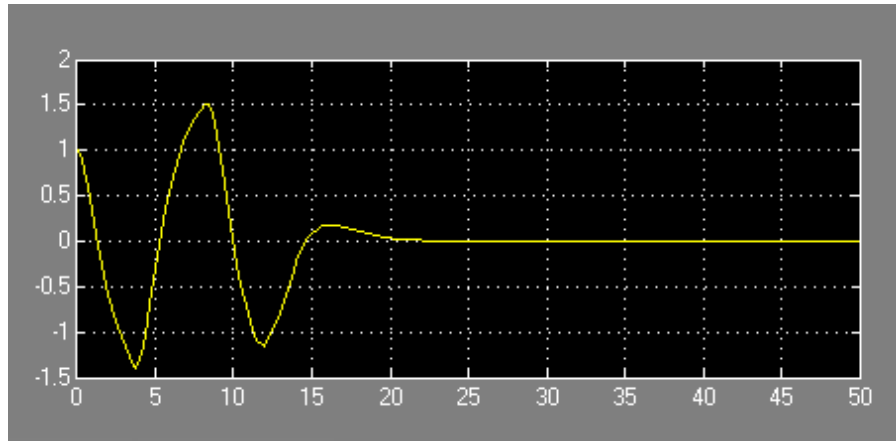


Figura 6.31: Control del ángulo θ .

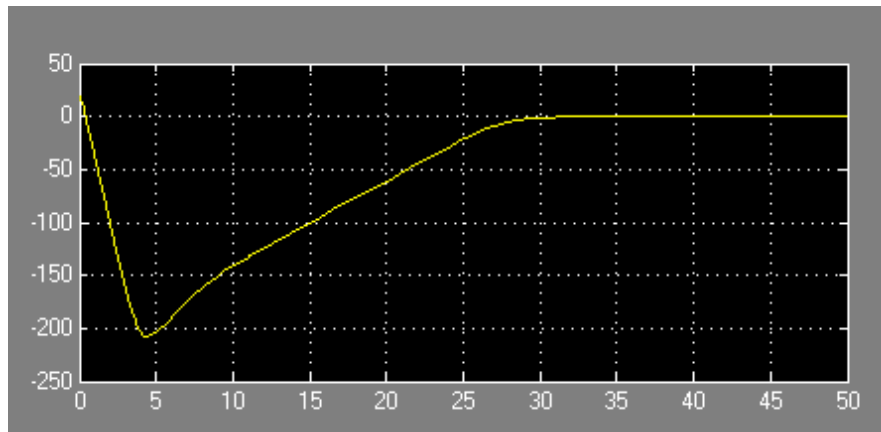


Figura 6.32: Control de y .

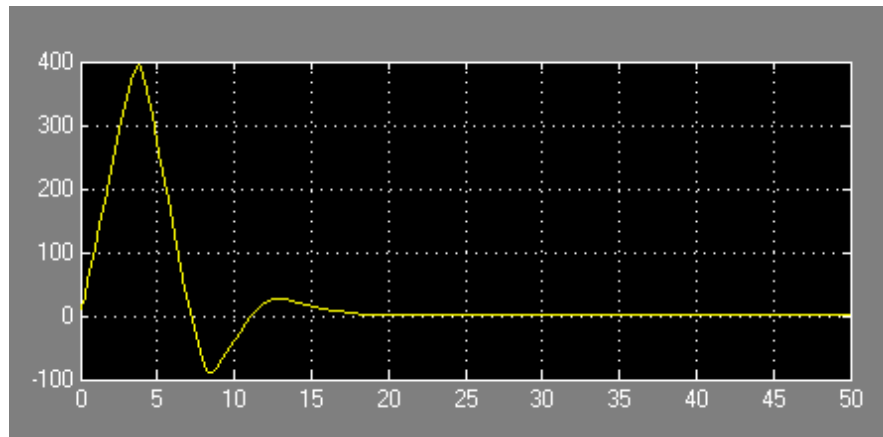


Figura 6.33: Control de x .

Que como era de esperar, verifican los resultados teóricos.

Conclusiones

La teoría de control no lineal puede llegar a ser realmente compleja tanto en aspectos conceptuales como en aspecto teóricos, la gran mayoría de los distintos modelos no lineales que he ido estudiando para poder entender y realizar este proyecto utilizan un control ad-hoc específico para ese modelo, por lo que para alguien sin experiencia en la materia puede tener una gran complejidad conseguir entenderlo. Aunque cuando se logra entender el concepto y las simulaciones dan los resultados deseados produce una gran satisfacción. Será muy importante en el futuro encontrar una teoría de control no lineal unificadora que permita solucionar el problema independientemente de la forma del modelo no lineal facilitando en gran medida la labor de las personas dedicadas a ello.

Los UAVs pueden y deben tener una gran utilidad en el futuro en numerosas tareas como la búsqueda de personas en lugares peligrosos, para ello será necesario una gran mejora tanto en los aspectos técnicos como en los aspectos económicos porque en la actualidad alcanzan precios desorbitados.

Bibliografía

A.D KING., "Inertial Navigation - Forty years of Evolution", Marconi Electronic Systems Ltd.

CASTILLO P., LOZANO R. and DZUL A., Modelling and Control of Mini-Flying Machines, Springer-Verlag, London, 2005.

GOLDSTEIN H., Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing, Reading, MA, 2nd ed., 1980.

MURRAY R. M., LI Z. and SASTRY S., A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press, Boca Raton, FL, 19.

PAIELLI R. A., "Global transformation of rotation matrices to Euler parameters", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 15, no. 5, pp. 1309–1311, 1992.

PALOMINO A., CASTILLO P., FANTONI I., LOZANO R. and PÉCARD C., "Control strategy using vision for the stabilization of an experimental PVTOL aircraft setup", IEEE Transactions on Control Systems and Technology.

FANTONI I., LOZANO R. and PALOMINO A., "Global stabili-

zing control design for the PVTOL aircraft using saturation functions on the inputs”, European Control Conference ECC’03, September 2003.

ZAVALA A., FANTONI I. and LOZANO R., “Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded inputs”, International Journal of Control, vol. 76, no. 18.

ANDREW R. TEEL ., "Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls".

SÁNCHEZ A., CASTILLO P., ESCARENO J., ROMERO H. and LOZANO R., “Simple real-time control strategy to stabilize the PVTOL aircraft using bounded inputs”, European Control Conference, 2007.

SÁNCHEZ A., GARCIA P., CASTILLO P. and LOZANO R., “Simple real-time stabilization of a VTOL aircraft with bounded signals”, AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 31, no. 4.

DO K. D., JIANG Z. P. and PAN J., “On global tracking control of a VTOL aircraft without velocity measurements”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 12, pp. 2212–2217, 2003.

FANTONI I., LOZANO R. and PALOMINO A., “Global stabilizing control design for the PVTOL aircraft using saturation functions on the inputs”, European Control Conference ECC’03, September 2003.

CASTILLO P., DZUL A. and LOZANO R., “Real-time stabilization and tracking of a four rotor mini-rotorcraft”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 12, no. 4, pp. 510–516, 2004.

VALAVANIS.K RANDAL.B OH PAUL., "Select Paper from the 2nd International Symposium on UAVs, Reno, Nevada, U.S.A, June 8-10,2009".

STONE H. and CLARKE G., "The T-Wing: a VTOL UAV for defense and civilian applications", UAV Australia Conference, Melbourne, Australia, February 2001.

SCIAVICCO L. and SICILIANO B., Modelling and Control of Robot Manipulators, Springer-Verlag, Berlin, 2nd ed., 2000.

JOHNSON E. KANNAN S., "Nested Saturation with Guaranteed Real Poles"

SEPULCHRE R., JANKOVIĆ M. and KOKOTOVIĆ P., Constructive Nonlinear Control, Springer-Verlag, London, 1997

YE H., WANG H. and WANG H., "Stabilization of a PVTOL aircraft and a inertia wheel pendulum using saturation technique", IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 15, pp. 1143–1150, 2007.