Curso 0: Matemáticas

Año académico 2014-2015

Ana García González
Miguel Martínez Panero
Luis Carlos Meneses Poncio
Teresa Peña García

Universidad de Valladolid

Departamento de
Economía Aplicada

1. Aritmética y Álgebra

- 1.1 Conjuntos numéricos
- 1.2 Fracciones, potencias, raíces y logaritmos
- 1.3 Polinomios
- 1.4 Ecuaciones
- 1.5 Desigualdades. Resolución de inecuaciones

Números Naturales, $\mathbb{N}$ y Números Enteros, $\mathbb{Z}$

Números Naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$
Operaciones suma y producto

Números Enteros: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
Operación diferencia. Se introduce el cero y los números negativos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Números Racionales, $\mathbb{Q}$

Números Racionales: Aquéllos que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
Operación cociente. Resolución de ecuaciones $qx = p$

- Representación decimal de los números racionales:
  - Entero
  - Decimal
    - Exacto
    - Periódico (Puro y Mixto)

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$$

Números Irracionales, $\mathbb{I}$

Conjunto de números decimales cuya parte decimal tiene infinitas cifras no periódicas o, lo que es lo mismo, conjunto de números que no pueden representarse por el cociente de dos números enteros

$$\boxed{\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset}$$

Ejemplos:

$-\sqrt{5} = -2.236067977, \frac{\sqrt[3]{4}}{3} = 0.5291336839, \pi = 3.141592653, e = 2.718281828...$

Números Reales, $\mathbb{R}$

Números Reales: El número a es real, $a \in \mathbb{R}$, si es un número racional, $a \in \mathbb{Q}$, o irracional, $a \in \mathbb{I}$. Por lo tanto, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Números Complejos, $\mathbb{C}$

El número z es complejo, $z \in \mathbb{C}$, si es un número de la forma $z = a + bi$, donde $i = \sqrt{-1}$ y $a, b \in \mathbb{R}$
A i se le llama unidad imaginaria. Los números reales a y b se conocen, respectivamente, como parte real y parte imaginaria del número complejo z.
Se define el conjunto de números complejos como: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- Números imaginarios: $b \neq 0$:
  Si $a = 0 \Rightarrow a + bi = 0 + bi = bi$ (imaginarios puros)
- Números reales: $b = 0$
  $a + bi = a + 0i = a$
- Conjugado: Misma parte real y parte imaginaria de signo contrario:
  $\overline{a + bi} = a - bi$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Operaciones en el conjunto de los números Reales

- Suma
  Propiedades: Asociativa, elemento neutro, elemento simétrico, conmutativa
  - Dado cualquier real existe su opuesto, lo que permite definir la resta en $\mathbb{R}$ como $a - b = a + (-b)$
- Producto
  Propiedades: Asociativa, elemento neutro, elemento simétrico, conmutativa, distributiva respecto de la suma
  - Dado cualquier real no nulo existe su inverso, lo que permite definir el cociente en $\mathbb{R}$ como $a : b = a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

Prioridad de las operaciones: En primer lugar, las potencias, en segundo lugar, productos y cocientes y en tercer lugar, sumas y restas

Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

- Máximo Común Divisor $(M.C.D.)$ de dos números enteros:
  Es el producto de los factores primos comunes a ambos números elevados al menor exponente

  Ejemplo: $M.C.D.$ de 2640 y 3580

$$2640 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11; \quad 3580 = 2^2 \cdot 5 \cdot 179$$
$$M.C.D. = 2^2 \cdot 5 = 20$$

- Mínimo Común Múltiplo $(M.C.M.)$ de dos números enteros:
  Es el producto de todos los factores primos, comunes y no comunes, elevados al mayor exponente

  Ejemplo: $M.C.M.$ de 120 y 350

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5; \quad 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$$
$$M.C.M. = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4200$$

Fracciones

Una fracción es un cociente entre dos números. El resultado de dicho cociente es un número racional

- Fracciones equivalentes: Distintas fracciones que representan el mismo número racional. Un número racional se puede expresar de infinitas formas

  Ejemplo: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{2000}{4000} = 0.5$

  - Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y solamente si $ad = bc$

- Fracción irreducible: Fracción en la que numerador y denominador son primos entre sí

  Ejemplo: $\dfrac{2}{3}; \dfrac{7}{5}; \dfrac{11}{23}$

Operaciones con fracciones

- Suma (Resta):
  - Fracciones con el mismo denominador: Se suman (restan) los numeradores
    Ejemplo: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
  - Fracciones con distinto denominador: Se obtiene el denominador común ($M.C.M.$) y se calculan y suman (restan) las fracciones equivalentes obtenidas.
    Ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1$
- Multiplicación: El numerador del producto de fracciones se obtiene multiplicando los numeradores de dichas fracciones y el denominador, multiplicando los denominadores
  Ejemplo: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- Cociente: Dividir una fracción por otra es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción
  Ejemplo: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Operaciones con fracciones

- Simplificación de fracciones

  Para simplificar una fracción se busca su fracción irreducible

  Nota: Únicamente en el caso de que se trate de un número decimal exacto éste se puede identificar con la fracción de la que proviene

  Ejemplos: $\dfrac{6}{3} = 2;\ \dfrac{1}{2} = 0.5;\ \dfrac{1}{3} \neq 0.33$

Potencias y Raíces

- Potencias

  Un número a, llamado base, elevado a un exponente n, con $n \in \mathbb{N}$, es igual al resultado de multiplicar a por sí mismo n veces:

  $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

  - Potencias de exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
  - Convenio: $a^0 = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \; a \neq 0$

- Raíces

  La raíz n-ésima de un número a es un número b que, elevado al exponente n, con $n \in \mathbb{N}$, da como resultado a

  $$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

  Un radical es equivalente a una potencia de exponente fraccionario:

  $$\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$$

Propiedades de las potencias

1. Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes: $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

   Ejemplo: $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$

2. Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes: $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

   Ejemplo: $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

3. Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes: $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

   Ejemplo: $\left(3^4\right)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

4. La potencia de un producto es igual al producto de las potencias. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ PERO $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

   Ejemplo: $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$

5. La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

   Ejemplo: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$

Propiedades de las raíces

Siempre que las siguientes operaciones tengan sentido:

1. La raíz de un producto es igual al producto de las raíces: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

   Ejemplo: $\sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{2 \cdot 3} = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3}$
2. La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

   Ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$
3. Al dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por el mismo número, el valor de la raíz no varía: $\sqrt[n \cdot m]{a^m} = \sqrt[\frac{n \cdot m}{m}]{a^{\frac{m}{m}}} = \sqrt[n]{a}$

   Ejemplo: $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt[\frac{2 \cdot 3}{3}]{5^{\frac{3}{3}}} = \sqrt{5}$

Producto y cociente de raíces

- Si tienen el mismo índice: Se aplican las anteriores propiedades
- Si tienen distinto índice: Se calcula el $M.C.M.$ de los índices. Aplicando la propiedad 3, se pone el mismo índice para todas las raíces, y se procede aplicando las propiedades 1 y 2

Logaritmos

Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina logaritmo en base a de un número b al exponente al que hay que elevar la base a para obtener b

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Ejemplo: $\log_2 32 = 5$ ya que $2^5 = 32$

En la práctica, los más utilizados son el logaritmo decimal, $\log_{10} b$, y el logaritmo neperiano, $\log_e b = \ln b$

$$\log_{10} b = c \Leftrightarrow 10^c = b,$$

$$\ln b = c \Leftrightarrow e^c = b$$

Propiedades de los logaritmos neperianos

- $\ln e = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e^b = b$
- $e^{\ln b} = b$

Siempre que las siguientes operaciones tengan sentido:

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^b = b \ln a$

Polinomios

Un polinomio de coeficientes reales $P(x)$ de grado n en x es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i$ y $a_n \neq 0$. Los elementos a_i se denominan coeficientes, los términos $a_i x^i$ se denominan monomios y x es la variable del polinomio

Operaciones con polinomios:

Dados dos polinomios en x, $P(x)$ y $Q(x)$:

- Polinomio suma, $P(x) + Q(x)$:
  Se obtiene sumando término a término los coeficientes de los monomios de igual grado de $P(x)$ y $Q(x)$

Polinomios

- Producto de polinomios, $P(x) \cdot Q(x)$:
  Se obtiene sumando los productos de cada término de $P(x)$ por todos los términos de $Q(x)$
- Cociente de polinomios, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$:
  Un polinomio de grado n tiene, a lo más, n raíces. El número a es raíz del polinomio $P(x)$ si y solo si $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, siendo $Q(x)$ otro polinomio

Factorización de Polinomios:

Factorizar un polinomio $P(x)$ consiste en expresarlo como producto de polinomios irreducibles. Un polinomio $P(x)$ es irreducible si no se puede descomponer en un producto de polinomios de menor grado que $P(x)$
Se puede factorizar un polinomio a través de sus raíces (por ejemplo, empleando el método de Ruffini)

Polinomios

Polinomios racionales:

Dados los polinomios en x, $P(x), Q(x), P'(x)$ y $Q'(x)$:

- Suma y diferencia: Se reduce a común denominador

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

- Producto y cociente

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{P(x) \cdot P'(x)}{Q(x) \cdot Q'(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{P(x) \cdot Q'(x)}{Q(x) \cdot P'(x)}$$

Conceptos básicos

- Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o varias incógnitas
  Ejemplos: $x^2 = 313 - (x+1)^2$, $\ln(x) + 1 = 1$
  - Cuando la igualdad entre las dos expresiones se verifica para cualquier valor numérico de las incógnitas se llama identidad y no se considera una ecuación
- Una solución de una ecuación es un valor numérico de cada una de las incógnitas para los que se verifica la igualdad
- Resolver una ecuación es calcular el conjunto de todas sus soluciones
- Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones

Ecuaciones polinómicas con una incógnita

Son aquellas equivalentes a una ecuación cuyo primer término es un polinomio y el segundo es 0.

- Una ecuación polinómica de primer grado es equivalente a una de la forma:
  $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ (Ejemplo: -6x+4=15x)
  - Tienen solución única. La solución es $x = -b/a$
- Una ecuación polinómica de segundo grado es equivalente a una de la forma:
  $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ (Ejemplo: $5x^2 + 5x + 4 = 3x^2 + 7$)
  - Su(s) solucion(es) viene(n) dadas por la expresión: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
    - Si $b^2 - 4ac > 0$,la ecuación tiene dos soluciones distintas
    - Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución (doble o con multiplicidad 2)
    - Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales

Ecuaciones polinómicas con una incógnita

- Una ecuación polinómica de grado n es equivalente a una de la forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$
(Ejemplo: $2x^4 - x^3 - 3x^2 = 0$ es una ecuación polinómica de grado 4)
  - Para hallar las soluciones reales de la misma se puede utilizar la regla de Ruffini

Desigualdades

Los números reales se ordenan en la recta real siguiendo la relación de orden "$\leq$" (menor o igual).
$a < b$ indica que a está situado a la izquierda de b en la recta real.

Propiedades:
Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- $a \leq b \;\Leftrightarrow\; a + c \leq b + c$.
- Si $c > 0$, $a \leq b \;\Leftrightarrow\; ac \leq bc$.
- Si $c < 0$, $a \leq b \;\Leftrightarrow\; ac \geq bc$.
- Si $a, b > 0$ y $a > b \;\Rightarrow\; a^2 > b^2$.
- Si $a, b > 0$ o $a, b < 0$ y $a > b \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Intervalos

Un *intervalo* es un segmento de la recta real. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, los números comprendidos entre ambos constituyen un intervalo. Según los extremos a y b estén o no incluídos en el segmento, el intervalo se denomina:

abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
abierto izda. cerrado dcha.	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
cerrado izda. abierto dcha.	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Los intervalos pueden ser una semirrecta. En este caso un extremo se representa por $+\infty$ o $-\infty$.

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Valor absoluto

Definición (Valor absoluto) El valor absoluto de un número real x, se denota por $|x|$, y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ejemplo: $|5| = 5$, $|-1/2| = 1/2$, $|0| = 0$.

Propiedades

- $|x| = \sqrt{x^2} = \max\{-x, x\}$
- $|x| > 0$ para todo $x \neq 0$; $|0| = 0$
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$; $\qquad |x| > b \Leftrightarrow x > b$ o $x < -b$
- $|xy| = |x||y|$ y $|x^{-1}| = |x|^{-1}$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)

Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o varias incógnitas.

Una solución de una inecuación es un valor numérico de cada una de las incógnitas para los que se verifica la desigualdad.

Resolver una inecuación es calcular el conjunto de todas sus soluciones.

Dos inecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Inecuaciones polinómicas

Son aquellas equivalentes a una inecuación cuyo primer término es un polinomio y el segundo es 0.

- Inecuación polinómica de primer grado

  $ax + b > 0$ con $a \neq 0$

- Inecuación polinómica de segundo grado

  $ax^2 + bx + c > 0$ con $a \neq 0$

  Se puede resolver descomponiendo en producto de factores y estudiando su signo

- Inecuación polinómica de grado n

  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 > 0$ con $a_n \neq 0$

  Se procede igual que en el caso anterior.

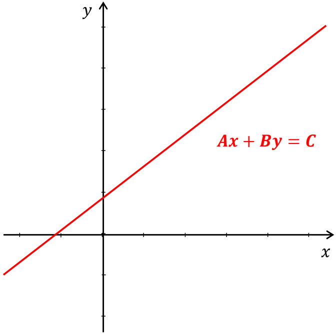
Observación: De forma análoga, se definen las inecuaciones para "$<$"," $\leq$" o "$\geq$".

2. Rectas y curvas cuadráticas. Funciones reales

- 2.1 Rectas
- 2.2 Curvas cuadráticas
- 2.3 Funciones reales de una variable

Rectas: ecuación general

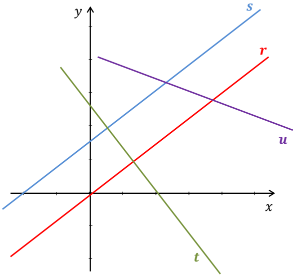
Las *rectas* vienen dadas por ecuaciones polinómicas en dos variables de la forma $Ax + By = C$, donde $A, B, C \in \mathbb{R}$, y las variables x e y representan las coordenadas de un punto cualquiera de la recta.



La anterior ecuación se denomina *ecuación general* de una recta.

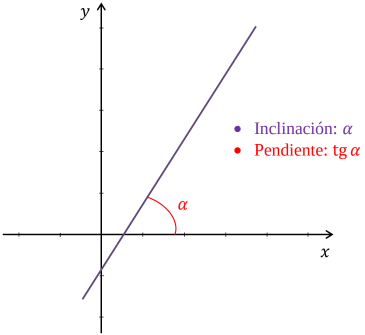
Rectas: tipos

- Dos rectas son *paralelas* si no tienen ningún punto en común. Por ejemplo, las rectas r y s
- Dos rectas son *secantes* si tienen un único punto en común. Por ejemplo, la recta u con las rectas r, s o t
- Dos rectas son *perpendiculares* si son secantes y al cortarse dividen el plano en cuatro regiones iguales. Por ejemplo, la recta t con las rectas r o s



Rectas: inclinación y pendiente

- La *inclinación* de una recta es el ángulo que forma con el sentido positivo del eje de abcisas
- La *pendiente* de una recta es la tangente trigonométrica de ese ángulo



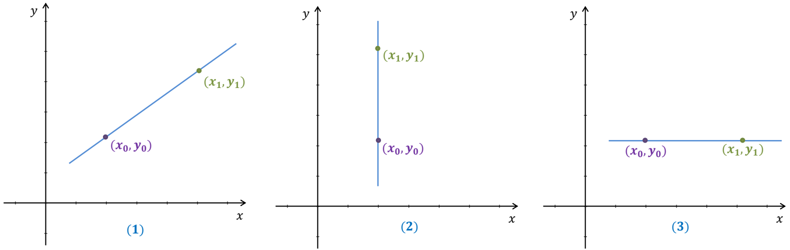
Ecuación de una recta que pasa por dos puntos

La ecuación de una recta que pasa por dos puntos, (x_0, y_0) y (x_1, y_1), viene dada por:

(1) Si $x_0 \neq x_1$ e $y_0 \neq y_1$: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$

(2) Si $x_0 = x_1$: $x = x_0$

(3) Si $y_0 = y_1$: $y = y_0$



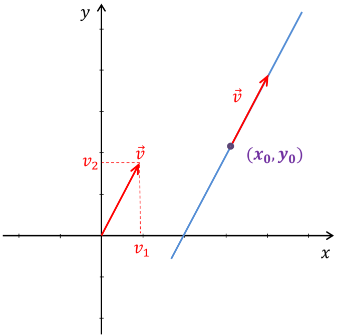
Ecuación de una recta determinada por un punto y un vector direccional

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y es paralela al vector direccional $\bar{v} = (v_1, v_2)$, viene dada por:

(1) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$

(2) Si $v_1 = 0$: $x = x_0$

(3) Si $v_2 = 0$: $y = y_0$



Ecuación explícita de una recta

- La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m viene dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

- Despejando la variable y se obtiene la *ecuación explícita* de la recta:

$$y = mx + b,$$

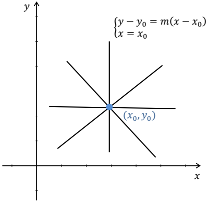
donde m es la pendiente y b es la ordenada para $x = 0$.

Las dos ecuaciones anteriores no existen para rectas verticales (en donde la pendiente m es infinito o no existe).

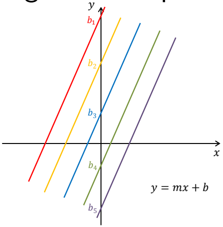
- Dadas dos rectas r y s con pendientes m_r y m_s respectivamente, se verifica:
  - Si son paralelas: $m_r = m_s$
  - Si son perpendiculares: $m_r m_s = -1$

Haces de rectas

Variando la pendiente m se representa un *haz de rectas concurrentes* que pasan por el punto (x_0, y_0):



Variando la ordenada en el origen b se representa un *haz de rectas paralelas*:

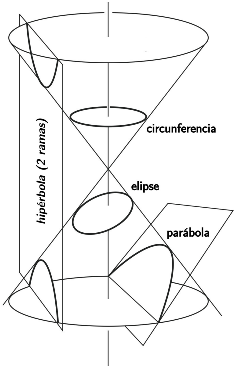


Curvas cuadráticas como secciones cónicas

Las *curvas cuadráticas* vienen dadas por ecuaciones polinómicas en dos variables $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

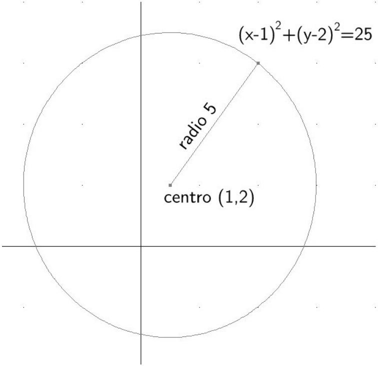
Según los valores de $A, .., F \in \mathbb{R}$, corresponden a elipses (y circunferencias como caso especial), parábolas o hipérbolas

Estas curvas se obtienen también como *secciones cónicas*



Circunferencia

La *circunferencia* de centro $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$ tiene por ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

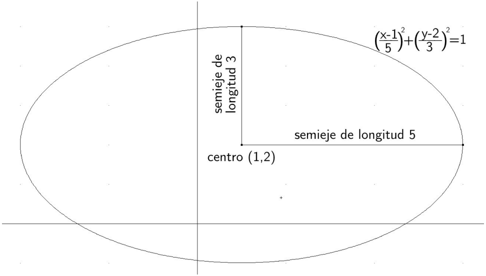


Si está centrada en el origen de coordenadas y tiene radio 1, entonces $(a, b) = (0, 0)$ y $r = 1$, por lo que la ecuación resulta $x^2 + y^2 = 1$

Elipse

La *elipse* de centro $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y semiejes $u, v > 0$ tiene por ecuación

$$\left(\frac{x-a}{u}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{v}\right)^2 = 1$$

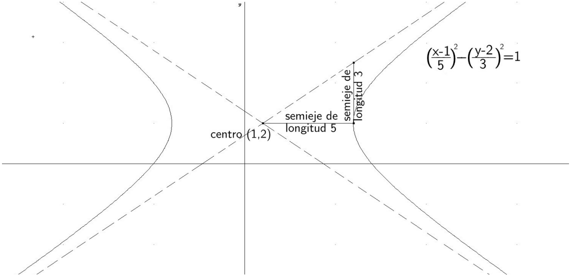


Si está centrada en el origen de coordenadas, entonces $(a, b) = (0, 0)$ y la ecuación resulta $\left(\frac{x}{u}\right)^2 + \left(\frac{y}{v}\right)^2 = 1$

Si $u = v = r$ entonces la elipse es una circunferencia de radio r

Hipérbola

La *hipérbola* de centro $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y semiejes $u, v > 0$ tiene por ecuación
$$\left(\frac{x-a}{u}\right)^2 - \left(\frac{y-b}{v}\right)^2 = 1$$



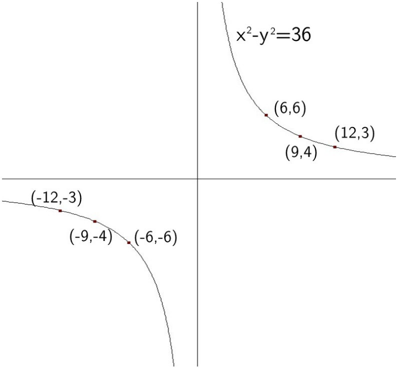
Las rectas $y - b = \pm\frac{v}{u}(x-a)$ son las *asíntotas* de la hipérbola

Si está centrada en el origen de coordenadas, entonces $(a,b) = (0,0)$
y la ecuación resulta $\left(\frac{x}{u}\right)^2 - \left(\frac{y}{v}\right)^2 = 1$

Hipérbola equilátera

Si $u = v = r$, la *hipérbola* es equilátera y se puede escribir $x^2 - y^2 = r^2$

Mediante el cambio de variables $\begin{cases} \boldsymbol{x} = x + y, \\ \boldsymbol{y} = x - y, \end{cases}$ la ecuación anterior se transforma en $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = \boldsymbol{xy} = r^2$, que es una hipérbola equilátera con los ejes coordenados por asíntotas

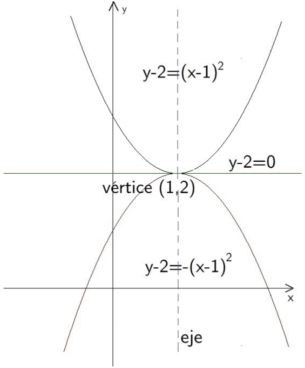


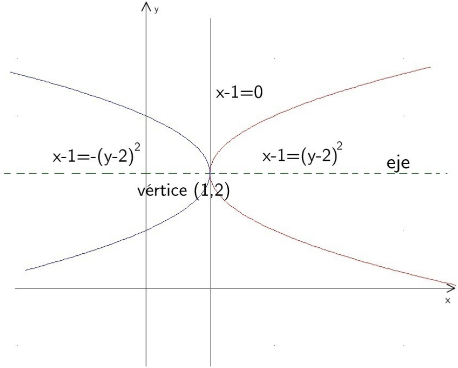
Parábola

La ecuación de una *parábola* con vértice en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y eje vertical es

$$y - b = c(x-a)^2, \text{ donde } \begin{cases} \text{si } c > 0, & \text{la parábola está derecha} \\ \text{si } c = 0, & \text{la parábola degenera en una recta} \\ \text{si } c < 0, & \text{la parábola está invertida} \end{cases}$$

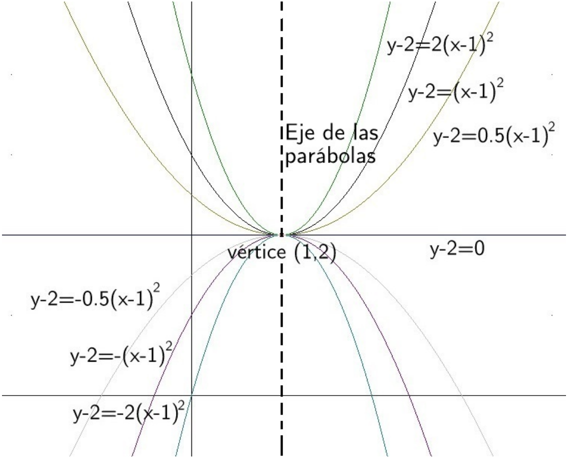
Si se permutan x, y, entonces las parábolas tienen ejes horizontales





Parábola

Los valores de $c \in \mathbb{R}$ determinan la curvatura de las parábolas:



Función real de una variable real

Definición

Una *función real de una variable real* f es una correspondencia en la que a cada elemento de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ no vacío le es asignado uno y sólo un número real:

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

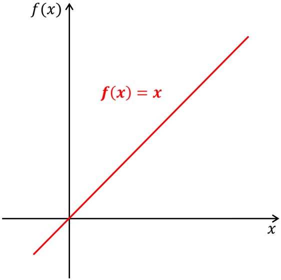
Suele utilizarse la notación $y = f(x)$.

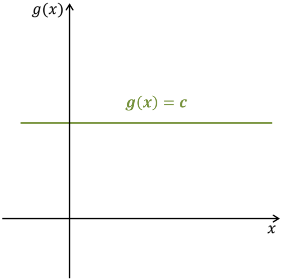
- y, la imagen de x por f, es la *variable independiente*
- x, el origen o antecedente de y por f, es la *variable dependiente*

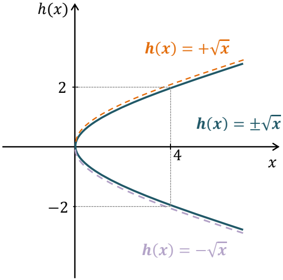
Función real de una variable real

Ejemplos

- $f(x) = x$ es la función identidad (se suele denotar como $Id(x) = x$)
- $g(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$, es una función constante
- $h(x) = \pm\sqrt{x}$ no es una función (por ejemplo, $h(4) = \pm 2$)







Dominio e imagen de una función

Definiciones

- Dada $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama *dominio* de f al conjunto de elementos que tienen imagen. Así, denotaremos $\mathcal{D}om\ f = D$
- El subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los y que son imagen de algún elemento x del dominio de f se llama *imagen* o *recorrido* de f y se denotará por $\mathcal{I}m\ f$; es decir,

$$\mathrm{Im}\ f = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in D \text{ con } f(x) = y \,\}$$

Observación: Cuando una función real aparece definida por expresiones, se entiende que su dominio es el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ en el que las tales expresiones tienen sentido.

Ejemplo

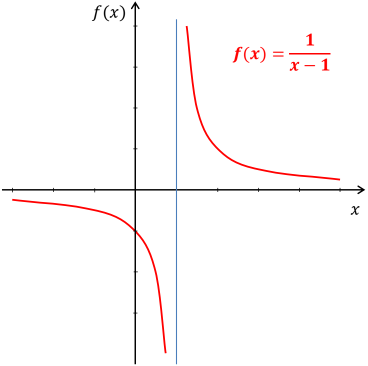
El dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es $\mathcal{D}om f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

Gráfica de una función

Definición

Dada una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la *gráfica o grafo* de f es el conjunto formado por los puntos $(x, f(x))$ con $x \in D$:

$$\mathrm{Gr}\, f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$



Funciones inyectivas

Definición

Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E$, con $E \subseteq \mathbb{R}$, es *inyectiva* si a orígenes distintos corresponden imágenes distintas; equivalentemente, imágenes iguales tienen antecedentes iguales:

$$\text{Para cada } x_1, x_2 \in D, \text{si } x_1 \neq x_2, \text{entonces } f(x_1) \neq f(x_2),$$

o bien

$$\text{para cada } x_1, x_2 \in D, \text{si } f(x_1) = f(x_2), \text{entonces } x_1 = x_2$$

Ejemplos

$f(x) = x + 1$ es inyectiva; mientras que $g(x) = x^2 + 1$ es no lo es

Operaciones con funciones I

Definiciones

Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces:

1. f y g son *iguales* cuando $f(x) = g(x)$ para cada $x \in D$
2. La *función suma* de f y g, que se denota $f + g$, es

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ para cada } x \in D$$

3. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, la *función producto* de α por f, que se denota αf, es

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \text{ para cada } x \in D$$

4. Si f es inyectiva, se define su *función inversa* f^{-1} con dominio $\mathcal{I}m\ f$ a la dada por $f^{-1}(y) = x$, donde $f(x) = y$

Ejemplo

Dada $f(x) = x^3$, su inversa es $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

Operaciones con funciones II

5. La *función producto* de f y g, que se denota $f \cdot g$, es

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ para cada } x \in D$$

6. Se define la *función cociente* de f y g y se denota f/g,

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ para cada } x \in D \text{ tal que } g(x) \neq 0$$

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : S \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que Im $f \subseteq S$.

7. Se define la *función compuesta* $g \circ f$, como la función con domino D tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para cada $x \in D$

Ejemplo

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$, entonces $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 1$, mientras que $(f \circ g)(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2$

Funciones acotadas superior e inferiormente

Definiciones

Sea $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

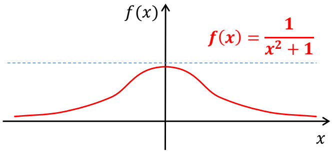
1. *acotada superiormente en A* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in A$ se cumple $f(x) \leq M$
2. *acotada inferiormente en A* si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in A$ se cumple $f(x) \geq m$
3. *acotada en A* si es acotada superior e inferiormente en A; es decir, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que para cualquier $x \in A$ se cumple $m \leq f(x) \leq M$

   Esta condición es equivalente a que exista $K \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in A$ se cumple $|f(x)| \leq K$

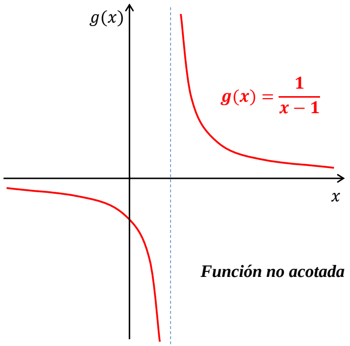
Funciones acotadas superior e inferiormente

Ejemplos

1. La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ está acotada, ya que $0 \leq \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$
2. La función $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no está acotada, ya que si x es cercano a 1, el cociente se hace tan grande (en valor absoluto) como se desee



Función acotada



Función no acotada

Funciones monótonas (crecientes y decrecientes)

Definiciones

Sea $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

1. *(monótona) creciente en A* si para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$
2. *(monótona) decreciente en A* si para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$

Cuando las desigualdades entre las imágenes se dan en sentido estricto se dice que f es *estrictamente creciente* o *estrictamente decreciente en A*, respectivamente.

Ejemplo

La función $f(x) = x - 1$ es estrictamente creciente, mientras que $g(x) = -x + 1$ es estrictamente decreciente.

Funciones cóncavas y convexas I

Definición

Se llama *cuerda* de una gráfica a cualquier segmento que conecta dos puntos de la misma.

Definiciones

Sean $I \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $x_1, x_2 \in I$. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

1. *convexa en I* si para cualesquiera $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)) \in \mathrm{Gr}\, f$ la cuerda que conecta dichos puntos se yuxtapone o está sobre la gráfica de la función entre dichos puntos (extremos incluidos)

2. *cóncava en I* si para cualesquiera $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)) \in \mathrm{Gr}\, f$ la cuerda que conecta dichos puntos se yuxtapone o está bajo la gráfica de la función entre dichos puntos (extremos incluidos)

Funciones cóncavas y convexas II

1. *estrictamente convexa en I* si para cualesquiera $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)) \in \operatorname{Gr} f$ la cuerda que conecta dichos puntos está sobre la gráfica de la función entre dichos puntos (extremos excluidos)
2. *estrictamente cóncava en I* si para cualesquiera $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)) \in \operatorname{Gr} f$ la cuerda que conecta dichos puntos está bajo la gráfica de la función entre dichos puntos (extremos excluidos)

Observaciones:

- Existen funciones que son a la vez cóncavas y convexas (funciones afines, cuyas gráficas son rectas). Y que no son ni cóncavas ni convexas (la función cúbica $f(x) = x^3$ con dominio en $\mathbb{R}$)
- Existen funciones con la misma expresión analítica que son cóncavas en un intervalo y convexas en otro (por ejemplo, la función cúbica $f(x) = x^3$ es cóncava en $(-\infty, 0]$ y convexa en $[0, \infty)$)

Funciones periódicas

Definición

Sea $K \in \mathbb{R}$. La función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *periódica de período K* si para cada $x \in D$ con $x + K \in D$ se tiene que

$$f(x + K) = f(x)$$

Ejemplos

Como veremos, las funciones trigonométricas $f(x) = sen\, x$, $g(x) = cos\, x$, $h(x) = tg\, x$ son periódicas de periodo 2π.

Trivialmente, las funciones constantes son periódicas de cualquier periodo.

Funciones simétricas

Definiciones

Sea $D = (-a, a) \subseteq \mathbb{R}$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \infty$. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ presenta:

1. *simetría par* si para cualquiera $x \in D$ se tiene $f(-x) = f(x)$
2. *simetría impar* si para cualesquiera $x \in D$ se tiene $f(-x) = -f(x)$

Observación:
Las funciones pares son simétricas respecto del eje de ordenadas (Y).
Las impares son simétricas respecto del origen de coordenadas.

Ejemplos

La función $f(x) = x^2$ es par, mientras que $g(x) = x^3$ es impar.

Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Definiciones

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ y f continua en torno a x_0:

1. x_0 es un *máximo* si en dicho punto la función pasa de ser creciente a decreciente
2. x_0 es un *mínimo* si en dicho punto la función pasa de ser decreciente a creciente
3. x_0 es un *punto de inflexión* si en dicho punto la función pasa ser convexa a cóncava (o viceversa)

Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Ejemplos

1. Las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no tienen máximos ni mínimos
2. La función $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ tiene un máximo $x = 0$ y no tiene mínimos
3. La función $\varphi(x) = x^2 + 1$ tiene un mínimo $x = 0$ y no tiene máximos
4. La función cúbica $\phi(x) = x^3$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$ (pues es cóncava en $(-\infty, 0]$ y convexa en $[0, \infty)$)

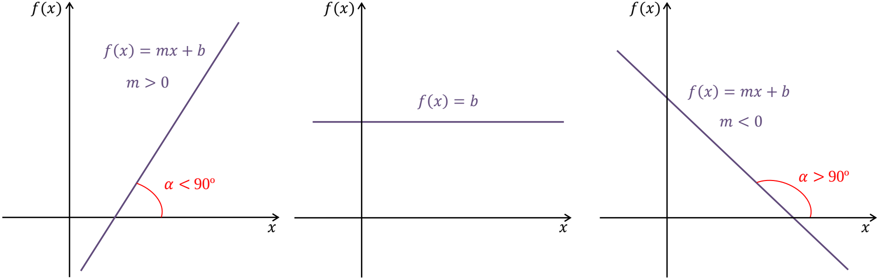
La función (lineal) afín

La *función (lineal) afín* tiene como expresión analítica un polinomio de grado a lo sumo 1: $f(x) = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$. Su gráfica es una recta con pendiente m. Esta magnitud mide el cambio en el valor de la función por el aumento de una unidad de la variable x:

- Si la pendiente m es positiva la recta forma un ángulo menor que un recto con el sentido positivo del eje de abscisas (X), y cuanto mayor es el valor de m, más vertical es
- Si la pendiente m es negativa la recta un ángulo mayor que un recto con el sentido positivo del eje de abscisas, y el valor absoluto de m mide la cuantía de esta inclinación
- Si la pendiente m es cero, la recta es paralela al eje de abscisas

La función (lineal) afín

Gráficas de funciones lineales con pendiente positiva, nula y negativa



La función cuadrática

La *función cuadrática* tiene como expresión analítica un polinomio de grado 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola.

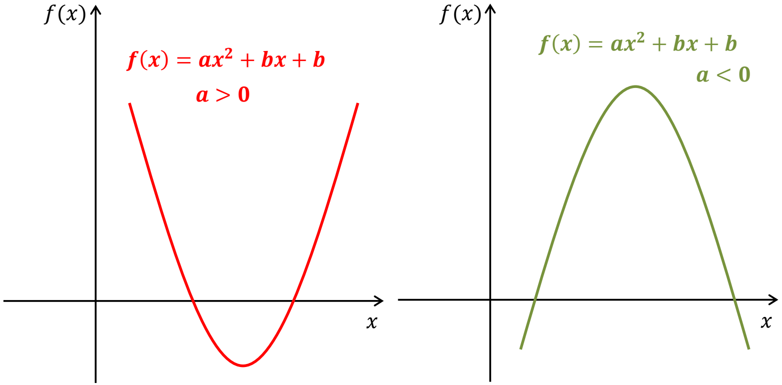
Elementos significativos de tal gráfica son los puntos de corte con el eje de abscisas (X), es decir, los valores de x (si los hay) que cumplen $ax^2 + bx + c = 0$.

A media distancia entre dichos valores se encuentra el vértice de la parábola. Un cálculo sencillo nos indica que se trata del punto $(x, f(x))$ siendo $x = -\frac{b}{2a}$. La anterior expresión es válida incluso cuando la parábola no corte el eje de abscisas.

Observación: Las funciones lineales y cuadráticas son los casos más sencillos de *función polinómica* $f(x) = p(x)$, donde $p(x)$ es un polinomio de cualquier grado.

La función cuadrática

Si $a > 0$ ($a < 0$), entonces la parábola está derecha (invertida) y la coordenada $x = -\frac{b}{2a}$ del vértice determina un mínimo (máximo).

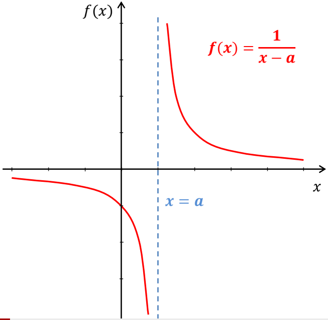


La función racional

Una *función racional* es aquella cuya expresión analítica viene dada por el cociente de 2 polinomios: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde Q no es el polinonio nulo.

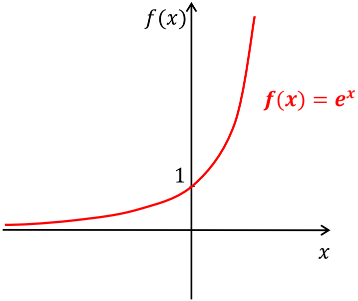
Su dominio viene dado por $\mathcal{D}om f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

La función racional más sencilla es $f(x) = \frac{1}{x-a}$ con $a \in \mathbb{R}$. No está definida en $x = a$ y su gráfica una hipérbola equilátera con asíntota vertical la recta $x = a$ y asíntota horizontal el eje de abscisas (X).



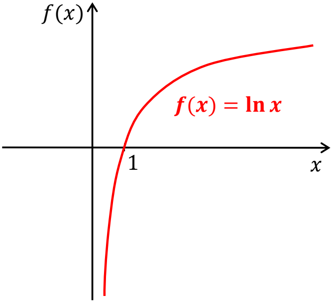
La función exponencial

La *función exponencial de base e* viene dada por $f(x) = e^x$ donde $e = 2.718...$
En las funciones exponenciales la variable x aparece en el exponente.



La función logarítmica

El *logaritmo neperiano* $f(x) = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial de base e. Está definida en $(0, \infty)$ y es creciente.



Propiedades:

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, para cualesquiera $x, y > 0$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$, para cualesquiera $x, y > 0$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$, para cualesquiera $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\ln 1 = 0$

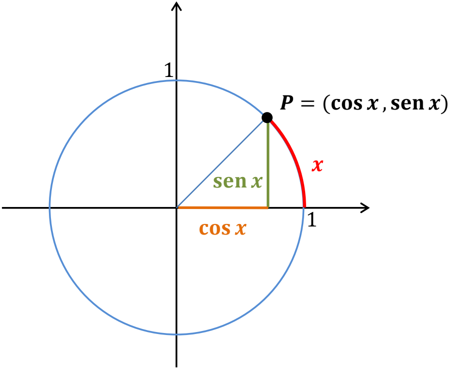
La función potencia

La función *potencia* es $f(x) = x^a$
En la función potencia la variable x aparece en la base.
Si $a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, está en su forma irreducible, entonces el dominio de la función potencia es:

- $\mathbb{R}$, cuando $a = \dfrac{p}{q} = n$ es un número entero no negativo.
  En este caso la función potencia es también una función polinómica.
- $\mathbb{R} - \{0\}$, cuando $a = \dfrac{p}{q} = n$ es un número entero negativo.
  En este caso la función potencia es también una función racional
- $[0, \infty)$, si $a = \dfrac{p}{q}$, siendo q un número natural par
- $\mathbb{R}$, si $a = \dfrac{p}{q}$, siendo q un número natural impar

Las funciones trigonométricas

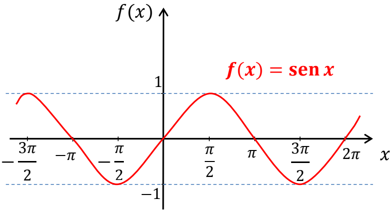
Si se considera una circunferencia de radio unidad con centro en el origen y un arco de circunferencia de longitud x con un extremo en el eje positivo de abscisas en sentido contrario a las agujas del reloj, entonces $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ se definen como las coordenadas del punto P que es el otro extremo de dicho arco.

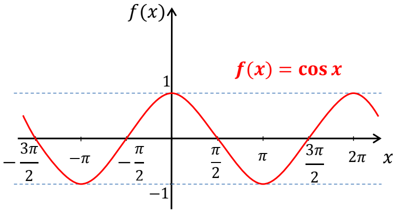


Las funciones trigonométricas: seno y coseno

El dominio de las funciones seno y coseno es $\mathbb{R}$, y ambas funciones toman valores comprendidos entre -1 y 1.

Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π, es decir, $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2K\pi)$ y $\cos(x) = \cos(x + 2K\pi)$, con $K \in \mathbb{Z}$.





Las funciones trigonométricas: tangente

La función tangente se define como el cociente de la función seno y la función coseno, cuando este cociente tiene sentido: $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$. Por tanto, no está definida en los puntos en los que se anula el coseno, esto es, en los puntos $\frac{\pi}{2} + K\pi$ con $K \in \mathbb{Z}$ y su imagen es $\mathbb{R}$.

También es periódica de periodo π, es decir, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + K\pi)$, con $K \in \mathbb{Z}$.

3. Derivadas e Integrales

- 3.1 Definición e interpretación geométrica de la derivada
- 3.2 Cálculo de derivadas
- 3.3 Aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones
- 3.4 Introducción al Cálculo Integral

Derivada de una función en un punto

Definición

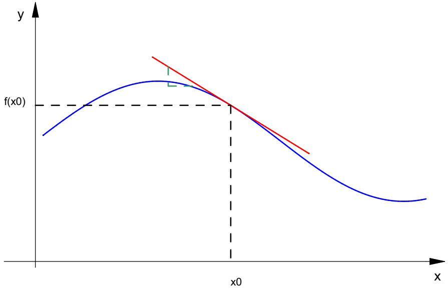
Dados un intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in (a, b)$, se dice que f es derivable en x_0 si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

El valor de este límite se denomina derivada de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$ (Otra forma de denotar la derivada es $\frac{df}{dx}(x_0)$).

Interpretación geométrica de la derivada

- Dados un intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in (a, b)$, la derivada de f en el punto de abscisa x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto x_0. Se denota por $f'(x_0)$ $(\frac{df}{dx}(x_0))$



Función derivada

Definición

Dada $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en todos los puntos de (a, b), se define la función derivada de f como aquélla que asigna a cada punto x la derivada de f en ese punto, $f'(x)$; es decir,

$$\begin{array}{rcl} f' : (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Si f' es derivable, su derivada se llama f'' (se lee derivada segunda). Así sucesivamente se definen $f''', f^4, \ldots, f^n$ (derivada tercera, derivada cuarta,. . ., derivada n-ésima)

Nota: Otra forma de denotar las derivadas es $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$ (derivada segunda) y en general $\frac{d^n f}{dx^n}$ (derivada n-ésima).

Derivadas de funciones elementales

- $\dfrac{d}{dx}(k) = 0,\ k \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$
- $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
- $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Álgebra de derivadas

Propiedades:

Sean f, g funciones definidas en un intervalo (a, b) y $x_0 \in (a, b)$. Si f y g son derivables en x_0 y $c \in \mathbb{R}$, entonces también son derivables en x_0 las funciones $f + g$, cf, $f \cdot g$ y se verifica:

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Si además $g(x_0) \neq 0$, entonces también f/g es derivable en x_0 y

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Regla de la cadena

Teorema

Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones tales que $f\big((a,b)\big)\subseteq(c,d)$. Si f es derivable en un punto $x_0\in(a,b)$ y g es derivable en $f(x_0)$, entonces $g\circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Ejemplo: $h(x)=\operatorname{sen}(x^5+3x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^5+3x \\ g(y)=\operatorname{sen}(y) \end{array}\right\} \Longrightarrow h'(x)=g'(f(x))f'(x)=\cos(x^5+3x)(5x^4+3)$$

Tabla de derivadas

- $\dfrac{d}{dx}(f^n(x)) = nf^{n-1}(x)f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\ln f(x)) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{e}^{f(x)}) = \mathrm{e}^{f(x)}\, f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(a^{f(x)}) = a^{f(x)} f'(x) \ln a$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} f(x)) = \cos f(x) f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\cos f(x)) = -\operatorname{sen} f(x) f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = (1+\operatorname{tg}^2 f(x))f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arctg} f(x)) = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
- $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$

Funciones crecientes y decrecientes

Teorema

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable. Entonces:

- $f'(x)\geq 0\quad\forall x\in(a,b)\;\Leftrightarrow\; f$ creciente en (a,b)
- $f'(x)\leq 0\quad\forall x\in(a,b)\;\Leftrightarrow\; f$ decreciente en (a,b)

Además

- $f'(x)> 0\quad\forall x\in(a,b)\;\Rightarrow\; f$ estrictamente creciente en (a,b)
- $f'(x)< 0\quad\forall x\in(a,b)\;\Rightarrow\; f$ estrictamente decreciente en (a,b)

Funciones cóncavas y convexas

Teorema

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable. Entonces:

- $f''(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a,b) \;\Leftrightarrow\; f$ convexa en (a,b)
- $f''(x) \leq 0 \;\; \forall x \in (a,b) \;\Leftrightarrow\; f$ cóncava en (a,b)

Además:

- $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f$ estrictamente convexa en (a,b)
- $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f$ estrictamente cóncava en (a,b)

2. Introducción al Cálculo Integral

- Integrar es la operación inversa de derivar.
  Dada una función f, integrar consiste en calcular una función F que al derivarla produce f.

Definición

Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y f y F dos funciones definidas en I. Se dice que F es una primitiva de f si F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también lo es $F(x) + C$ para cualquier constante $C \in \mathbb{R}$ porque sus derivadas coinciden y son $f(x)$.

Integral Indefinida

Definición

Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite primitiva. Se llama integral indefinida de f, y se denota por $\int f(x)\,dx$, al conjunto de todas las primitivas de f en I. Si F es una primitiva de f, se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Propiedades

Si f y g son dos funciones que admiten primitiva, entonces:

1. $\displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$

Integrales Inmediatas

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1) \qquad \int (f(x))^n f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C \qquad \int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,dx = \mathrm{e}^{f(x)} + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \int \cos(f(x)) f'(x)\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$$