Universidad de Valladolid
Departamento de Economía Aplicada

RELACIÓN DE PROBLEMAS

# Aritmética y Álgebra

**Curso 0**

2014-2015

1. Indique a qué conjuntos numéricos pertenece cada uno de los siguientes números:
   (a) 2. (b) $\pi$. (c) $\frac{-6}{2}$. (d) $\sqrt{16}$. (e) $2,123123123\ldots$. (f) 0.

2. Determine el máximo común divisor de los siguientes números enteros.
   (a) 20 y 16.
   (b) 4 y 10.
   (c) -10 y -17.
   (d) 124 y 70.
   (e) 4, 10 y 16.
   (f) 168 y 300.

3. Determine el mínimo común múltiplo de los siguientes números enteros.
   (a) 12 y 8.
   (b) 6 y 10.
   (c) 15 y 9.
   (d) 120 y 125.

4. Resuelva:
   (a) $5 \cdot (-2) - 3^2 \cdot 4$.
   (b) $3 \cdot 2 + 5 - 2^3$.
   (c) $2 \cdot ((-4) + 5^2) \cdot 4$.
   (d) $18 \div 3 \cdot 2$.
   (e) $18 \div (3 \cdot 2)$.
   (f) $19 - (-6) - 5 \div [(4^2 - 2) + 3 \cdot 2^3 \cdot (\frac{-1}{2})]$.

5. En las siguientes expresiones escriba los paréntesis necesarios para que cada expresión tenga el valor indicado.
   (a) $12 + 2 \div 2 = 7$.
   (b) $12 + 2 \div 2 = 13$.
   (c) $10 + 3 \cdot 4 - 3 = 13$.
   (d) $10 + 3 \cdot 4 - 2 = 20$.
   (e) $4 - 5 + 8 = -12$.
   (f) $-2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = -40$.
   (g) $-2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = -1$.

6. Simplifique las siguientes fracciones hasta obtener una irreducible.
   (a) $\frac{495}{825}$. (b) $\frac{14}{378}$. (c) $\frac{430}{1530}$.

7. Halle la fracción irreducible que es igual a los siguientes números racionales.
   (a) $5,44$.
   (b) $3,\widehat{26}$.
   (c) $1,18\widehat{3}$

8. Realice las siguientes operaciones:
   (a) $(2^3)^{-1} + \dfrac{2^3}{2^{-1}} + 2^{-1}2^3$.
   (b) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\left(\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{(ab)^{-3}}\right)^{-1}$.
   (c) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$.
   (d) $(1-\sqrt{18})(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}})$.
   (e) $\sqrt[3]{5^4} + 3\sqrt[3]{40}$.
   (f) $\sqrt[3]{16ab^2} + \sqrt[3]{250ab^2} + \sqrt[6]{4a^2b^4}$.
   (g) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$.
   (h) $\sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{2}-1}}\sqrt{\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}}$.
   (i) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}}\sqrt[6]{\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}}$.

9. Un producto costaba 5200 euros y se le aplica una rebaja del 25% ¿Cuál será su nuevo precio?

10. Después de rebajar el 15% de un producto, este pasa a costar 238 euros. ¿Cuánto costaba inicialmente?

11. Si compro en rebajas un producto por 1875 euros y su precio anterior era de 2500 euros, ¿cuál fue el porcentaje de rebaja aplicado?

12. Calcule los siguientes logaritmos decimales, sabiendo que $\log 2 = 0.3010$.
    (a) $\log 0.02$. (b) $\log \sqrt[4]{8}$. (c) $\log 5$. (d) $\log 0.0625$.

13. Sean $P(x) = x^3 - x^2 - 6$ y $Q(x) = 3x + 2$. Calcule:
    (a) $P(x) + Q(x)$.
    (b) $P(x) - Q(x)$.
    (c) $P(x) \cdot Q(x)$.
    (d) $5P(x)$.
    (e) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

14. Calcule la suma de polinomio racionales.
    (a) $\dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$.
    (b) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{x}{(x-3)^2}$.

15. Simplifique:
    (a) $\dfrac{(x+5)^2}{x^2-25}$.
    (b) $\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{(x-1)^2}$.

16. Factorice los siguientes polinomios:
    (a) $x^5 + 20x^3 + 100x$.
    (b) $6x^3 -^7 x^2 - 9x + 2$.

17. Resolver las siguientes ecuaciones:
    (a) $10x + 8 = 26 + 4x$.
    (b) $12x^2 - 39x - 36 = 0$.
    (c) $(x+1)^2 - x = x^2 + x - 4$.
    (d) $6x^2 + 10x + 8 = 0$.
    (e) $8x^2 + 32 = (x + 12)$.
    (f) $(1,02)^x = 3$.

18. Exprese mediante intervalos los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$.
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} |\, 5x - 11 > 9\}$.
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} |\, 2x - 3 < 3x, -2x > -1\}$.
   (c) $C = \{x \in \mathbb{R} |\, \frac{x+1}{x-2} > 0, x < -2\}$.
   (d) $D = \{x \in \mathbb{R} |\, \frac{6-2x}{5} > \frac{1-x}{10}\}$.
   (e) $E = \{x \in \mathbb{R} |\, e^{1-x^2} \leq e^{-3}\}$.
   (f) $F = \{x \in \mathbb{R} |\, -x^2 + 3x - 2 < 0\}$.
   (g) $G = \{x \in \mathbb{R} |\, x^2 - x + 6 \leq 0\}$.
   (h) $H = \{x \in \mathbb{R} |\, |x^2 + 2| \geq 6\}$.
   (i) $I = \{x \in \mathbb{R} |\, |x - 1| < 2\,|x - 3|\}$.

19. Desarrolle los siguientes valores absolutos.
   (a) $|\, 3x + 6 \,|$.
   (b) $|\, (x + 4)^2 \,|$.
   (c) $3x + |\, x - 8 \,|$.
   (d) $|\, x^2 - 3x + 2 \,|$.

20. La función de costes de producir $x$ unidades de un determinado bien viene dada por la expresión: $x^2 - 100x + 5500$. ¿Cuántas unidades se pueden fabricar si el presupuesto es exactamente 3000 euros? ¿Y con un presupuesto máximo de 3000 euros?

21. Encuentre los errores cometidos en los siguientes apartados y corríjalos cuando sea posible:

   (a) $a + b = c + d \Rightarrow a = c$ y $b = d$

   (b) $a + (0 \cdot b) = 0 \Rightarrow a = b = 0$

   (c) $ab = ac \Rightarrow b = c$

   (d) $a = 1 \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a^2 - 1 = a - 1 \Rightarrow (a + 1)(a - 1) = a - 1 \Rightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$

   (e) $a = b + c \Rightarrow a(a - b) = (b + c)(a - b) \Rightarrow a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \Rightarrow$
   $\Rightarrow a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc \Rightarrow a(a - b - c) = b(a - b - c) \Rightarrow a = b$

   (f) $(-a)^2 = a^2 \Rightarrow -a = a$

   (g) $(a - 1)^2 = (b - 1)^2 \Rightarrow a = b$

   (h) $a + b = 2c \Rightarrow (a + b)(a - b) = 2c(a - b) \Rightarrow a^2 - b^2 = 2ac - 2bc \Rightarrow$
   $\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 \Rightarrow (a - c)^2 = (b - c)^2 \Rightarrow a - c = b - c \Rightarrow a = b$

   (i) $a > 0$ y $2b - 1 < 2b \Rightarrow a > 0$ y $-2ab + a < -2ab \Rightarrow a > 0$ y $a < 0$.

   (j) $3 > 2 \Rightarrow 3 \cdot \ln \frac{1}{2} > 2 \cdot \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(\frac{1}{2})^3 > \ln(\frac{1}{2})^2 \Rightarrow (\frac{1}{2})^3 > (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{8} > \frac{1}{4}$.

   (k) $\frac{1}{a+\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} + a$.

   (l) $\frac{1}{a+\frac{1}{a}} = (a + a^{-1})^{-1} = a^{-1} + a = \frac{1}{a} + a$

   (m) $(a + b)^n = a^n + b^n$

   (n) $(a^b)^2 = a^{b^2}$

   (o) $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$.

Universidad de Valladolid
Departamento de Economía Aplicada

**Curso 0**
2014-2015

RELACIÓN DE PROBLEMAS

# Rectas y Cónicas. Funciones reales

1. Escriba la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $(5,-2)$ y $(2,4)$. ¿Cuál será la ecuación de la recta perpendicular a ésta y que pasa por el punto $(1,1)$?

2. Determine la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(-2,1)$ y tiene por vector direccional $(8,3)$. ¿Cuál es su pendiente?

3. Halle la ecuación de la recta que corta al eje de abcisas en $(4,0)$ y al de ordenadas en $(-3,0)$.

4. Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,-3)$ y es paralela a la recta $y = 7-2x$.

5. Estudie si las rectas $r$ y $s$ son paralelas. En caso contrario, calcule el punto de corte.
   (a) $r \equiv x - 3y = 8$ y $s \equiv 3x - y = 2$.
   (b) $r \equiv 2x - 3y = 4$ y $s \equiv -4x + 6y = 4$.

6. Calcule el valor del parámetro $a$ para que las rectas $(2-a)x+ay+4 = 0$ y $2ax-(2a+1)y-3 = 0$ sean paralelas.

7. Determine el centro y el radio de la circunferencia $x^2 - 10x + y^2 - 6y - 15 = 0$.

8. Encuentre la ecuación de la circunferencia centrada en el origen que es tangente a la recta $x + y = 10$.

9. Justifique que si a cada punto de una circunferencia genérica se le duplica su primera coordenada se obtiene una elipse.

10. Halle la ecuación de la elipse centrada en el origen cuyo semieje vertical duplica al horizontal y pasa por el punto (4,6).

11. Determine la hipérbola equilátera centrada en el origen con los ejes coordenados como asíntotas que es tangente a la recta $x + y = 16$.

12. Determine la hipérbola equilátera centrada en el origen con las bisectrices de los ejes coordenados como asíntotas que pasa por el punto $(5,4)$.

13. Represente gráficamente la parábola $y = x^2 - 6x + 8$

14. Determine la ecuación de la trayectoria de una bala de cañón que se ha disparado desde el origen de coordenadas e impacta en el suelo (eje de abscisas) a los 100 metros, llegando a alcanzar una altura máxima de 20 metros. [Indicación: la curva que describe el proyectil es una parábola invertida].

15. Calcule los dominios de definición de las siguientes funciones.
    (a) $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$.
    (b) $f_2(x) = \sqrt{x+3}$.
    (c) $f_3(x) = \ln \dfrac{2-x}{x+1}$.
    (d) $f_4(x) = \sqrt{x^2+x-2}$.
    (e) $f_5(x) = e^{\frac{5+x}{1+x}}$.
    (f) $f_6(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2-9}$.
    (g) $f_7(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$.
    (h) $f_8(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
    (i) $f_9(x) = \ln 1 - x^2$.

16. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ y $h(x) = e^{2x-1}$, realice las siguientes operaciones:
    (a) $f - 3g + h$.
    (b) $\dfrac{f}{h}$.
    (c) $fg^2$.
    (d) $f \circ g$.
    (e) $g \circ f$.
    (f) $f \circ g \circ h$.

17. Indique si las siguientes funciones son, o no, pares o impares.
    (a) $f(x) = e^x + e^{-x}$.
    (b) $g(x) = \operatorname{sen} x$.
    (c) $h(x) = x^3 + x - 1$.
    (d) $\varphi(x) = x^3 + x^2$.

18. Indique si las siguientes funciones son, o no, cóncavas o convexas.
    (a) $f(x) = \ln x$.
    (b) $g(x) = \cos x$.
    (c) $h(x) = x^2$.
    (d) $\varphi(x) = 1 - x^2$.

19. Demuestre que las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$ son inyectivas.

20. Justifique que $x^{\ln y} = y^{\ln x}$ para cualesquiera $x, y > 0$.

21. Dada $f(x) = e^x$, verifique que $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$.

Universidad de Valladolid
Departamento de Economía Aplicada

RELACIÓN DE PROBLEMAS

# Derivadas

**Curso 0**

2014-2015

1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$

(b) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 6x + 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$

(d) $f(x) = x^2 \ln x$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{5x-1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x}}$

(g) $f(x) = (2x+1)^3$

(h) $f(x) = (3x+1)^3(1-5x)^5$

(i) $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{2-\cos x}$

(j) $f(x) = \operatorname{sen}(3x+1)$

(k) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2+1)$

(l) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

(m) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 \operatorname{sen} x}$

(n) $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$

(o) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(p) $f(x) = \operatorname{tg}^2(\mathrm{e}^x)$

(q) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x(x-1)}{x-2}\right)$

(r) $f(x) = \ln\left(e^{x^3+\ln(\operatorname{sen} x)}\right)$

(s) $f(x) = \dfrac{-4x}{(x+2)^3}$

(t) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

(u) $f(x) = ax^2 + bx + c$

(v) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{ax}$

(w) $f(x) = \dfrac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$

(x) $f(x) = \ln^5(3x)$

(y) $f(x) = \operatorname{tg}(\ln(1+x^2))$

2. Halle las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^4 - 6x^2$

(b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$

(c) $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$

(d) $f(x) = 3(x^2-1)^3$

(e) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)\,\mathrm{e}^x$

(f) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

3. Determine los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

(b) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

(c) $f(x) = x^4 + 2x^2$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

(e) $f(x) = \mathrm{e}^x(x - 1)$.

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

(g) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x + 2}$.

(h) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$.

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$.

Universidad de Valladolid
Departamento de Economía Aplicada

RELACIÓN DE PROBLEMAS

# Integrales

**Curso 0**

2014-2015

1. Resuelva las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx.$

(c) $\displaystyle\int (3x^3 - 5x^2 + 3x + 4)\,dx.$

(d) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + 7\cos x - 1)\,dx.$

(e) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\,dx.$

(f) $\displaystyle\int (x+1)^2\,dx.$

(g) $\displaystyle\int (4x+3)^2\,dx.$

(h) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}\,dx.$

(i) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx.$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx.$

(k) $\displaystyle\int (x^2-x-1)^3(2x-1)\,dx.$

(l) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x+1}\,dx.$

(m) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x+6)\,dx.$

(n) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x^2+3)\,dx.$

(o) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)\,dx.$

(p) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,dx.$

(q) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2}}\,dx.$

(r) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+4x}{x}\,dx.$

(s) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

(t) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

(u) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx.$

(w) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\,dx.$

(y) $\displaystyle\int \left(\cos 2x + \frac{3}{2x+5}\right)dx.$