ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTÓNICAS, INGENIERÍA DEL TERRENO Y MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TESIS DOCTORAL:

MODELO DE COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO DEGRADABLE: APLICACIÓN AL ELEMENTO BARRA 2D

Presentada por **EDWIN LENIN CHICA ARRIETA** para optar al grado de doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:

ANTOLÍN LORENZANA IBÁN

Dr. Ingeniero Industrial

JOSÉ MARÍA GARCÍA TERÁN

Dr. Ingeniero Industrial

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTÓNICAS, INGENIERÍA DEL TERRENO Y MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TESIS DOCTORAL:

MODELO DE COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO DEGRADABLE: APLICACIÓN AL ELEMENTO BARRA 2D.

Presentada por:

D. EDWIN LENIN CHICA ARRIETA

Ingeniero Mecánico de la Universidad de Antioquia. (Medellín, Colombia)

Dirigida por:

Dr. D. ANTOLÍN LORENZANA IBÁN

Profesor Titular en el Departamento de Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del Terreno, Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad de Valladolid.

Dr. D. JOSÉ MARÍA GARCÍA TERÁN

Profesor Titular en el Departamento de Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del Terreno, Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad de Valladolid.

Esta Tesis Doctoral fue leída en la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Valladolid el día 23 de julio del 2009, estando compuesto el tribunal calificador por:

Dr. D. José Cañas Delgado
Presidente

Dr. D. Antonio Foces Mediavilla
Secretario

Dr. D. Jesús Moreno Revilla
Vocal primero

Dr.D. Luis Gracia Villa
Vocal segundo

Dra. D. María Jesús Lamela Rey
Vocal tercero

Obteniendo la calificación de:

“Las estructuras no se construyen para que resistan, sino para un fin último que es su razón de ser. La resistencia es una condición necesaria pero no es la condición única, ni siquiera la más importante.”

Eduardo Torroja

Agradecimientos

"La vida no es tan corta que no haya siempre tiempo para la cortesía"
Ralph Waldo Emerson

Doy gracias a las diferentes personas e instituciones que, en mayor o menor medida, han contribuido a la realización de esta tesis doctoral, en especial:

A la Fundación CARTIF quien, en colaboración con el programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo CYTED y la Universidad de Valladolid, me ha concedido durante estos años la beca sin la cual mi doctorado y, por lo tanto, el desarrollo de la tesis jamás habrían sido posibles.

A la Universidad de Antioquía por brindarme el apoyo y la oportunidad de realizar mis estudios doctorales.

A mi tutor Dr. D. Antolín Lorenzana Ibán por su orientación y apoyo en todo momento. Por sus aportaciones y consejos en el conjunto de este trabajo, gracias a los cuales se ha conseguido su desarrollo.

A Dr. D. José María García Terán, codirector de esta tesis, por sus aportaciones técnicas en el desarrollo de la misma.

A mis padres, hermanos, novia y familiares por su inagotable cariño, aliento y motivación.

A todos mis amigos que me han estimulado y han estado a mi lado siempre que los he necesitado; y por los ratos inolvidables que hemos pasado.

A mis compañeros de trabajo del Área de Diseño Estructural de la Fundación CARTIF por la confianza y apoyo que me han brindado durante mi estancia en el centro. Y en especial a D. Pablo López Reyes por su colaboración en el desarrollo e implementación del algoritmo computacional.

A todos ellos, mis más sinceros agradecimientos.

Valladolid, España — Edwin L Chica
Marzo 15, 2009

Índice general

Índice general

Índice de tablas

Índice de tablas

Índice de figuras

Índice de figuras

Resumen

Resumen

Para el cálculo de estructuras, las normativas en general (nacionales o extranjeras, vigentes o futuras) incluyen varias restricciones y exigen ciertas comprobaciones. El diseño bajo estas restricciones es sencillo, ya que generalmente es suficiente realizar un análisis elástico. Pero si las cargas son más grandes o las resistencias son más pequeñas, las estructuras pueden empezar a perder sus propiedades resistentes, apareciendo daños irreversibles y pudiendo quedar eventualmente inservibles. Hay muchas razones por las que aparecen cargas superiores que las que se utilizaron para el diseño elástico (ciertas sobrecargas de uso, cargas accidentales, cambio de finalidad de la estructura, sismos, etc.) y por las que la resistencia puede disminuir (envejecimiento, fatiga, fuego, etc.). La evaluación de la vulnerabilidad estructural bajo estas condiciones no es tan fácil como en el caso del análisis elástico. Para ello hará falta emplear modelos de análisis inelásticos o análisis plástico que aún no están lo suficientemente desarrollados como para predecir con exactitud la carga de colapso de un sistema estructural. Es posible relajar ciertas hipótesis que han sido consideradas en los modelos de análisis plástico convencionales (que involucran el concepto de rótula plástica) o considerar fenómenos que han sido descuidados en los modelos desarrollados por otros autores, tales como la no linealidad geométrica, la propagación de grietas, los efectos de la fatiga mecánica o la pérdida de rigidez por la acumulación de deformación plástica, entre otros.

La determinación de la carga y el mecanismo de colapso constituyen los objetivos fundamentales del análisis plástico de estructuras. Con el desarrollo de esta tesis se busca presentar un modelo computacional monodimensional para el análisis elastoplástico degradable de estructuras de barras 2D, considerando la no linealidad del material, así como la pérdida eventual de rigidez de las barras por la acumulación de deformación plástica y su influencia sobre la carga final de colapso de la estructura.

El daño del material es cuantificado a través de una variable escalar asociada a la sección, que ha sido acoplada a las ecuaciones constitutivas de la mecánica de sólidos que describen el comportamiento de una estructura de barras, a través de las hipótesis de deformación equivalente adoptada en la *mecánica de daño continuo* y las leyes de flujo asociadas (evolución del daño mecánico, variación de los

desplazamientos elastoplásticos, etc.). La variable daño ha sido incorporada a la función de fluencia del material, obteniendo una superficie, denominada "de agotamiento" en términos del esfuerzo resultante (fuerza axil, fuerza cortante y momento flector) y del daño producido en la sección de la barra.

En este estudio se han considerado las distintas combinaciones de esfuerzos acoplados que dan lugar a tensiones que producen agotamiento de forma súbita en la sección, siguiendo el modelo de rótula, y que originan desplazamientos relativos acoplados asociados a un único grado de libertad. Por ello, en vez de utilizar el concepto de rótula plástica, se habla de sección agotada, definida como aquella en la que los esfuerzos internos y el daño alcanzan un valor concreto para el que se produce un grado de libertad interna "combinado", no identificado con ninguno de los grados de libertad simple sino con una combinación de ellos. Según esto, el conjunto de esfuerzos flector, axil y cortante (M_z, N_x, T_y, respectivamente) y la variable daño D, acoplados según la función de agotamiento (Z_{MNVD}) que aparecen en la sección bajo estudio, determinan un único criterio de agotamiento (equivalente al momento plástico para el caso de rótula plástica) a partir del cual se considera que se origina un giro relativo y unos desplazamientos longitudinal y transversal relativos acoplados entre sí (θ_z, u_x, v_y, respectivamente), suponiendo el conjunto de estos tres desplazamientos relativos como un único grado de libertad interna en el sistema (equivalente al giro relativo para el caso de rótula plástica).

Se ha definido además una nueva matriz de rigidez, que relaciona el vector de esfuerzos con el vector de desplazamiento elastoplástico, a la que se ha denominado *matriz de rigidez elastoplástica degradable*, que tiene en cuenta las no linealidades del material y el eventual daño de las barras en la medida en la que en alguno de sus extremos se llega al agotamiento resistente. Las limitaciones impuestas al modelo son: aplicación a estructuras planas cargadas sobre el plano, barra de sección rectangular (bisimétrica), plasticidad ideal (sin endurecimiento), obtención de las tensiones equivalentes mediante la hipótesis de *von Mises* y modelo de barra de *Navier-Bernoulli* o mediante criterios energéticos, con estudio de primer orden (sin efecto de pandeo) y aparición del daño por deformación plástica.

Los modelos desarrollados han sido implementados en una aplicación informática que ha permitido realizar estudios del comportamiento elastoplástico degradable de distintas estructuras de barras. Se han comparado los resultados obtenidos con las distintas funciones de agotamiento y daño facilitando así la interpretación de la teoría desarrollada. El modelo de cálculo se caracteriza por ser incremental e iterativo hasta la determinación del mecanismo y carga de colapso de la estructura.

En conclusión, los conceptos anteriormente expuestos forman la base de una nueva propuesta de ***comportamiento elastoplástico degradable acoplado*** de elementos tipo barra, en la que se presenta la matriz de rigidez y la función de agotamiento de una barra degradada.

Abstract

The usual building codes (national or international, current or future) in the field of structure calculation include restrictions and require certain verifications. The design process under these restrictions is simple, because it is generally enough to perform an elastic analysis. But if the loads are higher or the resistance is lower, the structures could lose their resistant properties, irreversible damage could appear and the structures could eventually become out of use. There are many reasons why larger loads than the ones used in the elastic design could appear (occupancy overload, accidental loads, change in the purpose of the structure, earthquakes, etc.), and also reasons why resistance could decrease (ageing, fatigue, fire, etc.). The structural vulnerability assessment under these conditions is not as easy as in the elastic case. It will be necessary to use inelastic or plastic analysis models, which are not yet developed enough to predict accurately the collapse load of a structure. It is possible to not take into account some hypothesis, which involve the concept of plastic hinge and that are considered in some conventional plastic analysis methods. It is also possible to consider some phenomenon that have been ignored in other author's models, such as geometric nonlinearity, crack propagation, mechanic fatigue effects or loss of rigidity due to the accumulation of plastic strain, among others.

The main objective of the plastic analysis of structures is to determine the collapse load and the collapse mechanism. This Doctoral Thesis develops a monodimensional computational model for the elastoplastic degradable analysis of 2D beam structures, considering material nonlinearities, and also the possible loss of rigidity of the beams due to the accumulation of plastic strain, and its influence on the final collapse load of the structure.

The damage of the material is quantified using a scalar variable associated to the section, which has been coupled to the constitutive equations that describe the behaviour of a framed structure, through the strain equivalence hypothesis adopted in the *Continuum Damage Mechanics* and the associated flow rules (mechanic damage evolution, elastoplastic displacements variation, etc.). Incorporating the damage variable to the yield function of the material, we obtain the yield surface which depends on the resultant stresses (axial force, shear force and bending moment) and the damage in the section of the beam.

In this study, we have considered the different combinations of the coupled forces that lead to the stresses that cause the sudden yielding of the section, according to the model of plastic hinge, and origin the coupled relative displacements associated to a single degree of freedom. That is why, instead of using the concept of plastic hinge, we consider a plastified section, defined as the one in which the plastification state is obtained by combining the considered stresses and the damage of the material. It produces an internal "combined" degree of freedom that can be split into different relative displacements. According to that, bending moment, axial force and shear force (M_z, N_x, T_y, respectively) and the damage variable D of the plastified section, coupled in the plastification function (Z_{MNVD}), determine a single plastification criterion (equivalent to the bending moment in the case of plastic hinge) and origin a relative rotation and longitudinal and transversal displacements (θ_z, u_x, v_y, respectively), assuming this set of the three relative displacements as one internal degree of freedom in the system (equivalent to the relative rotation in the case of plastic hinge).

We have also defined a new stiffness matrix that relates the stress vector with the elastoplastic displacement vector, which we have called *elastoplastic degradable stiffness matrix*. It takes into account the material nonlinearities and the damage of the beams when they yield. The limitations imposed to the model are: applicable only to framed structures loaded only in its same plane, rectangular (bisymmetric) cross-section beams, ideal plasticity (without hardening), *von Mises* hypothesis for obtaining the equivalent stresses, *Navier-Bernoulli's* first-order beam model (without buckling effect) and damage only due to the accumulation of plastic deformation.

The behaviour model developed has been implemented in a computer application that allows us to perform different studies of the elastoplastic degradable behaviour of framed structures. We have compared the results obtained with different yielding functions, making easier the interpretation of the developed theory. The calculation model is incremental and iterative until the determination of the collapse mechanism and collapse load of the structure.

In conclusion, the concepts exposed are the basis for a new proposal of *coupled elastoplastic degradable behaviour* for beam elements, in which we propose the expression of the stiffness matrix for a damaged element and the yield function of a damaged beam.

Capítulo 1
Introducción

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción y objetivos de la tesis

Una estructura pierde su funcionalidad por la aparición de alguna inestabilidad, por las deformaciones excesivas o por la fatiga, entre otras causas. Adicionalmente las estructuras construidas con un material de unas características adecuadas de ductilidad pueden seguir soportando cargas crecientes pese a que en algún lugar el material haya abandonado el rango elástico. Si el proceso de carga continúa, las secciones son sometidas a tensiones cada vez mayores hasta que finalmente se llega al colapso o agotamiento resistente, siendo ésta otra causa de fallo estructural y la que nos ocupa en este trabajo.

La determinación de la carga de colapso constituye un problema complejo en el que interviene multitud de factores, entre los que se pueden destacar el comportamiento no lineal geométrico y del material, la adecuada modelización del proceso de plastificación, la variación de propiedades resistentes con el tiempo o con la deformación, la determinación de la evolución del daño del material y su influencia en la pérdida de rigidez de la estructura, entre otros.

El proceso de determinación de la carga de colapso o carga última es conocido actualmente como análisis plástico, por contraposición al análisis elástico, basado en la consideración de que en ningún lugar de la estructura el material abandone el régimen elástico. En su favor se aduce que permite obtener diseños más racionales, una notable economía de los materiales, etc.

La evaluación de la carga última de la estructura es esencial para asegurar el cumplimiento de las condiciones que garanticen la funcionalidad y durabilidad de la misma. El estado tensodeformacional de una estructura varía de forma continua como consecuencia de fenómenos como la fluencia y la evolución del daño del material, producto del crecimiento de micro-defectos causados por la acumulación de deformación plástica. La fluencia plástica y el daño del material de la estructura producen pérdidas de rigidez que afectan de manera considerable a las tensiones y deformaciones. Todo ello ocasiona una menor capacidad resistente del material y la menor capacidad portante de la sección y de la estructura en su conjunto.

En definitiva, el análisis límite podría resumirse así: dado un medio continuo con unas determinadas condiciones de contorno sometido a una determinada carga (fuerzas), el objetivo es encontrar el menor valor de la carga que provocará el colapso, o lo que es lo mismo, la mínima carga para la que los desplazamientos no serán admisibles. El problema también permitiría obtener otros resultados secundarios como, por ejemplo, los campos de tensiones, las zonas de plastificación, la redistribución de esfuerzos, etc. El comportamiento plástico del material está definido por una deformación que se caracteriza por ser en parte irreversible, independiente del tiempo y dependiente de la historia de la carga. De esta forma, si se aumenta de manera progresiva el estado de cargas, después de un comportamiento elástico inicial en el que las tensiones y deformaciones son proporcionales, aparece un comportamiento plástico del material en el que se rompe esa proporción. Este comportamiento sólo se manifiesta cuando se ha conseguido un cierto nivel de tensión, nivel que varía con el estado de deformación inicial del material, la temperatura y el proceso de carga, de acuerdo con los resultados experimentales.

Según la teoría de la plasticidad aplicada al entorno de un punto, se considera que cuando un cuerpo se somete a una carga monótona creciente, en algún instante un punto del sistema alcanzará una combinación de tensiones que producirá la variación en su estructura cristalina y, por lo tanto, de su comportamiento, pasando éste de ser elástico a plástico, y afectando a los puntos del entorno produciendo una redistribución del estado de tensiones. Como consecuencia de esto, se inicia la plastificación del cuerpo por dicho punto y según va aumentando la solicitación se va extendiendo a los puntos de su entorno. Una vez alcanzado un cierto grado de deformación plástica comienza a presentarse un fenómeno de deterioro irreversible del material, para el cual no sólo se producen deformaciones permanentes sino también una resistencia cada vez menor del material con la consiguiente pérdida de rigidez de los elementos estructurales, lo que complica aún más el análisis plástico. Este deterioro de las capacidades del material es conocido como daño y ha sido estudiado desde hace algún tiempo. La *mecánica del daño continuo*, iniciada en 1958 por *Kachanov* propone la evaluación de este deterioro progresivo a través de una variable interna "El daño". Los conceptos de esfuerzo efectivo y equivalencia en las deformaciones, introducidos en las dos siguientes décadas por *Rabotnov* y *Lemaitre* complementan las observaciones iniciales de *Kachanov*. En la década de los ochenta la teoría de la *mecánica del daño continuo* es establecida sobre bases más rigurosas utilizando conceptos derivados de la termodinámica y micromecánica.

El objetivo de esta tesis es la obtención de un modelo mecánico y el algoritmo computacional correspondiente que permita predecir el estado último de cargas de una estructura, mediante un proceso de análisis incremental e iterativo, utilizando descomposición aditiva de la deformación en sus componentes elástica y plástica, determinando las secciones agotadas según distintas hipótesis de fluencia y procesos de carga variable respecto del pseudotiempo y considerando la pérdida de rigidez del material debido al aumento de la deformación plástica.

Para el desarrollo de este trabajo, inicialmente, se realiza una revisión de los modelos empleados en la *mecánica de los medios continuos* referentes al análisis estructural. Seguidamente, basándose en los principios de la *mecánica del daño continuo*, se desarrolla un modelo de degradación-plasticidad concentrado, a partir de éste se implementa un algoritmo computacional que permite realizar análisis elásticos, elastoplásticos y elastoplásticos degradables de una estructura de barras. Además, se presenta una comparación entre diversos casos de estructuras sometidas a distintos tipos de carga que aparecen en la literatura y los obtenidos empleando el modelo presentado. El desarrollo numérico se realiza mediante el *Método de los Elementos Finitos* (MEF) aplicado a elementos estructurales tipo barra 2D. El comportamiento inicial del sistema en estudio será elástico lineal y, debido a un proceso de carga cuasiestática variable respecto del pseudotiempo, el comportamiento del material evolucionará y pasará a ser elastoplástico con acoplamiento tanto de esfuerzos como de desplazamientos. Para ello, se han asumido hipótesis clásicas, tales como: elemento viga de *Navier-Bernoulli*, homogeneidad e isotropía, sección constante, criterio de plastificación de *von Mises*, hipótesis de deformación y esfuerzo equivalente, y comportamiento elastoplástico del material, entre otras hipótesis identificadas detalladas más adelante.

La aplicación computacional realizada sobre la base del modelo desarrollado permite obtener resultados numéricos adecuados, capaces de reproducir tanto resultados de ensayos experimentales como aquellos presentados por otros autores mediante métodos computacionales alternativos.

1.2. Organización y estructura de la tesis

La memoria de la tesis se ha dividido en 8 capítulos y cuatro anexos. A continuación, se describe brevemente el contenido de cada uno de ellos.

Tras este primer capítulo de introducción, se presenta en el segundo un resumen del estado del arte referente al análisis elastoplástico de estructuras y de la teoría del daño mecánico, resaltando los modelos empleados en la actualidad para cuantificar la evolución del daño mecánico en metales dúctiles y los modelos acoplados de daño con la teoría de la plasticidad.

En el tercer capítulo se muestran las relaciones existentes entre esfuerzos y deformaciones en el marco de la teoría de la plasticidad. Se presentan, además, los conceptos y las hipótesis básicas de la *mecánica del daño continuo*, y se describen los modelos empleados para cuantificar el daño mecánico en materiales dúctiles. En este capítulo se exponen las bases teóricas que facilitan la comprensión de los enfoques que se plantean en los siguientes.

El cuarto capítulo es la parte fundamental de la tesis. En él se presentan dos modelos de comportamiento elastoplástico degradable del elemento barra 2D para la simulación númerica del colapso de pórticos planos. Los modelos están basados en los principios de la *mecánica del daño de los medios continuo*s y en la teoría de la plasticidad.

En el quinto capítulo se presenta el procedimiento computacional utilizado para la implementación de los modelos desarrollados en problemas prácticos en ingeniería estructural.

En el sexto capítulo se desarrollan ejemplos de aplicación de todo lo anterior, indicando paso a paso el proceso de generación del mecanismo de colapso del sistema estructural para las distintas funciones de plastificación. Además, se presentan comparaciones con los resultados numéricos obtenidos con los modelos de evolución del daño de diversos autores.

En el séptimo capítulo se recogen las conclusiones del trabajo realizado, así como las líneas de investigación futuras, incluyendo una relación de las contribuciones originales de la tesis. Por último, en el capítulo octavo se presentan todas las referencias citadas a lo largo del texto y la lista de símbolos empleados.

En el anexo A se presenta una descripción de las técnicas empleadas para la medición de la variable daño. Los anexos B y C detallan algunos de los modelos de daños referenciados en la literatura, empleados para describir el comportamiento físico de un material ante diferentes tipos de solicitación. En el anexo D se presenta la descripción general de la aplicación informática desarrollada.

Capítulo 2
Estado del arte

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Introducción

En este capítulo se realiza una breve introducción sobre el desarrollo de la teoría de la plasticidad y daño en medios continuos. A continuación se presenta el estado del arte que hace referencia al estudio elastoplástico en elementos tipo barra incluyendo, así mismo, la posibilidad de daño por deformación plástica acumulada.

2.2. Antecedentes históricos

La teoría de la elasticidad fue desarrollada por autores como *Bernoulli* (1667-1748), *Hooke* (1635-1703), *Euler* (1707-1783), *Coulomb* (1736-1806), *Navier* (1785-1836) y *Cauchy* (1789-1857) entre otros, que obtuvieron las ecuaciones fundamentales y desarrollaron el concepto de tensor de tensiones y deformaciones. Sin embargo, la teoría del comportamiento plástico del material no comenzó a desarrollarse hasta 1864 cuando *Tresca* (1814-1885) publicó una serie de experimentos sobre extrusión en los que planteaba la fluencia plástica del metal, si bien para el caso del estudio de suelos ya había sido indicada por autores como *Coulomb*, *Poncelet* (1788-1867) y *Rankine* (1820-1872).

Los criterios desarrollados por *Tresca* fueron aplicados por *Saint-Venant* (1797-1886) para el estudio de un cilindro parcialmente plastificado. Éste planteó que el estado de tensiones que aparecía en un punto con comportamiento elastoplástico no dependía de la magnitud de las deformaciones totales, sino de la variación de la deformación, siendo *Levy* (1865-1971) quien desarrolló un modelo de flujo tridimensional basado en las teorías de *Saint-Venant*.

En esa misma época, *Bauschinger* (1834-1893) realizó experimentos sobre la variación del límite elástico y de fluencia en función del tiempo y de los ciclos de carga y descarga, efecto que lleva su nombre.

No hubo desarrollos significativos hasta finales del siglo XIX en que *Guest* estudió la plastificación de tubos bajo la combinación de esfuerzo axil y presión interna, obteniendo resultados muy aproximados a los obtenidos por *Tresca*.

En la década siguiente, *von Mises* [97](1883-1953) y *Hencky* (1855-1952) desarrollaron nuevos criterios para la plastificación de materiales basados en que la fluencia se produce cuando la energía de deformación, asociada a la componente desviadora del tensor de tensiones, alcanza un valor crítico.

Investigadores reseñables de esta época son *Prandtl* [72] (1875-1953), *von Karman* (1881-1963), pero no fue hasta 1926 cuando *Lode* [53] demostró experimentalmente que el criterio de *Levy-Mises* era el más adecuado para su aplicación en metales.

La teoría de *von Mises* fue generalizada en dos direcciones: una por *Reuss*, que introdujo la componente elástica de la deformación, comprobada experimentalmente por *Hohenemser*; y la otra por *Schmidt* y *Odquist*, que demostraron que el endurecimiento por deformación puede introducirse en el esquema de las ecuaciones de *Levy-Mises*. Con ellas queda definida la base de la teoría clásica de la plasticidad.

En los años 30, *Bridgman* [10] experimentó sobre flujos a altas presiones, obteniendo relaciones entre el cambio de volumen porcentual y la presión aplicada. En la década de los 40, autores como *Prager*, *Drucker* [27] y otros obtuvieron las leyes del comportamiento del material teniendo en cuenta el efecto del endurecimiento. *Melan* incorporó los parámetros de endurecimiento para las ecuaciones constitutivas en superficies de plastificación regulares y *Koiter* lo generalizó a materiales con superficies singulares. En 1950, *Hill* [37, 38] recopiló todos los datos anteriores y propuso métodos clásicos de resolución.

Cuando cada punto de un sólido está sometido a incrementos proporcionales de tensiones las leyes de comportamiento pueden ser integradas, obteniéndose relaciones entre las tensiones totales y las deformaciones plásticas totales. Mientras que las leyes de comportamiento integrales dan lugar al método paso a paso de análisis, las leyes totales permiten en ciertos casos prescindir de la historia de la carga y dan lugar a métodos directos de análisis. *Hencky*, en 1924, introdujo tales leyes.

Kacinczy, en 1914, fue el primero en investigar la reserva de resistencia plástica existente en una estructura hiperestática, introduciendo los conceptos de rótula plástica y mecanismo de colapso.

Los primeros autores que trataron el análisis límite fueron V*an den Brock*, *Barker* [3], *Horne* [39], *Heyman*, *Neal* [66], *Beedle*, *Heyman* y *Hodge*; entre 1955 y 1960. Este tema fue impulsado posteriormente por *Greenberg*, *Prager* y *Hill*, que establecieron de forma rigurosa los teoremas básicos.

El caso de cargas variables fue estudiado por *Bleich* en 1932, que trató estructuras con un sólo grado de hiperestabilidad. *Melan* estableció teoremas más generales y *Koiter* el teorema dual.

La unicidad de la distribución de tensiones fue estudiada por *Lee*, desarrollando *Hill* los problemas de unicidad y estabilidad.

A partir de esta época, y debido a la aparición del ordenador, hubo un relanzamiento de los estudios en dos direcciones: la aplicación de la teoría a la resolución de problemas utilizando métodos numéricos y el desarrollo de nuevas teorías para problemas y materiales complejos.

El primer trabajo que aplicó programación lineal al análisis límite de estructuras fue debido a *Charnes* y *Greenberg* en 1951; a partir del cual dicha herramienta matemática se aplicó sistemáticamente a los distintos problemas de cálculo plástico, análisis límite directo, cargas variables, análisis límite incremental, grandes desplazamientos y diseño.

En estas líneas trabajan autores como *Hinton*, *Owen* [70], *Zienkiewicz* [105, 106], *Oden* y *Meldenson* [61] utilizando el *Método de los Elementos Finitos*; *Cruse* y *Brebbia* empleando el *Método de los Elementos de Contorno* al campo plástico. Si bien, fundamentalmente aplicados a problemas de elastoplasticidad 2D.

Dentro de las muy variadas aplicaciones prácticas de esta teoría se encuentra el estudio del comportamiento de estructuras metálicas cuando parte del material se encuentra fuera del dominio de comportamiento elástico. Como autores contemporáneos dentro de este campo se destacan los textos de *Alarcón* [2], *Doblaré* [25], *Cañas* [13], *Neal* y *Moy*, que desarrollan estudios estructurales teniendo en cuenta las condiciones últimas o de colapso de las estructuras.

En base a los postulados iniciales del comportamiento elastoplástico del material y utilizando los métodos numéricos asociados a los procesos informáticos (siendo el que más popularidad ha alcanzado el *Método de los Elementos Finitos*, MEF), distintos autores desarrollan procesos de cálculo para aplicarlos a las estructuras de barras. En este campo, en la época actual, destacan las aportaciones de autores como *Tin-Loi* [93, 94, 101, 62], *Wong* [99, 102] y *Möller* [63], entre otros.

2.3. Estado del arte del análisis elastoplástico de estructuras

El objetivo de los estudios elastoplásticos de sistemas estructurales de los autores contemporáneos, referenciados anteriormente mediante el MEF, es la determinación del estado último de las estructuras; conocimiento crucial en casos límite como puede ser el comportamiento ante sobrecargas, sismos, etc. Para ello se plantean modelos bidimensionales o tridimensionales con discretización en distintos elementos con comportamiento elastoplástico, modelizando los estados de carga adecuadamente.

En el estudio del comportamiento bidimensional de la estructura en el dominio de la sección se pueden tener en cuenta distintos esfuerzos (flector, axil y cortante). Las funciones de plastificación que nos indican la combinación de esfuerzos que hacen que la sección plastifique dependen de los esfuerzos considerados y de la geometría de la sección a la que se aplica; o lo que es equivalente, del estado de tensiones existente en la sección. Estas tensiones son las que van a provocar que se alcance el estado límite de tensión elástica, según la hipótesis de plastificación elegida en algún punto de la sección, lo que genera el comienzo del proceso de la plastificación. Al afectar este proceso a todos los puntos de la sección se considera que ésta ha plastificado de forma completa.

Distintos autores contemporáneos [13, 59, 66] plantean funciones de plastificación para el elemento barra 2D teniendo en cuenta el efecto del momento flector (usado clásicamente) o combinaciones de esfuerzo flector y axil, o flector y cortante, o todos simultáneamente. Investigaciones más recientes [63] permiten determinar el comportamiento de la sección plastificada después de que se haya producido la plastificación, a partir del gradiente de la función de plastificación. Sin embargo, o bien los estudios se desarrollan teniendo en cuenta sólo los esfuerzos flector y axil, o flector y cortante; o bien utilizan simplificaciones bilineales de la función de plastificación.

Como antecedentes a esta tesis, los directores de la misma han planteado un modelo basado en el comportamiento plástico a nivel de punto, pero expresado en función de las variables tradicionales del modelo monodimensional de barra de *Navier-Bernoulli*. Se ha llegado, tras ciertas hipótesis, al concepto de sección plastificada (en lugar del de rótula plástica), cumpliendo el modelo propuesto todas las exigencias del comportamiento plástico. (Figura 2.1 [92]).

De forma resumida, el comportamiento elastoplástico de un determinado elemento finito viene usualmente gobernado por la matriz de rigidez elastoplástica K^{ep} (figura 2.1) donde, como es sabido, intervienen la matriz de rigidez elástica K_T y las derivadas de la función de plastificación Z con respecto a las tensiones [13, 55, 65, 85, 105]. La extensión de esta formulación al caso de barras [63, 76, 100] lleva a una expresión similar donde juega un papel fundamental la función de plastificación y sus derivadas con respecto a los esfuerzos N, V y M. Esta función expresa la combinación de esfuerzos que llevan a la plastificación completa de la sección para una determinada carga.

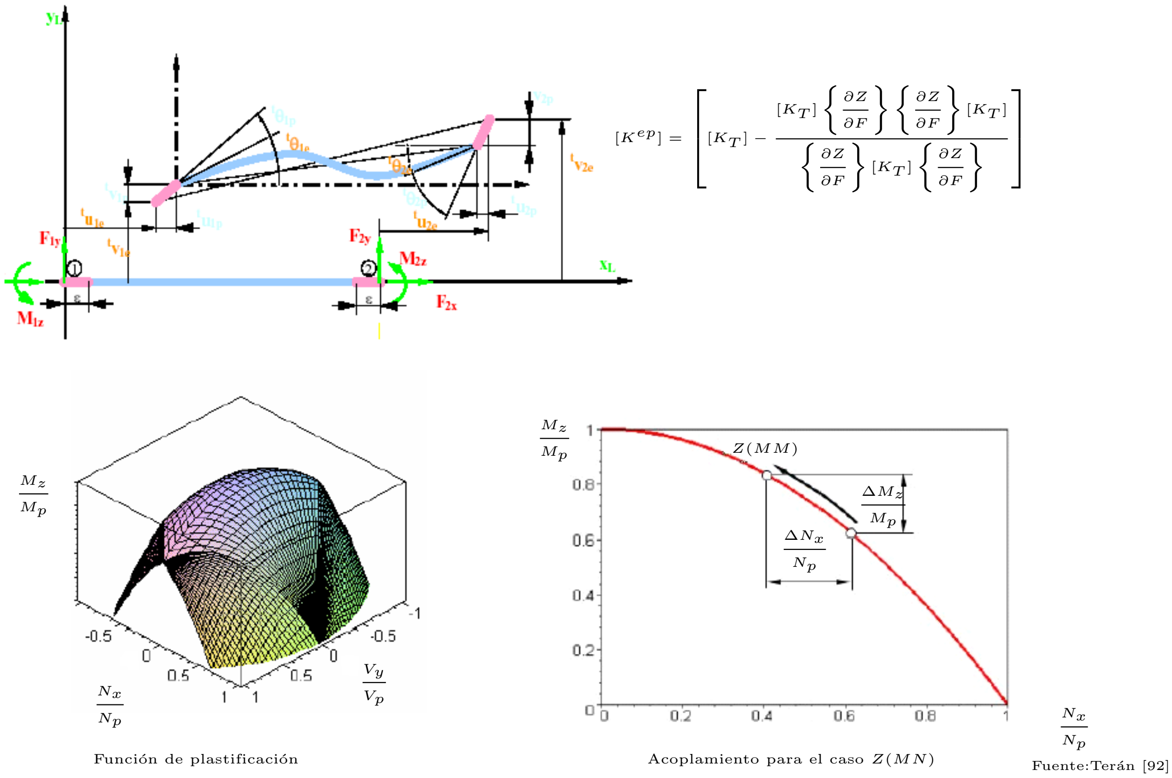


Figura 2.1: Elemento barra 2D elastoplástico

Para casos simples en los que se considere que esta función depende sólo del momento flector, esta formulación lleva estrictamente al modelo tradicional de rótula plástica. Sin embargo, si adicionalmente se considera la influencia de los esfuerzos axil y cortante los desarrollos son más complejos y aparecen fenómenos de acoplamiento entre esfuerzos y desplazamientos. Es de destacar que, a pesar de que la formulación de la matriz elastoplástica para barras es conocida [66, 83] desde hace tiempo, el estudio e interpretación de los resultados con ella obtenidos no han sido realizados por investigadores ajenos al grupo, pues no se han encontrado en la literatura referencias al acoplamiento entre esfuerzos y entre desplazamientos a que da lugar. De forma simplificada el acoplamiento se explica notando que el punto representativo del estado tensional (en términos de esfuerzos) de una sección debe cumplir las relaciones impuestas por la superficie de plastificación $Z(M, N, V)$ y, por tanto, la variación de un esfuerzo afecta a los otros dos.

En la presente tesis se obtiene la función de plastificación teniendo en cuenta los esfuerzos flector, axil y cortante acoplados sobre la sección rectangular con hipótesis de plasticidad concentrada súbita, comparando los resultados obtenidos con los de otras hipótesis. Además, se ha tenido en cuenta la influencia del daño del material en la pérdida de rigidez de la estructura a través de las relaciones entre las ecuaciones constitutivas de la *mecánica del medio continuo* (MMC) con las ecuaciones constitutivas de la *mecánica del daño continuo* (CDM). Todo esto ha permitido obtener una nueva formulación del elemento barra 2D elastoplástico con daño, que en adelante llamaremos *modelo elastoplástico degradable* y que puede ser empleado en aplicaciones prácticas en ingeniería.

2.4. Estado del arte de la mecánica del daño continuo

El estudio de la evolución del daño en materiales dúctiles es un tema que motiva constantes investigaciones y desarrollos por su potencial aplicación tecnológica e industrial. El daño que resulta de la acumulación de deformación plástica en estos materiales es debido, principalmente, a la formación de micro-cavidades que se generan en el medio. El crecimiento de estas micro-cavidades con el aumento de los esfuerzos reduce progresivamente la capacidad del material para soportar cargas hasta ocurrir el fallo completo. Un modelado apropiado de este fenómeno es la base fundamental para la predicción del daño en los elementos y estructuras de la vida real.

McClintock [60] reconoció el papel de las micro-cavidades en el proceso de falla dúctil e intentó correlacionar el radio principal de las cavidades generadas con el incremento de la deformación plástica. *Rice* y *Tracy* [75] estudiaron analíticamente la evolución de las cavidades esféricas en una matriz elastoplástica. En estos estudios pioneros la interacción entre las micro-cavidades, el proceso de la fusión y los efectos del endurecimiento fueron descuidados y fue postulado que la falla ocurría cuando el radio de la cavidad alcanzaba un valor crítico, específico para cada material.

Diversos modelos se han propuesto desde entonces en la literatura. Hoy todas estas formulaciones se pueden agrupar en tres teorías principales: (i) los *criterios de falla abruptos*, (ii) *plasticidad porosa sólida* y (iii) la *mecánica del daño continuo (CDM).* En la primera teoría (i), se indica que la falla ocurre cuando una variable externa, que está desacoplada de las otras variables internas, alcanza un valor crítico, como ocurre con el criterio de crecimiento de la cavidad formulado por *Rice* y *Tracy.* En la segunda teoría (ii), el efecto del daño dúctil, según lo propuesto por *Gurson* [36] y *Rousselier* [81], es tenido en cuenta en la condición de fluencia por el término porosidad que progresivamente contrae la superficie de fluencia relativa al material. El modelo constitutivo de *Gurson* es ampliamente utilizado en simulaciones numéricas por su capacidad para predecir la respuesta mecánica de diversas aleaciones debido a que considera la existencia de pequeños poros (también denominados vacíos) inmersos en el seno de la matriz del material. La característica fundamental que distingue a esta ley constitutiva es la habilidad intrínseca que posee para simular dos mecanismos que típicamente se desarrollan a una escala microscópica como son la generación y el crecimiento de micro-cavidades.

Esto último se logra tras introducir una modificación en la definición de la función de fluencia con respecto al criterio de *von Mises*, incorporando una nueva variable de estado, la fracción volumétrica de vacíos, cuya evolución regula la pérdida gradual de resistencia del material. Este modelo ha sido utilizado en la actualidad por *Shi* y *Voyiadjis* [81] para el análisis elastoplástico con daño de placas sometidas a flexión.

Needleman y *Tvergaard* [67], y *Koplik* y *Needleman* [43] ampliaron la formulación inicial propuesta por *Gurson* para incluir la aceleración en el proceso de falla inducido por la fusión de las cavidades (modelo GTN). *Tvergaard* y *Niordoson* [95] investigaron el papel de las cavidades de tamaño más pequeño en un material dúctil dañado usando el modelo de plasticidad local propuesto por *Acharya* y *Bassani* [1]. *Schacht et al.* [84] investigaron los efectos asociados a la orientación cristalográfica de la matriz del material, encontrando una dependencia sustancial del crecimiento y fase de fusión con la anisotropía del reborde de los vacíos del material.

El modelo de GTN, aunque es utilizado extensamente para estudiar la propagación dúctil de la falla (*Xia* y *Shih* [103], *Mahnken* [56], *Besson et al.* [5]), presenta las siguientes limitaciones:

- Hay que identificar una gran cantidad de constantes del material. Es necesario definir nueve constantes para el material bajo estudio (*Brocks* y *Bernauer* [11]). Además, es difícil evaluar la influencia mutua entre los parámetros.
- Las constantes del material no pueden ser medidas directamente. Usualmente, es necesario llevar a cabo un procedimiento iterativo que implica simulaciones con elementos finitos y datos experimentales para conocer dichas constantes. Por ejemplo, *Prahl et al.* [71] determinaron los parámetros del daño en el acero S460M tratado térmicamente, para el modelo GTN y el modelo de *Rousselier* usando periodos de homogenización. Igualmente, *Springmann* y *Kuna* [87] desarrollaron un procedimiento óptimo de identificación de parámetros para el modelo de daño de *Rousselier*. Sin embargo, en ninguno de estos casos el conjunto de parámetros identificados se puede utilizar para una geometría y estado de esfuerzos diferentes a los usados en la etapa de la identificación.

En la tercera teoría (iii), el daño es asumido como una de las variables internas constitutivas que explica los efectos sobre la respuesta del material inducida por los procesos irreversibles que ocurren en su micro-estructura.

A partir del trabajo de *Kachanov* [41, 42] se enmarcó la teoría del CDM para el daño dúctil, la cual fue desarrollada más adelante por *Lemaitre* [49] y *Chaboche* [14]. En las dos décadas pasadas se han propuesto varios modelos basados en el CDM.

En este contexto, el conjunto de ecuaciones constitutivas para un material dúctil dañado se derivan de la deformación equivalente de *Taylor* y de la existencia de un potencial de disipación del daño similar al que se adopta en la teoría de la plasticidad (*Lemaitre* [50]).

Brunig [12] propuso un modelo anisotrópico de CDM usando la porosidad como definición para la variable del daño. En el marco inicial del trabajo propuesto por *Lemaitre*, varios autores propusieron modelos basados en el uso de expresiones especiales para la disipación del potencial del daño (*Chandrakanth* y *Pandey* [15]; *Tai* y *Yang* [90]; *Tai* [89]). Desafortunadamente, estos modelos también muestran limitaciones importantes, tales como:

- La forma de la expresión elegida para el potencial de disipación del daño es, en muchos casos, específica de un material en particular.
- Las leyes de la evolución del daño se validan a menudo solamente con los datos experimentales obtenidos de probetas bajo tensión uniaxial, por lo tanto, para el caso multiaxial de esfuerzo no pueden ser usadas estas leyes.
- La posible influencia de la triaxialidad del esfuerzo en los parámetros del modelo y en la ley de evolución del daño se descuida a menudo.

Recientemente, *Bonora* [7] propuso una formulación del modelo de daño en el marco de CDM. Se ha demostrado que este modelo supera algunas de las limitaciones discutidas previamente. Esta formulación es independiente del material, permitiendo la descripción de las diferentes leyes de evolución del daño con la deformación plástica sin necesidad de cambiar la expresión del potencial de disipación. Además, los efectos de la triaxialidad, tales como la progresiva reducción de la ductilidad del material con el aumento del factor del esfuerzo triaxial, son predichos de forma exacta [8].

Los parámetros del daño requeridos en el modelo propuesto por *Bonora* se han identificado bajo prueba de tensión uniaxial y se han utilizado para predecir la evolución del daño medido experimentalmente en el estado de esfuerzo multiaxial con excelentes resultados. Este modelo es el que ha sido empleado en esta tesis, por las razones expuestas anteriormente, para considerar la evolución del daño del material por la acumulación de deformación plástica y, de esta manera, lograr cuantificar la pérdida de rigidez del elemento barra 2D y su influencia en el comportamiento global de los sistemas estructurales. Sin embargo, también se han empleado los modelos de *Lemaitre*, *Wang* y *Chandrakanth* para realizar una comparación numérica de los resultados.

2.5. Análisis de estructuras y la mecánica del daño continuo

Convencionalmente, el análisis inelástico de pórticos se hace con base a la teoría de la plasticidad (*Neal* y *Symonds* [88]; *Takeda et al.*[91]; *Maier et al.* [57]; *Cohn* y *Franchi* [20]; *Roufaiel* y *Meyer* [79]). Sin embargo, en las últimas décadas se ha desarrollado una nueva teoría para el estudio de sólidos y estructuras: la *mecánica del daño continuo* (CDM). Esta teoría se basa en la introducción de una nueva variable interna: el daño.

El daño isotrópico se puede caracterizar por un escalar que toma valores entre 0 y 1. El valor 0 corresponde a un material intacto o no dañado; el valor 1 representa un elemento de volumen totalmente dañado.

Uno de los modelos más usados de CDM para los metales ha sido propuesto por *Lemaitre* [51]. *Flórez et al.* [32] en 1993 y *Cipollina et al.* [18], en 1995, empleando el modelo de *Lemaitre*, proponen una teoría que combina CDM con el concepto de rótula plástica. Esta teoría ha sido llamada *mecánica del daño simplificada* para diferenciarla de la *mecánica del daño convencional*. Dentro de estos trabajos se propuso un modelo para elementos de hormigón armado [17] bajo cargas monotónicas y cíclicas. Hasta ahora, el análisis estructural realizado con los modelos simplificados de daño no ha presentado problemas numéricos reseñables [54]. Sin embargo, presentan ciertas limitaciones en cuanto a la función de daño empleada que sólo es aplicable a ciertos materiales.

Inglessis et al. [40], en 1999, describió un modelo de daño para pórticos planos de acero. Este modelo integra el concepto de rótula plástica y las ideas de CDM, específicamente el modelo de *Lemaitre*. El modelo permite la simulación numérica del proceso del daño y su influencia en el colapso de pórticos.

En los trabajos precedentes se estableció un marco general para el modelado y simulación del proceso de daño en pórticos planos sometidos a solicitaciones mecánicas. Este formalismo puede ser considerado como la adaptación de las teorías clásicas de la *mecánica del daño continuo* (CDM) o de la fractura para el análisis de pórticos. El procedimiento utilizado para ello es similar al empleado en la construcción de modelos de plasticidad concentrada (*Lumped plasticity models*) que han sido utilizados para el desarrollo de una nueva teoría de plasticidad para estructuras aporticadas [58, 19].

Flórez y *Cipollina* [17], en 1995, propusieron un modelo de comportamiento de elementos de hormigón armado basados en este formalismo general. Este modelo permite representar los efectos plásticos y de pérdida de rigidez debido al agrietamiento del hormigón y a la fluencia del armado bajo solicitaciones reversibles sin cambio de signo.

Existen en la literatura otros modelos que incluyen la degradación de rigidez [80, 45, 78]. La diferencia entre éstos y el trabajo de *Flórez* radica en el uso de los métodos y de los conceptos de la termodinámica de los medios continuos (variables internas, leyes de evolución, etc.) y, en especial, de la mecánica de la degradación. De esta manera, tal vez se obtenga una mayor generalidad y simplicidad en la formulación de los modelos. Las condiciones de validez del modelo de *Flórez* son un tanto restrictivas (solicitaciones sin cambio de signo, se desprecian los efectos de fatiga, etc.). Sin embargo, este trabajo permite presentar las diferencias con respecto a los modelos clásicos y mostrar el potencial de este enfoque alternativo mediante el análisis de un material real bajo condiciones frecuentemente encontradas en la práctica. Este modelo constituye la base de modelos más generales actualmente desarrollados (*Faleiro*, *Oller*, *Barbat* 2008) [30].

En esta tesis se presenta un modelo que también emplea los conceptos de la termodinámica de los medios continuos y de la *mecánica del daño* para acoplar la variable daño a las ecuaciones constitutivas del material. La diferencia con el modelo de Flóres radica en el empleo de funciones que relacionan la evolución del daño del material con la energía de deformación asociada a éste, además de considerar que la sección de la barra se agota por el acoplamiento de los esfuerzos (axil, cortante y flector).

La introducción de los conceptos de la mecánica del daño continuo parece ser una vía prometedora para el análisis de estructuras aporticadas sometidas a sobrecargas intensas. El problema a resolver está constituido por las ecuaciones matriciales clásicas del cálculo de estructuras y las leyes de evolución.

Durante los últimos años se han desarrollado diversos modelos de fractura para el análisis no lineal de estructuras [68]. La motivación fundamental para el desarrollo de estos modelos se centra en el análisis de la seguridad del hormigón en masa y armado. La mayor parte de los modelos se basan en la teoría de daño continuo y utilizan el *Método de los Elementos Finitos* para la solución numérica. Los desarrollos más recientes [68] incluyen la predicción de fenómenos de localización en estructuras de hormigón y el análisis del comportamiento no lineal de estructuras con materiales compuestos.

Capítulo 3
Teoría de la plasticidad y la mecánica del daño continuo

Capítulo 3

Teoría de la plasticidad y la mecánica del daño continuo: formulaciones básicas

3.1. Introducción

El desarrollo y evolución que lleva un sistema al colapso ha sido un tema ampliamente estudiado por los ingenieros a lo largo de la historia. La teoría más utilizada al respecto ha sido la de la elasticidad lineal, pero es evidente que el comportamiento real de un sólido dista notablemente de dicha teoría. El análisis plástico nace de la necesidad de complementar la teoría de la elasticidad lineal para conseguir resultados más realistas y precisos. Es lógico pensar que el "realismo" añadido por el análisis plástico a la teoría de la elasticidad (perfectamente establecida en la literatura) nos complica el problema de una forma importante.

En este capítulo se exponen brevemente los conceptos fundamentales asociados a la teoría de la plasticidad y la teoría del daño continuo. Se presentan los modelos de daño empleados en la actualidad para cuantificar la degradación de materiales dúctiles y el acoplamiento de éstos al análisis de estructuras de barras.

3.2. Teoría de la plasticidad

La teoría de la plasticidad es una rama de la mecánica que se ocupa del cálculo de las tensiones y de las deformaciones en un cuerpo de material dúctil, en el cual se producen deformaciones permanentes como consecuencia de las cargas aplicadas.

La teoría se basa en observaciones experimentales del comportamiento de metales sometidos a estados de esfuerzos combinados. Los resultados observados son idealizados en formulaciones matemáticas que permiten describir el comportamiento de metales sujetos a esfuerzos complejos. A diferencia de los comportamientos elásticos, en los cuales el estado de deformación depende sólo del estado final del esfuerzo, la deformación que se produce en un sólido plástico se determina a partir de la historia completa de solicitaciones.

3.2.1. Comportamiento material límite de sólidos

La explicación cualitativa del proceso de plastificación se basa en el clásico ensayo de tracción uniaxial, usado para determinar la relación tensión-deformación del material, formulada por *Hooke* en 1760. En la figura 3.1 se muestra una curva típica de deformación unitaria (ϵ) frente a la tensión nominal (σ_{nom}) correspondiente a un material dúctil sometido a tracción simple. La parte inicial de la curva OA corresponde a una línea recta de pendiente E que es el módulo de Young. Hasta este momento, como la tensión es suficientemente pequeña, el material se comporta de forma elástica y la probeta recupera su tamaño original una vez que se eliminan las cargas aplicadas. El punto A representa el límite de proporcionalidad a partir del cual la relación tensión-deformación deja de ser lineal. Generalmente el rango elástico se extiende un poco más allá del límite de proporcionalidad. Para la mayoría de los metales, la transición del comportamiento elástico al plástico es gradual debido a la fluencia progresiva del material. La tensión correspondiente al punto B (σ_f) es conocida como tensión de fluencia y se define generalmente, como aquélla para la cual se observa una pequeña cantidad de deformaciones permanentes.

Más allá del límite de fluencia, el esfuerzo sigue aumentando continuamente produciendo mayores deformaciones plásticas. En el tramo BC se observa cómo la pendiente de la curva tensión-deformación, que representa la tasa de endurecimiento por deformación, decrece de manera estable con el incremento del esfuerzo. Si la probeta se carga hasta un punto C en el rango plástico y se elimina la carga, se produce una descarga elástica que sigue la trayectoria CD muy parecida a una línea recta de pendiente E. La deformación permanente que se obtiene al finalizar la descarga es igual a OE. Cuando se aplica carga de nuevo la probeta se deforma elásticamente hasta que alcanza un nuevo punto de fluencia F. Si se desprecia el lazo de histéresis angosto, que se forma durante la carga y descarga, se puede considerar que F coincide con C. A mayor carga, la curva tensión-deformación sigue la trayectoria FG, como una continuación virtual de la curva BC. La curva EFG puede ser considerada como la curva tensión-deformación del metal cuando ésta pre-deformado una cantidad OE. A mayor grado de deformación previa, el punto de fluencia es mayor y la curva de endurecimiento por deformación es más plana.

Se define el dominio elástico como el conjunto de valores de esfuerzos para los cuales la respuesta del material es elástica, incluyendo no solamente la parte de tracción sino la equivalente de compresión. En la figura 3.1, y en ausencia de deformaciones plásticas previas, el dominio elástico es la zona comprendida entre (σ_f) y ($-\sigma_f$).

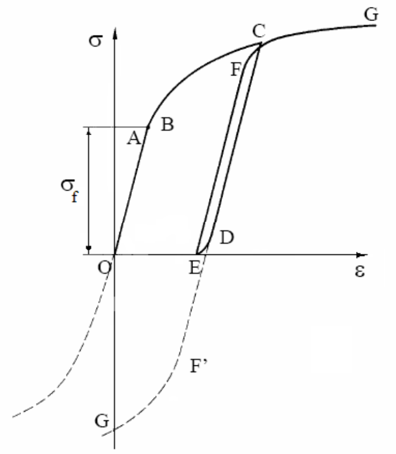


Figura 3.1: Representación $\sigma_{nom} - \varepsilon$ en un ensayo de tracción de acero dúctil

Como conclusiones de todo lo anteriormente indicado para el ensayo de tracción, desde el punto de vista microscópico, se puede resaltar que:

- Al aplicar una carga sobre el material, constituido por agrupaciones de átomos, se producen alteraciones de la red cristalina; de forma que el equilibrio inicial se rompe con la aparición de fuerzas interiores que modifican las distancias entre los átomos, provocando tensiones y deformaciones en la pieza.
- Estas deformaciones producen un estado de mayor potencial interno y, por consiguiente, menos estable ya que la nueva configuración que adopta la red cristalina no corresponde a la agrupación de mínima energía de sus átomos.
- Si al desaparecer la carga desaparece la deformación y el sistema vuelve a su estado de energía mínima, se habla de un proceso reversible.
- Si se aumenta la carga por encima de un cierto límite (límite elástico), aumenta la distancia entre los átomos de tal forma que los enlaces de la red cristalina se rompen. Si se mantiene la cohesión, se formarán nuevos enlaces que sustituirán a los primitivos, generándose la deformación plástica (material dúctil). Si no se mantiene la cohesión, la rotura de los enlaces es definitiva (material frágil).

3.2.2. Modelo matemático: conceptos fundamentales

La finalidad del estudio de los medios continuos es construir un modelo matemático para caracterizar el comportamiento de sólidos de geometría arbitraria cuando son sometidos a sistemas de cargas. A través de estos modelos se relacionan entre sí dos magnitudes físicas mensurables: las fuerzas que afectan al elemento y los desplazamientos que éstas producen en los puntos del medio.

Para ello, es necesario conocer tanto la manera en que las fuerzas se transmiten a través del dominio como los desplazamientos, cambios de forma y de volumen que estas fuerzas producen; lo que se consigue mediante el uso de unas magnitudes auxiliares denominadas tensiones (σ) y deformaciones (ε), asociadas a los puntos.

También será necesario definir: las relaciones que existen entre los desplazamientos de los puntos y las deformaciones que se producen en sus entornos, condiciones denominadas de compatibilidad; las relaciones de las fuerzas que actúan en el sistema y las tensiones que originan, expresiones que aparecen a partir de plantear las ecuaciones de equilibrio; y, por último, las relaciones que existen entre las tensiones y las deformaciones, obtenidas de forma experimental y denominadas ecuaciones de comportamiento.

El modelo matemático de estudio se basa entonces en los conceptos de equilibrio, compatibilidad y comportamiento que permiten relacionar los desplazamientos y las fuerzas que solicitan al sistema con las tensiones y deformaciones que éstas producen en el entorno de un punto, tal y como muestra la figura 3.2.

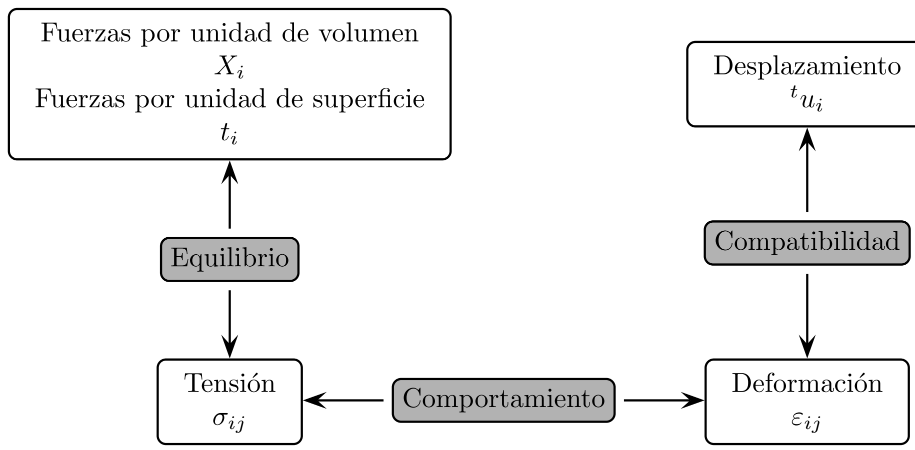


Figura 3.2: Modelo matemático

Para el estudio mecánico de los sistemas se establecen diversas hipótesis simplificadoras válidas para realizar aproximaciones a su comportamiento. De entre las distintas hipótesis se pueden realizar las siguientes clasificaciones:

1. Atendiendo a la capacidad de deformación, los sólidos se clasifican en:
   - **Sólido indeformable o rígido**: es aquél que ante cualquier carga a la que esté sometido la distancia entre dos puntos cualesquiera no varía (material ideal).
   - **Sólido deformable**: es aquél que ante cualquier carga a la que esté sometido la distancia entre dos puntos arbitrarios varía. La deformabilidad de este tipo de sólidos se pueden clasificar en:
     - **Deformabilidad elástica**: capacidad de deformación de un sólido según la cual, al desaparecer las fuerzas, recupera su forma primitiva.
     - **Deformabilidad no elástica**: capacidad de deformación de un sólido según la cual, al desaparecer las fuerzas que producen la deformación, el sistema no recupera su forma primitiva sino que alcanza la posición de equilibrio manteniendo una deformación residual permanente.
2. Atendiendo a la relación que existe entre las tensiones y las deformaciones, los sistemas deformables se pueden clasificar en:
   - **Lineales**: la relación tensión-deformación se puede expresar mediante funciones de primer grado.
   - **No lineales**: la relación tensión-deformación se puede expresar mediante funciones de grado superior.
3. Atendiendo a las causas que producen la no linealidad se puede hablar de:
   - **No linealidad geométrica**: las causas pueden ser:
     - **Grandes deformaciones**: aparecen cuando a materiales poco rígidos se les somete a elevadas cargas localizadas en pequeñas zonas, de tal manera que no se pueden relacionar las deformaciones con las primeras derivadas de los desplazamientos, sino que se necesitan términos de grado superior.
     - **Grandes desplazamientos (con pequeñas deformaciones)**: aparecen cuando al imponer el equilibrio en la configuración no deformada se cometen errores apreciables, siendo necesario recurrir a técnicas numéricas para establecer el equilibrio donde realmente debe darse: en la configuración deformada. Caso aplicable al estudio de elementos esbeltos como: cables, pórticos esbeltos, placas y láminas. Los estudios con grandes deformaciones y grandes desplazamientos pueden darse simultáneamente.

- **Problemas de inestabilidad (pandeo)**: es la determinación de las cargas y de las formas propias que adquiere un sistema cuando se vuelve inestable en tanto que pueden aparecer desplazamientos múltiples. El pandeo se puede estudiar desde el punto de vista del pandeo linealizado, en el que tanto los desplazamientos como las deformaciones son infinitesimales; y el pandeo no linealizado, en el que se considera el cambio de dirección de las tensiones según se deforma el sistema.

- **No linealidad del material**: aparece cuando las deformaciones no se relacionan linealmente con las tensiones. Puede recibir distintos nombres:
  - **Plasticidad**: cuando el material sigue una ley de comportamiento según la cual al descargar aparecen deformaciones permanentes.
  - **Elastoplasticidad**: cuando parte del material se comporta de forma elástica y parte, de forma plástica.
  - **Daño**: cuando aparece una alteración de las propiedades elásticas del material durante la aplicación de la carga como consecuencia de una disminución del área efectiva resistente.
  - **Comportamientos especiales del material**: hiperelasticidad, viscoelasticidad, viscoplasticidad, retracción, deformación por fluencia o creep, etc.
- **Otras fuentes de no linealidad**: corresponden a casos en los que la rigidez del sistema varía con los cambios de forma cuando las condiciones de contorno varían con los desplazamientos producidos por las cargas (estudios de contacto), etc.

Desde el punto de vista ingenieril, no sólo es necesario modelizar el comportamiento del sistema en función de su respuesta cinemática a las cargas que lo solicitan, sino que también teniendo en cuenta la respuesta del material. Para ello se utilizan distintos modelos idealizados basados en los resultados de un ensayo de tracción. De entre los múltiples modelos existentes, se resaltan los siguientes:

- **Modelo rígido-perfectamente plástico o de Saint Venant**: es aquel cuyo comportamiento sería análogo a un contacto rugoso entre dos superficies (figura 3.3), en el que la deformación es nula mientras la tensión no alcance el valor crítico de comienzo de la plastificación. Dentro de este modelo se puede considerar la variante de que las deformaciones tengan un estado límite, correspondiente a la deformación de rotura (ε_r). A partir de esta deformación se considera que el punto material está roto.

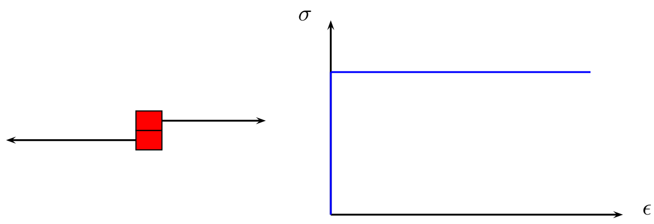


Figura 3.3: Modelo rígido-perfectamente plástico o de *Saint Venant*

- **Modelo elástico-perfectamente plástico o de Prandtl**: se denomina así a un material cuyo comportamiento sería análogo a un contacto rugoso con un muelle situado en serie (figura 3.4), en el que la relación tensión-deformación es lineal mientras la tensión no alcance el valor crítico y, cuando lo adquiere, las deformaciones se vuelven indeterminadas. Nuevamente se puede considerar la variante en la que las deformaciones tengan un estado límite asociado a la rotura (ε_r).

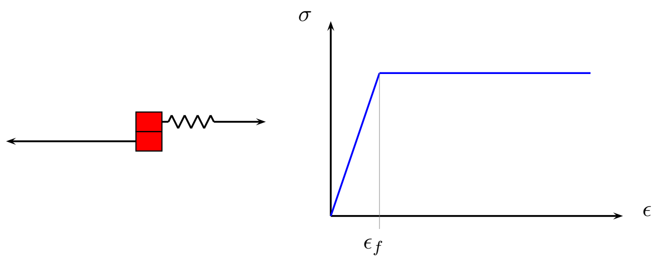


Figura 3.4: Modelo elástico-perfectamente plástico o de *Prandtl*

- **Modelo plástico lineal**: es aquel en el que el material actúa como un muelle en serie con contacto rugoso y con un segundo muelle en paralelo (figura 3.5), de forma que la relación tensión-deformación es lineal debido al efecto del primer muelle mientras la tensión no alcanza el valor crítico y, cuando lo supera, se produce deformación plástica con endurecimiento lineal.

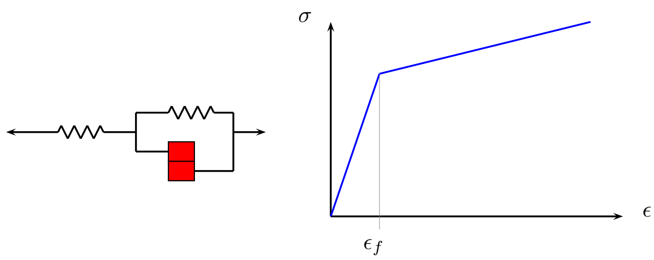


Figura 3.5: Modelo plástico lineal

- **Modelo de Daño**: de forma análoga a las anteriores definiciones, se podría decir que el modelo de daño es aquel en el que el material actúa como un muelle en serie con contacto rugoso variable (debido al daño del material) y con un segundo muelle en paralelo (figura 3.6), de forma que la relación tensión-deformación es lineal debido al efecto del primer muelle mientras la tensión no alcanza el valor crítico y, cuando lo supera, se produce deformación plástica con endurecimiento lineal hasta que la deformación alcance un valor umbral (ϵ_{th}); en este instante comienza el deterioro del material.

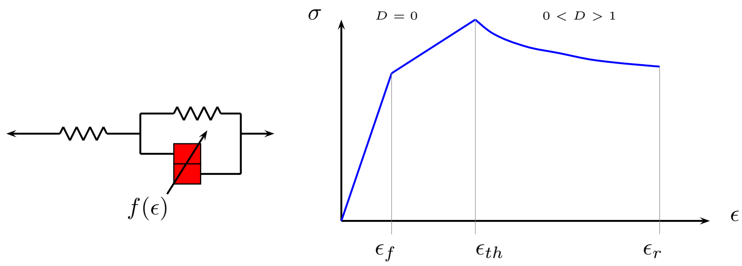


Figura 3.6: Evolución de la resistencia en materiales con daño plástico

3.2.3. Plasticidad en medios continuos

En el caso en el que el material se encuentre en el dominio plástico su comportamiento muestra dos grandes diferencias en comparación con el dominio elástico, que son:

- La existencia de una pérdida de linealidad en el comportamiento del material. En general, las tensiones ya no son linealmente proporcionales a las deformaciones.
- La aparición de una deformación plástica permanente. Una parte de la deformación generada durante el proceso de carga no se recupera durante la descarga.

A continuación se presentan las hipótesis comúmente adoptadas sobre las relaciones constitutivas asociadas al comportamiento plástico del material en medios continuos. Los símbolos y operadores utilizados son clásicamente empleados en la referencia [63]:

- La descomposición aditiva de la deformación total elastoplástica (ε^{ep}) en dos sumandos asociados cada uno de ellos a la deformación elástica recuperable (ε^{e}) y a la deformación plástica irreversible (ε^{p})

$$\varepsilon^{ep} = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p} \tag{3.1}$$

- Mediante condiciones de equilibrio, la tensión existente en el entorno del punto (σ) se relaciona con la deformación elástica (ε^e) mediante la expresión 3.2

$$\sigma = C^{-1} \left(\varepsilon^{ep} - \varepsilon^p\right) \tag{3.2}$$

donde C^{-1} es el tensor de propiedades elásticas.

- Se asume que la deformación plástica (ε^p) varía con el estado de carga según la regla de flujo dada por la expresión 3.3

$$d\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial G(\sigma)}{\partial \sigma} \tag{3.3}$$

donde λ es el multiplicador plástico y $G(\sigma)$ es la función de potencial plástico. Para el modelo a desarrollar se considera que la ley de potencial está asociada a la función de fluencia $f(\sigma)$, por lo que $G(\sigma) = f(\sigma)$.

- Se considera que la tensión no puede ser mayor en valor absoluto de una cierta magnitud, denominada tensión de fluencia (σ_f), de forma que la tensión en el entorno del punto (σ) se ha de encontrar localizada en el intervalo cerrado $[-\sigma_f, \sigma_f] \subset \Re$, definiéndose el dominio de tensiones (E_σ) mediante la expresión 3.4

$$E_\sigma = \{\sigma \in \Re | f(\sigma) = |\sigma| - R - \sigma_f \leq 0\} \tag{3.4}$$

siendo $f(\sigma)$ la función de fluencia plástica y $f(\sigma) = |\sigma| - R - \sigma_f = 0$ la condición de fluencia, donde R es el esfuerzo de endurecimiento isotrópico del material.

- Si el valor absoluto de la tensión ($|\sigma|$) es menor que la de fluencia (σ_f), la deformación plástica (ε^p) no varía ($d\varepsilon^p$); lo que implica

$$d\varepsilon^p = 0 \text{ si } f(\sigma) = |\sigma| - R - \sigma_f < 0 \tag{3.5}$$

por lo que la deformación del punto es únicamente elástica.

- A partir de lo indicado anteriormente, un estado de tensiones en el que la función de fluencia plástica cumpla la ecuación 3.6

$$f(\sigma) = |\sigma| - R - \sigma_f > 0 \tag{3.6}$$

no es admisible, por lo que el comportamiento plástico aparece cuando

$$f(\sigma) = |\sigma| - R - \sigma_f = 0 \tag{3.7}$$

- La superficie de fluencia plástica corresponde al contorno (∂E_σ) de las tensiones admisibles (E_σ) definido mediante la expresión 3.8

$$\partial E_\sigma = \{\sigma \in \Re | f(\sigma) = |\sigma| - R - \sigma_f = 0\} \tag{3.8}$$

de forma que si no se consideran efectos de endurecimiento queda reducido a dos puntos $\{\sigma_f, -\sigma_f\}$.

- Según lo anterior, la ecuación constitutiva distingue entre las siguientes situaciones:

  Régimen elástico

$$\sigma \in E_\sigma \Rightarrow d\sigma = C : d\varepsilon^e \tag{3.9}$$

  Régimen elastoplástico en carga

$$\sigma \in \partial E_\sigma, df\left(\sigma\right) = 0 \Longrightarrow d\sigma = C^{ep} : d\epsilon \tag{3.10}$$

  donde C^{ep} es el denominado tensor constitutivo elastoplástico, cuya expresión para el caso en el que no se considere endurecimiento ($R = 0$) es

$$C^{ep} = C - \frac{C : \dfrac{\partial G}{\partial \sigma} \otimes \dfrac{\partial f}{\partial \sigma} : C}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma} : C \dfrac{\partial G}{\partial \sigma}} \tag{3.11}$$

- El criterio utilizado para determinar la superficie de plastificación es el de *von Mises*

$$f\left(\sigma\right) = |\sigma| - \sigma_f = \sqrt{3J_2'} - \sigma_e \tag{3.12}$$

  donde$\sqrt{3J_2'}$ es la tensión efectiva, J_2' la componente desviadora y σ_e el límite elástico de tracción en el caso uniaxial.

3.3. Teoría de la mecánica del daño: consideraciones básicas

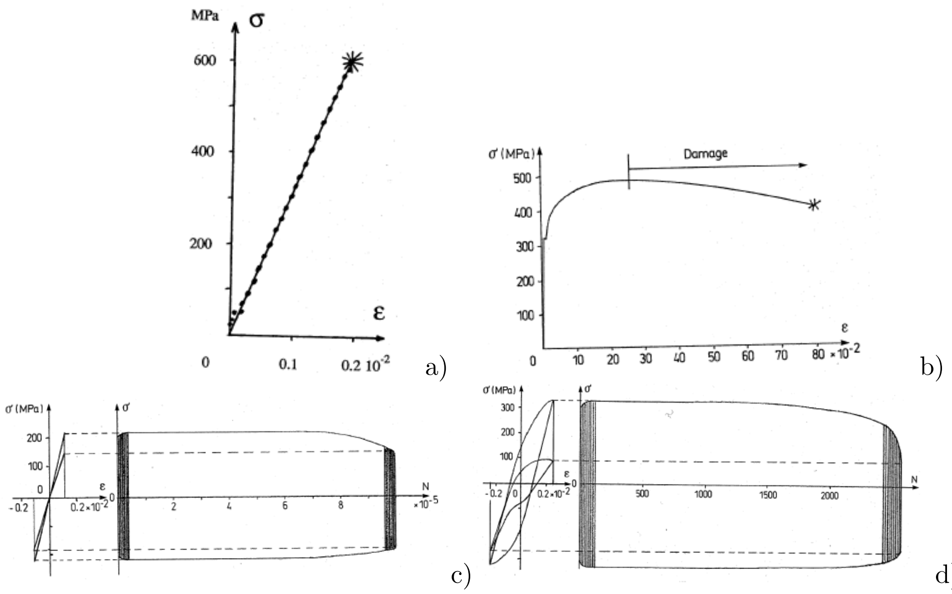
Al igual que en el epigrafe anterior, se exponen a continuación los principales conceptos relativos a la *mecánica del daño* empleados en este trabajo, usando la notación y simbología que comúnmente se presenta en referencias clásicas, como [7, 48, 98, 16].

El daño en una estructura puede ser considerado desde muchos puntos de vista. A nivel microscópico, puede considerarse como la creación de micro-discontinuidades o el crecimiento de macro-cavidades dentro del material. A nivel macroscópico, puede interpretarse de forma global como la pérdida de rigidez de un elemento o de una estructura en conjunto. La *mecánica del daño* considera la descripción macroscópica de la acumulación de defectos microscópicos que dan lugar a un deterioro progresivo del material y que afecta a las propiedades mecánicas y, por lo tanto, a la distribución de tensiones y deformaciones. La *mecánica del daño* se ha aplicado con éxito para la descripción de fenómenos de fluencia, fatiga, elasticidad y plasticidad acoplada con daño, etc.

La manifestación del daño a nivel microscópico está fundamentalmente gobernada por fenómenos de aparición y crecimiento de micro-vacíos o cavidades; su manifestación microscópica depende del tipo de material, el tipo de carga y la temperatura. Así entre otros, se pueden presentar fenómenos de [49]:

- **Daño frágil:** se caracteriza por la propagación de fisuras en ausencia de deformaciones plásticas apreciables. Figura 3.7a.
- **Daño dúctil:** se caracteriza porque el daño ocurre tras la aparición de deformaciones plásticas. Figura 3.7b.
- **Daño por fatiga de bajo ciclo:** ocurre cuando se somete un material a cargas cíclicas de gran amplitud. El daño, tras un período inicial, se desarrolla junto con las deformaciones plásticas cíclicas. Con deformaciones controladas, el daño induce una pérdida en la resistencia del material que lleva a la ruptura en un número de ciclos no muy elevado. Figura 3.7c.
- **Daño por fatiga de alto ciclo:** se da cuando un material se somete a cargas cíclicas con valores bajos de tensión y las deformaciones plásticas que aparecen son despreciables. Figura 3.7d.

Evidentemente, las características del tipo de daño dependen del mecanismo que produce éste. Así, pese a que los principios fundamentales y las bases termodinámicas son comunes, existen multitud de particularidades, de manera que actualmente no existe una formulación unificada completamente válida para todos los modelos. A continuación se exponen los conceptos fundamentales en los que se basa la mecánica de la degradación, que posteriormente se aplicarán al estudio de barras.



Fuente: Lemaitre [51]

Figura 3.7: Curva esfuerzo-deformación. a) Daño frágil, b) Daño dúctil, c) Daño por fatiga de bajo ciclo, d) Daño por fatiga de alto ciclo

3.3.1. Cuantificación de la degradación: variable interna, daño

La teoría de daño, formulada dentro de la teoría de la *mecánica de los medios continuos*, fue inicialmente introducida por *Kachanov* en 1958. La idea fundamental es el uso de una nueva variable interna, el daño, que mide el estado de degradación de un material. *Kachanov* propuso que esta variable, daño, fuera la relación entre el área de los defectos acumulados en el material dañado (fisuras, cavidades, etc.) y el área del material virgen. El daño en un elemento de volumen representativo (EVR)[1] del material es representado por la variable D (figura 3.8), en la que A_o es el área nominal de la sección dada por el elemento infinitesimal de volumen, estando esta sección orientada según la normal a la superficie $\vec{n}$ y A_{eff} es el área resistente efectiva, menor al área nominal debido a la presencia de micro-defectos y su interacción mutua.

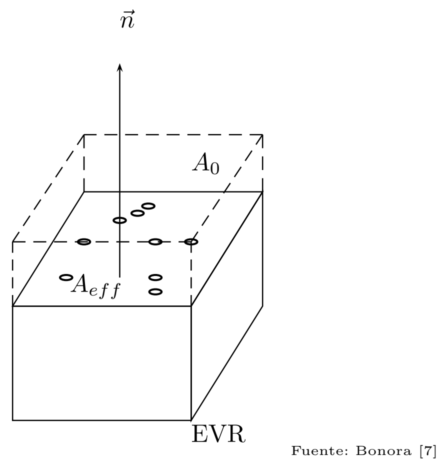


Figura 3.8: Elemento de volumen

A partir de estos parámetros, la variable daño (D) puede ser definida mediante

$$D_{(n)} = 1 - \frac{A_{eff}^{(n)}}{A_o^{(n)}} \tag{3.13}$$

De acuerdo a esta definición, el daño depende de la orientación del vector normal $\vec{n}$, pero si se asume la hipótesis de daño isotrópico, las orientaciones de las micro-cavidades y micro-grietas se consideran uniformemente distribuidas en todas las direcciones, de forma que el daño no depende de la orientación de la sección y puede ser caracterizado mediante un escalar D.[2]

[1] EVR en mecánica es el volumen más pequeño sobre el cual se puede representar un campo de propiedades discontinuas. Por ejemplo, para cuantificar el daño, el tamaño del lado del volumen representativo es del orden de 0.05mm a 0.5mm para metales [48].

[2] Para el caso de un material virgen, $D = D_o$ y para un estado de ruptura $D = D_{cr}$; donde D_o (cantidad inicial de daño) y D_{cr} (cantidad crítica de daño cuando ocurre la falla) [98]

3.3.2. Tensión y deformación efectivas

Un concepto útil para entender el efecto del daño es el de tensión efectiva ($\bar{\sigma}$) introducido por *Rabotnov* [74], como aquella tensión que realmente soporta el material dañado

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A_{eff}} \tag{3.14}$$

reemplazando la ec.(3.13) en la ec.(3.14), se obtiene que

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \tag{3.15}$$

donde D es la viariable interna del daño, σ es el tensor de tensiones de *Cauchy* y $\bar{\sigma}$ es el tensor de tensiones efectivas medido en el espacio “no dañado”.

Cordebois y *Sidoroff* [21] introdujeron el concepto de deformación efectiva $\bar{\varepsilon}$ como un complemento al concepto de tensión efectiva $\bar{\sigma}$

$$\bar{\varepsilon} = (1 - D)\,\varepsilon \tag{3.16}$$

donde ε es la deformación elástica del material.

3.3.3. Hipótesis de deformación y tensión equivalentes

La hipótesis de deformación equivalente formulada por *Lemaitre* [50] en 1985 establece que la tensión efectiva aplicada al material virgen produce la misma deformación que la tensión nominal aplicada al material dañado (figura 3.9).

Este principio también puede enunciarse como: *“las ecuaciones constitutivas de un material degradado se obtienen de la misma forma que las del material virgen sin más que emplear la tensión efectiva en lugar de la tensión.”*

Para el estado dañado

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{3.17}$$

Para el estado no dañado

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1 - D)\,E} \tag{3.18}$$

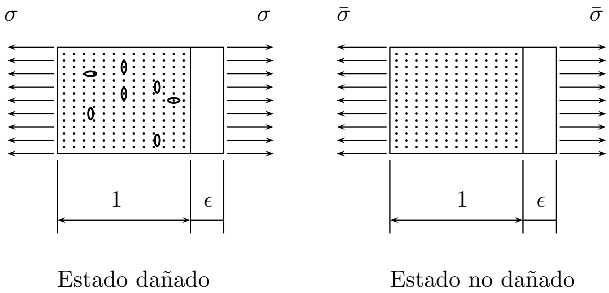


Figura 3.9: Hipótesis de deformación equivalente

De acuerdo a esta hipótesis, la tensión que estaría soportando un sólido equivalente no degradado sería igual a la tensión efectiva, y la tensión que estaría soportanto el sólido real degradado sería la tensión σ dada por la ec.(3.18). En la figura 3.10 se muestra la relación $\sigma - \epsilon$ para un sólido real degradado. En ella se distinguen dos zonas: una elástica sin daño y una zona con daño. En el apartado 4.3.2 se presentará una adaptación de ésta relación para distintas leyes de daño, que se utilizará para el modelo monodimensional objeto de este trabajo.

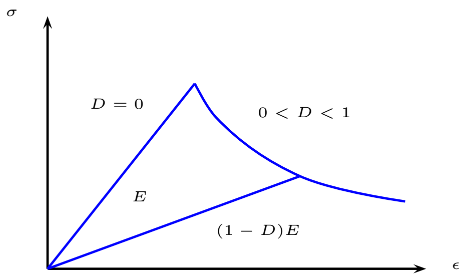


Figura 3.10: Evolución de la curva uniaxial tensión-deformación

Simo y *Ju* [86] modificaron el concepto de deformación equivalente y propusieron el concepto de tensión equivalente, de forma que la tensión asociada a un estado dañado bajo la deformación aplicada es equivalente a la tensión asociada a un estado no dañado bajo la deformación efectiva. (Figura 3.11).

Para un estado dañado

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3.19}$$

Para un material no dañado

$$\sigma = E\bar{\varepsilon} = E\,(1 - D)\,\varepsilon \tag{3.20}$$

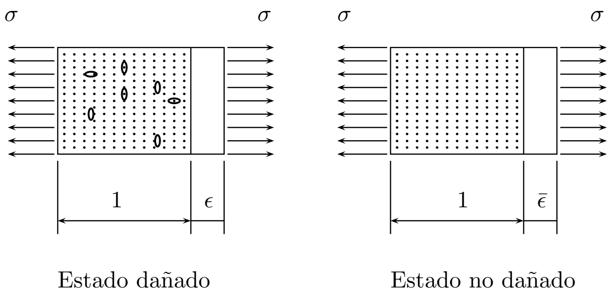


Figura 3.11: Hipótesis de esfuerzo equivalente

Nótese que los conceptos introducidos anteriormente presuponen que la distribución de tensiones y de deformaciones en materiales con micro-grietas son uniformes y no siguen las complejas leyes no lineales que predice la *mecánica de la fractura*. Desde este punto de vista se puede interpretar que la *mecánica del daño* presenta relaciones entre tensiones y deformaciones como promedio en el EVR considerado.

3.3.4. Tasa de liberación energética asociada al daño

La propiedad elástica de los materiales está relacionada con la capacidad de un sólido de sufrir transformaciones termodinámicas reversibles. Cuando sobre un sólido deformable actúan fuerzas exteriores y éste se deforma, se produce un trabajo de estas fuerzas que se almacena en el cuerpo en forma de energía de deformación y, por tanto, se producirá un aumento de la energía interna. El sólido se comportará elásticamente si este incremento de energía puede realizarse de forma reversible, pero si es irreversible el sólido presenta un comportamiento no lineal e irreversible en general. Un cuerpo que se deforma plásticamente experimenta cambios de entropía asociado a los desplazamientos de las dislocaciones, a la aparición de micro-grietas, etc. En el comportamiento plástico parte de la energía mecánica se disipa internamente en forma de calor, en lugar de transformarse en energía de deformación.

Con el fin de describir un modelo energético con efectos elásticos, térmicos, de plasticidad y de daño, dentro del marco de los procesos reversibles de la termodinámica, se utiliza un conjunto de variables de estado, de las que se van a considerar: el tensor de deformación elástica, la temperatura y sus variables asociadas, como el tensor de tensiones y la entropía. Las variables internas consideradas son: la deformación plástica acumulada (p), la variable daño (D) y sus correspondientes variables asociadas, como el esfuerzo de endurecimiento isotrópico(R) y la tasa de liberación energética asociada al daño (Y).

La deformación plástica acumulada p viene dada por [7, 48]

$$p = \int \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \right)^{2} dt \tag{3.21}$$

donde $\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$ es la tasa de deformación plástica. En la Tabla 3.1 extraída de [7] se resumen la correspondencia entre las variables internas y asociadas para un material elastoplástico dañado.

Tabla 3.1: Resumen de las variables internas y asociadas para un material elastoplástico dañado

	Variables de estado		
	Variables observables	Variables internas	Variables asociadas
Elasticidad	Temperatura T		Entropía especifica, S
	Tensor de deformaciones ε^{t}_{ij}		Tensor de esfuerzos, σ_{ij}
Plasticidad		Tensor de deformación Plástica, $\varepsilon^{p}ij$	Tensor de esfuerzo, σ_{ij}
		Variable de endurecimiento, r	Esfuerzo de endurecimiento isotrópico, R
		Cinemático endurecimiento, χ	Esfuerzo cinematico χ
Daño		Daño, D	Tasa de energia de daño,Y

Una vez definidas las variables de estado, se postula que las leyes de comportamiento derivan de un estado potencial, por lo tanto, la función escalar ψ, continua y convexa puede ser considerada como el potencial termodinámico. Habitualmente se toma esta función como la energía libre de *Helmholtz* del sistema o su energía complementaria, la energía de *Gibbs*. A continuación se desarrollará esta expresión para los casos de interés en este trabajo. La denominación y los símbolos han sido tomados de las referencias [15, 50, 89]

$$\psi = \psi \left(\varepsilon^{e}_{ij}, T, D, p \right) \tag{3.22}$$

Separando los efectos del endurecimiento de otros efectos, se tiene [89, 48, 98, 16]

$$\psi = \psi_{e} \left(\varepsilon^{e}_{ij}, T, D \right) + \Psi \left(T, p \right) \tag{3.23}$$

donde ψ_{e} es el potencial termoelástico de un material dañado.

Por simplicidad, se considerá el caso isotérmico (suponiendo que el calor generado no supone un aumento de la temperatura) para el que

$$\psi_{e} = \frac{1}{2\rho} C_{ijkl} \varepsilon^{e}_{ij} \varepsilon^{e}_{kl} \left(1 - D \right) \tag{3.24}$$

De la ley de comportamiento elástico se obtiene que

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi_{e}}{\partial \varepsilon^{e}_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon^{e}_{ij} \left(1 - D \right) \tag{3.25}$$

y de la hipótesis de deformación equivalente

$$\bar{\sigma_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon^{e}_{kl} \tag{3.26}$$

La tasa de liberación energética Y, asociada al daño D, es la energía disponible para iniciar o propagar una grieta y está definida por

$$Y = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial D} = -\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{e} \varepsilon_{kl}^{e} \tag{3.27}$$

Si W_e es la densidad de energía de deformación elástica

$$W_e = \int dW_e = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{e} \varepsilon_{kl}^{e} (1 - D) \tag{3.28}$$

$$Y = -\frac{W_e}{(1 - D)} = -\frac{1}{2} \frac{dW_e}{dD} \tag{3.29}$$

$$W_e = W_d^e + W_h^e \tag{3.30}$$

donde W_e es la energía total elástica, W_d^e es la denominada energía de distorsión y W_h^e es la denominada energía volumétrica

$$W_e = \int_0^{\varepsilon^{e'}} \sigma_{ij}^{'} d\varepsilon_{ij}^{e'} + 3 \int_0^{\varepsilon_h^e} \sigma_m d\varepsilon_m \tag{3.31}$$

donde $\sigma_{ij}', \varepsilon_{ij}^{e'}$ son la tensión y la deformación desviadora y σ_m, ε_m son la tensión y la deformación volumétricas respectivamente

$$\varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}^{'}}{(1 - D)}, \varepsilon_m = \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{\sigma_m}{(1 - D)} \tag{3.32}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}^{'} : \sigma_{ij}^{'}}{(1 - D)} + 3 \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{\sigma_m^2}{(1 - D)} \right) \tag{3.33}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \delta_{ij} (\sigma_{ij}) \tag{3.34}$$

E, es el módulo de Young, ν es el coeficiente de Poisson, σ_{eq} es el esfuerzo equivalente de *von Mises* y $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$ es el llamado factor de triaxialidad

$$\sigma_{eq} = \left[\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{'} \sigma_{ij}^{'} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.35}$$

$$W_e = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E (1 - D)} \left[\frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \tag{3.36}$$

$$Y = -\frac{\sigma_{eq}^2}{2E (1 - D)^2} f \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right) \tag{3.37}$$

donde

$$f \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right) = \left[\frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \tag{3.38}$$

3.3.5. Derivación del modelo de daño

Para completar las ecuaciones constitutivas, la ley de evolución para la variable interna, daño, tiene que ser añadida a las leyes de estado. En el caso de un fenómeno irreversible, el segundo principio de la termodinámica requiere que la disipación del trabajo mecánico debe ser positiva [7]

$$\sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} - Y\dot{D} - R\dot{p} \geq 0 \tag{3.39}$$

Cuando aparece simultáneamente la plasticidad y el daño es posible determinar de forma experimental que el flujo plástico aparece sin el efecto del daño y similarmente el daño puede ocurrir sin la aparición de fluencia plástica. Por lo tanto, se pueden considerar los efectos de disipación del daño y fluencia de forma independiente

$$\sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} - R\dot{p} \geq 0, -Y\dot{D} \tag{3.40}$$

De acuerdo con la termodinámica [15, 50, 89], la evolución de la deformación plástica, los efectos de endurecimiento y la ley de crecimiento del daño pueden ser obtenidos a partir de una función de disipación (ϕ), la cual es una función escalar con las variables observadas, y las internas, como parámetros

$$\phi = \phi\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}, \dot{D}, \dot{p}, \varepsilon^{e}, T, D, p\right) \tag{3.41}$$

La función de disipación se puede considerar formada por dos términos: uno asociado a la evolución de la deformación plástica, y los efectos del endurecimiento, y otro asociado a la evolución del daño [7]

$$\phi = f\left(\bar{\sigma_{eq}}, R, \sigma_f\right) + \phi^{*}\left(Y, D, \dot{p}, T\right) \tag{3.42}$$

La función de disipación expresada en la ecuación 3.42 puede ser reducida a la clásica función de fluencia. Considerando un material con esfuerzo de endurecimiento isotrópico R, el primer término de la ecuación 3.42 viene dado por

$$f\left(\bar{\sigma_{eq}}, R, \sigma_f\right) = \frac{\sigma_e q}{1-D} - R - \sigma_f \tag{3.43}$$

Asumiendo descomposición aditiva de la tasa de deformación, es posible escribir las siguientes ecuaciones constitutivas [7, 48]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \tag{3.44}$$

- Tasa de deformación elástica

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\dot{\sigma}_{ij}}{1-D} - \frac{\nu}{E}\frac{\sigma_{kk}}{1-D}\delta_{ij} \tag{3.45}$$

donde $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ es la tasa del tensor de deformación elástica, y δ_{ij} es la delta de Kronecker. La tasa de deformación elástica, por tanto, no está acoplada con la tasa de daño.

- Tasa de deformación plástica [89]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda}\frac{3}{2}\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{1-D}\frac{1}{\sigma_{eq}} \tag{3.46}$$

$$\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} = \dot{p}\,(1-D) \tag{3.47}$$

- Ley de evolución del daño

$$\dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{\partial \phi^{*}}{\partial Y} \tag{3.48}$$

La ecuación 3.48 muestra la vinculación entre la tasa de daño y la función de disipación asociada al daño, por medio de la definición del multiplicador plástico λ.

Para completar el conjunto de ecuaciones constitutivas (ecuaciones 3.44-3.47), es necesario especificar la expresión del potencial de disipación del daño (ϕ^{*}). El segundo principio de la termodinámica establece que la energía disipada debida al daño debe ser positiva, es decir ϕ^{*} debe ser una función convexa. Las medidas experimentales del daño en el caso uniaxial sugieren que la ley de evolución del daño tiene que ser función del estado actual del mismo y de la deformación plástica acumulada. El potencial de disipación para el daño dúctil depende de la deformación plástica acumulada durante el proceso de crecimiento de cavidades, basado en las tres etapas [7]: generación, crecimiento constante y fusión. Este proceso es altamente no lineal, no existiendo evidencias de que la disipación sea constante en cada uno de estos estados. La deformación plástica acumulada es un indicador de la fase del crecimiento de las micro-cavidades. Sin embargo, para un EVR dañado es muy difícil indicar el valor exacto de la deformación plástica acumulada para cada fase del crecimiento. Además, para un nivel de deformación plástica acumulada no se conoce a *priori* cuántas cavidades están en estado de generación, cuántas están creciendo, cuántas se están uniendo y cuál es su interacción.

Varios autores han propuesto diferentes funciones para el potencial de disipación basados en ensayos experimentales. Para el caso de materiales dúctiles, las más conocidas son las siguientes:

Bonora [7]

$$\phi^{*} = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{Y}{S_o}\right)^{2}\frac{S_o}{1-D}\right]\frac{(D_{cr}-D)^{\alpha_B - 1/\alpha_B}}{p^{(2+n)/n}} \tag{3.49}$$

Lemaitre [48]

$$\phi^{*} = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{Y}{S_L}\right)^{2}\frac{S_L}{1-D}\right] \tag{3.50}$$

Wang [98]

$$\phi^* = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{Y}{S_W}\right)^2 \frac{S_W}{1-D}\right] \frac{(p_{cr}-p)^{\alpha_W - 1}}{p^{2n}} \tag{3.51}$$

Chandrakanth [16]

$$\phi^* = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{Y}{S_C}\right)^2 \frac{S_C}{1-D}\right] \frac{1}{D^{\alpha_C/n} p^{2/n}} \tag{3.52}$$

En estas expresiones, los términos con subíndices *cr* son valores críticos para las correspondientes variables (la deformación plástica acumulada (p) y el valor de la variable daño cuando ocurre la fractura del material). Los términos $S_o, S_L, S_W, S_C, \alpha_B, \alpha_W, \alpha_C$ son constantes del material o constantes no lineales para la ley de daño correspondiente al modelo. Por ejemplo, el exponente de daño α, considera el efecto global de las fases de crecimiento del daño en el EVR bajo la deformación plástica acumulada. Los valores de α_i son evaluados para cada modelo durante un ensayo de tracción. Usualmente pueden ser evaluados a través de la variación del módulo de elasticidad. Por otra parte, n es el exponente de endurecimiento de la ley de *Ramberg-Osgood*, que establece la relación del esfuerzo equivalente de *von Mises* con la deformación plástica para materiales dúctiles [7]

$$\frac{\sigma_{eq}}{1-D} = \kappa p^{1/n} \tag{3.53}$$

A continuación para el modelo de *Bonora* se detalla la forma de conocer las constantes S_i y α_i y la ley de evolución del daño. El procedimiento empleado es el mismo utilizado por los otros autores [7, 48, 98, 16]. Primero es necesario evaluar la derivada del potencial asociado al daño con respecto a la tasa de liberación energética Y

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = \frac{Y}{S_o} \frac{(D_{cr}-D)^{\alpha - 1/\alpha}}{p^{(2+n)/n}} \frac{1}{1-D} \tag{3.54}$$

Reemplazando Y, dada por la expresión 3.37 en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = -\frac{\sigma_{eq}^2}{(1-D)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{1}{2ES_o} \frac{(D_{cr}-D)^{\alpha - 1/\alpha}}{p^{(2+n)/n}} \frac{1}{1-D} \tag{3.55}$$

Posteriormente, tras sustituir las ecuaciones 3.53 y 3.54 en la ley de evolución del daño dada por la ecuación 3.48, se obtiene

$$\dot{D} = \frac{\kappa^2}{2ES_o} \frac{(D_{cr}-D)^{\alpha - 1/\alpha}}{p} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \tag{3.56}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la tasa de deformación plástica acumulada es igual a la tasa del multiplicador plástico dado por la ecuación 3.47, es posible expresar la ecuación 3.56 mediante las siguientes expresiones

$$\dot{D} = \frac{\kappa^2}{2ES_o} (D_{cr}-D)^{\alpha - 1/\alpha} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{\dot{p}}{p} \tag{3.57}$$

$$\frac{dD}{dp} = \frac{\kappa^2}{2ES_o} \left(D_{cr} - D\right)^{\alpha - 1/\alpha} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{1}{p} \tag{3.58}$$

La ley de evolución dada en la ecuación 3.57 se puede simplificar analíticamente integrándola para algunos casos particulares, como por ejemplo para un estado de carga proporcional donde el factor de triaxialidad es constante con respecto al tiempo. En este caso, la ecuación 3.57 se puede integrar entre la condición inicial $D = D_o$, donde D_o es la cantidad inicial del daño presente en la micro-estructura del material; y $D = D_{cr}$, donde D_{cr} es la cantidad crítica del daño en el estado de falla. El parámetro D_o es muy difícil de determinar ya que está relacionado con la distribución de las inclusiones en la micro-estructura del material virgen, que se considera generalmente como la configuración de referencia del material. Por esta razón, D_o se suele considerar nulo.

El proceso de daño se considera inactivo desde que $D = D_o$ hasta que la deformación plástica efectiva acumulada (p) alcanza un valor de deformación umbral (p_{th}) (es decir, $dD = 0$ y $D = 0$ o $D = D_o$). Cuando $p = p_{th}$, la generación es la etapa dominante en el crecimiento de las cavidades y cuando $D = D_{cr}$, la fusión domina el proceso de crecimiento de cavidades y la deformación plástica acumulada alcanza el valor crítico (p_{cr}) para el cual aparece el fallo. Integrando la ecuación 3.57, se obtiene que

$$\left(D_{cr} - D\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\kappa^2}{2ES_o} ln\left(\frac{p_{cr}}{p_{th}}\right) f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \tag{3.59}$$

y para la integración entre $[D, D_{cr}]$ y $[p, p_{cr}]$

$$\left(D_{cr} - D\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\kappa^2}{2ES_o} ln\left(\frac{p_{cr}}{p}\right) f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \tag{3.60}$$

en el caso supuesto de carga uniaxial, el factor de triaxialidad es igual a $1/3$ y, por lo tanto, $f\left(\sigma_m/\sigma_{eq}\right) = 1$. Por otro lado, la deformación plástica acumulada (p) es igual a la deformación plástica uniaxial (ϵ); así, p_{th} es igual a la deformación plástica uniaxial umbral (ε_{th}) y (p_{cr}) es igual a deformación uniaxial crítica (ε_{cr}). La deformación elástica puede ser depreciada y la deformación plástica puede ser reemplazada por la deformación axial total. Tomando como referente lo anteriormente expuesto, la ecuación 3.60 se puede reescribir de la siguiente forma

$$\left(D_{cr} - D_o\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\kappa^2}{2ES_o} ln\left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{th}}\right) \tag{3.61}$$

Si D_{cr} ha sido determinado experimentalmente, la ecuación 3.61 permite identificar la constante $\kappa^2/2ES_o$ usando sólo el ensayo de tracción uniaxial. Para este estado de carga se obtiene la siguiente ley de evolución del daño sustituyendo la ecuación 3.61 en la 3.60

$$D = D_o + \left(D_{cr} - D_o\right) \left[1 - \left[1 - \frac{ln\left(\varepsilon/\varepsilon_{th}\right)}{ln\left(\varepsilon_{cr}/\varepsilon_{th}\right)}\right]^{\alpha}\right] \tag{3.62}$$

Por último, para un estado general multiaxial de tensiones, recordando la ecuación 3.61, se obtiene la siguiente expresión para la ley de evolución del daño

$$dD = \alpha \frac{(D_{cr} - D_o)^{1/\alpha}}{ln\,(\varepsilon_{cr}) - ln\,(\varepsilon_{th})} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_e q}\right) (D_{cr} - D)^{\alpha - 1/\alpha} \frac{dp}{p} \tag{3.63}$$

En el caso de carga proporcional

$$D = D_o + (D_{cr} - D_o)\left[1 - \left[1 - \frac{ln\,(p/p_{th})}{ln\,(\varepsilon_{cr}/\varepsilon_{th})} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_e q}\right)\right]^{\alpha}\right] \tag{3.64}$$

En la literatura [47, 9] es muy frecuente asumir que la razón (p_{cr}/p_{th}) es igual a la razón $(\varepsilon_{cr}/\varepsilon_{th})$ para el caso uniaxial como resultado del hecho de que el estado triaxial de esfuerzo debe de afectar de la misma forma al umbral de deformación plástica efectiva acumulada (p_{th}) y a la deformación en la falla (p_{cr}). Sin embargo, no hay evidencias experimentales de esta declaración, que implica una relación proporcional lineal entre el daño y la deformación y la misma disipación del daño sobre el rango completo de deformación hasta la falla. Para una ley no lineal de evolución del daño, es muy difícil afirmar *a priori* qué clase de efectos tiene el estado de esfuerzo triaxial sobre los parámetros del daño. En el marco del modelo propuesto, si dividimos la ecuación 3.59 por la ecuación 3.61, se obtiene

$$ln\left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{th}}\right) = f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) ln\left(\frac{p_{cr}}{p_{th}}\right) \tag{3.65}$$

Una vez más, la ecuación 3.61 requiere el conocimiento de la variación de (p_{th}), como resultado de la triaxialidad, para ser aplicada. Es bien sabido que la triaxialidad conduce a una fractura más rápida [7]; luego, se puede suponer que afecta principalmente a (p_{cr}) y que las modificaciones en la deformación umbral con respecto al estado uniaxial pueden tomarse como insignificantes. Así, la deformación plástica efectiva acumulada en la falla puede ser estimada como

$$p_{cr} \approx \varepsilon_{th}\left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{th}}\right)^{1/f(\sigma_m/\sigma_{eq})} \tag{3.66}$$

A continuación se exponen las expresiones analíticas para las leyes de evolución del daño de acuerdo a *Bonora*, *Lemaitre*, *Wang* y *Chandrakanth* [33]:

Bonora

$$dD = \frac{\sigma_{eq}^2}{2ES_o\,(1-D)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{(D_{cr} - D)^{\alpha - 1/\alpha}}{p^{2n+1}} dp \tag{3.67}$$

Lemaitre

$$dD = \frac{\sigma_{eq}^2}{2ES_L\left(1-D\right)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) dp \tag{3.68}$$

Wang

$$dD = \frac{\sigma_{eq}^2}{2ES_W\left(1-D\right)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{\left(p_{cr}-p\right)^{\alpha_w-1}}{p^{2n}} dp \tag{3.69}$$

Chandrakanth

$$dD = \frac{\sigma_{eq}^2}{2ES_c\left(1-D\right)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \frac{1}{p^{2/n}D^{\alpha_c/n}} dp \tag{3.70}$$

Efectos de la triaxialidad del esfuerzo sobre la evolución del daño

Los efectos de la triaxialidad del esfuerzo sobre la evolución del daño se muestran en la figura 3.12 propuesta por *Chandrakanth* [16]. Se puede observar que para valores crecientes de la triaxialidad, la tasa de crecimiento del daño aumenta significativamente; por ejemplo para una deformación plástica acumulada de 0,12, el daño es 0,10 en el caso uniaxial y de 0,16 en el caso triaxial. En éste ultimo caso el factor de triaxialidad (σ_m/σ_{eq}) es igual a 1.

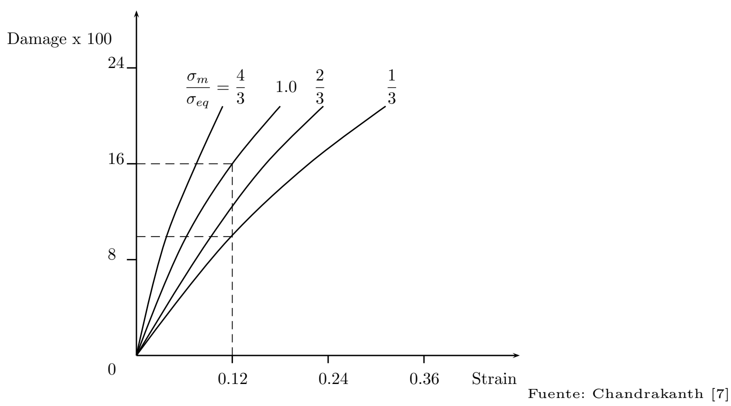


Figura 3.12: Efectos de la triaxialidad del esfuerzo sobre la evolución del daño

Por tanto, se puede concluir que cuanto mayor sea el factor de triaxialidad para una deformación dada, el material se dañará en mayor cuantía; o en otras palabras, ante un nivel de daño alcanzado por el material los desplazamientos serán menores en la medida que el factor de triaxialidad adquiera mayores valores.

3.4. Cálculo plástico clásico

Para entrar cualitativamente en el problema de cálculo plástico de pórticos, se ilustra el caso más sencillo de una viga biapoyada de acero dúctil (figura 3.13a) sometida a una carga uniforme w escalada por un factor de carga λ, que va a crecer desde cero hasta el instante del colapso. En la figura 3.13b se representa cualitativamente la evolución del factor de carga conforme crece la deflexión del punto central [82] suponiendo plastificación ideal.

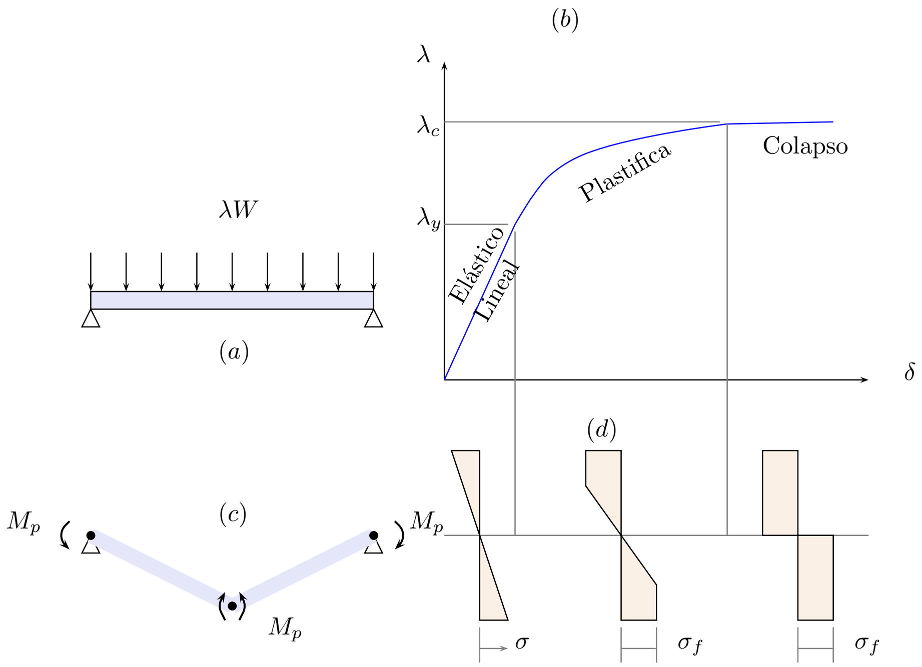


Figura 3.13: a) Viga biapoyada con carga uniforme λW, b) Evolución del factor de carga-deflexión, c) Mecanismo de colapso d) Distribución de tensiones en la sección central para los instantes considerados

Conforme la carga crece, la distribución de tensiones en la sección central va pasando por diversas etapas, representadas sobre la figura 3.13d.

- **Fase elástica lineal** (1). Se produce mientras la tensión máxima no alcance la de plastificación σ_f. Durante el comportamiento elástico lineal, la distribución de tensiones a lo largo del canto de la sección es lineal (bajo la hipótesis de barra de *Navier-Bernoulli*). Ello se debe a que la tensión es linealmente proporcional a la deformación, que a su vez es proporcional al brazo hasta la fibra neutra debido al giro de la sección que rige la deformación a flexión. Ello implica que el diagrama de factor de carga-deflexión también es lineal; mientras $\lambda < \lambda_y$, donde λ_y es el factor de carga con el que se inicia la plastificación de la sección.

- **Fase de plastificación parcial** (2). Cuando la deformación en los puntos más exteriores de la sección central (y posiblemente de las adyacentes) supera la correspondiente deformación elástica, la tensión deja de crecer proporcionalmente y la distribución de tensiones toma la forma descrita en la figura 3.13b. Esto sucede para $\lambda_y < \lambda < \lambda_c$. λ_c es el factor de carga que causa el colapso. Si asumimos que la ley de comportamiento tensión-deformación es elastoplástica perfecta, la tensión en los puntos con plastificación es constante e igual a σ_f.
- **Colapso** (3). En el instante teórico en el que todos los puntos de la sección central plastifican, dicha sección pierde su capacidad para seguir absorbiendo más carga y se deforma indefinidamente bajo carga constante (curva horizontal). Como se suele explicar, cinemáticamente se interpreta que ha aparecido la denominada rótula plástica para un valor del momento denominado momento plástico (M_P). Para este caso isostático, tras la rótula plástica, la viga se comporta como en la figura 3.13c, como un verdadero mecanismo, llamado mecanismo de colapso.

Posiblemente durante la fase (2), y con seguridad en la (3), las deformaciones de las fibras exteriores alcanzarán valores altos para los que el comportamiento supuesto del material puede no corresponder con el real. Por tanto, será necesario introducir el concepto de daño.

Este simple ejemplo permite presentar los siguientes principios básicos del cálculo plástico:

- Las estructuras dúctiles fallan cuando aparece el denominado mecanismo de colapso. Dicho mecanismo se produce por la aparición de un número suficiente de rótulas plásticas como para que se produzca su movimiento.
- Las rótulas plásticas se definen por secciones en las que se produce plastificación completa, con la consecuencia de que pueden girar indefinidamente sin alteración del momento flector resistido en ese instante.
- A pesar de su simplicidad, este modelo arroja resultados suficientemente aproximados porque, como se suele interpretar, se compensan los efectos de la pérdida de tensión debida a la rotura (daño) con el incremento de la misma debida al endurecimiento.

En el próximo apartado se presentan modelos simples donde se considera el daño, pudiéndose considerar de igual manera la posibilidad de endurecimiento.

3.5. Análisis de la degradación estructural

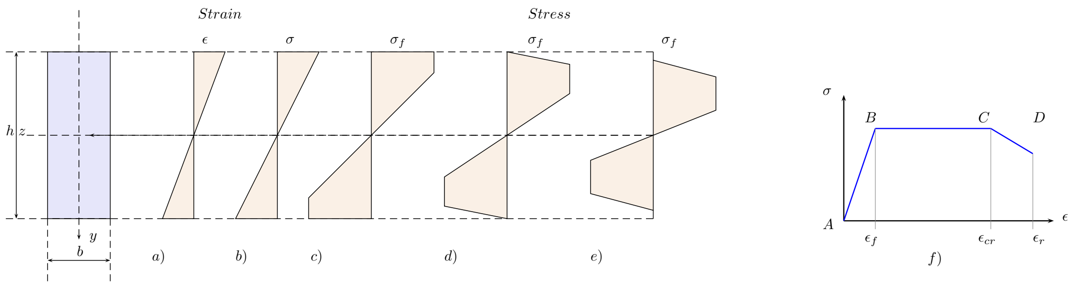
Lo descrito en el apartado anterior presupone que el material mantiene indefinidamente sus propiedades independientes del valor de las deformaciones plásticas que aparecen, es decir, no se endurece ni se daña, lo cual no está en consonacia con las observaciones experimentales.

El planteamiento de degradación está basado en la hipótesis de que determinadas propiedades de la estructura disminuyen a medida que aumenta la deformación plástica (rigidez, pérdida de resistencia del material, capacidad de disipación, etc.). La degradación de la resistencia siempre supone la existencia de un daño estructural. Actualmente existen modelos que permiten evaluar la degradación estructural mediante el acoplamiento de la variable daño (D) a las ecuaciones constitutivas del material, permitiendo realizar una evaluación más racional del estado real de las estructuras.

A continuación se presentan dos modelos de daño empleados para cuantificar la pérdida de rigidez de elementos de barra. Estos modelos servirán de referente para validar el modelo presentado en esta tesis, como se detalla en el capítulo 6.

3.5.1. Modelo de Lemaitre para daño dúctil en metales

Lemaitre en 1992, a partir del modelo de barra de *Navier-Bernoulli* bajo los únicos efectos del momento flector, consideró que la deformación en la sección de la viga muestra un distribución lineal, como la indicada en la figura 3.14a, con un máximo que es proporcional a la curvatura $k(\varepsilon = \mp hk/2)$, donde h es la altura de la sección de la viga, considerada simétrica respecto al plano de la flexión. Si se aumenta la curvatura, los esfuerzos en la sección presentan las sucesivas distribuciones mostradas en la figura 3.14.



Fuente: Inglessis [40]

Figura 3.14: Distribución del esfuerzo y la deformación en una viga bajo el modelo de *Lemaitre*. a) Deformación, b) Esfuerzo elástico, c) Esfuerzo elastoplástico sin daño, d) Elastoplástica del esfuerzo con zonas parcialmente dañadas, e) Elastoplástica del esfuerzo con zonas parcialmente y totalmente dañadas, f) Relación tensión-deformación

En el primer estado de carga, el comportamiento del material es elástico sobre toda la sección transversal (figura 3.14b). Esto ocurre para valores de k entre $0 \leq k \leq k_e$, donde $k_e = 2\sigma_f/Eh$. Cuando $k = k_e$, el momento M toma el valor M_e, siendo éste el momento necesario para iniciar la deformación plástica en el extremo de la sección.

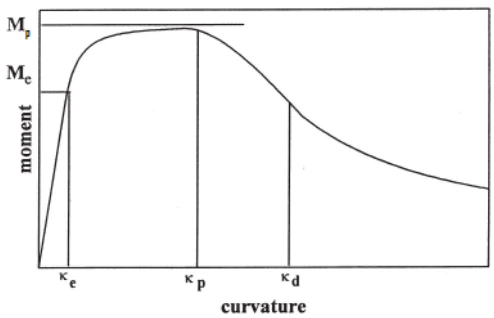
En el segundo estado, cuando $k_e \leq k \leq k_p$, la zona central de la viga presenta una zona elástica, mientras que la parte restante presenta un comportamiento perfectamente plástico (figura 3.14c) Durante este período, el momento soportado por la sección podría ascender asintóticamente al momento plástico convencional M_p para la sección transversal sometida a momento flector. Sin embargo, el proceso de daño comienza cuando la deformación plástica en la parte superior e inferior de la sección alcanza el valor crítico ε_{cr}. Esto pasa para $k = k_p$, donde k_p es igual a

$$k_p = \frac{2}{h}\left(\varepsilon_{cr} + \frac{\sigma_f}{E}\right) \tag{3.71}$$

El tercer estado de carga corresponde a la curvatura en el rango $k_p \leq k \leq k_d$. En este período, la sección se puede dividir en una zona elástica, una zona elastoplástica sin daño y una zona elastoplástica parcialmente dañada. Como se ve en la figura 3.14f, la distribución de la tensión en la última zona (tramo CD) sigue una distribución lineal con pendiente negativa. En esta zona el daño continúa creciendo hasta que la variable daño toma el valor de 1. Esto ocurre para un valor de curvatura igual a

$$k_d = \frac{2}{h}\left(\varepsilon_{cr} + \frac{\sigma_f}{E} + \frac{1}{c}\right) \tag{3.72}$$

Lo casos 3.14d y 3.14e corresponden al crecimiento de la zona dañada cuando $k \geq k_d$. En este intervalo, el momento sobre la sección tiende asintóticamente a cero. La relación momento-curvatura se muestra en la figura 3.15 extraída de [40].

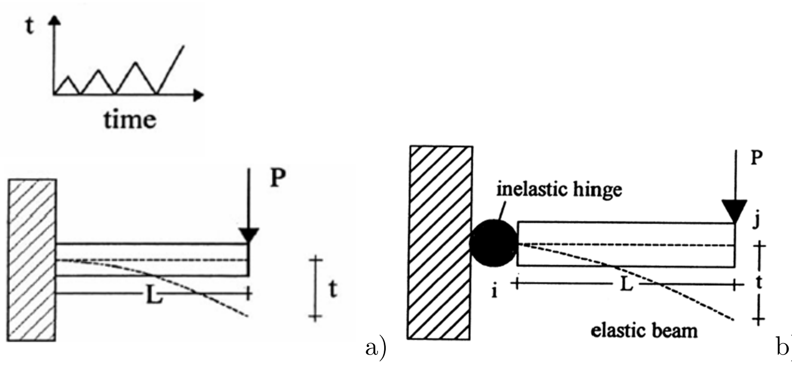


Fuente: Inglessis [40]

Figura 3.15: Momento-curvatura de una viga de sección rectangular bajo el modelo de *Lemaitre*

3.5.2. Modelo de daño simplificado de Inglessis para pórticos

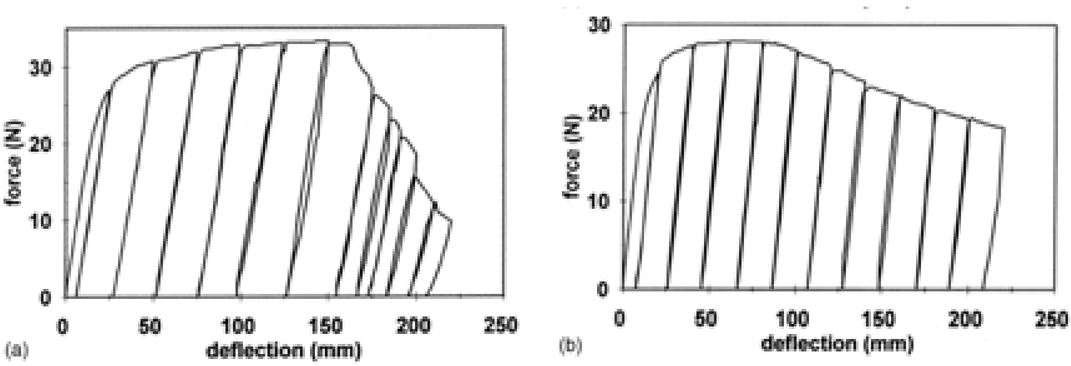
Inglessis et al. en 1999, a través de ensayos de carga y descarga en barras metálicas de diferentes longitudes y áreas de sección transversal, vinculadas y cargadas como se muestra en la figura 3.16, concluyó que la relación momento-curvatura de la figura 3.15 puede ser usada para describir el comportamiento observado durante el ensayo.



Fuente: Inglessis [40]

Figura 3.16: Ensayo sobre elementos de acero: probeta y carga

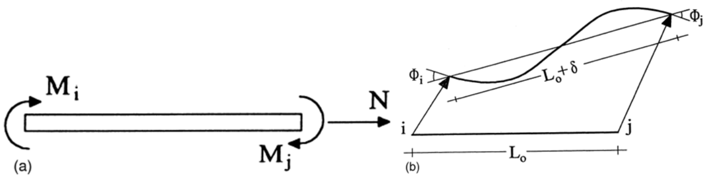
Los resultados experimentales de dos de estos ensayos se muestran en la figura 3.17. *Inglessis et al.* asumieron, a partir de esto que el modelo de *Lemaitre* del daño puede caracterizar adecuadamente el comportamiento de un elemento de acero a flexión.



Fuente: Inglessis [40]

Figura 3.17: Deflexión-carga. a) Probeta de sección circular, b) Probeta de sección rectangular

Un modelo constitutivo que relaciona las deformaciones y los esfuerzos se expone brevemente a continuación. En el caso de un elemento de un pórtico plano, las deformaciones $\{\Phi\}^t = (\Phi_i, \Phi_j, \delta)$ y esfuerzos generalizados $\{M\}^t = (M_i, M_j, N)$ se definen como en la figura 3.18, donde M_i y M_j designan los momentos en los extremos i y j de la barra, Φ_i y Φ_j los giros medidos con respecto a la cuerda $i - j$ desplazada, N es la fuerza axial y δ el alargamiento.



Fuente: Inglessis [40]

Figura 3.18: Esfuerzos y deformaciones generalizadas en un elemento del pórtico

El modelo constitutivo del elemento elástico del pórtico puede escribirse de forma matricial como

$$\{M\} = [S^o]\{\Phi\}, \text{ o }, \{\Phi\} = [F^o]\{M\} \tag{3.73}$$

donde S^o y F^o son, respectivamente, las matrices de rigidez y flexibilidad del elemento. Los elementos de estas matrices son función de la inercia y del área de la sección transversal de la barra. Estas matrices son dependientes del esfuerzo y de las deformaciones, sin considerar los efectos no lineales geométricos.

La ley de comportamiento de un elemento de pórtico elastoplástico, donde se considera la aparición de deformaciones permanentes, relaciona los esfuerzos generalizados $\{M\}$ con la historia de deformaciones generalizadas $\{\Phi\}$. Para su obtención se adopta la hipótesis de plasticidad concentrada. Esta hipótesis consiste en suponer que un miembro del pórtico está constituido por una viga-columna elástica entre dos rótulas en los extremos, donde se suponen concentrados los efectos inelásticos.

Con la finalidad de describir el comportamiento inelástico del elemento y, por lo tanto, considerar la posibilidad de aparición de deformaciones permanentes, se introduce como variable interna la matriz de deformaciones plásticas generalizadas $\{\Phi^p\}^t = (\Phi_i^p, \Phi_j^p, \delta^p)$, que contiene las rotaciones plásticas de las rótulas i y j, respectivamente, ambas medidas con respecto a la cuerda deformada. Las deformaciones generalizadas totales del elemento $\{\Phi\}$ pueden descomponerse en las deformaciones de la viga-columna elástica $\{\Phi^{vc}\}$ y en las deformaciones de las rótulas plásticas $\{\Phi^h\}$

$$\{\Phi\} = \{\Phi^{vc}\} + \{\Phi^h\}, \text{ o }, \{\Phi\} = [F^o]\{M\} + \{\Phi^h\} \tag{3.74}$$

Si se asume que la deformación en la rótula resulta de la deformación plástica $\{\Phi^p\}$ y del término adicional relativo al daño $\{\Phi^d\}$

$$\{\Phi^h\} = \{\Phi^p\} + \{\Phi^d\} \tag{3.75}$$

Para determinar $\{\Phi^d\}$ se considerará un elemento de pórtico plano sometido exclusivamente a fuerzas axiales. En este caso particular, y considerando la ec. 3.74, se obtiene que

$$\delta = F_{33}^o N + \delta^p + \delta^d, \text{ donde }, F_{33}^o = \frac{L}{AE} \tag{3.76}$$

L es la longitud del elemento, A es el área de la sección transversal y E el módulo de Young. Si se asume que hay un estado constante de daño y de deformaciones sobre el elemento, la ec.(3.20) lleva a la siguiente expresión

$$\delta - \delta^p = \frac{N F_{33}^o}{1 - D} \tag{3.77}$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\delta^d = \frac{D}{1 - D} F_{33}^o N \tag{3.78}$$

Empleando la expresión anterior, se obtiene un modelo de inelasticidad concentrada que es equivalente a la teoría del daño continuo en el caso particular considerado. Puede observarse que, cuando el daño es igual a 0, no hay deformaciones adicionales. En el otro caso extremo, cuando el daño es igual a 1, se tiene una rótula con flexibilidad infinita (o rigidez nula). En otras palabras, la rótula y la viga-columna elástica pueden suponerse desconectadas y el conjunto no tiene capacidad alguna para transmitir momentos flectores y, en su caso, fuerzas axiales. En el caso general, cuando los efectos de flexión y carga axial están presentes simultáneamente, se postula que las deformaciones generalizadas debidas al daño se expresan de la siguiente manera

$$\{\Phi^d\} = [C\,(D)]\{M\} \tag{3.79}$$

donde

$$[C\,(D)] = \begin{bmatrix} \dfrac{D_i F_{11}^o}{1 - D_i} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{D_j F_{22}^o}{1 - D_j} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{D_n F_{33}^o}{1 - D_n} \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

Los parámetros D_i y D_j son, respectivamente, una medida del estado del daño debido a la flexión en las rótulas i y j, y D_n es el parámetro que define el daño en la rótula debido a la fuerza axial. Los ceros fuera de la diagonal de la matriz $[C(D)]$ implican que se está suponiendo que el momento sobre alguna de las rótulas sólo induce rotaciones adicionales por daño en esa misma rótula.

Teniendo en cuenta las ecs (3.74, 3.75 y 3.79), se puede obtener la ley de estado para un elemento de pórtico elastoplástico dañado

$$\{\Phi - \Phi^p\} = [F\,(D)]\{M\}, \text{ donde, } [F\,(D)] = [F^o] + [C\,(D)] \tag{3.81}$$

o, alternativamente

$$\{M\} = \{\Phi - \Phi^p\}[S\,(D)], \text{ donde, } [S\,(D)] = [F\,(D)]^{-1} \tag{3.82}$$

Las matrices $[F(D)]$ y $[S(D)]$ son, respectivamente, las matrices de flexibilidad y rigidez de un elemento dañado. Las ecs. 3.80 y 3.81 reflejan la ley de elasticidad de un elemento elastoplástico de pórtico dañado. Ahora la ley de elasticidad no describe totalmente la relación entre los esfuerzos generalizados y las deformaciones, desde que se incluyeron las dos variables internas (deformación plástica y daño). Por lo tanto, se deben añadir dos ecuaciones adicionales, llamadas leyes de evolución de las variables internas.

En la figura 3.16b se muestra simbólicamente el modelo empleado en el ensayo de laboratorio para determinar las leyes de evolución del daño. Teniendo en cuenta las siguientes condiciones (t es la deflexión en el extremo libre del miembro, t^p es la deflexión permanente y P es la fuerza)

$$M_i = PL, M_j = 0, \Phi_i = \frac{t}{L}, \Phi_i^p = \frac{t^p}{L}, D_i = D, D_j = 0 \tag{3.83}$$

y la ley de elasticidad, se puede escribir la ec.(3.83) como relación entre la fuerza y el desplazamiento de la siguiente manera

$$P = B\left(D\right)\left(t - t^p\right), \text{ donde, } B\left(D\right) = \left(1 - D\right)B^o, y, B^o = \frac{3EI}{L^3} \tag{3.84}$$

El término $B(D)$ puede ser interpretado como la pendiente del ensayo elástico de descargas de la figura 3.17. De la misma forma que se obtuvo la ley de evolución del daño para el estado de daño de un elemento de volumen dada por la ec. (A.19), se puede obtener la ley de evolución de la variable D (variable que mide el estado de daño debido a la flexión en la rótula inelástica). La deformación plástica y el daño de la rótula pueden ser expresados como

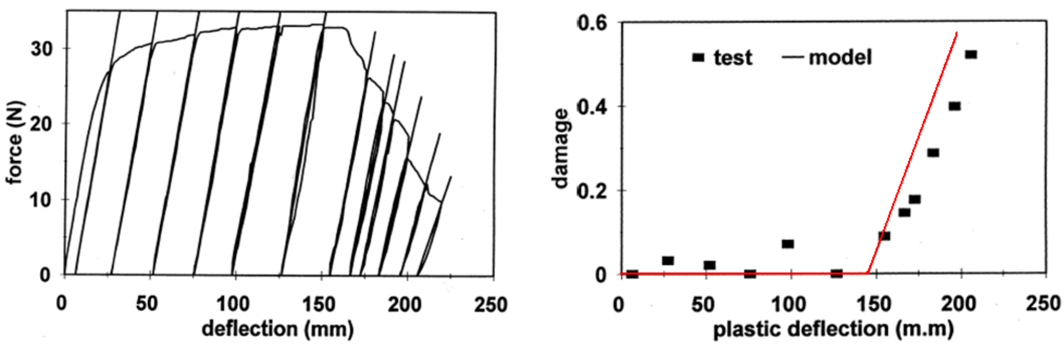
$$\Phi_p = \frac{t^p}{L}, D = 1 - \frac{B}{B^o} \tag{3.85}$$

En la ec.(3.85) se desprecian los efectos no lineales. La determinación experimental de las pendientes $B(D)$ son de una manera algo subjetiva, sin embargo, con las pendientes obtenidas en la figura 3.19 es posible construir la curva de daño como una función de la deflexión plástica mostrada en la misma figura. Para elementos de acero de diferentes longitudes y formas se obtuvieron resultados similares (*Gómez* [35] y *Quintero* [73]).

Se puede notar que tanto en la ley de evolución del daño en un volumen de elemento continuo como en la ley de evolución del daño en una rótula, los resultados experimentales permiten la formulación de un modelo de daño simple de la misma forma que en el modelo uniaxial de *Lemaitre*. Para ello *Inglessis* propuso la siguiente ecuación constitutiva para miembros de acero con rótulas plásticas dañadas.

Comportamiento elástico según la ley de elasticidad ec.(3.81)

$$\{M\} = \{\Phi - \Phi^p\}[S\left(D\right)] \tag{3.86}$$



Fuente: Inglessis [40]

Figura 3.19: Determinación experimental de $B(D)$. Tubo de sección circular

Funciones de fluencia

$$f_i = \left| \frac{M_i}{1 - D_i} \right| - M_y \, (\text{rótula}_i) \tag{3.87}$$

$$f_j = \left| \frac{M_j}{1 - D_j} \right| - M_y \, (\text{rótula}_j) \tag{3.88}$$

Leyes de evolución de la deformación plástica

$$\begin{aligned} d\Phi_i^p &= 0, \text{ si } , f_i < 0, \text{ ó } , df_i < 0 \\ d\Phi_i^p &\neq 0, \text{ si } , f_i = 0, \text{ ó } , df_i = 0 \end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned} d\Phi_j^p &= 0, \text{ si } , f_j < 0, \text{ ó } , df_j < 0 \\ d\Phi_j^p &\neq 0, \text{ si } , f_j = 0, \text{ ó } , df_j = 0 \end{aligned} \tag{3.90}$$

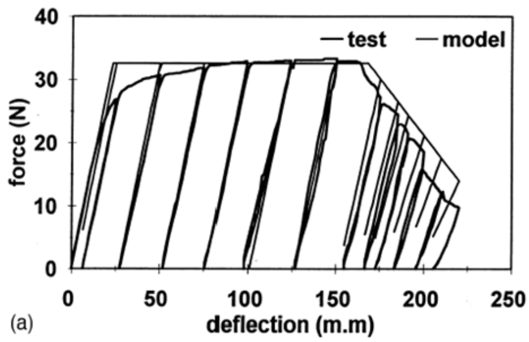
Ley de evolución del daño

$$D_i = b\,(p_i - p_{cr})\,, D_j = b\,(p_j - p_{cr}) \tag{3.91}$$

donde M_y, p_{cr} y b son constantes que dependen del elemento, y p_i y p_j son las deformaciones plásticas acumuladas. No se consideran los efectos inelásticos de la fuerza axial en el modelo presentado

$$dp_i = |d\Phi_i^p|, dp_j = |d\Phi_j^p| \tag{3.92}$$

Se puede notar que, la función de fluencia de la rótula se obtuvo mediante el principio de deformación equivalente. En la figura 3.20 se puede ver una comparación entre un ensayo del laboratorio y el modelo de *Inglessis*. Estas simulaciones fueron hechas para distintas secciones con los siguientes parámetros: (tubo circular) $M_y = 21000N.mm$, $b = 6,9$, $p_{cr} = 0,22$, $EI = 1,363{,}10^7 mm^2 - N$ (tubo rectangular) $M_y = 18600mm - N$, $b = 2$,$p_{cr} = 0,14$, $EI = 1,906{,}10^7 mm^2.N$.



Fuente: Inglessis [40]

Figura 3.20: Comparación numérica entre el modelo de *Inglessis* y el ensayo del laboratorio

Limitaciones del modelo simplificado de daño

El modelo de *Inglessis*, que de forma resumida se acaba de presentar, persigue objetivos similares a los de este trabajo. A continuación se indican ciertas limitaciones que presenta este modelo y que servirán de referencia para los modelos que se propondrán en el capítulo siguiente.

- Es necesario conocer previamente, a través de ensayos de laboratorio, la ley de evolución del daño (en función del material empleado y de la geometría de la sección de la barra).
- No se considera el efecto de la triaxialidad del esfuerzo en la función de evolución del daño.
- Hoy se aceptan otros modelos de daño [7, 16], que superan ciertas limitaciones del modelo de *Lemaitre*, base del modelo de *Inglessis*.
- No se tienen en cuenta los efectos de no linealidad geométrica.
- No incluye el esfuerzo cortante o el axil y cortante combinados.
- No se tienen en cuenta la existencia de deformaciones o giros permanentes

Algunas de la limitaciones presentadas por el modelo de *Inglesiss* son superadas con el desarrollo de esta tesis; en la cuál se presenta un modelo que emplea los conceptos de la termodinámica de los medios continuos y de la *mecánica del daño* para acoplar la variable daño a las ecuaciones constitutivas del material. La diferencia con el modelo de *Inglessis* radica en el empleo de funciones que relacionan la evolución del daño del material con la energía de deformación asociada a éste, obteniendo leyes de evolución más generales que pueden ser empleadas para diversos materiales, además de considerar que la sección de la barra se agota por el acoplamiento de los esfuerzos (axil, cortante y flector).

Capítulo 4
Comportamiento elastoplástico degradable del elemento barra 2D

Capítulo 4

Comportamiento elastoplástico degradable del elemento barra 2D

4.1. Introducción

En este capítulo se proponen dos modelos que permiten describir el comportamiento elastoplástico degradable del elemento barra 2D. La diferencia entre los modelos radica en las teorías empleadas para incluir la degradación de la rigidez de la sección transversal de la barra por acumulación de deformación plástica en las ecuaciones constitutivas que caracterizan el comportamiento de dicha barra. Para el desarrollo de uno de los modelos se han tenido en cuenta los conceptos de la teoría de la plasticidad y de daño a nivel de punto y de sección, completando en cierto modo lo presentado en el apartado 3.4 del capítulo anterior; para el otro modelo, se han tenido en cuenta los conceptos de la *mecánica del daño continuo* expuestos en el apartado 3.3. Para ambos modelos se presentan la formulación de las leyes de estado y la matriz de rigidez elastoplástica del elemento barra $2D$, así como las leyes de evolución de las variables internas. Se han tenido en cuenta hipótesis tales como: modelo aplicado a elementos barra $2D$, las cargas se aplican de forma lenta y monótonamente creciente (proceso cuasiestático), la no linealidad material que se considera corresponde a elastoplasticidad ideal con la ley de flujo asociada y se adopta el modelo de plasticidad instantánea y concentrada en ciertas secciones de las barras, por lo que la plasticidad sólo afecta a la sección que alcanza el agotamiento y no a las de su entorno. Con todo lo anterior se definen dos modelos matemáticos alternativos con los que se resuelven distintos ejemplos y se comparan los resultados entre sí y con los de otros autores, mostrando la adecuación de ambos.

4.2. Formulación del elemento barra

Como es sabido, cuando el sólido objeto de estudio presenta peculiaridades geométricas, es posible introducir simplificaciones basadas en ellas, dando lugar a modelos matemáticos relativamente sencillos. En este contexto, se determina el modelo matemático que caracteriza el comportamiento resistente de las *barras prismáticas*, recurriendo para ello a la teoría de la *Resistencia de Materiales*.

El comportamiento como sólido deformable de las barras prismáticas se caracteriza a través de un modelo monodimensional en el que todas las magnitudes están referidas a secciones, en vez de a puntos, y dependen de su posición en la barra determinada mediante la coordenada longitudinal x.

El modelo tendrá aplicación práctica si a partir de sus magnitudes características se pueden determinar las tensiones y los desplazamientos en todos los puntos de todas las secciones. Los desplazamientos se definen a partir de las magnitudes cinemáticas correspondientes a los puntos del eje longitudinal de la barra. Sin embargo, las tensiones no se pueden obtener directamente del modelo de barras, ya que aparecen en el entorno del punto, por lo que se establecen relaciones con el modelo continuo [34], como se verá a continuación.

4.2.1. Esfuerzos

Son las fuerzas y momentos estáticamente equivalentes a la distribución de tensiones en los puntos de una sección, expresados en el sistema de referencia local de la barra. Las denominaciones y símbolos clásicos de estos esfuerzos son para el caso bidimensional: el axil $N_x(x)$, el cortante en la dirección y, $V_y(x)$ y el momento flector en la dirección z, $M_z\,(x)$. La relación entre los esfuerzos de la sección y las tensiones de los puntos viene expresada mediante las condiciones de equilibrio

$$N_x\,(x) = \int_A \sigma_x\,(x,y,z)\,dA \tag{4.1}$$

$$V_y\,(x) = \int_A \tau_{xy}\,(x,y,z)\,dA \tag{4.2}$$

$$M_z\,(x) = \int_A \sigma_x\,(x,y,z)\,ydA \tag{4.3}$$

4.2.2. Matriz de rigidez del elemento barra 2D en régimen elástico lineal

La matriz de rigidez $[K]$ del elemento barra $2D$ se define con base a la teoría de *Navier-Bernoulli*, para ello consideraremos una viga de longitud l, sección transversal de área A y módulo de inercia I sobre la que actúa una serie de cargas verticales y momentos contenidos en el plano xy, que es el plano principal de inercia de la sección transversal.

La teoría de barras clásica de *Navier-Bernoulli*, se basa en las 3 hipótesis siguientes:

1. Los desplazamientos verticales de todo los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la barra x.
2. El desplazamiento lateral (según el eje z de la figura 4.1 es nulo).
3. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación.

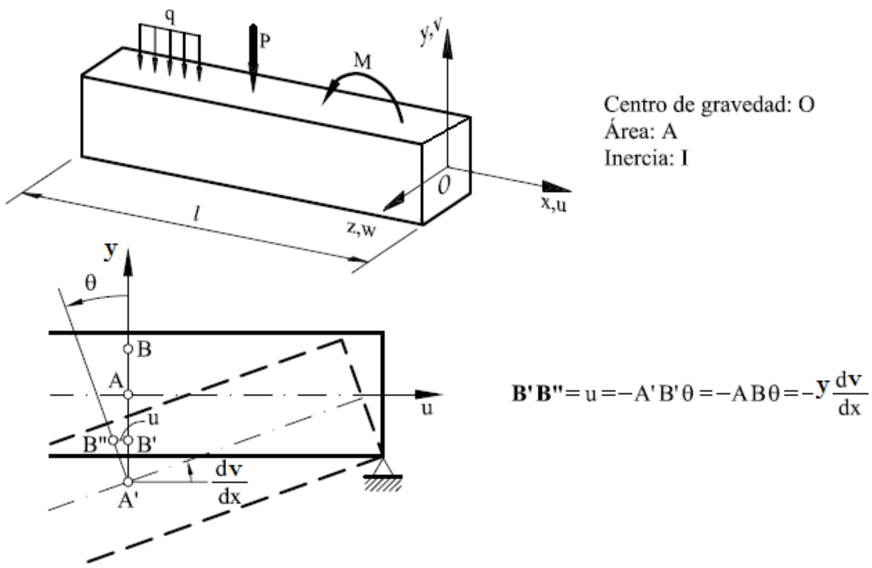


Figura 4.1: Elemento barra

De acuerdo con las hipótesis anteriores el campo de desplazamientos de un punto cualquiera se puede escribir como

$$u(x,y,z) = -y\theta(x) \tag{4.4}$$

$$v(x,y,z) = v(x) \tag{4.5}$$

$$w(x,y,z) = 0 \tag{4.6}$$

A continuación se determinará la matriz de rigidez del elemento barra articulada en sus extremos y sometida a esfuerzo axil N y suponiendo que no se presentan fenómenos de inestabilidad elástica (pandeo), posteriormente se determinará la matriz de rigidez del elemento barra $2D$ sometido únicamente a deformaciones de flexión y finalmente aplicando el principio de superposición se determina la matriz de rigidez del elemento barra considerando los seis grados de libertad nodal total.

Matriz de rigidez axial del elemento barra.

Para empezar discretizaremos la barra en un único elemento de dos nodos que definen una variación lineal del desplazamiento $u(x)$ en su interior como

$$u\left(x\right) = a_o + a_1 x \tag{4.7}$$

Lógicamente $u(x)$ tiene que tomar en los nodos 1 y 2 los valores $u_1^{(e)}$ y $u_2^{(e)}$ respectivamente. Es decir

$$u\left(x_1^{(e)}\right) = u_1^{(e)} \text{ y } u\left(x_2^{(e)}\right) = u_2^{(e)} \tag{4.8}$$

siendo $x_1^{(e)}$ y $x_2^{(e)}$ las coordenadas de los nodos 1 y 2. El índice e se refieren al elemento.

Sustituyendo las condiciones ec.4.8 en ec.4.7 se obtiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente

$$\begin{aligned} u_1^{(e)} &= a_o + a_1 x_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} &= a_o + a_1 x_2^{(e)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

de donde pueden despejarse las constantes a_o y a_1

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{x_2^{(e)} u_1^{(e)} - x_1^{(e)} u_2^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} \\ a_1 &= \frac{u_1^{(e)} - u_2^{(e)}}{x_1^{(e)} - x_2^{(e)}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Sustituyendo la ec.4.10 en la ec.4.7, puede reescribirse ésta como

$$u = T_1(x) u_1^{(e)} + T_2(x) u_2^{(e)} \tag{4.11}$$

donde T_1 y T_2 son las funciones de forma de los nodos 1 y 2 del elemento, respectivamente, que tiene la expresión siguiente

$$T_1 = \frac{x_2^{(e)} - x}{l^{(e)}},\; T_2 = \frac{x - x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \tag{4.12}$$

siendo $l^{(e)} = x_2^{(e)} - x_1^{(e)}$ la longitud del elemento. Se deduce de ec.4.12 que cada función de forma T_i $(i = 1, 2)$ varía linealmente en el interior del elemento y vale uno en el nodo i y cero en el otro nodo.

Las derivadas de las funciones de forma se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dx} &= -\frac{1}{l^{(e)}} \\ \frac{dT_2}{dx} &= \frac{1}{l^{(e)}}\end{aligned} \tag{4.13}$$

De esta manera se puede obtener la deformación axial en cualquier punto dentro del elemento por

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dT_1}{dx}u_1^{(e)} + \frac{dT_2}{dx}u_2^{(e)} = -\frac{1}{l^{(e)}}u_1^{(e)} + \frac{1}{l^{(e)}}u_2^{(e)} \tag{4.14}$$

Las fuerzas entre elemento se transmiten únicamente a través de los nodos. Dichas fuerzas nodales pueden calcularse para cada elemento haciendo uso del principio de los trabajos virtuales PTV, que se escribe para el elemento considerado como

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \delta\epsilon EA\epsilon dx = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \delta u b dx + \delta u_1^{(e)} X_1^{(e)} + \delta u_2^{(e)} X_2^{(e)} \tag{4.15}$$

donde $\delta u_1^{(e)}$, $\delta u_2^{(e)}$, $X_1^{(e)}$ y $X_2^{(e)}$ son los desplazamientos virtuales y las fuerzas nodales de equilibrio de los nodos 1 y 2 del elemento, respectivamente. El desplazamiento virtual puede también interpolarse en función de los desplazamientos virtuales de los dos nodos del elemento. Así, de acerdo con la ec.4.10, puede escribirse

$$\delta u = T_1 \delta u_1^{(e)} + T_2 \delta u_2^{(e)} \tag{4.16}$$

Por otra parte, la deformación virtual puede expresarse en función de los desplazamientos virtuales nodales como

$$\delta\epsilon = \frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{dT_1}{dx}\delta u_1^{(e)} + \frac{dT_2}{dx}\delta u_2^{(e)} \tag{4.17}$$

La ec.4.15 se escribe, tras sustituir convenientemente las ec.4.10, 4.12, 4.13, como

$$\begin{aligned}\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \left[\frac{dT_1}{dx}\delta u_1^{(e)} + \frac{dT_2}{dx}\delta u_2^{(e)}\right](EA)\left[\frac{dT_1}{dx}u_1^{(e)} + \frac{dT_2}{dx}u_2^{(e)}\right]dx - \\ \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \left[T_1\delta u_1^{(e)} + T_2\delta u_2^{(e)}\right] b dx = \delta u_1^{(e)} X_1^{(e)} + \delta u_2^{(e)} X_2^{(e)}\end{aligned} \tag{4.18}$$

y, agrupando términos

$$\begin{aligned}\delta u_1^{(e)}\left[\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \left(\frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_1}{dx}u_1^{(e)} + \frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_2}{dx}u_2^{(e)}\right)dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} T_1 b dx - X_1^{(e)}\right] + \\ \delta u_2^{(e)}\left[\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \left(\frac{dT_2}{dx}(EA)\frac{dT_1}{dx}u_1^{(e)} + \frac{dT_2}{dx}(EA)\frac{dT_2}{dx}u_2^{(e)}\right)dx - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} T_2 b dx - X_2^{(e)}\right] = 0\end{aligned} \tag{4.19}$$

Como los desplazamientos virtuales son arbitrarios, el cumplimiento de la ec.4.20 para cualquier valor de $\delta u_1^{(e)}$ y $\delta u_2^{(e)}$ obliga a que los valores de los corchetes sean nulos, los que proporciona las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\left(\frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_1}{dx}u_1^{(e)}+\frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_2}{dx}u_2^{(e)}\right)dx-\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}T_1bdx-X_1^{(e)}=0\\ \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\left(\frac{dT_2}{dx}(EA)\frac{dT_1}{dx}u_1^{(e)}+\frac{dT_2}{dx}(EA)\frac{dT_2}{dx}u_2^{(e)}\right)dx-\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}T_2bdx-X_2^{(e)}=0\end{aligned} \tag{4.20}$$

Del sistema de ecuaciones anterior se deducen los valores $X_1^{(e)}$ y $X_2^{(e)}$. En forma matricial

$$\begin{aligned}\left(\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\left[\begin{array}{cc}\left(\frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_1}{dx}\right) & \left(\frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_2}{dx}\right)\\ \left(\frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_1}{dx}\right) & \left(\frac{dT_1}{dx}(EA)\frac{dT_2}{dx}\right)\end{array}\right]dx\right)\left\{\begin{array}{c}u_1^{(e)}\\ u_2^{(e)}\end{array}\right\}-\\ \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\left\{\begin{array}{c}T_1\\ T_2\end{array}\right\}bdx=\left\{\begin{array}{c}X_1^{(e)}\\ X_2^{(e)}\end{array}\right\}\end{aligned} \tag{4.21}$$

Las ecuación anterior expresa el equilílibrio entre las fuerzas nodales, la carga repartida sobre el elemento y los desplazamientos nodales y puede excribirse como

$$K^{(e)}a^{(e)}-f^{(e)}=q^{(e)} \tag{4.22}$$

con

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\frac{dT_i}{dx}(EA)\frac{dT_j}{dx} \tag{4.23}$$

$$f_i^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}T_i^{(e)}bdx\text{i,j=1,2} \tag{4.24}$$

$$a^{(e)} = \left[u_1^{(e)},u_2^{(e)}\right],q^{(e)}=\left[X_1^{(e)},X_2^{(2)}\right]^T \tag{4.25}$$

donde $K^{(e)}, a^{(e)}, f^{(e)}$ y $q^{(e)}$ son la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales, el vector de fuerzas nodales equivalentes y el vector de fuerzas nodales de equilibrio del elemento, respectivamente. Si el módulo de Young, la sección de la barra se obtiene

$$K^{(e)}=\left(\frac{EA}{l}\right)^{(e)}\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ -1 & 1\end{array}\right] \tag{4.26}$$

Matriz de rigidez del elemento barra por deformación a flexión

Aprovecharemos los resultados obtenidos en el apartado anterior y, solamente, se determinara la matriz de rigidez de un elemento barra $2D$ sometido únicamente a deformación de flexión.

Por la hipótesis 3 el giro θ es igual a la pendiente de la deformada del eje (figura 4.1), es decir

$$\theta = \frac{dv}{dx} \text{ y } u = -y\frac{dv}{dx} \tag{4.27}$$

Las deformaciones en un punto se obtienen por

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y\frac{d^2v}{dx^2} \tag{4.28}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{4.29}$$

La única tensión no nula σ_x se relaciona con su correspondiente deformación ϵ_x por

$$\sigma_x = E\epsilon_x = -yE\frac{d^2v}{dx^2} \tag{4.30}$$

Se define el momento flector positivo M de una sección (figura 4.1) como

$$M = -\int\int_A y\sigma_x dA = \int\int_A y^2 E\frac{d^2v}{dx^2}dA = EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{4.31}$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y y $\frac{d^2v}{dx^2}$ es la curvatura de la barra.

Supondremos que las fuerzas verticales distribuidas q tienen sentidos opuestos al establecido como positivo para la deflexión y, por otra parte, que los momentos exteriores son positivos si su sentido coincide con el positivo del giro. En dichas circunstancias, el principio de trabajos virtuales para la barra se escribe como

$$\int\int\int_V \delta\epsilon_x\sigma_x dV = -\int_0^l \delta vq dx - \sum_{i=1}^{P}\delta v_i P_i + \sum_{j=1}^{q}\delta\theta_j M_j \tag{4.32}$$

La integral de volumen del primer miembro representa el trabajo virtual interno y se simplifica como sigue (suponiendo material homogéneo en cada sección)

$$\begin{aligned}\int\int\int_V \delta\epsilon_x\sigma_x dV = \int_0^l \left[\int\int_A y^2 dA\right] E\frac{d^2v}{dx^2}\delta\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx = \\ \int_0^l \delta\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)EI\frac{d^2v}{dx^2}dx = \int_0^l \delta\frac{d^2v}{dx^2}M dx\end{aligned} \tag{4.33}$$

Por consiguiente, el trabajo virtual interno se puede expresar por la integral sobre la longitud de la viga del producto del momento flector por la correspondiente curvatura virtual.

La incógnita fundamental del problema es la deflexión de la barra v. No Obstante, en le PTV aparecen segundas derivadas de la deflexión v y la aproximación en este caso debe garantizar la continuidad de v y de su primera derivada $\frac{dv}{dx}$. Esta condici´n se puede interpretar físicamente de manera sencilla teniendo en cuenta que $\frac{dv}{dx}$ coincide con la pendiente de la deformada de la barra. Por tanto, dicha derivada debe ser continua para garantizar que la deformada del eje describa una curva suave.

El elemento mas sencillo de barra es el monodimensional de dos nodos. La continuidad de las primeras derivadas obliga a tomar el giro $\frac{dv}{dx}$ como variable. por consiguiente, el número total de variables nodales del elemento es 4 (v_i, y $\left(\frac{dv}{dx}\right)_i$). Dichas variables definen perfectamente una variación cúbica de la deflexión

$$v = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{4.34}$$

Las contantes a_i se calculan sustituyendo adecuadamente los valores de la deflexión en los nodos en ec.4.34, lo que proporcina el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas siguiente:

$$v_1 = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 \tag{4.35}$$
$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_1 = a_1 + 2a_2 x_1 + 3a_3 x_1^2 \tag{4.36}$$
$$v_2 = a_o + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 \tag{4.37}$$
$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_2 = a_2 + 2a_2 x_2 + 3a_3 x_2^2 \tag{4.38}$$

Una vez resuelo el sistema se puede reescribir ec.4.34, tras sustituir convenientemente las expresiones de las a_i, como

$$v = T_3 v_1 + T_4 \frac{l^{(e)}}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)_1 + T_5 v_2 + T_6 \frac{l^{(e)}}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)_2 \tag{4.39}$$

donde las funciones de interpolación, denominadas de *Hermite*, vienen expresadas por

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right), T_5 = \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right) \\ T_4 &= \frac{1}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right), T_6 = \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

con

$$\xi = \frac{2}{l^{(e)}}(x - x_m) \text{ y } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{4.41}$$

La ecuación 4.39 puede reescribirse como

$$v = T a^{(e)} \tag{4.42}$$

donde

$$T_i = [T_3, T_4, T_5, T_6] \text{ y } a^{(e)} = \left[v_1, \left(\frac{dv}{dx}\right)_1, v_2, \left(\frac{dv}{dx}\right)_2\right]^T \tag{4.43}$$

son la matriz de funciones de forma y el vector de movimientos (desplazamientos y giros) nodales del elemento, respectivamente.

La aproximación definida por la ec.4.39 se denomina Hermítica, por coincidir las funciones de forma con polinomios de Hermite. La representación gráfica de las cuatro funciones de forma del elemento Hermítico de dos nodos se muestra en la figura. Obsérvese que las funciones T_3 y T_5 valen la unidad en un nodo y cero en el otro, mientras que sus primeras derivadas son cero en ambos nodos, sucediendo lo contrario con las funciones T_4 y T_6.

De la ec.4.41 se deduce que $\frac{dx}{d\xi} = \frac{l^{(e)}}{2}$, con lo que

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi, \frac{dv}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dv}{d\xi}, \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} \tag{4.44}$$

Por consiguiente, la curvatura en un punto del elemento de coordenadas ξ se obtiene haciendo uso de ec.4.35 ec.4.44 por

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \left(\frac{d^2T_3}{d\epsilon^2} v_1 + \frac{l^{(e)}}{2} \frac{d^2T_4}{d\xi^2} \left(\frac{dv}{dx}\right)_1 + \frac{d^2T_5}{d\epsilon^2} v_2 + \frac{l^{(e)}}{2} \frac{d^2T_6}{d\xi^2} \left(\frac{dv}{dx}\right)_2 \right) = \tag{4.45}$$

$$\left[\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(-1+3\xi)}{l^{(e)}}, -\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(1+3\xi)}{l^{(e)}} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \left(\frac{dv}{dx}\right)_1 \\ v_2 \\ \left(\frac{dv}{dx}\right)_2 \end{Bmatrix} = B_f a^{(e)}$$

siendo B_f la matriz de deformación de flexión o de curvatura del elemento.

Finalmente, la expresión de los trabajos virtuales de un elemento queda, utilizando las ecuaciones 4.32, 4.33, 4.35 y 4.45, como

$$\int_{l^{(e)}} \delta \frac{d^2v}{dx^2} EI \frac{d^2v}{dx^2} dx = \left(\int_{-1}^{+1} [\delta a^{(e)}]^T B_f^T (EI) B_f \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \right) a^{(e)} = \tag{4.46}$$

$$- \int_{-1}^{+1} [\delta a^{(e)}]^T T_i^T \frac{q l^{(e)}}{2} d\xi + \sum_{i=1}^{2} \delta v_i V_i + \sum_{j=1}^{2} \delta \left(\frac{dv}{dx}\right) M_j$$

que tras operar en forma usual conduce a la conocida expresión

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)} \tag{4.47}$$

donde la matriz de rigidez del elemento de barra puede calcularse de forma explicita por

$$K^{(e)} = \int_{-1}^{+1} B^T B \frac{EI l^{(e)}}{2} d\xi = \left(\frac{EI}{l^3}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 12 & 6l^{(e)} & -12 & 6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 4\left(l^{(e)}\right)^2 & -6l^{(e)} & 2\left(l^{(e)}\right)^2 \\ -12 & 6l^{(e)} & 12 & -6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 2\left(l^{(e)}\right)^2 & -6l^{(e)} & 4\left(l^{(e)}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

Por otra parte, el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a una carga uniformemente distribuída de intensidad $-q$ sobre el elemento es

$$f^{(e)} = - \int_{-1}^{+1} T_i^T \frac{q l^{(e)}}{2} d\xi = -q l^{(e)} \left[\frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{12}, \frac{1}{2}, -\frac{l^{(e)}}{12} \right]^T \tag{4.49}$$

y el vector de fuerzas nodales de equilibrio $q^{(e)}$, necesario para el ensamblaje

$$q^{(e)} = [V_1, M_1, V_2, M_2] \tag{4.50}$$

La matriz de rigidez del elemento (e), considerando también su rigidez axil, con sies grados de libertad nodal será, pues

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^2} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

En los siguientes apartados se tiene en cuenta la matriz de rigidez estandar $[K]$ de la ec.(4.51) para discretizar el elemento barra con comportamiento elástico lineal. Sin embargo, en las formulaciones subsiguientes podría emplearse cualquier otra matriz de rigidez que caracterice el elemento barra 2D (como por ejemplo la matriz de rigidez para elementos barras 2D de sección variable o la matriz de rigidez tangente para considerar las no linealidades geométricas, etc.).

4.3. Modelos de comportamiento elastoplástico degradable

Como es sabido, el cálculo plástico clásico se basa en el concepto de rótula plástica (de tal forma que el momento flector que aparece en la sección con comportamiento plástico de una barra coincide con el momento plástico de la sección que produce la tensión de fluencia en todos sus puntos y, por tanto, la posibilidad de giro relativo) y asume ciertas hipótesis (relación tensión-deformación ideal, relación momento-curvatura ideal, rótula plástica concentrada súbita, criterio de plastificación, etc.) a partir de las cuales se puede llegar a la determinación de la carga y mecanismo de colapso, bien por métodos paso a paso o directos. Es también usual tener en cuenta la existencia de esfuerzo axil o cortante que reducen el valor del momento que provoca la aparición de la rótula plástica denominándose, en este caso, "momento plástico reducido". Cada rótula plástica que se forme, ante un estado de cargas creciente, introduce en la estructura una libertad de giro. Se trata de determinar el valor de la carga que hace que toda o parte de la estructura se convierta en un mecanismo.

En este trabajo se describen dos modelos para el cálculo plástico de estructuras de barras tipo pórtico, incorporando el concepto de degradación de rigidez y de resistencia debido al aumento de la deformación plástica. En otras palabras, en una estructura sometida a cargas crecientes la rigidez de los elementos disminuye como consecuencia del daño del material que esté teniendo lugar localmente en la estructura. Uno de los modelos está basado sólo en la teoría de plasticidad y el otro está basado en la teoría de la *mecánica del daño continuo* para acoplar los conceptos de plasticidad y daño. Para ambos modelos se determina la denominada "función de agotamiento" $Z(M, D)$ y $Z(N, M, V, D)$, respectivamente, que expresa la combinación de esfuerzos axil (N), cortante (V), flector (M) y daño del material (D) que llevan a una sección determinada al agotamiento. Si los esfuerzos axil y cortante no son nulos, de la formulación desarrollada se obtiene que no sólo existe giro relativo en la sección agotada (concepto de rótula plástica) sino también desplazamiento longitudinal relativo y transversal relativo, constituyendo estos dos desplazamientos relativos y el giro relativo, un solo grado de libertad. Por este motivo, es más correcto hablar de sección agotada en lugar de rótula plástica. Una vez que una sección se ha agotado, y mientras no exista proceso de descarga, dicha sección debe mantener su estado "agotado", si bien en los sucesivos incrementos de carga la combinación de esfuerzos y daño que soporta puede cambiar. Es decir, la variación de los esfuerzos y daño asociados a cada sección producen que el punto (N, V, M, D) representativo de la misma "se mueva" sobre la superficie de agotamiento $Z(N, V, M, D)$ (hipersuperficie en este caso), al igual que en medios continuos el punto se mueve por la superficie del cilindro de *von Mises*, si se adopta este criterio de plastificación.

4.3.1. Modelo de daño basado en la relación $\sigma\!-\!\epsilon$ elastoplástica ideal (MD_1)

En este apartado se deducen las expresiones analíticas que relacionan el momento resistido por la sección transversal del elemento barra 2D con el nivel de daño alcanzado por las fibras del material una vez que alcanzan la deformación de rotura (figura 3.4), al igual que una nueva matriz de rigidez elastoplástica que relaciona las tensiones, los desplazamientos y el daño del material.

En el instante en que el daño de la sección comienza, el estado tensional ha de adaptarse de tal forma que permanezca en equilibrio. Por consiguiente, habrá variación en el momento resistente que es capaz de soportar la sección. Las expresiones desarrolladas corresponden al caso de una sección rectangular sometida únicamente a solicitaciones por momento flector (M) con comportamiento elastoplástico perfecto. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, los efectos del axil (N) y cortante (V) no se consideran en este modelo, siendo el objetivo comparar los resultados de este modelo con los correspondientes del modelo MD_2 que se presentará en el próximo apartado.

Relación entre el momento flector y el daño

Se considera una barra de *Navier-Benoulli* sometida a flexión, de material homogeneo, isotrópico y con comportamiento elastoplástico. La distribución de deformación en la sección transversal de la barra se muestra en la parte superior de la figura 4.2, con un máximo que es proporcional a la curvatura $\kappa(\epsilon_{max,min}) = \pm h\kappa/2$, donde h es la altura de la barra. La distribución de las tensiones se muestra en la parte inferior de la misma figura. Por simplicidad se presentan resultados solamente para secciones transversales rectangulares. Cualquier otra geometría bisimétrica presenta distribuciones cualitativamente semejantes.

Si la curvatura sigue aumentando, las tensiones en la sección presentan las sucesivas distribuciones mostradas en la figura 4.2. En el primer período de carga, el comportamiento del material es elástico sobre toda la sección transversal (figura 4.2b). Esto ocurre para valores de κ entre $0 \leq \kappa \leq \kappa_e$, donde $\kappa_e = 2\varepsilon_f/h$ y ε_f es la deformación de fluencia. Cuando $\kappa = \kappa_e$, el momento flector (M) toma el valor de (M_e), M_e es el momento necesario para alcanzar la tensión de fluencia en las fibras más exteriores de la sección). Si el momento aumenta por encima del momento elástico (M_e), la distribución de las tensiones y las deformaciones variarán. En este intervalo de comportamiento elastoplástico de la sección las deformaciones siguen aumentando, manteniendo una distribución lineal, pero las tensiones máximas no sobrepasan el valor de la tensión de fluencia (σ_f), apareciendo la conocida distribución lineal por tramos indicada en la figura 4.2c.

En este segundo período, la curvatura κ toma valores entre $\kappa_e < \kappa \leq \kappa_p$. La distribución de tensiones mostrada en la figura representa el comportamiento elastoplástico del material en el que la plastificación penetra en la sección a partir de la fibra superior, de tal forma que existen tres dominios de comportamiento: dos plásticos en los extremos y uno elástico central. La tensión normal (σ_x) en la fase elástica del material es función de la penetración de la plastificación (y_2) respecto a la posición de la línea neutra ec.(4.52)

$$\sigma_x = \frac{\sigma_f}{y_2} y \tag{4.52}$$

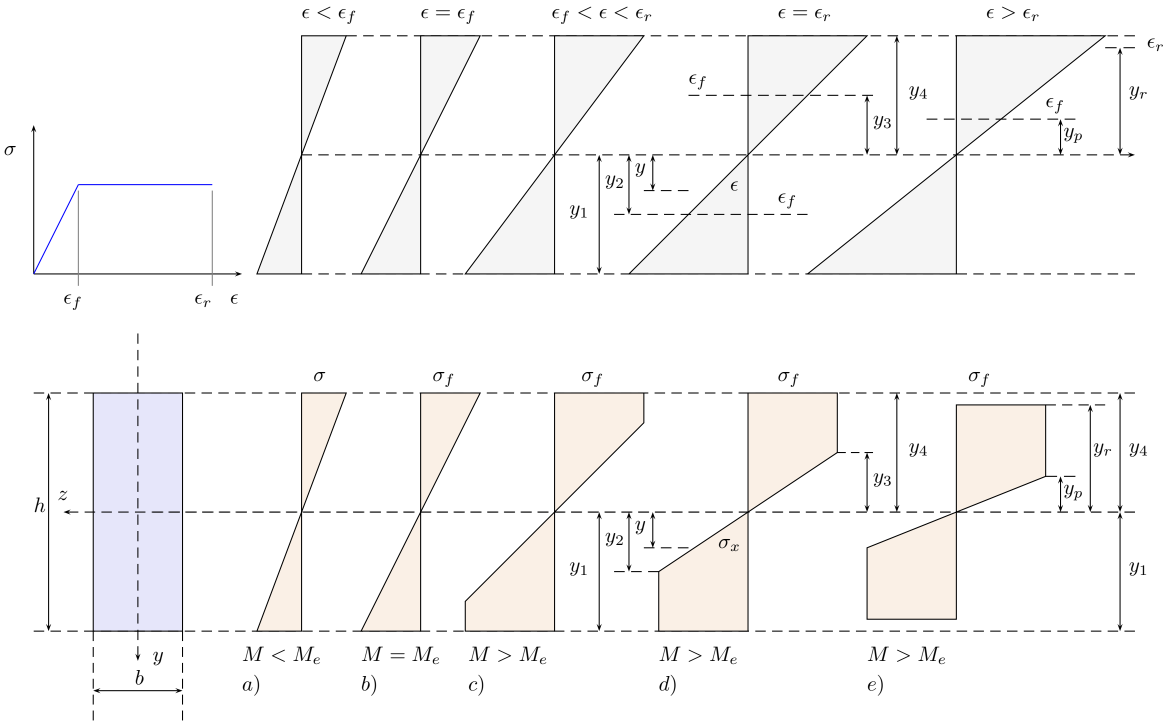


Figura 4.2: Distribución de deformaciones y tensiones en la sección transversal de la barra, con el modelo MD_1. a) Distribución de deformaciones y tensiones elástica, b) Comienzo de la fluencia de la barra, c) Distribución de tensiones elastoplásticas sin daño, d) Comienzo del daño e) Distribución de tensiones elastoplásticas con zonas dañadas

Teniendo en cuenta la variación de tensiones normales en el dominio de la sección con comportamiento elastoplástico del material, obtenemos el momento flector que soporta la sección

$$M_z = \int_{A1} \sigma_f y dA + \int_{A2} \sigma_x y dA - \int_{A3} \sigma_f y dA \tag{4.53}$$

$$M_z = \sigma_f \left[\int_{y_2}^{y_1} b y dy + \frac{1}{y_2} \int_{y_3}^{y_2} b y^2 dy - \int_{y_4}^{y_3} b y dy \right] \tag{4.54}$$

En la expresión 4.54 la variable b representa el ancho de la sección y los valores extremos (y_1 e y_4) son conocidos en el instante en el que se fija una geometría. Para el caso que nos ocupa (sección transversal rectangular) tenemos

$$y_1 = \frac{h}{2}; y_4 = -\frac{h}{2}; y_2 = y_3 \tag{4.55}$$

por lo tanto

$$M = \frac{\sigma_f b(3h^2 + 4y_2^2)}{12} \tag{4.56}$$

expresión válida hasta que se alcance la deformación de rotura en las fibras más alejadas. A partir de este instante comenzará el daño en la sección y el momento resistido disminuye. En este instante la deformación (ϵ) de las fibras más alejadas es igual a la deformación de rotura (ϵ_r); de la figura 4.2d se puede deducir que la relación entre la deformación de rotura (ϵ_r) y la deformación elástica (ϵ_f) viene dada por

$$y_2 = \frac{\epsilon_f h}{2\epsilon_r} \tag{4.57}$$

Considerando la descomposición de la deformación de rotura (ϵ_r) en la deformación elástica (ϵ_f) más la deformación plástica ϵ_p, tenemos

$$\epsilon_r = \epsilon_f + \epsilon_p \tag{4.58}$$

donde como es sabido la relación entre la tensión de fluencia y la deformación elástica viene dada por el módulo de elasticidad del material (E)

$$\epsilon_f = \frac{\sigma_f}{E} \tag{4.59}$$

la tensión de fluencia en función del momento plástico (M_p) para una sección rectangular viene dada por [66, 26]

$$\sigma_f = \frac{4M_p}{bh^2} \tag{4.60}$$

Considerando la deformación de rotura (ϵ_r) igual a n_s veces la deformación elástica (ϵ_f), y empleando las expresiones 4.59, 4.57, 4.58 y 4.60 en la expresión 4.56, se obtiene la expresión analítica del momento flector resistido en función del momento plástico, que llamaremos “momento para el inicio del daño de la sección,” $M_{D_s=0}$

$$M_{D_s=0} = \frac{(2 + 6n_s + 3n_s^2)}{3(1 + n_s)^2} M_p \tag{4.61}$$

En la figura 4.3 se muestra la variación del momento del comienzo del efecto del daño ($M_{D_s=0}$) en función de n_s. En ella se aprecia cómo el valor varía entre 2/3 correspondiente a la relación entre el momento en el límite elástico (M_e) y el momento plástico (M_p) para $n_s = 0$ y el valor 1, valor asintótico correspondiente al caso de comportamiento elastoplástico ideal ($n_s \to \infty$)

$$\left.\begin{aligned} M_e &= \frac{\sigma_f bh^2}{6} \\ M_p &= \frac{\sigma_f bh^2}{4} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{M_e}{M_p} = \frac{2}{3} \tag{4.62}$$

Si se sigue aumentando el momento flector (M), los dominios de comportamiento plástico en la figura 4.2c se propagan hacia la línea neutra (figura 4.2d), reduciendose la zona elástica. Durante este período es factible que se dañen las fibras del material que lleguen a adquirir una deformación igual a la de rotura, apareciendo la rotura de las fibras superiores de la sección.

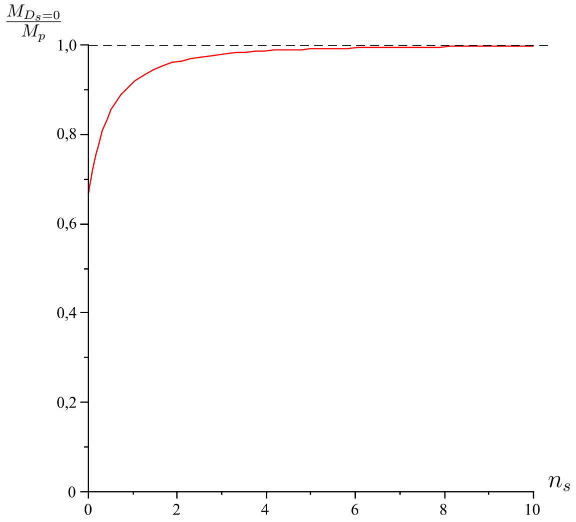


Figura 4.3: Momento-relación de deformaciones

A partir de un planteamiento de equilibrio, compatibilidad y comportamiento de la sección (figura 4.2e) y considerando que el daño de la sección (D_s) es igual a la relación entre área dañada de la sección y el área original, se obtiene la relación entre el momento flector relativo (M/M_p) y dicho daño (D_s), que en adelante denotaremos como $\frac{M_{D_s \geq 0}}{M_p}$ para el período elastoplástico con daño.

Se ha admitido como válida la hipótesis de *Navier*, por la que las secciones planas normales a la directriz de la pieza (x) antes de la deformación permanecen planas y normales a la directriz después de la deformación, de tal manera que es posible plantear la siguiente relación

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_f}{y_p} \frac{h}{2} \tag{4.63}$$

A partir de las expresiones 4.63 y 4.58 se establece que la deformación plástica ϵ_p es igual a

$$\epsilon_p = \epsilon_f \left[\frac{h}{2y_p} - 1 \right] \tag{4.64}$$

Si la deformación de algunas de las fibras de la sección es igual a la deformación de rotura, el comportamiento de la sección deja de ser sólo plástico y pasará a ser plástico con rotura, con la aparición de una zona sin tensión. A partir de las consideraciones anteriores, podemos establecer que el momento flector que soporta la sección con comportamiento elastoplástico con daño es igual a

$$M_{D_s \geq 0} = 2 \left[\frac{\sigma_f y_p^2}{3} + \frac{\sigma_f}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y_p^2 \right) \right] b \tag{4.65}$$

Utilizando las expresiones 4.64 y 4.60 en la expresión 4.65 es posible establecer que la relación de momentos es igual a

$$\frac{M_{D_s \geq 0}}{M_p} = (D_s - 1)^2 \frac{(2 + 6n_s + 3n_s^2)}{3(1 + n_s)^2} = (D_s - 1)^2 \frac{M_{D_s = 0}}{M_p} \tag{4.66}$$

donde se considera el daño (D_s) de la sección que en función de la posición de la fibra de rotura (y_r) respecto a la fibra neutra es

$$D_s = 1 - \frac{y_r}{\left(\frac{h}{2}\right)} \tag{4.67}$$

En la figura 4.4 se muestra la relación entre el momento flector relativo ($M_{D_s \geq 0}/M_p$) en función del efecto del daño (D_s) en la sección y la relación entre deformaciones n_s; como se observa, para el caso de daño en la sección igual a cero ($D_s = 0$), el momento flector relativo ($M_{D_s \geq 0}/M_p$) coincide con el de inicio del daño de ($M_{D_s = 0}/M_p$). Cuando $n_s \to \infty$, el valor de ($M_{D_s \geq 0}/M_p$) tiende a 1 y, en la medida que el daño evoluciona, el valor tiende a 0.

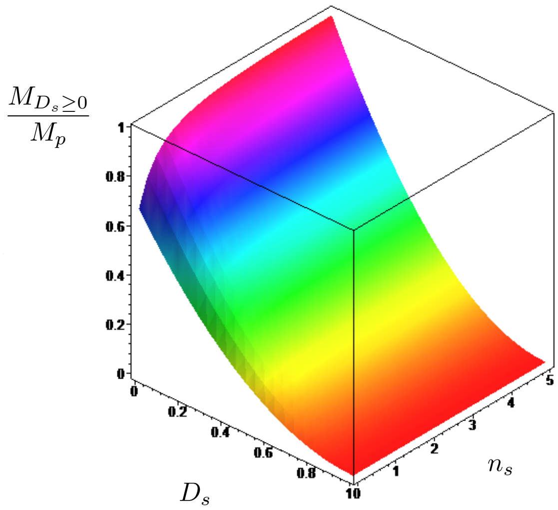


Figura 4.4: Momento-daño de la sección

De la expresión 4.66 se establece que la función de momentos con daño ($Z(M, D)$) viene dada por

$$Z(M, D) = \frac{M}{M_p} - \frac{(2 + 6n_s + 3n_s^2)}{3(1 + n_s)^2}(D_s - 1)^2 = 0 \tag{4.68}$$

A partir de la figura 4.2e es posible plantear que la posición relativa de la fibra de rotura (y_r) es igual a

$$\frac{y_r}{y_p} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_f}, y_r = n_s y_p \tag{4.69}$$

De la expresión 4.64 podemos expresar la variable (y_p) en función de la deformación plástica (ϵ_p)

$$y_p = \frac{h}{2} \frac{1}{\left(\frac{\epsilon_p}{e_f} + 1 \right)} \tag{4.70}$$

Utilizando las expresiones 4.69 y 4.70 en 4.67, es posible expresar el daño de la sección en función de la deformación plástica

$$D_s = 1 - \frac{n_s}{\left(\frac{\epsilon_p}{e_f} + 1 \right)} \tag{4.71}$$

Cuando la deformación plástica es igual a ($\epsilon_p = n_s\epsilon_f - \epsilon_f$), el daño de la sección es nulo ($D_s = 0$). Para magnitudes superiores de la relación n_s entre deformaciones, el daño de la sección se incrementa (figura 4.5).

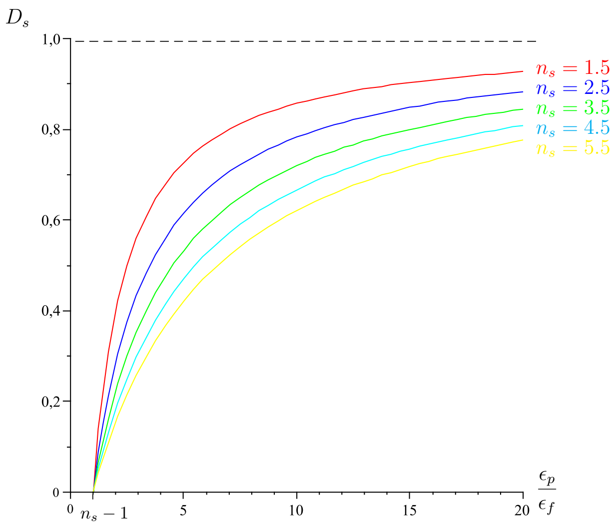


Figura 4.5: Relación de deformaciones-daño de la sección

En la figura 4.6 se muestra la relación momento-curvatura para diferentes valores de n_s. Cuanto mayor sea el valor de n_s más dúctil será el material y mayor capacidad portante tendrá la sección.

En las gráficas momento-curvatura se aprecia, inicialmente, el comportamiento elástico y, posteriormente, el comportamiento elastoplástico del material; coincidentes hasta que las fibras más alejadas adquieren la deformación de rotura. A partir de ese intante, aparece un descenso de la capacidad portante de la sección debido a la evolución del daño.

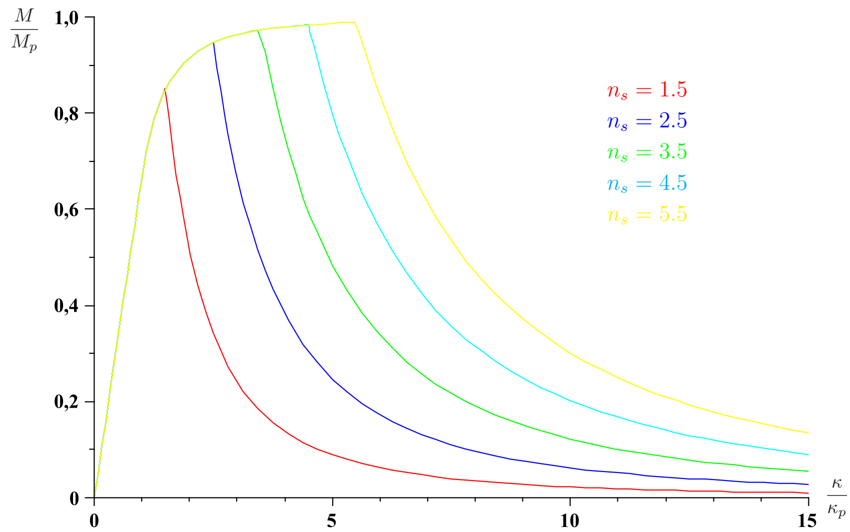


Figura 4.6: Momento-curvatura para distintos valores de n_s

Matriz de rigidez elastoplástica degradable

A continuación se incorporarán las expresiones anteriores a la matriz de rigidez de una barra con posibilidad de alcanzar plastificación y daño en alguno de sus extremos (o ambos). Durante este período de comportamiento la variación de los desplazamientos en los extremos se puede descomponer en una componente elástica y en una componente plástica, expresión que se desarrolla de forma vectorial mediante [58, 24]

$$\{du^{ep}\} = \{du^e\} + \{du^p\} \tag{4.72}$$

Es posible escribir la variación de los esfuerzos $\{dF\}$ en los extremos de la barra como

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} \tag{4.73}$$

siendo K la matriz de rigidez elástica del elemento barra deducida en la sección 4.2.3 y $\{du^e\}$ la variación de los desplazamientos elásticos. El vector $\{dF\}$ viene dado por

$$\{dF\} = \{dN_{x1}, dV_{y1}, dM_{z1}, dN_{x2}, dV_{y2}, dM_{z2}\} \tag{4.74}$$

De igual forma, la relación entre el incremento de fuerza $\{dF\}$ y el incremento de deformación elastoplástica $\{du^{ep}\}$ viene dado por

$$dF = [K_{ep}]\{dU_{ep}\} \tag{4.75}$$

Ahora, considerando la función de agotamiento (Z) para una barra de *Navier Bernoulli* como

$$Z = 0 \tag{4.76}$$

donde Z es función de los esfuerzos y del daño sufrido por el material por la acumulación de deformación plástica. A partir de las expresiones 4.72 y 4.73 es posible escribir

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} = [K]\left(\{du^{ep}\} - \{du^p\}\right) \tag{4.77}$$

En la expresión 4.72, la variación del desplazamiento plástico $\{du^p\}$, teniendo en cuenta las leyes para el caso de flujo asociado (ec.3.3), se puede expresar mediante

$$\{du^p\} = \{d\lambda\}\left\{\frac{dZ}{dF}\right\} \tag{4.78}$$

donde $\{d\lambda\}$ es un vector cuyas componentes son los multiplicadores plásticos de los extremos de la barra $\{d\lambda\} = \{d\lambda_1, d\lambda_2\}$; que se determinan de la manera usual mediante la condición de consistencia

$$d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad Z < 0 \quad \text{ó} \quad u^{ep} < n_s u^e \\ > 0 & \text{si} \quad Z = 0 \quad \text{ó} \quad u^{ep} \geq n_s u^e \end{cases} \tag{4.79}$$

A partir de la expresión 4.71 es posible expresar el daño de la sección en función de los desplazamientos

$$D_s = 1 - \frac{n_s}{\left(\dfrac{u^p}{u^e} + 1\right)} = 1 - \frac{n_s u^e}{u^p + u^e} = 1 - \frac{n_s u^e}{u^{ep}} \tag{4.80}$$

El daño ($D_s \geq 0$) comienza cuando los desplazamientos elastoplásticos ($u^{ep} \geq n_s u^e$) y se alcanza el valor máximo ($D_s = 1$) cuando $u^{ep} \to \infty$. Derivando la expresión 4.80 respecto a los desplazamientos elastoplásticos, obtenemos

$$\frac{dD_s}{du^{ep}} = -\frac{n_s}{u^{ep}}\frac{du^e}{du^{ep}} + \frac{n_s u^e}{(u^{ep})^2} \tag{4.81}$$

Reemplazando la expresión 4.72 en la expresión 4.81, se obtiene

$$dD_s = -\frac{n_s}{u^{ep}}(du^{ep} - du^p) + \frac{n_s u^e}{(u^{ep})^2} du^{ep} \tag{4.82}$$

$$dD_s \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad u^{ep} < n_s u^e \\ > 0 & \text{si} \quad u^{ep} \geq n_s u^e \end{cases} \tag{4.83}$$

De las condiciones de consistencia plástica

$$\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial F} dF + \frac{\partial Z}{\partial D_s} dD_s = 0 \tag{4.84}$$

Sustituyendo las expresiones 4.77 y 4.81 en la 4.84, se tiene

$$\frac{\partial Z}{\partial F}\left[K\left(du^{ep}-d\lambda\frac{\partial Z}{\partial F}\right)\right]+\left(\frac{\partial Z}{\partial D_s}\right)\left(-\frac{n_s}{u^{ep}}(du^{ep}-du^{p})+\frac{n_s u^{e}}{(u^{ep})^2}du^{ep}\right)=0 \tag{4.85}$$

Simplificando para $d\lambda$

$$d\lambda=\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial F}K du^{ep}+\left(\dfrac{\partial Z}{\partial D_s}\right)\left(-\dfrac{n_s}{u^{ep}}+\dfrac{n_s u^{e}}{(u^{ep})^2}\right)du^{ep}}{\dfrac{\partial Z}{\partial F}K\dfrac{\partial Z}{\partial F}-\dfrac{\partial Z}{\partial D_s}\dfrac{n_s}{u^{ep}}\dfrac{\partial Z}{\partial F}} \tag{4.86}$$

Usando la 4.78 en la 4.77 y sustituyendo $d\lambda$, se obtiene que

$$dF=K\left[1-\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial F}\dfrac{\partial Z}{\partial F}K+\dfrac{\partial Z}{\partial F}\left(\dfrac{\partial Z}{\partial D_s}\right)\left(-\dfrac{n_s}{u^{ep}}+\dfrac{n_s u^{e}}{(u^{ep})^2}\right)}{\dfrac{\partial Z}{\partial F}K\dfrac{\partial Z}{\partial F}-\dfrac{\partial Z}{\partial D_s}\dfrac{n_s}{u^{ep}}\dfrac{\partial Z}{\partial F}}\right]du^{ep} \tag{4.87}$$

o expresado de otra forma

$$\begin{aligned} dF &= K^{ep}du^{ep} \\ K^{ep} &= K\left[1-\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial F}\dfrac{\partial Z}{\partial F}K+\dfrac{\partial Z}{\partial F}\left(\dfrac{\partial Z}{\partial D_s}\right)\left(-\dfrac{n_s}{u^{ep}}+\dfrac{n_s u^{e}}{(u^{ep})^2}\right)}{\dfrac{\partial Z}{\partial F}K\dfrac{\partial Z}{\partial F}-\dfrac{\partial Z}{\partial D_s}\dfrac{n_s}{u^{ep}}\dfrac{\partial Z}{\partial F}}\right] \end{aligned} \tag{4.88}$$

donde K^{ep} es la matriz de rigidez elastoplástica degradable del elemento barra 2D que relaciona los esfuerzos con los desplazamientos. Para la obtención de la matriz de rigidez elastoplástica es necesario determinar la matriz gradiente de la función de agotamiento (Z) $\left\{\dfrac{\partial Z}{\partial F}\right\}$ (cuyos términos aparecen al derivar la función de agotamiento aplicada a los extemos agotados respecto de los esfuerzos de los nodos de la barra) y la matriz gradiente $\left\{\dfrac{\partial Z}{\partial D_s}\right\}$.

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial Z_1}{\partial N_{x1}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial V_{y1}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial M_{z1}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial N_{x2}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial V_{y2}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial M_{z2}} \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial N_{x1}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial V_{y1}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial M_{z1}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial N_{x2}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial V_{y2}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial M_{z2}}\end{bmatrix} \tag{4.89}$$

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial D_s}\right\}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial Z_1}{\partial D_{s_1}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial D_{s_2}} \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial D_{s_1}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial D_{s_2}}\end{bmatrix} \tag{4.90}$$

La función de agotamiento está dada por la expresión 4.68. Reemplazando esta ecuación en las ecuaciones 4.89 y 4.90, tenemos

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{M_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{M_p} \end{bmatrix}^T \tag{4.91}$$

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{(2+6n_s+3n_s^2)}{3(1+n_s)^2}(1-D_{s_1}) & 0 \\ 0 & 2\dfrac{(2+6n_s+3n_s^2)}{3(1+n_s)^2}(1-D_{s_2}) \end{bmatrix} \tag{4.92}$$

$$\left\{\frac{1}{u^{ep}}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{u_{x1}^{ep}} & \dfrac{1}{u_{y1}^{ep}} & \dfrac{1}{\theta_1^{ep}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{u_{x2}^{ep}} & \dfrac{1}{u_{y2}^{ep}} & \dfrac{1}{\theta_2^{ep}} \end{bmatrix}^T \tag{4.93}$$

Con todo lo anterior queda definida la *matriz de rigidez elastoplástica degradable* del elemento barra 2D considerando posible degradación de las secciones extremas.

4.3.2. Modelo de daño en la sección basado en la mecánica del daño continuo (MD_2)

A continuación se propone un modelo de comportamiento del elemento barra basado en los conceptos de la *mecánica del daño continuo* (CDM) y la teoría de la plasticidad. Inicialmente se presenta una nueva matriz de rigidez que caracteriza el comportamiento degradable del elemento barra 2D y las leyes de evolución adoptadas para la variable daño en función de la historia de las deformaciones. Posteriormente, se deducen las funciones de agotamiento del elemento en función de los esfuerzos y del posible daño alcanzado en la sección transversal. Todo lo anterior dará identidad al nuevo modelo de cálculo elastoplástico degradable del elemento barra 2D.

Relaciones constitutivas considerando plasticidad y daño

Hooke planteó que existe proporcionalidad entre las fuerzas aplicadas a un cuerpo elástico y las deformaciones producidas por dichas fuerzas. Extendiendo esta idea a las relaciones entre tensiones y deformaciones en un cuerpo, se puede decir que existe una relación lineal entre ellas. En la práctica, esto es tan sólo una aproximación, pues todos los materiales presentan algún grado de no linealidad y más aún si se considera el daño alcanzado por la evolución de las deformaciones. Para deducir estas relaciones constitutivas en el caso de un material dañado se parte de la función de fluencia, que viene dada por [51]

$$f = \bar{\sigma} - R - \sigma_f = 0 \tag{4.94}$$

donde ($\bar{\sigma}$) es la tesión efectiva, (R) es la tensión asociada al endurecimiento del material, y (σ_f) la tensión de fluencia. Recordando que la deformación total puede ser dividida en dos términos, correspondientes a la deformación elástica ($d\varepsilon_e$) y a la deformación plástica ($d\varepsilon_p$)

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \tag{4.95}$$

El incremento del esfuerzo puede ser escrito como

$$d\sigma = Ed\varepsilon_e = E\left(d\varepsilon - d\varepsilon_p\right) \tag{4.96}$$

De la ley de flujo de *Pland-Reuss*

$$d\varepsilon_p = d\lambda\frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}} \tag{4.97}$$

La ley de flujo es la encargada de relacionar las magnitudes y direcciones de las deformaciones plásticas con la de los incrementos de las tensiones

$$dp = p = d\lambda\frac{\partial f}{\partial R} \tag{4.98}$$

$$dD = d\lambda\frac{-\partial\phi *}{\partial Y} \tag{4.99}$$

La superficie de agotamiento se modificará, adaptándose a las sucesivas condiciones del material de forma que, una vez alcanzado el estado inicial de agotamiento, sólo son posibles los procesos de carga, descarga y carga neutra. La variación de la superficie de agotamiento se denomina condición de consistencia de *Praguer* y, para el caso, de carga neutra se expresa mediante

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}}d\bar{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial D}dD = 0 \tag{4.100}$$

De la función de fluencia se obtiene que

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}} = 1 \tag{4.101}$$

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \frac{-\sigma}{1-D} \tag{4.102}$$

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 1 \tag{4.103}$$

De las ecuaciones de la curva esfuerzo deformación

$$R = \bar{\sigma} - \sigma_f = \kappa p^{1/n} \tag{4.104}$$

$$dR = \frac{\kappa}{n}p^{\frac{1}{n}-1}dp = Hd\lambda \tag{4.105}$$

donde $H = \frac{\kappa}{n}p^{\frac{1}{n}-1}$, n y κ son contantes del material. Sustituyendo las expresiones 4.96 a 4.99 y las expresiones 4.102 a 4.104 en la expresión 4.100, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}}\left[E\left(d\varepsilon - d\lambda\frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}}\right)\right] - d\lambda H - d\lambda\left(\frac{\sigma}{1-D}\right)\frac{\partial\phi *}{\partial Y} = 0 \tag{4.106}$$

Simplificando para $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} E d\varepsilon}{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} E \dfrac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + H + \left(\dfrac{\sigma}{1-D} \right) \dfrac{\partial \phi *}{\partial Y}} \tag{4.107}$$

Usando la expresión 4.97 en la expresión 4.96, y sustituyendo $d\lambda$ en 4.96, se obtiene

$$d\sigma = E \left[1 - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} E \dfrac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} E \dfrac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + H + \left(\dfrac{\sigma}{1-D} \right) \dfrac{\partial \phi *}{\partial Y}} \right] d\varepsilon \tag{4.108}$$

Usando la expresión 4.101 en la expresión 4.108

$$d\sigma = E \left[1 - \frac{E}{E + H + \left(\dfrac{\sigma}{1-D} \right) \dfrac{\partial \phi *}{\partial Y}} \right] d\varepsilon \tag{4.109}$$

o

$$\begin{aligned} d\sigma &= K_d d\varepsilon \\ K_d &= E \left[1 - \frac{E}{E + H + \left(\dfrac{\sigma}{1-D} \right) \dfrac{\partial \phi *}{\partial Y}} \right] \end{aligned} \tag{4.110}$$

donde K_d es la matriz de rigidez elastoplástica degradable que relaciona las deformaciones con las tensiones.

Matriz de rigidez elastoplástica degradable utilizando la función de agotamiento

Se va a particularizar la expresión 4.110 para el dominio de barras en función de las fuerzas y desplazamientos. Para ello, se parte igual que en la expresión 4.95, de tal manera que en el período de comportamiento elastoplástico para el dominio tipo barra, la variación de desplazamientos en los extremos se puede descomponer en una componente elástica y en una componente plástica, expresión que se desarrolla de forma vectorial mediante [58, 24]

$$\{du^{ep}\} = \{du^e\} + \{du^p\} \tag{4.111}$$

y que se corresponde con los desplazamientos de los extremos del elemento mostrado en la figura 4.7

En la figura 4.7 se ilustra el elemento barra 2D elastoplástico utilizado en la formulación presentada. Nótese que, con la intención de aclarar conceptos, en la representación se dibuja un segmento de pequeña longitud (ε) en los extremos del elemento, correspondiente al dominio de comportamiento plástico con posibilidad de daño. En estos dominios es donde se supone concentrado

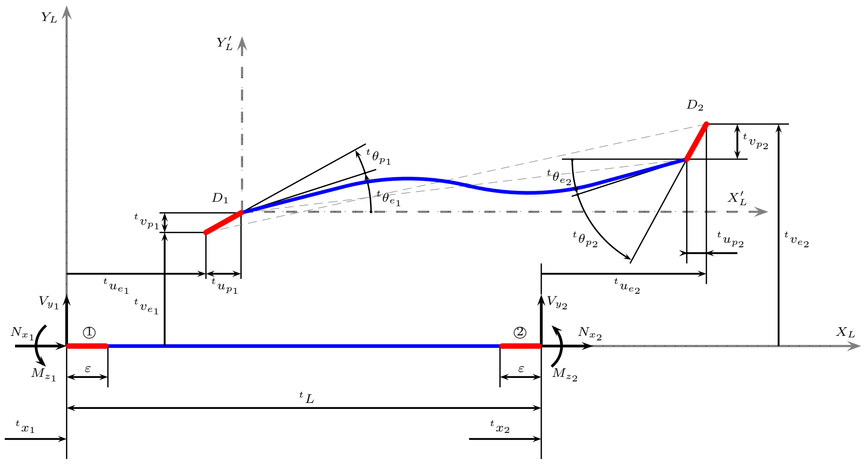


Figura 4.7: Elemento barra con desplazamiento elastoplástico en los extremos

la plastificación y el daño de la barra. Sobre la deformada de la figura se detallan los desplazamientos elásticos y plásticos, al igual que la variable daño en cada extremo.

La variación de los esfuerzos $\{dF\}$ en los extremos de la barra es posible escribirla como

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} \tag{4.112}$$

siendo K la matriz de rigidez elástica del elemento barra y $\{du^e\}$ la variación de los desplazamientos elásticos. El vector $\{dF\}$ viene dado por

$$\{dF\} = \{dN_{x1}, dV_{y1}, dM_{z1}, dN_{x2}, dV_{y2}, dM_{z2}\} \tag{4.113}$$

De igual forma, la relación entre el incremento de esfuerzos $\{dF\}$ y el incremento de desplazamientos elastoplásticos $\{du^{ep}\}$ viene dado por

$$\{dF\} = [K^{ep}]\{du^{ep}\} \tag{4.114}$$

Ahora, considerando la función de agotamiento Z para una viga de *Navier Bernoulli* como

$$Z = 0 \tag{4.115}$$

donde Z viene definida en función de los esfuerzos y del daño sufrido por el material por la acumulación de deformación plástica. Ésta indica cuándo hay incrementos plásticos en los extremos de la barra. A partir de las expresiones 4.111 y 4.112 es posible escribir

$$\{dF\} = [K]\{du^e\} = [K]\left(\{du^{ep}\} - \{du^p\}\right) \tag{4.116}$$

En la expresión 4.111 la variación del desplazamiento plástico $\{du^p\}$, teniendo en cuenta las leyes para el caso de flujo asociado, se puede expresar mediante

$$\{du^p\} = \{d\lambda\}\left\{\frac{dZ}{dF}\right\} \tag{4.117}$$

y

$$\{dD\} = \{d\lambda\}\left\{\frac{-\partial\phi*}{\partial Y}\right\} \tag{4.118}$$

donde $\{d\lambda\}$ es un vector cuyas componentes son los multiplicadores plásticos de los extremos de la barra ($\{d\lambda\} = \{d\lambda_1, d\lambda_2\}$). Los multiplicadores plásticos se determinan de la manera usual mediante la condición de consistencia

$$d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad Z < 0 \quad \text{ó} \quad p < p_{th} \\ > 0 & \text{si} \quad Z = 0 \quad \text{ó} \quad p \geq p_{th} \end{cases} \tag{4.119}$$

La evolución del daño se tiene en cuenta cuando

$$dD \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad p < p_{th} \\ > 0 & \text{si} \quad p \geq p_{th} \end{cases} \tag{4.120}$$

Las leyes de evolución 4.119, 4.120 pueden ser consideradas como el criterio para determinar cuándo una sección transversal del elemento barra comienza su agotamiento. El estado de agotamiento de la sección aumentará en la medida que se incrementa el daño.

De las condiciones de consistencia plástica podemos establecer

$$\dot{Z} = \left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}\{dF\} + \left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\}\{dD\} = 0 \tag{4.121}$$

sustituyendo las expresiones 4.116 y 4.118 en la 4.121, se tiene

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}[K]\left(\{du^{ep}\} - \{d\lambda\}\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}\right) - \left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\}\{d\lambda\}\left\{\frac{\partial\phi*}{\partial Y}\right\} = 0 \tag{4.122}$$

Simplificando para $d\lambda$

$$\{d\lambda\} = \frac{\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}[K]\{du^{ep}\}}{\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}[K]\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\} + \left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\}\left\{\frac{\partial\phi*}{\partial Y}\right\}} \tag{4.123}$$

Usando la ecuación 4.117 en la 4.116 y sustituyendo $\{d\lambda\}$, se obtiene

$$\{dF\} = [K]\left[1 - \frac{[K]\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}}{\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}[K]\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\} + \left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\}\left\{\frac{\partial\phi*}{\partial Y}\right\}}\right]\{du^{ep}\} \tag{4.124}$$

o

$$\begin{aligned} \{dF\} &= [K^{ep}]\{du^{ep}\} \\ [K^{ep}] &= [K]\left[1 - \frac{[K]\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}}{\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\}[K]\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\} + \left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\}\left\{\frac{\partial\phi*}{\partial Y}\right\}}\right] \end{aligned} \tag{4.125}$$

donde K^{ep} es la matriz de rigidez elastoplástica degradable del elemento barra 2D que relaciona los esfuerzos con los desplazamientos. Dado que en la ec.(4.125) aparece el término $\left\{ \dfrac{\partial\phi*}{\partial Y} \right\}$, es necesario expresar este término en función de los desplazamientos. Como se ha expresado en el Capítulo 3, la función de disipación difiere de un modelo a otro de los propuestos para determinar la evolución del daño mecánico en materiales dúctiles [7, 48, 98, 16]. A continuación se procede a deducir el término $\left\{ \dfrac{\partial\phi^*}{\partial Y} \right\}$ para el modelo de *Lemaitre*.

La derivada de la función de disipación con respecto a la energía de deformación asociada al daño Y viene dada por

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = \frac{Y}{S_L}\frac{1}{1-D} \tag{4.126}$$

Recordando que la expresión para Y viene dada la por expresión 3.37

$$Y = -\frac{\sigma_{eq}^2}{2E\left(1-D\right)^2} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \tag{4.127}$$

y la ley de endurecimiento de *Ramberg-Osgood* acoplada con el daño, de acuerdo al concepto de deformación equivalente y al concepto de esfuerzo efectivo [7], tenemos que

$$\frac{\sigma_{eq}}{1-D} = \kappa p^n \tag{4.128}$$

por lo tanto

$$p^n = \frac{\sigma_{eq}}{\kappa\left(1-D\right)}, \sigma_{eq} = \kappa p^n\left(1-D\right) \tag{4.129}$$

Sustituyendo las expresiones 3.37 y 4.129 en la expresión 4.126, se obtiene

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial Y} = -\frac{p^{2n}\kappa^2}{2ES_L} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)\frac{1}{1-D} \tag{4.130}$$

y recordando la ley de evolución de daño dada por la expresión 4.118, tenemos que

$$\dot{D} = \frac{p^{2n}\kappa^2}{2ES_L} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)\frac{\dot{\lambda}}{1-D} \tag{4.131}$$

Finalmente, recordando que la tasa de deformación plástica acumulada es igual a la tasa del multiplicador plástico, dada por la expresión 3.47, es posible escribir la expresión 4.131 como

$$\dot{D} = \frac{p^{2n}\kappa^2}{2ES_L} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)\dot{p} \tag{4.132}$$

o de forma equivalente

$$\frac{dD}{dp} = \frac{p^{2n}\kappa^2}{2ES_L} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \tag{4.133}$$

La ley de evolución del daño dada en la expresión 4.132 ó 4.133 se puede simplificar analíticamente integrando en algunos casos particulares; como por ejemplo para un estado de carga proporcional, donde el factor de triaxialidad es constante con respecto al tiempo. En este caso, la expresión 4.133 se puede integrar entre la condición inicial $D = D_o$, donde D_o es la cantidad inicial del daño presente en la micro-estructura del material, y $D = D_{cr}$, donde D_{cr} es la cantidad crítica del daño en la falla. Vale recordar que D_o es muy difícil de determinar porque está estrechamente relacionado con la distribución de las inclusiones en la micro-estructura del material virgen, que se considera, generalmente, como la configuración del material de referencia. Por esta razón, D_o muy a menudo es tomado como 0. De las consideraciones discutidas arriba, D_{cr} debe ser igual a 1; sin embargo, esto es cierto solamente en teoría. El proceso de daño está inactivo desde que $D = D_o$ hasta que la deformación plástica efectiva acumulada alcanza un valor de deformación umbral (p_{th}) (es decir $dD = 0$ y $D = 0$ o $D = D_o$). Cuando $p = p_{th}$, la generación es la etapa dominante en el crecimiento de las cavidades y cuando $D = D_{cr}$, la fusión domina el proceso de crecimiento de cavidades y la deformación plástica acumulada alcanza el valor crítico (p_{cr}) para el cual la falla ocurre. Integrando la expresión 4.133, se consigue

$$D = \frac{p^{2n+1}\kappa^2}{2ES_L\left(2n+1\right)} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \tag{4.134}$$

En el caso proporcional de cargas, la relación $\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$ puede considerarse constante con respecto al tiempo. Cuando se evalúan los límites descritos anteriormente, tenemos

$$D_{cr} - D_o = \frac{\kappa^2}{2ES_L\left(2n+1\right)} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)\left(p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}\right) \tag{4.135}$$

y para la integración entre $[D, D_{cr}]$ y $[p, p_{cr}]$

$$D_{cr} - D = \frac{\kappa^2}{2ES_L\left(2n+1\right)} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)\left(p_{cr}^{2n+1} - p^{2n+1}\right) \tag{4.136}$$

La expresión 4.135 permite identificar el término $\dfrac{\kappa^2}{2ES_L} f\left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)$

$$\frac{\kappa^2}{2ES_L} f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) = \left(2n+1\right)\frac{D_{cr} - D_o}{p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}} \tag{4.137}$$

Si se sustituye la expresión 4.137 en la expresión 4.136, se obtiene la ley de evolución de la deformación plástica

$$p^{2n+1} = p_{cr}^{2n+1} - \frac{D_{cr} - D}{D_{cr} - D_o}\left(p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}\right) \tag{4.138}$$

Si se sustituye la ecuación la 4.137 en la 4.130, tenemos

$$\frac{\partial\phi*}{\partial Y} = -\frac{p^{2n}}{1-D}\frac{D_{cr} - D_o}{p_{cr}^{2n+1} - p_{th}^{2n+1}}\left(2n+1\right) \tag{4.139}$$

En la tabla 4.1 se resumen las expresiones para los otros tres modelos, tras seguir el mismo procedimiento descrito anteriormente.

Tabla 4.1: Ley de evolución del daño

Bonora
$\frac{\partial\phi*}{\partial Y}=-\alpha\left(\frac{(D_{cr}-D_o)^{1/\alpha}}{ln\,(p_{cr}/p_{th})}\right)\frac{(D_{cr}-D)^{\alpha-1/\alpha}}{(1-D)\,p}$ $D=D_o+(D_{cr}-D_o)\left\{1-\left[1-\frac{ln\,(p/p_{th})}{ln\,(p_{cr}/p_{th})}\right]^{\alpha}\right\}$ $p=e^A$ $A=ln\,(p_{cr})-ln\,(p_{cr}/p_{th})\left(\frac{D_{cr}-D}{D_{cr}-D_o}\right)^{1/\alpha}$
Lemaitre
$\frac{\partial\phi*}{\partial Y}=-\frac{p^{2n}}{1-D}\frac{D_{cr}-D_o}{p_{cr}^{2n+1}-p_{th}^{2n+1}}(2n+1)$ $D=D_{cr}-(D_{cr}-D_o)\left(\frac{p_{cr}^{2n+1}-p^{2n+1}}{p_{cr}^{2n+1}-p_{th}^{2n+1}}\right)$ $p^{2n+1}=p_{cr}^{2n+1}-\frac{D_{cr}-D}{D_{cr}-D_o}\left(p_{cr}^{2n+1}-p_{th}^{2n+1}\right)$
Wang
$\frac{\partial\phi*}{\partial Y}=-\alpha\left(\frac{D_{cr}-D_o}{(p_{cr}-p_{th})^{\alpha}}\right)\frac{(p_{cr}-p)^{(\alpha-1)}}{(1-D)}$ $D=D_{cr}-(D_{cr}-D_o)\left(\frac{p_{cr}-p}{p_{cr}-p_{th}}\right)^{\alpha}$ $p=p_{cr}-(p_{cr}-p_{th})\left(\frac{D_{cr}-D}{D_{cr}-D_o}\right)^{1/\alpha}$
Chandrakanth
$\frac{\partial\phi*}{\partial Y}=-\frac{1}{\frac{\alpha}{n}+1}\left(\frac{D_{cr}-D_o}{p_{cr}-p_{th}}\right)\frac{1}{D^{\alpha/n}\,(1-D)}$ $D=\left[D_o^{(\alpha/n+1)}+\left(D_{cr}^{(\alpha/n+1)}-D_0^{(\alpha/n+1)}\right)\left(\frac{p-p_{th}}{p_{cr}-p_{th}}\right)\right]^{1/(\alpha/n+1)}$ $p=p_{th}+(p_{cr}-p_{th})\left(\frac{D^{(\alpha/n+1)}-D_o^{(\alpha/n+1)}}{D_{cr}^{(\alpha/n+1)}-D_o^{(\alpha/n+1)}}\right)$

En la figura 4.8 se puede apreciar la variación de la variable daño (D) respecto a la variación de la deformación plástica acumulada (p), para el acero 1045 de acuerdo a los cuatro modelos presentados. En la referencia [46] se pueden encontrar las constantes para este material en particular ($D_o = 0$, $D_{cr} = 0,85$, $\alpha = 0,28$, $p_{cr} = 0,926$, $p_{th} = 0,114$). En la figura se deduce que para un valor concreto de la deformación plástica, se tendrán diferentes niveles de daño en función del modelo empleado.

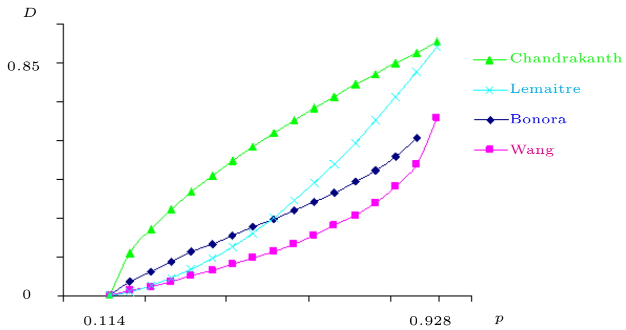


Figura 4.8: Daño (D)-deformación plástica acumulada (p)

Con estas expresiones, se puede mostar en la figura 4.9 la relación tensión-deformación de un material dúctil sometido al estado uniaxial de esfuerzo (la deformación plástica acumulada (p) es igual a la deformación uniaxial (ϵ)) para distintos modelos de daño. En la figura se identifican tres zonas: una zona elástica comprendida entre las deformaciones menores o iguales a la deformación elástica ($\epsilon \leq \epsilon_f$), una zona plástica ideal comprendida entre las deformaciones elástica y umbral (ϵ_{th}), ϵ_{th} la deformación a partir de la cual se inicia el deterioro del material; desde este instante comienza la evolución del daño debido a la variación de las variables plásticas (zona dañada). La evolución del daño es determinada de acuerdo a las funciones de disipación de *Bonora, Lemaitre, Wang, Chandrakanth* mostrada en la tabla 4.1 y el esfuerzo en esta zona dañada, por la ec.(3.20).

En la figura 4.8 se aprecia que para una deformación dada, la evolución del daño cuantificada empleando las funciones de disipación de *Chandrakanth, Lemaitre, Bonora y Wang* será cada vez menor si se emplean dichas funciones en ese mismo orden. Cabe destacar que en un pequeño dominio de la deformación plástica, la curva de *Bonora* está por encima de la de *Lemaitre*; por lo tanto, calculando el daño a partir del modelo de *Bonora*, será mayor en dicha zona en contraste con el modelo de *Lemaitre*. Ante estos hechos, es lógico observar menores niveles de tensión en la zona dañada (figura 4.9) si se emplean los modelos en el orden descrito anteriormente.

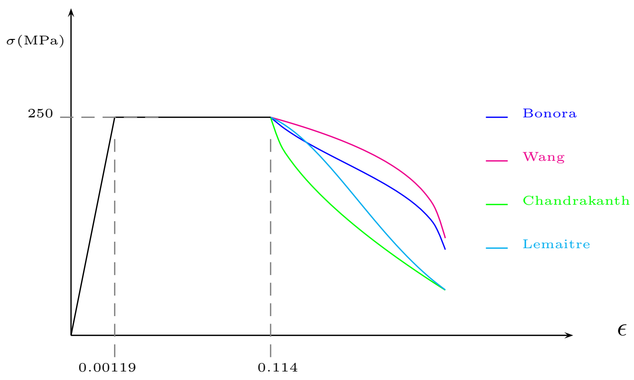


Figura 4.9: Tensión-deformación. Comportamiento elastoplástico degradable

Para definir completamente la matriz de rigidez elastoplástica es necesario determinar tanto la matriz gradiente de la función de agotamiento $\left\{\dfrac{\partial Z}{\partial F}\right\}$ (cuyos términos aparecen al derivar la función de agotamiento respecto de los esfuerzos de los nodos de la barra) como la matriz gradiente $\left\{\dfrac{\partial Z}{\partial D}\right\}$.

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Z_1}{\partial N_{x1}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial V_{y1}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial M_{z1}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial N_{x2}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial V_{y2}} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial M_{z2}} \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial N_{x1}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial V_{y1}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial M_{z1}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial N_{x2}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial V_{y2}} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial M_{z2}} \end{bmatrix} \tag{4.140}$$

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Z_1}{\partial D_1} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial D_2} \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial D_1} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial D_2} \end{bmatrix} \tag{4.141}$$

La función de agotamiento Z de una sección depende de todos los esfuerzos que la solicitan (N_x, V_y, M_Z) y del nivel de daño alcanzado $Z(M, N, V, D)$. Esta puede ser obtenida de forma experimental o analíticamente para una geometría dada de la sección, como se presentará acontinuación. Para determinar la función Z, además de los conceptos de la plásticidad emplearemos las hipótesis de tensión y deformación equivalente enunciadas en el apartado 3.3.3.

Función de agotamiento Z

En el caso de una sección rectangular, se determinan las condiciones necesarias para que aparezca el agotamiento, teniendo en cuenta la penetración de la plasticidad y el daño del material. Para determinar si sobre algún punto de la sección comienza el agotamiento es necesario recurrir a los criterios de plastificación.

La función de fluencia f de la ec.(4.94) puede ser expresada en términos del esfuerzo equivalente de *von Mises* σ_{eq} como

$$f = (\sigma_{eq} - \sigma_f) \leq 0 \tag{4.142}$$

donde σ_{eq}, para el caso dimensional, queda reducida a

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \tag{4.143}$$

Según la definición de tensión efectiva dada en el 3.3.2, el esfuerzo equivalente de *von Mises* asociado a un estado dañado del material viene dado por [7]

$$\bar{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_{eq}}{1 - D} \tag{4.144}$$

Sustituyendo la expresión 4.144 en la expresión 4.142, tenemos la función de fluencia para un material dañado [51]

$$f = \left(\frac{\sigma_{eq}}{1 - D} - \sigma_f\right) \leq 0 \tag{4.145}$$

Si se desprecia la tensión normal σ_y, como es usual en el modelo de barras, la expresión 4.143 se reduce a

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \tag{4.146}$$

Como es sabido, en los puntos de la sección en los que la tensión normal es nula (fibra neutra, $\sigma_x = 0$) la plastificación será debida únicamente al efecto de la tensión tangencial (τ_{xy}). Por ello, para que la fibra neutra alcance la plastificación, la tensión tangencial habrá de adquirir el valor de fluencia (σ_f), obtenido a partir de (4.146), de magnitud

$$\tau_f = \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} \tag{4.147}$$

Reemplazando la expresión 4.147 en la expresión 4.145, se obtiene

$$f = \left(\frac{\sqrt{3}\tau_f}{1 - D} - \sigma_f\right) \leq 0, o, f = \tau_f \leq \frac{(1 - D)\,\sigma_f}{\sqrt{3}} \tag{4.148}$$

Sin embargo, en las fibras extremas de la sección, en las que la plastificación se produce por tensión normal, la tensión tangencial es nula, ya que

$$\sigma_f = \sigma_{eq} \tag{4.149}$$

Teniendo esto en cuenta y aplicando el criterio de *von Mises* al caso bidimensional 4.146, se deduce que el proceso de plastificación de la sección puede comenzar de distintas formas:

- En la fibra neutra, debido al efecto de la tensión tangencial.
- En alguna de las fibras más alejadas de la línea neutra, debido al efecto de la tensión normal.
- En cualquier fibra de la sección, debido a la composición de tensión tangencial y normal que le afecten.

La determinación de la fibra en la que comienza la plastificación depende de la magnitud de los esfuerzos y de la geometría de la sección. Para el caso simple de sección rectangular y suponiendo que el comienzo de la plastificación se produce por los dos extremos de la sección, debido únicamente al efecto de la tensión normal, al aumentar la solicitación aumenta la penetración de la plasticidad, afectando únicamente a las fibras más alejadas de la línea neutra, que se corresponden con aquellas en las que la solicitación se produce únicamente por tensión normal, aumentando el dominio de actuación de éstas y disminuyendo el de las tensiones tangenciales. Si este proceso se mantiene, se alcanza un estado con comportamiento elastoplástico del material, donde a partir de una cierta distancia de la línea neutra las fibras han plastificado únicamente por efecto de las tensiones normales, mientras que la zona central de la sección trabaja todavía con comportamiento elástico, sometida a tensiones normales y tangenciales. Este proceso se mantendrá hasta que se llegue al estado de agotamiento de la sección, que aparecerá cuando la tensión tangencial (τ_{xy}) alcance el valor de la tensión tangencial de fluencia (τ_f).

El reparto de la tensión tangencial en la zona elástica del material permite determinar la combinación de valores de los esfuerzos flector (M_z), axil (N_x) y cortante (V_y) que llevan a la sección hasta su agotamiento, y, a partir de ellos, obtener la superficie de agotamiento característica de la sección. La tensión tangencial máxima (τ_{xypmax}) aparece en la línea neutra de la sección agotada. Según *Terán* [92], esta tensión es función de los esfuerzos y está dada por

$$\tau_{xypmax} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_f V_y}{\sqrt{-3N_x^2 + 3\sigma_f^2 b^2 h^2 - 12\sigma_f b M_z}} \tag{4.150}$$

Empleando la hipótesis de tensión equivalente, es posible igualar la tensión tangencial máxima (τ_{xypmax}) (4.150) con la tensión tangencial de fluencia para un material dañado(τ_f) (4.145), obteniendo la relación entre los esfuerzos flector (M_z), axil (N_x) , cortante (V_y) y la variable daño (D), que lleva a la sección hasta su agotamiento

$$M_z = \frac{\sigma_f b h^2}{4} - \frac{N_x^2}{4b\sigma_f} - \frac{9}{16} \frac{V_y^2}{b\sigma_f (1-D)^2} \tag{4.151}$$

Si se consideran de forma independiente una sección sometida a momento flector, a esfuerzo axil y a cortante, es conocido el valor del momento flector (M_p, momento plástico), el valor del esfuerzo axial (N_p, esfuerzo axil de plastificación) y el valor esfuerzo cortante (V_p, esfuerzo cortante de plastificación) que agotan la sección [44, 69]. La hipótesis de deformación equivalente descrita en el apartado 3.3.3 establece que el comportamiento de un material dañado puede escribirse empleando las mismas expresiones del modelo constitutivo de un material intacto, si se sustituye en éstas el esfuerzo nominal por el esfuerzo efectivo. Una adaptación de esta teoría al caso considerado puede ser empleada para introducir el concepto de esfuerzos plásticos equivalentes para un material dañado (M_p, N_p y V_p), dados por

$$M_p = \frac{\sigma_f bh^2}{4\,(1-D)},\; N_p = \frac{\sigma_f bh}{(1-D)},\; V_p = \frac{2\sigma_f bh}{3\sqrt{3}(1-D)} \tag{4.152}$$

Por lo que, despejando de cada una de ellas la tensión normal de fluencia (σ_f) y expresando el esfuerzo axil y cortante de plastificación (N_p y V_p, respectivamente) en función del momento plástico equivalente (M_p), se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \dfrac{4\,(1-D)\,M_p}{bh^2} \\ \sigma = \dfrac{(1-D)\,N_p}{bh} \\ \sigma = \dfrac{3\,(1-D)\,\sqrt{3}V_p}{2bh} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{lcl} \dfrac{4\,(1-D)\,M_p}{bh^2} = \dfrac{(1-D)\,N_p}{bh} & \Rightarrow & N_p = \dfrac{4M_p}{h} \\ \\ \dfrac{4\,(1-D)\,M_p}{bh^2} = \dfrac{(1-D)\,3\sqrt{3}V_p}{2bh} & \Rightarrow & V_p = \dfrac{8M_p}{3\sqrt{3}h} \end{array}\right. \tag{4.153}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores (4.152) y la expresión (4.153) en la expresión (4.151), se obtiene finalmente la función de agotamiento con daño (Z_{MNVD}) de la sección rectangular, teniendo en cuenta los efectos del momento flector (M_y), fuerza axial (N_x), fuerza cortante (V_z) y la variable daño (D)

$$Z_{MNVD} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x}{N_p}\right)^2 \frac{1}{1-D} + \frac{1}{3}\left(\frac{V_y}{V_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \tag{4.154}$$

Se puede representar gráficamente la expresión $|M_z|/M_p$ en el dominio normalizado ($0 \leq \dfrac{N_x}{N_p} \leq 1$ y $0 \leq \dfrac{V_y}{V_p} \leq 1$) y para $D = 0$, se obtiene la función y superficie de agotamiento sin considerar el daño sufrido por la sección

$$Z_{MNV} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x}{N_p}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{V_y}{V_p}\right)^2 - 1 = 0 \tag{4.155}$$

En la figura 4.10 se puede observar la superficie que delimita el comportamiento límite de la sección de un material intacto bajo la influencia de esfuerzo axil, cortante y momento flector.

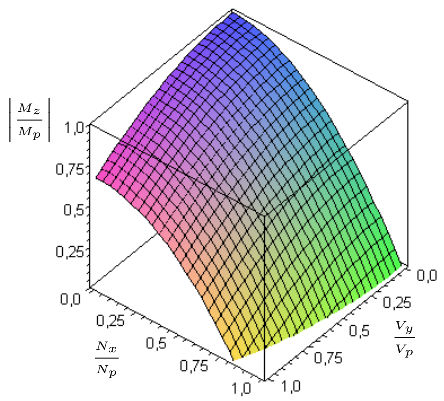


Figura 4.10: Función de agotamiento Z_{MNV}

La función de agotamiento asociada a la sección rectangular (4.155) tiene como curvas de contorno (figura 4.11) las expresiones

$$\begin{aligned} &\text{para}, N_x = 0, D = 0 \Longrightarrow Z_{MNV} = Z_{MV} \\ &\text{para}, V_y = 0, D = 0 \Longrightarrow Z_{MNV} = Z_{MN} \end{aligned} \tag{4.156}$$

$$Z_{MV} = \frac{|M_z|}{M_p} + \frac{1}{3}\left(\frac{V_y}{V_p}\right)^2 - 1 = 0 \tag{4.157}$$

$$Z_{MN} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x}{N_p}\right)^2 - 1 = 0 \tag{4.158}$$

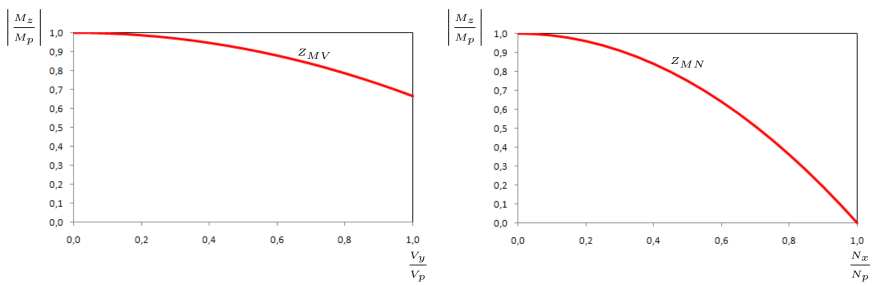


Figura 4.11: Función de agotamiento Z_{MV} y Z_{MN}

Las funciones de agotamiento asociadas a la sección rectangular (4.154) para un material dañado se detallan a continuación

$$\begin{aligned} &\text{para}, N_x = 0, 0 \leq D \leq 1 \Longrightarrow Z_{MNVD} = Z_{MVD} \\ &\text{para}, V_y = 0, 0 \leq D \leq 1 \Longrightarrow Z_{MNVD} = Z_{MND} \\ &\text{para}, N_x = 0, V_y = 0, 0 \leq D \leq 1 \Longrightarrow Z_{MNVD} = Z_{MD} \end{aligned} \tag{4.159}$$

$$Z_{MVD} = \frac{|M_z|}{M_p} + \frac{1}{3}\left(\frac{V_y}{V_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \tag{4.160}$$

$$Z_{MND} = \frac{|M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x}{N_p}\right)^2 \frac{1}{1-D} - (1-D) = 0 \tag{4.161}$$

$$Z_{MD} = \frac{|M_z|}{M_p} - (1-D) = 0 \tag{4.162}$$

A partir de la figura 4.12 es posible observar que si se considera la degradación del material ya no se tendrá una sola superficie de agotamiento como la de la figura 4.10. Ahora existirá una superficie de agotamiento para cada valor de daño en la medida en que éste haya evolucionando bajo carga. En la figura 4.12 se muestran 10 superficies de agotamiento asociadas a un valor del daño de la sección. La superficie superior corresponde a un valor de D igual a 1 y las sucesivas superficies corresponden a valores de D entre 1 y 0 con un paso de $0,1$ entre ellas.

La disminución de la superficie de agotamiento implica que se requerirá una menor combinación de esfuerzos F (axil, cortante y momento flector) para que ocurra el agotamiento de la sección, debido a que la acumulación del daño lleva a una disminución de la capacidad portante de la sección.

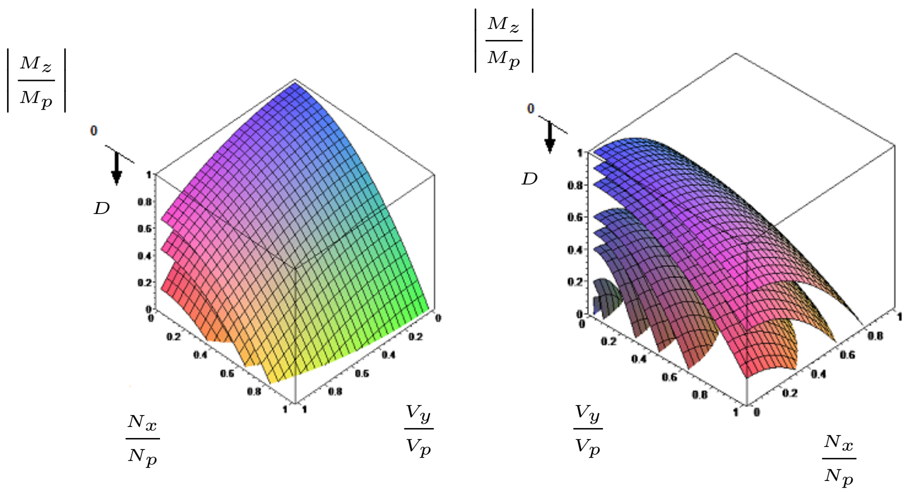


Figura 4.12: Función de agotamiento Z_{MNVD}

En las figuras 4.13a y 4.13b se muestran las funciones de agotamiento si consideran el esfuerzo cortante y axil, respectivamente. Para estos casos, ya no se tendrá una superficie para un valor de D dado sino una curva de contorno como las mostradas en la figura 4.11. En la medida que el daño aumente la amplitud de las curvas disminuye; lo que implica que se requerirá una menor combinación de esfuerzos (cortante y momento) o (axil y momento) para que ocurra el agotamiento de la sección.

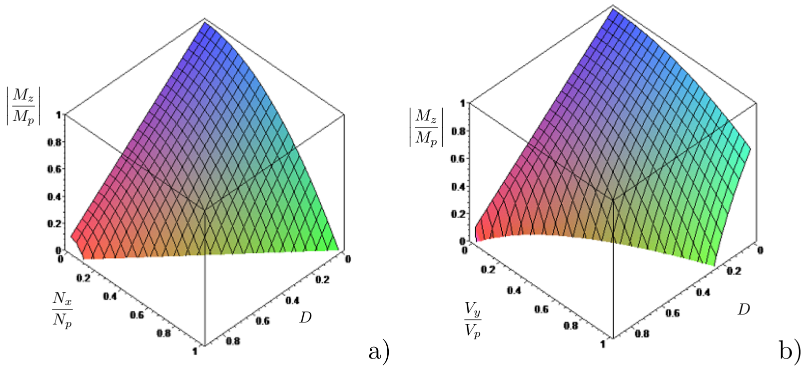


Figura 4.13: a) Funciones de agotamiento Z_{MND} , b) Funciones de agotamiento Z_{MVD}

Una vez definida la función de agotamiento Z_{MNVD} dada por la expresión 4.154, se remplaza en las ecuaciones 4.140 y 4.141, para obtener las siguientes matrices gradientes

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial F}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{2N_{x1}}{N_p^2\,(1-D_1)} & \frac{2}{3}\frac{V_{y1}}{V_p^2\,(1-D_1)^3} & \frac{1}{M_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2N_{x2}}{N_p^2\,(1-D_2)} & \frac{2}{3}\frac{V_{y2}}{V_p^2\,(1-D_2)^3} & \frac{1}{M_p} \end{bmatrix} \tag{4.163}$$

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial D}\right\} = \begin{bmatrix} \left(\frac{N_{x1}}{N_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D_1)^2} + \left(\frac{V_{y1}}{V_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D_1)^4} + 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{N_{x2}}{N_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D_21)^2} + \left(\frac{V_{y2}}{V_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D_2)^4} + 1 \end{bmatrix} \tag{4.164}$$

Con las expresiones de la tabla 4.1 y las ecuaciones 4.163 y 4.164 quedan completamente definidos los términos de la matriz de rigidez elastoplástica degradable ec. (4.125). En el capítulo 6 se muestran ejemplos numéricos que emplean esta matriz para caracterizar el comportamiento degradable del elemento barra 2D.

Capítulo 5
Procesos numéricos de cálculo

Capítulo 5

Procesos numéricos de cálculo

5.1. Introducción

Con los conceptos expuestos en los apartados anteriores se ha desarrollado una aplicación informática para evaluar la carga de colapso de una estructura de barras tipo pórtico. A continuación se describen los algoritmos más significativos empleados en la implementación.

5.2. Ecuaciones de comportamiento: formulación incremental

Una vez se ha planteado la ley de comportamiento elastoplástico degradable del elemento barra 2D y la discretización adecuada de una estructura con este elemento, el equilibrio de las fuerzas internas y externas y la compatibilidad de los desplazamientos dan lugar a una relación no lineal entre las cargas y los desplazamientos en los nodos

$$\Psi(U) = R - F_{int}(U) \tag{5.1}$$

donde $R = (R_{x_1}, R_{y_1}, R_{z_1} ... R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i} ... R_{x_{nod}}, R_{y_{nod}}, R_{z_{nod}})^T$ es el vector de cargas externas aplicadas sobre los nodos (nod) de la estructura, $F_{int} = (F_{int_{x_1}}, F_{int_{y_1}}, F_{int_{z_1}}, ... F_{int_{x_i}}, F_{int_{y_i}}, F_{int_{z_i}}, ...$ $F_{int_{x_{nod}}}, F_{int_{y_{nod}}}, F_{int_{z_{nod}}})^T$ es el vector de fuerzas internas, función no lineal de los desplazamientos nodales $U = (U_{x_1}, U_{y_1}, \theta_{z_1} ... U_{x_i}, U_{y_i}, \theta_{z_i} ... U_{x_{nod}}, U_{y_{nod}}, \theta_{z_{nod}})^T$. Su dimensión viene definida por el número de ecuaciones del problema, que será el producto del número de nodos y el número de grados de libertad por nodo (tres en caso del elemento barra 2D) que se estudia.

Este sistema de ecuaciones no lineal resultante se puede resolver de forma numérica. El objetivo de las técnicas empleadas es buscar un conjunto de desplazamientos U, tales que

$$R - F_{int}\left(U\right) = 0 \tag{5.2}$$

En general, la solución de este tipo de problemas que incluyen no linealidades materiales dependen de la historia de cargas y, por tanto, es necesario plantear un proceso de resolución incremental. Para obtener soluciones correctas de la ecuación 5.2 es esencial tener un conocimiento físico de la naturaleza del problema y, normalmente, utilizar esquemas incrementales con pasos pequeños a partir de soluciones conocidas. Por tanto, el problema general debe formularse como la solución de la siguiente expresión [104]

$$\Psi_{n+1} = \Psi\left(U_{n+1}\right) = R_{n+1} - F_{int}\left(U_{n+1}\right) = 0 \tag{5.3}$$

que comienza en las proximidades de una solución conocida con

$$U = U_n, \Psi_n = 0, R = R_n \tag{5.4}$$

el vector de carga R, pasa de R_n a

$$R_{n+1} = R_n + \Delta R_n \tag{5.5}$$

El objetivo es la determinación del cambio de los desplazamientos ΔU_n, tal que

$$U_{n+1} = U_n + \Delta U_n \tag{5.6}$$

En general estos tipos de sistemas son implícitos y no es posible obtener la solución del problema planteado por las expresiones 5.3 a 5.6 de forma directa y siempre es necesaria alguna forma de iteración. Los procedimientos iterativos suelen plantearse de la forma [4]

$$K^i dU_n^i = \Psi_{n+1}^i \tag{5.7}$$

donde el superíndice i indica el número de iteración. En este procedimiento se calcula un incremento de solución $dU_n^i K^{i-1}$; donde K es la matriz de rigidez de la estructura, cuyos coeficientes dependen (en el caso del modelo elastoplástico degradable) de los desplazamientos, de las deformaciones plásticas y del daño de la secciones de las barras, además de la geometría; dU_n^i es un incremento del vector desplazamiento de todos los nodos de la estructura.

Los coeficientes de la matriz K^i son diferentes según los procedimientos de iteración empleado. El método de *Newton-Raphson* es un procedimiento de convergencia rápido para soluciones de problemas en los que sólo se hace una evaluación de Ψ en cada iteración. En este método, la matriz es actualizada durante cada iteración, mientras que en el método modificado de *Newton-Raphson* es sólo actualizada cada cierto número de iteraciones.

A partir del método de *Newton-Raphson*, la expresión 5.3 se aproxima hasta primer orden, de la forma

$$\Psi\left(U_{n+1}^{i+1}\right) \simeq \Psi\left(U_{n+1}^{i}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial U}\right)_{n+1}^{i} dU_n^i = 0 \tag{5.8}$$

Aquí, el contador de iteraciones i comienza normalmente suponiendo que

$$U_{n+1}^1 = U_n \tag{5.9}$$

donde U_n es la solución conocida o calculada para el nivel de carga o paso de tiempo anterior. La matriz de rigidez correspondiente a la dirección tangente viene dada por

$$K = \frac{\partial F_{int}}{\partial U} = -\frac{\partial \Psi}{\partial U} \tag{5.10}$$

A partir de la expresión 5.7 es posible escribir

$$dU_n^i = K^{-1}\Psi_{n+1}^i \tag{5.11}$$

Una serie de aproximaciones sucesivas conducen a

$$U_{n+1}^{i+1} = U_{n+1}^i + dU_{n+1}^i \tag{5.12}$$

$$U_{n+1}^{i+1} = U_n + \Delta U_n^i \tag{5.13}$$

$$\Delta U_n^i = \sum_{k=1}^{i} dU_n^k \tag{5.14}$$

El proceso se ilustra gráficamente en la figura 5.1

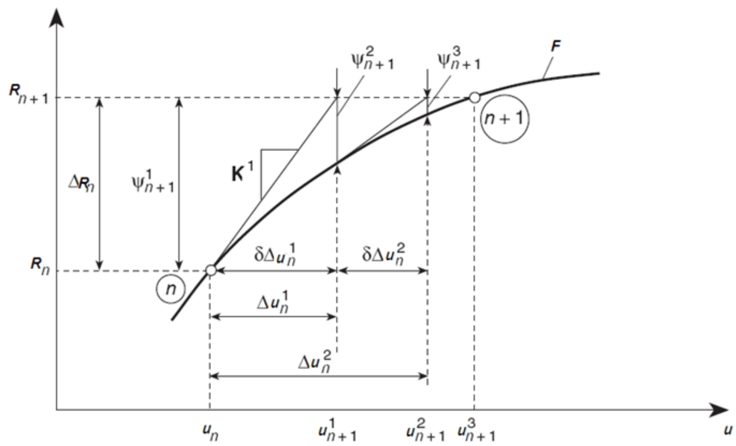


Figura 5.1: Método de *Newton-Raphson*

Si se considera que la estructura está sujeta a una variación monótona y proporcional de cargas, la expresión 5.5 se puede escribir como

$$\Delta R_n = \Delta\lambda_n R \tag{5.15}$$

Y la expresión 5.3 como

$$\Psi_{n+1} = \lambda_{n+1} R - F_{int}\left(U_{n+1}\right) = 0 \tag{5.16}$$

con

$$U_{n+1} = U_n + \Delta U_n \tag{5.17}$$

y

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n \tag{5.18}$$

donde λ_{n+1} es un factor de carga que define la intensidad aplicada del vector de carga R_o en el incremento $n + 1$. La dificultad está en definir el factor de carga antes del análisis incremental, por ello se necesita una ecuación restrictiva adicional para resolver la variable $\Delta\lambda_n$. Esta ecuación adicional puede tomar varias formas. *Riks* [77] supone que en cada incremento

$$\Delta U_n^T \Delta U_n + \Delta\lambda^2 R_o^T R_o = \Delta l^2 \tag{5.19}$$

donde Δl es una longitud prescrita. *Crisfield* [23] propone un control más natural en desplazamientos, exigiendo que

$$\Delta U_n^T \Delta U_n = \Delta l^2 \tag{5.20}$$

Estos controles, llamados de longitud de arco y de trayectoria esférica, no son sino algunos de entre los posibles que pueden ser utilizados; mejorando los tradicionales métodos de control de carga o de desplazamientos.

En todos los procesos iterativos se llega a la solución numérica sólo de forma aproximada y se tienen que poner límites de tolerancia para dar por finalizado cada proceso iterativo.

Frecuentemente, los criterios utilizados usan normas del cambio de los parámetros de desplazamiento $||dU_n^i||$ o, de forma más lógica, del residuo $||\Psi_{n+1}^i||$. En este último caso, el límite puede expresarse como cierta tolerancia de la norma de las fuerzas $||R_{n+1}||$. De esta forma, se puede exigir que

$$||\Psi_{n+1}^i|| \leq \vartheta ||R_{n+1}|| \tag{5.21}$$

donde ϑ se elige como un número pequeño.

Existen otras alternativas para elegir la norma de comparación, como utilizar el residuo de la primera iteración como base; así

$$||\Psi_{n+1}^i|| \leq \vartheta ||\Psi_{n+1}^1|| \tag{5.22}$$

Una vez seleccionado un criterio todavía queda el problema de elegir un valor apropiado para ϑ. En los casos en los que se usa un esquema completo de *Newton*, la tolerancia puede escogerse como la raíz cuadrada de la precisión de la máquina. Por tanto, si la precisión de los cálculos es de 16 dígitos, se puede elegir $\vartheta = 10^{-8}$, puesto que la convergencia cuadrática asegura que el siguiente residuo conseguiría precisión completa (en ausencia del error de redondeo).

En la aplicación informática se ha programado el método de *Newton-Raphson*, para la solución del problema no lineal. El usuario puede elegir el número de dígitos con el que trabaja o, lo que es lo mismo, la precisión en el cálculo numérico y, por lo tanto, la exactitud alcanzada puede ser muy alta. Es también necesario especificar el valor del incremento de carga inicial, el cual se mantiene o se reajusta durante los incrementos siguientes. Esto es necesario para ir considerando las sucesivas secciones agotadas que pueden ir apareciendo en la estructura a medida que aumenta la carga. La estrategia de paso adaptativo es similar a la empleada por *Terán* [92].

5.3. Aplicación informática

La descripción general de la aplicación informática desarrollada es mostrada en el apéndice D. La aplicación ha sido implementada en el manipulador de cálculo simbólico *Maple V* y, en ella, se pueden distingir la parte de preprocesado de los datos, el cálculo y el postprocesado de los resultados.

En el preprocesado se definen la geometría, los materiales, las características de la sección, las condiciones de contorno (vínculos y cargas) y las hipótesis de estudio. La geometría del sistema se genera estableciendo el número de barras que conforman el pórtico y las coordenadas de los nodos. En el bloque de cálculo se forma la matriz de rigidez de cada elemento, se ensambla el vector de carga y la matriz global del sistema estructural en estudio y se resuelve el problema a través de un procedimiento incremental e iterativo que permite determinar la secuencia de agotamiento de las barras, así como el daño alcanzado en cada una de las secciones agotadas.

En la figura 5.2 se detalla un diagrama de flujo con el procedimiento empleado durante la etapa de cálculo. Para el postprocesado gráfico se dispone de gráficas de la deformada, diagramas de esfuerzos flector, axil y cortante, indicando sobre ellas la posición de la sección agotada y el número de orden de aparición.

Adicionalmente, se puede representar cualquier resultado y ver su evolución en cada iteración y en cada incremento. Por otra parte, al ser un entorno abierto y bien documentado, cualquier usuario podría introducir modificaciones para obtener los listados y los gráficos de aquellas variables de su interés. El programa consta de un archivo principal denominado *Frame.mw*, compuesto por 4 subbloques llamados *Start*, *Input data*, *Calculation* y *Graphic results*. En la figura 5.3 se muestra un esquema general del programa.

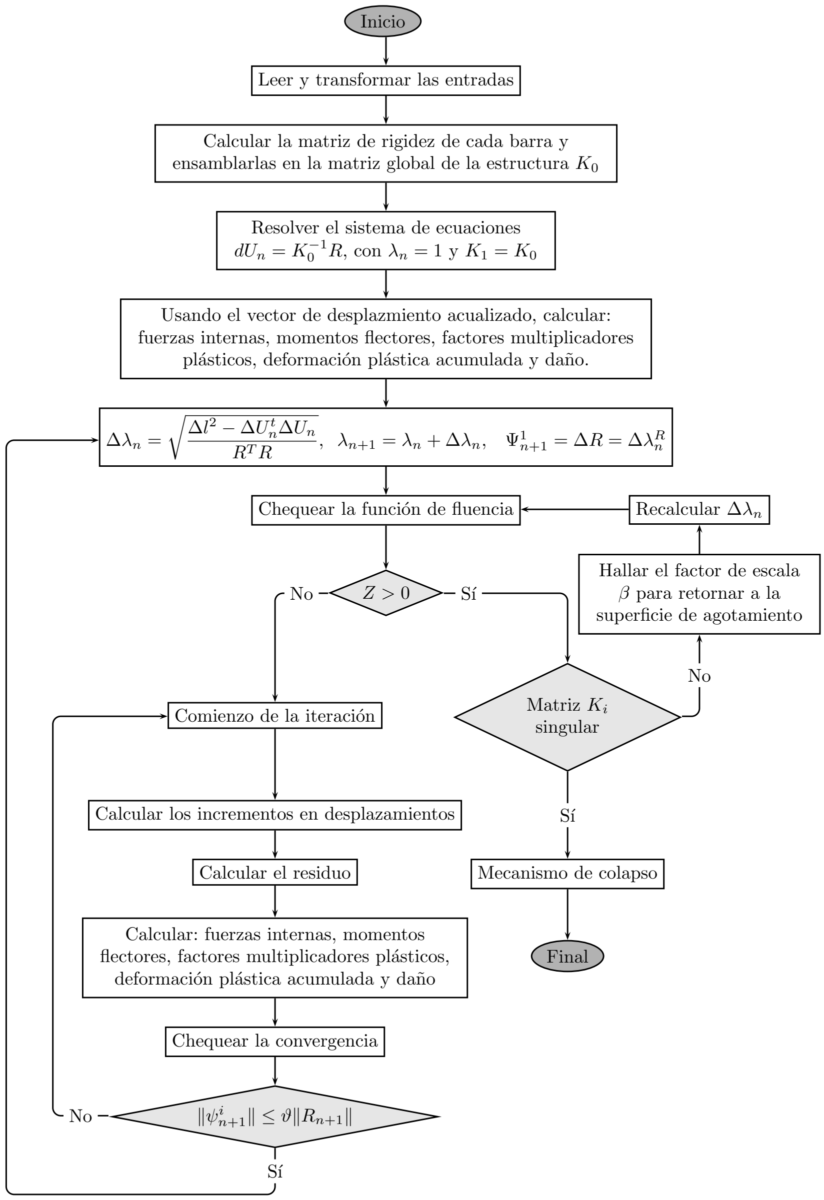


Figura 5.2: Algoritmo de cálculo

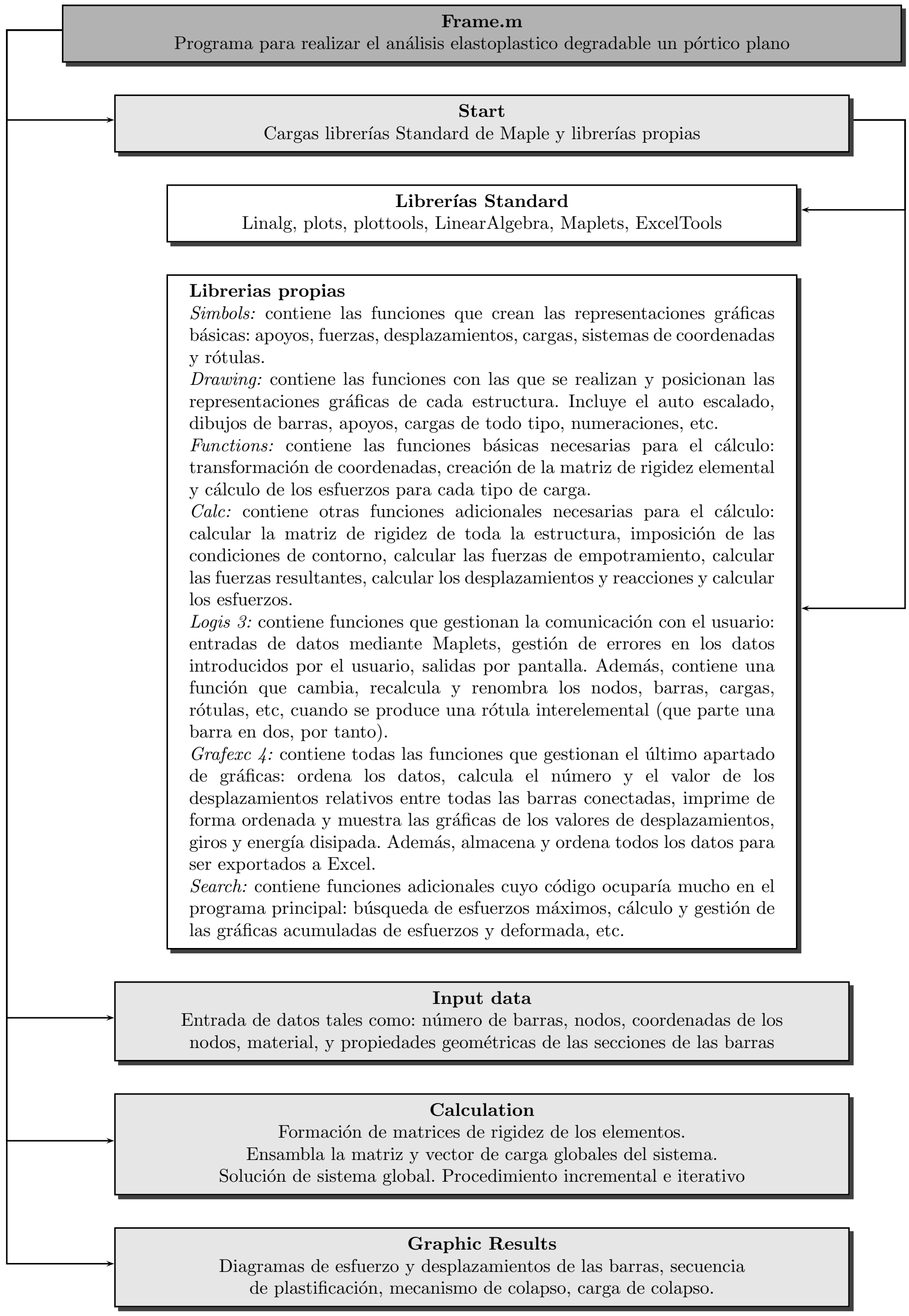


Figura 5.3: Diagrama de la estructura de archivos y procesos del programa

5.4. Tolerancia para considerar la sección como agotada (t_{pc})

El proceso de cálculo, como se expresó anteriormente, se realiza de forma incremental e iterativa, de tal manera que es fundamental calcular de forma correcta el instante y la situación en que aparece cada una de las secciones agotadas, ya que el estado de carga y, por lo tanto, los esfuerzos que existen en las secciones dependen del instante de plastificación. A su vez, la variación de la rigidez del sistema a partir de la plastificación de la primera sección depende de la combinación de esfuerzos y del daño alcanzado en las secciones agotadas.

La determinación del instante de agotamiento de cada una de las secciones se realiza mediante las funciones de agotamiento, que dependen de los esfuerzos y del daño que se consideren en el estudio, ya sea teniendo en cuenta únicamente el momento flector (Z_{MD}) o combinaciones de esfuerzos flector y axil (Z_{MND}), flector y cortante (Z_{MVD}) o flector, axil y cortante (Z_{MNVD}).

Como ya se indicó anteriormente, las funciones de agotamiento (Z) se obtienen a partir del análisis de los esfuerzos que la llevan hasta el estado de agotamiento y toman valor nulo cuando la sección se ha agotado, por lo que ése será el criterio para determinar su aparición. Conceptualmente, el problema está resuelto, pero desde el punto de vista del cálculo numérico queda por determinar cuándo la función de agotamiento Z adquiere valor nulo. Numéricamente, lo que se hace es plantear un nivel de aceptación en función de la aproximación al valor nulo buscado mediante una tolerancia (t_{pc}). Por ello, una sección se considera agotada si el valor de la función de agotamiento está dentro del intervalo

$$\frac{t_{pc}}{2} > Z > -\frac{t_{pc}}{2} \tag{5.23}$$

La tolerancia t_{pc} la especifica el usuario: por ejemplo, puede ser del orden de 0,001. La variación de esta tolerancia modifica el número de iteraciones durante el proceso de cálculo.

Cuando una sección se ha agotado es porque la función de agotamiento (Z) ha alcanzado un valor dentro del entorno de aceptación. Si llegados a este estado siguen aumentando las cargas, la matriz de rigidez de la barra que contiene a la sección que se ha agotado deja de ser la correspondiente al comportamiento elástico del material para transformarse en la matriz asociada al comportamiento elastoplástico degradable definida en este trabajo. Esa variación no sólo afecta a la barra que contiene a la sección plastificada sino a todo el sistema en estudio debido a la progresiva pérdida de rigidez de la barra.

5.5. Retorno a la superficie de agotamiento

Cuando la combinación de esfuerzos (M_z, N_x, V_y, D) no cumple, para cada valor de daño, la condición de fluencia impuesta por la función dada por la expresión 4.154, es necesario encontrar un factor multiplicador que conduzca los esfuerzos resultantes a la superficie de agotamiento. El procedimiento discutido por *Crisfield* [22] es adoptado en este trabajo. Primero se determina el punto de intersección del vector de esfuerzos elásticos con la superficie de agotamiento, $\sum = (M_z, N_x, V_y)$ (punto 1). Por ejemplo en la figura 5.4 se muestra una superficie de agotamiento al final de un incremento de los esfuerzos $\Delta \sum$, como se aprecia en la figura, ante este incremento de los esfuerzos, no se cumple la condición de agotamiento (punto 2).

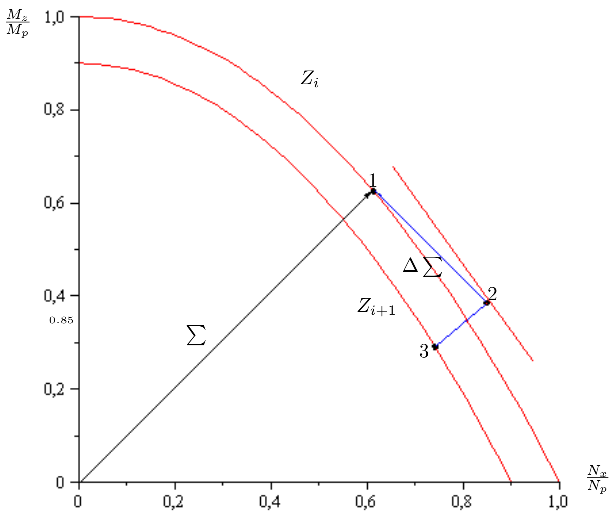


Figura 5.4: Retorno a la superficie de agotamiento

Por lo tanto se requiere que el esfuerzo resultante después de la aplicación del incremento de carga retorne en cada sección agotada a la nueva superficie de agotamiento (punto 3), puesto que el daño en cada una de ellas habrá aumentado. Esto puede ser escrito como

$$Z\left(\sum + \beta \Delta \sum\right) = 0 \tag{5.24}$$

donde $\beta \Delta \sum = (\beta \Delta M_z, \beta \Delta N_x, \beta \Delta V_y)$ es el incremento del esfuerzo resultante en cada sección y β es el factor multiplicador que permite el retorno del estado de esfuerzos a la superficie de agotamiento. Considerando las expresiones 4.154 y 5.24, podemos escribir

$$Z = \frac{|M_z + \beta \Delta M_z|}{M_p} + \left(\frac{N_x + \beta \Delta N_x}{N_p}\right)^2 \frac{1}{1-D} + \frac{1}{3}\left(\frac{V_y + \beta \Delta V_y}{V_p}\right)^2 \frac{1}{(1-D)^3} - (1-D) = 0 \tag{5.25}$$

De la expresión 5.25 se determina el valor de β buscado.

Capítulo 6
Resultados

Capítulo 6

Resultados

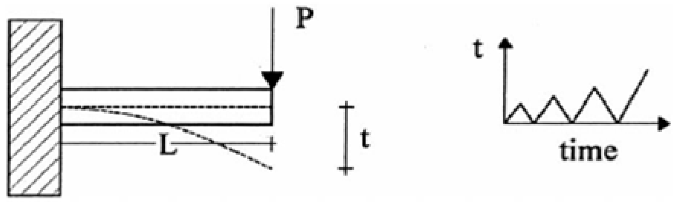
6.1. Introducción

A continuación se presenta una verificación del modelo desarrollado en la sección 4.3.2 a partir de los datos de un ensayo de laboratorio reportado por la literatura. Además, se desarrollan ejemplos en los que se compara la carga de colapso y otras magnitudes obtenidas utilizando los métodos clásicos de análisis plástico de estructuras y el método propuesto. Se establece una comparación de la carga de colapso obtenida con distintas funciones potenciales de disipación del daño.

6.2. Verificación del modelo

La exactitud del modelo de análisis estructural basado en la *mecánica del daño continuo* MD_2 se ha verificado comparándolo con resultados experimentales obtenidos de la literatura. Concretamente se han tomado los resultados del ensayo de laboratorio efectuado por la *Universidad de los Andes* [35]. En la figura 6.1 se muestra la probeta empleada durante el ensayo de carga y descarga de una viga de acero sometida a flexión. El producto del módulo de elasticidad de la viga y de la inercia equivalen a $EI = 19,06Nm^2$.

El procedimiento experimental consistió en imponer el desplazamiento transversal del extremo libre de la probeta y registrar la carga indicada por la máquina universal en cada instante. La aplicación de estos desplazamientos se hizo con la progresividad necesaria para efectuar las mediciones correspondientes en régimen cuasiestático. Estos ciclos fueron efectuados hasta el colapso de la probeta.

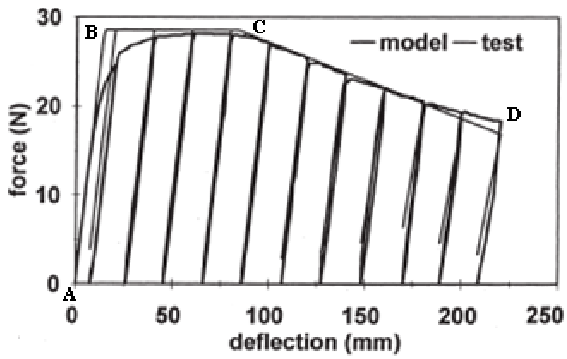


Fuente: Inglessis [40]

Figura 6.1: Probeta empleada durante el ensayo

Los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones se ajustaron al comportamiento esperado. Durante cada una de las etapas del ensayo, se efectuaron descargas y recargas a fin de poder evaluar las pendientes de descarga de las probetas y, así, verificar variaciones en la rigidez del elemento. Las descargas se efectuaron a intervalos regulares dentro de cada ensayo.

Se verificó la hipótesis de comportamiento esperada, compuesta por una viga elástica y la presencia de una rótula plástica en el extremo fijo con efectos de plasticidad y daño [40]. Este comportamiento resultante es el mostrado en la figura 6.2.



Fuente: Inglessis [40]

Figura 6.2: Curva fuerza-deflexión

En el comportamiento de la probeta se distinguen 3 zonas: una primera, tramo AB, en la que el comportamiento esperado era esencialmente lineal, sin deformaciones permanentes; una segunda etapa no lineal, tramo BC, en la que se apreciaban deformaciones permanentes tras la descarga, (zona de fluencia plástica); y una tercera, tramo CD, en la que se apreció una disminución de la magnitud de la fuerza resistente de la probeta, lo que indicaba un deterioro (daño) del material [31].

Con el ánimo de establecer la comparación entre el ensayo registrado y el modelo desarrollado en la tesis se ha realizado un análisis numérico de una barra empotrada en un extremo, con la misma rigidez inicial de la probeta utilizada.

En este análisis se ha impuesto el desplazamiento del extremo libre de la barra hasta llegar a un valor apreciable del daño de la sección. La función de disipación empleada corresponde al modelo de *Bonora* $MD_{2_{(MNVD)B}}$.

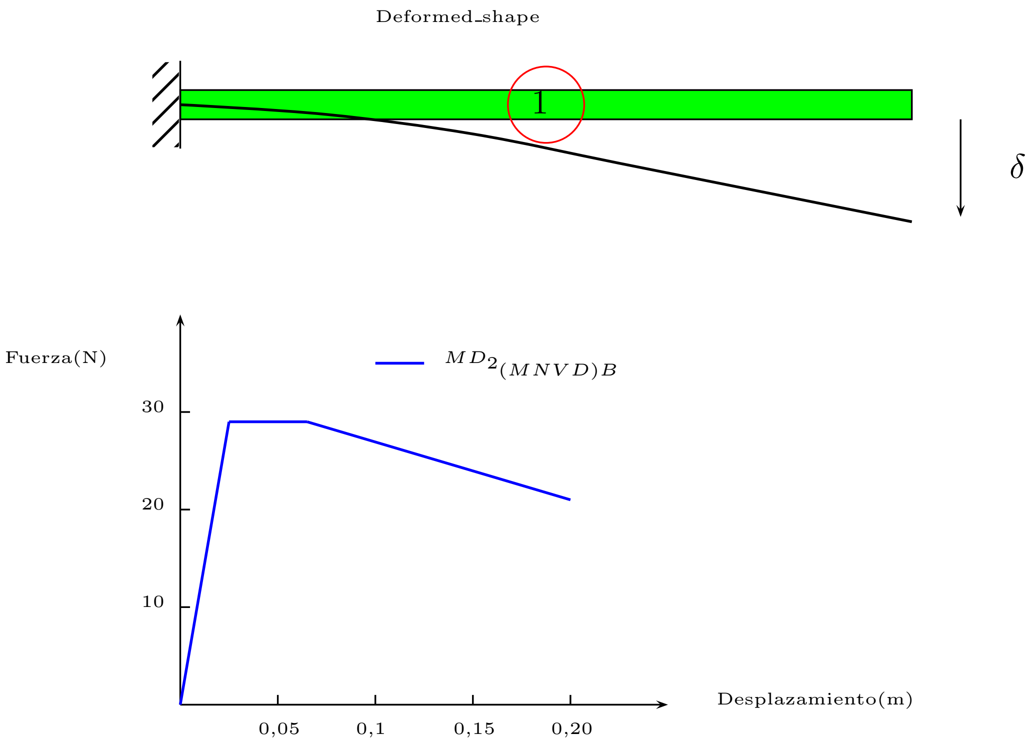


Figura 6.3: Fuerza-desplazamiento en el extremo libre de la barra

Si superponemos la figura 6.3 en la figura 6.2 se aprecia cómo el modelo desarrollado se ajusta al comportamiento de la probeta ensayada con un margen de error mínimo (figura 6.4).

El modelo permite describir algunos de los fenómenos que se encuentran incluidos en el deterioro del comportamiento de elementos estructurales de acero, una vez que se han sobrepasado los límites de comportamiento elástico. Aunque es claro que el modelo propuesto no describe la totalidad de los fenómenos que influyen en el deterioro del comportamiento de los elementos estructurales,como podrían ser fenómenos locales de abolladura, considera los más importantes (la plasticidad y el daño), permitiendo obtener una estimación más realista del comportamiento estructural.

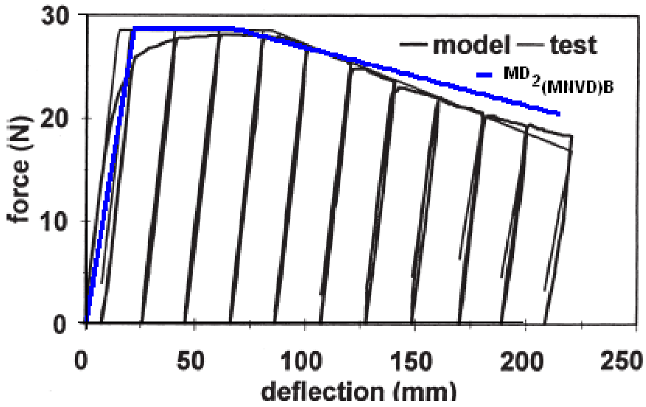


Figura 6.4: Comparación del modelo desarrollado-ensayos de laboratorio

6.3. Primer ejemplo

El primer ejemplo analiza el pórtico simple de la figura 6.5, sometido a una carga puntual vertical en el dintel en el punto medio de magnitud P y una carga horizontal de magnitud P en el nudo 4 de altura L y vano $2L$, con $L = 1m$. La sección de la barra es rectangular, de área $0{,}01m^2$, inercia igual a $8{,}333 \times 10^-6$ y momento plástico $M_p = 62500Nm$, en acero con límite elástico de 250 MPa y módulo de elasticidad de 200 GPa para todas las barras.

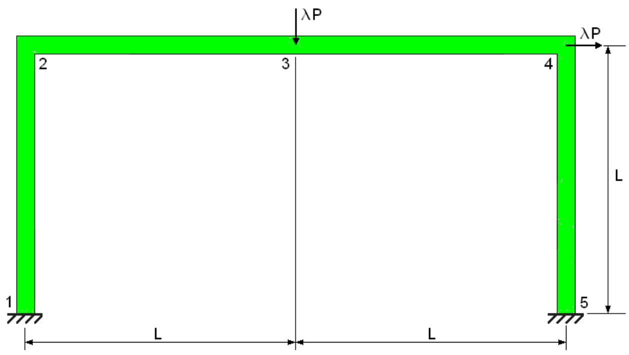


Figura 6.5: Pórtico plano con cargas puntuales

Se persigue conocer la respuesta en distintos supuestos, desde los más sencillos (cálculo plástico clásico con plastificación sólo por momento flector) hasta los más complejos (agotamiento bajo distintos modelos de daño). Se muestra, así mismo, que la aplicación desarrollada incluye formulaciones más simples sin más que particularizar los valores de los parámetros pertinentes. En todos los casos el problema ha sido resuelto con la aplicación desarrollada.

En definitiva se trata de determinar la carga de colapso considerando los siguientes escenarios:

1. Agotamiento de la sección por momento flector.
2. Agotamiento de la sección por momento flector, teniendo en cuenta además la evolución del daño del material.
3. Agotamiento de la sección por esfuerzo axil y momento flector.
4. Agotamiento de la sección por esfuerzo axil y momento flector, teniendo en cuenta además la evolución del daño del material.
5. Agotamiento de la sección por esfuerzo axil, cortante y momento flector.
6. Agotamiento de la sección por esfuerzo axil, cortante y momento flector, teniendo en cuenta además la evolución del daño del material.

Se utilizará para ello los siguientes métodos:

- **Método matricial de rigidez paso a paso:** Basado en resolver mediante el método matricial de rigidez estándar la estructura original y buscar el valor de la carga (bajo la hipótesis de estado proporcional de cargas) que hace que aparezca la primera rótula plástica. Esta rótula puede formarse considerando sólo el momento flector o una determinada combinación de axil-flector, cortante-flector o, incluso, axil-cortante-flector para que esta sección se encuentre sobre la función de agotamiento en el instante en que se forma, aunque como se verá sólo en ese instante. Para ese valor de la carga se acumulan los resultados y se resuelve un nuevo problema (incremental) consistente en la misma estructura original, con idénticas cargas, pero con una rótula en la sección anteriormente calculada. Esa rótula es una rótula estándar, con momento nulo y que permite el giro relativo. La solución incremental, dependiente de la carga, se añade a la acumulada y se busca el valor de la carga que provoca la aparición de la siguiente sección plastificada, y así sucesivamente. Es de destacar que, mediante este método, el único desplazamiento relativo que existe en la sección con rótula plástica es lógicamente el giro y que en los sucesivos incrementos no se modifican los momentos en las secciones en las que ya se habían formado rótulas plásticas, aunque sí los axiles y cortantes. Esto hace que, a medida que aumenta la carga, mediante los sucesivos incrementos, en las secciones plastificadas los esfuerzos no cumplirian la función de agotamiento (Z).
- **Plasticidad acoplada:** Basado en que la sección que plastifica lo hace para unos esfuerzos que cumplen la función de agotamiento Z considerada en todo instante, por lo que tras la

plastificación, al seguir variando la carga, dichos esfuerzos varían su magnitud, de forma que cumplan con la condición de equilibrio y plastificación. Además, a diferencia del caso anterior en la sección plastificada no sólo hay giro relativo, sino también desplazamientos relativos.

- **Plasticidad acoplada con daño:** Modelo original de análisis estructural basado en la mecánica del daño continuo, propuesto en la apartado 4.3.2 de esta tesis. A diferencia del método de plasticidad acoplada considera que la sección que plastifica lo hace para unos esfuerzos que cumplen la función de agotamiento Z, considerada en todo instante función de los esfuerzos y del daño alcanzado por la sección.

El programa computacional desarrollado permite abordar el cálculo plástico de cualquier estructura. Mediante este algoritmo se puede seguir el comportamiento de la estructura desde la fase totalmente elástica hasta la fase de colapso asumiendo distintas hipótesis. En los siguientes apartados, con ánimo de comparar, se realiza un análisis elastoplástico con los distintos métodos indicados anteriormente.

6.3.1. Método matricial de rigidez paso a paso

En la figura 6.6 se muestra una de las salidas gráficas del entorno informático desarrollado especificamente en este trabajo. En ésta se muestra la geometría y condiciones de carga y contorno del pórtico del problema objeto de estudio. (Figura 6.5).

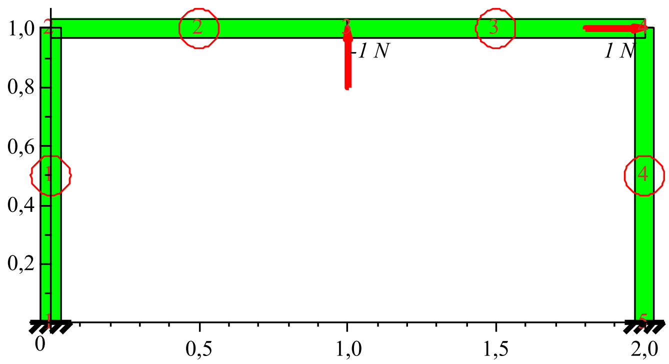
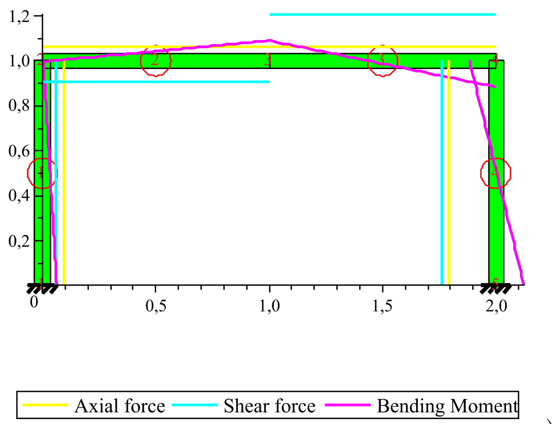


Figura 6.6: Pórtico plano

A continuación se describirán cada uno de los pasos que la aplicación va dando automáticamente hasta el mecanismo de colapso y el valor de la carga que lo produce.

Paso 1

En el primer paso se resuelve el pórtico, determinándose los desplazamientos y diagramas de esfuerzos en función de la carga aplicada. A efectos de representación, los diagramas de esfuerzos se dibujan sobre todas las barras del pórtico. (Figura 6.7).



a)

```
Value of det(KA): 7.36074e+118

Beam diagrams (positive values):
                        Axial force     Shear force     Bending moment
  Bar 1  First node     +3.1264e-01     +1.9904e-01      +2.1192e-01
         Second node    +3.1264e-01     +1.9904e-01      +1.2879e-02
  Bar 2  First node     +1.9904e-01     +3.1264e-01      +1.2879e-02
         Second node    +1.9904e-01     +3.1264e-01      +2.9976e-01
  Bar 3  First node     +1.9904e-01     +6.8736e-01      +2.9976e-01
         Second node    +1.9904e-01     +6.8736e-01      +3.8760e-01
  Bar 4  First node     +6.8736e-01     +8.0096e-01      +3.8760e-01
         Second node    +6.8736e-01     +8.0096e-01      +4.1336e-01
```

b)

Figura 6.7: a) Diagramas de esfuerzo sobre el pórtico plano, b) Valores numéricos (Primer paso)

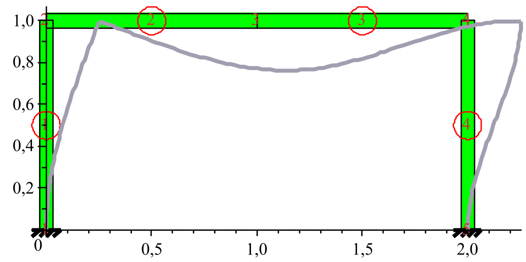
Nótese que para el primer paso el valor máximo del momento flector aparece en la barra 4 extremo 2. Para determinar en qué sección del pórtico ocurren los máximos esfuerzos se ha desarrollado un algoritmo de rastreo que determina la ubicación exacta de dichos máximos. (Figura 6.8).

```
Maximum values of beam diagrams:
                             Value       Bar   Position
  Maximum axial force      +6.8736e-01    4     node 1
  Maximum shear force      +8.0096e-01    4     node 1
  Maximum bending moment   +4.1336e-01    4     node 2

The maximum accumulated value of (Bending moment)/(Plastic moment) is
0.413357, and it's reached in bar 4, extreme 2

Forces in nodes:
                 Fx            Fy            Mz
  Node 1   -1.9904e-01   +3.1264e-01   +2.1192e-01
  Node 2   +0.0000e+00   +0.0000e+00   +0.0000e+00
  Node 3   +0.0000e+00   -1.0000e+00   +0.0000e+00
  Node 4   +1.0000e+00   +0.0000e+00   +0.0000e+00
  Node 5   -8.0096e-01   +6.8736e-01   +4.1336e-01
```

Figura 6.8: Valores máximos de los esfuerzos (Primer paso)

A partir de estos valores se busca la mínima carga con la que el flector en alguna sección alcance el valor del momento plástico (M_p) en dicha sección. El mínimo valor de carga será igual a $P = \lambda \dfrac{M_p}{L}$, donde λ es el factor de carga. Para este primer paso el factor de carga es igual a $\lambda = 2{,}42374$.

En la figura 6.9 se muestra la deformada del pórtico así como el resumen del vector desplazamiento en los nodos para este valor de la carga.



Node displacements:

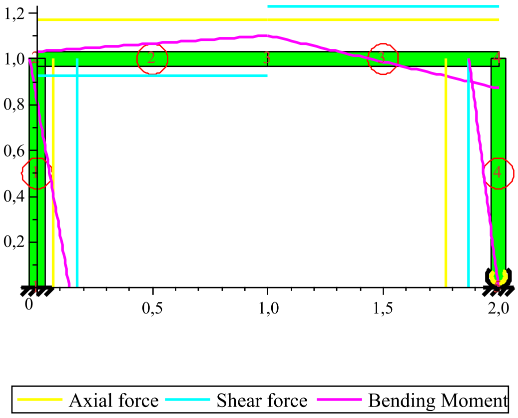
	ux	uy	theta
Node 1	+0.0000e+00	+0.0000e+00	+0.0000e+00
Node 2	+3.4661e-13	-1.4888e-15	-5.3525e-13
Node 3	+3.4756e-13	-3.1927e-13	+1.4781e-13
Node 4	+3.4850e-13	-3.2731e-15	-6.1330e-14
Node 5	+0.0000e+00	+0.0000e+00	+0.0000e+00

Figura 6.9: Deformada del pórtico (Primer paso)

Paso 2

El siguiente paso consiste en la resolución matricial del mismo pórtico pero con rótula estándar en el extremo 2 de la barra 4. Se determinan los desplazamientos y los diagramas incrementales (mostrados en la figura 6.10) en función del incremento de carga ΔP, se acumula a la solución anterior (figura 6.7) y se calcula ΔP con la condición de que el flector en otra sección alcance el valor del momento plástico.

La siguiente sección en plastificar es el extremo 1 de la barra 4 (figura 6.11) para un incremento del factor de carga de $\Delta P = 0{,}14613$. En la figura 6.12 se muestran los desplazamientos acumulados para el factor de carga.

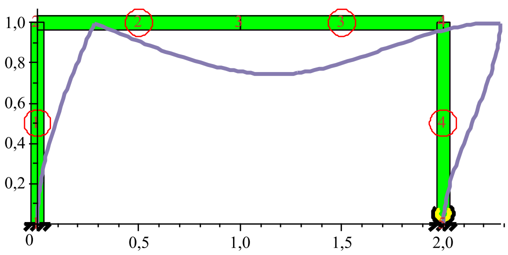



```
Previous value of det(KA): 7.36074e+118
Current value of det(KA): 3.62198e+118
Relative change: 0.507933

Beam diagrams (positive values):
                           Axial force      Shear force      Bending moment
  Bar 1  First node        +2.3395e-01      +5.7526e-01      +4.6789e-01
         Second node       +2.3395e-01      +5.7526e-01      +1.0737e-01
  Bar 2  First node        +5.7526e-01      +2.3395e-01      +1.0737e-01
         Second node       +5.7526e-01      +2.3395e-01      +3.4131e-01
  Bar 3  First node        +5.7526e-01      +7.6605e-01      +3.4131e-01
         Second node       +5.7526e-01      +7.6605e-01      +4.2474e-01
  Bar 4  First node        +7.6605e-01      +4.2474e-01      +4.2474e-01
         Second node       +7.6605e-01      +4.2474e-01      +0.0000e+00
```

Figura 6.10: Esfuerzos incrementales (Segundo paso)

```
Maximum values of beam diagrams:
                              Value       Bar    Position
  Maximum axial force      +7.6605e-01     4      node 1
  Maximum shear force      +7.6605e-01     3      node 1
  Maximum bending moment   +4.6789e-01     1      node 1

The maximum accumulated value of (Bending moment)/(Plastic moment) is
6.81595, and it's reached in bar 4, extreme 1

Forces in nodes:
                  Fx             Fy             Mz
  Node 1   -5.7526e-01    +2.3395e-01    +4.6789e-01
  Node 2   +0.0000e+00    +0.0000e+00    +0.0000e+00
  Node 3   +0.0000e+00    -1.0000e+00    +0.0000e+00
  Node 4   +1.0000e+00    +0.0000e+00    +0.0000e+00
  Node 5   -4.2474e-01    +7.6605e-01    +0.0000e+00
```

Figura 6.11: Valores máximos de los esfuerzos (Segundo paso)

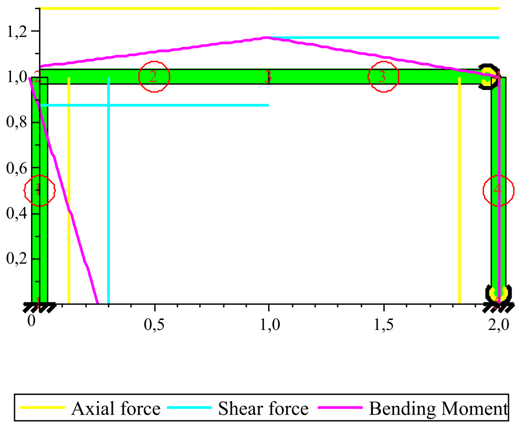



```
Node displacements:
                 ux             uy             theta
  Node 1   +0.0000e+00    +0.0000e+00    +0.0000e+00
  Node 2   +6.5747e-13    -1.1140e-15    -8.5839e-13
  Node 3   +6.6021e-13    -4.1820e-13    +2.0989e-13
  Node 4   +6.6295e-13    -3.6479e-15    +1.1243e-14
  Node 5   +0.0000e+00    +0.0000e+00    +0.0000e+00
```

Figura 6.12: Deformada del pórtico (Segundo paso)

Paso 3

Igual que en el paso anterior se resuelve matricialmente el mismo pórtico, pero además de la rótula estándar en el extremo 2 de la barra 4 habrá otra rótula en el extremo 1 de dicha barra. Se determinan los desplazamientos y los diagramas incrementales (mostrados en la figura 6.13) en función del incremento de carga ΔP, se acumula a la solución anterior y se calcula ΔP con la condición de que el flector en otra sección alcance el valor del momento plástico.




```
Previous value of det(KA): 3.62198e+118
Current value of det(KA): 9.15285e+117
Relative change: 0.747297

Beam diagrams (positive values):
                              Axial force     Shear force     Bending moment
  Bar 1  First node           +4.2502e-01     +1.0000e+00      +8.5004e-01
         Second node          +4.2502e-01     +1.0000e+00      +1.4996e-01
  Bar 2  First node           +1.0000e+00     +4.2502e-01      +1.4996e-01
         Second node          +1.0000e+00     +4.2502e-01      +5.7498e-01
  Bar 3  First node           +1.0000e+00     +5.7498e-01      +5.7498e-01
         Second node          +1.0000e+00     +5.7498e-01      +0.0000e+00
  Bar 4  First node           +5.7498e-01     +0.0000e+00      +0.0000e+00
         Second node          +5.7498e-01     +0.0000e+00      +0.0000e+00
```

Figura 6.13: Esfuerzos incrementales (Tercer paso)

```
Maximum values of beam diagrams:
                              Value       Bar    Position
  Maximum axial force      +1.0000e+00     3      node 1
  Maximum shear force      +1.0000e+00     1      node 1
  Maximum bending moment   +8.5004e-01     1      node 1

The maximum accumulated value of (Bending moment)/(Plastic moment) is
2.55844, and it's reached in bar 3, extreme 1

Forces in nodes:
                  Fx             Fy             Mz
  Node 1    -1.0000e+00    +4.2502e-01    +8.5004e-01
  Node 2    +0.0000e+00    +0.0000e+00    +0.0000e+00
  Node 3    +0.0000e+00    -1.0000e+00    +0.0000e+00
  Node 4    +1.0000e+00    +0.0000e+00    +0.0000e+00
  Node 5    +0.0000e+00    +5.7498e-01    +0.0000e+00
```

Figura 6.14: Valores máximos de los esfuerzos (Tercer paso)

La siguiente sección en plastificar es el extremo 1 de la barra 3 para un incremento del factor de carga de $\Delta\lambda = 0{,}38951$. En la figura 6.15 se muestran los desplazamientos acumulados para el factor de carga $\lambda = 2{,}95655$.

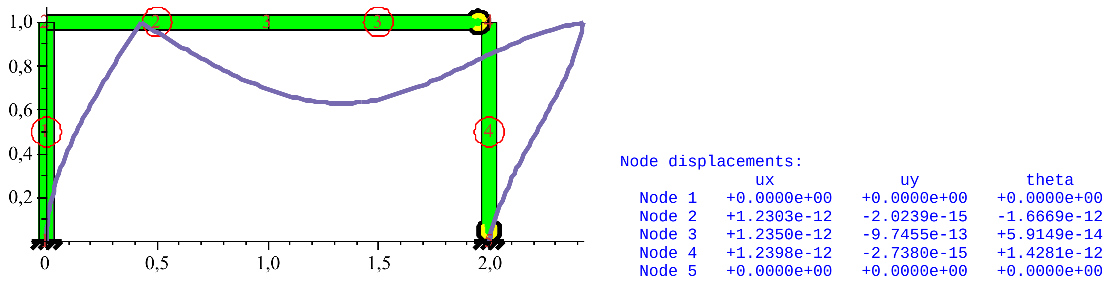


Figura 6.15: Deformada del pórtico (Tercer paso)

Paso 4

Nuevamente se resuelve matricialmente el mismo pórtico, pero habrá rótula estándar en el extremo 2 de la barra 4, en el extremo 1 de la barra 4 y en el extremo 1 de la barra 3. Se determinan también los desplazamientos y los diagramas incrementales en función del incremento de carga ΔP, se acumula a la solución anterior y se calcula ΔP con la condición de que el flector en otra sección alcance el valor del momento plástico.

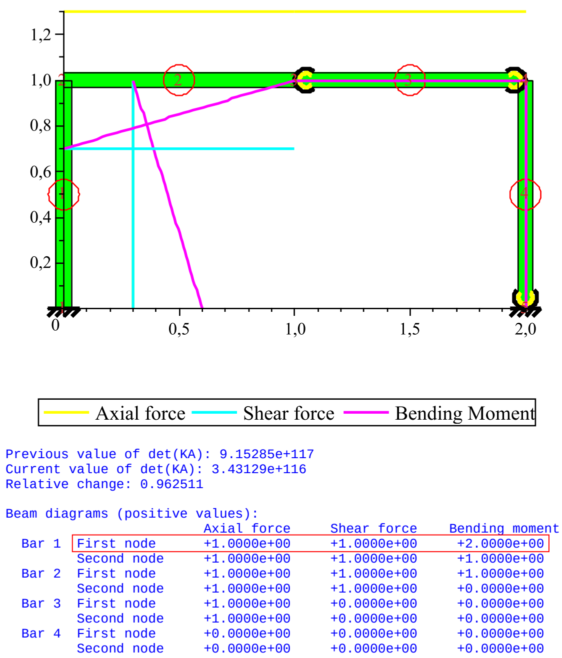


Figura 6.16: Esfuerzos incrementales (Cuarto paso)

La siguiente sección en plastificar es el extremo 1 de la barra 1 para un incremento del factor de carga de $\Delta\lambda = 0,04345$. El factor de carga acumulado es igual a $\lambda = 3$.

```
Maximum values of beam diagrams:
                              Value       Bar   Position
  Maximum axial force      +1.0000e+00    2      node 1
  Maximum shear force      +1.0000e+00    1      node 1
  Maximum bending moment   +2.0000e+00    1      node 1

The maximum accumulated value of (Bending moment)/(Plastic moment) is
23.1449, and it's reached in bar 1, extreme 1

Forces in nodes:
                Fx             Fy             Mz
  Node 1   -1.0000e+00   +1.0000e+00   +2.0000e+00
  Node 2   +0.0000e+00   +0.0000e+00   +0.0000e+00
  Node 3   +0.0000e+00   -1.0000e+00   +0.0000e+00
  Node 4   +1.0000e+00   +0.0000e+00   +0.0000e+00
  Node 5   +0.0000e+00   +0.0000e+00   +0.0000e+00
```

Figura 6.17: Valores máximos de los esfuerzos (Cuarto paso)

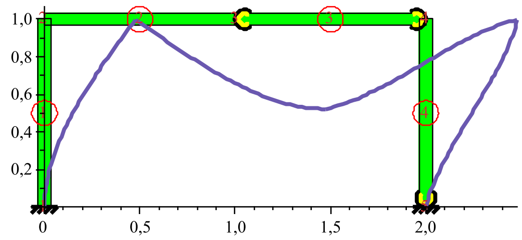
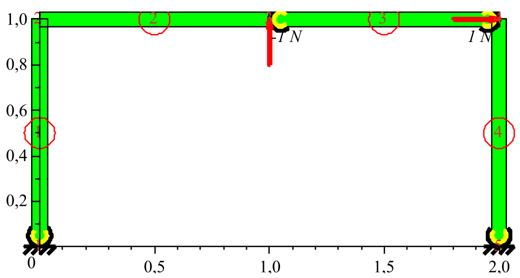


Figura 6.18: Deformada del pórtico (Cuarto paso)

Paso 5

Al realizar el siguiente paso, el programa detecta una singularidad en la matriz de rigidez del pórtico y da por terminado el análisis plástico. Esto se debe a que se ha formado el mecanismo de colapso del pórtico (figura 6.19). Por lo tanto, la carga de colapso es igual a $P = 3\frac{M_p}{L}$.




```
>> End of calculation

|---------------------------------------------------------
| Summary:
|  >Number of plastic hinges: 4
|  >Order of formation and total load they were formed with:
|
|   Node:        5           4           3           1
|   Bar:         4           3           3           1
|   Extreme:     2           2           1           1
|   Load:    151253      160396      184797      187500
|---------------------------------------------------------
```

Figura 6.19: Mecanismo de colapso (Quinto paso)

En la figura 6.20 se muestran las deformadas del pórtico para uno de los pasos de carga descritos anteriormente.

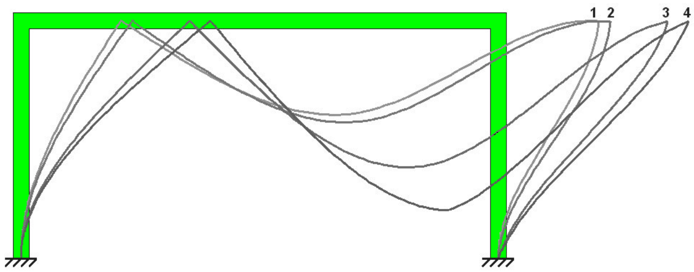


Figura 6.20: Deformada del pórtico

En la figura 6.21 se muestra un resumen de los desplazamiento y giros que sufre el pórtico en cada paso de carga.

```
u_x displacements
                          Node 1    Node 2    Node 3    Node 4    Node 5
   Step 1   Load=151253   +0.00e+00 +8.39e-13 +8.41e-13 +8.43e-13 +0.00e+00
   Step 2   Load=160396   +0.00e+00 +9.35e-13 +9.38e-13 +9.40e-13 +0.00e+00
   Step 3   Load=184797   +0.00e+00 +1.42e-12 +1.42e-12 +1.42e-12 +0.00e+00
   Step 4   Load=187500   +0.00e+00 +1.59e-12 +1.59e-12 +1.60e-12 +0.00e+00
u_y displacements
                          Node 1    Node 2    Node 3    Node 4    Node 5
   Step 1   Load=151253   +0.00e+00 -3.60e-15 -7.72e-13 -7.92e-15 +0.00e+00
   Step 2   Load=160396   +0.00e+00 -3.77e-15 -8.34e-13 -8.45e-15 +0.00e+00
   Step 3   Load=184797   +0.00e+00 -4.56e-15 -1.21e-12 -9.52e-15 +0.00e+00
   Step 4   Load=187500   +0.00e+00 -4.76e-15 -1.59e-12 -9.52e-15 +0.00e+00
Absolute rotations
                          Node 1    Node 2    Node 3    Node 4    Node 5
   Step 1   Load=151253   +0.00e+00 -1.29e-12 +3.58e-13 -1.48e-13 +0.00e+00
   Step 2   Load=160396   +0.00e+00 -1.42e-12 +3.88e-13 -1.47e-13 -1.47e-13
   Step 3   Load=184797   +0.00e+00 -2.07e-12 +4.11e-13 +4.11e-13 -6.31e-13
   Step 4   Load=187500   +0.00e+00 -2.38e-12 -3.30e-31 +7.89e-13 -8.03e-13
Relative rotations
                          N(1)B(1-1) N(2)B(2-1) N(3)B(3-2) N(4)B(4-3) N(5)B(4-4)
   Step 1   Load=151253   +0.00e+00  +0.00e+00  +0.00e+00  +0.00e+00  +0.00e+00
   Step 2   Load=160396   +0.00e+00  +0.00e+00  +0.00e+00  +0.00e+00  +1.47e-13
   Step 3   Load=184797   +0.00e+00  +0.00e+00  +0.00e+00  -1.04e-12  +6.31e-13
   Step 4   Load=187500   +0.00e+00  +0.00e+00  +7.89e-13  -1.59e-12  +8.03e-13

      Notation: N(i)B(j-k) means: relative rotation in node i, between bars j and
k.
      If j=k, it means the relative rotation of a 'free' node
```

Figura 6.21: Resumen del análisis. Plastificación solo por momento flector

6.3.2. Plasticidad acoplada $MD_{2_{(F)}}$ y plasticidad acoplada con daño $MD_{2_{(FD)}}$

Como se detalla en el capítulo 5, se ha desarrollado un algoritmo computacional, incremental e iterativo que permite calcular la carga de colapso de pórticos planos considerando plasticidad acoplada con daño $MD_{2_{FD}}$ y plasticidad acoplada sin daño MD_{2_F}. El subíndice $F(M, N, V)$ indicará la combinación de esfuerzos que son tenidos en cuenta para determinar el agotamiento de la sección. Por ejemplo, si se realiza el estudio considerando el agotamiento por el momento flector y esfuerzo axil, llamaremos a este caso $MD_{2_{(MN)}}$ y, si además se tiene en cuenta el daño, se llamará $MD_{2_{(MND)}}$. De esta manera, quedarán identificados los estudios que se hagan de ahora en adelante con el algoritmo desarrollado en esta tesis. A continuación se realiza una comparación de todos los estudios desarrollados.

Inicialmente se ha realizado un estudio de plasticidad de las secciones sin considerar el daño mecánico de las mismas. En la figura 6.22 se muestra el desplazamiento horizontal del nodo 4 del pórtico analizado (figura 6.5) en función del factor de carga. La carga final de colapso (P) será igual al producto del factor de carga por el momento plástico de la sección transversal $P = \lambda M_P/L$.

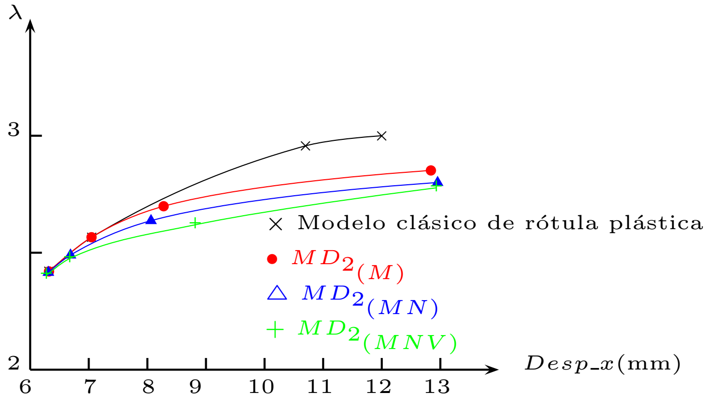


Figura 6.22: Plasticidad acoplada sin daño. Factor de carga-desplazamiento horizontal del nodo 4

Tabla 6.1: Resumen de resultados. Plasticidad acoplada sin daño

Sección Agotada	Modelo Clásico Rotula Plástica(R.P)		Plasticidad acoplada $MD2_{(M)}$		$MD2_{(MN)}$		$MD2_{(MNV)}$	
	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)
	0,00000	0,000000	0,00000	0,0000000	0,00000	0,00000000	0,00000	0,00000000
5	2,42000	0,006320	2,42005	0,0063216	2,41588	0,00631072	2,40332	0,00627791
4	2,56613	0,007050	2,56405	0,0071162	2,48988	0,00668814	2,47532	0,00667519
3	2,95675	0,010700	2,69405	0,0083420	2,63688	0,00806252	2,61932	0,00881610
1	3,00000	0,012000	2,84505	0,0128748	2,79988	0,01295320	2,77732	0,01293240
	% Variación R.P		5,17		6,67		7,42	

De la comparación de la tabla 6.1 y de la figura 6.22 se pueden obtener las siguientes conclusiones: el orden de aparición de las rótulas plásticas es el mismo tanto para el estudio de plasticidad acoplada como para el método clásico de rótula plástica, la carga de colapso obtenida considerando plasticidad por flector, axil y cortante es menor (7,42 %) comparada con la obtenida con el método clásico.

Durante el cálculo con daño se ha considerado una tolerancia de agotamiento $t_{pc} = 0{,}0001$ y una tolerancia para evaluar el residuo $\vartheta = 0{,}001$ ambos valores pueden ser modificados por el usuario. Para el valor de $t_{pc} = 0{,}0001$, hay convergencia de la solución como se aprecia en la figura 6.23. El incremento de carga también lo fija el usuario, en este ejemplo en particular el incremento inicial es de 1000 si bien la aplicación adapta este valor en la medida que la función de agotamiento Z en alguna sección tiende a 0. El número de incrementos e iteraciones lo determina el programa para cumplir con las tolerancias exigidas. Por ejemplo, en el problema objeto de estudio el orden de aparición del agotamiento de la secciones es 5, 4, 3 y 1, durante la etapa de agotamiento de la sección 4 a la 3 el número de incrementos de carga es de 15; éste se inicia en 1000 y termina en $7,8125$. Para cada incremento la aplicación realiza varias iteraciones para conseguir el equilibrio del sistema, en el incremento 1 de esta etapa el número de iteraciones es de 7. Si el incremento de carga es menor, aumenta el número de incrementos; sin embargo, no se nota la variación de los resultados, por lo cual se puede concluir que la convergencia de la solución sólo depende de los valores de las tolerancias t_{pc} y ϑ. En la figura 6.24 se aprecia el entorno del programa informático para los primeros incrementos de carga.

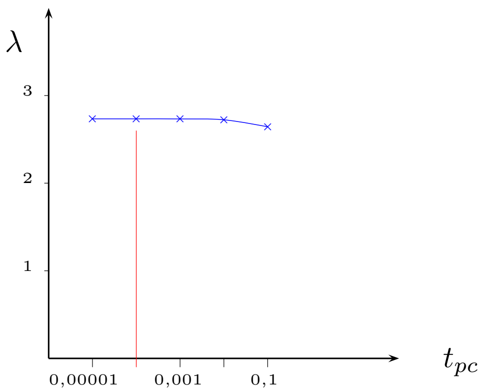


Figura 6.23: Convergencia de la solución

```
Previous value of det(KA): 2.95539e+73
Current value of det(KA):  2.43560e+73
Relative decreasing: 0.175879
            "================================= incremento ", 1, "====================="

El valor de Z + cercano a 0 es: Z1=-0.0616033, barra=4, long=0, nodo=1
Qincr=150207, Qpasoanterior=150207
            "================================= incremento ", 2, "====================="

Incremento la carga: Qincr = Q + AQ = 150207 + 1000 = 151207
Yincr=-0.0538987 < -tolY=-0.0001
Se seguirá incrementando con el paso AQ=1000
                          "----------------------------------- iteracion ", 1, "-----------------------------------"
                 RESIDUO: 1000
                          "----------------------------------- iteracion ", 2, "-----------------------------------"
                 RESIDUO: 124.189
                          "----------------------------------- iteracion ", 3, "-----------------------------------"
                 RESIDUO: 12.6051
                          "----------------------------------- iteracion ", 4, "-----------------------------------"
                 RESIDUO: 1.10231
                          "----------------------------------- iteracion ", 5, "-----------------------------------"
                 RESIDUO: 0.0832238
                          "----------------------------------- iteracion ", 6, "-----------------------------------"
                 RESIDUO: 0.0054975
                          "----------------------------------- iteracion ", 7, "-----------------------------------"
                 RESIDUO: 0.000321535
Qincr=151207, Qincrant=150207
            "================================= incremento ", 3, "====================="
```

Figura 6.24: Entorno del programa *Frame.m*

Para considerar la evolución del daño del material a medida que se incrementa la deformación plástica acumulada se han empleado las funciones de disipación de daño de *Bonora* $MD2_{(FD)B}$ y *Wang* $MD2_{(FD)W}$. En las tablas 6.2, 6.3 y 6.4 se muestran los resultados al emplear estas funciones para predecir el daño de las secciones.

Tabla 6.2: Plasticidad por momento

Modelo Clásico (Rótula Plástica) R.P		Plasticidad Acoplada $MD2_{(M)}$		Plasticidad Acoplada con Daño: Bonora $MD2_{(MD)B}$		Plasticidad Acoplada con Daño: Wang $MD2_{(MD)W}$.	
λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)
0,00000	0,000000	0,00000	0,0000000	0,00000	0,00000000	0,00000	0,00000000
2,42000	0,006320	2,42005	0,0063216	2,42005	0,00632162	2,42005	0,00632162
2,56613	0,007050	2,56614	0,0070470	2,58005	0,00725498	2,59605	0,00741500
2,95675	0,010700	2,69865	0,0082776	2,69105	0,00832028	2,69205	0,00851106
3,00000	0,012000	2,85160	0,01283880	2,84205	0,01285310	2,83500	0,01280530
% Error R.P		4.95		5.27		5.50	

Tabla 6.3: Plasticidad por momento y axil

Modelo Clásico (Rótula Plástica) R.P		Plasticidad Acoplada $MD2_{(MN)}$		Plasticidad Acoplada con Daño: Bonora $MD2_{(MND)B}$		Plasticidad Acoplada con Daño: Wang $MD2_{(MND)W}$	
λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)
0,00000	0,000000	0,00000	0,0000000	0,00000	0,0000000	0,00000	0,00000000
2,42000	0,006320	2,41588	0,0063107	2,41588	0,0063107	2,41588	0,00631072
2,56613	0,007050	2,48988	0,0066881	2,46888	0,0066196	2,45988	0,00661393
2,95675	0,010700	2,63688	0,0080625	2,55013	0,0075048	2,51813	0,00732872
3,00000	0,012000	2,79988	0,0129532	2,74113	0,0132228	2,71813	0,01351070
% Variación R.P		6.67		8.63		9.40	

Tabla 6.4: Plasticidad por momento, axil y cortante

Modelo Clásico (Rótula Plástica) R.P		Plasticidad Acoplada $MD2_{(MNV)}$		Plasticidad Acoplada con Daño: Bonora $MD2_{(MNVD)B}$		Plasticidad Acoplada con Daño: Wang $MD2_{(MNVD)W}$.	
λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x(nodo 4)	λ	u_x(nodo 4)
0,00000	0,000000	0,00000	0,00000000	0,00000	0,0000000	0,00000	0,00000000
2,42000	0,006320	2,40332	0,00627791	2,40332	0,0062779	2,40332	0,00627791
2,56613	0,007050	2,47532	0,00667519	2,45532	0,0066024	2,44632	0,00655451
2,95675	0,010700	2,61932	0,00881610	2,53582	0,0074805	2,50457	0,00726881
3,00000	0,012000	2,77732	0,01293240	2,72682	0,0131999	2,70657	0,01333430
% Variación R.P		7,42		9,11		9,78	

En la figura 6.25 es posible apreciar que no existen muchas diferencias entre el modelo de plasticidad por momento ($MD2_{(M)}$) y los modelos de plasticidad por momento considerando daño (*Wang, Bonora*). Sin embargo, comparando la carga final de colapso obtenida con los modelos que involucran la función de disipación del daño (*Bonora* y *Wang*) con el método de análisis plástico clásico (rótula plástica, tabla 6.2) el error es del orden de $5,27\,\%$ y $5,5\,\%$, respectivamente. El daño de la sección puede alcanzar valores de $0,201$ en el extremo 1 de la barra 4 (sección 3). Se esperarían mayores diferencias entre los distintos modelos para valores mayores de daño, sin embargo, para estos valores bajos ya se produce el colapso. En la figura 6.26 se muestran la evolución del daño para la primera sección en agotarse (5) y para la sección con máximo nivel de daño (3) empleando el modelo $MD2_{(MD)B}$ y $MD2_{(MD)W}$.

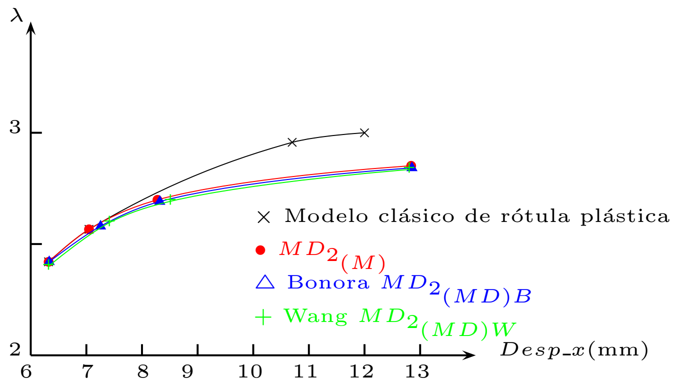


Figura 6.25: Carga de colapso-desplazamiento lateral del nodo 4

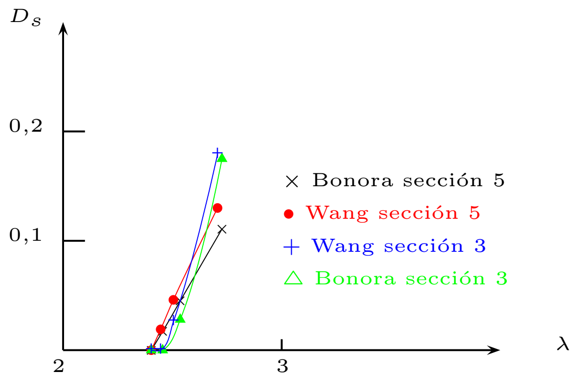


Figura 6.26: Daño de las secciones 5 y 3 del pórtico

En la figura 6.27 se aprecia una diferencia considerable en la magnitud de la carga de colapso y los desplazamientos cuando para la plastificación de la sección se considera no sólo el momento sino también el axil. Si se compara la carga final de colapso obtenida con los modelos que involucran la función de disipación del daño (*Bonora* y *Wang*) con el método de análisis plástico clásico (rótula plástica, tabla 6.3) el error es del orden de $8,63\,\%$ y $9,4\,\%$, respectivamente. El máximo valor del daño es alcanzado en la sección 3 y es igual a $0,198$ y $0,196$ para los modelos $MD_{2_{(MND)B}}$ y $MD_{2_{(MND)W}}$, respectivamente. Para los modelos de $MD_{2_{(MD)B}}$ y $MD_{2_{(MD)W}}$ el daño era $0,179$ y $0,175$.

La figura 6.28 presenta la respuesta de la estructura considerando, además, el efecto del cortante, con el que de nuevo aumenta el daño y, por tanto, disminuye la carga total resistida. Ante el aumento del daño de las secciones hay una disminución de la rigidez de la estructura, con los que la carga final de colapso es menor que la obtenida con métodos clásicos que no contemplan algunos de los esfuerzos y la posibilidad de daño. En otras palabras; cuando se consideran todos los efectos, la pérdida de rigidez de la estructura es mayor a medida que aumenta la carga; lo cual se traduce en una menor capacidad portante final.

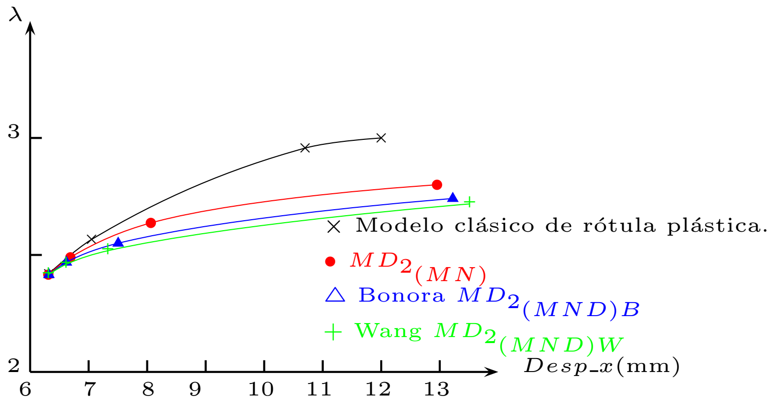


Figura 6.27: Carga de colapso-desplazamiento lateral del nodo 4

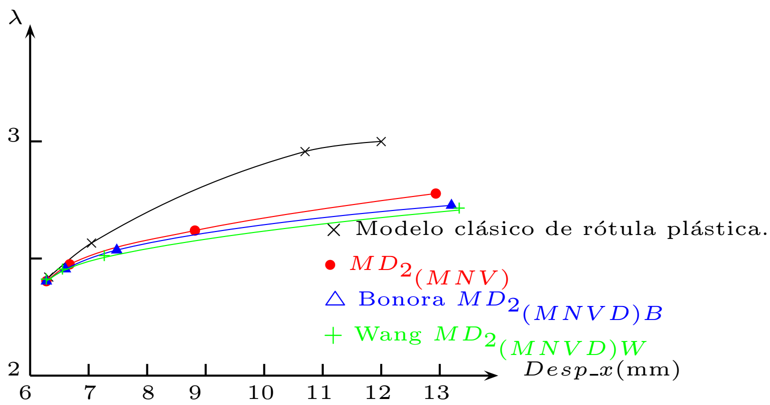


Figura 6.28: Carga de colapso-desplazamiento lateral del nodo 4

El mayor valor del daño ocurre en la sección 3 del pórtico (figura 6.5). En la figura 6.29 se muestra el daño alcanzado en esta sección en función del modelo empleado. De la figura se puede concluir que el daño es mayor si se consideran todos los esfuerzos que agotan la sección (flector, axil y cortante), y que el nivel de daño es similar para los modelos de *Bonora* y *Wang*, estando ligeramente por encima la curva del modelo de *Wang*. Cuanto mayor sea el nivel de daño mayor será la respuesta en desplazamientos del pórtico, lo cual concuerda con los resultados de la figura 6.28.

En la figura 6.30 se muestra una comparación del factor de carga del pórtico de la figura 6.5 empleando el modelo de cálculo para distintas funciones de agotamiento $(Z_{MD}, Z_{MND}, Z_{MNVD})$ y la función de disipación de *Bonora*. Como se muestra en la figura, para un nivel de carga dado la respuesta en desplazamientos es mayor en la medida que se contemplan los esfuerzos que agotan la sección. Por ejemplo para un factor de carga de $2,5$ la respuesta de desplazamiento será de 7mm, 7,1mm, 8mm y 8,1mm si se consideran los modelos de cálculo de rótula plástica, $MD_{2_{(MD)B}}$, $MD_{2_{(MND)B}}$, $MD_{2_{(MNVD)B}}$, respectivamente.

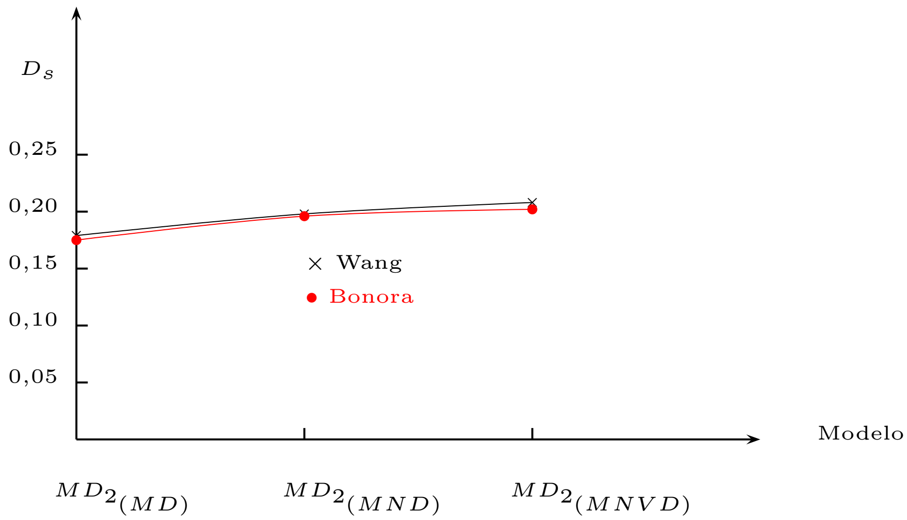


Figura 6.29: Daño de la sección 3 del pórtico

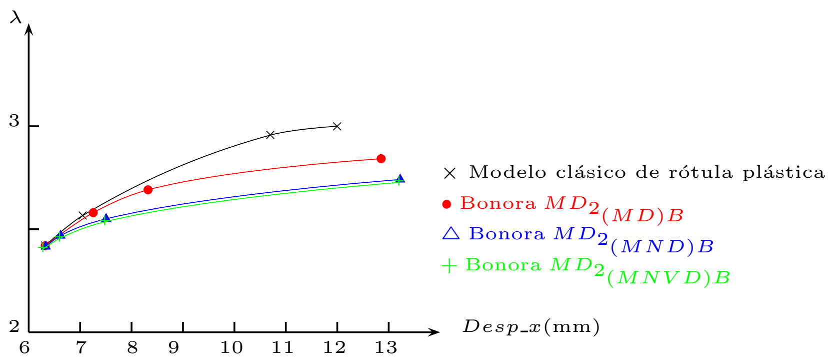


Figura 6.30: Carga de colapso-desplazamiento horizontal del nodo 4

En la figura 6.31, se muestra una comparación del factor de carga del pórtico de la figura 6.5 empleando las funciones de disipación de *Bonora*, *Wang*, *Lemaitre* y *Chandrakanth* con la función de agotamiento Z_{MNVD}. El mayor nivel de daño es alcanzado en la sección 3 del pórtico y es del orden 20 % (figura 6.32) con el modelo de *Wang*. Como se aprecia en la figura 4.8, para igual nivel de daño de la sección D, la respuesta en desplazamiento se hace cada vez mayor al emplear los modelos con funciones de disipación en el siguiente orden: *Chandrakanth*, *Lemaitre*, *Bonora* y *Wang*.

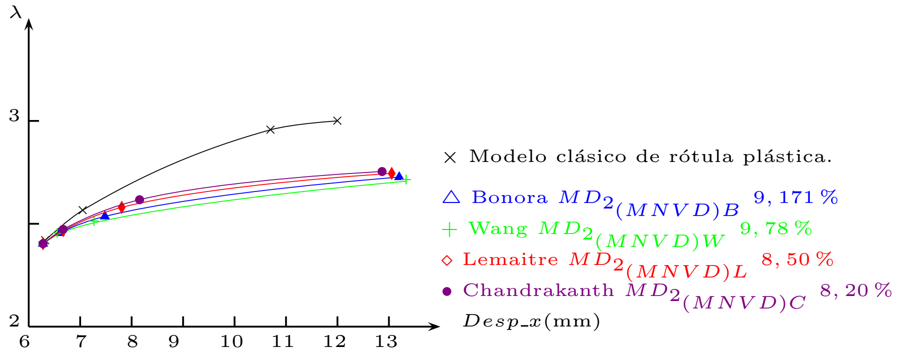


Figura 6.31: Factor de carga-desplazamiento horizontal del nodo 4

En la figura 6.32 se muestra la variación del daño de la sección 3 al emplear las distintas funciones de disipación y distintas funciones de agotamiento.

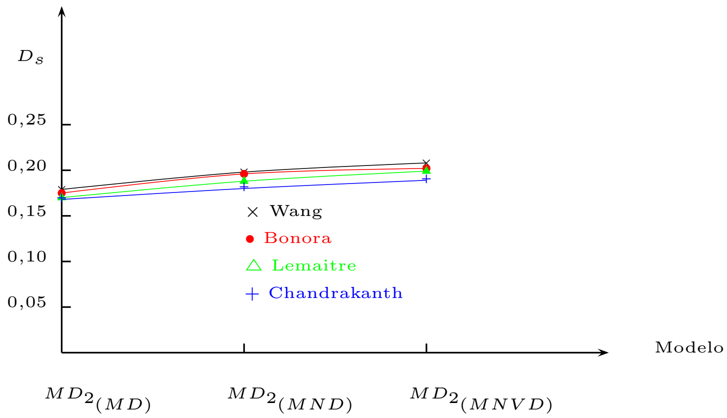


Figura 6.32: Daño de la sección 3 del pórtico

6.3.3. Modelo de daño basado en la relación $\sigma - \epsilon$ elastoplástica ideal (MD_1): Aplicación numérica

Se analiza, a continuación, el mismo pórtico con el modelo MD_1 y se realiza una comparación de los resultados obtenidos con los resultados del modelo de análisis estructural basado en la *mecánica del daño continuo* $MD_{2_{(MD)}}$ con función de disipación de *Bonora*.

En la tabla 6.5 y 6.6 se muestran los resultados del análisis para diferentes valores de la relación entre la deformación elástica y la de rotura n_s, al igual que los datos correspondientes al Modelo Clásico de Rótula Plástica R.P.

Tabla 6.5: Resumen de resultados del modelo MD_1

Sección Agotada	Modelo Clásico Rótula Plástica(R.P)		Modelo MD_1							
			$n_s = 2$		$n_s = 10$		$n_s = 50$		$n_s = 100$	
	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)
	0,00000	0,000000	0,00000	0,000000	0,00000	0,000000	0,00000	0,000000	0,00000	0,000000
5	2,42000	0,006320	2,33042	0,006304	2,41338	0,006304	2,41974	0,006321	2,41997	0,006321
4	2,56613	0,007050	2,47111	0,006668	2,48666	0,006668	2,49321	0,006686	2,56603	0,007047
3	2,95675	0,010700	2,69940	0,008507	2,68463	0,008507	2,69166	0,008529	2,80247	0,009243
1	3,00000	0,012000	2,80387	0,012728	2,82610	0,012727	2,83353	0,012598	2,91120	0,012486
	% Variación R.P		6,54		5,80		5,55		2,96	

Tabla 6.6: Daño de las secciones agotadas

Sección Agotada	Modelo MD_1 Daño de las secciones		
	$n_s = 2$	$n_s = 10$	$n_s = 50$
5	0,25546	0,17429	0,17422
4	0,25404	0,14011	0,14001
3	0,00783	0,01003	0,01000
1	0,00000	0,00000	0,00000

De la comparación de la tabla 6.5 y de la figura 6.33 se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Los resultados cualitativos (orden de aparición de las rótulas plásticas) son los mismos tanto para el estudio con el modelo MD_1 como para el método clásico de rótula plástica.
- Cuando n_s tiende a infinito, los resultados se acercan a los resultados obtenidos con el modelo clásico, caso en el que la relación M/M_p tiende a 1 y el daño a 0.
- Para valores pequeños de n_s el daño de la sección es mucho mayor. Por tanto, la capacidad resistente disminuye, de ahí la disminución del factor de carga.
- La carga de colapso obtenida, considerando plasticidad por flector y daño, es sustancialmente menor comparada con la obtenida con el método clásico de análisis plástico de rótula plástica y depende de la relación entre las deformaciones (n_s).

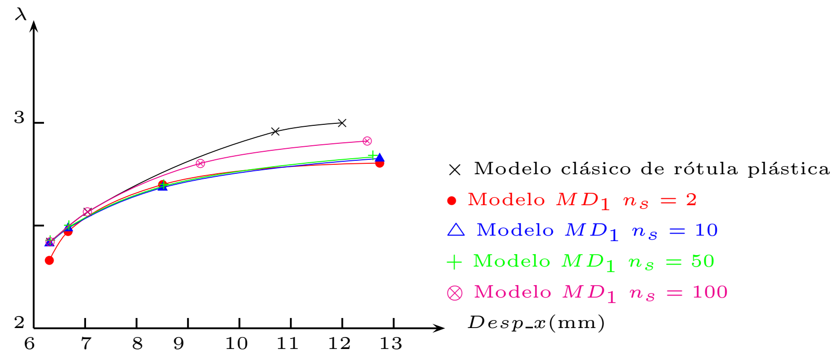


Figura 6.33: Carga de colapso-desplazamiento lateral del nodo 4

En la figura 6.34 se muestra la evolución del daño de la sección 5 hasta alcanzar la carga de colapso del pórtico para diferentes valores de n_s.

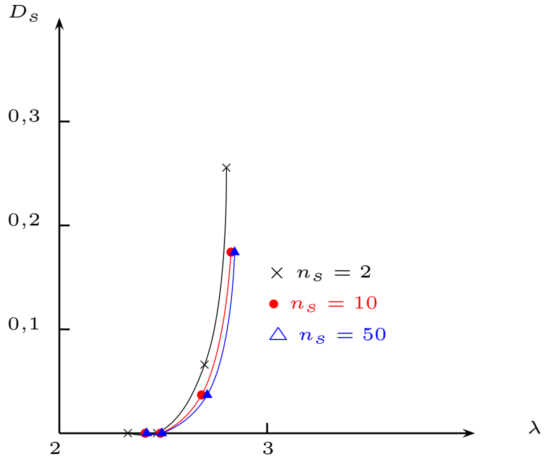


Figura 6.34: Factor de carga-evolución del daño sección 5

En la tabla 6.7 se presenta la comparación de los resultados entre el modelo MD_1 y el modelo de plasticidad acoplada con daño $MD_{2_{(MD)}}$. Para considerar la evolución del daño del material, a medida que se incrementa la deformación plástica acumulada, se ha empleado la función de disipación de daño de *Bonora* $MD_{2_{(MD)B}}$.

Tabla 6.7: Plasticidad por momentos. Modelo MD_1 vs $MD_{2_{(MD)B}}$

Modelo Clásico Rótula plástica. R.P		Plasticidad acoplada con daño Bonora $MD_{2_{(MD)B}}$		Modelo MD_1 $n_s = 10$	
λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)	λ	u_x (nodo 4)
0,00000	0,000000	0,00000	0,000000	0,00000	0,000000
2,42000	0,006320	2,42005	0,006321	2,41338	0,006304
2,56613	0,007050	2,58005	0,007255	2,48666	0,006668
2,95675	0,010700	2,69105	0,008320	2,68463	0,008507
3,00000	0,012000	2,84205	0,012853	2,82610	0,012727
% Variación R.P		6,54		5,80	

En la figura 6.35 es posible apreciar que no existe mucha diferencia entre el modelo de plasticidad acoplada con daño $MD_{2_{(MD)B}}$ y el modelo de MD_1. Los porcentajes de desviación de la carga de colapso obtenida con el modelo que involucran la función de disipación del daño de *Bonora* $MD_{2_{(MD)B}}$ y el modelo MD_1, respecto al método de análisis plástico clásico (rótula plástica), son del orden de $5,27\,\%$ y $5,55\,\%$, respectivamente. El daño máximo de las secciones, con el modelo de $MD_{2_{(MD)B}}$, puede alcanzar valores de $0,201$ en el extremo 1 de la barra 4 y, con el modelo MD_1, de $0,174$ en el extremo 2 de la barra 4.

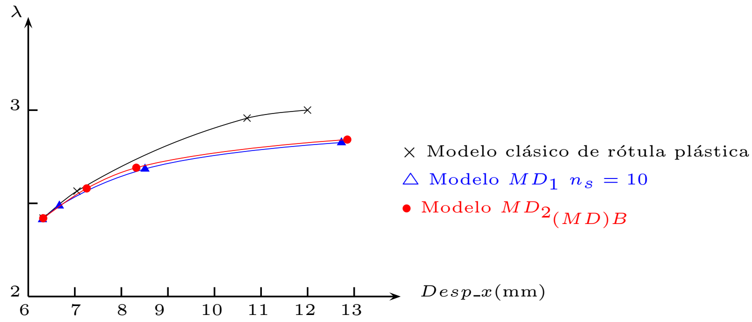


Figura 6.35: Carga de colapso-desplazamiento lateral del nodo 4

6.4. Segundo ejemplo

El segundo ejemplo corresponde a un pórtico con cargas verticales en los nodos 2, 3 y 4, y carga horizontal en el nodo 4; todas ellas de magnitud igual a P. El momento plástico de las secciones de la barra es igual a $M_p = 62500Nm$. Se ha determinado la carga de colapso del pórtico empleando el método clásico de rótula plástica, plasticidad acoplada $MD_{2_{(MNV)}}$ y plasticidad acoplada con daño $MD_{2_{(MNVD)}}$.

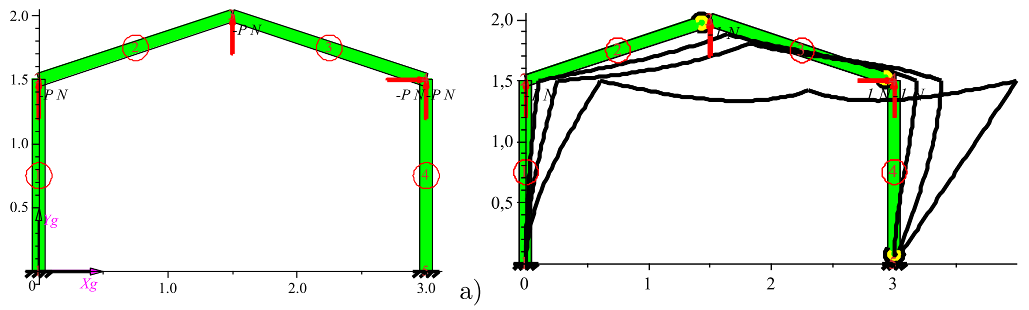


Figura 6.36: a) Pórtico plano con cargas puntuales, b) Deformada del pórtico

La secuencia de plastificación del pórtico es para todos los casos : barra 4 extremo 2, barra 4 extremo 1, barra 3 extremo 1 y barra 1 extremo 1. En la tabla 6.8 y en la figura 6.37 se muestra la comparación entre los métodos empleados para determinar la carga de colapso.

La pérdida de rigidez que sufre el pórtico por la acumulación de deformación plástica influye en la carga última de colapso. En la tabla 6.8 se puede identificar el porcentaje de variación de esta carga con respecto a la carga que resulta del análisis plástico convencional que involucra el concepto de rótula plástica; por ejemplo, el error es del 13 % cuando se considera plasticidad acoplada con daño y la función de disipación de *Wang*.

Para un nivel de carga dado la respuesta en desplazamiento es mayor si se considera el daño que puede llegar a alcanzar el pórtico. Por ejemplo, para una carga de 105KN los dezplazamientos obtenidos son 20mm, 24mm, 34mm, 43mm para los modelos de rótula plástica, $MD_{2_{(MNV)}}$, $MD_{2_{(MNVD)B}}$ y $MD_{2_{(MNVD)W}}$, respectivamente.

Tabla 6.8: Comparación de análisis plástico

Modelo Clásico (Rotula Plástica) R.P		Plasticidad Acoplada $MD_{2_{(MNV)}}$		Plasticidad Acoplada con Daño Bonora $MD_{2_{(MNVD)B}}$		Plasticidad Acoplada con Daño Wang $MD_{2_{(MNVD)W}}$.	
P	u_x (nodo 4)	P	u_x (nodo 4)	P	u_x (nodo 4)	P	u_x (nodo 4)
0,0	0,000000	0,0	0,00000000	0,0	0,0000000	0,0	0,00000000
84325,4	0,015400	84054,8	0,01530800	84054,8	0.0153080	84054,8	0.01530800
95670,6	0,019700	89503,5	0,01739040	87938,7	0,0170761	87173,2	0.01692250
110337,0	0,034300	95064,0	0,02294040	91840,2	0.0217459	90271,8	0,02116890
114583,0	0,058900	103487,0	0,07170910	100911,0	0,0882084	99657,2	0,11897700
% Variación R.P		9,7		11,9		13,0	

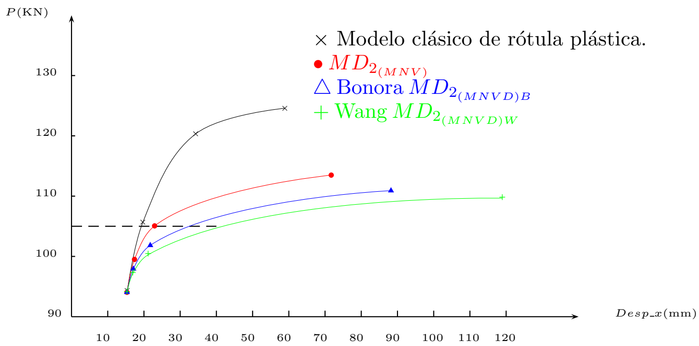


Figura 6.37: Carga de colapso-desplazamiento lateral del nodo 4

6.5. Tercer ejemplo

En el siguiente ejemplo se determina la carga de colapso del pórtico mostrado en la figura 6.38 considerando la posible degradación de las secciones transversales de las barras por acumulación de deformación plástica, de forma análoga a los ejemplos anteriores. La distancia entre pilares es de 6m y su altura es de 4m. Las barras que conforman el pórtico tienen un área de $0,01m^2$ e inercia igual a $8,333 \times 10^-6m^4$. Los parámetros del material utilizado corresponden al acero 1045: $E = 200GPa$, $\sigma_f = 250MPa$, $p_{cr} = 1,4$, $p_{th} = 0,259$, $\alpha = 0,2175$, $D_o = 0$, $D_{cr} = 1$ y $n = 0,0006$.

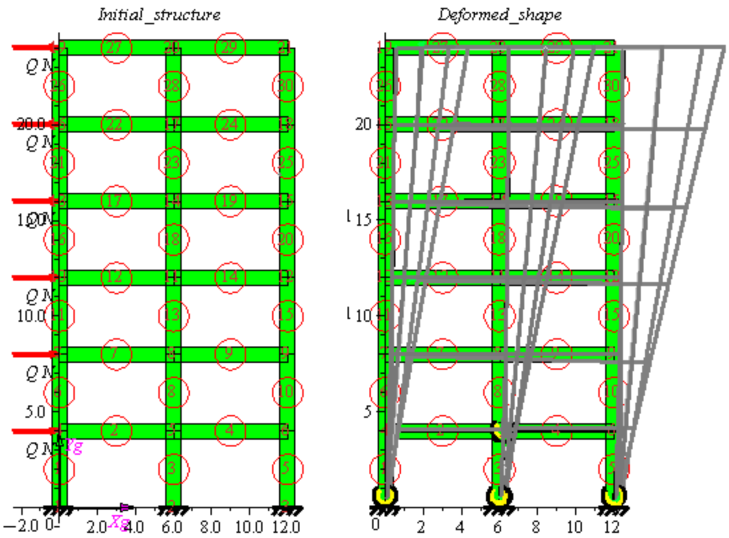


Figura 6.38: Pórtico plano

En la figura 6.39 se comparan los resultados obtenidos a partir de un estudio con modelo de comportamiento elastoplástico del material y función de plastificación dependiente de la combinación de momento flector y esfuerzos axil y cortante con el modelo de comportamiento elastoplástico degradable. Las funciones de disipación que han sido empleadas corresponden a los modelos de *Bonora* $MD_{2_{(MNVD)B}}$ y *Wang* $MD_{2_{(MNVD)W}}$.

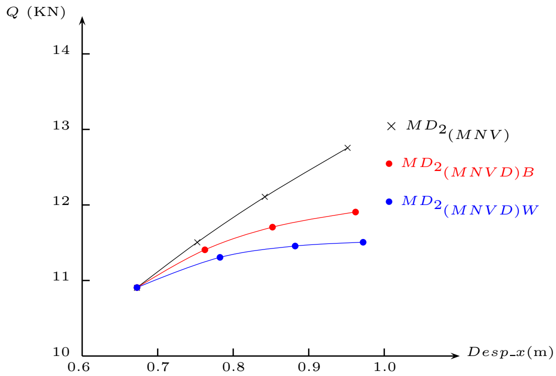


Figura 6.39: Comparación de resultados. Carga de colapso-u_x del nodo 21

Como era de esperar, la carga de colapso del pórtico es menor calculada con los modelos que tiene en cuenta la degradación del material ($MD_{2_{(MNVD)B}}$ y $MD_{2_{(MNVD)W}}$). La diferencia radica en la mayor flexibilidad del modelo elastoplástico degradable $MD_{2_{(MNVD)}}$ frente al modelo elastoplástico $MD_{2_{(MNV)}}$. La secuencia de plastificación (barra-extremo) es la siguiente $(3-2)$, $(1-1)$, $(5-2)$ y $(3-1)$.

El daño acumulado D, en cada una de estas secciones es $0,743$, $0,645$, $0,226$ y 0; respectivamente. En la tabla 6.9 se muestra una comparación de los resultados obtenidos.

Tabla 6.9: Comparación de análisis plástico

Plasticidad Acoplada		Plasticidad Acoplada con Daño			
$MD_{2(MNV)}$		Bonora $MD_{2(MNVD)B}$		Wang $MD_{2(MNVD)W}$.	
Q	u_x (nodo 4)	Q	u_x (nodo 4)	Q	u_x (nodo 4)
0,0	0,000000	0,0	0,000000	0,0	0,000000
10,90617	0,672595	10,90617	0,672595	10,90617	0,672595
11,50617	0,752504	11,40617	0,762504	11,30617	0,782504
12,10617	0,841943	11,70617	0,85203	11,45617	0,88203
12,75617	0,951677	11,90617	0,962017	11,50617	0,972017
% Variación		6.7		9.8	

Capítulo 7
Conclusiones y desarrollo futuro

Capítulo 7

Conclusiones y desarrollo futuro

7.1. Introducción

A continuación se presentan las conclusiones más importantes obtenidas de la investigación. Seguidamente, se hace referencia a las aportaciones originales incluidas en el presente trabajo y las limitaciones del modelo desarrollado. Por último, se exponen unas posibles líneas de desarrollo futuro.

7.2. Conclusiones de la investigación

La *mecánica del daño continuo* (CDM), iniciada por *Kachanov*, fue formulada en el marco de la *mecánica de los medios continuos*. La idea fundamental es la introducción de una nueva variable interna que mide el estado de degradación local del material: la variable daño.

Los desarrollos incluidos en esta Tesis Doctoral constituyen una tentativa para introducir los métodos y las nociones de la CDM en el análisis de sistemas estructurales en dos dimensiones, discretizados en elementos tipo barra, con comportamiento no lineal del material. El enfoque empleado es similar al de los modelos de plasticidad concentrada. Es decir, se considera que el comportamiento inelástico se concentra en los extremos de las barras o elementos que constituyen la estructura. Se analiza el comportamiento no lineal del material mediante un estudio elastoplástico en términos de los esfuerzos flector, axil y cortante, de forma acoplada, permitiendo el análisis y la comparación de combinaciones entre ellos, además de la influencia del daño del material.

Existen en la literatura otros modelos que incluyen la degradación de rigidez. La diferencia entre éstos y el trabajo aquí presentado consiste en el uso de los conceptos de la CDM y de la termodinámica de medios continuos para definir el modelo de comportamiento de pórticos en términos de variables de estado y sus variables termodinámicas asociadas, ecuaciones de estado y leyes de evolución del daño, etc. De esta manera, tal vez se obtenga una mayor generalidad y simplicidad en la formulación del modelo. El método consiste en introducir un conjunto de variables internas en las ecuaciones constitutivas de comportamiento del elemento barra; el daño, que mide la pérdida de rigidez de cada una de las barras de la estructura. La dependencia de estas variables con respecto a la historia de deformaciones de cada barra se describe mediante las leyes de evolución del daño propuestas en los modelos micro-mecánicos de la *mecánica del daño continuo*, tales como el modelo de *Bonora*, entre otros.

El modelo desarrollado no se propone para un material en particular. Por el contrario, se ha desarrollado un marco teórico general en el que se pueda incluir cualquier modelo específico de daño que se desee modelar.

La incorporación de la variable daño en un modelo de cálculo estructural de barras por métodos matriciales o por el *método de elementos finitos*, conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas que puede escribirse en la forma $KU = F$. En esta expresión U y F son los vectores que, respectivamente, contienen los desplazamientos incógnitas en una serie de puntos de la estructura (nodos) y las fuerzas exteriores aplicadas en dichos puntos; K es la matriz de rigidez del modelo estructural que depende de la geometría de la estructura, de las propiedades mecánicas del material y, por tanto, del parámetro daño D en cada punto. En nuestro modelo, esta matriz es llamada *elastoplástica degradable.* Al evolucionar el parámetro daño, desde un valor inicial nulo hasta un determinado valor debido al deterioro del material, se produce la disminución correspondiente de la rigidez de la barra y, por tanto, de la rigidez global de la estructura. Esto se traduce en un incremento progresivo de los desplazamientos al aumentar la carga hasta el colapso.

El modelo de daño requiere el conocimiento del parámetro de daño D en cada instante de tiempo. Existen técnicas para estimar la evolución de D en función de la energía de deformación de la sección dañada y de parámetros del material obtenidos a través de sencillos ensayos de rotura de probetas por tracción. En este trabajo se han empleado funciones experimentales obtenidas por diversos autores en el marco de la CDM.

El análisis se ha desarrollado de forma cuasiestática mediante métodos incrementales. Este proceso de análisis posibilita la determinación de la carga y la posición de las distintas secciones agotadas según van apareciendo. En cada incremento se ha utilizado el método de *Newton-Raphson* para conseguir, dentro de una tolerancia, satisfacer todas las ecuaciones que rigen el problema no lineal.

El estudio de la no linealidad del material se ha desarrollado considerando comportamiento elastoplástico asociado a la función de agotamiento, en el que se han tenido en cuenta las funciones y la tolerancia de agotamiento de la sección definidas por el usuario.

Las funciones de agotamiento se han obtenido para el caso particular de sección rectangular, analizando los distintos estados de tensiones, dependientes de las combinaciones de esfuerzos que la solicitan y del daño alcanzado por la acumulación de deformación plástica, que llevan a la sección hasta su estado de agotamiento. El comportamiento elastoplástico asociado permite determinar la interrelación de los distintos esfuerzos que se consideren en el estudio para la obtención de los desplazamientos acoplados de las secciones agotadas de las barras. La determinación de forma independiente de las distintas funciones de agotamiento permite la comparación de resultados entre las distintas hipótesis.

Todos los análisis y procesos anteriormente indicados se han implementado en el software *MAPLE V*, lo cual facilita el preprocesado, cálculo y postprocesado de los datos que definen el pórtico objeto de estudio. El postprocesado de resultados permite representar gráficamente la evolución de todo tipo de resultados (desplazamientos, esfuerzos, daño, etc.).

Todo lo anterior permite realizar análisis comparativos de resultados para distintos modelos de cálculo aplicados a un mismo sistema, considerando distintos esfuerzos en el estudio, lo cual lleva a distintas funciones de agotamiento.

La no linealidad física corresponde a un material elastoplástico ideal con plasticidad asociada. Con la hipótesis de plasticidad concentrada en las secciones extremas del elemento y acoplada al daño de las mismas se deriva la matriz elastoplástica degradable.

7.3. Aportaciones originales

Las contribuciones originales más importantes desarrolladas en la presente tesis son:

1. Obtención de un modelo computacional mecánico sistemático que permite predecir el estado último de cargas de una estructura de barras plana, mediante un proceso de análisis incremental e iterativo, utilizando descomposición aditiva del movimiento en sus componentes elástica y plástica, determinando las secciones agotadas según distintas hipótesis de fluencia, procesos de carga variable respecto del pseudotiempo, y considerando la pérdida de rigidez del material debido al aumento de la deformación plástica. Para ello, se ha obtenido la matriz de rigidez elastoplástica degradable del elemento barra 2D a partir de distintos modelos teóricos.

2. La determinación de la función de agotamiento en términos de los esfuerzos flector, axil y cortante, y la variable daño acoplados.

3. Uso del concepto de sección agotada en lugar del clásico de rótula plástica desarrollado a partir de la propuesta inicial de “sección plastificada” [92].

4. Uso del concepto de “desplazamientos relativos acoplados” en lugar de giro en la rótula plástica.

5. Distintos procesos numéricos y algoritmos informáticos. Toda la aplicación se ha desarrollada en *MAPLE V* especificamente con el objetivo propuesto en esta tesis.

Todo esto permite dar entidad a un nuevo elemento finito “Barra elastoplástica 2D degradable” con dos nodos extremos y con seis grados de libertad $(u_{x1}, v_{y1}, \theta_{z1}, u_{x2}, v_{y2}, \theta_{z2})$. Para dicho elemento se ha deducido su matriz de rigidez y los correspondientes vectores de fuerza de empotramiento para distintos casos de cargas interelementales; y todo ello con posibilidad de seleccionar el modelo de daño que se quiera incorporar.

7.4. Limitaciones del modelo

Tanto el modelo teórico desarrollado como la aplicación informática han tenido como objetivo el inicialmente marcado: *estudio del comportamiento último de pórticos bajo cargas cuasiestáticas*. Son numerosas las limitaciones y varios los fenómenos que no se incluyen, tales como endurecimiento cinemático, resistencia residual, respuesta ante cargas cíclicas, dinámicas, etc. Se deben verificar las relaciones constitutivas para el caso de otro tipo de secciones transversales, comunes en la práctica de la Ingeniería Estructural y no consideradas en el desarrollo de este modelo en particular.

Liberar algunas de las hipótesis asumidas e incorporar alguno de los fenómenos no estudiados, con el fin de ampliar el rango de aplicación del modelo, puede dar lugar a las líneas de desarrollo futuro que se indican en el siguiente apartado. De la exposición de las líneas de desarrollo futuro se deducen las limitaciones de la formulación que se presenta en esta tesis.

7.5. Posibles líneas de desarrollo futuro

Para finalizar, se proponen a continuación distintas líneas de desarrollo del trabajo y un breve comentario tanto en lo que se refiere a su desarrollo teórico como en cuanto a su implantación en ordenador:

1. Ampliación del estudio a otros tipos de secciones como los perfiles laminados normalizados y perfiles tubulares. Serían necesarios estudios de plastificación completa de la sección y su

implantación en el proceso informático sería sencillo. No obstante es posible que antes de la plastificación completa aparezcan fenómenos locales de abolladura que, en principio, no pueden ser tratados con la formulación presentada.

2. Estudio de la aplicabilidad de funciones de agotamiento empíricas o semiempiricas para cada tipo de sección real en base a ensayos reales. Ensayando una barra de una determinada sección bajo distintas solicitaciones de esfuerzos flector, axil y cortante se puede obtener una nube de puntos a la que ajustar la función adecuada. Sin embargo, esa función recogería no sólo la plasticidad ideal, sino también el endurecimiento y posiblemente el daño y los fenómenos locales de abolladura. El uso de la función, así determinada como función de agotamiento, en la formulación presentada arrojaría unos resultados sobre el comportamiento de la estructura que habría que comparar con ensayos experimentales. No obstante, se prevé que sean satisfactorios.

3. Ampliación del proceso analítico al caso de endurecimiento. Modificación fácilmente realizable que llevaría asociado un análisis de sus repercusiones en los procesos de carga y descarga.

4. Determinación de las fuerzas de empotramiento para barras con posibilidad de daño en los extremos. El procedimiento será, en todo, similar al desarrollado por *Terán* [92].

5. Influencia de la temperatura. A este respecto, tres son las líneas de desarrollo:

    - Tratamiento de las cargas térmicas sobre barras tanto por temperatura media como por gradiente a lo largo del canto. El tratamiento se prevé que sea similar al de estructuras lineales y su adaptación al caso elastoplástico con daño será mediante los métodos indicados en [92], como se ha indicado en el caso anterior.
    - La tensión de fluencia del material (σ_f) y el módulo de Young (E) varían con la temperatura (T). Esto hace que los esfuerzos plásticos (M_p, N_p y V_p) y la función de agotamiento (Z) dependan de ella con variación no lineal, lo cual acentúa la necesidad de utilizar un planteamiento paso a paso en el proceso, además es probable que haya que utilizar funciones de disipación especiales adaptadas, dependientes de la temperatura. Por este camino se podría calcular la temperatura máxima (situación de incendio) que es capaz de aguantar una estructura sometida a unas determinadas acciones exteriores.
    - Termodinámicamente, la plasticidad y el daño son procesos disipativos. El calor generado puede suponer una carga térmica a tener en cuenta.

6. Ampliación del estudio al caso de inestabilidad tanto local como global.

7. Ampliación del estudio al caso de carga y descarga.

8. Aplicación al comportamiento dinámico del sistema.

9. Ampliación del estudio al caso de sistemas de barras tridimensionales. Esta modificación conllevaría una reestructuración profunda tanto de los procesos teóricos, con la determinación de la función de agotamiento en función de todos los esfuerzos $Z(M_T, M_y, M_z, N_x, V_y, V_z, D)$, como del programa de cálculo.

Apéndices

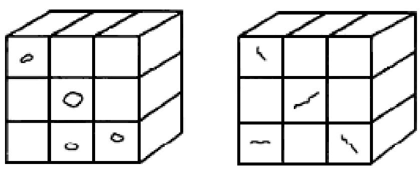
Apéndice A. Medidas del daño

El daño de un material puede ser medido directa o indirectamente [28]. Las medidas directas consisten en medir el área efectiva del EVR definida por el vector normal $\vec{n}$ a la superficie (figura 3.8). Para las medidas indirectas se debe analizar la relación que hay entre una medida física elegida para representar el fenómeno de degradación y la variable daño. Habiendo aceptado los conceptos de tensión efectiva y deformación equivalente, las propiedades físicas medibles deben estar asociadas al acoplamiento que existe entre el daño y la deformación, de ahí que la variación de las propiedades mecánicas debida al daño pueda ser una forma de identificar éste.

Medidas directas del daño

1. **Micrografía de la observación de imágenes**

   Para evaluar el daño, de acuerdo a su definición, se necesita un modelo micro-mecánico de volumen del elemento. Figura A.1.



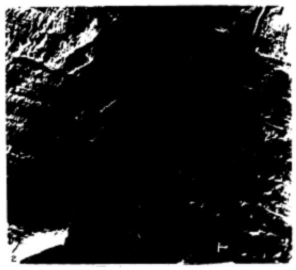
Fuente: Lemaitre [28]

Figura A.1: Modelo micro-mecánico de micro-cavidades y micro-grietas

Si el daño se presenta en forma de cavidades (figura A.1), el modelo macroscópico se compondrá de celdas sobre las cuales existe una cavidad esférica.

En este caso, el área efectiva coincide con el área de intersección de las cavidades en el plano de la figura. Un ejemplo tomado de la referencia [29] se muestra en la figura A.2, donde se observan las micro-cavidades dúctiles de una aleación de acero.

En el plano de la figura el área nominal es $1163mm^2$ y el área de micro-cavidades es $11,317mm^2$. De esta manera, el daño relativo al plano normal a la figura es $D \cong 0{,}1$.



Fuente: Lemaitre [28]

Figura A.2: Evaluación del daño dúctil sobre una aleación de acero

Si el daño se presenta en forma de micro-grietas (figura A.1), el modelo macroscópico se compondrá de celdas sobre las cuales existe una superficie plana, circular o cuadrada, de grietas orientadas aleatoriamente. Por lo tanto, no es muy probable encontrar ni siquiera una sóla grieta en el plano de intersección, y deben usarse algunas equivalencias. La mejor forma de hacerlo es plantear que la energía implicada en el crecimiento de una grieta, según la mecánica de la fractura, es igual a la energía implicada en el daño equivalente de una celda, tomando como referente la *mecánica del daño*. Primeramente, se considera una sóla celda de tamaño d_c (volumen d_c^3) con una grieta de área a^2 creada por una fractura frágil. Si G_c es la tenacidad del material, la cantidad de energía disipada en ese proceso, calculada según la mecánica de la fractura, es

$$W = G_c a^2 \tag{A.1}$$

Posteriormente, se considera, la misma celda uniformemente dañada por daño frágil isotrópico, de tal manera que se disipa la misma energía W. Las variables Y_c y D son definidas de manera que $Y\dot{D}$ es la potencia disipada por unidad de volumen durante el proceso de daño. Para el daño frágil, Y es una constante e igual a su valor critico Y_c. Por tanto, la cantidad de energía disipada de un volumen dañado d_c^3 es

$$W = Y_c D d_c^3 \tag{A.2}$$

Igualando las expresiones A.1 y A.2 obtenemos la relación entre la variable daño y el área de las grietas

$$D = \frac{a^2 G_c}{Y_c d_c^3} \tag{A.3}$$

Es posible ver que el daño es igual al área relativa de la grieta a^2/d^2 multiplicada por el factor de correlación G_c/Y_{cd}. El área efectiva A_{eff} de una superficie de grietas a^2 es

$$A_{eff} = \frac{a^2 G_c}{Y_c d_c} \tag{A.4}$$

La evaluación del factor de corrección requiere del conocimiento de:

- El valor crítico de la tasa de energía de deformación, que puede ser deducido de la tenacidad K_{ic} por la siguiente expresión
$$G_c = \frac{K_{ic}^2}{E}\left(1 - \nu^2\right) \tag{A.5}$$
Se asume la condición de deformación plana. Para los materiales en ingeniería, la constante K_{ic} puede ser hallada tabulada en un buen libro de mecánica de la fractura.
- El valor crítico de la tasa de energía de deformación puede ser calculado de la condición de ruptura de un ensayo de tensión [52]
$$Y_c = \frac{\sigma_u^2}{2E\left(1 - D_{cr}\right)^2} \tag{A.6}$$
donde σ_u es el esfuerzo último a la ruptura y D_c es el valor crítico del daño cuando ocurre la falla en tensión. Pocos autores dan este valor, y toman $D_{cr} = 0{,}5$ si no se conoce.
- El tamaño de las celdas o de los granos para metales es conocido. Considerando un volumen microscópico de tamaño $l \times l \times d_c$, con celdas de tamaño $d_c \times d_c \times d_c$; el número de celdas es igual a l^2/d_c^2. Si el daño es isotrópico, se puede afirmar que el daño del elemento de volumen se toma como el valor medio del daño de todas las celdas
$$D = \frac{\sum \frac{a_i^2 G_c}{Y_c d^3}}{\text{número de celdas}} \tag{A.7}$$

Prácticamente, si el tamaño d_c de las celdas (o de los granos para metal) no difiere mucho del analizado en la figura, y como G_c y Y_c no dependen de dichas celdas, se tiene que

$$D = \frac{d_c^2}{I^2}\frac{G_c}{Y_c d_c^3}\sum a_i^2 \tag{A.8}$$

$$D = \frac{G_c}{Y_c l^2 d_c}\sum a_i^2 \tag{A.9}$$

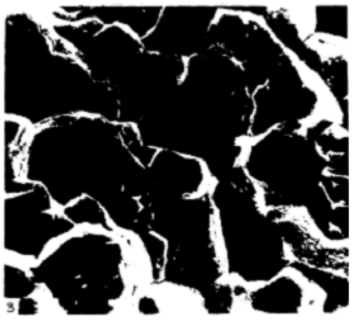
Con esto es posible desarrollar una expresión fácil de usar para determinar el daño. Considerando que el volumen está completamente dañado cuando $D = 1$ o se rompe cuando todas las celdas se rompen por grietas de tamaño d_c^2

$$\sum a_i^2 = d_c^2 \frac{l^2}{d_c^2} = l^2 \tag{A.10}$$

$$1 = \frac{G_c}{Y_c l^2 d_c} l^2, \frac{G_c}{Y_c} = d_c \tag{A.11}$$

y

$$D = \frac{\sum a_i^2}{l^2} \tag{A.12}$$



Fuente: Lemaitre [28]

Figura A.3: Evaluación del daño dúctil sobre un acero martensítico

Un ejemplo tomado de la referencia [29] se da en la figura A.3. Medida de la figura a una escala 1 : 1, $\sum a_i^2 = 9000mm^2$ y $l^2 = 10,200mm^2$. Por lo tanto, el daño isotrópico equivalente es $D = 0{,}88$.

2. **Variación de la densidad**

En el caso de daño dúctil, los defectos son cavidades que pueden ser asumidas como esferas. Esto significa que el volumen se incrementa con el daño. La correspondiente densidad se mide con aparatos basados en el *principio de Arquímedes* [64].

Si $(\bar{\rho} - \rho)/\rho$ es la variación relativa de la densidad entre el estado dañado ($\bar{\rho}$) y el estado inicial no dañado (ρ), por medio de la micro-mecánica, considerando una cavidad esférica de radio (r) en un elemento de volumen esférico de inicial radio (R_i) y masa (m), es fácil derivar la siguiente relación entre el daño D de la superficie dañada y la variación de la densidad o porosidad [6], asumiendo que no hay micro-esfuerzos residuales

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R_i^3} \tag{A.13}$$

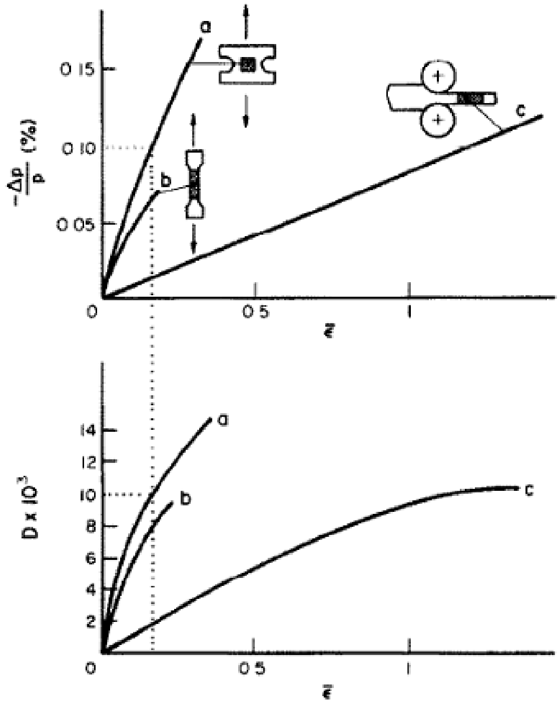
$$\bar{\rho} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi \left(R_i^3 + r^3\right)} \tag{A.14}$$

$$\frac{(\bar{\rho} - \rho)}{\rho} = \frac{R_i^3}{R_i^3 + r^3} - 1 = -\frac{r^3}{R_i^3 + r^3} \tag{A.15}$$

$$D = \frac{\pi r^2}{\pi \left(R_i^3 + r^3\right)^{2/3}} = \left(\frac{r^3}{R_i^3 + r^3}\right)^{2/3} \tag{A.16}$$

$$D = \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)^{2/3} \tag{A.17}$$

Un ejemplo tomado de la referencia [64] se muestra en la figura A.4.



Fuente: Lemaitre [28]

Figura A.4: Evaluación del daño dúctil en aceros

Medidas indirectas del daño

1. **Variación del módulo de elasticidad**

   Partiendo de la expresión 3.20, es posible interpretar que el módulo de elasticidad de un material dañado es

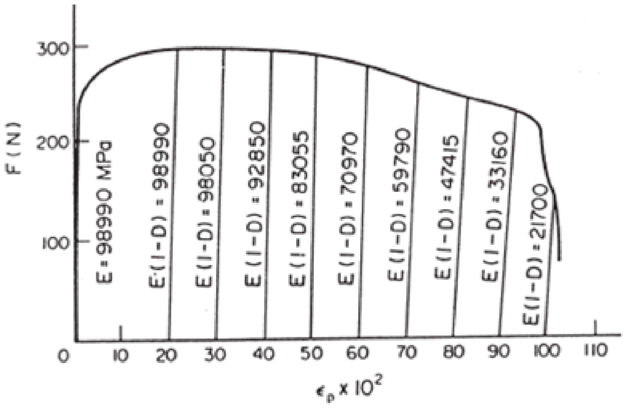
$$\bar{E} = E\,(1 - D) \tag{A.18}$$

   Conocido el módulo de elasticidad, se puede emplear cualquier medida de la variación de éste para determinar el valor del daño, ya que

$$D = 1 - \frac{\bar{E}}{E} \tag{A.19}$$

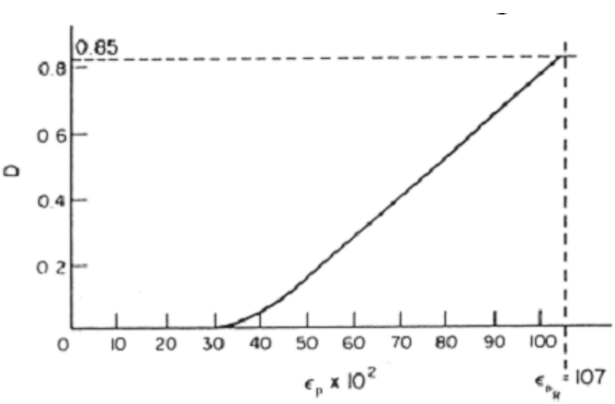
   El termino $\bar{E}$ se llama módulo de elasticidad efectivo del material dañado y se puede medir de un simple ensayo de tensión uniaxial con descargas, como el mostrado en la figura A.5.

   La expresión A.19 permite determinar la curva indicada en la figura A.6. Se puede proponer la expresión A.20 como la ley de evolución del daño, permitiendo la caracterización del comportamiento observado en la figura. A.6



Fuente: Lemaitre [28]

Figura A.5: Variación del módulo de elasticidad con el daño para el cobre. Modelo de *Lemaitre* y *Duffailly*



Fuente: Lemaitre [28]

Figura A.6: Daño dúctil como función de la deformación plástica. Modelo de *Lemaitre* y *Duffailly*

$$D = c\,(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \tag{A.20}$$

donde ε es la deformación plástica, y c y ε_{cr} son parámetros del material. La constante c representa la pendiente de la mejor línea recta que idealiza el comportamiento de la figura A.6 y ε_{cr} representa el valor crítico de la deformación plástica que caracteriza el comienzo del daño.

El método resulta muy simple; sin embargo, presenta el inconveniente de requerir equipos muy precisos para realizar medidas aceptables del módulo de elasticidad. Los parámetros del daño de diferentes materiales han sido medidos usando la expresión A.19 (Ver tabla A.1).

Tabla A.1: Coeficientes de daño [47]

Materiales	$T(^oC)$	ε_{th}	ε_{cr}	D_o	D_{cr}	α
AceroXC38	20	0.000	0.566	0	0.220	1.00
Acero 15MnVNRe	20	0.000	0.172	0	0.295	1.00
Aleación AUG1	20	0.000	0.250	0	0.230	1.00
Aleación INCO718	20	0.000	0.290	0	0.240	1.00
Acero 30CD4	20	0.000	0.370	0	0.240	1.00
Cobre 99	20	0.000	1.040	0	0.850	1.00
Aleación HAZ	20	0.000	0.036	0	0.189	0.60
Acero 1090	20	0.000	0.646	0	0.048	0.23
Acero 1015	20	0.171	1.394	0	0.220	0.46
Acero 1045	20	0.114	0.926	0	0.066	0.66

2. **Variación de la respuesta plástica cíclica.**

La influencia del daño en comportamiento plástico del material puede ser empleada para medir el daño por fatiga. Una ley de plasticidad cíclica se puede escribir de la siguiente forma

$$\Delta\varepsilon_p = \left(\frac{\Delta\sigma}{K_p}\right)^k \tag{A.21}$$

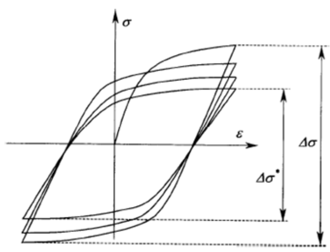
Kp y k son parámetros del material. En caso de considerar un material degradable, empleando la hipótesis de equivalencia en deformaciones, se obtiene que

$$\Delta\varepsilon_p = \left(\frac{\Delta\sigma}{K_p\,(1-D)}\right)^k \tag{A.22}$$

Realizando ensayos de ciclos con amplitud plástica constante y denotado por la amplitud de la tensión con el material ya degradado, es posible establecer la relación

$$D = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma^*} \tag{A.23}$$

que permite identificar el daño a partir de la pérdida de resistencia.



Fuente: Lemaitre [28]

Figura A.7: Determinación del daño mediante la caída de resistencia en carga cíclica

Otros medios de medición

Existen otras formas de determinar el daño a partir de medidas físicas: midiendo la variación en la velocidad de propagación de ondas de ultrasonidos, midiendo variaciones en el micro-endurecimiento, observando la variación de densidad del material o su resistencia eléctrica, o bien empleando técnicas de emisión acústica. La elección del método más apropiado depende tanto del tamaño de las microfisuras y cavidades como del tipo de daño (dúctil, frágil, etc.) que se pretenda identificar.

Apéndice B. Modelos de daño

Una aproximación razonable para determinar la respuesta de un material ante una cierta solicitación consiste, en primer lugar, en alcanzar una buena comprensión de los mecanismos físicos que determinan su respuesta y, en segundo lugar, en incorporar estos conocimientos a un modelo matemáticamente bien formulado. Esta formulación puede dar lugar a un modelo micro-mecánico en el que se analice en detalle un volumen representativo del material, teniendo en cuenta la geométrica y sus propiedades, que permita reproducir fielmente los mecanismos del daño y de la degradación que se producen. Muchos modelos han sido derivados de los conceptos descritos en la sección 3.3. La dificultad está en escoger la expresión analítica del potencial de disipación del daño (ϕ^*) y en la identificación de los parámetros en cada caso particular del daño. Para definir esta función es necesario medir el daño material. Puede ser empleada la variación del módulo de Young, considerando la ley de elasticidad acoplada con el daño. Partiendo de la expresión 3.20 es posible interpretar que el módulo de elasticidad de un material dañado es

$$\bar{E} = E(1 - D) \tag{B.1}$$

Conocido el módulo de elasticidad, cualquier medida de la variación de éste puede ser empleada para determinar el valor de daño, ya que

$$D = 1 - \frac{\bar{E}}{E} \tag{B.2}$$

El termino $\bar{E}$ es llamado módulo de elasticidad efectivo del material dañado y puede ser medido de un simple ensayo de tensión uniaxial con descargas. Algunos modelos de daño son descritos a continuación, sin embargo, cabe destacar que en la literatura existe un gran número de ellos que podrían ser citados.

Modelo de daño por plasticidad dúctil

El daño dúctil en metales es debido, esencialmente, a la iniciación y crecimiento de cavidades causadas por grandes deformaciones. Experimentos de ruptura dúctil muestran que el potencial de disipación del daño puede ser descrito por la siguiente expresión dada por *Lemaitre* [51]; autores como *Bonora*, *Wang* y *Chandrakanth*, entre otros, proponen una función de disipación distinta para determinar la evolución del daño del material. Dichas funciones han sido empleadas en el desarrollo de esta tesis

$$\phi^* = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{Y}{S_L}\right)^2 \frac{S_L}{1-D}\right] \tag{B.3}$$

De esta expresión

$$\dot{D} = -\frac{Y}{S}\dot{p} \tag{B.4}$$

S es una constante que depende del material y la temperatura. Si en la expresión para $(-Y)$, el termino $\sigma_{eq}/(1-D)$ es remplazado en función de p (deacuerdo a la ley de endurecimiento de plasticidad acoplada con daño: $\sigma_{eq}/(1-D) = kp^{1/M}$, donde k y M son coeficientes que dependen del material), se obtiene la siguiente ecuación diferencial constitutiva para la evolución del daño plástico dúctil [51]

$$\dot{D} = \frac{k^2}{2ES}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)^2\right] p^{2/M}\dot{p} \tag{B.5}$$

En el caso de carga radial, cuando la dirección principal de las tensiones no varía, la relación de triaxialidad $\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$ es constante. Esta expresión puede ser integrada usando las condiciones:

$p < p_{th}$ (umbral de deformación)$\rightarrow D = 0$

$p < p_{cr}$ (deformación de ruptura)$\rightarrow D = D_{cr}$

Descuidando la deformación elástica en el cálculo de p y usando la relación $[p_{th}/p_{cr} = \varepsilon_{th}/\varepsilon_{cr}]$, la ecuación para la evolución del daño D puede ser escrita en términos del umbral de deformación (ε_{th}) y la deformación de ruptura (ε_{cr}) del caso unidimensional

$$D = \frac{D_{cr}}{\varepsilon_{cr} - \varepsilon_{th}}\left\{p\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}})^2\right] - \varepsilon th\right\} \tag{B.6}$$

Modelo de daño por creep

Las exposiciones durante largo tiempo a temperaturas elevadas y tensión producen cambios en la estructura de un material, generación y crecimiento de defectos internos y, por lo tanto, un deterioro de las propiedades funcionales del mismo. Por ejemplo, en metales cargados a altas temperaturas (sobre 1/3 de la temperatura absoluta de fundición) se generan micro-grietas inter-cristalinas.

El modelo de *Kachanov* puede ser derivado de un potencial escrito de la forma

$$\phi^* = \frac{1}{\frac{r}{2}+1}\left(\frac{A^2}{2E}\right)\left(-Y\frac{2E}{A^2}\right)^{1+r/2} \tag{B.7}$$

De esta expresión se obtiene

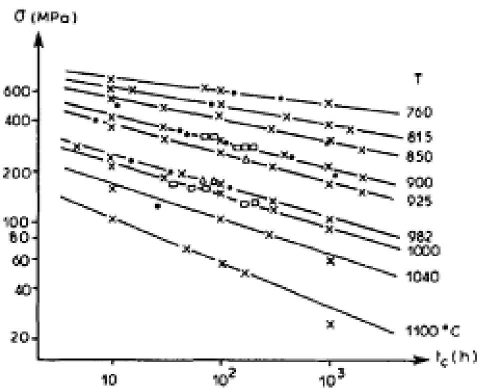
$$\dot{D} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = \left(-Y\frac{2E}{A^2}\right)^{r/2} = \frac{\sqrt{-2EY}}{A} \tag{B.8}$$

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma^*}{(1-D)A}\right)^r \tag{B.9}$$

donde σ^* es la tensión dañada equivalente, A y r son coeficientes que dependen del material y la temperatura De esta expresión es fácil calcular el tiempo t_c de iniciación de las macro-grietas por daño por creep en un punto donde el estado de tensiones es constante en el tiempo con las condiciones: $t = 0$, $D = 0$, $t = t_c$ y $D = D_{cr}$. Descuidando $(1 - D_{cr})^{r+1}$ en lo que se refiere a 1 da

$$t_c = \frac{1}{r+1}\left(\frac{\sigma^*}{A}\right)^2 \tag{B.10}$$

Esta expresión permite identificar los coeficientes A y r de un test de ruptura por creep unidimensional. Curvas de tensión-tiempo de ruptura por creep son mostradas en la figura B.1



Fuente: Lemaitre [51]

Figura B.1: Curvas de tensión-tiempo de ruptura para distintos grados de temperatura

Modelo de daño por fatiga

El daño por fatiga ocurre cuando los metales están sujetos a cargas periódicas o variables. La repetición del máximo valor de los esfuerzos induce micro-grietas, las cuales pueden ocurrir para valores de 10 a 10^4 ciclos en fatiga de bajo ciclo en rango elástico ó 10^5 a 10^7 ciclos en fatiga de alto ciclo en el rango elástico.

Se asume que el daño por fatiga está siempre asociado con un fenómeno de micro-plasticidad representado por una variable de deformación micro-plástica (p), pero no todas las características del fenómeno de fatiga pueden ser representadas por el potencial

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = \frac{S_o}{s_o+1}\left(\frac{-Y}{S_o}\right)^{s_o+1}\dot{p} \tag{B.11}$$

De la cual

$$\dot{D} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = \left(-\frac{Y}{S_o}\right)^{s}_{o}\dot{p} \tag{B.12}$$

S_o y s_o son coeficientes que dependen del material y la temperatura. Es más conveniente escribir estas ecuaciones en función de la tensión, lo cual puede hacerse reemplazando $\dot{p}$ por su valor tomado de la ley de endurecimiento, de forma similar al modelo de daño dúctil plástico. El resultado con $(M/K^M)(2ES_o)s_o = B_o, 2s_o + M - 1 = \beta_o$ es

$$dD = B_o\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}})^2\right]^{s}_{o}\sigma_{eq}^{\bar{B}_o}|d\bar{\sigma}_{eq}| \tag{B.13}$$

Si

$$\bar{\sigma_{eq}}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\frac{\sigma_m}{\sigma eq})^2\right] > \sigma_1 \tag{B.14}$$

$$dD = 0, si, \bar{\sigma_{eq}}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}})^2\right] \leq \sigma_1 \tag{B.15}$$

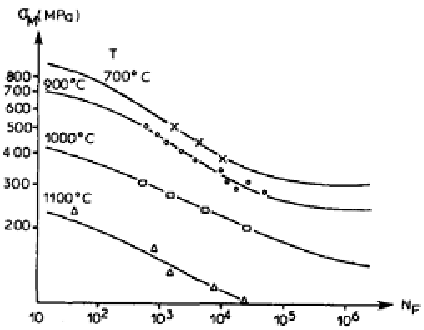
donde σ_1 es el comienzo del límite de fatiga, para obtener una clásica ecuación constitutiva para la fatiga (la cual da la variación del daño por ciclos $\frac{\delta D}{\delta N}$), el modelo ha sido integrado sobre un ciclo. Asumiendo una carga positiva y proporcional ($\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = $ cte) definido por el máximo σ_{eqM} y el mínimo σ_{eqm} valor de σ_{eq} y si $(1-D)^{\beta_o+1}$ es considerado constante, tenemos

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{2B_o\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}})^2\right]^{s_o}}{(\beta_o+1)(1-D)^{B_o+1}}(\sigma_{eqM}^{\beta_o+1} - \sigma_{eqm}^{\beta_o+1}) \tag{B.16}$$

El número de ciclos cuando ocurre la falla para una carga periódica definida por $(\sigma_{eqM}, \sigma_{eqm})$ es obtenido por integración de este modelo de ciclo para $N = 0 \rightarrow D = 0$ y $N = N_R \rightarrow D = 1$

$$N_R = \frac{(\beta_o+1)(\sigma_{eqM}^{\beta_o+1} - \sigma_{eqm}^{\beta_o+1})^{-1}}{2(\beta_o+2)B_o\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}})^2\right]^{s_o}} \tag{B.17}$$

Aplicando al caso unidimensional ($\sigma_{eq} = \sigma, \sigma_m/\sigma_{eq} = 1/3$) ésta es la ecuación de la clásica curva de *Woehler*, figura B.2, de la cual es posible identificar los dos coeficientes B_o, β_o para cada material a un temperatura considerada y es igual a $M = \sigma_1(1 - b\sigma_m)$.



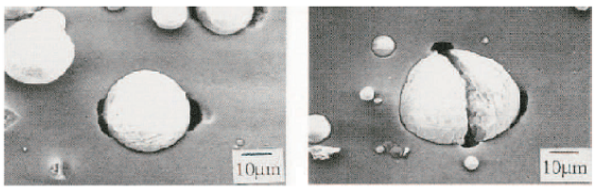
Fuente: Lemaitre [51]

Figura B.2: Curvas de *Woehler*-resistencia máxima en un punto

Las curvas de *Woehler* representan, en ordenadas, los valores de esfuerzo y en abscisas, el número, de ciclos necesarios para romper una pieza. De esta manera, se establece la relación de pérdida de resistencia en función del número de ciclos de carga.

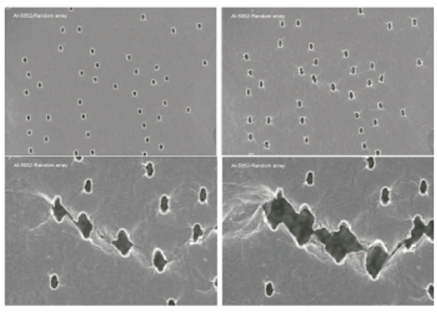
Apéndice C. Fractura dúctil

Desde un punto de vista macroscópico, la fractura dúctil se caracteriza porque va precedida de una apreciable deformación plástica y se requiere mayor energía de deformación para provocarla que en el caso de la fractura frágil. En un material dúctil, es un fenómeno característico la aparición de un cuello de estricción en una probeta sometida a un esfuerzo de tracción según su eje longitudinal, desarrollándose una importante deformación plástica antes de la rotura. Desde el punto de vista microscópico, la fractura dúctil es consecuencia de la nucleación, crecimiento y coalescencia de micro-vacíos. En la figura C.1 y la figura C.2 se pueden observar los procesos de nucleación y crecimiento progresivo de micro-vacíos hasta su coalescencia, dando lugar a superficies libres (fisuras) [96].



Fuente: Vadillo [96]

Figura C.1: Nucleación de micro-vacíos por descohesión o por rotura de una partícula



Fuente: Vadillo [96]

Figura C.2: Proceso de crecimiento y coalescencia de micro-vacíos

Así pues, como ya se ha indicado, la fractura dúctil es el resultado de tres procesos distintos:

- Nucleación de micro-vacíos durante la deformación plástica. La nucleación se produce en sistemas que contienen segundas fases, bien por separación de la interfase matriz-partícula bien por rotura de esta última; que, en general, es menos deformable que la matriz (figura C.1). Con frecuencia, las partículas de mayor tamaño inician la nucleación con bajos niveles de tensión y deformación y, a medida que ésta va aumentando, otras partículas de menor tamaño contribuyen al proceso de fractura.
- Crecimiento de micro-vacíos. Se entiende por crecimiento de micro-vacíos el aumento del tamaño de éstos, producido por una fuerte deformación plástica. Se estima que la mayor parte de la energía consumida en el proceso de fractura dúctil corresponde a la fase de crecimiento de huecos.
- Coalescencia de los mismos para producir superficies libres y la rotura final.

Hay que señalar que estos procesos pueden ocurrir simultáneamente en el material. Es decir, que mientras ciertos huecos crecen y terminan coalesciendo, se están nucleando nuevos huecos que van alimentando el proceso de rotura.

Existen modelos basados en la *mecánica del daño*, donde las variables que describen el daño del material representan, en un sentido estadístico, la distribución de micro-defectos y son consideradas variables de estado, cuya evolución debe ser determinada como parte del modelo. La *mecánica del daño* se construye rigurosamente sobre la base de la termodinámica de sólidos con variables internas. Se supone que la respuesta del material depende de su estado micro-estructural y que éste se puede describir con un número finito de variables internas. La *mecánica del daño* es una teoría de carácter general que se puede aplicar para explicar fenómenos como fractura frágil, dúctil, fatiga y fluencia. La cuestión fundamental es describir correctamente las leyes de evolución del daño, las cuales deben ser definidas a partir del conocimiento de los fenómenos físicos responsables, en cada caso, de los procesos de daño. En textos de *Lemaitre* y *Chaboche* sobre *mecánica de sólidos* [52] puede encontrase una detallada descripción de esta teoría aplicada a los diferentes fenómenos mencionados.

Apéndice D. Aplicación informática

Frame.m es un programa de cálculo matricial que incorpora conceptos comentados en los capítulos precedentes como la plasticidad y la degradación. El programa, implementado en el manipulador simbólico *MAPLE V.11*, está dividido en 3 secciones (1. Inicio, 2. Entrada de datos y 3. Cálculo y resultados).

El diagrama de flujo del programa se puede ver en la figura D.1.

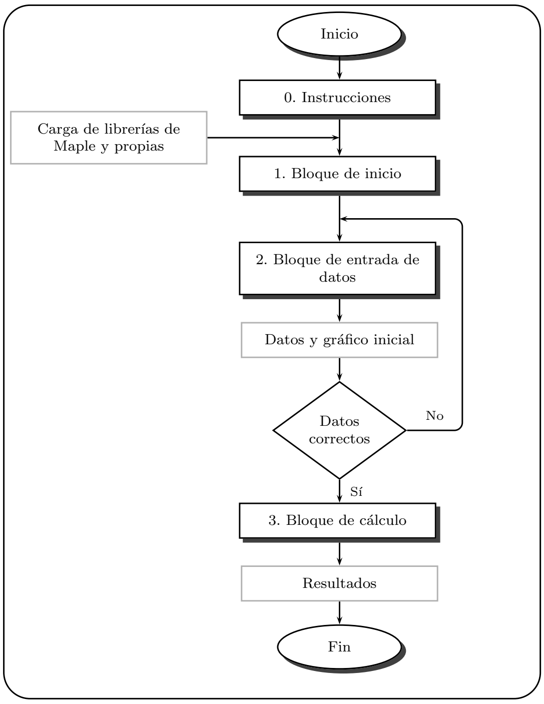


Figura D.1: Diagrama de flujo del programa *Frame.m*

A continuación se resumen las características más importantes de cada una de las secciones del programa.

1. ***Inicio***

   En este bloque de programación se cargan las librerías necesarias para el posterior funcionamiento del programa, tanto las del programa *MAPLE* (LinearAlgebra, plots, plottools, Maplets, ExcelTools) como unas librerías propias, desarrolladas en ficheros aparte para que la estructura del programa sea más clara.

   Desde el programa principal se usan las funciones (procedimientos) contenidas en estas librerías. Algunos de los procedimientos propios desarrollados son:

   Simbols: procedimientos para crear las representaciones gráficas básicas utilizadas en la representación de las estructuras planas (empotramiento, apoyo fijo, apoyo móvil, empotramiento móvil, muelle translacional, muelle rotacional, momento, fuerza, desplazamiento prescrito, giro prescrito, giro nulo, carga trapezoidal, carga térmica, sistema de coordenadas y rótula). Todos los procedimientos que crean los símbolos tienen parámetros de entrada que permiten posicionarlos, girarlos o cambiarlos de tamaño.

   Drawing: procedimientos para realizar las representaciones gráficas de cada estructura completa (autoescalado gráfico y dibujo de las barras de la estructura, los números de las barras, los apoyos y las cargas nodales e interelementales). Todos los procedimientos que crean los dibujos tienen parámetros de entrada que permiten posicionarlos, girarlos, variar sus dimensiones o cambiar el color.

   Logis3: procedimientos para la gestión de los errores en la introducción de los datos y en las opciones de cálculo (tanto manualmente como utilizando Maplets).

   Functions: contiene las funciones básicas necesarias para el cálculo (transformación de coordenadas, creación de la matriz de rigidez elemental y cálculo de los esfuerzos para cada tipo de carga).

   Calc: contiene otras funciones adicionales necesarias para el cálculo (dibujar la estructura y mostrar la estructura y calcular la matriz de rigidez de toda la estructura, los grados de libertad, las fuerzas de empotramiento, las fuerzas resultantes, los desplazamientos, reacciones y los esfuerzos).

   Grafexc 4: contiene todas las funciones que gestionan el último apartado de gráficas (ordena los datos, calcula el número y el valor de los giros y desplazamientos relativos entre todas las barras conectadas, imprime de forma ordenada y muestra las gráficas de los valores de desplazamientos, giros y energía disipada). Además, almacena y ordena todos los datos para ser exportados a *Excel.*

Search: contiene funciones adicionales cuyo código ocuparía mucho en el programa principal (búsqueda de esfuerzos máximos, cálculo y gestión de las gráficas acumuladas de esfuerzos y deformadas, etc.).

2. ***Entrada de datos***

En esta sección es necesario introducir las siguientes variables y matrices:

Variables:

- nmt : número de materiales diferentes.
- nsc : número de secciones diferentes.
- nbr : número de barras.
- nnd : número de nodos.
- nbc : número de cargas interelementales.

Matrices:

- *Matriz de materiales:* tendrá un número de filas igual al número de materiales diferentes introducido. En sus columnas se guardarán, para cada material, los valores de E (módulo de Young) y α (coeficiente de expansión térmica).

$$dmt = \begin{bmatrix} E_1 & \alpha_1 \\ E_2 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_{nmt} & \alpha_{nmt} \end{bmatrix} \tag{D.1}$$

- *Matriz de secciones:* tendrá un número de filas igual al número de secciones diferentes introducido. En sus columnas se guardarán, para cada sección, los valores de A (área), I_z (inercia), h (canto) y M_p (momento plástico) de la sección.

$$dsc = \begin{bmatrix} A_1 & I_{z_1} & h_1 & M_{p_1} \\ A_2 & I_{z_2} & h_2 & M_{p_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{nsc} & I_{z_{nsc}} & h_{nsc} & M_{p_{nsc}} \end{bmatrix} \tag{D.2}$$

- *Matriz de elementos:* tendrá un número de filas igual al número de barras introducido. En sus columnas se guardarán, para cada barra, los valores de n_1 y n_2 (nodos inicial y final); mt (número del material); sc (número de la sección); L_0 (longitud); α_0 (ángulo de la barra); erc_1 y erc_2 [siglas de *End Release Code*. Si $erc_i = 0$, significa que en el nodo i de esa barra (nodo inicial: $i = 1$, nodo final: $i = 2$) no hay rótula, y si $erc_i = 1$, significa que sí hay rótula]; gdl_1 y gdl_2 (grados de libertad liberados en los nodos 1 y

2); erc_I y erc_{II} (mismo significado que erc_1 y erc_2, excepto que tomarán el valor 1 si hay rótula en cualquier barra que confluya a ese nodo, aunque la barra en cuestión no tenga rótula en ese nodo); y N_b (el número de la barra).

$$dbr = \begin{bmatrix} n_{1_1} & n_{2_1} & mt_1 & sc_1 & L_{0_1} & \alpha_{0_1} & erc_{1_1} & erc_{2_1} & gdl_{1_1} & gdl_{2_1} & erc_{I_1} & erc_{II_1} & N_{b_1} \\ n_{1_2} & n_{2_2} & mt_2 & sc_2 & L_{0_2} & \alpha_{0_2} & erc_{1_2} & erc_{2_2} & gdl_{1_2} & gdl_{2_2} & erc_{I_2} & erc_{II_2} & N_{b_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{1_{nbr}} & n_{2_{nbr}} & mt_{nbr} & sc_{nbr} & L_{0_{nbr}} & \alpha_{0_{nbr}} & erc_{1_{nbr}} & erc_{2_{nbr}} & gdl_{1_{nbr}} & gdl_{2_{nbr}} & erc_{I_{nbr}} & erc_{II_{nbr}} & N_{b_{nbr}} \end{bmatrix} \tag{D.3}$$

Los valores L_0 y α_0 (longitud y ángulo iniciales) no se introducen, sino que los calculará el programa, basándose en las coordenadas de los nodos introducidos en la matriz de nodos. Igualmente, erc_I y erc_{II} también serán calculados automáticamente.

- *Matriz de nodos:* tendrá un número de filas igual al número de barras introducido. En sus columnas se guardarán, para cada nodo, los valores de x e y (coordenadas); F_x, F_y y M_z (fuerzas nodales en dirección x e y y momento flector); u, v y θ (desplazamientos en dirección x e y y giro); k_x, k_y y k_t (apoyos elásticos en dirección x e y y torsional); α_n (alfa nodal); y N_n (número del nodo).

$$dnd = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & F_{x_1} & F_{y_1} & M_{z_1} & u_1 & v_1 & \theta_1 & k_{x_1} & k_{y_1} & k_{t_1} & \alpha_{n_1} & N_{n_1} \\ x_2 & y_2 & F_{x_2} & F_{y_2} & M_{z_2} & u_2 & v_2 & \theta_2 & k_{x_2} & k_{y_2} & k_{t_2} & \alpha_{n_2} & N_{n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{nnd} & y_{nnd} & F_{x_{nnd}} & F_{y_{nnd}} & M_{z_{nnd}} & u_{nnd} & v_{nnd} & \theta_{nnd} & k_{x_{nnd}} & k_{y_{nnd}} & k_{t_{nnd}} & \alpha_{n_{nnd}} & N_{n_{nbr}} \end{bmatrix} \tag{D.4}$$

En la figura D.2 se muestra una salida gráfica tras haber introducido un conjunto de datos.

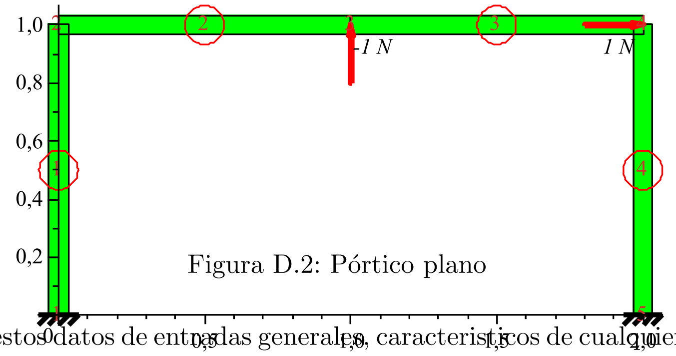


Figura D.2: Pórtico plano

Además de estos datos de entradas generales, característicos de cualquier ambiente de análisis estructural, hay que introducir datos relativos al daño: incrementos de carga, tolerancias para considerar la función de agotamiento Z o el residuo nulo, deformación plástica umbral (p_{th}) y crítica (p_{cr}), daño inicial (D_o) y crítico (D_{cr}), coeficiente de endurecimiento (n), exponente de evolución del daño (α), y variables de elección del tipo de cálculo (considerar daño, axil, cortante y/o flector) por último, hay que elegir la función de disipación que será empleada para determinar el crecimiento del daño de acuerdo a la evolución de las variables plásticas (función de *Bonora*, *Wang*, *Lemaitre*, *Chandrakanth*).

3. ***Cálculo y resultados***

   El proceso de cálculo se realizará automáticamente, después de que el usuario elija ciertas opciones de visualización de los resultados. Un diagrama de flujo más detallado del proceso de cálculo elastoplástico degradable presentado, previamente en la figura 5.2, es mostrado en el diagrama de flujo de la figura D.4.

   En la figura D.3 se muestra una salida típica de los cálculos del programa.

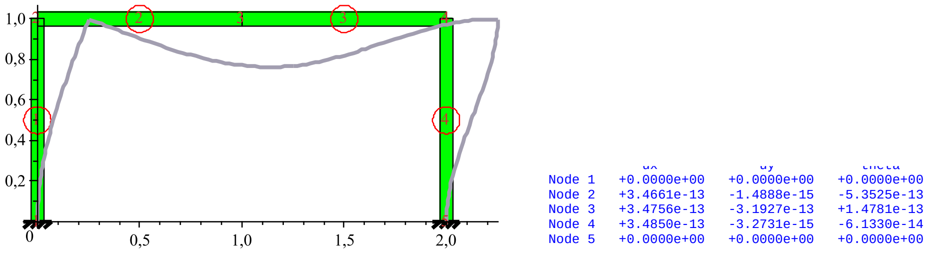


Figura D.3: Deformada del pórtico

En este bloque, si al evaluar la función de agotamiento a lo largo de la barra resulta que la siguiente sección en agotarse no se produce ni en el nodo inicial ni en el final, sino en algún punto intermedio de alguna barra, el criterio seguido consiste en introducir en ese punto un nuevo nodo y reiniciar los cálculos, de tal forma que, al llegar al mismo paso de cálculo en que se formaba la mencionada sección agotada interelemental, ésta se producirá en el nuevo nodo introducido, y no será, por tanto, interelemental. Este proceso se repetirá hasta que las secciones plastificadas se produzcan en nodos (los originales o los nuevos introducidos) de la estructura. Esta estrategia, aunque puede parecer poco eficiente, se ha mostrado sistemática y adecuada en los pórticos analizados. Se indican a continuación las sencillas modificaciones que precisa. Cualquier otra alternativa es mas compleja porque exige actualizaciones, redimensionamientos de estructuras de datos, etc.

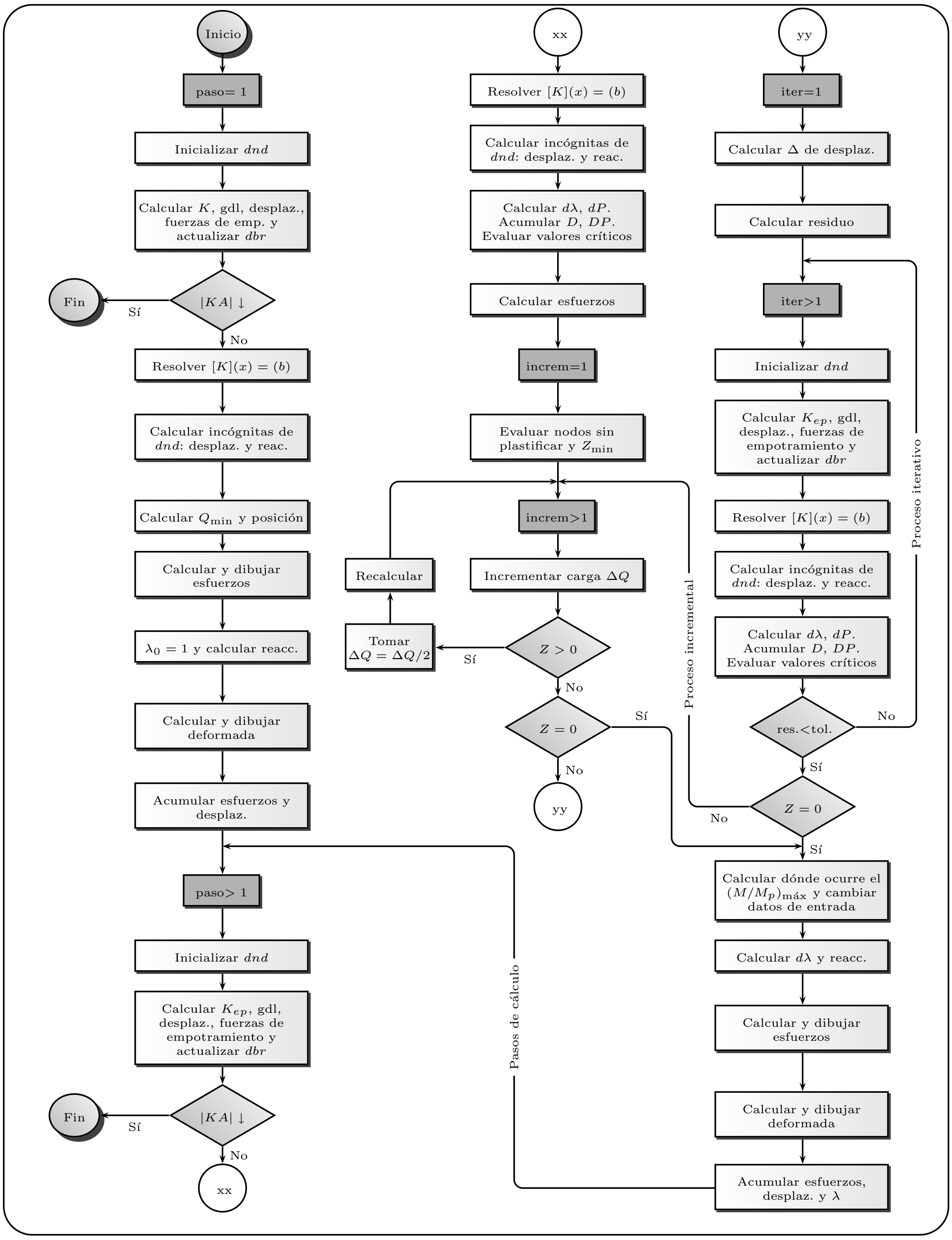


Figura D.4: Diagrama de flujo del bloque de cálculo del programa *Frame.m*

Referencias del autor

Referencias del autor

1. Chica E, Terán J.M.G, Ibán A.L. "*Yield Surface for elastoplastic beam 2D element considering damage material*". 8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8). 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Eccomas 2008). June 30-July 4, 2008. Venice, Italy.

2. Chica E, Terán J.M.G, Ibán A.L, López P. "*Computational model for elastoplastic and damage analysis of frame 2D*". Fourth International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2008). Editors: M. Hogge, R. Van Keer, L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, J.-F. Remacle, E. Dick ©University of Liège, Belgium, 26-28 May 2008

3. Ibán A.L, Chica E, Terán J.M.G. "*Model of damage by relative rotation and its influence in the collapse load of frame*". ICCM2007. International Conference on Computational Methods. Hiroshima Japan April 4-6 2007. Organized and hosted by: Department of Social and Environmental Engineering.Pag 22

4. Chica E, Ibán A.L, Terán J.M.G. "*A second-order model for buckling analysis of elastoplastic beams*". IX International Conference on Computational Plasticity. COMPLAS IX . CIMNE, Barcelona, 2007. Computacional Plasticity IX. Fundamental and Application. Edited by E. Oñate, D.R.J. Owen and B. Suarez. Part 2. ISBN vol 2: 978-8496736-29-0. Pag 910-914

5. Chica E. Ibán A.L, Terán J.M.G, Lopez P. "*Damage coupled to yield function for the elastoplastic analysis of frame structures*". Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing) Vol. 9, No. 6 (2008). Pag 549-561 .

6. Chica E, Terán J.M.G, Ibán A.L, Lopez P. "*Damage coupled elastoplastic analysis of a frame*". X International Conference on Computational Plasticity. COMPLAS X. CIMNE, Barcelona, 2009. Submitted for publication.

7. Chica E. Ibán A.L, Terán J.M.G. "*Influence of ductile damage evolution on the collapse load of framed structures*". Accepted for publication in the Journal of Applied Mechanics.

8. Chica E, Terán J.M.G, Ibán A.L, Lopez P. "*Models of damage for the analysis of frames*". Submitted for publication.

9. Chica E. Ibán A.L, Terán J.M.G. "*A nonlinear model for elastoplastic and damage analysis of 2D frames*". Submitted for publication.

Bibliografía

Bibliografía

[1] A. Acharya and J.L. Bassani. Lattice incompatibility and a gradient theory of crystal plasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 48:1565–1595, 2000.

[2] E. Alarcón. *Leyes de comportamiento de los materiales.* Curso de Especialización Superior y Aplicación Práctica del Método de los Elementos Finitos, 1994.

[3] J. Barker, M.R. Horne, and J. Heyman. *Plastic behaviour and design*, volume 2. Cambrige University Press, 1965.

[4] K. Bathe and A. Cimento. Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 22:59–85, 1980.

[5] J. Besson, D. Steglich, and W. Brocks. Modeling of plane strain ductile rupture. *International Journal of Plasticity*, 19:1517–1541, 2003.

[6] D.P. Bompard. Effets endommageants de la porosite sur la propagation des fissures dans le nickel fritte. *These UTC*, 1986.

[7] N. Bonora. A non-linear CDM damage model for ductile failure. *Engineering Fracture Mechanics*, 58(1-2):11–28, 1997.

[8] N. Bonora. On the effect of triaxial state of stress on ductility using nonlinear CDM model. *International Journal of Fracture*, 88:359–371, 1998.

[9] N. Bonora, M. Cavallini, F. Iacovello, and M. Marchetti. Crack initiation in a1-li alloy using continuum damage mechanics. *In Localized Damage Ili Computer-Aided Assessment and Control, Eds M. H. Aliabadi.*

[10] P.W. Bridgman. Effects of high hidrostatic pressure on the plastic properties of metals. *Rev. Mod. Phys*, 17:3–14, 1945.

[11] W. Brocks and G. Bernauer. Determination of the gurson parameters by numerical simulations. *In: Proceedings of the 2nd Gri.th Conference, She.eld, UK*, 1995.

[12] Mi. Brunig. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. *International Journal of Plasticity*, 19:1679–1713, 2003.

[13] J. Cañas. *Análisis y diseño elastoplástico de estructuras planas formadas por barras prismáticas.* PhD thesis, Universidad de Sevilla, 1986.

[14] J.L. Chaboche. Anisotropic creep damage in the framework of the continuum damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 79:309–319, 1984.

[15] S. Chandrakanth and P.C. Pandey. A new ductile damage evolution model. *International Journal of Fracture*, 60:73–79, 1993.

[16] S. Chandrakantha and P.C. Pandey. An isotropic damage model for ductile material. *Engng fract Mech*, 50:457–465, 1995.

[17] A. Cipollina and J. Flórez. Modelos simplificados de daño en pórticos de concreto armado. *Rev Int Metodos Numer Calcul Diseno Ing*, 11(1):3–22, 1995.

[18] A. Cipollina, A. López-Inojosa, and J. Flórez-López. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Comput Struct*, 54(6):1113, 1995.

[19] Z.M. Cohn and A. Franchi. Strupl: A computer system for structural plasticity. *J. Struc. Div. ASCE*, 105 (4):789–804, 1979.

[20] Z.Ma. Cohn and A. Franchi. A computer system for structural plasticity. *J. Strut. Div. ASCE*, 105(4):789–804, 1979.

[21] J.P. Cordebois and F. Sidoroff. Damage induced elastic anisotropy, mechanical behavior of anisotropic solids. *In:Boehler JB, editors. Proc. EUROMECH Colloque 115.The Netherlands: Martinus Nijho*, pages 761–74, 1982.

[22] M.A. Crifield. *Non-linear finite element analysis of solid and structures*, volume 1.

[23] M. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Comput. Struct*, 13:55–62, 1981.

[24] G.G. Deierlein, J.F. Hajjar, and A. Kavinde. Material nonlinear analysis of structures: a concentrated plasticity approach. *In: Report SE, editor. Department of Civil Engineering, University of Minesota. http://cee.engr.ucdavis.edu/faculty/kanvinde/concenplast.pdf*, 2001.

[25] M. Doblaré and E. Alarcón. *Elementos de plasticidad.* 1983.

[26] M. Doblaré and L. Gracia. *Análisis límite de estructuras.*

[27] D.C. Drucker. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. In *inProc. 1st US National Congress of Applied Mechanics ASME*, pages 487–491, New York, 1951.

[28] J. Dufailly and J. Lemaitre. Damage measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 28(5/6):643–661, 1987.

[29] L. Engle and H. Klingele. Atlas of metal damage. *Wolfe Science Books. Ch. Verlag. Munich*, 1981.

[30] J. Faleiro, S. Oller, and A. Barbat. Plastic-damage seismic model for reinforced concrete frames. *Computer and strutures*, 86:581–597, 2008.

[31] R. Febres. *Modelo de daño para pórticos planos de acero bajo cargas histéricas.* PhD thesis, Universidad de los Andes, Venezuela, 2002.

[32] J. Flórez. Calcul simplifie´ de portiques endommageables [in french]. *Rev Eur E´ le´m Finis/Eur J Finite Elem*, 2(1):47–74, 1993.

[33] A. Risitano G. La Rosa, G. Mirone. Effect of stress triaxiality corrected plastic flow on ductile damage evolution in the framework of continuum damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 68:417–434, 2001.

[34] J.A. Garrido and A. Foces. Resistencia de materiales. *Universidad de Valladolid. Secretariado de publicaciones*, 1994.

[35] G. Gómez. Un modelo simplificado de daño para estructuras de acero. *[in Spanish]. Thesis for partial fulfilment of the requirements for the degree of Magister Scientie in Structural Engineering. Mérida, Venezuela: University of Los Andes.*

[36] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Material and Technology*, 99:2–15, 1977.

[37] R. Hill. Constitutive dual potentials in classical plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 39:39–63, 1987.

[38] Ri. Hill. *The mathematical theory of plasticity.* Oxford University, 1998.

[39] M.R. Horne. *Plastic theory of structures.* 1971.

[40] P. Inglessis, G. Gomez, G. Quintero, and F. Flórez. Model of damage for steel frame members. *Engineering Structures*, 21:954–964, 1999.

[41] L.M. Kachanov. On creep rupture time. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Otdeleniya Tekhnicheskikh I Nauk*, 8:26–31, 1958.

[42] L.M. Kachanov. Introduction to continuum damage mechanics. *Martinus, Nijho. Publisher, Boston- Dordrecht, ISBN 90-247-3319-7.*, 1986.

[43] J. Koplik and A.Ñeedleman. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids Structures*, 24(8):835–853, 1988.

[44] S. Krenk, J. Vissing, and L. Thesbjerg. Efficient collapse analysis techniques for framed structures. *Computers and Structures*, 72:481–496, 1999.

[45] S.K. Kunnath, A.M. Reinhorn, and J Y. Analytical modeling of inelastic seismic response of RC structures. *J. Struc. Div. ASCE*, 116 (4):996–1017, 1990.

[46] G. Le Roy. A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of void. *Acta Metall*, 29:1509–1522, 1981.

[47] G. Le Roy, J.D. Embury, G. Edward, and M.F. Ashby. A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids. *Acta Metallurgica*, 29:1509–1522, 1981.

[48] J. Lemaitre. How to use damage mechanics. *Nucl Engng des*, 80:233–245, 1984.

[49] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Material and Technology*, 107:83–89, 1985.

[50] J. Lemaitre. Local approach to fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5/6):523–537, 1986.

[51] J. Lemaitre. A course on damage mechanics. *Berlin: Springer-Verlag*, 1992.

[52] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. Mechanique des materiaux solides-dunod. 1985.

[53] W. Lode. Versuche uber den einfluss der mittleren hauptspannung auf das fliessen der metalle. *Z. Phys*, 36:913–920, 1926.

[54] A. López-Inojosa, A. Ramírez, and J. Flórez. A finite element for damage simulation in RC frames. *In: Proceedings of ECCOMAS '96, Paris (France)*, 1996.

[55] J. Lubliner. *Plasticity theory.* 1990.

[56] R. Mahnken. Theoretical, numerical and identification aspects of a new model class for ductile damage. *International Journal of Plasticity*, 18:801–831, 2002.

[57] G. Maier, L. De Donato, and L. Corradi. Inelastic analysis of reinforced concrete frames by quadratic programming. *Simposium on Inelasticity and Nonlinearities in Strut. Concr., Univ. of Waterloo, Canada*, 1973.

[58] G. Maier, L. De Donato, and L. Corradi. Inelastic analysis of reinforced concrete frames by quadratic programming. *Simp. on Inelasticity and Nonlinearities in Struc. Concr. Univ. of Waterloo, Canada*, 1973.

[59] Ch. Massonnet and M. Save. *Cálculo plástico de las construcciones. Tomos I y II.* 1966.

[60] F.A. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35:363–371, 1968.

[61] A. Mendelson. Plasticity: theory and applications. *Macmillan, New York*, 1968.

[62] J.S. Misa and F. Tin-Loy. Large displacement elastoplastic analysis of semirigid steel frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:741–762, 1996.

[63] O. Möller and M. Rubinstein. Análisis dinámico no lineal físico y geométrico de barras: discusión del campo de aplicación de teorías aproximadas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 11:151–182, 1995.

[64] F. Moussy. Microstructure, endommagement et rupture ductile. *Proc. Ecole d'ete franco - canadienne*, 1986.

[65] Nafems. *Introduction to nonlinear finite elements analysis.* 1992.

[66] B.G. Neal. *The plastic methods of structural analysis.* Science Paperbacks,London, 3rd edition, 1977.

[67] A.Ñeedleman and V. Tvergaard. An analysis of ductile rupture in notched bars. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 32:461, 1984.

[68] E. Oñate. Desarrollos y aplicaciones de modelos de fractura en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona. *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Publicación CIMNE No 201*, pages 1–43, 2000.

[69] P.C. Olsen. Rigid plastic analysis of plane frame structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179:19–30, 1999.

[70] D.R.J. Owen and E. Hinton. *Finit elements in plasticity: Theory and practice.* 1980.

[71] U. Prahl, S. Bourgeois, T. Pandorf, M. Aboutayeb, O. Deborders, and D. Weichert. Damage parameter identification by a periodic homogenization approach. *Computational Materials Science*, 25:159–165, 2002.

[72] L. Prandtl. Spannungsverteilung in plastische korpern. *Proceedings. 1st Intern. Congr. Mechanics. C.B. Biezeno; and J.M. Burgers, eds. Delft*, pages 43–54, 1925.

[73] G. Quintero. Un modelo de daño para pórticos de acero bajo solicitaciones histeréticas. *[in Spanish]. Thesis for partial fulfilment of the requirements for the degree of Magister Scientie in Structural Engineering. Mérida, Venezuela: University of Los Andes.*

[74] Y.N. Rabotnov. Creep problems in structural members. *Amsterdam: North Holland*, 1969.

[75] J.R. Rice and D.M. Tracy. On ductile enlargement of voids in triaxial stress. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 17:210–217, 1969.

[76] J.Y. Richard Liew, H. Chen, N.E. Shanmugam, and W.F. Chen. Improved nonlinear hinge analysis of space frame structures. *Engineering Structures*, 22(1324-1338), 2000.

[77] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problem. *Int. J. Solids Struct*, 15:529–551, 1979.

[78] S. Rodríguez Gómez and A.S. Cakmak. Evaluation of seismic damage indices for reinforced concrete structures. *JNCEER-90-0022, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo*, 1990.

[79] M. Roufaiel and C. Meyer. Analytical modeling of histeretic behavior of r/c frames. *J. Strut. Div. ASCE*, 113(3):429–443, 1987.

[80] M.S.L. Roufaiel and C. Meyer. Analytical modeling of histeretic behavior of RC frames. *J. Struc. Div. ASCE*, 113 (3):429–443, 1987.

[81] G. Rousselier. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105:97–111, 1987.

[82] G. Rus. Cálculo plástico de estructuras de barras: Teoría. *Departamento de Mecánica de Estructuras. Universidad de Granada*, 2008.

[83] M.P. Saka and M.S. Hayalioglu. Optimum design of geometrical nonlinear elastic-plastic steel frames. *Comp. Struct*, 38:329–334, 1991.

[84] T. Schacht, N. Untermann, and E. Steck. The infuence of crystallographic orientation on the deformation behavior of single crystals containing microvoids. *International Journal of Plasticity*, 19:1605–1626, 2003.

[85] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational inelasticity.* 1997.

[86] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models: I, formulations; II, computacional aspects. *Int J Sol Struct*, 23(7):821–69, 1987.

[87] M. Springmann and M. Kuna. Identification of material parameters of the Rousselier model by nonlinear optimization. *Computational Materials Science*, 26:202–209, 2003.

[88] P. Symonds and B.Ñeal. The calculation of collapse loads for frame structures. *Jour. Instn. Civil Engrs*, 35:21–40, 1951.

[89] H.W. Tai. Plastic damage and ductile fracture in mild steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 36(4):853–880, 1990.

[90] H.W. Tai and B.X. Yang. A new microvoid-damage model for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(3):377–384, 1986.

[91] T. Takeda, M.A. Sozen, and N.N. Nielsen. Reinforced concrete response to simulated earthquakes. *J. Strut. Div. ASCE*, 96:2557–2573, 1970.

[92] J.M.G. Terán. *Formulación y análisis del comportamiento elastoplástico acoplado y no lineal geométrico de sistemas estructurales de barras.* PhD thesis, Dpto. Resistencia de Materiales y Estructuras, Universidad de Valladolid, 2002.

[93] F. Tin-Loi. On the optimal plastic synthesis of frames. *Engng Optimization*, 16:91–108, 1990.

[94] F. Tin-Loi. Plastic limit analysis of plane frames and grids using gams. *Computers Structures*, 54:15–25, 1995.

[95] V. Tvergaard and C.Ñiordoson. Non local plasticity effects on interaction of different size voids. *International Journal of Plasticity*, 20:107–120, 2004.

[96] G. Vadillo. *Modelos de fractura dúctil en condiciones estáticas y dinámicas.* PhD thesis, Universidad carlos III de Madrid, 2007.

[97] R. von Mises. Mechanik der festen körper im plastisch deformablen zustand. *Gött. Nach. Math. Phys*, 1:582–592, 1913.

[98] T.J. Wang. Unified CDM model and local criterion for ductile fracture-I. unified CDM model for ductile fracture. *Engng Fract Mech*, 42:177–183, 1992.

[99] M.B. Wong. Effects of linearly varying distributed load on the collapse behaviour of frame. *Computers Structures*, 61:909–914, 1996.

[100] M.B. Wong. Plastic frame analysis under fire conditions. *J. of Structural Engnng*, 3, 2001.

[101] M.B. Wong and F. Tin-Loi. Nonholonomic computer analysis of elastoplastic frames. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 72:351–364, 1989.

[102] M.B. Wong and F. Tin-Loi. Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. *Computers Structures*, 34:641–646, 1990.

[103] L. Xia and C.F. Shih. Ductile crack growth-I. a numerical study using computational cells with microstructurally-based length scales. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 43(2):233–259, 1995.

[104] O.C. Zienkiewicz. Incremental displacement in non-linear analysis. *Int.J. Num. Meth. Eng*, 3:587–92, 1971.

[105] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *El método de los elementos finitos.* 1995.

[106] O.C. Zienkiewicz, S. Valliappan, and I.P. King. Elastoplastic solution of engineering problems-initial stress finite elements approach. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 1:75–100, 1969.

Lista de símbolos

Lista de símbolos

$\{\frac{\partial Z}{\partial \{F\}}\}$	Gradiente de la función de plastificación
$[]$	Matriz
$[]^{-1}$	Matriz inversa
$[]^T$	Matriz transpuesta
$[B_L]$	Matriz de derivadas parciales de las funciones de forma no lineal
$[B_o]$	Matriz de derivadas parciales de las funciones de forma lineal
C	Matriz constitutiva
$[I]$	Matriz unidad
$[K]$	Matriz de rigidez
$[K_{ep}]$	Matriz de rigidez elastoplástica
$[L]$	Matriz en derivadas parciales
$[N]$	Matriz de funciones de interpolación
$[T]$	Tensor de primeras tensiones de *Piola-Kirchhoff*
$[\sigma]$	Tensor de tensiones
$\{\}$	Vector
$\{a\}$	Desplazamientos nodales genéricos
$\{c\}$	Desplazamientos nodales
$\{u_{ep}\}$	Vector de desplazamientos elastoplásticos
$\{\varepsilon_L\}$	Vector de deformaciones no lineales

$\{\varepsilon_o\}$	Vector de deformaciones lineales
$\|\|$	Determinante
h	Canto
b	Ancho
D	Variable daño
$d\lambda$	Multiplicador plástico
e	Excentricidad
E	Módulo de Young
$E_{i,j}$	Componentes del tensor Lagrangiano de deformación
E_σ	Espacio de tensiones
Z	Función de plastificación
G	Módulo de elasticidad transversal
H_i	Polinomio de *Hermite*
I_y, I_z	Momentos de inercia respecto de los ejes y, z
K_{ij}	Coeficiente de la matriz de rigidez
l	Longitud de barra
MEF	Métodos de los Elementos Finitos
M_e	Momento elástico
M_p	Momento plástico
$M_x(x)$	Momento torsor
$M_y(x)$	Momento flector en la dirección del eje y
$M_z(x)$	Momento flector en la dirección del eje z
N_p	Esfuerzo axil de plastificación
$N_x(x)$	Esfuerzo axil
R	Números reales
t_{pc}	Tolerancia de plastificación completa
u, v, w	Componentes de desplazamientos nodales
V_p	Esfuerzo cortante de plastificación
$V_y(x)$	Esfuerzo cortante en la dirección del eje y
$V_z(x)$	Esfuerzo cortante en la dirección del eje z
W_z	Módulo resistente

x	Variable longitudinal de elemento barra
x, y, z	Coordenadas
X_i	Componentes de la fuerza por unidad de volumen
y_2, y_3	Cotas de penetración de plastificación
Z_{MD}	Función de plastificación dependiente del momento flector y daño
Z_{MND}	Función de plastificación dependiente de los esfuerzos momento y axil y daño
Z_{MNVD}	Función de plastificación dependiente de los esfuerzos momento, axil y cortante y daño
Z_{MVD}	Función de plastificación dependiente de los esfuerzos momento y cortante y daño
Δ	Incremento
$\sum$	Sumatorio
Ω	Dominio
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε^e	Deformación elástica
ε^{ep}	Deformación elastoplástica
ε_{ij}	Componentes del tensor de deformaciones unitarias
ε^p	Deformación plástica
ν	Coeficiente de Poisson
θ	Ángulo, variación unitaria de volumen
$\theta_u, \theta_v, \theta_w$	Giros en las direcciones x, y, z
ρ	Densidad, radio de curvatura
σ	Tensión normal
σ_{eq}	Tensión normal equivalente
σ_f	Tensión de fluencia
σ_l	Tensión principal
σ_t, σ_c	Límites elásticos a tracción y compresión
σ_{xp}	Tensión normal en dominio elastoplástico
τ	Tensión tangencial
τ_f	Tensión tangencial de fluencia
τ_{xyp}	Tensión tangencial en dominio elastoplástico
$\tau_{xyp_{max}}$	Tensión tangencial en dominio elastoplástico máxima
ξ	Coordenada longitudinal normalizada

Y	Tasa de liberación energética asociada al daño
W_e	Energía total elástica
W_d^e	Energía de distorsión
W_h^e	Energía volumétrica