



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Cálculo de factores teóricos de
concentración de tensiones mediante
métodos de elementos finitos**

Autor:

González Izard, Ricardo

Tutor:

**Manso Burgos, Gabriel
Departamento: CMelM / EGI /
ICGF/ IM /IPF.**

Valladolid, Julio - 2014.



Resumen

Las máquinas y elementos estructurales sometidos a tensión suelen fallar debido a varios factores. Uno de ellos es la concentración de tensiones que se origina debido a discontinuidades constructivas (cambios bruscos de sección, entallas, orificios, surcos, etc).

Existe un factor teórico K_t de concentración de tensiones, que relaciona la tensión máxima con la tensión nominal.

El objetivo principal de este proyecto es modelizar y simular varias piezas sometidas a distintas cargas para obtener las gráficas de K_t y compararlas con las proporcionadas por la bibliografía específica. Para ello se cuenta con un software de simulación y cálculo que usa el método de elementos finitos (MEF) para la resolución de los métodos numéricos. El programa usado para ello es Autodesk Inventor.

Palabras clave: Método de Elementos Finitos, Factor teórico de concentración de tensiones K_t , Autodesk Inventor, Análisis de Tensión, Simulación mecánica.

Abstract

Machines and structural elements strained often fail due to several factors. One is the stress concentration which arises due to constructive discontinuities (sudden change in section, notches, holes, grooves, etc.).

There is a theoretical stress concentration factor K_t , which relates the maximum stress with the nominal stress.

The main objective of this project is to model and simulate many parts under different loads to obtain K_t charts and compare them with the specific bibliography. To achieve it, we have a simulation and calculating software which uses the finite element method (FEM) for solving numerical methods. The program which is used for it is Autodesk Inventor.

Keywords: Finite Element Method, Theoretical stress concentration factor K_t , Autodesk Inventor, Stress Analysis, mechanical simulation.



Índice	página
1. Introducción.....	7
2.-Concentración de tensiones.....	11
2.1. Introducción	13
2.2.-Determinación del factor de concentración de tensiones	14
2.3.-Métodos de cálculo.....	15
2.3.1.-Métodos de retícula o rejilla.....	15
2.3.2.-Recubrimiento frágil.....	16
2.3.3.-Métodos esclerométricos.....	17
2.3.4.-Fotoelasticidad.....	17
3.-Método de elementos finitos	19
3.1.-Introducción	21
3.2.-Historia de los elementos finitos	23
3.3.-Conceptos generales.....	24
3.4.-Elementos.	25
3.4.1.-Elementos lineales.....	26
3.4.2.-Elementos bidimensionales	28
3.4.3.-Elementos tridimensionales.....	29
3.5.-Ecuaciones generales	31
3.6.-Generación de la malla.....	39
3.6.1.-Comprobaciones.....	40
3.6.2.-Recomendaciones a seguir	43
3.7.-Condiciones de contorno.....	45



4.-Diseño de elementos sometidos a fatiga	47
5.-Software de modelización y simulación. Autodesk Inventor	51
5.1.-Fujo de trabajo	53
5.1.1.- Pre-proceso	53
5.1.1.- Solución	53
5.1.1.- Pos-proceso.....	54
5.2.- Autodesk Inventor	54
5.3.-Qué debe analizarse antes de un cálculo por elementos finitos ..	56
6.-Análisis del factor teórico de concentración de tensiones mediante MEF..	57
6.1.- Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción simple.....	61
6.1.1.-Definición.....	61
6.1.2.-Geometría.....	62
6.1.3.-Modelización.....	63
6.1.4.-Simulación.....	70
6.1.5.-Resultados	74
6.1.6.-Conclusiones.....	76
6.2.-Barra rectangular con entallas trasnversales sometida a flexión.	79
6.2.1.-Definición	79
6.2.2.-Geometría.....	80
6.2.3.-Modelización.....	81
6.2.4.-Simulación.....	84
6.2.5.-Resultados	88
6.2.6.-Conclusiones.....	90
6.3.-Barra circular con entallas circunferenciales sometida a tracción	92



6.3.1.- Definición	92
6.3.2.-Geometría.....	93
6.3.3.-Modelización.....	95
6.3.4.-Simulación	98
6.3.5.-Resultados	102
6.3.6.-Conclusiones	103
6.4.-Barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión	107
6.4.1.-Definición	107
6.4.2.-Geometría.....	108
6.4.3.-Modelización.....	109
6.4.4.-Simulación	112
6.4.5.-Resultados	115
6.4.6.-Conclusiones	117
6.5.-Barra circular con entalla circunferencial sometida a torsión.....	121
6.5.1.-Definición	121
6.5.2.-Geometría.....	122
6.5.3.-Modelización.....	123
6.5.4.-Simulación	126
6.5.5.-Resultados	132
6.5.6.-Conclusiones	134
6.6.-Barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción	138
6.6.1.-Definición	138
6.6.2.-Geometría.....	139
6.6.3.-Modelización.....	141
6.6.4.-Simulación	144
6.6.5.-Resultados	147



6.6.6.-Conclusiones.....	149
6.7.- Barra rectangular con agujero central sometida a tracción.....	152
6.7.1.-Definición.....	152
6.7.2.-Geometría.....	153
6.7.3.-Modelización.....	154
6.7.4.-Simulación.....	159
6.7.5.-Resultados	162
6.7.6.-Conclusiones.....	163
6.8.- Barra circular con agujero transversal sometida a flexión	167
6.8.1.-Definición.....	167
6.8.2.-Geometría.....	168
6.8.3.-Modelización.....	171
6.8.4.-Simulación.....	176
6.8.5.-Resultados	179
6.8.6.-Conclusiones.....	180
7.-Conclusión.....	183
8.-Bibliografía	187



Capítulo 1: Introducción





Durante décadas muchos de los elementos de máquinas y construcciones industriales han fallado en zonas donde existía un cambio de sección o donde se había formado alguna discontinuidad o entalla.

Se estudiaron distintos casos de discontinuidades en piezas rectangulares y cilíndricas y se llegó a la conclusión de que alrededor de estas discontinuidades se concentraban los esfuerzos. Se estableció una relación entre el esfuerzo máximo soportado y una tensión de referencia, o tensión nominal. El cociente de estos valores se denomina factor teórico K_t de concentración de tensiones.

Como resultado se crearon unas tablas, a partir de resultados experimentales, que relacionaban la geometría de la pieza con el factor teórico K_t .

Con el avance de las nuevas tecnologías se desarrollaron programas de cálculo numérico, como el método de los elementos finitos, que básicamente, consiste en subdividir la pieza en elementos más pequeños y calcular los esfuerzos y deformaciones de cada una de estas divisiones.

En este proyecto, se pretende estudiar las gráficas del factor teórico K_t mediante elementos finitos. Para ello se va a usar el programa de simulación: *Autodesk Inventor*.

Los objetivos que tiene la creación de este proyecto son los siguientes:

- **Introducir** al lector el método de los elementos finitos y el factor teórico K_t de concentración de tensiones.
- **Simular** varios ejemplos del factor teórico K_t mediante MEF.
- **Estudiar** los resultados de las tablas obtenidas de concentración de tensiones y compararlos con los que aparecen en la bibliografía específica de Shigley.
- **Validar** el uso de Autodesk Inventor como programa de simulación mecánica.





Capítulo 2: Concentración de tensiones

Índice	página
2.1. Introducción	13
2.2.-Determinación del factor de concentración de tensiones	14
2.3.-Métodos de cálculo	15
2.3.1.-Métodos de retícula o rejilla.....	15
2.3.2.-Recubrimiento frágil.....	16
2.3.3.-Métodos esclerométricos.....	17
2.3.4.-Fotoelasticidad.....	17





2.1.-Introducción

Cuando se desarrollaron las ecuaciones de esfuerzo básicas para tensión, compresión, flexión y torsión, se supuso que no hubo irregularidades en el elemento analizado. El diseño de máquinas con geometrías perfectas sin cambios de secciones es muy complicado. Un perno, por ejemplo, tiene una cabeza en un extremo, y una rosca en el otro, y ambos están diseñados para soportar cambios bruscos en la sección transversal. Otros ejemplos requieren orificios, surcos para aceite (es el caso de tornillos inyectados) y muescas o mellas de diversos tipos.

Cualquier discontinuidad altera la distribución de esfuerzos a su alrededor, no pudiéndose cumplir de este modo, las ecuaciones de esfuerzo básicas para tensión.

El factor teórico de concentración de esfuerzo, K_t o K_{ts} , se emplea para relacionar el esfuerzo máximo real en la discontinuidad, con el esfuerzo nominal. K_t se utiliza para esfuerzos normales y K_{ts} para esfuerzos cortantes. Los factores están definidos mediante las siguientes ecuaciones (eq. 2.1 y 2.2):

$$K_t = \frac{\sigma_{MÁX}}{\sigma_0} \quad (2.1)$$

$$K_{ts} = \frac{\tau_{MÁX}}{\tau_0} \quad (2.2)$$

El esfuerzo nominal σ_0 y τ_0 es más difícil de definir, y se calcula mediante el uso de las ecuaciones elementales y el área neta de una sección transversal. Para cada caso estudiado en este proyecto se calculará en cada apartado, la tensión nominal correspondiente.

El subíndice t en K_t significa que el valor de este factor solo depende de la geometría. Esto quiere decir que el material usado no interfiere a la hora de calcular el factor teórico de concentración de esfuerzos.

2.2.-Determinación del factor teórico de concentración de tensiones

La primera evidencia cuantitativa del efecto de la concentración de tensiones en las grietas fue enunciada por Inglis, el cual analizó los agujeros elípticos en placas planas. Inglis analizó una placa plana con un agujero elíptico, de longitud $2a$ y de ancho $2b$, a la que se le aplica una tensión perpendicular al eje mayor de la elipse (fig.2.1). Inglis asumió que el agujero no está influenciado por las condiciones de contorno de la placa, es decir, la anchura de la placa es mucho mayor que $2a$ y la altura mucho mayor que $2b$.

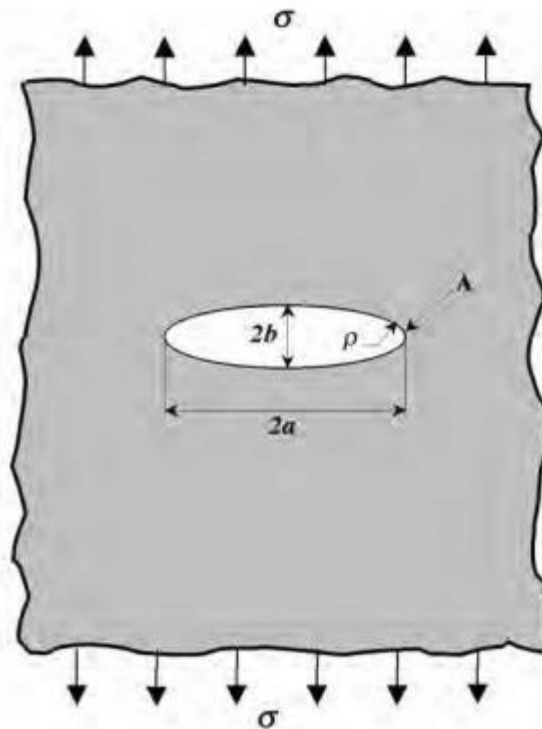


Figura 2.1. Agujero elíptico de una placa plana [Mecánica de la fractura. José Luis Arana. Javier Jesús González. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. Figura 2.1. Página 26].

A partir de este enunciado la tensión en el extremo del eje mayor (Punto A) está dado por la siguiente ecuación (eq.2.3):

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma \left(1 + \frac{2b}{a} \right) \quad (2.3)$$

En donde

$$K_t = 1 + \frac{2b}{a} \quad (2.4)$$



Si suponemos que el orificio es circular, es decir, $a=b$, (fig.2.2), obtenemos que el valor de $K_t=3$, cifra bien conocida y que aparece en gran número de manuales.

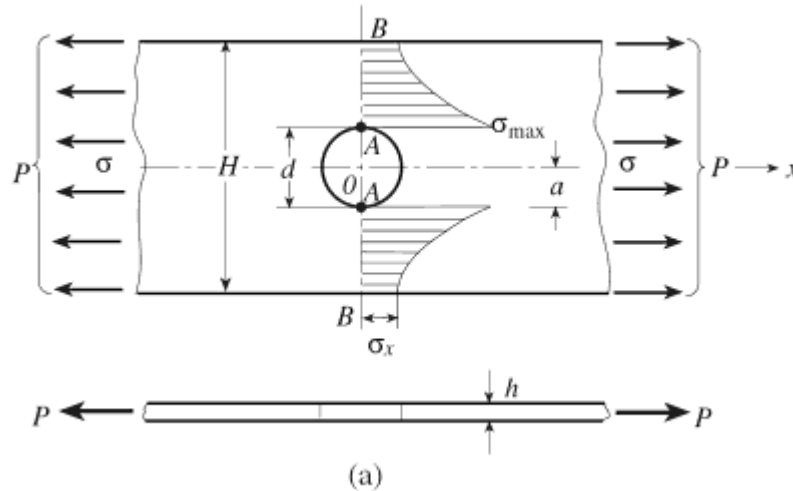


Figura 2.2. Placa plana de espesor con agujero transversal y sometida tensión. [WALKER D. PILKEY, DEBORAH F. PILKEY. Stress Concentration Factors. 2008.].

2.3.-Métodos de cálculo

La mayoría de los factores de concentración de tensiones se determinan a través de las técnicas experimentales. Entre los métodos que se aplican en general se encuentran la fotoelasticidad, métodos de retícula o rejilla, métodos de revestimiento frágil y métodos extensométricos.

2.3.1.-Métodos de retícula o rejilla.

También es llamado método de Moiré. Permite a partir del estudio de los desplazamientos, obtener las deformaciones y posteriormente con ayuda de la ley de Hooke, los esfuerzos.

Se ponen en contacto dos rejillas iguales de manera que las rayas respectivamente forman un ángulo pequeño Ψ , como muestra la fig.2.3. La separación entre elementos en la dirección x es muy pequeña ($=2e/\cos \Psi$) y en la dirección y es mucho mayor ($=2e/\sin \Psi$). Los espectros en la dirección x están ampliamente separados, mientras que en la dirección y lo están estrechamente, con lo que todos los máximos principales se encuentran en direcciones próximas a la dirección del eje Y . Si los espectros son tales que están constituidos por rayas, se obtendrán franjas casi paralelas al eje X denominadas *franjas de Moiré*. La nitidez de las franjas depende de las

formas de las muescas y su dirección depende de la relación exacta entre las dos rejillas.

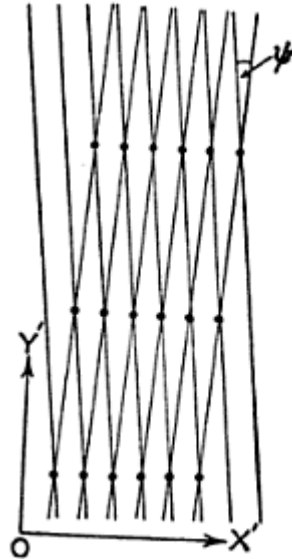


Figura 2.3. Rejas cruzadas un ángulo pequeño y franjas de Moiré [R.W. DITCHBURN. Light, Third Edition. Academic Press, London. Página 183].

Si se superponen dos rejillas de manera que aparezcan las franjas de moiré y una de ellas se desplaza una distancia x (perpendicularmente a sus rayas), las franjas de moiré se desplazan una distancia $y=x/\psi$. De esta manera si se fija una de las rejillas se puede construir una escala de medida, pudiendo medir finalmente los esfuerzos.

2.3.2.-Recubrimiento frágil.

Es uno de los métodos más sencillos para estudiar el campo tensional en una pieza. Consiste en cubrir la superficie de la pieza con un recubrimiento frágil, generalmente lacas, la cual fractura a determinada magnitud de las acciones externas que actúan sobre la pieza. Las fracturas producidas nos indican la dirección de las direcciones principales, puesto que estas son perpendiculares a la dirección de los esfuerzos normales máximos (fig.2.4). Para determinar la magnitud de los esfuerzos para los cuales el material frágil fractura, a medida que se incrementan las magnitudes de las acciones externas se cargan simultáneamente cintas metálicas calibradas del mismo material que el de la pieza y cubiertas con el mismo tipo de laca. De esta forma se pueden evaluar la magnitud de los esfuerzos que provocan la fractura de la laca sobre la pieza.

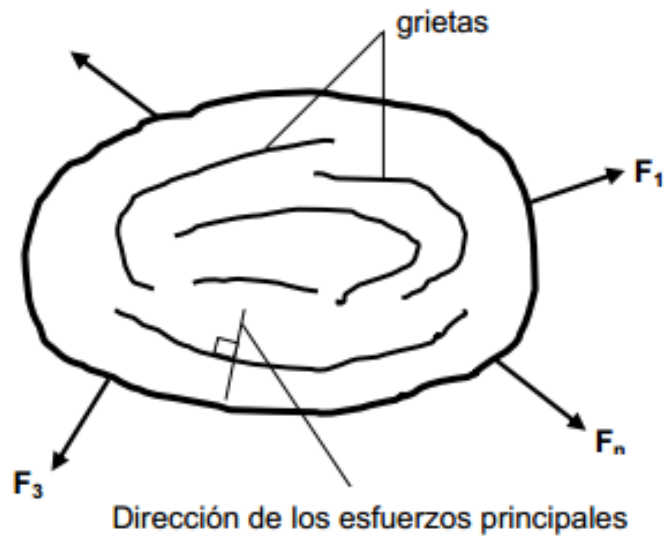


Figura 2.4. Métodos experimentales para la determinación de tensiones mecánicas. [Dr. Carlos Novo Soto. Instituto superior politécnico José A. Echeverría. Página 28].

2.3.3.-Métodos extensométricos.

Es uno de los métodos de cálculo más usados. Obtiene los esfuerzos producidos en la pieza indirectamente, midiendo la deformación ε y aplicando la ley de Hooke (eq.2.5):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.5)$$

La deformación es medida directamente sobre la pieza a estudio. Los extensómetros son los instrumentos utilizados en este tipo de medidas. Los más utilizados son los extensómetros eléctricos debido a que son de pequeñas dimensiones y son capaces de determinar las deformaciones tanto en condiciones estáticas como dinámicas. El inconveniente de este tipo de extensómetros es que una vez fijados a la pieza, el desmontaje conlleva su destrucción.

2.3.4.-Fotoelasticidad.

Esta técnica se basa en los fenómenos experimentados por las ondas electromagnéticas a su paso por materiales transparentes, particularmente la polarización de la luz que ocurre a consecuencia de las tensiones presentes en los cuerpos sometidos a cargas.

Los átomos de una fuente de luz ordinaria emiten pulsos de ondas prácticamente monocromáticos (con una única longitud de onda). Cuando hay un número elevado de átomos emitiendo luz, la oscilación de la onda que cada átomo emite está distribuida de forma aleatoria, y las propiedades del haz de luz son las mismas en todas direcciones, y se dice así que la luz no está polarizada. Si el plano de oscilación de las ondas se unifica en uno sólo, se dice que la luz está polarizada en un plano, o polarizada linealmente (fig.2.5).

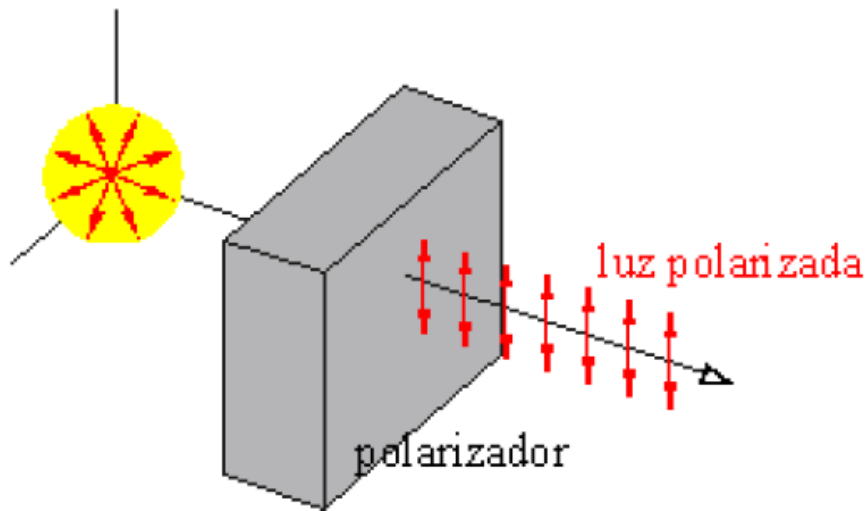


Figura 2.5. Polarizador de luz [Universidad de Santiago de Chile. Facultad de ingeniería. Experiencia E13. Página 4].

Algunas sustancias son anisótropas, es decir, muestran propiedades distintas según la dirección del eje a lo largo del cual se midan. En esos materiales, la velocidad de la luz depende de la dirección en que ésta se propaga a través de ellos. Algunos cristales con estas características también pueden generar una alineación del plano de oscilación de las ondas de luz que los atraviesan, siendo llamados polarizadores. Algunos materiales adquieren esta propiedad polarizadora de la luz al ser sometidos a esfuerzos mecánicos. Si estos materiales bajo tensión se sitúan entre un polarizador y un analizador, las zonas coloreadas claras y oscuras que aparecen proporcionan información sobre las tensiones.



Capítulo 3: Método de elementos finitos

Índice	página
3.1.-Introducción	21
3.2.-Historia de los elementos finitos	23
3.3.-Conceptos generales.....	24
3.4.-Elementos.	25
3.4.1.-Elementos lineales.....	26
3.4.2.-Elementos bidimensionales	28
3.4.3.-Elementos tridimensionales.....	29
3.5.-Ecuaciones generales	31
3.6.-Generación de la malla.....	39
3.6.1.-Comprobaciones.....	40
3.6.2.-Recomendaciones a seguir	43
3.7.-Condiciones de contorno.....	45





3.1.-Introducción

El método de elementos finitos (MEF) ha adquirido gran importancia en la resolución de problemas de ingeniería ya que permite resolver casos que, hasta hace poco, era impensable resolver por los métodos matemáticos tradicionales.

Antiguamente, la solución tomada, era crear prototipos del sistema, ensayarlos y modificarlos iterativamente para obtener las mejoras necesarias. Esta técnica resultaba costosa y suponía gran parte del tiempo del desarrollo del producto.

Debido al alto coste y tiempo de desarrollo, se estudió la posibilidad de crear modelos matemáticos mediante el uso de conceptos físicos, químicos y matemáticos que pudieran definir el comportamiento del cuerpo.

Una solución analítica es aquella expresión matemática que arroja resultados con determinadas incógnitas que requiere la solución de ecuaciones diferenciales, las cuales debido a su complejidad son imposibles de resolver. Sin embargo, gracias a estas metodologías se permite que el problema sea planteado como una serie de ecuaciones algebraicas simultáneas, en lugar de utilizar una resolución a partir de ecuaciones diferenciales complejas.

El método de elementos finitos permite realizar un modelo matemático de cálculo más sencillo y económico que modificar los prototipos. El MEF es, sin embargo, un método aproximado de cálculo, debido a las hipótesis básicas del mismo, por lo que es necesario del uso de prototipos tradicionales, pero más precisos y en menor número.

Este considera a la estructura con un ensamble de pequeñas partículas de tamaño finito. El comportamiento de las partículas y de la estructura global es obtenido formulando un sistema de ecuaciones algebraicas que pueden ser rápidamente resueltas con un ordenador.

Las partículas de tamaño finito son llamadas *elementos finitos* o simplemente *elementos*. Los puntos donde los elementos finitos están interconectados se conocen como *nodos*, y el procedimiento de seleccionar los nodos se denomina *discretización* o modelado (fig.3.1).

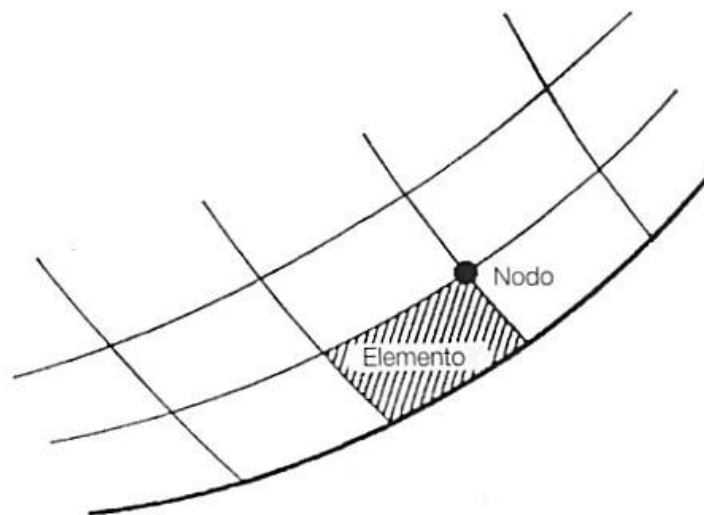


Figura 3.1. Elementos y nodos. [Diseño optimizado de piezas de plásticos. Miguel Sánchez, Antonio Gordillo y Antonio Martínez. Universidad politécnica de Valencia].

El concepto básico del MEF es dividir el cuerpo en un número finito de elementos, (discretización del cuerpo) y posteriormente resolver cada elemento con las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total.

Dentro de la ingeniería mecánica, las aplicaciones prácticas en la mecánica de sólidos pueden agruparse en dos grandes familias: la de los problemas asociados con sistemas discretos y la de problemas asociados a sistemas continuos.

Los sistemas discretos están formados por un ensamblaje de elementos claramente diferenciados unos de otros, y unidos en una serie de puntos concretos, de tal manera que el sistema total tenga forma de malla o retícula.

Los sistemas continuos son los más frecuentes en ingeniería. El sistema no puede ser dividido en forma natural o unidades simples, por lo que su análisis resulta mucho más complejo. Debido a esta razón, para su resolución, es necesario el uso de elementos finitos.



3.2.-Historia de los elementos finitos

El desarrollo moderno del método de los elementos finitos se inició en la década de 1940 en el campo de la ingeniería estructural con el trabajo de Hrennikoff, McHenry y Newmark, quienes emplearon una rejilla de elementos lineales para solucionar esfuerzos en sólidos continuos.

En 1943, a partir de un artículo de 1940, Couran sugirió una interpolación polinomial por pasos sobre regiones triangulares como el método para modelizar problemas de torsión. Con la llegada de los ordenadores digitales en la década de 1950, esta propuesta se pudo llevar a la práctica por los ingenieros para escribir y resolver las ecuaciones de rigidez en forma matricial. Un artículo clásico de Turner, Clough, Martin y Topp, que se publicó en 1956, presentaba las ecuaciones matriciales de rigidez de los puntales, viga y otros elementos.

En 1947, Levy desarrolló la flexibilidad o el método de la fuerza, y en 1953 su obra sugiere que otro método (el método de desplazamiento o rigidez) podría ser una alternativa prometedora para su uso en el análisis de estructuras estáticamente redundantes. Sin embargo, sus ecuaciones serían engorrosas para solucionar con la mano, y por lo tanto el método se hizo popular con la llegada de la computadora digital de alta velocidad.

En 1954 Argyris y Kelsey desarrollaron métodos matriciales de análisis estructural utilizando los principios de la energía. Este hecho ilustra el importante papel que jugaría los principios de la energía en el método de elementos finitos. El primer tratamiento de elementos bidimensionales fue por Turner en 1956.

El documento escrito por Turner indicaba matrices de rigidez para elementos barra, elementos viga y elementos bidimensionales triangulares y rectangulares en tensión plana, describiendo también el procedimiento.

La extensión del método de elementos finitos a problemas en tres dimensiones fue hecho por Martin en 1961, por Gallagher en 1962 y Melosh en 1963. Estos autores desarrollaron en tres dimensiones una matriz tetraedro rígido.

Dada su generalidad el método se amplió a otros campos no estructurales, como la conducción de calor, mecánica de fluidos, etc. donde compitió con otros métodos numéricos como el método de diferencias finitas o el método de volúmenes finitos.



Con la llegada de los centros de cálculo y los primeros programas comerciales en los años 60, el MEF a la vez que se populariza en la industria, refuerza sus bases teóricas en los centros universitarios.

En la década de los 70, en el año 1971, aparece la famosa obra de O.C. Zienkiewicz, titulada *The Finite Element Method* (McGraw Hill, 1971). Este libro contiene una muy completa exposición del MEF, donde las aplicaciones van desde elasticidad lineal hasta problemas de campo, con un tratamiento exhaustivo y riguroso de la formulación matemática.

Así mismo, el número de congresos y reuniones internacionales para tratar los desarrollos del MEF ha ido creciendo desde entonces, contabilizándose más de 20 conferencias internacionales por año dedicadas al método

Desde aquellos años, el método de elementos finitos ha ido desarrollándose de manera logarítmica hasta la actualidad, dando lugar a diversos software comerciales de cálculo, como son: ANSYS, ABAQUS, COSMOS, NASTRAN, etc.

3.3.-Conceptos generales

En cualquier sistema que se vaya a analizar nos vamos a encontrar con un dominio, condiciones de contorno e incógnitas.

- Dominio. Es el espacio geométrico donde se va a analizar el sistema. Puede ser global (a todo el sistema) o local (estudio de una parte del sistema).
- Condiciones de contorno. Conjunto de variables conocidas aplicadas en el dominio que modifican el sistema. Estas variables pueden ser: cargas, desplazamientos, temperatura, etc.
- Incógnitas. Son aquellas variables que se desea conocer una vez que se han aplicado las condiciones de contorno: tensiones, deformaciones, temperaturas, etc.

El problema se divide mediante puntos (caso lineal), líneas (caso bidimensional) o superficies (caso tridimensional), de tal manera que el dominio total de estudio se aproxime mediante el conjunto de elementos en que se subdivide.

Los desplazamientos de los nudos son las incógnitas básicas del problema, y estos determinan unívocamente la configuración deformada de la pieza. Sólo estos desplazamientos nodales se consideran independientes.



El desplazamiento de un punto cualquiera, viene determinado por los desplazamientos de los nudos del elemento al que pertenece el punto.

Para cada elemento, existe un sistema de fuerzas concentradas en los nudos, que equilibran a las tensiones existentes en el contorno del elemento, y a las fuerzas exteriores sobre él actuantes.

Son diversas las fuentes de error en el análisis empleando MEF.

- ✚ Errores de modelización. En la modelización de cargas exteriores, condiciones de contorno y propiedades de los materiales.
- ✚ Errores en la discretización. Se dividen en dos este tipo de errores: errores en la aproximación de la geometría y errores en la discretización.
 1. Errores en la aproximación de la geometría. Por falta de capacidad de las funciones de forma geométricas de representar con exactitud la geometría real. Este problema se puede resolver aumentando el mallado o refinándolo en las zonas conflictivas.
 2. Errores en la discretización. Relacionados con el tamaño del elemento y la función de forma de los desplazamientos de los nodos. Como norma general se emplean elementos pequeños en las zonas de variación rápida de la solución, y elementos grades en las zonas de variación lenta.
- ✚ Errores de computación. Está presente el error en la integración sobre elementos, dado que hay que tomar un grado de polinomio, lo que se acepta un cierto grado de error (asociado al grado del polinomio); y el error en la resolución del sistema de ecuaciones debido a errores de truncamiento en la representación interna del ordenador de los números reales y errores de redondeo.

3.4.-Tipos de elementos

En este apartado se explicarán los elementos básicos, ya sean lineales, bidimensionales y tridimensionales. Según el tipo de elasticidad para los que estén diseñados, se clasifican en:

3.4.1.-Elementos lineales

En el problema unidimensional el dominio continuo que se analiza se extiende según una única dimensión (*eje x*). El problema de elasticidad unidimensional no es de gran aplicación práctica, pero si estudio tiene interés pues permite obtener resultados muy precisos del MEF en problemas sencillo.

Son elementos en los que las propiedades están definidas a lo largo de una línea. Se aplican sobre todo en celosía, pórticos, vigas, rigidizadores, etc. Los elementos más característicos son el elemento Crod y el elemento cbar.

-Elementos CROD.

Es un elemento recto prismático con rigidez axial y rigidez a torsión sobre el eje del mismo. Está definido por dos puntos nodales G_1 y G_2 que representan los extremos del elemento (fig.3.2). Como propiedades a definir se encuentran la sección transversal y la constante de torsión J .

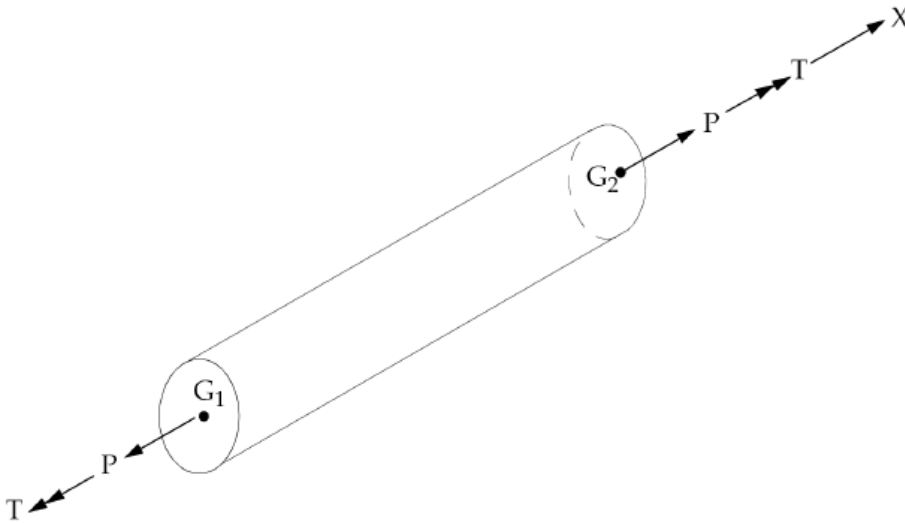


Figura 3.2. Elemento Crod. [<http://www.iberisa.com/soporte/femap/crod.htm>].

- Elemento CBAR

Es un elemento prismático, recto, con rigidez axial a flexión y a torsión. Está definido por dos puntos nodales A y B que representan los extremos del elemento (fig.3.3). La rigidez a flexión y cortante transversal puede definirse en 2 ejes perpendiculares al eje.

Las propiedades deben ser constantes a lo largo de la longitud del elemento.

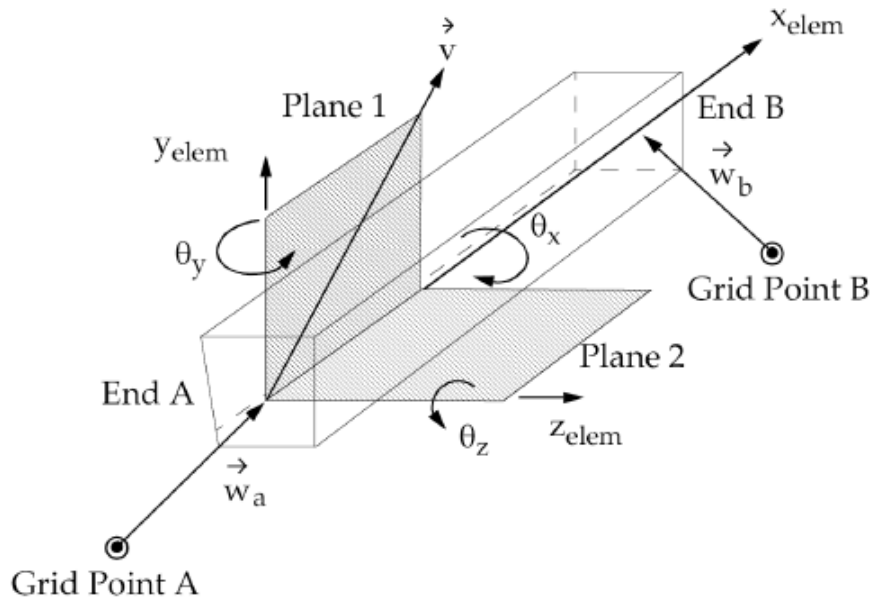


Figura 3.3. Elemento CBAR [<http://www.iberisa.com/soporte/femap/cbar.htm>].

-Elemento CBEAM

Las propiedades de este elementos con como las del elemento CBAR exceptuando que además puede tener sección variable (fig.3.4).

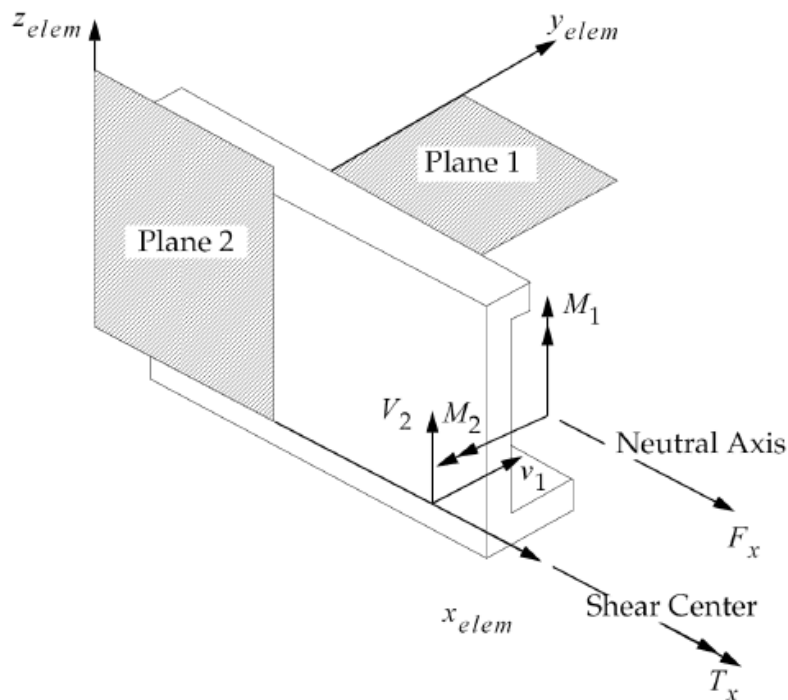


Figura 3.4. Elemento CBEAM. [<http://www.iberisa.com/soporte/femap/cbeam.htm>].

3.4.2.-Elementos bidimensionales

Estos elementos también son llamados elementos placa (plate element) o elementos lámina (Shell element). La diferencia fundamental entre ambas está en la curvatura. Las placas son elementos cuya superficie media es plana, mientras que las láminas son superficies curvadas, como las cúpulas, las conchas o la superficie de los depósitos. Se utilizan para discretizar modelos en los que una de las dimensiones es muy pequeña en comparación con las otras dos. Algunos ejemplos de elementos bidimensionales son:

-Elemento TRIA.

Elemento triangular plano isoparamétrico de 3 nodos (fig.3.5). Se utiliza en la transición de malla. Puede ser excesivamente rígido, especialmente trabajando con cargas de membrana.

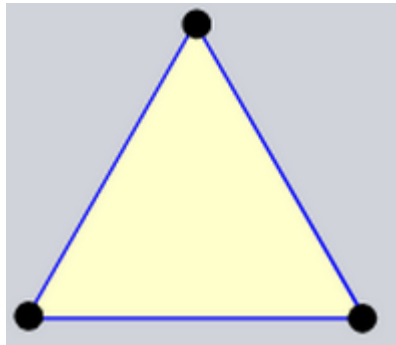


Figura 3.5. Elemento TRIA [Biblioteca de elementos de NASTRAN].

-Elemento CUAD4

Elemento cuadrilátero plano isoparamétrico de 4 nodos que soporta deformación plana (sólido plano) y cargas de flexión cortantes (fig.3.6). Se comporta bien con mallas irregulares, aunque se obtienen buenos resultados con ángulos entre caras de hasta máximo 45°.

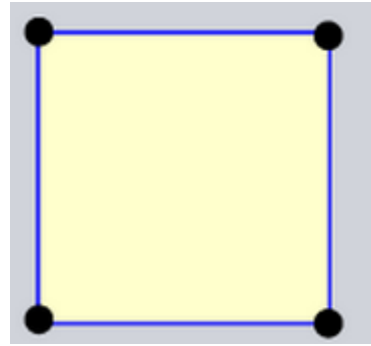


Figura 3.6. Elemento CUAD4[Biblioteca de elementos de NASTRAN].

--Elemento QUAD8

Elemento Shell curvado isoparamétrico parabólico de alto orden con nodos intermedios (8 nodos por elemento) (fig.3.7). Es muy útil para mallar superficies de simple curvatura (cilindros), mientras que el QUAD4 proporciona mejores resultados con superficies de doble curvatura (esferas).

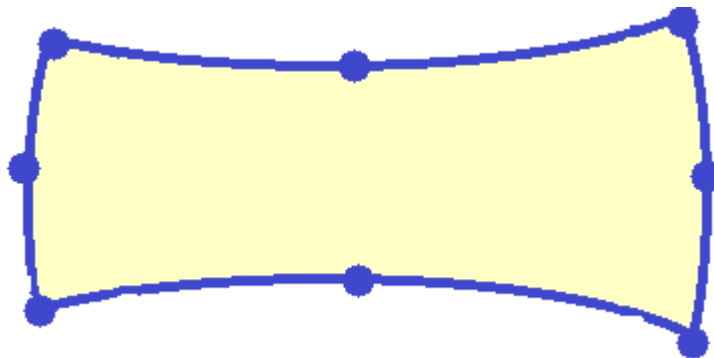


Figura 3.7. Elemento QUAD8. [Biblioteca de elementos de NASTRAN].

3.4.3.-Elementos tridimensionales

Son también los llamados elementos sólidos. Las formas básicas que representan son hexaedros, tetraedros y pentaedros

--Elemento HEXA

Elemento sólido hexaédrico de 8 o 20 nodos (fig.3.8). La precisión se degrada cuando el elemento está afilado y deformado (skewed), o tiene mala relación de aspecto (Aspect Ratio). En la mayoría de los casos, las prestaciones de los elementos sólidos hexaédricos es muy superior al resto de elementos 3D.

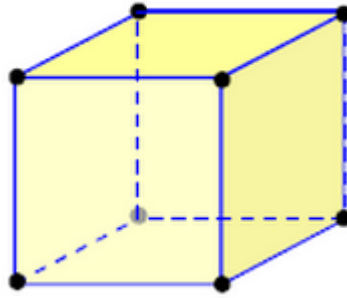


Figura 3.8. Elemento HEXA de 8 nodos [Biblioteca de elementos de NSTRAM].

–Elemento TETRA

Elemento sólido tetraédrico de 4 o 10 nodos y tres grados de libertad de translación por nodo (los sólidos no tienen grado de libertad de rotación (fig.3.9)). El elemento tetraedro de 10 nodos (alto orden) es el preferido frente al de 4 nodos, ya que el elemento de 4 nodos tiende a ser excesivamente rígido. El mallado con tetraedros se utiliza habitualmente para mallar sólidos de geometría compleja ya que los algoritmos de mallado sólido con tetraedros son muy rápidos y eficientes.

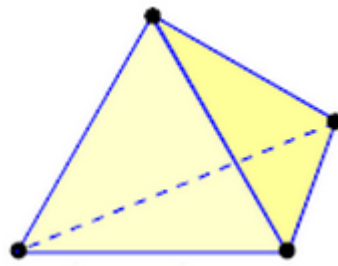


Figura 3.9. Elemento TETRA de 4 nodos [Biblioteca de elementos de NSTRAM].

–Elemento PENTA

Elemento sólido prisma triangular de 6 o 15 nodos que se utiliza normalmente como elemento de transición de sólidos a Shells, o en áreas donde se ha utilizado el triángulo para mallar superficies (fig.3.10).

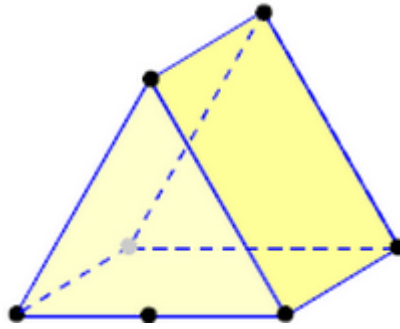


Figura 3.10. Elemento PENTA de 6 nodos [Biblioteca de elementos de NSTRAM].

3.5.-Ecuaciones generales

El campo de deformaciones en un punto cualquiera del dominio está definido por un vector \mathbf{u} que tiene tantas componentes como deformaciones existen en el dominio. Para el caso de un problema espacial es:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Si se considera un elemento finito arbitrario, el campo de deformaciones se aproxima, haciendo uso de la hipótesis de interpolación, como un promedio ponderado de las deformaciones en cada uno de los n nudos del elemento (eq.3.2, eq.3.3 y eq.3.4), siendo los factores de interpolación las funciones de interpolación o funciones de forma:

$$u = \sum N_i U_i \quad (3.2)$$

$$v = \sum N_i V_i \quad (3.3)$$

$$w = \sum N_i W_i \quad (3.4)$$

Esta interpolación puede ponerse en forma matricial (eq.3.5):

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e \quad (3.5)$$

Donde δ^e es el vector de todas las deformaciones nodales del elemento (eq.3.6):



$$\delta^e = \{U_1 V_1 W_1 U_2 V_2 W_2 \dots U_n V_n W_n\} \quad (3.6)$$

La matriz de funciones de interpolación o funciones de forma N tiene tres filas y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nudos del elemento (eq.3.7). La estructura de esta matriz siempre es del tipo:

$$N = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento, con la suposición de pequeñas deformaciones (eq.3.8), son:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

Se puede poner en la forma matricial siguiente (eq.3.9):

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\} = \partial \mathbf{u} \quad (3.9)$$



El operador matricial ∂ permite pasar de las deformaciones de un punto u a las deformaciones unitarias ε . Este operador tiene tantas filas como deformaciones unitarias haya en el problema y tantas columnas como componentes tenga el campo de desplazamientos u .

Con ello obtenemos la siguiente relación (eq.3.10):

$$\varepsilon = \partial \mathbf{u} = \partial \mathbf{N} \delta^e \quad (3.10)$$

En esta relación se identifica la matriz \mathbf{B} (eq.3.11):

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} \quad (3.11)$$

Por lo que se cumple una relación entre ε y \mathbf{B} (eq.3.12):

$$\varepsilon = \mathbf{B} \delta^e \quad (3.12)$$

Esta matriz \mathbf{B} relaciona las deformaciones en los nudos del elemento δ^e con las deformaciones unitarias en un punto interior cualquiera del elemento. Por tanto \mathbf{B} representa el campo de deformaciones unitarias existente en el interior del elemento finito.

Dada la estructura de la matriz \mathbf{N} , la matriz \mathbf{B} (eq.3.13) se puede poner en la forma:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} = \partial \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{array} \right\} \quad (3.13.a)$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n\} \quad (3.13.b)$$

Cada una de las matrices \mathbf{B}_i tiene la forma siguiente (eq.3.14):



$$\mathbf{B}_i = \boldsymbol{\theta} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

El estado de tensiones (eq.3.15) en un punto cualquiera del dominio está definido por el tensor de tensiones en dicho punto, cuya expresión general es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Además se conoce la ecuación constitutiva del material que forma el dominio, y que relaciona las tensiones con las deformaciones unitarias (eq.3.16). Para un material elástico lineal esta ecuación constitutiva se puede poner de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3.16)$$

Siendo:

- \mathbf{D} , la matriz elástica, que para un material elástico lineal es constante y depende del módulo de elasticidad y del coeficiente de Poisson (eq.3.17). Su valor es:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.17. a)$$

Donde:



$$\lambda = \frac{Ev}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.17. b)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.17. c)$$

- ε_0 es el vector de las deformaciones unitarias iniciales existentes en el material en el punto considerado, debidas normalmente a las temperaturas, aunque pueden incluirse en ellas las debidas a errores de forma, etc.
- σ_0 son las tensiones iniciales presentes en el material, de valor conocido. Estas tensiones pueden ser debidas por ejemplo a tensiones residuales tras un tratamiento térmico.

Una vez establecidas las expresiones que relacionan los desplazamientos, las deformaciones unitarias y las tensiones, en función del desplazamiento de los nudos, se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio de un elemento finito. Las fuerzas que actúan sobre un elemento finito cualquiera son las siguientes (fig.3.11):

- Fuerzas exteriores de volumen aplicadas en el interior del elemento q_v , que generalmente varían dentro de un mismo elemento y que tiene tantas componentes como desplazamientos haya en cada punto.
- Fuerzas exteriores de superficie aplicadas en el contorno libre del elemento q_n , que en general son variables a lo largo del contorno. Al contorno donde actúan estas fuerzas se le denomina s .
- Fuerzas interiores q_0 , aplicadas en la superficie del contorno de unión del elemento con los elementos vecinos, que son desconocidas. A dicho contorno de unión se le denomina c .
- Fuerzas exteriores puntuales aplicadas sobre los nudos del elemento P_N^e .

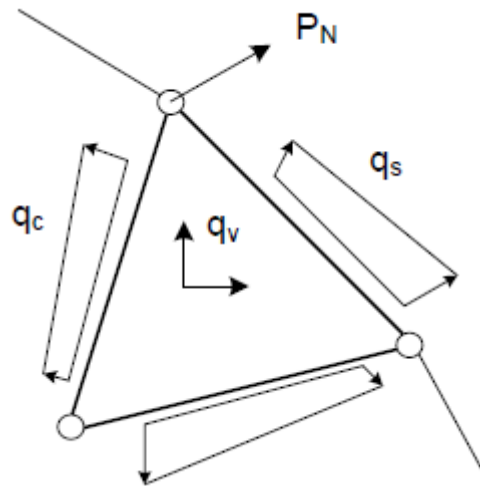


Figura 3.11. Fuerzas sobre un elemento [Método de los Elementos finitos para Análisis estructural. Juan Tomás Celigueta Lizarza. TEcnun.2008. Pág 19.].

Aplicando PFV a estas fuerzas y utilizando las expresiones anteriores, se llega a la ecuación final de equilibrio (eq.3.18) del elemento finito considerado:

$$\begin{aligned}
 \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \delta^e &= \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon_0 dv \\
 &- \int_v \mathbf{B}^T \sigma_0 dv + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Esta es la ecuación final de equilibrio del elemento finito considerado. En ella se diferencian los siguientes términos:

- ✚ Matriz de rigidez del elemento finito (eq.3.19). Se trata de una matriz cuadrada simétrica y en general, singular (no tendrá inversa) de tamaño igual al número de grados de libertad del elemento.

$$\mathbf{K}^e = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \tag{3.19}$$

- ✚ Vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas actuantes por unidad de volumen (eq.3.20) (fig.3.12).

$$\mathbf{P}_v^e = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv \tag{3.20}$$

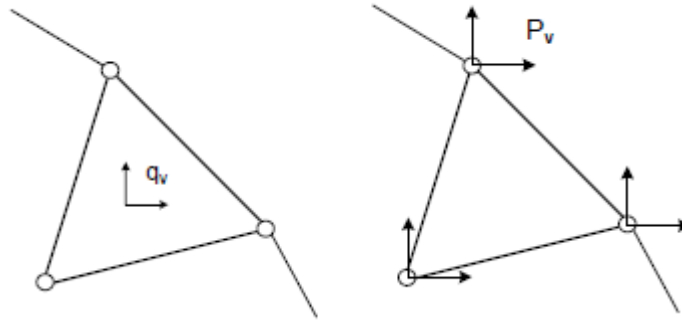


Figura 3.12. Fuerzas nodales equivalentes a las de volumen. [Método de los Elementos finitos para Análisis estructural. Juan Tomás Celigueta Lizarza. TECnun.2008. página 22].

- ✚ Vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores de superficie (eq.3.21) (fig.3.13).

$$\mathbf{P}_s^e = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds \quad (3.21)$$

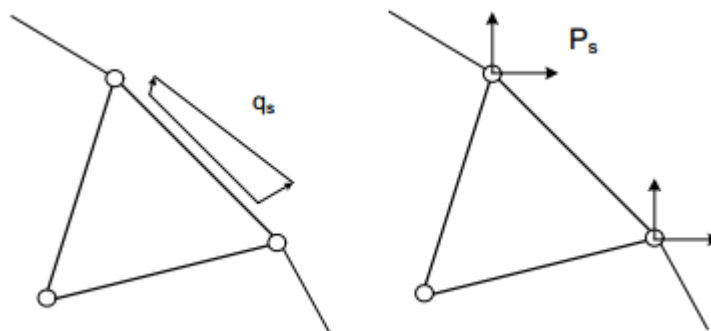


Figura 3.13. Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores de superficie. [http://www1.ceit.es/asignaturas/Estructuras2/Ecuaciones%20generales.pdf].

- ✚ Vector de fuerzas nodales equivalentes producidas por las deformaciones iniciales en el material (eq.3.22) (fig.3.14).

$$\mathbf{P}_T^e = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon_0 dv \quad (3.22)$$

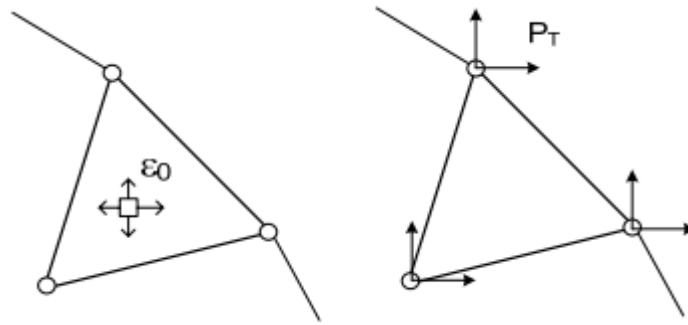


Figura 3.14. Fuerzas nodales equivalentes producidas por las deformaciones iniciales en el material
[\[http://www1.ceit.es/asignaturas/Estructuras2/Ecuaciones%20generales.pdf\]](http://www1.ceit.es/asignaturas/Estructuras2/Ecuaciones%20generales.pdf).

- ✚ Vector de fuerzas nodales equivalentes debidas a las tensiones iniciales existentes en el material (eq.3.23) (fig.3.15).

$$\mathbf{P}_b^e = - \int_v \mathbf{B}^T \sigma_0 dv \quad (3.23)$$

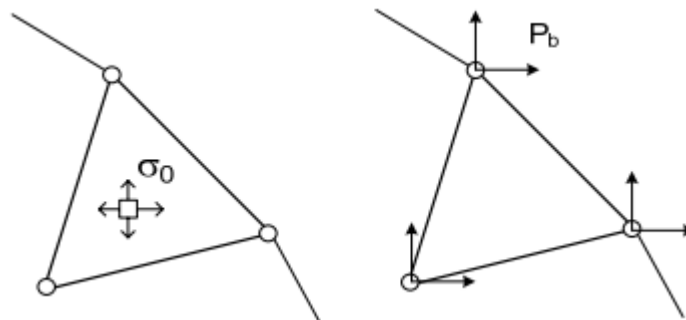


Figura 3.15. Vector de fuerzas nodales debidas a las tensiones existentes en el material.
[\[http://www1.ceit.es/asignaturas/Estructuras2/Ecuaciones%20generales.pdf\]](http://www1.ceit.es/asignaturas/Estructuras2/Ecuaciones%20generales.pdf).

- ✚ Vector de fuerzas equivalentes a las fuerzas distribuidas aplicadas sobre los contornos de unión con elementos vecinos (fig.3.16).

$$\mathbf{P}_c^e$$

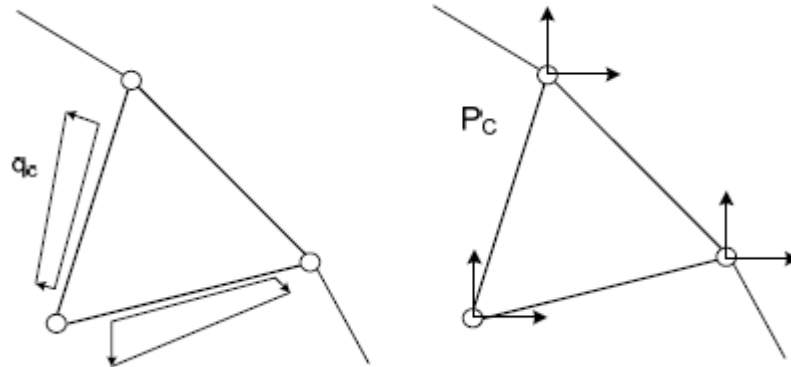


Figura 3.16. Fuerza de conexión entre elementos. [Método de los Elementos finitos para Análisis estructural. Juan Tomás Celigueta Lizarza. TEcnun.2008. página 21].

🚦 Fuerzas exteriores puntuales aplicadas sobre los nudos del elemento e.

$$P_N^e$$

Finalmente la ecuación de equilibrio del elemento (eq.3.24) puede ponerse en la forma compacta como:

$$K^e \delta^e = P_v^e + P_s^e + P_T^e + P_b^e + P_c^e + P_N^e \quad (3.24)$$

En esta ecuación son conocidos todos los términos de carga salvo el debido a las fuerzas distribuidas interiores P_c^e que se producen en el contorno de unión con los elementos vecinos.

3.6.-Generación de la malla

La red de elementos y nodos que “discretizan” una región se conoce como *malla*. Cuantos más elementos haya en una región dada, mayor será su densidad. Por lo general, los resultados mejoran cuando la densidad de malla se incrementa en áreas de gradientes de esfuerzo alto y/o cuando las zonas de transición geométrica se enmallan de manera uniforme. Generalmente, pero no siempre, los resultados de MEF convergen hacia resultados exactos a medida que el enmallado se refina continuamente. Para valorar la mejora, en las regiones donde aparecen grandes gradientes de esfuerzo alto, la estructura puede volver a enmallarse con una densidad mayor. Existen tres formas básicas para generar una malla de elementos: manual, semiautomática o completamente automatizada.

- Generación manual de mallas. Este era el proceso por el cual se creaban las mallas los primeros años de existencia del MEF. Es un proceso lento y laborioso usado hoy en día para problemas muy simples.
- Generación semiautomática de malla. A lo largo de los años se han desarrollado algoritmos computacionales que le permiten al modelador enmallar de manera automática las regiones de la estructura que se está dividiendo, mediante el empleo de algoritmos bien definidos. Puesto que el modelador tiene que definir estas regiones, la técnica considerada es semiautomática.
- Generación completamente automatizada de mallas. La mayor parte de los distribuidores de software han concentrado sus esfuerzos en desarrollar la generación completamente automática de mallas, y en algunos casos, un refinamiento para mallas automáticas autoadaptable, como es el caso de Autodesk Inventor. El objetivo obvio es reducir de manera significativa el tiempo de preprocesamiento del modelador así como del esfuerzo para llegar a una malla de elementos finitos bien construida.

3.6.1.-Comprobaciones

Cuando el empleo de la malla es manual o semiautomático, existen una serie de comprobaciones que permiten saber si la malla se ha realizado de forma correcta.

- ✚ Aspect Ratio: Solo utilizable para elementos triangulares y cuadriláteros. La relación largo/ancho o “Aspect ratio” debe ser lo más cercana a 1 (fig.3.17). Se permiten ratios de hasta 5, pero siempre que sea posible se mantendrá por debajo de 3.

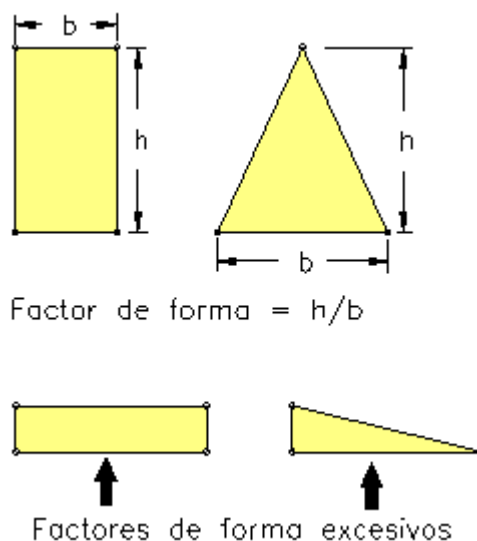


Figura 3.17. Aspect ratio [http://www.iberisa.com/soporte/femap/reglas_mallado.htm].



- + **Warpage:** Permite controlar que los nodos de los elementos bidimensionales están formando un plano. Para elementos bidimensionales se calcula cortando los elementos cuadriláteros en dos triángulos y encontrando el ángulo entre las normales de los planos formados (fig.3.18). Por criterio se establece un límite de 5° .

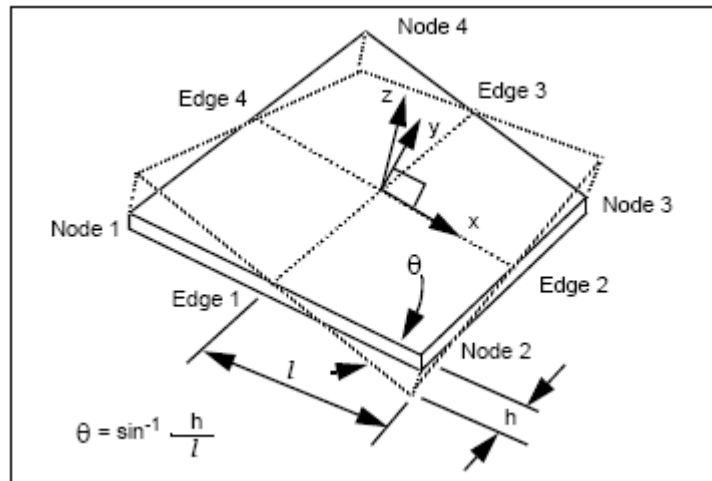


Figura 3.18. Warpage

[http://www.mscsoftware.com/training_videos/patran/Reverb_help/index.html#page/Finite%2520Element%2520Modeling/verify_forms.12.4.html#ww1092]

- + **Skew:** Se comprueba el ángulo formado por cada conjunto de lados consecutivos del elemento (fig.3.19). Para elementos triangulares, este ángulo interior debe estar comprendido entre 30° y 120° y para los elementos cuadriláteros entre 45° y 135° .

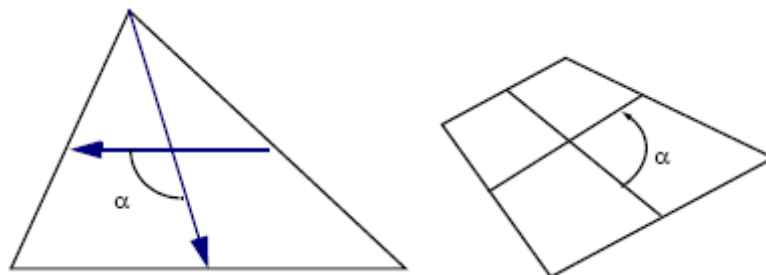


Figura.3.19. Ángulo de skew.

[http://www.mscsoftware.com/training_videos/patran/Reverb_help/index.html#page/Finite%2520Element%2520Modeling/verify_forms.12.4.html#ww1092].

- + **Distorsión de los elementos.** Se mide mediante un valor (índice jacobiano) que indica la desviación del elemento respecto al ideal (fig.3.20 y fig.3.21). Modelos con un índice jacobiano menor de 0.4

dará resultados poco precisos y aumentando el tiempo de cálculo considerablemente incluso llegando a no poder calcular.

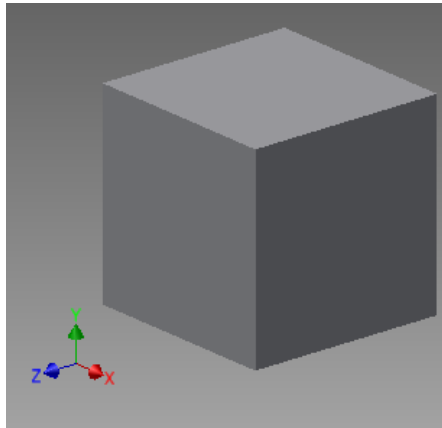


Figura 3.20. Pieza con un índice jacobiano de $J=1$.

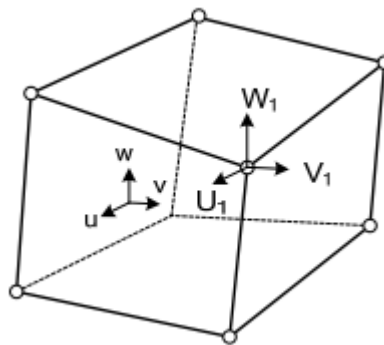


Figura 3.21. Pieza con un índice jacobiano de $J=0.8$.

- ✚ Elementos duplicados. Es posible que haya dos elementos iguales en la misma posición es preciso eliminar uno de ellos.

Como tabla resumen (tabla 3.1) existe un rango de calidad para los elementos finitos:



	Distorsión	Warpage	Ángulo Interior
Cuadriláteros	0.6	50	135-450
Triángulos	0.35	---	90-300
Hexaedros	0.5	50	135-450
Pentaedros	0.35	---	90-300
Tetraedros	0.1	---	90-300

Tabla 3.1. Tabla resumen de comprobaciones de malla.

3.6.2.-Recomendaciones a seguir

A la hora de crear una malla es conveniente seguir las siguientes recomendaciones:

- Siempre que sea posible, usar un mallado uniforme (igual separación entre nodos). En regiones de transición de alta a baja densidad de malla, no cambiar las dimensiones de los elementos adyacentes por un factor mayor de 2. Si fuera necesario, hacer la transición sobre una serie de elementos para mantener este factor (fig.3.22).

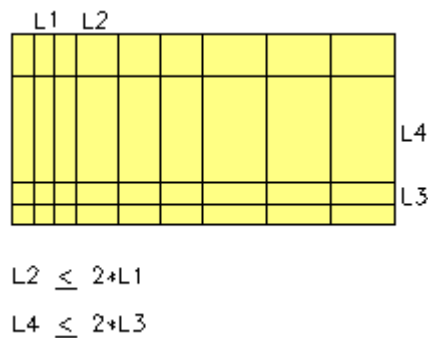


Figura 3.22.Región de transición de un mallado de elementos finitos [http://www.iberisa.com/soporte/femap/reglas_mallado.htm].

- Siempre que sea posible mallar con cuadriláteros en vez de elementos triangulares. Es recomendable usar elementos triangulares solo para transiciones de malla o por exigencias geométricas (fig.3.23).

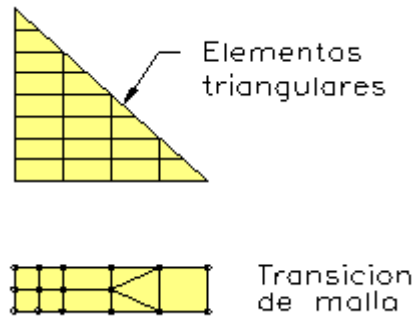


Figura 3.23. Mallado con cuadriláteros en vez de elementos triangulares.
 [http://www.iberisa.com/soporte/femap/reglas_mallado.htm].

- Los elementos triangulares y los cuadriláteros no deben presentar ángulos extremadamente agudos u obtusos (fig.3.24). No se permiten desviaciones superiores a 30° del ángulo óptimo equilátero en elementos triangulares y del ángulo recto en cuadriláteros.

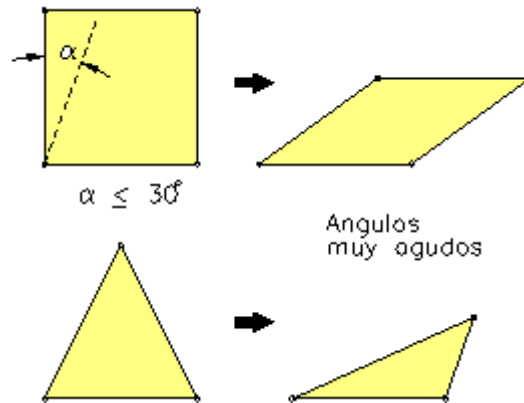


Figura 3.24. Desviaciones máximas de ángulos en cuadriláteros y triángulos.
 [http://www.iberisa.com/soporte/femap/reglas_mallado.htm].

- Las superficies curvadas pueden mallarse con elementos planos, pero el ángulo barrido no debe ser mayor de 15° y los nodos del elemento deben estar en el mismo plano (fig.3.25).

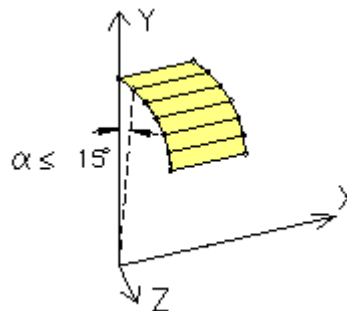


Figura 3.25. Ángulo de barrido máximo
 [http://www.iberisa.com/soporte/femap/reglas_mallado.htm].



- Los elementos no deben abarcar zonas de cambios de espesor o con discontinuidades geométricas, lo que causaría errores numéricos y resultados inexactos. En estos casos es recomendable añadir nodos adicionales y usar elementos de menor tamaño (fig.3.26).

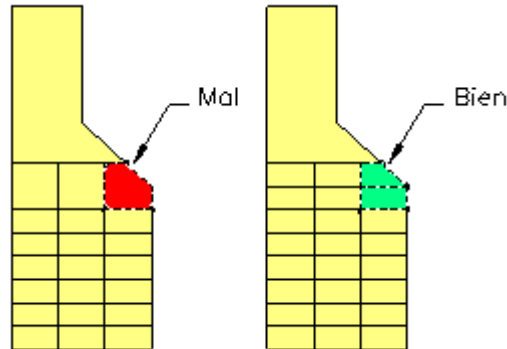


Figura 3.26. Zonas de cambio de espesor.
[http://www.iberisa.com/soporte/femap/reglas_mallado.htm].

- En general un análisis de tensiones requiere una malla más densa que un análisis de desplazamientos. En el caso de este proyecto, el programa calculará tanto un análisis de tensiones como de deformaciones puesto que el cálculo computacional no va a ser elevado al tratarse de piezas sencillas y de geometría bien definida.

3.7.-Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno son conocidas, pero es muy importante saber cómo implementarlas en elementos finitos.

Las cargas son fuerzas aplicadas a una pieza o un ensamblaje durante la operación. Estas cargas provocan tensiones, deformaciones y desplazamientos de los componentes.

Los tipos de cargas disponibles en Autodesk Inventor son: Fuerza [N], Presión [MPa], carga de rodamientos [N], carga de momento [N·mm] y fuerza remota [N] (fig.3.27).

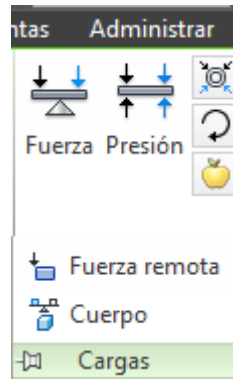


Figura 3.27. Aplicación de cargas de Autodesk Inventor.

También es posible añadir cargas de la pieza, las cuales actúan sobre toda la masa o volumen de un componente. En las piezas a utilizar para el cálculo del factor teórico de concentración de tensiones K_t , no se van a utilizar este tipo de cargas. Las más comunes son: fuerza gravitatoria, y cargas de la pieza que se crean mediante aplicación lineal, como aceleración lineal y velocidad y aceleración angulares.

En cuanto a las restricciones de movimiento hay restricción fija, de pasador y restricción sin fricción.

- ✚ Restricción fija. Se aplica a una cara, arista o vértice de la pieza. Esta restricción permite establecer un desplazamiento igual a cero o distinto de cero en dirección x, y, z. Por ejemplo, si el componente está fijo o soldado normalmente se fijan tres direcciones.
- ✚ Restricción de pasador. Se aplica en las caras cilíndricas. Esta restricción impide que las caras cilíndricas se desplacen o se deformen en combinaciones de direcciones radiales, axiales o tangenciales.
- ✚ Restricción sin fricción. Se aplica sobre una superficie plana o cilíndrica de la pieza. Esta restricción impide que la superficie se desplace o se deforme en la dirección normal con respecto a la superficie.



Capítulo 4: Diseño de elementos sometidos a fatiga





El factor de concentración del esfuerzo en fatiga K_f debe utilizarse cuando se diseñe un elemento para evitar la falla. La cantidad por la que se debilita un elemento por la presencia de una concentración de esfuerzos al considerar tanto el material como agudeza de la muesca, se define como $K_f =$ “factor de reducción de resistencia a la fatiga”.

El factor resultante se define mediante la siguiente ecuación (eq.4.1):

$$K_f = \frac{\text{esfuerzo máximo en la pieza de prueba con muesca}}{\text{esfuerzo en la pieza de prueba sin muesca}} \quad (4.1)$$

Este factor se podría determinar en una prueba real. Sin embargo en el caso típico se determina al combinar el factor de concentración de tensiones K_t , definido en la sección anterior y el factor del material, llamado *sensibilidad a la muesca* “q” (eq.4.2). Se define:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad \text{o} \quad q_{CORTANTE} = \frac{K_{fs} - 1}{K_{ts} - 1} \quad (4.2)$$

donde q se encuentra normalmente ente 0 y la unidad y en consecuencia, K_f varía de 1 a K_t .

Analizando la ecuación, vemos que si $q=0$, $K_f=1$ y la pieza no tiene ninguna sensibilidad a la muesca; sin embargo si $q=1$ entonces $K_f=K_t$, y la pieza tiene total sensibilidad a la muesca puesto que el factor teórico de concentración de tensiones no depende del material.

Como es difícil obtener valores fiables de q, lo más seguro es tomar $K_f=K_t$, siendo $q=1$.

Cuando se conoce q, se puede calcular K_f mediante una de las ecuaciones siguientes (eq.4.3):

$$K_f = 1 + q (K_t - 1) \quad \text{o} \quad K_{fs} = 1 + q (K_{ts} - 1) \quad (4.3)$$

En el caso de aceros y aleaciones de aluminio forjado sometidas a flexión inversa y cargas axiales inversas, se puede usar la tabla siguiente (fig.4.1) para obtener el valor de q.

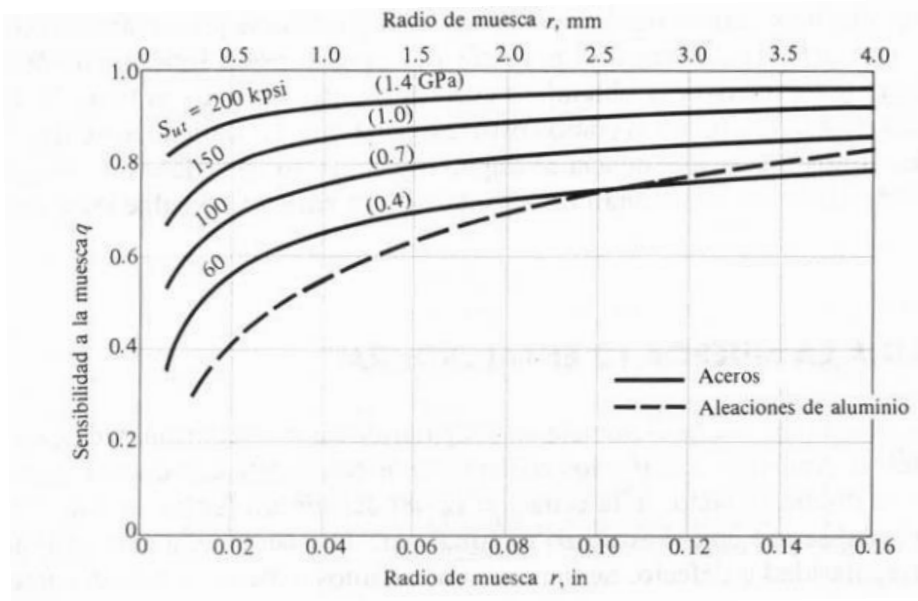


Figura 4.1. Sensibilidad a la muesca en el caso de aceros y aleaciones de aluminio forjado sometidas a flexión inversa de cargas axiales inversas. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Richard G. Budynas y J.Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. pág 287. Figura 6-20].

Para materiales sometidos a torsión inversa se puede usar la tabla mostrada en la figura 4.2:

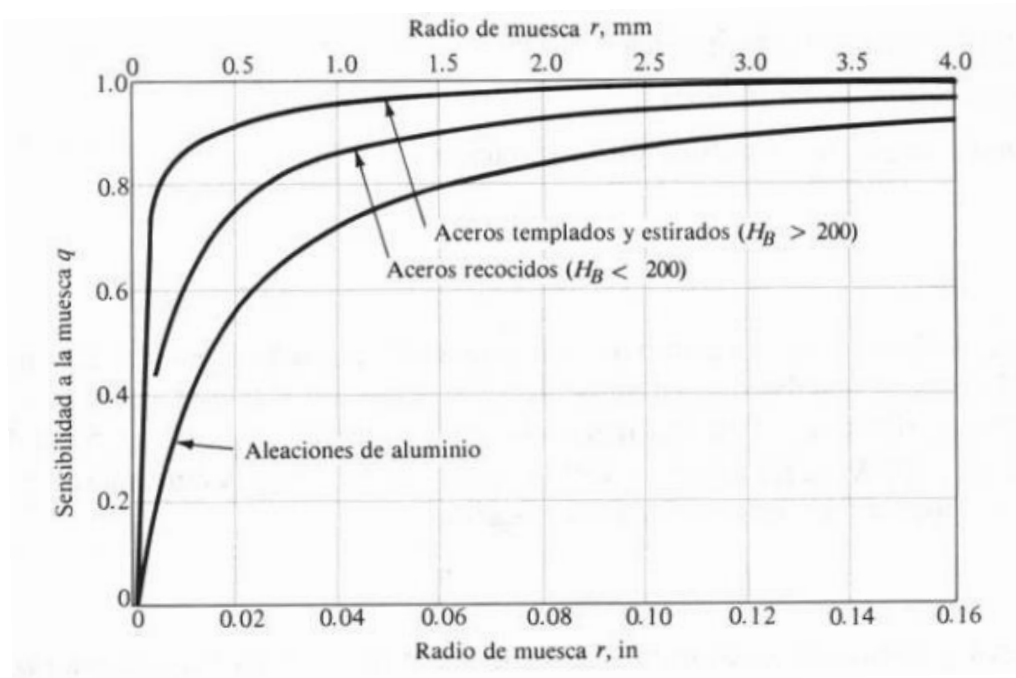


Figura 4.2. Sensibilidad a la muesca de materiales sometidos a torsión inversa. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Richard G. Budynas y J.Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. pág 288. Figura 6-21].



Capítulo 5: Software de modelización y simulación. Autodesk Inventor

Índice	página
5.1.-Fujo de trabajo.....	53
5.1.1.- Pre-proceso.....	53
5.1.1.- Solución.....	53
5.1.1.- Pos-proceso	54
5.2.- Autodesk Inventor.....	54
5.3.-Qué debe analizarse antes de un cálculo por elementos finitos.....	56





5.1.-Flujo de trabajo

Una simulación depende de que la información inicial sea precisa. Si las condiciones de contorno son malas, el resultado nunca será bueno. Es importante modelar con precisión y especificar las condiciones físicas reales (restricciones de movimiento, materiales, cargas, etc).

Las tres fases principales para crear una simulación por elementos Finitos son las siguientes (fig.5.1):

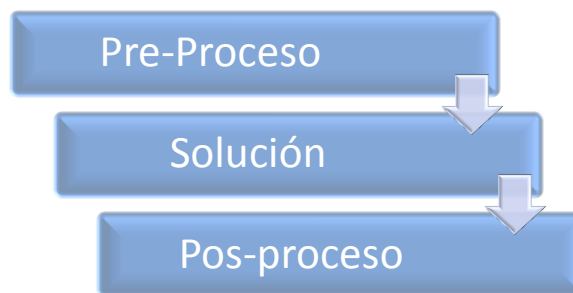


Figura 5.1. Flujo de trabajo para la simulación mediante Elementos Finitos.

5.1.1.- Pre-proceso

El propósito principal del pre-proceso es generar el modelo de elementos finitos, el cual consiste principalmente de nodos, elementos y las propiedades del material.

Usualmente se inicia con la definición de la geometría del modelo

El modelo sólido es una representación matemática de herramientas CAD que define la geometría del modelo. Puede consistir de sólidos o superficies dependiendo del análisis que se lleve a cabo. El caso de este proyecto es un análisis estático de tensión por lo que las piezas son sólidas y en tres dimensiones.

5.1.2.- Solución

En el paso de solucionar se deja que el solucionador calcule la solución de elementos finitos.

Es siempre recomendable revisar los datos del análisis antes de llevar a cabo la solución:



- ✚ Propiedades del material: Módulo de Young, densidad si es un análisis inercial.
- ✚ Densidad de la malla, especialmente en zonas de concentración de esfuerzos.
- ✚ Valores de carga y direcciones.
- ✚ Restricciones de movimiento.
- ✚ Tipo de Elemento.

5.1.3.- Pos-proceso

El pos-proceso es el paso final en el proceso de análisis por elementos finitos. Es imprescindible que se interpreten los resultados de acuerdo a las consideraciones tenidas en cuenta en la generación del modelo y en la solución.

En algunos casos hay que tomar decisiones de diseño basados en los resultados, por lo que es una buena idea no solo revisar los resultados si no también validar la solución.

5.2.- Autodesk Inventor

Autodesk Inventor es un paquete de modelado paramétrico de sólidos en 3D producido por la empresa de software Autodesk. Entró en el mercado en el año 1999 como respuesta a la creciente migración de su base de clientes de diseño mecánico en dos dimensiones hacia la competencia.

Autodesk Inventor permite de manera sencilla modelar una pieza en 3D (fig.5.2)

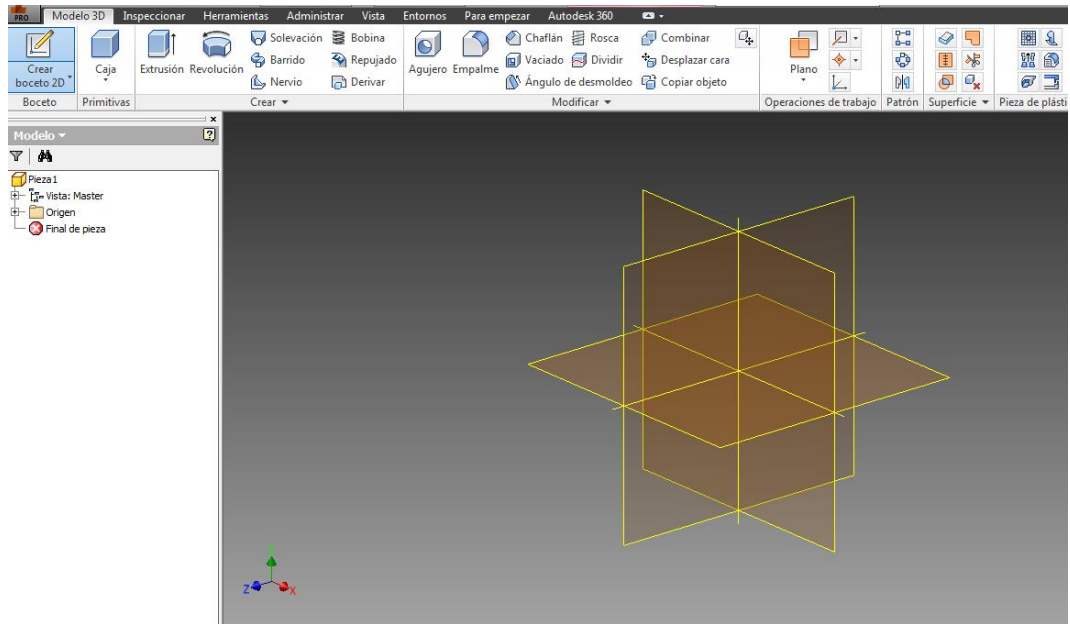


Figura 5.2. Autodesk Inventor.

Crear un análisis de tensión tampoco supone ningún problema y de forma rápida y precisa es posible obtener un análisis de tensión (fig.5.3). Un programa de Elementos Finitos siempre da una solución pero es trabajo del modelador el validar o no la simulación.

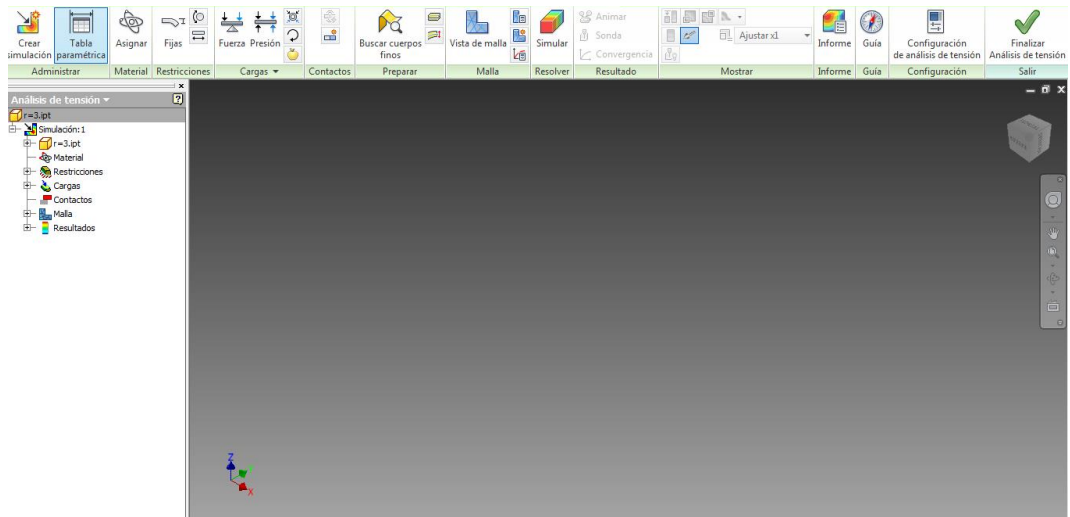


Figura 5.3. Análisis de tensión.



5.3.- Qué debe analizarse antes de un cálculo por elementos finitos

Cada vez que se use el método de elementos finitos para resolver cualquier problema, conviene reflexionar sobre algunos aspectos.

- ✚ Objetivo del análisis. Estudiar qué es lo que se pretende conseguir en el análisis (determinar tensiones, temperaturas, evolución del sistema, frecuencias, etc.). Este estudio determina el tipo de análisis a realizar.
- ✚ Geometría a analizar. Es conveniente simplificar al máximo la geometría de la pieza ya que la mayoría de los detalles son insignificantes y lo único que conllevan es un consumo excesivo de tiempo de cálculo y espacio de almacenamiento. Para lograr este objetivo se deben buscar simetrías, antisimetrías, axisimetrías, problemas de tensión o deformación plana, etc. Una vez que se ha estudiado la geometría se podrá decidir el tipo o tipos de elementos a utilizar, características de los mismos, así como las propiedades de los materiales a utilizar.
- ✚ Condiciones de contorno. Las condiciones de contorno son conocidas pero se debe estudiar si son o no influyentes en el tipo de análisis que se va a realizar. Una vez decididas las condiciones de contorno se ha de estudiar la forma de aplicarlas, si representan las condiciones reales del problema, si existe equilibrio (en análisis estáticos), etc. La imposición de condiciones de contorno adecuadas una de las decisiones más complejas a la hora de realizar un análisis por elementos finitos. Además se debe tener extremo cuidado cuando se aplican cargas puntuales en los nodos, puesto que estas cargas producirían picos de tensión y los resultados estarían “falseados”.
- ✚ Resultados. Para saber si un análisis es correcto o si se ajusta a la realidad hay que tener unas nociones básicas de cómo se va a comportar o cómo va a responder el sistema ante las condiciones de contorno impuestas. Por ejemplo, si se va a estudiar una viga sometida a flexión, y como resultado se obtiene una viga que se contrae, se debe pensar que el problema no se ha realizado correctamente, ya sea por el modelado del cuerpo, el mallado, la aplicación de las cargas, etc.

Una vez estudiados estos cuatro puntos, se puede empezar a realizar un análisis por Elementos Finitos



Capítulo 6: Análisis del factor teórico de concentración de tensiones mediante MEF

Índice	página
6.1.- Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción	
simple	61
6.1.1.-Definición	61
6.1.2.-Geometría	62
6.1.3.-Modelización	63
6.1.4.-Simulación	70
6.1.5.-Resultados	74
6.1.6.-Conclusiones	76
6.2.-Barra rectangular con entallas trasnversales sometida a flexión	79
6.2.1.-Definición	79
6.2.2.-Geometría	80
6.2.3.-Modelización	81
6.2.4.-Simulación	84
6.2.5.-Resultados	88
6.2.6.-Conclusiones	90



6.3.-Barra circular con entallas circunferenciales sometida a tracción	92
6.3.1.- Definición	92
6.3.2.-Geometría.....	93
6.3.3.-Modelización.....	95
6.3.4.-Simulación.....	98
6.3.5.-Resultados	102
6.3.6.-Conclusiones	103
6.4.-Barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión	107
6.4.1.-Definición.....	107
6.4.2.-Geometría.....	108
6.4.3.-Modelización.....	109
6.4.4.-Simulación.....	112
6.4.5.-Resultados	115
6.4.6.-Conclusiones	117
6.5.-Barra circular con entalla circunferencial sometida a torsión.....	121
6.5.1.-Definición.....	121
6.5.2.-Geometría.....	122
6.5.3.-Modelización.....	123
6.5.4.-Simulación.....	126
6.5.5.-Resultados	132
6.5.6.-Conclusiones	134
6.6.-Barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción	138
6.6.1.-Definición.....	138
6.6.2.-Geometría.....	139
6.6.3.-Modelización.....	141
6.6.4.-Simulación.....	144



6.6.5.-Resultados	147
6.6.6.-Conclusiones	149
6.7.- Barra rectangular con agujero central sometida a tracción	152
6.7.1.-Definición	152
6.7.2.-Geometría	153
6.7.3.-Modelización	154
6.7.4.-Simulación	159
6.7.5.-Resultados	162
6.7.6.-Conclusiones	163
6.8.- Barra circular con agujero transversal sometida a flexión.....	167
6.8.1.-Definición	167
6.8.2.-Geometría	168
6.8.3.-Modelización	171
6.8.4.-Simulación	176
6.8.5.-Resultados	179
6.8.6.-Conclusiones	180





6.1.-Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción simple.

6.1.1.-Definición

Se trata de una placa rectangular con cambio de sección mediante el redondeo de un empalme de radio r .

Se tomará como valor nominal para el cálculo del valor teórico K_t , la tensión σ_0 (eq.6.1).

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{d \cdot t} \quad (6.1)$$

Donde:

σ_0 : Tensión nominal [MPa]

F: Fuerza axial aplicada a ambos lados de la pieza [N]

d: Ancho más pequeño de la pieza [mm]

t: espesor [mm]

En este caso, la gráfica que nos relaciona la geometría con el factor teórico de concentración de tensiones K_t , es la mostrada en la fig. 6.1.

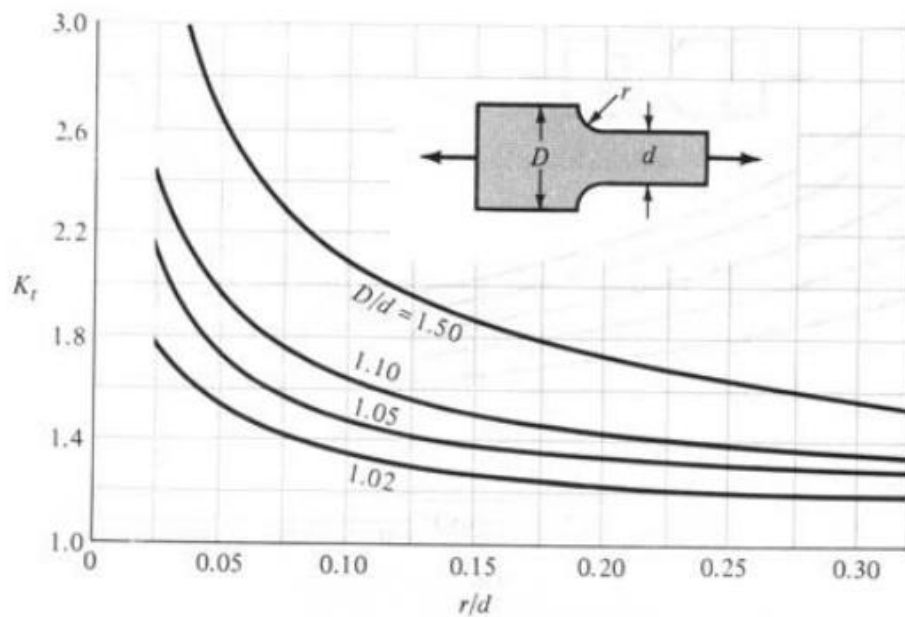


Figura 6.1. Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción simple. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Richard G. Budynas y J. Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].

6.1.2.-Geometría

Como se ha dicho anteriormente, se utilizará Autodesk Inventor para la modelización de la pieza. En primer lugar se realiza un croquis en 2D con la forma requerida (fig.6.2); a continuación se extruye el boceto con un espesor de 10mm (fig.6.3), fijándose de esta manera el espesor de la pieza.

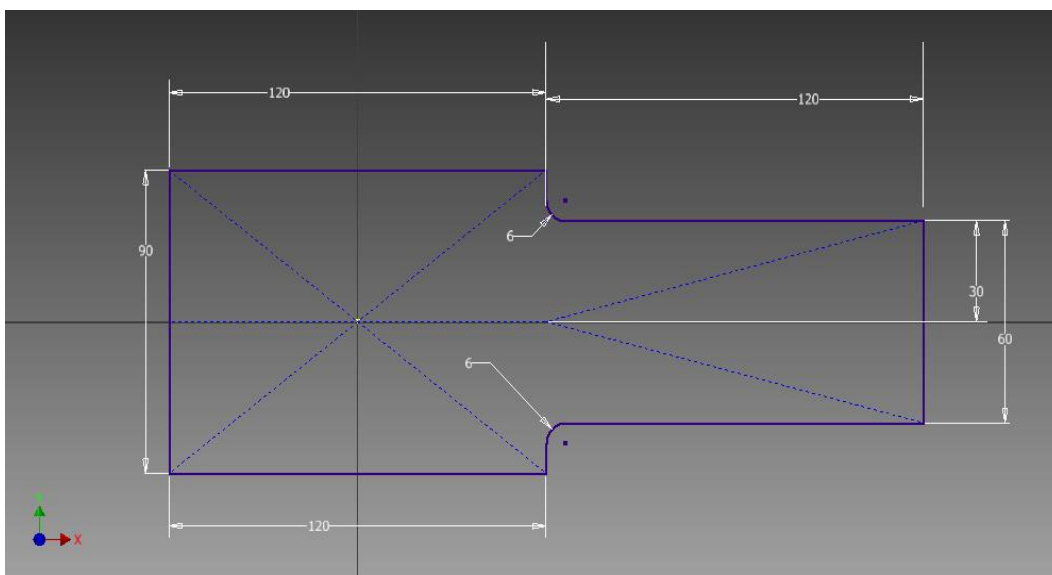


Figura 6.2. Boceto 2D de una barra rectangular

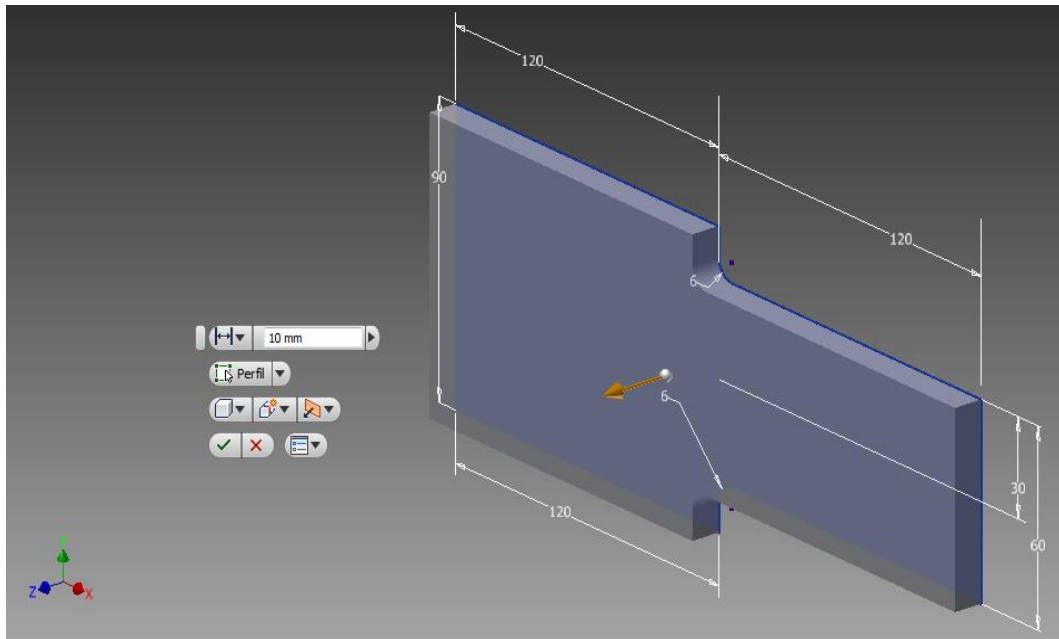


Figura 6.3. Extrusión a partir del boceto 2D de una barra rectangular

6.1.3.-Modelización

Los parámetros que se deben tener en cuenta son los siguientes: D , d , r y F .

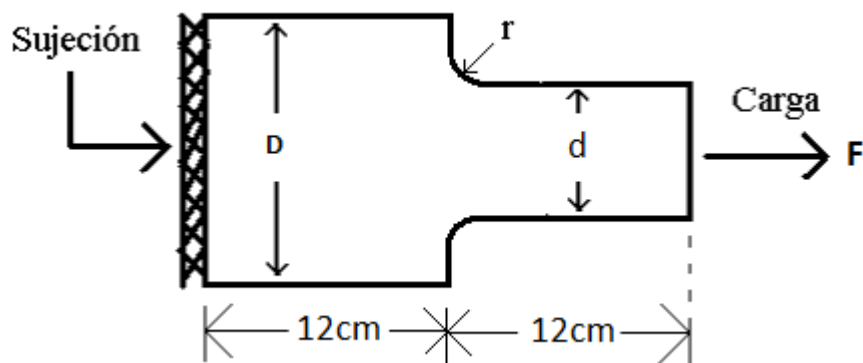


Figura 6.4. Hipótesis de modelización en Autodesk

En la figura del factor teórico de concentración de tensiones correspondiente en este caso, nos aparecen dos fuerzas del mismo módulo y dirección pero de sentido opuesto. La implementación en Autodesk Inventor se hará mediante la fijación de la sección transversal de mayor área, debido a que el programa nos pide la sujeción o apoyo de alguno de sus puntos. Se aplicará una fuerza de valor F en la cara opuesta. A causa de la ley de acción y reacción, el programa generará una fuerza (reacción) en la cara que hemos fijado (fig.6.4)

En cuanto al material, el programa nos ofrece por defecto una pequeña biblioteca con varios materiales, con sus correspondientes características ya implementadas. Entre ellos se encuentran distintos tipos de acero, aluminio, bronce, cobre, hierro, latón, resinas, vidrio y distintos tipos de plásticos. Además, es posible añadir materiales que no se encuentren en la tabla.

El material a utilizar en este proyecto será un acero estructural metálico, con un acabado laminado. Este material se utilizará en las sucesivas simulaciones de todas las piezas que se harán en este proyecto. Las propiedades del material se muestran en la tabla siguiente (fig.6.5):

Identidad	Aspecto ⇄	Físico ⇄
▼ Información		
Nombre	Acero	
Descripción	Activo estructural metálico.	
Palabras clave	estructural,metal	
Tipo	Metal	
Subclase	Acero	
Origen	Autodesk	
URL de origen		
▼ Térmico básico		
Conductividad térmica	5,600E+01 Con (m · k)	
Calor específico	0,460 J/ (G · ° C)	
Coefficiente...ión térmica	12,000 $\mu\text{m}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	
▼ Mecánico		
Comportamiento	Isótropo	
Módulo de Young	210,000 GPa	
Coefficiente de Poisson	0,30	
Módulo cortante	80000,000 MPa	
Densidad	7,850 g/cm^3	
▼ Resistencia		
Límite de fluencia	207,000 MPa	
Límite de elasticidad	345,000 MPa	
	<input type="checkbox"/> Tratado térmicamente	

Figura 6.5. Características del acero estructural metálico con acabado laminado



Una vez seleccionado el material, y comprobado que las características del material se ajustan a las exigencias, podemos iniciar el análisis de tensión haciendo click en *entornos* y a continuación pinchando en *análisis de tensión* (fig.6.6).

Iniciado el análisis, se debe crear una simulación, donde podremos especificar los datos de partida.

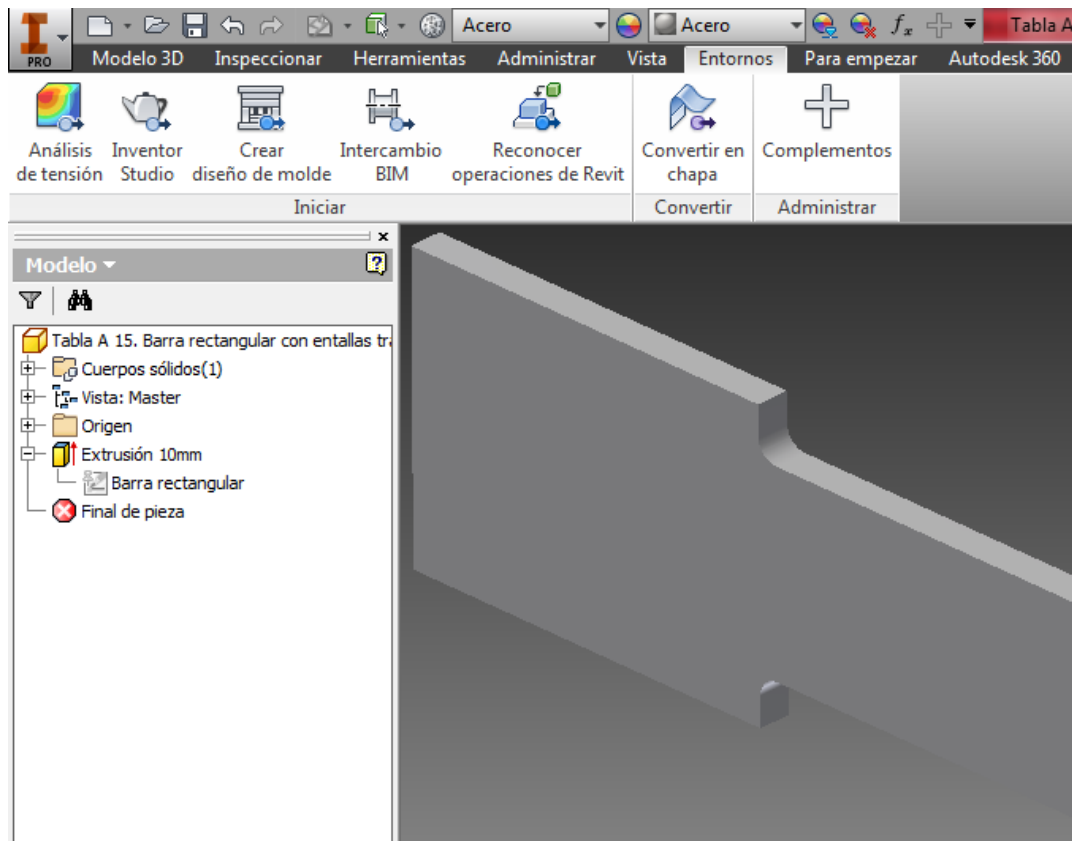


Figura 6.6. Inicio de análisis de tensión

Llegados a este punto se deberán seguir dos pasos: el primero es añadir las cargas y restricciones de movilidad, y el segundo es generar la malla.

Las restricciones son totalmente necesarias. Autodesk inventor da por supuesto que el modelo está bien restringido, es decir, que no puede haber caídas libres ni movimientos de cuerpos rígidos. Cualquier cuerpo rígido sin restricciones tiene tres modos de cuerpo rígido de translación (eje x, eje y, eje z) y tres modos de cuerpo rígido de rotación (alrededor de cada uno de los ejes). Mediante la aplicación de distintos tipos de contactos y restricciones, se pueden eliminar los seis modos de cuerpo rígido.

Como se mostraba en la figura 6.4, se fijará la cara de mayor anchura (fig.6.7) con una restricción fija, es decir, el desplazamiento en el eje x, en el eje y en el eje z, son nulos, así como los giros. De esta manera se modeliza un empotramiento.

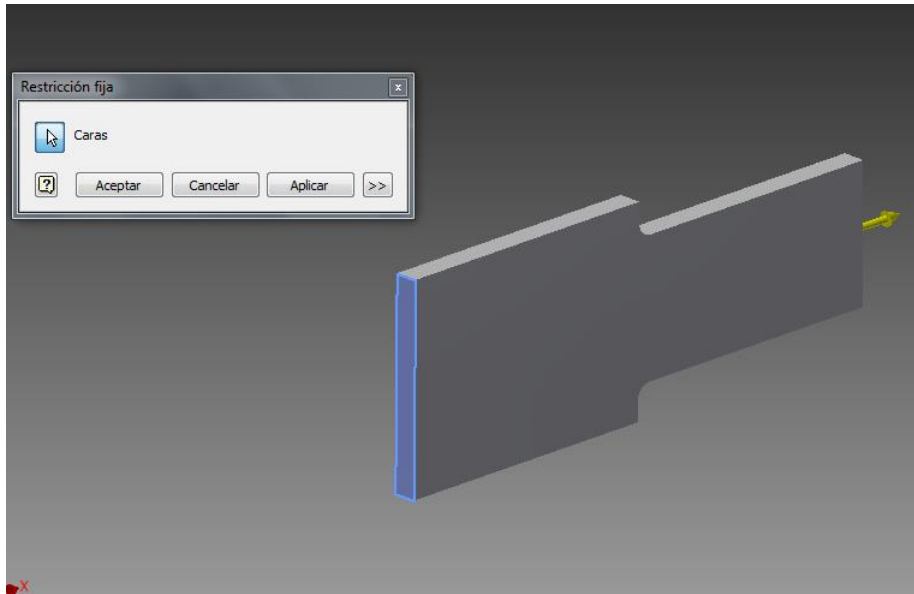


Figura 6.7. Restricción de movilidad nula.

Para implementar la fuerza, simplemente se añadirá una carga en la dirección del eje x, en la cara opuesta al plano de la pieza que acabamos de restringir (fig. 6.8).

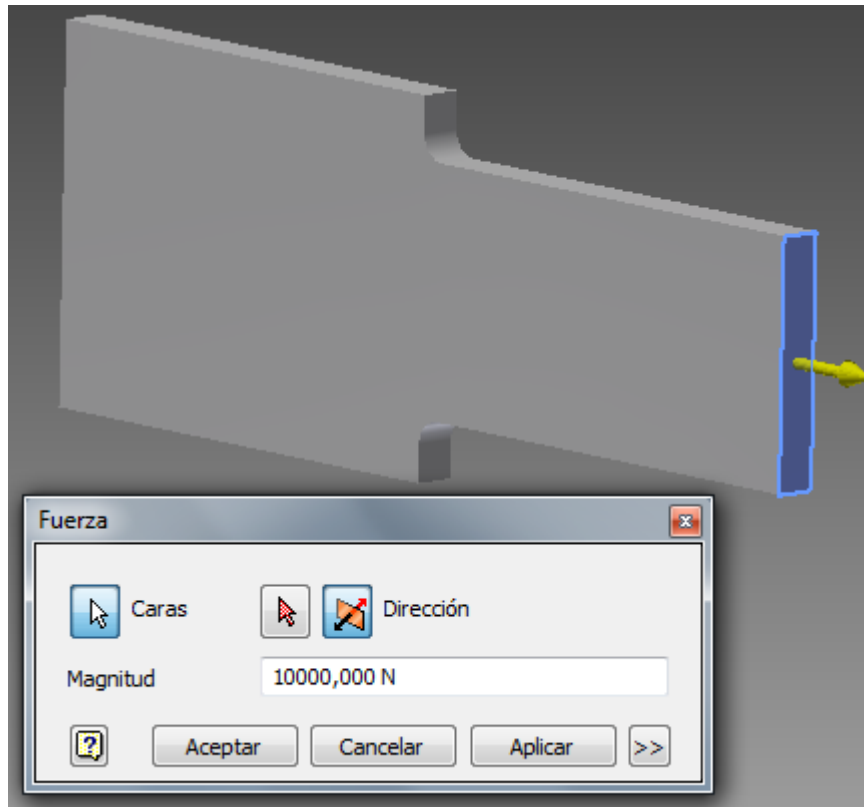


Figura 6.8. Aplicación de una fuerza de valor F , sobre una de las caras

La fuerza empleada, F , es de 10000 N. Como teníamos un espesor t ($t=10\text{mm}$), y un ancho d ($d=60\text{mm}$), la tensión nominal obtenida es:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{dt} = \frac{10000 \text{ N}}{10 \text{ mm} \cdot 60 \text{ mm}} = 16.67 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{16.67 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la malla, el programa nos ofrece una solución por defecto, que es la mostrada en la figura 6.9.

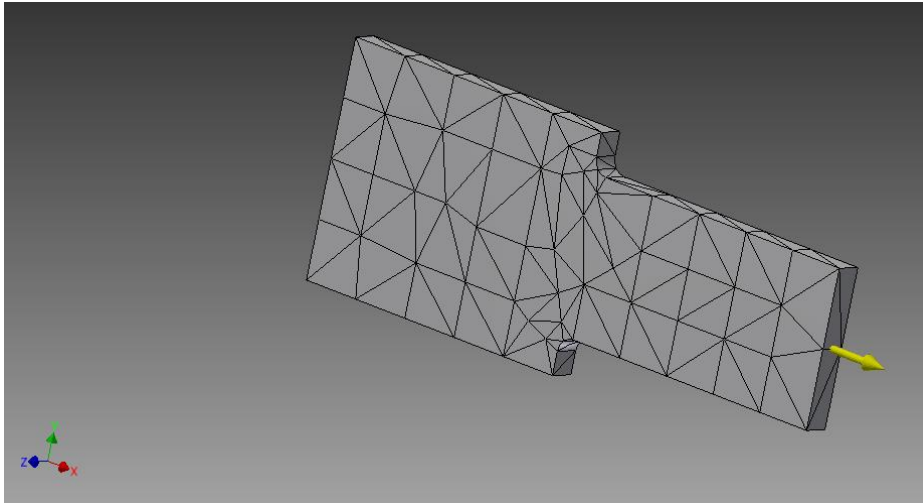


Figura 6.9. Malla generada con una configuración por defecto

Esta malla es muy simple y con pocos elementos. Lo que nuestra pieza necesita es que la densidad de la malla sea algo mayor, sobre todo en las zonas conflictivas, que son aquellas en las que cambia bruscamente la sección. El programa nos ofrece una opción de configuración de la malla (fig.6.10), la cual nos permite modificar ciertos parámetros, como el tamaño medio del elemento, el tamaño mínimo, el ángulo máximo de giro y el factor de modificación. Este último parámetro establece una relación máxima entre un elemento y su colindante, para evitar grandes saltos de tamaño de elementos y así suavizar la distribución de esfuerzos.

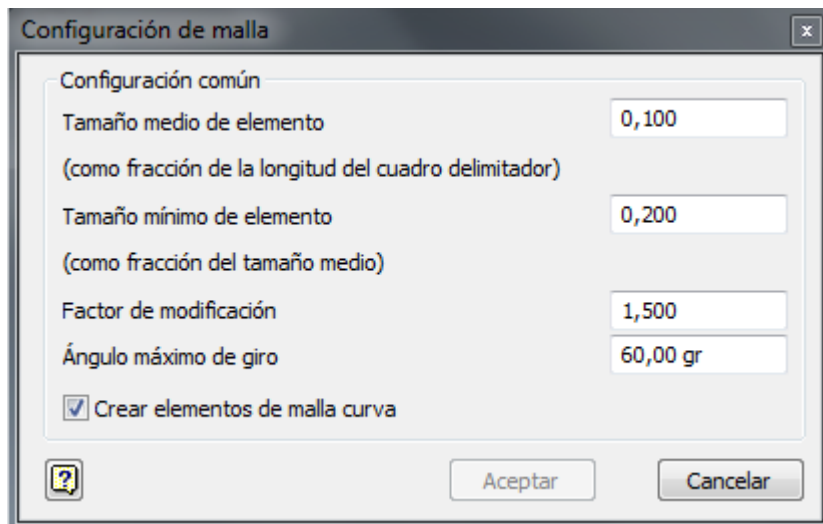


Figura 6.10. Configuración de malla

Esta opción de configuración de malla es general a toda la pieza, y es recomendable usarla cuando te interesan los esfuerzos y desplazamientos



en cada punto. En el caso de la placa rectangular, se está estudiando el aumento de la tensión en ciertas zonas debido a una concentración de las mismas. Es sabido que esta tensión será máxima en las zonas de cambio brusco de sección y es en esta zona donde se hará un refinamiento de la malla (aumento de la densidad de malla en una zona local). Ampliando las entallas transversales (fig.6.11), se observa que tan solo tiene 4 elementos, y estos datos podrían diferir notablemente de la realidad al concentrar todos los esfuerzos en 4 elementos.

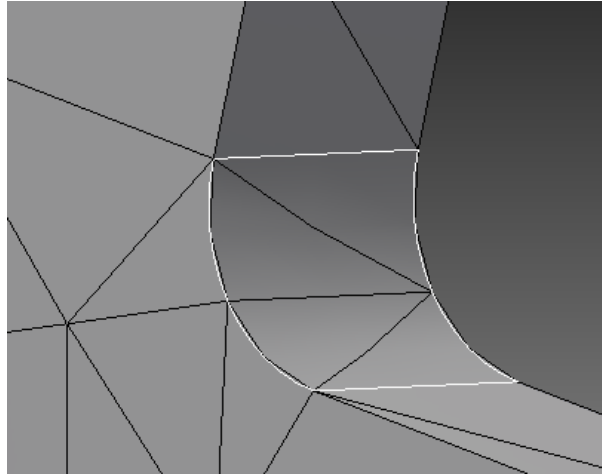


Figura 6.11. Entallas transversales

Para este refinamiento, se utilizará otra opción que nos ofrece Autodesk: *control de malla local* (fig.6.12), donde directamente pedirá el tamaño deseado del elemento en mm.

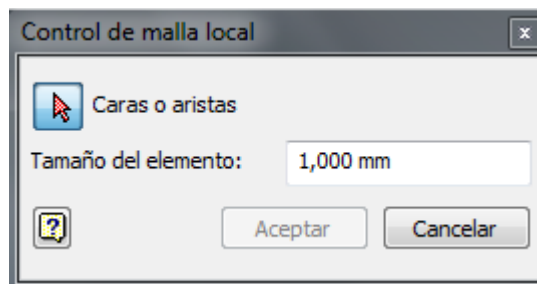


Figura 6.12. Control de malla local

El tamaño de los elementos será de 1mm, por tanto, como el espesor es de 10 mm, habrá 10 elementos por cada milímetro (fig.6.13).

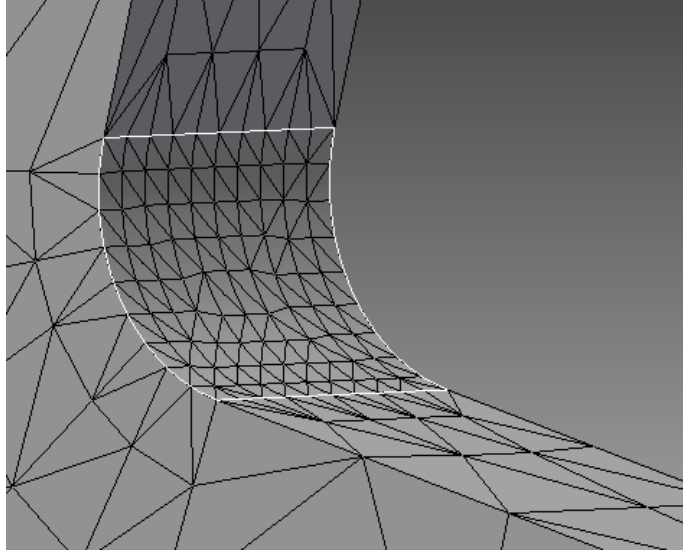


Figura 6.13. Refinamiento local de la malla

6.1.4.-Simulación

Una vez establecidas las condiciones de contorno se procederá con la simulación. El tiempo que tarda en simular es directamente proporcional al número de elementos. Cuantos más elementos haya, mayor será el tiempo que tarde el programa en simular, pero mayor será la precisión.

Una manera sencilla de disminuir el tiempo de simulación es refinar la malla localmente, como es el caso de esta pieza. De esta manera consigues mayor precisión en la zona de observación a cambio de un pequeño coste computacional.

Los resultados que ofrece la simulación en Autodesk Inventor son muy amplios. Para el análisis de tensión estática se puede ver:

- Los resultados de la deformación, que incluyen el tensor de deformación y las deformaciones Principal y Equivalente.
- Presión de contacto
- Desplazamiento
- Tensión
- Coeficiente de seguridad

El estado de tensión se calcula para una pieza. Según la teoría de la elasticidad, el estado de tensión tridimensional de un volumen de material infinitesimal situado en una ubicación arbitraria contiene tensiones normales y tensiones de corte.



Tres tensiones normales, tensión XX, tensión YY y tensión ZZ, y tres tensiones de corte, Tensión XY, Tensión YZ y Tensión XZ, definen el estado de tensión. Las tensiones normales de tracción son positivas y las de compresión, negativas.

La ecuación que usa Autodesk en cuanto al estado de tensiones es la ecuación de Von Mises (eq.6.2):

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6.2)$$

Esta ecuación depende de las tres tensiones normales y las tres tangenciales.

Haciendo simular al programa, obtenemos la tensión de Von Mises para cada geometría. Algunas de las gráficas son las mostradas a continuación (fig.6.14, fig.6.15, fig.6.16).

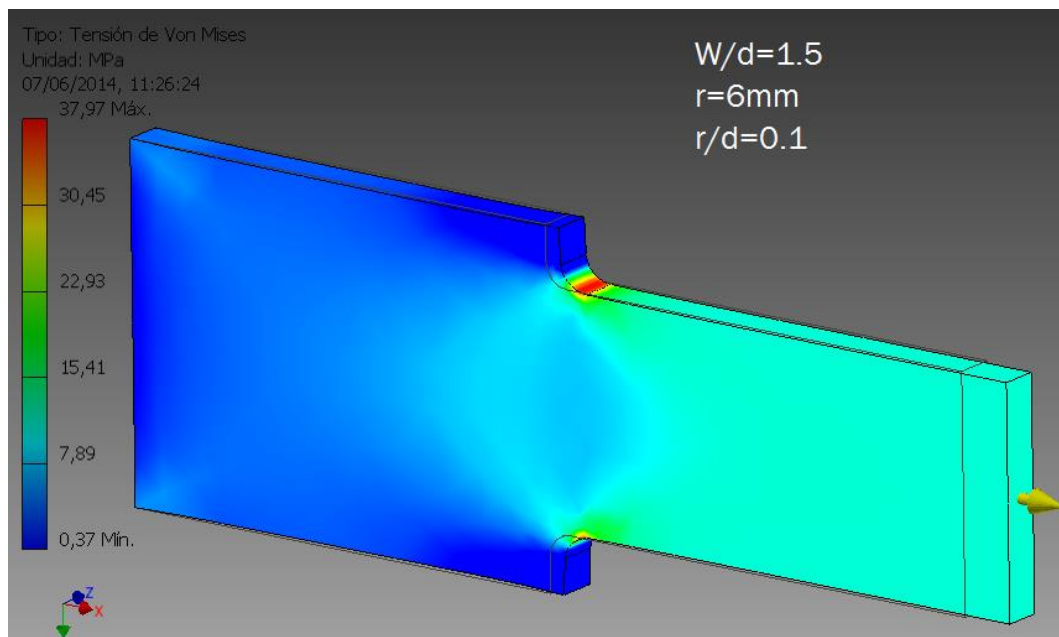


Figura 6.14. Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción simple. Relación $W/d = 1.5$, $r=6\text{mm}$, $r/d=0.1$.

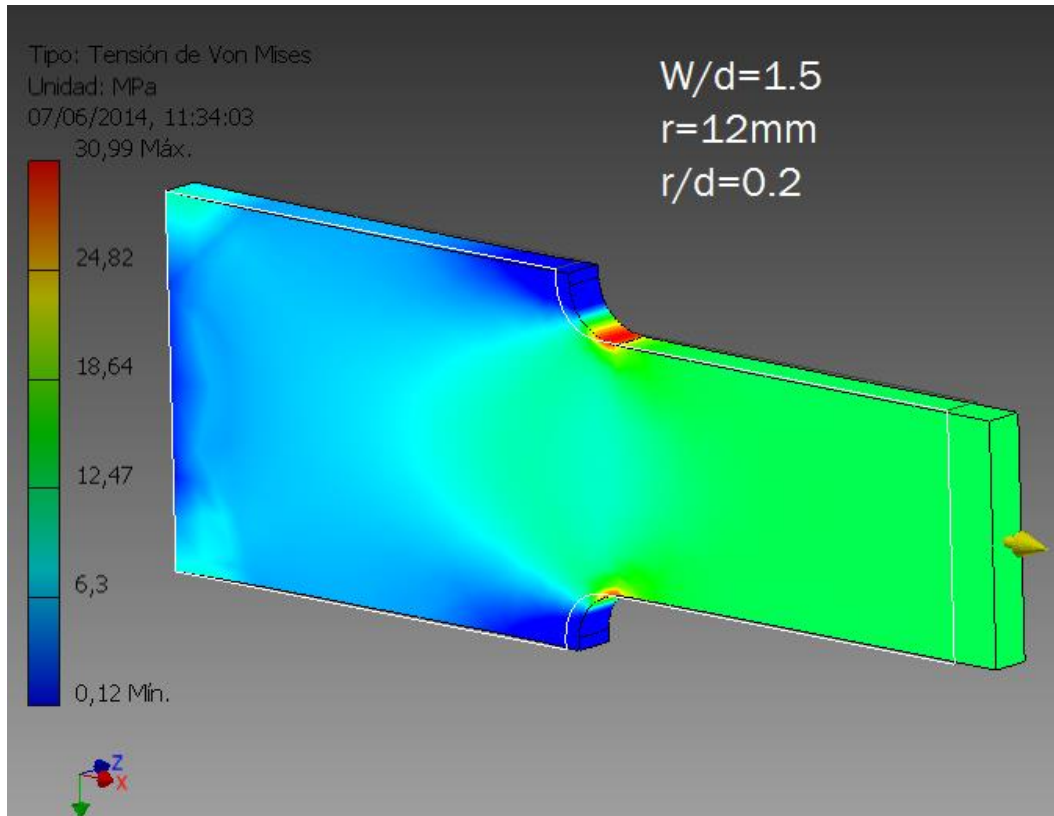


Figura 6.15. Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción simple. Relación $W/d=1.5$, $r=12\text{mm}$, $r/d=0.2$.

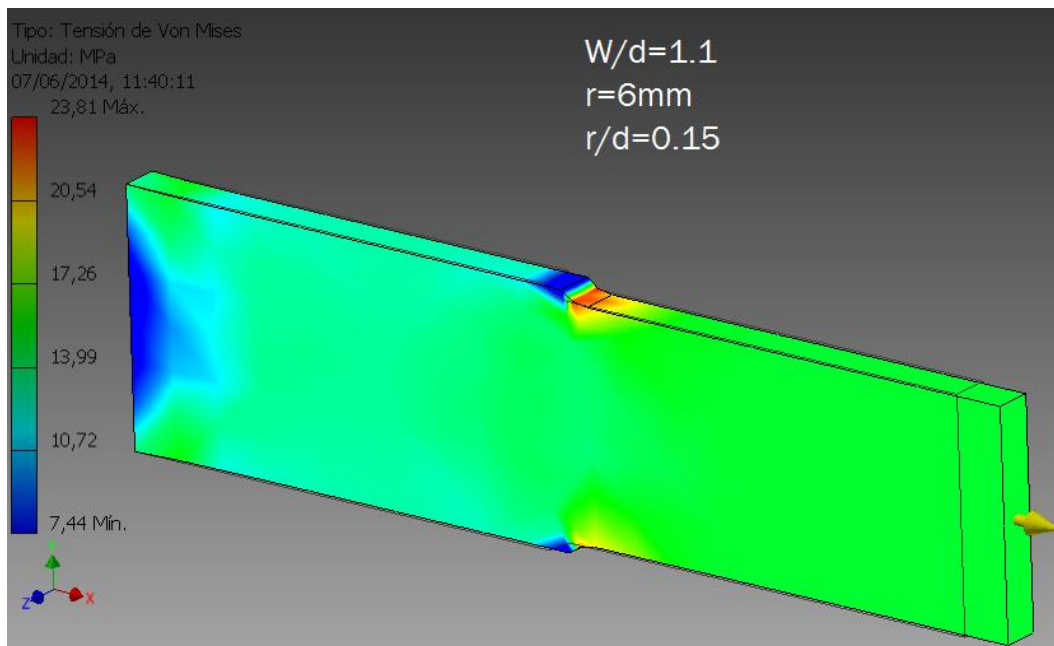


Figura 6.16. Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción simple. Relación $W/d=1.1$, $r=9\text{mm}$, $r/d=0.15$.



Las figuras anteriores son algunos ejemplos de la simulación con distintos tamaños y relaciones de r/d . Se puede ver en la parte izquierda una escala de tensiones, dada en MPa, que ofrece desde la tensión mínima, a la tensión máxima. Esta última tensión será la que se corresponda con $\sigma_{\text{máx}}$ y la que se usará para el cálculo de K_t .

Antes de ofrecer los resultados se deber pensar si las gráficas obtenidas se corresponden con la realidad. Analizando detalladamente la figura 6.15 con unas relaciones $W/d= 1.5$, $r=12\text{mm}$ y $r/d=0.2$, es posible observar la zona de máxima tensión. En este caso se puede ver a simple vista, pero de todas formas el programa nos ofrece una opción que nos indica el lugar y valor máximo de la tensión de Von Mises (fig.6.17).

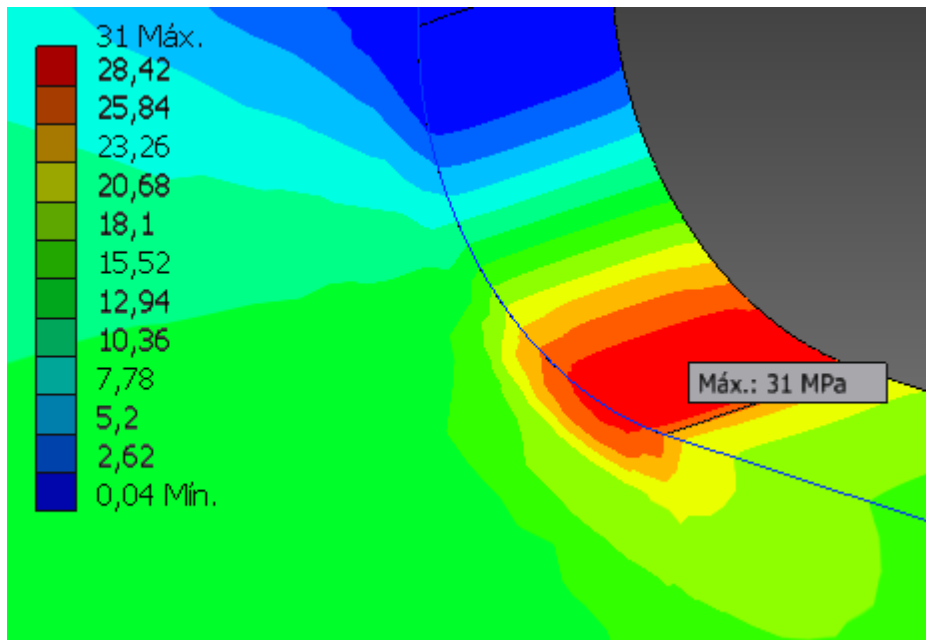


Figura 6.17. Detalle de la zona de tensión máxima en una barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción simple. Relación $W/d=1.5$, $r=12\text{mm}$, $r/d=0.2$.

En cuanto a la deformación provocada por el esfuerzo, mostrada en la figura 6.18 (deformación exagerada), es fácil suponer que las fibras de la entalla, la cual suaviza el cambio de sección, se estiran más que el resto de la pieza y es por tanto la zona de máxima tensión.

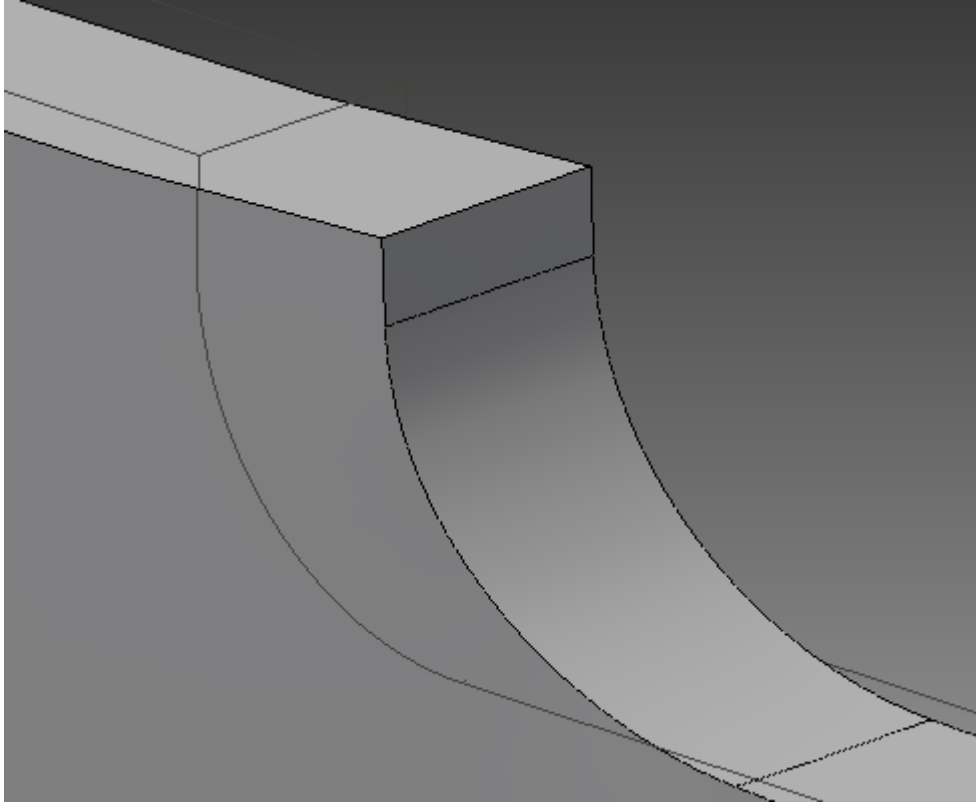


Figura 6.18. Detalle del desplazamiento en la zona de tensión máxima en una barra rectangular con entallas trasversales sometida a tracción simple. Relación $W/d = 1.5$, $r = 12\text{mm}$, $r/d = 0.2$.

6.1.5.-Resultados

Para este caso se han realizado 15 simulaciones. En todas ellas se ha mantenido el parámetro constante, con un valor de 60 mm.

Para obtener las distintas relaciones de $D/d = 1.5$, $D/d = 1.1$ y $D/d = 1.05$, se ha fijado el valor de D en 90, 66 y 63 mm respectivamente.

En cuanto al radio de la entalla, varía entre 3 y 15 mm obteniendo así relaciones de r/d situadas entre 0.05 y 0.25.

Para unir los distintos puntos se han utilizado curvas de regresión, donde se indica la confianza de esta curva mediante el parámetro R^2 (eq.6.3).

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SSR}{SST} \quad (6.3)$$

Los resultados incluyen un apartado donde se indica el error relativo con respecto del valor real tomada de las tablas del factor teórico de concentración de tensiones.



Para el cálculo del error (eq.6.4) se ha utilizado la siguiente fórmula:

$$\text{error} [\%] = \frac{|\text{Valor real} - \text{valor obtenido}|}{\text{valor real}} \quad (6.4)$$

Los resultados se muestran en las tablas 6.1, 6.2 y 6.3.

D=90 mm; d=60mm; D/d=1.5						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
3	0.05	47.62	16.67	2.857	2.67	7.011
6	0.1	37.97	16.67	2.278	2.18	4.505
9	0.15	33.62	16.67	2.017	1.87	7.872
12	0.2	30.99	16.67	1.859	1.77	5.051
15	0.25	29.19	16.67	1.751	1.68	4.250

Tabla 6.1. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción con una relación de D/d=1.5.

D=66mm, d=60mm; D/d=1.1						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
3	0.05	33.12	16.67	1.987	1.98	0.364
6	0.1	28.65	16.67	1.719	1.65	4.18
9	0.15	26.33	16.67	1.579	1.5	5.32
12	0.2	24.9	16.67	1.494	1.44	3.75
15	0.25	24	16.67	1.44	1.41	2.12

Tabla 6.2. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción con una relación de D/d=1.1.

D=66mm, d=60mm; D/d=1.05						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
3	0.05	28.23	16.67	1.693	1.73	2.092
6	0.1	25.32	16.67	1.519	1.635	7.082
9	0.15	23.73	16.67	1.42	1.5	5.079
12	0.2	22.76	16.67	1.365	1.37	0.320
15	0.25	22.07	16.67	1.324	1.3	1.861

Tabla 6.3. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción con una relación de D/d=1.05.

Como resultado final, se ofrece la fig. 6.19, la cual muestra el valor de K_t para las distintas relaciones de D , d y r .

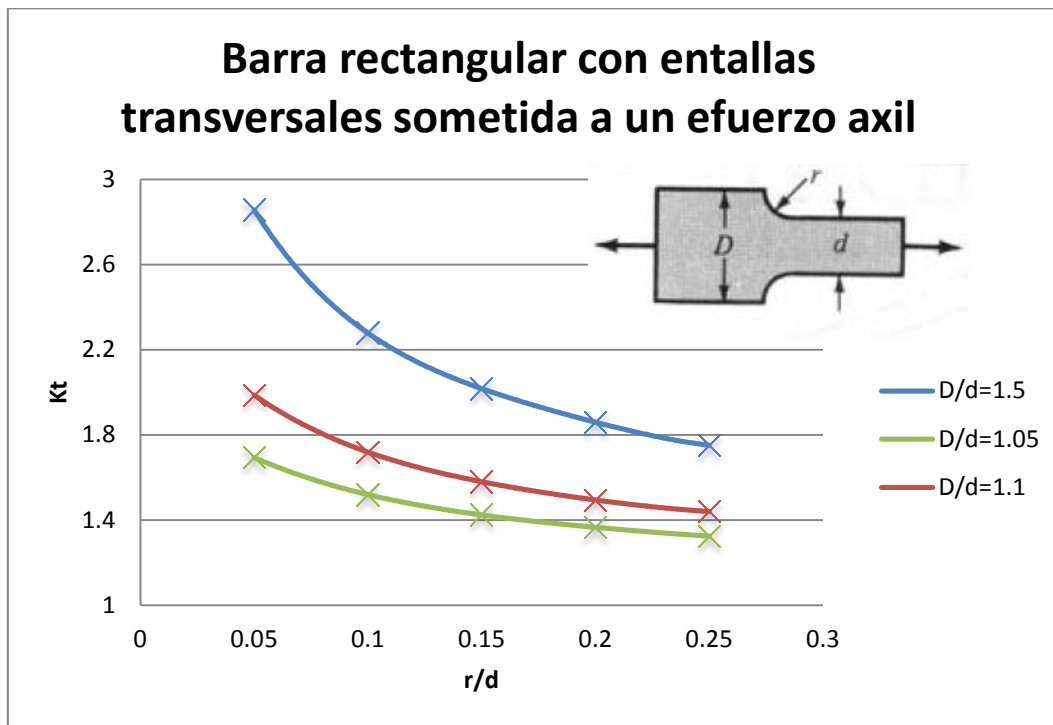


Figura 6.19. Barra rectangular con entallas trasnversales sometida a un esfuerzo axial.

El valor de R^2 en todas las curvas de la fig.6.19 ha sido de 1.

6.1.6.-Conclusiones

Vistos los resultados, está claro que se produce una concentración de esfuerzos en el cambio de sección. Mediante la herramienta de Autodesk Inventor se ha podido obtener las tensiones máximas pero hay que comprobar que la tensión σ_0 se aproxima al esfuerzo que soporta la sección más pequeña de la pieza (fig.6.20).

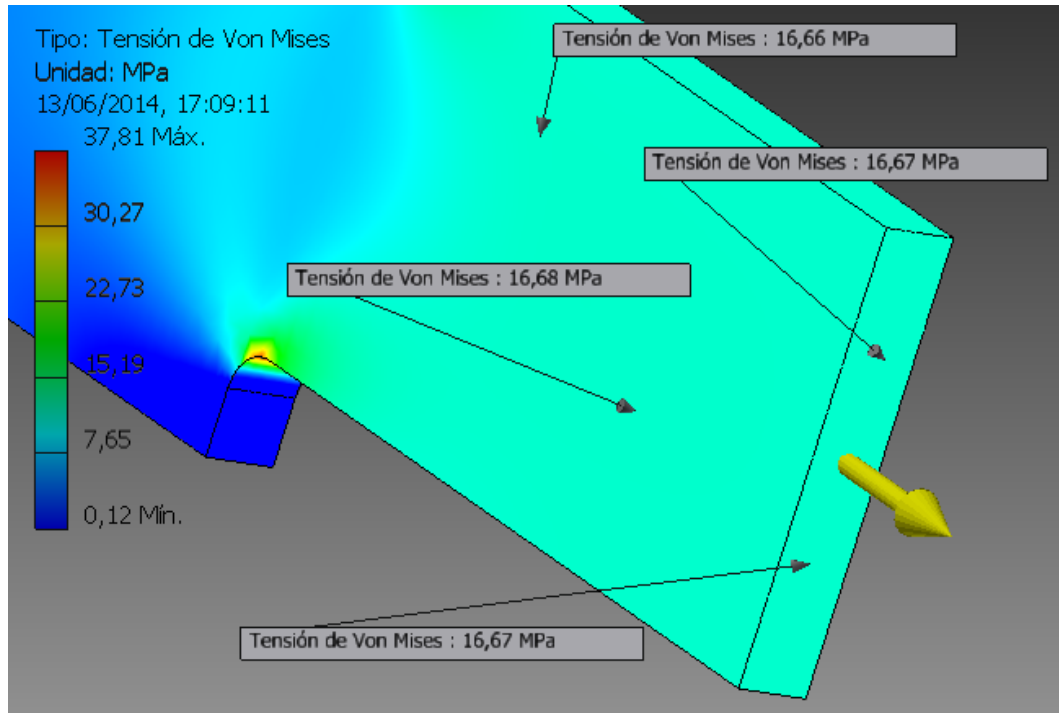


Figura 6.20. Tensión σ_0 de referencia para una pieza rectangular con entallas transversales sometida a tensión.

Las sondas que se han puesto sobre la sección de referencia, nos muestran que la tensión que soporta la pieza en esa zona es de aproximadamente 16.67 MPa, un valor idéntico al ofrecido por las tablas de Shigley, calculado en la página 67 (16.67 MPa).

Una vez que la referencia es idéntica, se pueden comparar los datos obtenidos experimentalmente con los teóricos.

El error máximo relativo que se ofrece en las 15 simulaciones es de 7.87%, o lo que es lo mismo, un error absoluto de 0.14 ($2.01 - 1.87 = 0.14$). El resto de valores tiene un error inferior, habiendo algunos cuyo valor obtenido es idéntico al teórico.

El error máximo que se tiene es debido a que ambas gráficas son experimentales y es posible que en alguna de las simulaciones los valores difieran unos de otros. Además con una densidad de malla mayor, el valor de la tensión máxima podía cambiar, pero en este caso, cambiaría poco puesto que es una pieza sencilla y bien mallada inicialmente.

En cuanto a la gráfica en sí, se observa perfectamente que presenta menor tensión un diseño de pieza con un cambio de sección suave y radios de



curvatura grandes que un cambio de sección brusco y radios de curvatura pequeños.

Cuanto menor es el radio r , mayor va a ser la concentración de las tensiones debido al efecto de triaxialidad, estando su punto álgido en un cambio de sección totalmente sin radios de acuerdo.

Además también se aprecia que cuanto mayor es la relación de anchos D/d , mayores esfuerzos tendremos en los cambios de sección.

Por tanto, en el diseño de máquinas, se deberá tener en cuenta este factor tan importante de la concentración de tensiones. Una solución alternativa, cuando se van a unir piezas por soldadura es crear un espesor de garganta lo mayor posible, cuyo efecto sería el de radio de acuerdo en un cambio de sección.



6.2.-Barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión

6.2.1.-Definición

Se trata de un ejemplo igual al del apartado 7.1 variando en que la barra rectangular está sometida a flexión y no a tracción.

Se tomará como valor nominal para el cálculo del valor teórico K_t , la tensión σ_0 (eq.6.5).

$$\sigma_0 = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{td^2} \quad (6.5)$$

Donde:

σ_0 : Tensión nominal [MPa]

M: Momento aplicado a ambos lados de la pieza [N·mm]

c: Mitad del ancho más pequeño de la pieza ($d/2$) [mm]

I: momento de inercia: $I = \frac{td^3}{12}$

t: espesor de la pieza [mm]

d: ancho más pequeño de la pieza [mm]

En este caso, la gráfica que nos relaciona la geometría con el factor teórico de concentración de tensiones K_t , es la mostrada en la fig. 6.21.

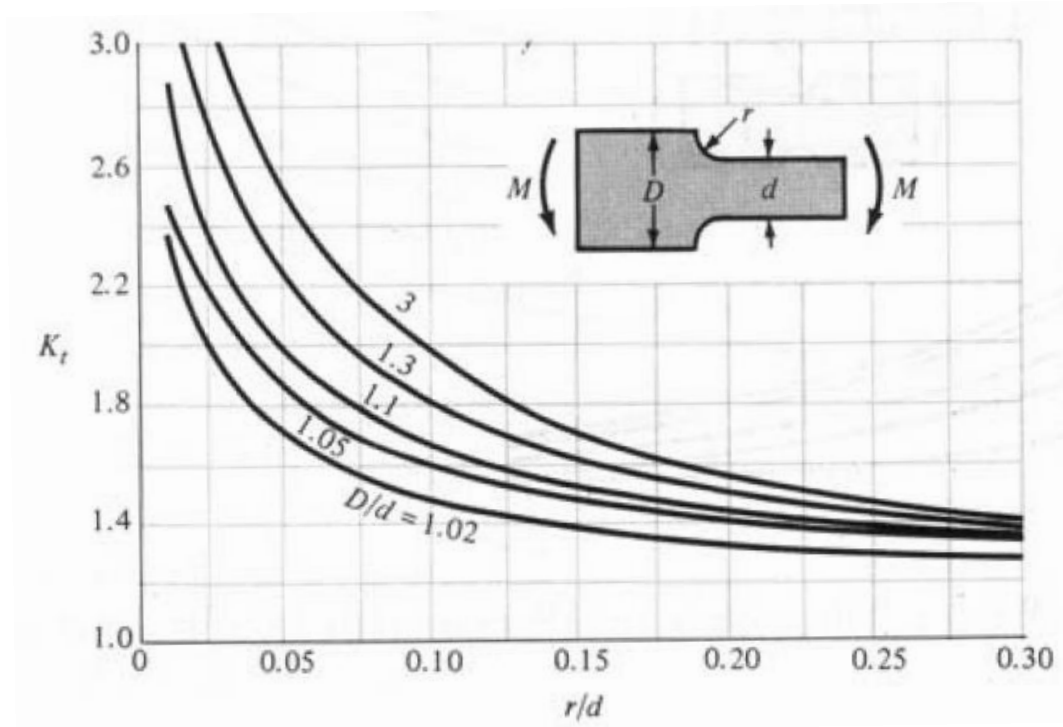


Figura 6.21. Barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley. Richard G. Budynas y J.Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].

6.2.2.- Geometría

La geometría de esta pieza es la misma que la explicada para simular el apartado 6.1. El espesor de la pieza sigue siendo igual, de 10 mm. La única variación es el cambio del valor de la distancia D , cuyos nuevos valores se detallan más adelante.

La geometría final es la expuesta en la fig.6.22.

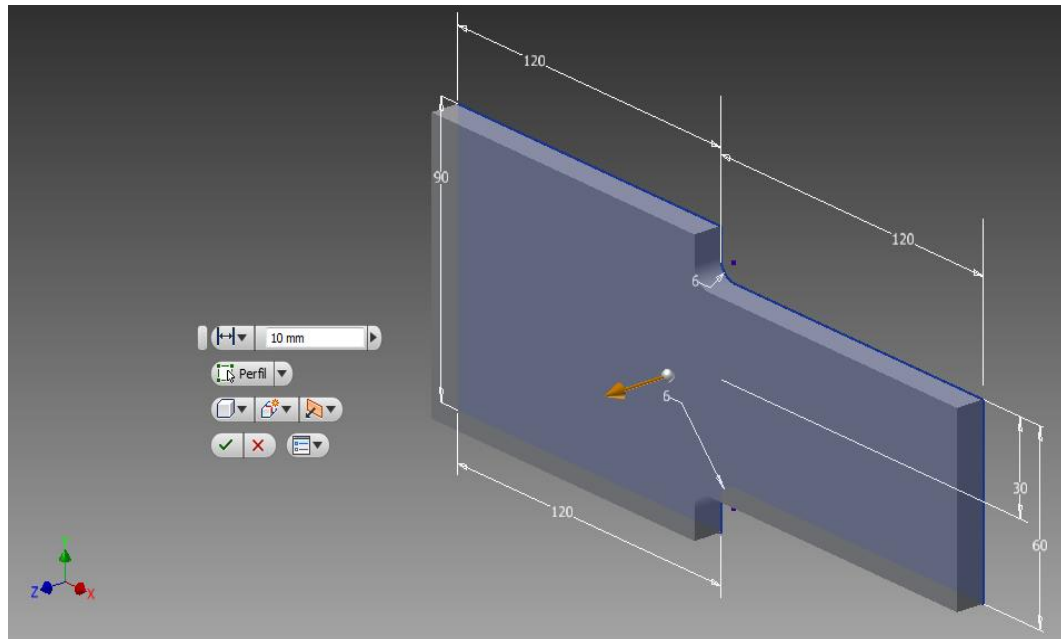


Figura 6.22. Geometría de una barra rectangular de espesor $t=10\text{mm}$.

6.2.3.-Modelización

Los parámetros a tener en cuenta son D , d , r y M .

Al ser el mismo caso que el anterior, también se fijará una de las caras laterales y se aplicará un momento de valor M en la cara opuesta a la sujeción (fig.6.23).

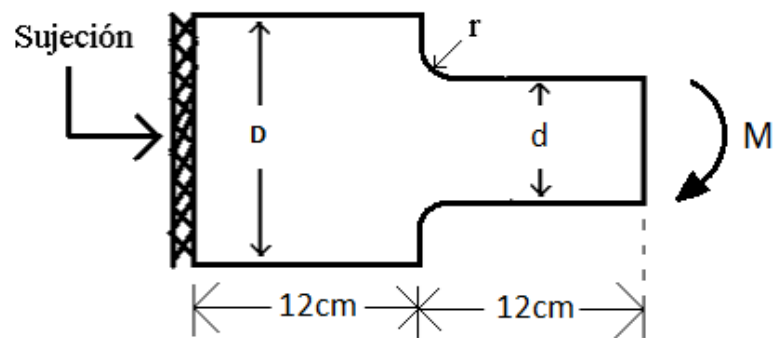


Figura 6.23. Hipótesis de modelización en Autodesk

El material, como ya se explicó anteriormente, será para todas las simulaciones el mismo, un acero estructural metálico con acabado laminado.

Una vez visto cómo se va a solucionar la pieza, se inicia el análisis de tensión, donde primeramente se deben aplicar las restricciones de movimiento y las cargas.

Para la restricción de movimiento, al igual que el apartado 7.1, se fijará una de las caras (fig.6.24)

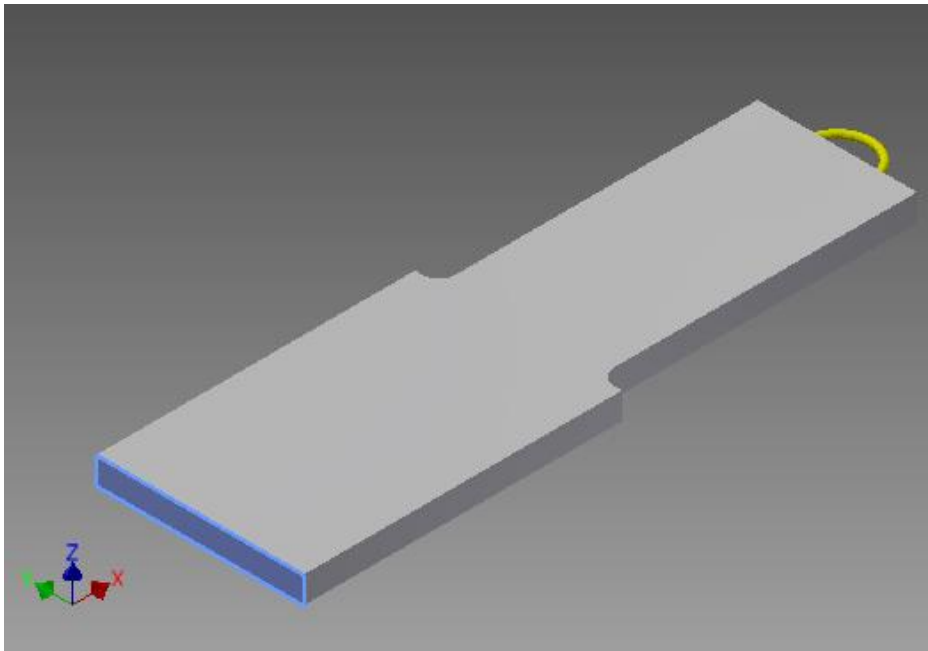


Figura 6.24. Restricción de movilidad nula

La carga aplicada es un momento generado alrededor del eje z, de valor 100.000 N·mm en la cara opuesta a la restricción fija. Para la aplicación del momento se deberá hacer *click* en *carga de momento* donde aparecerá un editor de momento (fig.6.25). En él es posible especificar en una de las caras las componentes de dicho momento.

Tal y como se ha dibujado la pieza, el momento que se debe simular es alrededor del eje z. El valor positivo o negativo nos indica el sentido del momento.

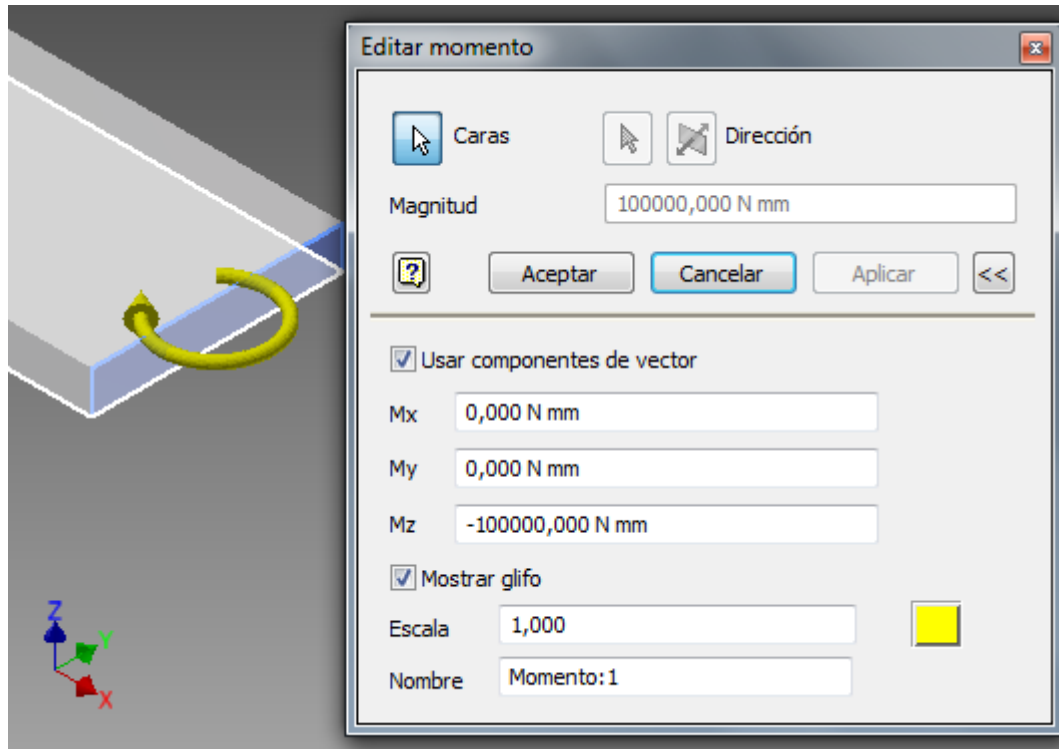


Figura 6.25. Editor de momentos

Al ser el momento $M=100000 \text{ N}\cdot\text{mm}$, el espesor $t=10\text{mm}$ y $d=60\text{mm}$, la tensión nominal será de

$$\sigma_0 = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{td^2} = \frac{6 \cdot 100000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{10\text{mm} \cdot 60^2\text{mm}^2} = 16.66 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{16.67 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la generación de la malla, haciendo *click* en *configuración de malla*, las modificaciones de la malla inicial se han definido mediante los siguientes valores:

- Tamaño medio del elemento: 0.1000
- Tamaño mínimo del elemento: 0.200
- Factor de modificación: 1.5
- Ángulo máximo de giro: 60 gr

Además también se efectúa un refinamiento local de la malla en las zonas de cambio brusco de la sección, que es donde se espera que el esfuerzo sea máximo. Este refinamiento es de 1mm.

Teniendo en cuenta estos datos, el mallado de la pieza se muestra en la fig.6.26.

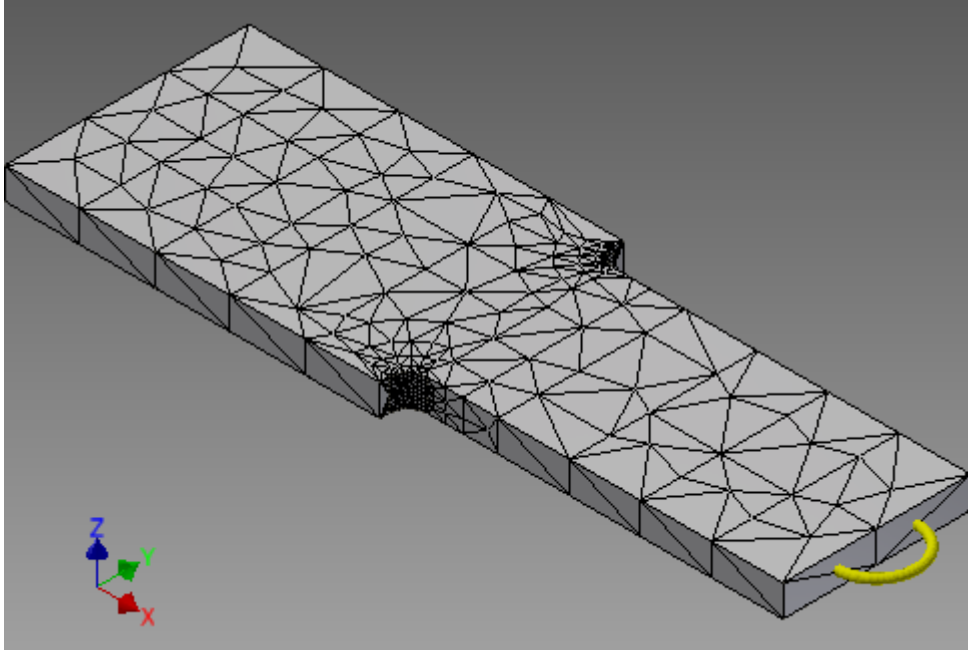


Figura 6.26. Configuración de la malla para una pieza rectangular sometida a flexión.

6.2.4.-Simulación

Haciendo simular el programa obtenemos la tensión de Von Mises para cada geometría. Algunas de las gráficas son las mostradas a continuación (fig.6.27, fig.6.28 y fig.6.29).

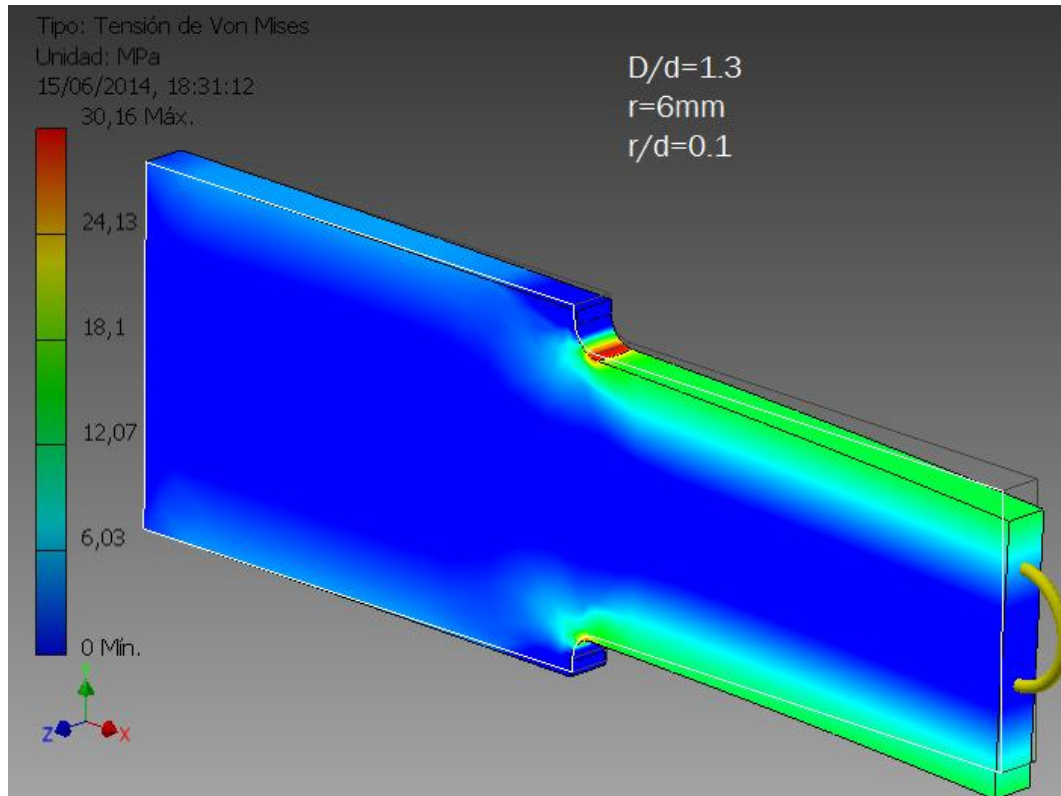


Figura 6.27. Barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión. Relación $D/d = 1.3$, $r=6\text{mm}$, $r/d=0.1$.

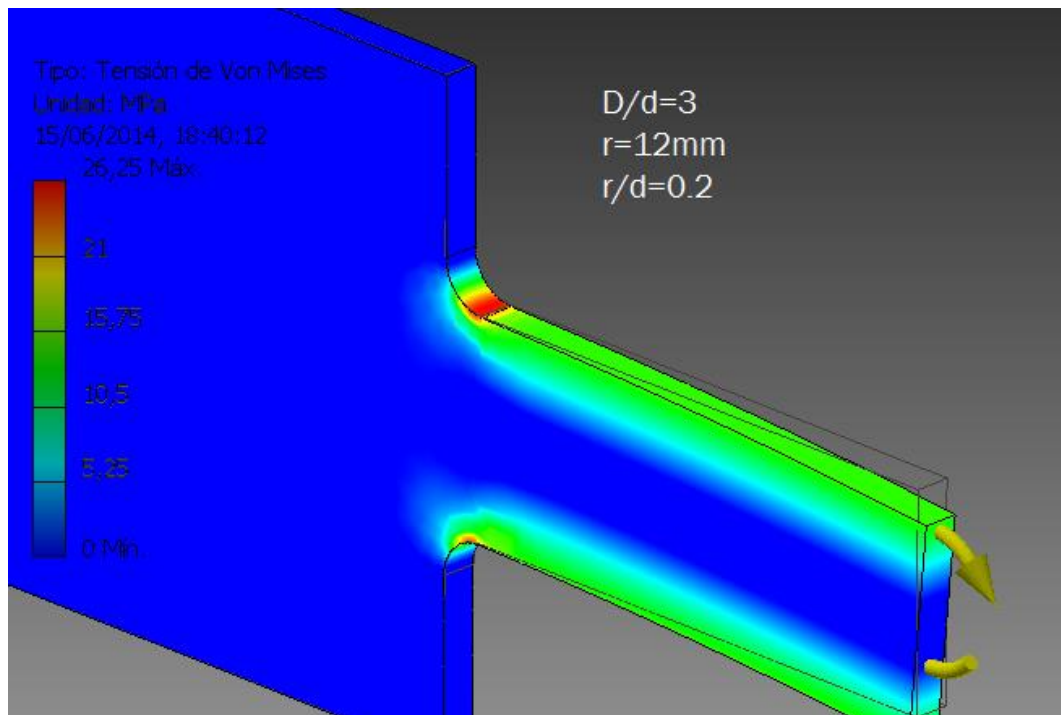


Figura 6.28. Barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión. Relación $D/d = 3$, $r=12\text{mm}$, $r/d=0.2$.

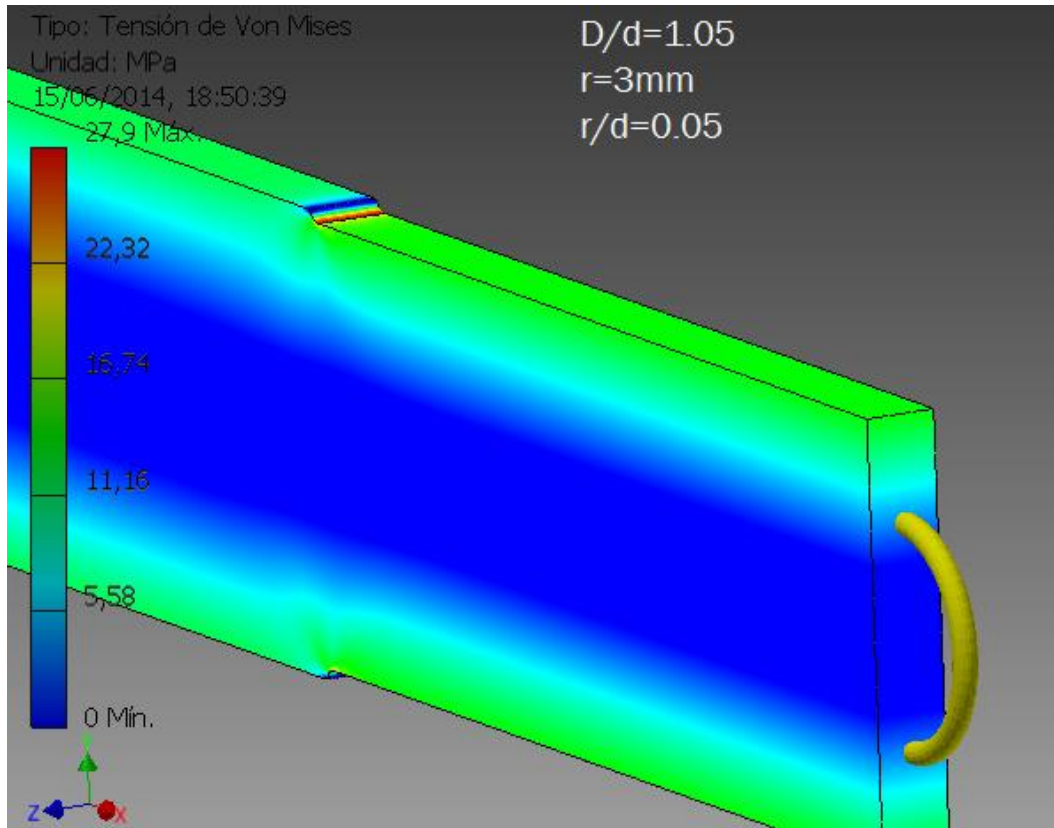


Figura 6.29. Barra rectangular con entallas trasversales sometida a flexión. Relación $D/d = 1.05$, $r=3\text{mm}$, $r/d=0.05$.

La tensión máxima se encuentra en el cambio brusco de sección, donde efectivamente se debería encontrar. Si ampliamos esta zona y se marca el botón de máxima tensión, para el caso de $D/d=1.1$ y $r=6\text{mm}$, se diferencia claramente un degradado de los esfuerzos hasta llegar a un valor máximo de 27.82 MPa (fig.6.30).

En cuanto a la deformación, al existir un momento, la pieza debería “doblar” alrededor del eje que gira el momento, es decir, alrededor del eje z. Si vemos la deformada (fig.6.31) y se exagera, este fenómeno es fácilmente apreciable. Una de las caras está fija y la otra gira alrededor del eje z.

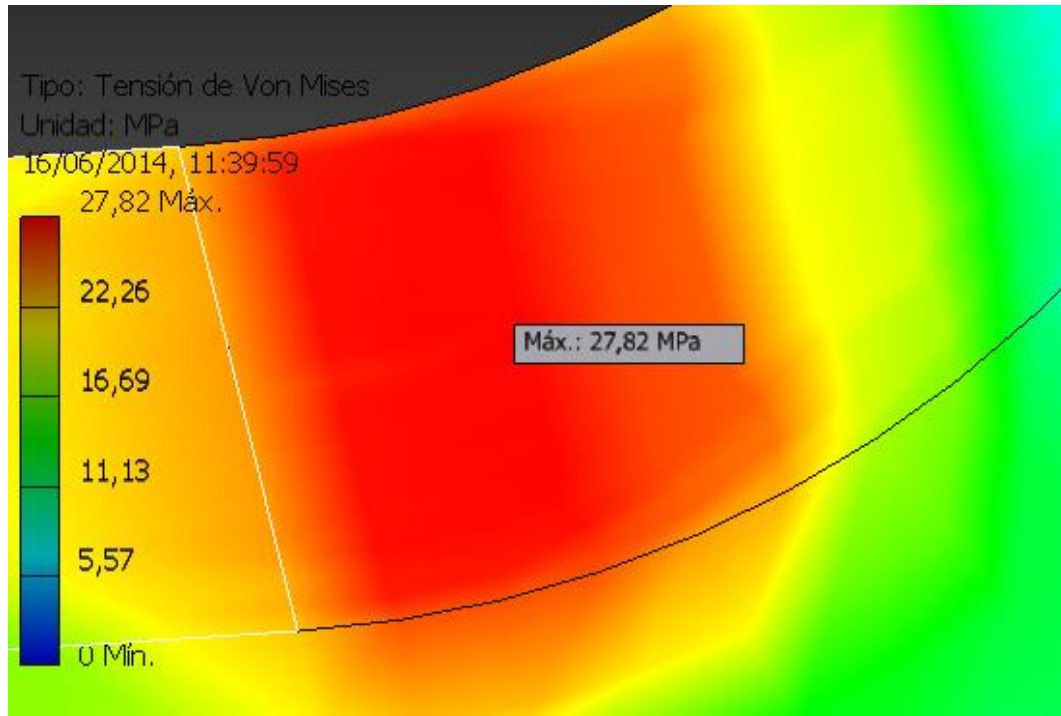


Figura 6.30. Máxima tensión en una barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión.
Relaciones: $D/d=1.1$; $r=6\text{mm}$; $r/d=0.1$.

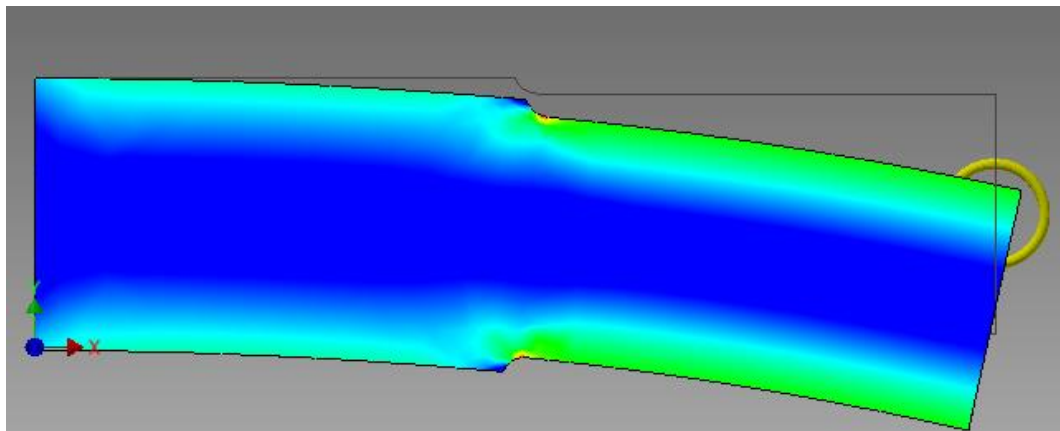


Figura 6.31. Deformada de una barra rectangular con entallas trasversales sometida a flexión.
Relaciones: $D/d=1.1$; $r=6\text{mm}$; $r/d=0.1$.

6.2.5.-Resultados

Se han realizado 20 simulaciones para distintos valores de r y D . El valor de d se ha mantenido fijo en 60mm.

Las relaciones de D/d han sido de: 3, 1.3, 1.1 y 1.05. En cuanto al radio de la entalla, varía desde los 3 hasta los 15 mm. Los resultados se muestran en las tablas 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7.

D=180 mm; d=60mm; D/d=3						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	Kt	Kt teórico	error [%]
3	0.05	42.49	16.67	2.54	2.8	8.96
6	0.1	32.32	16.67	1.93	1.98	2.08
9	0.15	28.46	16.67	1.70	1.7	0.42
12	0.2	26.25	16.67	1.57	1.57	0.29
15	0.25	24.7	16.67	1.48	1.5	1.21

Tabla 6.4. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión con una relación de $D/d=3$.

D=78 mm; d=60mm; D/d=1.3						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	Kt	Kt teórico	error [%]
3	0.05	37.68	16.67	2.26	2.25	0.45
6	0.1	30.16	16.67	1.80	1.8	0.51
9	0.15	26.8	16.67	1.60	1.61	0.14
12	0.2	24.01	16.67	1.44	1.47	2.01
15	0.25	23.56	16.67	1.41	1.4	0.95

Tabla 6.5. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión con una relación de $D/d=1.3$.

D=68 mm; d=60mm; D/d=1.1						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	Kt	Kt teórico	error [%]
3	0.05	32.73	16.67	1.96	2	1.82
6	0.1	27.82	16.67	1.66	1.8	7.28
9	0.15	25.37	16.67	1.52	1.6	4.88
12	0.2	23.97	16.67	1.43	1.48	2.84
15	0.25	23.03	16.67	1.38	1.38	0.11

Tabla 6.6. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión con una relación de $D/d=1.1$.



D=63 mm; d=60mm; D/d=1.05						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	K_t	K_t teórico	error [%]
3	0.05	28.03	16.67	1.681	1.85	9.110
6	0.1	24.32	16.67	1.458	1.6	8.818
9	0.15	22.82	16.67	1.368	1.5	8.738
12	0.2	21.95	16.67	1.316	1.4	5.947
15	0.25	21.27	16.67	1.275	1.36	6.180

Tabla 6.7. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión con una relación de $D/d=1.05$.

Como resultado final se ofrece la figura 6.32 la cual muestra los valores de K_t para distintas relaciones de D , d y r .

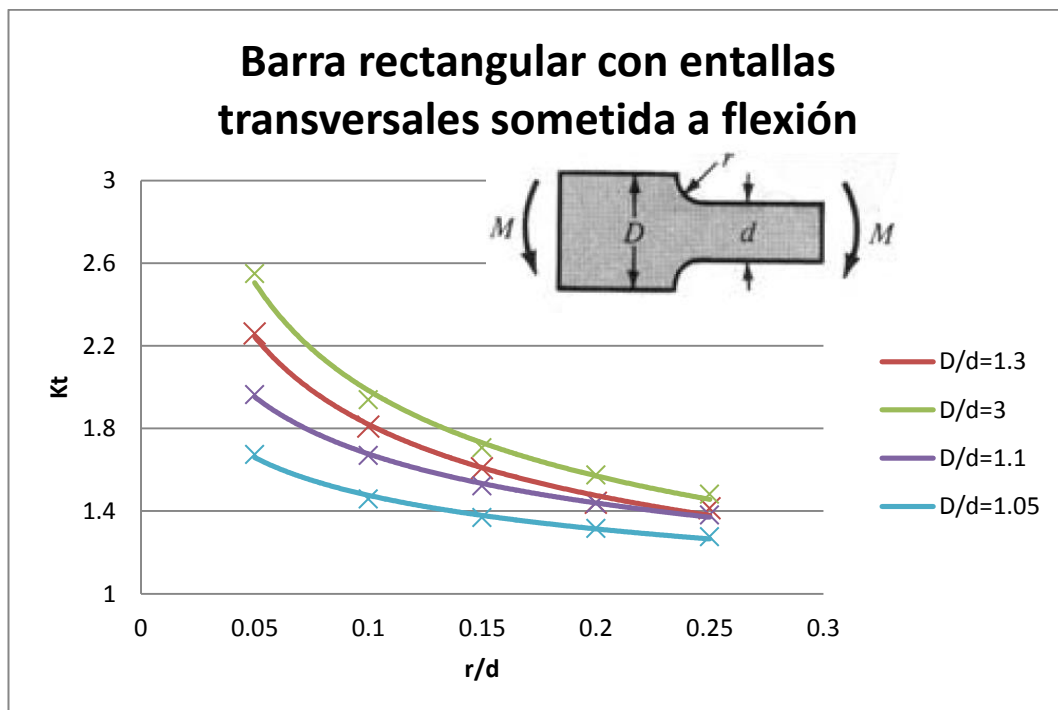


Figura 6.32. Barra rectangular con entallas trasversales sometida a flexión.

El valor de R^2 de cada curva de tendencia es el mostrado en la tabla siguiente (tabla 6.8).

Línea de tendencia	Valor de R^2
D/d=3	0.993
D/d=1.3	0.9915
D/d=1.1	0.9978
D/d=1.05	0.9925

Tabla 6.8. Valores de R^2 para las distintas líneas de tendencia.

6.2.6.-Conclusiones

Para saber si los resultados son o no son buenos se debe comprobar primeramente si la tensión que se ha fijado como referencia, es decir, la tensión nominal coincide con la proporcionada por Autodesk Inventor. Para ello es preciso marcar una sonda en la parte más alejada de la zona de menor anchura, y este valor deberá coincidir con el valor de σ_0 que ya se ha calculado, cuyo resultado dio 16.67 MPa (fig.6.33).

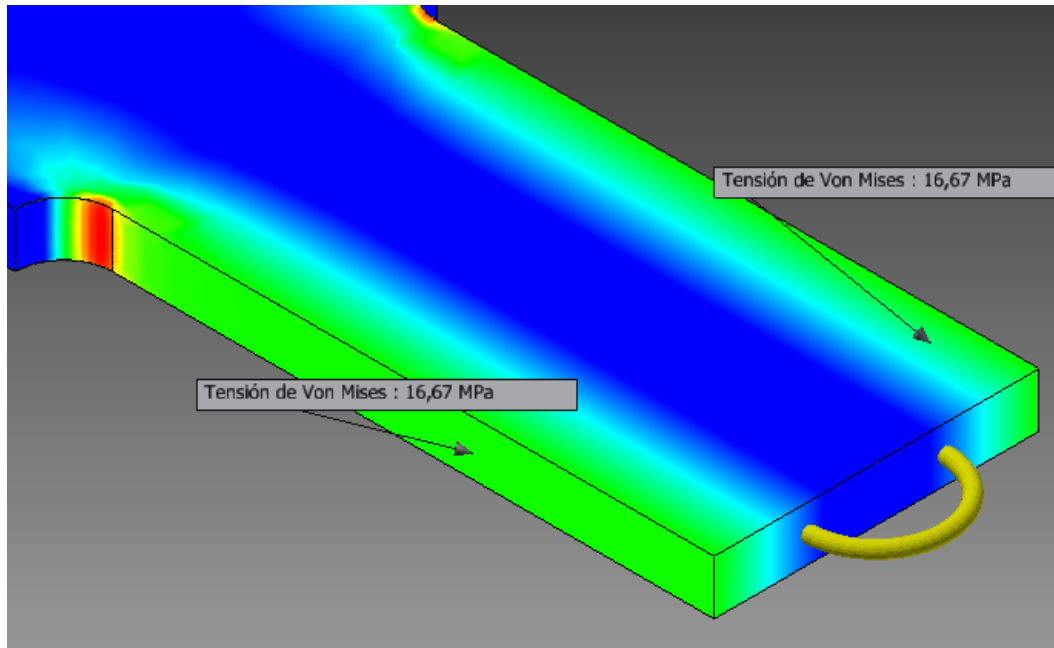


Figura 6.33. Comprobación de la tensión nominal para una barra rectangular con entallas transversales sometida a flexión.

El valor que nos ofrece el programa es igual al teórico, por tanto la referencia del valor de K_t está bien calculada y se pueden validar las simulaciones.

Además, como curiosidad se puede comprobar la tensión en la zona más ancha de la pieza utilizando la misma ecuación que para σ_0 , cambiando en este caso el valor de d , por el valor de D . El valor obtenido será válido para toda sección que no esté perturbada por el cambio de sección, que en cuyo caso la tensión sería menor que la obtenida. Para un valor de $D=78\text{mm}$ la tensión en la zona más alejada del eje es de:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{tD^2} = \frac{6 \cdot 100000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{10\text{mm} \cdot 78^2\text{mm}^2} = 9.86 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 9.86 \text{ MPa}$$

En el programa este valor se refleja en la figura 6.34:

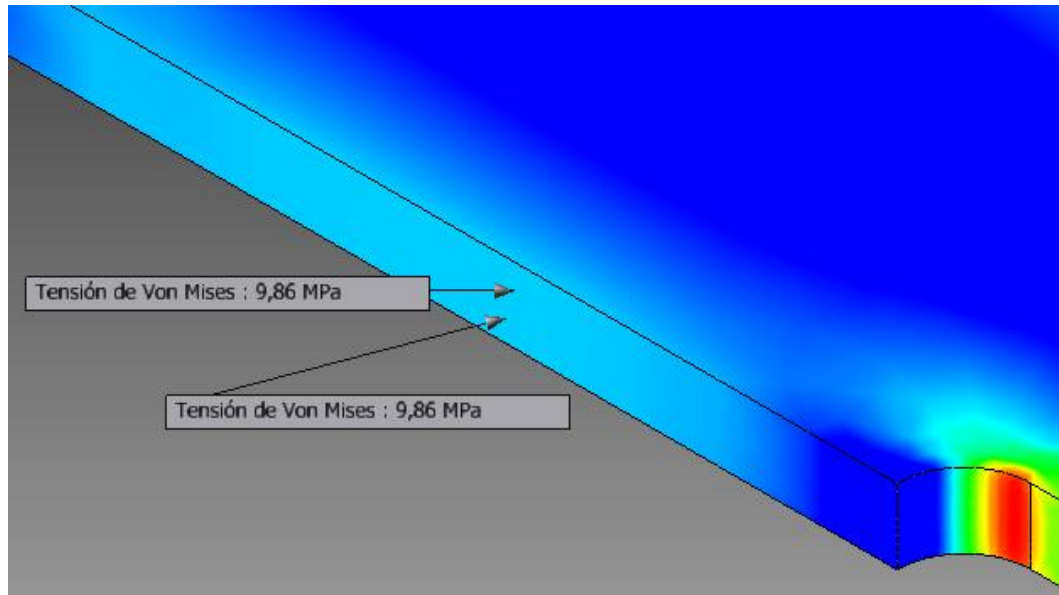


Figura 6.34. Tensión máxima de la pieza sin perturbar para un valor de $D=78\text{mm}$.

Como se puede observar, en ambos casos el valor es de 9.86 MPa, con lo que el cálculo está bien hecho.

Vistas estas tensiones, si nos fijamos en las tablas de resultados se puede observar que el que mayor error ofrece es para la relación de $D/d=1.05$. Esto se debe a que al haber un cambio de sección muy pequeño, el arco que forma la entalla es reducido y por tanto, habrá pocos elementos. Lo que se ha hecho entonces es un refinamiento mayor de esa zona, pasando de elementos de 1 mm a elementos de 0.5mm. Aun así el error sigue siendo elevado. Esto se puede deber a que las gráficas de Shigley son experimentales, y al igual que las orecidas por Autodesk, los resultados pueden diferir mínimamente.

También es muy probable que como la relación es muy pequeña los datos varíen mucho a pequeñas deformaciones, ya que por ejemplo, con una relación de $D/d=1.05$ y $r/d=0.1$, el valor de K_t es de 1.6 pero si ya la relación de $D/d=1.04$, el valor de K_t bajaría hasta 1.4, y tan solo ha variado la relación una centésima.

Para este caso, a pesar que la carga es un momento y no un esfuerzo axial, los resultados son coherentes con el resultado teórico. Por ejemplo, la tabla cuya relación de $D/d=1.3$, los resultados son prácticamente idénticos.

Por tanto, al igual que la barra rectangular sometida a axial, el diseño de este tipo de piezas sometidas a flexión se debe hacer con una relación de D/d lo más pequeña posible y con un radio de entalla lo mayor posible.

6.3.- Barra circular con entalla circunferencial sometida a tracción

6.3.1.-Definición

Se trata de una barra circular con una entalla circunferencial de radio r , sometida a una carga de valor F , produciendo así un esfuerzo de tracción.

Se tomará como valor nominal para el cálculo de K_t La tensión σ_0 (eq.6.6).

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d^2} \quad (6.6)$$

donde:

σ_0 : tensión nominal [MPa]

F : fuerza axial aplicada a ambos lados de la pieza [MPa]

d : ancho más pequeño de la pieza [mm]

Para este caso, la gráfica que nos muestra el valor de K_t para las distintas relaciones de la pieza es la mostrada en la fig.6.35.

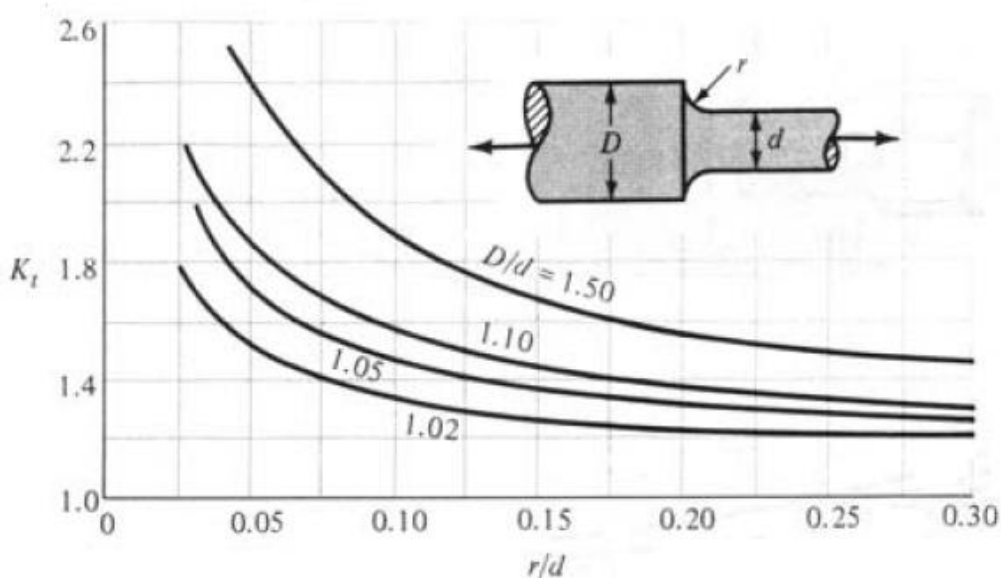


Figura 6.35. Barra circular con entallas circunferenciales sometida a un esfuerzo axial. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Richard G. Budynas y J.Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].



6.3.2.-Geometría

Para la creación de la geometría, al ser una pieza circular, es sensato revolucionar un perfil alrededor del eje. El perfil es el mostrado en la fig.6.36, con un valor fijo de $d=60\text{mm}$. Para las distintas magnitudes de D , el valor del ancho mayor se cambiará para las tres relaciones de $D/d= 1.5, 1.1$ y 1.05 .

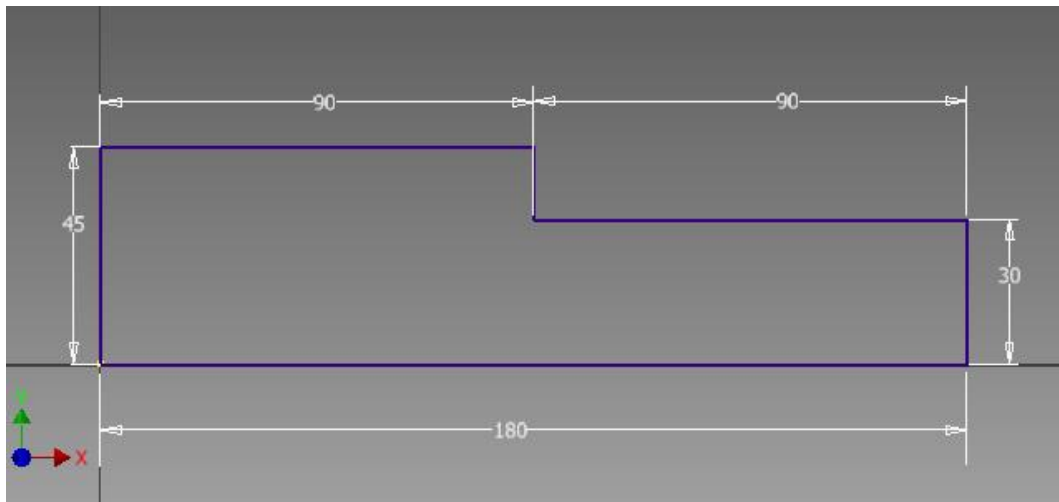


Figura 6.36. Geometría para una barra circular con unos valores de $d=60\text{mm}$ y $D=90\text{mm}$

Para la revolución del perfil de la figura anterior se debe salir del editor de bocetos y crear una revolución. En primer lugar, el programa nos pide el área del perfil a revolucionar (fig.6.37).

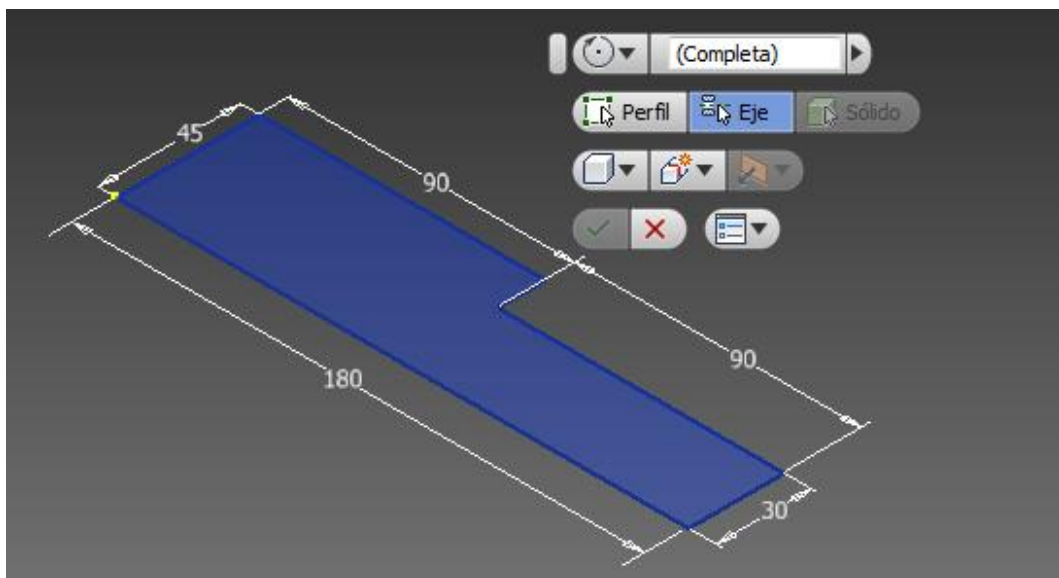


Figura 6.37. Revolución de un boceto

A continuación el programa pide el eje alrededor del cual se quiere que la pieza gire. En este caso, la pieza gira alrededor del eje x y para modelarlo en el programa tan solo basta con seleccionar dicho eje (fig.6.38).

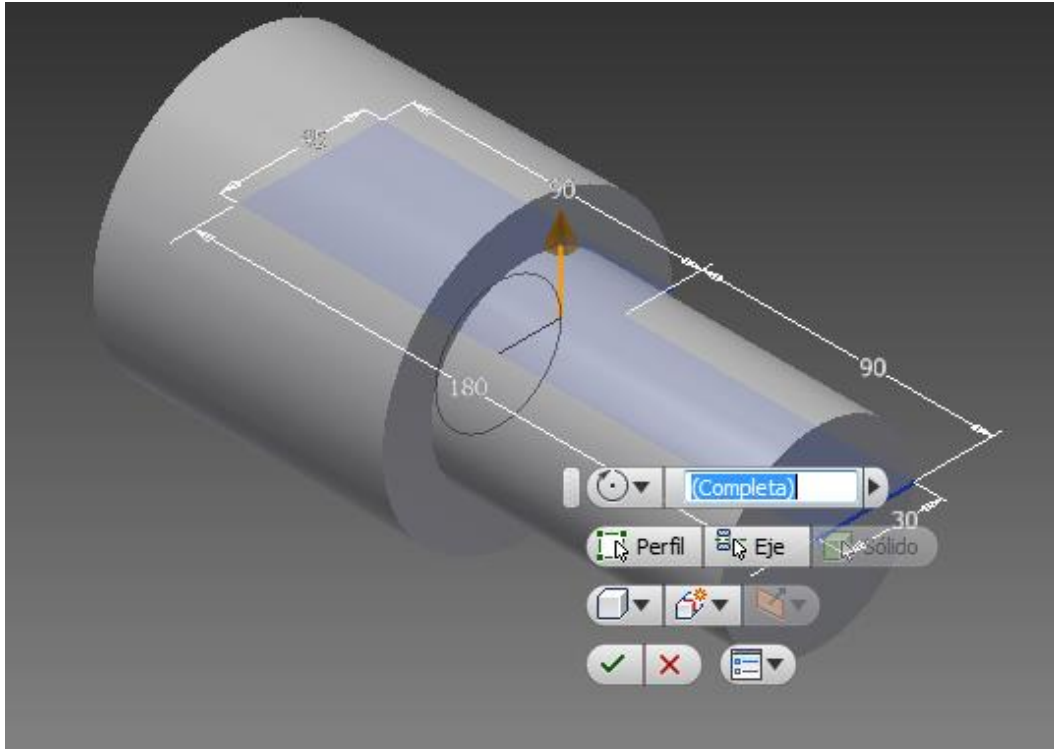


Figura 6.38. Selección del eje de revolución y figura completa

Para la creación de la entalla se usa la función de *empalme*. Esta función permite la creación de una entalla circunferencial de radio r , que sucesivamente se cambia para obtener las distintas relaciones de medida de la pieza (fig.6.39).

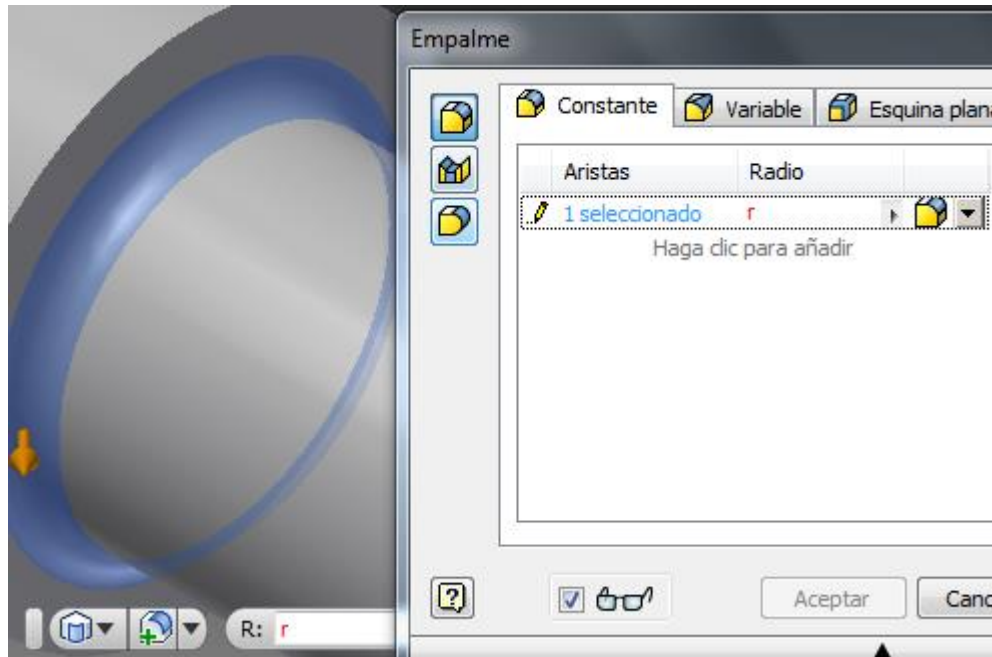


Figura 6.39. Creación de una entalla circunferencial de radio r .

6.3.3.- Modelización

Los parámetros a tener en cuenta son D , d , r y F .

La implementación en Autodesk se efectuará según lo mostrado en la figura siguiente (fig.6.40).

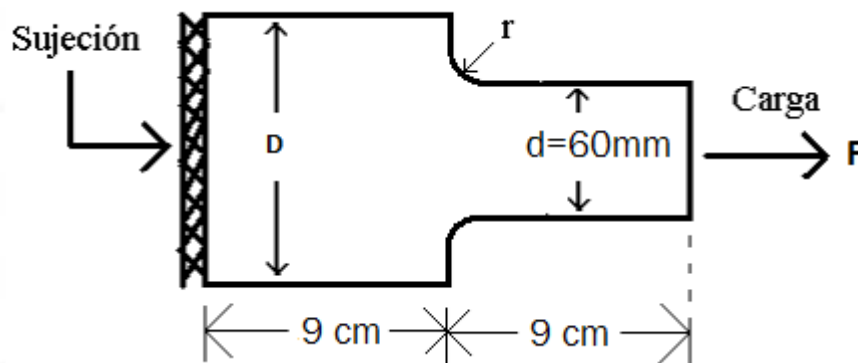


Figura 6.40. Implementación en Autodesk Inventor de una pieza circular con una entalla circunferencial de radio r .

Como los casos anteriores, se fija una de las caras (la de mayor ancho) y en la otra se aplica la carga. El material también es el mismo que en los casos anteriores, un acero estructural metálico con acabado laminado.

Para la restricción de movimiento, se inicia el análisis de tensión y se marca la cara que se pretende fijar (fig.6.41).

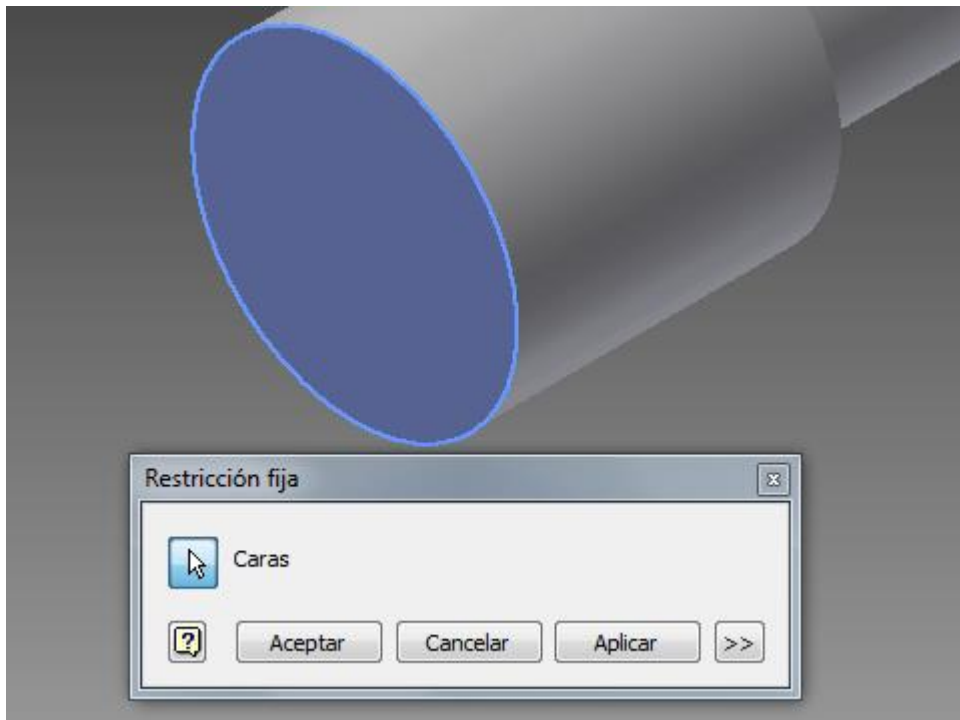


Figura 6.41. Restricción de movimiento a una de las caras.

Para la aplicación de la carga, se efectúa en la cara contraria al plano fijado (fig.6.42).

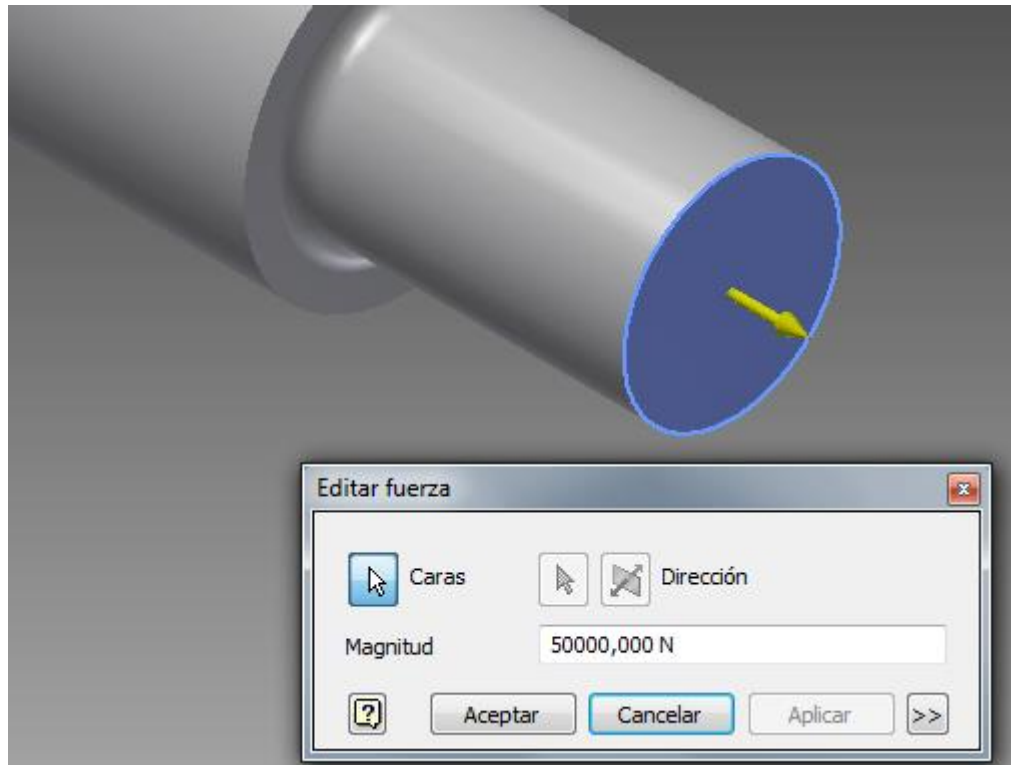


Figura 6.42. Aplicación de una fuerza de valor F=50000N.

El valor de la fuerza es de 50000N, como d=60mm, el valor de la tensión nominal es de:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 50000 \text{ N}}{\pi \cdot 60^2 \text{ mm}^2} = 17.68 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{17.68 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la generación de la malla, haciendo *click* en *configuración de malla*, las modificaciones de la malla inicial se han definido mediante los siguientes valores:

- Tamaño medio del elemento: 0.07
- Tamaño mínimo del elemento: 0.200
- Factor de modificación: 1.5
- Ángulo máximo de giro: 60 gr

Además de esta configuración inicial de la malla, es preciso hacer un refinamiento de la malla en la entalla circunferencial. Este refinamiento será de 3mm.

La configuración total de la malla queda definida por la figura 6.43.

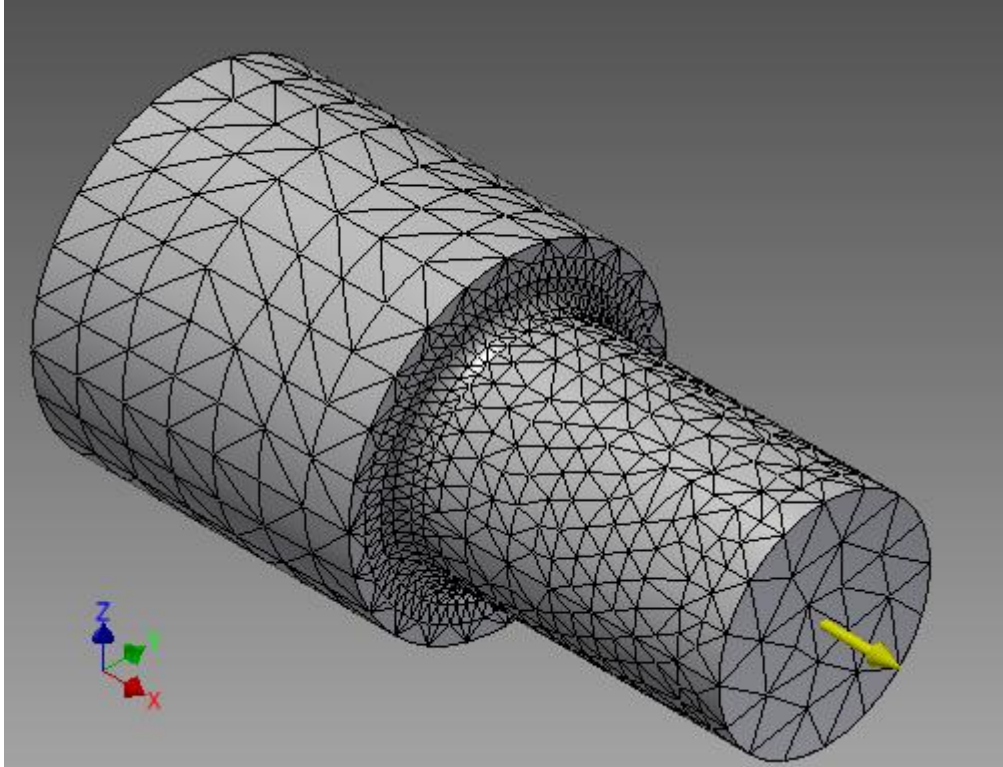


Figura 6.43. Configuración de la malla para una pieza circular sometida a tracción.

6.3.4.- Simulación

Haciendo simular el programa obtenemos la tensión de Von Mises para cada geometría. Algunas de las gráficas son las mostradas a continuación (fig.6.44, fig.6.45 y fig.6.46).

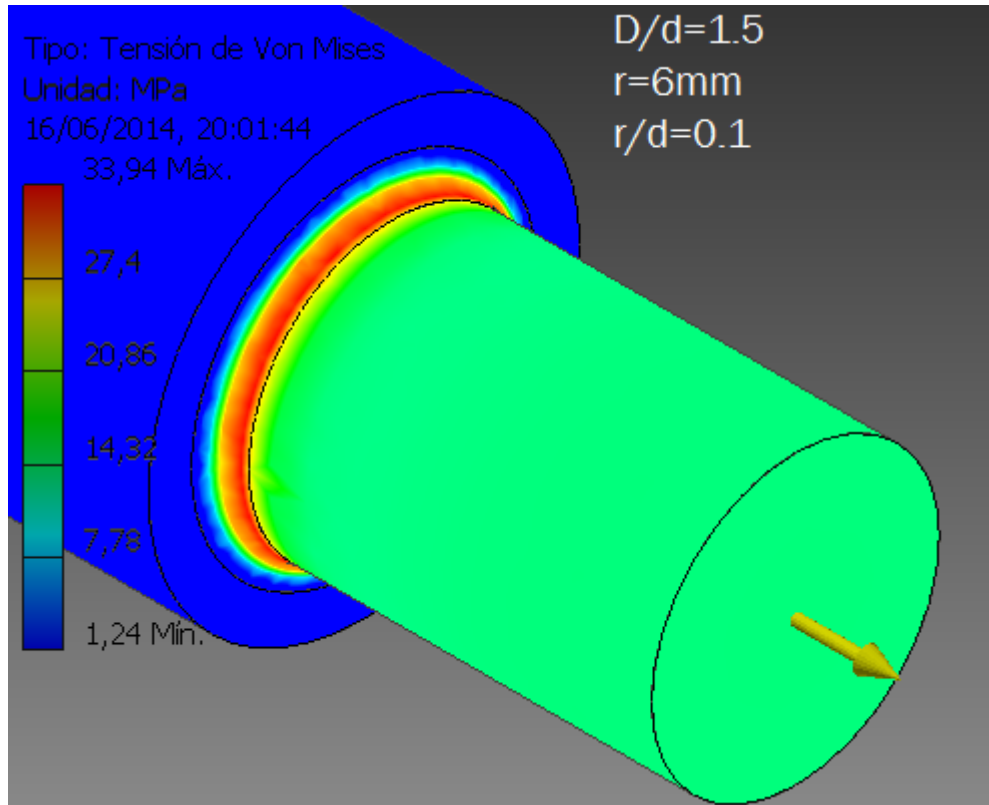


Figura 6.44. Barra circular con entalla circunferencial sometida a tracción. Relación $D/d = 1.5$, $r=6\text{mm}$, $r/d=0.1$.

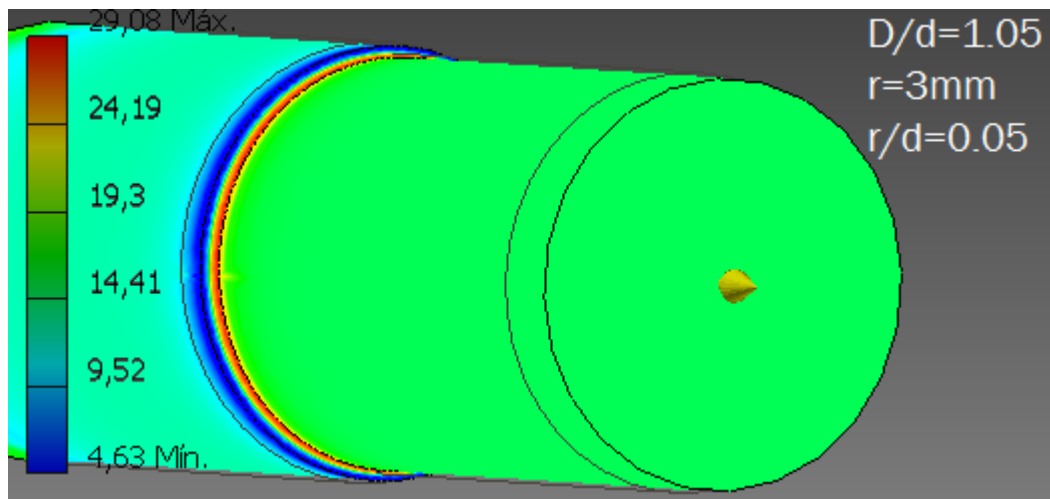


Figura 6.45. Barra circular con entalla circunferencial sometida a tracción. Relación $D/d = 1.05$, $r=3\text{mm}$, $r/d=0.05$.

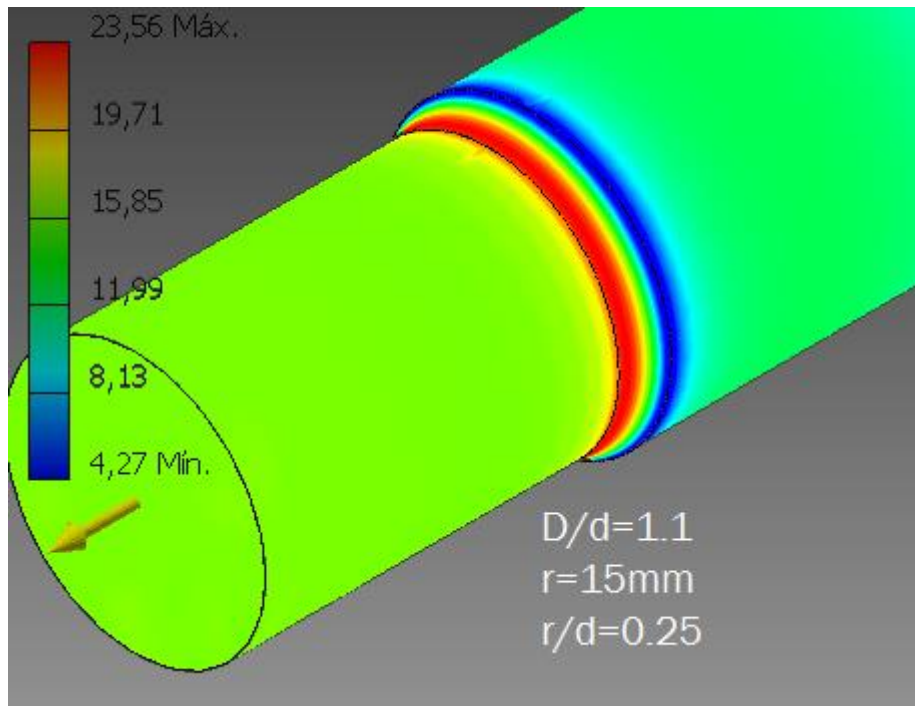


Figura 6.46. Barra circular con entalla circunferencial sometida a tracción. Relación $D/d = 1.1$, $r=15\text{mm}$, $r/d=0.25$.

En cada una de las figuras mostradas, la tensión máxima también se encuentra en el cambio brusco de sección, como no podía ser de otra manera. Para poder ver mejor esta zona, en la fig.6.47 se amplía la entalla circunferencial y se ha ordenado al programa que marque donde se encuentra la máxima tensión. Este análisis corresponde con una relación de $D/d=1.5$, $r=12\text{mm}$ y $r/d=0.2$.

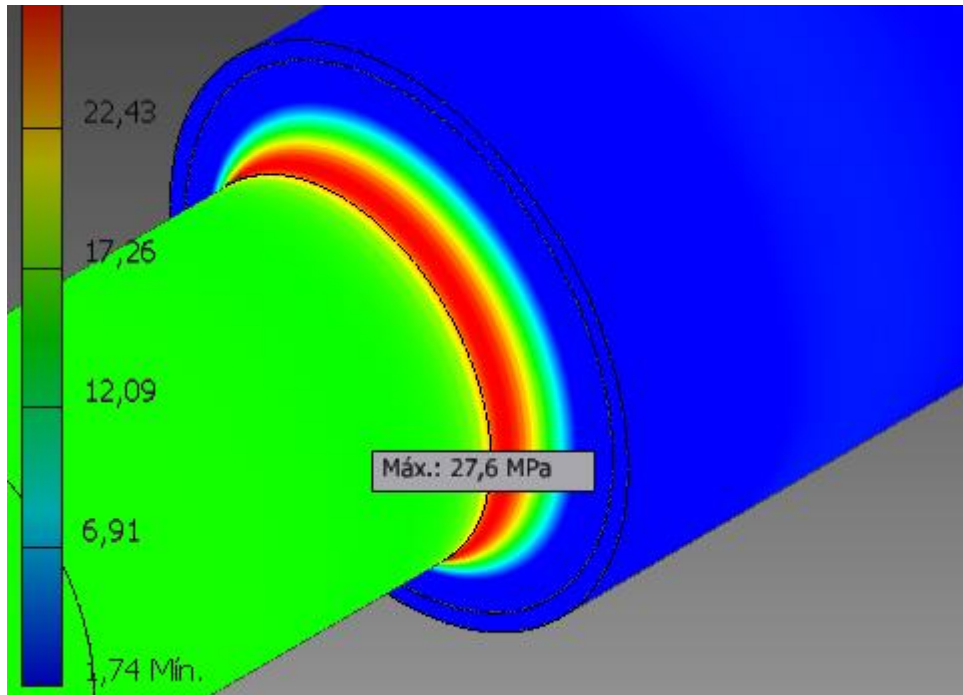


Figura 6.47. Máximo esfuerzo en una pieza circular con entalla circunferencial sometida a tracción.

En cuanto a la deformación, al ser un esfuerzo axial, éste debería desplazarse cierta distancia en la misma dirección y sentido que la fuerza aplicada. En la fig.6.48 se puede ver que este fenómeno se cumple.

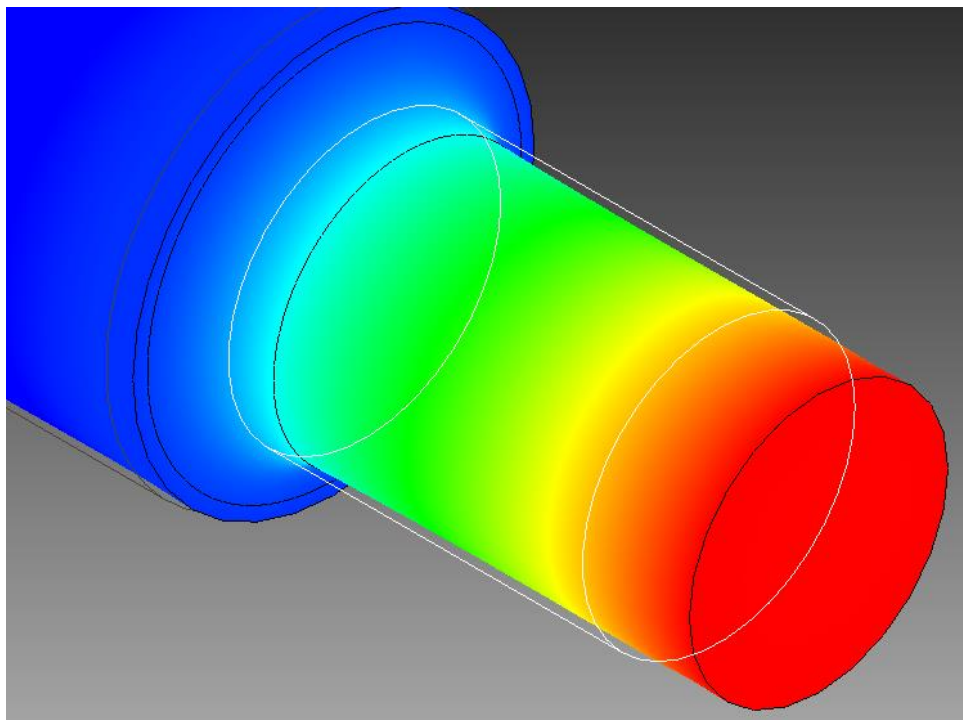


Figura 6.48. Desplazamiento longitudinal de una pieza circular sometida a flexión.

6.3.5.-Resultados

Se han realizado 15 simulaciones para distintos valores de r y D . El valor de d se ha mantenido fijo en 60mm.

Las relaciones de D/d han sido de: 1.5, 1.1 y 1.05. En cuanto al radio de la entalla, varía desde los 3 hasta los 15 mm. Los resultados se muestran en las tablas 6.9, 6.10 y 6.11.

D=90mm; d=60mm; D/d=1.5						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	Kt	Kt teórico	error [%]
3	0.05	43.09	17.68	2.437	2.4	1.550
6	0.1	33.94	17.68	1.919	1.9	1.035
9	0.15	30.01	17.68	1.697	1.65	2.872
12	0.2	27.6	17.68	1.561	1.56	0.069
15	0.25	26.15	17.68	1.479	1.5	1.395

Tabla 6.9. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a tracción con una relación de $D/d=1.5$.

D=66mm; d=60mm; D/d=1.1						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	Kt	Kt teórico	error [%]
3	0.05	34.14	17.68	1.930	1.9	1.631
6	0.1	28.34	17.68	1.602	1.58	1.451
9	0.15	25.77	17.68	1.457	1.45	0.522
12	0.2	24.52	17.68	1.386	1.38	0.498
15	0.25	23.56	17.68	1.332	1.35	1.290

Tabla 6.10. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a tracción con una relación de $D/d=1.1$.

D=63mm; d=60mm; D/d=1.05						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	Kt	Kt teórico	error [%]
3	0.05	29.08	17.68	1.644	1.7	3.247
6	0.1	25.78	17.68	1.458	1.48	1.476
9	0.15	24.14	17.68	1.365	1.36	0.395
12	0.2	23.05	17.68	1.303	1.3	0.287
15	0.25	22.46	17.68	1.270	1.27	0.028

Tabla 6.11. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a tracción con una relación de $D/d=1.05$.



Como resultado final se ofrece la fig.6.49 la cual muestra los valores de K_t para distintas relaciones de D , d y r .

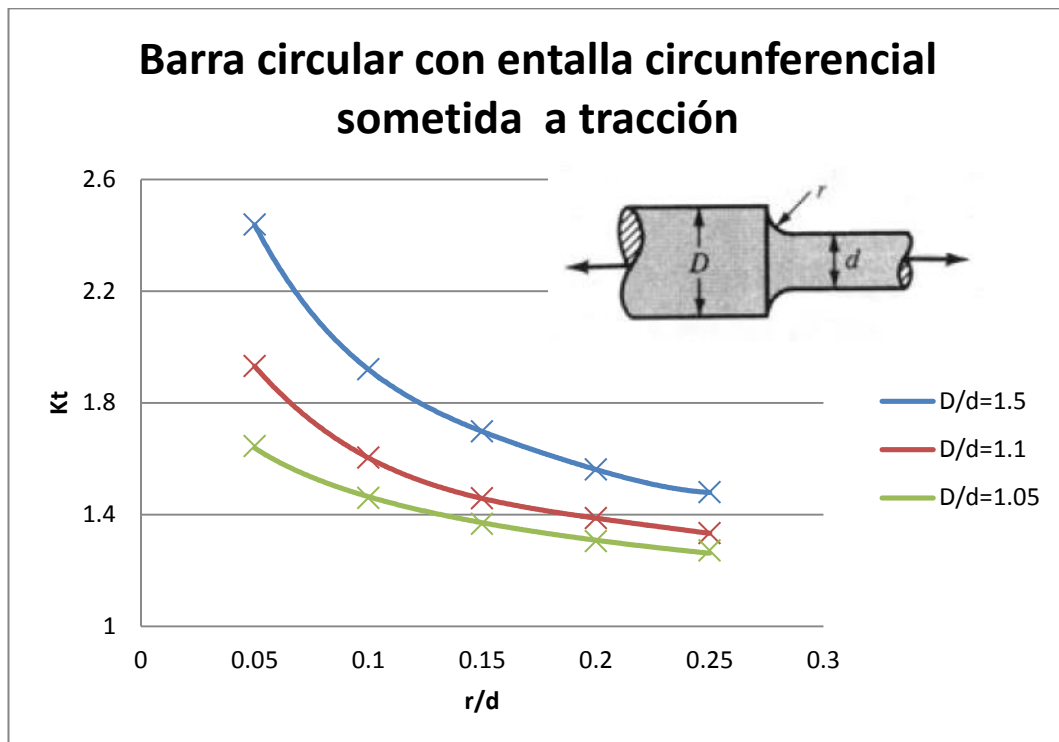


Figura 6.49. Barra circular con entalla circular sometida a tracción.

El valor de R^2 de cada curva de tendencia es el mostrado en la tabla siguiente (tabla 6.12).

Línea de tendencia	Valor de R^2
D/d=1.5	1
D/d=1.1	1
D/d=1.05	0.9975

Tabla 6.12. Valores de R^2 para las distintas líneas de tendencia.

6.3.6.-Conclusiones

Las curvas de línea de tendencia tienen un valor de R^2 prácticamente de 1 por lo que estas líneas de tendencia representan con exactitud todos los datos obtenidos.

Para algunas simulaciones se ha tenido que hacer un refinamiento mayor de la malla debido a que algún elemento se salía de las recomendaciones. La fig.6.50 muestra cómo existe una discontinuidad en las tensiones.

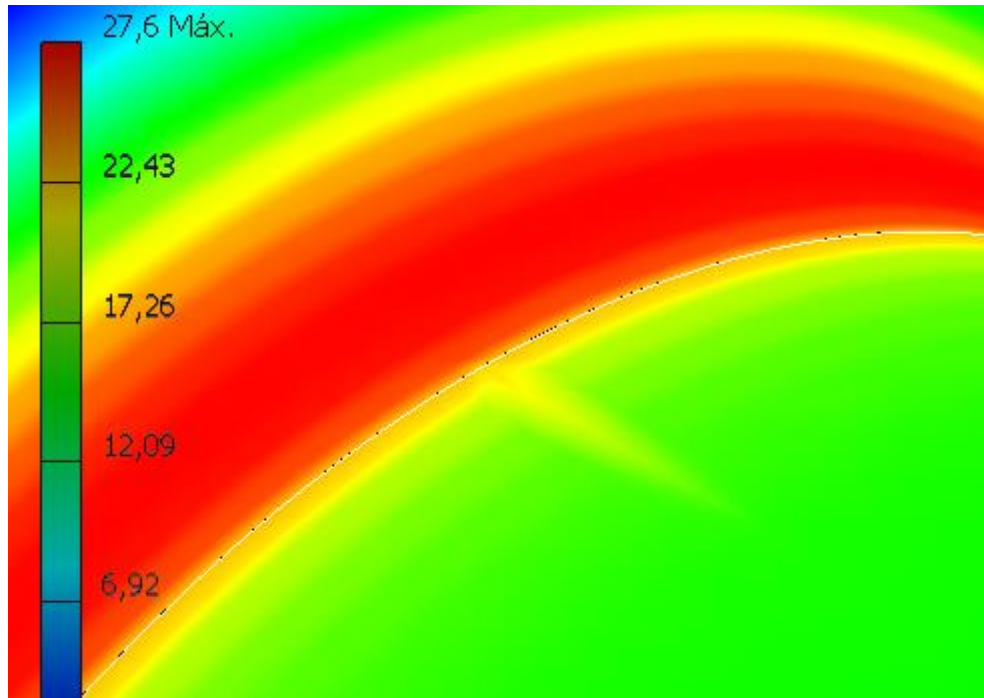


Figura 6.50. Discontinuidad en las tensiones de Von Mises.

Esto es debido a que el elemento situado en esa discontinuidad es demasiado largo (fig.6.51) con ángulo muy agudos, no cumpliendo así la recomendación del Aspect Ratio. Por lo tanto se ha tenido que refinar la malla para que este elemento se divida en elementos más pequeños (fig.6.52)

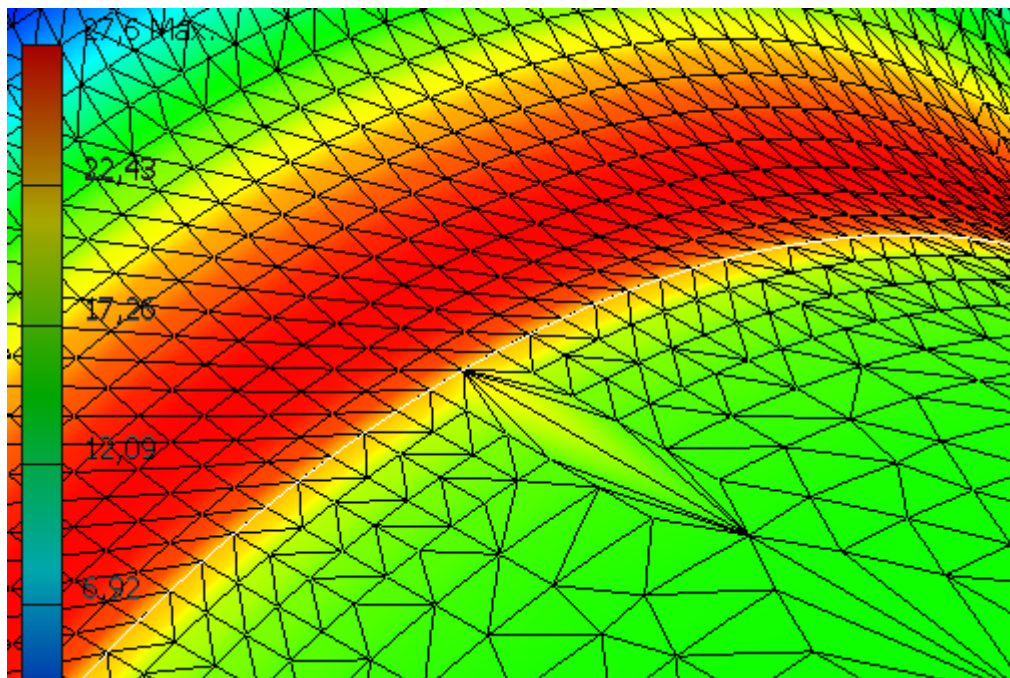


Figura 6.51. Discontinuidad en la tensión de Von Mises debido a la mal formación de uno de los elementos.

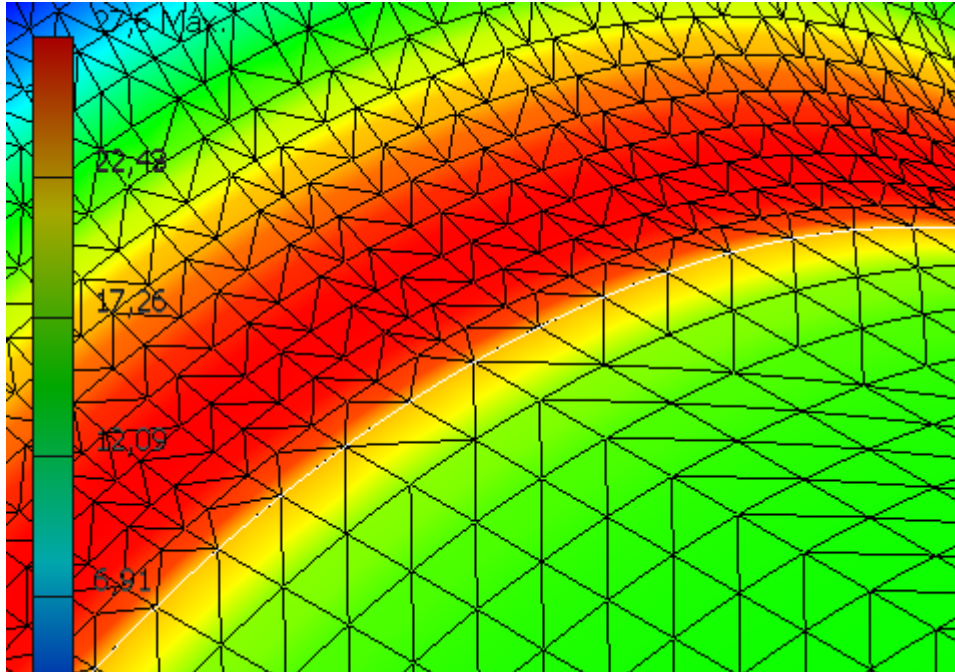


Figura 6.52. Refinamiento local de la malla para eliminación de la discontinuidad de la distribución de tensión de Von Mises.

El valor de la tensión máxima no ha cambiado al quitar la discontinuidad pero siempre hay que observar bien la distribución de tensiones y que no exista este tipo de fenómenos ya que si esta discontinuidad se hubiera encontrado en la zona de máxima tensión, ésta podría haber variado notablemente al hacer el refinamiento local de la malla.

Viendo los errores relativos que se han obtenido, los resultados son bastante buenos, siendo totalmente coherentes con el factor teórico de concentración de tensiones dado por las tablas de Shigley.

En este ejemplo, el programa Autodesk Inventor ofrece los resultados que deberían dar a pesar de ser un estado de tensión tridimensional.

Para comprobar que la tensión de referencia es la misma que la ofrecida por las tablas de Shigley, se coloca una sonda en la sección que hemos tomado como sección nominal (la de menos espesor).

En la fig.6.53 se aprecia que el valor de la tensión nominal es $\sigma_0=17.68$ MPa por lo que la referencia está bien marcada y las gráficas se pueden dar por válidas.

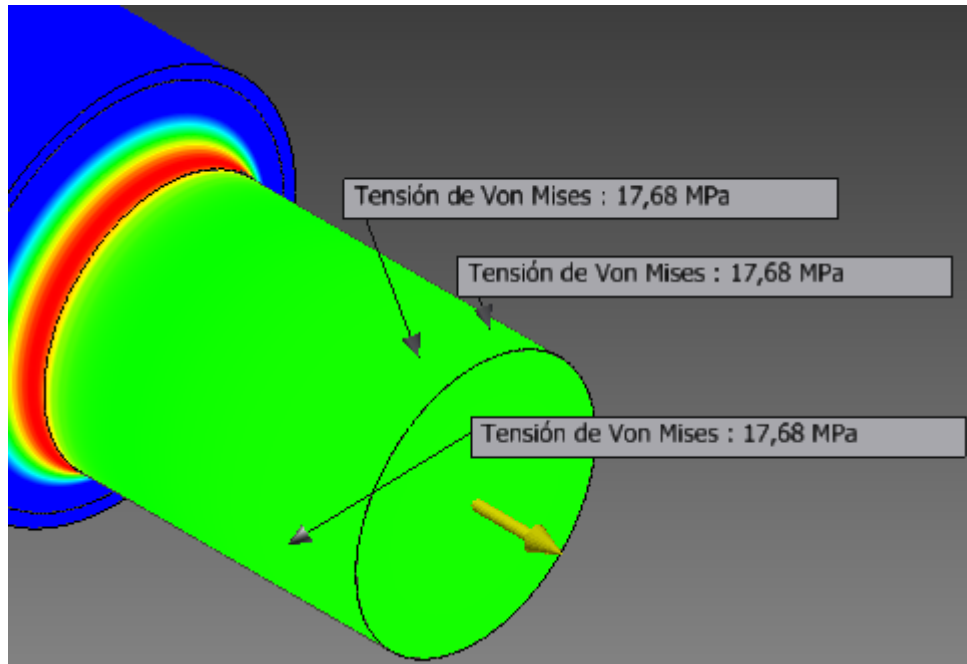


Figura 6.53. Tensión nominal σ_0 en una barra circular.



6.4.- Barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión

6.4.1.-Definición

Se trata de una barra circular con una entalla circunferencial de radio r , sometida a un momento de valor M , produciendo así un esfuerzo de flexión.

Se tomará como valor nominal para el cálculo de K_t La tensión σ_0 (eq.6.7).

$$\sigma_0 = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} \quad (6.7)$$

Donde:

σ_0 : Tensión nominal [MPa];

M : Momento aplicado a ambos lados de la pieza [N·mm];

c : Mitad del ancho más pequeño de la pieza ($d/2$) [mm];

I : momento de inercia: $I = \frac{\pi d^4}{64}$;

d : ancho más pequeño de la pieza [mm]

En este caso, la gráfica que nos relaciona la geometría con el factor teórico de concentración de tensiones K_t , es la mostrada en la fig. 6.54.

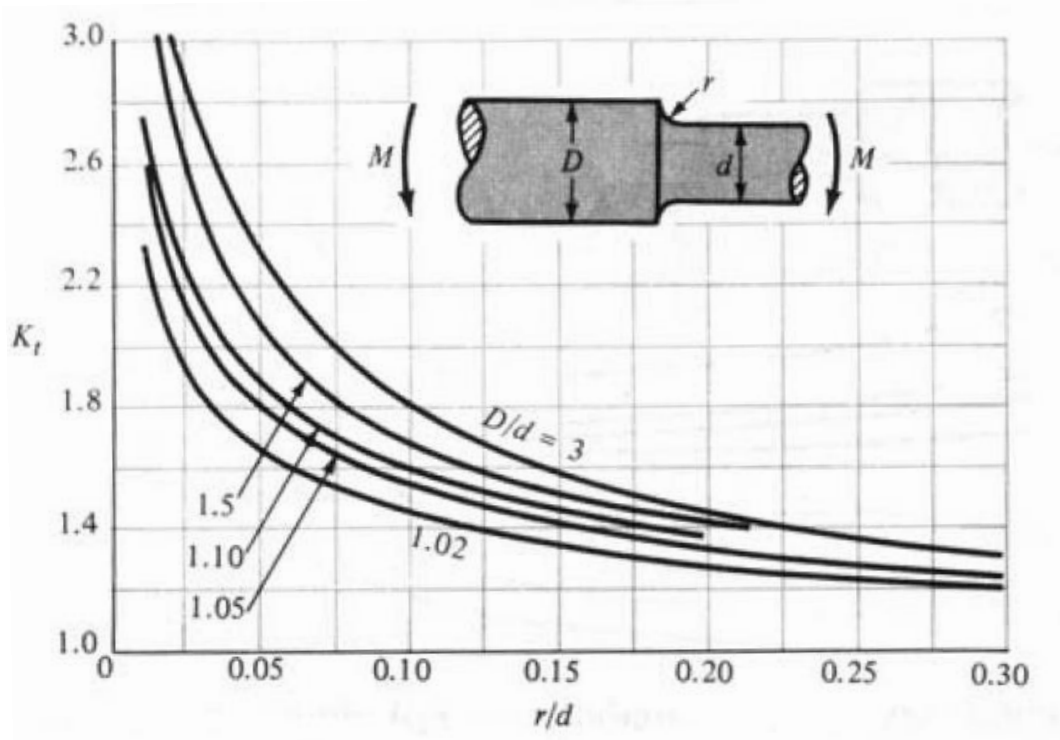


Figura 6.54. Barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley. Richard G. Budynas y J. Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].

6.4.2.- Geometría

La creación de la geometría es idéntica a la explicada en el apartado 6.3.2.

El valor de d es de 60 mm, mientras que para obtener las distintas relaciones de D/d , se modifica el valor de D .

El resultado final se muestra en la fig.6.55.

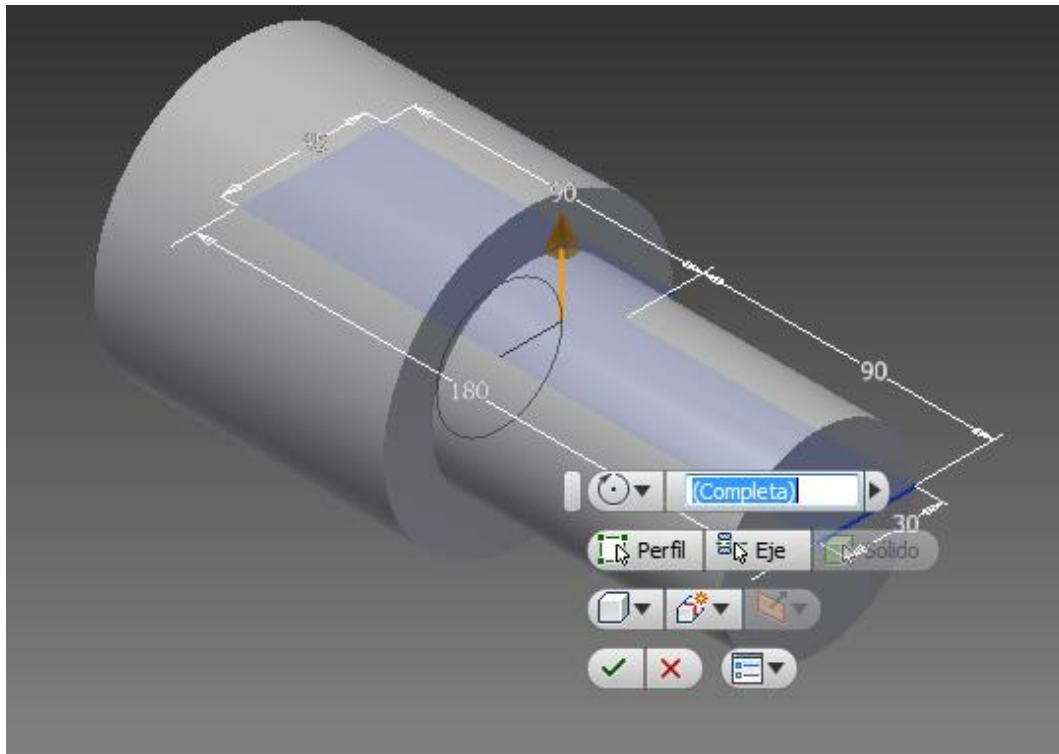


Figura 6.55. Geometría de una barra circular con entalla circunferencial.

6.4.3.-Modelización

Los parámetros a tener en cuenta son D , d , r y M .

La implementación en Autodesk se efectuará según lo mostrado en la figura siguiente (fig.6.56).

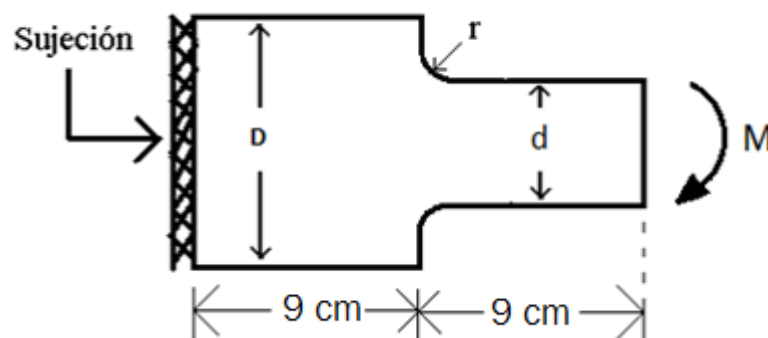


Figura 6.56. Modelización de una barra circular con entalla circunferencial de radio r .

La restricción de movimiento es la misma que en el apartado 7.3.3 (fig.6.57), así como el material (acero estructural metálico con acabado laminado).

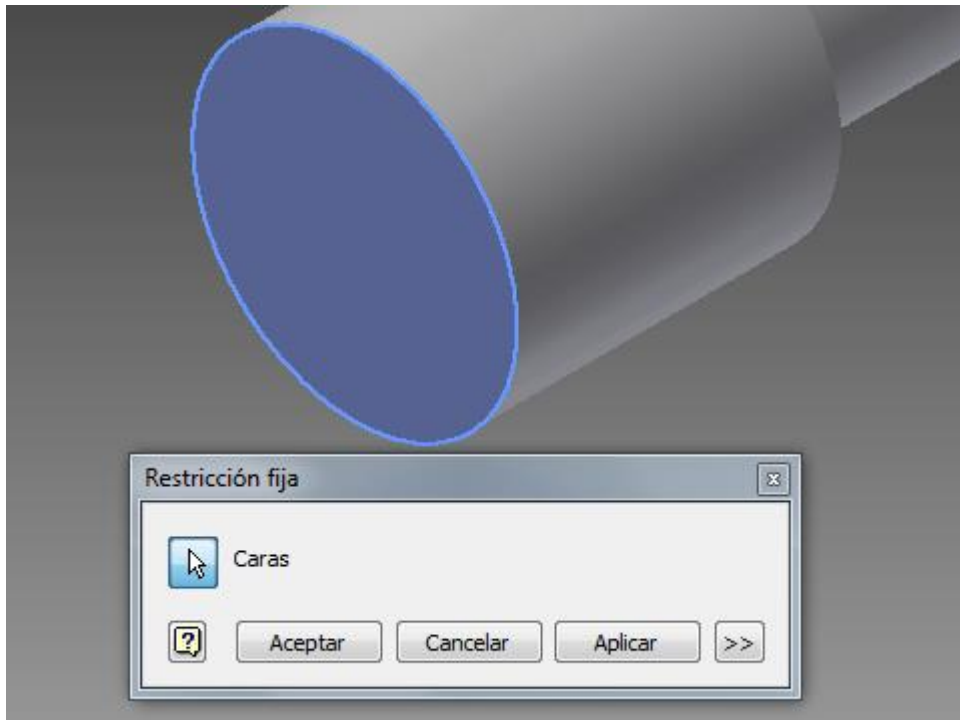


Figura 6.57. Restricción de movimiento nulo a una de las caras

El valor de la carga es distinto puesto que en este ejemplo se aplica un momento de valor 500000 N·mm. Para implementar el momento, se marca la opción de *carga de momento* y se selecciona la cara opuesta a la restricción fija, haciendo que este gire alrededor del eje y (fig.6.58).

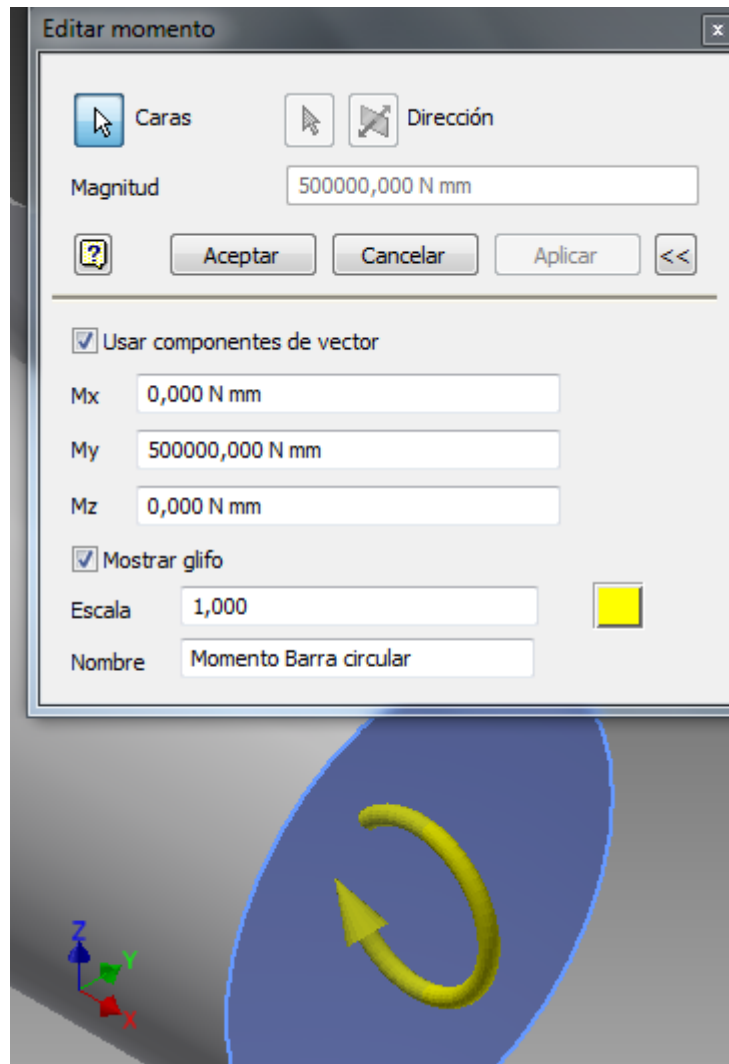


Figura 6.58. Aplicación de un momento de 500000 N·mm alrededor del eje y.

Como $M=500000\text{N}\cdot\text{mm}$, $d=60\text{mm}$, la tensión nominal es:

$$\sigma_0 = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 500000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \cdot 60^3 \text{ mm}^3} = 23.578 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{23.578 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la generación de la malla, haciendo *click* en *configuración de malla*, las modificaciones de la malla inicial se han definido mediante los siguientes valores:

- Tamaño medio del elemento: 0.07
- Tamaño mínimo del elemento: 0.200
- Factor de modificación: 1.5
- Ángulo máximo de giro: 40 gr

Además de esta configuración inicial de la malla, es preciso hacer un refinamiento de la malla en la entalla circunferencial. Este refinamiento será de 0.8 mm, cuya explicación se detalla en el apartado de conclusiones.

La configuración total de la malla queda definida por la figura 6.59.

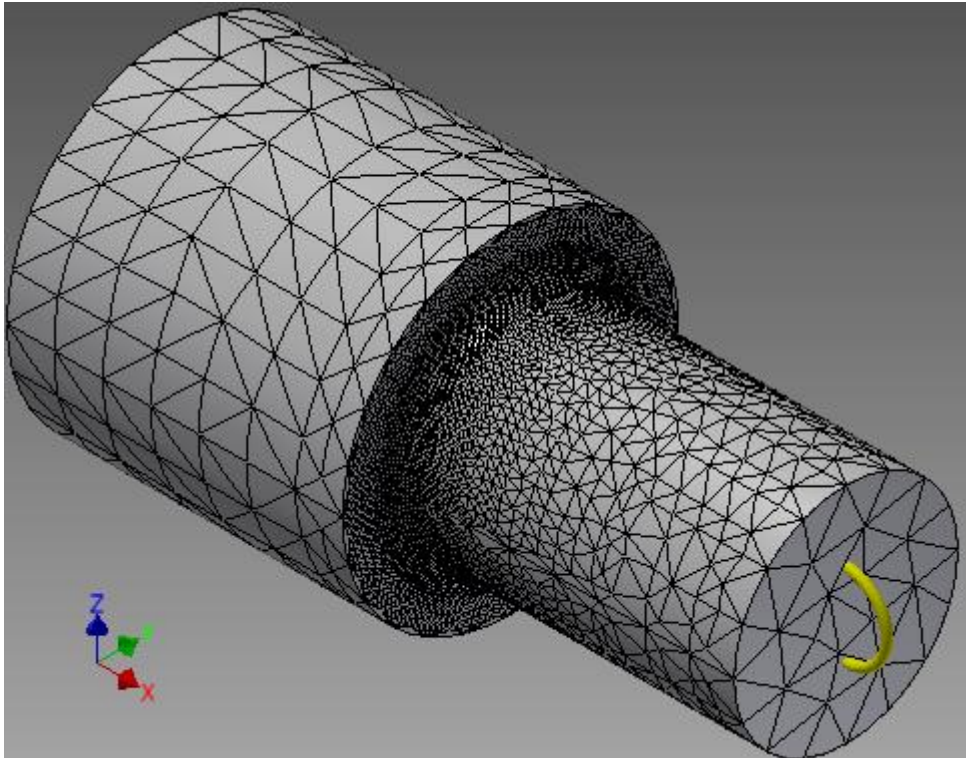


Figura 6.59. Configuración de la malla para una barra circular con una entalla circunferencial.

6.4.4.-Simulación

Haciendo simular el programa obtenemos la tensión de Von Mises para cada geometría. Algunas de las gráficas son las mostradas a continuación (fig.6.60 y fig.6.61).

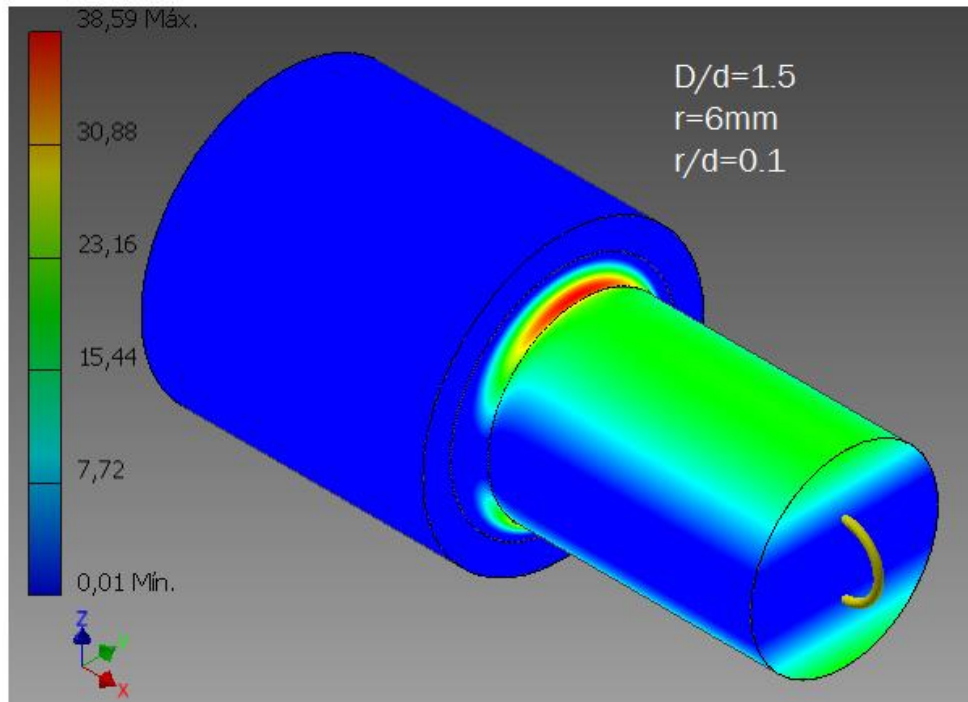


Figura 6.60. Distribución de tensiones para barra circular con entalla circular sometida a flexión. Relación $D/d=1.5$, $r=6\text{mm}$, $r/d=0.1$.

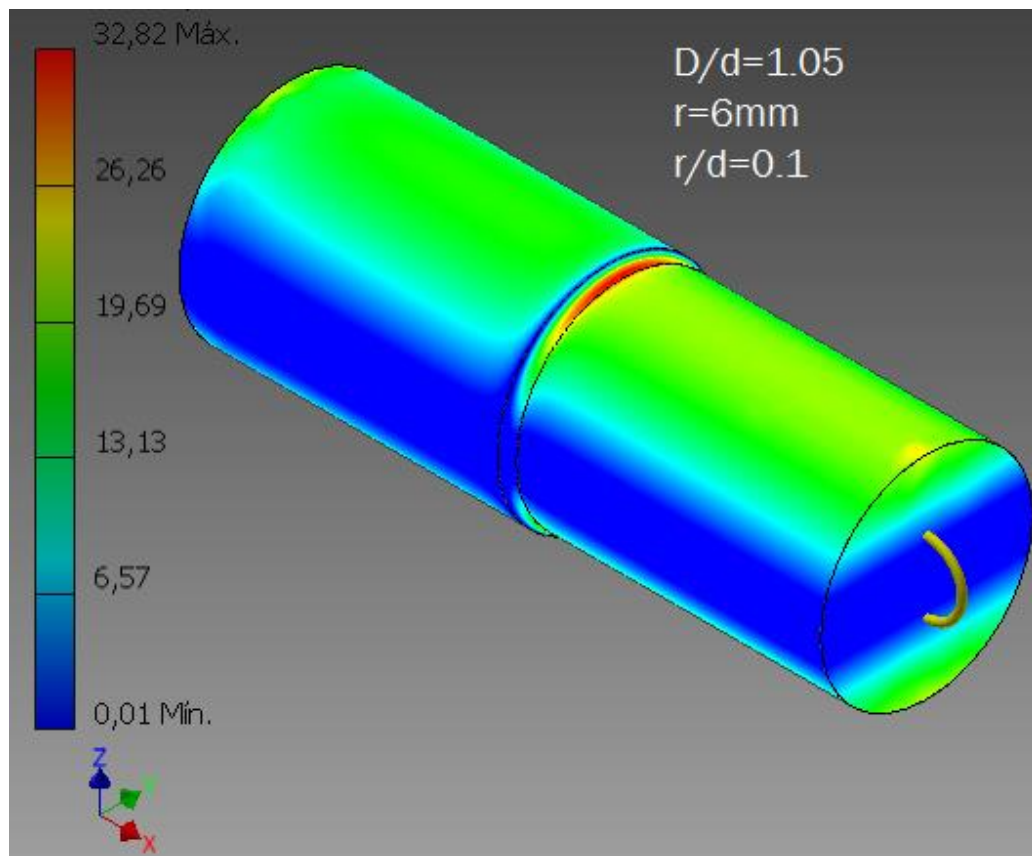


Figura 6.61. Distribución de tensiones para barra circular con entalla circular sometida a flexión. Relación $D/d=1.05$, $r=6\text{mm}$, $r/d=0.1$.

Al ser un momento el que está aplicado, el resultado de la distribución de tensiones va a depender de la distancia al centro de revolución, puesto que el momento de inercia y el momento son constantes. Por ello como bien se ve en las figuras anteriores, las tensiones máximas están en las cotas del eje z máxima y mínima, siendo la más alta de todas la correspondiente al cambio de sección, donde existe una concentración de tensiones. La figura siguiente (fig.6.62) muestra el valor de esta tensión máxima corroborando que efectivamente se encuentra en esta zona.

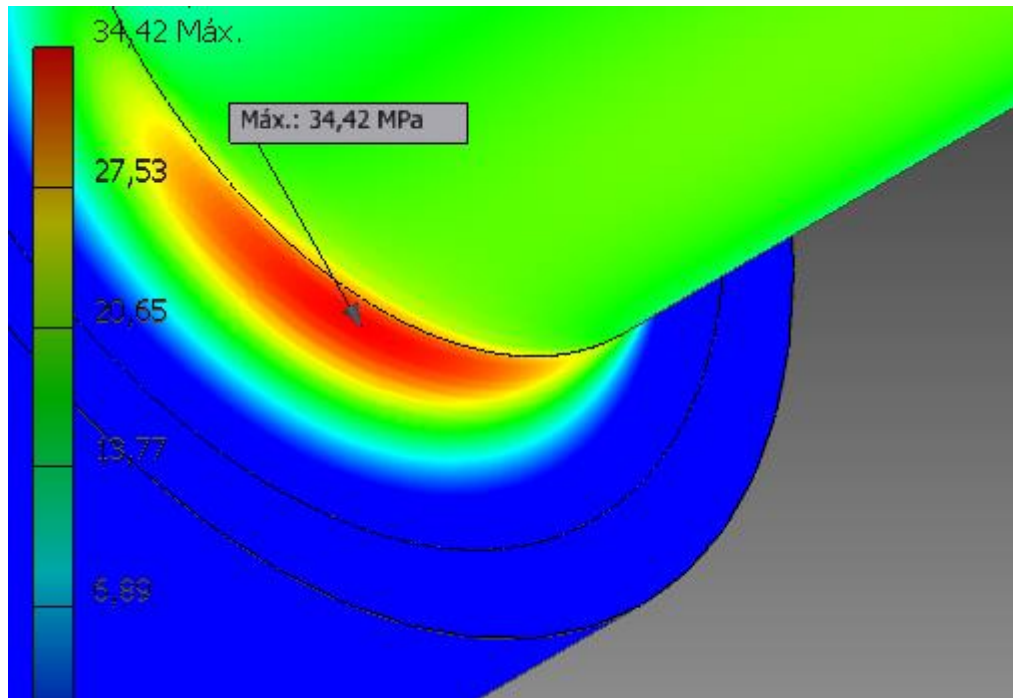


Figura 6.62. Tensión máxima para una barra circular con relaciones $D/d=1.5$; $r=9\text{mm}$ y $r/d=0.15$.

La deformada que debería seguir, al igual que el momento, debería girar alrededor del eje y (fig.6.63).

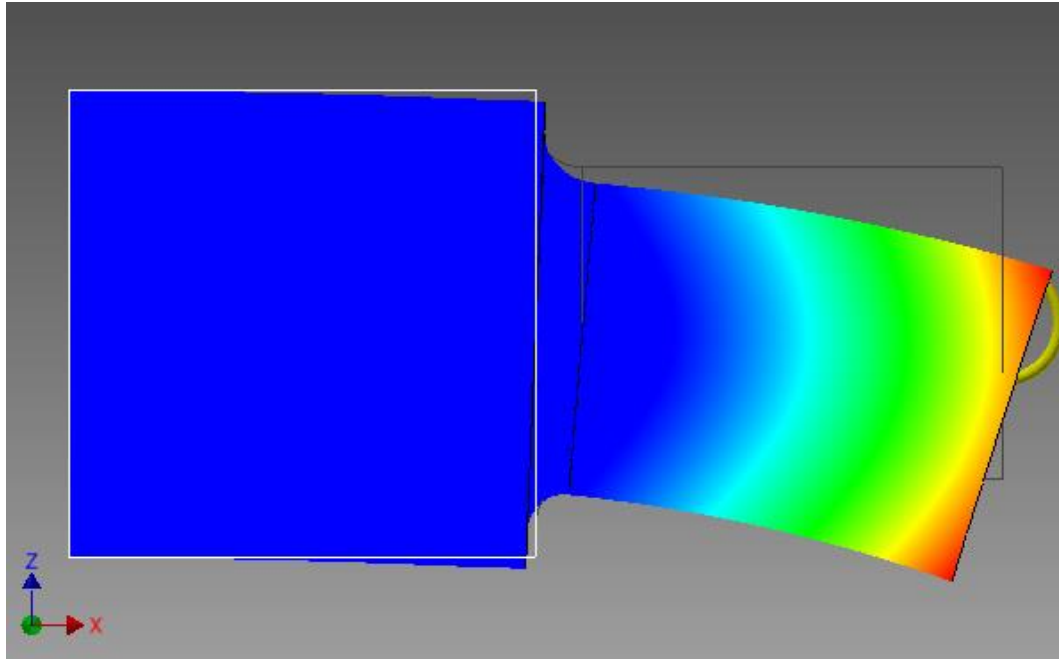


Figura 6.63. Desplazamiento para una barra circular con relaciones $D/d=1.5$; $r=9\text{mm}$ y $r/d=0.15$.

Efectivamente, el desplazamiento se realiza alrededor del eje y , por lo que el programa ha simulado bien la pieza y las condiciones de contorno son correctas.

6.4.5.-Resultados

Se han realizado 20 simulaciones para distintos valores de r y D . El valor de d se ha mantenido fijo en 60mm.

Las relaciones de D/d han sido de: 3, 1.5, 1.1 y 1.05. En cuanto al radio de la entalla, varía desde los 3 hasta los 15 mm. Los resultados se muestran en las tablas 6.13, 6.14, 6.15 y 6.16.

D=180 mm; d=60mm; D/d=3						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_0 [Mpa]	K_t	K_t teórico	error [%]
3	0.05	49.75	23.578	2.110	2.3	8.260
6	0.1	38.99	23.578	1.653	1.8	8.129
9	0.15	34.44	23.578	1.460	1.59	8.133
12	0.2	31.98	23.578	1.356	1.45	6.458
15	0.25	30.38	23.578	1.288	1.38	6.631

Tabla 6.13. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión con una relación de $D/d=3$.

D=90 mm; d=60mm; D/d=1.5						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
3	0.05	48.41	23.578	2.053	2.07	0.812
6	0.1	38.59	23.578	1.636	1.66	1.403
9	0.15	34.42	23.578	1.459	1.5	2.677
12	0.2	32.06	23.578	1.359	1.38	1.467
15	0.25	30.53	23.578	1.294	1.33	2.642

Tabla 6.14. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión con una relación de $D/d=1.5$.

D=66 mm; d=60mm; D/d=1.1						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
3	0.05	41.23	23.578	1.748	1.9	7.965
6	0.1	35.06	23.578	1.486	1.6	7.0637
9	0.15	32.32	23.578	1.370	1.42	3.466
12	0.2	30.73	23.578	1.303	1.35	3.456
15	0.25	29.69	23.578	1.259	1.3	3.136

Tabla 6.15. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión con una relación de $D/d=1.1$.

D=63 mm; d=60mm; D/d=1.05						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
3	0.05	37.41	23.578	1.586	1.8	11.852
6	0.1	32.82	23.578	1.391	1.5	7.201
9	0.15	30.72	23.578	1.302	1.41	7.595
12	0.2	29.51	23.578	1.251	1.35	7.289
15	0.25	28.69	23.578	1.216	1.25	2.655

Tabla 6.16. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión con una relación de $D/d=1.05$.

Como resultado final se ofrece la fig.6.64 la cual muestra los valores de K_t para distintas relaciones de D , d y r .

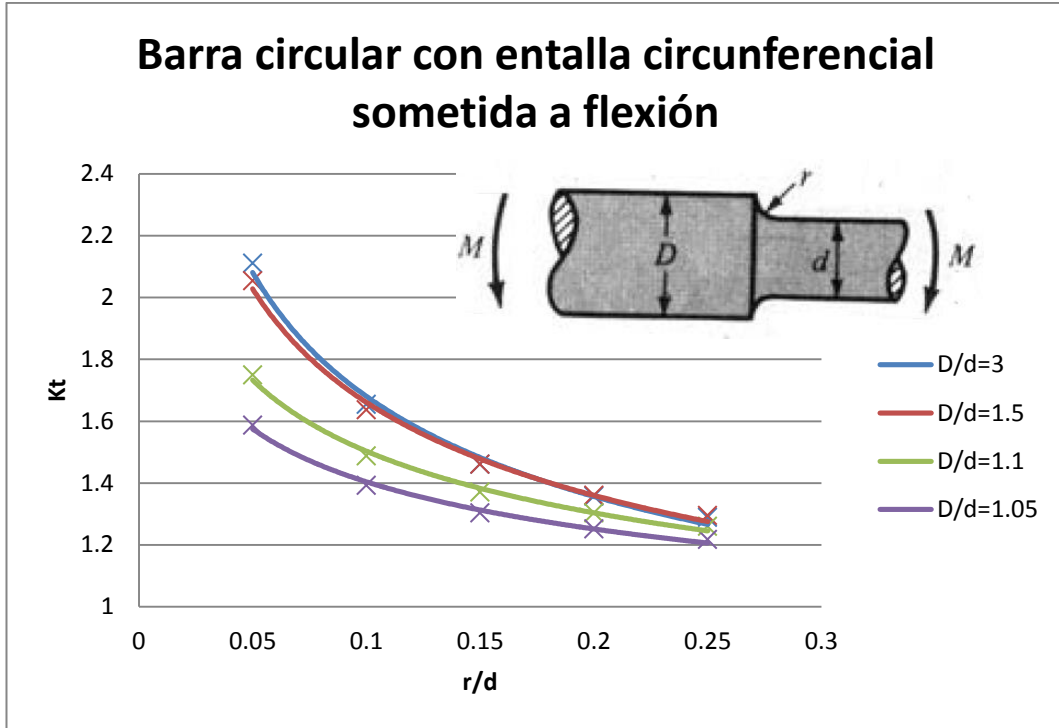


Figura 6.64. Barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión.

El valor de R^2 de cada curva de tendencia es el mostrado en la tabla siguiente (tabla 6.17).

Línea de tendencia	Valor de R^2
D/d=3	0.9937
D/d=1.5	0.9945
D/d=1.1	0.9942
D/d=1.05	0.9941

Tabla 6.17. Valores de R^2 para las distintas líneas de tendencia.

6.4.6.-Conclusiones

El refinamiento de la malla no se ha hecho de 3 mm porque con este valor claramente, los contornos del análisis de tensión no son coherentes con la realidad, produciéndose grandes gradientes que alejan el resultado final de la realidad (fig.6.65). También se ha probado con un refinamiento de 1 mm pero surgían divergencias en los contornos (fig.6.66). Para solucionarlo se ha buscado la densidad de malla mínima para la cual estas divergencias dejaron de estar presentes. Este valor como ya se ha comentado es de 0.8 mm. El coste computacional es algo mayor pero es necesario para obtener resultados acordes con la realidad.

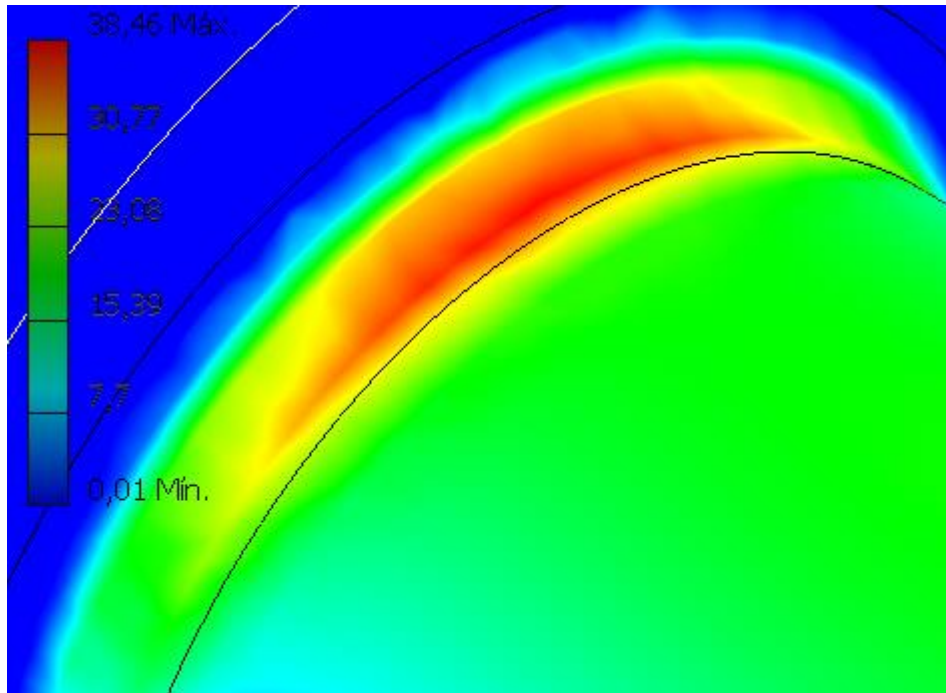


Figura 6.65. Distribución de tensiones de Von Mises para un refinamiento local de 3mm.

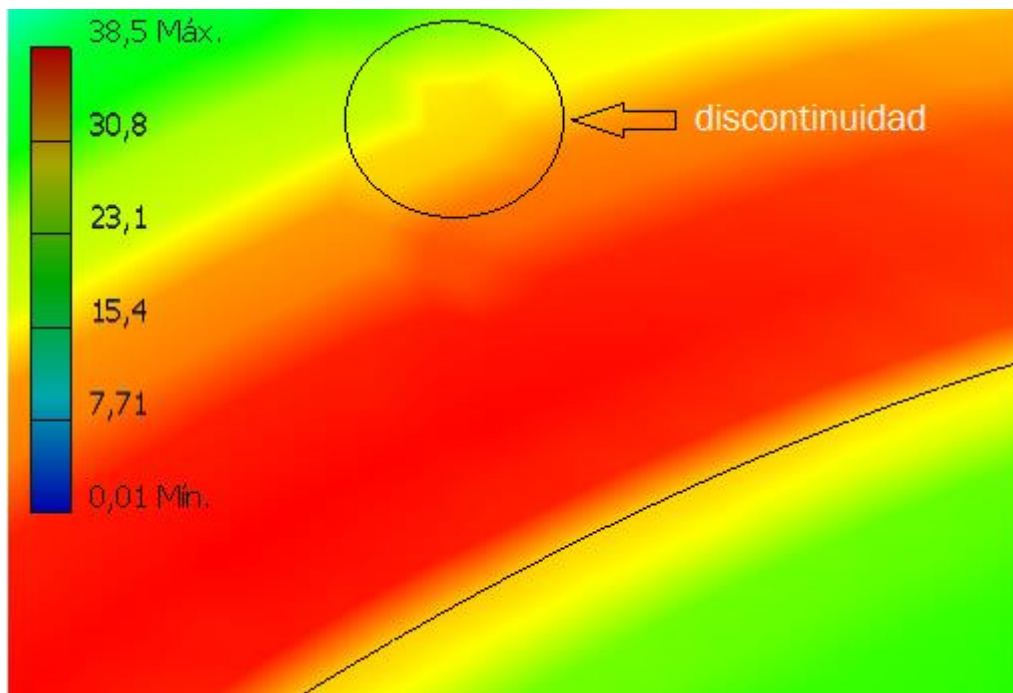


Figura 6.66. Discontinuidad en la distribución de tensiones de Von Mises para un refinamiento de 1mm.

La tensión σ_0 ofrecida por Autodesk Inventor debe coincidir con la teórica que para este ejemplo vale 23.578 MPa. Esta tensión se debe medir en una sección sin perturbar por la concentración de tensiones y en una sección cuyo



diámetro sea d . Además para que sea máxima, el valor de c debe ser $d/2$ (fig.6.67).

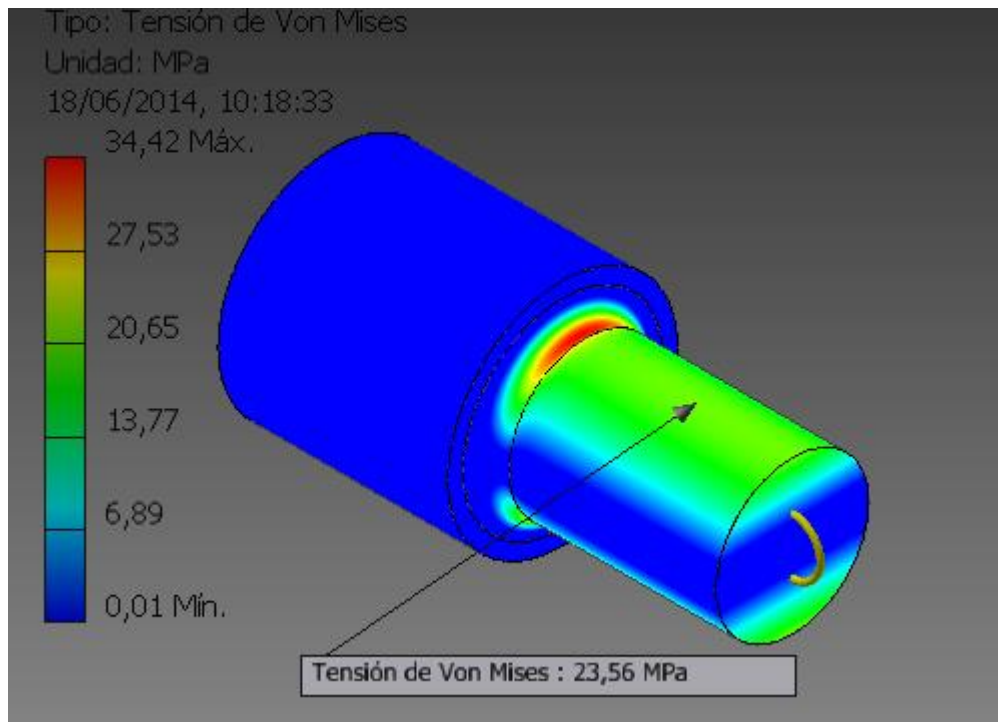


Figura 6.67. Tensión σ_0 para una barra circular con relaciones $D/d=1.5$, $r=9\text{mm}$ y $r/d=0.15$.

Autodesk también ofrece un valor de la tensión nominal acorde con la teoría por lo que la referencia está bien marcada y las tablas se pueden dar por válidas.

Si se observa la gráfica obtenida, para las relaciones de $D/d=3$ y $D/d=1.5$, los resultados son prácticamente idénticos. A partir de una relación de 1.5 no importa cuánto más grande sea el valor de D , puesto que la concentración de tensiones no va a aumentar más.

De estas dos curvas, la que coincide más con la teórica es la de relación 1.5. Esto hace pensar que la curva de relación de 3 está mal en el libro de Shigley. Para corroborar esta afirmación se han analizado para una relación de $r/d=0.1$, relaciones de $D/d=2$ y 4, obteniendo un valor de K_t de 1.81 y 1.82 respectivamente. Comparando con la relación de tres cuyo valor de K_t es de 1.813, se puede concluir que apenas ha cambiado y se puede dar por válida la hipótesis de que la curva de $D/d=3$ debería coincidir con la de $D/d=1.5$ en las curvas ofrecidas por Shigley.

A relaciones de diámetro menores, los datos son más inciertos aumentando así el error, llegando incluso hasta un 10%. Tras haber comprobado que la



simulación y mallado están perfectamente realizados, se puede llegar a la conclusión que tanto en las tablas de Shigley como en el programa, pueden presentar un pequeño error. Este error se debe a las grandes variaciones que sufren las tensiones al variar mínimamente la relación de diámetros, cuando dicha relación es pequeña.



6.5.- Barra circular con entallas circunferenciales sometida torsión

6.5.1.-Definición

Se trata de una barra circular con una entalla circunferencial de radio r , sometida a un momento torsor de valor T , produciendo así un esfuerzo de torsión.

Se tomará como valor nominal para el cálculo de K_t La tensión τ_0 (eq.6.8).

$$\tau_0 = \frac{Mc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (6.8)$$

Donde:

τ_0 : Tensión nominal [MPa];

T : Momento torsor aplicado a ambos lados de la pieza [N · mm];

c : Mitad del ancho más pequeño de la pieza ($d/2$) [mm];

J : momento torsional: $J = \frac{\pi d^4}{32}$;

d : ancho más pequeño de la pieza [mm].

En este caso, la gráfica que nos relaciona la geometría con el factor teórico de concentración de tensiones K_t , es la mostrada en la fig. 6.68.

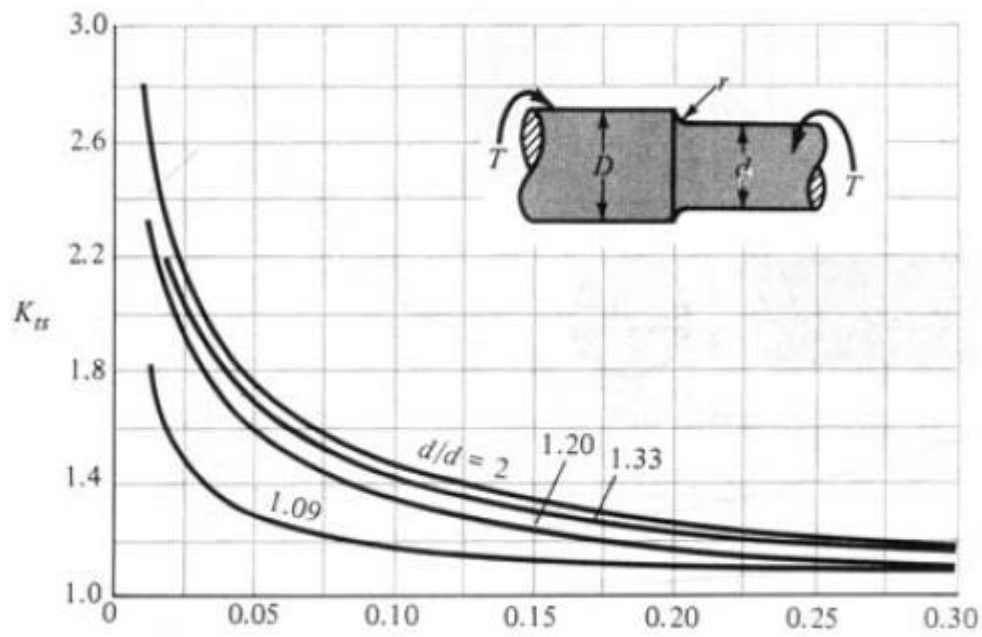


Figura 6.68. Barra circular con entalla circunferencial sometida a torsión.[Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley.Richard G. Budynas y J.Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].

6.5.2.-Geometría

La creación de la geometría es idéntica a la explicada en el apartado 6.3.2.

El valor de d es de 60 mm, mientras que para obtener las distintas relaciones de D/d , se modifica el valor de D .

El resultado final se muestra en la fig.6.69.

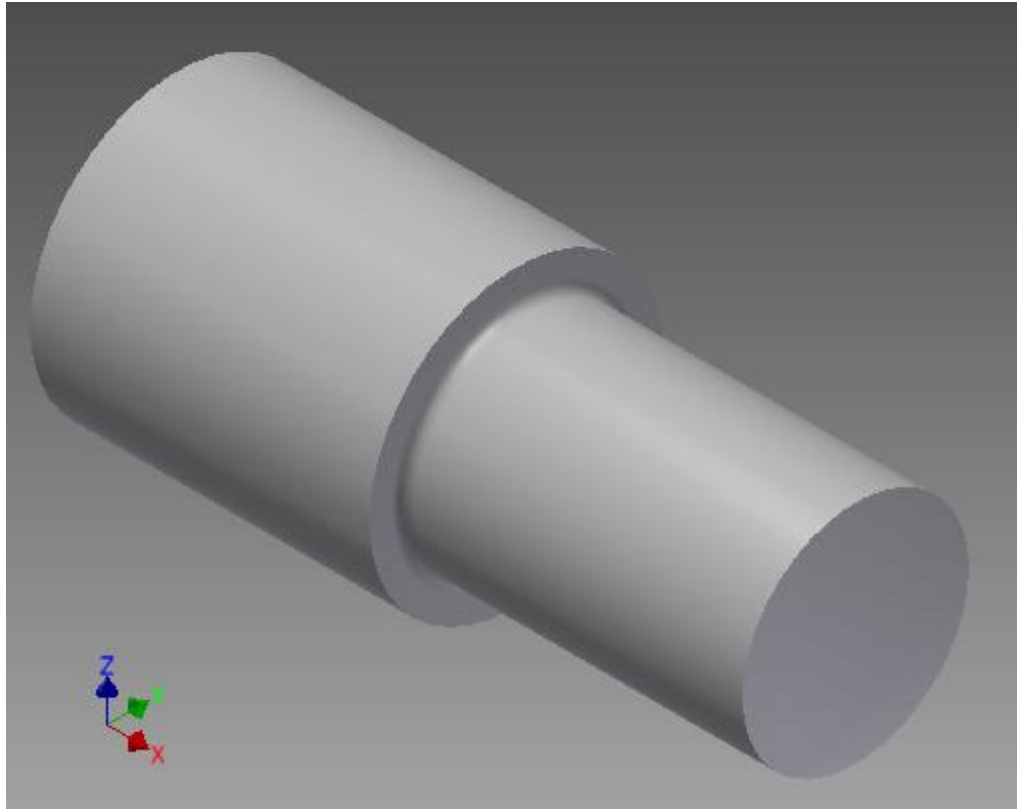


Figura 6.69. Geometría de una pieza circular con entalla circunferencial de radio r .

6.5.3.-Modelización

Los parámetros a tener en cuenta son D , d , r y T .

La implementación en Autodesk se efectuará según lo mostrado en la figura siguiente (fig.6.70).

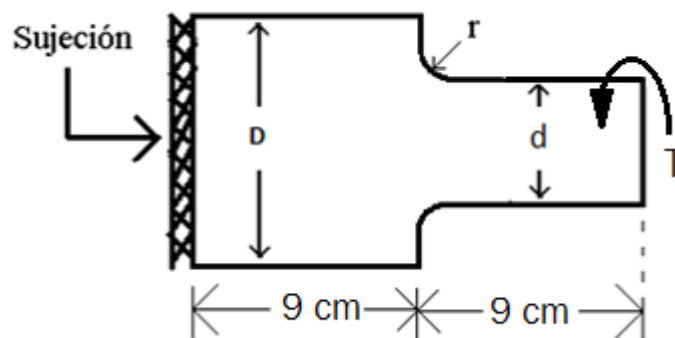


Figura 6.70. Modelización de una barra circular con entalla circunferencial de radio r .

La restricción de movimiento es la misma que en el apartado 7.3.3 (fig.6.71), así como el material (acero estructural metálico con acabado laminado).

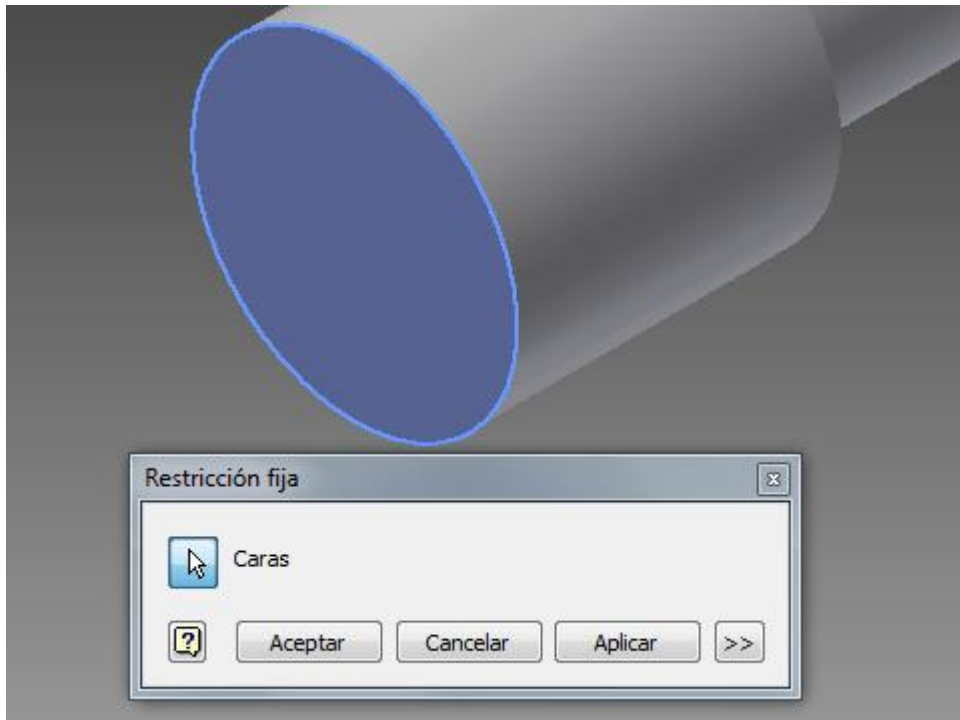


Figura 6.71. Restricción de movimiento nulo a una de las caras.

El valor de la carga es distinto puesto que en este ejemplo se aplica un momento torsor de valor 500000 N-mm. Para implementar el momento, se marca la opción de *carga de momento* y se selecciona la cara opuesta a la restricción fija, haciendo que este gire alrededor del eje x, en este caso (fig.6.72).

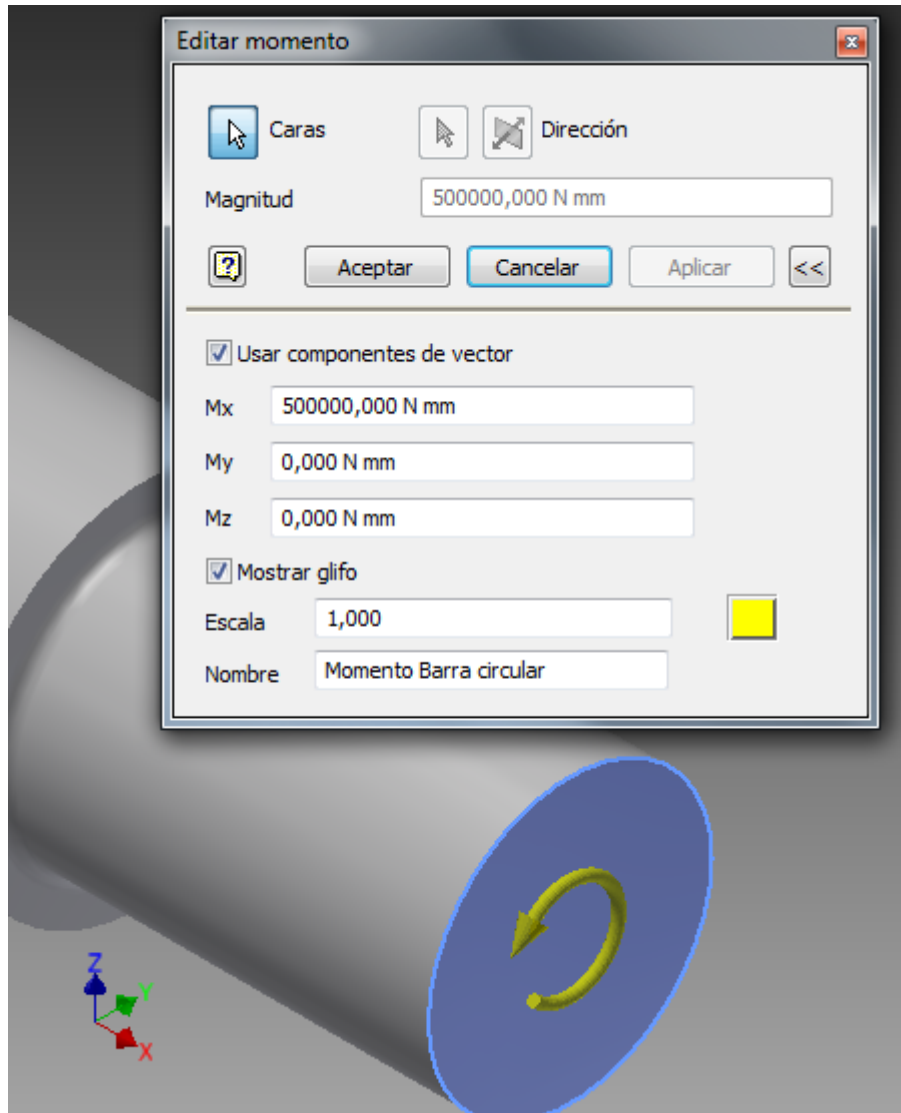


Figura 6.72. Aplicación de un momento alrededor del eje x (momento torsor).

Como $T=500000\text{N}\cdot\text{mm}$, $d=60\text{mm}$, la tensión nominal es:

$$\tau_0 = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 500000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \cdot 60^3 \text{ mm}^3} = 11.789 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{11.789 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la generación de la malla, haciendo *click* en *configuración de malla*, las modificaciones de la malla inicial se han definido mediante los siguientes valores:

- Tamaño medio del elemento: 0.07
- Tamaño mínimo del elemento: 0.200
- Factor de modificación: 1.5
- Ángulo máximo de giro: 40 gr

Además de esta configuración inicial de la malla, es preciso hacer un refinamiento en la entalla circunferencial. Este refinamiento será de 1 mm, cuya explicación se detalla en el apartado de conclusiones.

La configuración total de la malla queda definida por la figura 6.73.

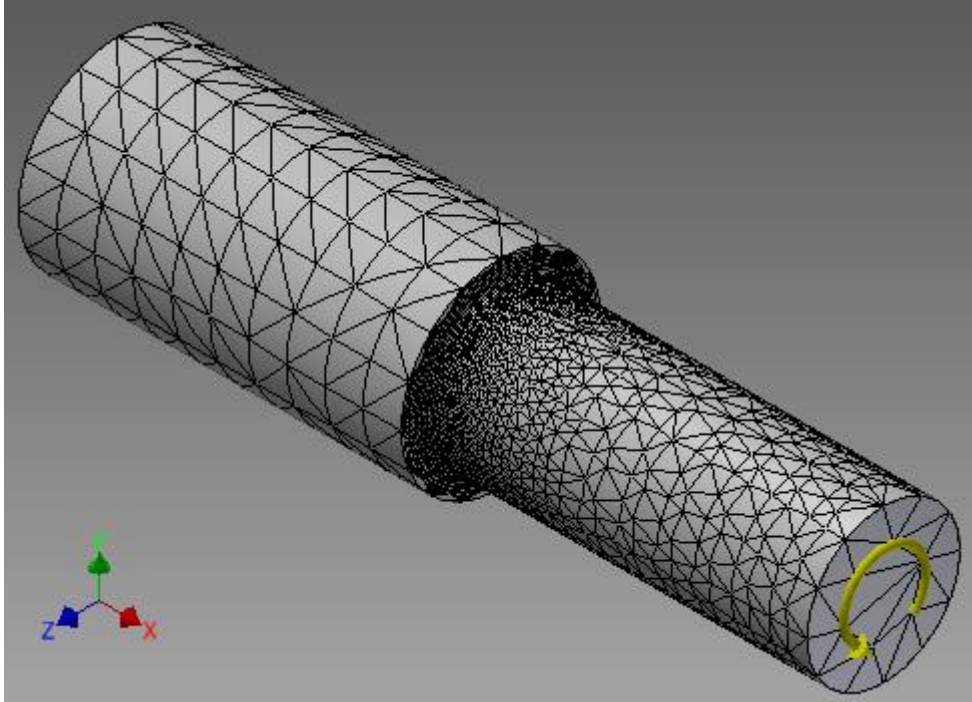


Figura 6.73. Mallado final de barra circular con entallas circunferenciales.

6.5.4.-Simulación

Los resultados que ofrece por defecto Autodesk Inventor son las tensiones de Von Mises y los datos que se deben usar para el cálculo del factor teórico de concentración de tensiones K_{ts} son las tensiones tangenciales. Por tanto lo que se hace es calcular las tensiones tangenciales a partir de la tensión de Von Mises (eq6.9).

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6.9)$$

Para ello de la ecuación de Von Mises se despeja la tensión tangencial sabiendo que las tensiones normales son nulas (eq.6.10). Si el eje alrededor del cual gira el momento torsor, es el eje x, la tensión tangencial τ_{yz}^2 también es cero.



$$\sigma_{VM} = \sqrt{3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6.10)$$

Una puntualización muy importante es que el programa Autodesk Inventor trabaja con las proyecciones de las tensiones tangenciales, por tanto cuando una es máxima, la otra es cero y viceversa. Si se selecciona un punto arbitrario, la tensión tangencial en ese punto dependerá tanto como de τ_{xy}^2 , como de τ_{zx}^2 y la suma del cuadrado de ambas será el mismo valor que el máximo de cualquiera de ellas (fig.6.74 y fig.6.75). Por tanto se tomará un valor τ como la suma del cuadrado de ambas tensiones tangenciales. Por tanto, la tensión tangencial (eq.6.11) en cualquier punto conocida la tensión de Von Mises es:

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_{VM}^2}{3}} \quad (6.11)$$

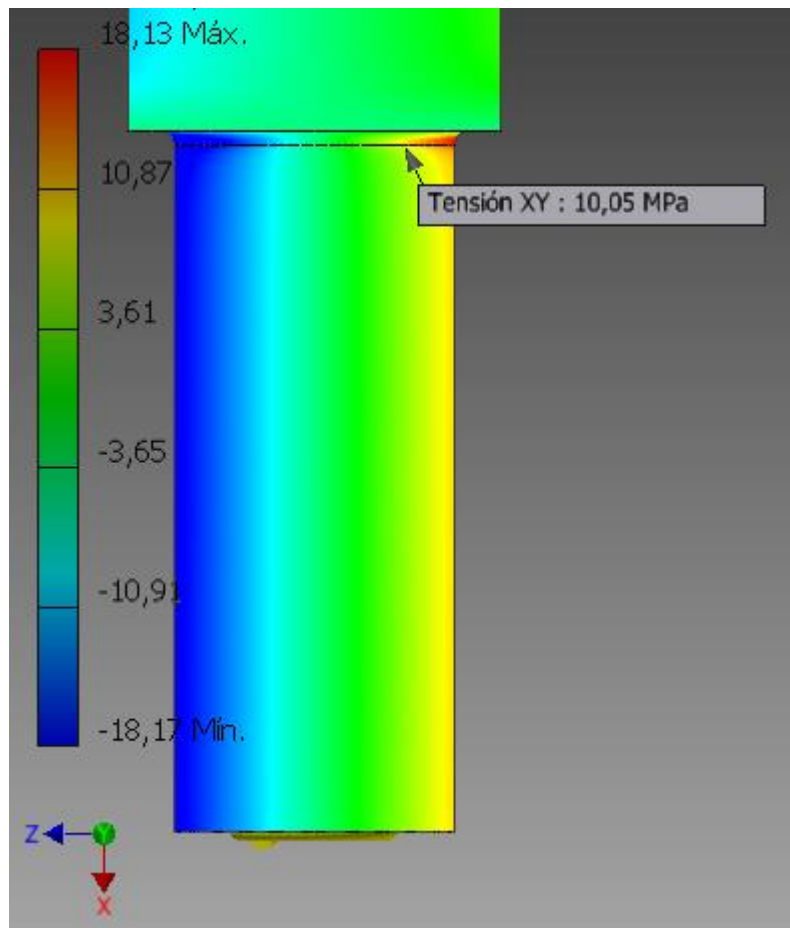


Figura 6.74. Tensión tangencial en el plano XY.

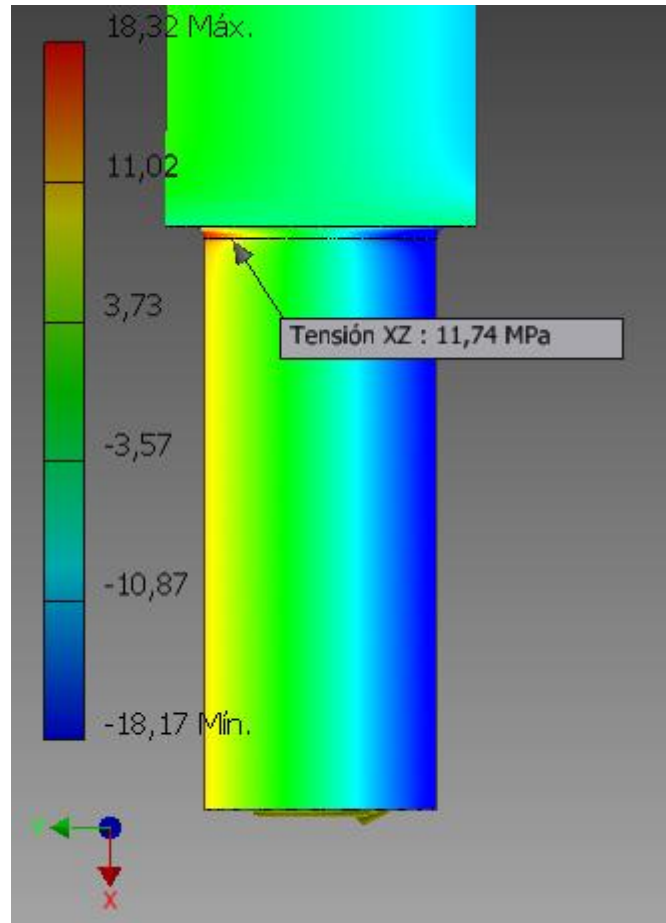


Figura 6.75. Tensión tangencial en el plano XZ.

En las dos figuras anteriores, si se calcula la tensión de Von Mises en dicho punto y lo comparamos con la tensión obtenida en el punto (fig.6.76), se ve que el resultado es idéntico, corroborando la explicación anterior.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{3 \cdot (10.05^2 + 11.74^2)} = 26.77 \text{ MPa}$$

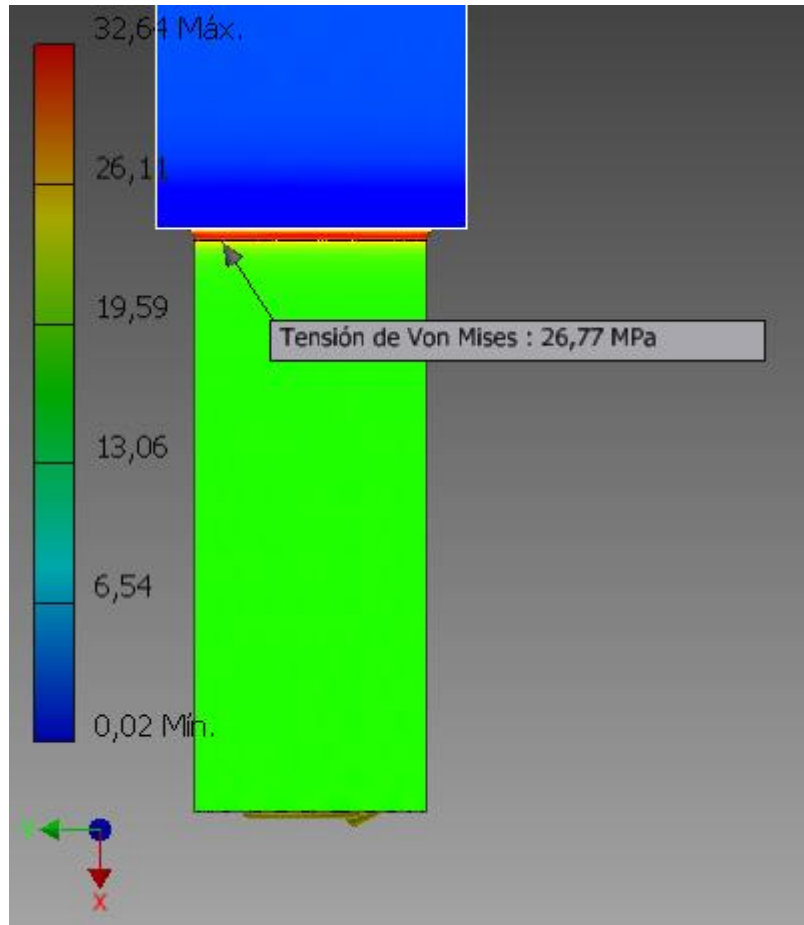


Figura 6.76. Tensión de Von Mises en un punto arbitrario.

Como los dos valores calculados (mediante la tensión de Von Mises y mediante las tensiones tangenciales) son idénticos (26.77 MPa), para el cálculo del factor teórico K_t se va obtener la tensión de Von Mises y se hallará su tensión tangencial correspondiente.

Algunas de las simulaciones se muestran en las figuras 6.77, 6.78 y 6.79.

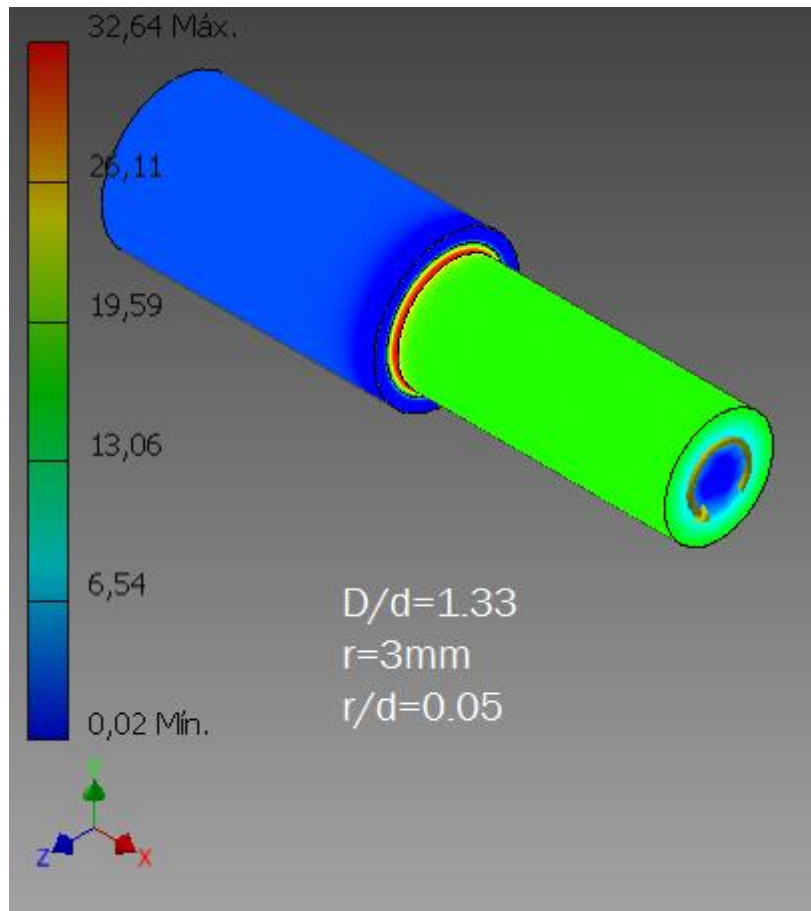


Figura 6.77. Tensión de Von Mises para una barra circular con entalla circular sometida a torsión. Relación $D/d=1.33$, $r=3\text{mm}$ y $r/d=0.05$.

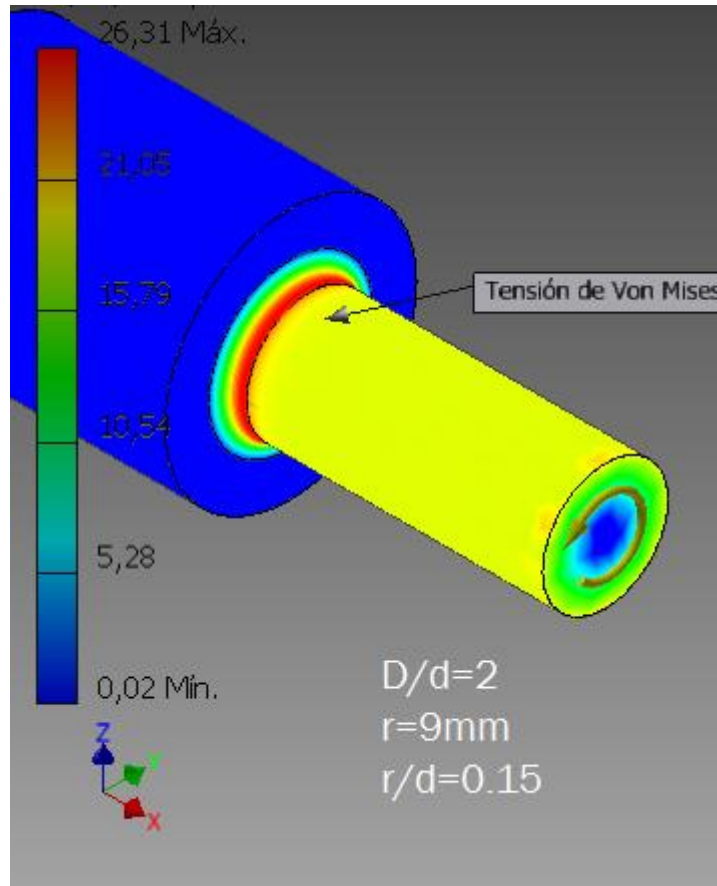


Figura 6.78. Barra circular con entalla circunferencial sometida a torsión. Relación $D/d=2$, $r=9$ mm y $r/d=0.15$.

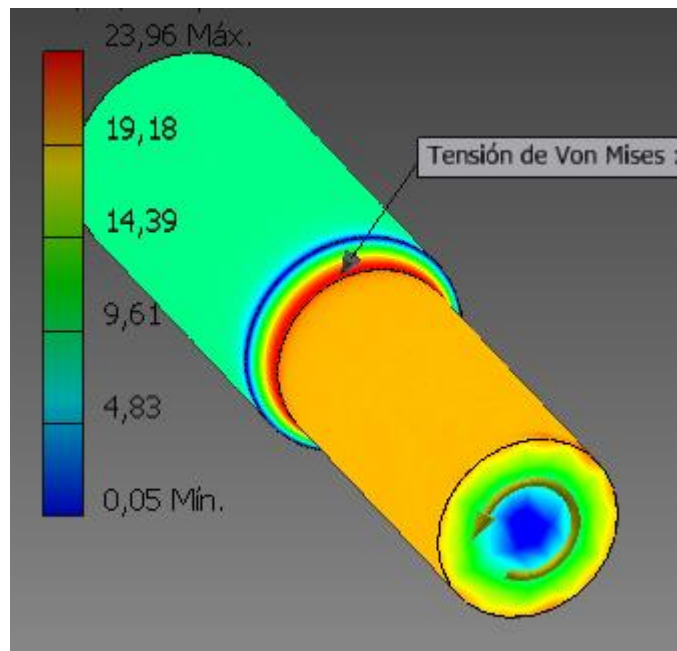


Figura 6.79. Barra circular con entalla circunferencial sometida a torsión. Relación $D/d=1.2$, $r=15$ mm y $r/d=0.25$.



6.5.5.-Resultados

Se han realizado 20 simulaciones para distintos valores de r y D . El valor de d se ha mantenido fijo en 60mm.

Las relaciones de D/d han sido de: 2, 1.33, 1.2 y 1.09. En cuanto al radio de la entalla, varía desde los 3 hasta los 15 mm. Los resultados se muestran en las tablas 6.18, 6.19, 6.20 y 6.21.

D=120 mm; d=60mm; D/d=2							
r [mm]	r/d	σ_{vm} [Mpa]	τ [Mpa]	τ_o [Mpa]	Kts	Kts teórico	error [%]
3	0.05	33.77	19.497	11.789	1.653	1.75	5.494
6	0.1	28.45	16.425	11.789	1.393	1.45	3.910
9	0.15	26.31	15.190	11.789	1.288	1.35	4.555
12	0.2	25.11	14.497	11.789	1.229	1.25	1.621
15	0.25	24.32	14.041	11.789	1.191	1.2	0.746

Tabla 6.18. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a torsión con una relación de $D/d=2$.

D=80 mm; d=60mm; D/d=1.33							
r [mm]	r/d	σ_{vm} [Mpa]	τ [Mpa]	τ_o [Mpa]	Kts	Kts teórico	error [%]
3	0.05	32.64	18.844	11.789	1.598	1.7	5.970
6	0.1	27.85	16.079	11.789	1.363	1.4	2.578
9	0.15	25.94	14.976	11.789	1.270	1.3	2.278
12	0.2	24.86	14.352	11.789	1.217	1.22	0.206
15	0.25	24.14	13.937	11.789	1.182	1.19	0.653

Tabla 6.19. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión con una relación de $D/d=1.33$.

D=72 mm; d=60mm; D/d=1.2							
r [mm]	r/d	σ_{vm} [Mpa]	τ [Mpa]	τ_o [Mpa]	Kts	Kts teórico	error [%]
3	0.05	31.69	18.296	11.789	1.551	1.6	3.001
6	0.1	27.24	15.727	11.789	1.334	1.35	1.182
9	0.15	25.55	14.751	11.789	1.251	1.23	1.729
12	0.2	24.58	14.191	11.789	1.203	1.18	2.014
15	0.25	23.96	13.833	11.789	1.173	1.15	2.035

Tabla 6.20. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circunferencial sometida a flexión con una relación de $D/d=1.2$.



D=65.4 mm; d=60mm; D/d=1.09							
r [mm]	r/d	σ_{vm} [Mpa]	τ [Mpa]	τ_0 [Mpa]	K_{ts}	Kts teórico	error [%]
3	0.05	29.07	16.783	11.789	1.423	1.3	9.512
6	0.1	26.06	15.045	11.789	1.276	1.21	5.475
9	0.15	24.71	14.266	11.789	1.210	1.13	7.091
12	0.2	23.95	13.827	11.789	1.172	1.12	4.724
15	0.25	23.45	13.538	11.789	1.148	1.11	3.462

Tabla 6.21. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con entalla circular sometida a flexión con una relación de D/d=1.09.

Como resultado final se ofrece la figura 6.80 la cual muestra los valores de K_t para distintas relaciones de D, d y r.

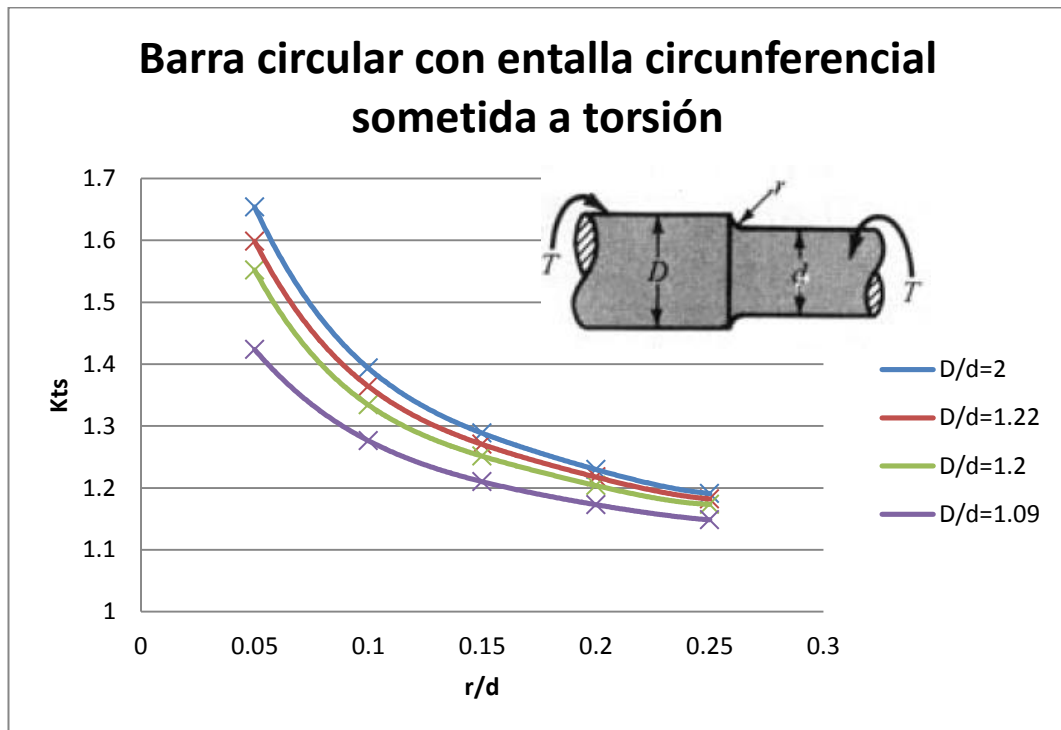


Figura 6.80. Barra circular con entalla circular sometida a torsión.

El valor de R^2 de cada curva de tendencia es el mostrado en la tabla siguiente (tabla 6.22).

Línea de tendencia	Valor de R^2
D/d=2	1
D/d=1.33	1
D/d=1.2	1
D/d=1.09	1

Tabla 6.22. Valor de R^2 para las distintas líneas de tendencia.

6.5.6.-Conclusiones

Con una configuración de malla inadecuada, surgen variaciones en los contornos de tensiones debido a elementos mal situados. Los contornos deben ser uniformes y no tener picos de tensión (fig.6.81)

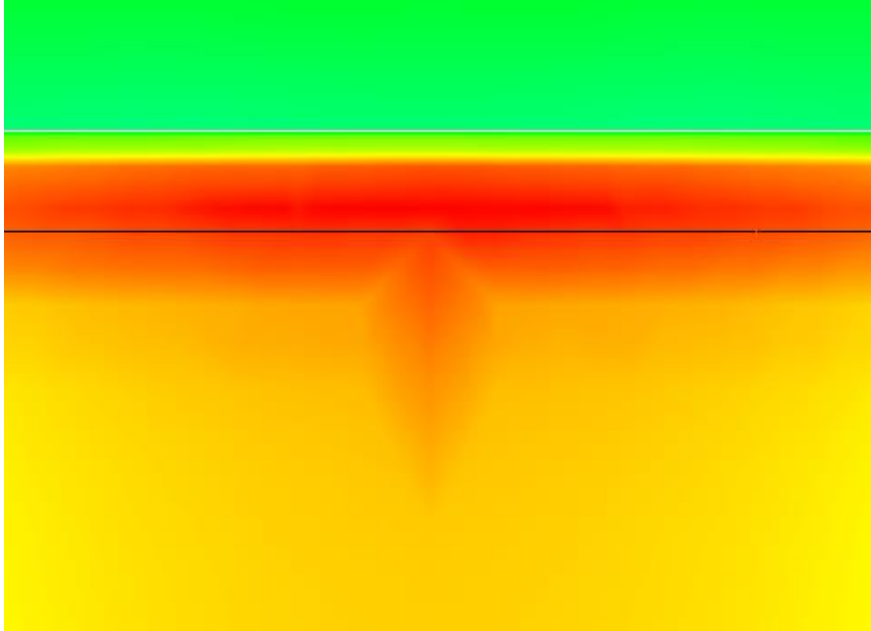


Figura 6.81. Variación en el contorno de tensiones.

Esta distorsión se debe a que uno de los elementos no cumple con el Aspect Ratio recomendado (fig.6.82.)

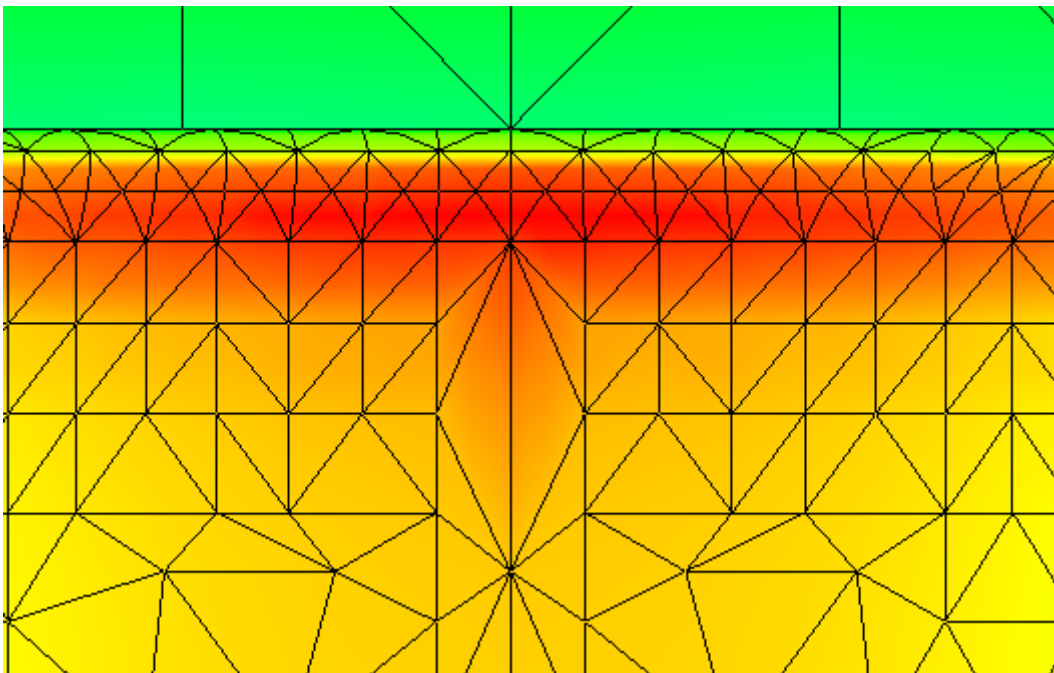


Figura 6.82. Incumplimiento de un elemento del Aspect Ratio.



Por ello lo que se ha hecho ha sido refinar aún más la malla en esa zona a un valor de 1 mm, como bien se mencionó en el apartado 6.5.3.

Para ver si la tensión tangencial de referencia τ_0 es correcta, una de las opciones para comprobar este valor es calcular la tensión de Von Mises en un punto cuyo diámetro sea $d=60\text{mm}$. En la figura siguiente (fig.6.83) se puede observar que este valor es de 20.42 Mpa.

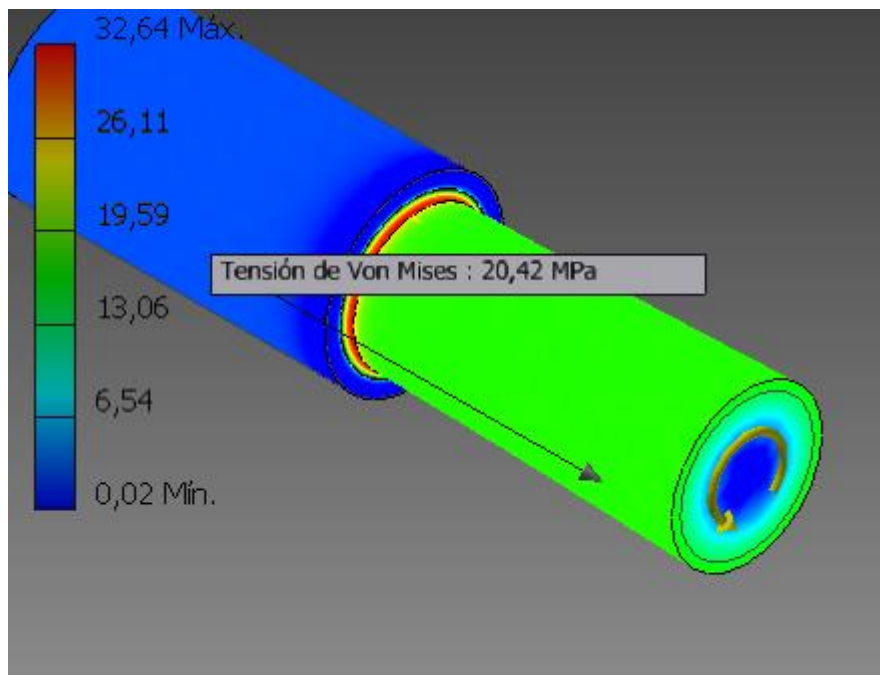
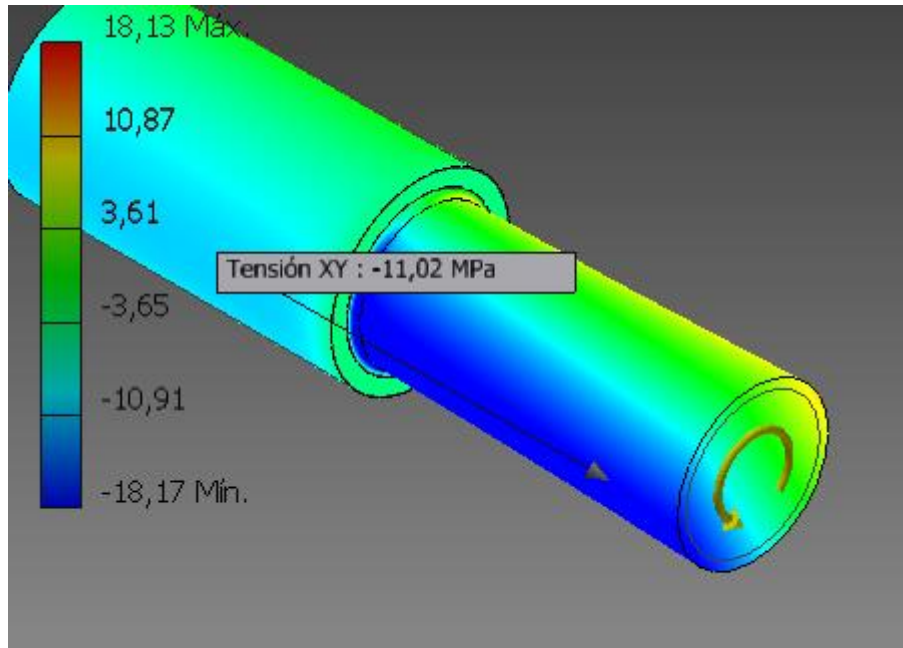
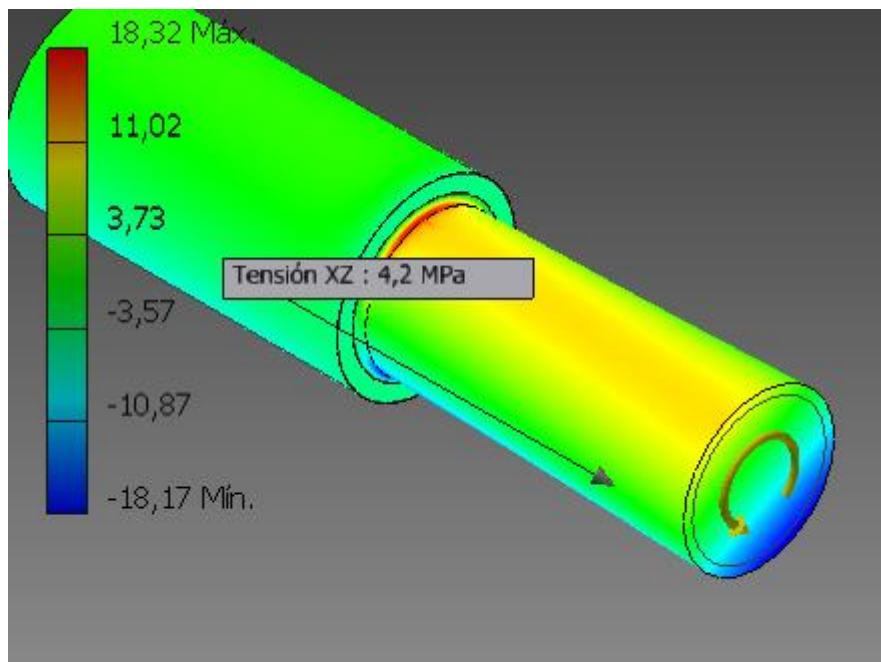


Figura 6.83. Tensión de Von Mises en un punto de diámetro $d=60\text{mm}$.

Para ver si este valor es acorde con el valor de la tensión tangencial nominal calculada (11.789 MPa), lo que se hace es elegir un punto cualquiera cuyo diámetro sea de $d=60\text{mm}$ y obtener las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{zx} (fig.6.84 y fig.6.85).

Figura 6.84. Tensión XY en un punto de diámetro $d=60\text{mm}$.Figura 6.85. Tensión XZ en un punto de diámetro $d=60\text{mm}$.

Una vez obtenidos estos dos valores se calcula la tensión de Von Mises:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{3 \cdot (11,02^2 + 4,2^2)} = 20,42 \text{ MPa}$$



Este valor es el mismo que el obtenido directamente viendo la tensión de Von Mises, por tanto el valor de τ_0 proporcionado por Autodesk Inventor es:

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{\sigma_{VM}^2}{3}} = \sqrt{\frac{20.42^2}{3}} = 11.789 \text{ MPa}$$

Como ambos valores son idénticos (11.789 MPa) la referencia está bien marcada y se pueden dar por válidas las curvas de la figura xx, ya que en todas ellas el valor de R^2 es de 1.

Se puede apreciar que a medida que se aumenta la relación D/d , la concentración de tensiones aumenta, pero este valor se va suavizando a medida que se aumenta el radio de la entalla, al igual que en los casos anteriores.

Hay que tener muy en cuenta esta concentración de tensiones a la hora de diseñar una pieza y nunca realizar ningún cambio de sección con aristas vivas puesto que esto provoca estados de triaxialidad y por consecuencia concentración de tensiones excesivas y rotura de la pieza.



6.6.- Barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción

6.6.1.-Definición

Se trata de una barra rectangular con ranuras transversales de radio r , sometida a una carga de valor F , produciendo así un esfuerzo de tracción.

Se tomará como valor nominal para el cálculo de K_t La tensión σ_0 (eq.6.12).

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{dt} \quad (6.12)$$

Donde:

σ_0 : Tensión nominal [MPa]

F : Fuerza axial aplicada a ambos lados de la pieza [N]

d : Ancho más pequeño de la pieza [mm]

t : espesor [mm]

En este caso, la gráfica que nos relaciona la geometría con el factor teórico de concentración de tensiones K_t , es la mostrada en la fig. 6.86.

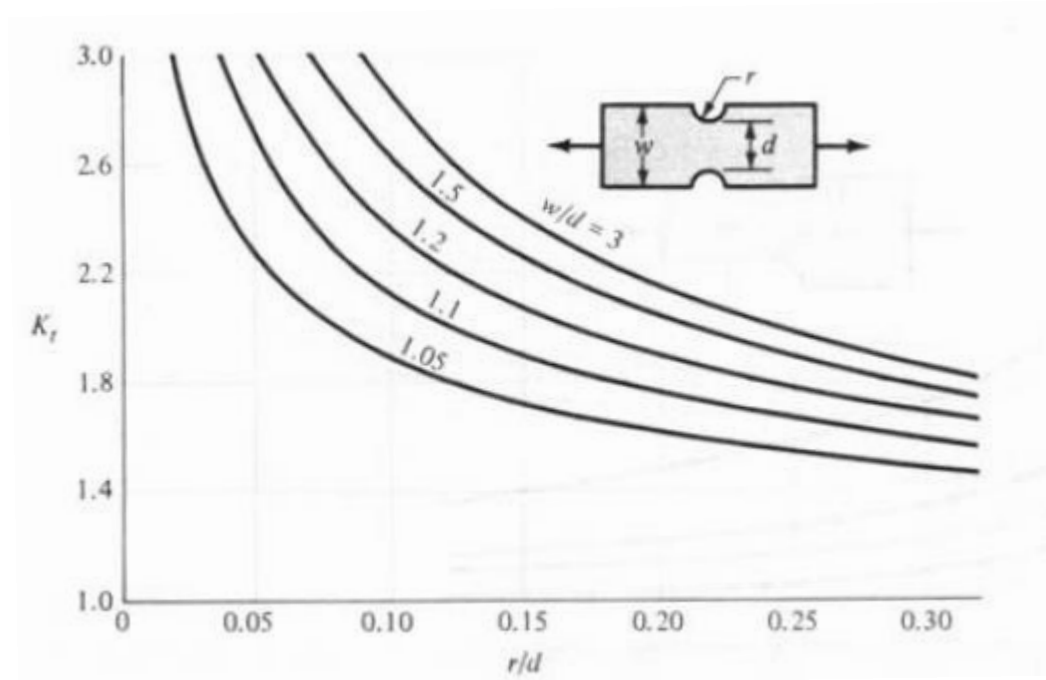


Figura 6.86. Barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Richard G. Budynas y J. Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].

6.6.2.-Geometría

Para la creación de la geometría se usan dos bocetos. El primer es un rectángulo cuyo ancho W es 90 mm y cuyo largo se usará un valor de 235 mm (fig.6.87).

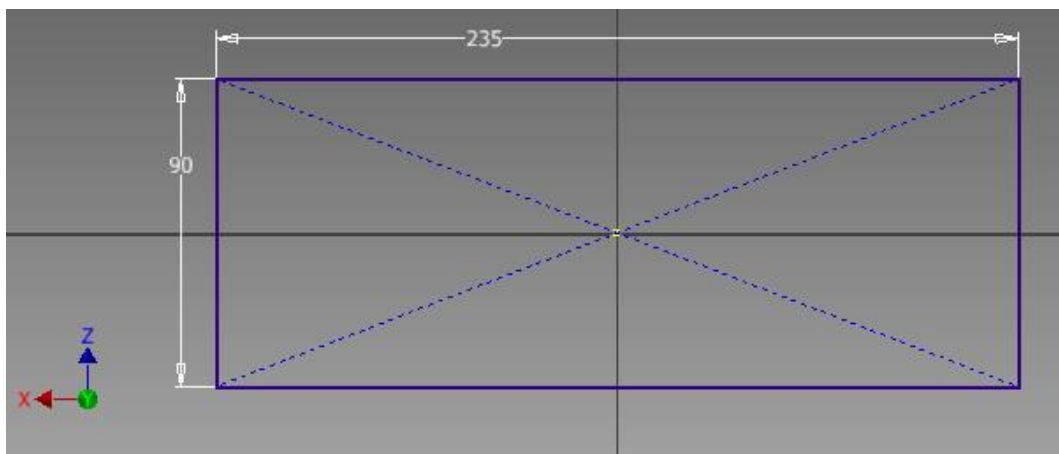


Figura 6.87. Boceto barra rectangular.

A continuación este boceto se extruye, otorgando así un espesor a la pieza de $t=10\text{mm}$ (fig.6.88).

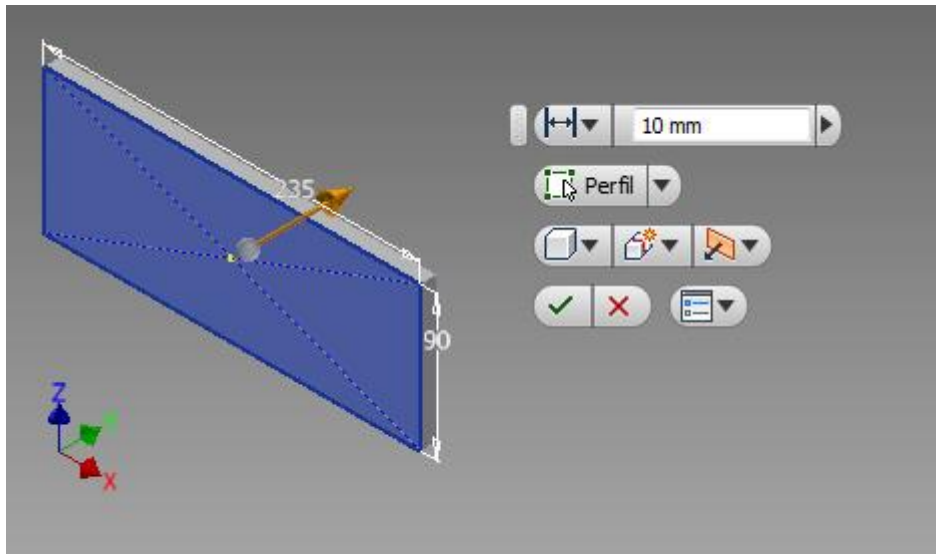


Figura 6.88. Extrusión del boceto rectangular.

Una vez obtenida la placa rectangular, sobre una de las caras se crea un segundo boceto (fig.6.89). Tan solo se necesitan dos cotas para definir el dibujo, manteniendo constante el valor de $d=30\text{mm}$ y pudiendo cambiar el valor de r en cualquier momento.

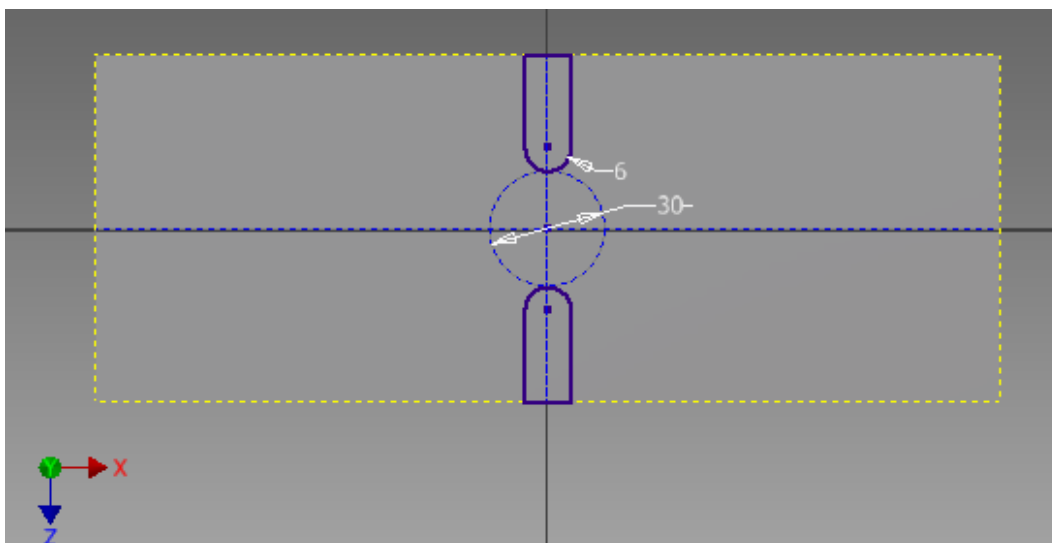


Figura 6.89. Boceto de las ranuras trasnversales.

Con este segundo boceto se hace un corte del área que se acaba de crear con la barra rectangular. En el menú de que aparece de la extrusión se selecciona que corte hasta la cara siguiente, obteniendo así la geometría final (fig.6.90)

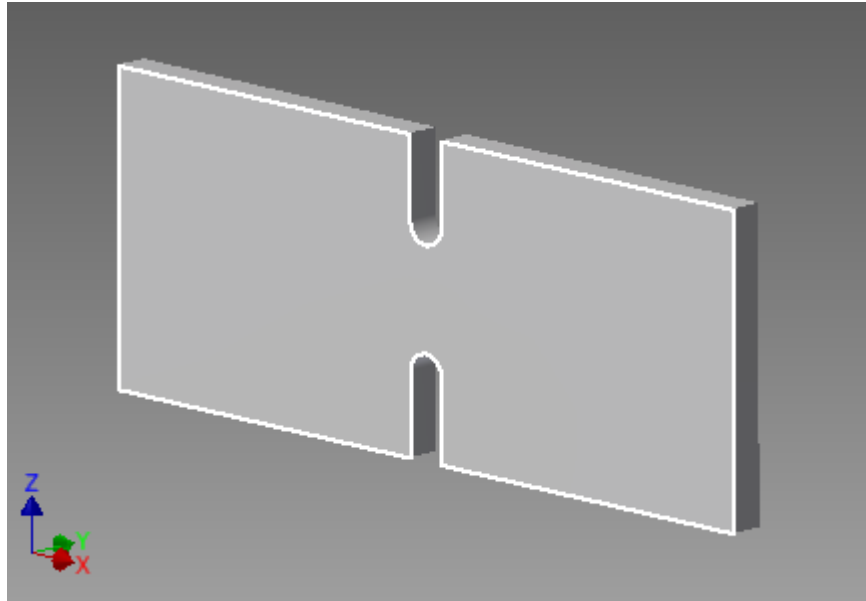


Figura 6.90. Corte del boceto de las ranuras transversales.

6.6.3.-Modelización

Los parámetros a tener en cuenta son D , d , r y M .

La implementación en Autodesk se efectuará según lo mostrado en la figura siguiente (fig.6.91).

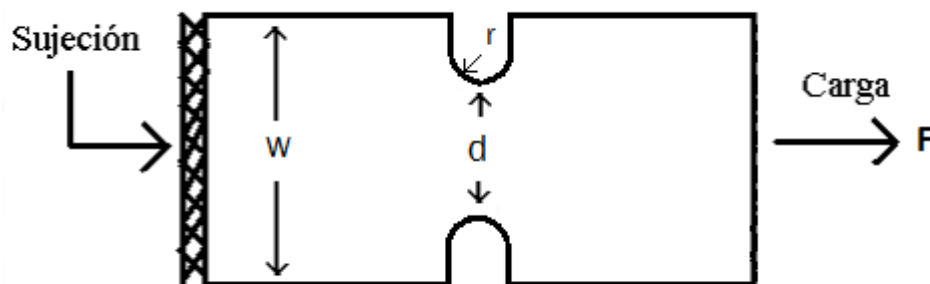


Figura 6.91. Modelización de una barra rectangular con entallas transversales sometida a tracción.

Como los casos anteriores, se fija una de las caras (la de mayor ancho) y en la otra se aplica la carga. El material también es el mismo que en los casos anteriores, un acero estructural metálico con acabado laminado.

Para la restricción de movimiento, se inicia el análisis de tensión y se marca la cara que se pretende fijar (fig.6.92).

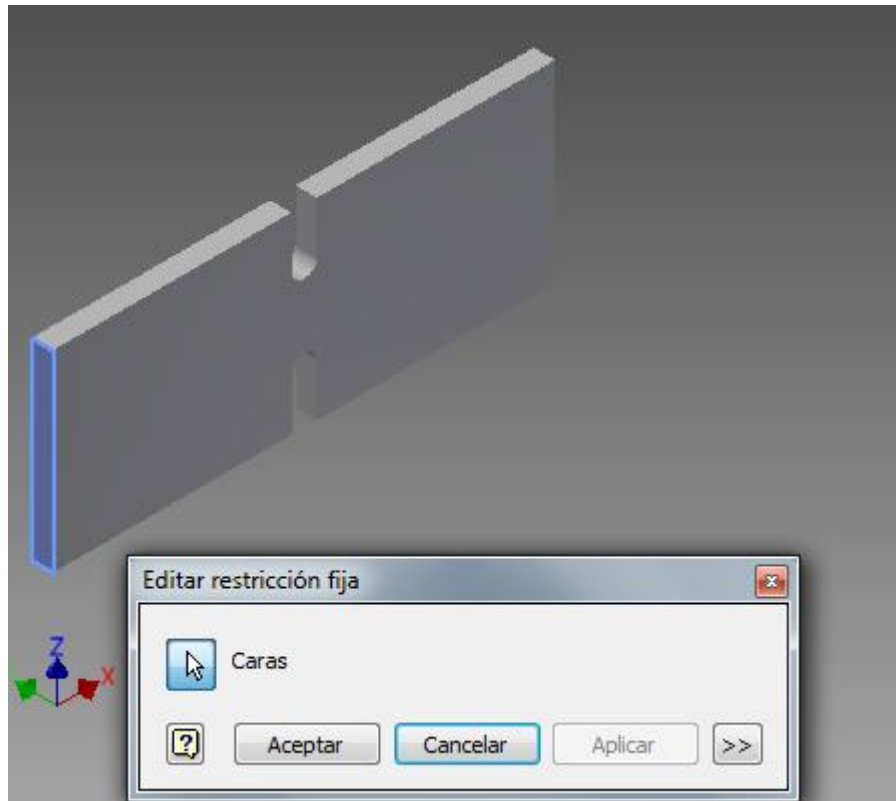


Figura 6.92. Restricción de movimiento de una de las caras.

La aplicación de la carga se efectúa en la cara opuesta al plano fijado y su valor es $F=10000$ N (fig.6.93).

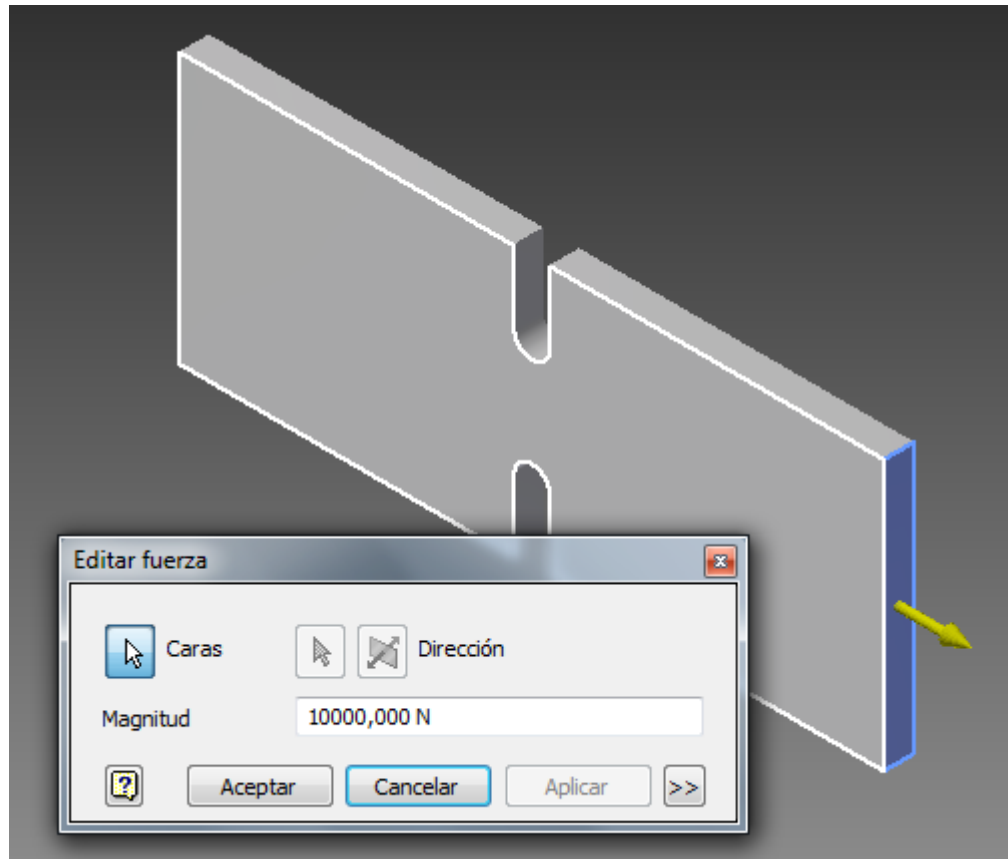


Figura 6.93. Aplicación de una carga de valor 10000 N.

Como la fuerza empleada $F=10000$ N, $t=10$ mm y $d=30$ mm, el valor de la tensión nominal σ_0 es:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{dt} = \frac{10000 \text{ N}}{10 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}} = 33.33 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{33.33 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la generación de la malla, haciendo *click* en *configuración de malla*, las modificaciones de la malla inicial se han definido mediante los siguientes valores:

- Tamaño medio del elemento: 0.100
- Tamaño mínimo del elemento: 0.200
- Factor de modificación: 1.5
- Ángulo máximo de giro: 60 gr

Además de esta configuración inicial de la malla, es preciso hacer un refinamiento de la malla en las dos ranuras transversales, con valor de 1 mm. Este valor garantiza la uniformidad de las tensiones de Von Mises.

La configuración final de la malla queda definida por la figura 6.94.

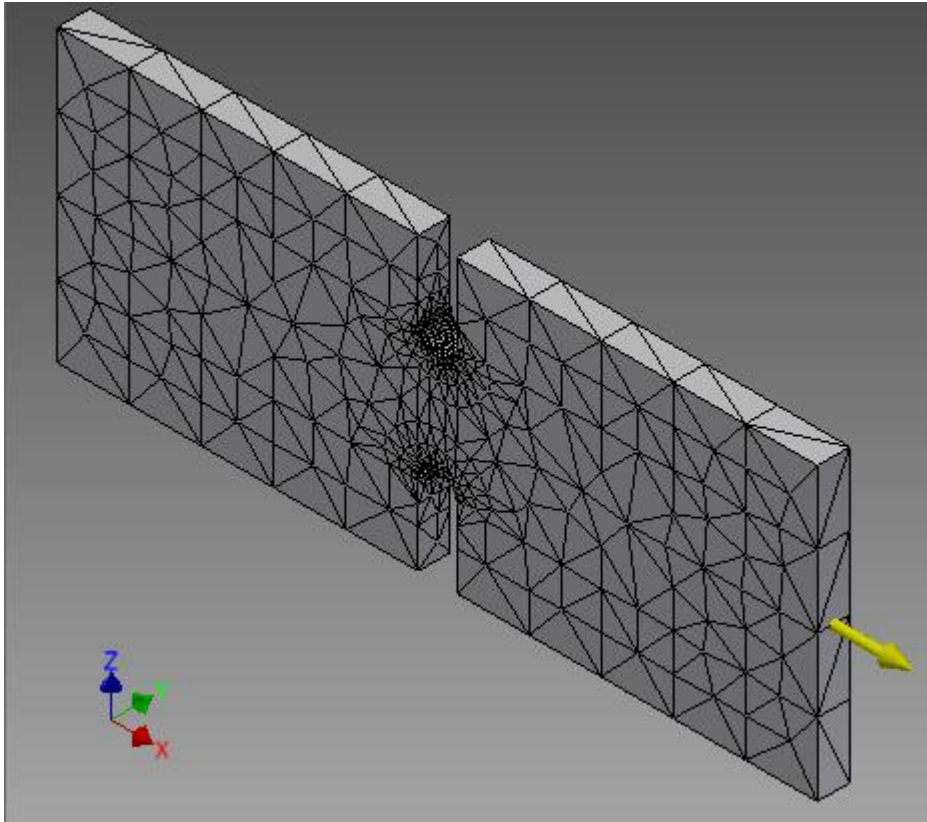


Figura 6.94. Configuración final de la malla para una barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción.

6.6.4.-Simulación

Haciendo simular el programa obtenemos la tensión de Von Mises para cada geometría. Algunas de las gráficas son las mostradas a continuación (fig.6.95, fig.6.96 y fig.6.97).

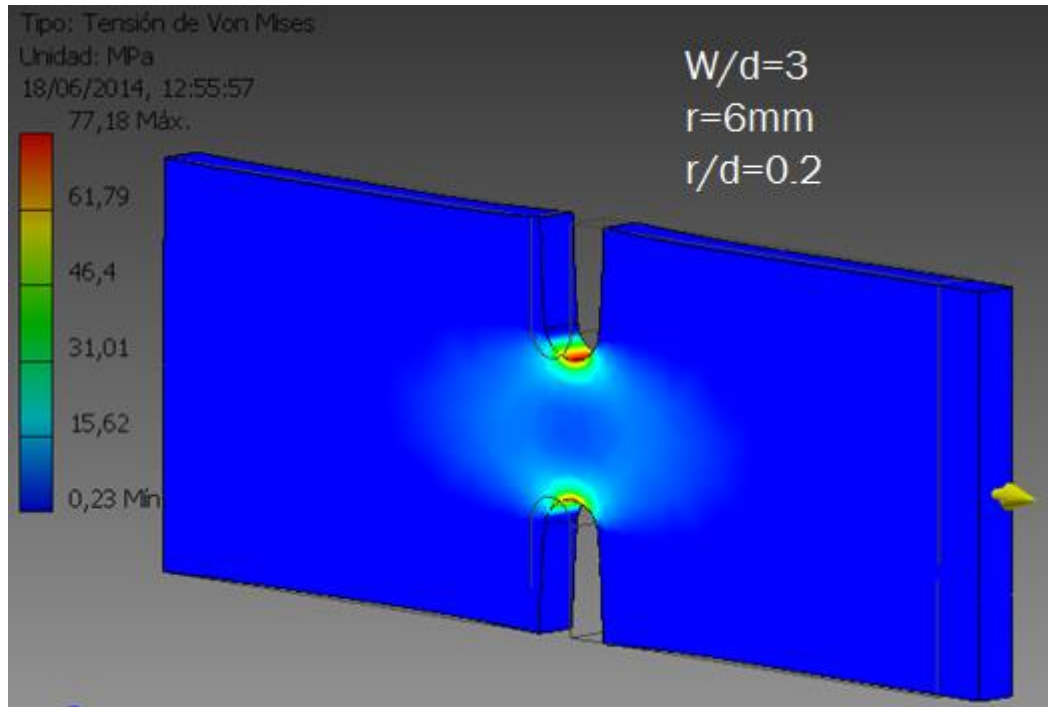


Figura 6.95. Barra circular con ranuras transversales sometida a tracción. Relación $W/d=3$; $r=6\text{mm}$, $r/d=0.2$.

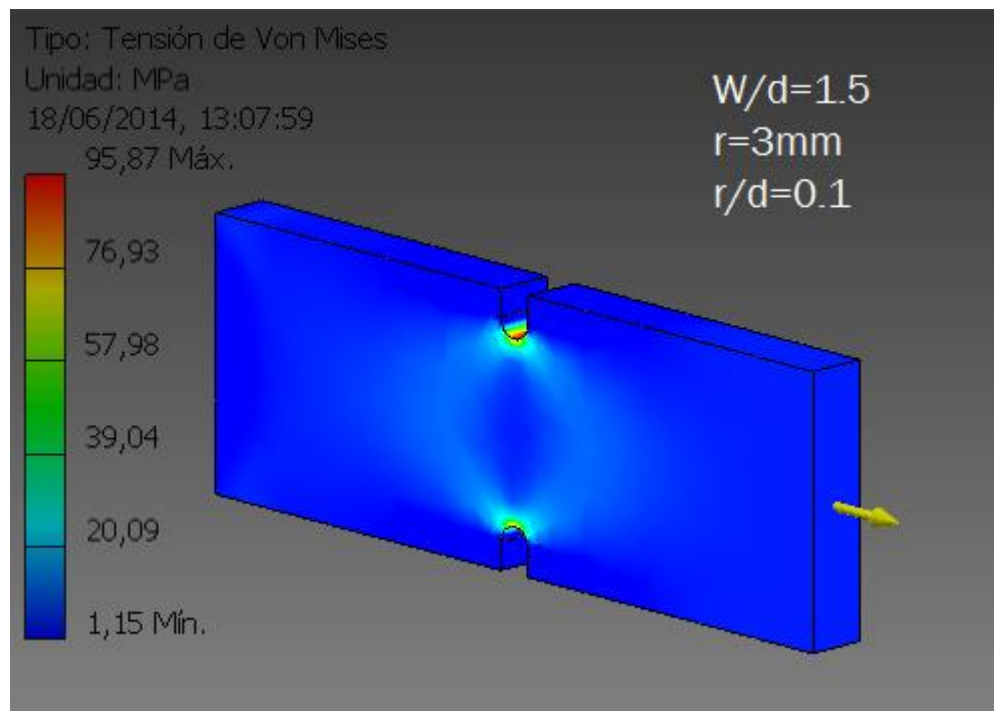


Figura 6.96. Barra circular con ranuras transversales sometida a tracción. Relación $W/d=1.5$; $r=3\text{mm}$, $r/d=0.1$.

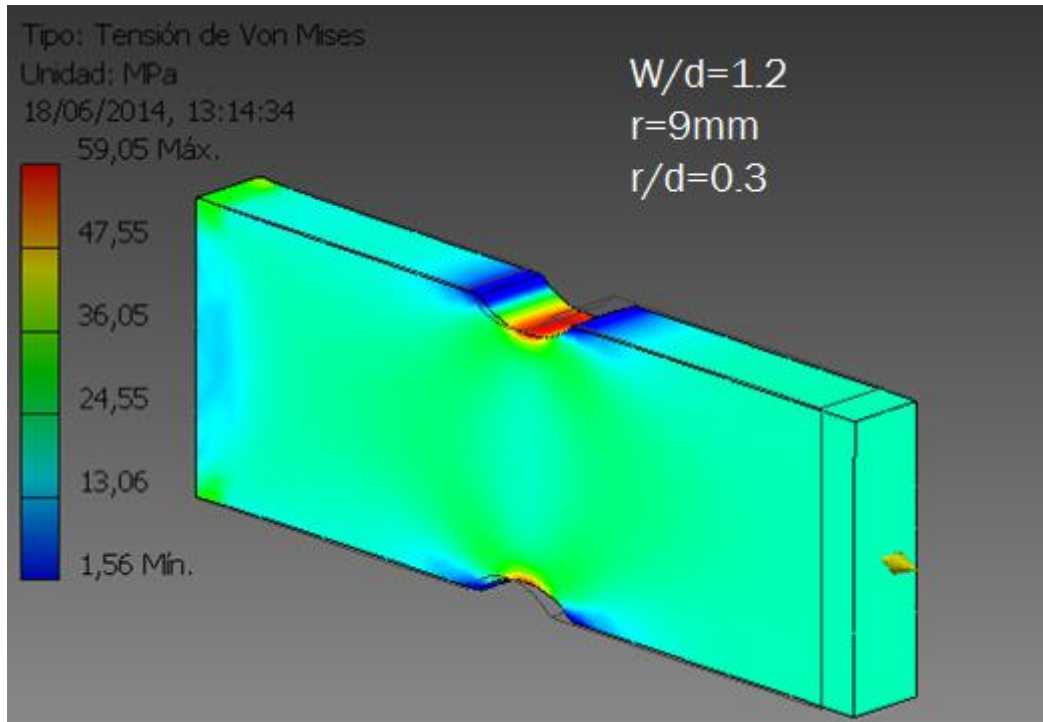


Figura 6.97. Barra circular con ranuras transversales sometida a tracción. Relación $W/d=1.2$; $r=9\text{mm}$, $r/d=0.3$.

El desplazamiento, al ser un esfuerzo de tracción, la pieza aumenta de tamaño en el sentido de aplicación de la carga. A causa de este aumento de tamaño, la pieza disminuye su ancho. En la figura 6.98. Se muestra en blanco la pieza original sin deformar, mientras que la deformada se observa que disminuye su ancho.

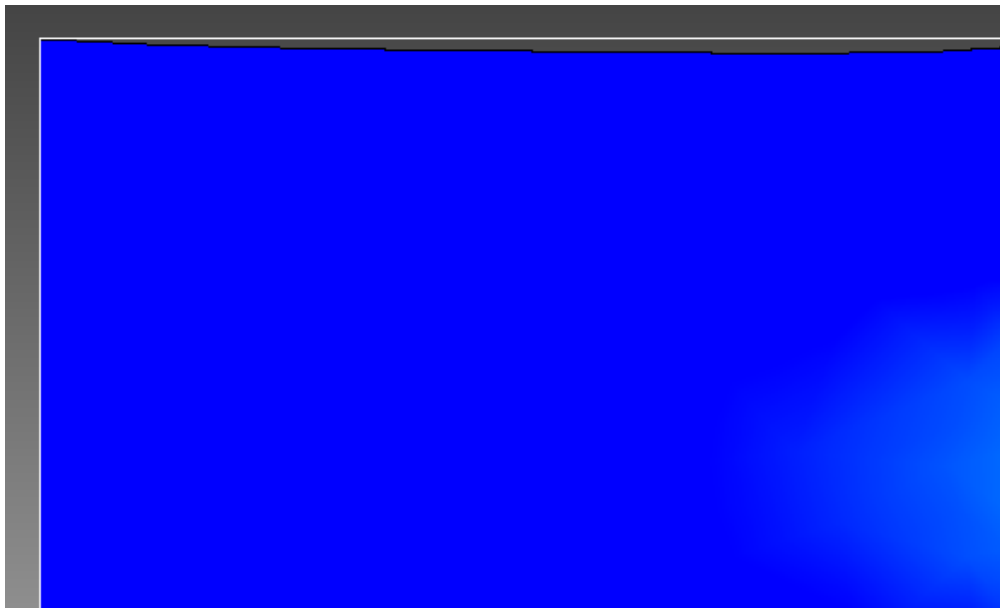


Figura 6.98. Deformada de una pieza rectangular con entallas transversales sometida a tracción.



Para asegurarse que la pieza se ha simulado correctamente primero se ve si la máxima tensión se encuentra en la mínima sección de la pieza, y dentro de esta sección en las entallas trasversales (fig.6.99).

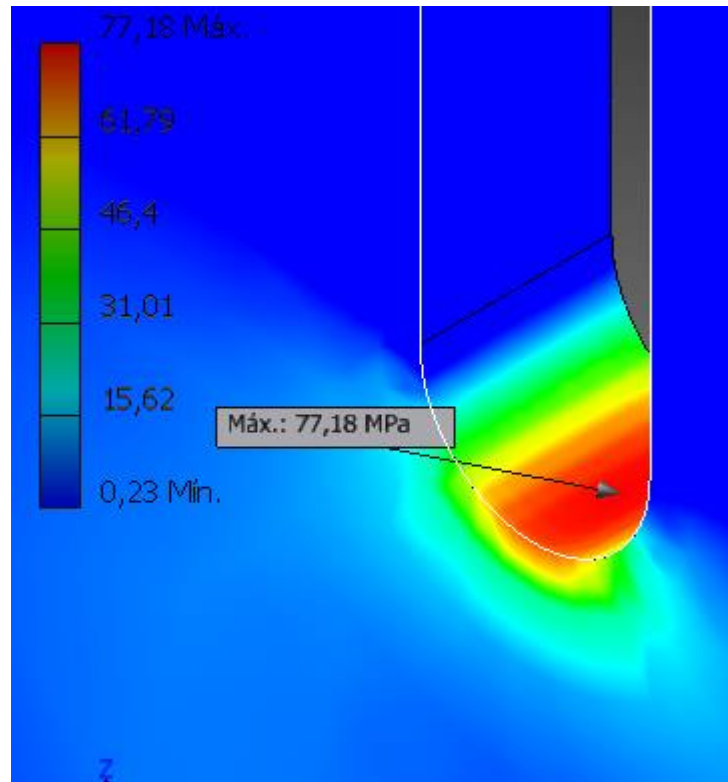


Figura 6.99. Tensión máxima situada en las entallas trasversales.

Para el caso de una relación de $W/d=3$, y $r=6$ mm, la tensión máxima es de 77.18 MPa, situada precisamente en la entalla de la sección mínima, por lo que el programa Autodesk Inventor ha simulado aparentemente bien, pero para dar por válida la simulación, se han de tener en cuenta las conclusiones.

6.6.5.-Resultados

Se han realizado 18 simulaciones para distintos valores de r y W . El valor de d se ha mantenido fijo en 30 mm.

Las relaciones de D/d han sido de: 3, 1.5 y 1.2. En cuanto al radio de las ranuras, varía desde los 1.5 hasta los 9 mm. Los resultados se muestran en las tablas 6.23, 6.24 y 6.25.

W=90mm, d=30mm; W/d=3						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
1.5	0.05	143.2	33.333	4.296
3	0.1	104.6	33.333	3.138	2.93	7.100
4.5	0.15	83.67	33.333	2.510	2.4	4.588
6	0.2	77.18	33.333	2.315	2.16	7.195
7.5	0.25	70.33	33.333	2.109	2	5.496
9	0.3	63.05	33.333	1.891	1.88	0.612

Tabla 6.23. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción con una relación de W/d=2.

W=45mm, d=30mm; W/d=1.5						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
1.5	0.05	128.1	33.333	3.843
3	0.1	95.87	33.333	2.876	2.7	6.523
4.5	0.15	80.5	33.333	2.415	2.3	5.001
6	0.2	74.09	33.333	2.222	2.06	7.899
7.5	0.25	68.48	33.333	2.054	1.9	8.127
9	0.3	62.2	33.333	1.866	1.75	6.629

Tabla 6.24. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción con una relación de W/d=1.5.

W=36mm, d=30mm; W/d=1.2						
r [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
1.5	0.05	106.9	33.333	3.207
3	0.1	82.85	33.333	2.485	2.4	3.563
4.5	0.15	72.32	33.333	2.169	2.18	0.476
6	0.2	66.29	33.333	1.988	1.94	2.511
7.5	0.25	62.17	33.333	1.865	1.8	3.617
9	0.3	59.05	33.333	1.771	1.68	5.447

Tabla 6.25. Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción con una relación de W/d=2.

Como resultado final se ofrece la fig.6.100 la cual muestra los valores de K_t para distintas relaciones de W, d y r.

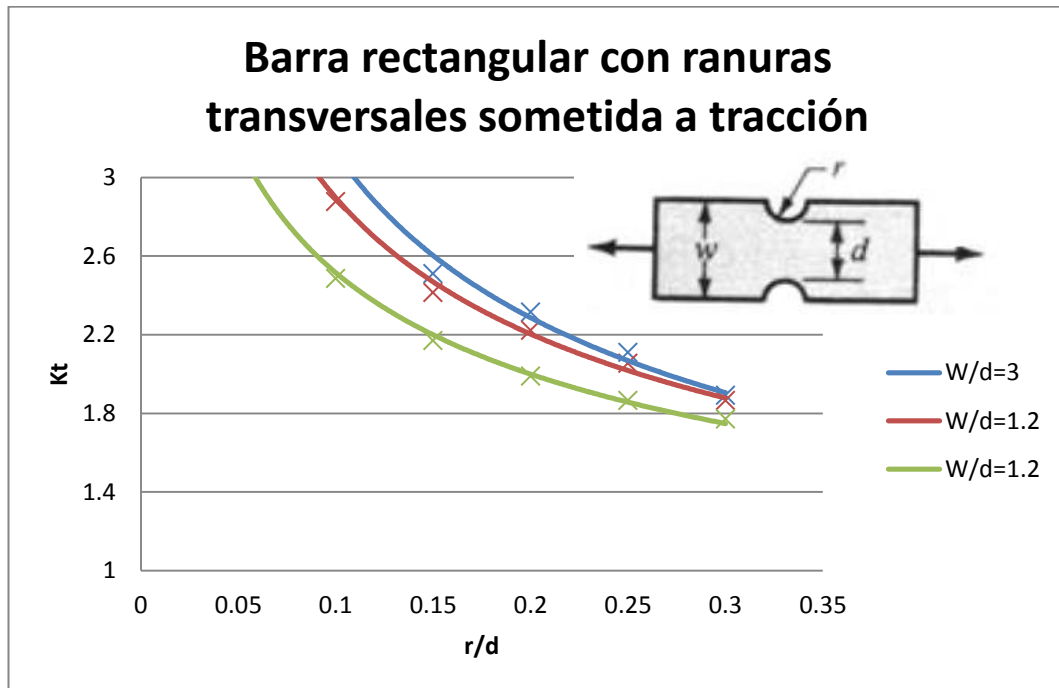


Figura 6.100. Barra rectangular con ranuras transversales sometida a tracción.

El valor de R^2 de cada curva de tendencia es el mostrado en la tabla siguiente (tabla 6.26).

Línea de tendencia	Valor de R^2
$D/d=3$	0.9956
$D/d=1.5$	0.9969
$D/d=1.2$	0.997

Tabla 6.26. Valor de R^2 para las distintas líneas de tendencia.

6.6.6.-Conclusiones

El valor de R^2 es prácticamente 1, por lo que las curvas de tendencia mostradas en la fig.6.100 representan con exactitud los datos experimentales obtenidos mediante elementos finitos.

Al reducirse el área por el que fluyen los esfuerzos a un diámetro d , estos se concentran más fácilmente, produciéndose una concentración de tensiones. Por tanto, cuanto mayor es la relación de W/d , más alta está la curva de la gráfica y mayor es el factor de concentración de tensiones.

Por otro lado, como bien se puede observar, al aumentar el radio de la entalla, el valor de K_t disminuye, puesto que las tensiones se distribuyen mejor y no se aglomeran todas en un punto.

En cuanto a la tensión nominal, en este caso no se puede observar fácilmente, puesto que toda la sección sufre una concentración o disminución de tensiones, no habiendo un valor fijo (fig.6.101).

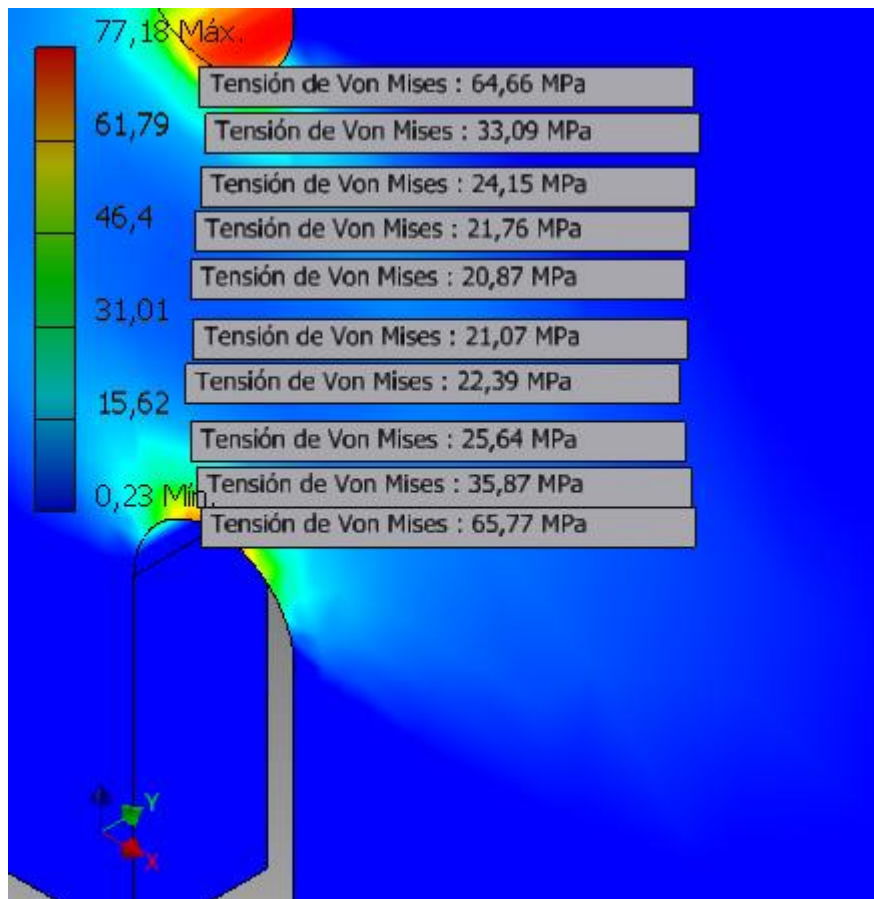


Figura 6.101. Variación de la tensión de Von Mises en una sección de $d=30\text{mm}$.

Es posible comparar la tensión en una sección de la pieza donde no exista concentración de tensiones. Para un valor de $W=90\text{mm}$, la tensión es:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{Wt} = \frac{10000 \text{ N}}{10 \text{ mm} \cdot 90\text{mm}} = 11.11 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 11.11 \text{ MPa}$$

Y el esfuerzo mostrado por el programa se muestra a continuación (fig.6.102).

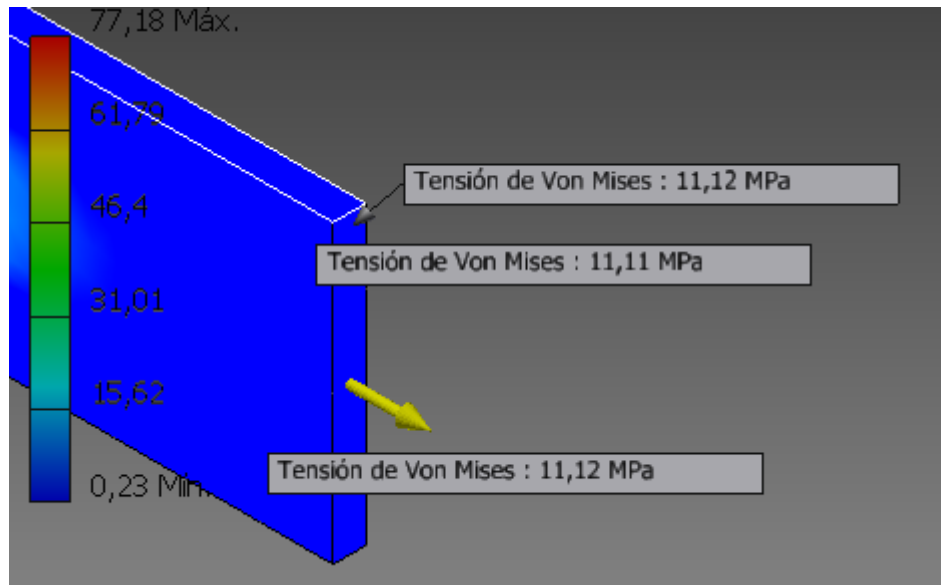


Figura 6.102. Tensión en una sección no perturbada por la concentración de tensiones.

Aproximadamente, el valor es el mismo (11.11 MPa) y las soluciones del factor teórico de concentración de tensiones son muy parecidos a los datos de las tablas de Shigley, por lo que se validan los resultados y se da por buena la simulación de Autodesk Inventor.



6.7.- Barra rectangular con agujero central sometido a tracción

6.7.1.- Definición

Se trata de una barra rectangular con un agujero transversal de diámetro d , sometida a una fuerza de valor F , produciendo así un esfuerzo de tracción.

Se tomará como valor nominal para el cálculo de K_t La tensión σ_0 (eq.6.13).

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w - d) \cdot t} \quad (6.13)$$

Donde:

σ_0 : Tensión nominal [MPa]

F : Fuerza axial aplicada a ambos lados de la pieza [N]

d : diámetro del agujero transversal [mm]

w : Ancho de la pieza [mm]

t : espesor [mm]

En este caso, la gráfica que nos relaciona la geometría con el factor teórico de concentración de tensiones K_t , es la mostrada en la fig.6.103.

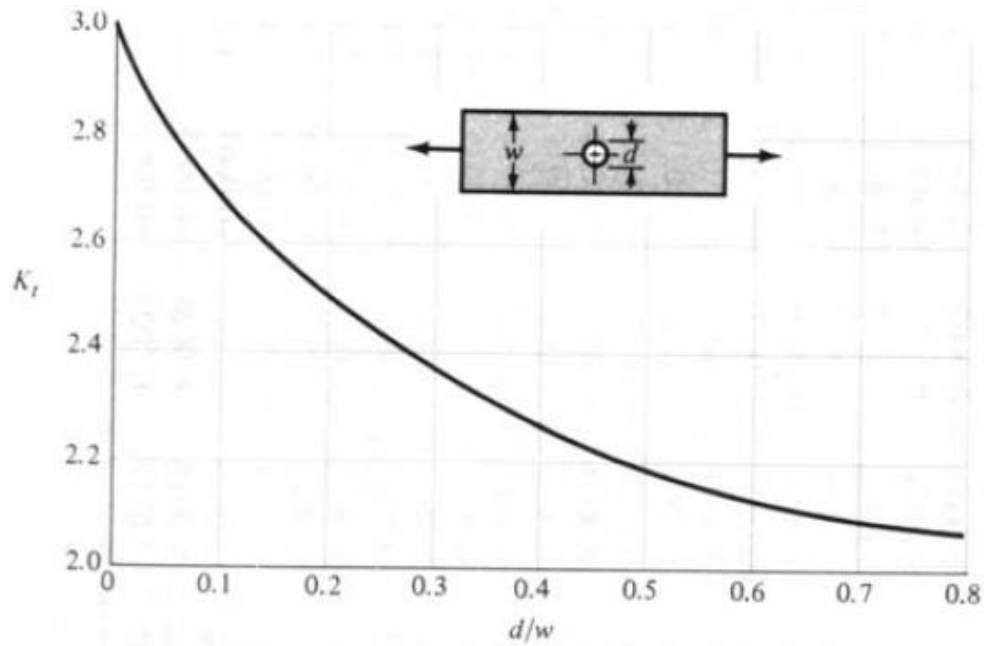


Figura 6.103. Barra rectangular con agujero transversal sometida a tracción. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Richard G. Budynas y J. Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].

6.7.2.-Geometría

Para la creación de la geometría basta con hacer un boceto en dos dimensiones y extruirlo con un espesor de $t=10\text{mm}$. Para ello, en primer lugar se crea un rectángulo de ancho w y longitud aproximada de tres veces el ancho. A continuación se dibuja un círculo en la parte central de diámetro d (fig.6.104).

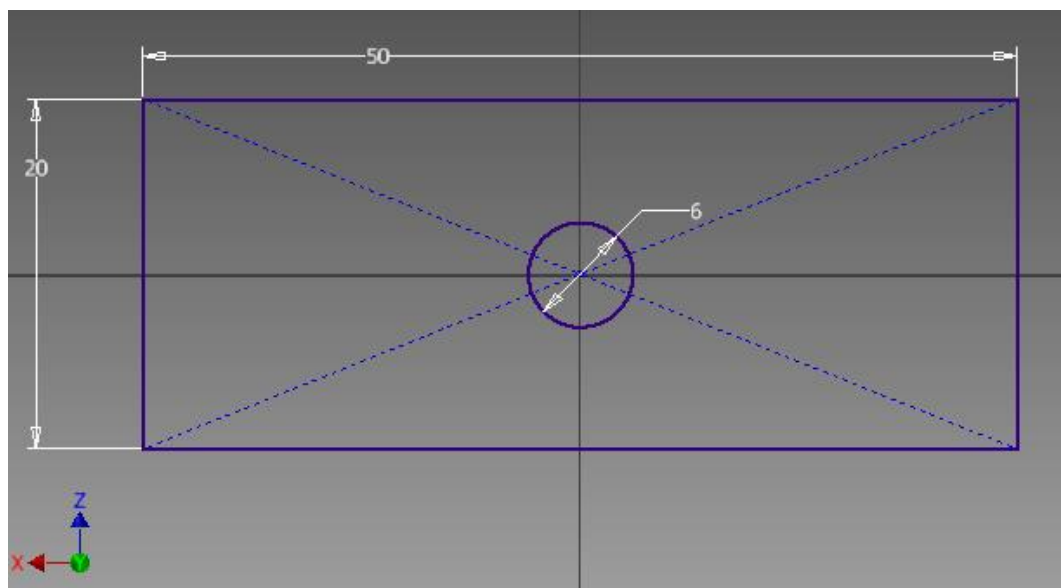


Figura 6.104. Boceto en dos dimensiones de una barra rectangular con un agujero central.

Una vez hecho el boceto, éste se selecciona para realizar una extrusión. Con este comando e introduciendo el espesor deseado, se obtiene la pieza final (fig.6.105).

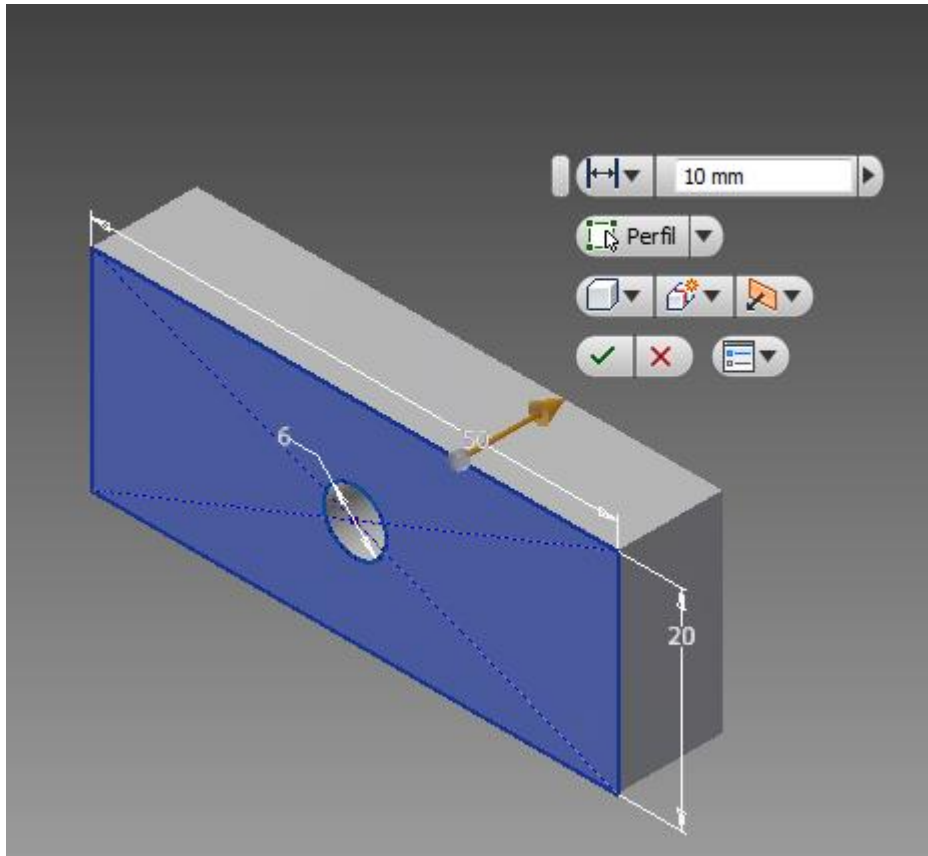


Figura 6.105. Barra rectangular con agujero central sometida a tracción.

6.7.3.-Modelización

Los parámetros a tener en cuenta son w , d y F .

La implementación en Autodesk se efectuará según lo mostrado en la figura siguiente (fig.6.106).

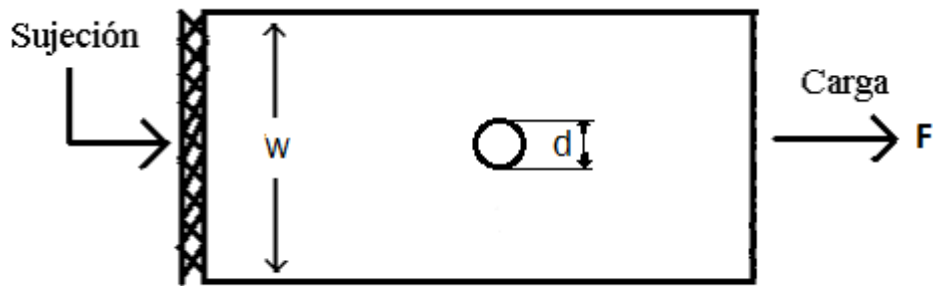


Figura 6.106. Modelización de una barra rectangular con agujero central sometida a tracción.

Como los casos anteriores, se fija una de las caras (la de mayor ancho) y en la otra se aplica la carga. El material también es el mismo que en los casos anteriores, un acero estructural metálico con acabado laminado.

Para la restricción de movimiento, se inicia el análisis de tensión y se marca la cara que se pretende fijar (fig.6.107).

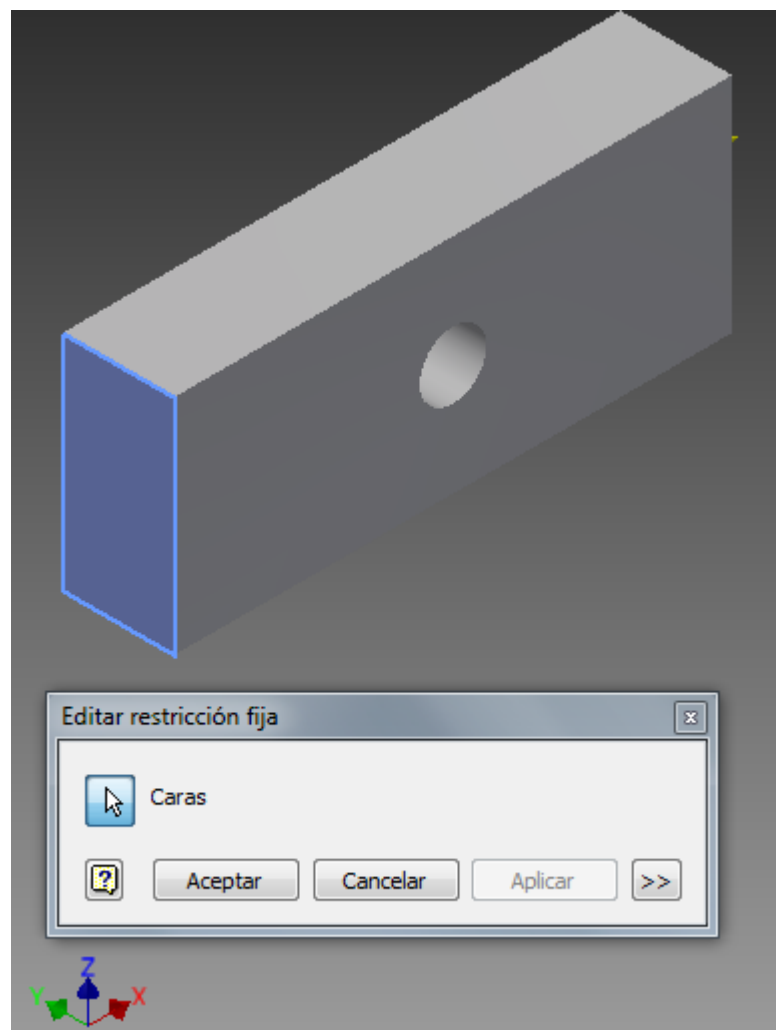


Figura 6.107. Restricción de movimiento a una de las caras.

Una vez fijada la cara, se aplica la fuerza de valor F . Para todas las simulaciones este valor es de 5000 N en la dirección del eje x en la cara opuesta a la fijada (fig.6.108).

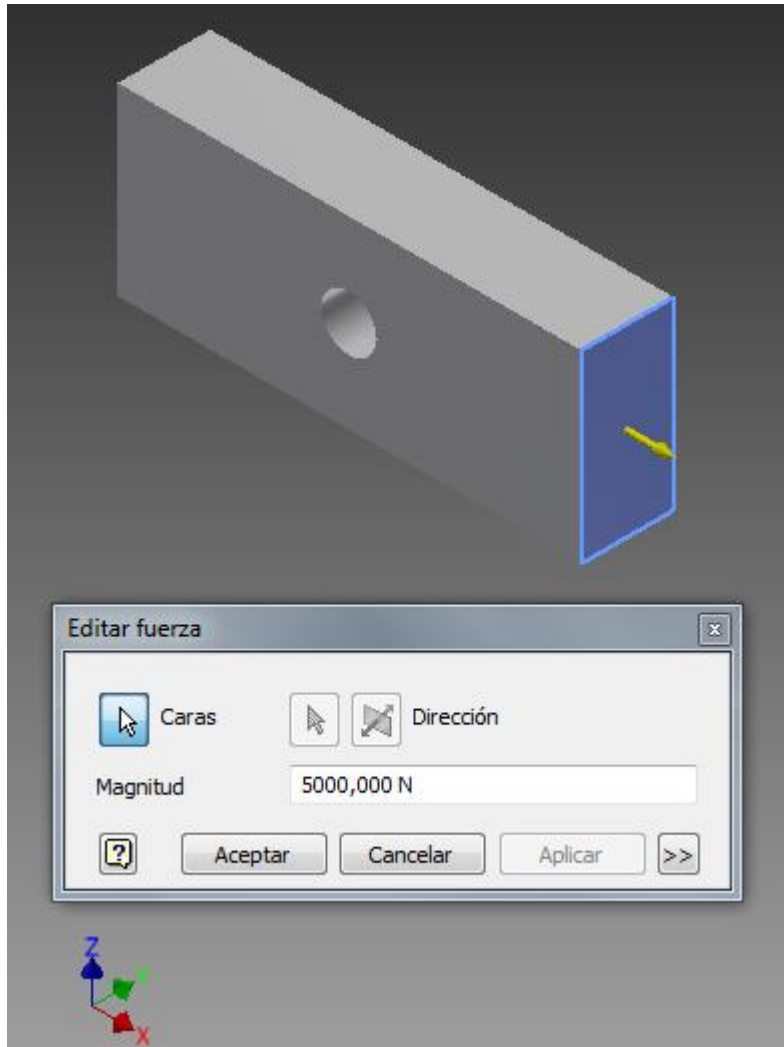


Figura 6.108. Aplicación de una carga de valor $F = 5000$ N.

Este caso es distinto a los anteriores, debido a que el cálculo del valor de la tensión nominal depende de d y éste valor es variable, puesto que se ha decidido mantener un valor de $w=20\text{mm}$ constante. Por tanto cada una de las simulaciones tendrá un valor de σ_0 distinto. Estos valores se muestran a continuación haciendo uso de la eq. 6.13, sabiendo que $t=10\text{mm}$ y $F=5000\text{N}$.



Para:

➤ $d=2\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-2) \cdot 10\text{mm}^2} = 27.778 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{27.778 \text{ MPa}}$$

➤ $d=4\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-4) \cdot 10\text{mm}^2} = 31.25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{31.25 \text{ MPa}}$$

➤ $d=6\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-6) \cdot 10\text{mm}^2} = 35.714 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{35.714 \text{ MPa}}$$

➤ $d=8\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-8) \cdot 10\text{mm}^2} = 41.667 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{41.667 \text{ MPa}}$$

➤ $d=10\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-10) \cdot 10\text{mm}^2} = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{50 \text{ MPa}}$$

➤ $d=12\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-12) \cdot 10\text{mm}^2} = 62.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{62.5 \text{ MPa}}$$

➤ $d=14\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-14) \cdot 10\text{mm}^2} = 83.334 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{83.334 \text{ MPa}}$$

➤ $d=16\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{(20-16) \cdot 10\text{mm}^2} = 125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{125 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la generación de la malla, haciendo *click* en *configuración de malla*, las modificaciones de la malla inicial se han definido mediante los siguientes valores:

- Tamaño medio del elemento: 0.05
- Tamaño mínimo del elemento: 0.150
- Factor de modificación: 1.1
- Ángulo máximo de giro: 40 gr

Además de esta configuración inicial de la malla, es preciso hacer un refinamiento de la malla en el agujero central con valor de 0.3 mm. Este valor garantiza la uniformidad de las tensiones de Von Mises en el agujero central. En algunas simulaciones en los que el diámetro del agujero es menor se ha refinado aún más la malla, llegando a valores de 0.1 mm para el caso de un diámetro del agujero de $d=2\text{mm}$.

La configuración final de la malla queda definida por la figura 6.109.

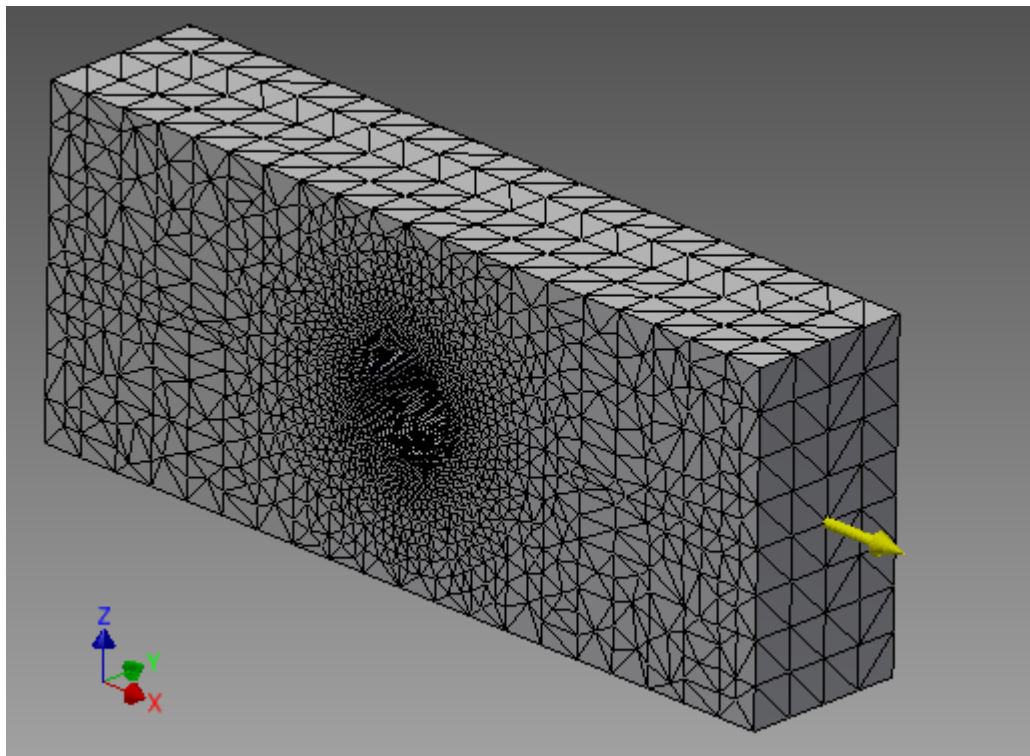


Figura 6.109. Configuración de final de malla para una barra rectangular con agujero central sometida a tracción.



6.7.4.-Simulación

Haciendo simular el programa obtenemos la tensión de Von Mises para cada geometría. Algunas de las gráficas son las mostradas a continuación (fig.6.110 y fig.6.111).

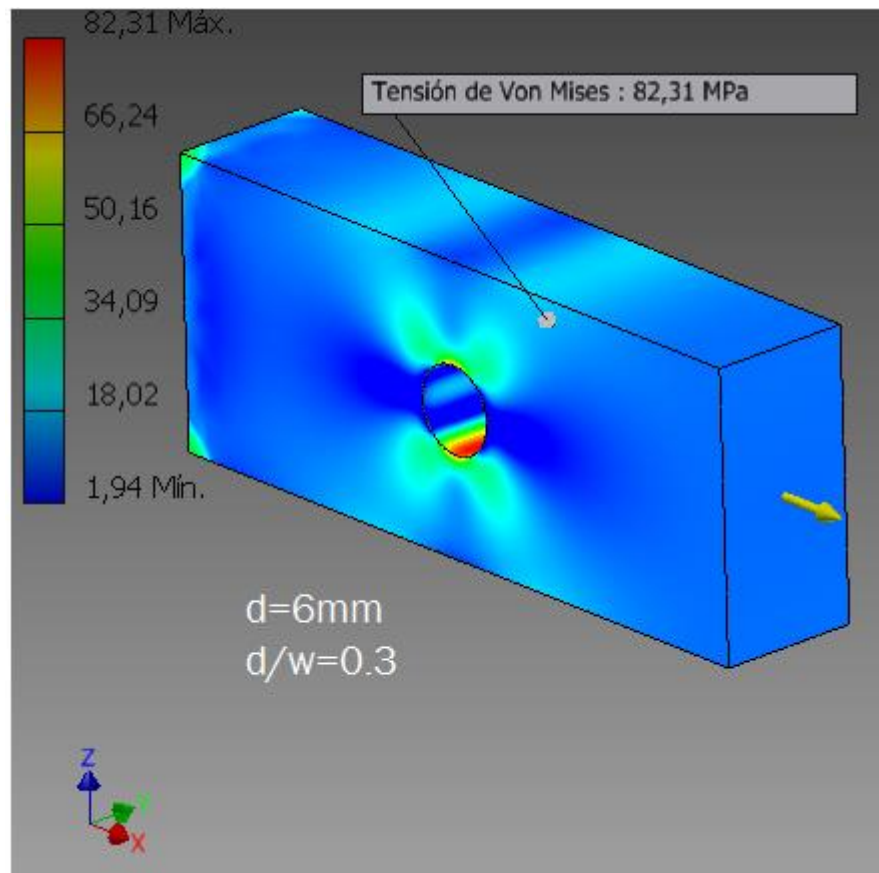


Figura 6.110. Barra rectangular con agujero central de diámetro $d=6\text{mm}$ sometida a tracción.

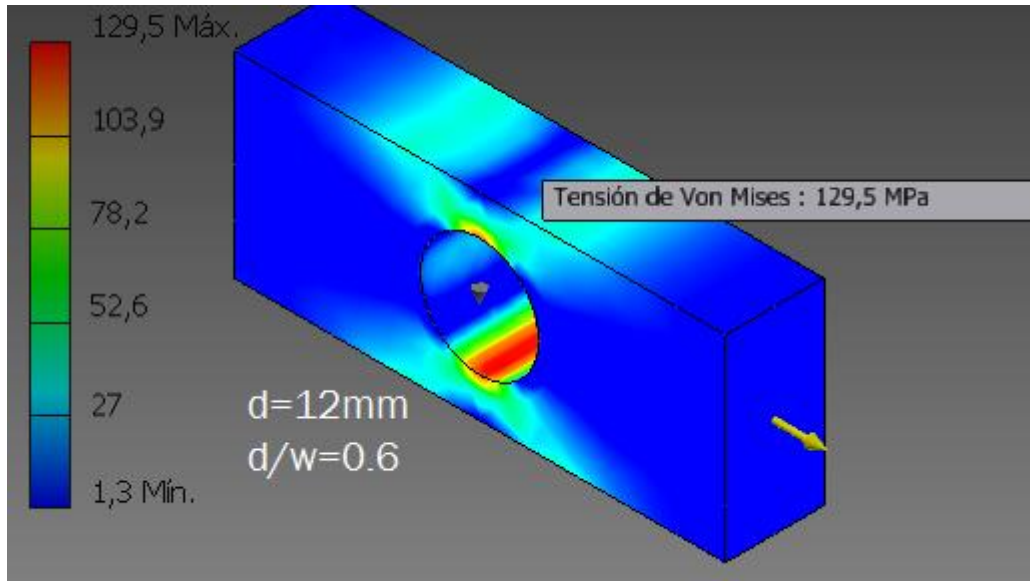


Figura 6.111. Barra rectangular con agujero central de diámetro $d=12\text{mm}$ sometida a tracción.

El esfuerzo normal que actúa sobre la sección transversal a través del centro del agujero tiene la distribución ilustrada en la figura 6.112. El esfuerzo máximo $\sigma_{\text{MÁX}}$ se presenta en los bordes del agujero y es considerablemente mayor que el esfuerzo nominal en la misma sección trasnversal.

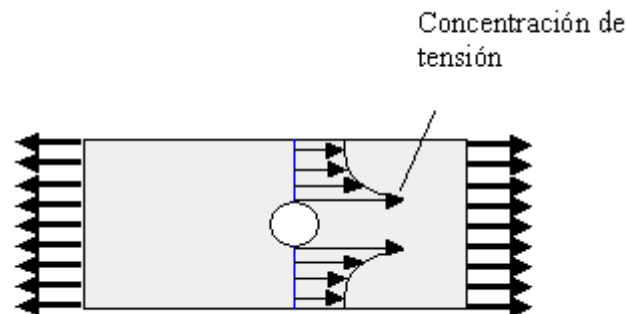


Figura 6.112. Distribución de esfuerzos en una barra rectangular con agujero central sometida a tracción.[http://www.mecapedia.uji.es/concentracion_de_tensiones.htm].

En Autodesk Inventor este fenómeno se puede comprobar utilizando unas sondas que se colocan a lo largo de la sección transversal asociada al centro del agujero (fig.6.113).

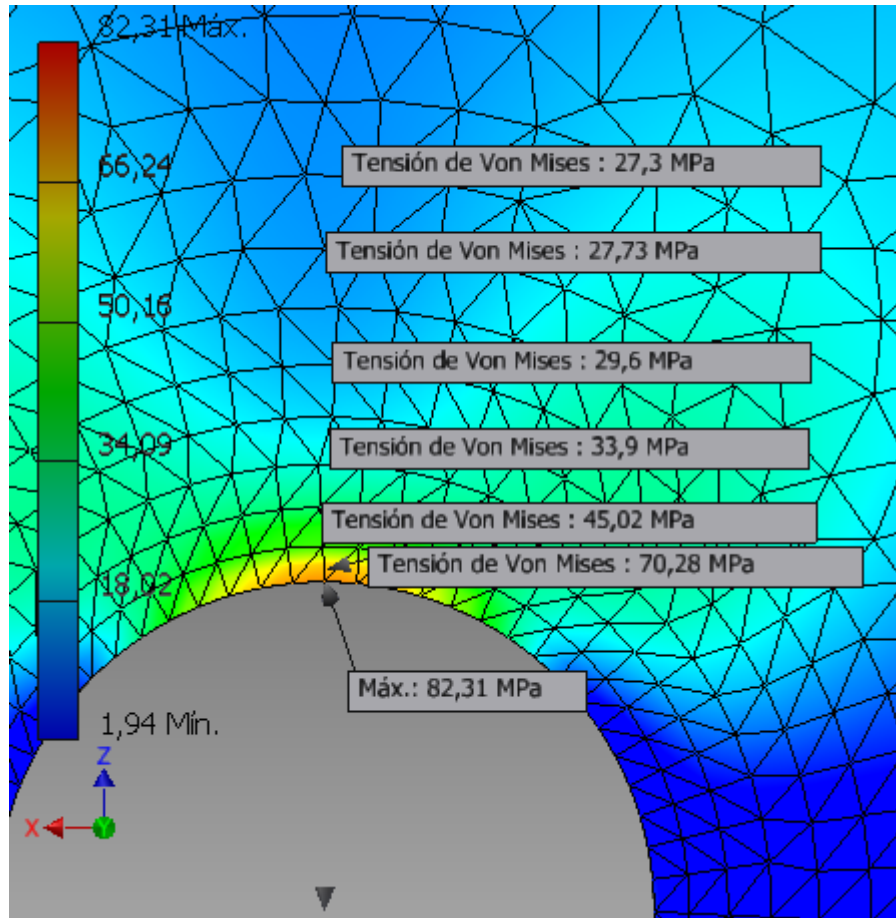


Figura 6.113. Distribución de esfuerzos en una barra rectangular con agujero central sometida a tracción mediante Autodesk Inventor.

Efectivamente se encuentra la tensión máxima en dicha de sección transversal cuando el punto de medida se aleja del agujero, la tensión disminuye.

En cuanto a la deformación, al estirarse la pieza, el agujero debería adoptar una forma elíptica. Esto es debido a que al estirarse la pieza, el ancho disminuye haciendo que el agujero deje de ser circular (fig.6.114).

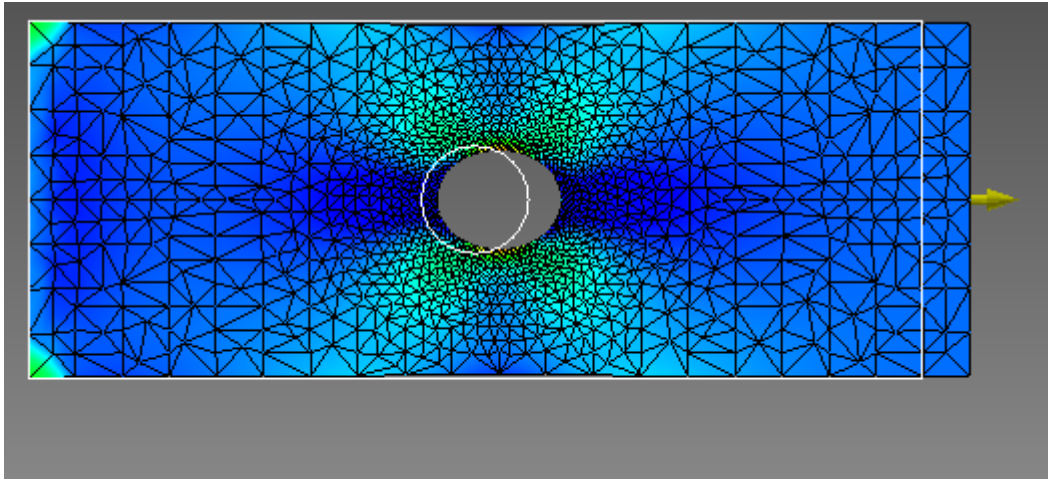


Figura 6.114. Deformación de una barra rectangular con agujero central sometida a axil.

6.7.5.-Resultados

Se han realizado 8 simulaciones con distintos valores de diámetro del agujero, variando entre 2 y 16 mm. El valor de w se ha mantenido constante en 20 mm.

Los resultados se muestran en la tabla siguiente (tabla 6.27).

W=20mm; t=10mm						
d [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	Kt teórico	error [%]
2	0.1	75.36	27.778	2.712	2.7	0.48
4	0.2	77.91	31.25	2.493	2.5	0.2752
6	0.3	82.31	35.714	2.304	2.35	1.928
8	0.4	91.84	41.667	2.204	2.25	2.037
10	0.5	106.5	50	2.13	2.15	0.930
12	0.6	129.5	62.5	2.072	2.1	1.334
14	0.7	168.8	83.334	2.025	2.08	2.615
16	0.8	254.5	125	2.036	2.05	0.682

Tabla 6.27. . Resultados obtenidos de K_t para una barra rectangular con agujero central sometida a tracción.

Como resultado final se ofrece la tabla equivalente a la ofrecida por Shigley. En ella se recogen los datos experimentales obtenidos mediante MEF (fig.6.115).

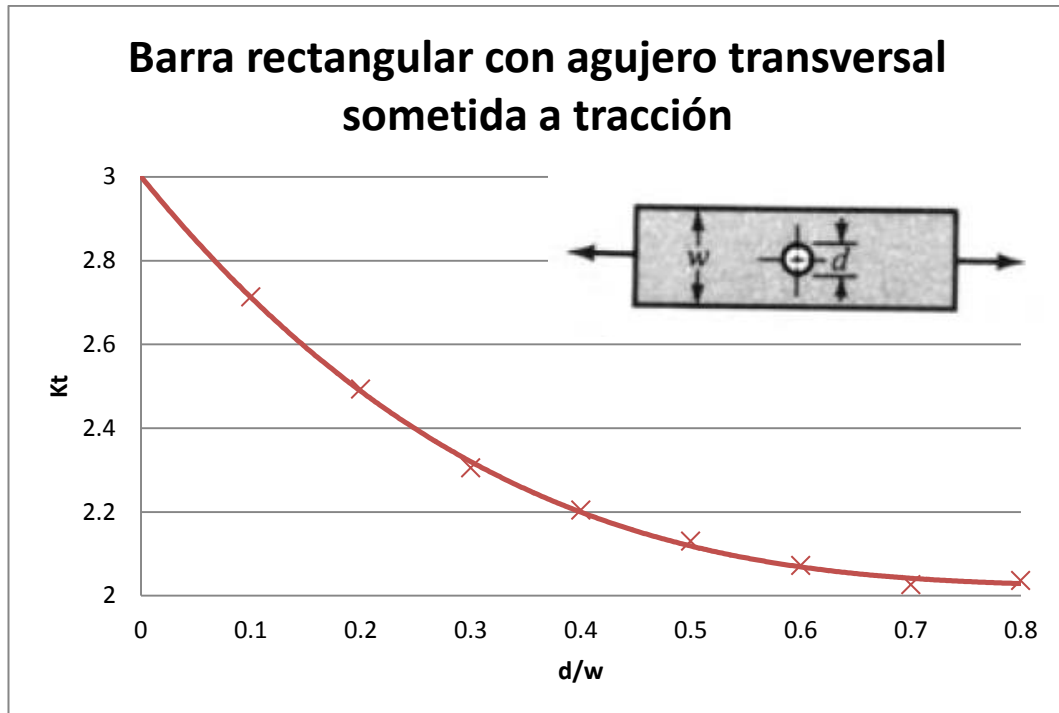


Figura 6.115. Barra rectangular con agujero central sometida a tracción.

6.7.6.-Conclusiones

Al no poder comprobar la tensión nominal en la sección transversal debido a que toda ella sufre de concentración de tensiones, se ha comprobado la tensión en una sección que no tenga una concentración de tensiones. Esta sección corresponde con la de espesor $w=20\text{mm}$ y su tensión teórica es:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{w \cdot t} = \frac{5000 \text{ N}}{20 \cdot 10 \text{ mm}^2} = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{25 \text{ MPa}}$$

La tensión proporcionada por Autodesk Inventor es se muestra en la figura siguiente (fig.6.116).

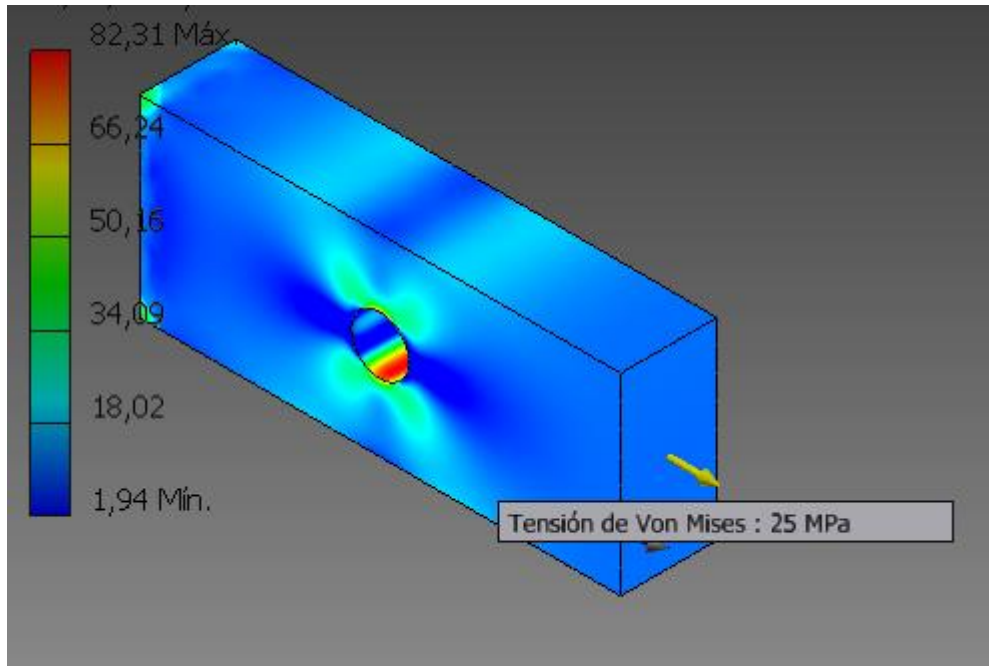


Figura 6.116. Tensión de Von Mises en una sección de ancho $w=20$ mm.

Ambos valores son idénticos, por lo que se valida que la tensión de referencia está bien marcada, y por tanto los valores proporcionados de K_t son correctos.

Otra curiosidad que presentan las simulaciones es que alrededor del agujero la tensión varía desde un máximo (donde se concentran las tensiones) hasta el mínimo, situado a 90° del pico de máxima tensión (fig.6.117).

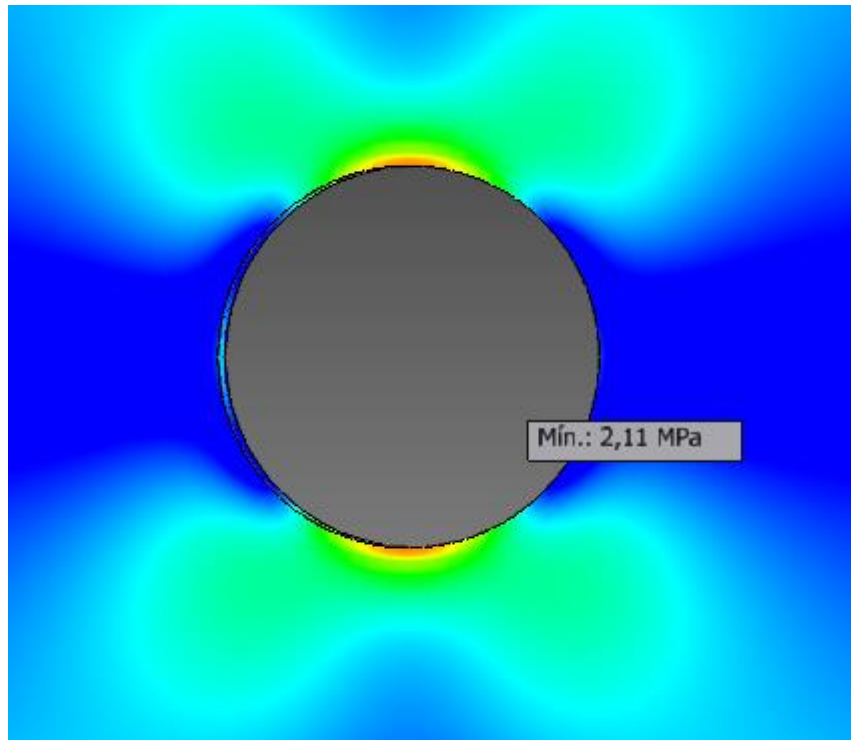


Figura 6.117. Mínima tensión de Von Mises en un agujero central sometido a tracción.

Este mínimo se debe a que las tensiones no llegan hasta el agujero y se “desvían” para sobrepasar el “obstáculo” (el agujero) (fig.6.118).

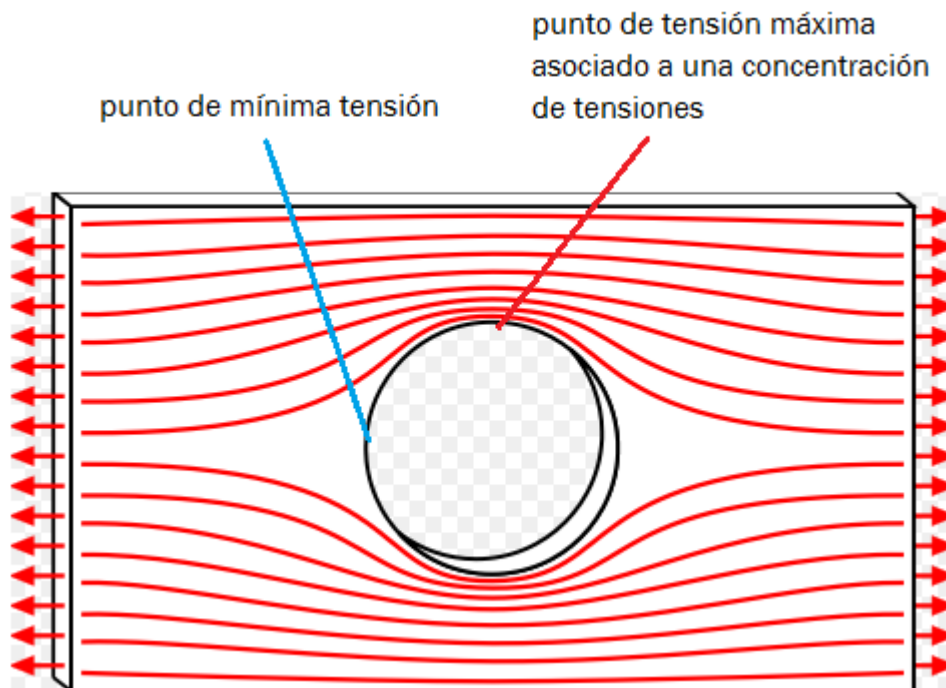


Figura 6.118. Distribución de tensiones en una placa rectangular con un agujero central sometida a axil.

A la vista de la tabla 6.27, donde se muestran los resultados obtenidos, se puede apreciar el bajo error producido en el análisis. Autodesk Inventor ha reproducido en este caso fielmente la tabla proporcionada por Shigley.

El que a relaciones altas de d/w el factor teórico K_t sea menor, no significa que la tensión máxima sea menor. Al tener un diámetro de agujero grande la concentración de tensiones es mayor pero también lo es la tensión de referencia, puesto que el área nominal es menor; de ahí que K_t disminuya con mayores relaciones de d/w .

Si se observa una gráfica en la que aparezca la tensión máxima frente a distintas relaciones de agujero-ancho, se aprecia fácilmente que a medida que el agujero es mayor la tensión aumenta notablemente, puesto que la concentración de tensiones que se genera es mayor que si el agujero fuera de un tamaño menor (fig.6.119).

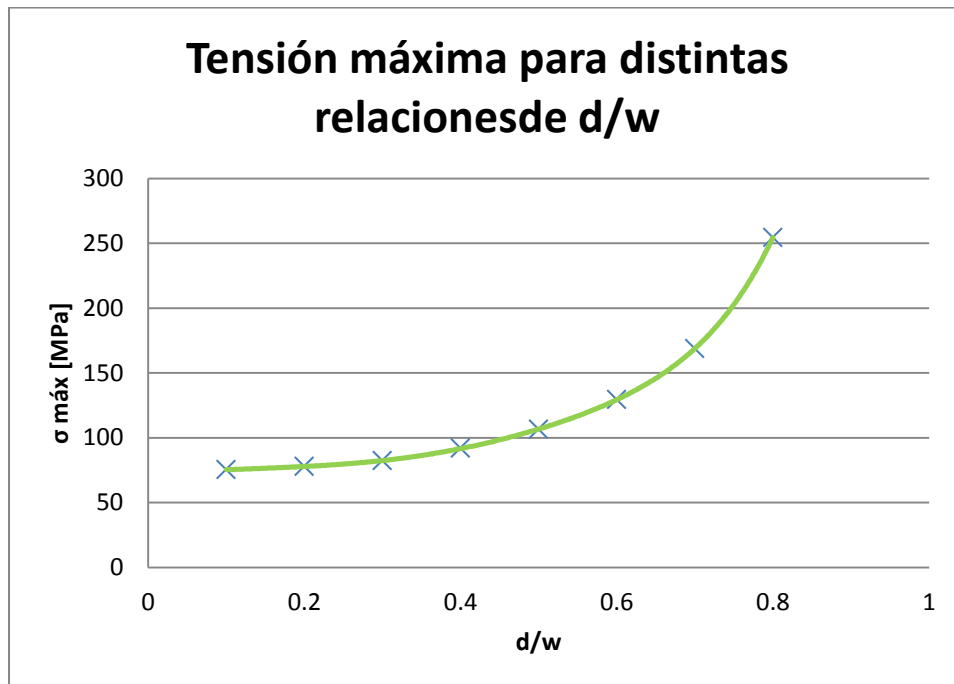


Figura 6.119. Tensión máxima para distintas relaciones de d/w con $w=20$ mm.



6.8.- Barra circular con agujero transversal sometida a flexión

6.8.1.- Definición

Se trata de una barra circular con un agujero transversal de diámetro d , sometida a un momento de valor M , produciendo así un esfuerzo de flexión.

Se tomará como valor nominal para el cálculo de K_t La tensión σ_0 (eq.6.14).

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} \quad (6.14)$$

Donde:

σ_0 : Tensión nominal [MPa]

M : Momento aplicado a ambos lados de la pieza [N·mm]

d : diámetro del agujero transversal [mm]

D : diámetro de la pieza [mm]

En este caso, la gráfica que nos relaciona la geometría con el factor teórico de concentración de tensiones K_t , es la mostrada en la fig. 6.120.

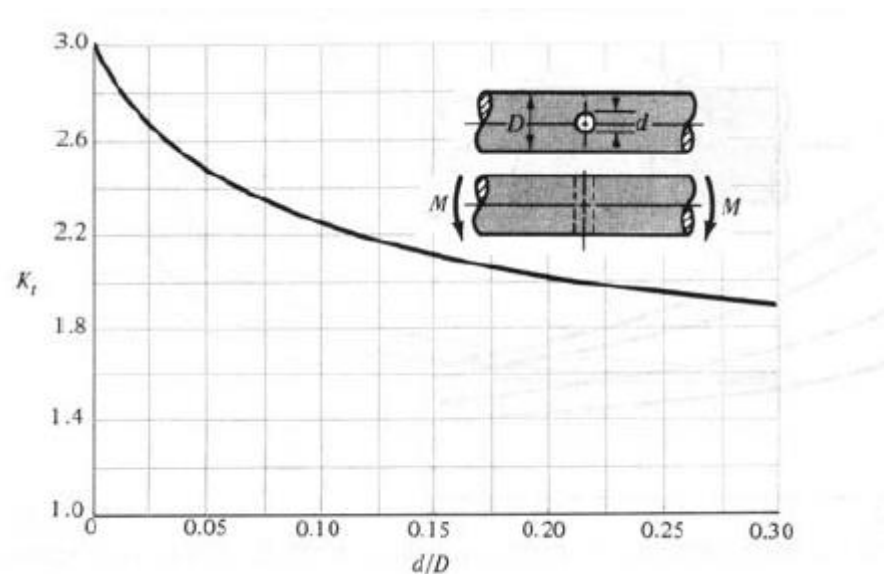


Figura 6.120. Barra circular con agujero transversal sometida a flexión. [Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Richard G. Budynas y J.Keith Nisbett. Octava edición. Ed: McGrawHill. Tabla A-15. Apéndice A].

6.8.2.-Geometría

Para la creación de esta geometría hacen falta únicamente dos pasos. El primero es crear una barra sólida circular. Para ello se elige uno de los tres planos (XY, YZ, ZX) y se dibuja un círculo centrado de diámetro 30mm (fig.6.21).

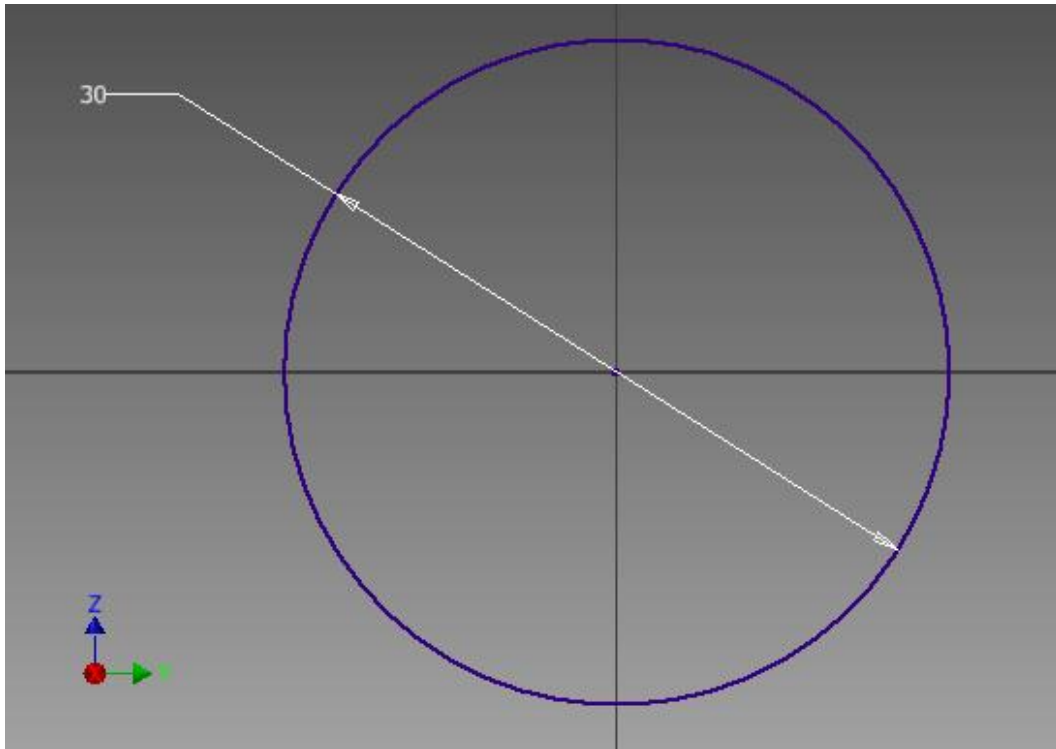


Figura 6.121. Boceto en 2D de un círculo de diámetro $D=30\text{mm}$

A continuación se sale del editor de bocetos y con este círculo se hace una extrusión. La longitud de la misma no es muy representativa pero por dar un valor, se extruye aproximadamente tres veces el diámetro (90 mm), 45mm por cada lado (fig.6.122).

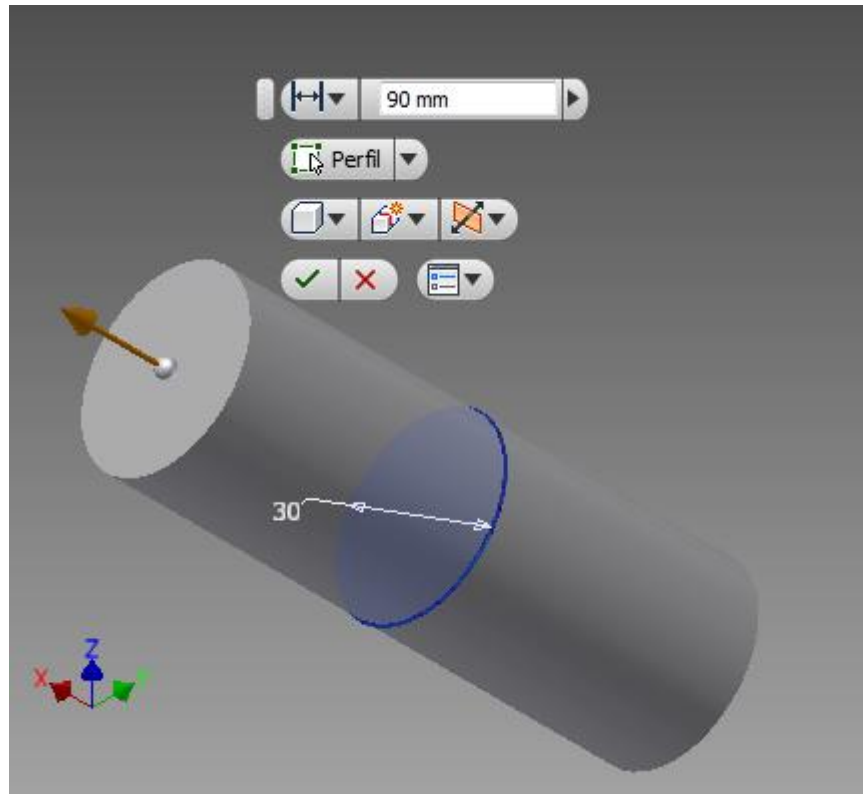


Figura 6.122. Extrusión de un círculo.

En cuanto al agujero, se elige cualquiera de los otros dos planos en los que no se ha dibujado el primer boceto y se coloca un círculo de diámetro d , también centrado (fig.6.123).

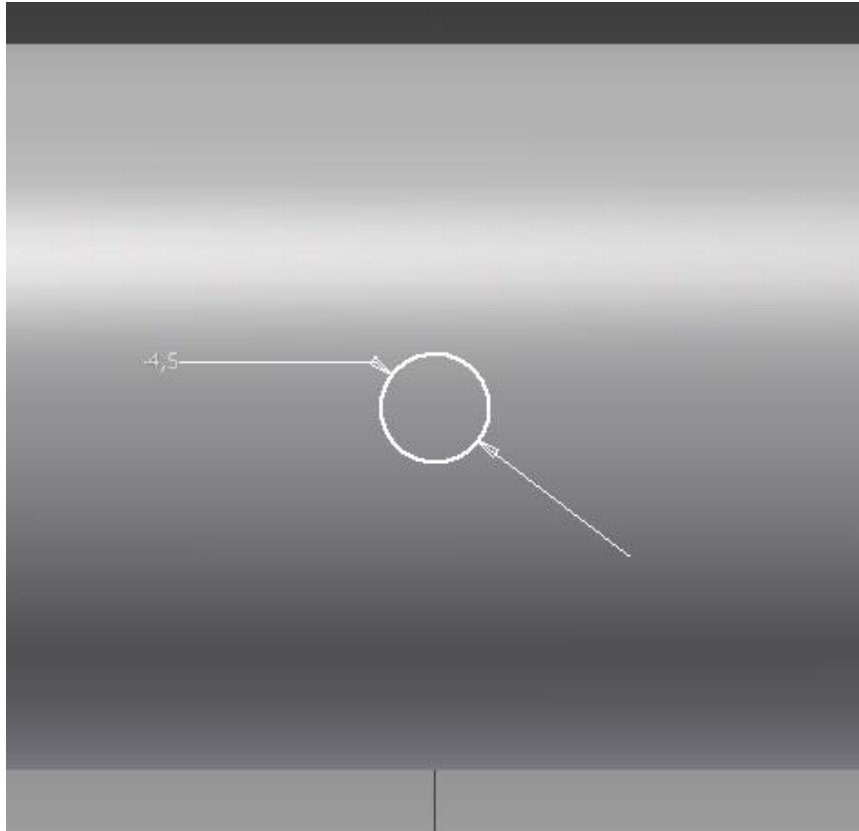


Figura 6.123. Boceto de un círculo cuya función es la de crear un agujero.

Con este pequeño círculo se vuelve a hacer una extrusión, pero esta vez se marca la opción de corte para que elimine material (fig.6.124). Una vez hecho este paso, la pieza ya está terminada.

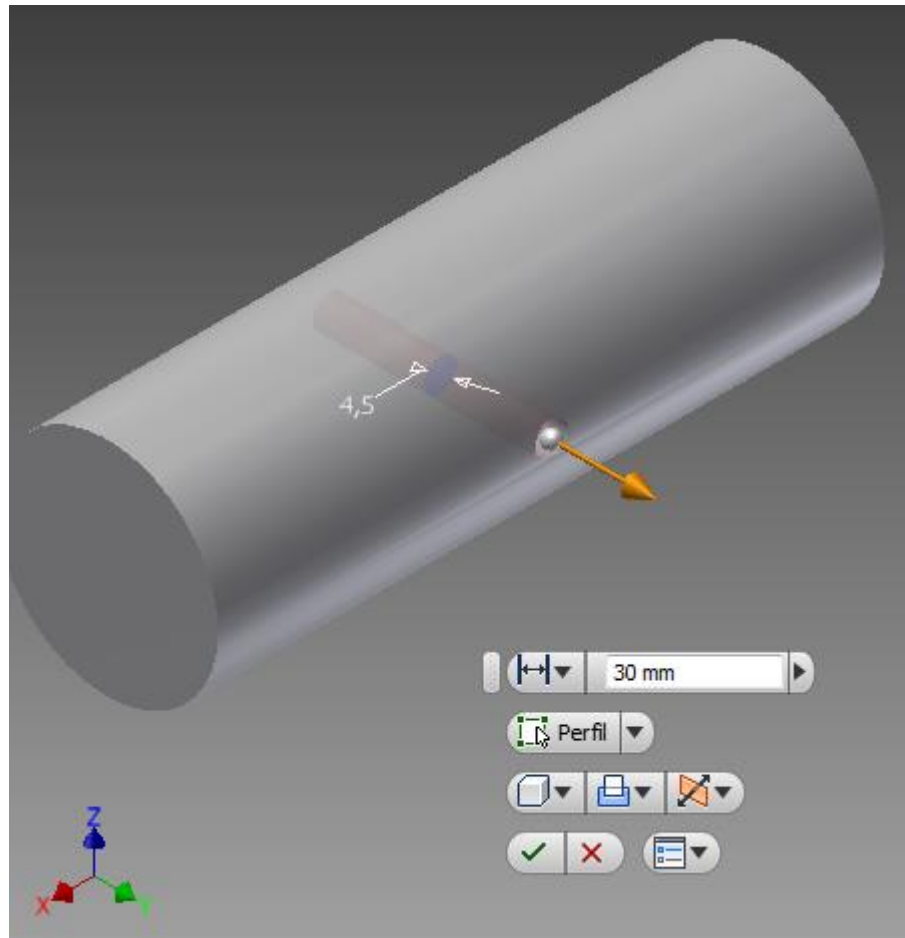


Figura 6.124. Pieza completa con un agujero transversal.

6.8.3.-Modelización

Los parámetros a tener en cuenta son M , d y D .

La implementación en Autodesk se efectuará según lo mostrado en la figura siguiente (fig.6.125).

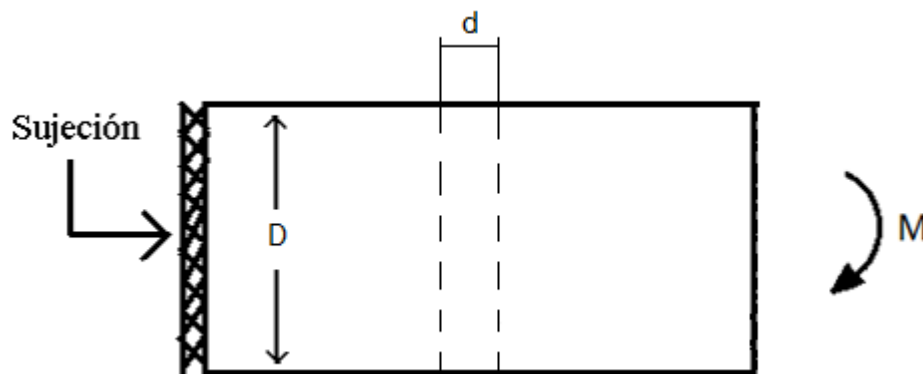


Figura 6.125. Hipótesis de modelización en Autodesk Inventor.

La sección es circular y el diámetro del agujero transversal tiene un valor de d . Primero se fija una de las caras del cilindro (fig.6.126). Esta restricción de movimiento permite que la cara fijada no se desplace en ninguno de los tres ejes.

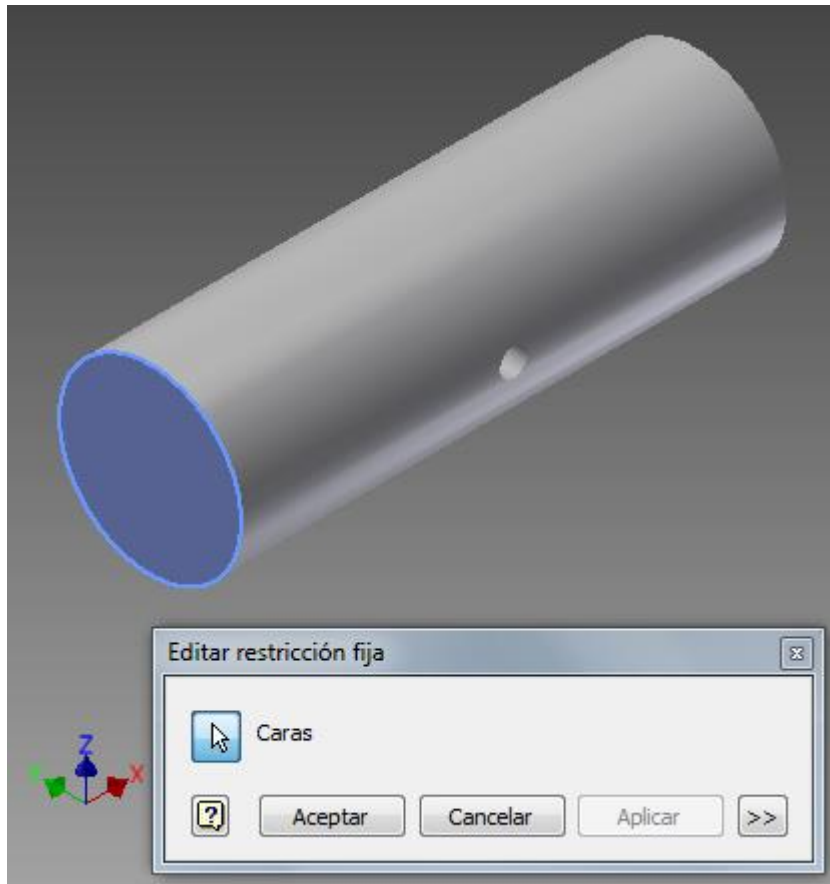


Figura 6.126. Restricción de movimiento en una de las caras.

En la cara opuesta a la cara fija, se establece un momento flector. A la hora de establecer el momento hay que tener en cuenta los ejes, puesto que este momento debe girar alrededor del eje adecuado para que el agujero trabaje a flexión (fig.6.127).

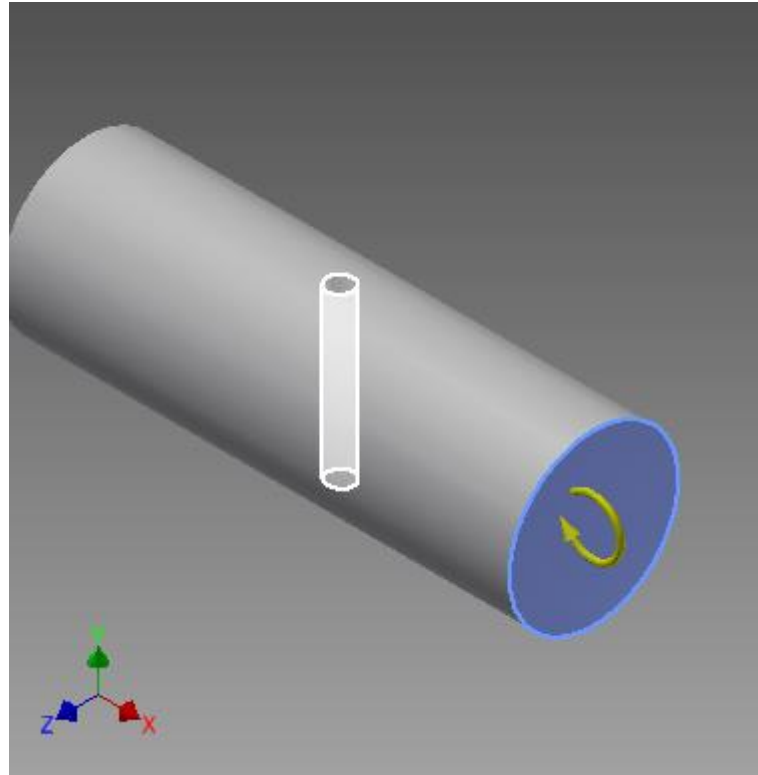


Figura 6.127. Aplicación de un momento flector

Este momento gira, en este caso, alrededor del eje z y tiene un valor $M=50000 \text{ Nmm}$ (fig.6.128).

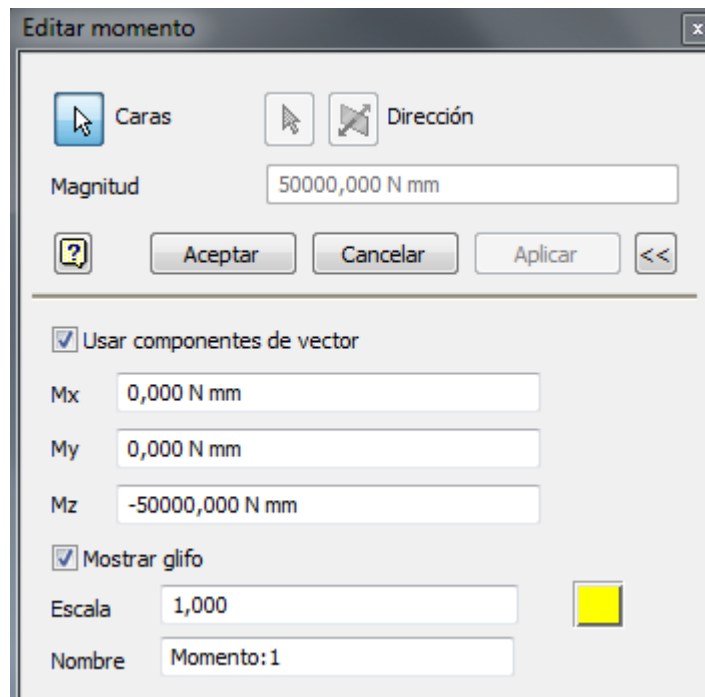


Figura 6.128. Editor de momentos



El cálculo del valor de la tensión nominal depende de d y éste valor es variable, puesto que se ha decidido mantener un valor de $D=30\text{mm}$ constante. Por tanto cada una de las simulaciones tendrá un valor de σ_0 distinto. Estos valores se muestran a continuación, haciendo uso de la eq. 6.14 y sabiendo que $M=50000\text{ Nmm}$.

Para:

➤ $d=0.75\text{mm}$

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} = \frac{50000\text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} - \frac{0.75 \cdot 30^2}{6}\text{ mm}^3} = 19.69 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{19.69\text{ MPa}}$$

➤ $d=1.5\text{ mm}$

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} = \frac{50000\text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} - \frac{1.5 \cdot 30^2}{6}\text{ mm}^3} = 20.612 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{20.612\text{ MPa}}$$

➤ $d=3\text{ mm}$

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} = \frac{50000\text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} - \frac{3 \cdot 30^2}{6}\text{ mm}^3} = 22.719 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{22.719\text{ MPa}}$$

➤ $d=4.5\text{ mm}$

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} = \frac{50000\text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} - \frac{4.5 \cdot 30^2}{6}\text{ mm}^3} = 25.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{25.3\text{ MPa}}$$

➤ $d=6\text{ mm}$

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} = \frac{50000\text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} - \frac{6 \cdot 30^2}{6}\text{ mm}^3} = 28.559 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{28.559\text{ MPa}}$$

➤ $d=7.5\text{ mm}$

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} = \frac{50000\text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} - \frac{7.5 \cdot 30^2}{6}\text{ mm}^3} = 32.771 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{32.771\text{ MPa}}$$



➤ $d = 9 \text{ mm}$

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}} = \frac{50000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} - \frac{9 \cdot 30^2}{6} \text{ mm}^3} = 38.44 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \mathbf{38.44 \text{ MPa}}$$

En cuanto a la generación de la malla, haciendo *click* en *configuración de malla*, las modificaciones de la malla inicial se han definido mediante los siguientes valores:

- Tamaño medio del elemento: 0.05
- Tamaño mínimo del elemento: 0.200
- Factor de modificación: 1.1
- Ángulo máximo de giro: 60 gr

Además de esta configuración inicial de la malla, es preciso hacer un refinamiento de la malla en el agujero transversal con valor de 0.5 mm. Este valor garantiza la uniformidad de las tensiones de Von Mises. Para el caso de un diámetro de $d=0.75\text{mm}$, se ha refinado este agujero con tamaño del elemento de 0.2mm.

La configuración final de la malla queda definida por la figura 6.129.

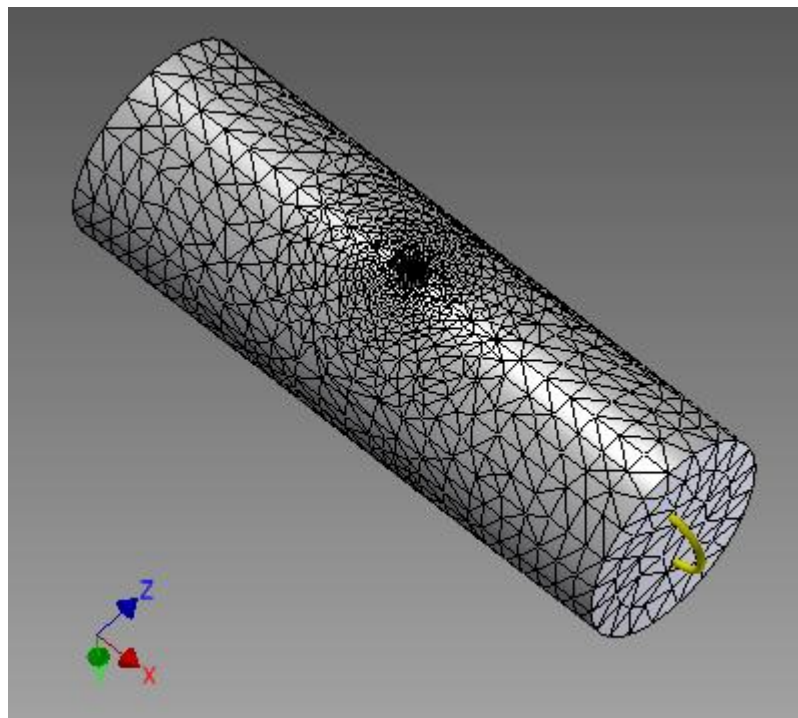


Figura 6.129. Configuración final de malla para una pieza circular con un agujero transversal.

6.8.4.-Simulación

Haciendo simular el programa obtenemos la tensión de Von Mises para cada geometría. Algunas de las gráficas son las mostradas a continuación (fig.6.130 y fig.6.131).

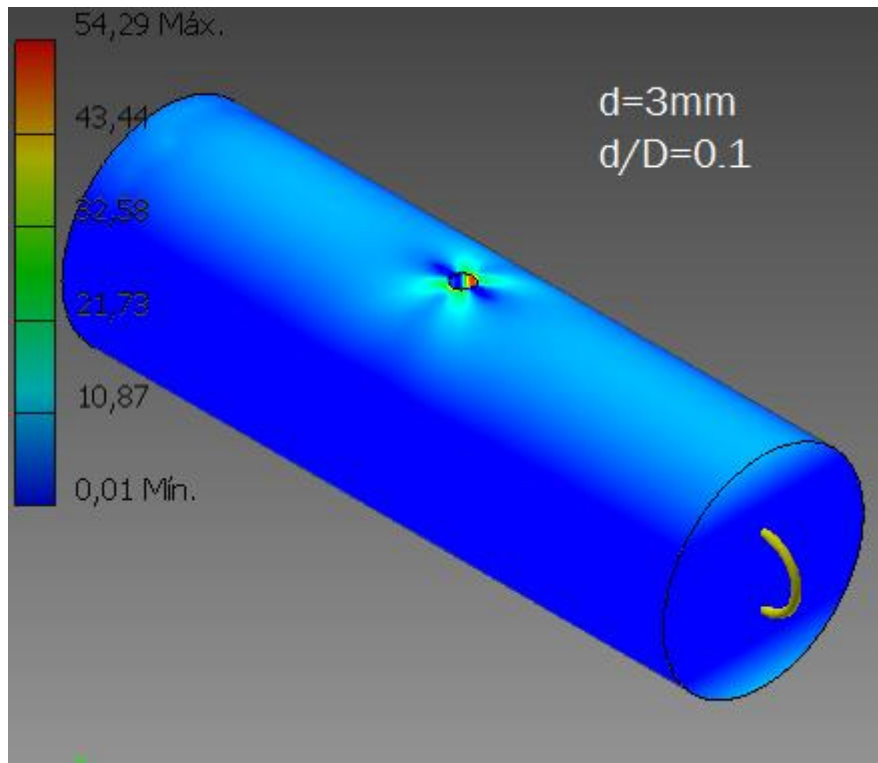


Figura 6.130. Distribución de tensiones para una barra circular con agujero transversal sometida a flexión. Diámetro del agujero $d=3\text{mm}$, relación $d/D=0.1$.

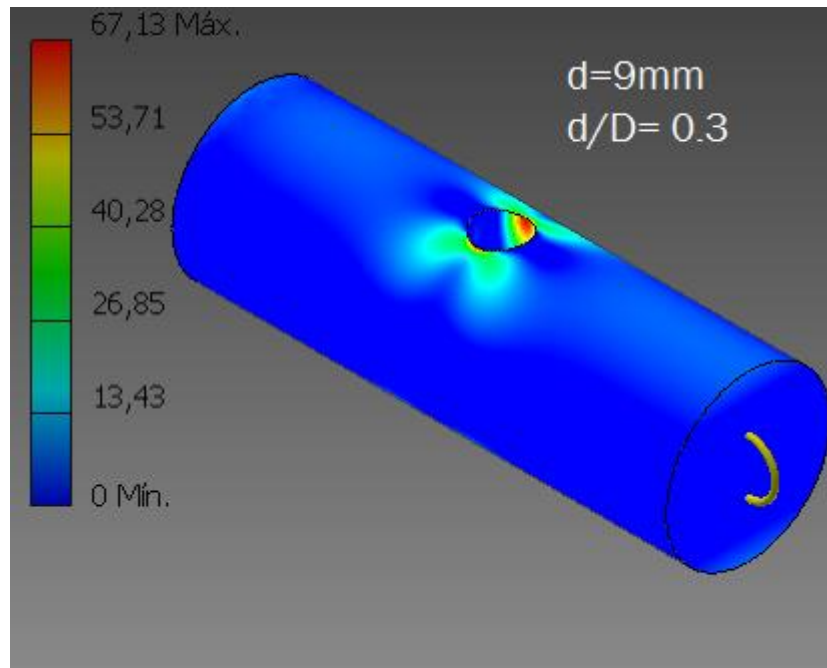


Figura 6.131. Distribución de tensiones para una barra circular con agujero transversal sometida a flexión. Diámetro del agujero $d=9\text{mm}$, relación $d/D=0.3$.

Los resultados son parecidos a los de la barra rectangular con agujero central exceptuando que el máximo se produce en la periferia de la pieza, exactamente en el agujero central. En el caso de la pieza rectangular, el máximo se daba a lo largo de todo el agujero. Si se observa la figura siguiente (fig.6.132), se puede apreciar que este valor es máximo en el punto dicho anteriormente, debido a que el momento depende de la distancia a su centro de revolución, y cuanto mayor sea esta distancia, mayor es el momento.

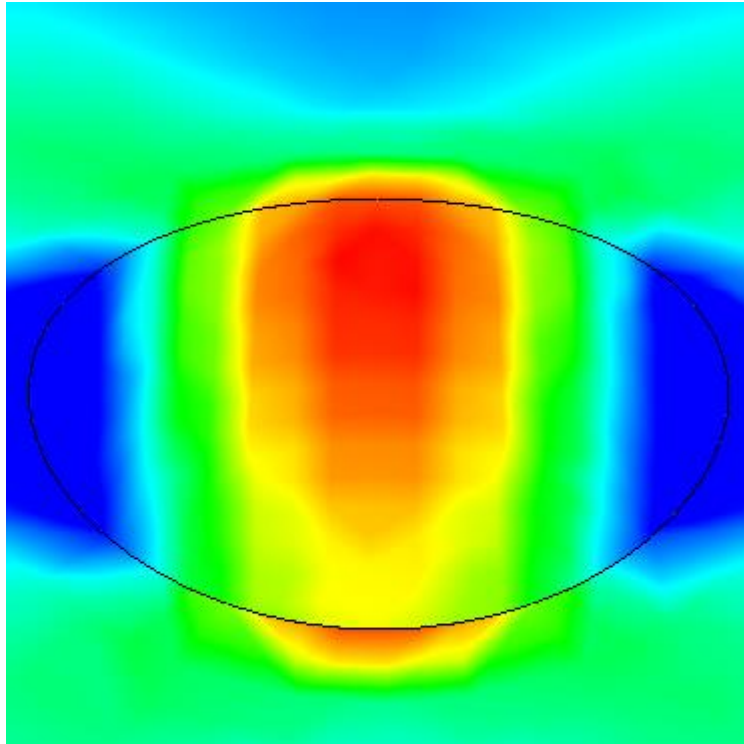


Figura 6.132. Detalle de la distribución de tensiones en un agujero sometido a flexión.

Si se aplica la opción de sombreado de contorno se observa claramente la distribución del momento sobre la pieza (fig.6.133).

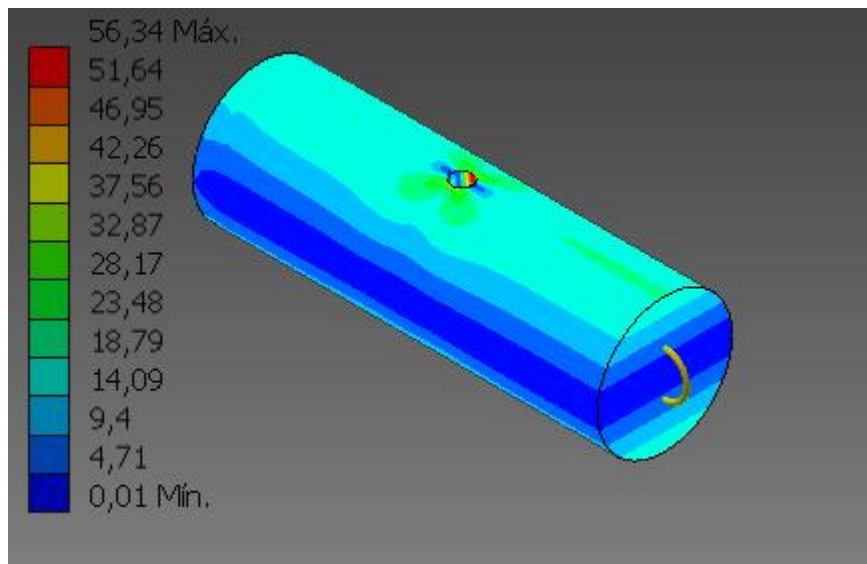


Figura 6.133. Sombreado de contorno para una pieza circular sometida a flexión.

En la cara donde se aplica el momento existe un degradado del momento, el cual varía desde cero (en el centro) hasta un valor aproximadamente de 15 MPa (color azul claro).



6.8.5.-Resultados

Se han realizado 7 simulaciones, con un valor de D constante de 30 mm y un diámetro de agujero variable desde 0.75 mm hasta los 9 mm. Por tanto, las relaciones de d/D varían desde 0.025 hasta 0.3. Los resultados se recogen en la tabla siguiente (tabla 6.28).

D=30mm						
M= 50000 Nmm						
d [mm]	r/d	σ [Mpa]	σ_o [Mpa]	K_t	K_t teórico	error [%]
0.75	0.025	53.76	19.69	2.729	2.68	1.831
1.5	0.05	54.15	20.612	2.627	2.47	6.358
3	0.1	54.29	22.719	2.389	2.27	5.266
4.5	0.15	56.34	25.3	2.226	2.12	5.011
6	0.2	58.32	28.559	2.042	2.02	1.090
7.5	0.25	62.11	32.771	1.895	1.97	3.794
9	0.3	67.13	38.44	1.746	1.9	8.087

Tabla 6.28. Resultados obtenidos de K_t para una barra circular con agujero sometida a flexión.

Como resultado final se ofrece la fig.6.134 la cual muestra los valores de K_t para distintas relaciones de D , d y r . En color azul se muestra la curva experimental y en rojo, la proporcionada por Shigley.

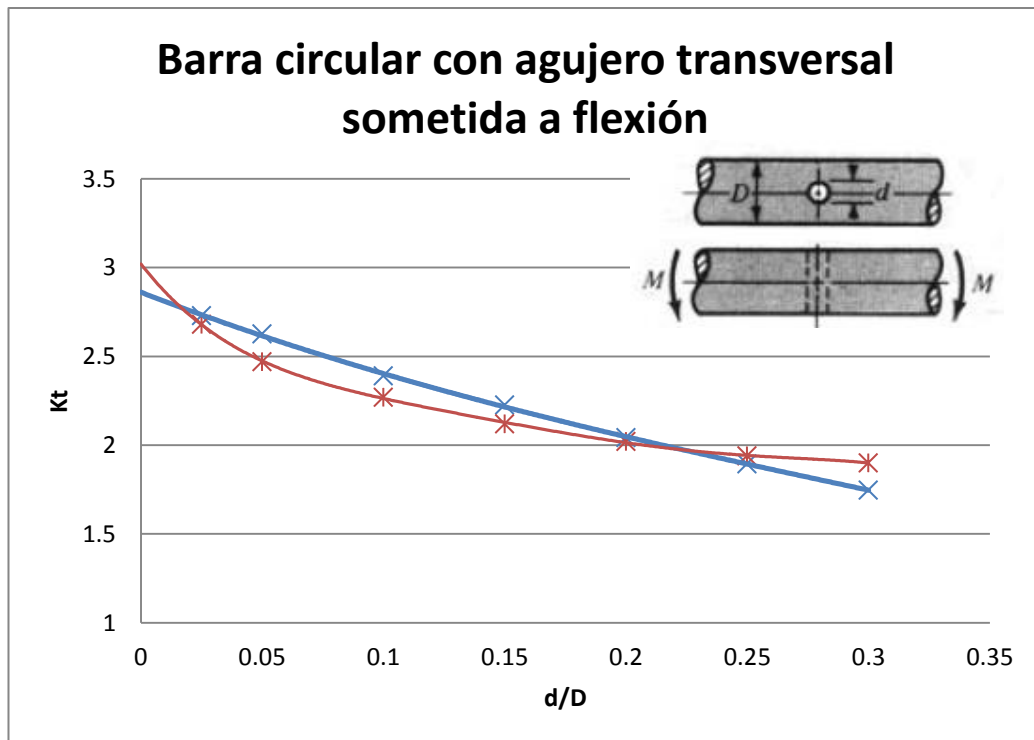


Figura 6.134. Barra circular con agujero transversal sometida a flexión.

6.8.6.-Conclusiones

La inclusión de un agujero en la pieza tiene sus consecuencias en la concentración de tensiones. Cuanto menor diámetro tenga este agujero, mayor es el factor teórico K_t . Un diámetro muy pequeño de agujero puede equivaler a que existe un grieta en la pieza, y el valor máximo de K_t es de 3.

Si se observa la gráfica con los resultados (fig.6.134), se puede ver que la curva experimental (color azul) tiende a ser una recta, aumentando el valor de K_t linealmente. Pero la realidad es otra, puesto que la curva real (color rojo) tiende a ser una curva polinómica.

El error máximo que comente Autodesk Inventor es de aproximadamente un 8%. Este valor no es excesivo sabiendo que la tensión nominal es aproximada y no exacta como ocurría en otros ejemplos. Es por esta razón por la cual los datos difieren un poco de la tabla de Shigley.

Al no poder obtener en Autodesk inventor la tensión nominal, se puede calcular la tensión en un punto de la pieza donde se sepa el valor de la tensión de Von Mises. Se escoge entonces un punto donde el momento sea máximo y no esté perturbado por la concentración de tensiones (fig.6.135).

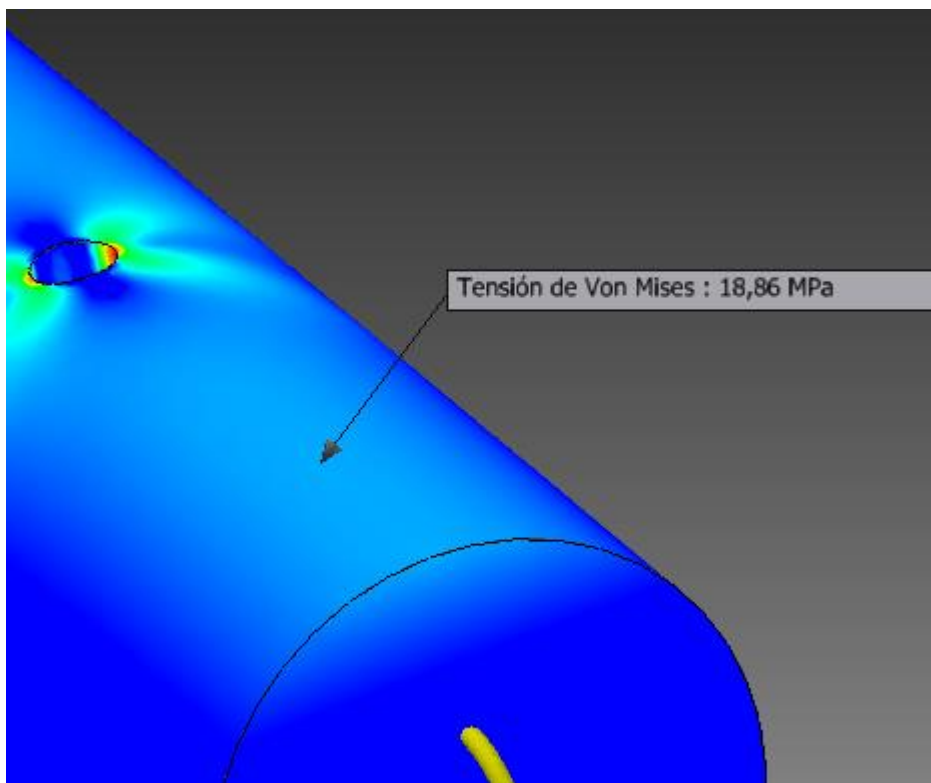


Figura 6.135. Tensión de Von Mises en un punto de momento máximo no perturbado por la concentración de tensiones.



La tensión en ese punto es:

$$\sigma = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32}} = \frac{50000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi \cdot 30^3}{32} \text{ mm}^3} = 18.86 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 18.86 \text{ MPa}$$

Ambos valores coinciden, por lo que se supone que la tensión nominal es parecida, pero no igual al ser ésta un valor aproximado.

En cuanto a la deformación del agujero central, la parte superior e inferior no lo hacen de igual forma. La parte del agujero traccionada formará una elipse cuyo eje mayor tendrá la dirección de la fuerza de tracción, mientras que la parte comprimida, el eje mayor será perpendicular a dicho esfuerzo de compresión.

Este fenómeno se puede observar en las dos figuras siguientes. (fig.6.136 y fig.6.137)

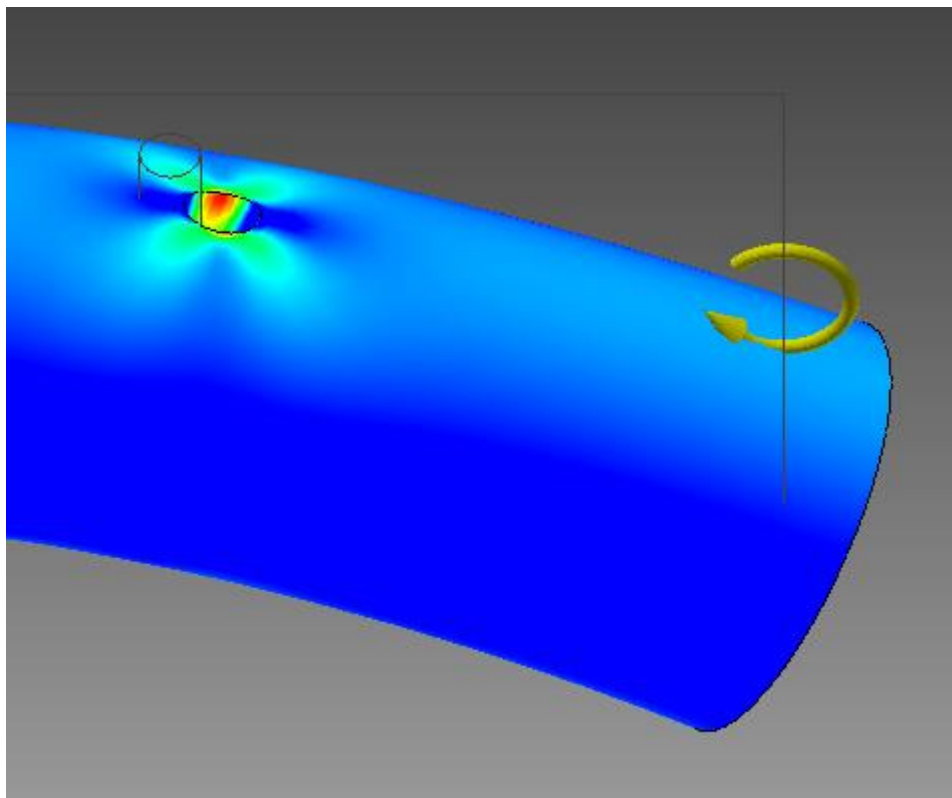


Figura 6.136. Agujero coincidente con la parte de tracción.

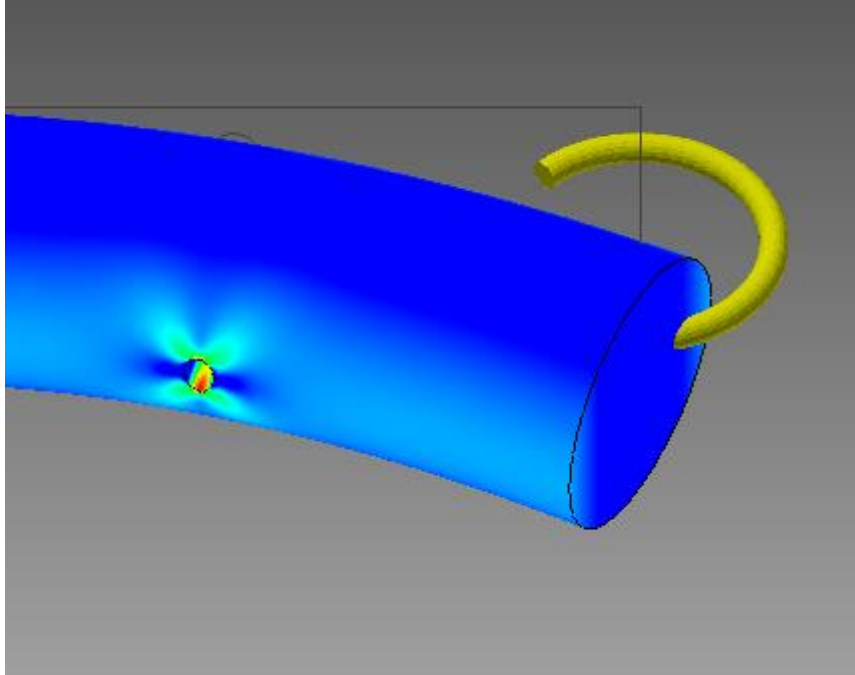


Figura 6.137. Agujero coincidente con la parte de compresión.



Capítulo 7: Conclusión





La determinación del factor teórico de concentración de tensiones es muy importante puesto que este valor nos da un indicio de cómo va a comportarse el elemento al ser sometido a un esfuerzo.

Un mal diseño de un elemento puede aumentar exponencialmente los esfuerzos en zonas críticas lo que puede provocar el fallo prematuro de la pieza. Los resultados obtenidos en este proyecto mediante elementos finitos pueden ayudar a disminuir esta concentración de tensiones.

En los primeros capítulos se ha logrado **introducir** al lector el método utilizado para la resolución del problema. El método de elementos finitos no es sencillo y requiere de un hardware y un software suficientemente potente como para poder obtener las tensiones y deformaciones que se generan en una pieza al someterla a una carga.

Mediante el programa Autodesk Inventor se han **simulado** 8 ejemplos de concentración de tensiones mediante la aplicación de distintas cargas (fuerzas, momentos flectores y momentos torsores). El uso de este programa es sencillo e interactivo, facilitando el dibujo de la pieza e inicio del análisis de tensión. La modelización de las piezas usadas, tan solo ha requerido un boceto o dos, y modificando la configuración de malla inicial (fig.6.10) es posible obtener un mallado preciso en un tiempo reducido.

Cada uno de los ejemplos se ha **estudiado** por separado. En muchos de los casos la configuración de malla inicial no ha sido lo suficientemente buena y se ha tenido que refinar localmente para que el contorno de las tensiones de Von Mises fuera continuo.

El error obtenido por Autodesk Inventor con respecto a las gráficas de la bibliografía específica de Shigley es escaso, con valores medios inferiores al 4%. En todas las gráficas halladas, el valor de K_t es pequeño cuando el radio de la entalla o ranura es grande. Este factor se debe a que a radios altos, la concentración de los esfuerzos se reparte en una zona con una superficie mayor, y por tanto la $\sigma_{MÁX}$ es más pequeña.

Cuando la pieza contiene un agujero, el factor teórico K_t es menor cuanto mayor sea ese agujero, pero la tensión máxima es muy elevada. Este fenómeno ocurre debido a que al aumentar el tamaño del agujero, la sección nominal disminuye y por tanto la σ_0 aumenta.

El origen de las tablas obtenidas mediante bibliografías específicas, es experimental, mientras que las obtenidas en los apartados anteriores se han desarrollado por cálculo numérico. De una forma rápida y precisa se han



logrado simular análisis de tensiones. Mediante este programa se pueden cosechar nuevos ejemplos con piezas distintas tan solo sabiendo manejar a un nivel medio el programa usado.

En este proyecto solo se ha manejado una pequeña parte de la gran capacidad que tiene Autodesk Inventor. Para desarrollos futuros se podrán analizar piezas más complejas teniendo en cuenta todo aquí lo mostrado, pudiendo usar módulos más específicos de elementos finitos como es el *Autodesk Simulation Mechanical*.

Por último, decir que Autodesk Inventor tiene una licencia de uso gratuita para fines universitarios. Los resultados obtenidos son fiables y fieles a la realidad. Por tanto, y a la vista de todo lo expuesto, se **valida** el uso de Autodesk Inventor como programa de cálculo mecánico, frente a otros programas cuya licencia no es gratuita.



Capítulo 8: Bibliografía





- AUTODESK INVENTOR 2014. Ayuda.
- DR.CLAVO NOVO SOTO. Métodos experimentales para la determinación de tensiones mecánicas. Instituto superior politécnico José A. Echeverría.
- JUAN TOMÁS CELIGÜETA LIZARZA. Método de los Elementos finitos para Análisis estructural. TECnun.2008.
- JOSÉ LUIS ARANA. JAVIER JESÚS GONZÁLEZ. Mecánica de la fractura. Servicio Editorial de la universidad del País Vasco.2002.
- NX NASTRAN. Ayuda.
- O.C. ZIENKIEWICZ. The Finite Element Method. Ed:McGraw Hil. Third edition. 1982.
- RICHARD G. BUDYNAS Y J.KEITH NISBETT. Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley. Octava edición. Ed: McGrawHill.2010.
- ROBERT L. MOTT, P.E. UNIVERSITY OF DAYTON. Diseño de elementos de máquinas. Cuarta edición. 2006.
- R.W. DITCHBURN. Light, Third Edition. Academic Press, London.1976.
- VIRGIL MORING FAIRES. Diseño de elementos de máquinas.1998.
- W.D. PILKEY. Finite Elements In Analysis And Design: The international journal of applied finite elements and computer aided engineering. Ed:North-Holland. 1985.
- WALKER D. PILKEY, DEBORAH F. PILKEY. Stress concentration factors. Third edition. 2008.