



---

**Universidad de Valladolid**

**Facultad de Ciencias**

# **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas.

**Cuadratura de Clenshaw-Curtis. Aplicaciones  
en Finanzas.**

**Autor: Eva María Barazón Peña**

**Tutor: Javier de Frutos Baraja**



# Índice

<b>1. Introducción.</b>	<b>5</b>
<b>2. Cuadratura de Gauss.</b>	<b>6</b>
2.1. Cuadratura Interpolatoria. . . . .	6
2.2. Polinomios de Legendre. . . . .	8
2.3. Polinomios de Chebyshev. Propiedades. . . . .	11
2.4. Cuadratura de Gauss-Legendre. . . . .	17
2.5. Fórmula de Cuadratura Gaussiana con Peso. . . . .	21
2.5.1. Cuadratura de Gauss-Chebyshev. . . . .	25
2.5.2. Cuadratura de Gauss-Lobatto. . . . .	26
<b>3. Cuadratura de Clenshaw-Curtis.</b>	<b>28</b>
3.1. Cálculo del polinomio interpolador de Chebyshev. . . . .	28
3.2. Cuadratura de Clenshaw-Curtis. Construcción. . . . .	32
3.3. Convergencia de las Cuadraturas de Gauss y C-C. . . . .	33
<b>4. Experimentos Numéricos.</b>	<b>51</b>
4.1. Primeros Ejemplos. . . . .	51
4.2. Aplicaciones de la Cuadratura de Clenshaw-Curtis en Finanzas. . . . .	54
4.2.1. Ecuación de Black-Scholes. . . . .	55
4.2.2. Opción bermúdea. . . . .	59
4.2.3. Ejemplos e Implementación. . . . .	59
<b>A. Programación en Matlab.</b>	<b>64</b>
A.1. fcost, ClenCurt y Convergencia. . . . .	64
A.2. integrando_bs y BlackScholes. . . . .	66
A.3. integrandopoff y bermúdea. . . . .	67



# 1. Introducción.

El objetivo de este trabajo es describir algunos procedimientos numéricos para la aproximación de integrales definidas de funciones para las que no es posible encontrar fórmulas explícitas. Algunos de los procedimientos más utilizados son las fórmulas de Newton-Côtes, las fórmulas compuestas o las fórmulas de Gauss. Otro procedimiento es la cuadratura de Clenshaw-Curtis.

La cuadratura de Clenshaw-Curtis [5], [10] es menos utilizada que la cuadratura de Gauss debido a que tiene menos precisión. Sin embargo, en este trabajo veremos que ambas cuadraturas tienen propiedades de convergencia muy similares para funciones suficientemente regulares. Además, una de las principales ventajas de la cuadratura de Clenshaw-Curtis es que, usando la transformada rápida de Fourier, la cuadratura de Clenshaw-Curtis puede ser implementada en  $\mathcal{O}(n \log n)$  operaciones frente a que en la cuadratura de Gauss los nodos y los pesos pueden ser evaluados en  $\mathcal{O}(n^2)$  operaciones. La mayoría de los resultados asociados a esta cuadratura han sido obtenidos de [6].

En muchas aplicaciones es necesario calcular las fórmulas de cuadratura con un número elevado de nodos lo que hace que las fórmulas de Gauss sean poco prácticas. Una de las aplicaciones en las que se ha utilizado necesariamente la cuadratura de Clenshaw-Curtis es el campo de las finanzas matemáticas.

El problema de encontrar el valor de un contrato derivado puede ser resuelto mediante el cálculo de la esperanza matemática (respecto de una probabilidad que depende del modelo) del precio futuro del activo subyacente. Es decir, el cálculo efectivo requiere la evaluación de una integral que pocas veces puede resolverse exactamente. El uso de fórmulas de cuadratura eficientes es importante ya que la evaluación debe hacerse muchas veces y muy rápidamente. En este trabajo, la cuadratura de Clenshaw-Curtis es utilizada para implementar un algoritmo numérico para la valoración de opciones de tipo bermúdeas (para las que no existen fórmulas explícitas).

En la primera sección se van a introducir algunas nociones básicas sobre la cuadratura interpolatoria y, en particular, sobre la cuadratura Gaussiana. Posteriormente, se construirá la cuadratura de Clenshaw-Curtis y se observará que las tasas de convergencia son semejantes a las de la cuadratura de Gauss. Más precisamente, se analizarán los casos en los que la función a integrar tiene un número finito de derivadas y el caso en el que dicha función es analítica. En la tercera sección se realizarán experimentos numéricos en los que se observarán los resultados teóricos y se diseñarán algoritmos para aproximar la valoración tanto de opciones europeas como de opciones bermúdeas.

## 2. Cuadratura de Gauss.

El objetivo de esta sección es estudiar algunos procedimientos numéricos eficientes para aproximar el valor de la integral definida:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad (1)$$

donde  $f$  es una función real, de variable real, que supondremos continua en  $[a, b]$ . Los tipos de aproximación que vamos a considerar son de la forma:

$$I(f) \approx \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j). \quad (2)$$

Este problema recibe el nombre genérico de cuadratura numérica. Los  $n+1$  puntos  $x_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , se denominan nodos de cuadratura y los  $\alpha_j$  coeficientes de cuadratura. Lo que nos interesa buscar es una fórmula de cuadratura tal que el error

$$E_{n+1}(f) = I(f) - \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j)$$

(llamado error de cuadratura) sea lo más pequeño posible en valor absoluto. Mediremos este error dependiendo del tipo de cuadratura utilizada.

**Definición 2.1.** Se denomina grado de precisión de una fórmula de cuadratura al mayor entero  $m$  tal que  $E_{n+1}(x^k) = 0$  para  $k = 0, \dots, m$ , pero  $E_{n+1}(x^{m+1}) \neq 0$ .

Una consecuencia directa de esta definición es que si una fórmula tiene grado de precisión  $m$  todo polinomio de grado menor o igual que  $m$  es integrado exactamente por esta fórmula de cuadratura (es decir, el error de cuadratura es 0).

### 2.1. Cuadratura Interpolatoria.

Sean  $n + 1$  nodos distintos ordenados,  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , en el intervalo  $[a, b]$ . Definimos  $P_n(f)(x)$  como el polinomio de grado menor o igual que  $n$  tal que

$$P_n(f)(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

La integral

$$\int_a^b P_n(f)dx,$$

se puede calcular fácilmente usando la forma de Lagrange para el polinomio interpolador (se puede ver en [7]):

$$P_n(f) = \sum_{j=0}^n w_{n+1,j} f(x_j),$$

donde

$$w_{n+1,j}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}.$$

Integrando tenemos que:

$$\int_a^b P_n(f) dx = \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_a^b w_{n+1,j}(x) dx,$$

con lo que definiendo

$$\alpha_j = \int_a^b w_{n+1,j}(x) dx,$$

obtenemos la denominada fórmula de cuadratura interpolatoria basada en los nodos  $x_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j). \quad (3)$$

**Teorema 2.2.** *Si  $f$  es una función continua, el error de la cuadratura interpolatoria es:*

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x_0, \dots, x_n, x] dx,$$

donde  $f[x_0, \dots, x_n, x]$  es la diferencia dividida de  $f$  en los  $n+2$  nodos  $x_0, \dots, x_n, x$ . Además, si suponemos que  $f^{n+1}(x)$  existe y es continua en  $[a, b]$ , entonces

$$E_{n+1}(f) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_n) dx, \quad \xi \in [a, b].$$

*Demostración.* Ver libro [7]. □

**Teorema 2.3.** *Una fórmula de cuadratura con  $n + 1$  nodos distintos es una fórmula interpolatoria si y sólo si tiene grado de precisión mayor o igual que  $n$ .*

*Demostración.* Por una parte, si la fórmula de cuadratura con  $n + 1$  nodos distintos es una fórmula interpolatoria, el error de dicha fórmula es (teorema 2.2):

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x, x_0, \dots, x_n] dx.$$

Si  $f$  es un polinomio de grado menor o igual  $n$  entonces  $f[x, x_0, \dots, x_n] = 0$ , luego  $E_{n+1}(f) = 0$ . Por tanto, la fórmula tiene grado de precisión mayor o igual que  $n$ .

Recíprocamente, supongamos que la fórmula de cuadratura tiene grado de precisión mayor o igual que  $n$ . Sean  $x_j, j = 0, \dots, n$ , los  $n + 1$  nodos de cuadratura distintos. En particular, para las funciones  $x^k, k = 0, \dots, n$ , tenemos:

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j x_j^k = \int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}), \quad k = 0, \dots, n. \quad (4)$$

Por tanto, dados los nodos de cuadratura  $x_0, \dots, x_n$ , los pesos son la solución de un sistema de  $n + 1$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas ( $\alpha_j, j = 0, \dots, n$ ) con matriz de coeficientes:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Como los  $x_j$  son distintos y  $V$  es de la forma de Vandermonde existe una única solución del sistema (4). Por otra parte, la fórmula interpolatoria con los mismo nodos  $x_j$  es exacta cuando la aplicamos a los polinomios  $1, x, \dots, x^n$ . Por tanto, si sustituimos en el sistema  $\alpha_j = \int_a^b w_{n+1,j}(x) dx$  (coeficientes de la fórmula de cuadratura interpolatoria) obtenemos una solución; y como ésta es única tenemos que:

$$\alpha_j = \int_a^b w_{n+1,j}(x) dx.$$

Luego la fórmula de cuadratura es una fórmula interpolatoria.

□

## 2.2. Polinomios de Legendre.

**Definición 2.4.** Los polinomios de Legendre vienen dados por la relación de recurrencia:

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x).$$

Algunas propiedades de interés de los polinomios de Legendre son (véase en [4]):

1. Los polinomios de Legendre son autofunciones del problema de Sturm-Liouville singular:

$$[(1-x^2)L'_n(x)]' + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

2.  $(1-x^2)L'_n(x) = nL_{n-1}(x) - nxL_n(x)$ .
3.  $|L_n(x)| \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .
4.  $L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ .
5.  $|L'_n(x)| \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .
6.  $L'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} \frac{1}{2}n(n+1)$ .

**Proposición 2.5.** El conjunto de polinomios de Legendre  $\{L_n(x) : n = 0, 1, \dots\}$  es ortogonal en  $L^2(-1, 1)$ .

*Demostración.* Sean  $n$  y  $m$  enteros positivos con  $n \neq m$ . Se satisface,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_n(x)] + n(n+1)L_n(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_m(x)] + m(m+1)L_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $L_m(x)$ , la segunda por  $L_n(x)$  y restando,

$$\begin{aligned} L_m(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_n(x)] - L_n(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_m(x)] \\ + (n-m)(n+m+1)L_m(x)L_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Integrando en  $[-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_m(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_n(x)] dx - \int_{-1}^1 L_n(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_m(x)] dx \\ + \int_{-1}^1 (n-m)(n+m+1)L_m(x)L_n(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Integrando los dos primeros términos por partes se prueba que

$$\int_{-1}^1 L_m(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_n(x)] dx = \int_{-1}^1 L_n(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)L'_m(x)] dx,$$

luego,

$$(n-m)(n+m+1) \int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x) dx = 0,$$

y como  $n \neq m$ , resulta que

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx = 0.$$

□

Vamos a calcular ahora  $\int_{-1}^1 L_n^2(x)dx$  : Reemplazamos en la primera de las fórmulas de recurrencia  $n$  por  $n - 1$ ,

$$L_n(x) = \frac{2n-1}{n}xL_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}L_{n-2}(x).$$

Multiplicando a esta fórmula por  $(2n+1)L_n(x)$  y restándola la fórmula de recurrencia multiplicada por  $(2n-1)L_{n-1}(x)$ ,

$$\begin{aligned} n(2n+1)L_n^2(x) + (n-1)(2n+1)L_{n-2}(x)L_n(x) \\ - (n+1)(2n-1)L_{n-1}(x)L_{n+1}(x) - n(2n-1)L_{n-1}^2(x) = 0 \end{aligned}$$

con  $n = 2, 3, \dots$ . Integrando en  $(-1, 1)$  y aplicando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre,

$$n(2n+1) \int_{-1}^1 L_n^2(x)dx = n(2n-1) \int_{-1}^1 L_{n-1}^2(x)dx.$$

Aplicando reiteradamente esta última fórmula tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_n^2(x)dx &= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} \int_{-1}^1 L_{n-2}^2(x)dx \\ &= \frac{2n-3}{2n+1} \frac{2n-5}{2n-3} \int_{-1}^1 L_{n-3}^2(x)dx = \dots \\ &= \frac{3}{2n+1} \int_{-1}^1 L_1^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}, \end{aligned}$$

para  $n = 2, 3, \dots$ . Como  $L_0(x) = 1$  y  $L_1(x) = x$  esta expresión también es cierta para  $n = 0$  y  $n = 1$ , luego,

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Es conocido que los polinomios de Legendre forman un sistema completo en  $L^2[-1, 1]$  (véase en [3]). Por tanto, si  $f \in L^2[-1, 1]$  podemos escribir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x).$$

Vamos a calcular cuánto valen los  $c_n$ . Multiplicando por  $L_m(x)$  con  $m$  fijo e integrando entre  $-1$  y  $1$ , se tiene que

$$\int_{-1}^1 f(x)L_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx.$$

Por la ortogonalidad de los polinomios de Legendre,

$$\int_{-1}^1 f(x)L_n(x)dx = c_n \int_{-1}^1 L_n^2(x)dx.$$

Por tanto,

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)L_n(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Hemos visto la ortogonalidad de los polinomios de Legendre en el intervalo  $[-1, 1]$ . Sea  $y \in [a, b]$ , haciendo el cambio de variable:

$$x = -1 \frac{b-y}{b-a} + \frac{y-a}{b-a}$$

tenemos que  $L_n(x) = \hat{L}_n(y)$  donde  $\hat{L}_n$  se define como el  $n$ -ésimo polinomio de Legendre en el intervalo  $[a, b]$ .

### 2.3. Polinomios de Chebyshev. Propiedades.

Una de las referencias usadas, entre otras, para algunas de las propiedades de esta sección ha sido [2].

**Definición 2.6.** El  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev,  $T_n$ , viene dado por

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Veamos en los siguientes resultados algunas propiedades importantes de los polinomios de Chebyshev.

**Teorema 2.7.** *El  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev,  $T_n$ , es un polinomio de grado exactamente  $n$  con coeficiente director  $2^{n-1}$ . Además,*

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi].$$

*Demostración.* La prueba es por inducción. Para  $m = 0$  y  $m = 1$  el resultado es cierto. Supongamos que es cierto para  $m \leq n - 1$ . Es claro que  $T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2}$  tiene grado  $n$  (una unidad más que  $T_{n-1}$ ) y su coeficiente director es dos veces el coeficiente director de  $T_{n-1}$  que por hipótesis de inducción es

$2^{n-2}$ . Por tanto, el coeficiente director de  $T_n$  es  $2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$ . Veamos que  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ . Por hipótesis de inducción, para  $m \leq n-1$

$$T_m(\cos \theta) = \cos(m\theta).$$

Utilizamos la fórmula trigonométrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

o, escrita de otra forma

$$\cos(A+B) = 2 \cos A \cos B - \cos(A-B)$$

y substituiremos  $A = (m-1)\theta$  y  $B = \theta$ . Si  $x = \cos \theta$  con  $\theta \in [0, \pi]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \\ &= 2 \cos \theta T_{n-1}(\cos \theta) - T_{n-2}(\cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \cos((n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta) \\ &= \cos(n\theta). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.8.** *Los polinomios de Chebyshev verifican la ecuación diferencial*

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0. \quad (5)$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $T_n(x) = \cos(n\theta)$  se tiene que

$$T_n'(x) = \frac{d \cos(n\theta)}{d\theta} \frac{1}{\frac{d \cos \theta}{d\theta}} = n \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen } \theta}.$$

y que

$$\begin{aligned} T_n''(x) &= \frac{dT_n'(x)}{d\theta} \frac{1}{\frac{d \cos \theta}{d\theta}} = \left( n^2 \frac{\cos(n\theta)}{\text{sen}(n\theta)} + n \frac{\sin(n\theta) \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \right) \frac{1}{-\text{sen } \theta} \\ &= -n^2 \frac{\cos(n\theta)}{\text{sen}^2 \theta} + n \frac{\text{sen}(n\theta) \cos \theta}{\text{sen}^3 \theta}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (5) y recordando que  $x = \cos \theta$ :

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \theta \left( -n^2 \frac{\cos(n\theta)}{\text{sen}^2 \theta} + n \frac{\text{sen}(n\theta) \cos \theta}{\text{sen}^3 \theta} \right) - \cos \theta \left( n \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen } \theta} \right) + n^2 \cos(n\theta) &= \\ = -n^2 \cos(n\theta) + n \frac{\text{sen}(n\theta) \cos \theta}{\text{sen } \theta} - n \cos \theta \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen } \theta} + n^2 \cos(n\theta) &= 0. \end{aligned}$$

□

A partir de (5) se puede escribir

$$(1-x^2)^{1/2}y'' - \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}y' + \lambda \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}y = 0$$

donde  $\lambda = n^2$ . Ésto nos lleva al problema de Sturm-Lioville

$$[(1-x^2)^{1/2}y']' + \lambda \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}y = 0, \quad x \in [-1, 1],$$

del que son autofunciones los polinomios de Chebyshev.

**Proposición 2.9.** Para cualquier  $n \geq 0$  se cumple:

1.  $|T_n(x)| \leq 1$ , para todo  $x \in [-1, 1]$ .
2.  $T_n$  posee exactamente  $n$  ceros en el intervalo  $[-1, 1]$  que son

$$y_{n,k} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

3.  $T_n$  posee exactamente  $n+1$  extremos (máximos o mínimos) en el intervalo  $[-1, 1]$  que son

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n.$$

*Demostración.* La primera propiedad es consecuencia de que  $T_n(x) = \cos(n\theta)$  con  $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$ . Por esta misma razón los ceros de  $T_n$  serán  $x_{n,k} = \cos(\theta_{n,k})$  donde  $\cos(n\theta_{n,k}) = 0$ . Es decir,

$$\theta_{n,k} = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Para la tercera propiedad, los máximos y mínimos de  $T_n$  son los puntos donde  $T_n(x) = \pm 1$  debido a la primera propiedad. Es decir, los puntos de la forma  $\cos(\xi_{n,k})$  con  $\cos(n\xi_{n,k}) = \pm 1$  y  $\xi_{n,k} \in [0, \pi]$ . En definitiva,

$$\xi_{n,k} = \frac{k}{n}\pi, \quad k = 0, \dots, n.$$

□

**Observación 2.10.** Los ceros de  $T_n$  son todos interiores a  $(-1,1)$  (están contenidos en el intervalo abierto). Los extremos de  $T_n$  son  $-1,1$  y los  $n-1$  extremos interiores  $y_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Además,

$$T_n(y_{n,k}) = (-1)^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

**Proposición 2.11.** Si  $T_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , es la sucesión de polinomios de Chebyshev, se verifica que:

1.  $2T_n = \frac{1}{n+1}T'_{n+1} - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}$ .
2.  $|T'_n(x)| \leq n^2$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ .
3. *Ortogonalidad de los polinomio de Chebyshev.*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \quad (6)$$

*Demostración.* Observemos en primer lugar que para  $m \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dT_m}{dx} \Big|_{x=\cos\theta} &= \frac{d}{d\theta} T_m(\cos\theta) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=\cos\theta} = \\ &= \frac{d}{d\theta} \cos(n\theta) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=\cos\theta} = \\ &= m \frac{\text{sen}(m\theta)}{\text{sen}\theta}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}T'_{n+1} - \frac{1}{n-1}T'_{n-1} &= \frac{1}{\text{sen}\theta} (\text{sen}((n+1)\theta) - \text{sen}((n-1)\theta)) = \\ &= \frac{1}{\text{sen}\theta} (2 \text{sen}\theta \cos(n\theta)) = \\ &= 2 \cos(n\theta) = 2T_n. \end{aligned}$$

La segunda propiedad es inmediata para  $n = 1$  ( $T_1(x) = x$ ) y también para  $n = 2$  ( $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ). Supongamos entonces que  $|T'_m(x)| \leq m^2$  para  $m \leq n-1$ . Se tiene, usando la recurrencia para las derivadas y que  $|T_n(x)| \leq 1$  si  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} |T'_n(x)| &= |2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2}T'_{n-2}(x)| \\ &\leq 2n|T_{n-1}(x)| + \frac{n}{n-2}|T'_{n-2}(x)| \\ &\leq 2n + \frac{n}{n-2}(n-2)^2 = n^2. \end{aligned}$$

La tercera propiedad se demuestra de forma completamente análoga a la proposición 2.5, teniendo en cuenta que si  $n > 0$

$$\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{\pi}{2},$$

y si  $n = 0$

$$\int_0^\pi 1d\theta = \pi.$$

□

**Observación 2.12.** Los polinomios de Chebyshev forman un sistema completo en  $L_w^2(-1, 1)$ .

**Teorema 2.13.** Si  $P$  es un polinomio de grado  $n$  con coeficiente director  $2^{n-1}$ , entonces

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1,$$

donde  $T_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev.

*Demostración.* La prueba es por reducción al absurdo. Supongamos que existe un polinomio  $P$  de grado  $n$  y coeficiente director  $2^{n-1}$  con

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| < \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1.$$

Consideremos el polinomio  $Q = T_n - P$  y observemos, en primer lugar, que el grado de  $Q$  debe ser  $n - 1$  ya que  $P$  y  $T_n$  son del mismo grado y tienen el mismo coeficiente director. Como  $T_n(y_{n,0}) = T_n(1) = 1$ ,  $Q(1) > 0$  ya que necesariamente  $P(1) < 1$  por hipótesis. De la misma forma  $T_n(y_{n,1}) = -1$  y, como  $P(y_{n,1}) > -1$ ,  $Q(y_{n,1}) < 0$ . El mismo razonamiento prueba que  $Q(y_{n,k})$  tiene el signo de  $(-1)^k$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Pero entonces  $Q$  tiene  $n + 1$  cambios de signo en  $[-1, 1]$  y por tanto debe tener  $n$  ceros en  $(-1, 1)$ . Como es un polinomio de grado  $n - 1$ , necesariamente  $Q$  es idénticamente nulo, y  $P(x) = T_n(x)$  para todo  $x \in [-1, 1]$ , en contra de que  $\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| < \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)|$ . □

**Corolario 2.14.** Si  $P$  es un polinomio de grado  $n$  con coeficiente director unidad, entonces

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right|,$$

donde  $T_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev.

*Demostración.* Es inmediata a partir del teorema 2.13. □

**Proposición 2.15.** Consideremos  $n + 1$  puntos cualesquiera  $-1 \leq \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_n \leq 1$ , y el polinomio de grado  $n + 1$

$$\Pi_{n+1}(x, \eta_0, \dots, \eta_n) = (x - \eta_0) \dots (x - \eta_n).$$

Se verifica que:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\Pi_{n+1}(x, \eta_0, \dots, \eta_n)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |\Pi_{n+1}(x, x_{n+1,0}, \dots, x_{n+1,n})|,$$

donde  $x_{n+1,k}$ ,  $k = 0, \dots, n$ , son los  $n + 1$  ceros del polinomio  $T_{n+1}$  en  $[-1, 1]$ .

*Demostración.* El polinomio  $\Pi_{n+1}(x, \eta_0, \dots, \eta_n)$  es un polinomio de grado  $n + 1$  con coeficiente director la unidad. Por el corolario 2.14

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\Pi_{n+1}(x, \eta_0, \dots, \eta_n)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) \right|.$$

La prueba concluye observando que el polinomio  $2^{-n}T_{n+1}$  es precisamente el polinomio  $\Pi_{n+1}(x, x_{n+1,0}, \dots, x_{n+1,n})$ , ya que ambos polinomios son de grado  $n + 1$ , con el mismo coeficiente director y los mismos  $n + 1$  ceros.  $\square$

**Observación 2.16.** Una consecuencia de esta proposición es que para funciones de clase  $\mathcal{C}^{n+1}(-1, 1)$  la interpolación en los ceros de  $T_{n+1}(x)$  es óptima.

Los dos resultados siguientes dan estimaciones del error de interpolación en los ceros de  $T_{n+1}$  (Teorema 2.17) y en los extremos de  $T_n$  (Teorema 2.18).

**Teorema 2.17.** *Sea  $f$  una función  $n + 1$  veces derivable en  $(-1, 1)$  y tal que  $f^{(n+1)}$  es continua en  $[-1, 1]$ . Sea  $P_n(f)$  el polinomio interpolador de  $f$  en los ceros de  $T_{n+1}$ . Es decir,*

$$P_n(f)(x_{n+1,k}) = f(x_{n+1,k}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Entonces,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

*Demostración.* Como la función  $f$  tiene  $n + 1$  derivadas en  $(-1, 1)$  y  $f^{(n+1)}$  es continua en  $[-1, 1]$ , se tiene la cota del error:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leq \frac{\max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |\Pi(x, x_{n+1,0}, \dots, x_{n+1,n})|. \quad (7)$$

Ya hemos visto en la demostración de la proposición 2.15 que,

$$\Pi_{n+1}(x, x_{n+1,0}, \dots, x_{n+1,n}) = 2^{-n}T_{n+1}(x).$$

Entonces,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |2^{-n}T_{n+1}(x)| \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Teniendo en cuenta que  $|T_{n+1}(x)| \leq 1$  para  $x \in [-1, 1]$  se obtiene la cota que queríamos.  $\square$

En muchas aplicaciones (y en particular en la Cuadratura de Clenshaw-Curtis) es conveniente utilizar como nodos de interpolación los extremos de  $T_n$ , es decir, los puntos  $y_{n,k} = \cos(\frac{k\pi}{n})$ ,  $k = 0, \dots, n$ , puesto que estos nodos contienen los extremos del intervalo  $[-1, 1]$ , y no los contienen los nodos  $x_{n+1,k}$ ,  $k = 0, \dots, n$  que son todos interiores. Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.18.** *Sea  $f$  una función  $n + 1$  veces derivable en  $(-1, 1)$  y tal que  $f^{(n+1)}$  es continua en  $[-1, 1]$ . Sea  $P_n(f)$  el polinomio interpolador de  $f$  en los extremos de  $T_n$ . Es decir,*

$$P_n(f)(y_{n,j}) = f(y_{n,j}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Entonces,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leq \frac{n}{2^{n-1}(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

*Demostración.* Tenemos ahora en cuenta que,

$$\Pi_{n+1}(x, y_{n,0}, \dots, y_{n,n}) = n^{-1} 2^{1-n} (x^2 - 1) T'_n(x).$$

Por una parte,  $|x^2 - 1| \leq 1$  si  $x \in [-1, 1]$ , y por otra, usando la proposición 2.11,  $|T'_n(x)| \leq n^2$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ . Por tanto,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\Pi_{n+1}(x, y_{n,0}, \dots, y_{n,n})| \leq \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Utilizando la cota (7),

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leq \frac{n}{2^{n-1}(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

□

## 2.4. Cuadratura de Gauss-Legendre.

El objetivo de la Cuadratura Gaussiana (también denominada Cuadratura de Gauss-Legendre) es elegir  $n + 1$  nodos y  $n + 1$  coeficientes para determinar una fórmula de cuadratura que tenga el mayor grado de precisión posible. El grado de precisión de esta fórmula no será menor que el correspondiente grado de precisión para la fórmula interpolatoria utilizando los mismos nodos (luego tendrá grado de precisión mayor o igual que  $n$ ). Vamos a seguir [1] para los resultados de esta sección.

Dados  $n + 1$  nodos distintos, la fórmula de cuadratura interpolatoria en dichos nodos puede ser escrita como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j) \tag{8}$$

**Teorema 2.19.** *El máximo grado de precisión de la fórmula (8) es  $2n + 1$ . Éste se alcanza si los  $n + 1$  nodos,  $x_j$ , son los ceros del polinomio ortogonal de Legendre de grado  $n + 1$  en el intervalo  $[a, b]$  y la fórmula es interpolatoria.*

*Demostración.* Como la fórmula (8) es necesariamente interpolatoria (por el teorema 2.3) podemos escribir el error como

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n) dx.$$

(Este resultado se puede ver en [7]).

Si  $f(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$  entonces  $E_{n+1}(f) = 0$ . Vamos a elegir puntos  $x_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  tales que el error también se anule cuando  $f(x)$  es un polinomio de grado  $n + 1 + r$  donde  $r = 0, \dots, m$  y  $m$  tan grande como sea posible.

Para elegir estos nodos, primero recordamos que la  $(n + 1)$ -ésima diferencia dividida de cualquier polinomio de grado  $n + 1 + r$  es un polinomio de grado menor o igual que  $r$  (pues en cada diferencia dividida se reduce el grado del polinomio en una unidad).

Entonces, como

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n) dx,$$

la condición necesaria y suficiente para que  $E_{n+1}$  sea nulo para los polinomios de grado  $n + 1 + m$  es que:

$$\int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_n) x^r dx = 0, \quad r = 0, 1, \dots, m.$$

Es decir  $(x - x_0) \dots (x - x_n)$  es un polinomio de grado  $n + 1$  ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual que  $m$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Si tomamos  $\hat{L}_{n+1}(x)$  el  $n + 1$ -ésimo polinomio ortogonal de Legendre en  $[a, b]$  (normalizando para que el coeficiente director sea unidad),

$$\int_a^b \hat{L}_{n+1}(x) x^r dx = 0 \text{ se satisface para } m = n.$$

Además, no se puede satisfacer para  $m = n + 1$  pues en ese caso

$$\int_a^b \hat{L}_{n+1}^2(x) dx = 0,$$

lo cual es absurdo. □

**Teorema 2.20.** *Los coeficientes  $\alpha_j$  en la fórmula de cuadratura Gaussiana son positivos para todo  $j \in \{0, \dots, n\}$  y todo  $n$ .*

*Demostración.* Los coeficientes  $\alpha_j$  vienen dados por  $\alpha_j = \int_a^b w_{n+1,j}(x) dx$  donde:

$$w_{n+1,j}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}, \quad j = 0, \dots, n.$$

La fórmula de cuadratura con  $n + 1$  nodos tiene grado de precisión  $2n + 1$  si los  $n + 1$  nodos son los ceros del  $n + 1$ -ésimo polinomio ortogonal de Legendre en  $[a, b]$ , luego si  $f(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $2n + 1$ , el valor  $\int_a^b f(x) dx$  es exacto; en particular, es exacto para

$$q_n(x) = \frac{g_n^2(x)}{(x - x_j)^2}, \quad j = 0, \dots, n,$$

donde  $g_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ . Es decir,

$$\int_a^b \frac{g_n^2(x)}{(x - x_j)^2} dx = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{g_n^2(x_k)}{(x_k - x_j)^2},$$

donde, si  $k \neq j$ ,

$$q_n(x) = \frac{g_n^2(x_k)}{(x_k - x_j)^2} = 0,$$

y si  $k = j$ ,

$$q_n(x) = (x_j - x_0)^2 \cdots (x_j - x_{j-1})^2 (x_j - x_{j+1})^2 \cdots (x_j - x_n)^2.$$

En conclusión,

$$\int_a^b \frac{g_n^2(x)}{(x - x_j)^2} dx = \alpha_j (x_j - x_0)^2 \cdots (x_j - x_{j-1})^2 (x_j - x_{j+1})^2 \cdots (x_j - x_n)^2,$$

y, por tanto,

$$\alpha_j = \frac{1}{(x_j - x_0)^2 \cdots (x_j - x_{j-1})^2 (x_j - x_{j+1})^2 \cdots (x_j - x_n)^2} \int_a^b \frac{g_n^2(x)}{(x - x_j)^2} dx > 0.$$

□

Vamos a obtener ahora expresiones del error para la Cuadratura Gaussiana:

**Teorema 2.21.** Sea  $f'(x)$  continua en el intervalo  $[a, b]$ . Sean  $\xi_0, \dots, \xi_n$ ,  $n + 1$  puntos distintos en  $[a, b]$  que no coinciden con los ceros,  $x_0, \dots, x_n$ , del  $n + 1$ -ésimo polinomio ortogonal de Legendre,  $\hat{L}_{n+1}(x)$ , sobre  $[a, b]$ . Entonces, el error en la fórmula de cuadratura Gaussiana es:

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b \hat{L}_{n+1}(x)(x - \xi_0) \dots (x - \xi_n) f[x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_n, x] dx. \quad (9)$$

*Demostración.* En los  $2n + 2$  puntos  $x_j$  y  $\xi_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , podemos escribir  $f(x) = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$  donde  $P_{2n+1}(x)$  es el polinomio interpolador de  $f(x)$  de grado menor o igual que  $2n + 1$  y  $R_{2n+1}(x)$  es el error de interpolación. Aplicando la fórmula de Newton, dicho error se escribe como:

$$R_{2n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)(x - \xi_j) f[x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_n, x].$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b P_{2n+1}(x) dx + \int_a^b R_{2n+1}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^n \alpha_j P_{2n+1}(x_j) + \sum_{j=0}^n \alpha_j R_{2n+1}(x_j) + E_{n+1}(f). \end{aligned}$$

Como el grado de precisión de la fórmula de cuadratura es  $2n + 1$  tenemos que:

$$\int_a^b P_{2n+1}(x) dx = \sum_{j=0}^n \alpha_j P_{2n+1}(x_j).$$

Además, como  $f'(x)$  es continua,  $f[x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_n, x_j]$  tiene valor finito para  $j = 0, \dots, n$ . Luego,  $R_{2n+1}(x_j) = 0$ . Por tanto, tenemos que:

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b Q_{n+1}(x)(x - \xi_0) \dots (x - \xi_n) f[x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_n, x] dx,$$

donde  $Q_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ . □

**Corolario 2.22.** Sea  $f(x)$  una función con derivada continua de orden  $2n + 2$  en  $[a, b]$ . Entonces, el error en  $n + 1$  puntos de la cuadratura Gaussiana de  $f$  en  $[a, b]$  es:

$$E_{n+1}(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n + 2)!} \int_a^b G_{n+1}^2(x) dx \quad (10)$$

donde  $\eta$  es un punto en  $(a, b)$  y  $G_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ .

*Demostración.* Por el teorema 2.21,

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b (x-x_0) \cdots (x-x_n)(x-\xi_0) \cdots (x-\xi_n) f[x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_n, x] dx.$$

Como  $\xi_0, \dots, \xi_n$  son distintos de  $x_0, \dots, x_n$  aplicando el corolario (3.3.2) de [7], existe  $\eta \in (a, b)$  tal que

$$f[x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_n, x] = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b (x-x_0) \cdots (x-x_n)(x-\xi_0) \cdots (x-\xi_n) dx.$$

Haciendo  $\xi_j \rightarrow x_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  (lo cual es posible pues  $f$  es  $\mathcal{C}^{2n+2}(a, b)$ ), tenemos que:

$$E_{n+1}(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b G_{n+1}^2(x) dx.$$

□

## 2.5. Fórmula de Cuadratura Gaussiana con Peso.

Nuestro objetivo será ahora aproximar integrales de la forma:

$$\int_a^b g(x)w(x)dx$$

por una fórmula de cuadratura

$$\sum_{j=0}^n \beta_j g(x_j)$$

(regla de cuadratura con peso).

Al igual que para la cuadratura sin peso, la cuadratura con peso tiene grado de precisión  $m$  si  $\int_a^b x^k w(x) dx = \sum_{j=0}^n \beta_j x_j^k$  para  $k = 0, \dots, m$ , pero no para  $k = m + 1$ .

Para la fórmula interpolatoria con peso se repite el procedimiento de la sección anterior. Dados  $n + 1$  nodos  $x_0, \dots, x_n$  tomamos  $P_{n+1}(x)$  el polinomio de grado menor o igual que  $n + 1$  tal que:  $g(x_j) = P_{n+1}(x_j)$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Por la forma de Lagrange,

$$P_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n \rho_{j,n+1}(x) g(x_j)$$

donde

$$\rho_{j,n+1}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

Por tanto,

$$\int_a^b P_{n+1}(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^n g(x_j) \int_a^b \rho_{j,n+1}(x)w(x)dx.$$

Al igual que en la cuadratura sin peso el error es:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(g) &= \int_a^b g(x)w(x)dx - \int_a^b P_{n+1}(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b [g(x) - P_{n+1}(x)]w(x)dx \\ &= \int_a^b (x - x_0) \cdots (x - x_n)g[x_0, \dots, x_n, x]w(x)dx. \end{aligned}$$

Vamos a obtener ahora la fórmula de cuadratura Gaussiana con peso. Para ello, el objetivo será seleccionar  $n + 1$  nodos y  $n + 1$  coeficientes  $\beta_j$  tales que la fórmula de cuadratura

$$\sum_{j=0}^n \beta_j g(x_j) \tag{11}$$

tenga el máximo grado de precisión posible.

**Teorema 2.23.** *La fórmula de cuadratura con peso (11) tiene grado de precisión menor o igual que  $2n + 1$ . Éste se alcanza si los  $n + 1$  nodos son los ceros del  $n + 1$ -ésimo polinomio ortogonal,  $H_{n+1}(x)$ , con respecto al peso  $w(x)$  en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Es idéntica a la del teorema 2.19. □

Los coeficientes de la fórmula Gaussiana con peso son:

$$\beta_j = \int_a^b \rho_{j,n+1}(x)w(x)dx, \quad j = 0, \dots, n,$$

donde

$$\rho_{j,n+1} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

**Teorema 2.24.** *Los coeficientes  $\beta_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  son todos positivos.*

*Demostración.* Es idéntica a la del teorema 2.20. □

Vamos a buscar una forma más sencilla para expresar los  $\beta_j$ . Para ello introducimos primero el siguiente lema:

**Lema 2.25.** (*Relación de Christoffel-Darboux*). Los polinomios ortonormales respecto a un peso  $w(x)$ , no negativo, en  $[a, b]$  satisfacen:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} [P_{n+1}(x)P_n(\xi) - P_{n+1}(\xi)P_n(x)] = (x - \xi) \sum_{j=0}^n P_j(x)P_j(\xi). \quad (12)$$

*Demostración.* 3 polinomios ortogonales consecutivos están relacionados por:

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x). \quad (13)$$

(La prueba de este resultado se puede ver en [1]). Multiplicando a ambos lados de la igualdad por  $P_n(\xi)$  obtenemos,

$$P_n(\xi)P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(\xi)P_n(x) - C_n P_n(\xi)P_{n-1}(x).$$

Intercambiando los argumentos  $x$  y  $\xi$ ,

$$P_n(x)P_{n+1}(\xi) = (A_n \xi + B_n)P_n(x)P_n(\xi) - C_n P_n(x)P_{n-1}(\xi).$$

Restando estas dos igualdades,

$$\begin{aligned} P_n(\xi)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(\xi) &= A_n P_n(x)P_n(\xi)(x - \xi) \\ &\quad - C_n [P_n(\xi)P_{n-1}(x) - P_n(x)P_{n-1}(\xi)]. \end{aligned}$$

Si  $P_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_0$ , usando (13) tenemos que:

$$a_{n+1} = A_n a_n \quad \text{y} \quad C_n = A_n \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

de lo que se deduce que

$$A_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{y} \quad C_n = \frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2}$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned} P_n(x)P_n(\xi)(x - \xi) &= A_n^{-1} [P_n(\xi)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(\xi)] \\ &\quad - C_n A_n^{-1} [P_n(x)P_{n-1}(\xi) - P_n(\xi)P_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

Sumando ambos términos de la igualdad en  $j$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n P_j(x)P_j(\xi)(x - \xi) &= \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{a_{j+1}} [P_j(\xi)P_{j+1}(x) - P_j(x)P_{j+1}(\xi)] \\ &\quad - \sum_{j=0}^n \frac{a_{j-1}}{a_j} [P_j(x)P_{j-1}(\xi) - P_j(\xi)P_{j-1}(x)] \\ &= \frac{a_n}{a_{n+1}} [P_{n+1}(x)P_n(\xi) - P_{n+1}(\xi)P_n(x)] \end{aligned}$$

Luego,

$$(x - \xi) \sum_{j=0}^n P_j(x)P_j(\xi) = \frac{a_n}{a_{n+1}} [P_{n+1}(x)P_n(\xi) - P_{n+1}(\xi)P_n(x)].$$

□

Volvemos a nuestro problema de calcular los coeficientes  $\beta_j$ :

Sea  $P_n(x)$  el  $n + 1$ -ésimo polinomio ortonormal en  $[a, b]$  con respecto al peso  $w(x)$ . Si el coeficiente principal de  $P_n(x)$  es  $a_n$  entonces  $P_n(x) = a_n(x - x_0) \dots (x - x_n)$ . Luego,

$$\beta_j = \frac{1}{P'_n(x_j)} \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x_j)} w(x) dx, \quad j = 0, \dots, n.$$

Tomando  $\xi = x_k$  en la relación de Christoffel-Darboux,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} (P_{n+1}(x)P_n(x_k) - P_{n+1}(x_k)P_n(x)) = (x - x_k) \sum_{j=0}^n P_j(x)P_j(x_k).$$

Como  $P_n(x_k) = 0$ , tenemos que

$$\frac{-a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k)P_n(x) = 0.$$

Multiplicando por  $\frac{w(x)}{x - x_k}$  e integrando en  $[a, b]$ ,

$$\frac{-a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_k} w(x) dx = cte.$$

Por otra parte, como  $P_j(x)$ ,  $j = 0, \dots, n$ , son ortonormales para el peso  $w(x)$  en  $[a, b]$ ,  $P_0(x) = [\int_a^b w(x) dx]^{-1/2}$  y

$$1 = \frac{-a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x_k)} w(x) dx.$$

Entonces:

$$\beta_j = \frac{-a_{n+1}}{a_n P'_n(x_j) P_{n+1}(x_j)}.$$

Usando la fórmula recursiva:  $P_{n+1}(x_j) = -\frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2} P_{n-1}(x_j)$ , obtenemos la expresión

$$\beta_j = \frac{a_n}{a_{n-1} P'_n(x_j) P_{n-1}(x_j)}. \quad (14)$$

Los errores de la cuadratura Gaussiana con peso se obtienen de la misma forma que los de la fórmula sin peso:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(g) &= \int_a^b g(x)w(x)dx - \int_a^b P_{n+1}(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_n)(x - \xi_0) \dots (x - \xi_n)g[x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_n, x]w(x)dx \\ &= g[x_0, \dots, x_n, x_0, \dots, x_n, \eta] \int_a^b (x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2 w(x)dx \\ &= \frac{g^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b (x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2 w(x)dx \quad \text{con } a < \eta < b. \end{aligned}$$

### 2.5.1. Cuadratura de Gauss-Chebyshev.

La cuadratura de Gauss-Chebyshev es una cuadratura Gaussiana con peso en  $[-1, 1]$  donde el peso,  $w(x)$ , viene dado por:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Los polinomios ortonormales considerados son los polinomios de Chebyshev.

Tenemos que  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$  luego  $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Además, por (6) sabemos que los polinomios de Chebyshev son ortogonales pero no ortonormales. Normalizando dichos polinomios:

$$V_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \cos^{-1}(x)),$$

y haciendo el cambio de variable  $x = \cos(\theta)$ ,

$$V_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta).$$

Ya hemos visto que el máximo grado de precisión se alcanza en los puntos  $x_j$  tales que  $T_n(x_j) = 0$ ,  $-1 \leq x_j \leq 1$ . Los ceros de  $T_n(x)$  son:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Además, como  $T_n$  es un polinomio de grado exactamente  $n$  con coeficiente director  $2^{n-1}$ , el polinomio normalizado se escribe de la forma:

$$V_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{n-1} x^n + q_{n-1}(x),$$

con  $q_{n-1}$  un polinomio de grado menor o igual que  $n-1$ . Por tanto, el coeficiente principal de los polinomios ortonormales  $V_n$  es:

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Sustituyendo este valor de  $a_n$  en (14),

$$\beta_j = \frac{\frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}}{\frac{2^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} T'_n(x_j) T_{n-1}(x_j)} = \frac{2}{T'_n(x_j) T_{n-1}(x_j)}.$$

Derivando  $V_n$  respecto de  $x$  tenemos que,

$$V'_n(x) = \frac{dV_n}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \sin(n\theta) \frac{1}{\sin \theta}.$$

Y sustituyendo en la expresión de los  $\beta_j$  anterior,

$$\beta_j = \frac{2 \sin(\theta_j)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} n \sin(n\theta_j) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos((n-1)\theta_j)} = \frac{\pi \sin(\theta_j)}{n \sin(n\theta_j) \cos((n-1)\theta_j)},$$

para  $j = 0, 1, \dots, n$ . Como, además,  $\cos((n-1)\theta_j) = \sin \theta_j \sin(n\theta_j)$ ,

$$\beta_j = \frac{\pi}{n} \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Por tanto, la fórmula de cuadratura de Gauss-Chebyshev es:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^n g(x_j) + E_{n+1}(g) \quad n = 1, 2, \dots$$

### 2.5.2. Cuadratura de Gauss-Lobatto.

Sean  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  una familia de polinomios tal que el grado de  $P_n$  es exactamente  $n$  y

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) w(x) dx = 0 \quad \text{si } n \neq m.$$

Consideramos el polinomio

$$q_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) + aP_n(x) + bP_{n-1}(x),$$

donde  $a$  y  $b$  son elegidos para que  $q_{n+1}(-1) = q_{n+1}(1) = 0$ .

**Teorema 2.26.** Sean  $-1 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1$  las  $n + 1$  raíces del polinomio  $q_{n+1}(x)$  y sean  $w_0, \dots, w_n$  las soluciones del sistema lineal:

$$\int_{-1}^1 x^k w(x) dx = \sum_{j=0}^n (x_j)^k w_j. \quad (15)$$

Entonces,

$$\int_{-1}^1 p(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^n p(x_j) w_j, \quad (16)$$

para todo  $p$  polinomio de grado menor o igual que  $2n - 1$ .

*Demostración.* Por la ortogonalidad de los polinomios  $P_n$ , se tiene que

$$\int_{-1}^1 q_{n+1}(x) \phi(x) w(x) dx = 0,$$

para todo  $\phi$  polinomio de grado  $n - 2$ . Para cualquier polinomio  $p$  de grado menor o igual que  $2n - 1$ , existe un polinomio  $r$  de grado  $n - 2$  y otro polinomio  $s$  de grado  $n$  tal que  $p(x) = q_{n+1}(x)r(x) + s(x)$ . Como  $q_{n+1}(x_j) = 0$ ,  $0 \leq j \leq n$ , entonces

$$p(x_j) = s(x_j), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n p(x_j) w_j &= \sum_{j=0}^n s(x_j) w_j = \int_{-1}^1 s(x) w(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 p(x) w(x) dx - \int_{-1}^1 q_{n+1}(x) r(x) w(x) dx. \end{aligned}$$

Como  $r(x)$  tiene grado  $n - 2$ ,

$$\int_{-1}^1 q_{n+1}(x) r(x) w(x) dx = 0,$$

luego,

$$\sum_{j=0}^n p(x_j) w_j = \int_{-1}^1 p(x) w(x) dx.$$

□

Un caso importante es el de los pesos de Jacobi, es decir, los pesos  $w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$  ( $-1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2$ ). Los nodos de Gauss-Lobatto son los puntos  $-1, 1$  y las raíces del polinomio  $q(x) = P'_n(x)$ . Cada polinomio de grado  $2n - 1$ ,  $p$ , puede ser representado de la forma  $p(x) = (1 - x^2)P'_n(x)r(x) + s(x)$

con  $r$  un polinomio de grado  $n - 2$  y  $s$  un polinomio de grado  $n$ . Integrando por partes,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P'_n(x)(1-x^2)r(x)w(x)dx = \\ &= \int_{-1}^1 P_n(x)[(1-x^2)r(x)]'w(x)dx - \int_{-1}^1 P_n(x)(1-x^2)r(x)\frac{w'(x)}{w(x)}w(x)dx. \end{aligned}$$

Considerando el peso de Jacobi anterior, el polinomio  $(1-x^2)\frac{w'(x)}{w(x)}$  es un polinomio de grado 1.  $P'_n(x)$  es ortogonal a  $(1-x^2)r(x)$  luego (16) se verifica cuando los nodos de cuadratura interiores son los ceros de  $P'_n(x)$  y los pesos están definidos por (15). El caso particular que más nos interesa es el peso de Jacobi,  $\alpha = \beta = -1/2$ , obteniendo así los pesos de Chebyshev. En este caso, los nodos interiores son los ceros de  $T'_n(x)$ , luego  $x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)$ , y los pesos definidos por (15) son:

$$\begin{aligned} w_j &= \frac{\pi}{2n}, & \text{si } j = 0, n, \\ w_j &= \frac{\pi}{n}, & \text{si } 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

### 3. Cuadratura de Clenshaw-Curtis.

La idea de la cuadratura de Clenshaw-Curtis es calcular aproximadamente la integral

$$\int_a^b f(x)dx,$$

utilizando como nodos de cuadratura los puntos de Chebyshev en lugar de los nodos (óptimos) de Gauss o de Gauss-Lobatto. Como siempre en este trabajo impondremos que  $f$  es continua en  $[a, b]$ .

#### 3.1. Cálculo del polinomio interpolador de Chebyshev.

Consideramos la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $P_N(f)(x)$  el polinomio de grado menor o igual que  $N$  que interpola a  $f$  en los extremos de Chebyshev:

$$a = \eta_N < \eta_{N-1} < \dots < \eta_0 = b,$$

es decir,  $\eta_k = a\frac{1-x_k}{2} + b\frac{1+x_k}{2}$ , con  $x_k = \cos\frac{k\pi}{N}$ ,  $k = 0, \dots, N$ .

Escribimos el polinomio  $P_N(f)(x)$  en términos de la base del espacio generada por los polinomios de Chebyshev de grado menor o igual que  $N$ :  $T_0, \dots, T_N$ .

Calculamos los coeficientes  $c_n$  tales que:

$$P_N(f)(x) = \sum_{n=0}^N c_n T_n(x), \quad (17)$$

$$P_N(f)(x_j) = f(x_j) = y_j = \sum_{n=0}^N c_n T_n(x_j) = \sum_{n=0}^N c_n \cos \frac{n\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N.$$

**Lema 3.1.** (Ortogonalidad discreta de los polinomios de Chebyshev.) Se tiene que:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi n j}{N} \cos \frac{\pi m j}{N} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m = 0, N \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = m \neq 0, N \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

donde

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } j = 0, N \\ \frac{1}{N} & \text{si } j \in 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

*Demostración.* Si  $n = m \neq 0, N$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N w_j \cos^2 \frac{\pi j n}{N} &= w_0 + w_N + \sum_{j=1}^{N-1} w_j \cos^2 \frac{\pi j n}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 + \cos \frac{2\pi j n}{N}}{2} \\ &= \frac{1}{N} + \frac{1}{2N}(N-1) + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{2\pi j n}{N}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{2\pi j n}{N} &= \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi j n i}{N}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{2\pi n i}{N}} - e^{\frac{2\pi(N-1)n i}{N}} e^{\frac{2\pi n i}{N}}}{1 - e^{\frac{2\pi n i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{2\pi n i}{N}} - 1}{1 - e^{\frac{2\pi n i}{N}}} \right) = -1 \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos^2 \frac{\pi j n}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2N}(N-1) - \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Si  $n = m = 0, N$ , la fórmula es evidente.

Si  $n \neq m$ , se tiene:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N w_j \left( \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} + \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} \right).$$

Se analizan dos casos. Si  $n + m$  es par:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} w_j \left( \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} + \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} \right).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} &= \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{\pi(n+m)j i}{N}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - e^{\frac{\pi(n+m)(N-1)i}{N}} e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - e^{\pi(n+m)i}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - [\cos(\pi(n+m)) + i \sin(\pi(n+m))]}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - 1}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) = -1. \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} = -1.$$

Y por tanto, si  $n + m$  es par tenemos que,

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \frac{1}{N} (-2) = 0.$$

Si  $n+m$  es impar,

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} w_j \left( \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} + \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} \right).$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de  $n + m$  par tenemos que,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) = 0,$$

por ser la parte real de un número imaginario puro. Y también se tiene que,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + e^{\frac{\pi(n-m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n-m)i}{N}}} \right) = 0.$$

Y por tanto, si  $n + m$  es impar también tenemos que,

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = 0.$$

□

**Teorema 3.2.** *Los coeficientes  $c_n$  de  $P_N(f)(x)$  en la fórmula (17) vienen dados por:*

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{j=0}^N w_j y_j \cos \frac{\pi j n}{N}, \quad \text{si } n = 0, N, \\ c_n &= 2 \sum_{j=0}^N w_j y_j \cos \frac{\pi j n}{N}, \quad \text{si } n = 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (18)$$

*Demostración.* Sabemos que

$$y_j = \sum_{m=0}^N c_m \cos \frac{\pi j m}{N}, \quad j = 0, \dots, N.$$

Multiplicando por  $w_j \cos \frac{\pi j n}{N}$  y sumando en  $j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N w_j y_j \cos \frac{\pi j n}{N} &= \sum_{j=0}^N w_j \left( \sum_{m=0}^N c_m \cos \frac{\pi j m}{N} \right) \cos \frac{\pi j n}{N} \\ &= \sum_{m=0}^N c_m \sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j m}{N} \cos \frac{\pi j n}{N}. \end{aligned}$$

Entonces, ésta última expresión es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N c_m \delta_{n,m} &= c_n \quad \text{si } n = 0, N \\ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N c_m \delta_{n,m} &= \frac{1}{2} c_n \quad \text{si } n = 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

□

Nos podemos plantear ahora cómo calcular  $P_N(f)$  de forma eficiente. Una posibilidad es el uso de la fórmula (18) para el cálculo de los coeficientes  $c_n$ ,

$n = 0, \dots, N$ . Esta forma de cálculo requiere un esfuerzo computacional de  $\mathcal{O}((N+1)^2)$  operaciones, el mismo que el de una multiplicación de una matriz de tamaño  $(N+1) \times (N+1)$  por un vector de tamaño  $(N+1) \times 1$ . Este es un coste bastante alto en muchas aplicaciones de la interpolación en nodos de Chebyshev. Un procedimiento más eficaz utiliza algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT). Se trata de algoritmos que aprovechan la estructura y propiedades de las funciones trigonométricas para calcular expresiones como la de la fórmula (18) en  $\mathcal{O}(N \log N)$  operaciones. Éste es un coste computacional de crecimiento casi lineal con el número de nodos.

### 3.2. Cuadratura de Clenshaw-Curtis. Construcción.

En ésta y la siguiente sección vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que estamos en el intervalo  $[-1, 1]$ . De forma análoga se consiguen los resultados para un intervalo general  $[a, b]$ .

Sea  $P_n(f)$  el polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en los nodos de Chebyshev  $x_j = \cos(\frac{j\pi}{n})$ ,  $j = 0, \dots, n$ :

$$P_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) \quad (19)$$

donde por el teorema 3.2 los coeficientes  $c_k$  son:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cos \frac{\pi j k}{n} & \text{si } k = 0, n \\ \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cos \frac{\pi j k}{n} & \text{si } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Entonces,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^1 T_k(x) dx.$$

Utilizando la primera propiedad de la proposición 2.11,

$$2T_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1} - \frac{1}{n-1} T'_{n-1},$$

tenemos que:

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k+1} \int_{-1}^1 T'_{k+1}(x) dx - \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 T'_{k-1}(x) dx \right].$$

Como  $T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k$ , se tiene que, si  $k$  es par

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx = \frac{1}{2(k+1)} (1 - (-1)^{k+1}) - \frac{1}{2(k-1)} (1 - (-1)^{k-1}) = \frac{2}{1-k^2}$$

y si  $k$  es impar

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx = 0.$$

Por tanto, la cuadratura de Clenshaw-Curtis será,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k^{cc} c_k, \quad (20)$$

donde

$$w_k^{cc} = \begin{cases} \frac{2}{1-k^2} & \text{si } k \text{ par} \\ 0 & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

**Observación 3.3.** En lo que sigue denotaremos

$$C_n^{cc}(f) = \sum_{k=0}^n c_k w_k^{cc}.$$

Las fórmulas de Clenshaw-Curtis tienen grado de precisión  $n$ . Sin embargo, como veremos en las sucesivas secciones, sus propiedades de aproximación son similares a las de la fórmula de Gauss.

### 3.3. Convergencia de las Cuadraturas de Gauss y C-C.

Sean  $C_n^G(f)$  y  $C_n^{cc}(f)$  las cuadraturas de Gauss y de Clenshaw-Curtis respectivamente.

Sea  $P_n^*$  la mejor aproximación a una función  $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$  por polinomios de grado menor o igual que  $n$  con respecto a la norma del supremo (existe por el teorema de Weierstrass, aproximación minimax, véase en [8]). Sea

$$E_n^* = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n^*(x)| = \|f - P_n^*\|_\infty.$$

Veamos que si la mejor aproximación a  $f$  converge rápidamente cuando  $n$  tiende a infinito, entonces  $C_n^G(f)$  y  $C_n^{cc}(f)$  convergen rápidamente a  $I(f)$ .

**Teorema 3.4.** *Sea  $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$  y  $n \geq 0$ . Entonces,*

$$|I(f) - C_n^G(f)| \leq cE_{2n+1}^*$$

y

$$|I(f) - C_n^{cc}(f)| \leq cE_n^*.$$

*Demostración.* Como  $P_n^*$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$ , se tiene que,

$$|I(f) - C_n^{cc}(f)| = |I(f - P_n^*) - C_n^{cc}(f - P_n^*)| \leq |I(f - P_n^*)| + |C_n^{cc}(f - P_n^*)|.$$

Por una parte,

$$|I(f - P_n^*)| = \left| \int_{-1}^1 (f(x) - P_n^*(x)) dx \right| \leq 2 \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n^*(x)| = 2E_n^*.$$

Por otra parte, sabemos que:

$$C_n^{cc}(f) = \sum_{k=0}^n c_k w_k^{cc}$$

donde los  $w_k^{cc}$  están dados por (20) y los  $c_k$  son los del teorema 3.2. Entonces,

$$|C_n^{cc}(f - P_n^*)| \leq \max_{0 \leq k \leq n} |(f - P_n^*)^{\wedge}_k| \sum_{k=0}^n |w_k^{cc}|.$$

donde los  $(f - P_n^*)^{\wedge}_k$  son los coeficientes de (19) asociados a la función  $f - P_n^*$ . Ahora,

$$\sum_{k=0}^n |w_k^{cc}| = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^n \frac{2}{k^2 - 1} \leq \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{\infty} \frac{2}{k^2 - 1} = K < +\infty.$$

Teniendo en cuenta el teorema 3.2,

$$|(f - P_n^*)^{\wedge}_k| \leq \begin{cases} \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| \left| \cos\left(\frac{k\pi j}{n}\right) \right| & \text{si } k = 0, n \\ \frac{2}{k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| \left| \cos\left(\frac{k\pi j}{n}\right) \right| & \text{si } 1 \leq k \leq n - 1 \end{cases}$$

Por tanto,

$$|(f - P_n^*)^{\wedge}_k| \leq \begin{cases} \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| = \frac{k+1}{2k} E_n^* & \text{si } k = 0, n \\ \frac{2}{k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| = \frac{2(k+1)}{k} E_n^* & \text{si } 1 \leq k \leq n - 1 \end{cases}$$

Luego,  $|(f - P_n^*)^{\wedge}_k| \leq K' E_n^*$ , y tenemos que,  $|C_n^{cc}(f - P_n^*)| \leq K K' E_n^*$ . Sumando los 2 valores absolutos,

$$|I(f) - C_n^{cc}(f)| \leq c E_n^*,$$

para una cierta constante positiva  $c$  independiente de  $n$ . De la misma forma pero tomando la mejor aproximación de grado  $2n + 1$ ,  $P_{2n+1}^*$ , se demuestra que

$$|I(f) - C_n^G(f)| \leq c E_{2n+1}^*.$$

□

Lo que queremos ahora es combinar este teorema con resultados de la teoría de aproximación para ver que si  $f$  es regular, su mejor aproximación converge rápidamente.

Sea  $T_j$  el  $j$ -ésimo polinomio de Chebyshev. La serie de Chebyshev de una función  $f \in L_w^2[-1, 1]$  es

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(x). \quad (21)$$

donde los coeficientes  $a_j$  son:

$$\int_{-1}^1 f(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \int_{-1}^1 T_l(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Usando (6), tenemos que:

$$a_j \int_{-1}^1 T_j^2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} a_0 \pi & \text{si } j = 0 \\ a_j \frac{\pi}{2} & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

Luego, si  $j > 0$ ,

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (22)$$

y,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**Definición 3.5.** Una función  $g$  es absolutamente continua en  $[-1, 1]$  si tiene derivada finita,  $g'(\xi)$ , en casi todo punto  $\xi \in [a, b]$ ,  $g'$  es Lebesgue-integrable en  $[-1, 1]$  y

$$\int_a^x g'(\xi) d\xi = g(x) - g(a), \quad a \leq x \leq b.$$

Definimos la norma  $\|\cdot\|_T$  como

$$\|u\|_T = \left\| \frac{u'(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right\|_1 = \int_{-1}^1 \frac{|u'(x)|}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**Teorema 3.6.** Si  $f, f', \dots, f^{(k)}$  son absolutamente continuas en  $[-1, 1]$  y  $\|f^{(k)}\|_T = V < \infty$  para algún  $k \geq 0$ , entonces para cada  $n \geq k + 1$  se cumple que:

$$|a_n| \leq \frac{2V}{\pi n(n-1) \cdots (n-k)}. \quad (23)$$

Si  $f$  es analítica con  $|f(z)| \leq M$ ,  $M > 0$ , en la región acotada por la elipse con focos  $\pm 1$  y semiejes  $a = \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}]$ ,  $b = \frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}]$  con  $\rho > 1$ , entonces para cada  $n \geq 0$ :

$$|a_n| \leq \frac{2M}{\rho^n}. \quad (24)$$

*Demostración.* Para ver el primer resultado, hacemos el cambio de variable  $x = \cos(\theta)$  e integramos por partes  $k + 1$  veces los  $a_n$  en (22) (las hipótesis nos aseguran que las  $k$  primeras derivadas existen). Hacemos la primera integración por partes:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta)) \cos(n\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi f'(\cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2} \cos(x - y) - \frac{1}{2} \cos(x + y)$ ,

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi f'(\cos(\theta)) \left[ \frac{\cos((n-1)\theta)}{2} - \frac{\cos((n+1)\theta)}{2} \right] d\theta.$$

Luego,

$$|a_n| \leq \frac{2}{\pi n} \left\| \frac{\cos((n-1)\theta)}{2} - \frac{\cos((n+1)\theta)}{2} \right\|_\infty \int_0^\pi |f'(\cos(\theta))| d\theta.$$

Haciendo el cambio  $x = \cos \theta$  en la integral  $\int_0^\pi \left| \frac{d}{dx} f(\cos \theta) \right| d\theta$  nos queda que  $(-\operatorname{sen} \theta d\theta = dx$  y  $d\theta = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ),

$$\int_0^\pi \left| \frac{d}{dx} f(\cos \theta) \right| d\theta = \int_{-1}^1 \left| \frac{d}{dx} f(x) \right| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\theta.$$

Tomando  $V^{(0)} = \|f(x)\|_T$ , tenemos que:

$$|a_n| \leq \frac{2V^{(0)}}{\pi n}.$$

Hacemos la segunda integración por partes:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f'(\cos(\theta)) \left[ \frac{\cos((n-1)\theta)}{2n} - \frac{\cos((n+1)\theta)}{2n} \right] d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f''(\cos(\theta)) \left[ \frac{\cos((n-2)\theta)}{4n(n-1)} - \frac{\cos(n\theta)}{4n(n-1)} - \frac{\cos(n\theta)}{4n(n+1)} + \frac{\cos((n+2)\theta)}{4n(n+1)} \right] d\theta \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos y acotando:

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{2}{\pi} \left\| \frac{\cos((n-2)\theta)}{4n(n-1)} - \frac{\cos(n\theta)}{4n(n-1)} - \frac{\cos(n\theta)}{4n(n+1)} + \frac{\cos((n+2)\theta)}{4n(n+1)} \right\|_\infty \|f''(\cos \theta)\|_1 \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left( \left\| \frac{\cos((n-2)\theta) - \cos(n\theta)}{4n(n-1)} \right\|_\infty + \left\| \frac{\cos((n+2)\theta) - \cos(n\theta)}{4n(n+1)} \right\|_\infty \right) \|f''(x)\|_T \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2n(n-1)} + \frac{1}{2n(n+1)} \right) \|f''(x)\|_T \leq \frac{2V^{(1)}}{\pi n(n-1)}, \end{aligned}$$

donde  $V^{(1)} = \|f'(x)\|_T$ .

Repitiendo el proceso, tenemos que tras  $k$  integraciones por partes,  $a_n$  es de la forma:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^{(k)}(\cos(\theta)) \sum_{j=-k}^k \alpha_j^{(k)} \cos((n+j)\theta) d\theta.$$

Suponemos por hipótesis de inducción que:

$$\sum_{j=-k}^k |\alpha_j^{(k)}| \leq \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}.$$

Veamos que para el coeficiente  $\alpha_j^{(k+1)}$  se tiene que:

$$\sum_{j=-k-1}^{k+1} |\alpha_j^{(k+1)}| \leq \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k)}.$$

Haciendo la  $k+1$ -ésima integración por partes de  $a_n$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^{(k+1)}(\cos(\theta)) \sum_{j=-k}^k \alpha_j^{(k)} \left[ \frac{\cos((n+j-1)\theta)}{2(n+j)} - \frac{\cos((n+j+1)\theta)}{2(n+j)} \right] d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^{(k+1)}(\cos(\theta)) \sum_{j=-k-1}^{k+1} \alpha_j^{(k+1)} \cos((n+j)\theta). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=-k-1}^{k+1} |\alpha_j^{(k+1)}| &\leq \sum_{j=-k}^k \frac{|\alpha_j^{(k)}|}{2(n+j)} + \frac{|\alpha_j^{(k)}|}{2(n+j)} \\ &\leq \frac{1}{n-k} \sum_{j=-k}^k \frac{1}{2} (|\alpha_j^{(k)}| + |\alpha_j^{(k)}|) \\ &\leq \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}. \end{aligned}$$

Y tenemos que:

$$|a_n| \leq \frac{2\|f^{(k)}(x)\|_T}{\pi n(n-1)\cdots(n-k)}.$$

Veamos ahora el segundo resultado:

Sea  $z$  perteneciente al círculo unidad (al que vamos a denotar  $\Gamma$ ). Podemos escribir,  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , luego,

$$z + z^{-1} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad \text{y} \quad z^n + z^{-n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta)) \cos(n\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos(\theta)) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) (z^n + z^{-n}) \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos,

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) z^{n-1} dz \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) z^{-n-1} dz \right|. \quad (25)$$

Podemos transformar la elipse descrita en el enunciado en 2 circunferencias: una de radio  $1/\rho$  y otra de radio  $\rho$ . Si  $z = \rho e^{i\theta}$  y  $w = \frac{z+z^{-1}}{2}$ , entonces,

$$w = \frac{1}{2}(\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}((\rho + \rho^{-1}) \cos(\theta) + i(\rho - \rho^{-1}) \sin(\theta)).$$

Si  $w = u + iv$ ,  $u = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \cos(\theta)$  y  $v = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}) \sin(\theta)$  y se cumple que

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

donde  $a = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})$  y  $b = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1})$ ; ecuación de la elipse descrita en el enunciado. De la misma forma, si  $z = \rho^{-1} e^{i\theta}$  y  $w = \frac{z+z^{-1}}{2}$ , entonces,

$$w = \frac{1}{2}(\rho^{-1} e^{i\theta} + \rho e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}((\rho^{-1} + \rho) \cos(\theta) + i(\rho^{-1} - \rho) \sin(\theta)).$$

Si  $w = u + iv$ ,  $u = \frac{1}{2}(\rho^{-1} + \rho) \cos(\theta)$  y  $v = \frac{1}{2}(\rho^{-1} - \rho) \sin(\theta)$  y se cumple que

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

con  $a$  y  $b$  como antes; ecuación de la elipse descrita en el enunciado.

Teniendo en cuenta que la transformación de  $z$  a  $w$  es continua en la región descrita en el enunciado y que la función  $f$  es analítica, podemos aplicar el teorema de Cauchy ([11]) a cada término de (25) y tenemos que,

$$\left| \int_\Gamma f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) z^{n-1} dz \right| = \left| \int_{|z|=\rho^{-1}} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) z^{n-1} dz \right| \leq \int_{|z|=\rho^{-1}} |f(w)| |z|^{n-1} dz.$$

En este caso,  $z = \rho^{-1} e^{i\theta}$  entonces  $|z| = \rho^{-1}$  y  $|z|^{n-1} = \rho^{1-n}$ , luego

$$\int_{|z|=\rho^{-1}} |f(w)| |z|^{n-1} dz \leq \int_0^{2\pi} |f(w)| \rho^{1-n} \rho^{-1} d\theta \leq \rho^{-n} M 2\pi.$$

De la misma forma,

$$\left| \int_{\Gamma} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) z^{-n-1} dz \right| = \left| \int_{|z|=\rho} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) z^{-n-1} dz \right| \leq \int_{|z|=\rho} |f(w)| |z|^{-n-1} dz.$$

En este caso,  $z = \rho e^{i\theta}$  entonces  $|z| = \rho$  y  $|z|^{-n-1} = \rho^{-n-1}$ , luego

$$\int_{|z|=\rho} |f(w)| |z|^{-n-1} dz \leq \int_0^{2\pi} |f(w)| \rho^{-n-1} \rho d\theta \leq \rho^{-n} M 2\pi.$$

Por tanto,

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} (\rho^{-n} M 2\pi + \rho^{-n} M 2\pi) = \frac{2M}{\rho^n}.$$

□

Consideramos ahora aproximaciones polinomiales obtenidas como sumas parciales de series de Chebyshev.

Para cualquier  $n \geq 0$  definimos

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x). \quad (26)$$

donde los  $a_j$  son los definidos en (22). Observamos que  $f_n$  es la proyección ortogonal de  $f$  sobre el espacio de polinomios de Chebyshev de grado menor o igual que  $n$  con respecto al producto interno  $(f, g) = \int_{-1}^1 f g \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . Se tiene que,

$$E_n^T = \|f - f_n\|_{\infty} = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j T_j(x) \right\|_{\infty}.$$

**Teorema 3.7.** *Si  $f, f', \dots, f^{(k)}$  son absolutamente continuas en  $[-1, 1]$  y si  $\|f^{(k)}(x)\|_T = V < \infty$  para algún  $k \geq 1$ , entonces para cada  $n \geq k + 1$ ,*

$$E_n^T \leq \frac{2V}{\pi k(n-k)^k}. \quad (27)$$

*Si  $f$  es analítica con  $|f(z)| \leq M$ ,  $M > 0$ , en la región acotada por la elipse con focos  $\pm 1$  y semiejes  $a = \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}]$ ,  $b = \frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}]$  con  $\rho > 1$ , entonces para cada  $n \geq 0$ ,*

$$E_n^T \leq \frac{2M}{(\rho - 1)\rho^n}. \quad (28)$$

*Demostración.* Veamos el primer resultado. Usando la desigualdad (23), tenemos que

$$\begin{aligned} E_n^T &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \|T_j(x)\|_{\infty} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{2V}{\pi} \frac{1}{j(j-1)\cdots(j-k)} \\ &\leq \frac{2V}{\pi} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{(j-k)^{k+1}} \leq \frac{2V}{\pi} \int_n^{\infty} \frac{dx}{(x-k)^{k+1}} = \frac{2V}{\pi k(n-k)^k}. \end{aligned}$$

Para ver el segundo resultado, usamos la desigualdad (24) y obtenemos que,

$$E_n^T \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{2M}{\rho^n} = \frac{2M}{(\rho-1)\rho^n}.$$

□

Sea  $P_n^*$  la mejor aproximación a  $f$  en  $[-1, 1]$  por polinomios de grado menor o igual que  $n$  con respecto a la norma del supremo. En el siguiente teorema comparamos el error de las series de Chebyshev,  $E_n^T$ , con el error de mejor aproximación,  $E_n^*$ .

**Teorema 3.8.** *Para cualquier  $f$  continua en  $[-1, 1]$  y  $n \geq 0$ ,*

$$\frac{\pi}{4} |a_{n+1}| \leq E_n^* \leq E_n^T < \left(4 + \frac{4}{\pi^2} \log(2n+1)\right) E_n^*.$$

*Demostración.* Es claro que  $E_n^* \leq E_n^T$ .

Vamos a probar la primera desigualdad. Como  $P_n^*$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$ ,

$$a_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (f(x) - P_n^*(x))T_{n+1}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tomando valores absolutos,

$$|a_n| \leq \frac{2}{\pi} E_n^*(f) \int_{-1}^1 |T_{n+1}(x)| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi} E_n^*(f).$$

Veamos ahora la última desigualdad.

$$|f - f_n| = |f - P_n^* + P_n^* - f_n| \leq E_n^* + |P_n^* - f_n|.$$

Definimos

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\cos \theta) \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})(\theta + \phi))}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta + \phi}{2})} d\phi.$$

Reescribimos esta última integral:

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\cos \phi) \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})(\phi + \theta))}{2 \text{sen}(\frac{\phi + \theta}{2})} d\phi + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 g(\cos \phi) \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})(\phi + \theta))}{2 \text{sen}(\frac{\phi + \theta}{2})} d\phi = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\cos \phi) \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})(\phi + \theta))}{2 \text{sen}(\frac{\phi + \theta}{2})} d\phi + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\cos \phi) \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})(-\phi + \theta))}{2 \text{sen}(\frac{-\phi + \theta}{2})} d\phi = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\cos(x - \theta)) \frac{\text{sen}((n + \frac{1}{2})x)}{2 \text{sen}(\frac{x}{2})} dx + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\cos(y + \theta)) \frac{-\text{sen}((n + \frac{1}{2})y)}{-2 \text{sen}(\frac{y}{2})} dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [g(\cos(\phi - \theta)) + g(\cos(\phi + \theta))] \frac{\text{sen}(\frac{2n+1}{2}\phi)}{\text{sen}(\frac{\phi}{2})} d\phi.
\end{aligned}$$

Tomando  $g = P_n^* - f$  tenemos que:

$$|(P_n^* - f_n)(x)| \leq E_n^*(f) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\text{sen}(\frac{2n+1}{2}\phi)|}{\text{sen}(\frac{\phi}{2})} d\phi.$$

Los números,

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\text{sen}(\frac{2n+1}{2}\phi)|}{\text{sen}(\frac{\phi}{2})} d\phi,$$

son conocidos como las constantes de Lebesgue y satisfacen la desigualdad (veáse en [3]):

$$L_n < 3 + \frac{4}{\pi^2} \log(2n + 1).$$

Por lo tanto,

$$E_n^T \leq E_n^* + |P_n^* - f_n| < \left(4 + \frac{4}{\pi^2} \log(2n + 1)\right) E_n^*.$$

□

Nos queda concluir que la cuadratura de Clenshaw-Curtis tiene esencialmente la misma tasa de convergencia que la cuadratura de Gauss para funciones suficientemente diferenciables.

Vamos a ver primero un resultado previo.

**Teorema 3.9.** Para cualquier entero  $p$  con  $0 \leq p \leq n$ ,

$$T_{n+p}(x_j) = T_{n-p}(x_j)$$

en los puntos  $x_j = \cos \frac{j\pi}{n}$  con  $0 \leq j \leq n$ .

La cuadratura de Clenshaw-Curtis da el mismo resultado para ambas funciones:

$$C_n^{cc}(T_{n+p}) = C_n^{cc}(T_{n-p}) = I(T_{n-p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \pm p \text{ es impar} \\ \frac{2}{1-(n-p)^2} & \text{si } n \pm p \text{ es par} \end{cases} \quad (29)$$

y el error en la integración de  $T_{n+p}$  es:

$$I(T_{n+p}) - C_n^{cc}(T_{n+p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \pm p \text{ es impar} \\ \frac{8pn}{n^4 - 2(p^2+1)n^2 + (p^2-1)^2} & \text{si } n \pm p \text{ es par} \end{cases} \quad (30)$$

*Demostración.* Veamos el primer resultado.

Sea  $\theta_j = \frac{j\pi}{n}$ , con  $0 \leq j \leq n$ . Se tiene que  $\cos((n+p)\theta_j) = \cos((n-p)\theta_j)$  para cualquier entero  $p$  (se dice que los números  $n+p$  y  $n-p$  son alias el uno del otro en la red de puntos que forman los  $\theta_j$ ). Haciendo  $x = \cos \theta$ , tenemos que  $T_{n+p}(x_j) = \cos((n+p)\theta_j) = \cos((n-p)\theta_j) = T_{n-p}(x_j)$ ,  $0 \leq j \leq n$ .

Vamos a ver la segunda parte del teorema. Como  $T_{n+p}(x_j) = T_{n-p}(x_j)$ , entonces  $C_n^{cc}(T_{n+p}) = C_n^{cc}(T_{n-p})$ .

La fórmula de Clenshaw-Curtis es exacta para polinomios de grado menor o igual que  $n$  y como  $T_{n-p}$  es un polinomio de grado  $n-p \leq n$ , tenemos que  $C_n^{cc}(T_{n-p}) = I(T_{n-p})$ .

Además,

$$\int_{-1}^1 T_{n-p}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n-p \text{ es impar} \\ \frac{-2}{(n-p)^2-1} & \text{si } n-p \text{ es par} \end{cases}$$

Luego,

$$C_n^{cc}(T_{n+p}) = C_n^{cc}(T_{n-p}) = I(T_{n-p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n-p \text{ es impar} \\ \frac{2}{1-(n-p)^2} & \text{si } n-p \text{ es par} \end{cases}$$

Nos queda ver el error en la integración de  $T_{n+p}$ .

$$I(T_{n+p}) = \int_{-1}^1 T_{n+p}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n+p \text{ es impar} \\ \frac{2}{1-(n+p)^2} & \text{si } n+p \text{ es par} \end{cases}$$

Luego,

$$I(T_{n+p}) - C_n^{cc}(T_{n+p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n+p \text{ es impar} \\ \frac{2}{1-(n+p)^2} - \frac{2}{1-(n-p)^2} & \text{si } n+p \text{ es par} \end{cases}$$

□

**Teorema 3.10.** Sean  $f, f', \dots, f^{(k)}$  absolutamente continuas en  $[-1, 1]$  y sea  $\|f^{(k)}\|_T = V < \infty$  para algún  $k \geq 1$ , entonces para cada  $n \geq k/2$

$$|I(f) - C_n^G(f)| \leq \frac{32V}{15\pi(2n+1-k)^k} \quad (31)$$

*Demostración.* Sea  $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(x)$  una función continua en  $[-1, 1]$  y  $C_n^G(f)$  la fórmula de cuadratura de Gauss.

Por una parte,

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_{-1}^1 T_j(x) dx.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} C_n^G(f) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(x_k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{k=0}^n \alpha_k T_j(x_k) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j C_n^G(T_j). \end{aligned}$$

Luego,

$$I(f) - C_n^G(f) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (I(T_j) - C_n^G(T_j)).$$

Definimos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=0}^n |a_j| |I(T_j) - C_n^G(T_j)|, \\ S_2 &= \sum_{j=n+1}^{2n-[n^{1/3}]} |a_j| |I(T_j) - C_n^G(T_j)|, \\ S_3 &= \sum_{j=2n+1-[n^{1/3}]}^{2n+1} |a_j| |I(T_j) - C_n^G(T_j)|, \\ S_4 &= \sum_{j=2n+2}^{\infty} |a_j| |I(T_j) - C_n^G(T_j)|, \end{aligned}$$

donde  $[\cdot]$  representa la parte entera. Entonces,  $|I(f) - C_n^G(f)| \leq S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ . El término  $S_1$  es cero puesto que la fórmula de cuadratura es interpolatoria y tiene grado de precisión  $n$ . Como estamos en el caso de la cuadratura de Gauss (grado de precisión  $2n + 1$ ),  $S_2$  y  $S_3$  también son cero. Veamos que ocurre con el término  $S_4$ .

Sean  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , los nodos de Gauss-Legendre. Entonces, sabemos que  $C_n^G(f) = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k)$ . Como la fórmula es exacta para  $f \equiv 1$ , se verifica que,

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = 2.$$

Como  $T_j(x)$  es el  $j$ -ésimo polinomio de Chebyshev,  $|T_j(x)| \leq 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Entonces,

$$|I(T_j) - C_n^G(T_j)| \leq |I(T_j)| + |C_n^G(T_j)|.$$

Por tanto,

$$|I(T_j) - C_n^G(T_j)| \leq |I(T_j)| + \sum_{k=0}^n \alpha_k |T_j(x_k)| \leq |I(T_j)| + 2.$$

Aplicando (29) a la integral de  $T_j$  tenemos que, si  $j$  es par y  $j \geq 4$  ( $j \geq 2n + 2$ ),

$$|I(T_j) - C_n^G(T_j)| \leq 2 + \frac{2}{j^2 - 1} \leq 2 + \frac{2}{4^2 - 1} = \frac{32}{15}.$$

Si  $j$  es impar,  $I(T_j) = 0$  y  $C_n^G(T_j) = 0$  ya que los nodos de Gauss son simétricos respecto a 0 y  $T_j$  es impar.

Por otra parte, usando (23), tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2n+2}^{\infty} |a_j| &\leq \frac{2V}{\pi} \sum_{j=2n+2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1) \cdots (j-k)} \leq \frac{2V}{\pi} \sum_{j=2n+2}^{\infty} \frac{1}{(j-k)^{k+1}} \\ &\leq \frac{2V}{\pi} \int_{2n+1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^{k+1}} dx = \frac{2V}{\pi k(2n+1-k)^k}. \end{aligned}$$

Combinando las dos últimas desigualdades,

$$|I(f) - C_n^G(f)| \leq \sum_{j=2n+2}^{\infty} |a_j| |I(T_j) - C_n^G(T_j)| \leq \frac{32V}{15\pi k(2n+1-k)^k}.$$

□

**Teorema 3.11.** *Supongamos que  $f, f', \dots, f^{(k)}$  son absolutamente continuas en  $[-1, 1]$  y  $\|f^{(k)}\|_T = V < \infty$  para algún  $k \geq 1$ , entonces para todo  $n$  suficientemente grande ( $n > n_k$ ),*

$$|I(f) - C_n^{cc}(f)| \leq \frac{32V}{15\pi k(2n+1-k)^k}. \quad (32)$$

*Demostración.* Definiendo  $S_1, S_2, S_3, S_4$  igual que en el teorema anterior pero para la cuadratura de Clenshaw-Curtis, tenemos que  $S_1$  es cero pues la fórmula es interpolatoria. En  $S_2$  los términos que aparecen son todos de orden como mínimo  $n^{-2/3}$  puesto que, para  $j = n + 1$ , si  $j$  es par,

$$I(T_{n+1}) - C_n^{cc}(T_{n+1}) = \frac{8n}{n^4 - 2n^2} = \frac{8}{n^3 - 4n},$$

de orden  $n^{-1/3} > n^{-2/3}$ . Todos los demás órdenes son mayores pues la potencia del denominador es mayor que la del numerador. Si  $j$  es impar,  $I(T_j) - C_n^{cc}(T_j) = 0$ .

Por otra parte, por (23), los  $a_j$  son de orden  $Vj^{-k-1}$ . Para  $j = n + i$  con  $i = 1, \dots, 2n - \lceil n^{1/3} \rceil$ ,

$$|a_{n+i}| \leq \frac{2V}{\pi(n+i)(n+i-1) \cdots n(n-1) \cdots (n-(k-i))}$$

de orden  $Vn^{-k-1}$ .

Entonces,  $S_2$  tiene  $O(n)$  términos de tamaño  $O(Vn^{-k-5/3})$  para un total de magnitud  $O(Vn^{-k-2/3})$ .  $S_3$  tiene  $O(n^{1/3})$  términos de tamaño  $O(Vn^{-k-1})$  para un total de magnitud de nuevo  $O(Vn^{-k-2/3})$ .

Veamos ahora como acotar  $S_4$ . Tomando  $n \geq 2$  (posible pues por hipótesis  $n$  es suficientemente grande) tenemos que  $j \geq 6$ , luego, por (30),

$$|I(T_j) - C_n^{cc}(T_j)| \leq |I(T_6) - C_n^{cc}(T_6)| = \begin{cases} \frac{72}{35} & \text{si } j \text{ es par} \\ 0 & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases}$$

Combinando esta cota con (23), obtenemos que:

$$S_4 \leq \frac{72V}{35k(2n+1-k)^k}.$$

Por tanto,

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq O(Vn^{-k-2/3}) + \frac{72V}{35k(2n+1-k)^k} < \frac{32V}{15k(2n+1-k)^k}$$

para  $n$  suficientemente grande.  $\square$

**Observación 3.12.** Tras estos dos resultados se puede observar que la cuadratura de Gauss y la de Clenshaw-Curtis tienen aproximadamente la misma precisión para funciones suficientemente derivables. El único cambio realizado ha sido reemplazar la condición  $n \geq k/2$  por la condición de que  $n$  sea suficientemente grande.

A continuación estudiamos el caso en el que la función  $f$  se extiende a una función analítica en una elipse del plano complejo.

**Teorema 3.13.** Sea  $f$  una función analítica con  $|f(z)| \leq M$ ,  $M > 0$ , en la región acotada por la elipse con focos  $\pm 1$  y semiejes  $a = \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}]$ ,  $b = \frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}]$  con  $\rho > 1$ . Entonces, si  $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$ ,  $j = 0, \dots, n$  (nodos de la cuadratura de Gauss-Chebyshev),

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leq C\rho^{-n-1},$$

con  $C$  una constante independiente de  $n$  y  $P_n(f)$  el polinomio interpolador de  $f$  en dichos nodos.

*Demostración.* La elipse con focos  $\pm 1$  y semiejes  $a = \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}]$  y  $b = \frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}]$  es el borde del conjunto:

$$\Omega_\rho = \{w = \frac{1}{2}[z + z^{-1}]/z = \eta e^{i\theta}, 1 < \eta < \rho, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Denominamos a este borde,  $\Lambda_\rho = \partial\Omega_\rho$ .

Veamos primero que

$$f(x) - P_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{z-x} \prod_{j=0}^n \frac{x-x_j}{z-x_j} dz.$$

donde  $P_n(f)$  es el polinomio de grado menor o igual que  $n$  tal que  $P_n(f)(x_j) = f(x_j)$ ,  $j = 0, \dots, n$ . En primer lugar observemos que:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{(z-x_0) \dots (z-x_n)} dz.$$

Veamos la última igualdad.  $f(z)$  no tiene polos en el dominio  $\Lambda_\rho$  por ser una función analítica, luego los polos de  $\frac{f(z)}{(z-x_0) \dots (z-x_n)}$  son los puntos de interpolación  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Calculamos el residuo en  $z^* = x_k$ :

$$\left. \frac{f(z)(z-x_k)}{(z-x_0) \dots (z-x_n)} \right|_{z=x_k} = \frac{f(x_k)}{(x_k-x_0) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)}.$$

Aplicando el teorema de los residuos (véase en [11]),

$$\int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{(z-x_0) \dots (z-x_n)} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Ahora, añadiendo un nuevo punto  $x \in [-1, 1]$  distinto de los nodos  $x_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , tenemos que,

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{(z-x)(z-x_0) \dots (z-x_n)} dz.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(f)(x) &= f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{z - x} \prod_{j=0}^n \frac{x - x_j}{z - x_j} dz. \end{aligned}$$

Sea  $v_{n+1}(w) = c \prod_{j=0}^n (w - x_j)$  con  $c$  una constante (que puede depender de  $n$ ) que determinamos a continuación. Podemos escribir,

$$f(x) - P_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{z - x} \prod_{j=0}^n \frac{v_{n+1}(x)}{v_{n+1}(z)} dz.$$

En este caso, como  $T_{n+1}(x)$  y  $v_{n+1}(x)$  tienen los mismos ceros y el mismo grado, elegimos la constante  $c$  para que

$$v_{n+1}(x) = c \prod_{j=0}^n (x - x_j) = T_{n+1}(x).$$

Luego,

$$v_{n+1}(z) = T_{n+1}(z).$$

Tenemos que para  $x \in [-1, 1]$ ,  $|T_{n+1}(x)| \leq 1$ . Sea  $z \in \Lambda_\rho$ . Entonces,  $z = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$  donde  $w = \rho e^{i\theta}$  y despejando  $w$ ,  $w = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ . Elegimos la raíz positiva,  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ .

$$\begin{aligned} T_n(z) &= \frac{1}{2} [(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z + \sqrt{z^2 - 1})^{-n}] = \\ &= \frac{1}{2} [(\rho^n + \rho^{-n}) \cos(n\theta) + i(\rho^n - \rho^{-n}) \sen(n\theta)]. \end{aligned}$$

Tomando módulos,

$$\begin{aligned} |T_n(z)| &= \frac{1}{2} \sqrt{(\rho^{2n} + \rho^{-2n} + 2) \cos^2(n\theta) + (\rho^{2n} + \rho^{-2n} - 2) \sen^2(n\theta)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\rho^{2n} + \rho^{-2n} + 2(\cos^2(n\theta) - \sen^2(n\theta))} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\rho^{2n} + \rho^{-2n} + 2 \cos(2n\theta)}. \end{aligned}$$

Como  $-1 \leq \cos(2n\theta) \leq 1$ ,

$$\frac{1}{2} \sqrt{\rho^{2n} + \rho^{-2n} - 2} \leq |T_n(z)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\rho^{2n} + \rho^{-2n} + 2}$$

Luego,

$$\frac{1}{2}(\rho^n - \rho^{-n}) \leq |T_n(z)| \leq \frac{1}{2}(\rho^n + \rho^{-n}).$$

Tomando módulos en  $v_{n+1}(z)$ ,

$$|v_{n+1}(z)| = |T_{n+1}(z)| \geq \frac{1}{2}(\rho^{n+1} - \rho^{-(n+1)}).$$

Por otra parte, si  $z \in \Lambda_\rho$  y  $x \in [-1, 1]$ ,

$$|z - x| \geq d([-1, 1], \Lambda_\rho) = D_\rho. \quad (33)$$

La distancia mínima de  $[-1, 1]$  a la elipse es la que une el punto 1 ó -1 (que son los focos de la elipse) con los respectivos extremos del semieje mayor; es decir,

$$D_\rho = \frac{1}{2} \left[ \rho + \frac{1}{\rho} \right] - 1.$$

Además, por la cota de Euler (ver ecuación 2.15 de [9]), se sabe que la longitud de la elipse verifica,

$$L_\rho \leq \pi \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}}. \quad (34)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(f)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{z-x} \frac{v_{n+1}(x)}{v_{n+1}(z)} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{D_\rho} L_\rho \left[ \frac{1}{2}(\rho^{n+1} - \rho^{-(n+1)}) \right]^{-1} \\ &= \frac{M}{2\pi} \frac{L_\rho}{D_\rho} \frac{2}{\rho^{n+1} - \rho^{-(n+1)}} \leq C\rho^{-n-1}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.14.** *Si  $f$  es una función analítica con  $|f(z)| \leq M$ ,  $M > 0$ , en la región acotada por la elipse con focos  $\pm 1$  y semiejes  $a = \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}]$ ,  $b = \frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}]$  con  $\rho > 1$ . Entonces para cada  $n \geq 0$ ,*

$$|I(f) - C_n^G(f)| \leq \frac{K}{(\rho - 1)\rho^{2n+2}}.$$

*Demostración.* Por el teorema 3.4 tenemos que  $|I(f) - C_n^G(f)| \leq cE_{2n+1}^*$ , con  $c$  una constante positiva. Por otra parte, el error en la mejor aproximación por polinomios de grado  $2n + 1$  será más pequeño o igual que el error en la aproximación de  $f$  por polinomios de Chebyshev de grado  $2n + 1$ . Aplicando la cota (28) obtenemos que

$$E_{2n+1}^* \leq E_{2n+1}^T \leq \frac{K}{(\rho - 1)\rho^{2n+2}}.$$

□

**Teorema 3.15.** Si  $f$  es una función analítica con  $|f(z)| \leq M$ ,  $M > 0$ , en la región acotada por la elipse con focos  $\pm 1$  y semiejes  $a = \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}]$ ,  $b = \frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}]$  con  $\rho > 1$ . Entonces, si  $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ ,  $j = 0, \dots, n$  (nodos de la cuadratura de Clenshaw-Curtis),

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leq C\rho^{-n-1},$$

con  $C$  una constante independiente de  $n$  y  $P_n(f)$  el polinomio interpolador de  $f$  en los nodos descritos.

*Demostración.* Por la demostración del teorema 3.13,

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(f)(x) &= f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_n) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{z - x} \prod_{j=0}^n \frac{x - x_j}{z - x_j} dz. \end{aligned}$$

Igual que en dicho teorema, definimos

$$v_{n+1}(w) = c \prod_{j=0}^n (w - x_j)$$

con  $c$  una constante (que puede depender de  $n$ ) a determinar. Podemos escribir,

$$f(x) - P_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{z - x} \prod_{j=0}^n \frac{v_{n+1}(x)}{v_{n+1}(z)} dz.$$

En este caso,  $x_j = \cos\frac{\pi j}{n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , y tenemos que,

$$(1 - x^2)T'_n(x) = -\frac{1}{2}n[T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)]$$

Entonces, como  $(1 - x^2)T'_n(x)$  y  $v_{n+1}(x)$  tienen los mismos ceros (pues los nodos de Clenshaw-Curtis son los ceros de  $(1 - x^2)T'_n(x)$ ) y el mismo grado, elegimos  $c$  para que

$$v_{n+1}(x) = c \prod_{j=0}^n (x - x_j) = (1 - x^2)T'_n(x).$$

Para que tengan el mismo coeficiente director,  $c = -\frac{2}{n}$ , luego,

$$v_{n+1}(z) = T_{n+1}(z) - T_{n-1}(z).$$

Además, como  $|T_n(x)| \leq 1$  para todo  $n$ ,

$$|v_{n+1}(x)| = |T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)| \leq 2.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
|v_{n+1}(z)| &= |T_{n+1}(z) - T_{n-1}(z)| = \left| \frac{1}{2}(\rho e^{i\theta} - \rho^{-1} e^{-i\theta})(\rho^n e^{in\theta} - \rho^{-n} e^{-in\theta}) \right| \\
&= \frac{1}{2} |(\rho - \rho^{-1}) \cos \theta + i(\rho + \rho^{-1}) \sin \theta| |(\rho^n - \rho^{-n}) \cos(n\theta) + (\rho^n + \rho^{-n}) \sin(n\theta)| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + \rho^{-2} + 2(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))} \sqrt{\rho^{2n} + \rho^{-2n} + 2 \sin^2(n\theta) \cos^2(n\theta)} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + \rho^{-2} - 2 \cos(2\theta)} \sqrt{\rho^{2n} + \rho^{-2n} - 2 \cos(2n\theta)}.
\end{aligned}$$

Y como  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  para todo  $x$ ,

$$\frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}][\rho^n - \rho^{-n}] \leq |v_{n+1}(z)| \leq \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}][\rho^n + \rho^{-n}].$$

Teniendo en cuenta las cotas (33) y (34) tenemos que,

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(f(x))| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\rho} \frac{f(z)}{z-x} \frac{v_{n+1}(x)}{v_{n+1}(z)} dz \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{D_\rho} L_\rho 2 \left[ \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1})(\rho^n - \rho^{-n}) \right]^{-1} \leq C \rho^{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

□

**Corolario 3.16.** Si  $f$  es una función analítica con  $|f(z)| \leq M$ ,  $M > 0$ , en la región acotada por la elipse con focos  $\pm 1$  y semiejes  $a = \frac{1}{2}[\rho + \rho^{-1}]$ ,  $b = \frac{1}{2}[\rho - \rho^{-1}]$  con  $\rho > 1$ . Entonces,

$$|I(f) - C_n^{cc}(f)| \leq 2C \rho^{-n-1},$$

con  $C$  una constante independiente de  $n$  y  $C_n^{cc}(f)$  la fórmula de cuadratura de Clenshaw-Curtis aplicada a la función  $f$ .

*Demostración.*

$$|I(f) - C_n^{cc}(f)| = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 P_n(f)(x) dx \right|$$

donde  $P_n(f)$  es el polinomio interpolador de  $f$  en los nodos de la cuadratura de Clenshaw-Curtis, luego por el teorema 3.15

$$|f(x) - P_n(f)(x)| \leq C \rho^{-(n+1)}, \quad \text{para } x \in [-1, 1].$$

Por tanto,

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 P_n(f)(x) dx \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x) - P_n(f)(x)| dx \leq 2C \rho^{-(n+1)}.$$

□

**Observación 3.17.** Observando los resultados para funciones analíticas podemos concluir que en ambas cuadraturas la tasa de convergencia es exponencial, siendo en el caso de Gauss de orden  $2n + 2$  y en el de Clenshaw-Curtis de orden  $n + 1$ .

## 4. Experimentos Numéricos.

Se ha realizado un programa en Matlab para examinar la convergencia de la cuadratura de Clenshaw-Curtis sobre diferentes funciones e intervalos. Vamos a observar así la aplicabilidad práctica del teorema 3.11 y el corolario 3.16. En el caso de estar trabajando con funciones analíticas calcularemos las constantes  $C$  y  $\rho$  que nos aparecen en el corolario 3.16.

También se han implementado programas que nos calculan aproximadamente el precio de una opción a lo largo del tiempo mediante la cuadratura de Clenshaw-Curtis. Lo hemos realizado para opciones europeas y para opciones bermúdeas que explicaremos a continuación.

### 4.1. Primeros Ejemplos.

Vamos a ver aquí la convergencia de la cuadratura de Clenshaw-Curtis para 6 funciones en  $[-1, 1]$  (de la misma forma se podría haber observado en cualquier otro intervalo) para un número de nodos  $n$  variando desde 1 hasta 40. La primera función,  $f(x) = x^{20}$ , es polinómica, la segunda,  $f(x) = e^x$ , y la tercera,  $f(x) = e^{-x^2}$ , son enteras, la cuarta,  $f(x) = \frac{1}{1+16x^2}$ , analítica en una región que contiene a una elipse de focos  $\pm 1$ , la quinta,  $f(x) = e^{-1/x^2}$ , de clase  $C^\infty$  y la sexta,  $f(x) = |x^3|$ , tan sólo de clase  $C^2$ .

Representaremos para cada una de las funciones su error (más precisamente el logaritmo del error) con respecto al número de nodos en gráficas con escala semilogarítmica, es decir, natural en el eje x y logarítmica en el eje y. Además, la gráfica asociada a la función  $f(x) = |x^3|$  la veremos también en escala logarítmica, es decir, logarítmica tanto en el eje x como en y.

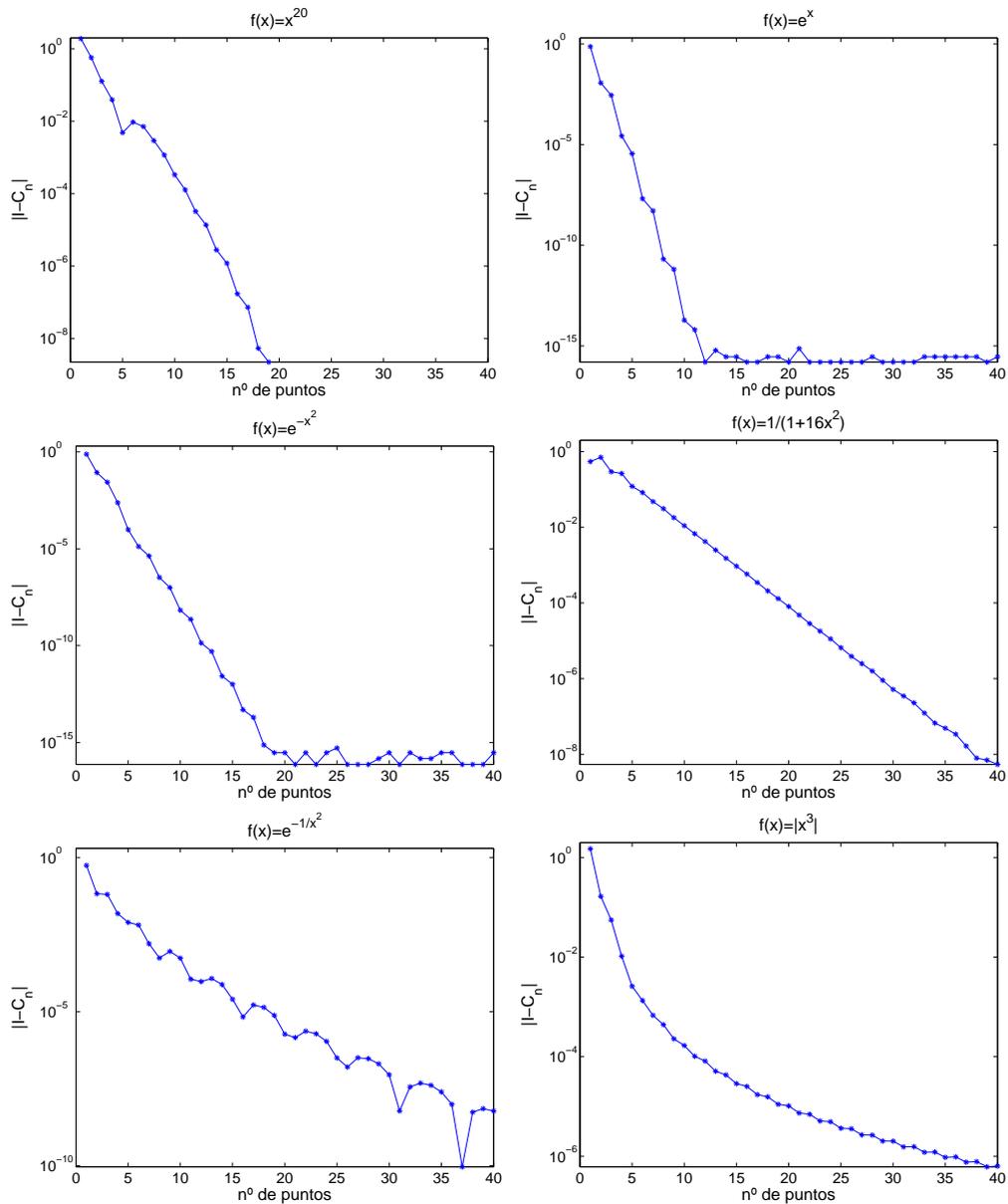


Figura 1: Convergencia de la cuadratura de Clenshaw-Curtis.

Observando las gráficas vemos que en las 4 primeras funciones los puntos están aproximadamente alineados, esto ocurre porque sabemos que el error en funciones analíticas es de la forma  $E = C\rho^{-(n+1)}$ , como vimos en el corolario 3.16, y el eje de ordenadas está en escala logarítmica. Aunque la función  $f(x) = e^{-1/x^2}$  (se corresponde con la gráfica 5) no sea analítica, se comporta de forma similar en la práctica puesto que es indefinidamente derivable (al contrario que sucederá con la función  $f(x) = |x^3|$ ) y en la cota (32) podemos tomar  $k$  arbitrariamente grande. Por tanto, teniendo en cuenta que el eje y está en

escala logarítmica

$$y = \log(E) = \log(C) - (n + 1) \log(\rho)$$

y con respecto de  $n$  el error sigue una distribución exponencial. Dependiendo de las funciones, obtendremos diferentes valores de  $C$  y  $\rho$  que van a ser calculados por mínimos cuadrados ya que tenemos un sistema sobredeterminado (2 incógnitas para  $n = 40$  ecuaciones).

Para la gráfica 1, los valores de  $\rho$  y  $C$  no son calculables ya que a partir de 20 nodos la función  $f(x) = x^{20}$  es exacta y por tanto el error es 0.

Para la gráfica 2 (esquina superior a la derecha):  $\rho = 1.904151224674178$  y  $C = 4.520234751961343e - 008$ .

Para la gráfica 3 (situada en el medio a la izquierda):  $\rho = 2.434575914408888$  y  $C = 1.658321708136737e - 004$ .

Para la gráfica 4 (situada en el medio a la derecha):  $\rho = 1.636885300262696$  y  $C = 2.442098066036360$ .

Para la gráfica 5 (esquina inferior a la izquierda):  $\rho = 1.568431449859916$  y  $C = 0.083143755673811$ .

Veamos ahora la gráfica de la función 6 (esquina inferior a la derecha). La función  $f(x) = |x^3|$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , y por tanto por el teorema 3.11 el error se puede considerar de la forma  $Cn^{-s}$ . Por tanto,

$$\log(E) = C - s \log(n).$$

Tomando el eje de abscisas también en escala logarítmica tenemos la siguiente gráfica:

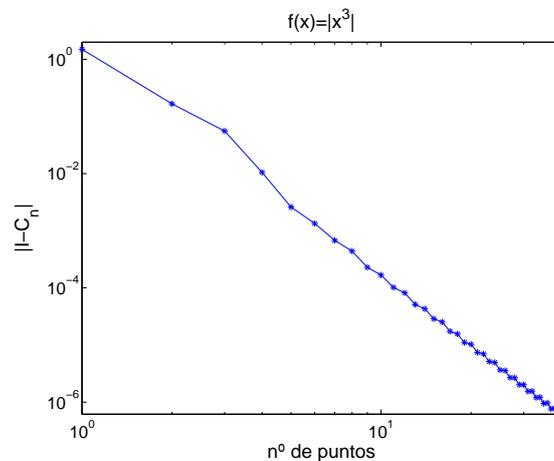


Figura 2: Convergencia en escala loglog.

y vemos que ahora los puntos están considerablemente alineados. Los valores de  $s$  y  $C$  que intervienen en la última fórmula son ahora:

$$C = 2.387742200563046 \text{ y } s = -4.136002242533144.$$

## 4.2. Aplicaciones de la Cuadratura de Clenshaw-Curtis en Finanzas.

Comenzamos dando una introducción sobre opciones, que son el tipo de derivado financiero con el que vamos a trabajar. La mayoría de los resultados de esta sección están sacados de los libros [13] y [14].

Una *opción* es un contrato en el que el propietario tiene el derecho pero no la obligación de comprar o vender un activo a un precio y en una fecha determinados. A la fecha preestablecida se la denomina fecha de expiración o madurez y al precio precio de ejercicio o precio strike.

Se denomina *call option (opción de compra)* a la opción que da al poseedor el derecho a comprar un activo y *put option (opción de venta)* a la opción que da al poseedor el derecho de vender un activo.

Tipos específicos de opciones de compra y de venta son las *opciones europeas* que solo se pueden ejercer en la fecha de madurez y las *opciones americanas* que se pueden ejercer en cualquier tiempo anterior incluyendo la fecha de madurez. Dentro de las opciones americanas hay otro tipo de opciones llamadas *opciones bermúdeas*; en estas opciones no se puede ejercer el derecho en todo momento antes de la expiración si no sólo en ciertos momentos especificados en el contrato.

Se denomina *Payoff* al valor de la opción en su fecha de madurez. Supongamos que tenemos una opción europea con precio  $S(t)$  (precio del Stock), donde  $t$  denota la fecha actual. Supongamos además que la opción madura en fecha  $T$  y que el strike es  $K$ . Si la opción es una opción de compra el payoff será:

$$\max\{0, S(T) - K\}.$$

Si la opción es una opción de venta el payoff será:

$$\max\{0, K - S(T)\}.$$

### 4.2.1. Ecuación de Black-Scholes.

La ecuación de Black-Scholes es una ecuación en derivadas parciales que describe el precio de la opción a lo largo del tiempo. Introducimos la notación que va a intervenir en la ecuación de Black-Scholes:

- $S$ : precio del Stock con  $0 \leq S < \infty$ .
- $V(S,t)$ : precio de un derivado como una función del tiempo y del precio de stock.
- $r$ : tasa de interés libre de riesgo (anual).
- $\sigma$ : desviación estándar de los rendimientos de las acciones.
- $t$ : tiempo en años.

La ecuación de Black-Scholes es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (35)$$

Para resolver esta ecuación impondremos una condición final que dependerá del payoff de cada tipo de contrato. Vamos a centrarnos en manipular (35) para poder resolverla fácilmente.

Primero vamos a cambiar (35) para que nos quede en términos del valor futuro. Suponiendo que la fecha de madurez es  $T$  pero que estamos evaluando la opción en tiempo  $t$ , escribimos:

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)}U(S, t).$$

La ecuación diferencial nos queda,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} = 0.$$

Escribimos  $\tau = T - t$  y tenemos que,

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S}.$$

Haciendo el cambio de variable  $\eta = \log S$ , resulta que

$$\frac{\partial}{\partial S} = e^{-\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial S^2} = e^{-2\eta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - e^{-2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

y la ecuación de Black-Scholes es:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad -\infty < \eta < \infty$$

donde los coeficientes son todos constantes independientes del activo.

Hacemos ahora  $x = \eta + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$  y  $U = W(x, \tau)$ . Tras todos los cambios de variable tenemos que,

$$\begin{aligned} V(S, t) &= e^{-r(T-t)}U(S, t) = e^{-r\tau}U(S, T - \tau) = e^{-r\tau}U(e^\eta, T - \tau) = \\ &= e^{-r\tau}U(e^{x-(r-(1/2)\sigma^2)\tau}, T - \tau) = e^{-r\tau}W(x, \tau), \end{aligned}$$

y la ecuación (35) nos queda:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (36)$$

Supongamos ahora que tenemos una opción cuyo payoff es una función conocida. Queremos dar una expresión para el valor de dicha opción en forma integral. Vamos a hallar una solución especial de (36), llamada la solución fundamental. Buscamos una solución de (36) de la forma:

$$W(x, \tau) = \tau^\alpha f\left(\frac{x - x'}{\tau^\beta}\right) \quad (37)$$

donde  $x'$  es una constante arbitraria. Llamaremos a esta solución  $W_f(x, \tau; x')$ . La función  $f$  sólo depende de la variable  $\mu = \frac{x-x'}{\tau^\beta}$ . Sustituyendo (37) en (36) tenemos que

$$\tau^{\alpha-1} \left( \alpha f - \beta \mu \frac{df}{d\mu} \right) = \frac{1}{2}\sigma^2 \tau^{\alpha-2\beta} \frac{d^2 f}{d\mu^2}.$$

Observando los dos términos de la igualdad respecto de  $\tau$  y  $\mu$  vemos que sólo puede haber solución si

$$\alpha - 1 = \alpha - 2\beta, \text{ es decir, } \beta = \frac{1}{2}.$$

Imponemos ahora que la solución tenga la siguiente propiedad: Su integral sobre todo  $\eta$  es independiente de  $\tau$ . Para ello queremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^\alpha f\left(\frac{x - x'}{\tau^\beta}\right) dx$$

sea constante. Podemos escribir esta integral como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{\alpha+\beta} f(\mu) d\mu$$

y por tanto se necesita que  $\alpha = -\beta = -\frac{1}{2}$ . La función  $f$  satisface ahora  $-f + \mu \frac{df}{d\mu} = \sigma^2 \frac{d^2 f}{d\mu^2}$  que puede ser escrito como

$$\sigma^2 \frac{d^2 f}{d\mu^2} + \frac{d(\mu f)}{d\mu} = 0.$$

Integrando una vez con respecto de  $\mu$ ,

$$\sigma^2 \frac{df}{d\mu} + \mu f = a,$$

con  $a$  constante. Elegimos  $a = 0$ . Integramos de nuevo para conseguir

$$f(\mu) = b e^{-\mu^2/(2\sigma^2)}.$$

Elegimos, además,  $b$  tal que la integral de  $f$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  es uno, luego

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\mu^2/(2\sigma^2)}$$

(función de densidad para una variable aleatoria normal con media 0 y desviación estándar  $\sigma$ ). Por tanto, la solución buscada es (solución fundamental del calor, ver [12])

$$W(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{-((x-x')^2)/(2\sigma^2\tau)}.$$

Supongamos ahora que el payoff viene dado por  $\Phi(S)$ . Este payoff es la condición final para la función  $V$  satisfaciendo la ecuación de Black-Scholes,

$$V(S, T) = \Phi(S).$$

En término de las nuevas variables,  $W(x, 0) = \Phi(e^x)$ .

La solución para  $\tau > 0$  es:

$$W(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, \tau; x') \Phi(e^{x'}) dx'$$

pues acabamos de ver que satisface (36) y la condición final.

Deshaciendo todos los cambios de variable, obtenemos que

$$V(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} e^{-(\log(S/S') + (r - (1/2)\sigma^2)(T-t))^2 / (2\sigma^2(T-t))} \Phi(S') \frac{dS'}{S'}. \quad (38)$$

### **Fórmula para una Opción de Compra.**

La opción de compra tiene como función de payoff

$$\Phi(S) = \text{máx}\{S - K, 0\}.$$

La expresión (38) puede ser escrita como

$$V(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_E^\infty e^{-(\log(S/S')+(r-(1/2)\sigma^2)(T-t))^2/(2\sigma^2(T-t))} (S' - K) \frac{dS'}{S'}.$$

Volviendo a la variable  $x' = \log S'$  obtenemos que

$$\begin{aligned} V(S, t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\log E}^\infty e^{-(-x'+\log S+(r-(1/2)\sigma^2)(T-t))^2/(2\sigma^2(T-t))} (e^{x'} - K) dx' \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\log E}^\infty e^{-(-x'+\log S+(r-(1/2)\sigma^2)(T-t))^2/(2\sigma^2(T-t))} e^{x'} dx' \\ &\quad - E \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\log E}^\infty e^{-(-x'+\log S+(r-(1/2)\sigma^2)(T-t))^2/(2\sigma^2(T-t))} dx'. \end{aligned}$$

Ambas integrales se pueden escribir en la forma

$$\int_d^\infty e^{-(1/2)x'^2} dx'$$

para algún  $d$ . Esta integral es como (salvo pequeñas diferencias) la función de distribución de la distribución normal estandarizada (es decir, de media 0 y desviación estándar 1) definida por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(1/2)\phi^2} d\phi.$$

Entonces, el precio de la opción de compra puede ser escrito como:

$$SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

### **Fórmula para una Opción de Venta.**

La opción de venta tiene como función de payoff

$$\Phi(S) = \text{máx}\{K - S, 0\}.$$

Razonando de la misma forma que para la opción de compra obtenemos que

$$V(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\log E} e^{-(-x'+\log S+(r-(1/2)\sigma^2)(T-t))^2/(2\sigma^2(T-t))} (K - e^{x'}) dx'.$$

Y en términos de la función de distribución de una variable normal el valor de la opción de venta es

$$-SN(-d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(-d_2),$$

con los mismos  $d_1$  y  $d_2$  que en la opción de compra.

### 4.2.2. Opción bermúdea.

Una *opción bermúdea* es una opción que puede ejercerse en un número finito de fechas prefijadas entre la fecha de compra y el vencimiento. Son las más frecuentes en los mercados y, de hecho, se utilizan como aproximación de las opciones de tipo americano en las que el poseedor tiene derecho a ejecutar la opción en cualquier momento antes de la fecha de expiración. Por esta razón es interesante el disponer de métodos rápidos y precisos que permitan su evaluación frecuente.

Veamos cómo calcular el valor de una opción bermúdea por programación dinámica. Suponemos dadas en el contrato *fechas de ejercicio* posible  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Denominamos *valor de tenencia o propiedad*, y representamos por  $V_h(S, t_j)$ , al valor de la correspondiente opción europea con valor del activo  $S$  y tiempo de madurez  $t_{j+1}$  con payoff  $V(S, t_{j+1})$ , es decir,

$$V_h(S, t_j) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^\infty e^{-(\log(S/S') + (r - (1/2)\sigma^2)(T-t))^2 / (2\sigma^2(T-t))} V(S', t_{j+1}) \frac{dS'}{S'}.$$

donde  $V(S, t_j)$  es el valor de la opción bermúdea en tiempo  $t_{j+1} \in [0, T]$ .

Para calcular el valor de la opción bermúdea en tiempo donde ejercicio  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, N$ , seguimos el siguiente procedimiento: En tiempo de expiración  $T$  se tiene que  $V(S, T) = \phi(S)$  donde  $\phi(S)$  es el payoff de la opción cuando el precio de Stock es  $S$ . Para los tiempos  $t_0, \dots, t_{N-1}$  hacemos: Para  $j$  desde  $N-1$  hasta 0,

$$V(S, t_j) = \text{máx}\{V_h(S, t_j), \phi(S)\}$$

donde  $\phi(S) = V(S, T)$  y  $V_h(S, t_j)$  está dado por (4.2.2). Así conseguimos obtener el valor de la opción bermúdea de manera explícita.

**Observación 4.1.** Una observación importante es que no existen fórmulas explícitas que calculen el valor de una opción bermúdea; por tanto, es imprescindible en este caso aplicar métodos de cuadratura numérica.

### 4.2.3. Ejemplos e Implementación.

Se ha realizado un programa en Matlab que nos calcula un valor aproximado de la ecuación de Black-Scholes para una opción de venta europea a lo largo del tiempo. Para ello hemos elegido un número arbitrario de puntos (suficientemente grande) en un intervalo de la forma  $[0, S_{Max}]$  con  $S_{Max}$  elegido para que el integrando en (38) sea suficientemente pequeño. Hemos aplicado la cuadratura de Clenshaw-Curtis en ese número de nodos. Representamos el

valor de la opción con respecto del precio del Stock y el tiempo y obtenemos la siguiente gráfica:

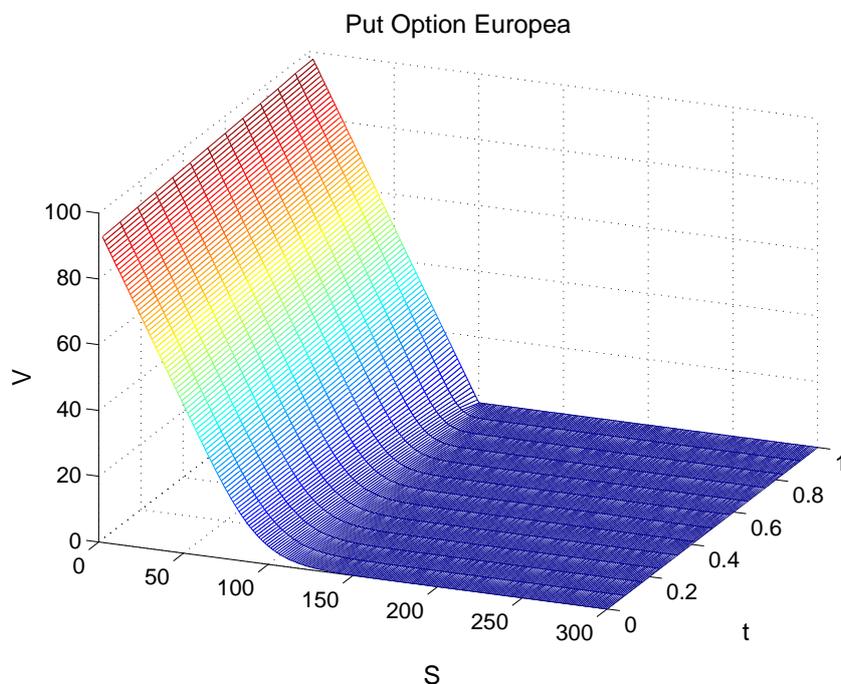


Figura 3: Evolución de una opción europea.

En el caso que hemos representado, los parámetros introducidos en el programa son: volatilidad 0.2, tasa de interés anual 0.05, strike 100 y tiempo de madurez 1 año. Podemos observar que según va aumentando el precio del Stock va disminuyendo el de la opción y cuando el Stock llega a valer aproximadamente 100 (según el tiempo en el que estemos) el precio de la opción de venta es 0. En el caso de estar en tiempo  $T=1$ , el precio de la opción es justamente el payoff (como era de esperar):

$$V(S, T) = \max\{K - S, 0\}$$

pues cuando  $S = 100$ , entonces  $V(S, T) = 0$ .

Podemos comparar nuestro programa con el que calcula el valor de la opción europea implementado por Matlab, `blsprice`. Llamamos en Matlab `[Call,Put] = blsprice(S,100,0.05,1,0.2)` y nos fijamos en la opción Put. Vamos a calcular el máximo error entre  $B=BlackScholes(0.2,0.05,100,1)$ , en tiempo  $t = 0$ , y Put. El máximo error se encontrará cerca del strike (en este caso  $K=100$ ). Calculamos el  $S_j$  más cercano a  $K = 100$  ( $S_j = 100.2773$  con  $j=86$ ) y obtenemos que:

$$|B(j, 1) - Put(S_j)'| = 0.002645.$$

En este primer caso hemos ejecutado BlackScholes(0.2,0.05,100,1) con 256 nodos. Si tomamos 512 nodos en la cuadratura obtenemos que

$$|B(j, 1) - Put(S_j)'| = 0.00024326$$

Y para 1024 nodos

$$|B(j, 1) - Put(S_j)'| = 0.000084063.$$

Luego vemos que los errores van decreciendo exponencialmente a medida que aumenta el número de nodos.

Más precisamente, para obtener el mayor error entre ambas funciones se puede utilizar la norma del supremo. Haciendo

$$[error, k] = \text{máx}(|B(3 : end, 1) - Put(3 : end)'|)$$

(hemos quitado los primeros valores ya que blsprice no calcula bien el valor de la opción cerca de  $S = 0$ ) tenemos que el máximo error es aproximadamente 0.0027 par 256 nodos y que se encuentra en la posición 82 con  $S(82) = 95.6$ . Para 512 nodos el máximo error es 0.00024 y para 1024 nodos 0.000085.

Otro programa que hemos realizado es el que nos calcula aproximadamente, usando el mismo algoritmo que en el caso de la opción europea, el valor de una opción bermúdea en tiempo de madurez un año y que se puede ejercer cada mes. A continuación vamos a representar el valor de esta opción para los parámetros elegidos en la opción europea. El valor de la opción evoluciona de la siguiente manera:

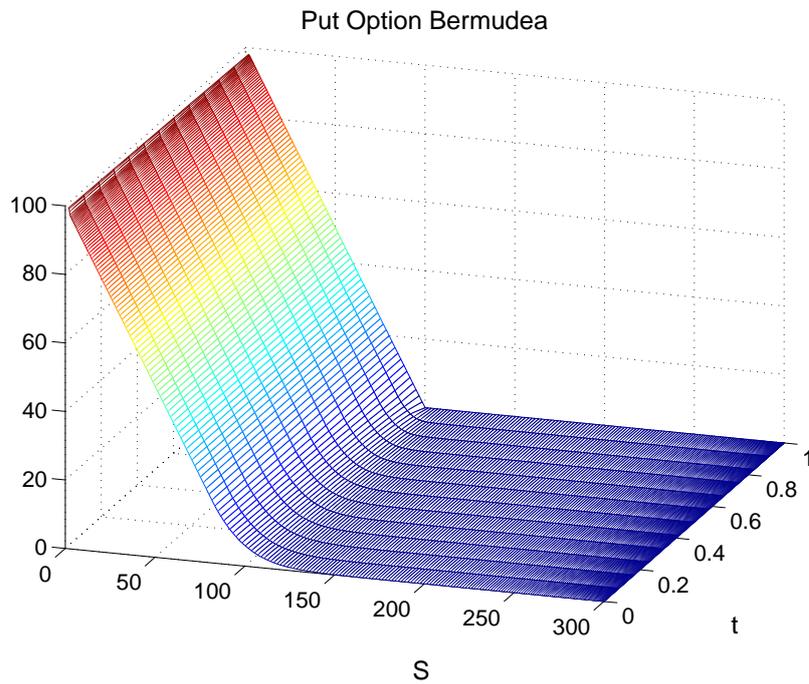


Figura 4: Evolución de una opción bermúdea.

La gráfica obtenida es muy similar a la de la opción europea pero vamos a observar a continuación las diferencias. Comparamos ahora una opción europea con una opción bermúdea con los mismos parámetros de entrada descritos anteriormente y con tiempo de ejercicio en el caso de la opción bermúdea cada trimestre.

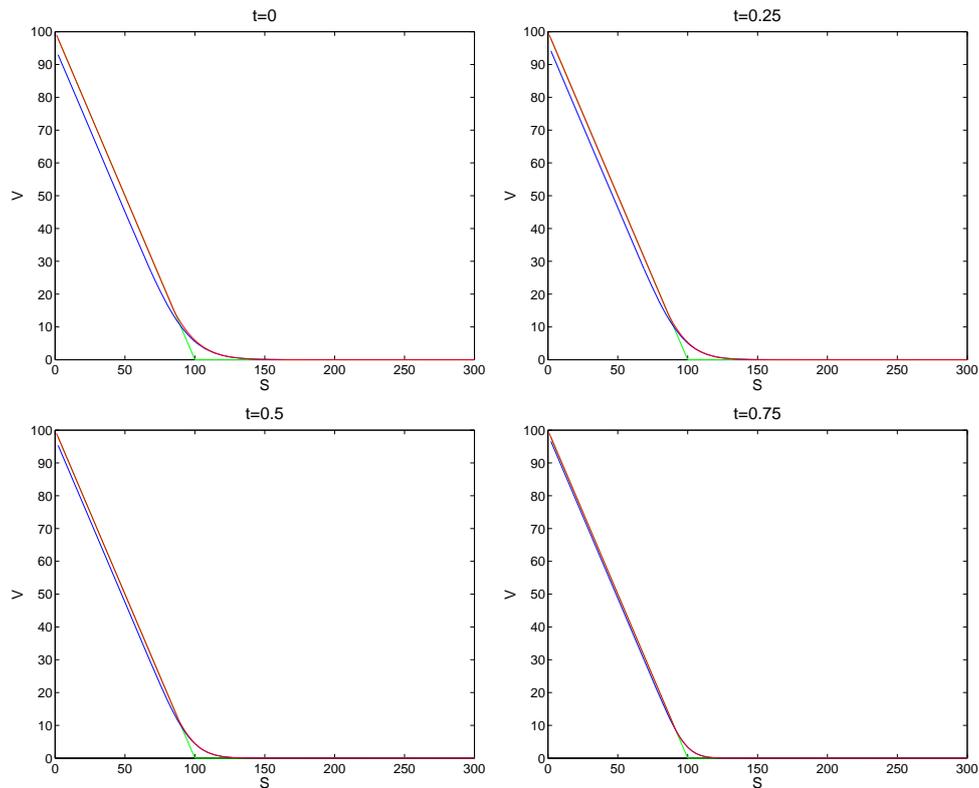


Figura 5: Opción bermúdeas y europea en tiempos  $t=0$ ,  $t=0.25$ ,  $t=0.5$ ,  $t=0.75$ .

Vemos en las gráficas que el valor de la opción bermúdeas (en rojo) es siempre mayor que el valor de la opción europea (en azul); esto es debido a que

$$V(S, t) = \max\{V_h(S, t), \phi(S)\} \quad \forall t \in [0, T].$$

En tiempo  $t=0$  el valor de la opción bermúdeas es bastante mayor que el de la opción europea empezándose a aproximar a partir de que el valor del activo sea 100, es decir, a partir del strike. Por otra parte, cuando pasa el tiempo el valor de la opción europea y el de la opción bermúdeas van siendo más parecidos puesto que el valor de ambas opciones en tiempo final es el payoff y con el paso del tiempo hay menos oportunidades en las que ejercer la opción bermúdeas. Estos valores llegan a ser casi iguales a partir del punto en el que la opción europea corta con el payoff.

## A. Programación en Matlab.

A continuación vamos a introducir los programas realizados en Matlab para los diferentes experimentos numéricos.

### A.1. fcost, ClenCurt y Convergencia.

Introducimos en este apartado los programas fcost, ClenCurt y Convergencia. El programa Convergencia es el que se ha descrito en la sección *Primeros Ejemplos* y los otros dos son funciones que utilizamos en dicho programa; fcost nos calcula la transformada rápida de Fourier y ClenCurt nos calcula la cuadratura de Clenshaw-Curtis de una función en un intervalo y para un número de nodos dados.

```
function y=fcost(x)
%calcula la transformada de cosenos (por columnas) de una sucesion
%real x llama a la rutina fft.
[nfil,ncol]=size(x);n=nfil-1;nn=2*n;
y=real(fft([x;x(n:-1:2,:)])/nn);
y=[y(1,:);y(2:n,:)+y(2*n:-1:nfil+1,:);y(nfil,:)];
```

```
function In= ClenCurt(f,a,b,n)
%Los parámetros de entrada de la función son la función f,
%el intervalo en el que está definida, y el número de puntos
%de interpolación.

format long

wt=zeros(1,n+1);
wt(1:2:end)=2./(1-(0:2:n).^2); % pesos de la cuadratura

j=0:n;
x=cos(j*pi/n)'; % nodos de la cuadratura de CC en (-1,1).
%Si la función f está definida en un intervalo arbitrario (a,b),
%evaluamos f en los nodos:
x=(x+1)/2*(b-a)+a;

g=zeros(n+1,1);
g(1:n+1)=eval(f);
g=g(:); % vector columna. f evaluada en los n+1 nodos.

ft=fcost(g); % transformada de cosenos de la función f.
           %(Se utiliza FFT)

In=(b-a)/2*wt*ft;
```

```

function g=Convergencia(f,a,b);
%Los parámetros de entrada son la función en la que queremos ver
%la convergencia de la cuadratura y el intervalo en el que está
%definida.
n=40; %número de nodos en los que vamos a evaluar.
y=zeros(1,n);
Error=zeros(1,n);
h=1:n;
for i=1:n
    y(i)=ClenCurt(f,a,b,i); %calculamos cuadratura dependiendo del
    %numero de nodos
end
I=int(sym('abs(x^3)'),a,b); %integral exacta
Error=abs(I-y(1:n)); %Error de la cuadratura dependiendo del
    %numero de nodos

%semilogy(h,Error,'*-b'); %para las funciones analíticas
loglog(h,Error,'*-b'); %para las funciones de orden finito
xlabel('n° de puntos')
ylabel('|I-C_n|')
axis([0 n 0 2])
title('f(x)=|x^3|')

%Sabemos que el error para la cuadratura de CC de una función
%analítica se comporta como c*rho^(-N-1).
%y=log(E)=log(c)-(N+1)log(rho).
%Para la función |x^3| que es de orden 2 el error se comporta
%como c*N^{-s}.
%y=log(E)=log(c)-s*log(N).

gg=-log(h);
aux=zeros(n,2);
aux(:,2)=ones(n,1);
aux(:,1)=h+1; %primera fila de la matriz para funciones analíticas
%aux(:,1)=gg; %primera fila de la matriz para funciones de orden
%finito.

indep=zeros(n,1);
Error=Error';
indep(:,1)=log(Error);

%Resolvemos el siguiente sistema para calcular los valores de
%rho y c mediante mínimos cuadrados:
sis=aux\indep;
rho=exp(-sis(1));
c=exp(sis(2));
s=sis(1);
g.s=s;
g.c=c;
g.rho=rho;

```

## A.2. integrando\_bs y BlackScholes.

Adjuntamos en este apartado los programas `integrando_bs` y `BlackScholes`. El primer programa contiene la función (38) y el segundo es el primer programa descrito en la sección *Ejemplos e implementación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis* en el cual para calcular el valor de la opción usamos el programa `integrando_bs`.

```
function fun = integrando_bs(x,t,S,T,sigma,r,K)
%Los parámetros de entrada son el vector x con los puntos nodales,
%el tiempo t en el que queremos evaluar la opción, el valor de Stock
%del activo (S), el tiempo de madurez (T), la volatilidad (sigma),
%la tasa de interés (r) y el strike (K).
payoff=max(K-x,0);
fun=exp(-r.*(T-t))./(sigma.*sqrt(2.*pi.*(T-t))).*...
exp(-(log(S./x)+(r-1/2.*sigma.^2).*(T-t)).^2./(2.*sigma.^2.*...
(T-t))).*payoff./x;
end
```

```
function W=BlackScholes(sigma,r,K,T)
%Los parámetros de entrada son: la volatilidad, la tasa de interés
%libre de riesgo, el strike y el tiempo de madurez.
N=4; % número de puntos en los que evaluar el tiempo.
M=2*128; % número de puntos para evaluar el valor de activo, S.
Smax=3*K; %tomamos un valor superior para la integral lo
% suficientemente grande.
Smin=1;
t=0:T/N:T;
S=Smin:(Smax-Smin)/M:Smax;

L=2*128;
j=0:L;
x=cos(j*pi/L)';
x=(x+1)/2*(Smax-Smin)+Smin; %nodos de CC en (Smin,Smax).

wt=zeros(1,L+1);
wt(1:2:end)=2./(1-(0:2:L).^2); %pesos de CC
wt=(Smax-Smin)/2*wt;

W=zeros(M+1,N+1);
W(:,N+1)=max(K-S,0); %en la última columna

%Las filas de la matriz W son el valor del activo S, y las
%columnas el tiempo t. La matriz W describe por tanto el precio
%de la opción a lo largo del tiempo, W(S,t).
g=zeros(M+1,1);
for j=N:-1:1
    for i=1:M+1
        g=integrando_bs(x,t(j),S(i),T,sigma,r,K);
```

```

        g=g(:);
        ft=fcost(g);
        In=wt*ft;
        W(i,j)=In;
    end
end

figure(1)
plot(S(2:end),W(2:end,N+1),'g-');
hold on
plot(S(2:end),W(2:end,4));
figure(2)
mesh(S(2:end),t,W(2:end,:))
end

```

### A.3. integrandopoff y bermúdea.

Por último, introducimos los programa `integrandopoff` y `Bermudea`. El primer programa contiene la función (38) pero a diferencia de `integrando_bs` admite como dato de entrada el `payoff`. `Bermudea` es el segundo programa descrito en la sección *Ejemplos e implementación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis* en el cual para calcular el valor de la opción usamos el programa `integrandopoff`.

```

function fun = integrandopoff(x,t,S,T,sigma,r,K,payoff)
%Los parámetros de entrada son los mismos que en la función
%integrando_bs más el payoff.
fun=exp(-r.*(T-t))./(sigma.*sqrt(2.*pi.*(T-t))).*...
exp(-(log(S./x)+(r-1/2.*sigma.^2).*(T-t)).^2./(2.*sigma.^2.*...
(T-t))).*payoff./x;
end

```

```

function V=Bermudea(sigma,r,K,T);
N=4; % número de puntos en los que evaluar el tiempo.
M=2*128; % número de puntos para evaluar el valor de activo, S.
Smax=3*K; %tomamos un valor superior para la integral lo
% suficientemente grande.
Smin=1;
t=0:T/N:T;

j=0:M;
x=cos(j*pi/M)';
x=(x+1)/2*(Smax-Smin)+Smin; %nodos de CC en (Smin,Smax).

wt=zeros(1,M+1);
wt(1:2:end)=2./(1-(0:2:M).^2); %pesos de CC
wt=(Smax-Smin)/2*wt;

```

```

V=zeros(M+1,N+1);
V(:,N+1)=max(K-x,0); %en la última columna

payoff=max(K-x,0);
Vh=zeros(M+1,N+1); %valor de tenencia o propiedad.
Vh(:,N+1)=payoff; %en el último tiempo es el payoff.

phi=payoff; %phi será inicialmente el payoff pero irá cambiando
%a lo largo del tiempo tomando el valor de tenencia en dicho
%tiempo que se utilizará para evaluar el integrando en phi en
%vez de en el payoff.

g=zeros(M+1,1);
for j=N:-1:1
    for i=1:M+1
        g=integrandopoff(x,t(j),x(i),T,sigma,r,K,phi);
        g=g(:);
        ft=fcost(g);
        In=wt*ft;
        Vh(i,j)=In; %calculamos el valor de propiedad mediante
        %la cuadratura de CC.
    end
    V(:,j)=max(Vh(:,j),payoff); %el valor de la opción será el
    %máximo entre el valor de propiedad y el payoff.
    phi=V(:,j); %valor de tenencia en tiempo t(j).
    T=t(j); %iremos cambiando el tiempo final pues ya hemos
    %calculado el valor de ejercer la opción en tiempos posteriores.
end

figure(1)
plot(x(2:end),V(2:end,4),'r-');
figure(2)
mesh(x(1:M-8),t,V(1:M-8,:))
end

```

## Referencias

- [1] E.Isaacson & H.B.Keller, *Analysis of Numerical Methods.*, Dover Publications, INC., New York, 1994.
- [2] J.C.Mason & D.C.Handscomb, *Chebyshev Polynomials.*, Chapman & Hall/CRC, London, 2003.
- [3] T.J.Rivlin, *The Chebyshev Polynomials.*,John Wiley & Sons, New York, 1926.
- [4] C.Canuto, M.Y.Hussaini, A.Quarteroni & T.A.Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics.*,Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [5] C.W.Clenshaw & A.R.Curtis, *A method for numerical integration on an automatic computer.*, Numerische Mathematik, 2(1960), 197–205.
- [6] Lloyd N. Trefethen, *Is Gauss Quadrature Better than Clenshaw-Curtis?*, SIAM Review, 50(2008), 67–87.
- [7] J.M.Sanz-Serna, *Diez Lecciones de Cálculo Numérico.*, Universidad de Valladolid, Valladolid, 2010.
- [8] P.J.Davis, *Interpolation & Approximation*, Constable and Company, Ltd., United Kingdom, 1975.
- [9] S.C.Reddy & J.A.C. Weideman, *The Accuracy of the Chebyshev Differencing Method for Analytic Functions.*, SIAM Review, 42(2005), 2176–2187.
- [10] L.Fejér, *On the Infinite Sequences Arising in the Theories of Harmonic Analysis, of Interpolation, and of Mechanical Quadratures.*, Bulletin of the American Mathematical Society (Bull.Amer.Math.Soc), 39(1933), 521–534.
- [11] R.B.Ash & W.P.Novinger, *Complex Variables*, TOC., Florida State University, 2004.
- [12] R.Haberman, *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno.*, Pearson Educación, S.A., Madrid, 2003.
- [13] J.Wiley & Sons, *Paul Wilmott on Quantitative Finance. Volume One.*, LTD, Chichester, 2003.
- [14] R.Jarrow & S.Turnbull, *Derivative Securities.*, South-Western College Publishing, Australia, 2000.