



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

**ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE  
MANIPULACIÓN DE ESTRUCTURAS  
QUIRALES DE LA MAGNETIZACIÓN  
ASOCIADAS AL ACOPLAMIENTO  
SPIN-ÓRBITA**

Máster en Instrumentación en Física

Trabajo Fin de Máster

*Luis Sánchez-Tejerina San José*

Tutor: *Óscar Alejos Ducal*



# Estudio de los procesos de manipulación de estructuras quirales de la magnetización asociadas al acoplamiento spin-órbita

Luis Sánchez-Tejerina San José

Trabajo Fin de Master. Junio 2015

## INDICE

Abstract	1
Resumen	1
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Fundamentos Teóricos</b>	<b>4</b>
2.1 Principio Variacional para Sistemas Continuos .....	4
2.2 Equilibrio Estático. Ecuaciones de Brown .....	7
2.3 Ecuación Dinámica .....	8
2.4 Contribuciones a la Energía Libre .....	12
2.4.1 Energía de Intercambio	
2.4.2 Anisotropía magnetocristalina	
2.4.3 Energía electrostática. Energía Magnetostática y Campo Externo	
2.4.4 Energía de interacción de la DMI	

2.5	Forma de las ecuaciones con las contribuciones expuestas.....	17
2.6	Modelo unidimensional (1D model) .....	18
<b>3.</b>	<b>Herramientas de Estudio. Software Utilizado</b>	<b>30</b>
<b>4.</b>	<b>Orientación de la Pared en Equilibrio</b>	<b>38</b>
4.1	Parámetros utilizados para la simulación .....	38
4.2	Resultados y conclusiones .....	39
<b>5.</b>	<b>Dinámica de la Pared</b>	<b>41</b>
5.1	Planteamiento .....	41
5.2	Resultados y comparación con el modelo .....	41
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>47</b>
	Referencias	50





# Abstract

We show the basis of Micromagnetics, a mesoscopic model for the magnetization which allows us to compute numerically the magnetization structure responsible for the existence of magnetic domains at macroscopic scale present in a ferromagnet, detailed enough to determine the magnetization in transition between domains. As this model becomes too complex for analytical resolution we need a simpler model to compare analytical and numerical results. This model is the one dimensional model that we also comment. Even though part of this model has been already developed, we contribute with some original conclusions. After that, we talk about the software developed by SINAMAG in order to solve the micromagnetics equations previously derived. Finally, we present the numerical results obtained with this program, with other numerical results from the bibliography and with one dimensional model, and extract some conclusions from them.

# Resumen

Presentamos las ideas básicas del micromagnetismo, un modelo mesoscópico que nos permite determinar numéricamente la estructura magnética de un ferromagnético con mayor detalle que teorías macroscópicas como la teoría de dominios, permitiéndonos, por ejemplo, conocer cómo es la magnetización en las transiciones entre dominios. Sin embargo, este modelo es demasiado complejo y se desconoce una solución analítica del mismo. Es por ello que necesitamos un modelo más simple para poder resolverlo analíticamente y poder comparar los resultados. Es en este contexto donde se encuadra el modelo unidimensional. Aunque parte de este modelo ya ha sido desarrollado, otros aspectos del desarrollo que presentamos son inéditos. Comentamos también las ideas básicas detrás del software desarrollado por SINAMAG que hemos utilizado para realizar los cálculos numéricos. Finalmente presentamos los resultados obtenidos con el programa y los comparamos con la literatura y con los resultados analíticos del modelo unidimensional, sacando las conclusiones pertinentes de los mismos.

# 1 Introducción

*“To understand ferromagnetic materials, we must examine them on a smaller scale than that of ordinary observations. [...] analyzes them (ferromagnetic) on an intermediate scale: small enough to reveal details of the transition regions between domains, yet large enough to permit the use of a continuous magnetization vector rather than of individual atomic spins”.*<sup>1</sup>

El Micromagnetismo es un campo de la física bastante reciente. Aunque podríamos marcar su comienzo en 1935, con los trabajos de Landau y Lifshitz sobre paredes magnéticas, no es hasta 1957, con una teoría rigurosa de la formación de tales paredes, que el Micromagnetismo como tal recibe una atención adecuada. Este campo se ocupa del estudio del comportamiento magnético de los materiales en sistemas de baja dimensionalidad. La evolución de esta disciplina ha sido posible gracias tanto al desarrollo de técnicas que han permitido construir dispositivos magneto-electrónicos de dimensiones nanométricas, como al desarrollo del Micromagnetismo Computacional, que ha permitido conocer detalles tanto de los estados de equilibrio de la magnetización y sus ciclos de histéresis como de la dinámica de la magnetización.

Uno de los aspectos relevantes del Micromagnetismo es el rango de tamaños de los dispositivos que estudia, los cuales van desde decenas de nanómetros hasta micras. Son, por tanto, dispositivos demasiado pequeños para ser analizados desde el punto de vista de teorías macroscópicas, como la Teoría de Dominios. Son, sin embargo, dispositivos demasiado grandes como para abordarlos desde la escala atómica. Estamos, pues, a medio camino entre el mundo macroscópico y el microscópico; a escala mesoscópica. Esto nos va a permitir estudiar la magnetización como un función vectorial continua dependiente de la posición.

Otro pilar fundamental del modelo micromagnético es la suposición de que el módulo de la magnetización permanece constante,  $|\mathbf{M}| = M_s$ , y solo puede cambiar su orientación, lo cual resulta aceptable si estamos suficientemente por debajo del punto de Curie [3]. Podemos, por tanto, reducir nuestro problema al estudio de un conjunto de elementos  $dV$  con magnetización constante  $M_s$  y cuya dirección, determinada por el vector unitario  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$ , varía suavemente de un elemento de volumen a otro. Se ve aquí la importancia de la escala mesoscópica; los  $dV$  deben ser suficientemente pequeños como para que la magnetización varíe suavemente de un elemento

---

<sup>1</sup>W. F. Brown, Jr. *Micromagnetics* (1963)

de volumen a otro, pero suficientemente grande como para que contenga un número considerable de átomos que originen la magnetización, ya que esta será el valor esperado del momento dipolar del conjunto de átomos, lo que justifica que varíe de forma continua.

El interés por la caracterización del comportamiento magnético de elementos de baja dimensionalidad está justificado tanto desde un punto de vista de ciencia básica, como por los desarrollos tecnológicos a los que podría conducir. El conocimiento de los estados de equilibrio de una estructura podría permitir una mayor estabilidad a las memorias magnéticas, y por consiguiente un mayor tiempo de vida. También resulta interesante caracterizar la dinámica de estas estructuras magnéticas para conocer la forma más eficiente de moverlas, permitiendo tiempos de lectura y escritura menores.

Esto se pone de manifiesto, por ejemplo, en las memorias racetrack, dispositivos basados en tiras de material magnético que soportan la información mediante la definición de dominios magnéticos separados por paredes (en adelante DW, *Domain Wall*), las cuales deben desplazarse por la tira. Es obvio que este desplazamiento puede conseguirse mediante la aplicación de un determinado campo externo (como se ha hecho para el presente trabajo). Sin embargo, existen otros métodos más eficientes para conseguir este desplazamiento. Como ejemplo de estos estímulos podemos mencionar aquellos basados en transferencia de spin (en adelante STT, *Spin Transfer Torque*).

Más novedosos son aquellos fenómenos descubiertos en bicapas formadas por un material con anisotropía perpendicular (PMA, *Perpendicular Magnetocrystalline Anisotropy*) depositado sobre un metal pesado, debido al acoplo spin-órbita. Se han descrito al menos tres fenómenos debido a este acoplo; el campo de Rashba, el efecto de la corriente de Spin Hall (SHE, *Spin Hall Effect*) y la interacción de Dzyaloshinskii-Moriya (DMI), en la que nos centraremos en este trabajo.

Con estas consideraciones presentes podemos resumir el presente trabajo. Bajo las hipótesis de estudio propias del micromagnetismo se ha estudiado, en una tira de material ferromagnético con anisotropía perpendicular, crecida sobre un metal pesado que determinaba una cierta interacción de Dzyaloshinskii-Moriya, la dinámica de paredes magnéticas conducidas mediante un campo externo perpendicular al plano de la tira.

## 2 Fundamentos Teóricos

Como hemos comentado en la introducción, el micromagnetismo es una teoría mesoscópica. Aunque el sistema que estamos estudiando es el conjunto de dipolos magnéticos debidos a los átomos que conforman la red cristalina, y por tanto es un sistema discreto, lo vamos a tratar como un continuo. Esto se justifica porque en cada  $dV$  tendremos un número suficientemente grande de dipolos, en que la interacción dominante es la de intercambio, por ser la escala suficientemente pequeña, que tiende a orientar los dipolos paralelamente (nos centraremos a partir de ahora en los ferromagnéticos). El resto de interacciones modificarán ligeramente esta orientación produciendo una transición suave entre las celdas de estudio. Son estas interacciones a “*gran*” escala las que explicarán el resto de propiedades del sistema. Por tanto, es esta teoría la que nos permite conocer los detalles de las transiciones entre dominios sin necesidad de tratar el problema, inabordable por el número de individualidades, a escala atómica.

Como mencionamos en la introducción, nos interesa conocer tanto los estados de equilibrio, dados por las soluciones de las ecuaciones de Brown, como la dinámica de la pared, descrita por la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG). Describimos a continuación cómo obtener estas ecuaciones, aunque no son las únicas formas de llegar a ellas.

### 2.1 Principio variacional en sistemas continuos

Las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico pueden ser obtenidas a partir del principio variacional de Hamilton [2], según el cual la evolución temporal del sistema entre dos instantes de tiempo es tal que la acción integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.1)$$

toma un valor que hace la variación de la misma nula, siendo  $L$  el lagrangiano del sistema.

En nuestro caso escribiremos el lagrangiano como

$$L = \int_V l_V dV + \int_S u_S dS \quad (2.2)$$

donde  $l_V = k_V - u_V$ , siendo  $k_V$  y  $u_V$  las densidades de energía cinética y potencial

en el volumen respectivamente, y  $u_S$  la densidad de energía potencial en la superficie límite del sistema.

Supongamos que existe una cierta función vectorial  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ , tal que la densidad lagrangiana por unidad de volumen  $l_V$  dependa tanto de esta función como de sus derivadas temporales y espaciales<sup>2</sup>, así como de la posición y del tiempo. Por su parte, haremos la suposición de que la densidad lagrangiana superficial  $u_S$  será función únicamente de  $\mathbf{m}$ , de la posición y del tiempo. Esta suposición está motivada por la forma que adopta el término fenomenológico de anisotropía superficial. En resumen, tenemos que

$$\begin{aligned} l_V &= l_V(\mathbf{m}, \partial\mathbf{m}/\partial t, \nabla\mathbf{m}, \mathbf{r}, t) \\ u_S &= u_S(\mathbf{m}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento de nuestro sistema tendremos que imponer la condición de que la variación de la acción integral sea nula entre dos instantes de tiempo, de acuerdo con el principio variacional. Tendremos pues

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V l_V dV + \int_S u_S dS \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V \delta l_V dV + \int_S \delta u_S dS \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\delta\mathbf{m}(\mathbf{r}, t_1) = \delta\mathbf{m}(\mathbf{r}, t_2) = 0 \quad (2.5)$$

Donde hemos añadido la condición de que la variación de la función vectorial se anule en los extremos del intervalo. Sabemos además que las variaciones  $\delta l_V$  y  $\delta u_S$  son de la forma

$$\begin{aligned} \delta l_V &= \frac{\partial l_V}{\partial \mathbf{m}} \delta \mathbf{m} + \frac{\partial l_V}{\partial (\partial \mathbf{m} / \partial t)} \delta (\partial \mathbf{m} / \partial t) + \frac{\partial l_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \delta (\nabla \mathbf{m}) \\ \delta u_S &= \frac{\partial u_S}{\partial \mathbf{m}} \delta \mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Recordando las identidades

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial l_V}{\partial (\partial \mathbf{m} / \partial t)} \delta \mathbf{m} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial l_V}{\partial (\partial \mathbf{m} / \partial t)} \right] \delta \mathbf{m} + \frac{\partial l_V}{\partial (\partial \mathbf{m} / \partial t)} \left[ \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{m}) \right] \quad (2.7)$$

$$\nabla \left[ \frac{\partial l_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \delta \mathbf{m} \right] = \left[ \nabla \left( \frac{\partial l_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \right) \right] \delta \mathbf{m} + \left( \frac{\partial l_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \right) \nabla (\delta \mathbf{m}) \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Escribiremos estas derivadas espaciales como  $\nabla\mathbf{m}$  para indicar de forma reducida  $\nabla\mathbf{m} \equiv \nabla m_x + \nabla m_y + \nabla m_z$

y recurriendo al hecho de que el operador  $\delta$  conmuta con  $d/dt$  y  $\nabla$ , podemos reescribir estas identidades de la forma

$$\frac{\partial l_V}{\partial(\partial\mathbf{m}/\partial t)} \delta(\partial\mathbf{m}/\partial t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial l_V}{\partial(\partial\mathbf{m}/\partial t)} \delta\mathbf{m} \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial l_V}{\partial(\partial\mathbf{m}/\partial t)} \right] \delta\mathbf{m} \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \right) \delta(\nabla\mathbf{m}) = \nabla \left[ \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \delta\mathbf{m} \right] - \left[ \nabla \left( \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \right) \right] \delta\mathbf{m} \quad (2.10)$$

Teniendo ahora en cuenta el teorema de la divergencia y la ecuación (2.5) podemos escribir (2.4) como sigue

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left\{ \left[ \frac{\partial l_V}{\partial\mathbf{m}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_V}{\partial(\partial\mathbf{m}/\partial t)} \right) - \nabla \left( \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \right) \right] \delta\mathbf{m} \right\} + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \left\{ \left[ \frac{\partial u_S}{\partial\mathbf{m}} + \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \mathbf{n} \right] \delta\mathbf{m} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Llegados a este punto es necesario recordar que nuestro sistema estará sujeto a la condición de que el módulo de la magnetización debe ser constante  $|\mathbf{m}| = 1$ . Podemos dar cuenta de esta ligadura bien mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange [1], o bien dándonos cuenta de que la variación más general compatible con esta ligadura [3] es

$$\delta\mathbf{m} = \mathbf{m} \times \delta\boldsymbol{\theta} \quad (2.12)$$

donde  $\delta\boldsymbol{\theta}$  es un vector arbitrario que describe una pequeña rotación alrededor de un eje arbitrario cuya dirección viene dada por  $\delta\boldsymbol{\theta}$ . Sustituyendo (2.12) en (2.11) y aplicando la identidad vectorial  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left\{ \left[ \frac{\partial l_V}{\partial\mathbf{m}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_V}{\partial(\partial\mathbf{m}/\partial t)} \right) - \nabla \left( \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \right) \right] \times \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \right\} + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \left\{ \left[ \frac{\partial u_S}{\partial\mathbf{m}} + \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \mathbf{n} \right] \times \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ahora bien,  $\delta\boldsymbol{\theta}$  es arbitrario y la variación de la acción ha de ser 0 para la evolución que sigue el sistema. Esto sólo es posible si el otro vector es 0 en cada una de las dos integrales. Tenemos por tanto que las ecuaciones de Euler-Lagrange de nuestro sistema son

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial l_V}{\partial\mathbf{m}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_V}{\partial(\partial\mathbf{m}/\partial t)} \right) - \nabla \left( \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \right) \right] \times \mathbf{m} &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in V \\ \left[ \frac{\partial u_S}{\partial\mathbf{m}} + \frac{\partial l_V}{\partial(\nabla\mathbf{m})} \mathbf{n} \right] \times \mathbf{m} &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para simplificar la notación definiremos la *derivada funcional* como

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{m}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} - \nabla \frac{\partial}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \quad (2.15)$$

y la forma simplificada de nuestras ecuaciones será

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \times \left[ \frac{\delta l_V}{\delta \mathbf{m}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_V}{\partial (\partial \mathbf{m} / \partial t)} \right) \right] &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{m} \times \left[ \frac{\partial u_S}{\partial \mathbf{m}} + \frac{\partial l_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \mathbf{n} \right] &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (2.16)$$

con lo que ya tenemos las ecuaciones del movimiento de nuestro sistema.

## 2.2 Equilibrio Estático. Ecuaciones de Brown

Cuando nos encontremos en la situación de equilibrio estático tendremos que la densidad lagrangiana es únicamente la energía potencial  $l_V = u_V$ . Además se cumplirá que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_V}{\partial (\partial \mathbf{m} / \partial t)} \right) = 0 \quad (2.17)$$

por lo que las ecuaciones de equilibrio serán, si aplicamos (2.17) a (2.16)

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \times \frac{\delta u_V}{\delta \mathbf{m}} &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{m} \times \left[ \frac{\partial u_S}{\partial \mathbf{m}} + \frac{\partial u_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \mathbf{n} \right] &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por otro lado es posible obtener un vector con dimensiones de campo magnético a partir de la derivada funcional de la densidad de energía

$$\mathbf{H}_{eff} = - \frac{1}{\mu_0 M_s} \frac{\delta u_V}{\delta \mathbf{m}} \quad (2.19)$$

A este vector lo llamaremos campo efectivo. Escribiendo las condiciones de equilibrio en términos del campo efectivo tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \times \overline{\mathbf{H}}_{eff} &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{m} \times \left[ \frac{\partial u_S}{\partial \mathbf{m}} + \frac{\partial u_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \mathbf{n} \right] &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (2.20)$$

La primera de estas ecuaciones pone de manifiesto que el equilibrio estático se produce cuando el torque  $\boldsymbol{\tau} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}$  es nulo en cada uno de los puntos del

sistema. Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de Brown y pueden ser obtenidas minimizando la energía libre del sistema [3]. La ventaja de este método es que no es necesario conocer de antemano la forma de las densidades de energía para llegar a las ecuaciones de Brown. La segunda de estas ecuaciones, la que se refiere a la superficie, también puede ponerse en términos de un campo efectivo superficial

$$\mathbf{H}_{eff,S} = \left[ \frac{\partial u_S}{\partial \mathbf{m}} + \frac{\partial u_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \mathbf{n} \right] \quad (2.21)$$

La expresión del campo efectivo se puede obtener conociendo la contribución a la densidad de energía de cada una de las interacciones que consideremos, como veremos más adelante.

### 2.3 Ecuación Dinámica

Supongamos que tenemos una muestra ferromagnética con magnetización por unidad de volumen  $\mathbf{M}$  en un campo externo  $\mathbf{H}$ . Si el sistema no está en equilibrio cada elemento de volumen experimentará un torque

$$\boldsymbol{\tau} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (2.22)$$

Aunque la ecuación dinámica puede ser obtenida a partir del principio variacional [1], también podemos llegar a ella a partir de la ecuación del movimiento de un dipolo magnético en el seno de un campo magnético, y de modelos microscópicos. Adoptaremos esta segunda estrategia por simplicidad aunque implica el uso de un modelo atómico. Sabemos que este torque producirá una variación del momento angular  $\mathbf{J}$  del dipolo de la forma

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (2.23)$$

Podemos obtener el valor del dipolo ya que para la mayoría de materiales ferromagnéticos el momento angular  $\mathbf{J}$  se debe esencialmente al momento angular del electrón [4]  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , y sabemos que el momento dipolar de un electrón es

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e} g \mathbf{J} \quad (2.24)$$

Donde  $g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$  es el factor de Landé. Sin embargo, en la mayor parte de los ferromagnéticos se puede obtener buen acuerdo con los

experimentos considerando únicamente el momento magnético de spin  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \approx \mathbf{S}$ , con lo que en este caso nos quedaría

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e} g \mathbf{S} \quad (2.25)$$

donde ahora  $g$  es el factor giromagnético del electrón  $g \approx 2$ . Podemos englobar todas las constantes en una única constante  $\gamma = -\frac{e g}{2m_e} = \frac{g \mu_B}{\hbar}$  llamada razón giromagnética. El factor  $\mu_B = -\frac{e \hbar}{2m_e}$  que aparece en la expresión de  $\gamma$  se conoce como magnetón de Bohr. Teniendo en cuenta estas consideraciones podemos escribir la ecuación de la dinámica de nuestro dipolo como

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \gamma \mu_0 \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H} \quad (2.26)$$

Recordando ahora que la magnetización es la densidad volúmica de dipolos  $\mathbf{M} = \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dV}$  y que el campo que experimentarán estos dipolos no será únicamente el campo externo, sino también el debido al resto de dipolos, es decir, un campo efectivo  $H_{eff}$ , podemos escribir la ecuación dinámica de cada punto material como

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} \quad (2.27)$$

para lo cual hemos agrupado las dos constantes que teníamos  $\gamma_0 = -\gamma \mu_0$ . Esta ecuación implica que la variación de la magnetización es perpendicular a la magnetización y al campo, por lo que, en un campo independiente del tiempo, esta precesará en torno a ese campo indefinidamente, no alcanzando nunca el equilibrio. Sin embargo, sabemos que, de hecho, el sistema sí alcanza el equilibrio, cuando la magnetización se alinea con el campo, como cabe esperar de las ecuaciones del equilibrio. Esto es debido a la existencia de términos disipativos en nuestro sistema<sup>3</sup>. Existen numerosas formas por las que el sistema disipa energía, pero no siendo nuestro objetivo ni identificarlas ni cuantificarlas, nos conformaremos con añadir un término fenomenológico de disipación a nuestra ecuación. Teniendo en cuenta que  $|\mathbf{m}| = 1$  cualquier cambio en  $\mathbf{m}$  tiene que ser perpendicular a  $\mathbf{m}$

$$\frac{\partial \mathbf{m}^2}{\partial t} = 2m_x \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2m_y \frac{\partial m_y}{\partial t} + 2m_z \frac{\partial m_z}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = m_x \frac{\partial m_x}{\partial t} + m_y \frac{\partial m_y}{\partial t} + m_z \frac{\partial m_z}{\partial t} = 0$$

---

<sup>3</sup>Aunque en algunos sistemas ha sido posible determinar estos términos a partir de cálculos ab initio, generalmente se usa una constante disipativa fenomenológica  $\alpha$  cuyo valor se determina experimentalmente para cada material.

La dependencia más sencilla de  $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$  con el campo  $\mathbf{H}$  que cumpla esta condición, es que sea proporcional a  $\mathbf{H}_\perp$ , es decir a las componentes de  $\mathbf{H}$  perpendiculares a la magnetización

$$\mathbf{H}_\perp - \frac{\alpha}{\gamma_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{m} \times \left( \mathbf{H}_{eff} - \frac{\alpha}{\gamma_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.29)$$

ya que el producto vectorial será 0 si las componentes perpendiculares a  $\mathbf{m}$  son 0, por lo que  $\mathbf{H}_\perp = \frac{\alpha}{\gamma_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$  para que se anulen estas componentes, con lo que  $\frac{\alpha}{\gamma_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$  es perpendicular a  $\mathbf{m}$ . La ecuación (2.29), al igual que la ecuación (2.27), está incompleta, en este caso porque solo da cuenta de los términos disipativos [3] (que conducen al equilibrio). Podemos incluir ambos fenómenos (disipación y torque) combinando las ecuaciones (2.27) y (2.29) de modo que

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma_0 \mathbf{m} \times \left( \mathbf{H}_{eff} - \frac{\alpha}{\gamma_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right) \quad (2.30)$$

o lo que es lo mismo, hemos sustituido  $\mathbf{H}_{eff}$  por  $\mathbf{H}_{eff} - \frac{\alpha}{\gamma_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$ , un campo efectivo con término disipativo [4]. Deshaciendo el paréntesis

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} + \frac{\alpha}{M_s} \left( \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) \quad (2.31)$$

que es conocida como ecuación de Gilbert. Otra forma fenomenológica de introducir el término disipativo es la propuesta por Landau y Lifshitz [11]. En este caso el término que se introduce es perpendicular tanto a  $\mathbf{M}$  como al término de precesión  $\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_{LL} \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\alpha_{LL}}{M_s} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) \quad (2.32)$$

Aunque la ecuación de Landau-Lifshitz y la de Gilbert describen el mismo fenómeno físico, no son completamente equivalentes, debido a que en (2.32) el término de precesión y el de alineamiento están desacoplados, lo que en (2.31) no ocurre.

En la ecuación de Gilbert tenemos que la derivada de la magnetización depende de un término perpendicular a la magnetización y al campo. Debido a que la derivada es perpendicular a la magnetización esta conservará su módulo, y debido a que es perpendicular al campo no se alineará con él. La magnetización sólo con este término precesa entorno al campo, tal y como habíamos dicho, con una velocidad determina-

da por una constante que depende de la razón giromagnética y el momento dipolar, si no hay disipación. El otro término es perpendicular a la magnetización y a su derivada. Si la derivada tuviese la misma dirección que la que tendría sólo con el primer término entonces este segundo término sólo tendería a alinear la magnetización con el campo, sin precesar. Como la derivada sí va a tener componentes que tiendan a alinear la magnetización con el campo, precisamente por este término, también habrá algunas componentes que se opongan a la precesión, es decir, precesará más despacio que si no hubiese disipación.

En la ecuación de Landau-Lifshitz tenemos un término perpendicular tanto al campo como a la magnetización que, siguiendo el razonamiento previo, hará precesar la segunda entorno al primero, con una velocidad determinada por  $\gamma_{LL}$ . El segundo término es perpendicular a este primero y, por lo dicho anteriormente, sólo tiene componentes que tienden a alinear la magnetización con el campo, con una velocidad controlada por  $\alpha_{LL}$ . Si en la ecuación de Gilbert el segundo término va a tener componentes en la dirección que determina la precesión, la velocidad a la que precese en realidad el dipolo no dependerá únicamente del momento dipolar y la razón giromagnética, si no que está determinada por este  $\gamma_{LL}$ . Tendremos entonces que  $\gamma_{LL}$  se relacionará de alguna manera no solo con  $\gamma_0$ , si no también con  $\alpha$ . Como consecuencia  $\alpha_{LL}$  y  $\alpha$  tampoco van a ser iguales si no que se relacionarán entre ellas a través de  $\gamma_0$ . Esto lo podemos ver desacoplando los términos de precesión y alineamiento en la ecuación (2.31).

Se puede llegar a escribir la ecuación de Gilbert de forma parecida a la de Landau-Lifshitz de forma que los términos de precesión y alineamiento estén desacoplados sin más que multiplicar por  $\mathbf{M} \times$  en (2.31) y utilizando que  $\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times d\mathbf{M}/dt) = -M_s^2 d\mathbf{M}/dt$  con lo que se llega a la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG), que es la que resolveremos numéricamente

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{\gamma_0}{1 + \alpha^2} \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\gamma_0}{1 + \alpha^2} \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) \quad (2.33)$$

Ahora puede quedar más claro lo que decimos de que la ecuación de LL tiene los términos de precesión y alineamiento desacoplados. En efecto vemos que  $\gamma_{LL} = \frac{\gamma_0}{1 + \alpha^2}$  con lo que estamos incluyendo esa contribución a la precesión debida a la disipación. Como contrapartida, como dijimos, hemos obtenido que el alineamiento con el campo no depende del término disipativo  $\alpha$  de forma lineal, si no a través de una expresión más compleja que involucra a  $\gamma_0$ ,  $\alpha_{LL} = \frac{\gamma_0}{1 + \alpha^2} \alpha$ .

## 2.4 Contribuciones a la Energía Libre

Como hemos dicho anteriormente, el campo efectivo lo definimos a partir de la derivada funcional de la densidad de energía (ecuación (2.19)). Por tanto, si conocemos la forma de las distintas contribuciones a la energía del sistema, podremos conocer el campo efectivo que experimenta el dipolo debido a las distintas interacciones y, gracias al principio de superposición, el campo efectivo total que verá el dipolo será la suma de los campos debidos a cada interacción. Conocido el campo, y gracias a la ecuación de LLG, podemos conocer la evolución de la magnetización en cada punto. Solo queda ver esta contribución a la energía para cada interacción.

### 2.4.1 Energía de Intercambio

Si tenemos un sistema con dos partículas cargadas existirá entre ellas una interacción coulombiana que dependerá de la parte orbital del estado que describa al sistema. Dependiendo del spin de las partículas que consideremos, el estado que describa al sistema deberá ser simétrico o antisimétrico. A partir de estas consideraciones podemos entender que los spines de un sistema de electrones se acoplen preferentemente de forma simétrica o antisimétrica dependiendo del carácter simétrico o antisimétrico de la parte orbital del estado, determinado por la energía de interacción electrostática (que será preferentemente la más baja). Incluimos estas consideraciones como un término perturbativo del hamiltoniano del sólido, que se suele denominar Hamiltoniano de Heisenberg, y que da cuenta de este desdoblamiento de los niveles de energía en función de la orientación relativa de los spines. La forma que adopta este es<sup>4</sup>

$$\mathcal{H}_{exch} = - \sum_{i,j} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j \quad (2.34)$$

$J_{ij}$  es la denominada integral de intercambio, relacionada con la diferencia de energía electrostática entre el estado con spines paralelos y el estado con spines antiparalelos. La suma incluirá solo a los primeros vecinos, lo que se justifica porque el valor de la integral de intercambio disminuye rápidamente con la distancia, con lo que  $J_{ij} = J$ . Como nosotros vamos a estudiar muestras ferromagnéticas  $J > 0$ , que preferencia el alineamiento paralelo, o ferromagnético. Como por otro lado necesitamos pasar a una descripción continua para adaptarlo al micromagnetismo, sustituiremos los operadores de spin  $\hat{\mathbf{S}}_k$  por vectores  $\mathbf{S}_k = S \mathbf{s}_k$ . Finalmente reescribiendo el producto escalar tenemos que

---

<sup>4</sup>El término  $\mathcal{H}_{exch} = -J\hat{\mathbf{S}}_1\hat{\mathbf{S}}_2$  es el que se obtiene para un sistema de dos partículas [5]. En el caso del sólido este término adopta la forma indicada con el sumatorio en la mayoría de los casos de interés, pero no es general.

$$\mathcal{U}_{exch} = -JS^2 \sum_{i,j,i \neq j} \cos \phi_{ij} \quad (2.35)$$

siendo  $\phi_{ij}$  el ángulo entre los vectores  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{s}_j$ . Como este ángulo va a ser muy pequeño, por ser la interacción de intercambio la dominante a distancias cortas, podemos desarrollar el coseno en serie de Taylor, hasta el término cuadrático. Redefiniendo el origen de energías podemos además eliminar la constante que nos queda del desarrollo. Obtendremos tras estas operaciones que

$$\mathcal{U}_{exch} \approx JS^2 \sum_{i,j,i \neq j} \phi_{ij}^2 \quad (2.36)$$

En la descripción continua que estamos haciendo el vector unitario en la dirección del spin  $s_i$  de cada dipolo de la red  $\mu_i$  es remplazado por el vector unitario en esa misma dirección de la magnetización,  $m_i$  de cada elemento  $dV$  que constituyen el ferromagnético. Como el ángulo  $\phi_{ij}$  es pequeño está justificado escribirlo como la diferencia entre los vectores unitarios de la magnetización en celdas vecinas  $|\phi_{ij}| \approx |\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j| \approx |(\mathbf{r}_{ij} \nabla) \mathbf{m}|$ , donde  $\mathbf{r}_{ij}$  es el vector de posición desde el punto  $i$  al  $j$ . Además en la descripción continua tenemos que pasar del sumatorio en  $i$  a la integral en el volumen de la muestra llegando, para una red cúbica, a que

$$\mathcal{U}_{exch} = \int_V A (\nabla \mathbf{m})^2 dV \quad (2.37)$$

Con  $(\nabla \mathbf{m})^2$  queremos indicar de forma compacta  $(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2$ , y no el cuadrado de la divergencia.  $A$  ( $J/m$ ) es la llamada constante de intercambio, dada, para un cristal cúbico, por

$$A = \frac{JS^2 z}{a} \quad (2.38)$$

donde  $a$  es la distancia del borde de la celda unidad, y  $z$  toma los valores  $z = 1, 2$  ó  $4$  para una red cúbica simple, centrada en las caras, o centrada en el cuerpo respectivamente. Se puede obtener una expresión similar para un cristal hexagonal [1].

Haciendo uso de la definición de  $H_{eff}$ , (2.19), y de la densidad de energía de intercambio (2.37)<sup>5</sup> podemos calcular el campo asociado a la interacción de intercambio

$$\mathbf{H}_{exch} = \frac{2A}{\mu_0 M_s} (\nabla^2 \mathbf{m}) \quad (2.39)$$

---

<sup>5</sup>Tenemos que tener en cuenta que hablamos de la derivada funcional definida anteriormente, y de la densidad de energía, por lo que no tenemos que integrar

Podemos definir en este punto un parámetro que va a ser de importancia a la hora de hacer simulaciones, como comentaremos más adelante. Es la longitud de intercambio, que va a dar una idea de cuál es la distancia para la cual la interacción de intercambio va a ser predominante sobre la magnetostática. La longitud de intercambio se define como

$$l_{exch} = \sqrt{\frac{A}{\frac{1}{2}\mu_0 M_s^2}} \quad (2.40)$$

### 2.4.2 Anisotropía magnetocristalina

El Hamiltoniano de Heisenberg depende únicamente de la orientación *relativa* de los spines de los átomos, por lo que cualquier orientación en el espacio es equivalente. Sin embargo experimentalmente observamos que esto no es así. Existen direcciones en el material en las que resulta más sencillo o más costoso magnetizarlo. La anisotropía más común es la magnetocristalina [4], debida al acoplo spin-órbita. El momento angular orbital de los electrones en el átomo está asociado con la estructura cristalográfica del material, preferenciando determinadas direcciones cristalográficas. El acoplo spin-órbita es el responsable de que los spines de los electrones tiendan a alinearse con el momento angular orbital de los mismos, y por tanto en determinadas direcciones. Por ello existen ciertas direcciones espaciales en las que resulta más fácil magnetizar el material.

Aunque es posible evaluar la energía de anisotropía a partir de un modelo microscópico aplicando la teoría cuántica de perturbaciones [6], esto resulta muy complicado, y es posible llegar a expresiones válidas mediante desarrollos en serie de potencias que tengan en cuenta consideraciones de simetría, y ajustando los coeficientes del desarrollo a partir de resultados experimentales [3]. Por ejemplo, para materiales con anisotropía magnetocristalina uniaxial, la dependencia de la energía tiene que ser una función par<sup>6</sup> de la componente de la magnetización en la dirección de la anisotropía. Tendríamos entonces

$$u_{ani} = K_0 - K_1 (\mathbf{m}\mathbf{u}_k)^2 - K_2 (\mathbf{m}\mathbf{u}_k)^4 - K_3 (\mathbf{m}\mathbf{u}_k)^6 + \dots$$

Restringiéndonos al segundo término del desarrollo

$$u_{ani} = K_0 - K_1 (\mathbf{m}\mathbf{u}_k)^2 \quad (2.41)$$

Donde  $K_0$  y  $K_1$  ( $J/m^3$ ) son los coeficientes del desarrollo, y  $\mathbf{u}_k$  es el vector unitario

---

<sup>6</sup>Así aseguramos que depende de la dirección pero no del sentido

en la dirección del eje de anisotropía. Este tipo de anisotropía puede dar lugar a un eje fácil, si  $K_1 > 0$ , en cuyo caso es fácil magnetizar la muestra en la dirección  $\mathbf{u}_k$ , o a un eje difícil, o plano fácil, si  $K_1 < 0$ , en el que es menos costoso energéticamente magnetizar la muestra en una dirección contenida en el plano perpendicular a  $\mathbf{u}_k$ . De nuevo aplicando la definición de  $H_{eff}$  (2.19) y con la expresión de la densidad de energía debido a la anisotropía (2.41) podemos calcular el campo atribuido a este fenómeno

$$\mathbf{H}_{ani} = \frac{2K_1}{\mu_0 M_s} (\mathbf{m} \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k \quad (2.42)$$

### 2.4.3 Energía electrostática. Energía Magnetostática y Campo Externo

Aunque las ecuaciones de Maxwell para medios materiales son bien conocidas

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t); \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

con  $\rho(\mathbf{r}, t)$  la densidad de carga eléctrica,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  la densidad de corriente,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  el vector desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  la inducción magnética,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  el campo eléctrico y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  el campo magnético, la resolución de las mismas, acopladas a la ecuación dinámica, es compleja. Sin embargo, estamos tratando sistemas con un tamaño de décimas de micra, por lo que podemos considerar, en cada instante, que el campo eléctrico y magnético es el mismo en toda la tira, e incluir únicamente las contribuciones estáticas, tanto magnéticas como eléctricas, es decir, considerar que nuestro sistema siempre se encuentra en condiciones cuasiestáticas. En base a ello, consideraremos únicamente las contribuciones magnetoestática y la debida al campo externo.

El cálculo del campo magnetostático lo haremos a través de las “cargas de magnetización”, densidades ficticias de carga magnética definidas por

$$\rho_M(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad \sigma_M(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.44)$$

siendo  $\mathbf{n}$  un vector unitario perpendicular a la superficie. Se puede calcular el campo magnetostático (o demagnetizante para muestras uniformemente magnetizadas) como

$$\mathbf{H}_{dmg} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (2.45)$$

La energía magnetostática por su parte es [3]

$$\mathcal{U}_{dmg} = \int_V u_{dmg} dV = -\frac{1}{2} \mu_0 \int_V \mathbf{B}_{dmg} \mathbf{M} dV$$

donde hemos añadido el 1/2 por ser  $\mathbf{M}$  la fuente de  $\mathbf{B}_{dmg}$ . Escribiéndolo en términos de  $\mathbf{H}_{dmg}$

$$\mathcal{U}_{dmg} = \int_V u_{dmg} dV = -\frac{1}{2} \mu_0 \int_V (M_s^2 + \mathbf{H}_{dmg} \mathbf{M}) dV$$

Finalmente redefiniendo en origen de energías

$$\mathcal{U}_{dmg} = \int_V u_{dmg} dV = -\frac{1}{2} \mu_0 \int_V \mathbf{H}_{dmg} \mathbf{M} dV \quad (2.46)$$

Podemos hacer dos apuntes. La suma de las “cargas de magnetización” ha de ser 0 para garantizar que las líneas del campo sean cerradas. Esta energía siempre es mayor o igual que 0, de manera que la única forma de minimizarla es mediante configuraciones en las que la magnetización siga caminos cerrados, lo que implica un aumento de la energía de intercambio. El estado de equilibrio deberá minimizar la energía total, por lo que será una situación intermedia.

Para el cálculo de la energía debida al campo externo supondremos que este es homogéneo en todos los puntos de la muestra, lo que, debido a las dimensiones de la misma, es una buena aproximación en la mayoría de los casos. Además es un parámetro externo que podemos controlar y por tanto conocemos. La energía asociada al campo externo, también conocida como energía de Zeeman [4], es, por tanto

$$\mathcal{U}_{ext} = \int_V u_{ext} dV = -\mu_0 \int_V \mathbf{H}_{ext} \mathbf{M} dV \quad (2.47)$$

#### 2.4.4 Energía de interacción de la DMI

La interacción de Dzyaloshinskii-Moriya (DMI) es uno de los fenómenos producidos debido al acoplamiento spin-órbita (SOC). Las razones profundas de esta interacción son complejas y no entraremos en detalles. Basta decir que este fenómeno aparece tanto cuando un material tiene una falta de simetría de inversión espacial como cuando existe una interfaz entre un ferromagnético y un metal pesado con un fuerte acoplamiento spin-órbita [7]. Este efecto va a favorecer configuraciones desalineadas de los dipolos vecinos [8]. A nivel atómico la energía asociada a esta interacción es

$$U_{DMI} = \sum_{i,j} \mathbf{d}_{ij} (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j) \quad (2.48)$$

siendo  $\mathbf{d}_{ij}$  el vector de la DMI, y su dirección dependerá del sistema concreto. Para láminas isotropas se tiene que este vector es de la forma  $\mathbf{d}_{ij} = d\mathbf{u}_{ij} \times \mathbf{u}_n$ , con  $\mathbf{u}_{ij}$  el vector unitario que une los átomos  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo, y  $\mathbf{u}_n$  el vector perpendicular a la lámina orientado desde el material con fuerte SOC hacia la lámina. Si además el grosor de la lámina es mucho menor que las longitudes micromagnéticas<sup>7</sup> características podemos considerar que  $d$ , que determina el valor de la interacción, es constante. Con estas suposiciones, y pasando a un modelo continuo, la densidad de energía debida a esta interacción se puede escribir como

$$u_{DMI} = D[(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_n) \nabla \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_n)] \quad (2.49)$$

El signo de  $D$  dependerá de la orientación relativa entre  $\mathbf{u}_{ij}$  y  $\mathbf{u}_n$ .  $D$  ( $J/m^2$ ) se relaciona con  $d$ , pero cómo lo haga depende del tipo de red. Sin embargo este tipo de cuestiones quedan fuera del presente trabajo por lo que nos limitaremos a hablar de la constante  $D$  de la DMI sin entrar a deducir su valor a partir de modelos microscópicos. Aplicando (2.19) y (2.49) obtenemos

$$\mathbf{H}_{DMI} = \frac{2D}{\mu_0 M_s} [\nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_n) - (\nabla \mathbf{m}) \cdot \mathbf{u}_n] \quad (2.50)$$

## 2.5 Forma de las ecuaciones con las contribuciones expuestas

Con todo lo expuesto en la sección anterior estamos en disposición de escribir lo que será nuestro campo efectivo

$$H_{eff} = H_{exch} + H_{ani} + H_{dmg} + H_{ext} + H_{DMI} \quad (2.51)$$

Sin embargo, como hemos dicho antes, este campo no da cuenta de los procesos disipativos que aparecen en el sistema, por lo que será necesario añadir un nuevo campo  $H_{dis}$ , bien obtenido a partir de modelos microscópicos de los mecanismos de disipación, o bien, como ya dijimos que haremos, mediante un término fenomenológico como el de (2.28). También va a resultar necesario, si queremos hacer un estudio detallado de estos fenómenos, la temperatura de la muestra, que hasta ahora no se

---

<sup>7</sup>Estos parámetros, como la longitud de intercambio definida en (2.40), se pueden obtener de las constantes que determinan las interacciones, combinándolas para obtener un valor con unidades de longitud

ha tenido en cuenta. Para ello se incorpora un nuevo término al campo,  $H_{th}$ , que será un término estocástico que cumplirá ciertas condiciones y que habrá que tratar adecuadamente, mediante la teoría de procesos estocásticos. Como las consideraciones relativas a la temperatura quedan fuera de los objetivos del presente trabajo no entraremos en más detalles.

Conociendo ya la ecuación dinámica y la forma que adopta el campo efectivo, sólo nos queda por tratar las ecuaciones del equilibrio (2.20). La primera de ellas, que se refiere al equilibrio en el volumen, es simplemente hacer el torque nulo. La segunda depende tanto de la densidad superficial de energía como de la densidad volúmica de energía. Sin embargo, no hemos considerado ningún término de densidad superficial, y los únicos términos de la densidad volúmica de energía que dependen de  $\nabla \mathbf{m}$  son el de intercambio y el de la DMI. Tenemos por tanto que

$$\mathbf{H}_{eff,S} = \left[ \frac{\partial u_V}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \mathbf{n} \right] = 2A (\nabla \mathbf{m}) \mathbf{n} + D [(\mathbf{m} \mathbf{u}_n) \mathbf{n} - (\mathbf{m} \mathbf{n}) \mathbf{u}_n] \quad (2.52)$$

Aplicando que  $\mathbf{m} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) = \mathbf{n} (\mathbf{m} \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\mathbf{m} \mathbf{n})$  llegamos a

$$\mathbf{H}_{eff,S} = 2A (\nabla \mathbf{m}) \mathbf{n} + D \mathbf{m} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_n) \quad (2.53)$$

Y la condición de contorno en la superficie

$$\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff,S} = \mathbf{m} \times [A (\nabla \mathbf{m}) \mathbf{n} + D \mathbf{m} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_n)] = 0 \quad (2.54)$$

Es decir, o bien  $\mathbf{m}$  es paralela al término entre paréntesis, o bien este es nulo.

## 2.6 Modelo unidimensional (1D model)

Aunque es posible resolver numéricamente las ecuaciones planteadas, una solución analítica de las mismas resulta demasiado compleja. Si queremos comparar los resultados numéricos obtenidos con alguna teoría va a ser necesario hacer nuevas aproximaciones para obtener un modelo que se pueda resolver analíticamente. Es en este contexto en el que se encuadra el modelo unidimensional (1D model). Los primeros resultados con este modelo los obtuvo Walker en 1956, dando una solución analítica para el desplazamiento de una pared bajo un campo aplicado, prediciendo que por encima de un campo crítico, llamado campo de Walker, la pared ya no se podrá describir como una estructura estable cuya posición dependa de  $q \mp vt$ , sino

que la propia estructura de la pared va a evolucionar con el tiempo, lo que se reflejará en una “velocidad” oscilante [10]. El modelo unidimensional nos va a permitir estudiar, en un sistema que presente dominios magnéticos, la magnetización en la interfaz entre estos dominios, es decir, en la pared [8]. Vamos a representar esta pared como una superficie que va a depender de la posición y del tiempo  $\psi(x, y, z, t) = 0$ . La expresión  $\psi(x, y, z, t) = \psi_0$  define una superficie que se propaga con velocidad  $\left. \frac{\partial_t \psi}{|\nabla \psi|} \right|_{\psi_0}$  en la dirección dada por  $\left. \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \right|_{\psi_0}$ .

Aunque hasta ahora hemos expresado todas las magnitudes en coordenadas cartesianas, va a resultar conveniente pasar a coordenadas esféricas para desarrollar este modelo. Como el módulo de la magnetización en cada punto está fijado, podremos expresar la magnetización en cada punto unívocamente con dos ángulos,  $\theta$ , el ángulo que forma la magnetización con el eje  $z$ , y  $\varphi$ , el ángulo que forma la proyección de la magnetización en el plano  $xy$  con el eje  $x$ . Es obvio que si la magnetización va a depender de la posición y del tiempo los ángulos que la van a determinar unívocamente también tendrán esa dependencia. Utilizando estos ángulos para determinar la magnetización y con la definición de campo efectivo (2.19) podemos escribir la ecuación de Gilbert (2.31)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \alpha \sin \theta \dot{\varphi} &= -\frac{\gamma_0}{\mu_0 M_s} \frac{\delta u_V}{\sin \theta \delta \varphi} \\ \alpha \dot{\theta} - \sin \theta \dot{\varphi} &= -\frac{\gamma_0}{\mu_0 M_s} \frac{\delta u_V}{\delta \theta} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Que es la que resolveremos de manera aproximada con este modelo. Conviene también escribir en función de estos ángulos los campos hallados anteriormente

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{exch} &= \frac{2A}{\mu_0 M_s} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \sin \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \mathbf{u}_\theta + \left( 2 \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) \mathbf{u}_\varphi \right\} \\ \mathbf{H}_{ani} &= -\frac{2K_1}{\mu_0 M_s} \sin \theta \cos \theta \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{H}_{dmg} &= -M_s \left[ (N_y - N_x) \sin^2 \varphi + N_x - N_z \right] \sin \theta \cos \theta \mathbf{u}_\theta - \\ &\quad -M_s (N_y - N_x) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{H}_{ext} &= \left[ (H_x \cos \varphi + H_y \sin \varphi) \cos \theta - H_z \sin \theta \right] \mathbf{u}_\theta + (-H_x \sin \varphi + H_y \cos \varphi) \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{H}_{DMI} &= \frac{2D}{\mu_0 M_s} \left[ \sin^2 \theta \left( -\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathbf{u}_\theta + \sin \theta \left( \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathbf{u}_\varphi \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

Hemos expresado el campo demagnetizante en términos de los factores demagnetizantes  $N_x, N_y, N_z$ . La suma de estos factores debe ser uno, y mayor será su peso cuanto menor sea la dimensión que representan. Es por ello que en nuestro caso  $N_z$  será cercano a, pero menor, que la unidad.

El caso más sencillo que vamos a estudiar es, por tanto, el sistema formado por dos dominios magnéticos separados por una pared. La magnetización en los dominios, por definición de dominio, va a ser uniforme, por lo que los ángulos que la determinen en cada una de estas regiones van a estar fijados. En la pared estos ángulos van a tener que variar (de forma suave) desde el valor en un dominio hasta el valor en el otro.

Se denomina modelo unidimensional porque sólo vamos a considerar variaciones en la magnetización en una de las direcciones del espacio. Esto está justificado en nuestro caso porque vamos a estudiar la dinámica de las paredes en microtiras magnéticas, i.e, una de las dimensiones de la estructura es mucho mayor que las otras dos. Fijaremos nuestro sistema de coordenadas de manera que el eje  $x$  sea el longitudinal a la tira. Las características geométricas de nuestra tira estarán perfectamente determinadas dadas su longitud,  $l$ , distancia máxima en el eje  $x$ , su anchura,  $w$ , distancia máxima en el eje  $y$ , y su grosor  $t$ , distancia máxima en el eje  $z$ .

Hemos deducido anteriormente las ecuaciones de equilibrio para un sistema magnético general. Para obtener la orientación de la magnetización en la pared habría que resolver estas ecuaciones, que determinan que las componentes angulares del campo deben anularse. Sin embargo, se desconoce solución analítica en el caso general, y sólo se han obtenido resultados aproximados. Una de estas soluciones está basada en la que obtuvo Walker en 1956 para materiales cuasi-infinitos. Para ello tuvo que considerar una tira muy larga, con anisotropía perpendicular, y con los dominios con magnetización en la dirección del eje fácil, en la que no existe DMI, y en la que  $\theta$  solo dependía de la componente longitudinal y  $\varphi$  era constante e igual a  $\pm\frac{\pi}{2}$ . Con estas suposiciones la condición de que  $\mathbf{H}_\theta = 0$  se reduce a

$$-\left[\frac{2K_1}{\mu_0 M_s} - N_z M_s\right] \sin \theta \cos \theta + \frac{2A}{\mu_0 M_s} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (2.57)$$

Definiendo

$$\Delta = \sqrt{\frac{A}{K_1 - \frac{1}{2}\mu_0 N_z M_s^2}} \quad (2.58)$$

Tenemos que

$$\cos \theta = -\tanh\left(\frac{x-q}{\Delta}\right) \quad (2.59)$$

Donde  $q$  va a definir la posición de la pared y  $\Delta$  su anchura<sup>8</sup>.

La siguiente suposición que hace el modelo es que la estructura de la pared se mantiene, aún en movimiento, y esta está descrita por las *funciones de prueba de Walker*.

$$\cos \theta = -\tanh\left(\frac{x-q(t)}{\Delta(t)}\right) \quad (2.60)$$

$$\varphi = \phi(t)$$

donde  $\varphi$  representa la orientación de la pared, es decir, la orientación de la magnetización promedio en la pared. Si admitimos que la estructura de la pared está descrita por estas funciones de prueba, la energía de la tira puede escribirse en términos de la posición y orientación de la pared [8]. Es más, como estamos considerando que las variaciones en  $y$  y  $z$  son despreciables, podemos suponer que toda la física determinada por la energía está, en realidad, determinada únicamente por una densidad de energía por unidad de superficie, dependiente de la posición y la orientación de la pared, definida como

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} u_V dx \quad (2.61)$$

Vamos a escribir las ecuaciones dinámicas en el modelo unidimensional con las contribuciones indicadas, pero para ello necesitaremos algunas relaciones útiles.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\sin \theta}{\Delta} & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\approx 0 & \dot{\theta} &= \frac{\partial \theta}{\partial q} \dot{q} = -\sin \theta \frac{\dot{q}}{\Delta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin \theta dx &= \Delta \int_0^{\pi} d\theta = \pi \Delta & & \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \theta dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos^2 \theta) \theta dx = \Delta \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2\Delta & & \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \tanh\left(\frac{x-q(t)}{\Delta(t)}\right) dx = 2q & & \end{aligned} \quad (2.62)$$

---

<sup>8</sup>Hay varias definiciones de anchura de la pared, pero todas involucran  $\Delta$ . En cuanto a la posición de la pared, esta se define únicamente como  $q$

Además necesitamos conocer como se expresan las ecuaciones del movimiento en términos de  $\sigma$ . Para ello calculamos la variación de  $\sigma$

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta u_V dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta u_V}{\delta\theta} \delta\theta + \frac{\delta u_V}{\delta\varphi} \delta\varphi \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\delta u_V}{\delta\theta} \left( -\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \delta q + \frac{\delta u_V}{\delta\varphi} \delta\phi \right] dx\end{aligned}\tag{2.63}$$

Podemos identificar ahora las variaciones de  $\sigma$  con  $q$  y con  $\phi$  y sustituir las ecuaciones del movimiento (2.55), llegando a que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial q} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta u_V}{\delta\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x} dx = - \frac{\mu_0 M_s}{\gamma_0} \int_0^\pi \left( \alpha \sin\theta \frac{\dot{q}}{\Delta} + \sin\theta \dot{\phi} \right) d\theta = \\ &= - \frac{2\mu_0 M_s}{\gamma_0} \left( \alpha \frac{\dot{q}}{\Delta} + \dot{\phi} \right)\end{aligned}\tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial\phi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta u_V}{\delta\phi} dx = - \frac{\mu_0 M_s}{\gamma_0} \int_0^\pi \sin\theta \left( -\sin\theta \frac{\dot{q}}{\Delta} + \alpha \sin\theta \dot{\phi} \right) d\theta = \\ &= \frac{2\mu_0 M_s \Delta}{\gamma_0} \left( \frac{\dot{q}}{\Delta} - \alpha \dot{\phi} \right)\end{aligned}$$

En donde hemos aplicado las ecuaciones (2.62). Podemos reescribir las que serán nuestras nuevas ecuaciones del movimiento de forma que tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\dot{q}}{\Delta} - \alpha \dot{\phi} &= \frac{\gamma_0}{2\mu_0 M_s \Delta} \frac{\partial\sigma}{\partial\phi} \\ \alpha \frac{\dot{q}}{\Delta} + \dot{\phi} &= - \frac{\gamma_0}{2\mu_0 M_s} \frac{\partial\sigma}{\partial q}\end{aligned}\tag{2.65}$$

Entonces, resolviendo estas ecuaciones, podemos determinar la posición y orientación de la pared en cada instante. Únicamente resta escribir las contribuciones a la energía por unidad de superficie  $\sigma$  de cada interacción.

Partiendo de la ecuación (2.37) podemos escribir la densidad de energía de intercambio y la energía por unidad de superficie como

$$u_{exch} = A (\nabla \mathbf{m})^2 \approx A |(\mathbf{u}_x \nabla) \mathbf{m}|^2 = A \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \approx A \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2$$

$$\sigma_{exch} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{exch} dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} A \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{A}{\Delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \theta dx = \frac{2A}{\Delta} \quad (2.66)$$

De forma similar partiendo de (2.41) y redefiniendo el origen de energías podemos escribir<sup>9</sup> la densidad de energía y la energía por unidad de superficie.

$$u_{ani} = K_1 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\sigma_{ani} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{ani} dx = \int_{-\infty}^{\infty} K_1 \sin^2 \theta dx = 2K_1 \Delta \quad (2.67)$$

Para la contribución magnetostática, dada por la ecuación (2.46), tendremos que

$$u_{dmg} = -\frac{1}{2} \mu_0 M_s \mathbf{m} \mathbf{H}_{dmg} \approx \frac{1}{2} \mu_0 M_s^2 \sin^2 \theta (N_x \cos^2 \varphi + N_y \sin^2 \varphi - N_z)$$

$$\sigma_{dmg} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{dmg} dx \approx \frac{1}{2} \mu_0 M_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \theta (N_x \cos^2 \varphi + N_y \sin^2 \varphi - N_z) dx \quad (2.68)$$

$$= \mu_0 M_s^2 \Delta (N_x \cos^2 \phi + N_y \sin^2 \phi - N_z)$$

Donde de nuevo hemos expresado estas magnitudes en términos de los factores demagnetizantes  $N_x, N_y, N_z$ , como hicimos en (2.56)

Si pretendemos provocar un desplazamiento de la pared manteniendo la estructura de dos dominios aplicando un campo, este tendrá que ser aplicado en la dirección en que tenemos los dominios, en cualquiera de los dos sentidos. La contribución a la energía del sistema y la energía por unidad de superficie de un campo dirigido en esta dirección, perpendicular al plano de la tira, es a partir de (2.47)

$$u_{ext} = -\mu_0 M_s \mathbf{m} \mathbf{H}_{ext} = -\mu_0 M_s H_{ext} \cos \theta$$

$$\sigma_{ext} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{ext} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0 M_s H_{ext} \cos \theta dx = -2\mu_0 M_s H_{ext} q \quad (2.69)$$

La contribución debida a la DMI se expresará, recordando (2.49) y para nuestra tira, con  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_z$ , como

---

<sup>9</sup>Y aplicando que en nuestro caso  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_z$

$$u_{DMI} = D[(\mathbf{m} \mathbf{u}_n) \nabla \mathbf{m} - \mathbf{m} \nabla (\mathbf{m} \mathbf{u}_n)] \approx D \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\sigma_{DMI} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{DMI} dx \approx - \int_{-\infty}^{\infty} D \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \pi D \cos \phi$$
(2.70)

La energía por unidad de superficie que obtenemos con estas contribuciones es

$$\sigma = \sigma_{exch} + \sigma_{ani} + \sigma_{dmg} + \sigma_{ext} + \sigma_{DMI} = \frac{2A}{\Delta} + 2K_1\Delta - 2\mu_0 M_s H_{ext} q + \pi D \cos \phi +$$

$$+ \mu_0 M_s^2 \Delta (N_x \cos^2 \phi + N_y \sin^2 \phi - N_z)$$
(2.71)

Podemos expresar esta energía de forma más sencilla aplicando la definición de  $\Delta$  (2.58), ya que podemos verificar que

$$\frac{2A}{\Delta} + 2K_1\Delta - \mu_0 M_s^2 \Delta N_z = 0$$
(2.72)

con lo que la energía finalmente queda

$$\sigma = \mu_0 M_s^2 \Delta (N_x \cos^2 \phi + N_y \sin^2 \phi) - 2\mu_0 M_s H_{ext} q + \pi D \cos \phi$$
(2.73)

Podemos expresar ahora las ecuaciones del movimiento de forma explícita con los parámetros del material. Walker supuso que el ángulo  $\varphi$  era independiente de  $x$  e igual a  $\pm\pi/2$ , lo cual es cierto en ausencia de DMI. Hemos partido de la hipótesis de que la pared conserva la estructura en movimiento, pudiendo escribir la misma según (2.60), conservando para  $\theta$  la misma expresión que en el problema de Walker. Sin embargo es posible conservar la hipótesis de que  $\varphi$  sea constante sin que tenga que ser  $\pm\pi/2$ , ya que si  $\theta$  es 0 o  $\pi$ , como lo es en los dominios, es irrelevante el valor que tome  $\varphi$ , y sólo será determinante en la zona de la pared. En ese sentido podemos plantearnos qué valor tomará el ángulo  $\varphi_0$  de la pared en equilibrio en presencia de la DMI. La condición que tiene que cumplir es que se anulen las componentes angulares del campo efectivo, lo que se traduce en que  $\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \right|_{\phi=\varphi_0} = 0$ , y además que este punto sea un mínimo de la energía para que la situación sea estable o neutra. Las parciales de  $\sigma$  respecto a  $\phi$  y respecto a  $q$  son

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = 2\mu_0 M_s^2 \Delta (N_y - N_x) \sin \phi \cos \phi - \pi D \sin \phi$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q} = -2\mu_0 M_s H_{ext}$$
(2.74)

Podemos simplificar la notación definiendo dos parámetros,  $H_K$  y  $H_D$

$$H_K = M_s (N_x - N_y)$$

$$H_D = -\frac{\pi D}{2\mu_0 M_s \Delta} \quad (2.75)$$

Tenemos entonces que  $\varphi_0$  tiene que cumplir que

$$-2\mu_0 M_s \Delta \sin \varphi_0 (H_K \cos \varphi_0 - H_D) = 0$$

$$-2\mu_0 M_s \Delta \left[ H_K (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0) - H_D \cos \varphi_0 \right] \geq 0 \quad (2.76)$$

Entonces, por la primera condición, o bien  $\sin \varphi_0 = 0$  y por tanto  $\varphi_0 = 0, \pi$ , es decir, tenemos una pared de Néel, aquella en la que la magnetización de la pared está en la dirección normal a la pared, o bien  $\cos \varphi_0 = \frac{H_D}{H_K}$ .

Para  $D = 0 \rightarrow H_D = 0$ , con lo que tenemos

$$H_K \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0$$

$$H_K (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0) \leq 0 \quad (2.77)$$

Para  $H_K = 0$ , i.e, si la anchura de la pared es igual a la anchura de la tira, todos los ángulos  $\varphi_0$  son equivalentes. Este ángulo está determinado por la anisotropía de forma que en este caso sería inexistente, lo cual es una situación muy crítica. En caso contrario las soluciones de la primera de las ecuaciones (2.77) son  $\varphi_0 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Si  $H_K < 0$  Entonces la segunda de las ecuaciones (2.77) impone que  $\cos^2 \varphi_0 \geq \sin^2 \varphi_0 \rightarrow -\pi/4 \leq \varphi_0 \leq \pi/4 \cup 3\pi/4 \leq \varphi_0 \leq 5\pi/4$ , con lo que nos queda que  $\varphi_0 = 0, \pi$  con lo que tenemos una pared de Néel. La condición de equilibrio en este caso va a depender de  $\cos^2 \varphi_0$  por lo que cualquiera de los dos ángulos va a ser igualmente estable. En la mayoría de los casos vamos a tener tiras con una anchura mayor que la de la pared imponiendo una cierta anisotropía de forma, o lo que es lo mismo,  $H_K > 0$ . En este caso la ecuación que determina la estabilidad nos impone que  $\cos^2 \varphi_0 \leq \sin^2 \varphi_0 \rightarrow \pi/4 \leq \varphi_0 \leq 3\pi/4 \cup 5\pi/4 \leq \varphi_0 \leq 7\pi/4$ . Como consecuencia las soluciones de equilibrio estable (y realmente estable y no neutro porque no se cumple la igualdad) son  $\varphi_0 = \pi/2, -\pi/2$ . Tenemos por tanto una pared de Bloch, aquella en la que la magnetización de la pared está en el plano perpendicular a la normal a la pared.

Para hacer la discusión para las ecuaciones con DMI las reescribiremos de la siguiente forma

$$\frac{H_K}{H_D} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 = 0$$

$$H_K (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0) - H_D \cos \varphi_0 \leq 0$$

Ahora para  $H_K = 0$  tenemos que solo hay dos soluciones para la primera de las ecuaciones  $\varphi_0 = 0, \pi$ . La DMI impone una pared de Néel donde antes no había ninguna preferencia, y además determina cual de las dos posibles orientaciones aparece ya que para  $H_D > 0$  solo  $\varphi_0 = 0$  cumple con la segunda condición, mientras que para  $H_D < 0$  lo cumple  $\varphi_0 = \pi$ .

Para  $H_K > 0$  tenemos cuatro soluciones,  $\varphi_0 = 0, \pi$  y  $\cos \varphi_0 = H_D/H_K$ . Para las dos primeras tenemos que  $H_K \leq H_D \cos \varphi_0$ . Entonces si  $H_D < 0$  tenemos que  $H_K/H_D < 0$  y que  $H_K/H_D \geq \cos \varphi_0$ , y por tanto  $H_K \leq -H_D$ . Si  $H_D > 0$ ,  $H_K/H_D > 0$  y  $H_K/H_D \leq \cos \varphi_0$ . Por tanto tenemos que  $H_K \leq H_D$ . Por su parte para las soluciones tales que  $\cos \varphi_0 = H_D/H_K$  tenemos que  $|H_D| \leq H_K$  ya que  $H_K > 0$ . Es decir, en el resto de los casos.

Para  $H_K < 0$  solo tenemos dos soluciones que se cumplen en todos los casos,  $\varphi_0 = 0, \pi$ , ya que la solución  $\cos \varphi_0 = H_D/H_K$  no puede satisfacer la condición de estabilidad por requerir que  $|H_D/H_K| > 1$ . La solución  $\varphi_0 = 0$  se obtendrá cuando  $H_D > 0$  y  $|H_D| > |H_K|$  y la solución  $\varphi_0 = \pi$  cuando  $H_D < 0$ , y  $|H_D| > |H_K|$ . Si  $|H_D| < |H_K|$  las dos soluciones son estables (pero no tienen la misma energía).

Para  $H_K > 0$ , que es el caso que nos interesa, podemos compactar la expresión de los resultados

$$\cos \varphi_0 = \text{sign} \left( \frac{H_D}{H_K} \right) \min \left( 1, \left| \frac{H_D}{H_K} \right| \right) \quad (2.78)$$

Podemos reescribir de nuevo las ecuaciones del movimiento para dejar despejadas  $\dot{\phi}$  y  $\dot{q}$ . Llegamos entonces a que

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -\frac{\gamma_0}{2\mu_0 M_s (1 + \alpha^2)} \left( \frac{\alpha}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right) \\ \dot{q} &= \frac{\gamma_0}{2\mu_0 M_s (1 + \alpha^2)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} - \alpha \Delta \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Supongamos ahora que al aplicar campo llegamos a un régimen estacionario que cumpla  $\dot{\phi} \approx cte$ . Esto va a suponer que se tiene que cumplir  $\dot{q} \approx cte$ . De la primera de las ecuaciones (2.79), y de las ecuaciones (2.75), junto con la condición que acabamos de imponer para la derivada de la orientación de la pared, tenemos que

el ángulo de orientación en el régimen estacionario  $\varphi_e$  tiene que cumplir

$$H_{ext} = \alpha \sin \varphi_e (H_D - H_K \cos \varphi_e) \quad (2.80)$$

Si no hay DMI tenemos entonces que el campo sigue una función  $\sin 2\varphi$  y por tanto el campo que se puede aplicar sin que desaparezca la estructura variará entre  $\pm \frac{\alpha H_K}{2}$ . En presencia de la DMI tendremos la función que se representa en la figura 1(a), para  $\frac{H_D}{H_K} = 0.5$ . Una de las características que se puede apreciar en la gráfica<sup>10</sup>, y también en la función  $\sin 2\varphi$  anterior, es que la aplicación de un campo positivo, i.e, dirigido en sentido  $z+$  conlleva una rotación de la orientación antihoraria, y la aplicación de un campo negativo horaria.

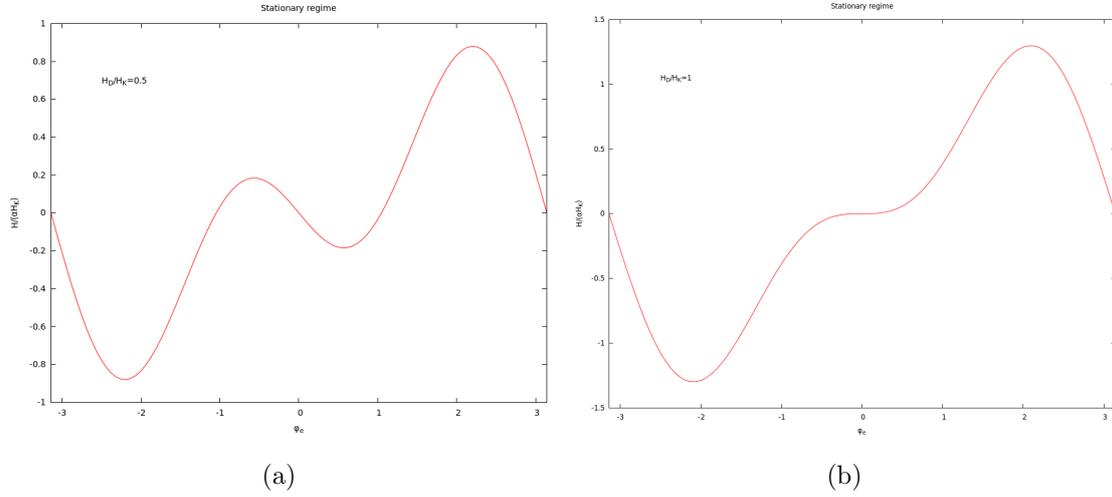


Figura 1: Régimen estacionario. Solución de la ecuación dinámica para la orientación de la pared en régimen estacionario para  $H_D/H_K = 0.5$ (a) y para  $H_D/H_K = 1$ (b)

Como apreciamos en la figura 1(a) la aplicación de un campo positivo, si partimos de la orientación con ángulo positivo, nos lleva a un máximo relativo (y absoluto) para una cierta orientación de la pared, y la aplicación de un campo negativo nos lleva a un mínimo relativo (pero no absoluto) para otra orientación. Este campo para el que se encuentra el máximo determina el campo de Walker, y es mayor cuanto mayor sea  $D$ , tendiendo a una relación lineal entre el campo de Walker y  $D$ . En el caso de la función  $\sin 2\varphi$  esto no conlleva ninguna característica especial porque el campo de Walker para campos positivos y negativos, (el campo máximo en valor absoluto por encima del cual no hay solución estable) es el mismo en valor absoluto. Sin embargo, en la gráfica 1(a) vemos que el valor absoluto del campo para el cual tenemos un mínimo local no coincide con el valor absoluto del campo para el cual

<sup>10</sup>Recordemos que las soluciones  $\varphi_e = 0, \pi$  para campo nulo que se ven en la gráfica no son estables por la ecuación (2.75), por lo que la situación inicial será cualquiera de las otras dos.

tenemos máximo, pero el valor del campo para el mínimo absoluto sí. Veremos las consecuencias que tiene este hecho en la discusión de los resultados.

Si aumenta la intensidad de la DMI i.e,  $D$ , tendremos que la diferencia entre el máximo y el mínimo locales se irá reduciendo hasta hacerse nula para  $H_D/H_K = 1$ , como se aprecia en la gráfica 1(b). Si seguimos aumentando la función se irá aproximando a una función seno al poder desprestigiar el coseno del paréntesis. También podemos comprobar lo que habíamos dicho antes de que el valor absoluto del campo de Walker crece con  $D$ .

Para  $D > 0$  y por lo tanto  $H_D < 0$  se obtienen resultados parecidos, con la diferencia de que ahora se alcanzan máximos relativos y mínimos absolutos, como se ve en 2(a).

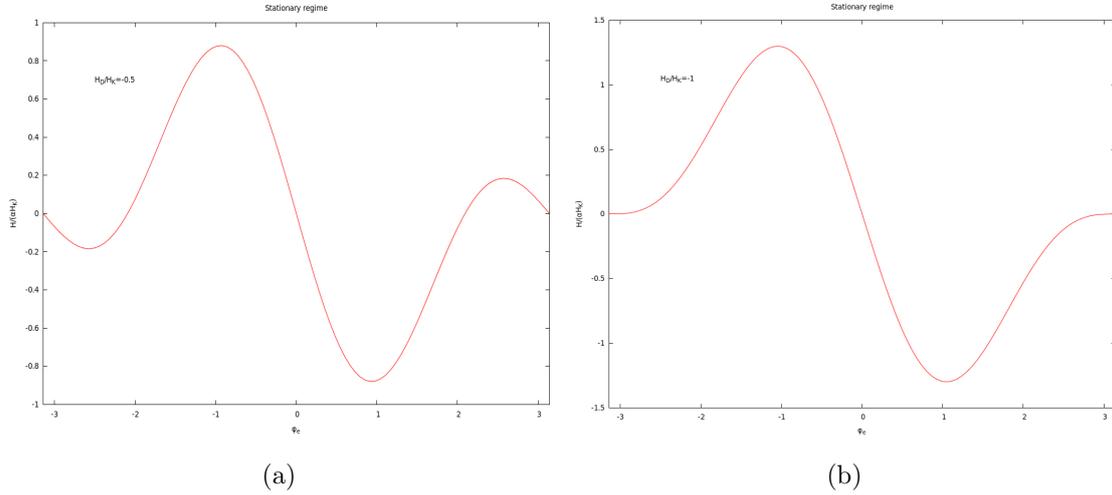


Figura 2: Régimen estacionario. Solución de la ecuación dinámica para la orientación de la pared en régimen estacionario para  $H_D/H_K = -0.5$ (a) y para  $H_D/H_K = -1$ (b)

Los extremos de la función (2.80) se hallan minimizando el ángulo respecto al campo. Indicaremos con  $\varphi_W$  el ángulo para el cual se obtiene cada uno de estos extremos. Llamando  $\delta = H_D/H_K$  tenemos que

$$\cos \varphi_W = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 8}}{4} \quad (2.81)$$

Esta ecuación tiene cuatro soluciones. En la figura 3(a) representamos el campo externo  $H_W$  que obtenemos para cada una de estas soluciones en función de  $H_D/H_K$ . Estas curvas representarán las soluciones matemáticas de la función (2.80) con los ángulos obtenidos de (2.81). Como comentamos antes, para  $H_D/H_K = 1$  el máximo y el mínimo local toman el mismo valor. Para valores de  $|H_D/H_K| > 1$  ya no

existen los extremos locales y solo tenemos los globales, tal y como observamos en la figura 3(a). También podemos ver esto en la ecuación (2.81). Para  $|\delta| > 1$  una de las soluciones de la raíz dará valores de la parte de la derecha mayores que uno.

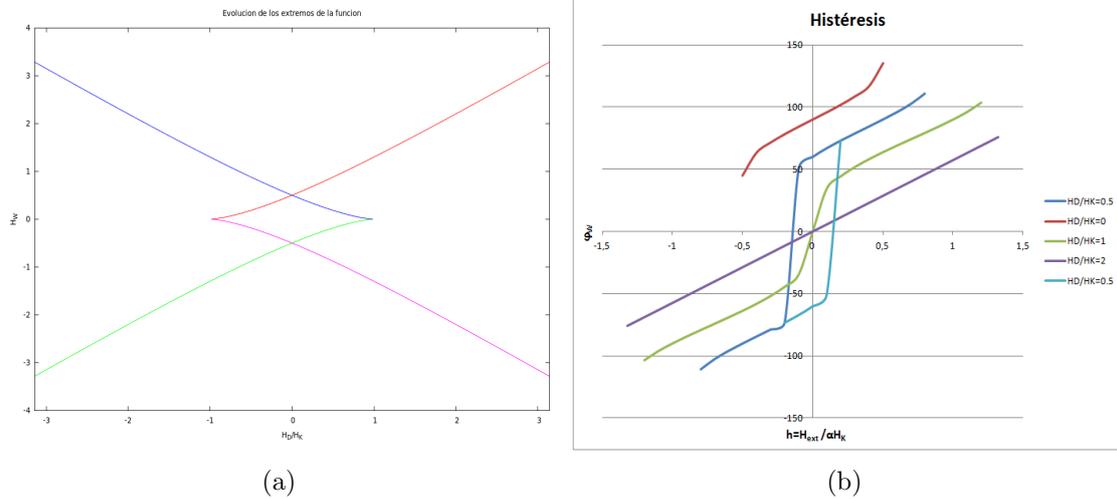


Figura 3: La figura (a) la obtenemos representando el campo externo para el cual tenemos extremos de la función (2.80), en función de  $H_D/H_K$ . En (b) representamos la orientación de la pared en función del campo aplicado. Podemos observar la existencia de histéresis para determinados valores de  $H_D/H_K$ .

Como consecuencia de los extremos relativos tendremos que el comportamiento dinámico de la orientación de la pared se caracteriza por un ciclo de histéresis en el material, como se ve en la figura 3(b). En esta figura representamos los ángulos  $\varphi_e$  en función de  $H_{ext}$ . En efecto vemos que en función del valor  $H_D/H_K$  podremos tener que la aplicación de un campo negativo nos lleva a un estado, pero al anular después el campo el estado final no coincide con el inicial, como ocurre con los estados para campo nulo azul y azul claro de la figura 3(b).

### 3 Herramientas de Estudio. Software Utilizado

El estudio que se ha hecho del efecto de la DMI en la dinámica de paredes magnéticas ha sido fundamentalmente computacional. Los fundamentos teóricos expuestos anteriormente han sido utilizados para desarrollar un software, GPMagnet, por parte del grupo de investigación SINAMAG (SIMulación de NANOestructuras MAGnéticas), con sede en la Universidad de Salamanca, pero formado por miembros de la Universidad de Salamanca y de la Universidad de Valladolid.

Como los cálculos que vamos a realizar son numéricos conviene expresar las densidades de energía y los campos obtenidos en el apartado anterior de forma adimensional, junto con su factor de conversión. Esto es fácil de conseguir ya que no es más que multiplicar las densidades de energía por  $1/\mu_0 M_s^2$ , y los campos por  $1/M_s$ .

Para poder resolver numéricamente las ecuaciones planteadas debemos pasar del continuo de la teoría a una representación discreta donde las variables son los valores de  $\mathbf{m}$  en cada una de las celdas computacionales consideradas, indexadas por los parámetros  $i : 1 \cdots N_x$ ,  $j : 1, \cdots N_y$  y  $k : 1, \cdots N_z$  donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  es el número de celdas en cada una de las direcciones del espacio. Cada una de las celdas tendrá un volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  que debe cumplir unas propiedades. Debe ser suficientemente grande para la escala atómica, pero suficientemente pequeño como para poder considerar que  $\Delta \mathbf{M}$  es pequeño entre celdas contiguas (de forma que tienda a una función continua cuando consideremos el espacio continuo). La escala espacial en la que la magnetización varía apreciablemente se llama escala significativa [4], y depende de las longitudes características de las interacciones. Debemos asegurar que nuestra celda sea menor que la menor de estas longitudes características. Como por ejemplo la anchura de la pared  $\Delta$ , definida en la ecuación (2.57), o la longitud de intercambio  $l_{exch}$  definida en la ecuación (2.40)

Una vez hemos discretizado nuestro ferromagnético es necesario discretizar también las ecuaciones continuas obtenidas en la sección anterior. Para ello utilizamos el método de las diferencias finitas, reemplazando el dominio de la solución continua por un conjunto discreto de puntos de la red. En cada punto los operadores diferenciales se reemplazan por los operadores de las diferencias finitas y las condiciones de contorno por sus versiones discretas. Este método presenta varias ventajas como su facilidad de implementación en rutinas de cálculo y su facilidad a la hora de hacer la discretización, como ya hemos visto. Permite, además, evaluar la energía magnetostática mediante el uso de la transformada rápida de Fourier (FFT) lo que

acorta considerablemente el tiempo de cálculo y se podrán implementar métodos de órdenes superiores. Sin embargo para estructuras con superficies curvas la discretización introduce una aproximación a la geometría lo que puede conducir a errores importantes. Comentaremos brevemente estos aspectos, aunque es posible encontrar más información en la bibliografía como en [4], o en [12].

Para el cálculo de la versión discreta de la energía de intercambio sólo necesitamos la versión discreta de

$$(\nabla \mathbf{m})^2 \equiv (\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2 \quad (3.1)$$

Para ello, en la aproximación de las diferencias finitas basta sustituir las derivadas por los coeficientes incrementales de los valores en los puntos considerados, bien sean los nodos de la red o los centros de las celdas. Tenemos entonces para cada componente cartesiana  $\alpha = x, y, z$  que

$$(\nabla m_\alpha)^2 \approx \left( \frac{\Delta_x m_\alpha}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_y m_\alpha}{\Delta y} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_z m_\alpha}{\Delta z} \right)^2 \quad (3.2)$$

Donde  $\Delta\alpha$  denota el tamaño del espaciado de la red en cada dirección del espacio y  $\Delta_\alpha$  el incremento de la función en una de las direcciones del espacio. Tomando el término  $\left( \frac{\Delta_x m_x}{\Delta x} \right)^2$  como ejemplo tenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta_x m_x}{\Delta x} \right)^2 &= \left( \frac{m_x(i+1, j, k) - m_x(i, j, k)}{\Delta x} \right)^2 = \\ &= \frac{m_x^2(i+1, j, k) + m_x^2(i, j, k) - 2m_x(i+1, j, k)m_x(i, j, k)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Hacemos lo mismo con el resto de componentes<sup>11</sup>. Sustituyendo en (2.37) y suponiendo celdas cúbicas, i.e,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  llegamos a que la densidad de energía es

$$\begin{aligned} u_{exch}(i, j, k) &= \frac{2A}{(\Delta x)^2} \sum_{i', j', k'}^{NN} [1 - \mathbf{m}(i, j, k) \mathbf{m}(i', j', k')] = \\ &= NN \frac{2A}{(\Delta x)^2} - \frac{2A}{(\Delta x)^2} \mathbf{m}(i, j, k) \sum_{i', j', k'}^{NN} \mathbf{m}(i', j', k') \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde hemos aplicado que  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$  en cada punto. La energía es por tanto

---

<sup>11</sup>Hemos supuesto implícitamente que solo hay un primer vecino en la celda contigua  $i + 1$ . También tendríamos que repetirlo para cada uno de los primeros vecinos. Si las celdas elementales son cúbicas tendremos 6 primeros vecinos, uno por cada cara.

$$\mathcal{U}_{exch} = \int_{V'} u_{exch}(\mathbf{r}') dV' \approx \sum_{i,j,k}^{N_c} u_{exch}(i,j,k) \Delta V \quad (3.5)$$

con  $N_c = N_x N_y N_z$  el número total de celdas computacionales.

En la representación discreta la derivada funcional  $\delta/\delta\mathbf{m}$  se convierte en  $\partial/\partial\mathbf{m}$ . Con esto, la definición de campo efectivo (2.19) y la expresión (3.5) podemos calcular el campo debido a la interacción de intercambio. Haciéndolo adimensional tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{exch}(i,j,k) = \frac{2A}{\mu_0 M_s^2} & \left[ \frac{\mathbf{m}(i+1,j,k) + \mathbf{m}(i-1,j,k)}{(\Delta x)^2} + \right. \\ & + \frac{\mathbf{m}(i,j+1,k) + \mathbf{m}(i,j-1,k)}{(\Delta y)^2} + \\ & \left. + \frac{\mathbf{m}(i,j,k+1) + \mathbf{m}(i,j,k-1)}{(\Delta z)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Recordamos que estas expresiones son sólo válidas para pequeñas variaciones de la magnetización.

Las expresiones discretas de la energía magnetocristalina y de Zeeman, al no depender de las derivadas de la magnetización y ser locales, son las mismas, simplemente sustituimos los valores continuos de las funciones por sus valores en los puntos considerados.

La energía demagnetizante es no local, es decir, depende de la magnetización en el resto del material y no solo en los puntos considerados. Es necesario, por tanto hacer, una suposición sobre la magnetización en el resto del material. Una de ellas, aunque no la única, es considerar que la magnetización es constante en cada celda computacional, que es lo que haremos. Para calcular el campo demagnetizante lo expresaremos en componentes cartesianas, y supondremos que este campo es igual al producto de un tensor, el tensor magnetostático, y de la magnetización. Con esto obtendremos las componentes cartesianas del vector en términos de las componentes del tensor y de la magnetización. El tensor magnetostático depende únicamente de la geometría de la muestra y de la distancia entre la fuente y el punto donde evaluemos el campo. Por tanto podemos calcular este tensor al principio de la simulación y reutilizarlo cuando sea necesario. Las expresiones del tensor demagnetizante dependerán de las aproximaciones utilizadas, por lo que habrá que asegurar que la

geometría y el tamaño de la discretización conducen a resultados similares con distintas aproximaciones. De todas las contribuciones a la energía esta es la que más tiempo de cálculo requerirá. Por ello será necesario buscar estrategias para disminuir este tiempo. La más habitual es el uso de la transformada rápida de Fourier (FFT). La expresión del campo demagnetizante no es otra cosa que la convolución tridimensional discreta. De acuerdo con el teorema de la convolución esto es lo mismo que el producto escalar de las correspondiente transformadas de Fourier en el dominio de las fases. Por tanto si al calcular el tensor demagnetizante al principio calculamos también su transformada de Fourier, cada vez que queramos calcular el campo demagnetizante no tendremos más que calcular su transformada de Fourier, hacer el producto, y deshacer la transformación. El tiempo de cálculo requerido para ello es del orden de  $N_c \log_2 N_c$  mientras que el tiempo que requeriría hacer la convolución es del orden de  $N_c^2$ . Vemos por tanto que el tiempo de cálculo se ve notablemente reducido siendo mayor la diferencia cuantas más celdas computacionales tengamos. Para poder utilizar este método es necesario que la red sea periódica, pero no así las condiciones de contorno ya que es posible generalizar el método para incluir condiciones de contorno no periódicas, como por ejemplo la técnica del zero-padding. Como la expresión de la densidad de energía no contiene derivadas, esta se mantiene, simplemente hay que evaluarla en los puntos considerados (Y si queremos calcular la energía total sustituir la integral por el sumatorio).

Para el cálculo de la energía asociada a la DMI tenemos que la versión discreta de  $\mathbf{m} \nabla (\mathbf{m} \mathbf{u}_n)$  es<sup>12</sup>

$$\mathbf{m} \nabla (\mathbf{m} \mathbf{u}_n) \approx m_x \frac{\Delta_x m_z}{\Delta x} + m_y \frac{\Delta_y m_z}{\Delta y} + m_z \frac{\Delta_z m_z}{\Delta z} \quad (3.7)$$

Y la versión discreta de  $(\mathbf{m} \mathbf{u}_n) \nabla \mathbf{m}$  es

$$(\mathbf{m} \mathbf{u}_n) \nabla \mathbf{m} \approx m_z \frac{\Delta_x m_x}{\Delta x} + m_z \frac{\Delta_y m_y}{\Delta y} + m_z \frac{\Delta_z m_z}{\Delta z} \quad (3.8)$$

con  $\alpha : x, y, z$ . La densidad de energía de la DMI es entonces

$$u_{DMI} = D \left[ m_z \frac{\Delta_x m_x}{\Delta x} + m_z \frac{\Delta_y m_y}{\Delta y} - m_x \frac{\Delta_x m_z}{\Delta x} - m_y \frac{\Delta_y m_z}{\Delta y} \right] \quad (3.9)$$

Otra forma de expresar la densidad de energía más útil para calcular el campo es (en la versión continua más compacta)

---

<sup>12</sup>En nuestro sistema  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_z$ . Si esto no fuese así haríamos el desarrollo con la componente de  $\mathbf{m}$  en la dirección  $\mathbf{u}_n$  y al final haríamos la transformación de coordenadas de  $\mathbf{u}_n$  a las componentes de nuestro sistema de referencia, transformación que conocemos por conocer la geometría de la muestra, es decir, el vector normal en cada punto.

$$u_{DMI} = D[2(\mathbf{m} \mathbf{u}_n) \nabla \mathbf{m} - \nabla((\mathbf{m} \mathbf{u}_n) \mathbf{m})] \quad (3.10)$$

El campo lo obtenemos considerando que en la representación discreta la derivada funcional  $\delta/\delta\mathbf{m}$  se convierte en  $\partial/\partial\mathbf{m}$ , la definición de campo efectivo (2.19) y la expresión (3.10) en forma discreta. Durante este desarrollo hay que despreciar términos cuadráticos que desaparecerían de hacer el desarrollo a órdenes superiores. Haciéndolo finalmente adimensional obtenemos

$$\mathbf{h}_{DMI} = \frac{2D}{\mu_0 M_s^2} \left[ \frac{\Delta_x m_z}{\Delta x} \mathbf{u}_x + \frac{\Delta_y m_z}{\Delta y} \mathbf{u}_y + \frac{\Delta_z m_z}{\Delta z} \mathbf{u}_z - \mathbf{u}_n \left( \frac{\Delta_x m_x}{\Delta x} + \frac{\Delta_y m_y}{\Delta y} + \frac{\Delta_z m_z}{\Delta z} \right) \right] \quad (3.11)$$

Ahora que ya podemos calcular numéricamente las densidades de energías y los campos veremos cómo resolver la ecuación dinámica. El programa implementa varios algoritmos para la resolución de la ecuación de LLG, como son el algoritmo de Euler, el de Runge-Kutta de 6° orden o el Predictor-Corrector de 2° orden (que incluye al de Euler). En todas las simulaciones hechas en el presente trabajo hemos utilizado el algoritmo de Runge-Kutta de 6° orden. También cabe mencionar que se pueden seguir varias estrategias para hallar estados de equilibrio. Se puede dejar evolucionar el sistema hasta que este alcance dicho estado, lo cual puede ser conveniente si se tiene una cierta idea de cual puede ser el estado de equilibrio de interés<sup>13</sup> y partir de uno próximo, o bien se puede minimizar la energía del sistema mediante distintos métodos como el del Gradiente Conjugado. En cualquier caso se ha verificado que los estados de equilibrio hallados siguiendo ambas estrategias son los mismos con el código que estamos utilizando. Nosotros hemos resuelto la ecuación dinámica hasta obtener un estado de equilibrio.

Veamos en que consisten los algoritmos mencionados en el párrafo anterior. Para ello antes escribiremos la ecuación de LLG (2.33) de forma que aparezcan los campos adimensionales

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \frac{\gamma_0 M_s}{1 + \alpha^2} \left( -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff} - \alpha \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff}) \right) \quad (3.12)$$

Podemos además definir una constante de tiempo adimensional  $\tau = \gamma_0 M_s t$ . Calcularemos entonces la magnetización (y el campo), en cada instante de tiempo adimensional  $\tau$ .

---

<sup>13</sup>En realidad estos estados de equilibrio son estados metaestables en el sentido de que son mínimos locales

**Algoritmo de Euler:**

Es un algoritmo muy sencillo de implementar. Partiendo de la ecuación dinámica (3.12) podemos escribir

$$\mathbf{m}(t + \Delta t) = \mathbf{m}(t) + \frac{\gamma_0 M_s \Delta t}{1 + \alpha^2} \left( -\mathbf{m}(t) \times \mathbf{h}_{eff}(t) - \alpha \mathbf{m}(t) \times (\mathbf{m}(t) \times \mathbf{h}_{eff}(t)) \right)$$

Pasando a la variable adimensional  $\tau$  y definiendo  $\mathbf{f}(\mathbf{m}(\tau), \tau) = \frac{1}{1 + \alpha^2} \left( -\mathbf{m}(t) \times \mathbf{h}_{eff}(t) - \alpha \mathbf{m}(t) \times (\mathbf{m}(t) \times \mathbf{h}_{eff}(t)) \right)$

$$\mathbf{m}(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{m}(\tau) + \Delta\tau \mathbf{f}(\mathbf{m}(\tau), \tau) \quad (3.13)$$

Aunque el algoritmo de Euler es muy sencillo de implementar presenta dos problemas. No conserva el módulo de  $\mathbf{m}$  por lo que es necesario renormalizar  $\mathbf{m}$  a cada paso. Más problemático resulta el hecho de que requiere de pasos temporales muy pequeños para asegurar la estabilidad. Podemos añadir que el error cometido es del orden de  $\Delta\tau^2$

**Algoritmo Predictor-Corrector de 2º orden:**

Este algoritmo hace el cálculo de la magnetización de la siguiente manera. Primero “predice” la magnetización en el instante siguiente mediante el algoritmo de Euler. Con la magnetización calcula el campo efectivo y recalcula  $\mathbf{f}(\mathbf{m}_E(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$  con la nueva magnetización y campo. Finalmente la magnetización en el instante  $\tau + \Delta\tau$  la calculará mediante (3.13) siendo  $\mathbf{f}(\mathbf{m}(\tau), \tau)$  la media aritmética de la función predicha con la magnetización y campo inicial, y la función corregida con la magnetización y campo calculados en el paso intermedio. Es decir

$$\mathbf{m}(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{m}(\tau) + \frac{\Delta\tau}{2} \left( \mathbf{f}(\mathbf{m}(\tau), \tau) + \mathbf{f}(\mathbf{m}_E(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) \right) \quad (3.14)$$

Al igual que antes, al no conservar el módulo de la magnetización, es necesario renormalizar esta en cada paso.

**Algoritmo de Runge-Kutta de 6º orden (RK6):**

El método de Euler, como hemos visto, calcula la magnetización en el siguiente instante mediante la derivada en el instante inicial, lo que sería exacto para una función lineal. Sin embargo, si la función no es lineal, la derivada puede cambiar sustancialmente si el intervalo  $\Delta\tau$  es demasiado grande. El objetivo del método predictor-corrector de orden 2 es corregir esto evaluando la derivada en el instante inicial y final. Esta también va a ser la filosofía de RK6. En general los métodos de

Runge-Kutta se basan en evaluar la derivada en varios puntos del intervalo (inicial, final, o cualquier punto intermedio) y después ponderar las derivadas halladas para obtener la función en el instante final. Esto se resume, para RK6 [13]

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \Delta\tau \mathbf{f}(\mathbf{m}(\tau), \tau) \\
\mathbf{k}_2 &= \Delta\tau \mathbf{f}(\mathbf{m}(\tau) + b_{21}\mathbf{k}_1, \tau + a_2\Delta\tau) \\
&\dots \\
\mathbf{k}_6 &= \Delta\tau \mathbf{f}(\mathbf{m}(\tau) + b_{61}\mathbf{k}_1 + \dots + b_{65}\mathbf{k}_5, \tau + a_6\Delta\tau)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{m}(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{m}(\tau) + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6$$

Pero más relevante que el cálculo de la derivada es el hecho de que las seis funciones  $k_i$  nos permiten obtener la magnetización en el instante posterior de otra manera, aunque con un error mayor.

$$\mathbf{m}'(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{m}(\tau) + c'_1k_1 + c'_2k_2 + c'_3k_3 + c'_4k_4 + c'_5k_5 + c'_6k_6 \tag{3.16}$$

Esto nos permite estimar el error cometido como

$$e = \mathbf{m}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{m}'(\tau + \Delta\tau) = \sum_{i=1}^6 (c_i - c'_i) k_i \tag{3.17}$$

La relevancia de que podamos estimar el error de esta manera es la siguiente. Supongamos que la magnetización varía muy poco en algún punto o instante de tiempo (como por ejemplo en las zonas de los dominios alejadas de la pared), pero varía muy rápidamente en otras zonas. Si pretendemos tener una cierta precisión en cualquier punto e instante necesitaremos que el paso temporal sea suficientemente pequeño para obtener esa precisión en los puntos más exigentes. Sin embargo, para otras zonas, estamos consumiendo con ese paso temporal una ingente cantidad de tiempo para obtener una precisión que no necesitamos. Para evitar esto lo que haremos es variar el paso temporal, adaptándolo a la precisión requerida. Supongamos que esta es  $e_r$ . Se puede demostrar que el paso temporal que necesitamos para obtener esa precisión es

$$\Delta\tau_r = \Delta\tau \left| \frac{e_r}{e} \right|^{0.2} \tag{3.18}$$

Donde  $\Delta\tau$  es el paso que estamos utilizando y  $e$  el error estimado que cometemos con ese paso. Haciendo este cálculo podemos saber, si la precisión que hemos conseguido no es suficiente, que paso debemos utilizar para conseguirla, y si ha sido suficiente, una estimación de cuanto podemos agrandar el paso para el próximo cálculo, aho-

rrando tiempo.

Los valores de las constantes que hemos utilizado para el programa son las de Cash y Karp para los métodos de Runge-Kutta incrustados (es decir, con varias formas de calcular la función, lo que nos permite estimar el error), que pueden ser consultadas en la bibliografía [13].

Tampoco en este caso se conserva el módulo y es necesario, por tanto, renormalizar la magnetización en cada celda.

## 4 Orientación de la Pared en Equilibrio

### 4.1 Parámetros utilizados para la simulación

En primer lugar se pretende estudiar la orientación de una pared magnética en equilibrio en una microtira con PMA en función del parámetro  $D$  de la DMI. Ya han sido realizados otros estudios similares como en [9]. Sin embargo nosotros utilizaremos para el mismo un software distinto, de manera que podamos verificar, comparando los resultados, que los cálculos micromagnéticos que realiza el programa GPMagnet lleva a resultados similares a los obtenidos por [9]. Además añadiremos al estudio de la orientación que el parámetro  $D$  de la DMI pueda tomar valores negativos, es decir, que el vector de la interacción tenga sentido opuesto, para comprobar si las simulaciones arrojan los mismos resultados que se obtienen en el modelo unidimensional, como de hecho ocurre para  $D > 0$  [9]. Nuestro sistema de referencia cartesiano estará dado por la dirección longitudinal de la tira como eje  $X$ , la transversal como eje  $Y$  y la dirección perpendicular como eje  $Z$ . Para calcular este estado de equilibrio partimos de un estado inicial con la mitad de la tira uniformemente magnetizada perpendicularmente a la tira en sentido  $z+$ , y la otra mitad con magnetización en sentido opuesto. Se partirá de una cierta pared, de anchura y orientación arbitrarias<sup>14</sup>, que evolucionará hasta alcanzar la configuración de equilibrio para una tira con dos dominios magnéticos en la dirección de anisotropía opuestos.

Cada celda computacional tendrá una longitud  $x = 4 \text{ nm}$ ,  $y = 4 \text{ nm}$  y  $z = 0.6 \text{ nm}$  y la tira estará compuesta por 1200 celdas en la dirección longitudinal (eje  $X$ ), 40 en la transversal (eje  $Y$ ), y una en la dirección perpendicular  $Z$ . Tendremos por tanto una tira finita de longitud  $4800 \text{ nm}$ , anchura  $160 \text{ nm}$  y grosor  $0.6 \text{ nm}$ , con 48000 celdas computacionales. Será además una tira perfecta afectada por los términos de intercambio y magnetostático y por DMI interfacial<sup>15</sup>. El material estará caracterizado por una constante de intercambio  $A = 10^{-11} \text{ J/m}$  y una magnetización de saturación  $M_s = 7 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ . Como hemos dicho, será un material con anisotropía uniaxial perpendicular, siendo la constante de anisotropía  $K_1 = 4.8 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3$ . Supondremos además que el factor de disipación  $\alpha = 0.2$ . Se hallará la configuración de equilibrio para distintos valores de  $D$ , tanto positivos como negativos, del orden de  $10^{-5} \text{ J/m}^2$ .

De estos parámetros se deduce un  $\Delta$  según se definió en (2.58) tal que  $\Delta \approx 7.6 \text{ nm}$ .

---

<sup>14</sup>En el siguiente apartado se comentará como afecta esta orientación inicial

<sup>15</sup>La interacción de Dzyaloshinskii-Moriya será debida a que la tira se supone crecida sobre un metal pesado con fuerte acoplamiento spin-órbita

Esto nos va a asegurar que la anchura de la pared va a ser menor que la de la tira, por lo que tendremos una anisotropía de forma que va a tender a orientar la pared en dirección  $Y$ , o lo que es lo mismo  $H_K > 0$  tal y como hemos definido en (2.75).

## 4.2 Resultados y conclusiones

Como resultado de estas simulaciones obtenemos, entre otras cosas, el valor medio de las componentes  $m_x$  y  $m_y$  de la magnetización en la tira, que son debidas a la magnetización en la pared. Representando estos valores medios, en función de  $D$  obtenemos el gráfico de la figura 4(a). Comparando esta gráfica con la obtenida por otros autores como en [9] podemos comprobar<sup>16</sup> que la orientación de la pared para  $D > 0$  sigue la misma tendencia y los valores obtenidos son del mismo orden, aunque distintos debido a que las tiras sobre las que se han hecho las simulaciones son distintas. La orientación inicial que dábamos a la pared sólo determina el signo de  $m_y$ , la componente en el plano perpendicular a la tira, mientras que el signo de  $m_x$  lo determina el signo de  $D$ . Esto encaja con la discusión que hicimos previamente sobre la orientación de la pared que predecía el modelo unidimensional. Para  $D = 0 \rightarrow H_D = 0$  y por tanto tenemos que  $\varphi_0 = \pi/2, -\pi/2$  con lo que la magnetización en el eje  $X$  es nula y máxima en el eje  $Y$ , y tenemos una pared de Bloch. A medida que aumenta  $|D|$  aumenta  $|\cos \varphi_0|$  aumentando la componente  $m_x$  de la magnetización. El signo de esta depende de  $\text{sign}(H_D) = -\text{sign}(D)$ , como efectivamente hemos obtenido con las simulaciones. Una vez que  $|\cos \varphi_0| = 1$  este valor no puede seguir aumentando por lo que la pared se mantiene como pared de Néel cuando aumenta  $|D|$ . Por tanto comprobamos que nuestros resultados numéricos encajan perfectamente con los resultados dados por el modelo unidimensional, y con los resultados numéricos dados por otros autores [9] para los casos en que lo han estudiado. La gráfica 4(b) contiene la misma información, pero presentada, tal vez, de forma más intuitiva.

Podemos apreciar aquí la quiralidad de la pared como consecuencia de  $D$ , como ya había indicado el modelo. La dependencia de la orientación de la pared con  $D$  se puede razonar como sigue. La energía magnetostática va a tender a orientar la magnetización en la dirección mayor de la pared (anisotropía de forma), ya que si esta es uniforme las únicas cargas que se formarán serán superficiales y en las caras perpendiculares a la dirección de magnetización. Cuanto mayor sea la distancia entre ellas menor será el campo demagnetizante y por tanto la energía. Por su parte la energía de intercambio aumentará en cualquier caso ya que depende de  $(\partial\theta/\partial x)^2$

---

<sup>16</sup>La definición de  $D$  que usamos nosotros y la que utilizan estos autores tiene un signo cambiado

y siempre será positiva. Pero la energía asociada a la DMI, depende solo de  $\partial\theta/\partial x$  y este valor puede ser tanto positivo como negativo. Por tanto, si existe DMI, la situación de equilibrio será aquella en la que los signos de  $D$  y de  $\partial\theta/\partial x$  sean opuestos, minimizando la energía, que de hecho es lo que aparece en la gráfica; cuando  $D$  es positivo, el valor medio de  $m_x$  es negativo y viceversa.

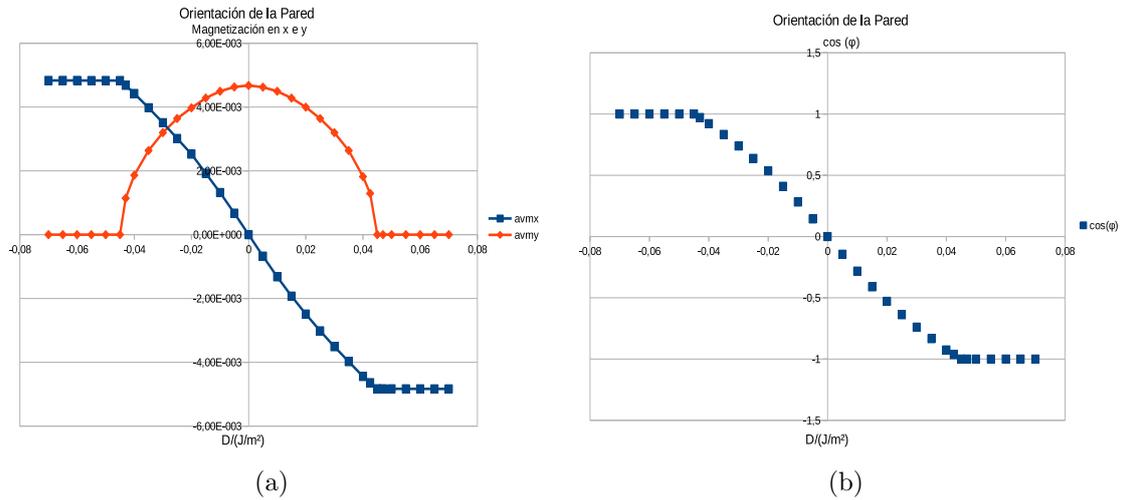


Figura 4: Orientación de la pared magnética. (a) Componentes promediadas in-plane de la magnetización en la tira, que determinan la orientación de la pared, en función del parámetro  $D$  de la DMI. (b) Coseno del ángulo que forma la magnetización en la pared con el eje  $Y$

## 5 Dinámica de la Pared

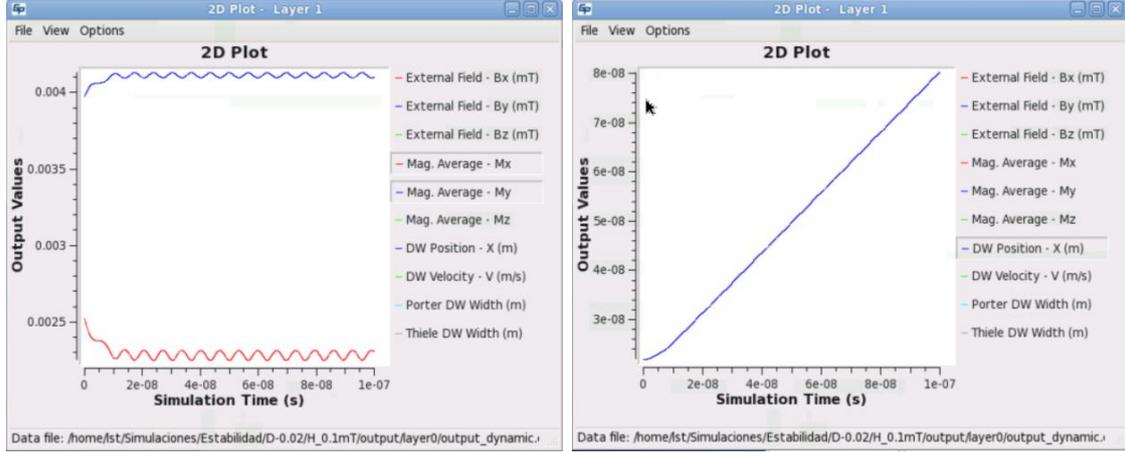
### 5.1 Planteamiento

Ahora que ya tenemos la configuración de la pared en equilibrio podemos empezar a moverla para estudiar su dinámica. Al igual que antes, este estudio ha sido realizado, al menos parcialmente, por otros autores [9]. Sin embargo, al igual que antes, ampliaremos el estudio para valores de la constante de la DMI negativos. Partiremos de las situaciones de equilibrio obtenidas anteriormente y utilizaremos las mismas características para las tiras. Para provocar el movimiento de la pared aplicaremos un campo magnético constante, uniforme y perpendicular a la tira, tanto en un sentido como en el otro. Como es bien sabido [10] existe un campo máximo para el cual la pared es estable, es decir, mantiene la estructura durante el movimiento. Este es el campo de Walker, que pretendemos observar en las simulaciones. Sin embargo, el planteamiento hasta ahora era que el campo de Walker coincidía con los dos valores del campo más próximos a la orientación inicial para los cuales existe un extremo absoluto, ya que en ausencia de DMI no existen extremos relativos. El estudio realizado en el presente trabajo muestra como sólo existe campo de Walker, entendido como el campo máximo para el cual el movimiento de la pared ya no alcanza un régimen estacionario en el que mantenga su estructura, para los valores del campo que coincidan con los extremos *absolutos*, mientras que los extremos relativos, aunque tienen importancia en la dinámica de la pared, no determinan un campo de Walker. Esto se explica porque sí existen soluciones estables para campos mayores que el campo en los extremos relativos.

Observaremos la dinámica aplicando para cada valor de  $D$  que consideremos una serie de valores de campo, tanto positivos, i.e, en sentido  $z+$ , como negativos. Observaremos que la dinámica, por encima de ciertos campos, presenta comportamientos netamente distintos. Tomaremos el mayor de los campos, en valor absoluto, para el cual no se aprecia cambios importantes en la dinámica como el campo que marca que la dinámica responda de una u otra manera.

### 5.2 Resultados y comparación con el modelo

Para campos positivos i.e, en sentido ( $z+$ ) tendremos que el dominio con orientación de la magnetización  $z+$  aumenta a costa del dominio con orientación de la magnetización  $z-$  y la pared se desplaza en la dirección correspondiente. Por su parte, la orientación de la pared gira en sentido antihorario hasta alcanzar el valor estacionario.

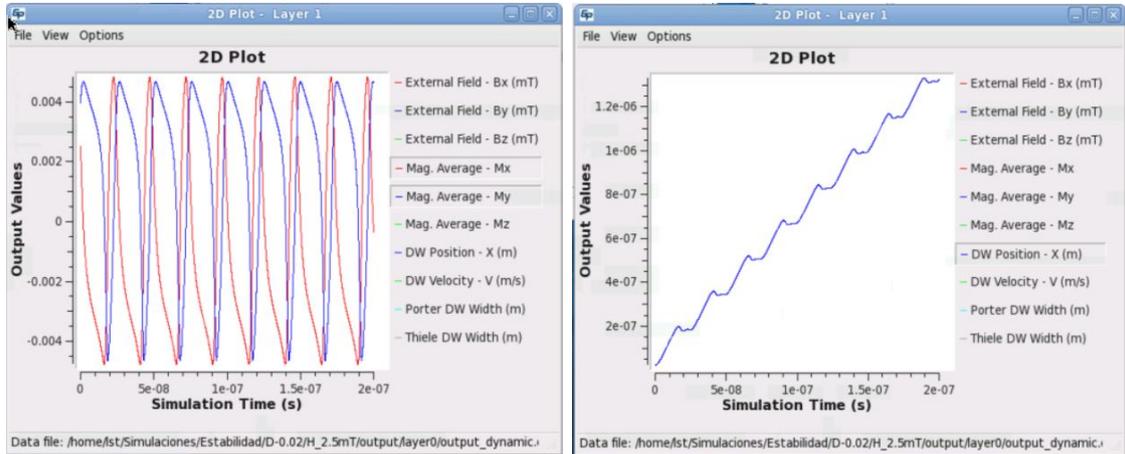


(a)

(b)

Figura 5: Dinámica de la pared para  $D = 2 \cdot 10^{-5} (J/m^2)$  y  $H_{ext} = 0.1 mT$ . (a) Componentes promediadas in-plane de la magnetización de la pared en función del tiempo. (b) Posición de la pared en función del tiempo.

Para valores de  $D > 0$  hemos obtenido lo siguiente. Para campos pequeños, una dinámica y una evolución para las componentes  $m_x$  y  $m_y$  como aparece en la figura 5. Observamos una cierta oscilación tanto en la posición de la pared como en las componentes. Sin embargo la amplitud de esta oscilación es pequeña y disminuye al aumentar el campo por lo que podemos aceptar como válida la aproximación de que  $\dot{\phi} \approx 0$  y  $\dot{q} \approx cte$  que hacíamos en el modelo unidimensional.



(a)

(b)

Figura 6: Dinámica de la pared para  $D = 2 \cdot 10^{-5} (J/m^2)$  y  $H_{ext} = 2.5 mT$ . (a) Componentes promediadas in-plane de la magnetización de la pared en función del tiempo. (b) Posición de la pared en función del tiempo.

Al aumentar el campo observamos que llega un momento en el que la posición ya no varía de forma lineal ni siquiera aproximadamente, y las componentes in-plane de la magnetización se vuelven inestables no alcanzando en ningún caso un valor

estacionario, como se ve en la figura 6. Hemos superado el campo de Walker.

Aplicando ahora distintos campos, también positivos, para  $D < 0$  observamos lo siguiente. Para campos pequeños no vemos apenas diferencia como se aprecia en la figura 7.

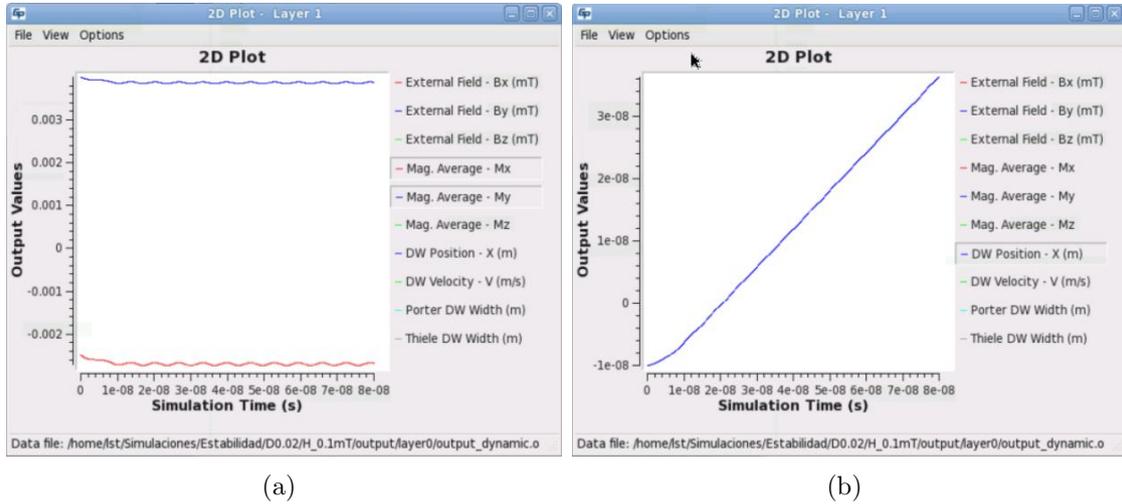


Figura 7: *Dinámica de la pared para  $D = -2 \cdot 10^{-5}(J/m^2)$  y  $H_{ext} = 0.1mT$ . (a) Componentes promediadas in-plane de la magnetización de la pared en función del tiempo. (b) Posición de la pared en función del tiempo.*

Sin embargo observamos un cambio en la evolución lineal de la pared para campos menores que en el caso anterior (figura 8). En este punto hemos alcanzado el máximo relativo.

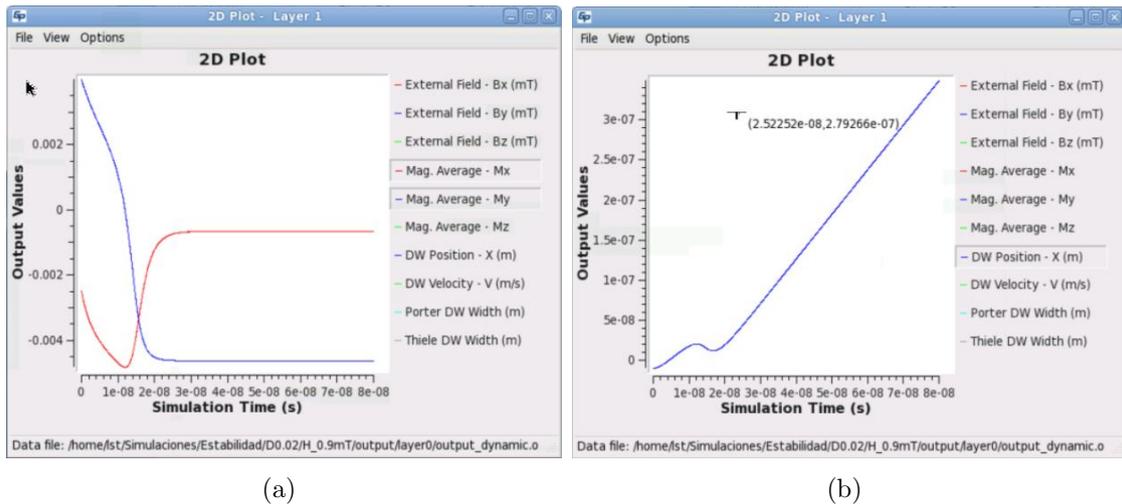


Figura 8: *Dinámica de la pared para  $D = -2 \cdot 10^{-5}(J/m^2)$  y  $H_{ext} = 0.9mT$ . (a) Componentes promediadas in-plane de la magnetización de la pared en función del tiempo. (b) Posición de la pared en función del tiempo.*

Lo que observamos no obstante es una variación abrupta de la orientación de la pared, acompañada de un retroceso de la misma, tras la cual la pared alcanza una orientación estacionaria. Esta reorientación nos ha llevado a la parte opuesta de la figura 2(a), permitiendo así a la pared girar en sentido antihorario hasta el máximo absoluto. Al igual que en el caso anterior se llega a una orientación estacionaria de la pared para el mismo campo, pero a diferencia de antes la pared se desplaza durante un tiempo en sentido contrario, mientras la pared se reorienta.

Si seguimos aumentando el campo llegamos a observar la situación en la que no alcanza ningún valor estacionario de las componentes in-plane de la magnetización (figura 9<sup>17</sup>). Hemos superado de nuevo el campo de Walker, y observamos que éste coincide con el campo de Walker para  $D > 0$ .

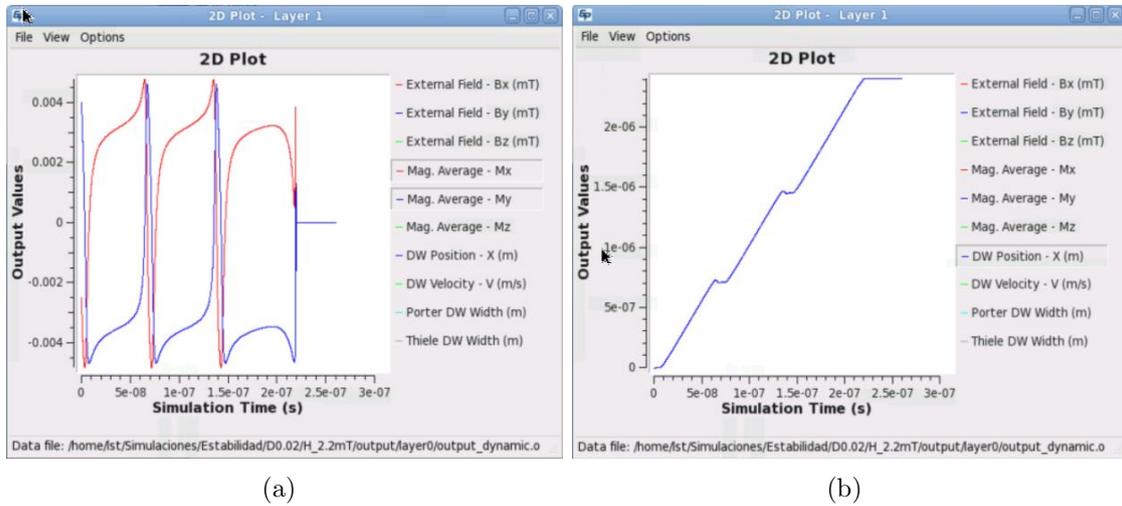


Figura 9: *Dinámica de la pared para  $D = -2 \cdot 10^{-5} (J/m^2)$  y  $H_{ext} = 2.2mT$ . (a) Componentes promediadas in-plane de la magnetización de la pared en función del tiempo. (b) Posición de la pared en función del tiempo.*

Repitiendo las simulaciones para campo aplicado en sentido opuesto se obtienen resultados análogos a los anteriores. Tenemos entonces que, para una orientación inicial de la pared dada, el fenómeno es el mismo para campo positivo y  $D > 0$  que para campo negativo y  $D < 0$ . De la misma manera el fenómeno será el mismo si el campo es positivo y  $D < 0$  y si el campo es negativo y  $D > 0$ . Esto se explica acudiendo a las gráficas 1 y 2 que determinan en qué rango de campos (positivos o negativos) se encuentran los extremos relativos.

<sup>17</sup>El valor estacionario que se ve en la gráfica se debe a que hemos expulsado la pared de la tira debido a que esta es finita

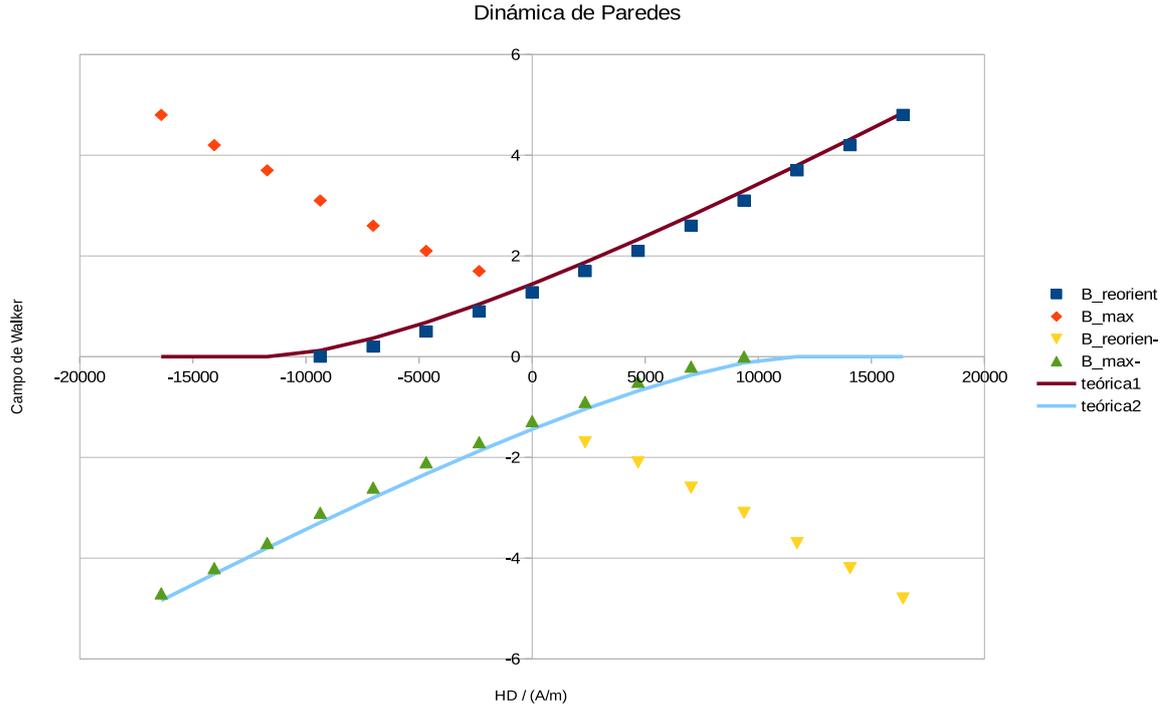


Figura 10: *Campo aplicado. Los puntos corresponden a valores del campo relevantes, bien porque se alcanza el campo de Walker (puntos naranjas y amarillos, y puntos azules de la derecha y verdes de la izquierda), bien porque se alcanza el campo de reorientación (puntos azules de la izquierda y puntos verdes de la derecha). Estos puntos han sido obtenidos a partir de las simulaciones. La línea continua representa dos de los extremos de la función (2.80).*

Tenemos, entonces, que la presencia de la DMI supone una asimetría en el desplazamiento de la pared respecto a campo aplicado en un sentido o en el opuesto, como predecía el modelo unidimensional que hemos desarrollado previamente. En la figura 10 representamos los resultados de distintas simulaciones numéricas tridimensionales buscando los puntos de campo aplicado de interés para la dinámica, bien porque para campos aplicados por encima de este la pared no mantenga su estructura, i.e., el campo de Walker, bien porque por encima de ese campo exista una transición brusca entre la orientación inicial y la final. En la gráfica también representamos las curvas dadas por el modelo unidimensional, para la orientación inicial que teníamos, para campos relevantes de la dinámica (Walker o Reorientación). Observamos un buen acuerdo entre ambos<sup>18</sup>. Si comparamos esta figura 10 con la figura 3(a) podemos observar que algunas de las soluciones que nos dan los extremos no aparecen ni como campo de reorientación ni como campo de Walker. Podemos comprobar, sin embargo, que los extremos que no observamos porque no cambian la dinámica de la pared son aquellos para los cuales el valor de ese campo puede ser superado sin

<sup>18</sup>Conviene recordar que, por el procedimiento seguido, ese campo máximo no es el de Walker, si no el de mayor valor absoluto de los que se ha probado menor que este.

reorientación. Que el campo de reorientación tenga signo positivo o negativo depende del signo de la componente  $m_y$  de la magnetización en la pared, el cual depende de las condiciones de formación de la misma.

Aunque todavía no hemos realizado las simulaciones correspondientes es de esperar que podamos observar las soluciones que no vemos en la gráfica aplicando un campo tal que provoquemos la reorientación, un cambio abrupto en la orientación de la pared, y después cambiemos el signo del campo, provocando la reorientación correspondiente al otro extremo relativo. Resulta, por tanto, imposible predecir, sin conocer las condiciones iniciales, si habrá o no campo de reorientación para un determinado campo aplicado debido a la histéresis que aparece en la figura 3(b). Y por tanto, resultará imposible saber si la pared conservará al final del desplazamiento su orientación inicial si no conocemos esta de antemano. Si se pretende utilizar dispositivos basados en el desplazamiento de una pared mediante campo aplicado y manteniendo la estructura de la misma, será necesario conocer y controlar los métodos de nucleación de paredes para poder predecir la orientación inicial de estas.

Podemos decir entonces que la pared intentará adaptarse al campo externo evolucionando de forma suave y, sólo cuando esto no sea posible, se producirá un cambio abrupto en su orientación, lo cual está ligado a la condición de que la solución estacionaria de la orientación de la pared pase por un extremo relativo. Si el valor absoluto del campo es superior al de los extremos absolutos entonces no existirá solución estacionaria y la pared no alcanzará una orientación estacionaria.

## 6 Conclusiones

Los materiales con comportamiento ferromagnético se conocen desde la antigua Grecia. Sin embargo una explicación convincente de por qué estos materiales presentaban ese comportamiento no se logró hasta fechas muy recientes. Esto es debido a que las razones profundas de la existencia de estos materiales son puramente cuánticas. Hasta entonces la mejor explicación se basaba en la suposición de la existencia de un campo “molecular”, el campo de Heisenberg, y aún esta explicación es del siglo XX. El estudio del magnetismo en materiales es un asunto complejo que requiere el uso de la física cuántica y la física de la materia condensada, así como del electromagnetismo para dar una explicación convincente tanto de su origen como de la fenomenología que presenta. Es el caso de la histéresis, una de las cuestiones que incitó a la aparición del Micromagnetismo para poder explicarla. No sorprende, por tanto, que el desarrollo del estudio del comportamiento magnético a un nivel más detallado que el de los dominios sea tan reciente.

Tampoco sorprende que este nivel de detalle requiera simplificar el problema de partida, ya que esto es habitual en toda ciencia mesoscópica para evitar el nivel de complejidad impuesto por el número descomunal de partículas que requerirían ser estudiadas. Es por ello que se hace imprescindible pasar de la cuantización del mundo microscópico a una descripción continua más propia del mundo macroscópico. Sin embargo si no queremos perder detalle de los procesos y estructuras que se forman a pequeña escala, como las transiciones entre dominios o los skyrmions, será necesario que las zonas que consideremos caracterizadas por un determinado parámetro, promedio del equivalente microscópico, sean de menor tamaño que estas estructuras.

El modelo que hemos desarrollado en primer lugar es este modelo mesoscópico que permite determinar la magnetización a una escala suficientemente pequeña como para ver cómo varía en las transiciones entre dominios. Sin embargo, se desconoce una solución analítica de las ecuaciones planteadas. En otras palabras, es útil para predecir el comportamiento de cada muestra en concreto, pero resulta conveniente tener un modelo que permita predecir características generales de cada muestra sin necesidad de desarrollar todo el cálculo numérico requerido. Este es el modelo unidimensional. Hemos visto que, aunque el modelo unidimensional es una simplificación a mayores del modelo micromagnético previo, permite predecir cuestiones como la orientación media de la magnetización en la pared, como evolucionará ante un campo externo, o si mantendrá una estructura estable cuando este se aplique, y con que velocidad se desplazará la pared. Estas cuestiones, además de su innegable interés

científico, permiten determinar la viabilidad de los dispositivos que requieran para su funcionamiento la existencia de dominios magnéticos en general, y el desplazamiento de una pared en particular, como es el caso de las memorias racetrack. El uso del modelo unidimensional permite por tanto a la industria hacer un estudio de la viabilidad del diseño previo no solo a la elaboración del mismo, sino también a la simulación de su comportamiento, lo cual también requiere una inversión en tiempo y dinero.

Siendo el modelo unidimensional una aproximación a la realidad requiere ser testado previamente, si no con muestras reales, sí al menos con simulaciones micromagnéticas, que requieren menos aproximaciones y, por tanto, es previsible que reproduzcan mejor los fenómenos físicos reales. Con esto comprobamos hasta que punto el modelo da cuenta del comportamiento del dispositivo, y si tiene que ser modificado. Teniendo en cuenta lo expuesto en este trabajo podemos concluir que el modelo encaja en nuestro caso con los resultados obtenidos, aunque algunos aspectos pueden llevar a conclusiones precipitadas, como es la identificación del campo de reorientación con el campo de Walker.

El otro objetivo del trabajo, además de testar el modelo, era el estudio de la estática y, principalmente, de la dinámica de las paredes magnéticas bajo la DMI. En ese sentido podemos concluir que el modelo predice correctamente los tres hechos, que entendemos como fundamentales, que supone la presencia de esta interacción. A saber, que en una microtira la magnetización en la pared tiende a orientarse en el eje longitudinal cuando existe una DMI interfacial normal al plano de la tira. Que esto estabiliza la pared, permitiendo la existencia de desplazamiento en régimen estacionario para campos aplicados mayores. Que la DMI impone un carácter quiral a la estructura, siendo el comportamiento asimétrico respecto la aplicación de un campo en un sentido o en el opuesto, debido a la existencia de una reestructuración de la pared. Este carácter quiral también se pone de manifiesto en el equilibrio, ya que el signo de la constante de la DMI determina el signo de las componentes longitudinales de la magnetización, siendo la orientación de la pared por consiguiente dependiente no sólo de la intensidad de la interacción, sino también de la dirección del vector.

Por tanto podemos concluir que en el presente trabajo, con el objetivo de estudiar las estructuras quirales de la magnetización asociadas al acoplamiento spin-órbita, hemos hecho las siguientes aportaciones.

-Presentado un modelo mesoscópico que permite el estudio, mediante métodos numéricos, de la estructura magnética de un material ferromagnético.

-Desarrollado un modelo más sencillo con el que es posible llegar a conclusiones sobre las estructuras de la magnetización presentes en microtiras magnéticas con PMA. Cabe destacar que, si bien parte del modelo ya estaba desarrollado, hemos hecho aportaciones innovadoras al mismo, como son los detalles asociados a los extremos relativos de la función que relaciona el campo aplicado con la orientación de la pared, y que justifican la existencia de campos de reorientación así como de ciclos de histéresis.

-Utilizado el software desarrollado por el grupo SINAMAG, GPMagnet, para resolver numéricamente las ecuaciones mesoscópicas dadas por el Micromagnetismo.

-Comparado los resultados, tanto del equilibrio estático como de la dinámica de la pared, con el modelo unidimensional que hemos desarrollado previamente, observando un muy buen acuerdo entre estos resultados y el modelo. Esta comparación va más allá que los trabajos desarrollados previamente, al estudiar situaciones físicas que, aunque igual de relevantes que otras, no habían sido estudiadas.

A la vista de esto está justificado decir que el presente trabajo supone una aportación inédita al estudio del comportamiento magnético de los materiales.

## Referencias

- [1] W. F. Brown, Jr. *Micromagnetics*. Ed. Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons, New York London, 1963
- [2] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko *Classical Mechanics*. Ed. Addison Wesley, 2000
- [3] G. Bertotti *Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Material Scientists and Engineers*. Ed. Academic Press, 1998
- [4] E. Martínez Vecino *Modelización de Procesos Dinámicos de la Magnetización a Escala Nanométrica*. Tesis Doctoral, Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Salamanca, 2005
- [5] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin *Solid State Physics*, Harcourt College Publishers, 1976
- [6] L. Landau, E. Lifshitz *Electrodynamics of Continuous Media. Course of Theoretical Physics, Volume 8*, Pergamon Press, 1984
- [7] S. Rohart, A. Thiaville *Skyrmion Confinement in Ultrathin Film Nanostructures in the Presence of Dzyaloshinskii-Moriya Interaction*. Phys. Rev. B 88, 184422, 2013
- [8] O. Alejos, L. Sánchez-Tejerina *Review of the field-driven domain wall dynamics in ferromagnetic strips with PMA under the influence of the Dzyaloshinskii-Moriya interaction*, unpublished.
- [9] A. Thiaville, S. Rohart, E. Jué, V. Cros, A. Fert *Dynamics of Dzyaloshinskii Domain Walls in Ultrathin Magnetics Films*, EPL 100 57002, 2012
- [10] A. Thiaville, J.M. García, J. Miltat *Domain Walls Dynamics in Nanowires*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 242–245 (2002) 1061–1063
- [11] M. Hayashi *Current Driven Dynamics of Magnetic Domain Walls in Permalloy Nanowires*, Tesis Doctoral, 2006
- [12] J. E. Miltat, M. J. Donahue *Handbook of Magnetism and Advance Magnetic Materials. Volume 2: Micromagnetism. Numerical Micromagnetics: Finite Difference Methods*, Ed. John Wiley and Sons, 2007
- [13] W. H. Press, S.A Teukolsky. W. T Vetterling, B. P. Flannery *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Second Edition*, Cambridge University Press 1992