



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Física**

Estudio de las propiedades de simetría  
de los polinomios ortogonales

Autor: Jesús Cítores Ávila

Tutor: Mariano A. del Olmo Martínez



# Índice general

Agradecimientos	7
Resumen	8
Abstract	8
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Complementos matemáticos</b>	<b>13</b>
2.1. Polinomios Ortogonales. . . . .	13
2.1.1. Propiedades de los polinomios ortogonales . . . . .	14
2.1.2. Polinomios ortogonales clásicos . . . . .	15
2.1.3. Funciones hipergeométricas generalizadas . . . . .	21
2.2. Álgebras y grupos de Lie . . . . .	23
2.2.1. Representación de un grupo . . . . .	23
2.2.2. Álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie . . . . .	24
2.2.3. Un ejemplo: el momento angular cuántico . . . . .	25
<b>3. Simetrías de las funciones <math>{}_1F_1[a; c; z]</math></b>	<b>27</b>
3.1. Función hipergeométrica confluyente . . . . .	27
3.2. Operadores de simetría de ${}_1F_1[a; c; x]$ . . . . .	28
3.3. Operadores de simetría tales que $\Delta c = \pm 1$ . . . . .	30
3.4. Operadores de simetría $R_{\pm}$ . . . . .	30
3.5. El grupo completo de simetría . . . . .	32
3.6. Polinomios de Laguerre. . . . .	33
3.7. Bases de las funciones de cuadrado integrable en $[0, \infty)$ . . . . .	36

3.8. Hamiltoniano de Tremblay-Turbiner-Winternitz. . . . .	38
<b>4. Simetrías de las funciones <math>{}_2F_1 [a, b; c; x]</math></b>	<b>43</b>
4.1. Funciones hipergeométrica y sus operadores estructurales . . . . .	43
4.2. Álgebra de simetrías de ${}_2F_1 [a, b; c; x]$ . . . . .	44
4.3. Otros operadores de simetría para las ${}_2F_1 [a, b; c; x]$ . . . . .	46
4.4. El grupo completo de simetría para ${}_2F_1 [a, b; c; x]: SU(2, 2)$ . . . . .	49
4.5. Funciones Algebraicas de Jacobi . . . . .	51
4.6. Operadores de simetría de los AFJ . . . . .	53
4.7. Simetrías en el índice $j$ . . . . .	57
4.8. Funciones- $L^2$ y $\mathcal{J}_j^{m,q}(x)$ . . . . .	58
4.9. El Potencial de Rosen-Morse II. . . . .	60
<b>5. Simetrías de las funciones hipergeométricas <math>{}_3F_2</math></b>	<b>63</b>
5.1. El Esquema de Askey . . . . .	63
5.2. Las funciones hipergeométricas ${}_3F_2 [a_1; a_2; a_3; b_1, b_2; x]$ . . . . .	65
5.3. Operadores con acción $\Delta a_i = \pm$ . . . . .	66
5.4. Operadores con acción $\Delta b_i = \pm 1$ . . . . .	68
<b>Conclusiones.</b>	<b>70</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>

# Índice de figuras

2.1.	Polinomios de Hermite: $H_3(x)$ (morado), $H_4(x)$ (azul) y $H_5(x)$ (verde). . . . .	16
2.2.	Funciones de Hermite: $K_3(x)$ (verde), $K_4(x)$ (azul) y $K_5(x)$ (morado). . . . .	17
2.3.	Polinomios de Laguerre: $L_3^5(x)$ (morado), $L_2^3(x)$ (azul) y $L_2^8(x)$ (amarillo). . . . .	18
2.4.	Funciones de Laguerre: $G_2^8(x)$ (amarillo), $G_2^3(x)$ (azul) y $G_3^5(x)$ (morado). . . . .	19
2.5.	Polinomios de Jacobi: $J_3^{(3,4)}(x)$ (morado), $J_2^{(10,2)}(x)$ (azul) y $J_2^{(5,3)}(x)$ (amarillo). . . . .	20
3.1.	Clasificación de las funciones ${}_1F_1[a; c; x]$ (puntos negros) en términos de su representación $su(1, 1)$ . En la figura se representa la acción del operador $N_3$ que es diagonal y con valor $-a + c/2$ y la acción de los operadores $N_\pm$ . . . . .	29
3.2.	Clasificación de las funciones ${}_1F_1[a; c; x]$ en términos de la simetría ligada a $h_M(1)$ . En la figura se representa la acción del operador $M_3$ que es diagonal y la acción de los operadores $M_\pm$ . . . . .	31
3.3.	Sistema de raíces del álgebra de operadores. . . . .	32
3.4.	Clasificación de las funciones algebraicas de Laguerre en términos de dos de sus posibles IR. La primera gráfica representa la IR $su(1, 1)$ mostrando la acción de los operadores $N_\pm$ . La segunda gráfica representa la IR $h_M(1)$ a través de la acción de los operadores $M_\pm$ y $M_3$ . . . . .	35
3.5.	Sistema de raíces del álgebra de operadores para las funciones algebraicas de Laguerre. . . . .	36
3.6.	Potencial radial del potencial de Tremblay-Turbiner-Winternitz con valores de $\omega^2 = 2$ y $\epsilon^2 = 40$ . . . . .	39
3.7.	Acción de los operadores $N_\pm$ , $M_\pm$ y $R_\pm$ sobre la función $\psi_{n\epsilon}^m$ del Hamiltoniano $H_{k,\omega,\epsilon}^r$ . . . . .	40
4.1.	Sistema de raíces de las funciones hipergeométricas ${}_2F_1[a, b; c; x]$ . . . . .	49

- 4.2. Acción sobre las AFJ de los diferentes operadores representado por el triplete  $(j, m, q)$ . La acción sobre los planos nos mueve los parámetros  $m$  y  $q$  y la acción sobre el eje vertical nos mueve el índice  $j$ . . . . . 54
- 4.3. Representación irreducible del grupo  $SU(2, 2)$  soportada por los AJF  $\mathcal{J}_l^{m,q}(x)$ , los planos horizontales corresponden a la representación irreducible de  $su_D(2) \oplus su_E(2)$ . . . . . 56
- 4.4. Potencial de Rosen Morse con parámetros  $b = 20$  y  $a = 15$ . . . . . 61
- 5.1. Esquema de Askey que relaciona las funciones hipergeométricas con los polinomios ortogonales. . . . . 64

## Agradecimientos

*Antes de hablar,  
tengo algo importante que decir.*  
Groucho Marx

En primer lugar quiero dar las gracias a mi director, Mariano A. del Olmo Martínez, por su esfuerzo y dedicación a la hora de realizar este trabajo de fin de grado. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable, nosolamente en el desarrollo de esta memoria, sino también en mi formación como investigador. Las ideas propias, siempre enmarcadas en su orientación y rigurosidad, han sido la clave del buen trabajo que hemos realizado juntos. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de este trabajo.

En segundo lugar, pero no por ello menos importante, quiero dar las gracias a mi familia por su apoyo. Deseo dedicar un agradecimiento especial a mis padres, M<sup>a</sup> Angéles y Jesús, por haberme dotado de las herramientas necesarias para llegar hasta aquí.

Por último, no quisiera olvidarme de mis compañeros de clase y profesores de universidad, por ser un estímulo para mí y por compartir conmigo estos cuatro maravillosos últimos años.

## Resumen

En esta memoria se han estudiado las simetrías de ciertas funciones hipergeométricas: las confluentes y las gaussianas. Las primeras están relacionadas con los polinomios ortogonales de Laguerre y las segundas con los de Jacobi. En el primer caso se obtuvo  $su(1, 1) \times h(1) \times h(1)$  como álgebra de simetrías de las confluentes y el álgebra de Lie  $su(2, 2)$  para las hipergeométricas gaussianas.

Se han comparado estos resultados con otros obtenidos por otros autores para los polinomios de Laguerre y de Jacobi obteniéndose un acuerdo total. Se han aplicado estas álgebras de simetría a dos sistemas físicos de interés: el potencial de Tremblay-Turbiner-Winterniz y el de Rosen Morse II, respectivamente.

Finalmente se ha comenzado a analizar las simetrías de ciertas funciones hipergeométricas generalizadas  ${}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]$  obteniéndose resultados parciales pero muy interesantes.

## Abstract

In this report we have studied the symmetry of some hypergeometric function: confluent and gaussian. The confluent hypergeometric is related to Laguerre polynomials and gaussian hypergeometric with Jacobi polynomials. Algebra of symmetries of the confluent hypergeometric functions is  $su(1, 1) \times h(1) \times h(1)$  and algebra of symmetries of the Gauss hypergeometric functions is  $su(2, 2)$ .

We compared these results with others obtained by other authors for Laguerre and Jacobi polynomials and we found a total agreement. Algebras has been applied to two physical potential: Tremblay-Turbiner-Winterniz potential and Rosen Morse II potential, respectively.

Finally we have begun to study hypergeometric functions  ${}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]$  and we have obtained very interesting partial results of his algebra

# Capítulo 1

## Introducción

Los polinomios ortogonales son muy útiles en diversos campos de la física especialmente en mecánica cuántica. En matemáticas aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales y como bases ortogonales de espacios de Hilbert, de ahí su relevancia en mecánica cuántica. También están presentes en la teoría de representaciones de grupos de Lie, como espacios soportes de representaciones tal como en el caso del grupo de rotaciones.

Los polinomios ortogonales son el nexo de unión de diversos campos de la matemática, todos ellos muy relacionados con la física, como son la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría de grupos y álgebras de Lie, los espacios de Hilbert. De ahí nuestro interés en explorar estas conexiones en este trabajo de fin de grado.

Nuestro interés como físicos es la resolución de sistemas físicos clásicos y cuánticos. Una forma de estudiar tales sistemas es analizando sus simetrías y construyendo el “spectrum generating algebra”, esto es, el álgebra de Lie de las simetrías dinámicas del sistema que nos permite obtener el espectro de energías y las funciones de onda del sistema. Este método es especialmente interesante cuando la correspondiente ecuación de Schrödinger del sistema no es fácil de resolver directamente. Para ello se utiliza el método de factorización [1, 2] que nos permite obtener conjuntos de operadores escalera “ladder and shift operators” que conectan unos estados con otros y cierran un álgebra de Lie [3–8].

En muchos de estos sistemas, oscilador armónico, átomo de hidrógeno, Pöschl-Teller, Morse, etc, aparecen polinomios ortogonales en las funciones de onda de los mismos, lo que da cuenta de la importancia de estas funciones especiales y como están presentes en múltiples sistemas cuánticos [9]. Nosotros nos proponemos estudiar no las simetrías de un sistema físico concreto sino la de los polinomios ortogonales en sí mismos.

La relación entre grupos de Lie y polinomios ortogonales fue puesta en evidencia primeramente por Wigner y Talman [10, 11] conectando algunos polinomios ortogonales con representaciones de ciertos grupos de Lie elementales ( $SU(2)$ ,  $SU(1, 1)$ ). Posteriormente Miller [12–14] y Vilenkin [15–17] desarrollaron ampliamente esta conexión. Miller en múltiples artículos entre finales de los años 60 y 70 del siglo pasado estudió las simetrías de los polinomios ortogonales, de las funciones hipergeométricas y de ciertos sistemas físi-

cos. Los resultados más relevantes obtenidos por él aparecen en los libros que acabamos de citar. Sin embargo, sus resultados se circunscriben a un ámbito matemático más que físico, en muchos casos son parciales y no están adecuados para su aplicación directa en mecánica cuántica. Vilenkin, por su parte, se centra más en los polinomios ortogonales como espacios soportes de representaciones de los grupos elementales  $SU(2)$  y  $SU(1, 1)$  o como elementos de matriz de tales representaciones.

Los trabajos de Askey y colaboradores [18]– [20] han señalado una nueva dirección en la investigación sobre polinomios ortogonales. El denominado esquema de Askey considera los polinomios ortogonales relacionados con las funciones hipergeométricas. Este esquema ha sido básico para las generalizaciones de estos objetos en términos de  $q$ -funciones.

Recientemente Celeghini y del Olmo [21, 22] han vuelto a retomar el estudio de las relaciones de las funciones especiales [23] con los grupos de Lie pero desde la perspectiva de la física cuántica. Introdujeron el concepto de “funciones especiales algebraicas” para aquellas funciones tales que:

1. las propiedades de recurrencia relevantes de las funciones especiales pueden ser asociadas a conjuntos de operadores;
2. estas funciones especiales soportan una representación irreducible de ese álgebra;
3. un espacio de Hilbert se puede asociar a dichas funciones especiales de modo que los operadores escalera tienen las propiedades de hermiticidad apropiadas para construir una representación irreducible unitaria del grupo de Lie asociado.

De esta manera se han estudiado algunos casos de los llamados polinomios ortogonales clásicos y algunas generalizaciones de ellos (Hermite, Legendre, Laguerre y Jacobi).

En esta trabajo de fin de grado nos hemos propuesto continuar con el estudio de los polinomios ortogonales pero desde un nivel más básico, el de las funciones hipergeométricas, siguiendo el esquema de Askey. De esta manera pretendemos conectar los trabajos de Miller y de Celeghini-del Olmo y también completar los resultados de Miller, que en algunos casos, las simetrías sólo están bosquejadas y pretendemos obtener expresiones explícitas de las mismas que sean útiles en mecánica cuántica.

El proceso que seguiremos se puede describir muy someramente en las siguientes etapas:

1. Se considera un espacio vectorial concreto de funciones hipergeométricas caracterizadas tanto por parámetros discretos como por variables continuas.
2. En dicho espacio vectorial se consideran las relaciones de recurrencia que permiten conectar funciones con diferentes parámetros discretos. A cada relación de recurrencia se asocia un operador escalera (que incrementan el valor de los parámetros o lo disminuyen en una unidad).

3. Se considera el número máximo de estos operadores linealmente independientes y se comprueba si cierran un álgebra de Lie (álgebra de simetría de las funciones bajo consideración).
4. De esta manera las funciones son el espacio soporte de una representación irreducible del álgebra de simetría.

Las funciones hipergeométricas no tienen bien definido un producto interno, esto es, que constituyan un espacio de Hilbert, de modo que no podemos hablar en muchos casos de representaciones unitarias del grupo de simetría correspondiente. Sin embargo, si consideramos los polinomios ortogonales asociados a dichas funciones hipergeométricas podremos construir un espacio de Hilbert y un producto interno adaptado a la mecánica cuántica en términos de las funciones algebraicas correspondientes, de manera que podremos recuperar los resultados de Celeghini y del Olmo.

El esquema de esta memoria es como sigue.

En el capítulo dos presentamos una introducción del material matemático que vamos a utilizar, polinomios ortogonales y álgebras y grupos de Lie con el fin de que esta memoria sea autocontenida.

En el siguiente capítulo estudiamos el álgebra de simetrías de las funciones hipergeométricas confluentes  ${}_1F_1[a; c; x]$  encontrando un álgebra de Lie tal que  $su(1, 1)$  y  $h(1)$ , el álgebra de Weyl-Heisenberg, aparecen como subálgebras. Conectamos las funciones hipergeométricas con las funciones algebraicas de Laguerre y recuperamos el álgebra de simetría de tales funciones algebraicas. Finalmente se conecta estos resultados con una aplicación a un problema de un potencial físico que ha adquirido gran relevancia en los últimos años [24].

En el capítulo cuatro se realiza el estudio las funciones hipergeométricas gaussianas denotadas por  ${}_2F_1[a, b; c; x]$  obteniéndose el álgebra de simetrías  $su(2, 2)$ . Realizamos la conexión con las funciones algebraicas de Jacobi recuperando los resultados de [8]. Aplicamos los resultados anteriores al caso del potencial de Rosen-Morse II [9] de utilidad en física molecular.

En el siguiente capítulo comenzamos el estudio de las simetrías de las funciones hipergeométricas generalizadas  ${}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]$ . Debido a la magnitud del problema pues conjeturamos, de acuerdo con los resultados anteriores, un álgebra de Lie de dimensión 35 que debe corresponder a un grupo de rango cinco (número de parámetros de las  ${}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]$ ). Otra dificultad está relacionada con que estas funciones obedecen una ecuación diferencial de orden tres, de manera que nos aparecen operadores escalar de orden dos, cuando normalmente nos encontramos con operadores de orden uno. Esperamos en un futuro inmediato completar el álgebra de simetría.

Finalmente unas conclusiones y bibliografía utilizada cierran la memoria.



# Capítulo 2

## Complementos matemáticos

Con el fin de que la memoria sea autoconsistente vamos a presentar una breve introducción de los conceptos matemáticos más relevantes que se van a utilizar a lo largo de este trabajo: los polinomios ortogonales y las álgebras de Lie.

### 2.1. Polinomios Ortogonales.

Los polinomios ortogonales tienen multitud de aplicaciones en física, en la teoría de la aproximación, el análisis numérico, la mecánica cuántica y muchos otros campos. Aparecen de manera natural cuando se estudia el oscilador armónico cuántico (polinomios de Hermite), el átomo de Hidrógeno (polinomios de Laguerre), el momento angular (polinomios de Legendre), problemas electrostáticos (polinomios de Bessel) y muchos otros casos.

Su origen se remonta al siglo XVIII cuando Legendre intentó resolver el problema de la atracción electrostática por una esfera maciza.

Estos polinomios clásicos pueden surgir de multitud de maneras:

- Al resolver las ecuaciones diferenciales de tipo Sturm-Liouville.
- A través de la fórmula de Rodrigues.
- Usando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
- Mediante la teoría de grupos, al estudiar representaciones de ciertos grupos de Lie.

En este trabajo se pretende hacer un estudio de las propiedades de simetría de los diferentes polinomios ortogonales usando el marco conceptual de la teoría de grupos de Lie.

Los polinomios ortogonales son secuencias de polinomios, tales que el producto interno entre dos polinomios de la secuencia es nulo si tales polinomios son diferentes. Los polinomios ortogonales más utilizados son los denominados *polinomios ortogonales clásicos*, que fueron los primeros en ser estudiados y por ello gozan de un interés especial. Nuestro trabajo está relacionado con el estudio de los grupos de simetría de los polinomios ortogonales clásicos.

Se dice que una familia de funciones reales  $f_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) es ortogonal respecto a una función peso  $w(x)$  en un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  si

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) w(x) dx = c_n \delta_{nm} \quad (2.1)$$

donde  $w(x)$  es una función peso no negativa real e integrable en el intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

Como ejemplo podemos considerar el conjunto de las funciones  $\cos(nx)$  con  $n \in \mathbb{N}$  y función peso  $w(x) = 1$ .

Este integral puede escribirse en analogía con la mecánica cuántica de la forma:

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_a^b f_m(x) f_n(x) w(x) dx \quad (2.2)$$

Tenemos de esta manera un producto interno en el espacio vectorial de todos los polinomios ortogonales. Esta definición induce de manera natural la noción de ortogonalidad, i.e, dos polinomios son ortogonales si su producto interno es cero.

Diremos que una secuencia de polinomios ortogonales  $\{f_m, m \in \mathbb{N}\}$  es *ortonormal* si

$$\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

Estas secuencias de polinomios son infinitas y determinan un espacio de Hilbert.

### 2.1.1. Propiedades de los polinomios ortogonales

En este apartado se pretende revisar algunas de las propiedades más importantes que cumplen todas las familias de polinomios ortogonales. No se pretende hacer un desarrollo exhaustivo de estas propiedades, sino que nos limitaremos a presentar los resultados generales que cumplen estos polinomios y que nos fueron útiles para obtener algunos de los resultados presentados en esta memoria.

#### Fórmulas de recurrencia

Los polinomios ortogonales satisfacen fórmulas recursivas que relacionan términos de distinto grado y según sea el número de parámetros de los que dependen estos polinomios más términos estarán involucrados en la relación de recurrencia. La relación de recurrencia

básica que cumplen tres polinomios ortogonales consecutivos de una misma especie es de la forma:

$$f_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) f_n(x) - C_n f_{n-1}(x). \quad (2.4)$$

Las constantes que aparecen ( $A_n$ ,  $B_n$  y  $C_n$ ) dependen de  $n$  y de cada familia de polinomios ortogonales. En algunos otros polinomios, como los de Hahn, estas relaciones suelen ser más complejas e involucran términos de mayor orden.

### Raíces de los polinomios ortogonales

Sea una familia de polinomios ortogonales  $\{f_n(x)\}$  definidos en un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Entonces los polinomios  $f_n(x)$  tienen exactamente  $n$  raíces reales simples en el intervalo abierto  $(a, b)$ , o lo que es lo mismo los ceros de los polinomios son reales simples y están contenidos en  $(a, b)$ .

### Función generatriz

Se dice que  $G(x, t)$  es una función generatriz de una familia de funciones  $\{f_n(x)\}$  si se puede desarrollar en serie de potencias de  $t$  en un cierto dominio  $D \subset \mathbb{R}$  tal que:

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n. \quad (2.5)$$

Se puede definir una función generatriz  $G(x, t)$ , para todos los polinomios ortogonales, de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales  $f_n(x)$  sería proporcional al coeficiente de  $t^n$  del desarrollo en serie de Taylor en potencias de  $t$  alrededor del punto  $x = 0$ . Esta función generatriz constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales.

### 2.1.2. Polinomios ortogonales clásicos

Los polinomios ortogonales clásicos ( $f_n(x)$ ) son un caso especial de los polinomios ortogonales. Son los más importantes dentro del ámbito de la física matemática por la multitud de aplicaciones que tienen. Surgen al resolver la ecuación de Sturm-Liouville para ciertos valores determinados del parámetro  $\lambda$ :

$$Q(x) f_n''(x) + L(x) f_n'(x) + \lambda_n f_n(x) = 0, \quad (2.6)$$

con  $Q(x)$  y  $L(x)$  dos funciones particulares dependiendo de la familia de polinomios considerados.

De esta manera surgen tres familias diferentes que son los denominados polinomios ortogonales clásicos: Hermite, Laguerre y Jacobi.

### Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite constituyen una de las familias de polinomios ortogonales más importantes en la física cuántica por aparecer al resolver el problema del oscilador armónico. Llevan el nombre del matemático francés Charles Hermite y también aparece en campos de las matemáticas (por ejemplo, que aparece en la serie de Edgeworth). Se definen los polinomios de Hermite por:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}); \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

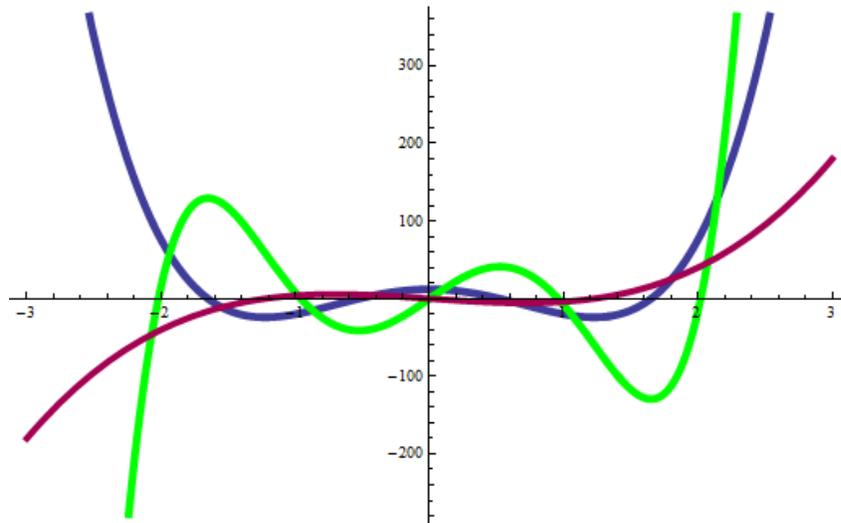


Figura 2.1: Polinomios de Hermite:  $H_3(x)$  (morado),  $H_4(x)$  (azul) y  $H_5(x)$  (verde).

Verifican la ecuación diferencial:

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0. \quad (2.8)$$

Presentan la simetría

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \quad (2.9)$$

Cumplen la siguiente relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x). \quad (2.10)$$

La condición de ortogonalidad explícita es

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}, \quad (2.11)$$

con  $w(x) = e^{-x^2}$  la función peso para estos polinomios que hace que la secuencia sea ortogonal. Por último, la expresión de la función generatriz de estos polinomios es

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n. \quad (2.12)$$

En este trabajo nos serán más útiles las funciones de Hermite  $\{K_n(x)\}$  que son funciones ortonormales que se construyen a partir de los polinomios de Hermite y forman un conjunto ortonormal completo en  $L^2(-\infty, \infty)$  y tienen la forma:

$$K_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-x^2/2}. \quad (2.13)$$

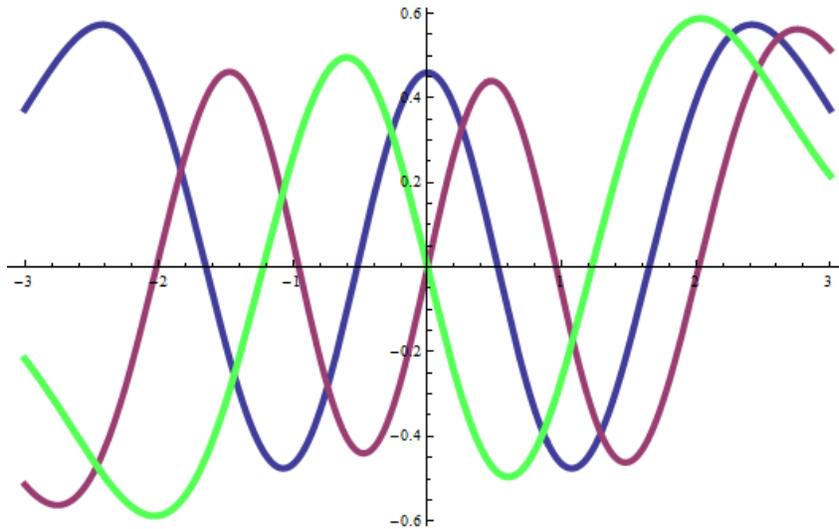


Figura 2.2: Funciones de Hermite:  $K_3(x)$  (verde),  $K_4(x)$  (azul) y  $K_5(x)$  (morado).

Estas funciones de Hermite cumplen las relaciones de ortonormalidad y completitud

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} K_n(x) K_m(x) dx &= \delta_{n,m}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) K_n(y) &= \delta(x-y), \end{aligned} \quad (2.14)$$

lo que las hace útiles en el ámbito de la mecánica cuántica.

### Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre son una familia de polinomios ortogonales clásicos  $\{L_n^\nu(x)\}_{n=0}^\infty$ , con  $\nu \in \mathbb{R}$ , que están definidos en la semirrecta real positiva,  $[0, \infty)$ . Corresponden a la siguiente expresión:

$$L_n^\nu(x) = \frac{1}{n!} x^{-\nu} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\nu}). \quad (2.15)$$

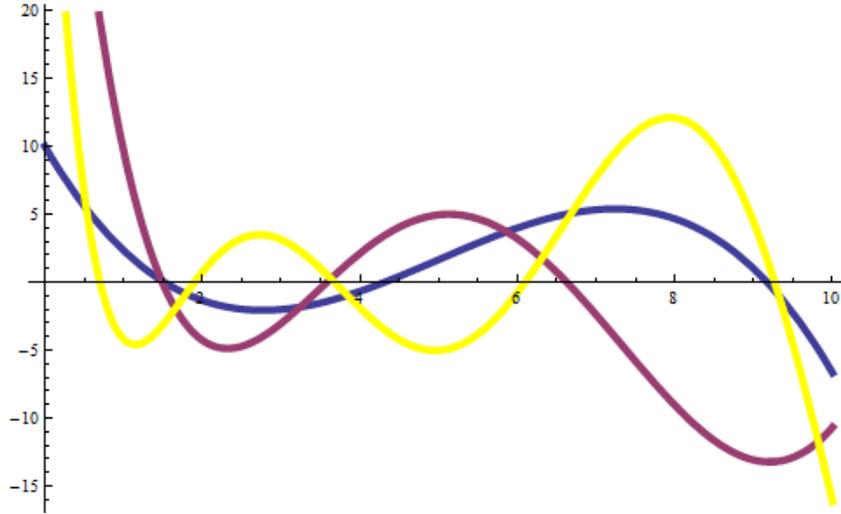


Figura 2.3: Polinomios de Laguerre:  $L_3^5(x)$  (morado),  $L_2^3(x)$  (azul) y  $L_2^8(x)$  (amarillo).

Verifican la ecuación diferencial:

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n^\nu(x) + (\nu + 1 - x) \frac{d}{dx} L_n^\nu(x) + n L_n^\nu(x) = 0. \quad (2.16)$$

Tienen la siguiente relación de recurrencia:

$$(n + 1) L_{n+1}^\nu(x) = (2n + \nu + 1 - x) L_n^\nu(x) - (n + \nu) L_{n-1}^\nu(x). \quad (2.17)$$

La relación de ortogonalidad explícita es

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n^\nu(x) L_m^\nu(x) e^{-x} x^\nu dx = \frac{\Gamma(n + m + 1)}{n!} \delta_{nm}, \quad (2.18)$$

con función peso  $e^{-x} x^\nu$ .

Por último, la expresión de la función generatriz de estos polinomios es

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\nu}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\nu(x) t^n. \quad (2.19)$$

Las *funciones algebraicas de Laguerre* forman un conjunto ortonormal completo en  $L^2(0, \infty)$  y están definidas por:

$$G_n^\nu(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+m+1)}} L_n^\nu(x) x^{\nu/2} e^{-x/2}. \quad (2.20)$$

Las relaciones de completitud y ortonormalidad para un  $\nu$  fijo es

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G_n^\nu(x) G_m^\nu(x) dx &= \delta_{n,m}, \\ \sum_{n=0}^\infty G_n^\nu(x) G_n^\nu(y) &= \delta(x-y). \end{aligned} \quad (2.21)$$

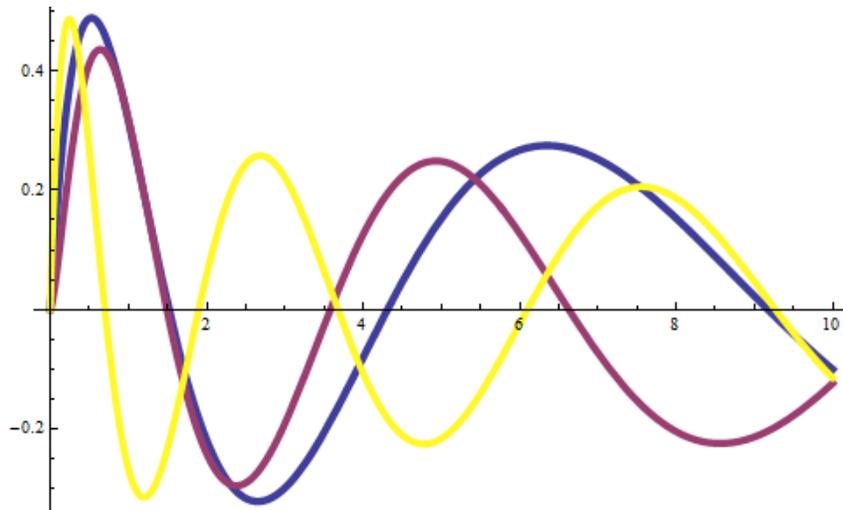


Figura 2.4: Funciones de Laguerre:  $G_2^8(x)$  (amarillo),  $G_2^3(x)$  (azul) y  $G_3^5(x)$  (morado).

### Polinomios de Jacobi

Se definen los polinomios de Jacobi en el intervalo  $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$  por:

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left( (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right) \quad (2.22)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros reales mayores que  $-1$ . Verifican la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} J_n^{(\alpha, \beta)}(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x) \frac{d}{dx} J_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ + n(n + \alpha + \beta + 1) J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

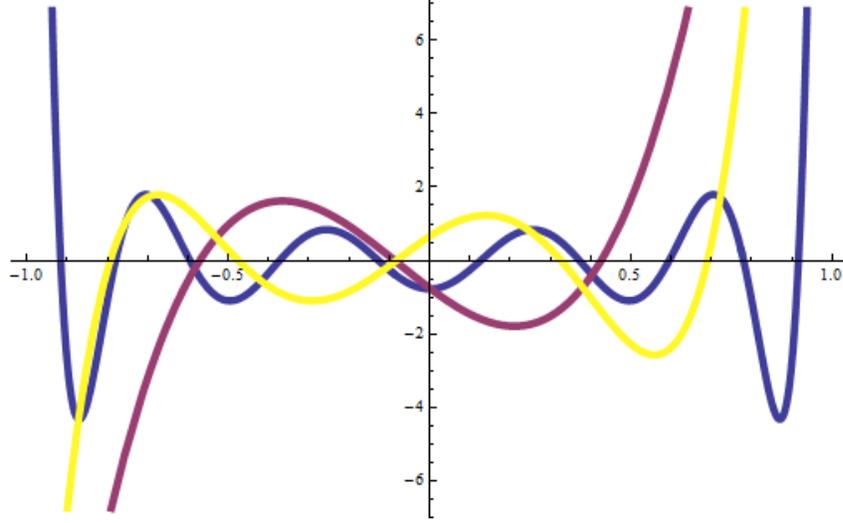


Figura 2.5: Polinomios de Jacobi:  $J_3^{(3,4)}(x)$  (morado),  $J_2^{(10,2)}(x)$  (azul) y  $J_2^{(5,3)}(x)$  (amarillo).

Tienen la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}
 & 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2) J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\
 & (2n + \alpha + \beta - 1) \{ (2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 + \beta^2 \} J_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\
 & - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta) J_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x).
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La relación de ortogonalidad explícita es:

$$\int_{-1}^1 J_n^{(\alpha, \beta)}(x) J_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \tag{2.25}$$

con  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  la función peso.

Para hacer un estudio de las propiedades de simetría de estos objetos se construye las *funciones de Jacobi* que forman un conjunto ortonormal en el espacio de funciones de  $L^2(-1, 1)$  y por lo tanto están definidos en el intervalo  $(-1, 1)$ , se definen por:

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sqrt{\frac{2n + \alpha + \beta + 1}{2^{\alpha + \beta + 1}}} \sqrt{\frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}} J_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^{\alpha/2} (1+x)^{\beta/2}$$

Tienen la relación de ortonormalidad y completitud, para un  $\alpha$  y  $\beta$ , fijo

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty J_n^{(\alpha, \beta)}(x) (n + 1/2) J_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \delta_{n,m}, \\
 & \sum_{n=\sup(|\alpha|, |\beta|)}^\infty J_n^{(\alpha, \beta)}(x) (n + 1/2) J_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \delta(x - y).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

### 2.1.3. Funciones hipergeométricas generalizadas

En este apartado se va a realizar una recopilación de los principales resultados relativos a las funciones Hipergeométricas. Estas funciones van a ser la base de la que se partirá para analizar diferentes aspectos de la simetría de los polinomios ortogonales. Las funciones Hipergeométricas aparecieron por primera vez en 1812 en un artículo de Gauss, y tienen gran importancia histórica porque fue con ellas con las que Gauss realizó el primer estudio de convergencia de series numéricas. Hoy en día aparecen al resolver multitud de ecuaciones diferenciales.

**Definición 2.1.** *Se conoce como función hipergeométrica generalizada, a la serie en potencias de  $x$ :*

$${}_pF_q [a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k k!}, \quad x \in \mathbb{C} \quad (2.27)$$

con  $a_j, b_k \in \mathbb{C}$ ,  $b_k \neq 0, -1, -2, \dots$ ;  $j = 1, 2, \dots, p$ ;  $k = 1, 2, \dots, q$  y  $(a)_i$  el símbolo de Pochhammer que se define por

$$(a)_i := a(a+1)\dots(a+i-1) \quad (2.28)$$

#### Convergencia

Por motivo de la convergencia de estas funciones vamos a excluir algunos casos en los cuales el numerador o el denominador se hacen cero.

- Si algún  $a_j$  es entero negativo la serie tiene un número finito de términos, siendo la función un polinomio de grado  $a_j$ .
- Si la serie es infinita podemos distinguir

1. Si  $p = q + 1$ ,

a) Es absolutamente convergente si  $|x| < 1$ .

b) Es divergente si  $|x| > 1$ .

c) Para  $|x| = 1$ ,  $x \neq 1$  se tiene que

- 1) Absolutamente convergente, si  $Re(\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{i=1}^q b_i) < 0$ .
- 2) Condicionalmente convergente, si  $0 \leq Re(\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{i=1}^q b_i) < 1$ .
- 3) Divergente, si  $Re(\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{i=1}^q b_i) > 1$ .

d) Para  $x = 1$ , es:

- 1) Absolutamente convergente, si  $Re(\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{i=1}^q b_i) < 0$ .
  - 2) Divergente, si  $Re(\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{i=1}^q b_i) \geq 1$ .
2. Si  $p \leq q$ , es absolutamente convergente para todo valor de  $x$ .
  3. Si  $p > q + 1$ , es divergente para  $x \neq 0$ .

### Ecuación diferencial de las funciones hipergeométricas

La ecuación diferencial que satisface la función  ${}_pF_q[a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z]$  viene dada por la expresión:

$$\left[ z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) \dots \left( z \frac{d}{dz} + b_q - 1 \right) - z \left( z \frac{d}{dz} + a_1 \right) \left( z \frac{d}{dz} + a_p \right) \right] {}_pF_q = 0.$$

Estas ecuaciones tienen distinto orden dependiendo del valor de  $p$  y  $q$ , Si  $p \geq q + 1$  son ecuaciones diferenciales de orden  $p$ , si  $p \leq q + 1$  son ecuaciones diferenciales de orden  $q$ .

## 2.2. Álgebras y grupos de Lie

**Definición 2.2.** Decimos que un grupo  $G$  es un **grupo de Lie** si  $G$  es una variedad  $C^\infty$  y las aplicaciones

1.  $G \times G \longrightarrow G, (g_1, g_2) \longrightarrow g_1 g_2$ ,
2.  $G \longrightarrow G, g \longrightarrow g^{-1}$

son  $C^\infty$ .

Sophus Lie se dio cuenta de que las principales características de un grupo se pueden deducir de los elementos próximos a la identidad (generador infinitesimal), de esta forma asoció a cada grupo un álgebra que capturaba la estructura local del grupo.

**Definición 2.3.** : Sea  $K$  un cuerpo, un **álgebra de Lie** sobre  $K$  es un  $K$ -espacio vectorial  $\mathcal{G}$  unido a una operación bilineal  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , llamada corchete de Lie, que satisfice:

1. El corchete de Lie se define como  $[X, Y] = XY - YX$  para todo  $X, Y \in \mathcal{G}$ .
2. Antisimetría:  $[X, Y] = -[Y, X]$  para todo  $X, Y \in \mathcal{G}$ .
3. Identidad de Jacobi:  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ .

La estructura de un álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  puede ser representado en una base dada  $\{e_j\}_{j=1}^{\dim \mathcal{G}}$  por unos elementos denominados *constantes de estructura*  $c_{jk}^l$  en la base  $\{e_j\}_{j=1}^{\dim \mathcal{G}}$

$$[e_j, e_k] = \sum_{l=1}^{\dim \mathcal{G}} c_{jk}^l e_l. \quad (2.29)$$

Basta caracterizar las constantes de estructura para conocer el álgebra.

### 2.2.1. Representación de un grupo

La forma en la que un grupo de simetría aparece en física es a través de ciertas operaciones sobre el sistema físico que se está estudiando y que lo deja invariante. La forma de actuar sobre este sistema físico es mediante operadores  $D_1, D_2, \dots$  que actúan sobre el espacio vectorial  $V$  y que forman un grupo, este grupo se llama grupo de operadores de simetría.

En esta memoria el grupo de operadores que se utilizan son un conjunto de operadores diferenciales que actúan sobre las funciones que se quieren estudiar. Estos operadores diferenciales generan cambios en la funciones transformándolas en otras funciones.

**Definición 2.4.** Sea  $V$  un espacio vectorial,  $G$  un grupo con elemento neutro  $e$  y  $D(g)$ ,  $g \in G$  un conjunto de operadores sobre  $V$ . Se dice que dichos operadores forman una representación del grupo  $G$  sobre  $V$  si:

$$D(g)D(g') = D(gg'), \quad D(g^{-1}) = (D(g))^{-1} \quad D(e) = 1_V \quad (2.30)$$

siendo la dimensión de la representación igual a  $n = \dim V$ .

**Definición 2.5.** Diremos que una representación  $D(g)$  sobre  $V$  de un grupo  $G$  es **irreducible** si no existe ningún subespacio de  $V$  que permanece invariante bajo la acción de todos los  $D(g)$ ,  $g \in G$ .

**Definición 2.6.** Una representación  $D$  es unitaria si las matrices u operadores son unitarios, i.e,  $D^\dagger = D^{-1}$ .

La representación de un grupo es **reducible** si este se puede descomponer como suma directa de representaciones irreducibles  $D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots$ . En este caso, también se puede descomponer el espacio vectorial  $V$  como suma directa de subespacios vectoriales invariantes,  $V = V_1 \oplus V_2 \dots$ .

### 2.2.2. Álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie

Sea  $G$  un grupo de Lie de dimensión  $s$  y  $\{X_\mu\}_{\mu=1}^r$  un conjunto de generadores infinitesimales. El conjunto  $\{X_\mu\}_{\mu=1}^r$  genera un álgebra de Lie real.

A cada grupo de Lie  $G$  le corresponde su álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  (ó  $L(G)$ ). Sin embargo diferentes grupos pueden tener asociado cada uno el mismo álgebra de Lie. Pero sólo uno de ellos es conexo y simplemente conexo ( $\bar{G}$ ), a este se le denomina grupo recubridor universal.

En muchos casos todos los elementos  $g$  del grupo de Lie  $G$  se pueden obtener por exponenciación de los elementos  $X$  del álgebra  $g = e^{aX}$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

Al igual que el grupo recubridor universal existe el recubridor universal del álgebra, este se define como un factor del álgebra de un álgebra tensorial de un grupo de Lie  $G$  dado.

El álgebra tensorial de un cierto espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  es el espacio vectorial

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k} = \mathbb{K} \oplus V \oplus V \dots \oplus V^{\otimes k} \oplus \dots \quad (2.31)$$

e  $\mathbb{I}$  el ideal bilátero minimal que contiene todos los elementos de la forma

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g} \quad (2.32)$$

**Definición 2.7.** El álgebra universal envolvente (UEA) de  $G$  es el cociente  $\otimes G / \mathbb{I}$

$$U(G) \cong \otimes G / \mathbb{I} \quad (2.33)$$

Los elementos de un grupo de Lie  $G$  son elementos del UEA de  $L(G)$ .

**Definición 2.8.** *Los operadores de Casimir son elementos distinguidos del centro del álgebra universal envolvente  $\mathbb{U}(G)$  del álgebra de Lie  $G$ , i.e., sea  $\mathcal{G} \in \mathbb{U}(G)$  entonces*

$$[\mathcal{G}, X] = 0 \quad (2.34)$$

para todo  $X \in \mathbb{U}(G)$

En particular el Casimir conmuta con todos los generadores del álgebra de Lie.

### 2.2.3. Un ejemplo: el momento angular cuántico

Para ver un ejemplo práctico de la teoría referente a los grupos de Lie vamos a estudiar el momento angular cuántico. Consideramos el álgebra de Lie  $su(2)$ . Los tres generadores del álgebra son los tres operadores de momento angular  $J_i$  que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J_l, J_k] = \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} J_l. \quad (2.35)$$

Cuando se estudia el grupo  $su(2)$  es usual poner  $J_x$  y  $J_y$  en función de los dos operadores escalera  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ . Con estos dos operadores las relaciones de conmutación son

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (2.36)$$

En este caso se tiene que  $J_+$  y  $J_-$  son hermíticos conjugados el uno del otro, y así se consigue una representación unitaria del grupo  $SU(2)$ .

Sea  $|m\rangle$  un estado propio de  $J_z$  con valor propio

$$J_z |m\rangle = m |m\rangle \quad (2.37)$$

entonces se tiene que

$$J_{\pm} |m\rangle = \sqrt{(j \pm m)(j \mp m - 1)} |m \pm 1\rangle. \quad (2.38)$$

En el caso particular de los estados  $|\pm j\rangle$

$$J_{\pm} |\pm j\rangle = 0. \quad (2.39)$$

Entonces el número  $m$  va desde  $-j$  a  $j$ . El estado  $|m\rangle$  se reescribe como  $|j, m\rangle$ .

Los estados  $|j, -j\rangle, \dots, |j, j\rangle$  forman una representación de dimensión  $(2j + 1)$  de los operadores del momento angular.

Por cierto, este análisis se basa en la hermiticidad de los  $J_i$ .

El Casimir del álgebra es

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \{J_+, J_-\} + J_z^2 \quad (2.40)$$

y áctua sobre el estado  $|j, m\rangle$  como

$$\mathcal{C} |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad (2.41)$$

Luego los valores del Casimir para  $SU(2)$  son  $0, 3/4, 2, 15/4, 6\dots$ , pues  $j$  puede tomar valores enteros o semienteros.

# Capítulo 3

## Simetrías de las funciones ${}_1F_1 [a; c; z]$

En este capítulo se va a realizar un estudio de las simetrías de las funciones hipergeométricas confluentes  ${}_1F_1 [a; c; z]$ , que son las funciones hipergeométricas más simples que se van a analizar en esta memoria. A continuación construiremos las simetrías de las funciones algebraicas de Laguerre aprovechando la relación entre las funciones hipergeométricas confluentes y los polinomios de Laguerre. Finalmente se presenta una aplicación de estas bases de funciones al estudio de un potencial cuántico de interés en física.

### 3.1. Función hipergeométrica confluyente

Se llama *función hipergeométrica confluyente* a la serie dada por:

$${}_1F_1 [a; c; z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(c)_n n!}. \quad (3.1)$$

También se puede escribir equivalentemente como

$${}_1F_1 [a; c; z] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) x^n}{\Gamma(c+n) n!} \quad (3.2)$$

Con el objetivo de obtener representaciones que puedan compararse con las de los polinomios de Laguerre tomaremos los valores de  $a$  y  $c$  de manera que  $-a \in N$  y  $c \in N$  con  $c \geq 1$ . Con esta restricción conseguimos que las funciones hipergeométricas no sean series infinitas sino polinomios de grado  $-a$ . La ecuación diferencial que satisfacen estas funciones es

$$\left[ x \frac{d^2}{dx^2} + (c-x) \frac{d}{dx} - a \right] {}_1F_1 [a; c; x] = 0 \quad (3.3)$$

Algunas propiedades de las funciones hipergeométricas confluentes son:

1. Si  $a \in 0, -1, -2, \dots$  la función hipergeométrica  ${}_1F_1 [a; c; x]$  se reduce a un polinomio de grado  $-a$ .
2. Es el límite de la función hipergeométrica  ${}_2F_1 [a; c; x]$ :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1 [a, b; c; x/b] = {}_1F_1 [a; c; x] \quad (3.4)$$

3. Cumple la igualdad denominada primera fórmula de Kummer

$${}_1F_1 [a; c; x] = e^x {}_1F_1 [c - a; c; -x] \quad (3.5)$$

4. Admite la representación integral, válida si  $Re(c) > Re(a) > 0$ :

$${}_1F_1 [a; c; x] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad (3.6)$$

### 3.2. Operadores de simetría de ${}_1F_1 [a; c; x]$

Para dar una estructura de álgebra al conjunto de simetrías de las funciones  $\{{}_1F_1 [a; c; x]\}$  y en analogía con la mecánica cuántica, definimos los operadores  $X$  y  $D_x$  que actúan como:

$$X f(x) = x f(x), \quad D_x f(x) = f'(x), \quad [X, D_x] = -1,$$

además definimos los operadores  $A$  y  $C$  como:

$$A {}_1F_1 [a; c; x] = a {}_1F_1 [a; c; x] \quad C {}_1F_1 [a; c; x] = c {}_1F_1 [a; c; x]. \quad (3.7)$$

Como se ve fácilmente estos operadores  $A$  y  $C$  conmutan entre si, luego, pertenecerán a la subálgebra de Cartan del álgebra de simetrías.

Los operadores que sólo cambian el valor de  $a$  en las funciones  ${}_1F_1 [a; c; x]$  en una unidad  $\pm 1$  les denotaremos por  $N_{\pm}$ , y vienen dados por

$$\begin{aligned} N_+ &:= X D_x + A, \\ N_- &:= -(X D_x - X + (C - A)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Actúan sobre las funciones hipergeométricas confluentes,  ${}_1F_1 [a; c; x]$ , como

$$\begin{aligned} N_+ {}_1F_1 [a; c; x] &= a {}_1F_1 [a + 1; c; x], \\ N_- {}_1F_1 [a; c; x] &= (a - c) {}_1F_1 [a - 1; c; x]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Definiendo ahora  $N_3 := C/2 - A$  y teniendo en cuenta la acción de los operadores  $N_{\pm}$  y  $N_3$  sobre las funciones hipergeométricas, se comprueba fácilmente que  $N_{\pm}$  y  $N_3$  cierran un álgebra  $su(1, 1)$ , que conmuta con  $C$ , lo denotaremos entonces por  $su_N(1, 1)$

$$[N_3, N_{\pm}] = \pm N_{\pm}, \quad [N_+, N_-] = 2N_3. \quad (3.10)$$

Entonces estas funciones hipergeométricas  $\{{}_1F_1 [a; c; x]\}$  para  $-a \in \mathbb{N}$  y  $c \in \mathbb{N} \geq 1$  determinan una representación irreducible (infinita) de la serie discreta de  $su(1, 1)$ . Partiendo ahora de estos operadores diferenciales  $N_{\pm}$ , podemos reescribir la ecuación diferencial de las funciones hipergeométricas a través del operador de Casimir,  $\mathcal{C}_N$ , de  $su_N(1, 1)$

$$\left[ \mathcal{C}_N - \frac{C}{2} \left( \frac{C}{2} - 1 \right) \right] {}_1F_1 [a; c; x] \equiv \left[ \frac{1}{2} \{N_+, N_-\} - N_3^2 + \frac{C}{2} \left( \frac{C}{2} - 1 \right) \right] {}_1F_1 [a; c; x] = 0 .$$

Existe otro método de factorización, que nos permite escribir la ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned} \left[ N_+ N_- - \left( \frac{C}{2} - N_3 \right) \left( \frac{C}{2} + N_3 + 1 \right) \right] {}_1F_1 [a; c; x] &= 0 , \\ \left[ N_- N_+ - \left( \frac{C}{2} + N_3 \right) \left( \frac{C}{2} - N_3 + 1 \right) \right] {}_1F_1 [a; c; x] &= 0 , \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como  $c = 1, 2, 3, 4, \dots$  el valor del Casimir es  $\mathcal{C}_N \equiv C/2(C/2 - 1) = -1/4, 0, 3/2, 2, 15/4, \dots$ . También el espectro del operador  $N_3$  depende del valor  $c$  y tiene de valores  $c/2, 1+c/2, 2+c/2, \dots$

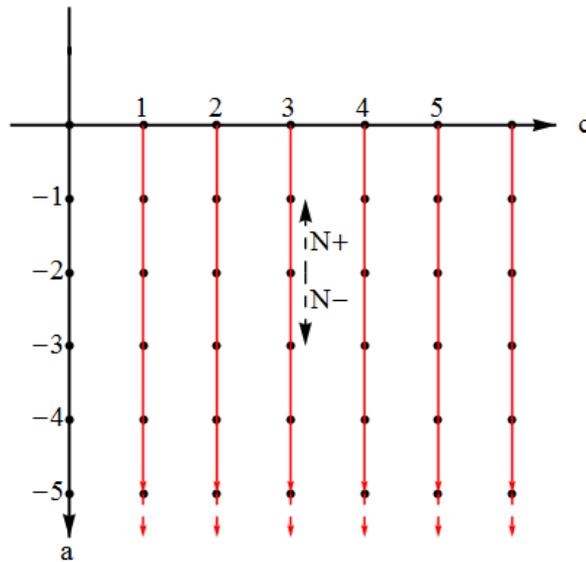


Figura 3.1: Clasificación de las funciones  ${}_1F_1 [a; c; x]$  (puntos negros) en términos de su representación  $su(1, 1)$ . En la figura se representa la acción del operador  $N_3$  que es diagonal y con valor  $-a + c/2$  y la acción de los operadores  $N_{\pm}$ .

Hemos encontrado un grupo  $SU(1, 1)$ . Esta simetría nos indica que se puede usar el operador de bajada indefinidamente sobre el índice  $a$  de las funciones  ${}_1F_1 [a; c; x]$ , por el contrario si se utiliza el operador de subida al llegar al índice cero de  $a$  el polinomio que representa la función  ${}_1F_1 [a; c; x]$  se destruye y por lo tanto no se puede seguir aplicando este operador.

### 3.3. Operadores de simetría tales que $\Delta c = \pm 1$

En el apartado anterior hemos visto los operadores escaleras que subían y bajaban en una unidad el parámetro  $a$ . Siguiendo este esquema se va a buscar operadores que mantengan el parámetros  $a$  fijo y sin embargo cambien  $c$  en  $\pm 1$ . Estos operadores están definidos por:

$$\begin{aligned} M_+ &:= D_x - 1, \\ M_- &:= X D_x + C - 1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

que actúan sobre las funciones hipergeométricas confluentes  ${}_1F_1[a; c; x]$  como

$$\begin{aligned} M_+ {}_1F_1[a; c; x] &= \frac{a-c}{c} {}_1F_1[a; c+1; x], \\ M_- {}_1F_1[a; c; x] &= (c-1) {}_1F_1[a; c-1; x]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Definiendo ahora  $M_3 := 1$  se comprueba fácilmente que  $M_{\pm}$  y  $M_3$  cierran el álgebra de Weyl-Heisenberg que denotaremos por  $h_M(1)$

$$[M_3, M_{\pm}] = 0, \quad [M_+, M_-] = M_3. \tag{3.14}$$

Podemos escribir el Casimir de las funciones hipergemétricas confluentes en función de los operadores  $M_{\pm}$  de la forma:

$$\mathcal{C}_M {}_1F_1[a; c; x] \equiv \left[ \{M_+, M_-\} - \left(2M + \frac{1}{2}\right) \right] {}_1F_1[a; c; x] = 0.$$

donde  $M$  es el operador número definido por  $M_+M_-$ . Concluimos que estas funciones soportan una representación del álgebra Weyl-Heisenberg, que también esta relacionado con otros polinomios como los de Hermite. De hecho se ve que la forma de escribir el Casimir en función de los operadores  $M_{\pm}$  tiene el aspecto típico del oscilador armónico cuántico cuando se escribe su ecuación diferencial en función de los operadores de creación y aniquilación.

### 3.4. Operadores de simetría $R_{\pm}$

Nos queda finalmente estudiar los operadores que suben o bajan una unidad los valores de  $a$  y  $c$  a la vez. Estos operadores son:

$$\begin{aligned} R_+ &:= D_x, \\ R_- &:= X D_x - X + C - 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

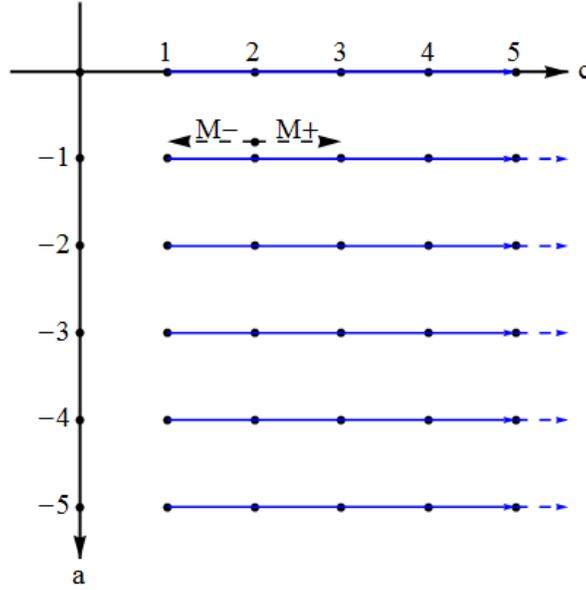


Figura 3.2: Clasificación de las funciones  ${}_1F_1[a; c; x]$  en términos de la simetría ligada a  $h_M(1)$ . En la figura se representa la acción del operador  $M_3$  que es diagonal y la acción de los operadores  $M_{\pm}$ .

que actúan sobre las funciones hipergeométricas confluentes  ${}_1F_1[a; c; x]$  como

$$\begin{aligned} R_+ {}_1F_1[a; c; x] &= \frac{a}{c} {}_1F_1[a+1; c+1; x], \\ R_- {}_1F_1[a; c; x] &= (c-1) {}_1F_1[a-1; c-1; x]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definiendo ahora  $R_3 := 1$  se ve de nuevo que  $R_{\pm}$  y  $R_3$  cierran un álgebra  $h(1)$  y se denota por  $h_R(1)$

$$[R_3, R_{\pm}] = 0 \quad [R_-, R_+] = R_3. \quad (3.17)$$

Tenemos el mismo caso que con los operadores anteriores, estos operadores soportan también un álgebra de Weyl-Heisenberg. Se puede escribir el Casimir de las funciones hipergemétricas confluentes en función de los operadores  $M_{\pm}$  de la misma forma que se hizo en el apartado anterior:

$$\mathcal{C}_R {}_1F_1[a; c; x] \equiv \left[ \{R_+, R_-\} - \left( 2R + \frac{1}{2} \right) \right] {}_1F_1[a; c; x] = 0.$$

donde  $R = R_+R_-$ , y juega de nuevo el análogo al operador número del oscilador armónico. Con estos dos últimos operadores hemos obtenido todos los operadores de subida y bajada de estas funciones hipergeométricas  ${}_1F_1[a; c; x]$ .

### 3.5. El grupo completo de simetría

Estas funciones hipergeométricas no tienen definido un productor escalar, por lo tanto no podemos hablar de representaciones unitarias como cuando se pasan a las bases de las funciones algebraicas, donde se consiguen definir operadores unitarios. El sistema de raíces del álgebra de operadores de nuestras funciones hipergeométricas se representa de manera esquemática en la siguiente figura.

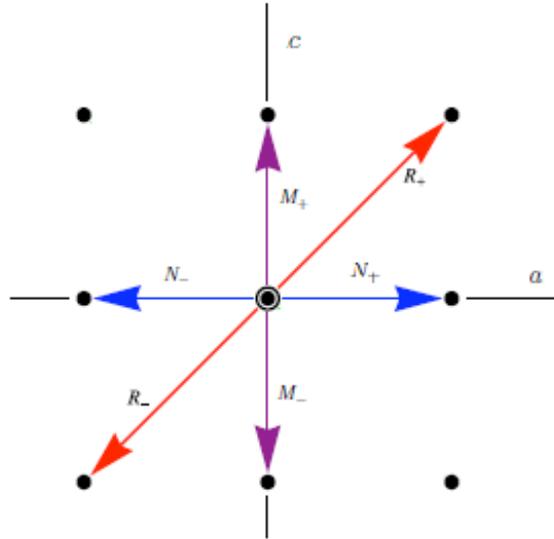


Figura 3.3: Sistema de raíces del álgebra de operadores.

Los conmutadores de Lie de los operadores  $N_{\pm}$ ,  $M_{\pm}$ ,  $R_{\pm}$ ,  $N_3$ ,  $M_3$  y  $R_3$  son:

$$\begin{aligned}
 [N_+, N_-] &= 2N_3, & [N_3, N_{\pm}] &= \mp N_{\pm}, \\
 [M_3, M_{\pm}] &= 0, & [M_+, M_-] &= M_3, \\
 [R_3, R_{\pm}] &= 0, & [R_+, R_-] &= -R_3, \\
 [M_{\pm}, N_{\pm}] &= \mp R_{\pm}, & [M_{\pm}, N_{\mp}] &= 0, & [N_3, M_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} M_{\pm}, & [N_{\pm}, R_{\mp}] &= \mp M_{\pm}, \\
 [N_{\pm}, R_{\pm}] &= 0, & [N_{\pm}, R_{\mp}] &= 0, & [M_{\pm}, R_{\pm}] &= 0, & [M_{\pm}, R_{\mp}] &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

El conjunto completo de operadores generan una álgebra de dimensión ocho y de la forma  $su(1, 1) \otimes (h(1) \otimes h(1))$ , generado por seis operadores escalera ( $N_{\pm}$ ,  $M_{\pm}$  y  $R_{\pm}$ ) y dos operadores diagonales  $A$  y  $C$ .

### 3.6. Polinomios de Laguerre.

Los polinomios de Laguerre son polinomios ortogonales definidos en la semirecta real positiva  $([0, \infty))$  y forman un espacio de Hilbert. Se relacionan con las funciones hipergeométricas confluentes del modo siguiente

$$L_n^\nu(x) := \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{n! \Gamma(\nu + 1)} {}_1F_1[-n, \nu + 1; x]. \quad (3.19)$$

Debido a esta relación se pueden deducir el grupo de simetría de los polinomios de Laguerre y sus correspondientes campos vectoriales a partir de los de  ${}_1F_1[a; c; x]$ . Los polinomios de Laguerre cumplen la siguiente relación de ortogonalidad para un  $\nu$  fijo:

$$\int_0^\infty L_n^\nu(x) L_m^\nu(x) e^{-x} x^\nu dx = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{n!} \delta_{n,m}. \quad (3.20)$$

Definimos las funciones algebraicas de Laguerre por

$$G_n^\nu(x) := \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n + \nu + 1)}} L_n^\nu(x) e^{-x/2} x^{\nu/2}. \quad (3.21)$$

Forman un conjunto ortonormal completo en  $L^2[0, \infty)$ . Los posibles valores que pueden tener  $n$  y  $\nu$ , teniendo en cuenta los valores que tomaban  $a$  y  $c$  en las funciones  ${}_1F_1[a; c; x]$ , son  $n \in \mathbb{N}$  y  $\nu \in \mathbb{N}$ . La relación de ortogonalidad y la relación de cierre quedan

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G_n^\nu(x) G_m^\nu(x) &= \delta_{n,m}, \\ \sum_{n=0}^\infty G_n^\nu(x) G_n^\nu(y) &= \delta(x - y). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como forman una base ortonormal se puede definir los vectores  $|n\rangle$  con  $n \in \mathbb{N}$  por

$$|n\rangle := \int_0^\infty G_n^\nu(x) |x\rangle dx \quad (3.23)$$

Estas relaciones de ortogonalidad y cierre se verifican, para un valor de  $\nu$  fijo. El conjunto  $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una correspondencia con la base estándar  $\{|x\rangle\}_{x \in [0, \infty)}$ .

Los polinomios algebraicos de Laguerre se reescriben en términos de las funciones hipergeométricas confluentes a través de (3.19) y (3.21) como

$$G_n^\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \sqrt{\frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{n!}} e^{-x/2} x^{\nu/2} {}_1F_1[-n, \nu + 1; x]. \quad (3.24)$$

Si realizamos el proceso inverso podemos escribir las funciones hipergeométricas a partir de los polinomios algebraicos de Laguerre y con los campos vectoriales de los primeros deducir los campos vectoriales de los  $G_n^\nu(x)$ :

$${}_1F_1(-n, \nu + 1; x) = \Gamma(\nu + 1) \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n + \nu + 1)}} e^{x/2} x^{-\nu/2} G_n^\nu(x). \quad (3.25)$$

Definiendo primero los dos operadores:

$$\begin{aligned} NG_n^\nu(x) &= n G_n^\nu(x) \\ VG_n^\nu(x) &= \nu G_n^\nu(x) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Con los operadores de simetría de las funciones hipergeométricas confluentes y teniendo en cuenta la ecuación (3.25), si la sustituimos en los campos (3.8), (3.12) y (3.15) obtenemos unas expresiones en función de las funciones algebraicas de Laguerre, que serán los nuevos campos vectoriales asociados a las simetrías de las funciones algebraicas de Laguerre. Estos son

$$\begin{aligned} N_+ &= \left( -XD_x - \frac{X}{2} + \left( N + \frac{V}{2} \right) \right), \\ N_- &= \left( XD_x - \frac{X}{2} + \left( 1 + N + \frac{V}{2} \right) \right), \\ N_3 &= - \left( N + \frac{V+1}{2} \right), \\ M_+ &= \left( -\frac{X}{\sqrt{X}}D_x + \frac{X+V}{2\sqrt{X}} \right), \\ M_- &= \left( \frac{X}{\sqrt{X}}D_x + \frac{X+V}{2\sqrt{X}} \right), \\ M_3 &= 1, \\ R_+ &= \left( \frac{X}{\sqrt{X}}D_x - \frac{X-V}{2\sqrt{X}} \right), \\ R_- &= \left( -\frac{X}{\sqrt{X}}D_x - \frac{X-V}{2\sqrt{X}} \right), \\ R_3 &= 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Y su efecto sobre las funciones algebraicas de Laguerre es:

$$\begin{aligned} N_+ G_n^\nu(x) &= \sqrt{n(n+\nu)} G_{n-1}^\nu(x), \\ N_- G_n^\nu(x) &= \sqrt{(n+1)(n+\nu+1)} G_{n+1}^\nu(x), \\ M_+ G_n^\nu(x) &= \sqrt{n+\nu+1} G_n^{\nu+1}(x), \\ M_- G_n^\nu(x) &= \sqrt{\nu(n+\nu)} G_n^{\nu-1}(x), \\ R_+ G_n^\nu(x) &= \sqrt{n} G_{n-1}^{\nu+1}(x), \\ R_- G_n^\nu(x) &= \sqrt{n+1} G_{n+1}^{\nu-1}(x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

El grupo de simetría de estos polinomios es el mismo que el de las funciones hipergeométricas, es decir, estos polinomios poseen un grupo de simetría  $SU(1, 1) \otimes (H(1) \otimes H(1))$ . Las relaciones de conmutación son también las que se obtuvieron anteriormente (3.18).

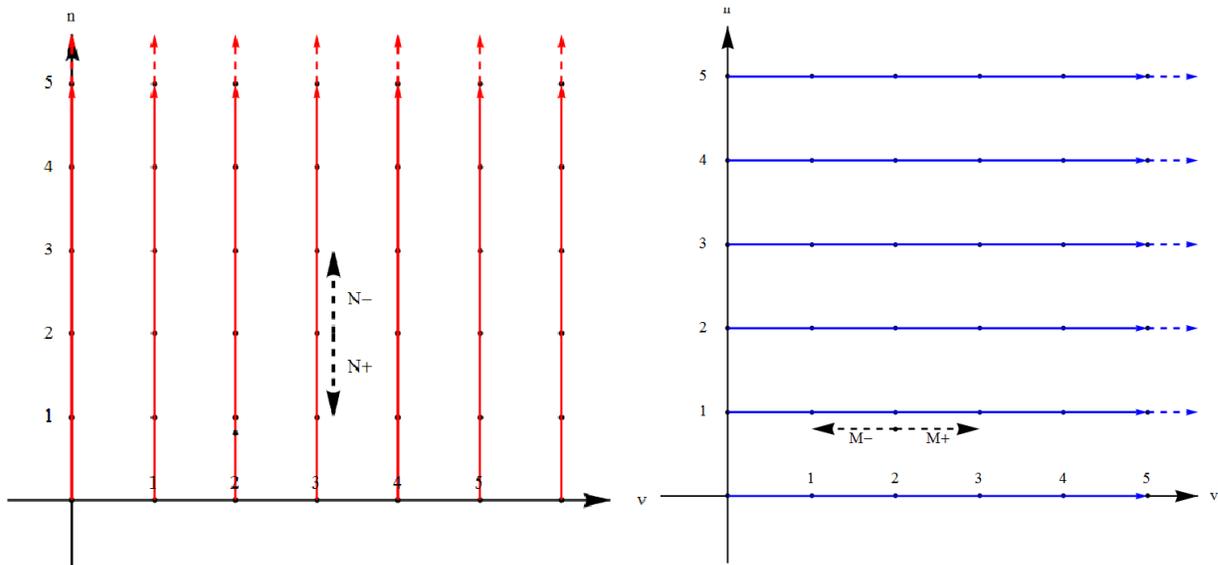


Figura 3.4: Clasificación de las funciones algebraicas de Laguerre en términos de dos de sus posibles IR. La primera gráfica representa la IR  $su(1, 1)$  mostrando la acción de los operadores  $N_{\pm}$ . La segunda gráfica representa la IR  $h_M(1)$  a través de la acción de los operadores  $M_{\pm}$  y  $M_3$ .

Ahora los operadores  $N_{\pm}$  hacen el rol contrario al que tenían en el caso anterior, el operador de subida  $N_+$  de las hipergeométricas ahora es un operador de bajada en los polinomios de Laguerre, para el caso del operador  $N_-$  pasa lo contrario, los operadores  $M_{\pm}$  siguen teniendo un rol similar y los operadores  $R_{\pm}$  suben un parámetro pero bajan el otro, al contrario de los que ocurría en el caso de las hipergeométricas que bien o bajaban o subían al mismo tiempo los dos parámetros  $a$  y  $c$ . Ello es debido al cambio  $n = -a$  y a que  $\nu = c - 1$ .

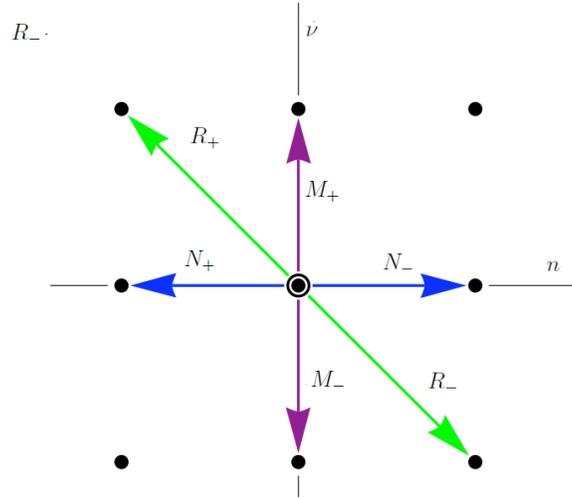


Figura 3.5: Sistema de raíces del álgebra de operadores para las funciones algebraicas de Laguerre.

### 3.7. Bases de las funciones de cuadrado integrable en $[0, \infty)$

Consideramos el espacio vectorial definido por el operador posición  $X$ , con vectores propios  $\{|x\rangle\}$ , donde  $x$  es un punto de la semirrecta positiva ( $0 < x < \infty$ ). Se tiene que

$$X|x\rangle = x|x\rangle, \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x-x'), \quad \mathbb{I} := \int_0^\infty |x\rangle\langle x| dx. \quad (3.29)$$

Las funciones algebraicas de Laguerre están, al igual que los polinomios ortogonales de Laguerre, definidos en la semirrecta positiva  $\mathbb{R}^+$ . Para cada valor fijo de  $\nu$  podemos obtener una base discreta  $\{|n\rangle\}$ . Recordando las relaciones que satisfacen estas funciones

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G_m^\nu(x) G_n^\nu(x) dx &= \delta_{n,m}, \\ \sum_{n=0}^\infty G_n^\nu(x) G_n^\nu(y) &= \delta(x-y). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Podemos ver que  $\{G_n^\nu(x)\}$  nos sirven como elementos de matrices entre una base continua  $\{|x\rangle\}$  y una base discreta  $\{|n\rangle\}$

$$|n\rangle := \int_0^\infty G_n^\nu(x) |x\rangle dx. \quad (3.31)$$

Y ahora las relaciones en esta base discreta son:

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}, \quad \mathbb{I} = \sum_{n=0}^\infty |n\rangle\langle n| \quad (3.32)$$

Construimos con estos polinomios una base ortonormal discreta en la semirecta positiva y las funciones algebraicas de Laguerre juegan el papel de matrices de transición entre las bases discretas  $\{|n\rangle\}$  y las bases continuas  $\{|x\rangle\}$ :

$$G_n^\nu(x) = \langle y|n\rangle = \langle n|y\rangle. \quad (3.33)$$

Podemos escribir un vector arbitrario definido en  $\mathbb{R}^+$ ,  $|f\rangle \in \mathbb{R}^+$  de la forma

$$|f\rangle = \int_0^\infty dx f(x) |x\rangle = \sum_{n=0}^\infty |n\rangle f_n, \quad (3.34)$$

$$f(x) := \langle y|f\rangle = \sum_{n=0}^\infty G_n^\nu(x) f_n, \quad f_n := \int_0^\infty G_n^\nu(x) f(x). \quad (3.35)$$

Una función de onda  $f(y)$  y la secuencias de funciones  $\{f_n\}$  describen el vector  $|f\rangle$  en dos bases diferentes. Luego se puede construir con estas funciones algebraicas dos bases del espacio de Hilbert que describen vectores en la semirecta positiva.

En el caso anterior de las bases ortonormales hemos considerado que uno de los parámetros, el  $\nu$ , estaba fijo. Esto es debido a que se quiere evitar la degeneración que tienen estos polinomios

$$G_n^\nu(x) = G_n^{-\nu}(x), \quad (3.36)$$

lo que quiere decir que el espacio vectorial no está del todo bien definido, porque las funciones coinciden en el caso de  $\pm\nu$ . Para romper la degeneración de estos polinomios, se hace lo mismo que se hace cuando se estudian los polinomios de Legendre a través de los armónicos esféricos, considerar unos nuevos objetos:

$$\mathcal{Z}_n^\nu(x; \phi) := e^{im\phi} G_n^\nu(x) \quad (3.37)$$

con  $\{\phi \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq \phi \leq \pi\}$ . Estas funciones son el análogo en el plano a lo que los armónicos esféricos son a la esfera. Hemos roto ahora la degeneración y el conjunto de funciones  $\{\mathcal{Z}_n^\nu(x; \phi)\}$  son una base en el espacio de Hilbert de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Las propiedades de normalización y ortogonalidad están definidas ahora por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^\infty dx \mathcal{Z}_n^\nu(x; \phi)^* \mathcal{Z}_m^\nu(x; \phi) &= \delta_{n,m} \delta_{\nu,\nu}, \\ \sum_{n,\nu} \mathcal{Z}_n^\nu(x; \phi)^* \mathcal{Z}_n^\nu(x'; \phi') &= \delta(x - x') \delta(\phi - \phi'). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Tenemos, de nuevo, que estos objetos que hemos definido son las matrices de transición de una base continua a otra base discreta, no obstante estamos ahora en un espacio de Hilbert un poco especial debido a la diferente cardinalidad de los índices  $y$  y  $\nu$ , las matrices de transición se pueden poner como

$$\mathcal{Z}_n^\nu(x; \phi) = \langle n, \nu|y, \phi\rangle \quad (3.39)$$

la representación irreducible  $\{|n, \nu\rangle\}$  que nos localiza estados en el plano  $\{|y, \phi\rangle\}$  esta dada por:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\infty} dx \mathcal{Z}_n^{\nu}(x; \phi)^* |y, \phi\rangle. \quad (3.40)$$

Resolvemos de esta forma el problema de fijar el parámetro  $\nu$  pasando a una representación irreducible en el espacio de funciones  $L^2(\mathbb{R}^2)$  que corresponde al plano.

### 3.8. Hamiltoniano de Tremblay-Turbiner-Winternitz.

Para realizar un estudio práctico de estas funciones de Laguerre vamos a estudiar el álgebra del Hamiltoniano de Tremblay-Turbiner-Winternitz, que depende de cuatro parámetros reales  $(k, \omega, \alpha, \beta)$  y tiene la forma:

$$H_{k,\omega,\alpha,\beta} = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \omega^2 r^2 + \frac{k^2}{r^2} \left( \frac{\alpha(\alpha-1)}{\cos^2 k\varphi} + \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2 k\varphi} \right) \quad (3.41)$$

donde  $0 \leq r \leq \infty$  y  $0 < \varphi < \pi/2k$ . Este Hamiltoniano es separable en las coordenadas  $(r, \varphi)$ . La correspondiente ecuación de Schrödinger para los estados estacionarios es

$$H_{k,\omega,\alpha,\beta} \Psi(r, \varphi) = E \Psi(r, \varphi) \quad (3.42)$$

Teniendo en cuenta  $\Psi(r, \varphi) = \psi(r)\phi(\varphi)$  se separa las dos ecuaciones en las variables  $(r, \varphi)$  consiguiendo ecuaciones independientes, una radial y otra angular

$$H_{k,\omega,M}^r \psi(r) = \left( -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r + \omega^2 r^2 + \frac{k^2 M^2}{r^2} \right) \psi(r) = E \psi(r) \quad (3.43)$$

$$H_{k,\omega,\alpha,\beta}^\varphi \phi(\varphi) = \left( -\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + k^2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{\cos^2 k\varphi} + k^2 \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2 k\varphi} \right) \psi(r) = k^2 M^2 \phi(\varphi) \quad (3.44)$$

donde  $\epsilon^2 = (kM)^2$  es la constante de separación. El primer Hamiltoniano se puede ver como un oscilador radial y el segundo como un potencial de Pöschl-Teller. Vamos a realizar un análisis del primer Hamiltoniano pues es el que contiene las funciones algebraicas de Laguerre, a través de los operadores escalera que nos van a conectar estados propios del Hamiltoniano.

El Hamiltoniano de la parte radial hemos dicho que corresponde a un oscilador armónico y tiene la forma

$$H_{k,\omega}^r = \left( -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r + \omega^2 r^2 + \frac{\epsilon^2}{r^2} \right). \quad (3.45)$$

Si realizamos el cambio de variable  $\rho = \omega r^2$  el Hamiltoniano ahora toma la forma

$$H_{k,\omega,M}^\rho = 4\omega \left( -\rho \partial_\rho^2 - \partial_\rho + \frac{\rho}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\rho} \right). \quad (3.46)$$

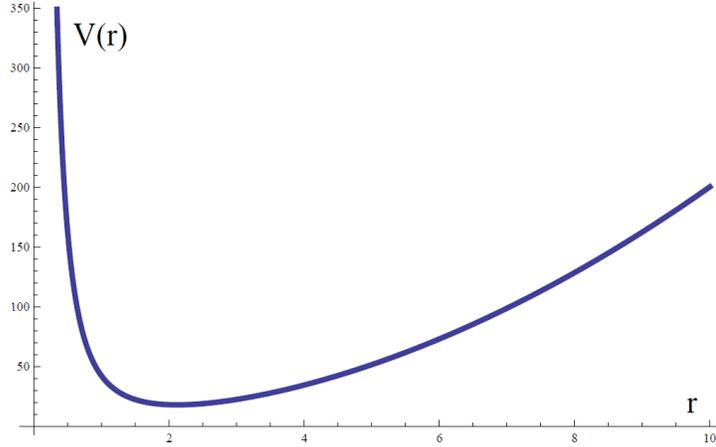


Figura 3.6: Potencial radial del potencial de Tremblay-Turbiner-Winternitz con valores de  $\omega^2 = 2$  y  $\epsilon^2 = 40$ .

Luego la ecuación diferencial que cumplen estas funciones de onda es

$$\left( \rho \partial_\rho^2 + \partial_\rho - \frac{\rho}{4} - \frac{\epsilon^2}{4\rho} + \frac{E}{4\omega} \right) \psi(\rho) = 0, \quad (3.47)$$

que es la ecuación de las funciones algebraicas de Laguerre que hemos definido en apartados anteriores con  $\nu = \epsilon + m$  y  $n = \frac{1}{2} \left( \frac{E}{2\omega} - (\epsilon + 1) \right)$ . Luego la solución de este sistema serán las funciones  $G_n^{\epsilon+m}(x)$ .

Se puede entonces poner este Hamiltoniano en función de los operadores escalera de las funciones algebraicas de Laguerre. A través de esta descomposición en operadores se observan algunas características de este sistema y de las funciones de este potencial cuando se aplican los operadores.

Así por ejemplo, el efecto de los operadores  $M_\pm$  sobre el sistema, es modificar en una unidad el parámetro  $\epsilon$ , luego este operador lo que va a hacer es modificar el potencial teniendo un nuevo Hamiltoniano. Tenemos así una nueva familia de Hamiltonianos:

$$H_{k,\omega,m}^\rho = 4\omega \left( -\rho \partial_\rho^2 - \partial_\rho + \frac{\rho}{4} + \frac{(\epsilon + m)^2}{4\rho} + 2\omega m \right) \quad (3.48)$$

La acción de los operadores  $M_\pm$  es la de relacionar funciones de distinto Hamiltonianos. Bajo la acción de  $M_-$  los estados propios de  $H_m^r$  pasan a ser estados propios del hamiltoniano  $H_{m+1}^r$  y de la forma contraria las funciones propias de  $H_{m+1}^r$  pasan a ser funciones propias de  $H_m^r$  con la acción de  $M_+$ .

Esta propiedad es debido a que los operadores  $M_\pm$  forman un álgebra de Weyl-Heisenberg y por lo tanto los operadores  $M_\pm$  conmutan con el operador número  $N = M_+ M_-$  de la forma

$$[N, M_+] = M_+, \quad [N, M_-] = -M_-. \quad (3.49)$$

luego se cumple

$$M_- H_m^r = H_{m+1}^r M_-, \quad M_+ H_{m+1}^r = H_m^r M_+. \quad (3.50)$$

Para el Hamiltoniano que hemos introducido al comienzo la energía tiene un valor de

$$E = 2\omega (2n + \epsilon + 1) \quad (3.51)$$

Y para el caso de estos nuevos Hamiltonianos generales  $\{H_m^r\}$  la energía del sistema será ahora

$$E = 2\omega (2n + 2m + \epsilon + 1) \quad (3.52)$$

Se ve que a través del estudio de las simetrías de los polinomios de Laguerre, se ha conseguido asociar a este Hamiltoniano la ecuación de las funciones algebraicas de Laguerre y se ha visto que el parámetro  $\epsilon$  de este Hamiltoniano se asociaba con el parámetro  $\nu$  de las funciones algebraicas de Laguerre.

Se ha comprobado que si se hace actuar los operadores  $M_\pm$  sobre las funciones lo que estamos haciendo es modificar el parámetro  $\epsilon$  y por lo tanto estamos transformando esas funciones en unas funciones que ahora serán estados propios de otros Hamiltonianos nuevos  $H_{k,\omega,\epsilon\pm 1}^r$ . Este análisis que hemos realizados con los operadores  $M_\pm$  se podría hacer con los otros cuatro operadores restantes que teníamos para estos polinomios.

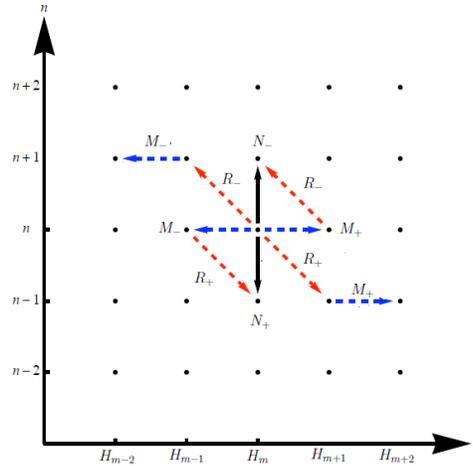


Figura 3.7: Acción de los operadores  $N_\pm$ ,  $M_\pm$  y  $R_\pm$  sobre la función  $\psi_{n\epsilon}^m$  del Hamiltoniano  $H_{k,\omega,\epsilon}^r$ .

Los operadores  $N_\pm$  aplicados a estas funciones y a estos potenciales no transforman las funciones en estados propios de otros Hamiltonianos, sino que sólo varían el valor del parámetro  $n$  y por lo tanto transformaría estos estados en otros estados propios del mismo Hamiltoniano pero con distinta energía, se estaría modificando la energía del sistema pero seguiríamos teniendo estados propios de ese Hamiltoniano. Estos operadores generan el espectro y las funciones de onda de la parte radial.

Por último el conjunto de operadores  $R_{\pm}$  que soportan también un álgebra de Weyl-Heisenberg y por tanto actuarían modificando al mismo tiempo la energía del sistema pero también nos modificarían las funciones propias de ese Hamiltoniano pasando a ser funciones propias de otro Hamiltoniano, se estaría mezclando el efecto de ambos operadores. El lector interesado puede comparar estos resultados con los obtenidos en [8].



# Capítulo 4

## Simetrías de las funciones ${}_2F_1 [a, b; c; x]$

Después de hacer el estudio de las simetrías de las funciones hipergeométricas confluentes que solo contienen dos parámetros se pretende dar un paso mas adelante y pasar a la siguiente familia de funciones hipergeométricas. Este es el caso de las funciones hipergeométricas  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$ . El esquema a seguir en este capítulo es parecido al caso que se siguió en el apartado anterior, lo que pasa que ahora tenemos tres parámetros en vez de dos lo que hace que el número de parámetros se mucho mayor.

### 4.1. Funciones hipergeométrica y sus operadores estructurales

Se llama *función hipergeométrica gaussiana* a la serie dada por:

$${}_2F_1 [a, b; c; x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (4.1)$$

también se puede escribir equivalentemente como

$${}_2F_1 [a, b; c; x] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.2)$$

En lo que sigue vamos a construir el álgebra de simetrías de estas funciones  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$ . Luego buscaremos la concordancia de estos resultados con los obtenidos recientemente por Celeghini-del Olmo para los polinomios de Jacobi. Para poder dar la estructura de grupo que busquemos tendremos que restringir el valor de estas variables  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Las variables  $-a$ ,  $-b \in \mathbb{N}$  y la variable  $c \geq 1$  con  $c \in \mathbb{N}$ , de esta forma las funciones hipergeométricas no serán series infinitas sino polinomios. Además hay que notar que el radio de convergencia de estos polinomios viene dado por  $x < |1|$ , luego es analítica en el interior del disco unidad.

La función hipergeométrica posee una propiedad muy clara de simetría al intercambiar los parámetros  $a$  y  $b$ :

$${}_2F_1 [a, b; c; x] = {}_2F_1 [b, a; c; x] \quad (4.3)$$

La ecuación diferencial que satisfacen estas funciones es

$$\left[ x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + (c - (a+b+1)x) \frac{d}{dx} + ab \right] {}_2F_1 [a, b; c; x] = 0 \quad (4.4)$$

La simetría anterior de intercambio  $a \leftrightarrow b$  se hace evidente también en esta ecuación.

Para dar una estructura de álgebra al conjunto de simetrías de las funciones  $\{{}_2F_1 [a, b; c; x]\}$  definimos los tres operadores  $A$ ,  $B$  que  $C$  cuyo efecto sobre las hipergeométricas es

$$\begin{aligned} {}_2F_1 [a, b; c; x] &= a {}_2F_1 [a, b; c; x], & B {}_2F_1 [a, b; c; x] &= b {}_2F_1 [a, b; c; x], \\ C {}_2F_1 [a, b; c; x] &= c {}_2F_1 [a, b; c; x], \end{aligned} \quad (4.5)$$

es decir, son diagonales sobre las funciones hipergeométricas y, por lo tanto, pertenecen a la subálgebra de Cartan del álgebra de Lie de simetrías.

## 4.2. Álgebra de simetrías de ${}_2F_1 [a, b; c; x]$

Vamos a empezar a evaluar el operador que solo cambia el valor de  $a$ . Para ello definimos los operadores:

$$A_+ := X D_x + A, \quad (4.6)$$

$$A_- := X(X-1) D_x + C + A + B X$$

que actúan sobre las funciones hipergeométricas  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$  como

$$A_+ {}_2F_1 [a, b; c; x] = a {}_2F_1 [a+1, b; c; x]. \quad (4.7)$$

$$A_- {}_2F_1 [a, b; c; x] = (a-c) {}_2F_1 [a-1, b; c; x].$$

Definiendo ahora  $A_3 := A - C/2$  y teniendo en cuenta la acción de los operadores  $A_\pm$  y  $A_3$  sobre las funciones hipergeométricas, en las ecuaciones (4.7) y (4.5) se comprueba fácilmente que  $A_\pm$  y  $A_3$  cierran un álgebra  $su(1,1)$  y que  $A_\pm$  conmutan con  $B$  y  $C$ . Denotaremos dicha álgebra por  $su_A(1,1)$

$$[A_3, A_\pm] = \pm A_\pm \quad [A_+, A_-] = -2A_3.$$

Entonces estas funciones hipergeométricas  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$  soportan una representación del grupo del álgebra de Lie  $su_A(1,1)$ . Partiendo ahora de estos operadores diferenciales  $A_\pm$ ,

podemos reescribir la ecuación diferencial de las funciones hipergeométricas a través del operador de Casimir  $\mathcal{C}_A$ , de  $su_A(2)$  como

$$\left[ \mathcal{C}_A + \frac{C}{2} \left( \frac{C}{2} - 1 \right) \right] {}_1F_1 [a; c; x] \equiv \left[ \frac{1}{2} \{A_+, A_-\} - A_3^2 + \frac{C}{2} \left( \frac{C}{2} - 1 \right) \right] {}_1F_1 [a; c; x] = 0. \quad (4.8)$$

Por otro lado podemos utilizar un segundo método de factorización, poniendo la ecuación diferencial de segundo orden como el producto de los operadores de primer orden. Teniendo en cuenta este hecho, se obtienen estas dos ecuaciones

$$\left[ \begin{array}{l} A_+ A_- - \left( \frac{C}{2} - A_3 \right) \left( \frac{C}{2} + A_3 + 1 \right) \\ A_- A_+ - \left( \frac{C}{2} + A_3 \right) \left( \frac{C}{2} - A_3 + 1 \right) \end{array} \right] \begin{array}{l} {}_2F_1 [a, b; c; x] = 0, \\ {}_2F_1 [a, b; c; x] = 0, \end{array} \quad (4.9)$$

que reproduce de nuevo la ecuación (4.4) de la función hipergeométrica. Las ecuaciones (4.8), (4.9) son casos particulares de una regla general: la definición de las funciones hipergeométricas puede recuperarse con los operadores de Casimir de cualquier álgebra involucrados y sub-álgebra, así como cualquier producto diagonal de operadores escalera.

Ahora usando la propiedad de simetría  $a \Leftrightarrow b$  de las  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$ , podemos construir la subálgebra de simetría que cambia  $b$  manteniendo  $a$  y  $c$  intactos. A partir de  $A_{\pm}$  los dos nuevos operadores  $B_{\pm}$  estas definidos por

$$B_+ := X D_x + B, \quad (4.10)$$

$$B_- := X(X - 1) D_x + C + B + AX$$

y la acción de estos operadores sobre las funciones es

$$B_+ {}_2F_1 [a, b; c; x] = b {}_2F_1 [a, b + 1; c; x] \quad (4.11)$$

$$B_- {}_2F_1 [a, b; c; x] = (b - c) {}_2F_1 [a, b - 1; c; x].$$

Obviamente estos dos nuevos operadores  $B_{\pm}$  y  $B_3 := B - C/2$  cierran un álgebra  $su(1, 1)$  que denotamos como  $su_B(1, 1)$ . Las relaciones de conmutación de estos operadores son

$$[B_3, B_{\pm}] = \pm B_{\pm} \quad [B_+, B_-] = -2B_3,$$

y estas funciones hipergeométricas  $\{{}_2F_1 [a, b; c; x]\}$  para  $-a, -b \in \mathbb{N}$  y  $c = 1, 2, 3, \dots$  soportan una representación irreducible de dimensión infinita de  $su_B(1, 1)$ . De nuevo podemos recuperar la ecuación diferencial (4.4) con el Casimir,  $\mathcal{C}_B$ , de  $su_B(1, 1)$

$$\left[ \mathcal{C}_B + \frac{C}{2} \left( \frac{C}{2} - 1 \right) \right] {}_2F_1 [a, b; c; x] \equiv \left[ \frac{1}{2} \{B_+, B_-\} - B_3^2 + \frac{C}{2} \left( \frac{C}{2} - 1 \right) \right] {}_2F_1 [a, b; c; x] = 0.$$

o bien de la forma

$$\begin{aligned} \left[ B_+ B_- - \left( \frac{C}{2} - B_3 \right) \left( \frac{C}{2} + B_3 + 1 \right) \right] {}_2F_1[a, b; c; x] &= 0, \\ \left[ B_- B_+ - \left( \frac{C}{2} - B_3 \right) \left( \frac{C}{2} + B_3 + 1 \right) \right] {}_2F_1[a, b; c; x] &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tenemos ahora una estructura algebraica más compleja por la aparición de aplicaciones comunes de los dos operadores  $A_\pm$  y  $B_\pm$ . Los operadores  $\{A_\pm, A_3\}$  conmutan con  $\{B_\pm, B_3\}$  de modo que, la estructura algebraica es la suma directa de las dos álgebras de Lie:

$$su_A(1, 1) \oplus su_B(1, 1).$$

Fijado un  $c$  podemos cambiar el valor de  $a$  y/o  $b$  a través de los elementos de  $su_A(1, 1) \oplus su_B(1, 1)$ . Como en las funciones hipergeométricas no está definido el producto escalar esta representación no es unitaria a nivel de grupo  $SU_A(1, 1) \oplus SU_B(1, 1)$ .

### 4.3. Otros operadores de simetría para las ${}_2F_1[a, b; c; x]$

Se conocen muchas otras relaciones diferenciales de las funciones hipergeométricas. Si partimos de ellas podemos reconstruir un álgebra de Lie  $su(2, 2)$ . Tenemos quince generadores infinitesimales, de los cuales tres de ellos son los generadores de Cartan (como sabemos,  $A$ ,  $B$  y  $C$ ). Se ve claramente que cuatro de ellos conmutan con  $C$  ( $A_\pm$  y  $B_\pm$ ), que son los estudiados en el párrafo anterior. Los otros ocho operadores escaleras (no diagonales) son:

$$C_+ := (1 - X) D_x - (A + B - C),$$

$$C_- := X D_x + C - 1,$$

$$D_+ := (1 - X) D_x - A,$$

$$D_- := (1 - X) X D_x - BX + C - 1,$$

$$E_+ := (1 - X) D_x - B,$$

$$E_- := (1 - X) X D_x - AX + C - 1,$$

$$F_+ := D_x,$$

$$F_- := X(1 + X) D_x - (B + A - 1)X + C - 1.$$

Su acción sobre las funciones hipergeométricas es:

$$\begin{aligned}
C_+ {}_2F_1 [a, b; c; x] &= \frac{(c-a)(c-b)}{c} {}_2F_1 [a, b; c+1; x], \\
C_- {}_2F_1 [a, b; c; x] &= (c-1) {}_2F_1 [a, b; c-1; x], \\
D_+ {}_2F_1 [a, b; c; x] &= \frac{a(b-c)}{c} {}_2F_1 [a+1, b; c+1; x], \\
D_- {}_2F_1 [a, b; c; x] &= (c-1) {}_2F_1 [a+1, b; c+1; x], \\
E_+ {}_2F_1 [a, b; c; x] &= \frac{b(a-c)}{c} {}_2F_1 [a, b+1; c+1; x], \\
E_- {}_2F_1 [a, b; c; x] &= (c-1) {}_2F_1 [a, b+1; c+1; x], \\
F_+ {}_2F_1 [a, b; c; x] &= \frac{ab}{c} {}_2F_1 [a+1, b+1; c+1; x], \\
F_- {}_2F_1 [a, b; c; x] &= (c-1) {}_2F_1 [a-1, b-1; c-1; x].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Los operadores (4.12) cambian todos los parámetros en  $\pm 1$ . Si nos limitamos a hablar de los operadores escalera  $C_{\pm}$ . Su acción sobre las funciones es

$$[C_+, C_-] = -2C_3, \quad [C_3, C_{\pm}] = \pm C_{\pm} \tag{4.13}$$

donde

$$C_3 := C - \frac{1}{2}(A + B + 1). \tag{4.14}$$

Por lo tanto  $\{C_{\pm}, C_3\}$  cierran un álgebra  $su(1, 1)$  que denotaremos por  $su_C(1, 1)$ . Siguiendo los pasos que hemos hecho con los operadores  $A_{\pm}$  y  $B_{\pm}$  podemos también descomponer la ecuación diferencial de estas funciones en producto de operadores  $C_{\pm}$ , el Casimir  $\mathcal{C}_C$ , de  $su_C(1, 1)$  se escribe de la forma:

$$\begin{aligned}
&\left[ \mathcal{C}_C + \left( \frac{1+A-B}{2} \right) \left( \frac{1+A-B}{2} - 1 \right) \right] {}_2F_1 [a, b; c; x] \equiv \\
&\left[ \frac{1}{2} \{C_+, C_-\} - C_3^2 + \left( \frac{1+A-B}{2} \right) \left( \frac{1+A-B}{2} - 1 \right) \right] {}_2F_1 [a, b; c; x] = 0.
\end{aligned}$$

Usando el segundo método de factorización

$$\begin{aligned}
&\left[ C_+ C_- - \left( \frac{1+A-B}{2} - C_3 \right) \left( \frac{1+A-B}{2} + C_3 + 1 \right) \right] {}_2F_1 [a, b; c; x] = 0, \\
&\left[ C_- C_+ - \left( \frac{1+A-B}{2} - C_3 \right) \left( \frac{1+A-B}{2} + C_3 + 1 \right) \right] {}_2F_1 [a, b; c; x] = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Lo mismo que se ha realizado con estos tres operadores se podría hacer con los restantes operadores, pues toda ecuación diferencial puede ponerse como función de sus operadores escalera.

Estos seis operadores ( $A_{\pm}$ ,  $B_{\pm}$  y  $C_{\pm}$ ) que se han estudiado tienen un grupo de simetría  $su(1, 1)$ , pues se puede aplicar uno de los operadores escalera indefinidas veces pero el número de veces que se puede aplicar en otro operador es finito.

Los otros tres operadores que nos quedan de estudiar ( $D_{\pm}$ ,  $E_{\pm}$ ,  $F_{\pm}$ ) poseen un grupo de simetría  $SU(2)$ , pues solo permiten usar el operador de subida y bajada un número finito de veces. Por ejemplo las relaciones de conmutación de los operadores  $D_{\pm}$  son

$$[D_+, D_-] = 2D_3, \quad [D_3, D_{\pm}] = \pm D_{\pm} \quad (4.16)$$

donde  $D_3 = \frac{1}{2}(B + 1 - A - C)$ .

De las ecuaciones (4.12) se puede ver que se puede aplicar  $D_+$  a las funciones hipergeométricas hasta que se llega a  $a = 0$ , del mismo modo se puede hacer actuar  $D_-$  hasta que  $c = 1$ , luego se ve solo podemos hacer actuar estos operadores de subida y bajada un número finito de veces sobre las funciones, como es propio de la representaciones irreducibles de  $su(2)$ .

### 4.4. El grupo completo de simetría para ${}_2F_1[a, b; c; x]: SU(2, 2)$

Se puede representar la acción de los doce operadores  $A_{\pm}, B_{\pm}, C_{\pm}, D_{\pm}, E_{\pm}, F_{\pm}$ , que hemos definido en la sección previa, y obtenemos la Fig 4.1 . Para obtener el sistema de raíces del álgebra de Lie simple  $A_3 \equiv D_3$  solo tenemos que añadir tres puntos en el origen correspondientes a los elementos  $A, B$  y  $C$  de la subálgebra de Cartan.

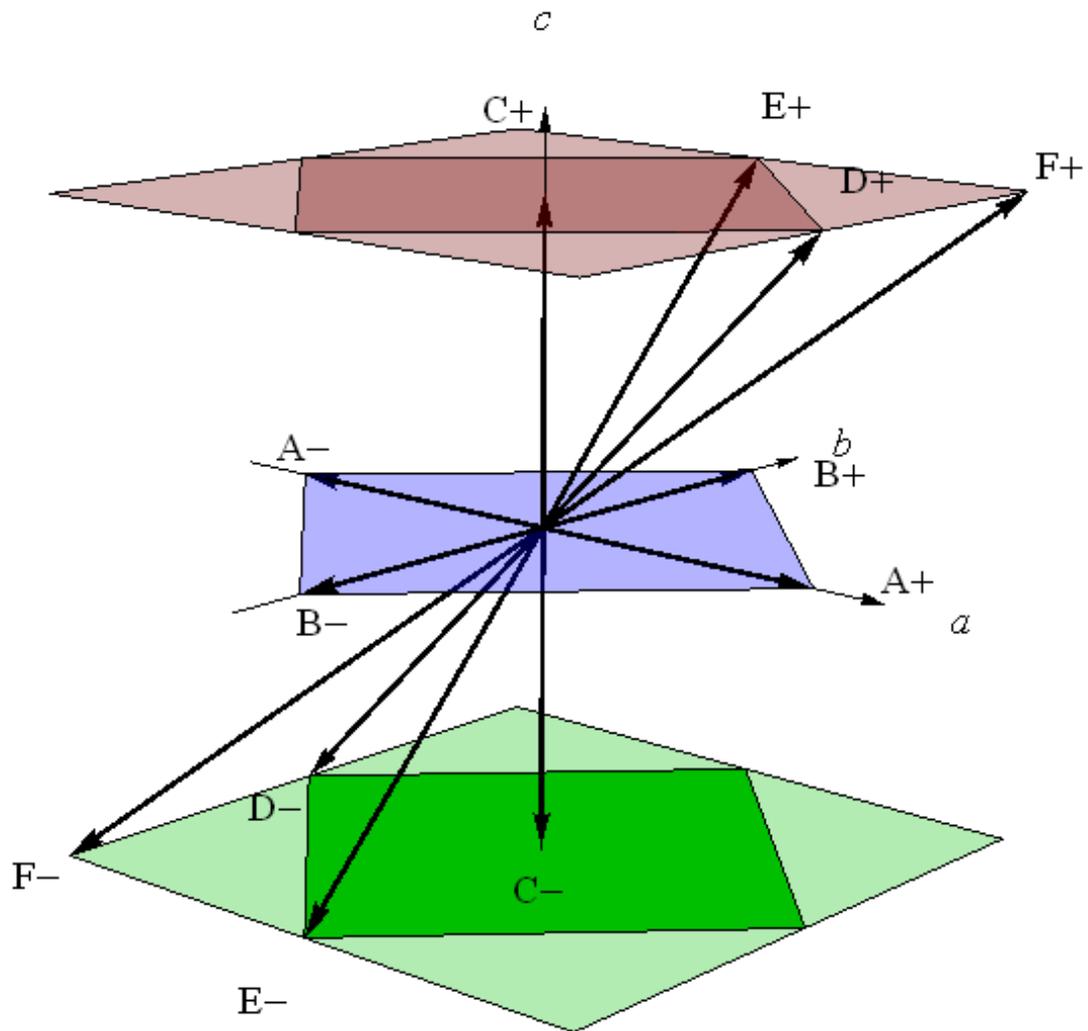


Figura 4.1: Sistema de raíces de las funciones hipergeométricas  ${}_2F_1[a, b; c; x]$ .

Los conmutadores de lie de los operadores  $A_{\pm}, B_{\pm}, C_{\pm}, D_{\pm}, E_{\pm}, F_{\pm}, A_3, B_3, J_3$  son

$$\begin{aligned}
[E_3, F_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} F_{\pm}, & [E_3, F_3] &= 0, & [E_3, C_{\pm}] &= \frac{1}{2} C_{\pm}, & [E_3, C_3] &= 0, \\
[E_3, E_{\pm}] &= \pm E_{\pm}, & [E_3, B_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} B_{\pm}, & [E_3, A_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} A_{\pm}, & [E_3, D_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} D_{\pm}, \\
[F_3, C_{\pm}] &= 0, & [F_3, C_3] &= 0, \\
[F_3, E_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} E_{\pm}, & [F_3, B_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} B_{\pm}, & [F_3, A_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} A_{\pm}, & [F_3, D_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} D_{\pm}, \\
[C_3, F_{\pm}] &= 0, \\
[C_3, E_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} E_{\pm}, & [C_3, B_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} B_{\pm}, & [C_3, A_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} A_{\pm}, & [C_3, D_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} D_{\pm}, \\
[F_+, F_-] &= 2F_3, & [F_3, F_{\pm}] &= \pm F_{\pm}, & (F_3 &= \frac{1}{2}(A + B - 1)), \\
[D_+, D_-] &= 2D_3, & [D_3, D_{\pm}] &= \pm D_{\pm}, & (D_3 &= \frac{1}{2}(B + 1 - A - C)), \\
[E_+, E_-] &= 2E_3, & [E_3, E_{\pm}] &= \pm E_{\pm}, & (E_3 &= \frac{1}{2}(A + 1 - B - C)), \\
[B_+, B_-] &= -2B_3, & [B_3, B_{\pm}] &= \pm B_{\pm}, & (B_3 &= B - \frac{C}{2}), \\
[A_+, A_-] &= -2A_3, & [A_3, A_{\pm}] &= \pm A_{\pm}, & (A_3 &= A - \frac{C}{2}), \\
[C_+, C_-] &= -2C_3, & [C_3, C_{\pm}] &= \pm C_{\pm}, & (C_3 &= C - \frac{1}{2}(B + A + 1)), \\
[F_{\pm}, C_{\pm}] &= 0, & [F_{\pm}, C_{\mp}] &= 0, \\
[F_{\pm}, E_{\pm}] &= 0, & [F_{\pm}, E_{\mp}] &= \pm A_{\mp}, & [D_{\pm}, B_{\pm}] &= 0, & [F_{\pm}, B_{\mp}] &= \mp D_{\mp}, \\
[F_{\pm}, A_{\pm}] &= 0, & [F_{\pm}, A_{\mp}] &= \mp E_{\pm}, & [F_{\pm}, D_{\pm}] &= 0, & [F_{\pm}, D_{\mp}] &= \mp B_{\pm}, \\
[C_{\pm}, E_{\pm}] &= 0, & [C_{\pm}, E_{\mp}] &= \pm B_{\mp}, & [C_{\pm}, B_{\pm}] &= \pm E_{\pm}, & [B_{\pm}, D_{\mp}] &= 0, \\
[C_{\pm}, A_{\pm}] &= \mp D_{\mp}, & [C_{\pm}, A_{\mp}] &= 0, & [C_{\pm}, D_{\pm}] &= 0, & [B_{\pm}, F_{\mp}] &= \mp D_{\pm}, \\
[E_{\pm}, B_{\pm}] &= 0, & [E_{\pm}, B_{\mp}] &= \mp C_{\pm}, & [E_{\pm}, A_{\pm}] &= \mp F_{\pm}, & [E_{\pm}, A_{\mp}] &= 0, \\
[E_{\pm}, D_{\pm}] &= 0, & [E_{\pm}, D_{\mp}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$[B_{\pm}, A_{\pm}] = 0, \quad [D_{\pm}, A_{\mp}] = 0, \quad [B_{\pm}, D_{\pm}] = 0, \quad [B_{\pm}, D_{\mp}] = \mp D_{\pm},$$

$$[A_{\pm}, D_{\pm}] = 0, \quad [A_{\pm}, D_{\mp}] = \mp C_{\pm}.$$

## 4.5. Funciones Algebraicas de Jacobi

Los polinomios de Jacobi se relacionan con las funciones hipergeométricas  ${}_2F_1[a, b; c; x]$  por:

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \left( \frac{1+x}{2} \right)^n {}_2F_1 \left[ -n, -n - \beta; \alpha + 1; \frac{x-1}{x+1} \right]. \quad (4.17)$$

También podemos obtener una expresión binomial

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{s=0}^n \binom{n+\alpha}{s} \binom{n+\beta}{n-s} \left( \frac{x+1}{2} \right)^s \left( \frac{x-1}{2} \right)^{n-s}. \quad (4.18)$$

donde se considera la generalización de la expansión binomial

$$\binom{a}{s} := \frac{(a+1-s)_s}{s!},$$

siendo  $a$  un número arbitrario y  $s$  un entero positivo. Sin embargo para obtener una estructura algebraica mucho más simple e intuitiva, se definen otras tres variables discretas alternativas a  $n, \alpha, \beta$  además de incluir un factor dependiente de  $x$ . Sustituimos primero  $(n, \alpha, \beta)$  por  $(j, m, q)$

$$j := n + \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad m := \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad q := \frac{\alpha - \beta}{2},$$

o inversamente

$$n = j - m, \quad \alpha = m + q, \quad \beta = m - q.$$

Por último, se incluye el factor que depende de  $x$  que incluyen el peso de los polinomios de Jacobi, con el fin de hacer ortonormal la base de polinomios en el espacio de Hilbert. A estos nuevos objetos se le llama “funciones algebraicas de Jacobi” (AJF), que tienen la forma final

$$\mathcal{J}_j^{m,q}(x) := \sqrt{\frac{\Gamma(j+m+1)\Gamma(j-m+1)}{\Gamma(j+q+1)\Gamma(j-q+1)}} \left( \frac{1-x}{2} \right)^{\frac{m+q}{2}} \left( \frac{1+x}{2} \right)^{\frac{m-q}{2}} J_{j-m}^{(m+q, m-q)}(x), \quad (4.19)$$

donde para obtener una representación de grupo, que se verá más adelante, se incluyen las siguientes restricciones  $(j, m, q)$

$$j \geq |m|, \quad j \geq |q|, \quad 2j \in \mathbb{N}, \quad j - m \in \mathbb{N}, \quad j - q \in \mathbb{N} \quad (4.20)$$

Siendo, por lo tanto,  $(j, m, q)$  todos enteros o semienteros. Las condiciones (4.20) escritas en términos de los antiguos parámetros  $(n, \alpha, \beta)$  son

$$n \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \geq -n, \quad \beta \geq -n, \quad \alpha + \beta \geq -n.$$

Recordando que los polinomios de Jacobi  $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  están determinados por  $\alpha > -1$  y  $\beta > -1$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) de tal manera que una función de peso único  $w(x)$  pueda renormalizarlos. Sin embargo se deben cambiar las restricciones para que las nuevas funciones algebraicas estén normalizadas correctamente.  $\hat{\mathcal{J}}_j^{m, q}(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_j^{m+\varepsilon, q}(x)$  como

$$\hat{\mathcal{J}}_j^{m, q}(x) = \begin{cases} \mathcal{J}_j^{m, q}(x) & \forall (j, m, q) \text{ verificando las condiciones de (4.20)} \\ 0 & j < |m| \end{cases}.$$

Estas AJF para un  $m$  y  $q$  fijos verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 \mathcal{J}_j^{m, q}(x) (j + 1/2) \mathcal{J}_{j'}^{m, q}(x) dx = \delta_{j j'} \quad (4.21)$$

o de otra forma

$$\sum_{j=\sup(|m|, |q|)}^{\infty} \mathcal{J}_j^{m, q}(x) (j + 1/2) \mathcal{J}_j^{m, q}(y) = \delta(x - y). \quad (4.22)$$

que son similares a la de los polinomios de Laguerre y a las de los polinomios asociados de Legendre: todos son ortonormales sólo hasta el factor  $j + 1/2$ . La ecuación de Jacobi queda entonces de la forma

$$\left[ (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - ((\alpha + \beta + 2)x + (\alpha - \beta)) \frac{d}{dx} + n(n + \alpha + \beta + 1) \right] J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0 \quad (4.23)$$

Por otro lado los polinomios algebraicos de Jacobi  $\mathcal{J}_j^{m, q}(x) \quad \forall (j, m, q)$  en función de las funciones hipergeométricas  ${}_2F_1[a, b; c; x]$  se relacionan mediante el cambio de parámetros:

$$a = m - j, \quad b = q - j, \quad c = m + q + 1,$$

$$j = \frac{c - 1 - a - b}{2}, \quad m = \frac{c - 1 + a - b}{2}, \quad q = \frac{c - 1 - a + b}{2}.$$

Inversamente se puede escribir las funciones hipergeométricas en función de los polinomios algebraicos de Jacobi.

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left[ a, b; c; \frac{1-x}{2} \right] &= \frac{(-a)!}{(c)_n} \sqrt{\frac{\Gamma(c-a+1)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(1-a)}} \left( \frac{1-x}{2} \right)^{\frac{1-c}{2}} \left( \frac{1+x}{2} \right)^{\frac{c-a-b}{2}} \\ &\quad \times \mathcal{J}_{\frac{b-a-1}{2}}^{\frac{b+a-1}{2}, c-\frac{b+a+1}{2}}(x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

## 4.6. Operadores de simetría de los AFJ

Si sustituimos en los operadores que se han calculado en la sección anterior se obtendrán los operadores correspondientes a estos polinomios y seguirán el mismo álgebra que las funciones hipergeométricas. Si tomamos el operador  $A_+$  del caso anterior

$$(X D_x + A)_2 F_1 [a, b, c, z] = a {}_2F_1 [a + 1, b, c, z] \quad (4.25)$$

Obtenemos tras operar y sustituir la ecuación hipergeométrica por (4.24):

$$A_+ \mathcal{J}_j^{m,q}(x) = \sqrt{(j-m)(j+q)} \mathcal{J}_{j-1/2}^{m+1/2, q-1/2}(x), \quad (4.26)$$

donde

$$A_+ = \left[ \frac{(1-X)\sqrt{1+X}}{\sqrt{2}} D_x + \frac{1}{\sqrt{2(1+X)}} (XJ + (J - M + Q)) \right], \quad (4.27)$$

que es justamente uno de los operadores de las funciones de Jacobi. Tomando ahora el campo  $A_-$  y realizando el mismo cálculo se llega a

$$A_- \mathcal{J}_j^{m,q}(x) = \sqrt{(j-m+1)(j+q+1)} \mathcal{J}_{j+1/2}^{m-1/2, q+1/2}(x), \quad (4.28)$$

donde

$$A_- = - \left[ \frac{(1-X)\sqrt{1+X}}{\sqrt{2}} D_x + \frac{1}{\sqrt{2(1+X)}} (X(J+1) + (J+1 - M + Q)) \right], \quad (4.29)$$

El operador  $A_3$  queda de la forma  $A_3 := J + \frac{1}{2}(Q - M) + \frac{1}{2}$ . El álgebra de estos operadores tiene la misma estructura que en el caso de las hipergeométricas. Los operadores  $A_{\pm}$  y  $A_3$  cierran un álgebra  $su(2)$ , de nuevo.

$$[A_3, A_{\pm}] = \pm A_{\pm}, \quad [A_+, A_-] = 2A_3.$$

Esto se puede ver claramente si se analizan los índices de las funciones algebraicas de Jacobi, el operador  $A_-$  no aumenta el índice  $j$  en  $+1/2$  cada vez que actúa sobre las ASJ, luego podemos aplicar indefinidas veces el operador  $A_-$  a estas funciones. Sin embargo el operador  $A_+$  no disminuye el valor de  $j$  en  $1/2$ , y sin embargo sube el de  $m$ . Si el valor de  $m$  supera al de  $j$  la función se destruye, luego solo podemos aplicar este operador un número finito de veces sobre las ASJ.

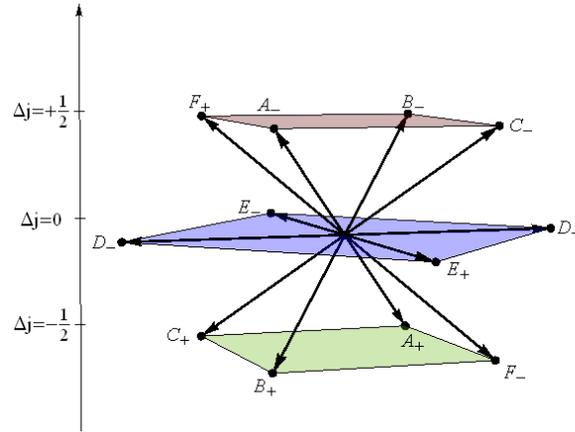


Figura 4.2: Acción sobre las AFJ de los diferentes operadores representado por el triplete  $(j, m, q)$ . La acción sobre los planos nos mueve los parámetros  $m$  y  $q$  y la acción sobre el eje vertical nos mueve el índice  $j$ .

Realizando los mismos cálculos para todos los campos de las hipergeométricas llegamos a las operadores escaleras de las polinomios algebraicos de Jacobi:

$$\begin{aligned}
 B_+ &:= + \frac{(1-X)\sqrt{1+X}}{\sqrt{2}} D_x + \frac{1}{\sqrt{2(1+X)}} (XJ + (J+M-Q)), \\
 B_- &:= - \frac{(1-X)\sqrt{1+X}}{\sqrt{2}} D_x + \frac{1}{\sqrt{2(1+X)}} (X(J+1) + (J+1+M-Q)), \\
 C_+ &:= + \frac{(1+X)\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}} D_x - \frac{1}{\sqrt{2(1-X)}} (X(J+1) - (J+1+M+Q)), \\
 C_- &:= - \frac{(1+X)\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}} D_x - \frac{1}{\sqrt{2(1-X)}} (XJ - (J+M+Q)), \\
 D_+ &:= + \sqrt{1-X^2} D_x + \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} (XM+Q), \\
 D_- &:= - + \sqrt{1-X^2} D_x + \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} (XM+Q), \\
 E_+ &:= - + \sqrt{1-X^2} D_x + \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} (XQ+M), \\
 E_- &:= + \sqrt{1-X^2} D_x + \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} (XQ+M), \\
 F_+ &:= + \frac{(1+X)\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}} D_x + \frac{1}{\sqrt{2(1-X)}} (XJ - (J-M-Q)), \\
 F_- &:= - \frac{(1+X)\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}} D_x + \frac{1}{\sqrt{2(1-X)}} (X(J+1) - (J+1-M-Q)),
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Todos estos operadores actúan en el espacio de  $\{\mathcal{J}_j^{m,q}\}$  con  $j, m, q$  enteros o semientero y que cumplen  $j \geq |m|, |q|$ . La forma explícita de su acción es

$$\begin{aligned}
B_+ \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j+m)(j-q)} \mathcal{J}_{j-1/2}^{m-1/2, q+1/2}(x), \\
B_- \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(l+m+1)(l-q+1)} \mathcal{J}_{j+1/2}^{m+1/2, q-1/2}(x), \\
C_+ \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j+m+1)(j+q+1)} \mathcal{J}_{j+1/2}^{m+1/2, q+1/2}(x), \\
C_- \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j+m)(j+q)} \mathcal{J}_{j-1/2}^{m-1/2, q-1/2}(x), \\
D_+ \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \mathcal{J}_j^{m+1, q}(x), \\
D_- \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \mathcal{J}_j^{m-1, q}(x), \\
E_+ \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j-q)(j+q+1)} \mathcal{J}_j^{m, q+1}(x), \\
E_- \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j+q)(j-q+1)} \mathcal{J}_j^{m, q-1}(x), \\
F_+ \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j-m)(j-q)} \mathcal{J}_{j-1/2}^{m+1/2, q+1/2}(x), \\
F_- \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j-m+1)(j-q+1)} \mathcal{J}_{j+1/2}^{m-1/2, q-1/2}(x).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Estos operadores cumplen los mismos conmutadores que los vistos para las funciones hipergeométricas luego las funciones algebraicas de Jacobi cumplen el mismo algebra de Lie que el estudiado en el caso anterior ( $su(2, 2)$ ).

A través de la definición de productor escalar unitario de las AFJ se ha conseguido un álgebra unitaria, luego estos nuevos operadores además cumplen la propiedad:

$$A_{\pm}^{\dagger} = A_{\mp}, \quad B_{\pm}^{\dagger} = B_{\mp}, \quad C_{\pm}^{\dagger} = C_{\mp}, \quad D_{\pm}^{\dagger} = D_{\mp}, \quad E_{\pm}^{\dagger} = E_{\mp}, \quad F_{\pm}^{\dagger} = F_{\mp},$$

y esto demuestra que los operadores tienen la propiedad de hermiticidad requerida para que la representación del grupo sea unitaria. Estos operadores cambian los valores de los parámetros en  $\pm 1/2$ , excepto los  $D_{\pm}$  y los  $E_{\pm}$ . Los operadores que cambian los parámetros en  $\pm 1/2$  son los operadores que en la imagen cambian de plano, y a través de la Fig 4.2 es fácil ver que

$$\begin{aligned}
B_{\mp}(X, D_x, M, Q) &= C_{\pm}(-X, -D_x, M, -Q), \\
A_{\mp}(X, D_x, M, Q) &= C_{\pm}(-X, -D_x, -M, Q), \\
F_{\mp}(X, D_x, M, Q) &= -C_{\pm}(X, D_x, -M, -Q).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Podemos construir los diferentes Casimires para estos operadores de la forma que se ha venido haciendo en toda la memoria. El Casimir cuadrático de  $su(2, 2)$  que involucra

todos los operadores tiene la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{su(2,2)} &= \frac{1}{2} (\{C_+, C_-\} + \{F_+, F_-\} - \{A_+, A_-\} - \{B_+, B_-\} - \{D_+, D_-\} - \{E_+, E_-\}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 + D_3^2 + E_3^2 + F_3^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\{A_+, A_-\} + \{B_+, B_-\} - \{C_+, C_-\} - \{D_+, D_-\} - \{E_+, E_-\} - \{F_+, F_-\}) \\
 &\quad + 2J(J+1) + M^2 + Q^2 + \frac{1}{2} \\
 &\equiv -\frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Luego los AFJ soportan una representación unitaria del grupo  $SU(2, 2)$  con valor  $-3/2$  de  $\mathcal{C}_{su(2,2)}$  como se observa en Fig 4.3 . Además, como se ha visto a lo largo de las secciones anteriores, con el Casimir de cualquier subálgebra o de los productos de operadores escalera se recuperan las ecuaciones de los AFJ.

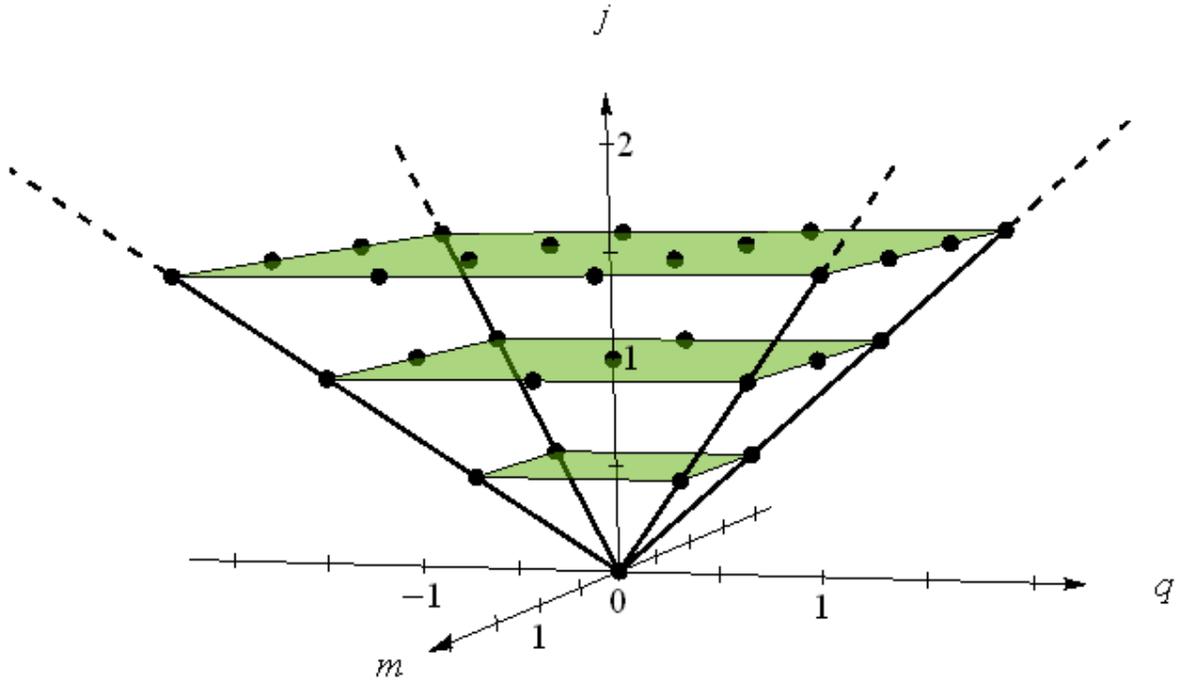


Figura 4.3: Representación irreducible del grupo  $SU(2, 2)$  soportada por los AFJ  $\mathcal{J}_l^{m,q}(x)$ , los planos horizontales corresponden a la representación irreducible de  $su_D(2) \oplus su_E(2)$ .

## 4.7. Simetrías en el índice $j$

En la sección anterior se han deducido las simetrías de los polinomios algebraicos de Jacobi  $\mathcal{J}_j^{m,q}(x)$  donde los operadores  $D_\pm$  ( $E_\pm$ ) cambiaban solo los índices  $m$  ( $q$ ) en  $\pm 1$ , permaneciendo invariante el resto de índices.

Los otros operadores del álgebra cambian todo los índices  $(j, m, q)$  por una cantidad semientera. Los valores enteros o semienteros de  $(j, m, q)$  están relacionados con una única UIR del  $SU(2, 2)$ .

Podemos construir nuevos pares de operadores componiendo la acción de dos operadores  $X_\pm$ , nosotros vamos a construir dos operadores que lo que hacen es cambiar  $(j, m, q)$  a  $(j \pm 1, m, q)$ . Componiendo  $F_\mp C_\pm$  (equivalentemente,  $C_\mp F_\pm$ ,  $D_\pm E_\pm$  o  $E_\pm D_\pm$ ) aparecen nuevos operadores. Estos nuevos operadores son en general operadores diferenciales de segundo orden, porque aparecen al componer dos operadores de primer orden.

Como se dijo antes los  $\mathcal{J}_j^{m,q}$  tienen  $j \geq |m|$  y  $j \geq |q|$ , pero ahora tenemos que considerar por separado valores específicos de  $m$  y  $q$ .

Para comenzar vamos a empezar con los estados que  $j \geq |m| > |q|$ . De (4.31) deducimos los dos operadores hermíticos de la forma:

$$K_+ := F_- C_+ \frac{1}{\sqrt{(J+1)^2 - Q^2}}, \quad K_- := F_+ C_- \frac{1}{\sqrt{J^2 - Q^2}} \quad (4.33)$$

y podemos escribir el efecto de esto sobre AJF como

$$K_+ := \left( -(1 - X^2) D_x + X(J+1) + \frac{MQ}{J+1} \right) \frac{J+1}{\sqrt{(J+1)^2 - Q^2}}, \quad (4.34)$$

$$K_- := \left( (1 - X^2) D_x + XJ + \frac{MQ}{J} \right) \frac{J}{\sqrt{J^2 - Q^2}}. \quad (4.35)$$

Vemos que la acción de estos operadores no depende del valor de  $q$ :

$$\begin{aligned} K_+ \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{(j+1)^2 - m^2} \mathcal{J}_{j+1}^{m,q}(x), \\ K_- \mathcal{J}_j^{m,q}(x) &= \sqrt{j^2 - m^2} \mathcal{J}_{j-1}^{m,q}(x), \end{aligned} \quad (4.36)$$

y  $K_\pm$  junto con  $K_3 := J + 1/2$  cierran un álgebra de Lie  $su(1, 1)$

$$[K_+, K_-] = -2K_3, \quad [K_3, K_\pm] = \pm K_\pm$$

además se ve que  $\mathcal{J}_j^{m,q}$  con  $m$  y  $q$  fijos y  $j \geq |m| > |q|$  son una base de UIR de  $su(1, 1)$  con Casimir

$$\mathcal{C} = m^2 - 1/4.$$

Para los estados con  $|m| < |q|$  el proceso es análogo: solo tenemos que intercambiar  $M \Leftrightarrow Q$  en  $K_\pm$ .

El problema es más complejo cuando  $|m| = |q|$  porque la acción de  $K_-$  no está bien definida en la eq.(4.35) para  $j = |m| = |q|$ .

Para extender esta definición a este caso nosotros tenemos no sólo que considerar los valores de  $M$  y  $Q$  pero su límite i.e.

$$K_- := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \left( (1 - X^2) D_x + X J + \frac{(M + \epsilon)(Q + \epsilon)}{J} \right) \frac{J}{\sqrt{J^2 - (Q + \epsilon)^2}} \right].$$

De esta manera la acción de  $K_-$  no cambia para  $j = |m| = |q|$ . En conclusión, todos  $\mathcal{J}_j^{m,q}$  cierran, para un  $m$  y  $q$  fijo, una UIR de  $SU(1, 1)$ .

Si  $|m| \geq |q|$  nosotros tenemos eqs. (4.36) con  $j = |m|, |m| + 1, |m| + 2 \dots$  y un Casimir invariante  $\mathcal{C} = m^2 - 1/4$  mientras, para  $|m| < |q|$ , tenemos que intercambiar  $q$  y  $m$ .

Hay que tener en cuenta que, a diferencia de la UIR de  $SU(2, 2)$ , cada representación de  $SU(1, 1)$  contiene sólo los estados con un número entero o semientero de índices. Esto tiene especial relevancia en las simetrías físicas, pues indica que no se puede mezclar índices enteros y semienteros de spin, es decir fermiones y bosones.

Este  $SU(1, 1)$  no puede, en general, ampliarse a grupos más grandes porque sus operadores no se pueden combinar con otros operadores para construir un álgebra más grande, pero hay algunas excepciones. De hecho, cuando  $q = 0$ , es decir, sobre los  $\mathcal{J}_j^{m,0}$  con  $j, m \in \mathbb{Z}$  y  $j \geq |m|$ , podemos definir no sólo el  $\{K_\pm, K_3\}$ , sino también el  $\{A_\pm, A_3\}$  y por lo tanto todo el álgebra de  $so(3, 2)$ .

Debido a la simetría  $m \Leftrightarrow q$  tenemos un  $SO(3, 2)$  también para  $m = 0$  es decir, en el  $\{\mathcal{J}_j^{0,q}\}$ . También los estados "fermiónicos"  $\{\mathcal{J}_j^{m,\pm 1/2}\}$  y  $\{\mathcal{J}_j^{\pm 1/2,q}\}$  están relacionados con la misma álgebra  $SO(3, 2)$ .

## 4.8. Funciones- $L^2$ y $\mathcal{J}_j^{m,q}(x)$

La fórmulas (4.21) y (4.22) donde  $m$  y  $q$  son fijos permiten introducir  $j$  y  $x$  como variables conjugadas en el mismo espacio de Hilbert. Se va a comenzar discutiendo el caso en el que se fijan  $m$  y  $q$  que es la que caracteriza la UIR de  $su(1, 1)$  y el espacio de Hilbert que soportan.

Los operadores (4.36) en los  $\{\mathcal{J}_j^{m,q}(x)\}$  permiten definir, de una forma abstracta, para unos  $m$  y  $q$  fijos, la acción en el espacio de Hilbert construido en el espacio de vectores propios  $\{|j, (m, q)\rangle\}$  como

$$\begin{aligned} K_+ |j, (m, q)\rangle &= \sqrt{(j+1)^2 - m^2} |j+1, (m, q)\rangle, \\ K_- |j, (m, q)\rangle &= \sqrt{j^2 - m^2} |j-1, (m, q)\rangle. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Y  $\{|j, (m, q)\rangle\}$  es una base en el espacio de Hilbert i.e.

$$\langle j, (m, q) | j', (m, q) \rangle = \delta_{jj'}, \quad \sum_{j=\sup(|m|, |q|)}^{\infty} |j, (m, q)\rangle \langle j, (m, q)| = \mathcal{I}. \quad (4.38)$$

Estos permiten definir los

$$|x, (m, q)\rangle := \sum_{j=\sup(|m|, |q|)}^{\infty} |j, (m, q)\rangle \sqrt{j+1/2} \mathcal{J}_j^{m,q}(x) \quad (4.39)$$

donde los vectores  $\{|x, (m, q)\rangle\}$  son una base en el espacio de configuraciones  $\mathbb{E} = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ , i.e,

$$\langle x, (m, q) | x', (m, q) \rangle = \delta(x - x'), \quad \int_{-1}^{+1} |x, (m, q)\rangle dx \langle x, (m, q)| = \mathcal{I}.$$

Esto implica que los  $\{\mathcal{J}_j^{m,q}(x)\}$  son las matrices de transición entre ambas bases:

$$\mathcal{J}_j^{m,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{j+1/2}} \langle x, (m, q) | j, (m, q) \rangle = \frac{1}{\sqrt{j+1/2}} \langle j, (m, q) | x, (m, q) \rangle$$

y

$$|j, (m, q)\rangle = \int_{-1}^{+1} |x, (m, q)\rangle \sqrt{j+1/2} \mathcal{J}_j^{m,q}(x) dx. \quad (4.40)$$

Los  $m$  y  $q$  son parámetros invariantes en esta representación, y solo las variables conjugadas  $j$  y  $x$  (una discreta y una continua) están presentes.

Consideramos ahora el caso de tres variables, en relación con el grupo  $SU(2, 2)$  en tanto  $m$  y  $q$  son modificados por el álgebra.

El espacio de Hilbert es ahora  $\mathbb{E} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ , donde  $\mathbb{E}$  es de nuevo  $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}/2 := \{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \dots\}$  pues  $m$  y  $q$  son enteros y semienteros. El espacio  $\mathbb{E} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ , con bases  $\{|x, m, q\rangle\}$ , es la suma directa de los espacio de Hilbert  $\mathbb{E}_{m,q}$  con  $m$  y  $q$  fijos,

$$\mathbb{E} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2 = \bigcup_{m-q \in \mathbb{Z}} \bigcup_{q \in \mathbb{Z}/2} \mathbb{E}_{m,q}.$$

Las relaciones de ortonormalidad y completitud son ahora:

$$\langle x, m, q | x', m', q' \rangle = \delta(x - x') \delta_{mm'} \delta_{qq'}, \quad \sum_{m,q} \int_{-1}^{+1} |x, m, q\rangle dx \langle x, m, q| = \mathcal{I}.$$

Se puede definir en el espacio de Hilbert una nueva base  $\{|j, m, q\rangle\}$  con  $m, q \in \mathbb{Z}/2$ ,  $j \geq |m|$ ,  $j \geq |q|$ ,  $j - m \in \mathbb{N}$ ,  $j - q \in \mathbb{N}$  dada por

$$|j, m, q\rangle := \int_{-1}^{+1} |x, m, q\rangle \sqrt{j+1/2} \mathcal{J}_j^{m,q}(x) dx.$$

por eso

$$\langle j, m, q | j', m', q' \rangle = \delta_{j j'} \delta_{m m'} \delta_{q, q'}, \quad \sum_{j, m, q} |j, m, q\rangle \langle j, m, q| = \mathcal{I}.$$

Los  $\{\mathcal{J}_j^{m, q}(x)\}$  juegan de nuevo el papel de matrices de transición:

$$\mathcal{J}_j^{m, q}(x) = \frac{1}{\sqrt{j+1/2}} \langle x, m, q | j, m, q \rangle = \frac{1}{\sqrt{j+1/2}} \langle j, m, q | x, m, q \rangle.$$

Un vector arbitrario  $|f\rangle \in L^2(\mathbb{E}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$  puede ser expresado como

$$|f\rangle = \sum_{m, q=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{+1} dx |x, m, q\rangle f^{m, q}(x) = \sum_{m, q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=\text{sup}(|m|, |q|)}^{\infty} |j, m, q\rangle f_j^{m, q}$$

donde

$$\begin{aligned} f^{m, q}(x) &:= \langle x, m, q | f \rangle = \sum_{j=\text{sup}(|m|, |q|)}^{\infty} \sqrt{j+1/2} \mathcal{J}_j^{m, q}(x) f_j^{m, q}, \\ f_j^{m, q} &:= \langle j, m, q | f \rangle = \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{j+1/2} \mathcal{J}_j^{m, q}(x) f^{m, q}(x) \end{aligned}$$

y todas las funciones- $L^2$  definidas en  $(\mathbb{E}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$  pueden ser escritas como

$$\sum_{m, q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=\text{sup}(|m|, |q|)}^{\infty} \sqrt{j+1/2} \mathcal{J}_j^{m, q}(x) f_j^{m, q}. \quad (4.41)$$

Como el  $\{\mathcal{J}_j^{m, q}\}$  son una base de una UIR de  $SU(2, 2)$  y al mismo tiempo, una base de las funciones- $L^2$  definidas en  $(\mathbb{E}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$  de  $L^2(\mathbb{E}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$  entonces ambas pertenecen a la misma UIR de  $SU(2, 2)$ . Esto implica que cada cambio de base en el  $L^2(\mathbb{E}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$  se relaciona con un elemento  $\mathfrak{g}$  del grupo  $SU(2, 2)$  y que cada operador que actúa sobre el  $L^2(\mathbb{E}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$  se puede escribir dentro del recubrimiento universal Álgebra de  $su(2, 2)$ .

## 4.9. El Potencial de Rosen-Morse II.

Después de este estudio de las simetrías de los polinomios de Jacobi resulta interesante ver algunos casos donde los resultados anteriores puedan aplicarse. Vemos que el conocimiento de las simetrías facilita enormemente la resolución del problema. El potencial que se quiere analizar es el potencial de Rosen-Morse II, que tiene la forma:

$$\mathcal{V}(z) = -a(a+1) \text{sech}^2(z) + 2b \tanh(z) \quad (4.42)$$

La correspondiente ecuación de Schrödinger del sistema unidimensional queda de la

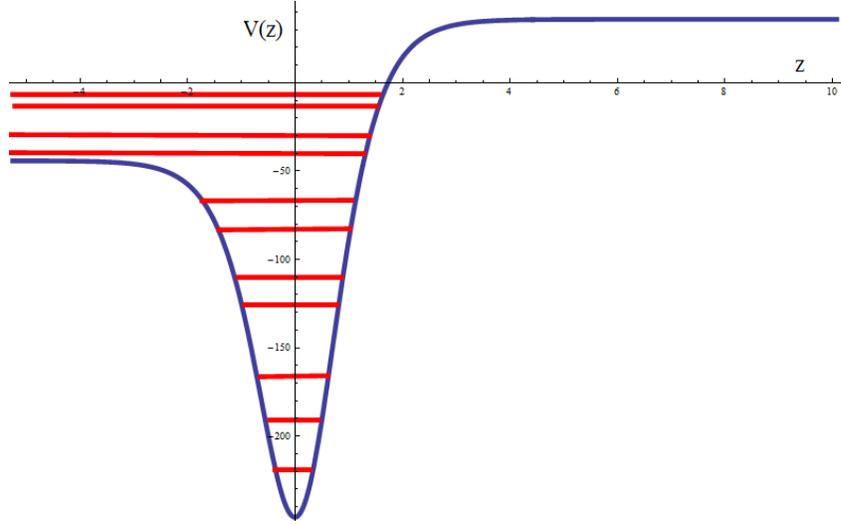


Figura 4.4: Potencial de Rosen Morse con parámetros  $b = 20$  y  $a = 15$ .

forma:

$$\frac{d^2 R(z)}{dz^2} + (-a(a+1) \operatorname{sech}^2(x) + 2b \tanh(x) - E) R(z) = 0. \quad (4.43)$$

donde  $E$  denota la energía del sistema. Se puede ver que es una ecuación con tres parámetros libres,  $a$ ,  $b$  y  $E$ . Tenemos un problema de Sturm-Liouville que en principio debe darnos como solución algunos polinomios ortogonales. Si realizamos un astuto cambio de variable dado por  $x = \tanh(z)$  la ecuación del potencial de Rosen-Morse II se transforma en:

$$(1-x^2) \frac{d^2 R(x)}{dx^2} - 2x \frac{dR(x)}{dx} + \left( \frac{2bx - E}{1-x^2} - a(a+1) \right) R(x) = 0. \quad (4.44)$$

Esta ecuación ya tiene una analogía muy clara con nuestra ecuación diferencial que cumplen las funciones algebraicas de Jacobi y por simple comparación podemos identificar los valores de nuestro potencial con las variables que hemos estado utilizando hasta ahora

$$a = j; \quad b = mq; \quad E = -m^2 - q^2 \quad (4.45)$$

Se puede entonces escribir la solución de este sistema como:

$$\mathcal{J}_j^{m,q}(x) := \sqrt{\frac{\Gamma(j+m+1)\Gamma(j-m+1)}{\Gamma(j+q+1)\Gamma(j-q+1)}} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{m+q}{2}} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{m-q}{2}} J_{j-m}^{(m+q, m-q)}(x), \quad (4.46)$$

Si reescribimos la solución en función de los parámetros iniciales del problema e incluimos el número cuántico  $n$  que se define como  $n = j - m$  las funciones de onda de este potencial son las funciones algebraicas de Jacobi de la forma:

$$\mathcal{J}_a^{a-n, b/(a-n)}(x). \quad (4.47)$$

La energía del sistema queda en función de estos parámetros como:

$$E = -\frac{b^2}{(a-n)^2} - (a-n)^2. \quad (4.48)$$

El número de niveles de energía de este sistema es finito, no podemos tener un número indefinido de  $n$ , pues sólo serán válidas aquellos que cumplan las condiciones  $a \geq |a-n|$  y  $|a-n| \in \mathbb{N}$ .

Luego el estudio anterior nos ha servido para resolver sin necesidad de calcular las soluciones analíticamente del potencial, además sirve para ver la simetría que posee el sistema anterior, que por analogía soporta un grupo de simetría  $SU(2, 2)$ .

Del mismo modo que hemos hecho con el potencial de Tremblay-Turbiner-Winternitz, podemos descomponer este Hamiltoniano en producto de operadores diferenciales de primer orden, que en este caso serán los operadores escalera de las funciones algebraicas de Jacobi. No obstante en este potencial están muy mezclados los parámetros  $n$ ,  $a$  y  $b$  en los números  $j$ ,  $m$  y  $q$  y el análisis del efecto de estos operadores sobre las funciones de onda se vuelve más complicado.

Los parámetros  $a$  y  $b$  están determinados por el potencial y son en teoría fijos en cada caso. Se ve que, por ejemplo, los operadores  $K_{\pm}$  lo que hacen es modificar el parámetro  $j$  en  $\pm 1$  quedando fijos los demás números cuánticos. La energía de este sistema depende de los números  $m$  y  $q$  pero no de  $j$ , luego si se hace actuar el operador  $K_{\pm}$  sobre la función de onda  $\psi_{a,b}^n(x)$  del Hamiltoniano  $H_{a,b}$  lo que hace es cambiar un estado propio del mismo a un estado propio de un sistema con Hamiltoniano  $H_{a\pm 1,b}$ , aunque no modifica la energía de éste.

# Capítulo 5

## Simetrías de las funciones hipergeométricas ${}_3F_2$

En los capítulos anteriores se ha realizado un estudio de las simetrías de las funciones hipergeométricas  ${}_1F_1 [a; c; x]$  y  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$  y estas se han relacionado con los polinomios ortogonales de Laguerre y Jacobi. A través de las primeras se han podido estudiar los grupos de simetría de estos polinomios ortogonales y hacer un estudio de estos como bases ortonormales de un espacio de Hilbert.

En este último capítulo se presentan algunos resultados parciales que se han obtenido al estudiar otras funciones hipergeométricas dentro de esquema de Askey. No se ha conseguido obtener del todo el álgebra de simetría de estas funciones hipergeométricas y por lo tanto se deja como un problema abierto que se espera solucionarlo en estudios posteriores.

### 5.1. El Esquema de Askey

El esquema de Askey surge en 1985 en un artículo de Labelle y posteriormente por Askey y Wilson en 1985, es una lista para clasificar los polinomios ortogonales en función de las funciones hipergeométricas. En ese esquema de Askey lo que se ha hecho es clasificar los diferentes polinomios ortogonales teniendo en cuenta cómo se pueden reescribir como función de las series hipergeométricas.

Los polinomios de Hermite, por ejemplo, aparecen como función de las  ${}_2F_0 [a_1, a_2; x]$ , los polinomios de Laguerre se escriben en función de los  ${}_1F_1 [a_1; b_1; x]$  y los polinomios de Jacobi aparecen en este estudio como función de las funciones hipergeométricas  ${}_2F_1 [a_1; a_2; b_1; x]$ , como es de todos bien conocido.

Todos los polinomios ortogonales clásicos más conocidos (Hermite, Legendre, Laguerre, Jacobi, Charlier ... ) se pueden reescribir en función de estas tres series hipergeométricas, no obstante, existen otros polinomios menos conocidos, como los de Hahn, que se reescriben como función de las funciones hipergeométricas  ${}_3F_2 [a_1; a_2; a_3; b_1, b_2; x]$ . Estas

funciones hipergeométricas están muy poco estudiadas y responden a un ecuación diferencial de orden tres, lo que explica que su utilidad en áreas de la física sea menor, pues las ecuaciones diferenciales con más aplicaciones responden a ecuaciones diferenciales de orden dos (la ecuación de Newton, la ecuación de Schrödinger,...).

### Askey Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polynomials

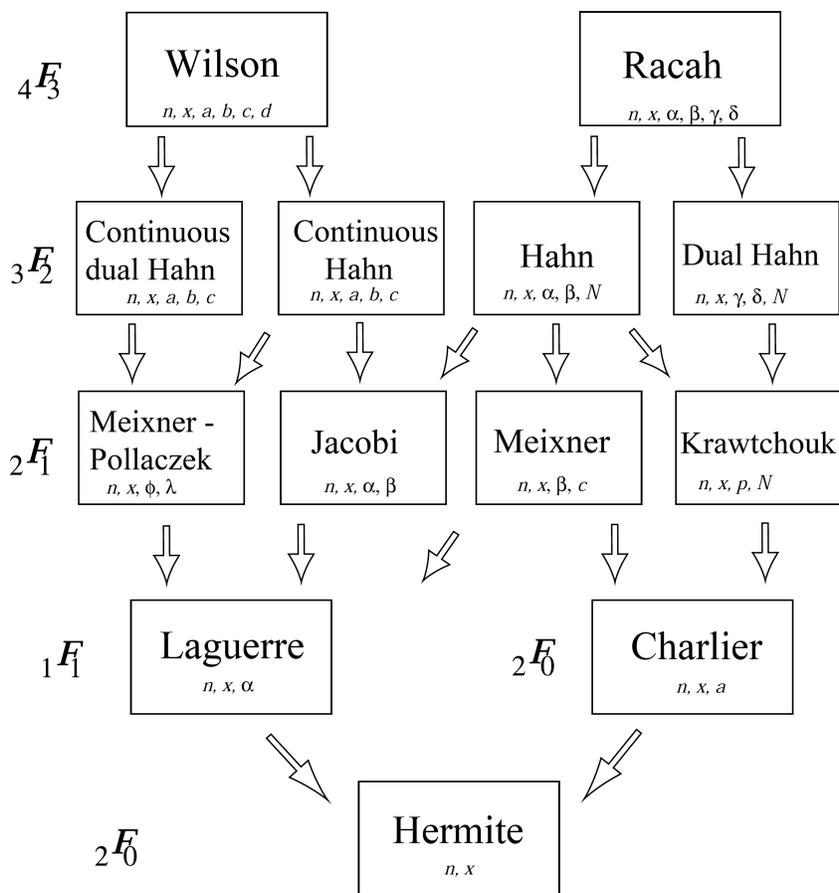


Figura 5.1: Esquema de Askey que relaciona las funciones hipergeométricas con los polinomios ortogonales.

Hasta ahora se ha realizado un estudio de las simetrías de las dos primeras funciones hipergeométricas que aparecen en el esquema de Askey (la función hipergeométricas  ${}_2F_1 [a_1; a_2 b_1; x]$  y la función hipergeométricas confluyente  ${}_1F_1 [a_1; b_1; x]$ ), estas dos funciones satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden, lo que hace que estén muy estudiadas, como ya hemos visto y aparecen en multitud campos, de la física, de las matemáticas, de la química, de la ingeniería,... etc . Las ecuaciones de segundo orden son de gran utilidad en física, pues la fuerza es una derivada segunda de la posición. Este hecho

origina que las ecuaciones diferenciales de segundo orden sean las más importantes desde el punto de vista físico.

Siguiendo el esquema anterior se ha intentado realizar un estudio de las simetrías del conjunto de funciones hipergeométricas  ${}_3F_2 [a_1; a_2; a_3 b_1, b_2; x]$ . Estas funciones hipergeométricas ya no verifican una ecuación diferencial de segundo orden, sino que cumple una ecuación diferencial de orden tres. Este hecho hace, como ya hemos indicado, que estas funciones hipergeométricas no estén tan estudiadas como las anteriores, pues su utilidad práctica es mucho más reducida. No obstante las ecuaciones de orden tres también aparecen en algunos ámbitos de la física como por ejemplo cuando se estudia la interacción electromagnética del electrón con su propio campo.

El hecho de que la ecuación diferencial de estos objetos sea de orden tres tiene algunas consecuencias cuando se estudian sus simetrías, en este caso ahora los operadores de simetría no van a ser únicamente operadores diferenciales de orden uno, sino que van a aparecer operadores diferenciales de orden dos.

## 5.2. Las funciones hipergeométricas ${}_3F_2 [a_1; a_2; a_3 b_1, b_2; x]$

Se definen las funciones hipergeométricas  ${}_3F_2 [a_1; a_2; a_3 b_1, b_2; x]$  como

$${}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n x^n}{(b_1)_n (b_2)_n n!} \quad (5.1)$$

también se puede escribir equivalentemente como

$${}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] = \frac{\Gamma(b_1) \Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \Gamma(a_3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + n) \Gamma(a_2 + n) \Gamma(a_3 + n) x^n}{\Gamma(b_1 + n) \Gamma(b_2 + n) n!}.$$

El radio de convergencia de estos polinomios viene dado por  $x \leq |1|$ , luego es analítica en el interior del disco unidad.

Estas funciones tienen una clara propiedad de simetría cuando se intercambian sus variables  $a_i$  o  $b_j$  entre ellos:

$$\begin{aligned} {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= {}_3F_2 [a_2, a_1, a_3; b_1, b_2; x], \\ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= {}_3F_2 [a_3, a_2, a_1; b_1, b_2; x], \\ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= {}_3F_2 [a_1, a_3, a_2; b_1, b_2; x], \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= {}_3F_2 [a_3, a_1, a_2; b_1, b_2; x], \\ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= {}_3F_2 [a_2, a_3, a_1; b_1, b_2; x], \end{aligned}$$

$${}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] = {}_3F_2 [a_2, a_1, a_3; b_2, b_1; x]. \quad (5.3)$$

La ecuación diferencial de orden tres que satisfacen estas funciones es

$$\begin{aligned} & [x^2(1-x)\frac{d^3}{dx^3} + x(x(3+a_1+a_2+a_3) - b_1 - b_2 - 1)\frac{d^2}{dx^2} \\ & + (x(1+a_1+a_2+a_3 + a_2a_3 + a_1a_2 + a_1a_3) - b_1b_2)\frac{d}{dx} + a_1a_2a_3] {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] = 0. \end{aligned}$$

La simetría anterior de intercambio  $a_i \Leftrightarrow a_j$  y  $b_1 \Leftrightarrow b_2$  se ve evidente en la ecuación diferencial anterior, pues si se intercambian los índices la ecuación diferencial permanece invariante. Para el conjunto de estas funciones  $\{{}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]\}$  definimos los cinco operadores diagonales  $A_1, A_2, A_3, B_1$  y  $B_2$  que actúan de la forma:

$$\begin{aligned} A_1 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= a_1 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x], \\ A_2 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= a_2 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x], \\ A_3 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= a_3 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x], \\ B_1 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= b_1 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x], \\ B_2 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= b_2 {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x], \end{aligned} \tag{5.4}$$

estos serán los operadores diagonales para estas funciones que tienen cinco índices ( $a_1, a_2, a_3, b_1$  y  $b_2$ ) y por lo tanto pertenecerán a la Subálgebra de Cartan del álgebra de simetrías.

### 5.3. Operadores con acción $\Delta a_i = \pm$

Estas funciones tienen en total cinco variables, luego el número de operadores escalera crece sustancialmente respecto a los casos anteriores. Vamos a comenzar a estudiar el operador que solo cambia el valor de  $a_1$ , por la simetría de intercambio  $a_i \Leftrightarrow a_j$  se ve que generalizar esto para el caso  $a_2$  y  $a_3$  es muy simple. Para ello definimos los operadores:

$$\begin{aligned} A_1^+ &:= X D_x + A_1, \\ A_1^- &:= X^2 (X - 1) D_{xx} + X (A_1 - B_1 - B_2 + (1 + A_2 + A_3) X) D_x \\ &\quad - (A_2 A_3 X - (A_1 - B_1)(A_1 - B_2)) \end{aligned} \tag{5.5}$$

que actúan sobre las funciones hipergeométricas como  ${}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]$  de la forma

$$\begin{aligned} A_1^+ {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= a_1 {}_3F_2[a_1 + 1, a_2, a_3; b_1, b_2; x], \\ A_1^- {}_3F_2[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= -(a_1 - b_1)(a_1 - b_2) {}_3F_2[a_1 - 1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Podemos definir para estos operadores el operador  $A_1^3 = \frac{1}{2}((b_1 - 2a_1)(b_2 - 2a_1) - a_1(a_1 - 1))$  de forma que se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} [A_1^+, A_1^+] &= 2A_1^3 & [A_1^3, A_1^+] &= (2 + 3A_1 - B_1 - B_2) A_1^+ \\ [A_1^3, A_1^-] &= (-1 + 3A_1 - B_1 - B_2) A_1^+ \end{aligned} \tag{5.7}$$

Vemos aquí que si se define este operador no se cumple una relación clara de conmutación que podamos asociar a un grupo de simetría. Se ha intentado normalizar estos factores pero no se ha conseguido hacer por el momento.

Para los otros cuatro operadores que modifican en  $\pm 1$  los parámetros  $a_2$  y  $a_3$  se tienen los operadores

$$\begin{aligned}
A_2^+ &:= X D_x + A_2, \\
A_2^- &:= X^2 (X - 1) D_{xx} + X (A_2 - B_1 - B_2 + (1 + A_1 + A_3) X) D_x \\
&\quad - (A_1 A_3 X - (A_2 - B_1) (A_2 - B_2)), \\
A_3^+ &:= X D_x + A_3, \\
A_3^- &:= X^2 (X - 1) D_{xx} + X (A_3 - B_1 - B_2 + (1 + A_2 + A_1) X) D_x \\
&\quad - (A_2 A_1 X - (A_3 - B_1) (A_3 - B_2)).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

El efecto sobre las funciones hipergeométricas  ${}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]$  es

$$\begin{aligned}
A_2^+ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= a_2 {}_3F_2 [a_1, a_2 + 1, a_3; b_1, b_2; x], \\
A_2^- {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= - (a_2 - b_1) (a_2 - b_2) {}_3F_2 [a_1, a_2 - 1, a_3; b_1, b_2; x], \\
A_3^+ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= a_3 {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3 + 1; b_1, b_2; x], \\
A_3^- {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= - (a_3 - b_1) (a_3 - b_2) {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3 - 1; b_1, b_2; x].
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Las relaciones de conmutación son iguales que las de los operadores  $A_1^\pm$  si se tiene en cuenta la relación de simetría respecto a estos índices

$$\begin{aligned}
[A_2^+, A_2^-] &= 2A_2^3 & [A_2^3, A_2^+] &= (2 + 3A_2 - B_1 - B_2) A_2^+ \\
[A_2^3, A_2^-] &= (-1 + 3A_2 - B_1 - B_2) A_2^+ \\
[A_3^+, A_3^-] &= 2A_3^3 & [A_3^3, A_3^+] &= (2 + 3A_3 - B_1 - B_2) A_3^+ \\
[A_3^3, A_3^-] &= (-1 + 3A_3 - B_1 - B_2) A_3^+
\end{aligned} \tag{5.10}$$

con  $A_2^3$  y  $A_3^3$  de la forma

$$\begin{aligned}
A_2^3 &= \frac{1}{2} ((B_1 - 2A_2) (B_2 - 2A_1) - A_2 (A_2 - 1)) \\
A_3^3 &= \frac{1}{2} ((B_1 - 2A_3) (b_2 - 2A_3) - A_3 (A_1 - 1))
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Hay que notar que el operador que sube una unidad estos índices  $a_i$  es un operador diferencial de orden uno, y los operadores diferenciales que bajan una unidad al índice  $a_i$  tiene un orden dos. Esto es debido a que la ecuación diferencial de estos objetos es de orden tres y por lo tanto si se quiere construir el Casimir como producto de dos operadores

escaleras uno tiene que ser de orden uno y el otro de orden dos. No obstante, a pesar de conseguir unos operadores de subida y de bajada de las funciones hipergeométricas  ${}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x]$ , no se ha conseguido cerrar el álgebra de simetría que soportan estos objetos.

## 5.4. Operadores con acción $\Delta b_i = \pm 1$

De la misma forma que se ha conseguido hacer con los índices  $a_i$  se puede construir unos operadores que suban o bajen los parámetros  $b_i$  y dejen los otros sin alterar.

Los operadores escalera que suben o bajan en una unidad los  $b_i$  tienen la forma

$$\begin{aligned} B_2^+ &:= X (X - 1) D_{xx} + X (-B_2 + (1 + A_1 + A_2 + A_3 - B_1) X) D_x \\ &\quad - (A_1 (A_2 + A_3 - B_1) + (A_2 - B_1) (A_3 - B_1)), \\ B_1^+ &:= X D_x + (B_1 - 1), \\ B_2^- &:= X (X - 1) D_{xx} + X (-B_1 + (1 + A_1 + A_2 + A_3 - B_2) X) D_x \\ &\quad - (A_1 (A_2 + A_3 - B_2) + (A_2 - B_2) (A_3 - B_2)), \\ B_2^+ &:= X D_x + (B_2 - 1), \end{aligned} \tag{5.12}$$

y actúan sobre las funciones de la forma

$$\begin{aligned} B_1^+ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= \frac{(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)(b_1 - a_3)}{b_1} {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1 + 1, b_2; x], \\ B_1^- {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= (b_1 - 1) {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1 - 1, b_2; x], \\ B_2^+ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= \frac{(b_2 - a_1)(b_2 - a_2)(b_2 - a_3)}{b_1} {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2 + 1; x], \\ B_2^- {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] &= (b_2 - 1) {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2 - 1; x]. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Si definimos ahora los  $B_1^3$  y  $B_2^3$  como

$$\begin{aligned} B_1^3 &= \frac{1}{2} (1 + A_1 + A_2 + A_1 A_2 + A_3 + A_1 A_3 + A_2 A_3 - 3B_1 - 2(A_1 + A_2 + A_3) B_1 + 3B_1^2), \\ B_1^3 &= \frac{1}{2} (1 + A_1 + A_2 + A_1 A_2 + A_3 + A_1 A_3 + A_2 A_3 - 3B_2 - 2(A_1 + A_2 + A_3) B_2 + 3B_2^2) \end{aligned}$$

que cumplen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [B_1^+, B_1^-] &= -2 B_1^3, \\ [B_1^3, B_1^+] &= (3B_1 - A_1 - A_2 - A_3 - 3) B_1^+, & [B_1^3, B_1^-] &= -(3B_1 - A_1 - A_2 - A_3) B_1^-, \\ [B_2^+, B_2^-] &= 2B_2^3, \\ [B_2^3, B_2^+] &= (3B_2 - A_1 - A_2 - A_3 - 3) B_2^+, & [B_2^3, B_2^-] &= -(3B_2 - A_1 - A_2 - A_3) B_2^-. \end{aligned}$$

Obtenemos de nuevo unas relaciones de conmutación que no podemos asociar por el momento a un grupo de simetría concreto.

Por último podemos hacer un estudio de los operadores que al mismo tiempo suben o bajan todos los operadores en  $\pm 1$ , estos vienen dados por

$$\begin{aligned} T_+ &:= D_x, \\ T_- &:= \left( (-1 + X) X^2 \right) D_{xx} + X \left( 1 - B_1 - B_2 + (A_1 + A_2 + A_3) X \right) D_x \\ &\quad + \left( (- (B_1 - 1) (B_2 - 1) + (1 - A_2 - A_3 + A_2 A_3 + A_1 (-1 + A_2 + A_3)) x) \right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

que actúan sobre las funciones hipergeométricas como

$$T_+ {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] = \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2} {}_3F_2 [a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1; b_1 + 1, b_2 + 1; x],$$

$$T_- {}_3F_2 [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x] = - {}_3F_2 [a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 - 1; b_1 - 1, b_2 - 1; x]$$

que cumplen las relaciones de conmutación

$$[T_+, T_-] = 2T_3,$$

$$[T_3, T_+] = (A_1 + A_2 + A_3) T_+, \quad [T_3, T_-] = -(-3 + A_1 + A_2 + A_3) T_-,$$

con  $T_3 = (-1 + A_1 A_2 - A_1 A_2 + A_3 - (A_1 + A_2) A_3)/2$ .

Como vemos aparecen operadores y constantes de estructura en los conmutadores muy complejos y con muchos términos lo que hace complicado su tratamiento. Por el momento no se ha conseguido ver con claridad los grupos de simetría que soportan estos objetos y se queda como problema abierto. Se plantea como modo de abordarlo intentar incluir ciertas constantes de estructura en los operadores ya que la diferencia en todos ellos es la misma o redefinir los operadores escalera para tener de manera directa una relaciones de conmutación que nos indiquen de forma clara el grupo de simetría de estas funciones. Además sólo se han encontrado doce operadores escalera y se espera que existan muchos más (del orden de 35) como los que suben/bajan todos los  $a_i$  y dejan invariantes los  $b_i, \dots$ . Este problema queda abierto para un futuro inmediato.



# Conclusiones.

Los principales resultados de este trabajo los podemos enumerar como sigue

1. Se ha estudiado las funciones hipergeométricas confluentes  ${}_1F_1 [a; c; x]$  obteniéndose:
  - a) Un conjunto de ocho operadores diferenciales escalera que cierran el álgebra  $su(1, 1) \otimes (h(1) \otimes h(1))$ .
  - b) Teniendo en cuenta la relación entre las funciones  ${}_1F_1 [a; c; x]$  y las funciones algebraicas de Laguerre se trasladó la representación obtenida para las funciones hipergeométricas confluentes obteniéndose una IUR del grupo  $SU(1, 1) \otimes (H(1) \otimes H(1))$  soportada por las funciones algebraicas de Laguerre.
  - c) Se recuperan los resultados obtenidos por Celeghini y del Olmo en 2014.
2. Se ha estudiado las funciones hipergeométricas gaussianas  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$  encontrándose que:
  - a) Las funciones  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$  tiene como álgebra de simetría el álgebra de Lie simple de rango 2 y dimensión quince:  $su(2, 2)$ .
  - b) La conocida relación entre las funciones  ${}_2F_1 [a, b; c; x]$  y los polinomios de Jacobi nos permiten relacionar las funciones hipergeométricas con las funciones algebraicas de Jacobi. De este modo obtenemos una representación irreducible unitaria del grupo  $SU(2, 2)$
  - c) Se han recuperados los resultados obtenidos en 2013 por Celeghini y del Olmo para las funciones algebraicas de Jacobi.
3. Se ha aplicado estos resultados a dos potenciales cuánticos mostrando como el conocimiento previo de las simetrías de los polinomios ortogonales que aparecen en su solución simplifican el problema.
4. Se ha iniciado el estudio de las funciones hipergeométricas  ${}_3F_2 [a, b, c; d, e; x]$  que están relacionadas según el esquema de Askey con los polinomios de Hann y asociados habiéndose obtenido resultados parciales muy interesantes:
  - a) Se han identificado varios operadores para las funciones  ${}_3F_2 [a, b, c; d, e; x]$  pero no hemos encontrado el álgebra de simetría completa que se espera que sea de

rango cinco y de una dimensión del orden de 35, lo que da idea de la magnitud del problema aún por resolver completamente.

- b)* Algunos operadores diferenciales obtenidos son de orden dos, en vez de orden uno como suele ser normalmente. Sin embargo en todos los casos, aplicando la ecuación diferencial de las funciones  ${}_3F_2 [a, b, c; d, e; x]$ , que es de grado tres, obtenemos un álgebra de dimensión finita.
- c)* Este caso es un ejemplo nuevo de representaciones y operadores de simetría que tienen sólo sentido restringidos a un espacio soporte de funciones.
- d)* Este resultado nos adentra en un nuevo escenario en el universo de las representaciones de grupos y álgebras de Lie que estamos comenzando a explorar.

# Bibliografía

- [1] E. Schrödinger, Proc. R. Ir. Acad. A 46 (1940) 183; Proc. R. Ir. Acad. A 47 (1941) 53.
- [2] L. Infeld, T.E. Hull, Rev. Modern Phys. 23 (1951) 21.
- [3] D. Fernández, J. Negro, M.A. del Olmo, “Group approach to the factorization of the radial oscillator equation”, *Ann. Phys.*, **252** (1996) 386.
- [4] J.A. Calzada, J. Negro, M.A. del Olmo, “Superintegrable quantum  $u(3)$ -systems and higher rank factorizations”, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 043511-1/17.
- [5] J.A. Calzada, S. Kuru, J. Negro, M.A. del Olmo, “Intertwining symmetry algebras of quantum superintegrable systems on the hyperboloyd” *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 255201 (12 pp.).
- [6] J. A. Calzada, J. Negro, M. A. del Olmo, “Symmetry Algebras of Quantum Superintegrable Systems”, *SIGMA* **5** 039, 23 pages (2009).
- [7] J.A. Calzada, S. Kuru, J. Negro, M.A. del Olmo, “Dynamical algebras of general two-parametric Pöschl–Teller Hamiltonians” *Ann. Phys.* **327**, (2012) 808–822.
- [8] E. Celeghini, J.A. Calzada, S. Kuru, J. Negro, M.A. del Olmo, “A unified approach to quantum and classical TTW systems based on factorizations” *Ann. Phys.* **332** (2013) 27–37.
- [9] David E. Alvarez Castillo, “Exactly Solvable Potentials and Romanovski Polynomials in Quantum Mechanics”, arXiv:0808.1642v2 [math-ph].
- [10] E.P. Wigner, *The Application of Group Theory to the Special Functions of Mathematical Physics*, in: Princeton Lectures, 1955.
- [11] J.D. Talman, *Special Functions: A Group Theoretic Approach*, Benjamin, New York, 1968.
- [12] W. Miller, *Lie Theory and Special Functions*, Academic Press, New York, 1968.
- [13] W. Miller, *Symmetry groups and their applications*, Academic Press, New York, 1972.

- [14] W. Miller, *Symmetry and Separation of Variables* Addison-Wesley, Reading, 1977
- [15] N. Ja. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations*, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
- [16] N. Ja. Vilenkin, A.U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions*, vols. 1, 2 and 3, Kluwer, Dordrecht, 1991 (1993 and 1992).
- [17] N. Ja. Vilenkin, A.U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions: Recent Advances*, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [18] G. Heckman, H. Schlichtkrull, *Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1994.
- [19] R. Koekoek, P.A. Lesky, R.F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their  $q$ -Analogues*, Springer, Berlin, 2010 y otras referencias aquí citadas.
- [20] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [21] E. Celeghini, M.A. del Olmo, Algebraic special functions and  $SO(3, 2)$ , *Ann. Phys.* **333** (2013) 90.
- [22] E. Celeghini, M.A. del Olmo, Coherent orthogonal polynomials, *Ann. Phys.* **335** (2013) 78.
- [23] M. Berry, Why are special functions special?, *Phys. Today* **54** (4) (2001) 11.
- [24] F.Tremblay, A.V. Turbiner, P. Winternitz, *J. Phys. A* 42 (2009) 242001.
- [25] M. Gadella and L.M Nieto, *Métodos Matemáticos para la Ciencia y la Ingeniería*, Universidad de Valladolid.
- [26] G. Lauricella, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **7** (1893) 111.
- [27] J A Calzada, E Celeghini, M A del Olmo and M A Velasco, *Journal of physics conference series*, 343 012029 .
- [28] R P Martínez-y-Romero, H N Núñez-Yépez and A L Salas-Brito *An  $su(1, 1)$  algebraic method for the hydrogen*, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38 (2005) 85798588 .
- [29] E. Celeghini, M.A. del Olmo, M.A. Velasco, 2014 arXiv:1504.01572 .
- [30] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge Univ. Press, New York, 2010.
- [31] Y.L. Luke, *The Special Functions and Their Approximations* Vol.1, Academic Press, San Diego, 1969 (pp. 275–276).

- [32] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, San Diego, 1972.
- [33] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, Singapore (1985).