



**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Título del Trabajo**

**PARTNERS SUPERSIMÉTRICOS DE LAS EXTENSIONES AUTOADJUNTAS  
DEL OPERADOR ENERGÍA CINÉTICA EN EL POZO INFINITO DE UNA  
DIMENSIÓN**

***Autor:***

*José Hernández Muñoz*

***Tutor/es:***

*Manuel Gadella Urquiza*



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Formalismo matemático</b>	<b>2</b>
2.1. Introducción . . . . .	2
2.2. Operadores no acotados . . . . .	3
2.3. Operadores cerrados . . . . .	4
2.4. El operador adjunto . . . . .	5
<b>3. Operadores simétricos</b>	<b>6</b>
3.1. Indices de deficiencia y teorema de Von Neumann . . . . .	7
3.1.1. Ejemplos . . . . .	9
<b>4. Estudio de la parametrización de las extensiones autoadjuntas del operador energía cinética en el pozo unidimensional infinito</b>	<b>11</b>
4.1. Introducción . . . . .	11
4.2. Aplicación del formalismo matemático al Hamiltoniano del pozo infinito unidimensional . . . . .	12
4.3. Calculo del espectro . . . . .	13
4.4. Significado de los parámetros . . . . .	14
4.4.1. Extensiones preservando la reversibilidad temporal . . . . .	14
4.4.2. Extensiones preservando paridad . . . . .	14
<b>5. Introducción a la Supersimetría</b>	<b>15</b>
5.1. Introducción . . . . .	15
5.2. Factorización del Hamiltoniano y el Superpotencial . . . . .	15
5.3. Compañeros Potenciales . . . . .	16
5.4. Degeneración de los niveles de energía . . . . .	16
5.5. Hamiltoniano Supersimétrico . . . . .	17
5.6. Funciones de onda del estado fundamental . . . . .	18
5.7. Supersimetría rota . . . . .	19
<b>6. Cálculo de los estados fundamentales</b>	<b>22</b>
6.1. Introducción . . . . .	22
6.2. Restricciones . . . . .	23
6.3. Calculo de los estados fundamentales . . . . .	23
6.3.1. Energías positivas . . . . .	23
6.3.2. Energías negativas . . . . .	25
<b>7. Superpotenciales</b>	<b>26</b>
7.1. Calculo de los superpotenciales y compañeros potenciales supersimétricos . . . . .	26
7.1.1. Energías positivas . . . . .	26
7.1.2. Energías negativas . . . . .	30
7.2. Resolución del espectro de los compañeros potenciales supersimétricos . . . . .	33
7.2.1. Extensiones Negativas Pares . . . . .	34
7.2.2. Extensiones Negativas Impares . . . . .	35
7.2.3. Extensiones Positivas Pares . . . . .	36
7.2.4. Extensiones Positivas Impares . . . . .	36

<b>8. Análisis de SUSY</b>	<b>37</b>
8.1. Introducción . . . . .	37
8.2. Características de los superpotenciales . . . . .	38
8.3. $H^{(2)}$ posee el estado fundamental con energía nula . . . . .	39
8.3.1. Extensión inicial positiva . . . . .	40
8.3.2. Extensión inicial negativa . . . . .	40
8.4. $H^{(1)}$ posee el estado fundamental con energía nula . . . . .	40
8.5. Análisis de la simetría . . . . .	40
<b>9. Resumen, Conclusiones y Problemas Abiertos</b>	<b>41</b>
<b>10. Bibliografía</b>	<b>42</b>
<b>11. Apéndice I. Programas</b>	<b>43</b>
11.1. Código base . . . . .	43
11.2. Primer código . . . . .	44
11.3. Segundo código . . . . .	46
11.4. Tercer y cuarto código . . . . .	47
11.5. Quinto código . . . . .	50
11.6. Sexto código . . . . .	54
11.7. Séptimo código . . . . .	56
11.8. Octavo código . . . . .	58
11.9. Noveno código . . . . .	60
<b>12. Apéndice II: Condiciones de paridad</b>	<b>62</b>
12.1. Energías positivas . . . . .	62
12.2. Energías negativas . . . . .	64
12.3. Energías nulas . . . . .	66
12.4. Conclusiones . . . . .	68
<b>13. Apéndice III, Generalidad</b>	<b>68</b>
<b>14. Apéndice IV, Datos</b>	<b>70</b>

# 1. Introducción

Este trabajo de fin de grado versa sobre dos formalismos matemáticos, muy importantes en el ámbito de la física teórica, que son el formalismo de extensiones autoadjuntas y supersimetría.

El primero es el menos conocido, pero no por ello menos importante, por lo que explicaré en que se basa de manera breve y concisa.

El formalismo matemático de extensiones autoadjuntas es, básicamente, la teoría que nos dice “cuántas versiones de ese operador” son observables, por versiones entendemos operadores observables similares, que son “versiones” de un operador concreto, en nuestro caso será la energía cinética. Por tanto es, en mi opinión, de vital importancia, además nos predice cuando un operador tiene un espectro o posee varias “versiones” observables, en concreto infinitas, y nos da la parametrización, en el último caso, de dichas “versiones”.

La supersimetría, más conocida como SUSY, es el intento, por parte de los físicos teóricos, de condensar todas las fuerzas, excluyendo la gravitación (como siempre), en una. Su motivación es que al principio del tiempo, el Big-Bang, todo se debía regir por una única fuerza, esto no es lo que se observa en la naturaleza debido a la tremenda diferencia de escala energética que hay entre el Big-Bang y la naturaleza ordinaria, por ordinaria entiéndase la que nos rodea, que no es ni mucho menos ordinaria en el sentido despectivo de esta palabra. Con este ánimo se busca una teoría que tuviera en cuenta esto, a esta teoría se la llama SUSY, y es una parte de este formalismo, el de compañeros supersimétricos, el que vamos a realizar en este trabajo.

Uno de los subproductos de la teoría SUSY es la construcción de los llamados *partners supersimétricos* de Hamiltonianos con espectro discreto. Los nuevos Hamiltonianos así obtenidos son los llamados SUSY *partners*. En principio, los SUSY partners de un Hamiltoniano dado forman una cadena infinita, pues partiendo de un Hamiltoniano original  $H_0$  construimos un primer partner,  $H_1$ , a partir del cual construimos su partner  $H_2$  y así sucesivamente. A  $H_1$  le llamaremos el primer partner de  $H_0$ , a  $H_2$  el segundo partner, etc. En general, el trabajo de obtener el primer partner, no siendo un problema trivial, no suele tener una gran dificultad. Dificultad que suele ser mayor en la consecución del segundo partner y que aumenta con la serie. Muchas veces, el problema de obtener toda la cadena de Hamiltonianos a partir de  $H_0$ :  $H_0, H_1, H_2, \dots$  es un problema intratable.

Aquí vamos a estudiar los primeros partners (en algunos casos, la manera de continuar con la cadena puede ser más o menos obvia, al menos en lo que respecta al segundo partner) de las extensiones autoadjuntas del operador energía cinética en una dimensión  $K = -d^2/dx^2$  ( $\hbar^2 = 2m$ ) en un pozo infinito cuadrado de potencial. Es sabido que este operador tiene índices de deficiencia  $(2, 2)$ , por lo que las extensiones autoadjuntas están indicadas por cuatro parámetros reales (y por supuesto, son infinitas).

Estas extensiones autoadjuntas tienen diversas propiedades bajo transformaciones del tipo inversión espacial o temporal. Esto nos permite clasificarlas en diversos tipos. El estudio de los partners supersimétricos dentro de cada uno de dichos tipos presenta un grado de dificultad similar. Procedemos entonces nuestro estudio comenzando por la construcción de los partners en los casos más sencillos.

Debo de indicar que este trabajo, aun siendo relativamente extenso, no pretende estar completo ni mucho menos, si no presentar un estudio exhaustivo del problema que nos ocupa. Algunas cuestiones han sido dejadas para un estudio posterior, lo que significa que se *retomarán de manera inmediata*.

En cuanto al pozo cuadrado infinito de potencial en una dimensión es tratado de una forma muy simplificada en los libros básicos de Mecánica Cuántica. Estos, cuando analizan el espectro del operador energía cinética, en realidad están considerando una única extensión autoadjunta entre las infinitas posibles. Justamente la más sencilla posible. Todas estas extensiones autoadjuntas tienen un espectro discreto puro, sin embargo no todas tienen el mismo espectro, como

veremos en la discusión posterior.

La impresión que dan los libros básicos de Mecánica Cuántica es que el pozo cuadrado infinito unidimensional es trivial. Permítanme quitarles esa venda de los ojos, este problema no es tan trivial como se enseña, bien sea por desconocimiento de la teoría de extensiones autoadjuntas o bien por no querer meterse en problemas, que los hay y bastantes. Por tanto, le anticipo, que si usted empezó a leer este trabajo pensando que el pozo infinito unidimensional era trivial, al final dejará de pensarlo.

Ahora, después de este anticipo motivacional para leer el resto del trabajo, introduciré cual va a ser su esquema.

Las tres primeras secciones tienen por objeto la introducción al problema. Son básicamente un resumen de los conceptos fundamentales a tener en cuenta antes de comenzar nuestra discusión fundamental., dado que presentamos un trabajo sobre un problema físico no he introducido un formalismo matemático con demostraciones, si no más bien un formalismo de enseñanza físico aportando los teoremas e ideas fundamentales para la aplicación de esa teoría, haciendo uso del dicho “si estáis interesados en esta bibliografía podréis encontrar información”<sup>1</sup>.

La siguiente sección, llamada **Cálculo de los estados fundamentales**, deducimos unas ecuaciones con las cuáles se puede hallar conociendo la energía como es el estado a la que le corresponde.

La siguiente sección, denominada **Superpotenciales**, trata del cálculo de los superpotenciales y compañeros potenciales supersimétricos asociados a cada extensión autoadjunta, que preserve paridad y reversibilidad temporal, y resolvemos **el espectro**, está en negrita porque es muy importante para el desarrollo del trabajo, de estos compañeros potenciales supersimétricos.

La siguiente sección, llamada **Análisis de SUSY**, es con los resultados obtenidos en los cálculos comprobar si SUSY se conserva o no, y usando eso llegar a unas conclusiones.

La última sección, denominada **Resumen, Conclusiones y Problemas Abiertos**, están reflejadas las conclusiones obtenidas al final del trabajo.

El primer apéndice contiene los códigos desarrollados para calcular las energías fundamentales de cada extensión autoadjunta.

El segundo apéndice son unos cálculos realizados para comprobar unas condiciones escritas en la publicación sobre la que versa la tercera sección, y además sirven para explicar por qué trabajar con la mayor generalidad en este problema suele ser inabordable o francamente complicado.

En el tercer apéndice está escrito como sería la generalización de este trabajo, con sus más que notables problemas, el principal es la resolución de las ecuaciones diferenciales que aparecen, las cuales distan mucho de ser triviales.

En el cuarto apéndice están escritos los datos calculados por los programas del apéndice I, a través de la ejecución reiterada de dichos programas, tal y como se indica en el apéndice I.

## 2. Formalismo matemático

### 2.1. Introducción

Como es bien conocido el formalismo de la Mecánica Cuántica se basa en los espacios de Hilbert, y en que las magnitudes medibles son promedios de ciertos operadores asociados a ellas.

Como una magnitud medible posee un valor real, tenemos que tener que estos promedios sean reales, i.e si el estado tiene un momento asociado determinado entonces el promedio del operador momento en ese estado tiene que ser ese valor. Esto implica que los operadores que

---

<sup>1</sup>Para más información de estas secciones puede verse [1],[7],[8],[9].

describen los observables físicos han de ser, al menos, del tipo de los llamados *operadores simétricos*, que definiremos más adelante. Con el objetivo de poder determinar de manera única a los operadores que representan un observable, se exige además que estos operadores sean *autoadjuntos*.

El problema de la diferenciación entre un operador simétrico y otro autoadjunto es no trivial en el caso de los operadores no acotados (en los acotados son lo mismo). En el presente trabajo vamos a analizar el problema desde un punto de vista aparentemente conocido y, sin embargo como hemos subrayado anteriormente, bastante poco conocido entre la comunidad de Físicos.

Curiosamente, la mayor parte de operadores que aparecen en Mecánica Cuántica básica son operadores del tipo no acotado. Estos incluyen, por ejemplo, los Hamiltonianos de partículas en una o tres dimensiones, las componentes del momento angular en tres dimensiones, etc (sistemas que describen espines, o más generalmente, qubits, si que pueden realizarse mediante operadores acotados). Se comprende entonces su enorme utilidad y la necesidad de estudiar sus propiedades. Pero además estos operadores son de una gran riqueza conceptual y tienen propiedades extraordinarias que nos van a producir multitud de sorpresas.

## 2.2. Operadores no acotados

Comencemos por definir el concepto de *operador acotado*. Un operador acotado  $A$  en un espacio de Hilbert  $X$  es una aplicación lineal de  $X$  en si mismo:  $A : X \mapsto X$ , tal que existe una constante  $K > 0$  que verifica

$$\|Ax\| \leq K\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

donde  $\| - \|$  representa la norma en el espacio de Hilbert. Unos breves comentarios:

i.) Un operador acotado está definido en todo el espacio de Hilbert, es decir que se aplica a todo vector de  $X$ . Para todo  $x \in X$ ,  $Ax \in X$ .

ii.) Un operador está acotado si y solamente si es continuo. Esto quiere decir que si  $\{x_n\}$  es una sucesión de vectores en  $X$  convergiendo a  $x \in X$ ,  $x_n \mapsto x$ , entonces la sucesión de vectores  $\{Ax_n\}$  converge a  $Ax$ ,  $Ax_n \mapsto Ax$ .

iii.) El número real  $K$  no es único, pues cualquier  $K' > K$  puede hacer el mismo trabajo. No obstante, existe un  $K$  que es el menor de todos ellos y se designa como  $\|A\|$ . Y, en efecto, es una norma en el álgebra de operadores acotados.

iv.) Cualquier operador lineal  $A$  en un espacio de Hilbert  $X$  de dimensión finita  $n$  está automáticamente acotado. Entonces todo operador representando operaciones o puertas o cualquier otra cosa en Computación Cuántica está acotado.

v.) Hay dos tipos de operadores acotados en Mecánica Cuántica que son de uso universal. El primero es el de los operadores unitarios. Un operador  $U$  es unitario si conserva la norma,  $\|Ux\| = \|x\|$ ,  $\forall x \in X$  y además es sobre. Operadores unitarios sirven para representar simetrías en Mecánica Cuántica y también evoluciones como la temporal. El segundo tipo es el de los Proyectores. Un operador (cuando hablamos de operador siempre nos referimos a aplicaciones lineales) acotado  $P$  es un proyector si verifica dos propiedades: 1.-  $P$  es autoadjunto,  $P = P^\dagger$  y 2.-  $P^2 = P$ . Los proyectores para lo que se llama representaciones espectrales de operadores autoadjuntos, una cuestión en la que no entraremos aquí.

Pues bien, un operador no acotado es un operador  $A$  en  $X$  que no está acotado. Es una definición por negación. Si  $A$  es un operador no acotado, entonces para todo  $K > 0$  existe un vector  $x_K \in X$  tal que  $\|Ax_K\| > K\|x_K\|$ . No todos los operadores no acotados tienen interés en Física. Pero veamos antes un curioso ejemplo.

Sea  $Q$  el operador multiplicación en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  (espacio de funciones de cuadrado integrable). Se define de la siguiente manera, sea  $f(x)$  una función en  $L^2(\mathbb{R})$  tal que  $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces para cada función con dicha propiedad definimos:

$$(Qf)(x) := xf(x).$$

A este operador  $Q$  se le considera el operador posición para una partícula que se mueva a lo largo de una línea recta. La cuestión es ver si realmente este operador está o no definido en todo  $L^2(\mathbb{R})$ , es decir, si puede aplicarse o no a toda función de  $L^2(\mathbb{R})$ . Esto es lo mismo que decir: si  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , ¿necesariamente  $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ? La respuesta es un no rotundo. Para verlo consideremos la siguiente función:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Esta función es de cuadrado integrable ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty.$$

Sin embargo

$$xf(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases},$$

no es obviamente de cuadrado integrable. Dijimos anteriormente que una de las propiedades de los operadores acotados es que estaban definidos en todo el espacio de Hilbert, es decir se podían aplicar a cualquier vector del espacio de Hilbert para darnos otro vector del *mismo*. Este no es el caso del operador posición  $Q$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Por lo tanto,  $Q$  en  $L^2(\mathbb{R})$  es un operador no acotado. Lo mismo sucede con el operador momento  $P := -i\hbar d/dx$ .

Entonces cuando nos referimos a operadores no acotados, no solamente tenemos que definir la acción de dicho operador sobre cada vector. Es necesario, además, decir sobre que vectores actúa. Como un operador es una aplicación lineal, este conjunto ha de ser un subespacio vectorial de  $X$ . Además esta subespacio ha de tener la propiedad de densidad. Si le llamamos  $D$ , para todo  $x \in X$  ha de existir una sucesión  $\{x_n\} \subset D$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Esto sucede con  $Q$  y  $P$  en  $L^2(\mathbb{R})$  que actúan en subespacios que contienen al espacio de Schwartz  $S$ , que es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Se llama *dominio* de un operador  $A$  al subespacio  $D \subset X$  sobre el que este operador  $A$  actúa. Supondremos que  $D$  es denso en  $X$ .

Los operadores acotados en Mecánica Cuántica son de un tipo especial llamado operador cerrable. Un operador cerrable tiene extensiones cerradas y, en particular, una extensión cerrada mínima que es su clausura. Por consiguiente, vamos a discutir que son estos operadores.

### 2.3. Operadores cerrados

Sea  $A$  un operador con dominio  $D \subset X$ . Diremos que  $A$  es cerrado si para cualquier sucesión de vectores  $\{x_n\} \subset D$  verificando las siguientes condiciones: i.)  $x_n \rightarrow x \in X$  y ii.)  $Ax_n \rightarrow y$ , se verifica que: i.)  $x \in D$  y ii.)  $y = Ax$ .

Notemos que todo operador  $A$  con dominio  $D$  que sea *continuo* es a su vez cerrado en  $D$ . Sin embargo, si  $D$  es denso en  $X$ , tal y como estamos suponiendo, y  $A$  continuo en  $D$ ,  $A$  admite una única extensión en  $X$ , que será continua, y por lo tanto acotada.



Sean  $A$  y  $B$  dos operadores con dominios respectivos  $D_A$  y  $D_B$ . Diremos que  $B$  extienda a  $A$  y escribiremos  $A \prec B$  o  $B \succ A$  si i.)  $D_A \subset D_B$  y ii.) Para todo  $x \in D_A$  se verifica que  $Ax = Bx$ .

Un operador es cerrable si y solamente si admite extensiones cerradas. Entre ellas, hay una  $\overline{A}$  que verifica la siguiente propiedad: si  $A$  es cerrable y  $B$  es cualquier extensión de  $A$ , entonces  $A \prec \overline{A} \prec B$ . a  $\overline{A}$  le llamaremos la clausura de  $A$ .

De esta manera, un operador cerrable se transforma en cerrado, añadiéndole a su dominio la colección apropiada de vectores.

Un resultado importante es el llamado *Teorema del Grafo Cerrado*, cuya consecuencia relevante para nuestro estudio es: *Si  $A$  es cerrado y está definido en todo  $X$ , entonces es automáticamente acotado*. En resumen, si consideramos que los únicos operadores no acotados que nos interesan son los cerrables, entonces nuestros operadores no acotados no pueden estar definidos en todo el espacio de Hilbert. No podemos, entonces, escapar a la consideración del dominio de estos operadores.

Recordemos que si  $A$  era un operador acotado, definíamos su adjunto  $A^\dagger$  mediante la siguiente identidad, válida para todo  $x, y \in X$ :

$$\langle y|Ax \rangle = \langle A^\dagger y|x \rangle.$$

Esta fórmula es conocida como *fórmula de dualidad (duality formula)*. En particular, un operador era autoadjunto si  $A = A^\dagger$ . Cuando  $A$  está acotado en  $X$ , esto equivale a decir que para todos  $x, y \in X$ , se tiene que

$$\langle y|Ax \rangle = \langle Ay|x \rangle.$$

La definición de operador adjunto en el caso no acotado, no resulta ser tan sencillo. Este asunto es importante, ya que necesitamos un criterio para saber cuando un operador es autoadjunto, es decir  $A = A^\dagger$ , aún en el caso no acotado.

## 2.4. El operador adjunto

Como en todo operador no acotado, tenemos que definir el dominio del adjunto de  $A$ , siendo  $A$  no acotado. Este adjunto ha de ser no acotado también, ya que de lo contrario  $A$  estaría acotado. Consideremos el siguiente dominio:

$$D^* := \{y \in X, / \exists z \in X, / \langle z|x \rangle = \langle y|Ax \rangle, \forall x \in D_A\},$$

donde  $D_A$  es el dominio del operador  $A$ . Vamos a hacer un listado de comentarios sobre las propiedades de  $D^*$ , la definición de  $A^\dagger$  y algunas de sus propiedades:

- $D^*$  es un subespacio de  $X$ .
- Debido a la hipótesis de la densidad del dominio  $D_A$ , entonces el vector  $z$  que corresponde a un  $y \in D^*$  determinado es único. Gracias a esta propiedad, podemos definir  $A^\dagger$  como  $A^\dagger y = z$  para todo  $y \in D^*$ . Nótese que entonces

$$\langle A^\dagger y|x \rangle = \langle y|Ax \rangle, \quad \forall x \in D_A.$$

Esta es exactamente la misma relación que tenemos en el caso de que  $A$  esté acotado, salvo por las consideraciones sobre los dominios. Es, en cierto modo, una versión de la fórmula de la dualidad.

- La aplicación  $A^\dagger$ , que sabemos bien definida, es lineal, por lo que podemos denominar a  $A^\dagger$  con la palabra operador. Entonces,  $A^\dagger$  sería el *operador adjunto* de  $A$ . Sin embargo, y en total generalidad, el dominio  $D^*$  no tiene porqué ser denso.
- El dominio  $D^*$  es denso si y solo si  $A$  es cerrable. En este caso existiría  $A^{\dagger\dagger}$ .
- El adjunto  $A^\dagger$  de  $A$  es siempre un operador cerrado. Incluso cuando  $D^*$  no fuera denso. Nótese que, en puridad, la definición de operador cerrado puede aplicarse aún si su dominio no es denso.
- Si  $A \prec B \implies B^\dagger \prec A^\dagger$ .
- En el caso de los operadores acotados tenemos siempre que  $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$  y  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ . Cuando  $A$  y  $B$  son no acotados tenemos, en primer lugar, problemas de dominio. Definamos el dominio de la suma  $A + B$  como:

$$D_{A+B} := D_A \cap D_B.$$

Es importante subrayar que la intersección de dos subespecies densos no tiene porqué ser denso. Así no está claro si  $D_{A+B}$  es denso, por mucho que lo sean  $D_A$  y  $D_B$ . Pero si  $D_{A+B}$  fuera denso, existiría  $(A + B)^\dagger$  y tendríamos:

$$A^\dagger + B^\dagger \prec (A + B)^\dagger.$$

- El dominio de  $AB$  se define fácilmente. En primer lugar, este operador puede aplicarse tan solo a vectores  $x \in D_B$ , por razones obvias. Pero luego  $Bx$  ha de estar en  $D_A$ , de tal manera que:

$$D_{AB} := \{x \in D_B \mid Bx \in D_A\}.$$

también aquí puede suceder que  $D_{AB}$  no sea denso. Pero si lo fuere, tendríamos que:

$$B^\dagger A^\dagger \prec (AB)^\dagger.$$

### 3. Operadores simétricos

Vamos ahora a estudiar el que posiblemente sea el caso particular de mayor importancia de operadores no acotados. Son los *operadores simétricos*, también llamados *Hermíticos*. Por definición  $A$  es simétrico si para todo par de vectores  $x, y \in D_A$  se verifica que:

$$\langle Ay|x \rangle = \langle y|Ax \rangle, \quad \forall x, y \in D_A.$$

Si  $A$  fuera acotado, entonces esta relación implicaría que  $A$  sería autoadjunto. Lo mismo si  $D_A = X$ , pues todo operador simétrico es cerrable. Al estar definido en todo  $X$ , no tendría más extensiones cerradas que el mismo, luego sería cerrado. Y por el Teorema del Grafo Cerrado, estaría acotado.

Pero si el operador simétrico  $A$  es un operador no acotado, entonces de la definición anterior y de la del adjunto de un operador, obtenemos simplemente que  $A \prec A^\dagger$ , es decir que  $A^\dagger$  extiende a  $A$ . En particular, para un operador simétrico  $D_A \subset D^*$ .

Dijimos que un operador es autoadjunto si es igual a su adjunto  $A = A^\dagger$ . La definición de operador simétrico o Hermítico (en realidad la palabra simétrico es más del gusto de los matemáticos, siendo *Hermítico* la palabra más usada por los físicos) sugiere ciertas analogías con la propia para un operador autoadjunto y acotado. Entonces, ¿Cuándo un operador Hermítico es autoadjunto, o al menos, tiene extensiones autoadjuntas?

Resulta que un operador Hermítico puede tener una extensión autoadjunta, infinitas o ninguna. Cuando tiene una, esta ha de ser necesariamente su clausura, ya que el operador adjunto es siempre cerrado, si bien la demostración no es tan trivial. Recíprocamente, si la clausura de un operador simétrico es autoadjunta, éste no tiene más extensiones autoadjuntas. Estos operadores con una sola extensión autoadjunta se llaman *esencialmente autoadjuntos*.

Ejemplo de operadores esencialmente autoadjuntos: Los operadores posición  $Q$  y momento  $P$  cuando tienen como dominio el espacio de Schwartz<sup>2</sup>  $S$  son esencialmente autoadjuntos. De cualquier manera si bien  $S \subset D_Q$  y  $S \subset D_P$  los dominios de  $Q$  y  $P$  son diferentes.

Ejemplos de operadores con infinitas extensiones autoadjuntas se proveen en la presente memoria.

Un ejemplo de un operador simétrico sin extensiones autoadjuntas es el siguiente: Como dominio ponemos el espacio de las funciones derivables de  $\mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$  tal que su derivada primera es una función de cuadrado integrable en el intervalo  $[0, \infty)$ . Estas funciones deben de verificar  $f(0) = f(\infty) = 0$ . Sobre este dominio definimos el operador  $P = -i\hbar d/dx$ . Pues bien, este  $P$  es simétrico, pero carece de extensiones autoadjuntas.

La discusión sobre cuando un operador simétrico tiene o no extensiones autoadjuntas se realizará en la siguiente sección.

### 3.1. Índices de deficiencia y teorema de Von Neumann

Ahora contestaremos a dos preguntas que son:

- ¿ Cuando tiene un operador simétrico extensiones autoadjuntas?.
- Y de tenerlas ¿ Cómo se pueden caracterizar dichas extensiones?.

Hay que comentar que el problema de escoger adecuadamente la extensión para cada caso, no tiene nada que ver con las matemáticas, si no con la física del problema y bajo que condiciones estamos, i.e, reversibilidad temporal, paridad... como veremos en este trabajo.

Lógicamente esta sección es matemática, como no queremos centrarnos demasiado en sutiles matices, escribiremos los teoremas sin su demostración<sup>3</sup>.

**Teorema I** Sea  $A$  un operador simétrico y cerrado en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Entonces:

- 1a La dimensión de  $\text{Ker}[\lambda I - A^*]$  es constante en el semiplano inferior.
- 1b La dimensión de  $\text{Ker}[\lambda I - A^*]$  es constante en el semiplano superior.
- 2 El espectro de  $A$  es uno de los siguientes:
  - a Es el semiplano superior cerrado.
  - b Es el semiplano inferior cerrado.
  - c Es todo el plano.

<sup>2</sup>Este es el espacio vectorial de las funciones complejas de variable real indefinidamente derivables y tales que ellas y todas sus derivadas tienden a cero en el infinito más rápidamente que el inverso de cualquier polinomio.

<sup>3</sup>Para verlo con mucha más precisión consúltese II *Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Michael Reed/Barry Simon.

- d Es un subconjunto del eje real.
- 3 A es autoadjunto se si cumple el caso 2d.
- 4 A es autoadjunto si y solo si la dimensión en (1a) y (1b) son cero.

Como corolarios de este teorema están los siguientes:

**Corolario I** Si A es un operador simétrico y cerrado que cumple que,  $(\phi|A\phi) \geq -M\|\phi\|^2$ , entonces la dimensión de  $\text{Ker}[\lambda I - A^*]$  es constante para

$$\lambda \in \mathbb{C}/[-M, \infty)$$

**Corolario II** Si un operador simétrico y cerrado tiene al menos un número real es el conjunto de su resolvente, entonces es autoadjunto.

Una vez escritos estos corolarios definamos los subespacios de deficiencia e índices de deficiencia.

**Definición** Sea A un operador simétrico. Entonces:

$$\mathbb{K}_+ = \text{Ker}[i - A^*] = \text{Ran}[i + A]^\perp$$

$$\mathbb{K}_- = \text{Ker}[i + A^*] = \text{Ran}[i - A]^\perp$$

Donde  $\mathbb{K}_+$  y  $\mathbb{K}_-$  son llamados **subespacios de deficiencia** de A. Y al par de números  $n_+, n_-$ , dados por  $n_+(A) = \dim[\mathbb{K}_+], n_-(A) = \dim[\mathbb{K}_-]$  son llamados **índices de deficiencia**.

Es de remarcar que los posibles valores de los índices de deficiencia son cualquier par de números no negativos; y además es posible que  $n_+$  o  $n_-$  (o ambos) sean infinitos.

Ahora centrémonos en la tarea de construir operadores extensiones simétricas y cerradas de A. Sea B dicha extensión. Entonces para  $\phi \in D(B^\dagger)$ , tenemos que  $(B^\dagger\psi|\psi) = (\psi|B\phi) = (\psi|A\phi)$ , para todo  $\psi \in D(A)$ . Como  $\phi \in D(A)$  y  $B^\dagger\phi = A^\dagger\phi$  por tanto

$$A^\dagger \succ B^\dagger \succ B \succ A$$

Introduzcamos ahora dos formas sesquilineales en  $D(A^\dagger)$ :

$$(\phi|\psi)_A = (\phi|\psi) + (A^\dagger\phi|A^\dagger\psi)$$

$$[\phi|\psi]_A = (A^\dagger\phi|\psi) - (\phi|A^\dagger\psi)$$

Un subespacio de  $D(A^*)$  tal que  $[\psi|\phi]_A = 0$ , para todo  $\psi$  y  $\phi$  en el subespacio es llamado **A-simétrico**. Sin embargo cuando nos referimos a los subespacios de  $D(A^\dagger)$  como **A-cerrado** o **A-ortogonal** nos referimos al producto interno dado por el producto interno del grafo  $(\cdot|\cdot)_A$ .

**Lema** Sea A un operador simétrico y cerrado. Entonces:

- a Las extensiones simétricas y cerradas de A son las restricciones de  $A^\dagger$  a A-cerrado, A-simétrico subespacios de  $D(A^\dagger)$ .
- b  $D(A), \mathbb{K}_+$  y  $\mathbb{K}_-$  son A-cerrado, mutuamente A- subespacios ortogonales de  $D(A^\dagger)$  y

$$D(A^\dagger) = D(A) \oplus_A \mathbb{K}_+ \oplus_A \mathbb{K}_-$$

- c Hay una correspondencia univoca entre A-cerrado, A-simétrico subespacios  $S$  de  $D(A^\dagger)$  que contiene  $D(A)$  y el A-cerrado, A-simétrico subespacios  $S_1$  de  $\mathbb{K}_+ \oplus_A \mathbb{K}_-$  dada por  $S = D(A) \oplus_A S_1$ .

La expresión anterior puede ponerse también de esta manera:

$$D(A^\dagger) = D_A \dot{+} K_+ \dot{+} K_-,$$

donde la expresión  $\dot{+}$  significa *suma directa no ortogonal*. De esta manera no necesitamos usar el producto escalar, y por tanto la ortogonalidad, con respecto a  $A$ .

Ahora estamos listos para probar el teorema de esta subsección.

**Teorema 2** Sea  $A$  un operador simétrico y cerrado. Las extensiones cerradas simétricas de  $A$  tienen una correspondencia unívoca con el conjunto de isometrías parciales (con el producto interno usual) de  $\mathbb{K}_+$  a  $\mathbb{K}_-$ . Si  $U$  es dicha isometría con espacio inicial  $I(U) \subseteq \mathbb{K}_+$ , entonces la correspondiente extensión simétrica cerrada  $A_U$  tiene un dominio

$$D(A_U) = (\phi + \phi_+ + U\phi \mid \phi \in D(A), \phi_+ \in I(U))$$

y

$$A_U(\phi + \phi_+ + U\phi) = A\phi + i\phi_+ - iU\phi_+$$

Si  $\dim I(U) < \infty$ , los índices de deficiencia son

$$n_\pm(A_U) = n_\pm(A) - \dim[I(U)]$$

El teorema anterior es lo que se conoce como teorema de Von Neumann, el siguiente es un corolario, que será el que utilizaremos.

Para un operador  $A$  con índices de deficiencia  $(n_+, n_-)$  tenemos tres posibilidades:

- (1) Si  $n_+ = n_- = 0$ , entonces  $A$  es autoadjunto.
- (2) Si  $n_+ = n_- = n \geq 1$ , entonces  $A$  tiene infinitas extensiones autoadjuntas, parametrizadas por  $n^2$  parámetros reales.
- (3) Si  $n_+ \neq n_-$ , entonces  $A$  no tiene extensiones autoadjuntas.

Con este teorema tenemos ya resuelto cuando un operador no acotado admite extensiones autoadjuntas y cuantas, ahora veamos algunos ejemplos sobre cómo usar estas herramientas matemáticas.

### 3.1.1. Ejemplos

Ahora veamos unos ejemplos de como aplicar estos conocimientos matemáticos.

Los ejemplos que haremos serán los más sencillos, en concreto, el operador momento en distintos intervalos y el operador cinético, en distintos intervalos también.

## Operador momento

Como sabemos el operador momento está definido como  $P = -i\hbar D$ , donde  $D$  significa derivada. Como es fácil ver este operador momento es el operador diferencial más sencillo.

Consideremos un espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(a, b)$ . Para usar el teorema de Von Neumann tenemos que determinar las funciones  $\psi_{\pm}(x)$  dadas por:

$$P^{\dagger}\psi_{\pm}(x) = -i\hbar D\psi_{\pm} = \pm i\frac{\hbar}{d}\psi_{\pm}(x) \quad (1)$$

Donde hemos usado un corolario anterior y nos hemos aprovechado de él para meter la constante  $d$ , y así dejar adimensional el exponente que nos aparecerá en la exponencial, lógicamente  $d > 0$ .

La solución de esta ecuación es:

$$\psi_{\pm}(x) = C_{\pm}e^{\mp\frac{x}{d}} \quad (2)$$

Ahora veamos usando el teorema de Von Neumann cuantas extensiones posee y como caracterizarla. Para ello analicémosla según el intervalo.

### a En todo el eje real

Si estamos en todo el eje real, entonces ninguna de las funciones  $\psi_{\pm}(x)$  pertenece al espacio de Hilbert en el que estamos, i.e,  $\mathcal{L}(\infty)$ . Por tanto sus índices de deficiencia son  $(0,0)$ . Esto nos lleva a que este operador solo es autoadjunto, de acuerdo con los resultados dados por los textos estándar de Mecánica Cuántica, hallado de manera heurística.

Además su espectro es continuo, en concreto es el eje real.

### b En el semieje real positivo

Si estamos en el semieje real positivo, entonces tenemos que los índices de deficiencia son  $(1,0)$ . Por tanto en virtud del teorema de Von Neumann tenemos que  $P$ , definido en este intervalo, no posee extensiones autoadjuntas. Por lo que obtenemos que el momento no es una magnitud medible en esta situación.

### c En un intervalo finito

Si estamos en un intervalo finito entonces los índices de deficiencia del operador momento son  $(1,1)$ , ya que todas las funciones  $\psi_{\pm}$  pertenecen a nuestro espacio de Hilbert,  $\mathcal{L}(a, b)$ . Por tanto tenemos que todas nuestras extensiones autoadjuntas están parametrizadas por  $U(1)$ , es decir una fase.

Una vez visto este ejemplo tan sencillo veamos uno un poco más complicado y que usaremos a lo largo de todo el trabajo, el operador energía cinética clásica.

## Operador Energía Cinética Clásica

Ahora veamos cómo sería el análisis de este problema con el operador energía cinética clásica, que como sabemos viene dado por  $\mathcal{H} = -D^2$ . Entonces calculemos sus índices de deficiencia, para ello tenemos que resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$-D^2\psi(x) = \pm ik_0^2\phi(x) \quad (3)$$

Donde  $k_0$  es un parámetro utilizado para fijar la adimensionalidad de la solución. Entonces resolviéndola obtenemos que:

$$\phi_{\pm}(x) = a_{\pm}e^{k_{\pm}x} + b_{\pm}e^{-k_{\pm}x} \quad (4)$$

Donde  $k_{\pm} = \frac{(1 \mp i)}{\sqrt{2}} k_0$ . Por tanto como ya tenemos la solución solo nos queda analizarla en cada uno de los casos, como hicimos anteriormente.

a **Todo el eje real**

Este caso corresponde físicamente a una partícula moviéndose libremente en todo el eje real. Como se tiene que no hay ninguna de las soluciones  $\phi_{\pm}$  que pertenece a nuestro espacio de Hilbert,  $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ , entonces sus índices de deficiencia son  $(0,0)$ , por tanto en virtud del teorema de Von Neumann sabemos que esta situación física solo posee una única extensión autoadjunta, con un espectro continuo, lo cual está en perfecto acuerdo con el resultado físico intuitivo.

b **En el semieje real positivo**

Este caso es el de una partícula moviéndose libre, pero que ve una barrera de potencial infinita para  $x < 0$ , para este caso físico se tiene que los índices de deficiencia de nuestro Hamiltoniano son  $(1,1)$ , ya que las soluciones  $\phi_{\pm} = b_{\pm} e^{-k_0 \frac{x}{\sqrt{2}}} e^{\pm i k_0 \frac{x}{\sqrt{2}}}$ , pertenecen a nuestro espacio de Hilbert, es decir  $\mathcal{L}(0, +\infty)$ .

Por tanto sus extensiones autoadjuntas están parametrizadas por  $U(1)$ , sus condiciones de contorno son fáciles de hallar usando las formas sesquilineares, y se tiene que son:

$$(\phi'(0) - i\phi(0)) = e^{i\varphi}(\phi'(0) + i\phi(0)) \tag{5}$$

Donde  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

c **El Hamiltoniano en un intervalo finito**

Esta situación física es la partícula en un pozo infinito, no lo resolveremos aquí, ya que lo resolveremos en la siguiente sección, en ella además daremos las parametrizaciones y el significado de cada parámetro.

## 4. Estudio de la parametrización de las extensiones autoadjuntas del operador energía cinética en el pozo unidimensional infinito

### 4.1. Introducción

En esta sección nos centraremos en el problema de una partícula libre en el pozo infinito unidimensional, analizaremos sus extensiones autoadjuntas, dando la parametrización de dichas extensiones, que la caracteriza, también analizaremos el significado de los parámetros que nos van a aparecer, viendo a que simetría física corresponden, además resolveremos el espectro de forma general, obteniendo una ecuación transcendental que nos lo determine, lógicamente esta ecuación dependerá de alguno de los parámetros que nos determinan dicha extensión autoadjunta.

Ahora sin más preámbulos, una vez comentado lo que haremos en esta sección, nos pondremos a hacerlo<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>La información esta obtenida de [1]

## 4.2. Aplicación del formalismo matemático al Hamiltoniano del pozo infinito unidimensional

Ahora usando el formalismo matemático introducido anteriormente apliquémoslo a nuestro problema en cuestión, el pozo infinito unidimensional.

Nuestra ecuación para calcular los índices de deficiencia es:

$$-\frac{\partial^2}{\partial^2 x} \phi(x) = \pm i k_0^2 \phi(x) \quad (6)$$

Cuya solución es fácilmente calculable y es:

$$\phi_{\pm} = a_{\pm} e^{k_{\pm} x} + b_{\pm} e^{-k_{\pm} x} \quad (7)$$

Donde  $k_{\pm} = \frac{1 \mp i}{\sqrt{2}} k_0$  Ahora tenemos que comprobar que estas soluciones pertenecen a  $L^2(-a, a)$ , fácilmente sabemos que los índices de deficiencia en este caso son (2,2), por lo que en virtud del teorema de Von Neumann obtenemos que este hamiltoniano admite infinitas extensiones autoadjuntas, que vienen parametrizadas por una matriz unitaria  $2 \times 2$ , es decir una matriz  $U(2)$ .

Lógicamente lo que parametriza esta matriz es al dominio de dichas extensiones, así que hallemos la condición de parametrización sobre el dominio.

Para ello hagamos lo siguiente introduzcamos la forma sesquilinear, este es un artificio matemático sumamente interesante, es el siguiente:

$$B(\phi, \psi) = \frac{1}{2i} (\langle H^{\dagger} \phi | \psi \rangle - \langle \phi | H^{\dagger} \psi \rangle) \quad (8)$$

El hecho de que pongamos  $H^{\dagger}$  es debido a que estamos trabajando en su dominio. Ahora hagamos uso de la expresión general del producto escalar en un espacio de Hilbert.

$$B(\phi, \psi) = \int dx \left( -\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial^2 x} \psi + \bar{\phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} \right) \quad (9)$$

Donde la región de integración lógicamente es  $(-a, a)$ , usando ahora la integración por partes obtenemos que:

$$B(\phi, \psi) = \frac{1}{2i} \left( \overline{\phi'(-a)} \psi(-a) + \overline{\phi(a)} \psi'(a) - \overline{\phi'(a)} \psi(a) - \overline{\phi(-a)} \psi'(-a) \right) \quad (10)$$

Entonces haciendo que  $\phi = \psi$  y que dicha forma sesquilinear ha de ser cero, la razón es fácil de ver si volvemos a su definición, y usando la relación matemática:

$$\frac{1}{2i} (x\bar{y} - \bar{x}y) = \frac{1}{4} (|x + iy|^2 - |x - iy|^2)$$

Se llega a que las condiciones de los dominios de las extensiones autoadjuntas satisfacen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) - i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) + i\phi(a) \\ [1ex] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) + i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) - i\phi(a) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde la matriz  $U$  es una matriz unitaria que es de la forma:

$$U = e^{i\psi} \begin{bmatrix} m_0 - im_3 & -m_2 - im_1 \\ m_2 - im_1 & m_0 + im_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$



Que es fácil ver que es una fase por una base de  $U(2)$ , combinación lineal de las matrices de Pauli y la identidad.

Como la matriz ha de ser unitaria tenemos la siguiente condición.

$$m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \quad (13)$$

### 4.3. Cálculo del espectro

Ahora que tenemos como son las condiciones de frontera de nuestra función de onda, podemos calcular cuales serán las condiciones para la energía. Para ello usaremos que nuestra función de onda es:

$$\phi(x) = A \exp^{i\sqrt{E}x} + B \exp^{-i\sqrt{E}x}$$

Entonces la podemos llevar a las condiciones de frontera halladas antes, y por tanto calcular la energía, debido a que aparece el factor  $2a$  acompañando a la derivada, tomamos  $E = \frac{s^2}{(2a)^2}$ , entonces sustituyendo se llega a las siguientes ecuaciones:

$$Ae^{-i\frac{s}{2}(s-1)} - Be^{i\frac{s}{2}(s+1)} = e^{i\phi} (A\eta(s+1)e^{-i\frac{s}{2}} - B\eta(s-1)e^{i\frac{s}{2}} + A\beta(s-1)e^{i\frac{s}{2}} - B\beta(s+1)e^{-i\frac{s}{2}})$$

$$Ae^{i\frac{s}{2}(s+1)} - Be^{-i\frac{s}{2}(s-1)} = e^{i\phi} \left( -A\beta^* e^{-i\frac{s}{2}}(s+1) + B\beta^*(s-1)e^{i\frac{s}{2}} + A\eta^* e^{i\frac{s}{2}}(s-1) - B\eta^* e^{-i\frac{s}{2}}(s+1) \right)$$

Donde  $\eta = m_0 - im_3$  y  $\beta = -m_2 - im_3$ . Ahora lo que nos interesa es quitar las amplitudes, para ello lo que hacemos es agrupar los coeficientes con A y los coeficientes de B y multiplicamos en cruz, los coeficientes de A por los de B, y así podemos cancelarlos.

$$A [e^{-i\frac{s}{2}} - e^{i\phi}(\eta e^{-i\frac{s}{2}}(s+1) + \beta e^{i\frac{s}{2}}(s-1))] = B [e^{i\frac{s}{2}}(s+1) + e^{i\phi}(-\eta e^{i\frac{s}{2}}(s-1) - \beta e^{-i\frac{s}{2}}(s+1))]$$

$$A [e^{i\frac{s}{2}}(s+1) - e^{i\phi}(-\beta^* e^{-i\frac{s}{2}}(s+1) + \eta^* e^{i\frac{s}{2}}(s-1))] = B [e^{-i\frac{s}{2}}(s-1) + e^{i\phi}(\beta^* e^{i\frac{s}{2}}(s-1) - \eta^* e^{-i\frac{s}{2}}(s+1))]$$

Multiplicando en cruz y quitando los términos que se anulan obtenemos que:

$$e^{-is}(s-1)^2 - e^{is}(s+1)^2 e^{i\phi} [-(s^2-1)(e^{-is}(\eta + \eta^*) - e^{is}(\eta + \eta^*)) + 4s(\beta - \beta^*)] + \\ -e^{2i\phi} [|\eta|^2(-e^{-is}(s+1)^2 + e^{is}(s-1)^2) + |\beta|^2(e^{is}(s-1)^2 - e^{-is}(s+1)^2)] = 0$$

Como sabemos  $|\eta|^2 + |\beta|^2 = 1$ , debido a la condición de normalización,  $\eta + \eta^* = 2m_0$  y  $\beta - \beta^* = -2m_1$ . Si pasamos a la forma trigonométrica de las exponenciales tenemos que:

$$(\cos(s)[(s-1)^2 - (s+1)^2] + i \sin(s)[-(s-1)^2 - (s+1)^2]) + e^{i\phi} [-(s^2-1)2m_0(-2i \sin(s)) - 8s i m_1] + \\ -e^{2i\phi} [\cos(s)[(s-1)^2 - (s+1)^2] + i \sin(s)[(s-1)^2 + (s+1)^2] = 0$$

Usando que:

$$\cos(s)[(s-1)^2 - (s+1)^2] + i \sin(s)[-(s-1)^2 - (s+1)^2] = -4s \cos(s) - 2i(s^2+1) \sin(s)$$

$$\cos(s)[(s-1)^2 - (s+1)^2] + i \sin(s)[(s-1)^2 + (s+1)^2] = -4s \cos(s) + 2i \sin(s)(s^2+1)$$

Si llamamos  $\alpha = -4s \cos(s) - 2i(s^2+1) \sin(s)$  y  $\gamma = -(s^2-1)2m_0(-2i \sin(s)) - 8s i m_1$  la ecuación anterior pasa a ser:

$$\begin{aligned}\alpha + e^{i\phi}\gamma - \alpha^* e^{2i\phi} = 0 &\rightarrow \alpha e^{-i\phi} + \beta - \alpha^* e^{i\phi} = 0 \rightarrow \beta = 2i\text{Im}(\alpha * e^{i\phi}) \rightarrow \\ &\rightarrow \beta = 2i(2\cos(\phi)\sin(s)(s^2 + 1) - 4s\cos(s)\sin(\phi))\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos la ecuación para las energías positivas, que es:

$$2s(\cos(s)\sin(\phi) - m_1) = \sin(s)(\cos(\phi)(s^2 + 1) - m_0(s^2 - 1)) \quad (14)$$

Si queremos hallar las condiciones para energía nula, deberíamos hacer todo el calculo con la función que sale  $B + Ax$ , sin embargo haciendo  $s$  tender a cero se obtiene lo mismo, que es:

$$2\sin(\phi) - \cos(\phi) = 2m_1 + m_0 \quad (15)$$

Para las energías negativas solo tenemos que cambiar  $s$  por  $ir$ , y usando las relaciones entre las funciones hiperbólicas y trigonométricas se obtiene que:

$$\sinh(r)(m_0(r^2 + 1) - \cos(\phi)(r^2 - 1)) = 2r(\sin(\phi)\cosh(r) - m_1) \quad (16)$$

Estas son las ecuaciones que deberemos resolver numéricamente para hallar los espectros.

## 4.4. Significado de los parámetros

En esta parte veamos el significado de los parámetros que caracterizan la extensión auto-adjunta.

### 4.4.1. Extensiones preservando la reversibilidad temporal

Como sabemos la reversibilidad temporal es intercambiar  $t$  por  $-t$  y obtener que no cambie nada. Como estamos trabajando con estados con energías bien definidas entonces estos son de la forma:

$$\psi(x, t) = \phi_E(x) \exp^{-i\frac{Et}{\hbar}} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_+(-a) \\ \psi_-(a) \end{bmatrix} = U^* \begin{bmatrix} \psi_-(-a) \\ \psi_+(a) \end{bmatrix} = U^* U \begin{bmatrix} \psi_+(-a) \\ \psi_-(a) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Que es como decir que:

$$\det(I - U^*U) = 0$$

Lo que nos lleva a que  $m_2 = 0$ , por tanto el significado del parámetro  $m_2$  es el de si nuestra extensión viola la simetría T o no.

### 4.4.2. Extensiones preservando paridad

En esta publicación se interpreta el parámetro  $m_3$ , como el parámetro que nos indica si la simetría de paridad es violada o no, es decir, si las funciones de onda poseen paridad se tiene que dar que esa extensión posea  $m_3 = 0$ .

La verdad es que no está muy clara la demostración que hace, en concreto escogen una familia de solución que no es general para demostrarlo, esto nos generó serias dudas al leerlo, acerca de esta condición, por lo que hicimos los cálculos generales y observamos que no era una condición total si no parcial, estos cálculos aparecen en el Apéndice II.

## 5. Introducción a la Supersimetría

### 5.1. Introducción

En esta sección desarrollaremos los conceptos importantes, para este trabajo, de la supersimetría, lógicamente SUSY contiene mucho más, pero estos conceptos son los que usaremos en el trabajo, de aquí la razón de esta sección<sup>5</sup>.

### 5.2. Factorización del Hamiltoniano y el Superpotencial

Dado un Hamiltoniano con potencial independiente del tiempo, hagamos lo siguiente, cojamos el estado fundamental y obliguemos a que tenga energía nula, esto solo hace que nuestro espectro se vea desplazado por una constante, la energía del estado fundamental, pero no afecta a ninguna de las demás características, entonces haciendo esto tenemos que:

$$H^{(1)}\phi_0(x) = 0 \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\phi_0''(x) + V^{(1)}\phi_0(x) = 0 \quad (19)$$

La segunda ecuación nos conduce a:

$$V^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\phi_0''(x)}{\phi_0(x)} \quad (20)$$

Como el estado fundamental no posee nodos este potencial está perfectamente determinado, con esto vemos que el potencial puede ser determinado a partir de su estado fundamental, algo fundamental en esta teoría.

Ahora veamos la otra pieza fundamental de esta teoría, se tiene que el Hamiltoniano lo podemos factorizar en:

$$H^{(1)} = A^\dagger A \quad (21)$$

Donde:

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (22)$$

Donde  $W(x)$  es conocido como el superpotencial y su dimensión es raíz de la energía. Si llevamos esto a la ecuación anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V^{(1)}(x) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) = A^\dagger A \\ &\rightarrow V^{(1)}(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \end{aligned} \quad (23)$$

Ahora si llevamos esto a la ecuación que nos definía a  $V^{(1)}$  tenemos que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_0''(x) + \left[ W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \right] \phi_0(x) = 0$$

Usando la regla de la cadena después de ordenarla tenemos que:

$$\left( \frac{\phi_0'(x)}{\phi_0(x)} \right)^2 + \left( \frac{\phi_0'(x)}{\phi_0(x)} \right)' = \left( \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(x) \right)^2 - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W'(x) \quad (24)$$

Una solución de esta ecuación, y por tanto la que determina nuestro superpotencial es:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \ln \phi_0(x) \quad (25)$$

Por tanto ya tenemos calculada la forma del superpotencial.

---

<sup>5</sup>La información ha sido obtenida de [7]

### 5.3. Compañeros Potenciales

Anteriormente hemos hecho una factorización del Hamiltoniano, ahora hagamos lo mismo pero intercambiando los operadores, es decir:

$$\begin{aligned}
 H^{(2)}(x) &= AA^\dagger \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V^{(2)}(x)
 \end{aligned} \tag{26}$$

Ahora tenemos un nuevo Hamiltoniano con otro potencial,  $V^{(2)}(x)$ , que viene dado en términos del superpotencial por:

$$V^{(2)}(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \tag{27}$$

Entonces los potenciales  $V^{(1)}(x)$  y  $V^{(2)}(x)$  están dados por el mismo superpotencial, y su diferencia es:

$$V^{(2)}(x) - V^{(1)}(x) = 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \tag{28}$$

Estos potenciales son llamados los compañeros potenciales supersimétricos, ahora veremos, en la siguiente sección, que ambos Hamiltonianos,  $H^{(1)}$  y  $H^{(2)}$ , están muy relacionados.

### 5.4. Degeneración de los niveles de energía

Ahora veamos qué es lo que hace tan especial a estos potenciales relacionados por un superpotencial, como sabemos la simetría lleva a degeneraciones, por lo que el nombre de compañeros potenciales supersimétricos nos da una pequeña noción de por dónde irán los tiros.

Para hacerlo hagamos lo siguiente, nos centraremos en las energías positivas.

Para el primer sistema tenemos que:

$$H^{(1)}\phi_n^{(1)}(x) = A^\dagger A\phi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}\phi_n^{(1)} \tag{29}$$

Donde lógicamente  $\phi_n^{(1)}$  son las autofunciones del Hamiltoniano del primer sistema, ahora veamos la de nuestro segundo sistema.

$$H^{(2)}(A\phi_n^{(1)}(x)) = AA^\dagger A\phi_n^{(1)}(x) = AH^{(1)}\phi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}(A\phi_n^{(1)}(x)) \tag{30}$$

Esto significa que hay una relación entre las autofunciones del Hamiltoniano del segundo sistema y las del primero. Ahora hagamos lo mismo pero al revés, es decir, veamos qué información podemos sacar usando las autofunciones del segundo sistema cuántico.

$$H^{(2)}\phi_n^{(2)}(x) = AA^\dagger\phi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)}\phi_n^{(2)}(x) \tag{31}$$

Ahora apliquémoslo al primer sistema cuántico.

$$H^{(1)}(x)(A^\dagger\phi_n^{(2)}(x)) = A^\dagger AA^\dagger\phi_n^{(2)}(x) = A^\dagger(H^{(2)}\phi_n^{(2)}(x)) = E_n^{(2)}(A^\dagger\phi_n^{(2)}(x)) \tag{32}$$

Como vemos los espectros están relacionados, por eso hay gente que les denomina sistemas cuánticos isospectrales, salvo la energía fundamental que solo existe en el estado fundamental. Las relaciones son las siguientes:

$$E_n^{(2)} = E_{(n+1)}^{(1)} \quad , \quad E_0^{(1)} = 0$$

$$\phi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E^{(1)}_{(n+1)}}} A \phi_{(n+1)}^{(1)} \quad , \quad \phi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E^{(2)}_{(n)}}} A^\dagger \phi_n^{(2)}$$

Que nos permite observar que los operadores A nos relacionan los autoestados de un sistema cuántico con su compañero supersimétrico, podemos decir que el operador A destruye un nodo, esto es por que une el nivel n+1 del primer sistema cuántico con el nivel n del segundo sistema, mientras que el operador  $A^\dagger$  genera un nodo, ya que une el nivel n del segundo sistema con el nivel n+1 del primer sistema. Una imagen de estas acciones es la siguiente.

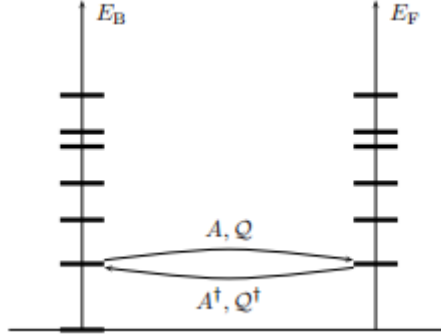


Figura 1: Niveles de energía de los dos sistemas cuánticos relacionados por la supersimetría, este es un caso en el que la supersimetría no está violada.

## 5.5. Hamiltoniano Supersimétrico

Para entender mejor la degeneración de los niveles, introduzcamos el Hamiltoniano SUSY  $\mathcal{H}^{(S)}$  considerando que ambos sistemas cuánticos supersimétricos se encuentran en un mismo sistema cuántico. Entonces  $\mathcal{H}^{(S)}$  puede construirse como la siguiente matriz  $2 \times 2$ .

$$\mathcal{H}^{(S)} = \begin{bmatrix} H^{(1)} & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{bmatrix} \quad (33)$$

Debido a la simetría y álgebra de la supersimetría se tiene que dar que el Hamiltoniano supersimétrico cumple lo siguiente:

$$[\mathcal{H}^{(S)}, \mathcal{Q}_1] = [\mathcal{H}^{(S)}, \mathcal{Q}_2] = 0 \quad (34)$$

Donde  $\mathcal{Q}_1$  y  $\mathcal{Q}_2$  son las supercargas. Elevándolas al cuadrado se obtiene que son  $\frac{1}{2}\mathcal{H}^{(S)}$ . Por lo que vienen dadas por:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathcal{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & iA^\dagger \\ -iA^\dagger & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Por lo que tenemos todos los requerimientos del álgebra extendido de SUSY para N=2.

Otra forma de escribir los operadores simétricos dejando la energía del sistema invariante, como hemos hecho en 34 es:

$$\mathcal{H}^{(S)} = \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\} \quad (37)$$

Que factoriza también el Hamiltoniano supersimétrico, siendo escogidas las supercargas hermíticas como:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Estos operadores son nilpotentes debido a que  $\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\} = \{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}^\dagger\} = 0$ . Esta propiedad se debe a la nilpotencia de los operadores de creación y aniquilación fermiónicos. Si consideramos un sistema cuántico con estados bosónicos y fermiónicos, las supercargas pueden construirse con los operadores correspondientes, (usando el formalismo de la segunda cuantización,  $|\eta_{bosones}, \eta_{fermiones}\rangle$ , con los operadores creación y aniquilación). En este contexto, el primer Hamiltoniano  $H^{(1)}$  es normalmente llamado como la parte bosonica del Hamiltoniano supersimétrico, que posee un número fermiónico cero ( $|\eta_{bosones}, 0\rangle$ ), y a  $H^{(2)}$  como la parte fermiónica, que posee un número fermiónico 1 ( $|\eta_{bosones}, 1\rangle$ ). Por tanto el espacio de Hilbert se divide en dos clases de estados bosónicos o fermiónicos.

## 5.6. Funciones de onda del estado fundamental

Como sabemos una función de onda, que pertenezca a un estado fundamental, tiene las siguientes propiedades:

→ La integral de su modulo es finita

$$\int dx |\phi_0(x)|^2 < \infty$$

→ Por tanto es nula en el infinito.

$$\phi_0(x \rightarrow \pm\infty) = 0$$

→ No tiene nodos, i.e

$$\phi_0(x) \neq 0$$

Además se obtiene por ser A lineal y haber hecho el cambio de origen energético que:

$$A\phi_0(x) \equiv A^\dagger\phi_0^{(1)}(x) = 0 \quad (40)$$

La ecuación anterior nos indica que no podemos extraer ninguna información sobre un posible estado en el segundo sistema cuántico con energía nula, es decir,  $\phi_0^{(1)}$  no tiene compañero supersimétrico. Esto es debido a que desde el punto de vista de SUSY, solo existe un estado con energía cero en el primer sistema cuántico, esto es para SUSY exacta. En lo que sigue, siempre daremos al primer Hamiltoniano, el correspondiente a  $V^{(1)}(x)$  aquel que tiene un estado con energía nula. Es decir, el primer sistema cuántico tiene número fermiónico cero.

Como sabemos el estado fundamental, aparte de estar relacionado con  $V^{(1)}$  y  $V^{(2)}$ , está relacionado con  $W(x)$ , veamos si impone alguna condición sobre él. Por lo que están relacionados es:

$$A\phi_0(x) \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \phi_0(x) + W(x)\phi_0(x) = 0$$

[1ex]

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d\phi_0(x)}{\phi_0(x)} &= -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(x) dx \\ \rightarrow \phi_0(x) &= \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{-\infty}^x dy W(y)\right) \end{aligned} \quad (41)$$

Si uno considera también que  $A^\dagger\phi_0^{(2)} = 0$  resulta que:

$$\phi_0^{(2)}(x) = \exp\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{-\infty}^x dy W(y)\right) \quad (42)$$

Esto es justo intercambiar los roles de  $H^{(1)}$  y  $H^{(2)}$  marcados antes. Entonces por nuestro convenio se tiene que dar que  $W(x)$  sea negativo si  $x \rightarrow -\infty$  y positivo si  $x \rightarrow \infty$ , ya que si no la función de onda no sería normalizable.

Entonces si definimos la función de onda del estado fundamental de nuestro Hamiltoniano supersimétrico, le tenemos que asociar un vector de dos componentes cuya forma es:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} \phi_0^{(1)}(x) \\ \phi_0^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (43)$$

Y si la supersimetría es exacta entonces solo puede existir un estado supersimétrico cuya energía sea nula, que por nuestro convenio será la que pertenezca al primer Hamiltoniano, por tanto nuestro estado será:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} \phi_0^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde  $\phi_0^{(1)}(x)$  viene definido por 41.

## 5.7. Supersimetría rota

En la discusión anterior hemos considerado que la supersimetría no está rota, veamos ahora el caso en el que está rota.

En física cuando una simetría es violada se tiene que, si llamamos  $\kappa$  a la operación de esa simetría, entonces se tiene que  $[H, \kappa] \neq 0$ . Es decir, se tiene que el operador  $\kappa$  ya no deja invariante a ese estado fundamental, esto nos dice que el estado fundamental ya no respeta esta simetría.

Anteriormente, discutimos los dos casos de SUSY exacto con  $H^{(1)}$  o  $H^{(2)}$  con estado fundamental de energía nula. Empezando con que  $A\psi_0^{(1)} = 0$  se tiene que  $W(x)$  tiene que ser estrictamente positiva para los valores positivos de  $x$  y estrictamente negativa para valores negativos de  $x$ . En el caso de hacer lo contrario  $A^\dagger\psi_0^{(1)} = 0$  se tiene que  $W(x)$  tiene que ser estrictamente negativa para valores positivos de  $x$  y estrictamente positiva para valores negativos de  $x$ . Esto es para que la función de onda sea normalizable, siempre que se cumpla que nuestro

Hamiltoniano respeta la supersimetría, i.e SUSY, y que el estado fundamental con energía nula pertenezca a  $H^{(1)}$ , como hemos tomado por convenio.

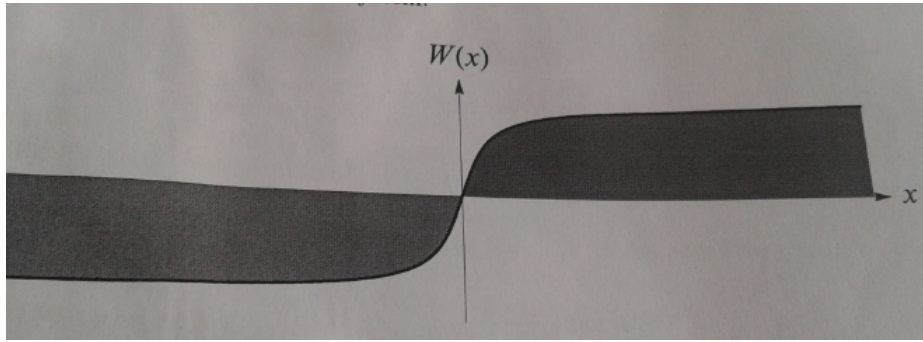


Figura 2: Superpotencial correspondiente a conservación de SUSY, siendo  $H^{(1)}$  el que posee el estado fundamental con energía nula

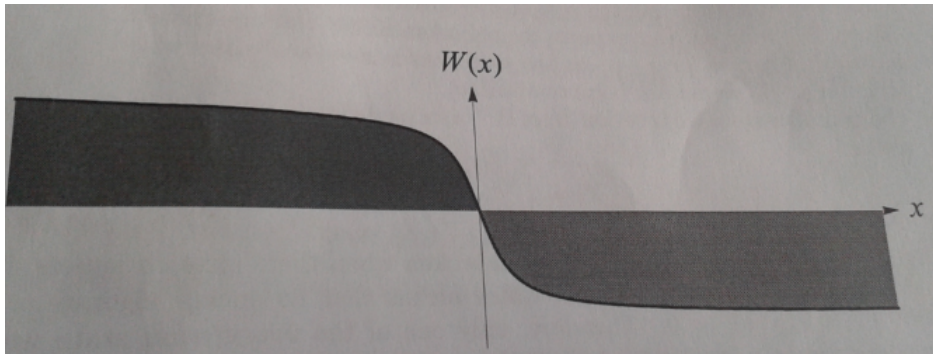


Figura 3: Superpotencial correspondiente a conservación de SUSY, siendo  $H^{(2)}$  el que posee el estado fundamental con energía nula

Esta condición normalización como sabemos obliga a que el valor del estado fundamental en el infinito sea nulo, esto se traduce en que (si el estado fundamental de energía nula pertenece al Hamiltoniano  $H^{(1)}$ ) se tiene que dar las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dy W(y) &= +\infty \\ \int_{-\infty}^0 dy W(y) &= -\infty \end{aligned} \quad (45)$$

Si hacemos que el estado fundamental cuya energía nula pertenezca al Hamiltoniano  $H^{(2)}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dy W(y) &= +\infty \\ \int_0^{\infty} dy W(y) &= -\infty \end{aligned} \quad (46)$$

Pero, ¿ Que sucede si el estado fundamental no es normalizable, debido a que  $W(x)$  no cumple ninguna de las anteriores condiciones?. Lo que sucede es que estamos frente a un caso



en el que la supersimetría está rota, esto implica por lo dicho antes (al principio), que ni  $Q$  ni  $Q^\dagger$  aniquila el estado fundamental  $|0\rangle$ , que viene dado por:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ \psi_0^{(2)}(x) \end{bmatrix}$$

Esto implica que creando los Hamiltonianos obtenidos en la factorización, los asociados a  $V^{(1)}$  y  $V^{(2)}$ , no les podemos atribuir un estado fundamental de energía nula. La ruptura de la supersimetría significa que pueden existir estados no válidos, para esta simetría, de energía nula en ambos Hamiltonianos,  $H^{(1)}$  y  $H^{(2)}$ .

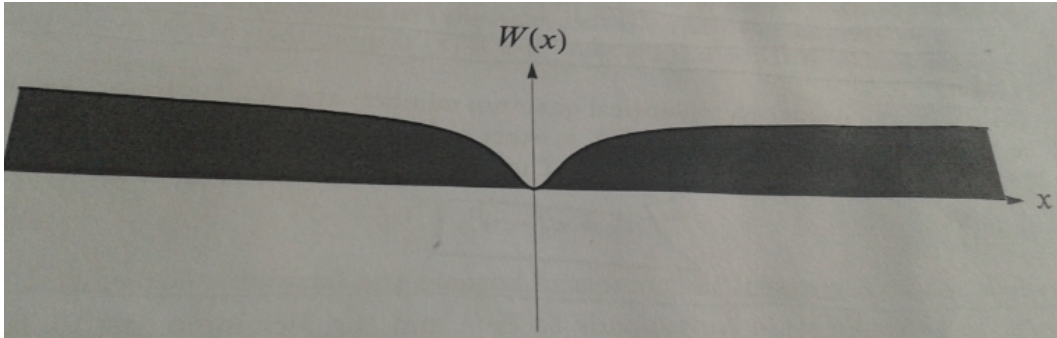


Figura 4: Superpotencial correspondiente a SUSY rota.

Concluimos de esto que el estado fundamental de ambos Hamiltonianos, en supersimetría rota, tienen estados fundamentales con energía positivas no nulas, en el caso de que fueran negativas siempre se puede hacer un desplazamiento de estas energías. Sin embargo el resto de resultados obtenidos por SUSY que no tengan nada que ver con el estado fundamental sigue siendo válido. Esto implica que el espectro de  $H^{(1)}$  y  $H^{(2)}$ , son exactamente iguales, salvo que el estado fundamental con energía  $E_0 > 0$  es degenerado, cosa que no ocurría cuando se respeta la supersimetría SUSY. Esto puede ser observado en la figura 5

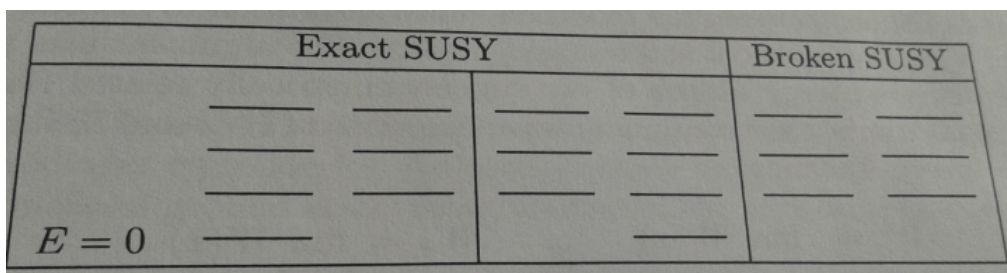


Figura 5: Comparación entre los espectros degenerados, cuando SUSY es conservada y cuando SUSY está rota.

Entonces cuando SUSY está rota se tiene que los operadores  $A$  y  $A^\dagger$  ahora conectan estados con la misma energía y no cambian el número de nodos en las funciones de onda, al contrario de lo que pasaba cuando SUSY se conservaba, esto se traduce en las siguientes relaciones.

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} > 0 \quad E_0^{(1)} = 0$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(1)}}} A \psi_n^{(1)} \quad \psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^\dagger \psi_n^{(2)}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \quad (47)$$

Resumiendo, viendo como es la forma del superpotencial  $W(x)$  asociado, podemos fácilmente determinar si SUSY esta preservada o rota, esto es viendo que el comportamiento en el  $\infty$ , tiene distinto signo si estamos en  $+\infty$  o  $-\infty$ , ya que es cuando la función de onda dada por SUSY es normalizable, y por tanto aceptable.

Sin embargo si el signo de  $W(x)$  es distinto, es decir, es par, se tiene que SUSY está rota, ya que la función de onda del estado fundamental dada por SUSY no es normalizable.

## 6. Cálculo de los estados fundamentales

### 6.1. Introducción

Como ya hemos visto en la anterior sección necesitamos calcular el estado fundamental para hallar los superpotenciales de dicha extensión autoadjunta, para ello lo primero es resolver las siguientes ecuaciones, que haremos de manera numérica usando los programas en C desarrollados, véase Apéndice I, pero ahora aparece el primer problema, ¿Cuándo tenemos la energía del estado fundamental como podemos saber a qué función de onda corresponde?

- Positivas:

$$2s(\cos(s)\sin(\phi) - m_1) = \sin(s)(\cos(\phi)(s^2 + 1) - m_0(s^2 - 1)) \quad (48)$$

- Nulas:

$$2\sin(\phi) - \cos(\phi) = 2m_1 + m_0 \quad (49)$$

- Negativas:

$$\sinh(r)(m_0(r^2 + 1) - \cos(\phi)(r^2 - 1)) = 2r(\sin(r)\cosh(r) - m_1) \quad (50)$$

Tenemos que estas energías no dependen directamente de los coeficientes  $m_3$  y  $m_2$  que caracterizan las extensiones autoadjuntas, de hecho de la condición de normalización se obtiene que la circunferencia dada por:

$$m_2^2 + m_3^2 = 1 - m_0^2 - m_1^2$$

Poseen el mismo espectro, y en concreto la misma energía del estado fundamental, pero sin embargo deben de ser muy diferentes las funciones de onda en cada caso, ya que como vimos en la subsección significado de los parámetros, dependiendo de los coeficientes  $m_2$  y  $m_3$  la solución puede conservar la paridad y reversibilidad temporal o violar una o ambas, por lo que lógicamente aunque el espectro no dependa de ellas las funciones si han de depender y fuertemente. Ahora llega el punto decisivo de si abordar el problema completo con los 5 parámetros de libertad o reducirlos, a casos generales de interés físico e intuitivos para empezar a andar y luego intentar volver a este punto y extenderlo. La segunda opción ha sido la que hemos considerado más lógica debido a que nunca habíamos visto un análisis como este, de las extensiones autoadjuntas y supersimetría.

## 6.2. Restricciones

Por eso hemos considerado en empezar con mantener las simetrías de paridad y reversibilidad temporal, i.e,  $m_2 = 0$  y  $m_3 = 0$ .

Esto nos lleva a una simplificación considerable de las condiciones de contorno y a una posible forma de atacar el problema del cálculo de los estados fundamentales, teniendo solo la energía y los parámetros de esa extensión.

Bajo estas restricciones las condiciones de contorno son:

$$\begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) - i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) + i\phi(a) \end{bmatrix} = e^{i\psi} \begin{bmatrix} m_0 & -im_1 \\ -im_1 & m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) + i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) - i\phi(a) \end{bmatrix} \quad (51)$$

Las cuales aunque a primera vista sigan siendo complicadas son, como veremos a continuación, mucho más agradables.

## 6.3. Calculo de los estados fundamentales

Ahora tenemos que tener en cuenta que estamos obligando a que los estados de nuestras extensiones autoadjuntas preserven la paridad, i.e, sean pares o impares. Esto al ser en una dimensión nos lleva a pensar en que el estado es una función trigonométrica ó hiperbólica en el caso de energías negativas.

### 6.3.1. Energías positivas

Por tanto empecemos con las energías positivas, en este caso esperamos soluciones que sean de la forma:

$$\begin{array}{cc} \text{Par} & \text{Impar} \\ A \cos\left(\frac{sx}{2a}\right) & A \sin\left(\frac{sx}{2a}\right) \end{array}$$

Donde A puede ser calculada trivialmente por condición de normalización, en si esta constante de normalización no nos influirá en el cálculo de los estados, aunque lógicamente depende de la energía del estado, la razón por la que no nos influirá es porque las condiciones de contorno son lineales y por tanto se anula.

Ahora impongamos que nuestro estado fundamental sea una coseno. Entonces tenemos que:

$2a\phi'(-a)$	$2a\phi'(a)$	$\phi(-a)$	$\phi(a)$
$As \sin\left(\frac{s}{2}\right)$	$-As \sin\left(\frac{s}{2}\right)$	$A \cos\left(\frac{s}{2}\right)$	$A \cos\left(\frac{s}{2}\right)$

Ahora llevemos esto a las condiciones de contorno, después de sustituir tenemos las siguientes dos condiciones:

$$s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - i \cos\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + im_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + im_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (52)$$

$$-s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ -im_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) - m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - im_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (53)$$

Ahora pasemos cada una de las ecuaciones a condiciones de igualdad sobre la parte real y parte imaginaria. Después de un cálculo sencillo obtenemos las siguientes condiciones:

- De la primera ecuación:

$$s \sin\left(\frac{s}{2}\right) = \cos(\phi) \left[ m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] - \sin(\phi) \left[ m_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (54)$$

$$- \cos\left(\frac{s}{2}\right) = \sin(\phi) \left[ m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] + \cos(\phi) \left[ m_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (55)$$

- De la segunda ecuación:

$$-s \sin\left(\frac{s}{2}\right) = \cos(\phi) \left[ -m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] + \sin(\phi) \left[ m_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (56)$$

$$\cos\left(\frac{s}{2}\right) = \sin(\phi) \left[ -m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] - \cos(\phi) \left[ m_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (57)$$

Como vemos llevan a las mismas ecuaciones cada una de las ecuaciones, por tanto si tenemos calculada la energía y es positiva, las condiciones para que sea un coseno son las siguientes:

$$s \sin\left(\frac{s}{2}\right) = \cos(\phi) \left[ m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] - \sin(\phi) \left[ m_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (58)$$

$$- \cos\left(\frac{s}{2}\right) = \sin(\phi) \left[ m_0 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - m_1 \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] + \cos(\phi) \left[ m_0 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_1 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (59)$$

Que como vemos depende solamente de los parámetros  $m_1, m_0$  y  $\phi$ .

Viendo lo bien que ha funcionado esta manera de hallarlo hagámoslo también para los estados trigonométricos impares, es decir sinusoidales.

Ahora los valores que tenemos que sustituir en las condiciones de contorno son:

$2a\phi'(-a)$	$2a\phi'(a)$	$\phi(-a)$	$\phi(a)$
$As \cos\left(\frac{s}{2}\right)$	$As \cos\left(\frac{s}{2}\right)$	$-A \sin\left(\frac{s}{2}\right)$	$A \sin\left(\frac{s}{2}\right)$

Ahora las ecuaciones después de sustituir estos valores en las condiciones de contorno son:

$$s \cos\left(\frac{s}{2}\right) + i \sin\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ m_0 \left( s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right) - im_1 \left( s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right] \quad (60)$$

$$s \cos\left(\frac{s}{2}\right) + i \sin\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ m_0 \left( s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right) - im_1 \left( s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right] \quad (61)$$

Ahora hagamos lo mismo que antes, es decir, juntemos las partes imaginarias y reales de cada ecuación y veamos qué resultados obtenemos. Como vemos son iguales las condiciones, por lo que tomemos solo una, y entonces las ecuaciones que se deben de satisfacer son:

$$s \cos\left(\frac{s}{2}\right) = \cos(\phi) \left[ m_0 s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - m_1 \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] + \sin(\phi) \left[ m_1 s \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_0 \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (62)$$

$$\sin\left(\frac{s}{2}\right) = \sin(\phi) \left[ m_0 s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - m_1 \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] - \cos(\phi) \left[ m_1 s \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_0 \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (63)$$

Por tanto para las restricciones impuestas sobre las extensiones autoadjuntas, que recordemos que era que conservaran la simetría de paridad y de reversibilidad temporal, tenemos una vez calculada la energía podemos saber fácilmente, para esa extensión autoadjunta caracterizada por ciertos parámetros, cuál es su estado.

### 6.3.2. Energías negativas

Para las energías negativas hagamos lo mismo, en el caso de que nuestra función hiperbólica sea par, tenemos que sustituir los siguientes valores en las condiciones de contorno:

$2a\phi'(-a)$	$2a\phi'(a)$	$\phi(-a)$	$\phi(a)$
$A - s \sinh(\frac{s}{2})$	$As \sinh(\frac{s}{2})$	$A \cosh(\frac{s}{2})$	$A \cosh(\frac{s}{2})$

Y llevándolas a las condiciones de contorno obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + i \cosh\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ m_0 \left( s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) - i \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \right) + im_1 \left( s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) - i \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right] \quad (64)$$

$$s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + i \cosh\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ m_0 \left( s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) - i \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \right) - im_1 \left( i \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right] \quad (65)$$

Que como vemos son las mismas, por lo que solo impondremos la condición de igualdad de la parte imaginaria y real sobre una de ellas, ya que a la vez la impondremos sobre las dos, esto nos lleva a que la condición para que sea el estado par son las siguientes:

$$s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) [m_1 \sin(\phi) - m_0 \cos(\phi) + 1] = \cosh\left(\frac{s}{2}\right) [m_1 \cos(\phi) + m_0 \sin(\phi)] \quad (66)$$

$$s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) [m_0 \sin(\phi) + m_1 \cos(\phi)] = \cosh\left(\frac{s}{2}\right) [1 + m_0 \cos(\phi) - m_1 \sin(\phi)] \quad (67)$$

Si obligamos a que nuestra función hiperbólica sea impar entonces tenemos que sustituir los siguientes valores en las condiciones de contorno:

$2a\phi'(-a)$	$2a\phi'(a)$	$\phi(-a)$	$\phi(a)$
$As \cosh(\frac{s}{2})$	$As \cosh(\frac{s}{2})$	$-A \sinh(\frac{s}{2})$	$A \sinh(\frac{s}{2})$

Por tanto llevándolas a las condiciones de contorno sobre nuestra extensión autoadjunta tenemos las siguientes ecuaciones:

$$s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) + i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ m_0 \left( s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \right) - im_1 \left( s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right] \quad (68)$$

$$s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) + i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \left[ m_0 \left( s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \right) - im_1 \left( s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right] \quad (69)$$

Que como se ve trivialmente son iguales, por lo que solo cogemos una, imponiendo la igualdad sobre la parte real e imaginaria obtenemos que:

$$s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) [1 - m_0 \cos(\phi) - m_1 \sin(\phi)] = \sinh\left(\frac{s}{2}\right) (m_0 \sin(\phi) - m_1 \cos(\phi)) \quad (70)$$

$$\sinh\left(\frac{s}{2}\right) [1 + m_0 \cos(\phi) + m_1 \sin(\phi)] = s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) [m_0 \sin(\phi) - m_1 \cos(\phi)] \quad (71)$$

Por lo cual con todas las condiciones escritas tenemos perfectamente definido el estado si hallamos por métodos numéricos la energía.

A partir de ahora solo hablaremos del estado fundamental, debido a que es el que nos interesa para calcular el superpotencial y los compañeros potenciales supersimétricos como vimos en la sección anterior.

## 7. Superpotenciales

Ahora haremos el cálculo de los superpotenciales, como sabemos necesitamos la función de onda del estado fundamental para calcular los supercompañeros potenciales, ya que estos vienen dados por las siguientes ecuaciones:

$$V^{(2)}(x) = W^2(x) + \frac{\hbar^2}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (72)$$

$$V^{(1)}(x) = W^2(x) - \frac{\hbar^2}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (73)$$

Donde recordemos que el superpotencial  $W(x)$  se definía como:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\phi_0'(x)}{\phi_0(x)} \quad (74)$$

Con esto llegamos a la conclusión de que primero tenemos que calcular el superpotencial y después los compañeros superpotenciales, antes de nada recordemos que por las unidades escogidas en el paper de los Franceses, los prefactores no nos influyen, por tanto en lo que sigue se tiene que:

$$W(x) = -\frac{\phi_0'(x)}{\phi_0(x)} \quad (75)$$

$$V^{(1)}(x) = W^2(x) - W'(x) \quad (76)$$

$$V^{(2)}(x) = W^2(x) + W'(x) \quad (77)$$

Una vez comentado esto procedamos al cálculo de ellos.

### 7.1. Cálculo de los superpotenciales y compañeros potenciales supersimétricos

Lo primero es distinguir entre los cuatro casos que tenemos, lo cual lo podemos hacer, ya que por la sección anterior sabemos para cada extensión autoadjunta, que cumpla las restricciones impuestas, cuál es su estado fundamental.

#### 7.1.1. Energías positivas

En este apartado calcularemos los potenciales buscados para las energías positivas y por tanto con funciones de onda trigonométricas.

#### Estados fundamentales pares

Como nuestro estado fundamental es un  $N \cos(\frac{s}{2a}x)$ , entonces nuestro superpotencial asociado es:

$$W(x) = \frac{s}{2a} \tan\left(\frac{s}{2a}x\right) \quad (78)$$

Y la derivada de este es:

$$W'(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \quad (79)$$

Por tanto ahora ya podemos hallar los compañeros potenciales supersimétricos, de estas extensiones, que son:

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left[ \tan^2\left(\frac{s}{2a}x\right) + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right] \quad (80)$$

$$V^{(1)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left[ \tan^2\left(\frac{s}{2a}x\right) - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right] \quad (81)$$

Estos utilizando relaciones trigonométricas sencillas se pueden transformar en:

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left[ \frac{2}{\cos^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} - 1 \right] \quad (82)$$

$$V^{(1)}(x) = -\left(\frac{s}{2a}\right)^2 \quad (83)$$

Donde vemos trivialmente que  $V^{(1)}(x)$  es básicamente el pozo de potencial con el origen de energías desplazado por la energía del estado fundamental de esta extensión. Las gráficas de estos potenciales pueden ser observadas en las figuras 6-8.

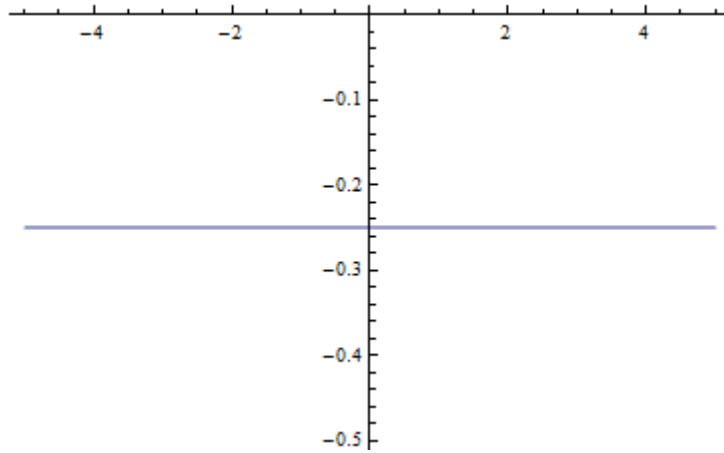


Figura 6: Potencial  $V^{(1)}$ , para las extensiones pares positivas.

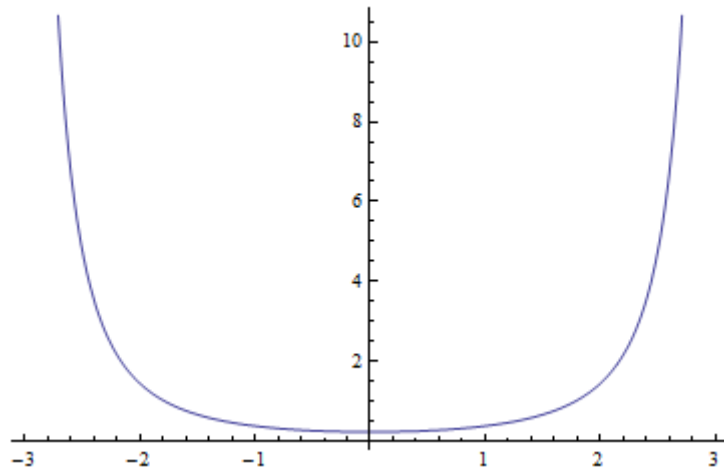


Figura 7: Potencial  $V^{(2)}$ , para las extensiones pares positivas.

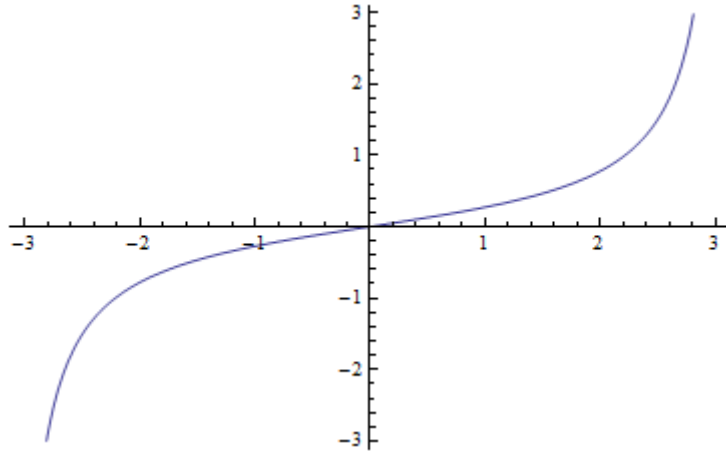


Figura 8: Superpotencial  $W(x)$  asociado a las extensiones positivas pares.

### Estados fundamentales impares

Para estas extensiones el estado fundamental es impar, es decir,  $N \sin(\frac{s}{2a}x)$ , entonces nuestro superpotencial asociado es:

$$W(x) = -\frac{s}{2a} \cot\left(\frac{s}{2a}x\right) \quad (84)$$

Y su derivada es:

$$W'(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \quad (85)$$

Por tanto los compañeros potenciales supersimétricos serán:

$$V^{(1)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left[ \cot^2\left(\frac{s}{2a}x\right) - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right] \quad (86)$$

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left[ \cot^2\left(\frac{s}{2a}x\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right] \quad (87)$$

Que tras unas identidades trigonométricas se simplifica de la siguiente manera:

$$V^{(1)}(x) = -\left(\frac{s}{2a}\right)^2 \quad (88)$$

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left( \frac{2}{\sin^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} - 1 \right) \quad (89)$$

Donde vemos que  $V^{(1)}(x)$  es otra vez el pozo de potencial infinito, solo que su origen esta desplazado la energía del estado fundamental. Esto sucederá en todos los casos, por lo que no lo volveré a comentar.

Estos superpotenciales los podemos ver en las figuras 9-11.



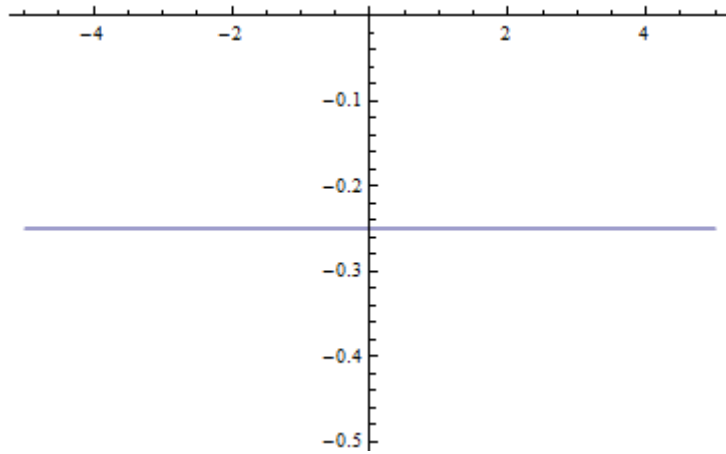


Figura 9: Potencial  $V^{(1)}(x)$ , asociado a las extensiones positivas impares.

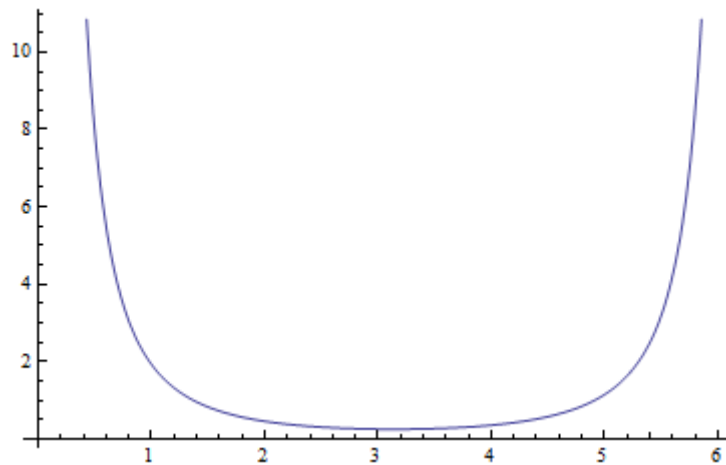


Figura 10: Potencial  $V^{(2)}(x)$ , asociado a las extensiones positivas impares.

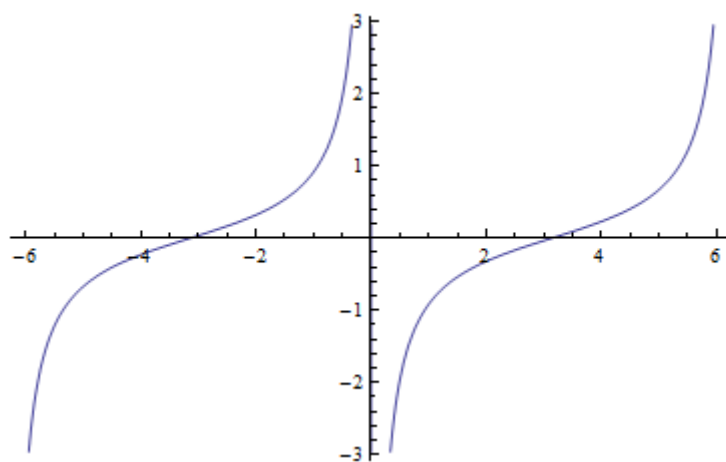


Figura 11: Superpotencial asociado a las extensiones positivas impares.

### 7.1.2. Energías negativas

Ahora calculemos los correspondientes potenciales para energías negativas, en este caso las funciones de onda de los estados fundamentales, de las extensiones autoadjuntas con esas restricciones, son funciones hiperbólicas, veamos cada caso.

#### Estados fundamentales pares

En estas extensiones autoadjuntas nuestro estado fundamental es un  $N \cosh(\frac{s}{2a}x)$ , y por tanto nuestro superpotencial es:

$$W(x) = -\frac{s}{2a} \frac{\sinh(\frac{s}{2a}x)}{\cosh(\frac{s}{2a}x)} \quad (90)$$

Y su derivada es:

$$W'(x) = -\left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2(\frac{s}{2a}x)} \quad (91)$$

Y por tanto los compañeros potenciales supersimétricos son:

$$V^{(1)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left( \tanh^2\left(\frac{s}{2a}x\right) + \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right) \quad (92)$$

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left( \tanh^2\left(\frac{s}{2a}x\right) - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right) \quad (93)$$

Que haciendo uso de las relaciones hiperbólicas más importantes quedan como:

$$V^{(1)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \quad (94)$$

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left( 1 - \frac{2}{\cosh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right) \quad (95)$$

Cuya representación gráfica se puede observar en las gráficas 12-14.

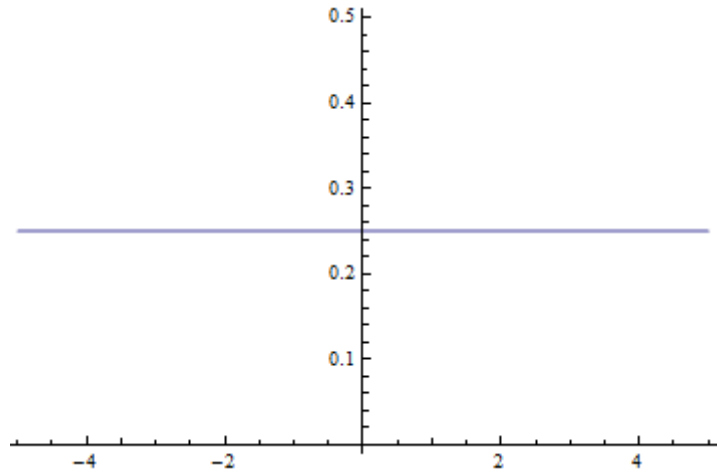


Figura 12: Potencial  $V^{(1)}(x)$ , para las extensiones negativas pares

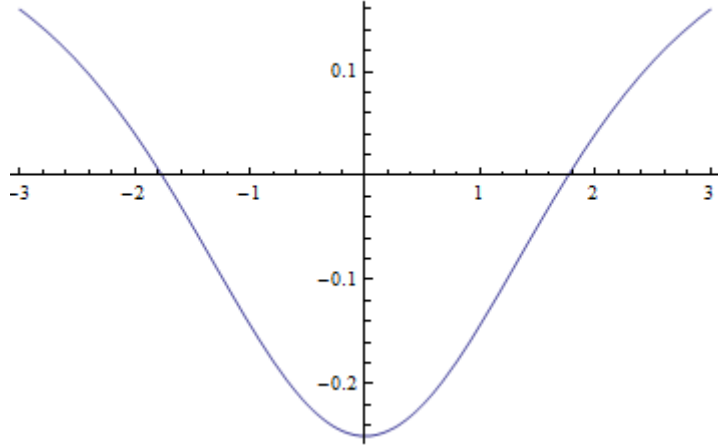


Figura 13: Potencial  $V^{(2)}(x)$ , para las extensiones negativas pares.

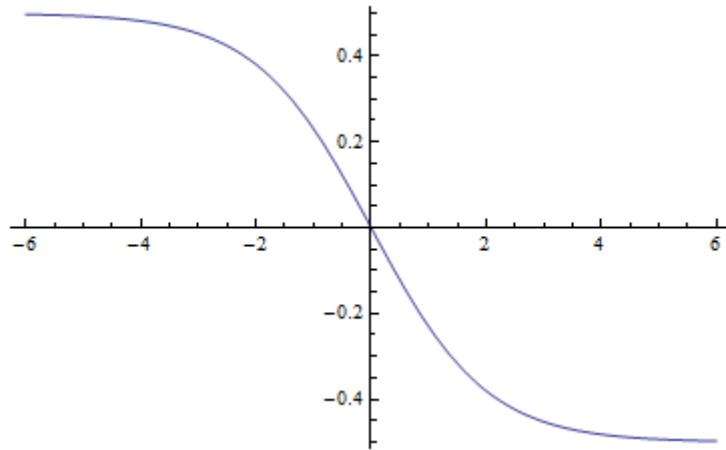


Figura 14: Superpotencial  $W(x)$ , para las extensiones negativas pares.

### Estados fundamentales impares

Para estas extensiones autoadjuntas el estado fundamental es de la forma  $N \sinh(\frac{s}{2a}x)$ , y su superpotencial asociado es:

$$W(x) = -\frac{s \cosh\left(\frac{s}{2a}x\right)}{2a \sinh\left(\frac{s}{2a}x\right)} \quad (96)$$

Y su derivada es:

$$W'(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \quad (97)$$

Por tanto los compañeros potenciales supersimétricos asociados a este superpotencial son:

$$V^{(1)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left( \coth^2\left(\frac{s}{2a}x\right) - \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right) \quad (98)$$

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left( \coth^2\left(\frac{s}{2a}x\right) + \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right) \quad (99)$$

Tras hacer uso de las relaciones hiperbólicas comunes, llegamos a que:

$$V^{(1)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \quad (100)$$

$$V^{(2)}(x) = \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \left( 1 + \frac{2}{\sinh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)} \right) \quad (101)$$

Cuya representación gráfica se puede observar en las figuras 15-17.

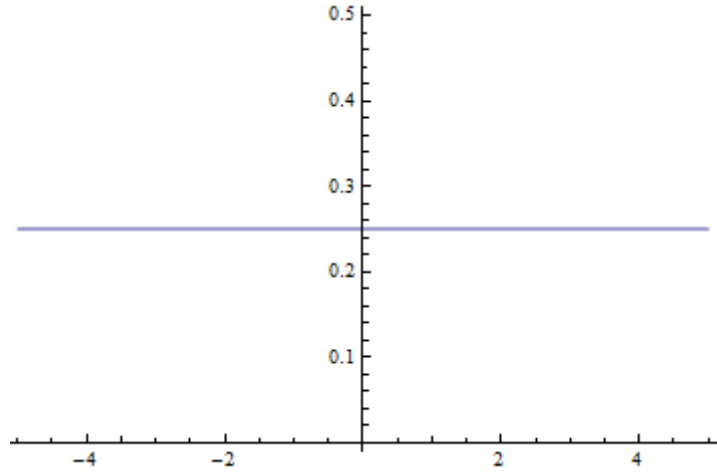


Figura 15: Potencial  $V^{(1)}(x)$ , para las extensiones negativas impares.

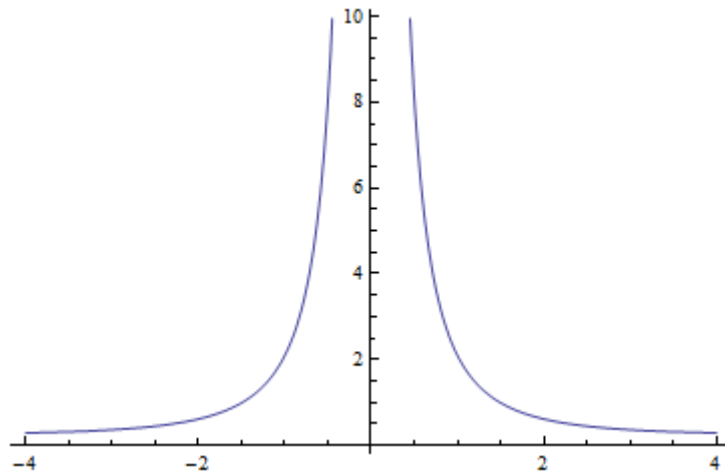


Figura 16: Potencial  $V^{(2)}(x)$ , para las extensiones negativas impares.

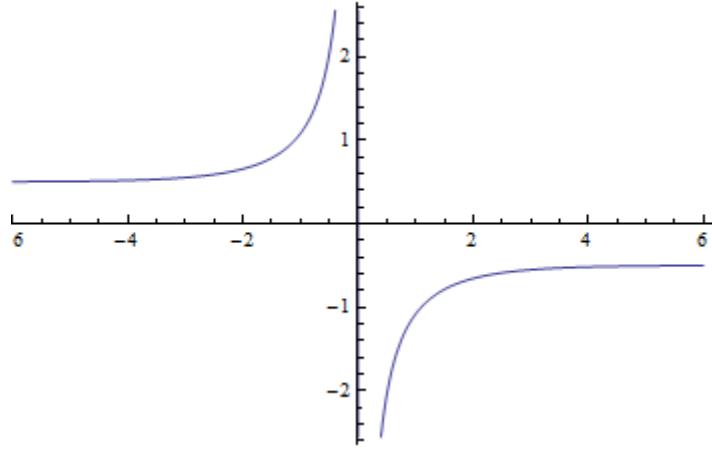


Figura 17: Superpotencial  $W(x)$ , para las extensiones negativas impares.

## 7.2. Resolución del espectro de los compañeros potenciales supersimétricos

Ahora que ya tenemos calculados los compañeros potenciales supersimétricos, pasemos a resolver su espectro, esto es interesante debido a que así podremos comprobar si hay ruptura o no de la supersimetría, y si se da cuando dijimos en la sección de introducción a la supersimetría.

Lo primero es ver que de cada pareja de compañeros potenciales supersimétricos, uno de ellos es el pozo infinito otra vez, por lo que ya tenemos su espectro y su estudio de extensiones autoadjuntas hecho.

Por tanto nos centraremos en resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, para la otra pareja de superpotenciales. Nuestras ecuaciones a resolver son:

Tipo de extensión	Ecuación de Schrödinger asociada
Positiva Par	$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\cos^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E + \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi$
Positiva Impar	$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\sin^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E + \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi$
Negativa Par	$-\frac{d^2}{dx^2}\phi - \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\cosh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E - \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi$
Negativa impar	$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\sinh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E - \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi$

Cuadro 1: Ecuaciones de Schrödinger de los compañeros superpotenciales no resueltos. En la primera palabra, que caracteriza la extensión, nos referimos al signo de la energía, y en la segunda a la paridad de su estado fundamental.

Estas ecuaciones pueden ser resueltas usando que son un tipo de ecuaciones de Schrödinger, bastante conocidas, llamadas Pösch–Teller. Cuya resolución la realizaré en los siguientes apartados. Para simplificarlo calcularé primero las soluciones para las extensiones con energías negativas y después las positivas.

### 7.2.1. Extensiones Negativas Pares

Nuestra ecuación de Schrödinger es:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi - \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\cosh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E - \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi \quad (102)$$

Que bajo una transformación de escala de razón la energía del estado fundamental pasa a ser:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi - \frac{2}{\cosh^2(x)}\phi = \left(\frac{E}{E_0} - 1\right)\phi \quad (103)$$

Ahora hagamos el siguiente cambio de variable,  $x' = \tanh(x)$ , la razón de este cambio es que  $\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &\rightarrow (1 - \tanh^2(x)) \frac{d}{dx'} \\ \frac{d^2}{dx'^2} &\rightarrow (1 - \tanh^2(x))^2 \frac{d^2}{dx'^2} - 2 \tanh(x) (1 - \tanh^2(x)) \frac{d}{dx'} \end{aligned}$$

Cuadro 2: Transformaciones para hacer el cambio de variable.

Entonces si sustituimos pasamos a obtener que nuestra ecuación de Schrödinger es una vieja conocida:

$$(1 - x'^2) \frac{d^2}{dx'^2}\phi - 2x' \frac{d}{dx'}\phi + \left(2 + \frac{\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)}{1 - x'^2}\right)\phi = 0 \quad (104)$$

Por tanto si llamamos  $m$  a  $m^2 = 1 - \frac{E}{E_0}$ , tenemos que nuestra ecuación es:

$$(1 - x'^2) \frac{d^2}{dx'^2}\phi - 2x' \frac{d}{dx'}\phi + \left(2 - \frac{m^2}{1 - x'^2}\right)\phi = 0 \quad (105)$$

Que no es otra que la ecuación de Legendre generalizada, con  $\lambda = 1$ , por tanto sabemos que nuestros autoestados son:

$$\phi_{\lambda=1,m} = P_1^m(\tanh(x)) \quad (106)$$

Y sus energías vienen dadas por:

$$E = E_0 (1 - m^2) \quad (107)$$

Donde  $n$  pertenece a los enteros.

Por tanto tenemos que para este compañero potencial supersimétrico se tiene que.

Función de onda	Energía
$P_1^m(\tanh(\sqrt{E_0}x))$	$E = E_0(1 - m^2)$

Cuadro 3: Funciones de onda y sus energías correspondientes del compañero potencial supersimétrico  $V^{(2)}$  de las extensiones negativas pares.

### 7.2.2. Extensiones Negativas Impares

Para este conjunto de extensiones autoadjuntas la ecuación de Schrödinger es la siguiente:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\sinh^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E - \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi \quad (108)$$

Que haciendo un cambio de escala,  $x' = \sqrt{E_0}x$ , la ecuación pasa a ser:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \frac{2}{\sinh^2(x)}\phi = \left(\frac{E}{E_0} - 1\right)\phi \quad (109)$$

Ahora usemos lo mismo que antes, es decir que  $\frac{1}{\sinh^2(x)} = (\coth^2(x) - 1)$ , por tanto hagamos el cambio de variable  $x' = \coth(x)$ , por el que queda así:

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx'} (1 - \coth^2(x'))$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow (1 - \coth^2(x'))^2 \frac{d^2}{dx'^2} - 2 \coth(x') (1 - \coth^2(x')) \frac{d}{dx'}$$

Cuadro 4: Transformaciones del cambio de variable.

Haciendo esto nuestra ecuación pasa a quedar:

$$(1 - x'^2)^2 \frac{d^2}{dx'^2}\phi - 2x' (1 - x'^2) \frac{d}{dx'}\phi + \left(2(1 - x'^2) + \left(\frac{E}{E_0} - 1\right)\right)\phi = 0 \quad (110)$$

Que como es fácil de ver es equivalente a:

$$(1 - x'^2) \frac{d^2}{dx'^2}\phi - 2x' \frac{d}{dx'}\phi + \left(2 + \frac{\frac{E}{E_0} - 1}{1 - x'^2}\right)\phi = 0 \quad (111)$$

Que vuelve a ser la ecuación de los polinomios de Legendre generalizados, con  $\lambda = 1$ , por tanto sabemos que nuestros autoestados son:

$$\phi_{\lambda=1,m} = P_1^m(\tanh(x)) \quad (112)$$

Y sus energías vienen dadas por:

$$E = E_0(1 - m^2) \quad (113)$$

Donde  $n$  pertenece a los enteros.

Por tanto tenemos que para este compañero potencial supersimétrico se tiene que.

Función de onda	Energía
$P_1^m(\coth(\sqrt{E_0}x))$	$E = E_0(1 - m^2)$

Cuadro 5: Funciones de onda y sus energías correspondientes del compañero potencial supersimétrico  $V^{(2)}$  de las extensiones negativas impares.

### 7.2.3. Extensiones Positivas Pares

Nuestra ecuación de Schrödinger para estas extensiones autoadjuntas es la siguiente:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\cos^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E + \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi \quad (114)$$

Lo primero es simplificar los factores que nos aparecen, por ello hacemos un cambio de escala en la variable espacial, de valor  $E_0$ . Entonces obtenemos que:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \frac{2}{\cos^2(x)}\phi = \left(\frac{E}{E_0} + 1\right)\phi \quad (115)$$

Una vez hecho esto hagamos el cambio de variable  $x' = ix$ , para que nos aparezca una ecuación que ya conocemos.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} &\rightarrow -\frac{d^2}{dx'^2} \\ \cos(x) &\rightarrow \cosh(x') \end{aligned}$$

Cuadro 6: Transformaciones del cambio de variable.

Y la ecuación de Schrödinger pasa a ser:

$$\frac{d^2}{dx'^2}\phi + \frac{2}{\cosh^2(x')}\phi = \left(\frac{E}{E_0} + 1\right)\phi \quad (116)$$

Que no es ni más ni menos que la ecuación de Schrödinger para las extensiones negativas pares, por lo que haciendo los mismos cambios de variable que hicimos en ella, y los mismo cálculos, obtenemos la solución para este compañero supersimétrico, la única diferencia está en la energía, que el resultado lógicamente es distinto, para ello hay que notar que son diferentes ambas ecuaciones en la expresión de ella. Haciendo lo dicho antes se llega a que:

Funciones de onda	Energías
$P_1^m(\tanh(i\sqrt{E_0}x)) = P_1^m(i \tan(\sqrt{E_0}x))$	$E = E_0(m^2 - 1)$

Cuadro 7: Funciones de onda y energías de los autoestados del compañero potencial supersimétrico  $V^2$  para las extensiones positivas pares.

### 7.2.4. Extensiones Positivas Impares

Nuestra ecuación de Schrödinger para estas extensiones autoadjuntas es la siguiente:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi + \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \frac{2}{\sin^2\left(\frac{s}{2a}x\right)}\phi = \left(E + \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right)\phi \quad (117)$$

Que haciendo un cambio de escala pasa a ser:

$$-\frac{d^2}{dx'^2}\phi + \frac{2}{\sin^2(x')}\phi = \left(\frac{E}{E_0} + 1\right)\phi \quad (118)$$

Hagamos ahora otra vez el cambio  $x' = ix$ , y usemos que:



$$\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow -\frac{d^2}{dx'^2}$$

$$\sin(x) \rightarrow i \sinh(x')$$

Cuadro 8: Transformaciones del cambio de variable.

La ecuación pasa a ser:

$$\frac{d^2}{dx'^2} \phi - \frac{2}{\sinh^2(x')} \phi = \left( \frac{E}{E_0} + 1 \right) \phi \quad (119)$$

Que salvo un par de detalles es exactamente la misma ecuación que la resuelta en el apartado extensiones negativas impares, por lo cual ya sabemos su solución y tenemos que:

Funciones de onda	Energías
$P_1^m (\coth (i\sqrt{E_0}x)) = P_1^m (-i \cot (\sqrt{E_0}x))$	$E = E_0 (m^2 - 1)$

Cuadro 9: Funciones de onda y energías de los autoestados del compañero potencial supersimétrico  $V^2$  para las extensiones positivas impares.

Es de destacar que hemos llegado a un punto muerto, al menos en apariencia, queremos comprobar que SUSY se ha de conservar, sin embargo tenemos que un compañero supersimétrico,  $H^{(1)}$ , tiene infinitos espectros, mientras que  $H^{(2)}$  tiene solo un espectro, debido a que es esencialmente autoadjunto.

Entonces llegamos a un callejón sin salida aparente, hemos de comparar infinitos espectros con uno, lo cual lógicamente dará resultados negativos.

Por tanto la comparación de espectros y determinar si SUSY es preservada es imposible de resolver, tendremos que hallar otro camino, en hallar ese camino, que es la razón de la siguiente sección, hemos usado que toda la supersimetría se basa en el estado fundamental, con energía nula, que genera SUSY. Y hemos usado que si ese estado fundamental es normalizable, entonces SUSY es conservada, eso lleva a algunos resultados interesantes, que aparecen en la siguiente sección.

## 8. Análisis de SUSY

### 8.1. Introducción

Por los resultados obtenidos en el apartado Supersimetría rota, sabemos que la SUSY es conservada si el superpotencial  $W(x)$  cumple las siguientes condiciones:

$$\int_0^\infty W(x)dx = \pm\infty \quad \int_{-\infty}^0 W(x)dx = \mp\infty$$

Si se cumple el primer caso tenemos que la energía del estado fundamental del Hamiltoniano  $H^{(1)}$ , el cual construimos con  $V^{(1)}$ , tiene que tener energía nula, esto lo obligamos a través de un cambio del origen de energías, en el caso de que sea el opuesto, la energía del estado fundamental del Hamiltoniano  $H^{(2)}$ , que construimos con  $V^{(2)}$ , es el que posee la energía nula.

Recordemos que todo esto es para hacer que el estado fundamental que caracteriza a SUSY sea normalizable, y conduce a que el superpotencial que relaciona ambos sistemas cuánticos sea impar, cosa que sucede en todos los casos estudiados hasta ahora.

La razón por la cual nos interesa es por la duda que nos surge al analizar los resultados obtenidos, que es que el potencial  $V^{(1)}$ , tiene infinitas extensiones autoadjuntas asociadas, que vienen parametrizadas por  $SU(2)$ , mientras que el potencial  $V^{(2)}$  es esencialmente autoajunto, es decir solo tiene un único espectro, entonces que sucede aquí, la pregunta lógica y que nos la da un simple análisis físico es la siguiente ¿Que extensión autoadjunta escogemos para que se conserve SUSY, si ha de conservarse, ya que si pudiéramos escoger cualquiera no se conservaría? ¿Y cuál es la relación, de la extensión que preserva SUSY, con la extensión inicial, la que genera los compañeros superpotenciales?.

Para contestar a estas preguntas lo que haremos será lo siguiente, como todos nuestros superpotenciales asociados son impares, entonces SUSY ha de verificarse, ya que la función de onda del estado fundamental, construida por SUSY, es normalizable y por tanto físicamente válida. Entonces a través de los valores de las integrales de los superpotenciales podemos saber qué energía fundamental, de que Hamiltoniano, que caracteriza los sistemas cuánticos supersimétricos, ha de ser nula y cual no.

Esto nos sirve para hallar unas condiciones sobre la extensión asignada favorecida por SUSY, ya que el Hamiltoniano  $H^{(2)}$  es esencialmente autoajunto y solo tiene un espectro, por lo que esto es lo que simplifica y facilita esta comparación.

Por tanto una vez introducida la intención de esta sección, pasemos a hacer los cálculos.

## 8.2. Características de los superpotenciales

Como sabemos todos los superpotenciales son impares, y vienen dados por:

Tipo de extensión	Superpotencial
Positivas Pares	$\sqrt{E_0} \tan [\sqrt{E_0}x]$
Positivas Impares	$-\sqrt{E_0} \cot [\sqrt{E_0}x]$
Negativas Pares	$-\sqrt{E_0} \tanh [\sqrt{E_0}x]$
Negativas Impares	$-\sqrt{E_0} \coth [\sqrt{E_0}x]$

Ahora tenemos que hallar las integrales de estos superpotenciales, esto es sencillo, son integrales inmediatas, que pueden verse en cualquier libro de tablas matemáticas, se tiene que hay un pequeño problema para calcular las integrales de los superpotenciales asociados a los estados trigonométricos, debido a sus múltiples divergencias, sin embargo es fácil de ver que podemos pensar que el valor de la integral entre cero e infinito es equivalente al valor entre cero y  $\frac{\pi}{2\sqrt{E_0}}$ , debido a que el resto de contribuciones se cancelan por la simetría, son impares respecto a cada punto de divergencia. Esto nos lleva a que las integrales valen:

Superpotencial	$I_1$	$I_2$
$\sqrt{E_0} \tan[\sqrt{E_0}x]$	$+\infty$	$-\infty$
$-\sqrt{E_0} \cot[\sqrt{E_0}x]$	$-\infty$	$+\infty$
$-\sqrt{E_0} \tanh[\sqrt{E_0}x]$	$-\infty$	$+\infty$
$-\sqrt{E_0} \coth[\sqrt{E_0}x]$	$-\infty$	$+\infty$

Donde  $I_1$  es la integral de cero a infinito y  $I_2$  es la integral de menos infinito a cero.

De esto podemos saber a que Hamiltoniano le corresponde el estado fundamental con energía nula, y se tiene que:

Positivas pares	→	$H^{(1)}$
Positivas impares	→	$H^{(2)}$
Negativas pares	→	$H^{(2)}$
Negativas impares	→	$H^{(2)}$

Por tanto ya sabemos en cada caso cual es el Hamiltoniano cuya energía del estado fundamental es nula.

Usando esto junto las características del espectro de cada sistema cuántico supersimétrico podemos identificar que características poseen las extensiones validas por SUSY, que recordemos son:

- Para el segundo sistema cuántico supersimétrico,  $H^{(2)}$ :

- Si la extensión inicial es positiva:

$$E = E_0(m^2 - 1) \quad (120)$$

- Si la extensión inicial es negativa:

$$E = E_0(1 - m^2) \quad (121)$$

- Para el primer sistema cuántico supersimétrico,  $H^{(1)}$ :

- Si la extensión inicial es positiva:

$$E = \pm \left(\frac{s}{2a}\right)^2 - E_0 \quad (122)$$

Siendo + si escogemos una extensión positiva y - si escogemos una extensión negativa, teniendo en cuenta que el valor de s viene dado en cada caso por una expresión dada anteriormente.

- Si la extensión inicial es negativa:

$$E = E_0 \pm \left(\frac{s}{2a}\right)^2 \quad (123)$$

Siendo + si escogemos una extensión positiva y - si escogemos una extensión negativa, teniendo en cuenta que el valor de s viene dado en cada caso por una expresión dada anteriormente.

Teniendo en cuenta que los valores posibles de m son  $\pm 1, 0$ .

Ahora veamos que sucede con cada uno de los casos, es decir, si  $H^{(2)}$  posee el estado fundamental con energía nula o  $H^{(1)}$  es el que lo posee.

Pero antes de eso hagamos un escalamiento en las energías, para que así sea más fácil la comparación, si la extensión inicial es positiva, entonces dicho escalamiento será  $E' = E + E_0$ , en caso de que sea negativa  $E' = E - E_0$ .

### 8.3. $H^{(2)}$ posee el estado fundamental con energía nula

Para este caso tenemos dos casos relevantes, ya que aparece cuando la extensión inicial es positiva o negativa, por tanto distingamos entre ellos.

### 8.3.1. Extensión inicial positiva

Como sabemos en este caso  $E' = E_0 m^2$ , por tanto su estado fundamental,  $m=0$ , ya posee energía nula, es decir no tenemos que hacer ninguna traslación.

Y se tiene, por ser conservada SUSY, que el estado fundamental de  $H^{(1)}$ , tiene que poseer energía igual a  $E_0$ , es decir  $\left(\frac{s}{2a}\right)^2 = E_0$ , donde hemos escogido una extensión positiva, ya que  $E_0$  es positiva.

Usando esto podemos hallar las extensiones que cumplen esta condición.

### 8.3.2. Extensión inicial negativa

Como sabemos en este caso  $E' = -m^2|E_0|$ , por tanto su estado fundamental es  $m = \pm 1$ , cuya energía es menor que cero, por lo que hay que hacer una traslación de valor  $|E_0|$ .

Esto hace, junto con la conservación de SUSY, que el estado fundamental del sistema cuántico  $H^{(1)}$  sea  $|E_0|$ , como dicha traslación hace que la energía de los estados de este sistema cuántico sea  $E' = |E_0| \pm \left(\frac{s}{2a}\right)^2$ , esto implica a que la energía de dicho sistema cuántico ha de ser aquella con  $s=0$ , esto nos permite hallar que extensiones cumplen dicha condición y por tanto son válidas respetando la supersimetría.

Ahora tenemos que investigar el otro caso, es decir aquel en el cual es  $H^{(1)}$  el que posee energía de estado fundamental nula.

## 8.4. $H^{(1)}$ posee el estado fundamental con energía nula

Este caso solo lo cumplen las extensiones iniciales pares, por tanto solo nos centraremos en el.

Como sabemos para el segundo sistema cuántico supersimétrico,  $H^{(2)}$ , sus energías vienen dadas por  $E' = m^2 E_0$ , por lo que su estado fundamental posee energía nula.

Mientras que para el primer sistema cuántico supersimétrico,  $H^{(1)}$ , sus energías vienen dadas por  $E' = \pm \left(\frac{s}{2a}\right)^2$ .

Por tanto como el estado fundamental de menor energía tiene que ser el del primer sistema cuántico, por SUSY, se tiene que tenemos que escoger una extensión con energía negativa.

Además como los niveles excitados, de este primer sistema cuántico supersimétrico, han de tener la misma energía que los del segundo sistema cuántico, se tiene, tras un análisis sencillo, que:

- La energía del primer estado excitado, de dicha extensión negativa, ha de ser nula.
- La energía del segundo estado excitado, de dicha extensión negativa, ha de tener un valor igual a  $E_0$ .

## 8.5. Análisis de la simetría

Como sabemos hemos escogido extensiones autoadjuntas que preservan paridad y reversibilidad temporal, es decir tenemos que:

$$[H_{U_{PT}}, P] = [H_{U_{PT}}, T] = 0 \quad (124)$$

Donde  $H_{U_{PT}}$  quiere decir Hamiltoniano, asociado a la extensión autoadjunta que preserva paridad y reversibilidad temporal.

Además hemos obtenido que estas extensiones autoadjuntas conservan SUSY, es decir podemos escribir que:

$$[H_{U_{PT}}, SUSY] = 0 \quad (125)$$

Esto nos conduce a que:

$$[SUSY, P] = [SUSY, T] = 0 \quad (126)$$

Es decir los estados de los Hamiltonianos de los sistemas cuánticos supersimétricos son pares o impares.

Esto nos sirve para reducir la familia de las extensiones autoadjuntas que preservan SUSY, y que por tanto son aquellas validas para el primer sistema cuántico supersimétrico, ya que son aquellas con  $m_3 = 0$  y  $m_2 = 0$ .

En si este análisis está pendiente, es decir no se han realizado los programas para su análisis, la razón es la falta de tiempo. El único análisis que se puede realizar sería el de las extensiones iniciales positivas con estado impar, que es trivial, ya que solo necesita los datos de las energías de los estados fundamentales. Se tiene que buscar una extensión con energía positiva y que sea impar, una vez hecho esto hay que buscar, entre todas las energías fundamentales, aquella cuya energía fundamental coincida, en valor, con la energía del estado fundamental anterior, lógicamente es de esperar que sea solo aquella extensión que la genera.

Para las extensiones negativas, hay que hallar todas las extensiones cuya energía fundamental sea estrictamente nula, y esas son las extensiones posibles por SUSY.

Para las extensiones positivas pares, hay que buscar aquellas cuya energía fundamental sea negativa, su primer estado excitado posea energía nula y su segundo estado excitado tenga valor  $E_0$ , siendo esta energía la energía de la extensión positiva inicial. Es fácil ver que este programa será el más complicado de realizar.

Estos serían los pasos siguientes que se hubieran realizado, y que hubieran completado el estudio bajo reversibilidad temporal y paridad, pero por falta de tiempo no se han podido realizar.

## 9. Resumen, Conclusiones y Problemas Abiertos

Esquemáticamente lo que hemos hecho es lo siguiente:

- Se ha analizado el problema de extensiones autoadjuntas de operadores simétricos.
- Se han estudiado extensiones autoadjuntas de operador Energía Cinética en el pozo infinito unidimensional.
- Se ha estudiado la forma de construir los partners supersimétricos de Hamiltonianos con espectro discreto.
- Se han calculado los estados fundamentales de las extensiones autoadjuntas, haciendo uso de simplificaciones, Paridad y Reversibilidad temporal, debido a su importancia para hallar los partners supersimétricos.
- Hemos encontrado los partners supersimétricos para el operador Energía Cinética en el pozo infinito unidimensional.
- Se analiza SUSY para las extensiones con paridad y reversibilidad temporal.

Nuestras conclusiones son que solo son posibles algunas extensiones autoadjuntas del primer sistema cuántico supersimétrico, debido a la conservación de SUSY.

El problema abierto es generalizar el estudio realizado hasta ahora, i.e, hacerlo en el caso de violación de reversibilidad temporal y paridad, en los Apéndices II y III, hacemos los primeros pasos, y planteamos, sobre todo en el Apéndice III, los problemas que pueden surgir y el camino a recorrer, no se ha realizado por falta de tiempo.

## 10. Bibliografía

### Referencias

- [1] ,Guy Bonneau, Jacques Faraut and Galliano Valent, Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics, American Journal of physics,**69**,10.1119/1.1328351,(2001).
- [2] S.Kuru,J.Negro, Dynamical algebras for Pösch-Teller hamiltonian hierarchies,Annals of Physics,**324**,2548-2560,(2009).
- [3] Alonso Contreras Astorga, David J.Fernández, Supersymmetric partners of the trigonometric Pösch-Teller potential, Journal Physics A Mathematical and Theroretical, **41**,47303,(2008).
- [4] Fred Cooper, Avinash Khare, Uday Sukhatme,*Supersymmetry in Quantum Mechanics*,(Word Scientific), Singapur and London, 2004.
- [5] J.I Diaz, Jnegro, Nieto Lm, Rosas-Ortiz, The Supersymmetric modified PT and delta well potentials, Journal of Physics A-Mathematical and general,**32**,8447-8460,(1999).
- [6] David J.Fernández C., Supersymmetric Quantum Mechanics, arXiv:0910.0192V1.
- [7] Adrian Oeftiger, **Bachelor Thesis**, Supersymmetric Quantum Mechanics, University pof Bern,(2010).
- [8] M.Reed, B.Simon,*Funtional Analysis*,(Academic),San Diego NewYork Boston London Sydney Tokio Toronto,(1980).
- [9] M.Reed, B.Simon,*II:Fourier Analysis, Self-Adjointness*,(Academic),San Diego NewYork Boston London Sydney Tokio Toronto,(1975).

## 11. Apéndice I. Programas

En este apéndice están escritos los códigos de C desarrollados para hallar las energías de los estados fundamentales de ciertas extensiones autoadjuntas, en concreto las que preservan la paridad y la reversibilidad temporal, para ello lo he separado en siete programas distintos, en ellos se utiliza Monte Carlo para generar números aleatorios que luego han de satisfacer ciertas condiciones y después se escogen aquellos que sean fundamentales.

En general, todos los códigos vienen con explicaciones de la razón (y la idea seguida en su programación), puede que a través de un lenguaje más complicado o una idea mejor puedan convertirse en más eficientes, pero han sido los programas que he desarrollado para hallar estas energías.

La razón por la que es obvia la necesidad de programar para hallar los datos es que son infinitas las energías para calcular, por ello es mejor que haga estos cálculos un ordenador que programar en Mathematica, para cada extensión, y resolver la ecuación trascendental viendo donde se produce el corte, lo cual es bastante tedioso (y requiere una gran cantidad de tiempo), por ello se desarrollaron estos códigos.

Por tanto, una vez introducida la necesidad de la programación de dichos códigos, pasemos a explicar cada uno de ellos.

### 11.1. Código base

Este código es el desarrollado para generar números aleatorios, ha de guardarse como `generador.h`, para que no haya problemas con los programas siguientes, este código es el siguiente:

```
#include <time.h>

long double timeinseconds ()
{
    long double seconds;
    struct timespec time;
    clock_gettime(CLOCK_MONOTONIC, &time);
    // time.tv_sec is the number of seconds since last boot
    // time.tv_nsec is the number of nanoseconds since time.tv_sec
    // Hence, the time in seconds, with nine decimals of precision, is time.tv_sec +
    //     time.tv_nsec/1000000000
    // A time in seconds with nine decimals of precision is equivalent to a time
    //     with a nanosecond of precision
    seconds=(long double)time.tv_sec + (long double)time.tv_nsec/1.e+09;
    return(seconds);
}

long long seed ()
{
    long double ns;
    ns=timeinseconds ()*1.e+09; // nanoseconds since epoch as a real number
    return (long long)ns; // nanoseconds since epoch as an integer number
}

double scalerandom(double rn, double a, double b)
{
    return a+(b-a)*rn;
}
```

## 11.2. Primer código

En este primer código simplemente se generan una serie de números aleatorios para los parámetros energía, y los que caracterizan la extensión y se imponen unas condiciones, calculadas analíticamente en una sección anterior, para ver si son validos.

Este programa y el siguiente podrían ser combinados en uno, pero es más eficiente separarlos, la razón es que podemos ejecutarlos en terminales distintas y por tanto reducir el tiempo de espera.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#include"generador.h"

int main(){
/*Lo primero es pedir cuantos datos de s quiere probar.*/
int Ns;
printf("Escriba el número de valores , diferentes , de s que quiere tomar.\n");
scanf("%d",&Ns);

/*Ahora lo siguiente es el número de pares de valores de phi y de m que quiere
tomar*/

long long N;
printf("Escriba el número de pares de valores , de phi y de m, que quiere tomar.\n");
scanf("%lld",&N);

/*Ahora lo primero que hay que hacer es generar la semilla , junto con la
apertura del flujo de datos.*/

srand48(seed());

FILE* par;
par=fopen("par.dat","w");

/*Una vez hecho esto , ya solo queda generar por montecarlo un número de valores
aleatorios y poner los condicionales para ver cuando valen y cuando no.*/

int i,j;
double s,phi,m,a,b,c,d,e,Pi,m1;
s=0.0;
phi=0.0;
m=0.0;
a=0.0;
b=0.0;
c=0.0;
d=0.0;
e=0.0;
Pi=acos(-1.0);

for(i=0;i<=Ns;i=i+1){
/*Ahora genero el valor de s , para ello lo tomaré entre los limites donde mayor
es la densidad que hemos tomado por mathematica.*/

s=scalerandom(drand48(),0.0001,3.5);
```



```

/* Ahora tenemos que generar phi y m.*/
for (j=0; j<=N; j=j+1){
    phi=scalerandom (drand48 () ,0.0 ,Pi);
    m=scalerandom (drand48 () , -1.0 ,1.0);
/* Ahora toca incluir los parámetros que nos dirán si la ecuación se satisface o
no.*/
    a=2.0*s*(cos (s)*sin (phi) - sqrt (1.0-m*m))- sin (s)*(cos (phi)*(s*s +1.0) -
        m*(s*s -1.0));
/* Condición de que sea par*/
/* Con m1>0*/
    b=-s*sin (s/2.0) + cos (phi)*(m*s*sin (s/2.0)-sqrt (1.0-m*m)*cos (s/2.0)) -
        sin (phi)*(m*cos (s/2.0) + sqrt (1.0-m*m)*s*sin (s/2.0));
    c=cos (s/2.0) + sin (phi)*(m*s*sin (s/2.0) - sqrt (1.0-m*m)*cos (s/2.0)) +
        cos (phi)*(m*cos (s/2.0) + sqrt (1.0-m*m)*s*sin (s/2.0));
/* Con m1<0*/
    e=-s*sin (s/2.0) + cos (phi)*(m*s*sin (s/2.0) + sqrt (1.0-m*m)*cos (s/2.0)) -
        sin (phi)*(m*cos (s/2.0) - sqrt (1.0-m*m)*s*sin (s/2.0));
    d=cos (s/2.0) + sin (phi)*(m*s*sin (s/2.0) + sqrt (1.0-m*m)*cos (s/2.0)) +
        cos (phi)*(m*cos (s/2.0) - sqrt (1.0-m*m)*s*sin (s/2.0));
/* Ahora hay que imponer las condiciones.*/
    if (fabs (a) <0.00000001){
        if (fabs (b) <0.00000001){
            if (fabs (c) <0.00000001){
                /* Con m1>0*/
                m1=sqrt (1-m*m);
                fprintf (par , " %d _ %d _ %d _ %d \n" , s , phi , m , m1);
            }
        }
        if (fabs (d) <0.00000001){
            if (fabs (e) <0.00000001){
                /* Con m1<0*/
                m1=-sqrt (1-m*m);
                fprintf (par , " %d _ %d _ %d _ %d \n" , s , phi , m , m1);
            }
        }
    }
}
fclose (par);
return 0;
}

```

Los resultados nos aparecerán escritos en par.dat, como lo que necesitamos es que nos aparezcan en partotall.dat, lo que tenemos que hacer es que una vez ejecutado el programa, a través de la terminal, digamos que los datos par.dat se escriban en partotall.dat, esto es fácil hacerlo en la terminal a través de:

```
cat par.dat >> partotall.dat
```

Esto es útil ya que podemos elegir si los datos obtenidos en la primera ejecución son relevantes o no.

### 11.3. Segundo código

Este código hace lo mismo que el anterior pero para las soluciones impares.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#include"generador.h"

int main(){
/*Lo primero es pedir cuantos datos de s quiere probar.*/
int Ns;
printf("Escriba el número de valores , diferentes , de s que quiere tomar.\n");
scanf("%d",&Ns);

/*Ahora lo siguiente es el número de pares de valores de phi y de m que quiere
tomar*/

long long N;
printf("Escriba el número de pares de valores , de phi y de m, que quiere tomar.\n");
scanf("%lld",&N);

/*Ahora lo primero que hay que hacer es generar la semilla , junto con la
apertura del flujo de datos.*/

srand48(seed());

FILE* impar;
impar=fopen("impar.dat","w");

/*Una vez hecho esto , ya solo queda generar por montecarlo un número de valores
aleatorios y poner los condicionales para ver cuando valen y cuando no.*/

int i , j;
double s , phi , m , a , b , c , d , e , Pi , m1;
m1=0.0;
s=0.0;
phi=0.0;
m=0.0;
a=0.0;
b=0.0;
c=0.0;
d=0.0;
e=0.0;
Pi=acos(-1.0);

for(i=0;i<=Ns;i=i+1){
/*Ahora genero el valor de s , para ello lo tomaré entre los limites donde mayor
es la densidad que hemos tomado por mathematica.*/

s=scalerandom(drand48(),0.0001,3.5);

/*Ahora tenemos que generar phi y m.*/
for(j=0;j<=N;j=j+1){
```

```

        phi=scalerandom(drand48(),0.0,Pi);
        m=scalerandom(drand48(),-1.0,1.0);
/*Ahora toca incluir los parámetros que nos dirán si la ecuación se satisface o
no.*/
        a=2.0*s*(cos(s)*sin(phi) - sqrt(1.0-m*m))- sin(s)*(cos(phi)*(s*s +1.0) -
        m*(s*s -1.0));
/*Condición de que sea impar*/
/*Con m1>0*/
        d=-s*cos(s/2.0) + cos(phi)*(m*s*cos(s/2.0) - sqrt(1.0-m*m)*sin(s/2.0)) +
        sin(phi)*(sqrt(1.0-m*m)*s*cos(s/2.0) + m*sin(s/2.0));
        e=-sin(s/2.0) + sin(phi)*(m*s*cos(s/2.0) - sqrt(1-m*m)*sin(s/2.0)) - cos
        (phi)*(sqrt(1.0-m*m)*s*cos(s/2.0) + m*sin(s/2.0));
/*Con m1<0*/
        b=-s*cos(s/2.0) + cos(phi)*(m*s*cos(s/2.0) + sqrt(1.0-m*m)*sin(s/2.0)) +
        sin(phi)*(-sqrt(1.0-m*m)*s*cos(s/2.0) + m*sin(s/2.0));
        c=-sin(s/2.0) + sin(phi)*(m*s*cos(s/2.0) + sqrt(1-m*m)*sin(s/2.0)) - cos
        (phi)*(-sqrt(1.0-m*m)*s*cos(s/2.0) + m*sin(s/2.0));
/*Ahora hay que imponer las condiciones.*/
        if(fabs(a)<0.00000001){
                if(fabs(e)<0.00000001){
                        if(fabs(d)<0.00000001){
                                /*Este es el caso m1>0*/
                                m1=sqrt(1- m*m);
                                fprintf(impar," %d f _ %d f _ %d f _ %d f \n",s,phi,m,m1);
                        }
                        if(fabs(b)<0.00000001){
                                if(fabs(c)<0.00000001){
                                        /*Este es el caso m1<0*/
                                        m1=-sqrt(1- m*m);
                                        fprintf(impar," %d f _ %d f _ %d f _ %d f \n",s,phi,m,m1);
                                }
                        }
                }
        }
}
}
fclose(impar);

return 0;
}

```

Al final de cada ejecución debemos hacer lo mismo que en el anterior, es decir, lo siguiente:

```
cat impar.dat >> impartotall.dat
```

## 11.4. Tercer y cuarto código

Estos códigos simplemente son códigos burbuja, sirven para ordenarlos, la razón por la que están separados es por conveniencia para ejecutarlos en momentos diferentes, por ejemplo si estamos analizando los pares los impares no nos interesan.

La razón de por qué son útiles es para conveniencia en la interpretación, los ordenan por energías, lo cual siempre es útil al analizar resultados.

Para los impares es:

```
#include <stdio.h>
```

```

void bubblesort(int length , double array [] ,double array2 [] ,double array3 [] ,
double array4 [] )
{
    int i, j;
    double tmp, tmp2, tmp3, tmp4;
    for (i = 0; i < length - 1; i++) {
        for (j = 0; j < length - i - 1; j++) {
            if (array[j] > array[j + 1])
            {
                tmp = array[j];
                tmp2 = array2[j];
                tmp3 = array3[j];
                tmp4 = array4[j];
                array[j] = array[j + 1];
                array2[j]=array2[j+1];
                array3[j]=array3[j+1];
                array4[j]=array4[j+1];
                array[j + 1] = tmp;
                array2[j + 1]= tmp2;
                array3[j + 1]= tmp3;
                array4[j + 1]= tmp4;
            }
        }
    }
}

```

```

int main() {
int i, n;

// Abrimos los ficheros de entrada y salida
FILE * input;
input = fopen("imparttotal1.dat", "r");
FILE * output;
output = fopen("imparttotal2.dat", "w");

// Leemos por teclado la dimensión del array de datos (n)
printf("Introduzca el número de líneas que contiene imparttotal1.dat:\n");
scanf("%d", &n);

// Declaramos el array de datos
double a[n], b[n], c[n], d[n];

// Leemos los datos del fichero de entrada
for (i=0; i<n; i++) {
    fscanf(input, "%f %f %f %f", &a[i], &b[i], &c[i], &d[i]); }

// Enviamos a la función auxiliar el array con los datos y su dimensión
// Tras ejecutarse la misma, el array a[n] se devuelve a la función
// main con sus elementos ordenados
bubblesort(n, a, b, c, d);

// Escribimos en el fichero de salida el array ordenado
for (i=0; i<n; i++) {
    fprintf(output, "%f %f %f %f\n", a[i], b[i], c[i], d[i]); }

// Cerramos los ficheros de entrada y salida

```

```

fclose(input);
fclose(output);
return 0;
}

```

Para los pares es:

```

#include <stdio.h>

void bubblesort(int length, double array[], double array2[], double array3[],
                double array4[])
{
    int i, j;
    double tmp, tmp2, tmp3, tmp4;
    for (i = 0; i < length - 1; i++) {
        for (j = 0; j < length - i - 1; j++) {
            if (array[j] > array[j + 1])
            {
                tmp = array[j];
                tmp2 = array2[j];
                tmp3 = array3[j];
                tmp4 = array4[j];
                array[j] = array[j + 1];
                array2[j]=array2[j+1];
                array3[j]=array3[j+1];
                array4[j]=array4[j+1];
                array[j + 1] = tmp;
                array2[j + 1]= tmp2;
                array3[j + 1]= tmp3;
                array4[j + 1]= tmp4;
            }
        }
    }
}

int main() {
    int i, n;

    // Abrimos los ficheros de entrada y salida
    FILE * input;
    input = fopen("partotal1.dat", "r");
    FILE * output;
    output = fopen("partotal2.dat", "w");

    // Leemos por teclado la dimension del array de datos (n)
    printf("Introduzca el número de líneas del fichero partotal1.dat: \n");
    scanf("%d", &n);

    // Declaramos el array de datos
    double a[n], b[n], c[n], d[n];

    // Leemos los datos del fichero de entrada
    for (i=0; i<n; i++) {
        fscanf(input, "%f %f %f %f", &a[i], &b[i], &c[i], &d[i]); }

    // Enviamos a la función auxiliar el array con los datos y su dimensión
    // Tras ejecutarse la misma, el array a[n] se devuelve a la función

```

```

// main con sus elementos ordenados
bubblesort(n, a, b, c, d);

// Escribimos en el fichero de salida el array ordenado
for (i=0; i<n; i++) {
    fprintf(output, "%f_%f_%f_%f\n", a[i], b[i], c[i], d[i]); }

// Cerramos los ficheros de entrada y salida
fclose(input);
fclose(output);
return 0;
}

```

## 11.5. Quinto código

Este código es uno de los más importantes, y por tanto complicado de desarrollar, es el más largo, no utiliza Monte Carlo, lo único que hace es comprobar si son estados fundamentales (desecha los excitados) y desechar estados iguales, lo cual es muy improbable con Monte Carlo, pero puede suceder, por tanto hay que tenerlo en cuenta.

Por ello lo hace primero para los estados impares y pares, y una vez realizado esto lo hace para el conjunto de ambos.

La idea de la programación de este código está escrita en el, es muy recomendable leerla.

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main() {
    /*Lo primero es saber la cantidad de valores que tienen los ficheros.*/
    long Np;
    long Ni;
    printf("Escriba por pantalla el número de líneas que tiene el fichero partotal2.dat.\n");
    scanf("%d",&Np);
    printf("Escriba por pantalla el número de líneas que tiene el fichero impartotal2.dat.\n");
    scanf("%d",&Ni);

    /*Ahora que ya sabemos cuantas líneas tiene solo tenemos que leer cada línea, así que abramos el flujo de datos y leámoslo con un bucle.*/

    FILE* impar;
    impar=fopen("impartotal2.dat", "r");
    FILE* par;
    par=fopen("partotal2.dat", "r");

    long i, j;
    double sp[Np], phip[Np], mp[Np], mlp[Np], si[Ni], phii[Ni], mi[Ni], mli[Ni];

    for (i=0; i<Np; i=i+1){
        fscanf(par, "%f_%f_%f_%f\n", &sp[i], &phip[i], &mp[i], &mlp[i]);
    }
    for (j=0; j<Ni; j=j+1){
        fscanf(impar, "%f_%f_%f_%f\n", &si[j], &phii[j], &mi[j], &mli[j]);
    }
    /*Ahora que ya hemos leído los datos de los ficheros cerremos su flujo de datos.*/
}

```

```

fclose(par);
fclose(impar);

/*Ahora queda algo importante que hacer, que es comprobar que ninguno de los
  datos tomados en las energías corresponden a la misma extensión.*/

/*Para hacer esto primero tenemos que abrir otro flujo de datos, para escribir
  las fundamentales*/
FILE* parf;
parf=fopen("parpcorregidas.dat","w");
FILE* imparf;
imparf=fopen("imparpcorregidas.dat","w");

long l,n;
double ap,bp,cp;
/*Ahora tenemos que hacer lo siguiente, que es comparar todas entre todas, para
  ello haremos un doble bucle, en este doble bucle, que será lógicamente
  recorriendo un índice que va hasta el número de líneas que tiene partotal2.
  dat ó impartotal2.dat.
  La secuencia a hacer es la siguiente, cogemos el valor de los parámetros del
  array con índice dado por el primer bucle y lo comparamos con todos en el
  segundo bucle, si todos los valores de los parámetros coincide en algún punto
  medimos la diferencia entre el valor de la energía para el primer bucle y
  para el segundo bucle, si es mayor que cero entonces damos una energía al
  del primer bucle de 100, que es de lejos un valor demasiado alto para la
  energía del estado fundamental (así nos quitamos problemas de que luego
  moleste), y si no es así damos una energía al del segundo bucle de 100.

  Una vez hecho esto hacemos otro bucle que nos escriba solo si la energía es
  menor que 100, por tanto nos hemos quitado los estados excitados de alguna
  extensión que coincida.*/
ap=0.0;
bp=0.0;
cp=0.0;

for (l=0;l<Np;l=l+1){
    for (n=0;n<Np;n=n+1){
        ap=sp[l]-sp[n];
        bp=phip[l]-phip[n];
        cp=mp[l]-mp[n];
        if (l==n){
            sp[l]=sp[n];
        }
        else{
            if (fabs(bp)<0.00001){
                if (fabs(cp)<0.00001){
                    if (ap>0){
                        /*Esto implica que la
                          energía del l es
                          mayor*/
                        sp[l]=100.0;
                        continue;
                    }
                    else{
                        if (ap==0){
                            sp[n]=100.0;
                        }
                        /*Esto implica que la
                          energía del l es
                          menor*/
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

                                                                    sp[n]=100.0;
                                                                    continue;
                                                                    }
                                                                    }
                                                                    }
                                                                    }
                                                                    }
}
/*Ahora escribamoslo*/
long y, ip;
ip=0;
for (y=0;y<Np;y=y+1){
    if (sp[y]<99.0){
        ip=ip+1;
        fprintf(parf, "%f _%f _%f _%f\n", sp[y], phip[y], mp[y], m1p[y]);
    }
}
/*El índice ip será el que nos diga la dimensión del array a tomar en la
siguiente parte*/

/*Ahora solo queda hacerlo para las impares.*/

long li, ni;
double ai, bi, ci;
ai=0.0;
bi=0.0;
ci=0.0;
for ( li=0; li<Ni; li=li+1){
    for (ni=0;ni<Ni; ni=ni+1){
        ai=si[li]-si[ni];
        bi=phii[li]-phii[ni];
        ci=mi[li]-mi[ni];
        if (li==ni){
            si[li]=si[ni];
        }
        else{
            if (fabs(bi)<0.00001){
                if (fabs(ci)<0.00001){
                    if (ai>0){
                        /*Esto implica que la
energía del l es
mayor*/
                        si[li]=100.0;
                        continue;
                    }
                    else{
                        if (ai==0){
                            si[ni]=100.0;
                        }
                        /*Esto implica que la
energía del l es
menor*/
                        si[ni]=100.0;
                        continue;
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```



```

    }
    }
}

/* Ahora escribamoslo */
long yi, ii;
ii=0;
for (yi=0; yi<Ni; yi=yi+1){
    if (si [yi] < 99.0){
        ii=ii+1;
        fprintf (imparf, " %f _ %f _ %f _ %f \n", si [yi], phii [yi], mi [yi], mli [yi]
    );
    }
}
/* El índice ii será el que nos diga la dimensión del array a tomar en la
siguiente parte */
fclose (parf);
fclose (imparf);
/* Ahora lo volvemos a abrir pero para lectura */
FILE* parflectura;
parflectura=fopen ("parpcorregidas.dat", "r");
FILE* imparflectura;
imparflectura=fopen ("imparpcorregidas.dat", "r");

double sp2 [ip], phip2 [ip], mp2 [ip], mlp2 [ip], si2 [ii], phii2 [ii], mi2 [ii], mli2 [ii];

/* Ahora tengo que leer los datos escritos anteriormente y asignárselos a cada
array */

long i2, j2;

for (i2=0; i2<ip; i2=i2+1){
    fscanf (parflectura, " %f _ %f _ %f _ %f \n", &sp2 [i2], &phip2 [i2], &mp2 [i2], &mlp2 [i2]);
}
for (j2=0; j2<ii; j2=j2+1){
    fscanf (imparflectura, " %f _ %f _ %f _ %f \n", &si2 [j2], &phii2 [j2], &mi2 [j2], &mli2 [j2]
);
}

/* Ahora ya podemos cerrar el flujo de datos */

/* Ahora hay que comparar quien es el menor, pero para eso antes hay que tener en
cuenta si los números son iguales, la diferencia relativa tomada será
0.00001, tendremos que abrir otro flujo de datos, para escribir los
fundamentales */
FILE* fundamental;
fundamental=fopen ("fundamentalpositiva.dat", "w");

long p, k;
double a, b, d;
a=0.0;

```

```

b=0.0;
d=0.0;

for (p=0;p<ii ;p=p+1){
    for (k=0;k<ip ;k=k+1){
        a=phii2 [p]-phip2 [k];
        b=mi2 [p]-mp2 [k];
        d=si2 [p]-sp2 [k];
        /*Ahora solo queda hacer las comparaciones*/
        if (fabs (a) <0.00001){
            if (fabs (b) <0.00001){
                /*SÍ d es menor que cero entonces tenemos que escoger el
                de las impares, si no el de las pares.*/
                if (d<0.0){
                    /*Haremos lo de antes*/
                    sp2 [k]=100.0;
                }
                else{
                    si2 [p]=100.0;
                }
            }
        }
    }
}

long lf , jf ;
for ( lf=0;lf<ii ; lf=lf+1){
    if (si2 [ lf]<99.0){
        fprintf (fundamental , " %f _ %f _ %f _ %f _l1\n" , si2 [ lf] , phii2 [ lf] , mi2 [ lf] , mli2
        [ lf] );
    }
}
for ( jf=0;jf<ip ; jf=jf+1){
    if (sp2 [ jf]<99.0){
        fprintf (fundamental , " %f _ %f _ %f _ %f _l0\n" , sp2 [ jf] , phip2 [ jf] , mp2 [ jf] , mlp2
        [ jf] );
    }
}

fclose (fundamental);
return 0;
}

```

Es de destacar que este programa diferencia entre las pares y las impares, es decir, si es par nos escribe el valor 0 y si es impar el valor 1.

Esta distinción es importante ya que es vital para el estudio de SUSY.

## 11.6. Sexto código

Este código es una ordenación de los datos sacados por el anterior programa, los ordena de menor a mayor.

```

#include <stdio.h>

void bubblesort (int length , double array [] , double array2 [] , double array3 [] ,
double array4 [] , int array5 [] )
{
    int i , j , tmp5;

```

```

    double tmp, tmp2, tmp3, tmp4;
    for (i = 0; i < length - 1; i++) {
        for (j = 0; j < length - i - 1; j++) {
            if (array[j] > array[j + 1])
            {
                tmp = array[j];
                tmp2 = array2[j];
                tmp3 = array3[j];
                tmp4 = array4[j];
                tmp5 = array5[j];
                array[j] = array[j + 1];
                array2[j]=array2[j+1];
                array3[j]=array3[j+1];
                array4[j]=array4[j+1];
                array5[j]=array5[j+1];
                array[j + 1] = tmp;
                array2[j + 1]= tmp2;
                array3[j + 1]= tmp3;
                array4[j + 1]= tmp4;
                array5[j + 1]= tmp5;
            }
        }
    }
}

int main() {

int i, n;

// Abrimos los ficheros de entrada y salida
FILE * input;
input = fopen("fundamentalpositiva.dat", "r");
FILE * output;
output = fopen("fundamentalpositiva2.dat", "w");

// Leemos por teclado la dimension del array de datos (n)
printf("Introduzca el número de datos, que tiene fundamentalpositiva.dat:\n");
scanf("%d", &n);

// Declaramos el array de datos
double a[n], b[n], c[n], d[n];
int h[n];

// Leemos los datos del fichero de entrada
for (i=0; i<n; i++) {
    fscanf(input, "%f %f %f %f %f\n", &a[i], &b[i], &c[i], &d[i], &h[i]); }

// Enviamos a la función auxiliar el array con los datos y su dimensión
// Tras ejecutarse la misma, el array a[n] se devuelve a la función
// main con sus elementos ordenados
bubblesort(n, a, b, c, d, h);

// Escribimos en el fichero de salida el array ordenado
for (i=0; i<n; i++) {
    fprintf(output, "%f %f %f %f %f\n", a[i], b[i], c[i], d[i], h[i]); }

// Cerramos los ficheros de entrada y salida
fclose(input);

```

```
fclose(output);
return 0;
}
```

## 11.7. Séptimo código

Ahora tenemos todas las energías fundamentales positivas de ciertas extensiones, cuantas más veces ejecutemos los programas tendremos muchas más, lógicamente, pero no hay que olvidar que dichas extensiones pueden tener energías negativas, por tanto tenemos que ver si las poseen, para ello lo que hacemos es lo siguiente, cogemos los parámetros que definen la extensión autoadjunta y generamos un número aleatorio, a este número aleatorio imponemos la condición que han de satisfacer las energías negativas, una vez satisfecha esta condición diferenciamos si es par o impar, y lo imprimimos en un fichero externo.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#include"generador.h"

int main(){
/*Lo primero es saber el número de datos que tengo que coger*/
long N;
printf("Escriba el número de líneas que posee el archivo fundamentalpositiva.dat\n");
scanf("%d",&N);

/*Ahora tenemos que abrir un flujo de datos y leer todas las líneas y
asignárselas a unos arrays esos datos*/
FILE* datos;
datos=fopen("fundamentalpositiva2.dat","r");

double r[N],phi[N],m[N],m1[N];
int h[N];
long i;
for(i=0;i<N;i=i+1){
fscanf(datos,"%f_%f_%f_%f_%d\n",&r[i],&phi[i],&m[i],&m1[i],&h[i]);
}

/*Una vez que ya tenemos leídos estos datos ya podemos cerrar el flujo de datos.
*/

fclose(datos);

/*Ahora que ya tenemos los datos solo queda abrir un fichero en el que pongamos
todas las fundamentales, y ver si alguna de las extensiones que nos dan esas
energías poseen una energía negativa.*/

FILE* fundamental;
fundamental=fopen("fundamental.dat","w");

/*Generamos la semilla para el montecarlo*/

srand48(seed());

/*Para hacer esto lo que haré será hacer un bucle que contenga a todas las
extensiones y mirar si para cada una de ellas, con un Monte Carlo de cierto
```

```

    número a pedir, hay energía fundamental.*/
long long Nm;
printf(" Escriba el número de valores de energía negativa que quiere tomar para
    cada extensión en el Monte Carlo.\n");
scanf("%ld",&Nm);
long long j;
long i1;
long double a,b,c,d,e;
double s;
s=0.0;
a=0.0;
b=0.0;
c=0.0;
d=0.0;
e=0.0;

for (i1=0;i1<N;i1=i1+1){

    for (j=0;j<Nm;j=j+1){
        /*Ahora generamos los valores aleatorios de s*/
        s=scalerandom(drand48(),0.0001,10.0);
        a= sinh(s)*(m[i1]*(s*s +1) - cos(phi[i1] )*(s*s-1))- 2*s*(sin(phi[i1] ) *
            cosh(s)-m[i1]);

            if (fabs(a) < 0.00000001){
                b=s*sinh(s/2.0)*(m[i1]*sin(phi[i1] ) - m[i1]*cos(phi[i1]
                    )) + 1)-cosh(s/2.0)*(m[i1]*cos(phi[i1] ) + m[i1]*sin(phi[i1]
                    ));
                c=s*sinh(s/2.0)*(m[i1]*sin(phi[i1] ) + m[i1]*cos(phi[i1]
                    ))-cosh(s/2.0)*(1+m[i1]*cos(phi[i1] )-m[i1]*sin(phi[i1]
                    ));
                d=s*cosh(s/2.0)*(1-m[i1]*cos(phi[i1] ) - m[i1]*sin(phi[i1]
                    ))-sinh(s/2.0)*(m[i1]*sin(phi[i1] ) - m[i1]*cos(phi[i1]
                    ));
                e=sinh(s/2.0)*(1+m[i1]*cos(phi[i1] ) +m[i1]*sin(phi[i1]
                    ))-s*cosh(s/2.0)*(m[i1]*sin(phi[i1] ) - m[i1]*cos(phi[i1]
                    ));
                if (fabs(b) < 0.00000001){
                    if (fabs(c) < 0.00000001){
                        fprintf(fundamental,"- %lf_%df_%lf_%df_0\n",s,phi[i1],m[i1],
                            m[i1]);
                        r[i1]=100.0;
                        continue;
                    }
                }
                else{
                    if (fabs(d) < 0.00000001){
                        if (fabs(e) < 0.00000001){
                            fprintf(fundamental,"- %lf_%df_%df_%df_1\n",s
                                ,phi[i1],m[i1],m[i1]
                                );
                            r[i1]=100.0;
                            continue;
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

    }
}
    if((r[i1]) < 99.0){
    fprintf(fundamental, "%f_%f_%f_%f_%d\n", r[i1], phi[i1], m[i1],
        m1[i1], h[i1]);
    }
}
/* Ahora ya tenemos escrito nuestro fichero de datos, por tanto ya podemos cerrar
   */
fclose(fundamental);
return 0;
}

```

## 11.8. Octavo código

Este código es bastante similar al quinto, nos selecciona cuál es el estado fundamental, teniendo en cuenta las energías negativas, además nos organiza las energías en orden decreciente, algo muy útil para analizar los resultados, para ello usamos también un programa tipo burbuja.

Si más preámbulos escribamos el código, que será el último para hallar nuestros estados fundamentales de cada extensión autoadjunta que conserve la paridad y la reversibilidad temporal.

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main(){
/*Lo primero es decir cuantas líneas tiene el fichero fundamental.dat*/
long N;
printf("Escriba el número de líneas que tiene el fichero fundamental.dat\n");
scanf("%d",&N);

/*Ahora lo que tenemos que hacer es leer los datos, así que habremos el fichero
   para la lectura.*/

long i;
double s[N], phi[N], m[N], m1[N];
int b[N];

FILE*datos;
datos=fopen("fundamental.dat", "r");

for(i=0; i<N; i=i+1){
fscanf(datos, "%f_%f_%f_%f_%d\n", &s[i], &phi[i], &m[i], &m1[i], &b[i]);
}

/*Ahora que ya tengo los datos leídos podemos cerrar el flujo de datos.*/

fclose(datos);

/*Ahora tenemos que escribir en otro los fundamentales, así que abramos el flujo
   */

FILE* orden;
orden=fopen("fundamentalfinal.dat", "w");

/*Ahora lo que tenemos que hacer es comparar unos con otros, haremos otra vez lo
   hecho antes, un doble bucle y reasignación de valores si no son los
   fundamentales.*/

```

```

long i1 , i2 , j ;
double a , c , d , f , g ;
a=0.0;
c=0.0;
d=0.0;
g=0.0;

for ( i1 = 0 ; i1 < N ; i1 = i1 + 1 ) {
/* Ahora hay que distinguir entre si es positivo o no */
    if ( s [ i1 ] < 0.0 ) {
        for ( i2 = 0 ; i2 < N ; i2 = i2 + 1 ) {
            a = phi [ i1 ] - phi [ i2 ] ;
            c = m [ i1 ] - m [ i2 ] ;
            d = s [ i1 ] - s [ i2 ] ;
            if ( a == 0.0 ) {
                if ( c == 0.0 ) {
                    /* Autointeracción */
                    if ( d == 0 ) {
                        s [ i1 ] = s [ i2 ] ;
                        continue ;
                    }
                    /* Ahora hay que distinguir entre
                       si es positivo o no */
                    if ( s [ i2 ] < 0.0 ) {
                        if ( d < 0.0 ) {
                            s [ i2 ] = 100.0 ;
                            continue ;
                        }
                        else {
                            s [ i1 ] = 100.0 ;
                            continue ;
                        }
                    }
                    else {
                        s [ i2 ] = 100.0 ;
                        continue ;
                    }
                }
            }
        }
    }
}
else { /* Esto que el s [ i1 ] > 0 */
    for ( j = 0 ; j < N ; j = j + 1 ) {
        f = phi [ i1 ] - phi [ j ] ;
        g = m [ i1 ] - m [ j ] ;
        if ( f == 0.0 ) {
            if ( g == 0.0 ) {
                /* Ahora hay que
                   distinguir entre si s
                   [ i2 ] es > 0 o < 0 */
                if ( s [ j ] < 0.0 ) {
                    s [ i1 ] = 100.0 ;
                    continue ;
                }
            }
        }
    }
}
/* No es necesario el else ya que lo hemos

```

```

                                escrito anteriormente, en un programa
                                anterior.*/
                                }
                                }
                                }
}
/*Ahora que ya lo hemos escrito y ordenado solo queda hacer otro bucle y ya esta
realizado todo, en cuestión del espectro hablando.*/

long e;

for (e=0;e<N;e=e+1){
    if (s[e]<0.0){
        fprintf(orden," %f_%f_%f_%f_%d\n",s[e],phi[e],m[e],m1[e],b[e]);
    }
    else{
        if (s[e]<90.0){
            fprintf(orden," %f_%f_%f_%f_%d\n",s[e],phi[e],m[e],m1[e],b[e
]);
        }
    }
}
/*Ahora ya lo tenemos ordenado por tanto ya podemos cerrar el flujo de datos.*/
fclose(orden);
return 0;
}

```

## 11.9. Noveno código

Como se observa, a la salida del programa anterior, las energías negativas no están ordenadas, para ordenarlas usamos otro programa burbuja.

```

#include <stdio.h>

void bubblesort(int length, double array[], double array2[], double array3[],
double array4[], int array5[])
{
    int i, j, tmp5;
    double tmp,tmp2,tmp3,tmp4;
    for (i = 0; i < length - 1; i++) {
        for (j = 0; j < length - i - 1; j++) {

            if (array[j] > array[j + 1])
            {
                tmp = array[j];
                tmp2 = array2[j];
                tmp3 = array3[j];
                tmp4 = array4[j];
                tmp5 = array5[j];
                array[j] = array[j + 1];
                array2[j]=array2[j+1];
                array3[j]=array3[j+1];
                array4[j]=array4[j+1];
                array5[j]= array5[j+1];
                array[j + 1] = tmp;
            }
        }
    }
}

```



```

        array2[j + 1]= tmp2;
        array3[j + 1]= tmp3;
        array4[j + 1]= tmp4;
        array5[j + 1]= tmp5;
    }

}

}

}

int main() {

int i, n;

// Abrimos los ficheros de entrada y salida
FILE * input;
input = fopen("fundamentalfinal.dat", "r");
FILE * output;
output = fopen("fundamentalfinal2.dat", "w");

// Leemos por teclado la dimension del array de datos (n)
printf("Introduzca el número de datos: \n");
scanf("%d", &n);

// Declaramos el array de datos
double a[n], b[n], c[n], d[n];
int h[n];

// Leemos los datos del fichero de entrada
for(i=0; i<n; i++) {
    fscanf(input, "%f %f %f %f %d", &a[i], &b[i], &c[i], &d[i], &h[i]); }

// Enviamos a la función auxiliar el array con los datos y su dimensión
// Tras ejecutarse la misma, el array a[n] se devuelve a la función
// main con sus elementos ordenados
bubblesort(n, a, b, c, d, h);

// Escribimos en el fichero de salida el array ordenado
for(i=0; i<n; i++) {
    fprintf(output, "%f %f %f %f %d\n", a[i], b[i], c[i], d[i], h[i]); }

// Cerramos los ficheros de entrada y salida
fclose(input);
fclose(output);
return 0;
}

```

Una vez desarrollados estos programas ya tenemos todo lo necesario para calcular las energías fundamentales de cada extensión.

Lógicamente puede haber energías negativas muy profundas, del orden de 70 (con esta magnitud las ecuaciones llevan a números tan grandes que no podrían ser almacenados, dando lugar a errores de lógica), esto lo he observado con Mathematica, estas energías no pueden hallarse con el programa pero son irrelevantes, ya que la gran mayoría son las calculadas por estos programas.

## 12. Apéndice II: Condiciones de paridad

Este cálculo lo haremos para cada tipo de energías, i.e, energías positivas, nulas o negativas. Obteniendo para cada una de ellas unas condiciones generales que coinciden y por tanto nos dan la condición general de paridad, para ello lo que haremos será utilizar las condiciones de contorno con las condiciones más generales que hay y una vez hechos los cálculos, introduciremos una notación que simplifique el problema, es decir, el resto de cálculos para obtener la condición de paridad.

### 12.1. Energías positivas

La función de onda de nuestro Hamiltoniano más general es:

$$\phi(x) = A_+ \cos\left(\frac{s}{2a}x\right) + A_- \sin\left(\frac{s}{2a}x\right) \quad (127)$$

Y nuestra ecuación de condiciones de contorno en el caso más general es:

$$\begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) - i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) + i\phi(a) \end{bmatrix} = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} m_0 - im_3 & -m_2 - im_1 \\ m_2 - im_1 & m_0 + im_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) + i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) - i\phi(a) \end{bmatrix} \quad (128)$$

Aunque es cierto que  $A_+$  y  $A_-$  están relacionadas por la condición de normalización, que involucra también a su fase relativa, esta condición no nos va a simplificar los cálculos, por lo que no la impondremos, aunque después habría que imponerla.

La evaluación de las derivadas en los puntos que nos interesan son:

$$\begin{aligned} 2a\phi'(a) &\rightarrow -sA_+ \sin\left(\frac{s}{2}\right) + sA_- \cos\left(\frac{s}{2}\right) \\ 2a\phi'(-a) &\rightarrow sA_+ \sin\left(\frac{s}{2}\right) + sA_- \cos\left(\frac{s}{2}\right) \\ \phi(a) &\rightarrow A_+ \cos\left(\frac{s}{2}\right) + A_- \sin\left(\frac{s}{2}\right) \\ \phi(-a) &\rightarrow A_+ \cos\left(\frac{s}{2}\right) - A_- \sin\left(\frac{s}{2}\right) \end{aligned}$$

Y si las llevamos a la ecuación anterior obtenemos que la primera y la segunda condición en este caso son:

- Primera condición:

$$A_+[\alpha] + A_-[\beta] = e^{i\varphi}[A_+[\alpha'_{PT} + \beta'_{PT}] + A_-[\gamma'_{PT} + \kappa'_{PT}]] \quad (129)$$

- Segunda ecuación:

$$A_+[-\alpha] + A_-[\beta] = e^{i\varphi}[A_+[-\alpha_{PT} + \beta'_{PT}] + A_-[\gamma'_{PT} - \kappa'_{PT}]] \quad (130)$$

Donde los coeficientes anteriores son:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow s \sin\left(\frac{s}{2}\right) - i \cos\left(\frac{s}{2}\right) \\ \beta &\rightarrow s \cos\left(\frac{s}{2}\right) + i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \\ \alpha'_{PT} &\rightarrow m_0 \left[ s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] + im_1 \left[ s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] \\ \beta'_{PT} &\rightarrow -im_3 \left[ s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] + m_2 \left[ s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] \\ \gamma'_{PT} &\rightarrow m_0 \left[ s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] - im_1 \left[ s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \\ \kappa'_{PT} &\rightarrow -im_3 \left[ s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] - m_2 \left[ s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Ahora sumemos o restemos cada condición obteniendo así las siguientes ecuaciones:

- Sumando

$$A_-[\beta - e^{i\varphi}\gamma'_{PT}] = e^{i\varphi}A_+[\beta'_{PT}] \quad (131)$$

- Restando

$$A_+[\alpha - e^{i\varphi}\alpha'_{PT}] = A_-[e^{i\varphi}\kappa'_{PT}] \quad (132)$$

Ahora tenemos ya las ecuaciones generales que nos ligan  $A_+$  y  $A_-$ , y de ellas podemos obtener las condiciones de que sean pares o impares, es decir, las condiciones de la paridad.

- Si es par  $\rightarrow A_- = 0$ . Por lo que obtenemos que las condiciones para que sean pares las funciones son:
  - $\beta'_{PT} = 0$
  - $\alpha - e^{i\varphi}\alpha_{PT} = 0$
- Si es impar  $\rightarrow A_+ = 0$ . Por lo que obtenemos que las condiciones para que sean impares las funciones son:
  - $\kappa'_{PT} = 0$ .
  - $\beta - e^{i\varphi}\beta'_{PT} = 0$ .

Ahora veamos qué condiciones obtenemos de la primera condición, concretamente nos centraremos en la condición impuesta sobre los parámetros que violan la paridad y reversibilidad temporal, que es:

$$-im_3 \left[ s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] + m_2 \left[ s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] = 0 \quad (133)$$

Si separamos la parte real y la imaginaria tenemos que:

- real:

$$m_3 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_2 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (134)$$

- imaginaria:

$$-m_3 s \sin\left(\frac{s}{2}\right) + m_2 \cos\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (135)$$

Como es un sistema lineal de coeficientes homogéneos para que tenga solución distinta de la trivial se tiene que dar que el siguiente determinante sea igual a cero:

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{s}{2}\right) & s \sin\left(\frac{s}{2}\right) \\ -s \sin\left(\frac{s}{2}\right) & \cos\left(\frac{s}{2}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (136)$$

Esta condición se traduce en que:

$$\cos^2\left(\frac{s}{2}\right) + s^2 \sin^2\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (137)$$

La cual no se puede cumplir, por lo que llegamos a que, para que sea par,  $m_2 = 0$  y  $m_3 = 0$ . De la segunda condición obtenemos que:

$$-im_3 \left[ s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] - m_2 \left[ s \cos\left(\frac{s}{2}\right) - i \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] = 0 \quad (138)$$

Que si la separamos en parte real y parte imaginaria obtenemos que:

- Real:

$$m_2 s \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_3 \sin\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (139)$$

- Imaginaria

$$-m_3 s \cos\left(\frac{s}{2}\right) + m_2 \sin\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (140)$$

Como es un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes homogéneos se tiene que cumplir que el siguiente determinante sea nulo, para que posea solución distinta de la trivial.

$$\begin{bmatrix} s \cos\left(\frac{s}{2}\right) & \sin\left(\frac{s}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{2}\right) & -s \cos\left(\frac{s}{2}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (141)$$

Que se traduce en que:

$$s^2 \cos^2\left(\frac{s}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (142)$$

Que solo se satisface cuando  $s \rightarrow 0$ , pero en este limite la energía pasa de ser positiva a nula, por tanto la función de onda usada no vale, por tanto la condición para que se cumpla la paridad vuelve a ser que  $m_3 = 0$  y  $m_2 = 0$ .

## 12.2. Energías negativas

Ahora haremos lo mismo con las energías negativas, para ello usaremos que la función de onda más general en este caso es:

$$\phi(x) = A_+ \cosh\left(\frac{s}{2}\right) + A_- \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \quad (143)$$

Y que las condiciones de contorno vuelven a ser:

Y nuestra ecuación de condiciones de contorno en el caso más general es:

$$\begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) - i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) + i\phi(a) \end{bmatrix} = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} m_0 - im_3 & -m_2 - im_1 \\ m_2 - im_1 & m_0 + im_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) + i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) - i\phi(a) \end{bmatrix} \quad (144)$$

Aunque es cierto que  $A_+$  y  $A_-$  están relacionadas por la condición de normalización, que involucra también a su fase relativa, esta condición no nos va a simplificar los cálculos, por lo que no la impondremos, aunque después habría que imponerla.

La evaluación de las derivadas en los puntos que nos interesan son:

$$\begin{aligned} 2a\phi'(a) &\rightarrow sA_+ \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + sA_- \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \\ 2a\phi'(-a) &\rightarrow -sA_+ \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + sA_- \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \\ \phi(a) &\rightarrow A_+ \cosh\left(\frac{s}{2}\right) + A_- \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \\ \phi(-a) &\rightarrow A_+ \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - A_- \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \end{aligned}$$

Y si las llevamos a la ecuación anterior obtenemos que la primera y la segunda condición en este caso son:

- Primera condición:

$$A_+[\alpha] + A_-[\beta] = e^{i\varphi} [A_+[\alpha'_{PT} + \gamma'_{PT}] + A_-[\beta'_{PT} + \kappa'_{PT}]] \quad (145)$$

- Segunda ecuación:

$$A_+[-\alpha] + A_-[\beta] = e^{i\varphi} [A_+[-\alpha_{PT} + \gamma_{PT}] + A_-[\beta'_{PT} - \kappa'_{PT}]] \quad (146)$$

Donde los coeficientes anteriores son:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow -s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) - i \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \\ \beta &\rightarrow s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) + i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \\ \alpha'_{PT} &\rightarrow m_0 \left[-s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + i \cosh\left(\frac{s}{2}\right)\right] - im_1 \left[s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) - i \cosh\left(\frac{s}{2}\right)\right] \\ \gamma_{PT} &\rightarrow -im_3 \left[-s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + i \cosh\left(\frac{s}{2}\right)\right] - m_2 \left[s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) - i \cosh\left(\frac{s}{2}\right)\right] \\ \beta'_{PT} &\rightarrow m_0 \left[s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right)\right] - im_1 \left[s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right)\right] \\ \kappa'_{PT} &\rightarrow -im_3 \left[s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right)\right] - m_2 \left[s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Ahora sumemos o restemos cada condición obteniendo así las siguientes ecuaciones:

- Sumando

$$A_- [\beta - e^{i\varphi} \beta'_{PT}] = e^{i\varphi} A_+ [\gamma_{PT}] \quad (147)$$

- Restando

$$A_+ [\alpha - e^{i\varphi} \alpha'_{PT}] = A_- [e^{i\varphi} \kappa'_{PT}] \quad (148)$$

Ahora tenemos ya las ecuaciones generales que nos ligan  $A_+$  y  $A_-$ , y de ellas podemos obtener las condiciones de que sean pares o impares, es decir, las condiciones de la paridad.

Ahora veamos que condiciones nos salen de imponer sobre estas ecuaciones generales que las soluciones sean pares o impares.

- Si es par  $\rightarrow A_- = 0$ , y las condiciones que obtenemos son:

- $\alpha - \alpha'_{PT} = 0$
- $\gamma_{PT} = 0$

- Si es impar  $\rightarrow A_+ = 0$  y las condiciones que obtenemos son:

- $\beta - \beta'_{PT} = 0$ .
- $\kappa'_{PT} = 0$

Ahora que ya tenemos las soluciones otra vez volvámonos a centrar en cada una de ellas por separado, es decir primero la condición de que sean pares y después la condición de que sean impares, como sabemos la condición de ser pares obliga a los coeficientes que violan la paridad y la reversibilidad temporal a cumplir que:

$$-im_3 \left[-s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + i \cosh\left(\frac{s}{2}\right)\right] - m_2 \left[s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) - i \cosh\left(\frac{s}{2}\right)\right] = 0 \quad (149)$$

Si separamos la condición anterior en condición sobre la parte real y sobre la parte imaginaria obtenemos que:

- Real:

$$m_3 \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - m_2 s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (150)$$

- Imaginaria:

$$m_3 s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + m_2 \cosh\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (151)$$

Estas condiciones como forman un sistema lineal de ecuaciones homogéneas se ha de cumplir que el siguiente determinante sea igual a cero, para tener solución distinta de la trivial, hagámoslo.

$$\begin{bmatrix} \cosh\left(\frac{s}{2}\right) & -s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \\ s \sinh\left(\frac{s}{2}\right) & \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (152)$$

Esta condición se traduce en que se ha de cumplir que:

$$\cosh^2\left(\frac{s}{2}\right) + s^2 \sinh^2\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (153)$$

Esta condición jamás se cumple, por lo que se tiene que dar que  $m_2 = 0$  y  $m_3 = 0$ .

Con la segunda condición obtenemos que la condición sobre paridad, aplicada a los parámetros que violan la paridad y reversibilidad temporal es:

$$-im_3 \left[ s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \right] - m_2 \left[ s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - i \sinh\left(\frac{s}{2}\right) \right] = 0 \quad (154)$$

Si esta condición la separamos en parte real e imaginaria obtenemos lo siguiente:

- Real:

$$m_3 \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + m_2 s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (155)$$

- Imaginaria :

$$-m_3 s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) + m_2 \sinh\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (156)$$

Estas condiciones forman un sistema lineal de coeficientes homogéneos, por tanto para tener solución distinta de la trivial el siguiente determinante ha de ser nulo.

$$\begin{bmatrix} \sinh\left(\frac{s}{2}\right) & s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) \\ -s \cosh\left(\frac{s}{2}\right) & \sinh\left(\frac{s}{2}\right) [1ex] \end{bmatrix} = 0 \quad (157)$$

La cual se traduce en que:

$$\sinh^2\left(\frac{s}{2}\right) + s^2 \cosh^2\left(\frac{s}{2}\right) = 0 \quad (158)$$

Esto solo vuelve a ser posible si  $s \rightarrow 0$ , pero este límite hace que la energía tienda a cero, por lo que la función de onda no sería la usada para llegar hasta aquí, por lo que no valdría esta condición.

Por lo que la condición que volvemos a obtener es que si se conserva la paridad  $\rightarrow m_3 = 0$  y  $m_2 = 0$ .

### 12.3. Energías nulas

La razón por la que es interesante analizar las extensiones con energías nulas es debida a que nos ha aparecido antes como límite, y por tanto es interesante realizar un análisis sobre ella haciendo lo mismo que antes, lógicamente va a ser el caso más sencillo de todos los anteriores.

Nuestra solución general va a ser en el este caso:

$$\phi(x) = Ax + B \quad (159)$$

Donde A corresponde a  $A_-$  y B a  $A_+$ .

Las condiciones de contorno son las mismas, es decir.

$$\begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) - i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) + i\phi(a) \end{bmatrix} = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} m_0 - im_3 & -m_2 - im_1 \\ m_2 - im_1 & m_0 + im_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a\phi'(-a) + i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) - i\phi(a) \end{bmatrix} \quad (160)$$

Pero en este caso tenemos que sustituir lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2a\phi'(-a) - i\phi(-a) &\rightarrow 2aA - i(B - aA) \\ 2a\phi'(a) + i\phi(a) &\rightarrow 2aA + i(aA + B) \\ 2a\phi'(-a) + i\phi(-a) &\rightarrow 2aA + i(B - aA) \\ 2a\phi'(a) - i\phi(a) &\rightarrow 2aA - i(aA + B) \end{aligned}$$

Y obtenemos al llevarlo las siguientes condiciones:

- Primera condición:

$$A[\alpha] - B[\beta] = e^{i\varphi} [A[\alpha'_{PT} + \gamma_{PT}] + B[\beta'_{PT} + \kappa_{PT}]] \quad (161)$$

- Segunda condición:

$$A[\alpha] + B[\beta] = e^{i\varphi} [A[\alpha'_{PT} - \gamma_{PT}] + B[-\beta'_{PT} + \kappa_{PT}]] \quad (162)$$

Donde las variables definidas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow 2a + ia \\ \beta &\rightarrow i \\ \alpha'_{PT} &\rightarrow m_0[2a - ia] - im_1[2a - ia] \\ \gamma_{PT} &\rightarrow -m_2[2a - ia] - im_3[2a - ia] \\ \beta'_{PT} &\rightarrow im_0 - m_1 \\ \kappa_{PT} &\rightarrow m_3 + im_2 \end{aligned}$$

Ahora sumemos y restemos ambas condiciones para obtener condiciones simplificadas.

- Sumando:

$$A[\alpha - \alpha'_{PT}] = B[\kappa_{PT}] \quad (163)$$

- Restando:

$$B[\beta + \beta'_{PT}] = -A[\gamma_{PT}] \quad (164)$$

Ahora impongamos la condición de paridad, y veamos que resultados obtenemos.

- Si es par  $\rightarrow A = 0$ , y obtenemos que las condiciones son:

- $\beta + \beta'_{PT} = 0$ .
- $\kappa_{PT} = 0$ .

- Si es impar  $\rightarrow B = 0$ , y obtenemos que las condiciones son:

- $\alpha - \alpha'_{PT} = 0$ .
- $\gamma_{PT} = 0$ .

De estas condiciones, si nos centramos en las que tienen términos que violan la reversibilidad temporal y la paridad, y las analizamos, llegamos a que:

- Si son pares, entonces se ha de cumplir que:

$$m_3 + im_2 = 0 \quad (165)$$

- Si son impares, entonces se ha de cumplir que:

$$m_2[2a - ia] + im_3[2a - ia] = 0 \quad (166)$$

Y por tanto vemos fácilmente, que la primera ecuación lleva a que  $m_3 = 0$  y  $m_2 = 0$ .

Y que en la segunda obtenes las siguientes ecuaciones, al separar en parte imaginaria y parte real:

- Real:

$$-2am_2 - m_3a = 0 \quad (167)$$

- Imaginaria:

$$am_2 - 2am_3 = 0 \quad (168)$$

Que como es un sistema de ecuaciones lineales de coeficientes homogéneos, se tiene que dar que para que la solución sea distinta de la trivial el siguiente determinante ha de ser nulo:

$$\begin{bmatrix} 2a & a \\ a & -2a \end{bmatrix} = 0 \quad (169)$$

Esta condición lleva a que:

$$4a^2 + a^2 = 0 \quad (170)$$

Que solo se satisface si  $a = 0$ , pero  $a$  es la anchura de nuestro pozo, por lo que no posee sentido, por lo que la condición es que  $m_2 = 0$  y  $m_3 = 0$ .

## 12.4. Conclusiones

La conclusión después de estos cálculos es que si queremos que nuestras funciones de onda sean pares o impares, es decir, que nuestra extensión preserve la paridad se tiene que dar que  $m_3 = 0$  y  $m_2 = 0$ .

## 13. Apéndice III, Generalidad

En este apéndice veremos, aunque ya ha quedado mostrado en el anterior apéndice, los problemas que hay para generalizar los cálculos hechos, es decir, para extensiones que no preserven paridad ni reversibilidad temporal.

Para estas extensiones los estados son de la forma:

- Con energía positiva:

$$A_+ \cos\left(\frac{s}{2a}\right) + A_- \sin\left(\frac{s}{2a}\right) \quad (171)$$



- Con energía nula:

$$A_-x + A_+ \quad (172)$$

- Con energía negativa:

$$A_+ \cosh\left(\frac{s}{2a}\right) + A_- \sinh\left(\frac{s}{2a}\right) \quad (173)$$

Cuyos superpotenciales asociados son:

- Para las positivas:

$$W(x) = -\sqrt{E_0} \left( \frac{A_- \cos(\sqrt{E_0}x) - A_+ \sin(\sqrt{E_0}x)}{A_+ \cos(\sqrt{E_0}x) + A_- \sin(\sqrt{E_0}x)} \right) \quad (174)$$

- Para las negativas:

$$W(x) = -\sqrt{E_0} \left( \frac{A_- \cosh(\sqrt{E_0}x) + A_+ \sinh(\sqrt{E_0}x)}{A_+ \cosh(\sqrt{E_0}x) + A_- \sinh(\sqrt{E_0}x)} \right) \quad (175)$$

En ellos se ve, salvo para el caso de energía nula, que no son impares lo cual lleva a que la supersimetría no se conserva, ya que la función de onda del estado fundamental, generada por SUSY, no es normalizable, por lo cual no es válida.

Y los potenciales de sus sistemas cuánticos supersimétricos asociados son:

- Para  $V^{(1)}(x)$  son:

- Para las positivas:

$$-E_0 \quad (176)$$

- Para las negativas:

$$E_0 \quad (177)$$

- Para  $V^{(2)}(x)$  son:

- Para las positivas:

$$E_0 \left( 1 + 2 \frac{(A_- \cos(\sqrt{E_0}x) - A_+ \sin(\sqrt{E_0}x))^2}{(A_+ \cos(\sqrt{E_0}x) + A_- \sin(\sqrt{E_0}x))^2} \right) \quad (178)$$

- Para las negativas:

$$E_0 \left( -1 + 2 \frac{(A_- \cosh(\sqrt{E_0}x) + A_+ \sinh(\sqrt{E_0}x))^2}{(A_+ \cosh(\sqrt{E_0}x) + A_- \sinh(\sqrt{E_0}x))^2} \right) \quad (179)$$

Por ellos vemos que la ecuación de Schrödinger del segundo sistema cuántico supersimétrico,  $H^{(2)}$ , dista mucho de ser trivial, esta ecuación habría que resolverla para hacer un cálculo de SUSY con ella y ver que extensiones fundamentales son validas, realizando un análisis similar al hecho en la sección siete.

Lógicamente volvemos a obtener lo esperado para el primer sistema cuántico supersimétrico, que es el pozo unidimensional infinito con origen de energías desplazados  $E_0$ .

## 14. Apéndice IV, Datos

En este apéndice se muestran los resultados realizados gracias a los programas escritos en el apéndice 1, la primera columna representa el valor de  $s$ , recordemos que la energía viene dada por  $(\frac{s}{2a})^2$ , las energías negativas son aquellas en las que  $s$  posee un signo menos delante, el valor de  $\phi$  es el de la segunda columna, el de  $m_0$  el de la tercera, la cuarta columna corresponde al valor de  $m_0$  y la quinta y última corresponde a la paridad, un 1 quiere decir que es impar y un 0 que es par.

-0.033551	2.257457	0.238246	0.971205	1
-0.023715	1.847092	0.605952	0.795501	1
-0.020964	2.010689	0.468307	0.883566	1
-0.018428	2.010741	0.468267	0.883587	1
-0.018214	2.107334	0.380869	0.924629	1
-0.017765	1.839073	0.612325	0.790606	1
-0.017060	1.941412	0.528354	0.849024	1
-0.015983	1.925831	0.541520	0.840688	1
-0.014743	1.460572	0.861139	0.508370	1
-0.014131	1.832230	0.617727	0.786393	1
-0.012408	1.977506	0.497380	0.867533	1
-0.012408	1.977506	0.497380	0.867533	1
-0.012119	2.514583	-0.016500	0.999864	1
-0.012119	2.514583	-0.016500	0.999864	1
-0.012019	1.741136	0.686705	0.726936	1
-0.011949	2.188241	0.304908	0.952382	1
-0.009034	2.582048	-0.083862	0.996477	1
-0.008751	2.246343	0.249094	0.968479	1
-0.008484	2.399235	0.098692	0.995118	1
-0.008193	1.448774	0.867082	0.498166	1
-0.008054	2.807532	-0.304529	0.952503	1
-0.008026	1.884812	0.575550	0.817767	1
-0.007666	2.409992	0.087983	0.996122	1
-0.007317	3.081368	-0.550764	0.834661	1
-0.007251	2.019024	0.460950	0.887426	1
-0.005960	2.368221	0.129505	0.991579	1
-0.005546	1.765697	0.668652	0.743576	1
-0.005460	2.011400	0.467704	0.883885	1
-0.004761	2.882746	-0.375239	0.926928	1
-0.003876	2.971949	-0.456322	0.889815	1
-0.003511	2.796782	-0.294268	0.955723	1
-0.003442	2.406585	0.091381	0.995816	1
-0.003200	2.037651	0.444345	0.895856	1
-0.003174	2.396810	0.101111	0.994875	1
-0.003155	2.207325	0.286689	0.958024	1
-0.002809	2.362350	0.135328	0.990801	1
-0.002805	2.160405	0.331308	0.943523	1
-0.002689	1.779955	0.657985	0.753031	1
-0.002360	2.358960	0.138687	0.990336	1
-0.002227	2.286891	0.209638	0.977779	1
-0.002227	2.286891	0.209638	0.977779	1
-0.002133	2.231894	0.263069	0.964777	1
-0.002091	2.045295	0.437486	0.899225	1
-0.001992	3.003467	-0.484134	0.874994	1
-0.001858	2.520238	-0.022140	0.999755	1
-0.001832	2.583400	-0.085201	0.996364	1
-0.001753	2.400477	0.097465	0.995239	1
-0.001642	1.571682	0.799471	0.600704	1
-0.001588	2.507861	-0.009763	0.999952	1
-0.001510	2.492530	0.005567	0.999985	1

-0.001443	2.561037	-0.062898	0.998020	1
-0.001152	2.040773	0.441536	0.897243	1
-0.001132	1.778948	0.658747	0.752364	1
-0.000998	1.945170	0.525184	0.850988	1
-0.000969	2.019309	0.460708	0.887552	1
-0.000836	2.422759	0.075273	0.997163	1
-0.000805	2.898255	-0.389562	0.921000	1
-0.000803	2.941996	-0.429463	0.903085	1
-0.000665	1.900342	0.562796	0.826596	1
-0.000593	2.095382	0.391928	0.919996	1
-0.000531	1.946512	0.524049	0.851688	1
-0.000505	2.079298	0.406676	0.913572	1
-0.000501	2.807016	-0.304022	0.952665	1
-0.000490	1.965039	0.508182	0.861250	1
-0.000487	1.750164	0.680135	0.733087	1
-0.000466	2.359047	0.138618	0.990346	1
-0.000463	2.658190	-0.159399	0.987214	1
-0.000422	2.026789	0.454068	0.890967	1
-0.000421	2.050056	0.433217	0.901290	1
-0.000418	2.011823	0.467351	0.884072	1
-0.000417	2.013899	0.465515	0.885040	1
-0.000417	2.013899	0.465515	0.885040	1
-0.000407	1.998288	0.479274	0.877665	1
-0.000405	2.119634	0.369465	0.929245	1
-0.000394	1.679844	0.729966	0.683483	1
-0.000385	2.081397	0.404763	0.914422	1
-0.000368	2.078651	0.407273	0.913306	1
-0.000358	2.448328	0.049770	0.998761	1
-0.000352	2.012222	0.467002	0.884256	1
-0.000352	2.026453	0.454322	0.890838	1
-0.000302	2.095065	0.392234	0.919866	1
-0.000298	1.809685	0.635333	0.772238	1
-0.000293	2.421124	0.076923	0.997037	1
-0.000253	2.048394	0.434728	0.900562	1
-0.000248	2.410293	0.087646	0.996152	1
-0.000222	1.964762	0.508440	0.861098	1
-0.000204	1.887274	0.573571	0.819156	1
-0.000197	2.726295	-0.226195	0.974082	1
-0.000193	1.386140	0.896581	0.442880	1
-0.000193	2.139479	0.351021	0.936368	1
-0.000190	2.806267	-0.303292	0.952898	1
-0.000189	2.798441	-0.295824	0.955243	1
-0.000183	1.932260	0.536159	0.844117	1
-0.000183	2.545914	-0.047755	0.998859	1
-0.000165	1.529135	0.824326	0.566115	1
-0.000161	2.406068	0.091953	0.995763	1
-0.000158	1.902306	0.561107	0.827744	1
-0.000123	2.053314	0.430184	0.902741	1
-0.000120	2.166172	0.325927	0.945395	1
-0.000108	1.919887	0.546453	0.837490	1
-0.000107	1.578936	0.795143	0.606422	1
-0.000104	2.126980	0.362562	0.931960	1
0.000193	1.955207	0.516732	0.856147	1
0.000193	1.948582	0.522178	0.852837	1
0.000279	1.991214	0.485362	0.874313	1
0.000900	1.901643	0.324843	0.945768	0
0.014284	0.136110	-0.990779	0.135488	0
0.022556	0.633373	-0.806337	0.591457	0
0.029089	2.836626	-0.332052	0.943261	1
0.033087	1.828570	0.253869	0.967239	0

0.033830	1.711424	0.139031	0.990288	0
0.040275	1.643937	0.754087	0.656775	1
0.042598	2.832217	-0.327829	0.944737	1
0.043219	2.066295	0.418617	0.908163	1
0.051561	2.969734	-0.454192	0.890904	1
0.052670	1.872472	0.294470	0.955661	0
0.059602	1.949914	0.521335	0.853352	1
0.067300	1.920751	0.546050	0.837753	1
0.068921	2.209377	0.285024	0.958521	1
0.069877	2.252056	0.243876	0.969806	1
0.071005	2.299543	0.197576	0.980288	1
0.071385	1.942611	0.527641	0.849468	1
0.075443	0.865999	-0.652207	0.758041	0
0.078775	1.116953	-0.443994	0.896030	0
0.107301	1.530240	-0.052057	0.998644	0
0.114221	1.838894	0.613171	0.789950	1
0.126433	1.914137	0.552218	0.833700	1
0.130013	2.468844	0.030371	0.999539	1
0.130909	1.135518	-0.437161	0.899383	0
0.131201	1.315698	-0.268982	0.963145	0
0.137655	1.389216	-0.199216	0.979956	0
0.139598	2.309752	0.188507	0.982072	1
0.148762	1.940968	0.530001	0.847997	1
0.150581	1.246622	0.949921	0.312489	1
0.150807	1.542380	-0.051179	0.998689	0
0.158053	2.068850	0.417698	0.908586	1
0.164539	2.291624	0.639382	0.768889	0
0.196648	1.498394	-0.110964	0.993824	0
0.203250	1.026525	-0.552799	0.833315	0
0.210675	1.680270	0.064886	0.997893	0
0.215329	1.932022	0.309519	0.950893	0
0.218402	0.922264	-0.641470	0.767148	0
0.220813	1.051443	-0.538201	0.842817	0
0.223628	2.030348	0.398007	0.917382	0
0.227802	2.417869	0.083600	0.996499	1
0.231217	0.713564	-0.790068	0.613019	0
0.232237	2.055670	0.431390	0.902165	1
0.239499	1.920378	0.287832	0.957681	0
0.245248	1.603858	-0.027366	0.999625	0
0.258232	1.247585	-0.380413	0.924817	0
0.258733	2.035427	0.450346	0.892854	1
0.270882	2.095918	0.436159	0.899870	0
0.275188	1.589025	-0.057912	0.998322	0
0.280651	1.263406	-0.377074	0.926183	0
0.291554	2.598457	-0.094517	0.995523	1
0.292054	2.079954	0.411286	0.911506	1
0.296654	1.197923	-0.445265	0.895399	0
0.299105	0.463013	-0.931261	0.364352	0
0.302981	2.190121	0.502843	0.864378	0
0.322127	1.353919	-0.315946	0.948777	0
0.329342	0.768664	-0.790412	0.612576	0
0.333189	0.773847	-0.788819	0.614625	0
0.340841	2.073677	0.376212	0.926534	0
0.345587	1.168100	-0.499641	0.866233	0
0.356320	1.837674	0.620180	0.784459	1
0.374314	1.171905	-0.514500	0.857490	0
0.376739	1.172527	-0.515557	0.856855	0
0.380444	0.542925	-0.922350	0.386356	0
0.385255	1.385031	-0.329494	0.944158	0
0.401574	2.779187	0.865070	0.501652	0

0.406954	1.010022	-0.665615	0.746296	0
0.408315	1.800617	0.061108	0.998131	0
0.409302	1.621190	-0.118824	0.992915	0
0.431885	1.250849	-0.487184	0.873299	0
0.443724	1.844872	0.074485	0.997222	0
0.445732	1.729461	0.704770	0.709436	1
0.460107	2.150882	0.357322	0.933981	0
0.467433	2.217720	0.412572	0.910925	0
0.467433	0.461465	-0.971382	0.237525	0
0.470426	2.334423	0.177750	0.984076	1
0.480781	1.787326	-0.018095	0.999836	0
0.486124	1.356914	-0.438391	0.898784	0
0.489596	2.065282	0.248455	0.968644	0
0.495108	1.689386	0.734811	0.678272	1
0.502747	1.874750	0.047140	0.998888	0
0.539617	1.421105	-0.431333	0.902193	0
0.539860	0.914975	-0.814791	0.579755	0
0.563097	1.975280	0.081498	0.996673	0
0.572206	2.470548	0.049962	0.998751	1
0.585684	1.591912	-0.322586	0.946540	0
0.591107	1.858548	0.615905	0.787820	1
0.593574	2.468770	0.053494	0.998568	1
0.609922	2.611056	0.613822	0.789445	0
0.626036	2.429277	0.095677	0.995412	1
0.633003	2.920494	0.808064	0.589095	0
0.636695	2.201426	0.215279	0.976553	0
0.638863	0.910617	-0.880384	0.474262	0
0.649194	2.116614	0.115412	0.993318	0
0.650617	2.545622	0.516518	0.856276	0
0.663666	2.892585	0.765718	0.643177	0
0.668538	2.740136	0.654148	0.756367	0
0.668997	2.477100	0.434417	0.900712	0
0.674786	2.923470	0.775680	0.631126	0
0.675174	1.766043	-0.266896	0.963725	0
0.678869	1.440168	-0.565607	0.824675	0
0.680891	2.712364	0.619585	0.784929	0
0.691071	2.744970	-0.212099	0.977248	1
0.693778	1.108190	-0.815781	0.578360	0
0.694214	1.374049	-0.635642	0.771984	0
0.699785	2.728160	0.611010	0.791623	0
0.700216	1.918037	-0.152801	0.988257	0
0.720967	2.471657	0.062612	0.998038	1
0.724533	3.097573	-0.533630	0.845718	1
0.734863	1.250857	-0.765135	0.643870	0
0.739647	2.136161	0.006884	0.999976	0
0.745598	1.368716	-0.695800	0.718236	0
0.749224	1.736292	-0.396275	0.918132	0
0.753282	2.994508	0.747693	0.664045	0
0.770776	2.289892	0.247273	0.968946	1
0.771038	2.184994	0.347396	0.937718	1
0.775869	2.182201	-0.002649	0.999996	0
0.781584	1.697390	-0.476294	0.879286	0
0.782489	2.412869	0.215904	0.976415	0
0.790985	1.762443	-0.431595	0.902068	0
0.794781	2.333200	0.118172	0.992993	0
0.798326	1.819438	-0.390324	0.920678	0
0.809769	2.174538	-0.064279	0.997932	0
0.830870	2.324355	0.050935	0.998702	0
0.833995	2.437358	0.109728	0.993962	1
0.845182	1.046234	-0.949290	0.314402	0

0.857113	2.544039	0.224828	0.974399	0
0.858324	3.008512	0.635913	0.771761	0
0.865155	1.907837	-0.410567	0.911830	0
0.874197	2.489309	0.063144	0.998004	1
0.894907	1.788261	-0.559562	0.828789	0
0.896012	2.463014	0.078890	0.996883	0
0.899476	3.120645	0.667290	0.744798	0
0.899646	2.717486	0.321307	0.946975	0
0.906166	2.943884	0.515936	0.856627	0
0.906809	3.034329	0.590289	0.807192	0
0.908305	2.912929	0.485898	0.874015	0
0.909084	2.243075	-0.163099	0.986610	0
0.909124	2.250199	-0.156135	0.987736	0
0.914441	2.660239	0.241494	0.970402	0
0.923936	2.484095	0.050951	0.998701	0
0.929352	2.390040	-0.052679	0.998612	0
0.945159	1.425605	-0.865122	0.501562	0
0.958834	2.773197	0.274007	0.961728	0
0.972881	2.162695	-0.350810	0.936447	0
0.977153	2.256906	-0.268668	0.963233	0
1.019864	1.675888	-0.802586	0.596536	0
1.021199	2.962805	0.345548	0.938401	0
1.024391	3.005855	0.380143	0.924928	0
1.037314	1.837652	0.673705	0.739000	1
1.059274	1.745964	-0.804606	0.593809	0
1.079119	2.505666	-0.210946	0.977498	0
1.080996	2.364949	-0.349265	0.937024	0
1.081716	2.761690	0.038591	0.999255	0
1.084427	2.559018	-0.168363	0.985725	0
1.104347	2.485803	-0.276238	0.961089	0
1.106561	1.934262	-0.741692	0.670741	0
1.125810	2.603287	-0.201453	0.979498	0
1.144690	3.032863	0.189995	0.981785	0
1.145459	2.725173	-0.117707	0.993048	0
1.149413	2.625753	-0.222959	0.974828	0
1.155070	3.038287	0.176111	0.984370	0
1.168884	2.590734	-0.292179	0.956364	0
1.178841	2.777524	-0.173834	0.984775	1
1.185408	3.111499	0.192038	0.981388	0
1.192162	2.530242	-0.390040	0.920798	0
1.213971	2.331963	-0.596957	0.802273	0
1.219229	1.924726	-0.870753	0.491720	0
1.230367	2.743670	-0.255619	0.966778	0
1.233261	2.838856	-0.167870	0.985809	0
1.240588	1.817578	-0.933307	0.359080	0
1.247252	3.070316	0.036901	0.999319	0
1.253449	2.577574	-0.450439	0.892807	0
1.259092	3.081515	0.026299	0.999654	0
1.263913	2.971480	-0.092453	0.995717	0
1.285198	2.936161	-0.166020	0.986122	0
1.288069	2.994642	-0.113286	0.993562	0
1.338044	2.203643	-0.838348	0.545135	0
1.342467	2.507901	-0.642547	0.766246	0
1.344616	2.863854	-0.338819	0.940852	0
1.359986	2.877308	-0.351550	0.936169	0
1.372834	2.530694	-0.665556	0.746348	0
1.383545	3.132810	-0.144152	0.989556	0
1.399921	2.085078	-0.939263	0.343198	0
1.464622	2.855626	-0.529303	0.848433	0
1.487714	2.924527	-0.502155	0.864778	0

1.504477	3.068465	-0.375363	0.926878	1
1.513854	2.982156	-0.487943	0.872875	0
1.514370	2.779370	-0.654350	0.756192	0
1.573689	2.408200	0.293010	0.956109	1
1.576443	2.841752	-0.678093	0.734976	0
1.716372	2.838142	-0.808423	0.588602	0
1.769402	3.141342	-0.647449	0.762109	0