



Universidad de Valladolid

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
FACULTAD DE CIENCIAS

Grado en Física

ESTUDIO DE LAS PERTURBACIONES DE LAS ÓRBITAS DE
LOS SATÉLITES ARTIFICIALES

AUTOR:

Jiménez Martín, Marta María

Tutor:

Calle Montes, Abel

Departamento de Física Aplicada

Valladolid, Julio 2015

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

RESUMEN

La Mecánica Orbital se centra en la aplicación práctica del problema físico de los dos cuerpos para predecir cómo va a comportarse un satélite artificial durante toda su trayectoria, desde su puesta en órbita hasta su caída sobre la superficie de la Tierra. En esta rama de la Física cobra vital importancia la Física Computacional, que permite el uso de herramientas de cálculo matemático para la realización de simulaciones, que luego se pueden interpretar, discutir y corregir. En este Trabajo Fin de Grado, aplicaremos algunos fundamentos básicos de la Mecánica Orbital, que junto al uso de Matlab, nos permitirán simular el movimiento de dos satélites artificiales, como son el GOCE y el ENVISAT. La importancia de este trabajo radica en valorar si el movimiento un satélite que orbita alrededor de la Tierra es modificado de forma apreciable si consideramos que elementos como la atmósfera o la misma radiación del Sol perturban su movimiento original.

Palabras Clave: Física, mecánica orbital, dinámica orbital, satélites artificiales, física computacional, Matlab.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO 1: ELEMENTOS ORBITALES	7
1.1. ENERGÍA DEL SATÉLITE:	9
1.2. PERIODO DEL SATÉLITE	10
1.3. VELOCIDAD DEL SATÉLITE:	10
CAPÍTULO 2: MARCO PERIFOCAL	11
2.1. POSICIÓN ORBITAL COMO FUNCIÓN DEL TIEMPO	12
2.1.1. ÓRBITAS ESFÉRICAS:.....	12
2.1.2. ÓRBITAS ELÍPTICAS:	14
2.2. VECTOR DE ESTADO	17
2.3. EFECTO DEL ACHATAMIENTO TERRESTRE. INTRODUCCIÓN CONCEPTUAL A LA PERTURBACIÓN GRAVITATORIA.....	20
CAPÍTULO 3: PERTURBACIONES EN LAS ÓRBITAS DE LOS SATÉLITES	23
3.1. ROZAMIENTO ATMOSFÉRICO.....	24
3.2. PERTURBACIÓN GRAVITATORIA.....	26
3.3. PERTURBACIÓN DEBIDA A LA PRESIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR.....	28
CAPÍTULO 4: PERTURBACIONES ORBITALES EN SATÉLITES ARTIFICIALES: GOCE Y ENVISAT	31
4.1. GOCE.....	31
4.2. ENVISAT	34
CAPÍTULO 5: RESULTADOS Y CONCLUSIONES	35
5.1. PERTURBACIÓN DEBIDA AL ROZAMIENTO ATMOSFÉRICO	35
5.1.1. GOCE.....	35
5.1.2. ENVISAT	39
5.1.3. Conclusión	43
5.2. PERTURBACIÓN DEBIDA A LA PRESIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR	44
5.3. PERTURBACIÓN DEBIDA A LA VARIACIÓN DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE DEBIDO AL ACHATAMIENTO	54
5.3. CONCLUSIÓN FINAL.....	57
REFERENCIAS.....	58

INTRODUCCIÓN

A pesar de que en este Trabajo Fin de Grado, nos hemos centrado en el estudio de satélites artificiales, la filosofía que subyace es la misma con la que la Ciencia en general, y la Física en particular, emergieron en el siglo XVI conducidos por el estudio del movimiento de los planetas y la astronomía. Los gigantes de Newton que en aquella época marcaron el inicio de la nueva ciencia: Copérnico, Galileo, Kepler y, por supuesto, el propio Newton siguen apareciendo en los modernos libros actuales de mecánica orbital de satélites.

La mecánica orbital es una de las temáticas más emblemáticas de la Física Clásica; no sólo por estar fundamentada sobre la ley de gravitación universal –paradigma de la mecánica newtoniana–, sino porque representa el impacto del determinismo sobre las leyes físicas. Simular el movimiento de un cuerpo orbitante es el ejemplo más claro para entender que, dadas las condiciones mecánicas iniciales de un cuerpo, podemos predecir su posición y estado del movimiento en cualquier momento posterior conociendo las leyes físicas de interacción. Determinismo, como idea básica científica y cálculo y computación como herramienta de propagación de las leyes físicas; ésta es precisamente la aportación moderna que también constituye cuerpo de doctrina en la Física actual: los modelos de computación. Y ello es así porque si sólo tenemos una solución analítica para el movimiento de dos cuerpos, hay que destacar la aportación del cálculo numérico para la resolución, y predicción cuando tratamos de resolver el estado de movimiento de muchos cuerpos orbitantes ayudados de leyes físicas que describen la interacción de dos cuerpos. Por lo tanto, y como preámbulo, decir que el presente trabajo está consolidado sobre el determinismo de la física clásica y las herramientas de computación para el estudio del comportamiento de los cuerpos orbitantes.

Por lo que respecta al contexto académico, notar que la mecánica orbital se encuentra desarrollada en diferentes asignaturas del grado en Física, siendo la Mecánica y Ondas, de segundo curso, la más centrada en las fuerzas centrales sin correcciones relativistas.

La mecánica orbital ha sido tradicionalmente una disciplina cubierta por la ingeniería aeroespacial; sin embargo, hemos querido aportar un enfoque físico porque tal y como reza el título, la temática está centrada en el estudio de las perturbaciones a las que se encuentran sometidos los satélites artificiales que orbitan la Tierra; de ellas hemos estudiado las tres perturbaciones más importantes: i) la fricción atmosférica, ii) la perturbación gravitatoria por potencial no esférico y iii) la presión de la radiación solar. Se eligieron estar tres perturbaciones por conllevar una carga académica transversal con otras asignaturas del Grado en Física y, responder así, a la realización de un trabajo global final. Introducimos de forma somera, a continuación, estas tres perturbaciones:

1. La perturbación de la fricción atmosférica, que luego será descrita, es necesaria cuando tratamos con satélites artificiales de observación de la Tierra, dado que tienen órbitas por debajo de los 1000 km de altura y que sufren alteración de los parámetros orbitales debido al rozamiento, no despreciable. Además hemos seleccionado el estudio de un satélite que por las características de su misión tiene una altura muy

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

baja, de en torno a 260 km para. El estudio de esta perturbación nos ha permitido, además, hacer alguna incursión en la Física de la atmósfera, a través del estudio de su densidad en niveles altos.

2. La perturbación gravitacional se refiere, no a la atracción gravitatoria, sino a la modificación de parámetros orbitales por la no esfericidad de la tierra. Esta perturbación es gran importancia en satélites de observación de la tierra, dado que provoca la precesión (rotación) del plano orbital; esta incidencia es aprovechada para diseñar órbitas denominadas heliosíncronas que aseguran que el satélite sobrevuela las mismas áreas terrestres a las mismas horas solares, algo importante para satélites cuyas imágenes son utilizadas para desarrollo de modelos biofísicos basados en la reflectancia y que ésta sea obtenida en las mismas condiciones solares. Académicamente el estudio de esta perturbación nos ha servido para familiarizarnos con los desarrollos matemáticos del potencial, en términos de armónicos esféricos.
3. La perturbación de la presión de la radiación solar ha sido seleccionada en este trabajo para familiarizarnos con algunos conceptos básicos del electromagnetismo y la cuantificación de la cantidad de movimiento que supone considerar el impacto de los fotones sobre la estructura del satélite. Notar que podríamos haber elegido otras perturbaciones de mayor impacto como el caso de la atracción gravitatoria del sol y la luna, pero pensamos que sería provechoso introducir otras temáticas transversales del Grado.

El planteamiento del trabajo, de cara al desarrollo de los cálculos y obtención de resultados ha sido establecer la ecuación diferencial del movimiento de un cuerpo, sometido a la ley de gravitación, a través de la ecuación diferencial de la ley de gravitación universal:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

donde μ es la cte gravitatoria terrestre que será explicada en la memoria ($\mu=GM$, donde M es la masa terrestre); obsérvese que se trata de una ecuación diferencial vectorial. Este comentario es importante toda vez que estamos trabajando en coordenadas cartesianas. Para analizar las perturbaciones hemos partido de la ecuación anterior y hemos introducido el término de perturbación correspondiente de forma adicional, en la forma:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p}$$

Donde el la aceleración \vec{p} será una de las tres perturbaciones descritas anteriormente. Finalmente, para ejecutar la resolución de la ecuación diferencial para la obtención de magnitudes hemos seguido el esquema computacional de resolver la ecuación diferencial para seis coordenadas, las tres de posición y las tres velocidades cartesianas:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{v} \\ -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p} \end{Bmatrix}$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Aunque en la memoria se desarrollará el esquema de cálculo, hay que destacar que las tres ecuaciones que hemos esbozado en esta introducción marcan el esquema de obtención de resultados. Este procedimiento es el propuesto por Curtis, 2010, en el que nos hemos basado a lo largo de todo el trabajo. Por lo tanto, las ecuaciones analíticas no han sido útiles más allá de la descripción básica y académica de las órbitas en general.

Uno de los satélites para los que hemos adaptado las rutinas de cálculo de perturbaciones ha sido GOCE (Una descripción básica del satélite GOCE se encuentra en Calle, 2010, de donde hemos extraído este párrafo; y la descripción pormenorizada se encuentra en <http://www.esa.int>); lo hemos seleccionado por tener una órbita baja, muy afectada por la fricción atmosférica y porque esta misión tiene unos objetivos específicamente científicos más que medioambientales. El primer explorador puesto en órbita fue el GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*), en marzo de 2009; un satélite dedicado a la medida del campo gravitatorio terrestre, a través de la definición precisa de la superficie del geoide. A primera vista pudiera parecer que el conocimiento de la aceleración de la gravedad (más conocido como g , con un valor cercano a 9.8 m/s^2) no está relacionado directamente con el medio ambiente; sin embargo un mapa preciso del potencial gravitatorio permitirá un entendimiento de la circulación oceánica (tal como describe explícitamente el acrónimo GOCE), la cual juega un papel primordial en los intercambios de energía a lo largo de la tierra. Estas corrientes transportan el calor, por la superficie oceánica, desde latitudes ecuatoriales a altas latitudes, provocando el retorno hacia el ecuador de aguas frías en corrientes profundas. Sin embargo, a pesar de que se conoce que el océano es el responsable de las variaciones climáticas, aún se desconocen muchos mecanismos de su funcionamiento. Por otra parte, las variaciones de gravedad en la litosfera y capas superiores del manto terrestre, son las que provocan los deslizamientos en la corteza terrestre, produciendo los terremotos, cuya predicción actualmente es una incógnita.

La medida de la gravedad desde el espacio no es una preocupación nueva. En el año 2000 fue puesto en órbita el satélite alemán CHAMP, para medir la gravedad con resolución espacial de varios miles de kilómetros, y en 2002 fue lanzado el satélite norteamericano-alemán GRACE, con una resolución espacial entre 600 y 1000 km. Ambas misiones funcionan con una interconexión de alta precisión con satélites de la red GPS (*Global Positioning System*), técnica conocida como *satellite-to-satellite-tracking*. La innovación de GOCE es seguir usando dicha técnica además de estar equipado con un gradiómetro preciso, que consiste básicamente en medir los desplazamientos de 3 pares de masas unidas mediante muelles flexibles, a una distancia de medio metro, que se encuentran en el corazón del satélite. Grosso modo, la gravedad en nuestro planeta varía entre 9.78 m/s^2 en el Ecuador, donde los cuerpos pesan menos, hasta 9.83 m/s^2 en los polos, debido al achatamiento terrestre que provoca una diferencia de 21km entre los radios ecuatorial y polar. GOCE podrá obtener medidas con una precisión de $0.00001g$ (lo que supone determinar el geoide con una precisión de 1-2cm, con una resolución espacial de 100km. Este objetivo sólo se puede conseguir con una órbita lo más cercana posible a la superficie, establecida entre los 250 y 270 km, órbita ajena a los satélites por ser inestable y sujeta a la existencia de restos débiles de la atmósfera. Por esta razón GOCE está equipado con un motor de iones para compensar el rozamiento atmosférico y mantenerse en órbita estable. Este requerimiento ha obligado a incluir 40kg de gas Xenon que van a proporcionar una vida útil inferior a 2 años. Resumiendo: más que un satélite, GOCE es un avión espacial, con forma de bala de 5 metros de largo y 1100 kg de peso, con una

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

autonomía de 20 meses. El geoide es la superficie que representa las desviaciones del elipsoide de la tierra, y define la horizontalidad, de forma que cualquier objeto colocado sobre él, no debería moverse. Estas desviaciones están en el rango aproximado de más menos 100 metros. El pasado mes, GOCE ha mostrado sus últimos resultados donde el mapa de gravedad muestra una gran depresión cerca de la India y otros abultamientos en el Atlántico norte, el este del Pacífico y en Sudamérica.

El segundo satélite que hemos seleccionado para adaptar las rutinas de cálculo de perturbaciones ha sido ENVISAT (una descripción básica del satélite ENVISAT se encuentra en Calle, 2005, de donde hemos extraído este párrafo; y la descripción pormenorizada se encuentra en <http://www.esa.int>) y lo hemos seleccionado por ser el paradigma de satélites heliosíncronos europeos de observación de la tierra y por encontrarse, actualmente, fuera de operación, en órbita descontrolada y sin segmento de tierra de mantenimiento.

Los esfuerzos europeos de mantener un alto nivel en la observación de la Tierra, a través de la ESA, se han visto representados originalmente con los satélites ERS-1 y ERS-2 focalizados inicialmente en aplicaciones de RADAR, y en el lanzamiento más reciente del satélite ENVISAT, un verdadero laboratorio medioambiental de 8140 kg, puesto en órbita por el Ariane-5 en órbita polar heliosíncrona, dotado con una gran número de sensores encargados de medir diferentes componentes atmosféricos y características de la superficie terrestre: MERIS con 15 bandas espectrales en el espectro solar, y 300 metros de resolución espacial, principalmente dedicado a la observación de la biología marina y oceánica a través de observaciones del color del océano además de seguimiento de la actividad fotosintética de la vegetación; AATSR, con 7 bandas espectrales, en el solar y térmico, con 1 km de resolución espacial para proporcionar mapas de la temperatura de la superficie del mar, con 0.3 K de precisión y analizar fenómenos anómalos como el Niño, además de realizar detección de incendios forestales; GOMOS para la medida del ozono atmosférico mediante un sistema de ocultación de estrellas; ASAR, un RADAR de apertura sintética avanzado y otros sensores encargados de la determinación de perfiles atmosféricos y gases de efecto invernadero como MIPAS, SCIAMACHY y DORIS. Este satélite, por su elevada masa presentó serios problemas de puesta en órbita, operación ya de por sí delicada que consume entre el 20% al 30% del coste total de la misión.

Finalmente, y para acabar esta introducción del trabajo, hay que destacar que los resultados de computación han sido obtenidos a través de rutinas de cálculo proporcionadas por Curtis, (2010); editadas en código Matlab[®]. Nuestra principal aportación ha sido la modificación de dichas rutinas para poder analizar los dos satélites que hemos seleccionado. Esta modificación se refiere a alterar los parámetros iniciales de los que partir para propagar las órbitas. En nuestro caso estábamos interesados en manejar los ficheros Two Line Elements (TLE), proporcionados por la Fuerza Aérea de EEUU y son distribuidos diariamente a través de <http://www.celestrak.com/NORAD/elements/>

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

CAPÍTULO 1: ELEMENTOS ORBITALES

El problema que vamos a tratar en este Trabajo Fin de Grado es un sistema Tierra-Satélite, que encaja con el modelo de dos cuerpos, donde la Tierra es la masa m_1 , cuerpo más pesado, y el satélite es la masa m_2 , cuerpo más ligero, donde la masa de la Tierra es muchísimo más grande que la masa del satélite, y se puede hacer la aproximación de que la masa reducida del sistema Tierra-Satélite equivale a la masa del cuerpo más masivo, lo que va a simplificar mucho las expresiones que van a determinar el movimiento del satélite alrededor de la Tierra.

Definimos los parámetros de la elipse en función de los parámetros keplerianos del satélite. Los parámetros keplerianos del satélite son seis, al igual que el número de componentes que conforman el vector de estado. El vector de estado se compone de seis coordenadas en total, tres de la posición y tres de la velocidad del satélite en un instante de tiempo dado. Este vector de estado define completamente la trayectoria del satélite alrededor de la Tierra en función del tiempo, desde su puesta en órbita hasta que finalmente cae, considerando que el satélite se encuentra en todo momento en caída libre, sin ninguna fuerza que lo impulse de nuevo a ganar altura.

A su vez, los parámetros keplerianos son: la excentricidad de la órbita del satélite e , la ascensión recta del nodo ascendente Ω , que define el ángulo, medido desde el foco de la órbita del satélite, que es la Tierra, entre el punto vernal o punto Aries, y el nodo ascendente, punto de corte entre la trayectoria del satélite y la recta intersección entre el plano ecuatorial de la Tierra y el plano del satélite. El argumento del perigeo ω , que es el ángulo que forma el nodo ascendente con la posición del perigeo de la órbita. La inclinación de la órbita del satélite i , respecto al plano ecuatorial terrestre. El semieje mayor de la elipse a . Y finalmente, el momento angular h , que en este caso define el momento angular por unidad de masa del satélite, que es una medida del nivel de energía del satélite en órbita.

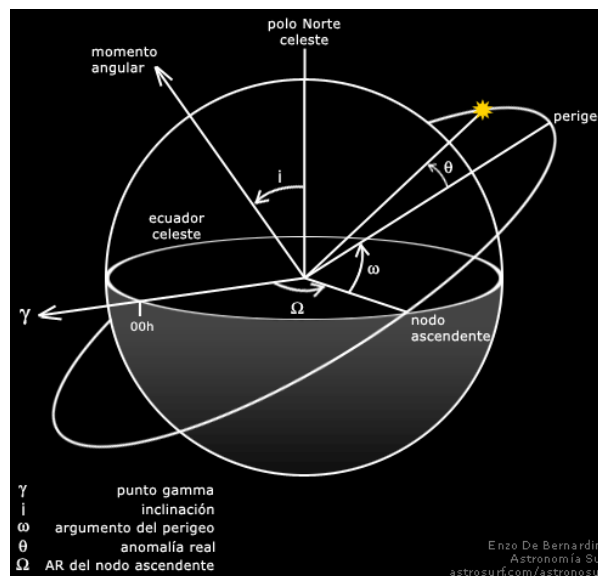


Imagen que representa los parámetros keplerianos. Fuente: www.astrosurf.com

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

El punto gamma, también conocido como punto Aries, se suele tomar como origen de ángulos por tratarse de un punto que podemos considerar fijo en la bóveda celeste. Este punto se encuentra en la intersección entre el plano ecuatorial y la eclíptica, que es la trayectoria completa que recorre el Sol desde el punto de vista terrestre, y lo define completamente la dirección del Sol, que se desplaza en dicho punto del hemisferio sur celeste al hemisferio norte. Este punto se define una constante astronómica, despreciando la variación que produce en su posición la precesión de los equinoccios.

Trataremos el problema desde el punto de vista matemático, considerando la elipse como una cónica con sus correspondientes parámetros, como la excentricidad e , la posición respecto al foco donde esté situado el centro de fuerzas r , el semieje mayor a , el semieje menor b , el argumento o anomalía verdadera θ , que es el ángulo desde el origen que fijemos sobre la trayectoria del satélite hasta la posición que ocupe en un instante de tiempo dado. En una elipse, sabemos que la condición matemática debe cumplir la excentricidad asociada a la misma como cónica es que su valor debe ser mayor que 0 y menor que 1, siendo la excentricidad igual a 0 si la cónica es una circunferencia y 1 si la cónica es una parábola.

$$0 < e < 1$$

Resolviendo el problema de los dos cuerpos en mecánica clásica, como hemos indicado antes, llegamos a la expresión que da la distancia radial del satélite respecto al origen de fuerzas, que es la Tierra. Como hemos definido antes, h es el momento angular por unidad de masa del satélite, μ es la constante GM, donde M es la masa de la Tierra y G es la constante de gravitación universal, e es la excentricidad de la órbita del satélite, y β es la anomalía verdadera a un instante t determinado.

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e \cos \beta}$$

La ecuación anterior permite calcular cualquier punto sobre la superficie de la elipse. Con lo cual, podemos sacar fácilmente parámetros característicos de la elipse como cónica, como la posición del perigeo y del apogeo, teniendo en cuenta que en el perigeo $\beta = 0$ y en el apogeo $\beta = \pi$, así como el semieje mayor a , el semieje menor b , y como consiguiente, la ecuación matemática de la elipse.

Posición del perigeo.

$$r_p = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e}$$

Posición del apogeo.

$$r_a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e}$$

El semieje mayor de la elipse viene dado por la semisuma de la posición del perigeo y del apogeo.

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2}$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Y el semieje menor viene dado por la misma definición de excentricidad de una cónica. La excentricidad de una cónica, en este caso, de una elipse, es el cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor. Se puede demostrar muy fácilmente, utilizando el teorema de Pitágoras, que si llamamos c a la semidistancia focal, entonces:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$e = \frac{c}{a}$$

Entonces, sólo queda obtener la relación entre el semieje mayor y el semieje menor combinando ambas ecuaciones anteriores.

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Recordamos que la igualdad matemática que describe una elipse en coordenadas cartesianas viene dada en su forma general como que la suma del cociente de la proyección horizontal de la distancia radial medida desde el centro de la elipse entre el semieje mayor y la proyección vertical entre el semieje menor es igual a la unidad. Donde el paso de coordenadas cartesianas a polares da la relación entre la distancia radial y las componentes x e y cartesianas.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e \cos \beta}$$

1.1. ENERGÍA DEL SATÉLITE:

La energía en cualquier sistema físico viene definida como la integral negativa del campo de fuerzas que actúan sobre un cuerpo entre dos puntos de su trayectoria.

$$F(r) = -\text{grad}(E_p) \Rightarrow E_p = -\int \bar{F}(\bar{r}) d\bar{r}$$

Nuestro sistema Tierra –Satélite es un sistema de fuerzas centrales, donde cada uno de los dos cuerpos crean un campo de fuerzas centrales y dirigidas hacia su centro. Entonces, la fuerza que ejerce el primero de los cuerpos sobre el segundo será una fuerza radial, que dependerá de la masa de ambos cuerpos, así como de la distancia correspondiente de cada uno de ellos al origen de un sistema de referencia fijado por el observador. Fijando dicho origen, por ejemplo, en el cuerpo más masivo, la expresión de la energía entre ambos cuerpos del sistema es la siguiente, donde μ es la constante GM, h es el momento angular del satélite por unidad de masa, y e es la excentricidad de la órbita del satélite.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{h^2} (1 - e^2) = -\frac{\mu}{2a}$$

1.2. PERIODO DEL SATÉLITE

El periodo del satélite es el tiempo que tarda un satélite en dar una vuelta completa en su órbita alrededor de la Tierra. Es muy interesante conocer el periodo de un satélite alrededor de la Tierra, ya que una medida del periodo nos da una idea de la distancia a la que se encuentra nuestro satélite del origen de fuerzas, o lo que es lo mismo, del centro de la Tierra. Además, es muy fácil de calcular. Teniendo en cuenta la segunda ley de Kepler, o lo que es lo mismo, la ley de conservación del momento angular orbital del satélite.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

Integraremos para una vuelta del satélite alrededor de la Tierra. Para ello, consideraremos que cuando el satélite recorre un periodo de tiempo, el área barrida por el satélite es el área encerrada en la elipse de su trayectoria.

$$\pi ab = \frac{h}{2} T$$

Despejando el periodo T obtenemos el periodo del satélite T en función de la masa reducida del sistema Tierra-Satélite y del semieje mayor de la órbita de su trayectoria, teniendo en cuenta la definición anterior de semieje mayor de una elipse en función de la masa reducida, el momento angular y la excentricidad de su órbita.

$$T = \frac{2}{h} \pi ab = \frac{2\pi}{h} a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{h}{\sqrt{1 - e^2}} \right)^3 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}}$$

1.3. VELOCIDAD DEL SATÉLITE:

Un concepto muy importante es la velocidad del satélite en un punto de su órbita, que será la segunda componente del vector de estado. La velocidad es la derivada primera en función del tiempo de la posición del satélite en cualquier punto de la órbita. Para definirla tendremos en cuenta el teorema de conservación del momento angular, por el cual, el momento angular se conserva a lo largo de toda la trayectoria del satélite. El momento angular se define como el producto vectorial entre la posición del satélite, que vendrá dada por su posición radial r , y su velocidad en ese instante, v . Dando su magnitud en módulo queda tal que así.

$$h = r * v * \text{sen}(\alpha)$$

Donde α es el ángulo entre los vectores posición r y velocidad v . Si en la fórmula anterior despejamos el valor de la velocidad v , y sustituimos el valor de la distancia radial r por la ecuación de la distancia radial general para todos los puntos de una elipse, obtenemos la relación de la velocidad en cada punto de la órbita del satélite.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$v = \frac{h}{r \operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\mu}{h(1 + e \cos \beta) \operatorname{sen}(\alpha)}$$

En el recorrido del satélite en su órbita, alcanza un valor máximo y un valor mínimo. El valor máximo se alcanza cuando el satélite se encuentra en el perigeo de su órbita, punto más cercano al centro de fuerzas, mientras que el valor mínimo lo alcanza en el apogeo de su órbita, que es el punto más alejado al centro de fuerzas de la órbita del satélite. Tanto en el perigeo como en el apogeo, el vector posición del satélite r es perpendicular al vector velocidad v del satélite. Por lo tanto.

$$\alpha = 90$$

Entonces, la velocidad en el perigeo y en el apogeo vendrán dadas por la expresión de la velocidad que hemos deducido antes para todos los puntos de la elipse, pero teniendo en cuenta la condición anterior.

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{\mu}{h(1 + e)}$$

$$v_a = \frac{h}{r_a} = \frac{\mu}{h(1 - e)}$$

CAPÍTULO 2: MARCO PERIFOCAL

Como hemos indicado antes, el vector de estado define completamente la trayectoria y la velocidad del satélite en cualquier punto de su trayectoria. Para definirlo, fijaremos nuestro sistema de referencia cartesiano de manera que su origen estará situado en el centro de la Tierra. Entonces, la dirección del eje x vendrá dada por el vector unitario \mathbf{p} , la dirección del eje y por el vector unitario \mathbf{q} y la dirección del eje z por el vector unitario \mathbf{w} . Tendremos en cuenta que el vector unitario \mathbf{w} marca también la dirección del momento angular orbital:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{h}}{h}$$

Entonces, un vector \mathbf{r} que marque la posición del satélite en un determinado instante vendrá dado, en cartesianas, por el siguiente vector, combinación lineal, claro, de \mathbf{p} y \mathbf{q} :

$$\mathbf{r} = \bar{x}\mathbf{p} + \bar{y}\mathbf{q}$$

Donde \bar{x} e \bar{y} son las proyecciones sobre el eje x y el eje y del vector posición \mathbf{r} en cualquier punto de la elipse.

$$\bar{x} = r \cos \beta$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\bar{y} = r \sin \beta$$

Con lo que el vector posición del satélite en coordenadas cartesianas dentro del marco perifocal vendrá dado por la ecuación anterior de \mathbf{r} , sustituyendo r por la distancia radial en la elipse.

$$\mathbf{r} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \beta} (\cos \beta \mathbf{p} + \sin \beta \mathbf{q})$$

La velocidad del satélite en coordenadas cartesianas la obtenemos derivando la ecuación anterior de la posición \mathbf{r} en función del tiempo t .

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{p} + \dot{y} \mathbf{q} = \frac{\mu}{h} [-\sin \beta \mathbf{p} + (e + \cos \beta) \mathbf{q}]$$

2.1. POSICIÓN ORBITAL COMO FUNCIÓN DEL TIEMPO

El satélite en órbita es un cuerpo que se encuentra bajo la acción gravitatoria de la Tierra, con lo cual, es un cuerpo que durante toda su trayectoria se encuentra en caída libre. Esto se puede interpretar resolviendo la ecuación diferencial que resuelve la posición orbital del satélite en función del tiempo durante toda su trayectoria, desde su puesta en órbita hasta su caída sobre la superficie. Aplicamos la definición de momento angular orbital, dependiente de la distancia radial al cuadrado r y de la variación del argumento en función del tiempo.

$$h = r^2 \dot{\beta}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e \cos \beta}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores y separando las variables de integración t y β .

$$\frac{\mu^2}{h^3} dt = \frac{d\beta}{(1 + e \cos \beta)^2}$$

Finalmente, haciendo un cambio de variable e integrando entre dos posiciones sobre la órbita del satélite, llegamos a la solución de la ecuación diferencial anterior, que da la posición del satélite en función del tiempo en general.

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\beta \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}$$

2.1.1. ÓRBITAS ESFÉRICAS:

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Para órbitas esféricas, $e = 0$. Con lo cual, la integral del segundo término de la igualdad anterior es muy sencilla de resolver.

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\beta d\vartheta$$

Resolviendo la integral llegamos a la igualdad:

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \beta$$

De la ecuación de la distancia radial en la elipse, cuando $e = 0$:

$$r = \frac{h^2}{\mu}$$

Despejando h en la ecuación de la distancia radial y sustituyendo en la ecuación de la posición orbital en función del tiempo .

$$t = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \beta$$

Teniendo en cuenta que cuando el satélite recorre un periodo de su trayectoria, el ángulo que barre sobre la elipse corresponde a una vuelta completa. Entonces, podemos definir el periodo T del satélite en función de la distancia radial del satélite.

$$T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

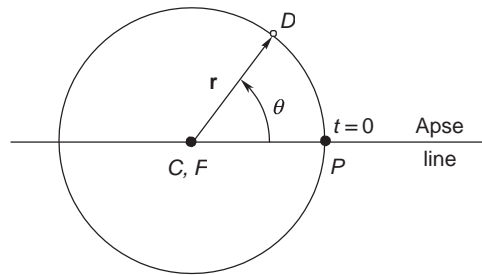
Si introducimos en la ecuación del tiempo la definición de periodo del satélite que acabamos de hacer, obtenemos una expresión que nos hace ver que finalmente nuestros cálculos son correctos. El tiempo puede interpretarse como una medida de tantos periodos que ha recorrido el satélite entre dos instantes de tiempo.

$$t = \frac{\beta}{2\pi} T$$

Y la dependencia de la posición en función del tiempo queda definida en función del ángulo barrido por el satélite en el instante t .

$$\beta = \frac{2\pi}{T} t$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Dependencia del ángulo barrido con el tiempo en una órbita circular. Observar que θ en la figura es igual a β en la explicación teórica anterior.

2.1.2. ÓRBITAS ELÍPTICAS:

Para órbitas elípticas no podemos recurrir a ninguna aproximación que permita simplificar la integral que resuelve la ecuación diferencial general de la posición del satélite en función del tiempo. Entonces, cuando trabajamos con órbitas elípticas dentro del marco perifocal, tenemos que introducir el concepto de anomalía. Resolviendo la integral de la ecuación en este caso, queda un poco más complicada.

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\beta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \beta}{1 + e \cos \beta} \right]$$

Entonces definimos la **anomalía media** M_e , que permitirá establecer una dependencia directa con el tiempo partiendo de la solución anterior. Esto permitirá simplificar el problema y resolverlo de manera similar a como resolvimos la dependencia con el argumento en órbitas esféricas.

$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\beta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \beta}{1 + e \cos \beta}$$

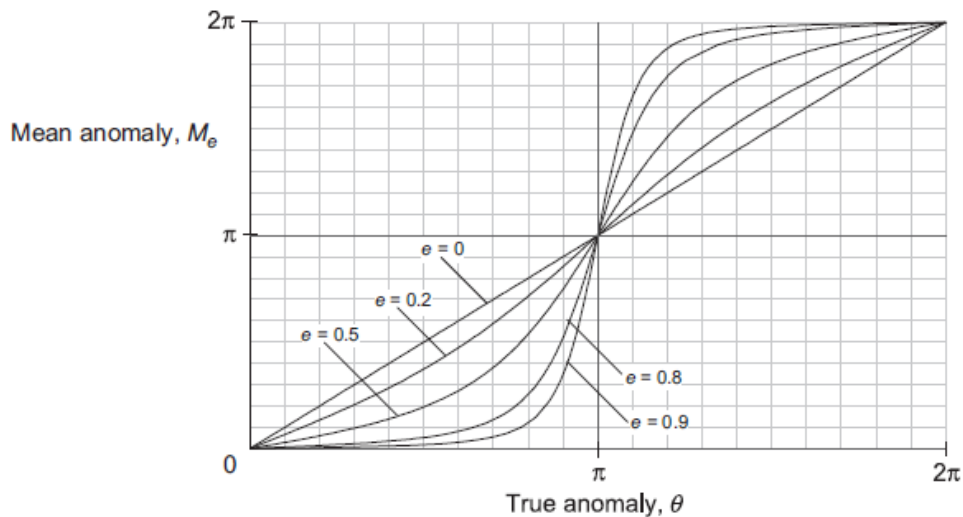
$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} t$$

La anomalía media como argumento puede traducirse como el ángulo recorrido por un satélite ficticio que describiese una trayectoria circular de radio a (semieje mayor de la elipse) que circunscribe a nuestra elipse, con el mismo periodo T que nuestro satélite, y que partiese desde el mismo punto de referencia y a la vez que nuestro satélite. Es fácil comprobar que esto es así utilizando, al igual que hemos hecho al resolver la ecuación para el caso de órbitas circulares, la definición de periodo de la trayectoria.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\frac{\mu^2(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{h^3} = \frac{2\pi}{T}$$
$$M_e = \frac{2\pi}{T} t$$

Volviendo a la solución de la ecuación diferencial general de la posición orbital, **β es la anomalía verdadera**. Representando la anomalía media M_e en función de la anomalía verdadera β se tiene:

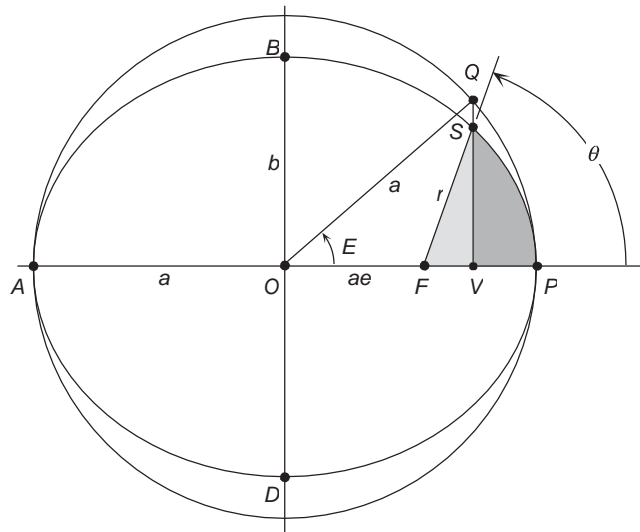


Dependencia de la anomalía media con la anomalía verdadera. Cada curva representa una órbita con una excentricidad distinta.

Donde se aprecia la rapidez con la que se mueve el satélite respecto a un movimiento circular uniforme. Cuando la excentricidad es igual a cero, el movimiento es completamente circular e uniforme. Sin embargo, a medida que el valor de la excentricidad va aumentando, se aprecia la aceleración del satélite al llegar al perigeo, y la deceleración al llegar al apogeo, comparándolo con el movimiento circular uniforme.

A modo de simplificar la ecuación de la órbita, introduciremos el concepto de **anomalía excéntrica E** , que es el ángulo, medido desde el centro de la elipse en el sentido contrario a las agujas del reloj, entre el semieje mayor de la elipse y la proyección vertical sobre la circunferencia que circunscribe la elipse (de mismo centro que la elipse y radio el semieje mayor de la elipse).

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Esquema representativo de cómo representar de manera gráfica la anomalía verdadera, θ , y la anomalía excéntrica, E .

Observando la figura anterior podemos ver fácilmente que siendo a el semieje mayor de la elipse, e la excentricidad, r la distancia radial partiendo del foco de la elipse, β la anomalía verdadera, y E la anomalía excéntrica, podemos establecer una relación puramente geométrica entre todos estos parámetros.

$$a \cos E = ae + r \cos \beta$$

Despejando la anomalía excéntrica y operando, y teniendo en cuenta como hemos definido antes la anomalía media M_e , podemos establecer una relación entre la anomalía excéntrica E y la anomalía media M_e .

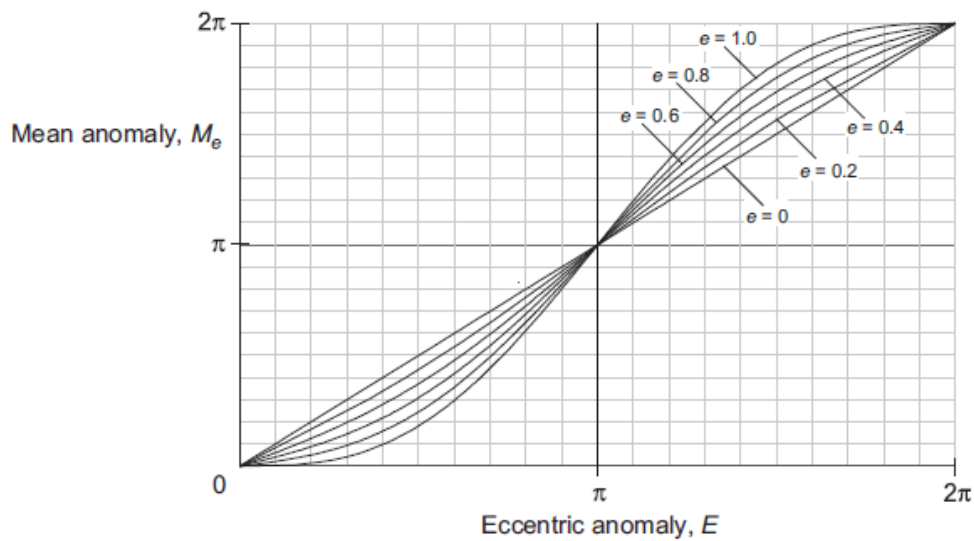
$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\beta}{2} \right)$$

$$M_e = E - e \sin E$$

Y representando la anomalía excéntrica E en función de la anomalía media M_e obtenemos también una medida de la aceleración y la deceleración del satélite a lo largo de su trayectoria respecto a un movimiento circular uniforme. Observar que para valores de la excentricidad cercanos a 1, podemos obtener una curva que nos de información clara, mientras que en la figura anterior, al representar la anomalía media M_e en función de la anomalía verdadera θ , al llegar al valor 1 de la excentricidad la curva se truncaba. Aquí radica la importancia de la

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

anomalía excéntrica. Es útil en el caso de trayectorias muy excéntricas.



Dependencia de la anomalía media con la anomalía excéntrica a distintas excentricidades.

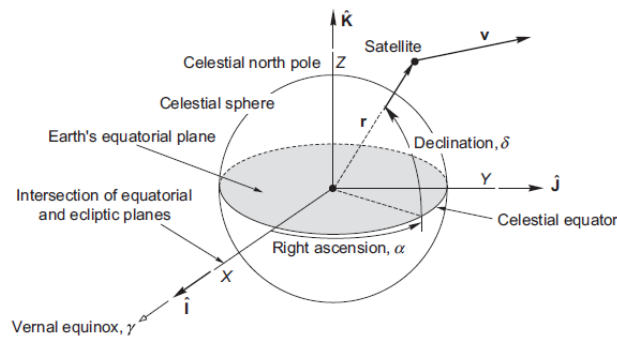
2.2. VECTOR DE ESTADO

En un instante dado, el vector de estado de un satélite viene dado, en forma compacta, por su velocidad \mathbf{v} y su aceleración \mathbf{a} en dicho instante. La mecánica orbital se basa fundamentalmente en predecir vectores de estado a lo largo de un determinado intervalo de tiempo. Como sabemos, la expresión que determina el vector de estado de un satélite que viaja alrededor de la Tierra es la siguiente:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$$

Donde \mathbf{r} es el vector posición del satélite dentro del marco perifocal, tal y como hemos definido ya, r es el módulo del vector posición, y μ es la masa reducida del sistema Tierra-Satélite. Tanto \mathbf{r} como sus derivadas deben de ser medidas desde un sistema de referencia no rotacional y ligado a la Tierra, es decir, desde un sistema de referencia inercial. Entonces, el sistema de referencia que se usa habitualmente es un sistema cartesiano perifocal de este tipo.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Sistema de referencia perifocal cartesiano.

Donde el eje X apunta al punto vernal, el plano XY es el plano ecuatorial terrestre, y el eje Z coincide con el eje de rotación de la Tierra y apunta hacia el Norte. Efectivamente, se trata de un sistema de referencia inercial, ya que solamente consideramos el sistema formado por la Tierra y el satélite, ignorando el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. En este sistema de referencia, la posición \mathbf{r} y la velocidad \mathbf{v} de nuestro satélite en función del tiempo vienen dadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v} = v_X\hat{\mathbf{i}} + v_Y\hat{\mathbf{j}} + v_Z\hat{\mathbf{k}}$$

Donde $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son los vectores unitarios en la dirección de los ejes X Y Z, respectivamente. Tal y como hemos definido durante todo este trabajo, r es el módulo del vector posición. Entonces tenemos que en coordenadas polares, el vector posición sólo va a tener componente radial, por simetría del campo de fuerzas de nuestro sistema.

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r$$

Podemos escribir el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_r$ como combinación lineal de los vectores del sistema cartesiano, donde el cambio de coordenadas será un cambio típico de coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

$$\hat{\mathbf{u}}_r = l\hat{\mathbf{i}} + m\hat{\mathbf{j}} + n\hat{\mathbf{k}} = \cos\delta\cos\alpha\hat{\mathbf{i}} + \cos\delta\sin\alpha\hat{\mathbf{j}} + \sin\delta\hat{\mathbf{k}}$$

Donde el ángulo δ es la declinación, que observando la figura anterior, vemos que varía de -90 a 90 grados, y α es la ascensión recta del nodo ascendente, que varía de 0 hasta 360 grados. Con lo cual, dada la posición del satélite en un instante dado, en esféricas, esto es, en un punto de la bóveda celeste observado desde la Tierra, podemos sacar fácilmente la componente de la posición del vector de estado. Sin embargo, para determinar completamente el vector de estado necesitamos más componentes orbitales. El vector de estado, como hemos mencionado brevemente en el primer capítulo de este trabajo, tiene un total de seis componentes. Tres que corresponden a las coordenadas de la posición, y tres que corresponden a las coordenadas de la velocidad, todas ellas medidas en el sistema cartesiano inercial ligado a la Tierra que acabamos de definir.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Con lo cual, como el vector de estado tiene seis componentes, significa que nuestro sistema Tierra-satélite tiene seis grados de libertad. Entonces, para definir completamente el movimiento ligado a este sistema, hemos de trabajar con seis parámetros orbitales, correspondientes a los grados de libertad del sistema. Entonces, plantearemos el problema de una manera distinta. Para definir una órbita en el plano necesitamos dos parámetros: Excentricidad y momento angular. A partir de estos dos parámetros, podemos obtener otros, como el semieje mayor, la energía específica de la órbita y el periodo.

Para localizar un punto en la órbita necesitamos un tercer parámetro, la anomalía verdadera, que nos sitúa el satélite en la órbita en función del tiempo, desde el perigeo (instante inicial). Y para describir la orientación de la órbita en tres dimensiones se requieren tres parámetros más, los llamados ángulos de Euler.

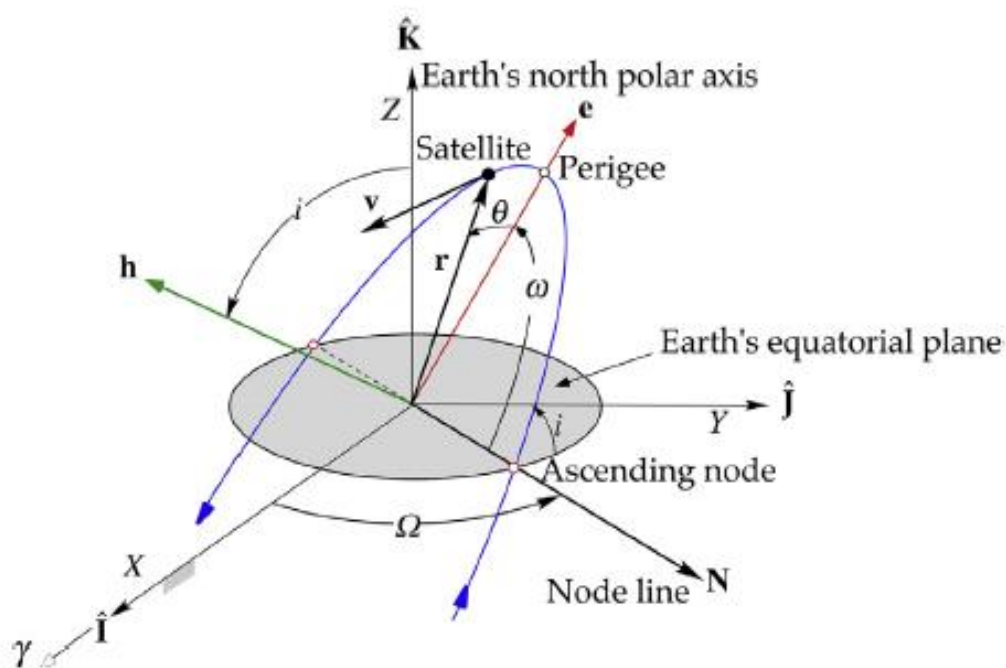


Figura representativa de cada uno de los ángulos de Euler en una órbita respecto al los ejes del sistema de referencia cartesiano perifocal.

Ahora sí tenemos seis parámetros orbitales, con lo cuales podemos definir el vector de estado de nuestro sistema para un instante de tiempo determinado. Estos parámetros enumerados son los siguientes:

h : momento angular específico del satélite.

e : excentricidad de la órbita

θ : anomalía verdadera

Ángulos de Euler:

Ω : ascensión recta del nodo, que es al ángulo que forman la dirección del punto Aries con la intersección del plano de la órbita con el plano ecuatorial terrestre, medido en la dirección del movimiento del satélite.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

i : inclinación, que es el ángulo que forma la dirección del momento angular con la dirección del eje de rotación de la Tierra, en sentido Sur-Norte.

ω : argumento del perigeo, que es el ángulo que forma la posición del perigeo de la órbita con la intersección del plano de la órbita con el plano ecuatorial de la Tierra, medido en la dirección del movimiento de nuestro satélite.

Estos parámetros orbitales están registrados en ficheros llamados Two Line, o representado por sus sigmas en inglés TLE. Este tipo de ficheros contienen los parámetros orbitales de partida de un satélite determinado. Entonces, a partir de estos parámetros iniciales, mediante un cambio de variable, obtenemos las componentes iniciales del vector de estado para un satélite, y podemos resolver la ecuación diferencial de la posición del satélite en función del tiempo para cualquier instante de su caída.

2.3. EFECTO DEL ACHATAMIENTO TERRESTRE. INTRODUCCIÓN CONCEPTUAL A LA PERTURBACIÓN GRAVITATORIA

La Tierra, como todos los planetas con movimiento de rotación, se ensanchan en la zona del ecuador por efecto de la fuerza centrífuga causada por su movimiento de rotación. En el caso de la Tierra, el radio en el ecuador es 21 Km más grande que en los polos. Este fenómeno se llama achatamiento, que se define como el cociente entre la diferencia de longitud entre el radio ecuatorial y el radio polar, entre la longitud del radio ecuatorial.

$$\text{Achatamiento} = \frac{\text{Radio ecuatorial} - \text{Radio Polar}}{\text{Radio Ecuatorial}}$$

La Tierra es una esfera achatada en los polos, con lo que se rompe su perfecta simetría esférica. Este truncamiento de la simetría esférica viene a mostrar que la fuerza gravitatoria de un satélite que orbite en torno a la Tierra no siempre se dirige hacia el centro de ésta. Aunque la intensidad gravitatoria de un cuerpo perfectamente esférico depende solamente de la distancia a su centro, el achatamiento produce una variación en la intensidad gravitatoria que va a depender tanto del radio, como de la latitud del punto sobre el que se encuentre la proyección del satélite sobre la superficie de la Tierra. Esto significa que la distancia angular desde el ecuador va a ser diferente que la distancia angular desde los polos, provocando así una perturbación en la órbita del satélite. Esta perturbación en el movimiento del satélite tiene el nombre de **perturbación gravitatoria**. Esto provoca una variación bastante notable de la ascensión recta Ω , así como del argumento del perigeo ω , en función de la inclinación i de la órbita del satélite.

$$\dot{\Omega} = - \left[\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R^2}{(1 - e^2)^2 a^7} \right] \cos i$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\dot{\omega} = - \left[\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R^2}{(1 - e^2)^2 a^2} \right] \left(\frac{5}{2} \text{sen}^2 i - 2 \right)$$

En ambas ecuaciones, podemos estudiar en que dirección se desplaza la órbita en función de su ángulo de inclinación. En la ecuación que define la derivada primera en función del tiempo de la ascensión recta del nodo Ω , podemos distinguir tres casos.

- Si $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$, entonces, $\dot{\Omega} < 0$, esto es, las órbitas son directas y la línea nodal se desplaza hacia el oeste. A este fenómeno se le llama *regresión de los nodos*.
- Si $90^\circ \leq i \leq 180^\circ$, entonces, $\dot{\Omega} > 0$, esto es, las órbitas son retrógradas y la línea nodal se desplaza hacia el este.
- En órbitas polares, $i = 90^\circ$, la línea nodal permanece estacionaria.

Igualmente, en la ecuación de la derivada primera en función del tiempo del argumento del perigeo ω podemos distinguir otros tres casos.

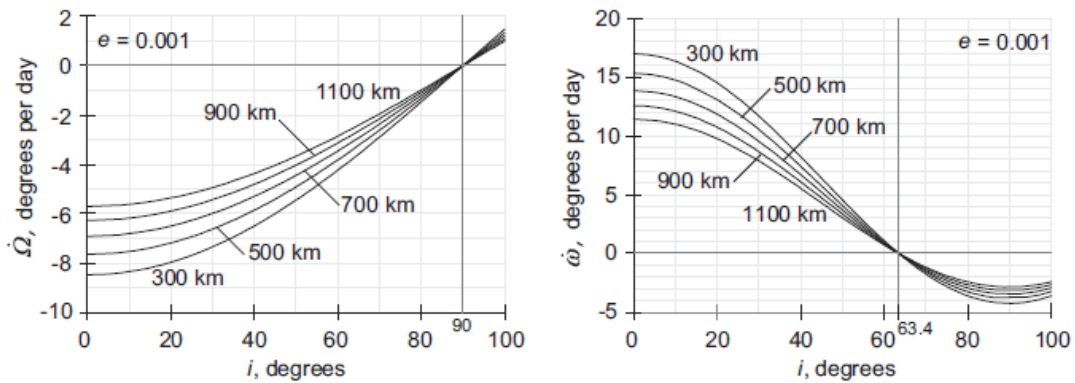
- Si $0^\circ < i < 63.4^\circ$, o, $116.6^\circ < i < 180^\circ$, $\dot{\omega}$ es positivo, lo que significa que el perigeo avanza en la dirección del movimiento del satélite. A este fenómeno se le llama *avance del perigeo*.
- Si $63.4^\circ < i < 116.6^\circ$, $\dot{\omega}$ es negativo, lo que significa que el perigeo se desplaza en dirección contraria al movimiento del satélite.
- Si $i = 63.4^\circ$, o, $i = 116.6^\circ$, entonces el satélite se encuentra en la *inclinación crítica* y la posición del perigeo permanece fija.

Y relacionando ambas ecuaciones obtenemos una relación exclusiva entre $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ y la inclinación i .

$$\dot{\omega} = \dot{\Omega} \frac{\left(\frac{5}{2}\right) \text{sen}^2 i - 2}{\cos i}$$

Todo esto puede explicarse de una forma más visual representando cada una de las derivadas en función del tiempo de la ascensión recta Ω como del argumento del perigeo ω en función de la inclinación i de la órbita.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Representación gráfica de la variación, tanto de la ascensión recta Ω como del argumento del perigeo ω , con el tiempo, en función del ángulo de inclinación i .

En la primera figura observamos que cada curva corresponde a una altura R . Cada una de las curvas presenta un punto de inflexión cuando la inclinación alcanza un valor de 90 grados, donde pasa de ser cóncava a ser convexa, lo que explica la regresión de los nodos y el hecho de que las órbitas sean directas o retrógradas. Pasa lo mismo en la segunda figura, donde el punto de inflexión de la curva a cualquier altura se alcanza cuando la inclinación alcanza un valor de 63.4 grados. Representando las dos figuras juntas, observamos la relación directa entre $\dot{\Omega}$ y $\dot{\omega}$.

J_2 es el segundo armónico. Este valor está tabulado para cada planeta particularmente, y se obtiene de la observación directa a cada planeta.

Planet	Oblateness	J_2
Mercury	0.000	60×10^{-6}
Venus	0.000	4.458×10^{-6}
Earth	0.003353	1.08263×10^{-3}
Mars	0.00648	1.96045×10^{-3}
Jupiter	0.06487	14.736×10^{-3}
Saturn	0.09796	16.298×10^{-3}
Uranus	0.02293	3.34343×10^{-3}
Neptune	0.01708	3.411×10^{-3}
(Moon)	0.0012	202.7×10^{-6}

Valor numérico de J_2 para cada planeta del Sistema Solar y para la Luna.

Esta perturbación es muy importante, porque podemos controlar la precesión y conseguir así que un satélite haga, por ejemplo, una trayectoria heliosíncrona, esto es, que preceda 1 grado por día. También podemos conseguir que un satélite describa una órbita Molniya, es decir, que

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

orbite a una inclinación de 63 grados. Esto permite que la posición de su perigeo sea prácticamente estacionaria.

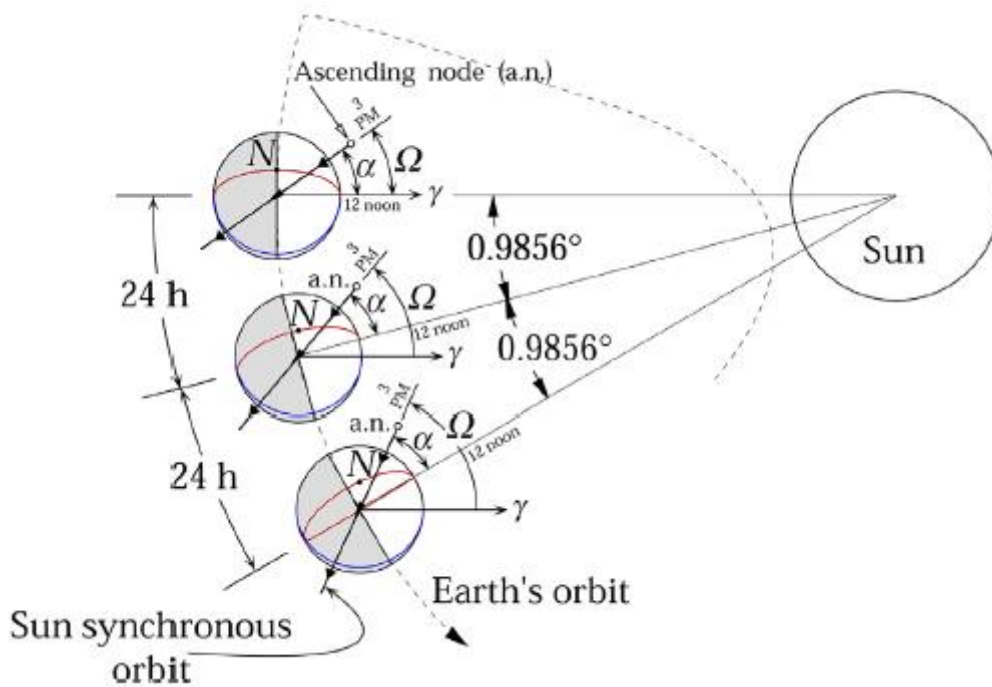


Figura representativa de una órbita heliosíncrona.

CAPÍTULO 3: PERTURBACIONES EN LAS ÓRBITAS DE LOS SATÉLITES

Como venimos explicando, las órbitas keplerianas son las provienen de resolver el problema de los dos cuerpos:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Esta es la conclusión a la que se llega asumiendo que sólo hay dos objetos en nuestro sistema (problema de los dos cuerpos) y que ambos son perfectamente esféricos, lo que da lugar a que cada uno tiene un campo gravitatorio que guarda también simetría esférica. Dichos campos son la única fuente de interacción entre ellos. Por tanto, definimos como *perturbación* cualquier efecto que causa una desviación en la órbita kepleriana anterior.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{p}$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Donde \mathbf{p} corresponde al término que da cuenta de la suma neta de las perturbaciones en la órbita. Hay muchos tipos de perturbaciones, nosotros nos centraremos en tres:

- Perturbación debida al rozamiento atmosférico
- Perturbación debida a la presión de la radiación solar
- Perturbación debida al achatamiento terrestre

Estimando un poco los resultados que vamos a obtener, la magnitud del vector \mathbf{p} es pequeña comparada con la aceleración gravitatoria principal a_0 :

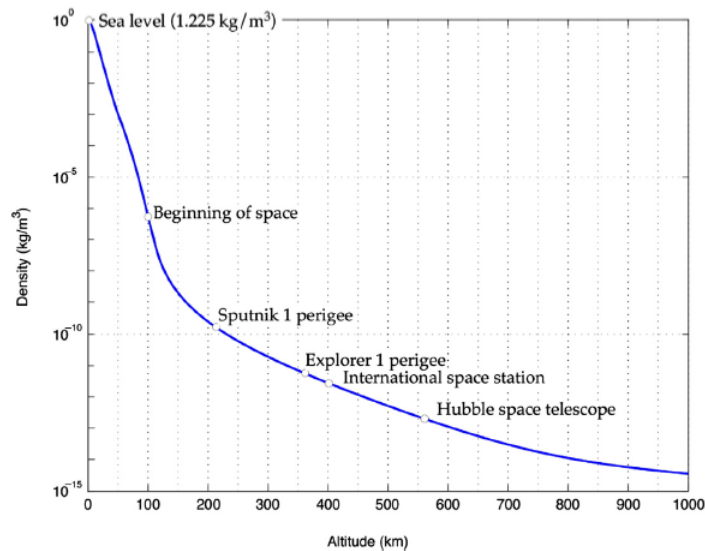
$$a_0 = \frac{\mu}{r^2}$$

Una excepción es la correspondiente a la perturbación debida al rozamiento atmosférico. A una altitud máxima de 100 Km este efecto es tan grande que es capaz de deorbitar un satélite. Sin embargo, dicho efecto disminuye bruscamente a altitudes mayores que 100 Km, y a partir de 1000Km dicho efecto se hace prácticamente nulo ($p_{drag} < 10^{-10} a_0$). Los demás efectos dependen de la altitud en mayor grado. Entonces, podemos calcular la órbita exacta de un satélite orbitando en torno a la Tierra teniendo en cuenta las perturbaciones anteriormente citadas, conociendo las condiciones iniciales $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$, y la forma funcional de la perturbación \mathbf{p} , que definiremos después, para resolver la ecuación diferencial de la posición del satélite en función del tiempo. Hay varios métodos conocidos de resolver dicha ecuación diferencial. Nosotros utilizaremos dos de ellos: El Método de Enke y el Método de Gauss. Estos métodos proporcionarán las ecuaciones variacionales para cada uno de los parámetros orbitales de las órbitas en función de la perturbación que estemos estudiando.

3.1. ROZAMIENTO ATMOSFÉRICO

En nuestro planeta, se acepta que el espacio empieza por encima de los 100 Km. Aunque por encima de los 100 Km exista algo de atmósfera (el 0.0001 %), la densidad de aire atmosférico por encima de esta altitud no es suficiente para frenar por rozamiento atmosférico los cuerpos que orbitan. La atmósfera terrestre va disminuyendo a mayor altitud sobre el nivel del mar de forma exponencial.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Dependencia logarítmica de la densidad de aire atmosférico con la altura.

Esta gráfica se ha obtenido con datos reales de la densidad atmosférica ρ_i , tomados por detectores en función de la altitud z_i , colocados en la atmósfera a distintas alturas. Dichos datos se recogen en una tabla y se interpolan, utilizando la siguiente fórmula general de interpolación.

$$\rho(z) = \rho_i e^{-\frac{(z-z_i)}{H_i}}$$

$$z_i < z < z_{i+1}$$

$$H_i = -\frac{(z_{i+1} - z_i)}{\ln\left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}\right)}$$

Veamos cómo afecta el rozamiento atmosférico al movimiento orbital de un satélite. La velocidad relativa del satélite respecto a la Tierra viene dada como la diferencia entre la velocidad del satélite respecto al sistema de referencia no inercial, \mathbf{v} , y la velocidad de la atmósfera, \mathbf{v}_{atm} , respecto al mismo sistema no inercial. Como la atmósfera gira alrededor de la Tierra arrastrada por su movimiento de rotación, su velocidad angular será la velocidad angular de la Tierra, $\boldsymbol{\omega}_E$. Entonces, la velocidad relativa de la atmósfera respecto al sistema de referencia no inercial será el producto vectorial del vector velocidad angular de la Tierra $\boldsymbol{\omega}_E$ por el vector posición del satélite \mathbf{r} .

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{atm} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

El rozamiento atmosférico se interpreta como una fuerza que actúa en sentido contrario al vector velocidad, en este caso, al vector velocidad relativa \mathbf{v}_{rel} , que es la velocidad relativa del satélite respecto a la Tierra.

$$\mathbf{D} = -D\hat{\mathbf{v}}_{rel}$$

Donde $\hat{\mathbf{v}}_{rel}$ es el vector unitario en la dirección de la velocidad relativa del satélite. El coeficiente D es el módulo del rozamiento \mathbf{D} , y depende de la densidad atmosférica ρ , del área del satélite A normal a la dirección de su velocidad relativa, y del módulo de la velocidad relativa v_{rel} del satélite. A su vez, C_D es el coeficiente de rozamiento atmosférico, que no tiene dimensión, y toma un valor entre 2 y 3 normalmente.

$$D = \frac{1}{2}\rho v_{rel}^2 C_D A$$

Conociendo la masa del satélite m , entonces la aceleración de perturbación \mathbf{p} vendrá definida por la expresión anterior del rozamiento atmosférico \mathbf{D} .

$$\mathbf{p} = \mathbf{D} = -\frac{1}{2}\rho v_{rel}^2 \left(\frac{C_D A}{m}\right) \hat{\mathbf{v}}_{rel} = -\frac{1}{2}\rho v_{rel}^2 B \hat{\mathbf{v}}_{rel}$$

Donde B es el *coeficiente balístico*.

3.2. PERTURBACIÓN GRAVITATORIA

Como hemos explicado con anterioridad, cuando se tiene un cuerpo de masa M con simetría esférica, entonces su campo gravitatorio será un campo de fuerzas esférico, atractivo, donde la totalidad de las fuerzas ejercidas por el mismo estarán dirigidas hacia su centro de masas. El potencial asociado a este campo de fuerzas guardará también simetría esférica, y en magnitud, cumplirá con la expresión general de potencial asociado a un campo de fuerzas radial y atractivo. Expresándolo en coordenadas esféricas, y considerando ya el sistema de dos cuerpos haciendo uso de su masa reducida μ .

$$V = -\frac{\mu}{r}$$

$$\mathbf{a} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\mathbf{a} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Sin embargo, cuando el cuerpo atractivo no perfectamente esférico, entonces el campo de fuerzas creado por dicho cuerpo ya no guarda simetría esférica. En el caso de la Tierra, que

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

sufre los efectos del achatamiento por acción de la fuerza centrífuga como consecuencia de su movimiento de rotación, tal y como hemos explicado antes, el campo gravitatorio creado por la misma va a variar tanto en función del radio (el radio en el ecuador es mayor que el radio en los polos), como de la latitud a la que nos encontremos. Esto se traduce en que el potencial asociado al campo de fuerzas de este tipo tendrá una componente a mayores $\Phi(r, \phi)$, que hará depender al potencial tanto del ángulo de latitud como del radio del punto que estemos considerando.

$$V(r, \phi) = -\frac{\mu}{r} + \Phi(r, \phi)$$

Donde $\Phi(r, \phi)$ viene dada como:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k(\cos \phi)$$

Donde J_k son los *harmónicos de zona*, y P_k son los *polinomios de Legendre*.

Los harmónicos de zona son el resultado de observar el movimiento de los satélites alrededor de sus planetas correspondientes, y dichos números, que no tienen dimensión, son característicos de cada planeta.

Para la Tierra, estos números valen lo siguiente:

$J_1 = 0$ Esto es consecuencia de que el origen de nuestro sistema de coordenadas está situado en el centro de masas de la Tierra.

$$J_2 = 0.00108263$$

$$J_3 = -2.33936 \times 10^{-3} J_2$$

$$J_4 = -1.49601 \times 10^{-3} J_2$$

$$J_5 = -0.20995 \times 10^{-3} J_2$$

$$J_6 = 0.49941 \times 10^{-3} J_2$$

$$J_7 = 0.32547 \times 10^{-3} J_2$$

Para $k > 7$ el valor de J_k es más de tres órdenes de magnitud más pequeños que J_2 . Con lo cual, a la hora de sumar nos quedaremos sólo con el término correspondiente al J_2 . Asimismo, los polinomios de Legendre satisfacen la siguiente fórmula, llamada Fórmula de Rodrigues.

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d}{dx^k} (x^2 - 1)^k$$

Pero como vamos a truncar la serie en $k = 2$, el potencial Φ nos va a quedar con la forma siguiente:

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\Phi(r, \phi) = \frac{J_2 \mu}{2 r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1)$$

Y, operando del mismo modo que en el rozamiento atmosférico:

$$\mathbf{p} = -\nabla\Phi$$

Obtenemos que, en el sistema de referencia cartesiano perifocal que hemos definido antes, la perturbación viene definida de la siguiente forma:

$$\mathbf{p} = \frac{3 J_2 \mu R^2}{2 r^4} \left[\frac{x}{r} \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{r} \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{r} \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 3 \right) \hat{\mathbf{k}} \right]$$

3.3. PERTURBACIÓN DEBIDA A LA PRESIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR

Este tipo de perturbación se produce por la presión electromagnética que ejercen los fotones procedentes en este caso del Sol, sobre la superficie del satélite que esté situada cara al Sol. De acuerdo con la física cuántica, la radiación solar se comprende de fotones, que son ondas electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz, c . Dentro del marco de la física cuántica, se consideran los fotones como partículas, sin masa, pero partículas. Dada la definición anterior de fotón, como toda onda, tiene energía y momento, aunque no tenga masa. Su energía obedece la ley de Planck

$$E_{\text{fotón}} = hf$$

Donde h es la constante de Planck, mientras que f es la frecuencia de la onda asociada al fotón. Su momento es una consecuencia de la hipótesis de De Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{c} = \frac{E_{\text{fotón}}}{c}$$

La superficie visible del Sol es la *fotosfera*, que actúa como un cuerpo negro que emite radiación que se expande a lo largo de todo el espectro electromagnético. La intensidad de energía radiada por un cuerpo negro obedece la ley de Stefan-Boltzmann:

$$S_0 = \sigma T^4$$

Donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Entonces, teniendo en cuenta que la temperatura de la fotosfera es 5777 K, la intensidad radiada por la misma se obtendrá sustituyendo en la ecuación de arriba.

$$S_0 = 63.15 * 10^6 \frac{W}{m^2}$$

Ahora veamos la cantidad de radiación solar que recibe la Tierra en un punto de su órbita.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

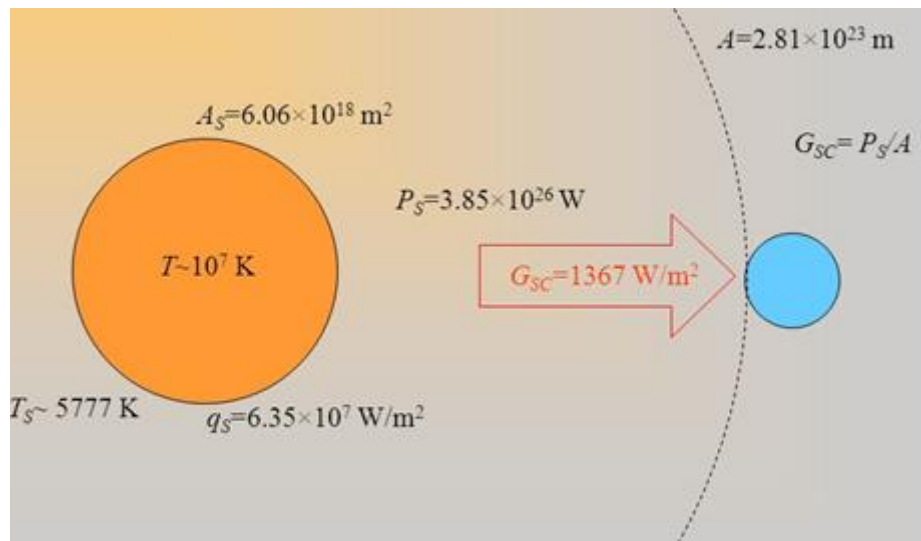


Figura representativa. Irradiancia solar y constante solar. Bibliografía: slideplayer.es

La radiación se propaga por el espacio de manera uniforme, con lo cual, todas las superficies concéntricas con la fotosfera reciben la misma radiación.

$$S_0 \pi R_0^2 = S \pi R^2$$

Despejamos y obtenemos la intensidad de radiación que recibe la Tierra en su órbita. Dicha intensidad se conoce con el nombre de *constante solar*, que define el flujo de energía (energía por unidad de tiempo y de área) que transportan los fotones a través de una superficie normal a la dirección de radiación.

$$S = S_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = 1367 \frac{W}{m^2}$$

Donde R_0 es el radio de la fotosfera, que vale 696000 Km, y R es el radio de la órbita terrestre, supuestamente esférica, que vale 149.6×10^6 Km.

Tal y como hemos definido antes el momento asociado a un fotón, si dividimos la constante solar, que es una medida de energía, por la velocidad de la luz, obtenemos el momento asociado al flujo que atraviesa la superficie de la órbita de la Tierra. Este momento se traduce como una presión que ejerce la radiación solar sobre una superficie S , y a esa presión se la conoce como *presión de radiación solar*. Este valor es una constante para cada planeta. Para el caso de la Tierra es interesante calcular su valor.

$$P_{RS} = \frac{S}{c} = 4.56 \times 10^{-6} \frac{N}{m^2} = 4.56 \mu Pa$$

Considerando ahora un satélite que orbita alrededor de la Tierra, adoptaremos *el modelo de la bola de cañón*, por el cual, consideramos que nuestro satélite es esférico de radio R . La fuerza perturbativa debida a la radiación solar sobre el satélite actúa de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = -v \frac{S}{c} C_R A_S \hat{\mathbf{u}}$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Donde $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector unitario del satélite en la dirección del satélite al Sol, apuntando hacia el Sol, ν es la *función sombra*, que vale de 0 hasta 1, dependiendo si la luz del Sol incide o no sobre la superficie del satélite, C_R es el *coeficiente de presión solar*, que toma valores entre 1 y 2: 1 si la superficie del satélite es completamente absorbente, y absorbe toda la radiación, y por lo tanto, todo el momento de cada fotón incidente, y 2 si la superficie del satélite es completamente especular. Así, todo fotón que incide sobre la superficie de satélite rebota, y transfiere a la superficie el momento de fotón que incide, más el momento del fotón que rebota. Es decir, cada fotón transfiere a la superficie su momento multiplicado por 2, multiplicando por dos la fuerza de radiación. A_S es el área del satélite cara al Sol (que en el modelo de la bola de cañón vale πR^2), y el signo menos indica que la fuerza de la radiación solar va dirigida en sentido contrario al Sol. Igualmente, consideraremos que el Sol está lo suficientemente lejos para considerar el sistema Tierra-Satélite como un punto, y que el vector unitario que apunta al Sol desde la Tierra prácticamente se confunde con el vector unitario que apunta al Sol desde el satélite.

$$\hat{\mathbf{u}}_{Sol-Tierra} = \hat{\mathbf{u}}_{Sol-Satélite} = \hat{\mathbf{u}}$$

Con lo cual, la aceleración debida a la radiación solar vendrá definida como el cociente entre la fuerza ejercida por la presión solar y la masa del satélite m . Sustituyendo el valor de \mathbf{F} por la definición que hemos dado antes para la fuerza perturbativa debida a la presión de radiación solar obtenemos el coeficiente de la magnitud de la perturbación debida a la radiación solar, p_{SR} .

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -p_{SR}\hat{\mathbf{u}}$$

$$p_{SR} = \nu \frac{S C_R A_S}{c m}$$

Analizando el caso para el cual el efecto de esta perturbación empieza a ser notable, consideraremos el punto en el cual la magnitud de la perturbación debida al rozamiento atmosférico iguala a la magnitud debida a la presión de la radiación solar.

$$p_D = p_{SP}$$

Sustituyendo el valor de cada coeficiente a ambos lados de la igualdad anterior, despejando la densidad, y considerando, como estamos haciendo hasta ahora en este apartado, que la órbita del satélite es circular ($v_{rel}^2 = \frac{\mu}{r}$), obtenemos la altitud que corresponde a esa densidad atmosférica.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\frac{1}{2} \rho v_{rel}^2 \left(\frac{C_D A}{m} \right) = \frac{S C_R A_S}{c m}$$

$$\rho = 2 \frac{A_S C_R S/c}{A C_D \mu} r$$

Donde $\frac{A_S}{A} = 1$, suponiendo que el satélite es completamente esférico, y la superficie vista desde cualquier perspectiva sea circular, $C_R = 1$, suponiendo que se trata de un cuerpo completamente absorbente, $C_D = 2$, tomando un valor estándar para el coeficiente de rozamiento atmosférico, y finalmente, $r = 6378 + z$, considerando que el satélite debe estar necesariamente encima de la superficie terrestre, puesto que 6378 es el radio de la Tierra, y z es la altitud. Despejando, obtenemos la función lineal que define la densidad atmosférica en función de la altitud, de donde se obtiene que, cuando z vale 625 Km, la densidad atmosférica toma un valor de $\rho = 8.01 \times 10^{-14} \frac{Kg}{m^3}$. Este cálculo nos permite comparar ambas perturbaciones y estimar donde está el límite de dominancia de la perturbación debida a la radiación solar sobre la perturbación debida al rozamiento atmosférico.

$$\rho \left(\frac{Kg}{m^3} \right) = 1.144 \times 10^{-17} (6378 + z) Km$$

CAPÍTULO 4: PERTURBACIONES ORBITALES EN SATÉLITES ARTIFICIALES: GOCE Y ENVISAT

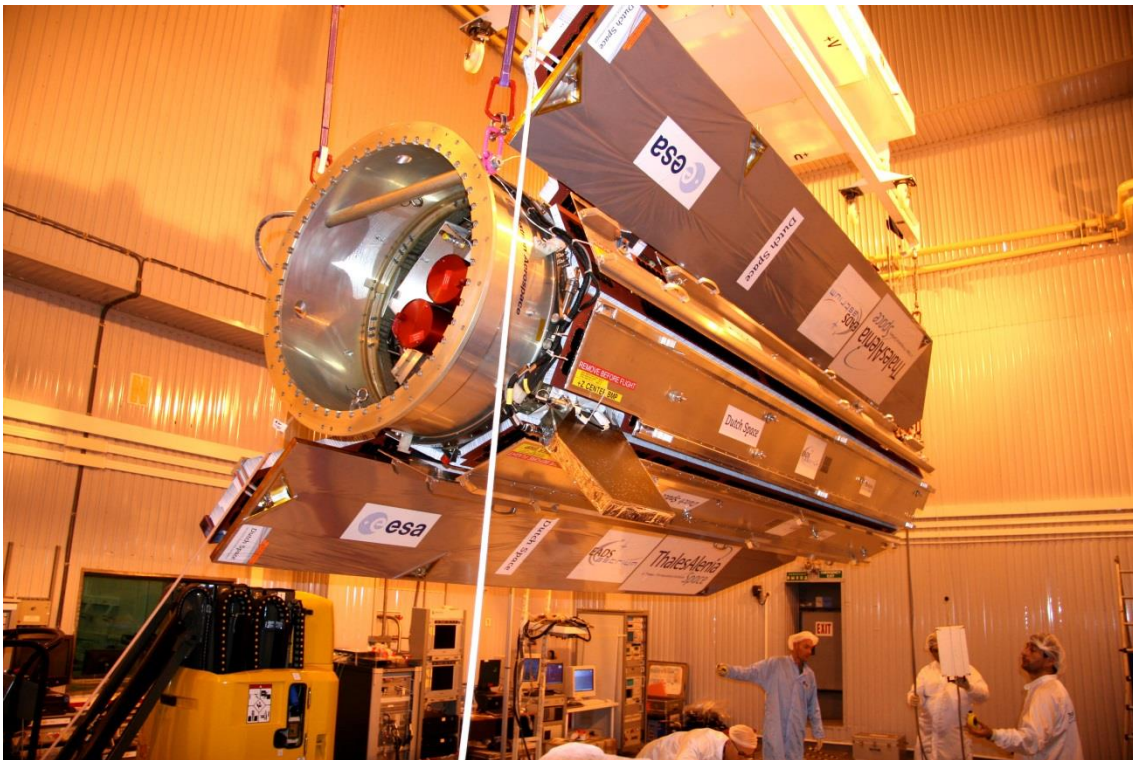
Ahora, aplicaremos toda la teoría anteriormente detallada de mecánica orbital, al estudio de dos satélites reales, que serán el GOCE y el ENVISAT.

Para conocerlos un más, hablaremos un poco más al detalle sobre ellos.

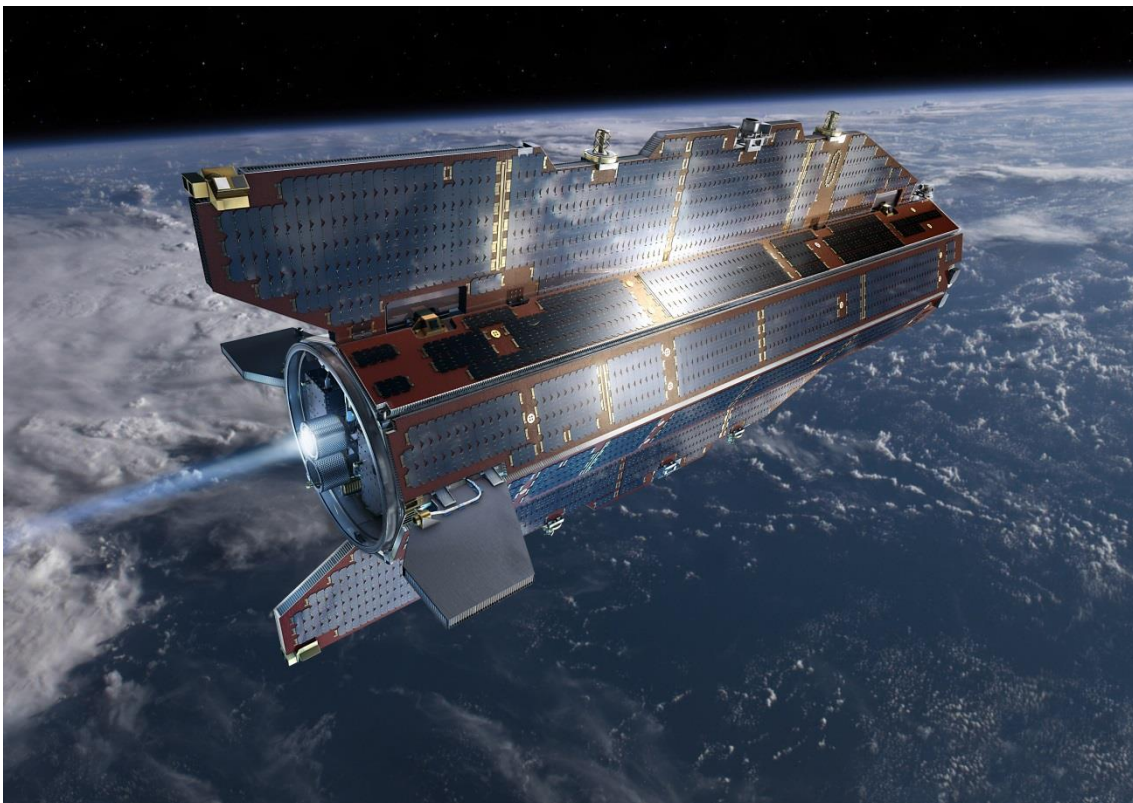
4.1. GOCE

El GOCE, cuyo nombre se compone de las siglas de *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*, que en castellano se traduce como *Explorador de la Circulación Oceánica y de Gravedad*, fue un satélite de la Agencia Estatal Europea (ESA), dedicado a medir el campo gravitatorio terrestre. Este satélite fue situado en una órbita LEO (siglas de Low Earth Orbit), a unos 260 Km de altura y con una excentricidad de 0, es decir, circular, y casi heliosíncrona, lo que hace que sea capaz de observar un determinado punto de la Tierra todos los días a la misma hora solar. Es decir, el GOCE se mueve sincronizado con el Sol.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



GOCE en su base de lanzamiento, antes de su puesta en órbita.

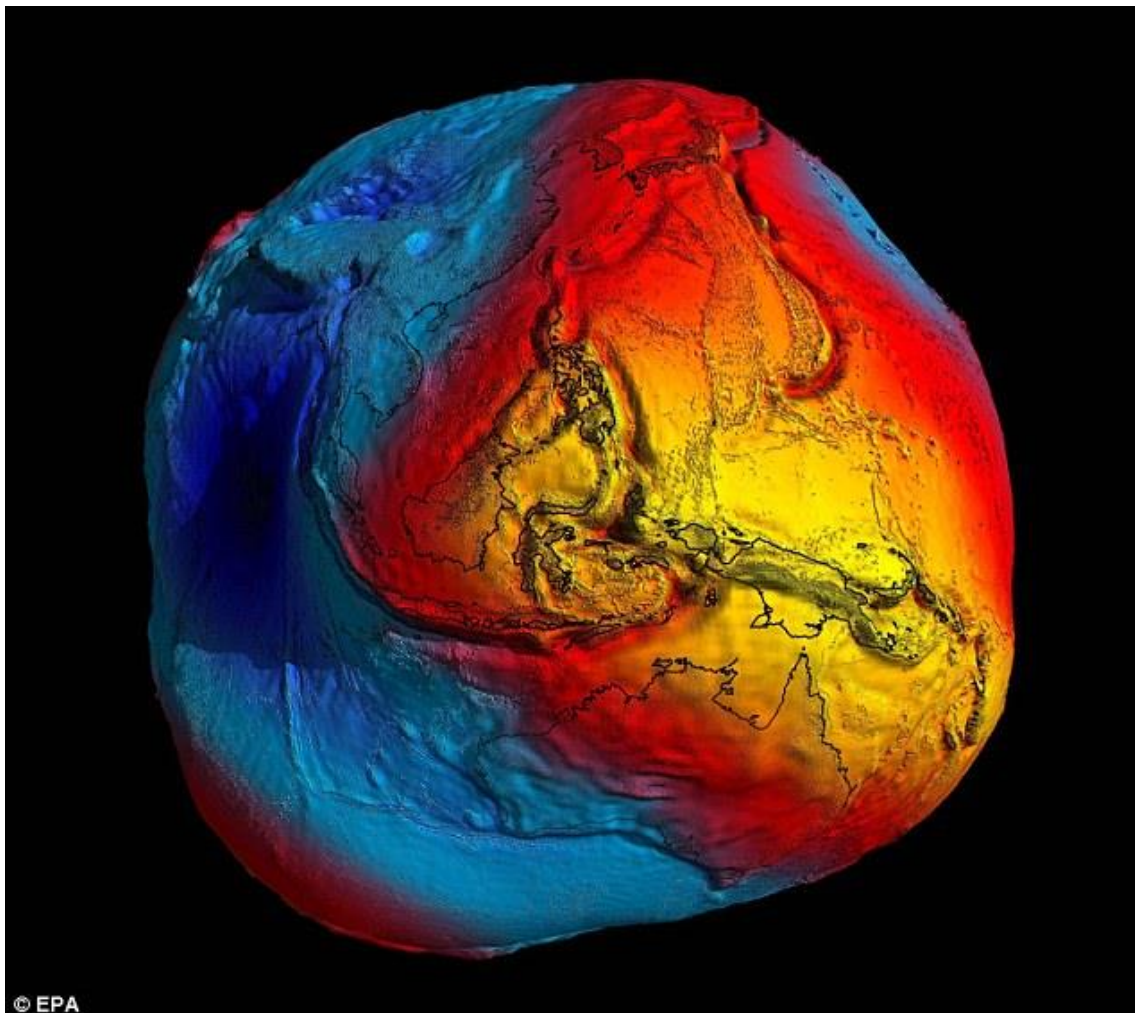


GOCE en órbita.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Este satélite fue diseñado con una forma muy aerodinámica, semejante a un misil, lo que le permite orbitar a baja altura sin que el rozamiento atmosférico llegue a frenarlo mucho. Además, llevaba incorporado un motor que lo impulsaba porque al volar a una órbita tan cercana a la superficie, su tiempo de vida útil era muy pequeño, y este pequeño motor lo imprimía una fuerza que alargaba un poco más su tiempo de vida útil.

Esta misión permitió iniciar una nueva fase en la historia de la observación de la Tierra. Se pudo medir el campo gravitatorio con una precisión de $0.00001g$, obteniéndose el siguiente resultado, llamado *geoide gravimétrico terrestre*, que muestra el campo gravitatorio terrestre que corresponde a cada punto de la superficie con una precisión de 1-2cm y una resolución espacial de 100km.



Geoide gravimétrico terrestre. Bibliografía: dailymail.co.uk

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

La figura de arriba representa dicho geoide, donde las zonas de azul oscuro son las zonas con intensidad de campo gravitatorio más pequeño, y las zonas de color rojo las de intensidad de campo gravitatorio mayor.

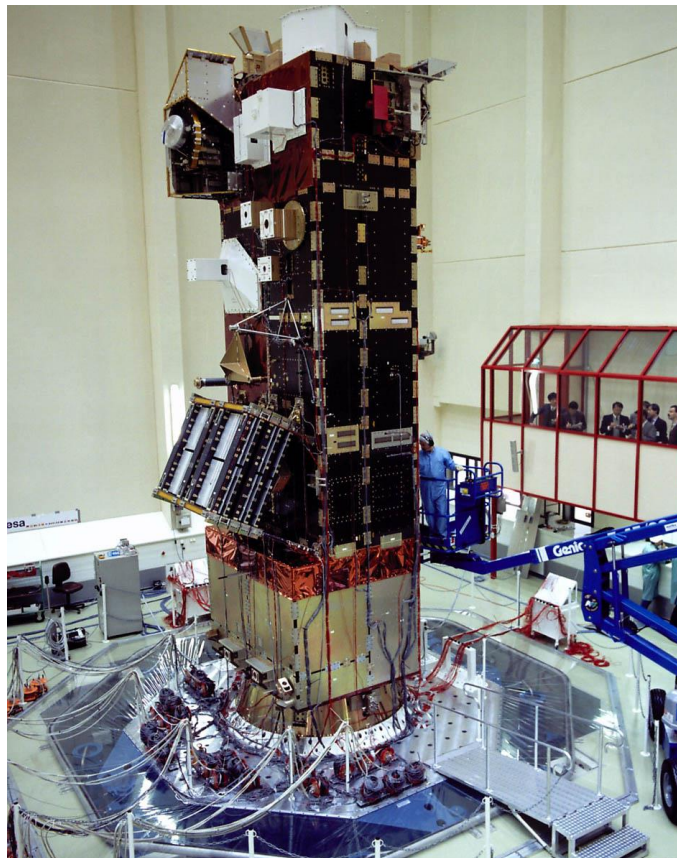
4.2. ENVISAT

El ENVISAT es un satélite de observación de la Tierra construido por la ESA, al igual que el GOCE. Orbita a una altura de 750 Km de altura, también en una órbita LEO pero algo más alta que la correspondiente al GOCE. Su órbita es prácticamente esférica, con una excentricidad de 0.001165, y heliosíncrona, al igual que el GOCE. Que la órbita sea heliosíncrona es una característica común para cualquier satélite de observación de la Tierra. El ENVISAT en concreto, tenía por misión recopilar datos para poder controlar el calentamiento global, el grado de contaminación atmosférica y de los desastres naturales, y así intentar mitigar sus efectos. Fue lanzado el 1 de Abril de 2002 y estuvo operativo hasta el 8 de Abril de 2012, que se perdió toda comunicación con el satélite.



ENVISAT en órbita.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



ENVISAT en su base de lanzamiento.

En este trabajo haremos simulaciones del movimiento tanto del ENVISAT como del GOCE resolviendo la ecuación diferencial que proporciona la variación del vector de estado en función del tiempo, incluyendo en dicha ecuación diferencial cada una de las perturbaciones que vamos a estudiar. Para ello, utilizaremos una herramienta de cálculo matemático, que en nuestro caso será MATLAB. A continuación expondremos los resultados para cada uno de los dos satélites, diferenciando por tipo de perturbación, y comparando resultados de ambos satélites.

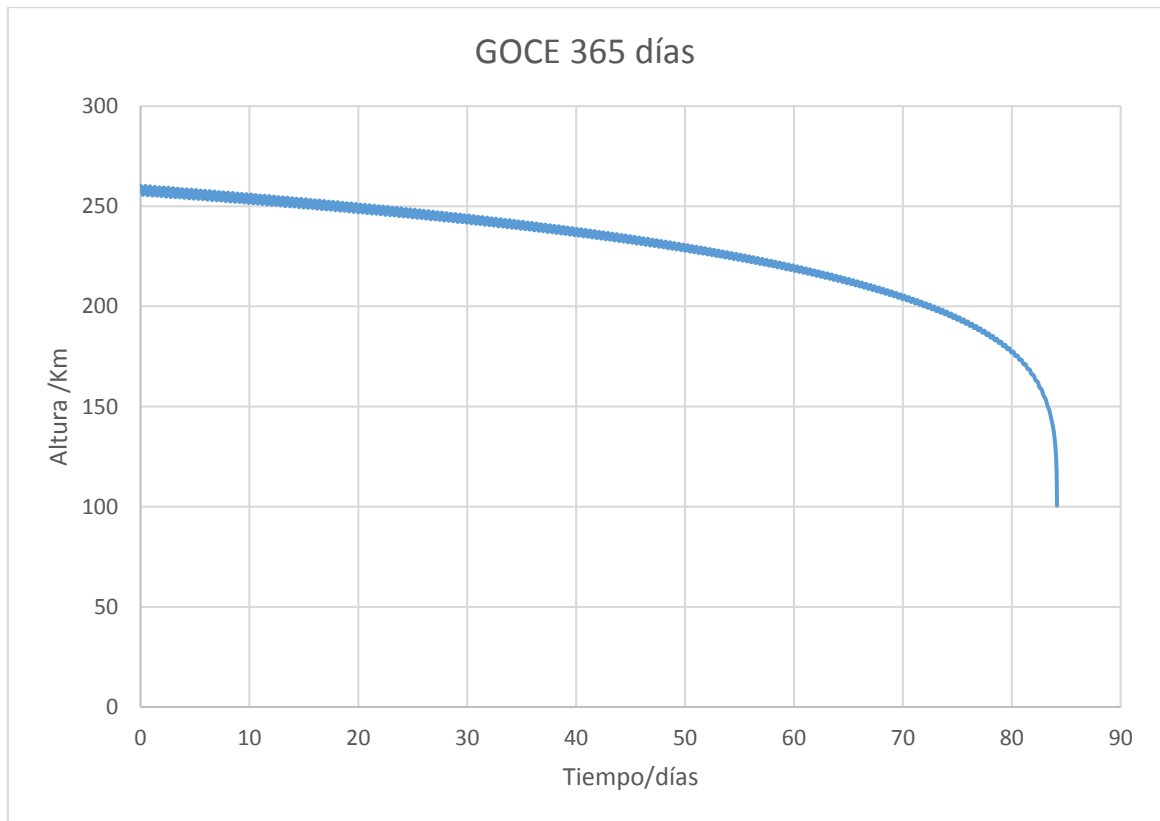
CAPÍTULO 5: RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1. PERTURBACIÓN DEBIDA AL ROZAMIENTO ATMOSFÉRICO

5.1.1. GOCE

Empezaremos por el GOCE. Analizando la perturbación debida al rozamiento atmosférico, obtenemos la siguiente figura que representa la caída del satélite en función del tiempo.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Nosotros simulamos la caída del satélite para un periodo de tiempo correspondiente a 365 días, un año terrestre. Sin embargo, remitiéndonos a la serie de datos de la que hemos obtenido la figura, observamos que el satélite prácticamente se da por caído a los 84 días aproximadamente de haberse puesto en órbita. Más concretamente, en el punto de coordenadas:

$$(t = 84.14892 \text{ días}; \text{Altura} = 100.4408 \text{ Km})$$

Esto es debido a que la altura a la que orbita inicialmente este satélite es muy baja. Podemos comprobarlo leyendo las coordenadas de partida. El satélite se da por caído a los 100 Km de altura aproximadamente porque a partir de esa altura, es cuestión de minutos que el satélite caiga sobre algún punto de la superficie de la Tierra.

$$(t = 0 \text{ s}; \text{Altura} = 260.1873 \text{ Km})$$

Remitiéndonos a la explicación teórica, a menos altura más rozamiento atmosférico, porque el rozamiento atmosférico depende de la densidad de atmósfera que haya en un determinado punto sobre la superficie de la Tierra, y dicha densidad decrece exponencialmente con la altura. Entonces, debemos esperar que la resolución de la ecuación diferencial para este tipo

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

de perturbación no de como resultado un movimiento uniforme, sino más bien un movimiento en espiral, sin un periodo definido. Viendo la figura anterior, resultado de la simulación de la caída del satélite, podemos considerar que órbitas complementarias, esto es, cercanas unas de otras en el tiempo, son prácticamente cerradas porque el satélite cae muy poco. Entonces, debemos esperarnos que a medida que va perdiendo altura, el periodo debe ir haciéndose cada vez más pequeño, teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler, por la cual, el cociente entre el cuadrado del periodo T^2 y el cubo del semieje mayor a^3 de la órbita de cualquier satélite que orbite alrededor de la Tierra, es un valor constante.

$$\left. \begin{aligned} dt &= \frac{2m}{L} dS \Rightarrow T = \int_0^T dt = \frac{2m}{L} \int_0^S dS = \frac{2m}{L} S = \frac{2m}{L} \pi ab \\ a &= \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{L^2}{m|K|} ; \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{|K|} a^3 = T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Para demostrar que la variación de altura varía el periodo, consideraremos tiempos de caída alejados en el tiempo y tomaremos máximos y mínimos de la gráfica complementarios, que son perigeos y apogeos de órbitas complementarias en la caída del GOCE. A continuación, representaremos los primeros 10 días de caída del satélite.



Cogemos un máximo y un mínimo consecutivo, tal y como hemos explicado.

Instante inicial

$$(t = 2.336467 \text{ días}; \text{Altura} = 254.81 \text{ Km})$$

Instante final

$$(t = 2.555511 \text{ días}; \text{Altura} = 259.25901 \text{ Km})$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

La distancia entre ambos más el radio de la Tierra es el semieje mayor de la elipse del satélite, a :

$$a = 6628.035 \text{ Km}$$

Ahora, aplicamos la tercera ley de Kepler:

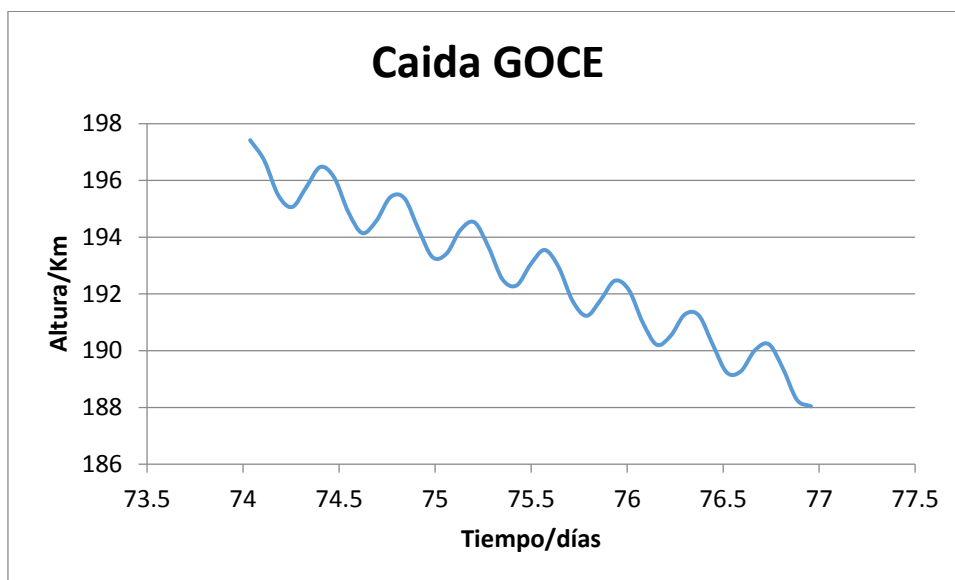
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Y el periodo es:

$$T = 5685.8555 \text{ s} = 94.7642 \text{ min} = 1.49 \text{ h}$$

Que es el dato de periodo que inicialmente marca el TLE.

Ahora, representamos la caída del satélite desde el día 74 al día 77.



Cogemos de nuevo dos puntos, máximo y mínimo, consecutivos:

Instante inicial

$$(t = 75.570114 \text{ días}; \text{Altura} = 193.550219 \text{ Km})$$

Instante final

$$(t = 75.789158 \text{ días}; \text{Altura} = 191.230708 \text{ Km})$$

En este caso, el semieje mayor de la elipse del satélite vale:

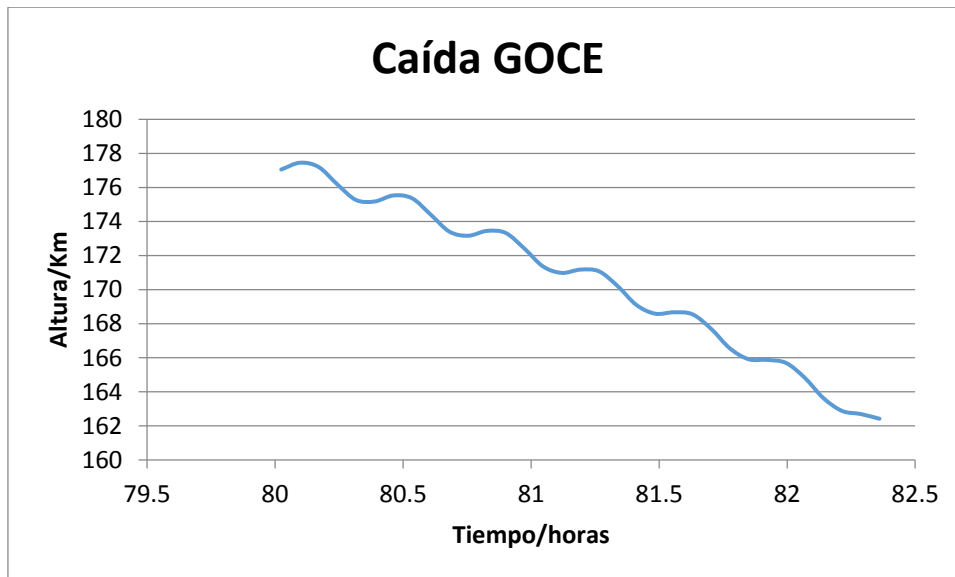
$$a = 6563.39 \text{ Km}$$

Y el periodo en este caso es:

$$T = 5526.43 \text{ s} = 92.107 \text{ min} = 1.47 \text{ h}$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Por último, representamos la caída del satélite desde el día 80 hasta el día 82, de modo que cogemos varios periodos de la caída. Volvemos a sacar el periodo, considerando perigeos y apogeos de órbitas complementarias, para finalmente, representar todos los periodos y observar como su valor se va haciendo más pequeño con la altura.



Instante inicial

$$(t = 80.90018 \text{ días}; \text{Altura} = 173.332941 \text{ Km})$$

Instante final

$$(t = 81.119224 \text{ días}; \text{Altura} = 170.983155 \text{ Km})$$

Donde el semieje mayor a vale, en este caso.

$$a = 6543.15 \text{ Km}$$

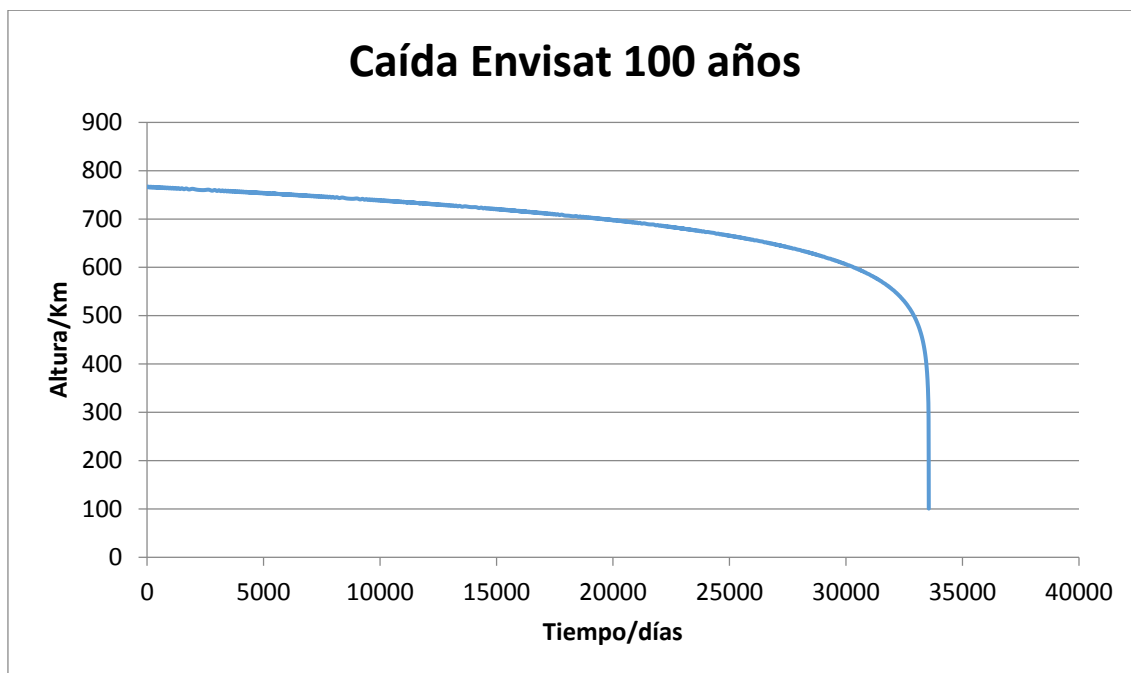
Y el periodo T .

$$T = 1.46 \text{ horas}$$

5.1.2. ENVISAT

Procedemos de forma exactamente igual para analizar la caída del ENVISAT. La gráfica que representa su caída desde su puesta en órbita hasta su caída a la superficie viene abajo.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



En la gráfica anterior, podemos observar que el ENVISAT se da prácticamente por deorbitado en el punto de coordenadas:

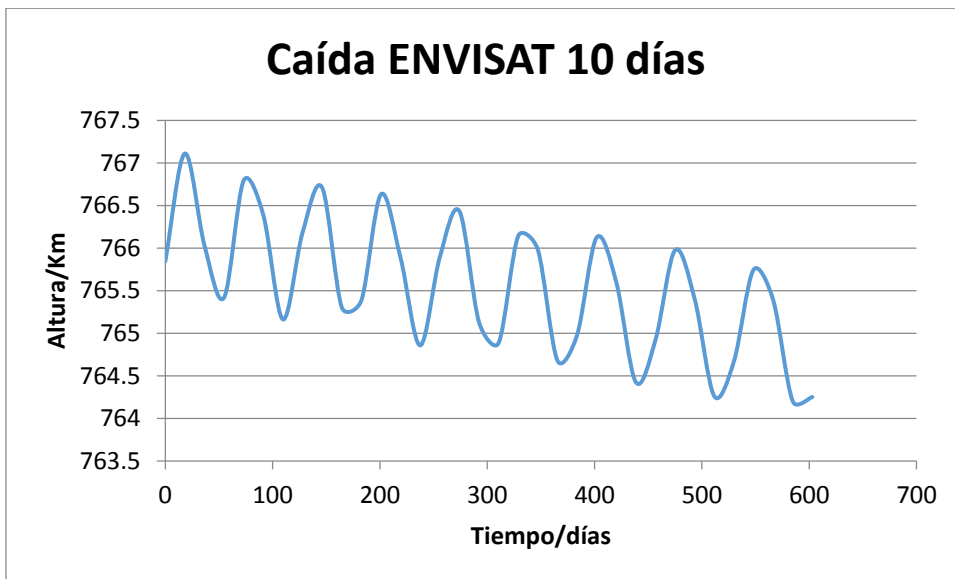
$$(t = 33555.5682 \text{ días}; \text{Altura} = 100.653133 \text{ Km})$$

Entonces, el ENVISAT tarda 91.87 años en caer. Es decir, 90 años aproximadamente. Este resultado contradice algunas publicaciones que debaten el tiempo de caída del ENVISAT sobre la superficie. La más reciente, es un paper de Michael Khan, publicado el 9 de Octubre de 2012 en su página www.sciloggs.com. En dicho paper, Michael Khan debatía a su vez otro paper publicado por Martha Mejía-Kaiser, miembro del Instituto Internacional de Ley Espacial (IISL). En él, Martha discutía que la ESA estaba cometiendo una negligencia dejando al ENVISAT orbitar a la deriva, puesto que según sus cálculos, el satélite tardaría 25 años en caer, y en órbita supondría un peligro para otras misiones por ser basura espacial.

Khan apoyaba esta denuncia, pero corregía el dato correspondiente al tiempo de caída del ENVISAT, atribuyéndole un periodo de caída de 70 años. Nosotros, a su vez, podemos corregir ambos resultados, dando un valor de 90 años al periodo de caída del ENVISAT.

Ahora, calculamos la variación en el periodo del ENVISAT a lo largo de su caída y comparamos el resultado con el obtenido para la caída del GOCE. Procedemos igual que antes, tomando perigeos y apogeos de órbitas complementarias, observando que el satélite cae poco y podemos considerar órbitas cerradas. Representando los 10 primeros días.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Cogemos un máximo y un mínimo complementarios.

Instante inicial:

$$t = 18.2716 \text{ días}; \text{Altura} = 767.1097 \text{ Km}$$

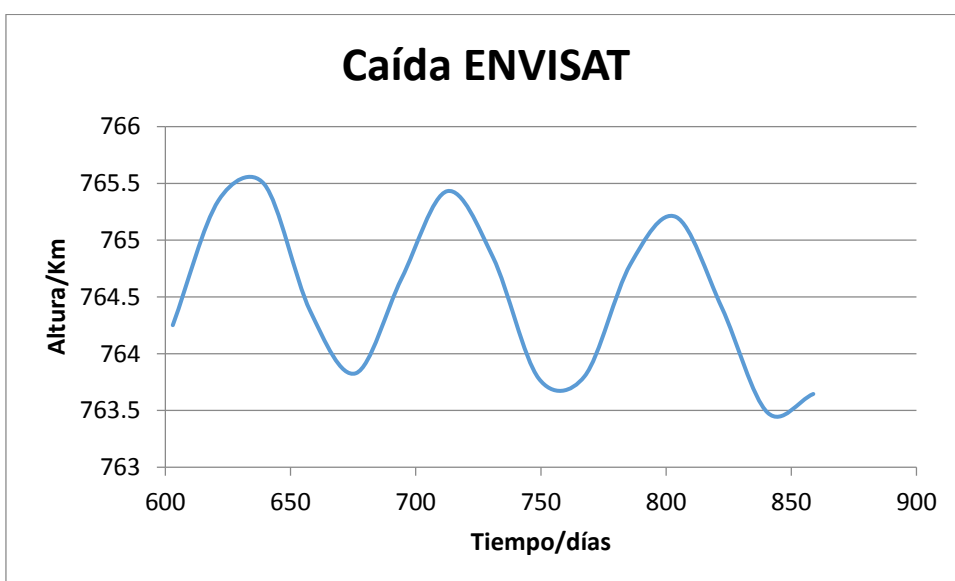
Instante final:

$$t = 54.8149 \text{ días}; \text{Altura} = 765.4195 \text{ Km}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler.

$$a = 7137.26 \text{ Km}$$

$$T = 1.67 \text{ horas}$$



Instante inicial:

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$t = 639.5073 \text{ días}; \text{Altura} = 765.4930 \text{ Km}$$

Instante final:

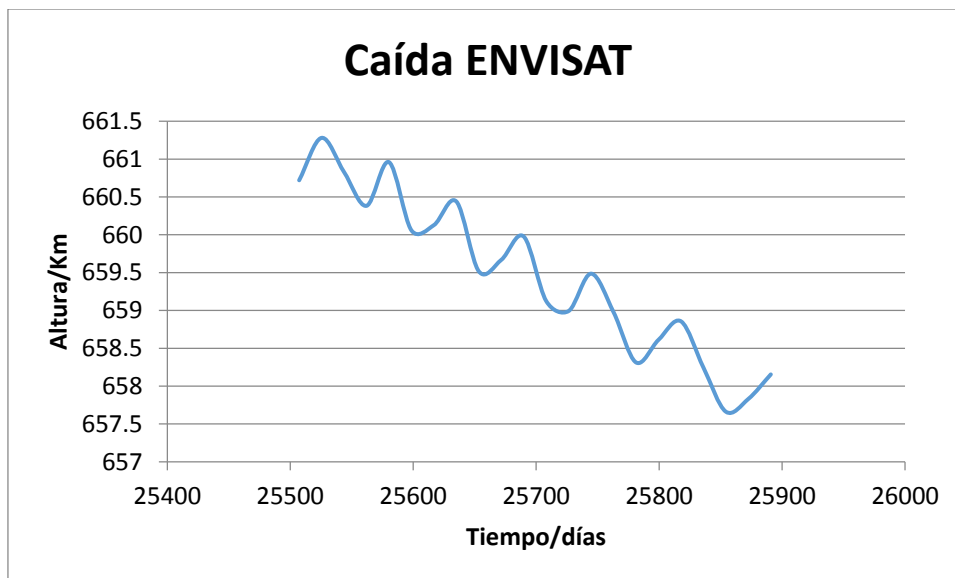
$$t = 676.0505 \text{ días}; \text{Altura} = 763.8274 \text{ Km}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler.

$$a = 7135.66 \text{ Km}$$

$$T = 1.66 \text{ horas}$$

Hacemos lo mismo con otros dos periodos de tiempo, distanciados mas tiempo en la caída.



Instante inicial:

$$t = 25744.73 \text{ días}; \text{Altura} = 659.486719 \text{ Km}$$

Instante final:

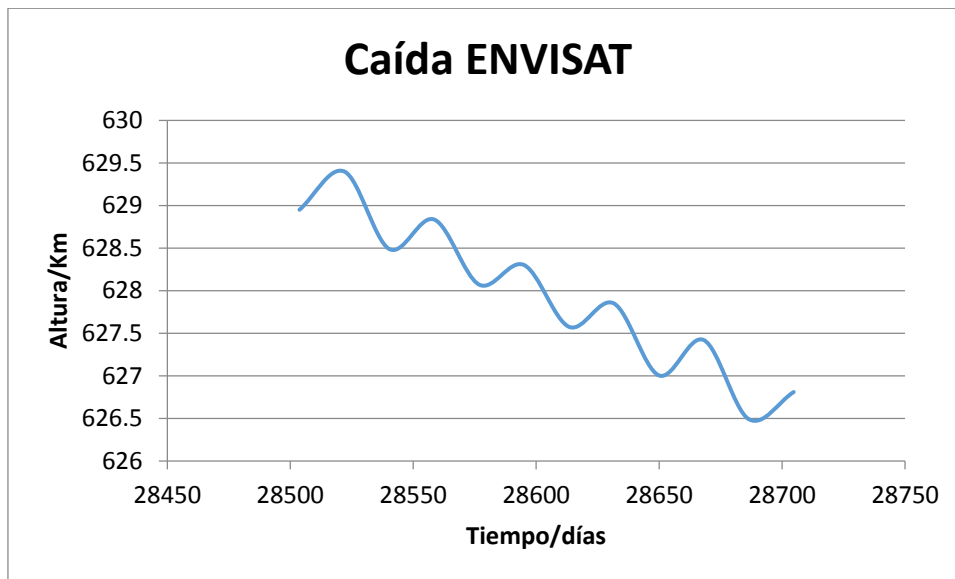
$$t = 25781.28 \text{ días}; \text{Altura} = 658.313589 \text{ Km}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler.

$$a = 7029.9 \text{ Km}$$

$$T = 1.62 \text{ horas}$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



Instante inicial:

$$t = 28631.65 \text{ días}; \text{Altura} = 627.849169 \text{ Km}$$

Instante final:

$$t = 28649.92 \text{ días}; \text{Altura} = 627.004642 \text{ Km}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler.

$$a = 6998.42 \text{ Km}$$

$$T = 1.61 \text{ horas}$$

5.1.3. Conclusión

En ambos casos, se ha visto que efectivamente el periodo se hace más pequeño a medida que el satélite pierde altura. Esto demuestra la hipótesis inicial, de la que partíamos antes de interpretar los datos de la simulación, por la que un satélite que orbita en torno a la Tierra, influido por la perturbación debida al rozamiento de la atmósfera, cae en espiral. Comparando ambos resultados, llegamos a la conclusión de que el GOCE sufre más rozamiento atmosférico que el ENVISAT, por encontrarse a una órbita más baja. El GOCE suponiendo que se encuentra en movimiento de caída libre durante toda su trayectoria, sin nada que lo impulse a seguir en órbita, tiene un periodo de vida útil de aproximadamente 84 días, mientras que el del ENVISAT es de 90 años aproximadamente. Es decir, el rozamiento atmosférico tarda 84 días en tirar al GOCE y 90 años en tirar al ENVISAT sobre la superficie de la Tierra. Sin embargo, el GOCE se lanza inicialmente a una órbita de 295 Km y orbita durante 84 días. Sin embargo, observando la gráfica de la caída del ENVISAT, este satélite se da prácticamente por caído a los 400 Km de altura, esto es, a nada que la densidad atmosférica empieza a hacerse notable. Esto se explica como que el GOCE está especialmente diseñado para orbitar a muy baja altura. Tiene un

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

diseño aerodinámico en forma de bala que lo hace soportar en gran medida el rozamiento atmosférico. El ENVISAT no tiene esta característica. Orbita más alto, casi a 800 metros. Como hemos visto antes en la gráfica que representaba la densidad atmosférica en función de la altura, de 300 Km a 800 Km se reduce la densidad atmosférica en cuatro órdenes de magnitud, con lo que el ENVISAT a esa altura sufre muy poco esta perturbación.

5.2. PERTURBACIÓN DEBIDA A LA PRESIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR

Las expresiones que representan las variaciones de los distintos parámetros orbitales siguiendo el método de Gauss son las siguientes.

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= -p_{SR} r u_s \\ \frac{de}{dt} &= -p_{SR} \left\{ \frac{h}{\mu} \sin \theta u_r + \frac{1}{\mu h} [(h^2 + \mu r) \cos \theta + \mu e r] u_s \right\} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{h}{r^2} - \frac{p_{SR}}{eh} \left[\frac{h^2}{\mu} \cos \theta u_r - \left(r + \frac{h^2}{\mu} \right) \sin \theta u_s \right] \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -p_{SR} \frac{r}{h \sin i} \sin(\omega + \theta) u_w \\ \frac{di}{dt} &= -p_{SR} \frac{r}{h} \cos(\omega + \theta) u_w \\ \frac{d\omega}{dt} &= -p_{SR} \left\{ -\frac{1}{eh} \left[\frac{h^2}{\mu} \cos \theta u_r - \left(r + \frac{h^2}{\mu} \right) \sin \theta u_s \right] - \frac{r \sin(\omega + \theta)}{h \tan i} u_w \right\}\end{aligned}$$

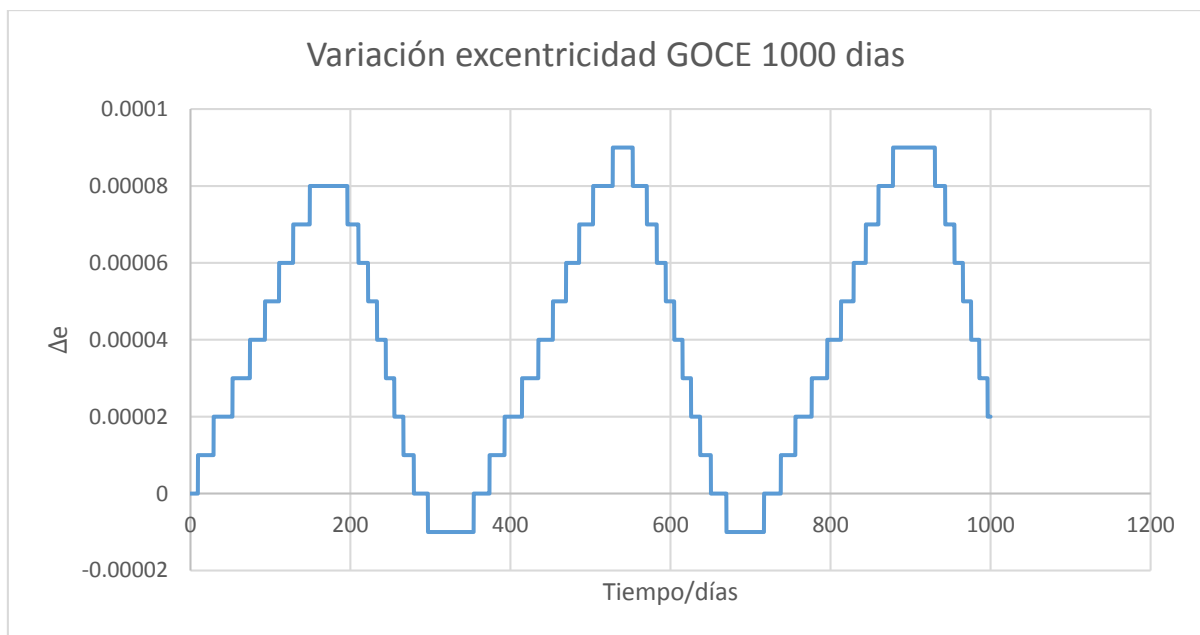
Donde p_{SR} es la presión de radiación solar, que es una constante, tal y como la hemos definido antes. Analizaremos estos cambios para un periodo de caída del satélite de 1000 días.

Sin embargo, sabemos que el GOCE tiene un tiempo de caída de 80 días aproximadamente. Nosotros le metemos un periodo a la simulación de 1000 días para valorar si este tipo de perturbación causa una variación significativa en los parámetros orbitales. En cuanto a la simulación que haremos del ENVISAT, meteremos un tiempo de 5000 días a su simulación. Sabemos que su periodo de caída es mucho mayor, pero en base a los resultados obtenidos extrapolaremos a todo su periodo de caída.

Excentricidad:

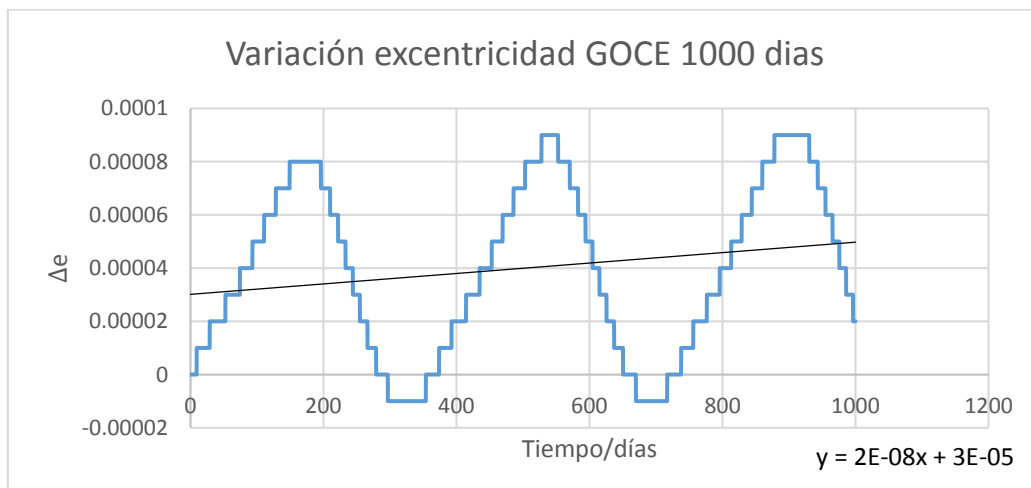
Empezamos con el GOCE.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



La variación de su excentricidad alcanza máximos y mínimos a medida que cae el satélite. Es lo que se esperaba, puesto que la variación de la excentricidad debida a la perturbación de la presión de radiación tiene un comportamiento esencialmente sinusoidal, según indica la expresión de la primera derivada de la excentricidad en función del tiempo según las fórmulas de arriba.

Realizando un ajuste por mínimos cuadrados podremos ver cuanto ha variado la excentricidad de la órbita del GOCE durante todo su tiempo de caída, y compararlo con el correspondiente al ENVISAT.



Donde la relación lineal de la variación de la excentricidad con el tiempo viene dada de la forma siguiente.

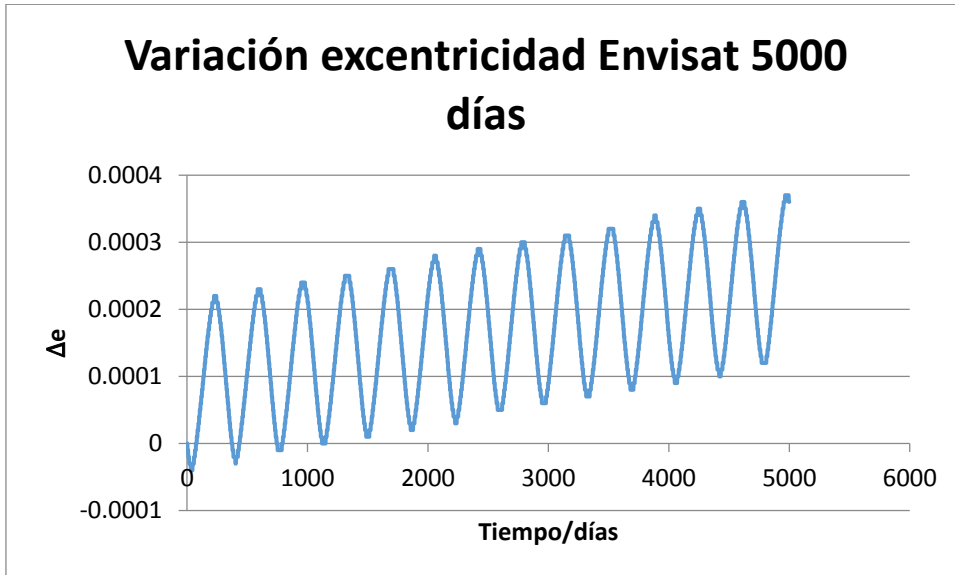
$$\Delta e(t) = 0.00003 + 0.00000002 * t$$

Entonces, a lo largo de toda su caída, la excentricidad del GOCE ha variado:

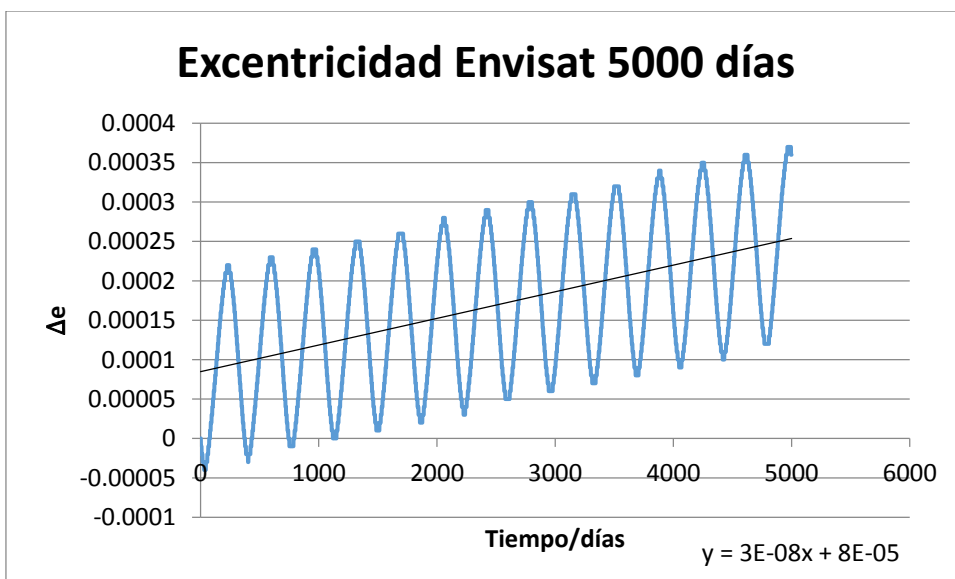
Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\Delta e(84.14892 \text{ días}) = 0.0000031$$

En el caso del ENVISAT, la variación de la excentricidad con el tiempo a lo largo de toda la caída queda tal que así.



Este caso es más ilustrativo que el correspondiente al GOCE. Se observa que claramente, para periodos de tiempo largos, como 5000 días, la excentricidad varía de manera ascendente. Haciendo una ajuste por mínimos cuadrados:



La relación lineal promedio entre excentricidad y tiempo para la órbita del ENVISAT es, en este caso, así.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\Delta e(t) = 0.00008 + 0.00000003 * t$$

Y la variación de la excentricidad a lo largo de todo su tiempo de caída:

$$\Delta e(33555.5682 \text{ días}) = 0.00108$$

Evidentemente, el ENVISAT presenta una variación en la excentricidad de su órbita mucho más grande que la que presenta el GOCE durante su periodo de caída. Esto es lógico, puesto que las expresiones procedentes de los ajustes anteriores son muy parecidas, y el periodo de caída del ENVISAT es mucho más grande que el periodo de caída del GOCE. Sin embargo, aún en el caso del ENVISAT, la variación en la excentricidad es tan pequeña, que la órbita es prácticamente circular en todo momento.

Ascensión recta

Como llevamos haciendo hasta ahora, empezamos por el GOCE.

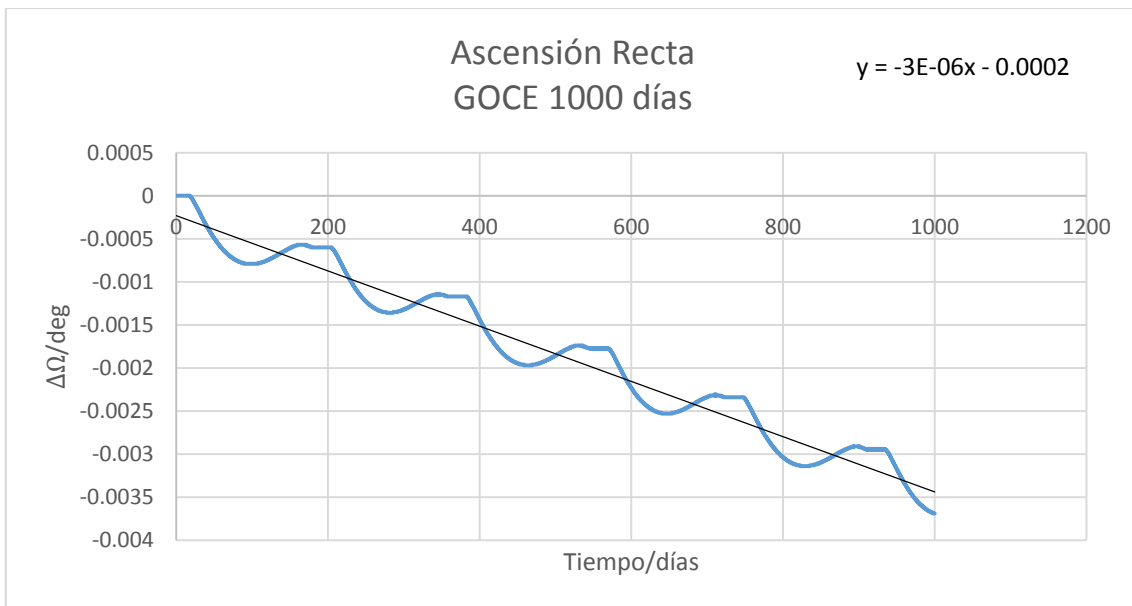


La ascensión recta también tiene un claro comportamiento sinusoidal. Es un buen resultado, puesto que su comportamiento también obedece a la fórmula de la variación del ángulo Ω respecto al tiempo según el método de Gauss.

Sin embargo, la envolvente presenta una pendiente negativa, con lo que la ascensión recta va disminuyendo con el tiempo, lo que hace que la órbita preceda en sentido contrario a las agujas del reloj.

Daremos una medida de lo que precede el satélite sacando la pendiente mediante un simple ajuste lineal. Esto nos permitirá obtener una medida de lo que ha variado la ascensión recta promedio, tomando puntos equidistantes en cada periodo.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



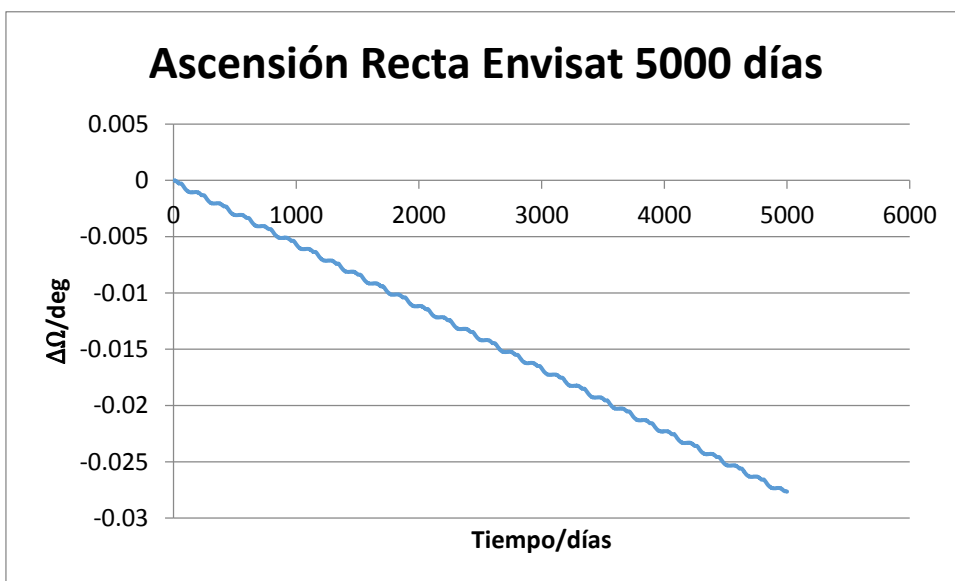
Entonces, la relación lineal entre Ω y el tiempo nos la da la recta de ajuste.

$$\Delta\Omega(t) = -0.0002 - 0.000003 * t$$

Con lo que a lo largo de todo su tiempo de caída, la precesión del GOCE debida a la variación de la ascensión recta del nodo Ω vale:

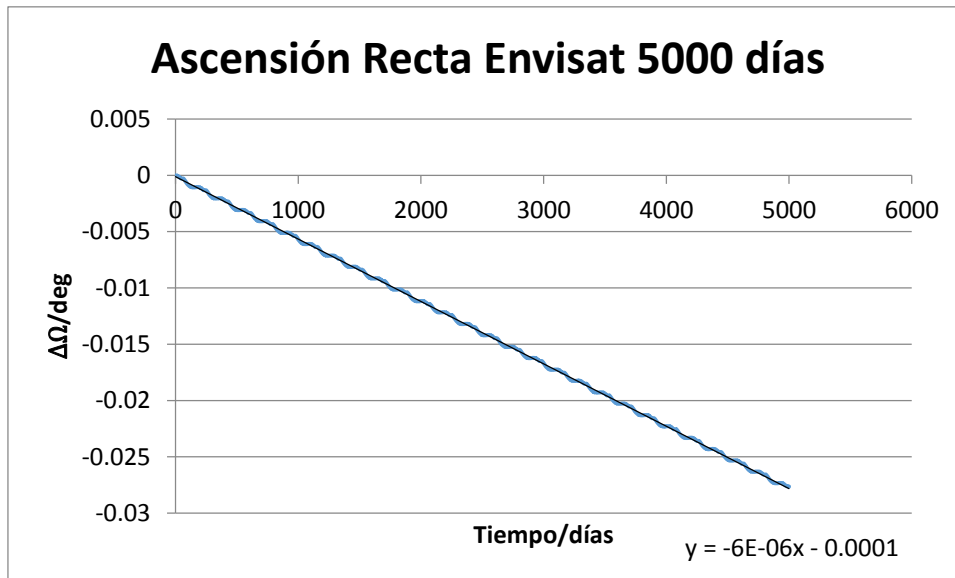
$$\Delta\Omega(84.14892 \text{ días}) = -0.00045 \text{ grados}$$

Siguiendo con el ENVISAT, a continuación se adjunta la gráfica que representa la variación de su ascensión recta Ω con el tiempo.



Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Haciendo el ajuste por mínimos cuadrados, obtenemos la relación lineal entre su ascensión recta Ω y el tiempo.



$$\Omega(t) = -0.0001 - 0.000006 * t$$

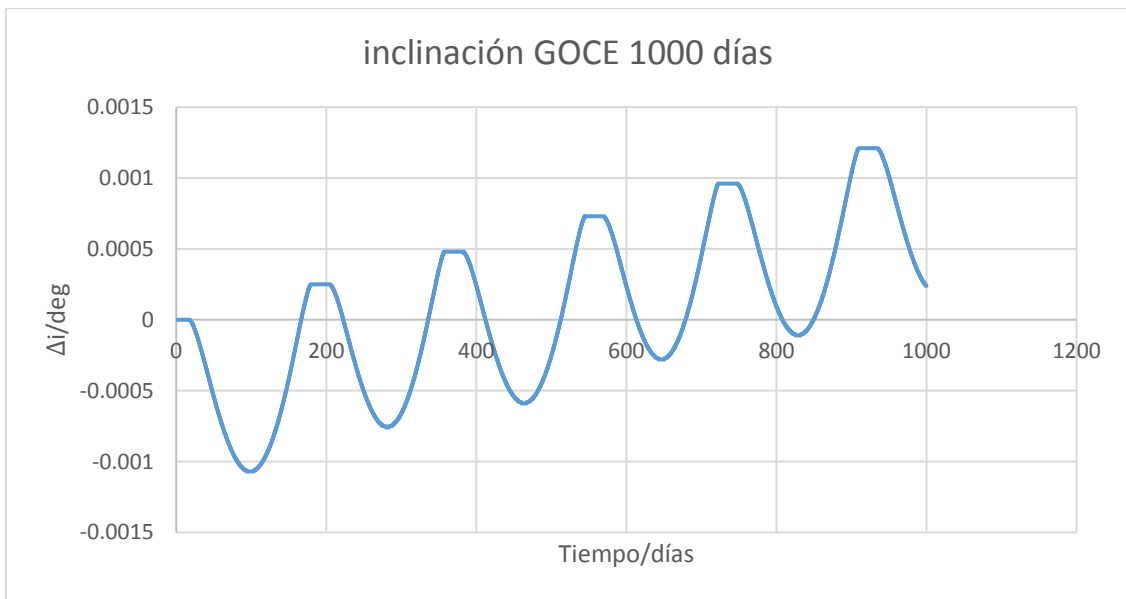
Entonces, calculamos lo que ha variado la ascensión recta del nodo en el caso del ENVISAT durante todo su periodo de caída.

$$\Delta\Omega(33555.5682 \text{ días}) = -0.201 \text{ grados}$$

Comparando ambos resultados, llegamos a la misma conclusión que en el estudio anterior de la excentricidad. Las expresiones lineales de la ascensión recta en función del tiempo tanto para el GOCE como para el ENVISAT son similares. Igualmente, considerando el resultado correspondiente al ENVISAT, que tiene un tiempo de caída mucho mas grande que el GOCE, la variación en su ascensión recta durante toda su caída puede considerarse despreciable.

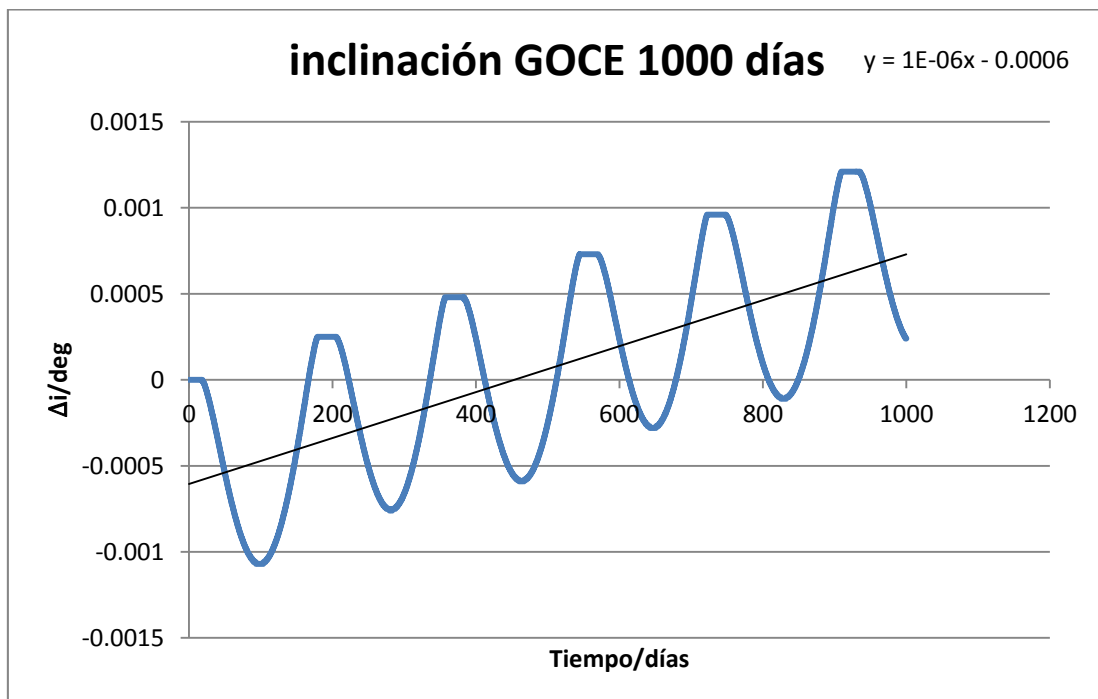
Inclinación

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



La inclinación también presenta comportamiento sinusoidal, tal y como indica la fórmula de la derivada primera de la inclinación utilizando el método de Gauss.

Observando la gráfica, vemos que la envolvente presenta una pendiente positiva. Esto significa que la órbita se levanta por acción de la presión de radiación. Como venimos haciendo hasta ahora, daremos una medida de la variación de este parámetro haciendo un ajuste lineal.



Donde, para puntos equidistantes en el tiempo, la recta de ajuste que relaciona la inclinación de la órbita del GOCE con el tiempo es la siguiente.

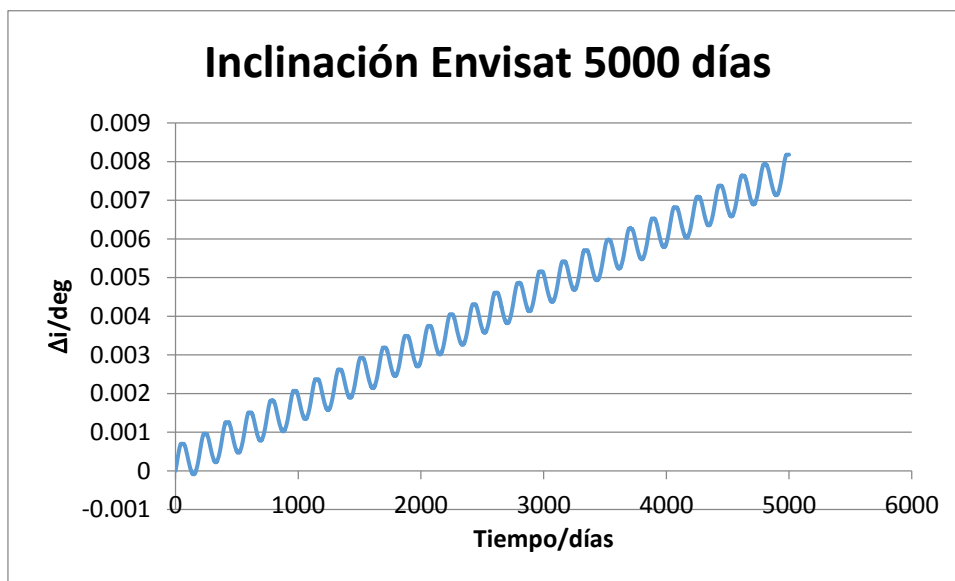
Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\Delta i(t) = 0.000001 * t - 0.0006$$

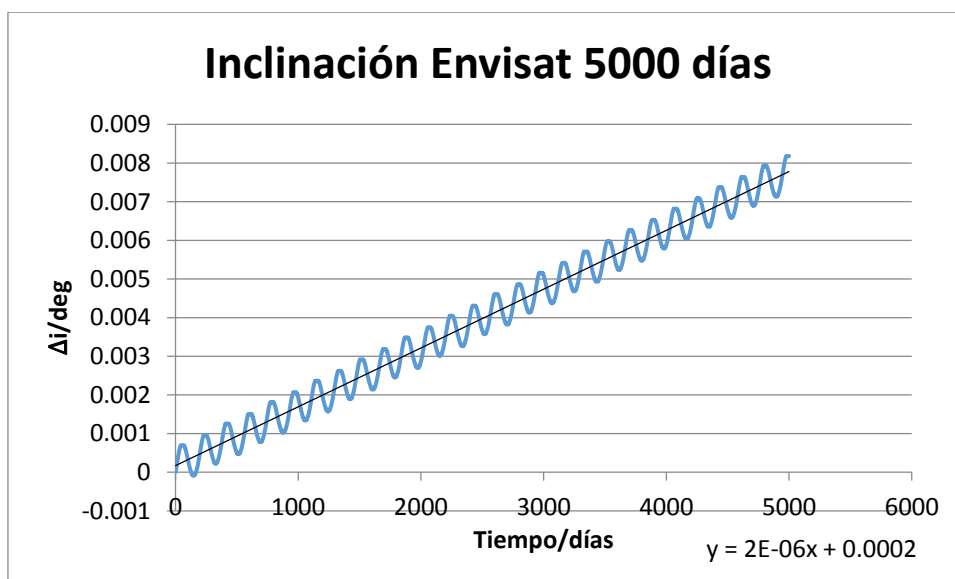
Y a lo largo de todo su tiempo de caída, la precesión del GOCE debida a una variación en la inclinación de su órbita vendrá dada por la expresión anterior.

$$\Delta i(84.14892 \text{ días}) = - 0.00051 \text{ grados}$$

Procediendo ahora con el ENVISAT.



Haciendo el ajuste para obtener la relación lineal de la inclinación i con el tiempo.



$$i(t) = 0.0002 + 0.000002 * t$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

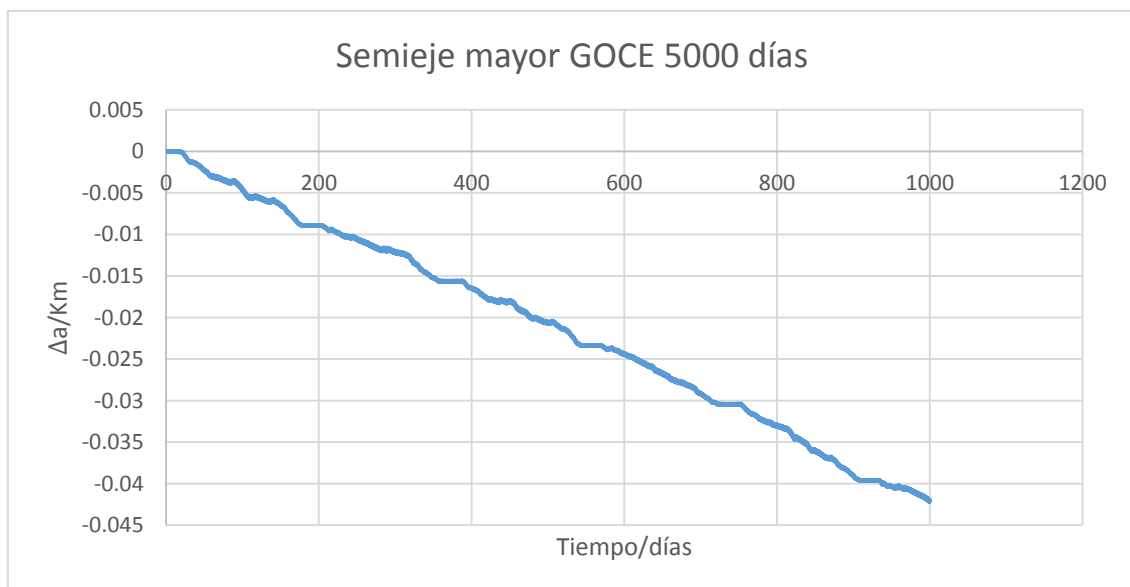
Con lo que a lo largo de todo el periodo de caída del ENVISAT, su precesión debida a la variación del ángulo i será:

$$\Delta i(33555.5682 \text{ días}) = 0.067 \text{ grados}$$

Aquí tenemos un resultado prácticamente igual a los anteriores. Tanto para el ENVISAT como para el GOCE hemos obtenido prácticamente la misma recta de ajuste, y una variación muy pequeña en el parámetro, en este caso, la inclinación de la órbita i , incluso para el ENVISAT, que tarda mucho más tiempo que el GOCE en caer.

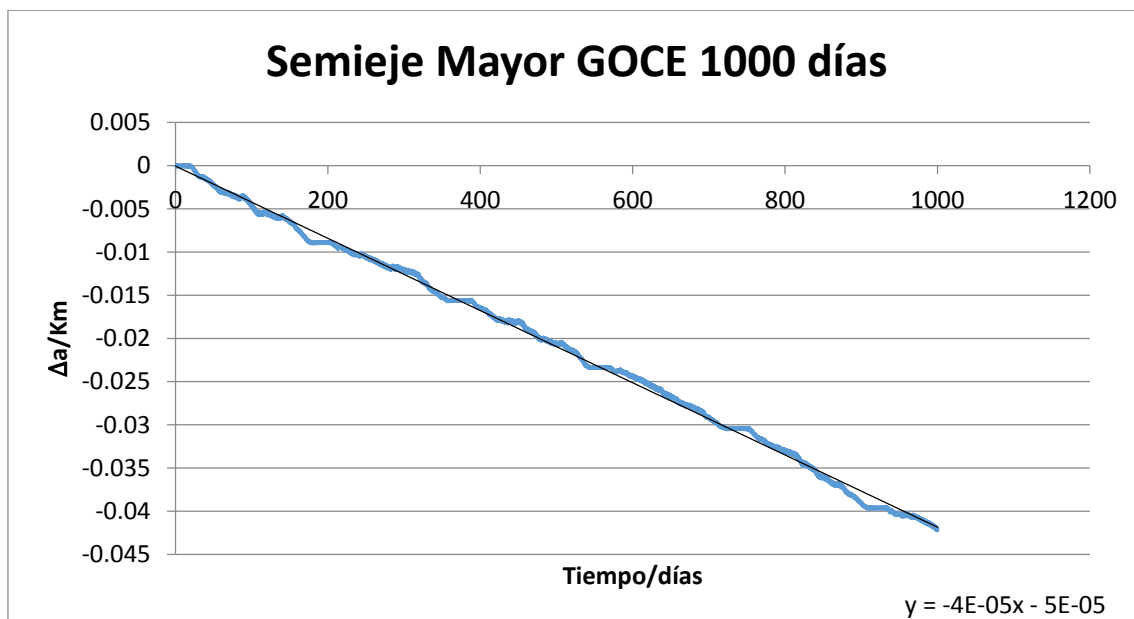
Ahora estudiaremos por último la variación en el semieje mayor de la órbita, a , tanto para el caso del GOCE como para el del ENVISAT, y por último, sacaremos algunas conclusiones.

Semieje mayor



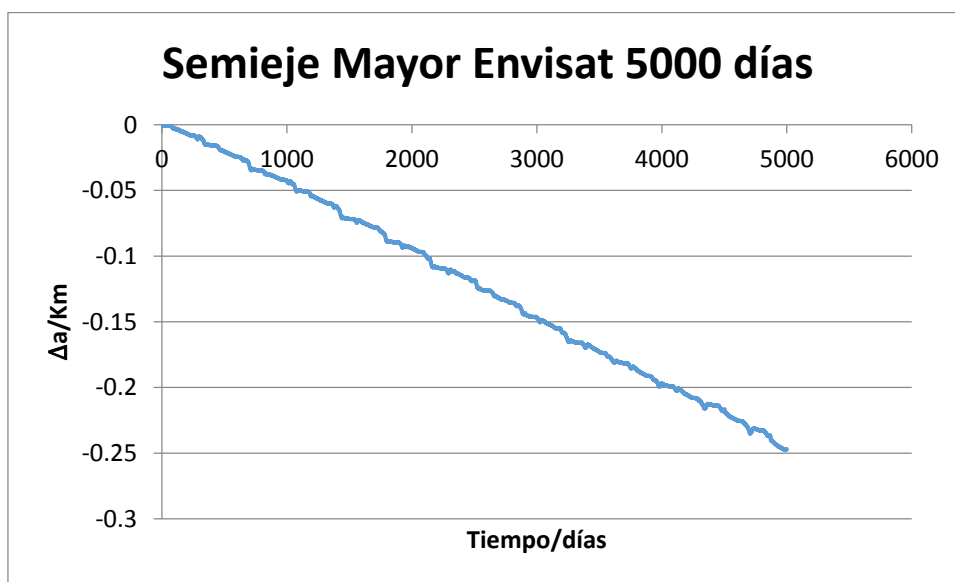
La variación del semieje mayor de la elipse da una medida de lo que ha caído el satélite desde su órbita inicial. Vemos en la gráfica que el GOCE, a medida que orbita, pierde altura a una relación lineal prácticamente con el tiempo. Esto se puede interpretar como que la perturbación debida a la radiación modifica la órbita del satélite, haciendo que caiga en espiral, de manera similar a como caía por efecto del rozamiento atmosférico. Teniendo en cuenta como hemos definido antes el semieje mayor de la elipse, esta gráfica nos da una medida de la altura que va perdiendo el satélite en su movimiento debido a esta perturbación. Para medir esta pérdida, haremos un ajuste lineal, dado el comportamiento lineal de la figura. Igualmente, calcularemos lo que cae el satélite a lo largo de toda su vida útil en órbita

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



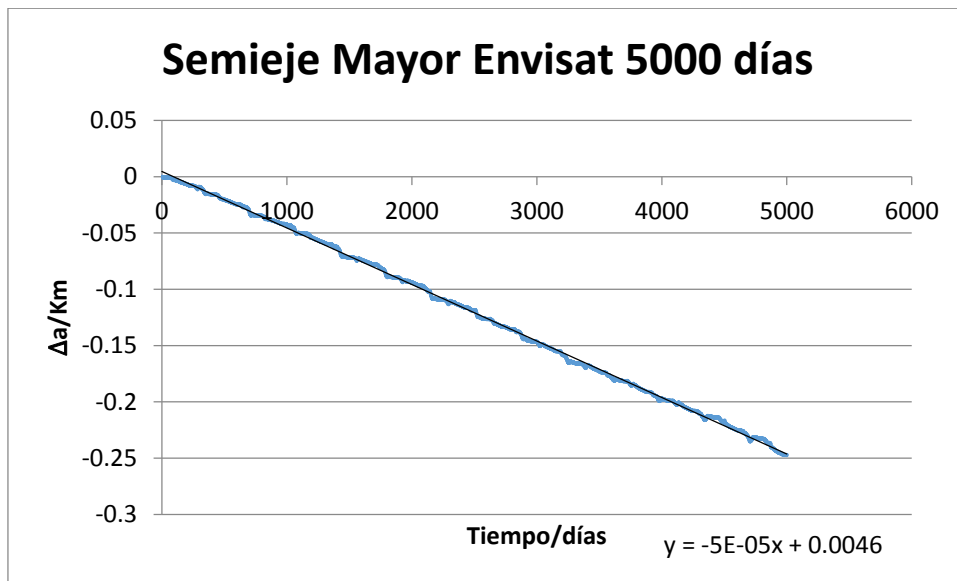
$$\Delta a(t) = -0.00005 - 0.00004 * t$$
$$\Delta a(84.14892 \text{ días}) = -0.0034 \text{ Km}$$

Haciendo lo mismo con el ENVISAT.



Hacemos el correspondiente ajuste lineal y calculamos la caída del ENVISAT a lo largo de toda su vida útil.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales



$$\Delta a(t) = 0.0046 - 0.00005 * t$$

$$\Delta a(33555.5682 \text{ días}) = -1.67 \text{ Km}$$

Obtenemos un resultado exactamente igual que en el estudio de la variación de los demás parámetros bajo la perturbación de la presión de radiación. Los ajustes lineales para ambos satélites son prácticamente iguales, y la variación, incluso para el ENVISAT, es muy pequeña.

Conclusión

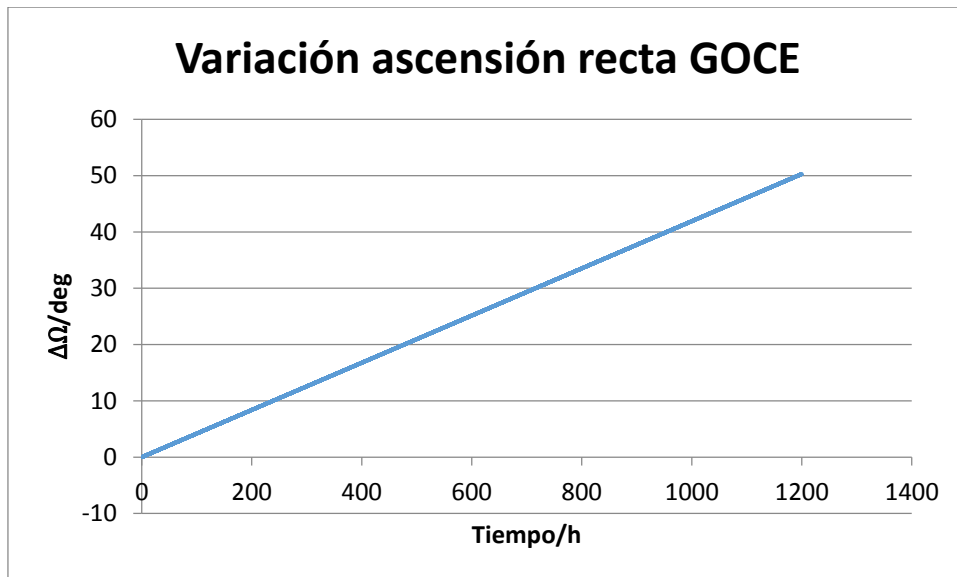
La variación en cada uno de los parámetros que hemos estudiado bajo la perturbación debida a la presión de la radiación solar es siempre tan pequeña comparada con el valor de los parámetros iniciales que podemos considerar el efecto de esta perturbación DESPRECIABLE sobre la órbita de los satélites, comparada con el efecto de la perturbación debida al rozamiento atmosférico que hemos estudiado antes, que sí llega a tirar el satélite. Ahora estudiaremos la última de las perturbaciones, la debida a la variación del campo gravitatorio debido al achatamiento de la Tierra.

5.3. PERTURBACIÓN DEBIDA A LA VARIACIÓN DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE DEBIDO AL ACHATAMIENTO

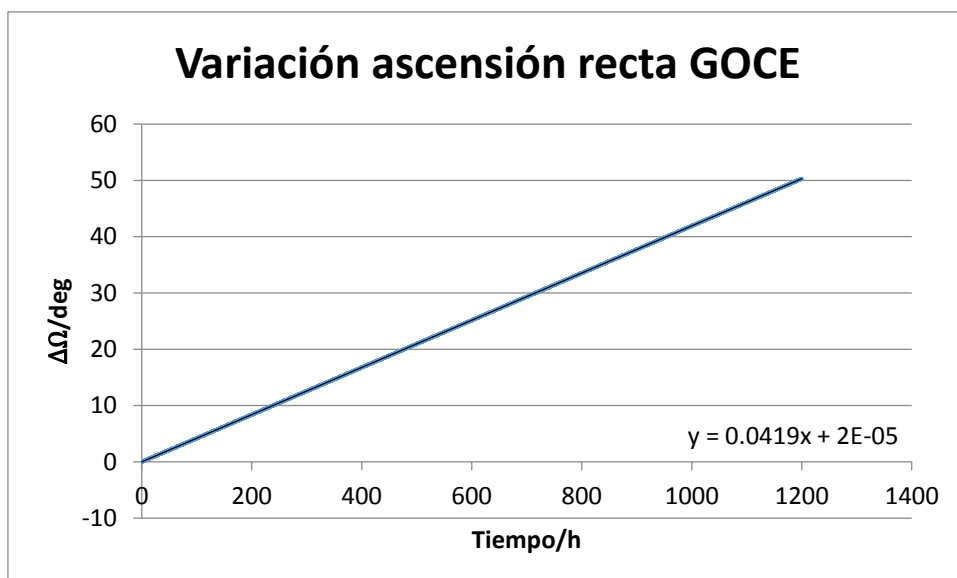
Como ya hemos explicado, la importancia de esta perturbación está en que gracias a su existencia, podemos controlar la precesión de los satélites y crear órbitas heliosíncronas. Con lo cual, sólo analizaremos la variación que produce esta perturbación en el parámetro que define la ascensión del nodo Ω , que es el parámetro que más va a variar y donde radica la importancia de utilizar esta perturbación en sí misma para que la órbita del satélite preceda.

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

Empezamos, como hemos venido haciendo, con el GOCE.



Vemos que la variación de la ascensión recta del nodo $\Delta\Omega$ es prácticamente LINEAL con el tiempo. Haciendo el correspondiente ajuste lineal, tendremos una medida de cuanto precede la órbita del GOCE en función del tiempo, y podremos calificarla de heliosíncrona o no.



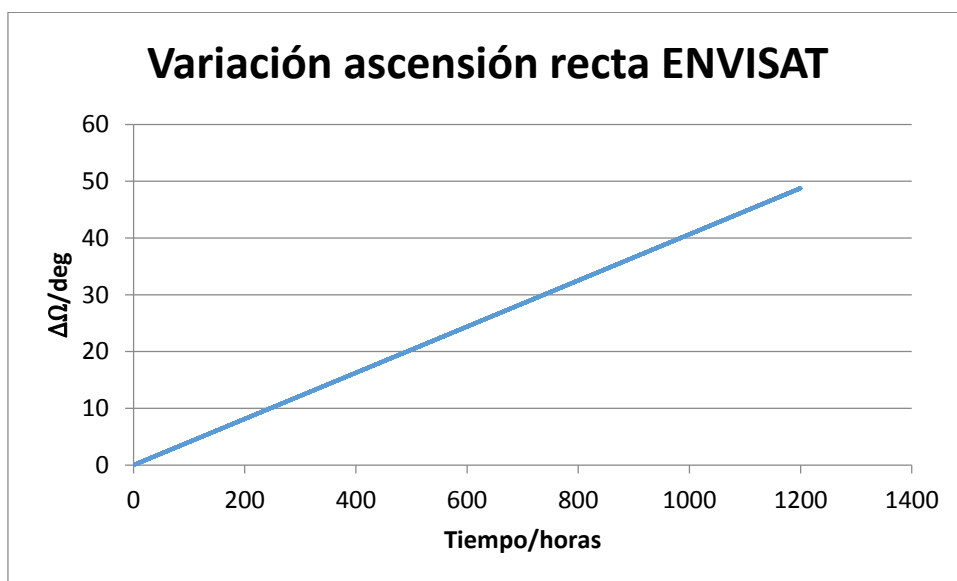
$$\Delta\Omega(t) = 0.00002 + 0.0419 * t$$

Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

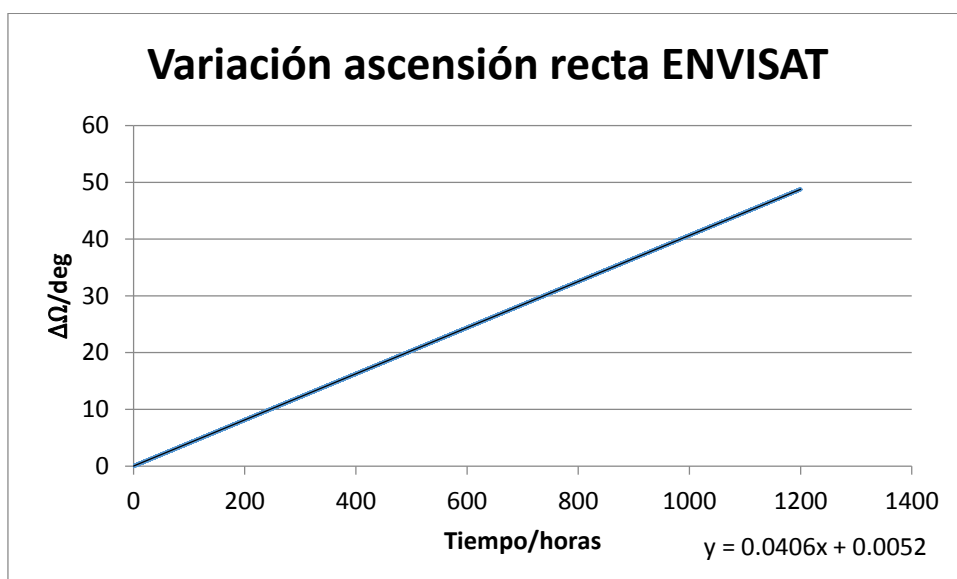
$$\Delta\Omega(24 \text{ horas}) = 1.005 \text{ grados}$$

Luego en un día, el GOCE precede prácticamente un grado por día, lo que convierte su órbita en heliosíncrona.

Haciendo lo mismo con el ENVISAT.



Haciendo el correspondiente ajuste lineal, y calculando lo que precede la órbita del ENVISAT en un día.



Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales

$$\Delta\Omega(t) = 0.0052 + 0.0406 * t$$

$$\Delta\Omega(24 \text{ horas}) = 0.97 \text{ grados.}$$

Luego, como se puede comprobar, la órbita del ENVISAT precede también aproximadamente un grado por día. Luego la órbita del ENVISAT es también heliosíncrona.

Con lo cual, hemos demostrado que las órbitas de tanto el ENVISAT como el GOCE son heliosíncronas, como esperábamos, ya que tanto el GOCE como el ENVISAT son satélites de observación de la Tierra.

5.3. CONCLUSIÓN FINAL

Como conclusión final, analizando el objetivo inicial de este Trabajo Fin de Grado, que no era otro que valorar si las perturbaciones sobre la órbita de un satélite artificial, en este caso debidas tanto al rozamiento atmosférico, como a la presión de la radiación solar, como a la variación del campo gravitatorio de la Tierra debido al achatamiento terrestre, afectaban al movimiento original del satélite, como resultado del problema de los dos cuerpos, hemos de decir que se ha demostrado que sí. Cada una de las tres perturbaciones afectan al movimiento de un satélite que orbita alrededor de la Tierra.

Ahora, si analizamos el efecto de la suma de las tres perturbaciones sobre la órbita de cada satélite, las que predominan son la debida al rozamiento atmosférico y la gravitatoria, que son las que van a modificar notablemente los parámetros orbitales de cada satélite. La atmosférica es sin duda la que más afecta. Hemos demostrado que si un satélite se encuentra sometido a un rozamiento atmosférico, éste acabará frenando su movimiento, y el satélite acabará cayendo. Otra conclusión que hemos sacado es que el campo gravitatorio de la Tierra no es completamente un campo central. Un satélite orbitando alrededor de la Tierra no ve ésta como un punto, y este hecho hace que un satélite orbitando encima de los polos no esté sometido al mismo potencial que un satélite que orbite encima del ecuador. Entonces, un satélite orbitando con un cierto ángulo de inclinación observará como su órbita precede de potenciales menores a potenciales mayores. Por último, no podemos olvidarnos de la perturbación debida a la radiación solar. El efecto que causa esta perturbación es muy pequeño, pero al ser una perturbación que causa una variación en los parámetros oscilatoria, esto se interpreta como que esta perturbación tiende a equilibrar el movimiento orbital del satélite, haciendo que sea lo más circular posible.

REFERENCIAS

- Calle, A. (2005). Vigilantes de la tierra. *Revista Espacio*, nº 8, Agosto 2005
- Calle, A. (2010). Satélites para un planeta viviente. *Revista Espacio*, nº 68, Agosto 2010
- Curtis, H.D. (2010). *Orbital mechanics for engineering students*. 3rd edition, Elsevier, 2010.
- ESA web page: <http://www.esa.int>
- E.E.Roy(2005). *Orbital Motion*. Fourth edition, Institute of Physics publishing. Bristol.2005
- M.Capderou(2005). *Satellites, orbits and missions*. Ed.Springer,2005