



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN ESTADÍSTICA

Estrategias eficientes de inversión y gestión del riesgo en mercados bursátiles

Autora:
Paula López Casado

Tutor:
Ricardo Josa Fombellida

10 Jul 2015

A mis padres y a mi hermana

Agradecimientos.

A todo el profesorado del Grado en Estadística, compañeros y amigos, en particular a Gonzalo y Celia, haciendo mención especial al tutor de este trabajo que desde el primer momento me ha transmitido su motivación y apoyo. Gracias.

The biggest risk is not taking any risk.
Mark Zuckerberg

Resumen

En este trabajo se estudian diferentes estrategias de optimización de carteras de inversión en mercados bursátiles incluyendo nuevas herramientas de análisis, visualización y desarrollo. Se eligen las cotizaciones diarias de las empresas que componen el IBEX-35 en una ventana de 3 años. Tras realizar un análisis descriptivo, se plantea el célebre modelo de Markowitz de optimización de carteras de inversión, usando como medida de riesgo el estimador clásico de la varianza. Se consideran modificaciones de este modelo con diferentes estimaciones de la varianza, como son la estimación robusta y la semivarianza. Además se presenta una alternativa al modelo estático de optimización a través de la aplicación dinámica de Markowitz para estudiar la evolución en el tiempo de las rentabilidades y riesgos. Se emplea el software R como herramienta fundamental, desde la fase descriptiva hasta la generación final del informe.

Palabras clave: Carteras de inversión, Ratio de Sharpe, Rentabilidad, Riesgo, R

Abstract

This paper studies different strategies of portfolio investment optimization in stock markets including new optimization tools, visualization and development. The financial market chosen was IBEX 35, taking as data daily prices of his companies in a window of three years. After performing descriptive analysis, we apply the famous model mean-variance Markowitz Portfolio Optimization using a classical estimator of variance like risk. We consider this model with different estimators of variance as a risk measure, since robust estimation to semivariance. An alternative to the static optimization model is presented trough a dynamic application of Markowitz to study the evolution of returns and risks over time. We use R program as an essential tool, from the pre-analysis to the final application results.

Keywords: Portfolio Investment, Sharpe Ratio, Risk, Rentability, R

Índice

1	Introducción	7
2	Análisis descriptivo	9
2.1	Rentabilidades y riesgos	12
2.2	Correlaciones	15
3	Optimización de carteras	17
3.1	Modelo Básico	18
3.2	Modelo de Markowitz	20
3.3	Modelo de Markowitz - MCD	23
3.4	Modelo de Markowitz - Semivarianza	28
3.5	Modelo de Markowitz - Frontera Dinámica	31
4	Contraste de carteras	33
4.1	Carteras aplicadas	33
4.2	Riesgo específico	35
5	Justificación de las herramientas utilizadas	42
5.1	Obtención de datos	42
5.2	Visualización	42
5.3	Optimización	43
5.4	Generación del informe	43
6	Conclusiones	44
7	Futuras aplicaciones	45
	Bibliografía	46
	Índice de Figuras	47
	Índice de Tablas	48
	Anexo: Tablas	49

1 Introducción

El presente trabajo se sitúa dentro de la gestión de carteras de inversión en productos financieros. Obviamente, este tema es muy importante e interesante desde el punto de vista económico, sobre todo ahora, en los momentos de crisis financiera en que nos movemos. También interesa mucho en los campos de la optimización y la estadística, tanto a nivel investigador como aplicado. Las aportaciones principales que hacemos en este trabajo respecto a otros en el mismo campo son: 1) la comparación de carteras de inversión según distintas medidas de riesgo, 2) la implementación automática de fronteras eficientes que permitan su comparación en distintos modelos de optimización, y 3) el uso de R como herramienta fundamental de cálculo en todo el proceso, desde la captura de datos hasta la traslación de resultados y comentarios mediante \LaTeX a un documento final.

Los mercados bursátiles¹ suponen un gran movimiento de capital con operaciones diarias, prácticamente instantáneas. Esta gran variabilidad provoca que el riesgo que el inversor asume sea mayor respecto a la inversión en otro tipo de mercados. Como inversor entendemos cualquier persona física o empresa que compra en cada ejercicio una parte del beneficio de la empresa cotizante con el objetivo de obtener rendimientos positivos, bien a corto o a largo plazo. El objetivo principal del inversor es, por lo general, maximizar la rentabilidad o ganancia de su inversión, minimizando el riesgo. Sin embargo esta tarea doble no es sencilla, de ahí la importancia del análisis del mercado y de sus diferentes índices. En gestión de activos financieros es conocido, y se puede comprobar formalmente, que es posible reducir el riesgo diversificando la inversión. Esta diversificación da lugar a la formación de carteras de inversión². La gestión de carteras se ocupa de la optimización de los beneficios mediante la maximización de los rendimientos esperados y la minimización de los riesgos de la inversión. Generalmente, la solución implica la diversificación del capital en diferentes activos de forma que la volatilidad de cada uno de ellos no afecte directamente al inversor. Las estrategias que se elijan para construir la cartera dependen del tipo de inversor y del objetivo del mismo.

La Teoría de Selección de Carteras se sitúa dentro del conjunto “Strategic Asset Allocation” que viene a ser una mejora del método primitivo “Asset Allocation”

¹Mercado bursátil: La palabra *bursátil* proviene del latín *bursa* que significa “Bolsa”. En este mercado, dependiendo de la Bolsa en cuestión, se realizan intercambios de productos o activos de naturaleza similar, por ejemplo, en las Bolsas de valores se realizan operaciones con títulos valores como lo son las acciones, los bonos, los títulos de deuda pública, entre otros, pero también existen Bolsas especializadas en otro tipo de productos o activos. Este mercado está relacionado con las operaciones o transacciones que se realizan en las diferentes Bolsas alrededor del mundo.

²Cartera de inversión: Combinación de activos financieros de los que se desea obtener un beneficio a corto o largo plazo.

en el que se invertía una parte de los activos en bonos, otra en liquidez y otra en acciones, de forma equitativa. En 1952 aparece el inicio del desarrollo de la teoría de selección de carteras en Markowitz (1952), que se mejoró y completó con las ideas posteriores de los trabajos Sharpe (1964) y Litner (1965) que constituyen el denominado “Portfolio Theory”, Markowitz (1999). Hoy en día se siguen utilizando en la práctica estos modelos con modificaciones. Actualmente en la literatura especializada siguen apareciendo modelos de optimización de carteras más sofisticados y más generales, combinando la optimización estática o dinámica con los procesos estocásticos, el análisis multivariante o las series temporales.

En este trabajo nos centraremos en análisis cuantitativos únicamente, dejando de lado los análisis fundamentalistas, basados en la historia macroeconómica del mercado y de cada empresa en cuestión. El análisis propuesto se basa en las cotizaciones de las 35 empresas que componen el IBEX-35, el índice de la Bolsa española con mayor volumen. Está compuesto por las empresas de diferentes sectores del país con mayor liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil de la Bolsa Española (SIBE). La relación completa de las empresas del IBEX-35 en el periodo de nuestro estudio se puede consultar en la Tabla 6 (Anexo). En los últimos años el índice ha estado en continuo crecimiento partiendo de los 5800 puntos en julio de 2012 hasta superar los aproximadamente 11000 actuales. La composición del mismo es variable. Por ejemplo, la composición de julio de 2015 actual ya difiere de la analizada, lo cual tendría que tenerse en cuenta desde el punto de vista del inversor. Entre las más importantes, respecto a volumen, están Banco Santander, Telefónica, Inditex, Iberdrola y BBVA. Sin embargo, no por ser las más destacadas son las más interesantes para el inversor. Es más, se confirmará a lo largo del estudio que efectivamente esto no ocurre.

El desarrollo del trabajo se indica a continuación. Para comenzar, en la Sección 2, después de realizar la captura de datos, se hará un análisis descriptivo de las series de cotizaciones de las empresas del IBEX-35 desde 2012 a la actualidad, observando los posibles valores atípicos y valores missing. En caso de hallar observaciones que fluctúen sobre umbrales extremos se procederá a un análisis histórico de la misma. En caso de encontrar valores missing se calcula el promedio entre el último día del cual se tiene información y del inmediatamente posterior. Una vez compuesto el data set, en la Sección 3, se aplicarán diferentes técnicas de optimización. Comenzaremos recordando el modelo básico de optimización de carteras en el que el objetivo del inversor es hallar la cartera de mínimo riesgo entre todas las que tienen una rentabilidad de al menos un valor prefijado. Matemáticamente es un problema de programación cuadrática con restricciones y un sólo valor objetivo: minimización de la varianza fijada una rentabilidad mínima. Como siguiente paso del trabajo, se considera el

modelo de Markowitz que pretende obtener la cartera óptima en el sentido precedente, pero para cada valor prefijado de rentabilidad. Es decir, infinitas carteras, que denominaremos eficientes. Técnicamente, ahora es un problema de optimización biobjetivo, que como tal no tiene solución, pero utilizando el enfoque de las restricciones o el de las ponderaciones tiene solución en términos de eficiencia en lugar de optimalidad. Todas las soluciones constituyen la frontera eficiente de rentabilidad-riesgo, que se obtiene y se analiza, localizando algunas carteras notables de la misma. Una de las cuestiones más interesantes que se aborda en este trabajo es el efecto de la modificación de la definición del riesgo sobre las carteras eficientes de inversión. Por ello, a continuación, se comenzará cambiando la estimación clásica de la matriz de varianzas-covarianzas por una estimación robusta con el llamado Algoritmo FAST MCD; véase Rousseeuw and K. Van Driessen (1999). Como siguiente punto en la modificación del riesgo, se da una medida del riesgo teniendo en cuenta tan solo las observaciones que fluctúan por debajo de cierto umbral, que en este caso se tomará la media de los retornos. De esta forma se consigue dar una medida del “riesgo negativo” para el inversor. Además se plantea un análisis dinámico de la frontera eficiente de Markowitz obtenida observando la evolución de la misma al ir obteniendo nuevas observaciones que añaden información diaria a nuestro conjunto de datos. En la Sección 4, se comparan las carteras entre sí, y con el índice IBEX-35, analizando el riesgo sistemático de cada una de ellas. Por último en la Sección 5, el trabajo justifica las herramientas de software utilizadas. Se finaliza con unas conclusiones sobre los resultados obtenidos y se plantean posibles futuras extensiones del mismo.

2 Análisis descriptivo

En este apartado nos ocupamos de realizar un análisis descriptivo de los datos históricos de cotizaciones, como paso previo a abordar los problemas de optimización de carteras. Se dispone de 785 observaciones correspondientes a las cotizaciones en euros por acción de las empresas del IBEX-35 entre las fechas: 2 de enero de 2012 a 2 de enero de 2015, aproximadamente 3 años. Los valores se extraen a través de la función *get.hist.quote()* con el paquete de R *tseries* que nos permite descargar directamente los precios desde la página web *Yahoo Finance*. Cada serie de empresa que cotiza tiene su símbolo identificativo único con el que se puede obtener los valores a la apertura (“Open”), máximo del día (“High”), mínimo (“Low”), valor al cierre (“Close”), valor ajustado al cierre (“AdjClose”) y volumen (“Volume”). En este caso sólo nos interesa la serie “AdjClose”, que se corresponde al valor del activo al cierre

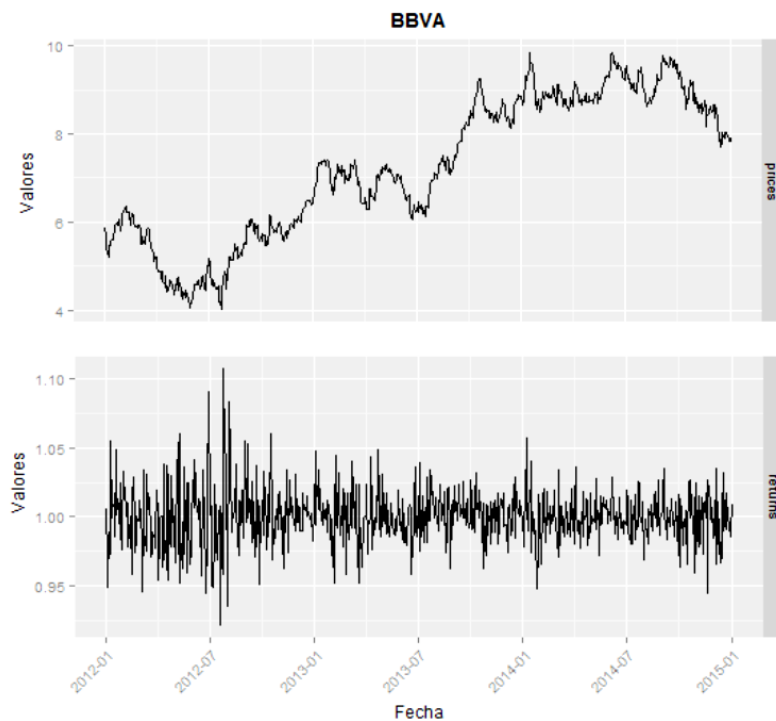
de la jornada ajustado por dividendos³ y splits⁴. En este trabajo se emplearán los símbolos como identificador de cada activo. En el anexo, se encuentra la Tabla 6 de equivalencias entre el símbolo y el nombre completo de cada empresa.

Existen diferentes formas de calcular los rendimientos de un activo. En concreto en este trabajo se han calculado como retornos nominales, R_j para $j = 1, \dots, 35$, con:

$$R_j(t) = P_j(t)/P_j(t-1),$$

donde $P_j(t)$ es la cotización de la empresa j en el instante t , para $t = t_1, \dots, t_{785} = T$, con $t_1 = 02/01/2012, T = 02/01/2015$.

Mostramos a continuación como ejemplo el aspecto de la serie de cotizaciones del Banco BBVA y la de sus correspondientes retornos.

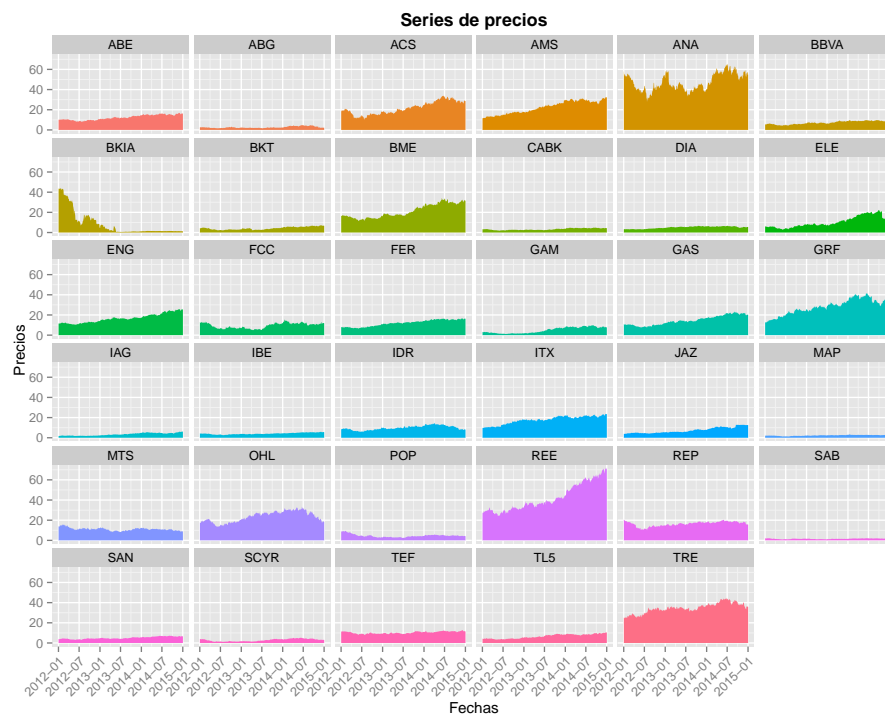


³*Dividendo*: Es la retribución a la inversión que se otorga en proporción a la cantidad de acciones poseídas con recursos originados en las utilidades de la empresa durante un periodo determinado y podrá ser entregado en dinero o en acciones.

⁴*Split*: Aumento del número de acciones en circulación de una emisora sin variar el importe de su capital social

El subplot superior, muestra los precios de las cotizaciones de la empresa BBVA. Se observa una tendencia alcista desde julio de 2012 hasta enero de 2014. A partir de entonces los valores se estabilizan detectándose un principio bajista en el último trimestre de 2014. El subplot de retornos, indica grandes oscilaciones y por tanto mayor volatilidad de la serie durante 2012, mostrando una gran heterocedasticidad desde enero a julio de de este mismo año. La variación se mantiene estable entre los valores 1.05 y 0.95 hasta finales de 2014, donde la heterocedasticidad vuelve a aparecer, aunque en menor medida, a favor de los valores bajistas, como se observaba en la serie.

Tras ver un ejemplo sobre la relación entre una serie de precios y sus correspondientes retornos, visualizamos el conjunto de todas las series, para tener una perspectiva del universo de datos con el vamos a trabajar.



Plot 1: Series de precios de las 35 empresas del IBEX

Tenemos las series de las cotizaciones de todas las empresa que durante el periodo tomado forman parte del IBEX 35. En primer lugar se aprecian diferencias en el volumen de los precios de cada empresa. ANA por ejemplo, tiene unos precios de cotización muy altos comparados con los de ABG o BKT. Se ha de tener en cuenta

que trabajamos con los close ajustados por dividendos y splits, es decir, los valores reales de compra y venta de la acción serán otros, sin embargo desde el punto de vista del análisis del histórico a tres años es necesario trabajar con los datos ajustados.

En el plot también se visualiza las diferentes volatilidades de cada serie. Sea por ejemplo BKIA, una serie muy volátil frente a TRE o TEF, cuyos valores son muy estables en todo el tramo de estudio.

2.1 Rentabilidades y riesgos

El estudio de la rentabilidad y del riesgo es muy importante en el contexto. Existen diversas formas de obtenerlas. Para la rentabilidad el estadístico más utilizado es el promedio de los retornos diarios de cada serie. También podría calcularse la rentabilidad en tramos concretos de tiempo, o extrapolar el dato diario a anual, multiplicando por el número de días naturales de un año (se suele tomar un valor estándar de 252 días o 261, de modo arbitrario).

Se calculan la rentabilidades medias diarias de cada serie como:

$$r_j = E(R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j(t),$$

para $j = 1, \dots, 35$, donde T es el valor temporal máximo, en este caso 02/01/2015.

Para el caso del riesgo, el abanico de posibilidades aumenta. El riesgo trata de dar una medida de la variabilidad de la serie. El concepto de variabilidad, en estadística, corresponde a una medida sobre la desviación de la observación respecto de la media, sin embargo en el ámbito financiero puede interesar el medir solamente la desviación negativa respecto a la media o respecto a otro valor umbral que se fije. Incluso en ocasiones se considera la reinversión en la serie, luego de ocurrir oscilaciones negativas en la misma no tendrían porqué formar parte del riesgo. En resumen, existen muy diversas formas de dar esta medida. En este trabajo se estudian algunas de ellas, empezando por la más clásica: la varianza.

$$\sigma_j^2 = Var(R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_j(t) - r_j)^2,$$

para $j = 1, \dots, 35$,

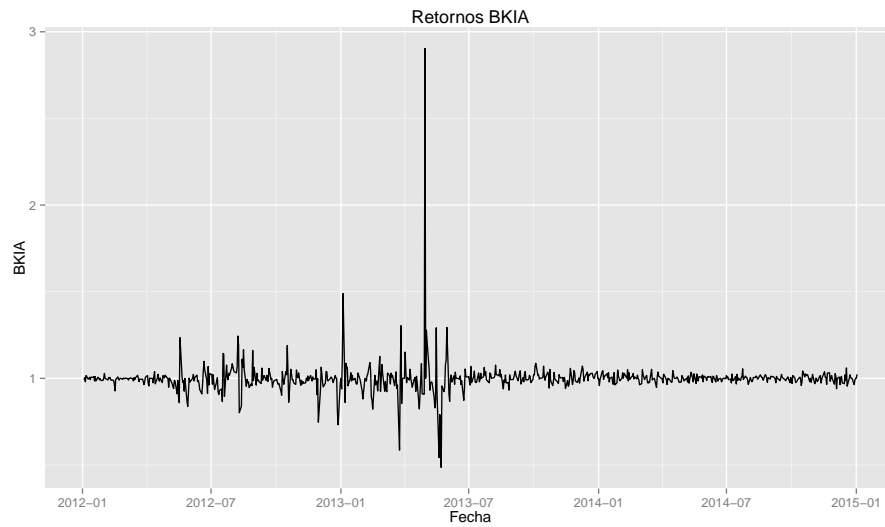
La medida del riesgo se modificará más adelante, analizando las ventajas y desventajas que aporta cada alternativa. A continuación, la Tabla 1 muestra las rentabilidades y riesgos de cada serie de retornos de las empresas del IBEX.

	Rentabilidad	Riesgo
ABE	1.00069	0.00018
ABG.P	1.00034	0.00122
ACS	1.00071	0.00043
AMS	1.00140	0.00016
ANA	1.00021	0.00055
BBVA	1.00058	0.00038
BKIA	0.99864	0.00848
BKT	1.00099	0.00077
BME	1.00095	0.00024
CABK	1.00060	0.00043
DIA	1.00084	0.00029
ELE	1.00181	0.00132
ENG	1.00107	0.00018
FCC	1.00031	0.00081
FER	1.00102	0.00019
GAM	1.00160	0.00095
GAS	1.00091	0.00024
GRF	1.00136	0.00028
IAG	1.00182	0.00046
IBE	1.00046	0.00026
IDR	1.00020	0.00049
ITX	1.00123	0.00024
JAZ	1.00168	0.00032
MAP	1.00059	0.00044
MTS	0.99966	0.00043
OHL	1.00026	0.00037
POP	0.99941	0.00072
REE	1.00131	0.00022
REP	0.99989	0.00035
SAB	1.00011	0.00058
SAN	1.00080	0.00034
SCYR	1.00024	0.00118
TEF	1.00016	0.00021
TL5	1.00132	0.00048
TRE	1.00059	0.00023

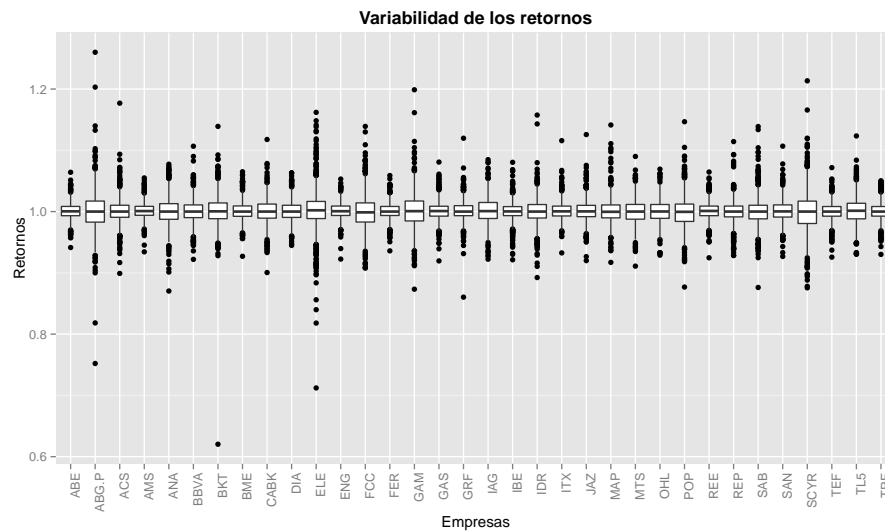
Tabla 1: Rendimientos y riesgos esperados de cada activo

TL5 y TEF son dos importantes compañías en el índice bursátil. Se podrían comparar en cuanto a rentabilidades, siendo TL5 la más recomendable en este aspecto, aunque con un riesgo también mayor. Destacamos también MTS, por su baja rentabilidad en el periodo considerado y riesgo relativamente elevado. La serie de BKIA es un caso especial, debido a la gran volatilidad que presenta en el primer cuatrimestre de 2013. A partir de entonces los retornos se estabilizan sin embargo la

varianza de la serie es claramente mayor al resto y se prescinde de ella en la mayoría de los gráficos en los que se representa el riesgo.



Plot 2: Serie de retornos de BKIA.



Plot 3: Box-plots de las series de retornos

En el Plot 3 se visualizan las anteriores conclusiones. Las rentabilidades medias

de cada serie son muy similares entre sí, sin embargo la varianza es muy diferente. Asimismo, las series ABG, ELE, GAM y SCYR tienen una oscilación mayor al resto. TL5, es un caso intermedio, junto con ANA, BKT, IAG y POP. Entre las de menor variabilidad se encuentran ABE, ENG o FER. Por otro lado, se tienen representados como puntos los datos más atípicos de las series. En este contexto destacarían las series de BKT, ABG o ELE, pues presentan valores muy extremos.

2.2 Correlaciones

La matriz de correlaciones de las series de retornos muestra la relación entre las diferentes series para igual momento de tiempo (no se tiene en cuenta la posible relación de transferencia o autocorrelación entre ellas). La correlación entre dos series de retornos R_i , R_j se define como:

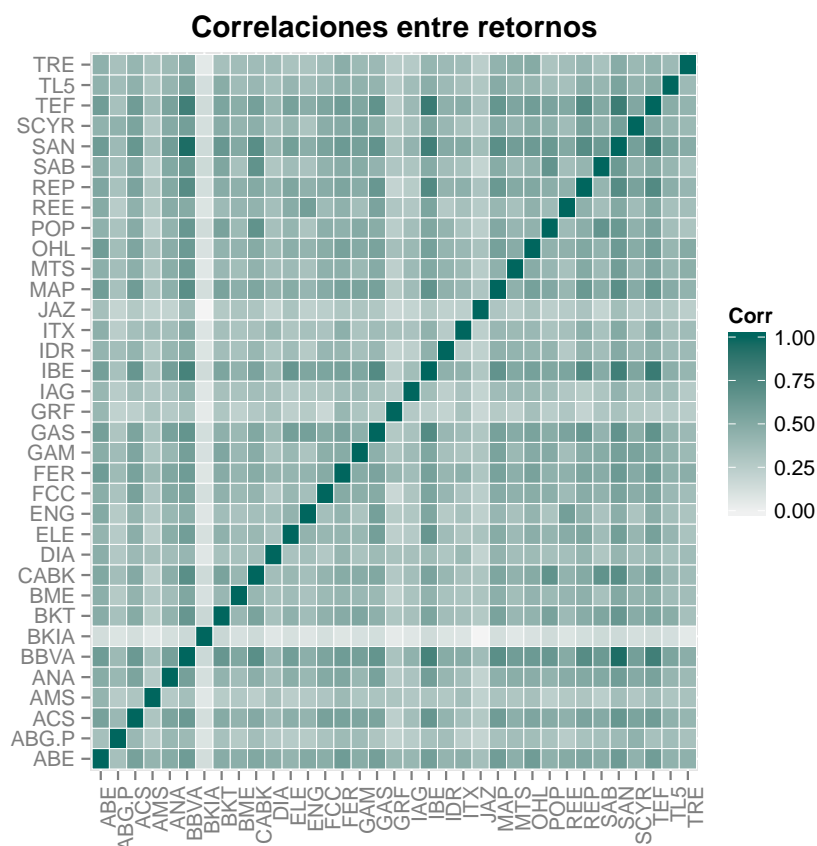
$$\text{Corr}(R_i, R_j) = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \sigma_j},$$

donde σ_{ij}^2 es la covarianza entre las series de retornos R_i y R_j , σ_i es la desviación típica de la serie R_i y σ_j es la desviación típica de la serie R_j , para todo $i, j = 1, \dots, 35$.

La covarianza se calcula de la forma siguiente:

$$\sigma_{ij}^2 = \text{Cov}(R_i, R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_i(t) - r_i)(R_j(t) - r_j),$$

para todo $i, j = 1, \dots, 35$.



Plot 4: Plot de correlaciones entre series de retornos

El Plot 4 muestra las correlaciones entre las series de retornos. El color más oscuro se correspondería con valores más próximos a 1 (correlación máxima) y más claro, correlación nula. No hay correlaciones negativas. La matriz de correlaciones se presenta en las Tablas 7 y 8 del anexo. Destaca la alta correlación entre el BBVA y el Banco Santander (0.941), así como SAN, IBE, TEF y BBVA que tienen una correlación mayor a 0.80. También cabe resaltar la correlación prácticamente nula de BKIA con el resto de series, que como sabíamos tiene un comportamiento bastante diferente al resto.

3 Optimización de carteras

Como se ha comentado anteriormente la optimización de carteras pretende diversificar la inversión para reducir el riesgo. Las variables de decisión del problema de optimización x_j serán por tanto las proporciones de riqueza invertidas en la empresa j , $j = 1, \dots, n$. Denotamos por $x = (x_1, \dots, x_n)$ la cartera de inversiones, en nuestro caso $n = 35$. Se supone $\sum_{j=1}^n x_j = 1$, $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Ahora extendemos los conceptos anteriores de riesgo y rendimiento a las carteras.

El rendimiento de la cartera x es

$$R(x) = \sum_{j=1}^n x_j R_j,$$

mientras que el rendimiento esperado

$$r(x) = E(R(x)) = \sum_{j=1}^n x_j r_j,$$

y el riesgo de la misma es

$$\sigma^2(x) = \text{Var}(R(x)) = E(R(x) - r(x))^2.$$

Definimos también el Ratio de Sharpe,

$$SR(X) = (r(x) - r_0) / \sigma(x),$$

donde r_0 es el tipo de interés tomando como referencia el valor medio de las letras del tesoro a 3 meses en $[t_1, T]$.

Por ejemplo, podría plantearse la cartera equiponderada con $100\%/35 = 2.86\%$ de inversión en cada empresa. Su rendimiento diario sería 1.001679, es decir, tendríamos un ganancia diaria del 0.17% y 42.31% anual. El riesgo de la misma se situaría entorno a 0.0698%.

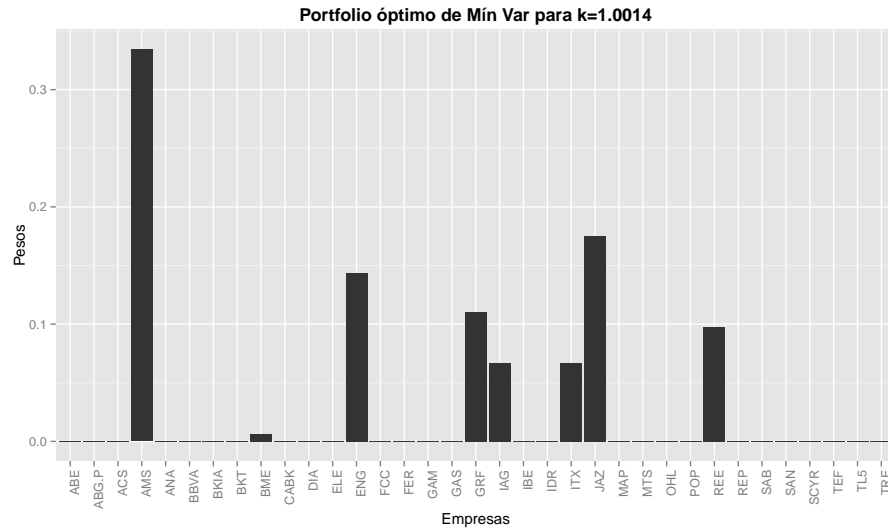
En esta sección plateamos el modelo de Markowitz con varias alternativas en la definición de riesgo y mostramos como implementar la Frontera Eficiente dinámica.

3.1 Modelo Básico

En el modelo básico se pretende fijar una rentabilidad mínima para la cartera x tratando de minimizar el riesgo de la misma. Las variables de decisión x_j , además de las restricciones mencionadas anteriormente, deberán cumplir $\sum_{j=1}^n r_j x_j \geq k$, donde k es la rentabilidad mínima fijada que se desea obtener. El modelo proporciona la cartera de menor riesgo entre las que tienen una rentabilidad $\geq k$. El objetivo del problema es minimizar el riesgo. Matemáticamente se expresa como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma^2(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j))^2, \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq k, \\ & \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

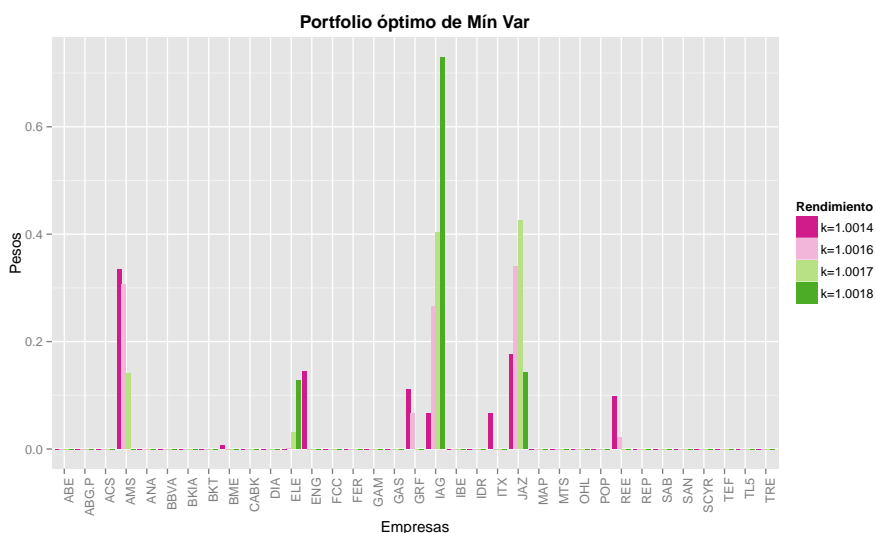
Aplicamos la función $\text{solve.QP}()$ del paquete *quadprog*⁵ de R, tanto en este apartado como en los posteriores, para llevar a cabo la optimización. La cartera resultante es la que se expone a continuación.



Plot 5: Portfolio óptimo de Mínima Varianza para k=1.0014

⁵Véase <http://cran.r-project.org/web/packages/quadprog/quadprog.pdf>

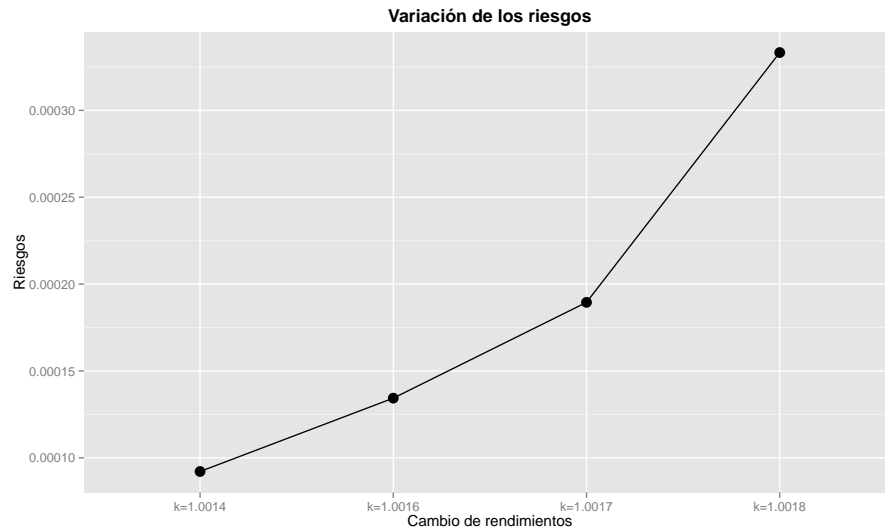
Con la cartera óptima del modelo básico se invertiría de forma repartida entre 12 empresas. ENG, MTS, TEF y TRE tienen un mayor peso en la composición de la misma. El rendimiento anual de la cartera es $0.0014 * 252 = 0.3528$, es decir un 35.28% de ganancia sobre el dinero que se invierte. El riesgo al que se está expuesto, fijado $k=1.0014$, $9.212 * 10^{-5}$. Es decir, por ejemplo, si invirtiéramos 1000 euros en un período de un año (252 días de cotización) obtendríamos una ganancia de 352.80 euros. Veamos el movimiento de los pesos al modificar el rendimiento mínimo que se pretende alcanzar, aumentándolo desde $k=1.0014$ a $k=1.0018$ de forma gradual. Se representa en el Plot 6.



Plot 6: Portfolio óptimo de Mínima Varianza modificando rendimiento mínimo

Al aumentar el valor de k , los activos en los que invertir varían, es decir, varía la cartera óptima. Para un rendimiento del 35.28% anual ($k=1.0014$) la cartera está compuesta por 8 activos, destacando la inversión en AMS. Sin embargo al aumentar el rendimiento de la cartera, se reduce el número de componentes. Es el caso de la cartera con mayor rendimiento, 45.36% anual, que sólo está formada por ELE, IAG y JAZ, siendo muy alto (73%) el porcentaje de la inversión en JAZ. El riesgo que se asume también aumenta considerablemente, puesto que estamos diversificando menos.

Veamos cómo varían los riesgos para los distintos rendimientos:



Plot 7: Variación de los riesgos según el cambio de rendimientos

Como muestra el Plot 6, al aumentar el rendimiento del 35.28% anual al 40.32%, se está incrementando el riesgo a correr en un 0.005% diario, es decir $252 * 0.005\% = 1.26\%$ anual. Si quisiéramos el mayor rendimiento tendríamos que asumir un riesgo anual del 8.32% cuando con $k=1.0004$ sólo se tenía el 2.4%.

El movimiento del valor de k entre 0 e ∞ daría lugar a la frontera eficiente, es decir, a infinitas soluciones óptimas para cada k que llamamos eficientes. Lo analizamos en la siguiente sección con el método equivalente de las ponderadas.

3.2 Modelo de Markowitz

Con el modelo básico se ha fijado la rentabilidad mínima, que en el problema matemático se ha incluido como restricción, pero si consideramos todos los problemas variando k podría incluirse en la función objetivo. Es el método de las ponderaciones en programación multiobjetivo. De esta forma, se tendría como función objetivo a minimizar simultáneamente el valor opuesto de la rentabilidad y el riesgo. Este modelo es conocido como el modelo de Markowitz. En la función objetivo se suele añadir un parámetro $\mu \geq 0$ que regula el peso del riesgo. La estructura del mismo es la siguiente:

$$\min \mu \sigma^2(x) - r(x) = \mu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j))^2 - \sum_{j=1}^n x_j r_j,$$

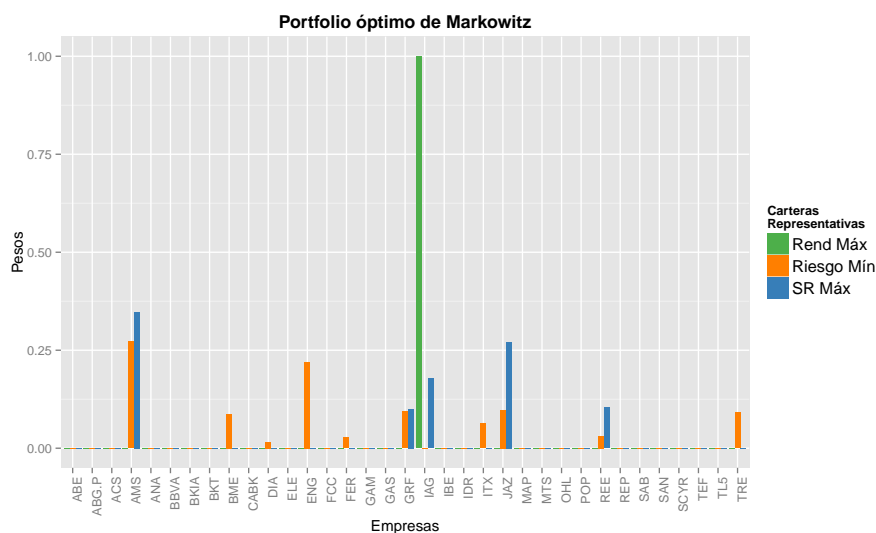
$$s.a. : \sum_{j=1}^n x_j = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

El problema tiene infinitas soluciones. Todas ellas forman la que se conoce como Frontera Eficiente. En dicha frontera cada una de las carteras es óptima para el inversor, no pudiendo ser de mayor rentabilidad y menor riesgo simultáneamente alguna situada fuera de la misma. No obstante, en Teoría de Carteras suele existir interés por tres de ellas principalmente: la cartera eficiente de máxima rentabilidad ($\mu = 0$), la de mínimo riesgo ($\mu = \infty$) y aquella con Ratio de Sharpe más alto, taomand $r_0 = 1.000679$

Las carteras eficientes se encuentran en la Tabla 9 del anexo correspondiente al resultado de la optimización según el valor de μ .

Las tres carteras notables se representan en el siguiente gráfico (Plot 8):

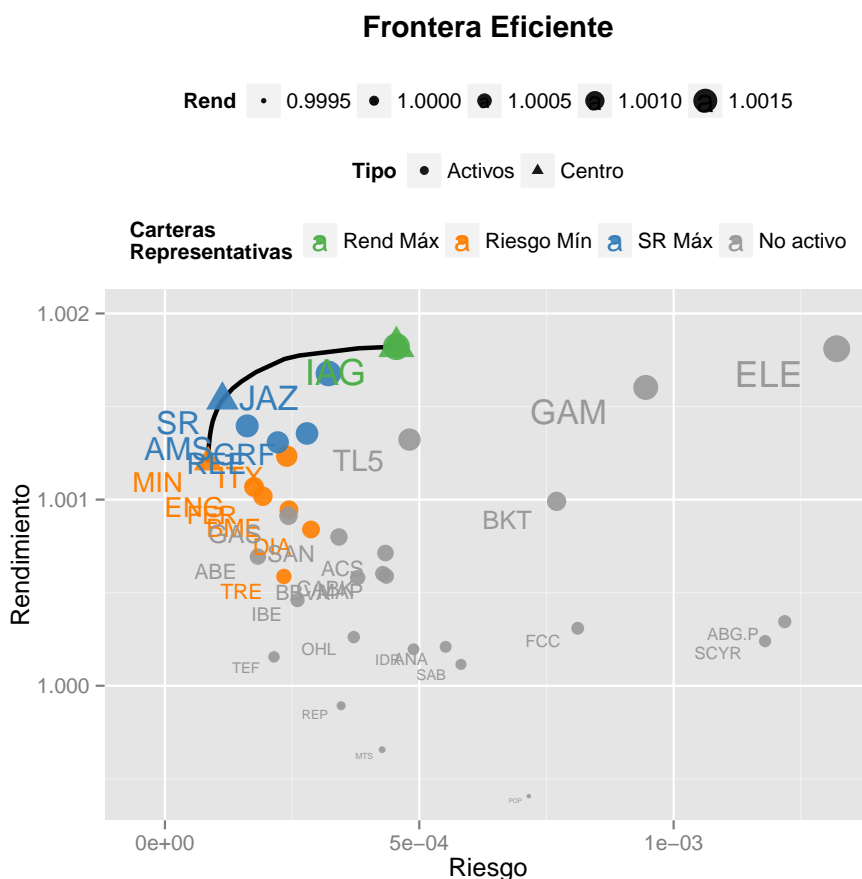


Plot 8: Portfolios óptimos de Markowitz Clásico

Como cartera de rendimiento máximo, dado que el riesgo apenas se está teniendo en cuenta ($\mu = 0$) el peso se concentra en un 100% en IAG, la empresa con mayor rentabilidad. Sin embargo dando mayor importancia al riesgo, elevando el valor de μ , inmediatamente se diversifica la cartera. En concreto cuando el riesgo se minimiza lo máximo posible, el número de activos es 11, con AMS y ENG como empresas sobre las que más se invierte, por ser aquellas con menor riesgo. Una cartera intermedia

muy importante es la de Ratio de Sharpe máximo, formada por MAS, GRF, IAG, JAZ y REE, con pesos muy similares entre sí.

A continuación se representa la frontera eficiente con la situación de cada empresa en un plot del riesgo frente al rendimiento (Plot 9).



Plot 9: Frontera eficiente de Markowitz

En el plot también se representa la posición de cada empresa con tamaño proporcional a su rendimiento. Cada uno de esos 35 puntos es una cartera con el 100% de inversión en una sola empresa. Ninguna es eficiente, excepto la de IAG. Las empresas con mayor rentabilidad son GAM, ELE, IAG y JAZ, sin embargo las dos primeras también tienen un riesgo muy elevado por ello no forman parte de ninguno de los tres portfolios principales. La cartera de Ratio de Sharpe máximo, se sitúa en la parte central de la frontera eficiente a diferencia de las de mínimo riesgo y máximo

rendimiento que están en los extremos. En concreto, AMS con una gran rentabilidad se sitúa prácticamente limitando con la del Ratio de Sharpe máximo, de ahí que sea la que más representatividad tenga en dicha cartera. Por otra parte, las empresas con menor riesgo, son las más próximas al eje OY , donde el riesgo se hace mínimo. El resto de activos tendrían alto riesgo y baja rentabilidad, por ello no es conveniente incluirlos en la inversión. Como ejemplos más extremos tenemos SCYR o ABG.

3.3 Modelo de Markowitz - MCD

En el análisis descriptivo de las series de retornos encontrábamos varios casos de observaciones atípicas que podrían no ser relevantes y estar distorsionando la cartera óptima. Se propone por tanto en este apartado la eliminación de dichas observaciones para evitar la posible influencia de las mismas. Buscamos un método robusto para la estimación del riesgo a minimizar. El propuesto es el método de Determinante de Covarianza Mínimo o MCD que es una técnica de estimación a través de la cual se eliminan las observaciones localizadas lejos de la nube de puntos, véase con excesiva volatilidad. El algoritmo inicial fue mejorado por Rousseeuw y Van Driessen (1999), quienes sugieren que una vez seleccionado el subconjunto de observaciones sobre las que calcular el determinante de la matriz de covarianzas, se trace el elipsoide en dicho subconjunto de forma que el determinante se calcule sobre una matriz de menor tamaño. En concreto el algoritmo es el siguiente:

1. Elegir un h entre $[(n+p+1)/2]$ y n , donde n es el número total de observaciones y p el número de variables.
2. Encontrar el $h < n$ observaciones con el con la matriz clásica de covarianzas de menor determinante.

$$H_0 = \operatorname{argmin}_H \det(\operatorname{cov}(x_i | i \in H))$$

3. μ_0 es la media de las h observaciones

$$\hat{\mu}_0 = 1/n \sum_{i \in H_0} x_i$$

4. La matriz de covarianzas con las h observaciones multiplicada por un factor de consistencia c_0 es:

$$\hat{\Sigma}_0 = c_0 \operatorname{cov}(x_i | i \in H_0)$$

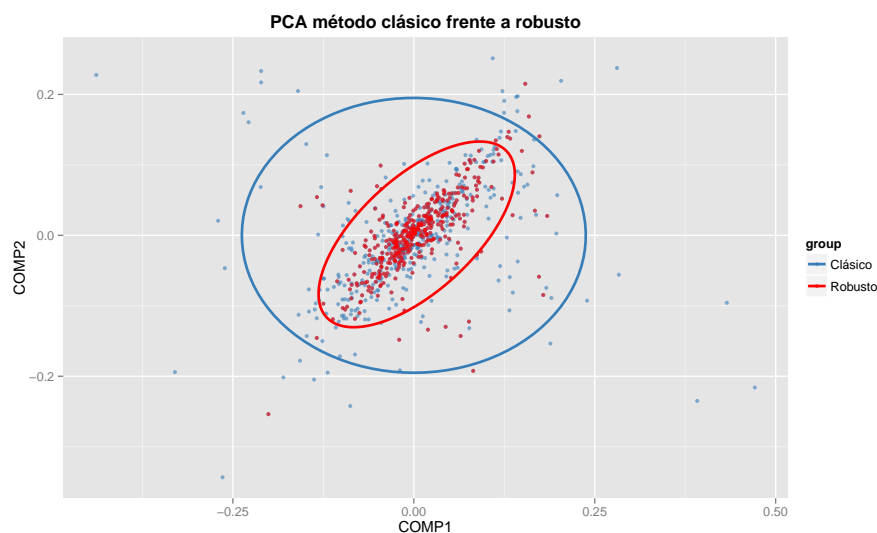
5. Se calculan las distancias robustas iniciales según las distancias de Mahalanobis definidas como:

$$d_i = D(x_i, \hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0) = \sqrt{(x_i - \hat{\mu}_0)' \hat{\Sigma}_0^{-1} (x_i - \hat{\mu}_0)}$$

6. Se asigna peso $w_i = 0$ si $d_i > \sqrt{(\chi_{p,0.975}^2)}$, en otro caso $w_i = 1$.
7. Se computa la media y la matriz de covarianzas ponderadas con los pesos w_i .
8. Se computan las distancias robustas finales y se asignan nuevos pesos hasta que la tolerancia sea menor a cierto umbral.

Este algoritmo está implementado en la función `cov.rob()` de la librería *MASS* de R, aunque existen otras librerías más específicas como *robust*⁶.

Veamos en el Plot 10 cómo ha variado nuestra nube de puntos. Dado que la dimensión del conjunto es 35 aplicamos un análisis de componentes principales para visualizar el efecto del método robusto.



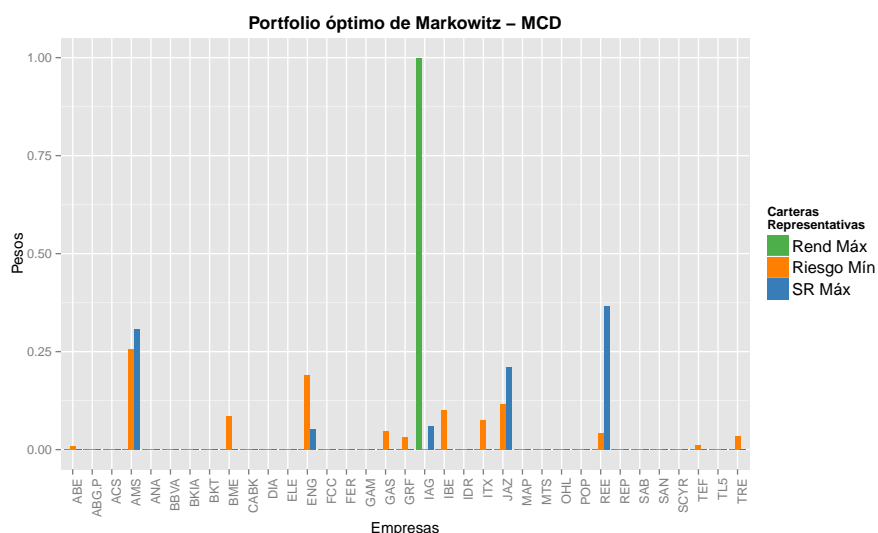
Plot 10: PCA sobre series de retornos: No Robusto Vs. Robusto

La primera componente principal recoge un 38.6% de la información global. La siguiente componente, que se representa en el eje OY describe un 26% del conjunto de datos, es decir, entre el plot bidimensional explica un 68.8% de la varibilidad. La elipse que engloba la nube de puntos total es muy amplia y no se adapta a la

⁶Ver <http://www.inside-r.org/node/71589>

concentración de observaciones, sino que recoge los puntos más alejados. El método robusto supone una buena alternativa en cuanto a resumen de la localización de los datos. Tras esta visualización realizamos la optimización correspondiente del modelo.

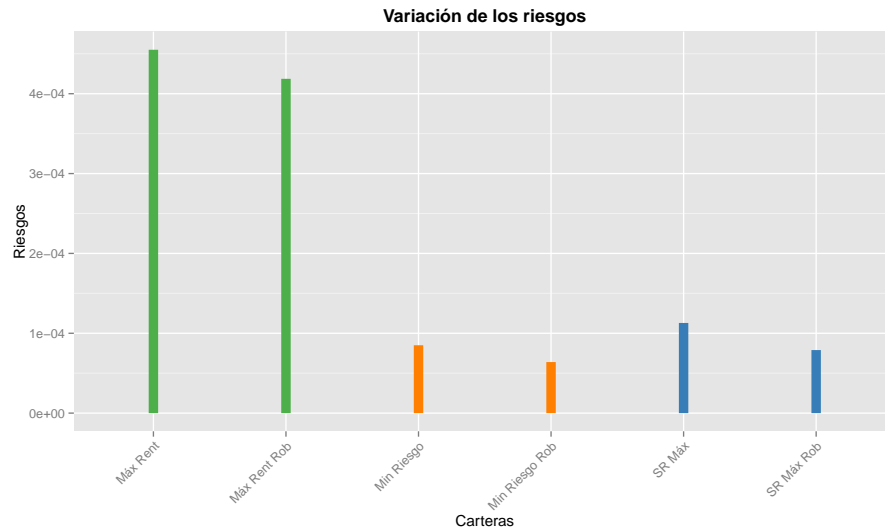
En las Tablas 10 y 11 del anexo se tienen las correlaciones entre series tras aplicar este modelo. A continuación, en la Tabla 12, se muestran los resultados de la frontera eficiente calculada mediante estimación robusta.



Plot 11: Portfolios óptimos de Markowitz con MCD

El Plot 11 recoge la composición de las 3 carteras notables. De nuevo, se tiene la cartera de rendimiento máximo formada por un sólo activo: IAG. Asimismo al haber eliminado las observaciones más alejadas, se ha reducido la varianza general de las empresas luego la cartera de mínimo riesgo estará formada por un mayor número de activos, en concreto 13, con unos pesos muy repartidos. Respecto a la de máximo Ratio de Sharpe, destaca REE que representa mas de un 25% de la misma.

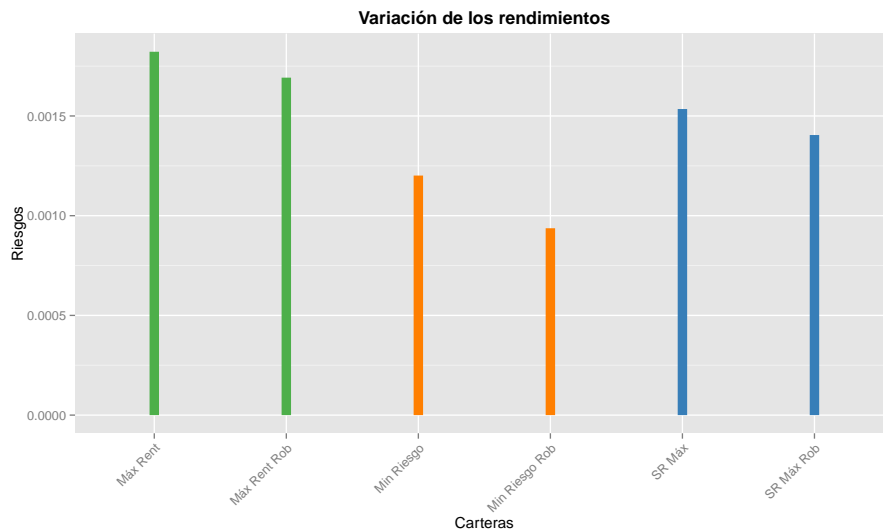
Veamos cómo varía la frontera eficiente respecto a la obtenida en el caso no robusto en el Plot 12.



Plot 13: Riesgos de carteras notables con estimación robusta y no robusta

En el Plot 13 se representan los riesgos de cada cartera según sea la matriz de covarianzas calculada por estimación robusta. Se aprecia que los riesgos son ligeramente menores con este segundo método lo cual es beneficioso para el inversor.

Veamos en el Plot 14 cómo reaccionan los rendimientos. Se toman rendimientos netos, es decir, se ha restado una unidad para hacer la comparativa más sencilla.



Plot 14: Rendimientos de carteras notables con estimación robusta y no robusta

La disminución del rendimiento también se hace notoria, en especial para la cartera de mínimo riesgo. La pérdida de las rentabilidades en los otros dos casos es de un 0.02% y un 0.03% diario, lo que supone una pérdida anual de $0.02\% \times 252 = 5.04\%$ y un 7.56%. El MCD corrige la posición de las carteras eficientes y de las empresas en ellas. Globalmente el riesgo disminuye, pero también el rendimiento, haciendo ambos más realistas.

3.4 Modelo de Markowitz - Semivarianza

La medida del Ratio de Sharpe puede no ser óptima a la hora de evaluar de forma eficiente las verdaderas pérdidas de un activo. Esta variabilidad negativa puede ser medida a través de las distribuciones de los retornos, o bien, con el valor del Sortino (2001). Frank Sortino da una gran importancia a introducir en el modelo las preferencias del inversor incorporando el concepto de downside risk, con el que se fija un retorno mínimo llamado MAR (Minimal Acceptable Rate of return), de forma que todo valor por encima del umbral, es “buena volatilidad” y todo valor del retorno por debajo, es “mala volatilidad”. Así, en la función objetivo, en vez de minimizar el riesgo, se minimiza el riesgo “malo”, es decir

$$\sigma_{semi-ij}^2 = Cov_{semi}(R_i, R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_i^{MAR}(t) - r_i^{MAR})(R_j^{MAR}(t) - r_j^{MAR}),$$

donde $R_k^{MAR}(t)$ es el retorno de la serie k en el instante t si $R_k(t) < r_k$, en cualquier otro caso: $R_k^{MAR}(t) = r_k$ y r_k^{MAR} la media de $R_k^{MAR}(t)$ en los instantes t ,

para $k = i, j$, con $i, j = 1, \dots, 35$. Es decir,

$$r_k^{MAR} = E(R_k^{MAR}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_k^{MAR}(t),$$

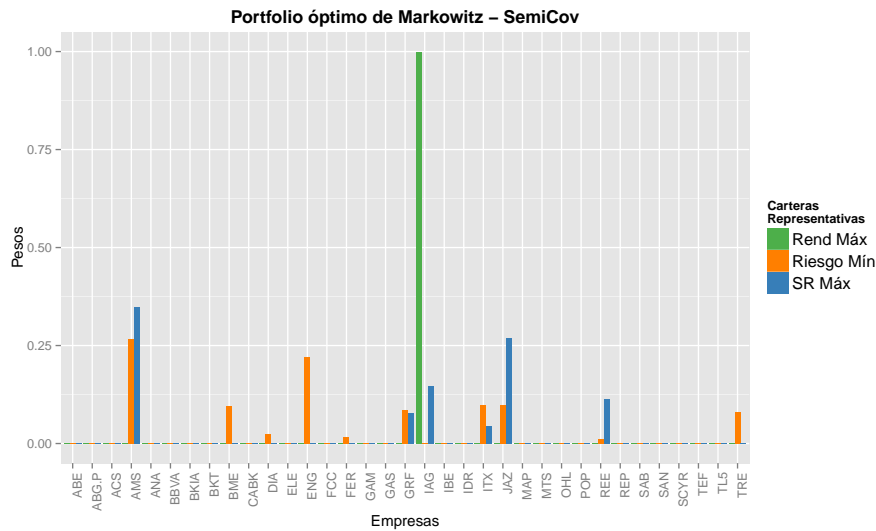
donde

$$R_k^{MAR}(t) = \begin{cases} R_k(t) & : R_k(t) < r_k \\ r_k(t) & : R_k(t) \geq r_k \end{cases}$$

para $k = 1, \dots, 35$, donde T es el valor temporal máximo, en este caso 02/01/2015.

En la semivarianza, el valor del denominador n se toma por convenio como el número total de observaciones⁷. Dicho n es el número de observaciones por debajo de la media.

Los pesos asignados a cada una de las tres carteras notables de la frontera eficiente a analizar se exponen en el Plot 15.

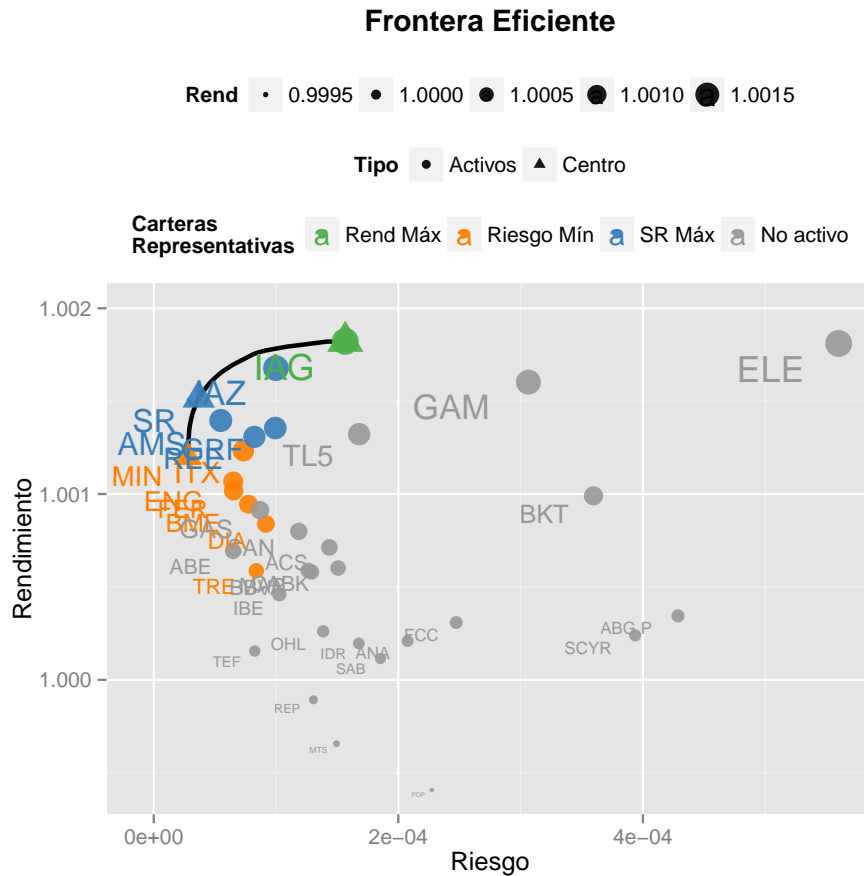


Plot 15: Portfolios óptimos de Markowitz con Semivarianzas

En este caso, la cartera de máximo rendimiento vuelve a estar formada por el activo IAG, de mayor valor retorno promedio 1.0018219 o 45.91% anual. La cartera de RS máximo, está formada por los mismos activos que la de riesgo mínimo, sin

⁷<http://cran.r-project.org/web/packages/PerformanceAnalytics/PerformanceAnalytics.pdf>, *DownsideDeviation*

embargo, con un número menor de activos. Por tanto las proporciones a invertir serán mayores. Es el caso por ejemplo, de JAZ y REE que aumenta de una cartera a otra una presentatividad del 10% en la misma.



Plot 16: Frontera eficiente de Markowitz - Semivarianza

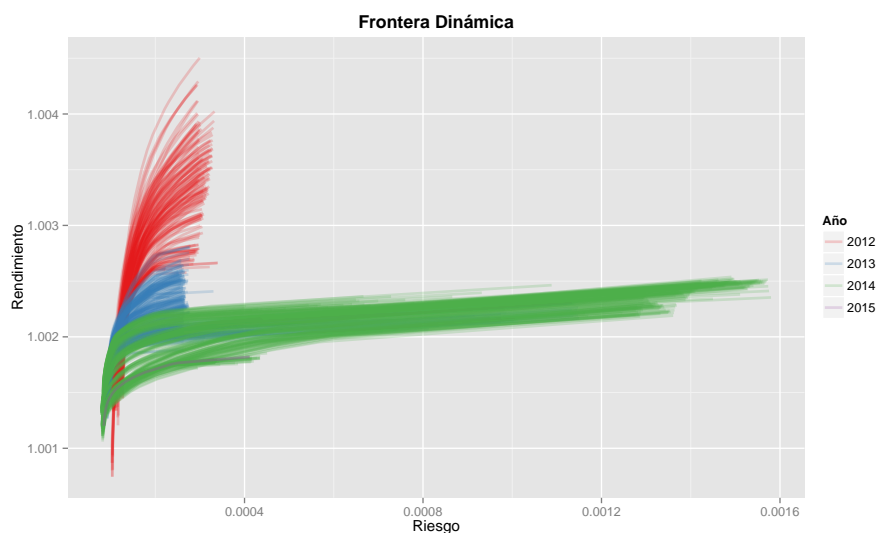
La diversificación de los activos en cuanto al riesgo medido a través de la semivarianza, es decir teniendo en cuenta solamente la “volatilidad mala”, es clara en cuanto a la separación de los puntos de la frontera (Plot 16). La rentabilidad posible a obtener con la cartera de máximo rendimiento se mantiene, sin embargo la de mínimo riesgo ha pasado de ser 0.046% con el método clásico, a 0.042% con el método MCD a 0.016% con la última técnica. La mejora es clara, sin embargo se deben de tener en cuenta todas las consideraciones referidas a cada método. El rendimiento obtenido no varía respecto a la aplicación clásica del modelo de Markowitz con un

0.18% ganancia diaria o sea, un 45.36% anual.

Cada modelo es por sí mismo una mejora respecto al modelo de Markowitz, independientemente de la rentabilidad o riesgo que se llegue a obtener.

3.5 Modelo de Markowitz - Frontera Dinámica

Para todos los modelos analizados hasta el momento se ha tomado una ventana temporal fija. Sin embargo, en el mercado bursátil el inversor suele actualizar su cartera con una frecuencia prácticamente diaria, según vayan oscilando los precios de las cotizaciones de las empresas, incluso teniendo en cuenta la propia variación del índice. Resulta de interés por tanto analizar la evolución de la frontera eficiente al incluir movimiento en la misma, es decir, al representarlo de manera dinámica.

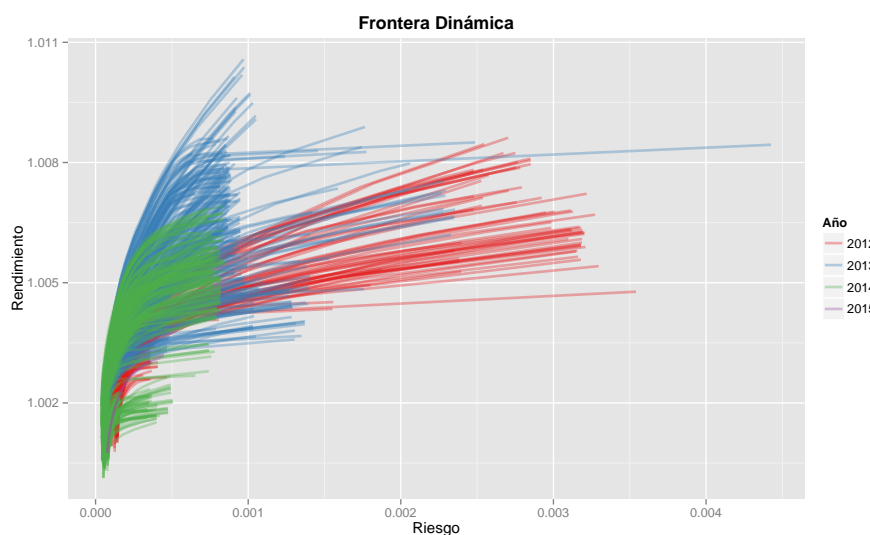


Plot 17: Frontera Eficiente Dinámica

Se ha representado en el Plot 17 la frontera eficiente con el modelo de Markowitz clásico teniendo en cuenta la variación de la misma al añadir información. Es decir, se calcula la frontera inicial con las 120 primeras observaciones. La siguiente, se calcula con las 121 primeras y así sucesivamente hasta llegar a la última que equivale a la ya representada en la Sección 3.1. Cada color representa el año al que pertenecen las últimas observaciones añadidas a las fronteras, con lo que se tienen 261 líneas de cada color, excepto 2012 y 2015, que solo se cuenta con una parte de los mismos. Lo primero que llama la atención es el despunte del riesgo a finales de 2013 (las líneas azules se visualizan de forma tenue bajo las verdes) y todo 2014. Además la frontera

va disminuyendo el rendimiento a medida que se obtienen nuevas observaciones diarias y aumentando el riesgo hasta superar los 0.0014 puntos.

Para la ejecución del gráfico, se han optimizado añadiendo nuevas observaciones al dataset tras haber fijado una inicial, sin embargo en finanzas es común el análisis de la evolución de la serie eligiendo una ventana fija en vez de fijar un origen. Esta técnica se conoce como *Rolling* y consiste en hacer un barrido progresivo a lo largo de la serie. Como es de esperar, el tamaño de la ventana que se elija influirá en los resultados. En este caso se toma una ventana de 6 meses = 126 días. La figura resultante se representa en el Plot 18.



Plot 18: Frontera Eficiente Dinámica - Rolling 6 meses

Se ve que al tener en cuenta los periodos de 6 meses por separado (es decir, sin acumular las observaciones anteriores), el riesgo y el rendimiento de las carteras eficientes varía de forma diferente. Concretamente, las variaciones puntuales, en la ventana escogida, en 2012 son mucho mayores que las que se producen en otros años. El perfil de estas carteras llega a superar el 0.3% de riesgo, mientras que en 2013 o 2014, no llega al 0.1%. El rendimiento, es mucho mayor en 2013 (azul) la mayor parte del tiempo aunque existan tramos donde el riesgo se dispare para $\mu = 0$. Los portfolios de 2013 son los de menor riesgo y con rendimientos que superan el 0.5% diario, o sea un 126% anual.

Como vemos, según el período de datos históricos que se tome, tanto las carteras eficientes como las conclusiones que se obtienen pueden ser muy diferentes. Por ello

se han de tener en cuenta todos los parámetros posibles así como un objetivo claro en la inversión, para poder escoger la estrategia más conveniente.

4 Contraste de carteras

En esta sección se pretende comparar los distintos modelos expuestos hasta el momento a través de la visualización gráfica y la comparación del riesgo específico de algunas carteras eficientes.

4.1 Carteras aplicadas

Se crean ocho series temporales correspondientes a los siguientes cuatro modelos: 1) Modelo Básico ($k=1.0014$), 2) Modelo de Markowitz, 3) Modelo con matriz de covarianzas estimada de forma robusta y 4) Modelo con semivarianzas.

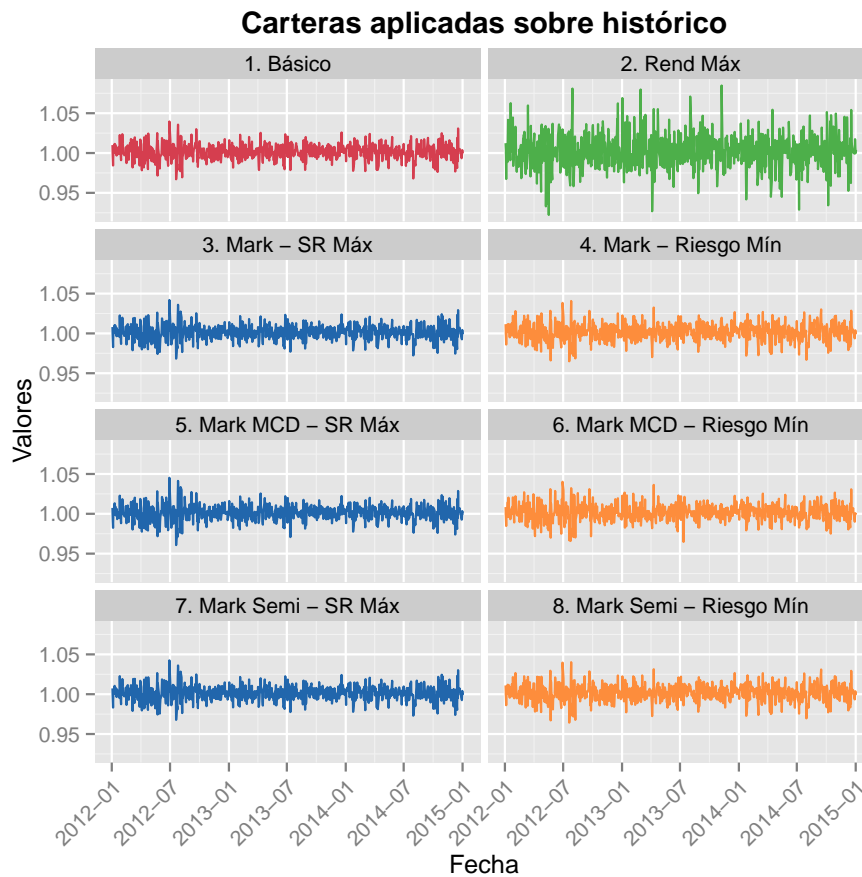
La series de cada modelo son las siguientes:

1. **Modelo Básico:** $0.334 * AMS + 0.006 * BME + 0.144 * ENG + 0.110 * GRF + 0.067 * IAG + 0.067 * ITX + 0.175 * JAZ + 0.097 * REE$
2. **Modelo de Markowitz**
 - (a) **Rendimiento Máximo:** $1 * IAG$
 - (b) **Riesgo Mínimo:** $0.272 * AMS + 0.087 * BME + 0.016 * DIA + 0.220 * ENG + 0.028 * FER + 0.094 * GRF + 0.063 * ITX + 0.097 * JAZ + 0.031 * REE + 0.091 * TRE$
 - (c) **SR Máximo:** $0.347 * AMS + 0.100 * GRF + 0.178 * IAG + 0.270 * JAZ + 0.104 * REE$
3. **Modelo de Markowitz - MCD**
 - (a) **Rendimiento Máximo:** $1 * IAG$
 - (b) **Riesgo Mínimo:** $0.008 * ABE + 0.257 * AMS + 0.084 * BME + 0.191 * ENG + 0.048 * GAS + 0.032 * GRF + 0.101 * IBE + 0.075 * ITX + 0.116 * JAZ + 0.041 * REE + 0.012 * TEF + 0.034 * TRE$
 - (c) **SR Máximo:** $0.308 * AMS + 0.053 * ENG + 0.060 * IAG + 0.211 * JAZ + 0.367 * REE$
4. **Modelo de Markowitz - Semivarianzas**
 - (a) **Rendimiento Máximo:** $1 * IAG$

- (b) **Riesgo Mínimo:** $0.268 * AMS + 0.097 * BME + 0.025 * DIA + 0.048 * GAS + 0.032 * GRF + 0.101 * IBE + 0.075 * ITX + 0.116 * JAZ + 0.041 * REE + 0.012 * TEF + 0.034 * TRE$
- (c) **SR Máximo:** $0.349 * AMS + 0.053 * ENG + 0.060 * IAG + 0.211 * JAZ + 0.367 * REE$

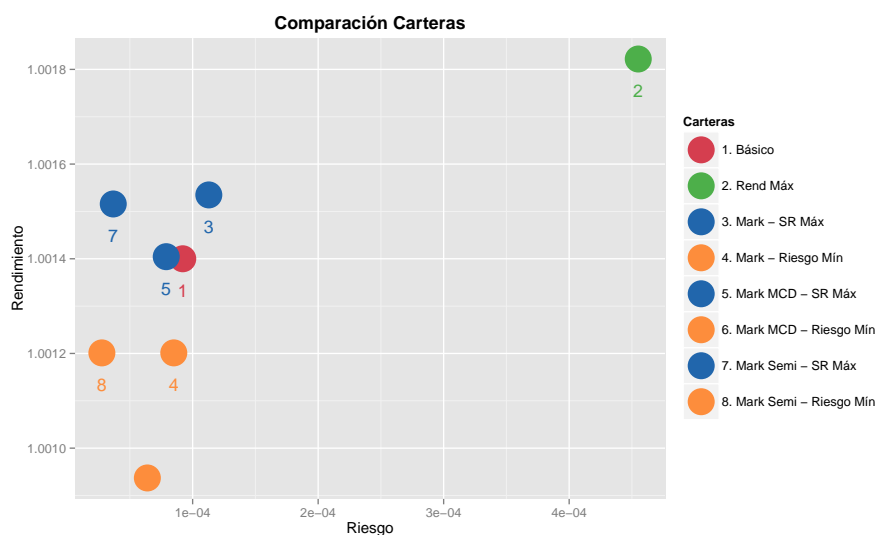
Renumeramos las carteras, de 1 a 8 prescindiendo de las carteras 3.(a) y 4.(a) por tratarse de casos equivalentes a 2.1 por tener menor relevancia en el estudio.

Representamos sus retornos en el Plot 19.



Plot 19: Carteras aplicadas sobre histórico de retornos

La serie 2, de mayor rentabilidad, es también la de mayor volatilidad por falta de diversificación de la cartera. La del modelo básico, muestra un aspecto muy similar a las obtenidas con los modelos de Markowitz. Además también se comprueba visualmente que las oscilaciones de las series 3, 5 y 7 son mayores a las series de obtenidas de las carteras de Riesgo Mínimo. Sin embargo es difícil obtener más conclusiones a partir de una simple visualización de las series de retornos, resumimos los rendimientos y riesgos de cada cartera en el Plot 20.



Plot 20: Comparación de carteras

Lo primero que cabe destacar es que ninguna de las carteras es “mejor” o “peor” a otra, ya que cada una se ha medido con una metodología distinta. Detallamos los valores de los estadísticos en la Tabla 2. La cartera de rentabilidad máxima es la cartera 2, pero su riesgo también es mucho mayor al del resto. Las carteras de Ratio de Sharpe máximo, superan el 0.14% de rentabilidad lo que resultaría más atractivo al inversor estándar frente a las de riesgo mínimo ($\mu = \infty$). Las carteras 7 y 8 se corresponden al modelo de optimización calculado a través de la semivarianza. Esto supone que el riesgo siempre será menor o igual que el obtenido con la varianza clásica.

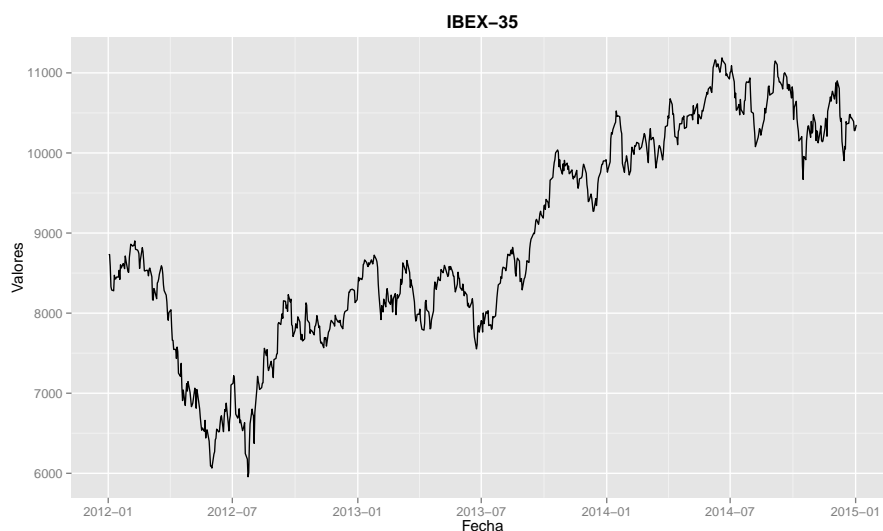
4.2 Riesgo específico

En el subapartado anterior se ha visto la posición global de las carteras, cómo se estructuran en cuanto a rentabilidad y riesgo. Sin embargo este riesgo puede descom-

	Rend	Riesgo
1. Básico	1.001400	0.000092
2. Rend Máx	1.001822	0.000455
3. Mark - SR Máx	1.001535	0.000113
4. Mark - Riesgo Mín	1.001201	0.000085
5. Mark MCD - SR Máx	1.001404	0.000079
6. Mark MCD - Riesgo Mín	1.000937	0.000064
7. Mark Semi - SR Máx	1.001516	0.000037
8. Mark Semi - Riesgo Mín	1.001201	0.000028

Tabla 2: Rentabilidades y Riesgos de las carteras más relevantes

ponerse en dos elementos principales: 1) Riesgo Sistemático y 2) Riesgo Específico. El primero, se corresponde al riesgo de mercado y el segundo, únicamente al comportamiento de la cartera. El riesgo de mercado se asocia a las fluctuaciones del precio global del mercado. Este precio se recoge en el índice de la Bolsa, el IBEX-35 en nuestro caso. Analizamos dicho índice a través del siguiente gráfico (Plot 21).

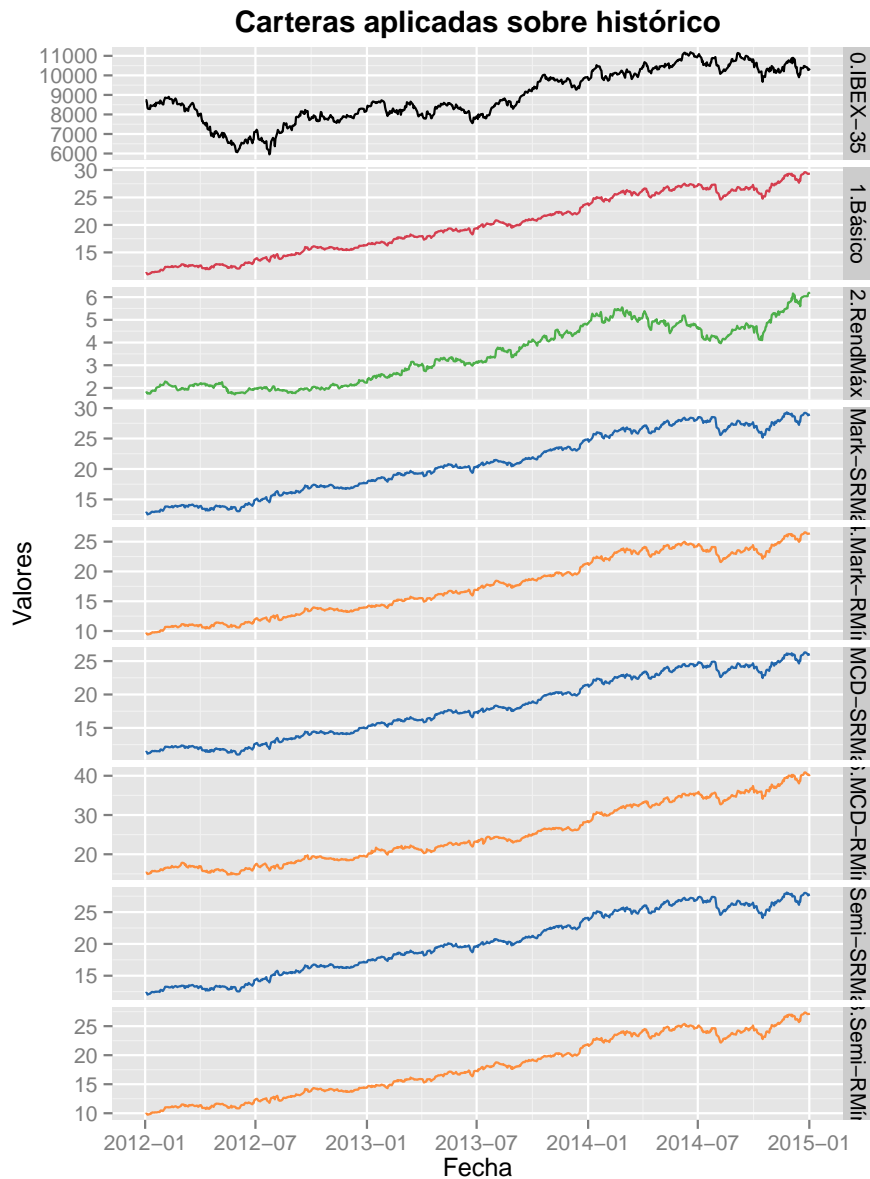


Plot 21: Serie IBEX-35

Observamos una tendencia bajista en el periodo referido a enero-julio de 2012 correspondiente a la crisis del sector financiero español con una recuperación desde entonces hasta el momento actual, más destacado a partir de julio de 2013. La volatilidad de la serie es bastante pronunciada.

Veamos lo que ocurre en relación con las carteras calculadas sobre las carteras de

precios.

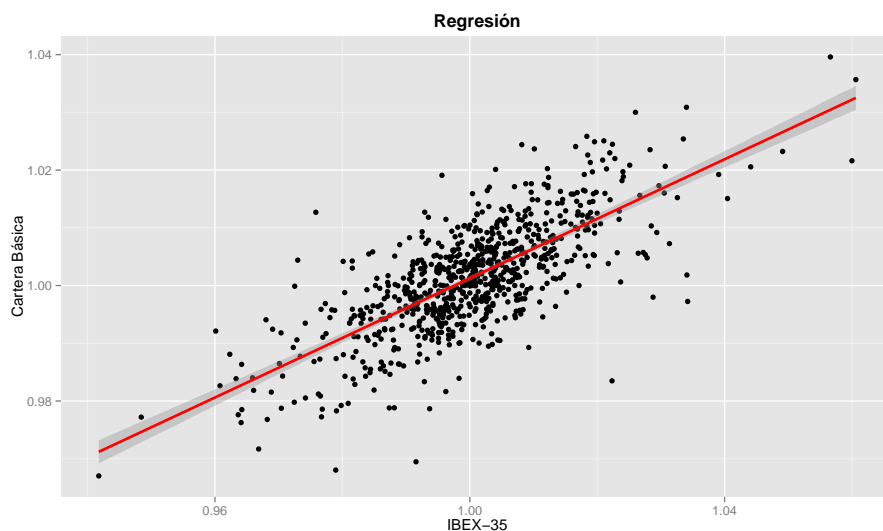


Plot 22: Carteras aplicadas sobre histórico de precios

En primer lugar se ve que con cada una de las carteras se obtiene una ganancia a final del período lo cual es un resultado positivo. El crecimiento de cada serie se

ha de ver de forma proporcional al precio inicial, puesto que las escalas de precio son diferentes en cada caso. En relación al índice IBEX-35, cuantos menos activos formen la cartera, más similar será el comportamiento entre ambas. Por ejemplo, el caso de la segunda cartera es claro. Además la variabilidad del índice es mucho mayor al de cualquiera de las carteras, lo cual también es un dato positivo.

A continuación estudiamos la relación entre las carteras y el índice, analizando el valor del rendimiento diario de cada una de ellas al aumentar el IBEX-35 en 1 unidad, véase el coeficiente β de la relación lineal entre la serie de retornos de nuestra cartera y la serie de retornos nominales del índice. Esta regresión lineal fue definida por Sharpe como *modelo de mercado* y a la recta de ajuste resultante se le denomina *línea característica del título*. Veamos entonces a continuación un ejemplo con la cartera básica.



Plot 23: Regresión lineal entre la serie de retornos de la Cartera Básica e IBEX-35

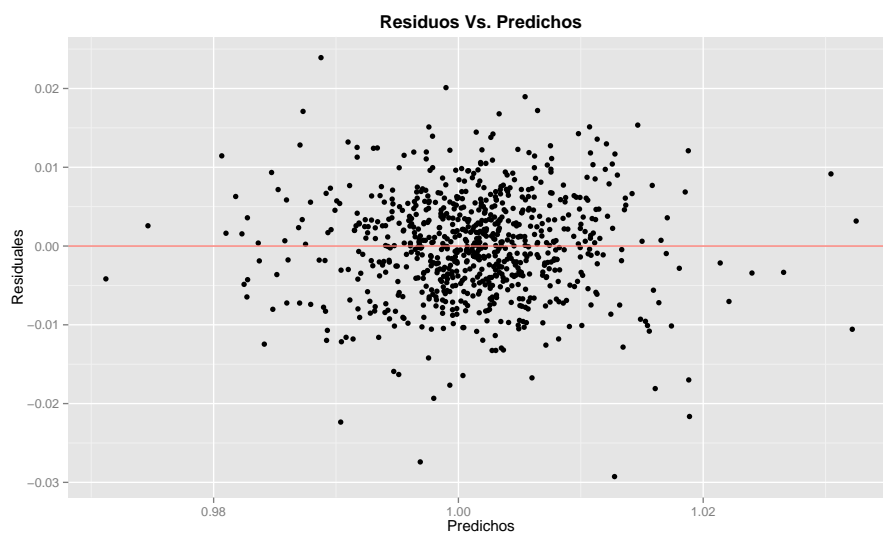
La regresión recoge la relación lineal entre la serie de retornos de la cartera básica y la serie de retornos del IBEX-35. La línea roja es la recta de ajuste, es decir la línea característica de mercado. Específicamente, se aplica la regresión simple a través de la estimación por mínimos cuadrados con la función $lm()$. Los resultados numéricos se detallan en la Tabla 3.

En la tabla superior se muestran los resultados del ajuste lineal de la primera cartera con el IBEX-35. Estos resultados muestran el rechazo de la falta de linealidad

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.4854	0.0170	28.58	0.0000
IBEX	0.5158	0.0170	30.38	0.0000

Tabla 3: Resultados del ajuste lineal: Cartera Básica Vs. IBEX-35

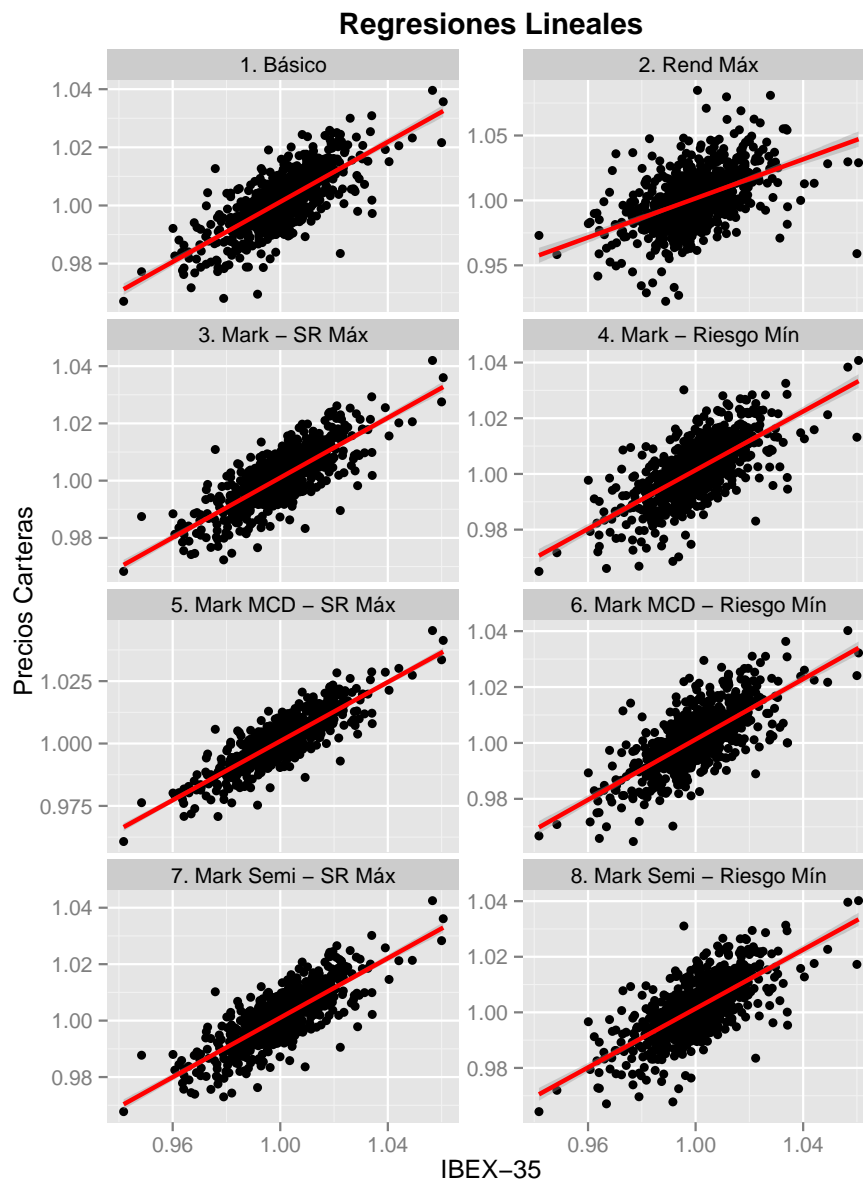
del ajuste (F -statistic: 922.9 ; $df=1, 782$; p -valor $< 2.2e-16$). Además la variabilidad explicada por la variable X, la cartera básica en este caso, es $R^2 = 0.5407$. Mostramos el plot de residuales frente a valores predichos:



Plot 24: Residuos Vs. Predichos Regresión Lineal entre Cartera Básica e IBEX-35

Como vemos se trata de un plot nulo, luego no existen indicios a favor de la heterocedasticidad de los residuales y se cumple entonces la hipótesis de homocedasticidad de la regresión lineal.

Ajustamos el resto de carteras para obtener todos los β . Las tablas resultantes se muestran en el anexo (Tablas 14 a 20). Los ajustes son los siguientes:



Plot 25: Regresiones Lineales de las carteras con el índice IBEX-35

La Tabla 4 que se muestra a continuación contiene los resultados de los α y β ajustados. La Tabla 5, el riesgo específico, calculado como la variabilidad de la serie de la cartera menos el β al cuadrado multiplicado por la variabilidad del mercado.

	(Intercept)	IBEX
1. Básico	0.48541	0.51583
2. Rend Máx	0.24913	0.75246
3. Mark - SR Máx	0.47814	0.52290
4. Mark - Riesgo Mín	0.47402	0.52735
5. Mark MCD - SR Máx	0.40963	0.59133
6. Mark MCD - Riesgo Mín	0.46119	0.54008
7. Mark Semi - SR Máx	0.47429	0.52674
8. Mark Semi - Riesgo Mín	0.47155	0.52980

Tabla 4: Coeficientes resultantes de los 8 ajustes lineales

	Riesgo Específico
1. Básico	0.00004225
2. Rend Máx	0.00034893
3. Mark - SR Máx	0.00003374
4. Mark - Riesgo Mín	0.00006078
5. Mark MCD - SR Máx	0.00002594
6. Mark MCD - Riesgo Mín	0.00005321
7. Mark Semi - SR Máx	0.00003328
8. Mark Semi - Riesgo Mín	0.00005619

Tabla 5: Riesgos Específicos de cada cartera

De esta forma la mayor volatilidad específica es la de aquella formada por un solo activo, es decir la de Rendimiento Máximo. Este suceso ocurre porque no se está diversificando el riesgo. Asimismo la serie 5 correspondiente a la cartera del Ratio de Sharpe Máximo (MCD) tiene el menor riesgo específico. Dado que el inversor trata de cubrirse sólo del riesgo específico, ésta es la cartera más aconsejable de inversión. Por otro lado la serie 7, que se veía cómo mejor situada en el Plot 20 en cuanto a bajo riesgo y buen rendimiento, tendría un riesgo específico bajo-medio, muy similar al de la tercera cartera.

Como vemos el riesgo específico nos sirve para dar un ranking de las mejores carteras en cuánto a volatilidad se refiere.

5 Justificación de las herramientas utilizadas

Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar que R es un entorno interesante para resolver problemas de optimización, especialmente cuando también hay análisis de datos. Se buscaba además una herramienta que integrase todos los complementos necesarios para la obtención de datos, tratamiento, análisis, optimización, visualización y exposición de resultados. Las alternativas y justificación de escoger R en cada punto se detallan en los siguientes subapartados. Algunas de las librerías y técnicas que se utilizan fueron descubiertas en el MOOC (Massive Open Online Course) *Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics* de la University of Washington, que se realizó durante 10 semanas en la plataforma Coursera⁸.

5.1 Obtención de datos

Existen diferentes procedimientos posibles para la obtención de las cotizaciones. La más sencilla, por descarga directa de páginas web en hojas de cálculo tradicionales. Por este método se tardó 10h aproximadamente en la obtención de las 784 observaciones por cada una de las 35 empresas (sin contar el tiempo empleado en encontrar la página adecuada de descarga). Así es que se optó por encontrar un método que permitiese la descarga directa. En R, a través de la función *gethistquote()* de la librería *tseries* se da la opción de automatizar el proceso, con la ventaja de poder modificar diferentes parámetros, como fechas, símbolos, etc y obtener valores a tiempo real. De esta forma, el tiempo de descarga se reduce de horas a segundos. También existía la opción desde R de conectarse directamente a una URL y obtener el contenido de cualquier tabla, incluso de acceder a enlaces de la misma, con las librerías *XML* o *RCurl*. No obstante la alternativa que finalmente se empleó era más específica para la materia que concierne a este estudio.

5.2 Visualización

Para la visualización gráfica de los objetos, en su mayoría data frames de series temporales (objetos tipo *zoo* en R), combinados con variables tipo *factor* se eligió la librería *ggplot2* que dispone diferentes capas o *layers* en las cuales se representa cada conjunto de elementos diferente a plotear. Como cualquier otro software avanzado de estadística, permite al usuario la modificación de tipo de gráfico, colores, leyendas, etc.

⁸<https://es.coursera.org/> y Zivot (2015)

5.3 Optimización

Existen otros programas específicos de Investigación Operativa como los solvers CPLEX de AMPL, XPRESS, GAMS o LINGO. R no fue diseñado para la optimización de funciones, y por tanto la idea inicial era la de no utilizarlo en este punto. Sin embargo, al tratarse de una optimización cuadrática se podía seguir integrando todo el trabajo en R, sin necesidad de exportar datos e importar resultados. Se tienen librerías específicas como *Portfolio* o *PerformanceAnalytics*⁹. Se optó por la segunda para tener el margen de modificar la computación de los riesgos. Así quedaría todo el análisis integrado quedando tan sólo por resolver la generación automática del informe.

5.4 Generación del informe

El trabajo se quería realizar con L^AT_EX lo cual era posible a través de compiladores como MikTeX por ejemplo. Pero el anidar los análisis estadísticos en la elaboración del informe de forma automática era una idea que facilitaría los cambios que se podían producir a lo largo del estudio. Se optó por tanto por la herramienta *RSweave* de R, que integra código L^AT_EX con código R, y permite generar informes automáticos.

⁹Para consultar todas las disponibles visitar: <http://cran.r-project.org/web/views/Optimization.html>

6 Conclusiones

Se han considerado varios métodos para estudiar el riesgo de las carteras. Cada uno de esos métodos ofrece alternativas diferentes de análisis. Asimismo se ha visto como el análisis dinámico es muy importante a la hora de tomar decisiones de inversión, puesto que el intervalo temporal que se escoja va a influir en gran medida en los resultados. En nuestro caso con una ventana de 6 meses, se veía que las variaciones puntuales en 2012 son mucho mayores que las que se producen respecto a los años posteriores.

El método de estimación robusta MCD corrige la posición de las carteras eficientes y de las empresas en ellas en el plot del Riesgo frente al Rendimiento. Esta técnica consigue reducir el riesgo pero también el rendimiento, haciendo ambos más realistas.

Se ha comprobado que el método de la semivarianza proporciona un riesgo menor en nuestra cartera, aunque se ha de tener en cuenta que sólo se está considerando la variación negativa de la cartera, es decir que de alguna manera se está restringiendo la información.

Por último, cabe destacar que con cualquier otro software, se habría podido realizar cada tarea por separado, incluso con herramientas más específicas. Sin embargo la integración absoluta de todas ellas en una ha facilitado la generación del informe y se ha conseguido evitar la utilización de software de ofimática. Esto hace que se reduzcan los tiempos de ejecución, consiguiendo un análisis reproducible y automático, tan relevante en nuestros días.

7 Futuras aplicaciones

La optimización de carteras no sólo es aplicable en mercados bursátiles. La idea es extensible a otro tipo de mercados como el de las materias primas, divisas o materiales preciosos. Los parámetros a tener en cuenta en cada caso, como la amplitud temporal de análisis histórico, los movimientos de cada serie o las tendencias de las mismas, se tratan de manera diferente según se trate de una materia u otra, sin embargo la metodología aquí empleada sería totalmente extrapolable.

Como ejemplo externo al mundo de las finanzas, tenemos el campo de la alimentación. El análisis de carteras sirve para la optimización de componentes alimenticios. Se necesitan fijar unos valores mínimos de proteínas, calcio, vitaminas etc, que en materia económica entenderíamos por fijar unas rentabilidades mínimas, y se trata de minimizar el coste del producto final. Dicho coste variaría periódicamente en función de las rutas de transporte, almacenamiento o modificaciones de los precios en el mercado del ganado.

Desde el punto de vista de la optimización y las finanzas se puede extender el trabajo a la definición de rendimiento, adjudicando pesos mayores a datos más recientes (ver Vanderbei, R.J. (1997), páginas 373-374). Además desde el punto de vista estadístico cabe la posibilidad de realizar un análisis de series temporales de las carteras y comparar predicciones con datos reales. Es decir, analizar el comportamiento futuro de las carteras (ver Martín Sánchez, I. (2013)).

Por último, se propone la explotación de una aplicación sobre optimización dinámica, que permita a cada usuario realizar sus propias consultas sobre la inversión, aplicando los modelos analizados en este trabajo y dando la opción de elección del mismo. Esto sería directo de implementar a través de la librería *Shiny*¹⁰ perteneciente a *RStudio* que permite la implementación de aplicaciones web basadas en gráficos de *R*. La aplicación podría ser publicada en la red y explicitada económicamente, obteniendo un producto comercial abierto al público, a través de un servidor o bien directamente en la web *Ver shinyapps.io*.

¹⁰Ver <http://shiny.rstudio.com/>

Bibliografía

- [1] Cornuejols, G., Tfutfuncfu, R. (2005). Optimization Methods in Finance, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA
- [2] Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. The Journal of Finance 7, 77-91.
- [3] Markowitz, H. (1999) The Early History of Portfolio Theory: 1600 - 1960. Financial Analysis Journal, 55, 5 - 16.
- [4] Martín Sánchez, I. (2013). Optimización de Carteras de Inversión. TFG Grado en Estadística. Universidad de Valladolid.
- [5] Pfaff, B. (2013). Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R. Wiley, West Sussex UK.
- [6] Plantinga, A., Van der Meer, R. and Sortino, F. (2001). The impact of the Downside Risk on risk-adjusted performance of mutual funds in the Euronext markets.
- [7] Rousseeuw, P.J. and Van Driessen, K. (1999). A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator. Technometrics, 41, 212-223. Journal of the American Statistical Association, 94(446): 434-445.
- [8] Schrage, L. (2006). Optimization Modeling with LINGO. Lindo Systems Ins. Chicago, Illinois, USA.
- [9] Vanderbei, R.J. (1997) Linear Programming Foundations and Extensions. Kluwer A.P., Boston, USA.
- [10] Zivot, E. (2015). Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics. University of Washington, USA. Coursera.

Índice de Figuras

1	Series de precios de las 35 empresas del IBEX	11
2	Serie de retornos de BKIA.	14
3	Box-plots de las series de retornos	14
4	Plot de correlaciones entre series de retornos	16
5	Portfolio óptimo de Mínima Varianza para $k=1.0014$	18
6	Portfolio óptimo de Mínima Varianza modificando rendimiento mínimo	19
7	Variación de los riesgos según el cambio de rendimientos	20
8	Portfolios óptimos de Markowitz Clásico	21
9	Frontera eficiente de Markowitz	22
10	PCA sobre series de retornos: No Robusto Vs. Robusto	24
11	Portfolios óptimos de Markowitz con MCD	25
12	Frontera eficiente de Markowitz con MCD	26
13	Riesgos de carteras notables con estimación robusta y no robusta . .	27
14	Rendimientos de carteras notables con estimación robusta y no robusta	28
15	Portfolios óptimos de Markowitz con Semivarianzas	29
16	Frontera eficiente de Markowitz - Semivarianza	30
17	Frontera Eficiente Dinámica	31
18	Frontera Eficiente Dinámica - Rolling 6 meses	32
19	Carteras aplicadas sobre histórico de retornos	34
20	Comparación de carteras	35
21	Serie IBEX-35	36
22	Carteras aplicadas sobre histórico de precios	37
23	Regresión lineal entre la serie de retornos de la Cartera Básica e IBEX-35	38
24	Residuos Vs. Predichos Regresión Lineal entre Cartera Básica e IBEX-35	39
25	Regresiones Lineales de las carteras con el índice IBEX-35	40

Índice de Tablas

1	Rendimientos y riesgos esperados de cada activo	13
2	Rentabilidades y Riesgos de las carteras más relevantes	36
3	Resultados del ajuste lineal: Cartera Básica Vs. IBEX-35	39
4	Coefficientes resultantes de los 8 ajustes lineales	41
5	Riesgos Específicos de cada cartera	41
6	Símbolos y nombres de cada activo del IBEX-35 (mayo 2015)	50
7	Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas I	51
8	Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas II	52
9	Frontera Eficiente - Modelo Markowitz	53
10	Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas mediante estimación robusta - MCD I	54
11	Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas mediante estimación robusta - MCD II	55
12	Frontera Eficiente - Modelo Markowitz - MCD	56
13	Frontera Eficiente - Modelo Markowitz - Semivarianza	57
14	Resultados del ajuste lineal: Cartera Rendimiento Máximo Vs. IBEX-35	58
15	Resultados del ajuste lineal: Cartera Markowitz - SR Máx Vs. IBEX-35	58
16	Resultados del ajuste lineal: Cartera Markowitz - Riesgo Mín Vs. IBEX-35	58
17	Resultados del ajuste lineal: Cartera MCD - SR Máx Vs. IBEX-35 .	59
18	Resultados del ajuste lineal: Cartera MCD - Riesgo Mín Vs. IBEX-35	59
19	Resultados del ajuste lineal: Cartera Semivarianza - SR Máx Vs. IBEX-35	59
20	Resultados del ajuste lineal: Cartera Semivarianza - Riesgo Mín Vs. IBEX-35	59

Anexo: Tablas

	sim	nombre
1	ABE	Abertis Infraestructuras S.A.
2	ABG.P	ABENGOA
3	ACS	Actividades de Construcción y Servicios, S.A.
4	AMS	Amadeus IT Holding SA
5	ANA	Acciona, S.A.
6	BBVA	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria, S.A.
7	BKIA	BANKIA S.A.
8	BKT	Bankinter, S.A.
9	BME	Bolsas y Mercados Españoles
10	CABK	CAIXABANK
11	DIA	Distribuidora Internacional de Alimentación S.A.
12	ELE	Endesa Corporación Tecnológica S.A.
13	ENG	ENAGAS
14	FCC	Fomento de Construcciones y Contratas
15	FER	Ferrovial
16	GAM	GAMESA
17	GAS	Gas Natural SDG S.A.
18	GRF	Grifols, S.A.
19	IAG	INTL. CONS. AIR GRP
20	IBE	Iberdrola, S.A.
21	IDR	Indra Sistemas, S.A.
22	ITX	Industria de Diseno Textil SA
23	JAZ	Jazztel PLC
24	MAP	Mapfre S.A.
25	MTS	ArcelorMittal SA
26	OHL	Obrascon Huarte Lain S.A.
27	POP	Banco Popular Espanol S.A.
28	REE	Red Eléctrica Corporación S.A.
29	REP	Repsol, S.A.
30	SAB	Banco de Sabadell, S.A.
31	SAN	Banco Santander, S.A.
32	SCYR	SACYR
33	TEF	Telefónica S.A.
34	TL5	Mediaset España Comunicación, S.A.
35	TRE	Tecnicas Reunidas, S.A.

Tabla 6: Símbolos y nombres de cada activo del IBEX-35 (mayo 2015)

	ABE	ABG.P	ACS	AMS	ANA	BBVA	BKIA	BKT	BME	CABK	DIA	ELE	ENG	FCC	FER	GAM	GAS
ABE1.000	0.340	0.560	0.424	0.486	0.599	0.138	0.483	0.461	0.513	0.468	0.427	0.500	0.471	0.600	0.479	0.573	
ABG.P.0.340	1.000	0.395	0.262	0.399	0.386	0.093	0.333	0.272	0.354	0.283	0.265	0.267	0.320	0.380	0.368	0.305	
ACS.0.560	0.395	1.000	0.308	0.540	0.619	0.133	0.491	0.432	0.501	0.389	0.469	0.423	0.559	0.556	0.529	0.539	
AMS.0.424	0.262	0.308	1.000	0.271	0.350	0.073	0.261	0.284	0.245	0.338	0.247	0.277	0.303	0.384	0.302	0.315	
ANA.0.486	0.399	0.540	0.271	1.000	0.567	0.128	0.433	0.361	0.467	0.362	0.471	0.399	0.499	0.519	0.408	0.556	
BBVA.0.599	0.386	0.619	0.350	0.567	1.000	0.168	0.639	0.521	0.695	0.410	0.586	0.462	0.539	0.599	0.572	0.649	
BKIA.0.138	0.093	0.133	0.073	0.128	0.168	1.000	0.179	0.117	0.159	0.075	0.120	0.083	0.125	0.087	0.117	0.135	
BKT.0.483	0.333	0.491	0.261	0.433	0.639	0.179	1.000	0.403	0.548	0.334	0.449	0.364	0.445	0.487	0.524	0.455	
BME.0.461	0.272	0.432	0.284	0.361	0.521	0.117	0.403	1.000	0.408	0.336	0.325	0.387	0.423	0.395	0.394		
CABK.0.513	0.354	0.501	0.245	0.467	0.695	0.159	0.548	0.408	1.000	0.354	0.398	0.349	0.426	0.486	0.482	0.513	
DIA.0.468	0.283	0.389	0.338	0.362	0.410	0.075	0.334	0.336	0.354	1.000	0.323	0.348	0.286	0.418	0.322	0.379	
ELE.0.427	0.265	0.469	0.247	0.471	0.586	0.120	0.449	0.366	0.462	0.286	1.000	0.433	0.405	0.419	0.400	0.578	
ENG.0.500	0.267	0.423	0.277	0.399	0.462	0.083	0.364	0.325	0.349	0.348	0.433	1.000	0.349	0.428	0.313	0.569	
FCC.0.471	0.320	0.559	0.303	0.499	0.539	0.125	0.445	0.387	0.423	0.405	0.349	1.000	0.492	0.464	0.491		
FER.0.600	0.380	0.556	0.384	0.519	0.599	0.087	0.487	0.423	0.486	0.418	0.428	0.492	1.000	0.486	0.545		
GAM.0.479	0.368	0.529	0.302	0.408	0.572	0.117	0.524	0.395	0.482	0.322	0.400	0.313	0.464	0.486	1.000	0.457	
GAS.0.573	0.305	0.539	0.315	0.556	0.649	0.135	0.455	0.394	0.513	0.379	0.578	0.569	0.491	0.545	0.457	1.000	
GRF.0.409	0.217	0.239	0.307	0.268	0.321	0.049	0.301	0.222	0.283	0.326	0.234	0.268	0.179	0.405	0.309	0.282	
IAG.0.408	0.256	0.353	0.289	0.318	0.442	0.078	0.337	0.322	0.352	0.338	0.269	0.293	0.306	0.363	0.375	0.328	
IBE.0.575	0.336	0.638	0.314	0.582	0.784	0.151	0.535	0.438	0.545	0.379	0.639	0.526	0.536	0.563	0.522	0.725	
IDR.0.424	0.352	0.429	0.287	0.411	0.485	0.094	0.362	0.330	0.406	0.302	0.368	0.272	0.410	0.411	0.342	0.404	
ITX.0.458	0.248	0.349	0.353	0.354	0.483	0.092	0.346	0.316	0.339	0.393	0.305	0.335	0.317	0.457	0.312	0.370	
JAZ.0.347	0.201	0.280	0.217	0.212	0.370	-0.021	0.279	0.313	0.308	0.209	0.320	0.230	0.247	0.302	0.305	0.295	
MAP.0.591	0.337	0.595	0.319	0.457	0.691	0.131	0.548	0.460	0.529	0.433	0.486	0.410	0.490	0.556	0.549	0.561	
MTS.0.462	0.354	0.460	0.300	0.470	0.589	0.072	0.401	0.358	0.439	0.357	0.384	0.333	0.448	0.461	0.394	0.489	
OHL.0.596	0.358	0.530	0.337	0.474	0.612	0.109	0.434	0.430	0.491	0.379	0.467	0.427	0.480	0.553	0.496	0.549	
POP.0.447	0.322	0.488	0.238	0.435	0.632	0.152	0.555	0.387	0.663	0.340	0.419	0.314	0.463	0.446	0.498	0.478	
REE.0.492	0.259	0.447	0.281	0.484	0.493	0.093	0.382	0.415	0.436	0.352	0.481	0.577	0.377	0.450	0.358	0.545	
REP.0.525	0.331	0.544	0.305	0.506	0.712	0.136	0.483	0.455	0.500	0.423	0.527	0.445	0.484	0.532	0.484	0.632	
SAB.0.472	0.345	0.496	0.246	0.508	0.615	0.162	0.526	0.335	0.665	0.299	0.368	0.324	0.440	0.481	0.486	0.430	
SAN.0.604	0.382	0.636	0.352	0.590	0.941	0.159	0.633	0.506	0.702	0.419	0.580	0.466	0.546	0.612	0.568	0.660	
SCYR.0.443	0.442	0.543	0.291	0.498	0.575	0.128	0.481	0.426	0.462	0.352	0.412	0.312	0.473	0.495	0.549	0.464	
TEF.0.590	0.334	0.597	0.367	0.553	0.808	0.150	0.536	0.471	0.568	0.407	0.562	0.473	0.533	0.598	0.518	0.663	
TL5.0.442	0.362	0.449	0.308	0.418	0.538	0.130	0.479	0.367	0.403	0.345	0.417	0.356	0.395	0.446	0.440	0.426	
TRE.0.446	0.331	0.415	0.326	0.385	0.468	0.061	0.341	0.362	0.370	0.370	0.321	0.313	0.363	0.470	0.387	0.390	

Tabla 7: Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas I

	GRF	IAG	IBE	IDR	ITX	JAZ	MAP	MTS	OHL	POP	REE	REP	SAB	SAN	SCYR	TEF	TL5	TRE
ABE	0.409	0.408	0.575	0.424	0.458	0.347	0.591	0.462	0.596	0.447	0.492	0.525	0.472	0.604	0.443	0.590	0.442	0.446
ABG	0.217	0.256	0.336	0.352	0.248	0.201	0.337	0.354	0.358	0.322	0.259	0.331	0.345	0.382	0.442	0.334	0.362	0.331
ACS	0.239	0.353	0.638	0.429	0.349	0.280	0.595	0.460	0.530	0.488	0.447	0.544	0.496	0.636	0.543	0.597	0.449	0.415
AMS	0.307	0.289	0.314	0.287	0.353	0.217	0.319	0.300	0.337	0.238	0.281	0.305	0.246	0.352	0.291	0.367	0.308	0.326
ANA	0.268	0.318	0.582	0.411	0.354	0.212	0.457	0.470	0.474	0.435	0.484	0.506	0.508	0.590	0.498	0.553	0.418	0.385
BBVA	0.321	0.442	0.784	0.485	0.483	0.370	0.691	0.589	0.612	0.632	0.493	0.712	0.615	0.941	0.575	0.808	0.538	0.468
BKIA	0.049	0.078	0.151	0.094	0.092	-0.021	0.131	0.072	0.109	0.152	0.093	0.136	0.162	0.159	0.128	0.150	0.130	0.061
BKT	0.301	0.337	0.535	0.362	0.346	0.279	0.548	0.401	0.434	0.555	0.382	0.483	0.526	0.633	0.481	0.536	0.479	0.341
BME	0.222	0.322	0.438	0.330	0.316	0.313	0.460	0.358	0.430	0.387	0.415	0.455	0.335	0.506	0.426	0.471	0.367	0.362
CABK	0.283	0.352	0.545	0.406	0.339	0.308	0.529	0.439	0.491	0.663	0.436	0.500	0.665	0.702	0.462	0.568	0.403	0.370
DIA	0.326	0.338	0.379	0.302	0.393	0.209	0.433	0.357	0.379	0.340	0.352	0.423	0.299	0.419	0.352	0.407	0.345	0.370
ELE	0.234	0.269	0.639	0.368	0.305	0.320	0.486	0.384	0.467	0.419	0.481	0.527	0.368	0.580	0.412	0.562	0.417	0.321
ENG	0.268	0.293	0.526	0.272	0.335	0.230	0.410	0.333	0.427	0.314	0.577	0.445	0.324	0.466	0.312	0.473	0.356	0.313
FCC	0.179	0.306	0.536	0.410	0.317	0.247	0.490	0.448	0.480	0.463	0.377	0.484	0.440	0.546	0.473	0.533	0.395	0.363
FER	0.405	0.363	0.563	0.411	0.457	0.302	0.556	0.461	0.553	0.446	0.450	0.532	0.481	0.612	0.495	0.598	0.446	0.470
GAM	0.309	0.375	0.522	0.342	0.312	0.305	0.549	0.394	0.496	0.498	0.358	0.484	0.486	0.568	0.549	0.518	0.440	0.387
GAS	0.282	0.328	0.725	0.404	0.370	0.295	0.561	0.489	0.549	0.478	0.545	0.632	0.430	0.660	0.464	0.663	0.426	0.390
GRF	1.000	0.276	0.243	0.210	0.328	0.179	0.273	0.233	0.346	0.253	0.298	0.205	0.298	0.329	0.281	0.263	0.271	0.254
IAG	0.276	1.000	0.359	0.235	0.324	0.203	0.367	0.381	0.394	0.352	0.289	0.260	0.310	0.430	0.329	0.389	0.363	0.271
IBE	0.243	0.359	1.000	0.451	0.440	0.295	0.661	0.508	0.566	0.518	0.536	0.729	0.489	0.806	0.527	0.836	0.467	0.414
IDR	0.210	0.235	0.451	1.000	0.262	0.221	0.444	0.429	0.423	0.424	0.277	0.433	0.361	0.497	0.404	0.454	0.381	0.383
ITX	0.328	0.324	0.440	0.262	1.000	0.238	0.405	0.385	0.396	0.322	0.342	0.457	0.329	0.499	0.328	0.477	0.337	0.369
JAZ	0.179	0.203	0.295	0.221	0.238	1.000	0.303	0.259	0.325	0.243	0.266	0.318	0.203	0.359	0.269	0.324	0.295	0.244
MAP	0.273	0.367	0.661	0.444	0.405	0.303	1.000	0.448	0.565	0.510	0.408	0.623	0.486	0.694	0.489	0.645	0.487	0.435
MTS	0.233	0.381	0.508	0.429	0.385	0.259	0.448	1.000	0.481	0.409	0.337	0.500	0.380	0.587	0.415	0.531	0.412	0.465
OHL	0.346	0.394	0.566	0.423	0.396	0.325	0.565	0.481	1.000	0.441	0.445	0.515	0.435	0.609	0.485	0.591	0.413	0.491
POP	0.253	0.352	0.518	0.424	0.322	0.243	0.510	0.409	0.441	1.000	0.376	0.469	0.655	0.621	0.450	0.546	0.353	0.312
REE	0.298	0.289	0.536	0.277	0.342	0.266	0.408	0.337	0.445	0.376	1.000	0.450	0.357	0.506	0.368	0.508	0.343	0.353
REP	0.205	0.260	0.729	0.433	0.457	0.318	0.623	0.500	0.515	0.469	0.450	1.000	0.420	0.715	0.554	0.731	0.470	0.410
SAB	0.298	0.310	0.489	0.361	0.329	0.203	0.486	0.380	0.435	0.655	0.357	0.420	1.000	0.614	0.432	0.505	0.411	0.330
SAN	0.329	0.430	0.806	0.497	0.499	0.359	0.694	0.587	0.609	0.621	0.506	0.715	0.614	1.000	0.571	0.824	0.542	0.482
SCYR	0.281	0.329	0.527	0.404	0.328	0.269	0.489	0.415	0.485	0.450	0.368	0.554	0.432	0.571	1.000	0.516	0.425	0.391
TEF	0.263	0.389	0.836	0.454	0.477	0.324	0.645	0.531	0.591	0.546	0.508	0.731	0.505	0.824	0.516	1.000	0.478	0.429
TL5	0.271	0.363	0.467	0.381	0.337	0.295	0.487	0.412	0.413	0.353	0.343	0.470	0.411	0.542	0.425	0.478	1.000	0.383
TRE	0.254	0.271	0.414	0.383	0.369	0.244	0.435	0.465	0.491	0.312	0.353	0.410	0.330	0.482	0.391	0.429	0.383	1.000

Tabla 8: Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas II

	μ	AMS	BME	DIA	ELE	ENG	FER	GRF	IAG	ITX	JAZ	REE	TRE	Rend	Riesgo	SR	
1	0.01	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.100182	0.000455046	0.053359	
2	0.5	0	0	0	0.151	0	0	0	0.798	0	0.051	0	0	0.100181	0.000380418	0.05814	
3	1	0	0	0.0831	0	0	0	0	0.592	0	0.325	0	0	0.100177	0.00026426	0.06738	
4	2	0	0	0.0492	0	0	0	0	0.489	0	0.461	0	0	0.100176	0.000235221	0.07022	
5	30.182	0	0	0.0265	0	0	0	0	0.38	0	0.412	0	0	0.100168	0.000178821	0.07522	
6	40.272	0	0	0.0123	0	0	0.0372	0.309	0	0	0.369	0	0	0.100163	0.000150131	0.07797	
7	50.309	0	0	0	0	0	0.0674	0.261	0	0	0.336	0.0269	0	0	0.10016	0.000132948	0.0796
8	80.347	0	0	0	0	0	0	0.1	0.178	0	0.27	0.104	0	0.100153	0.000112897	0.08057	
9	100.354	0	0	0	0	0	0	0.108	0.149	0.016	0.247	0.126	0	0.100151	0.000107518	0.08024	
10	12	0.35	0	0	0.0362	0	0	0.109	0.126	0.0312	0.227	0.121	0	0.100148	0.000102189	0.07941	
11	140.346	0	0	0.0669	0	0.0669	0	0.11	0.109	0.0415	0.213	0.114	0	0.100146	0.0000987229	0.07834	
12	150.344	0	0	0.0792	0	0.0792	0	0.11	0.103	0.0456	0.207	0.112	0	0.100145	0.0000974862	0.07803	
13	200.338	0	0	0	0	0.122	0	0.11	0.0792	0.06	0.187	0.103	0	0.100142	0.0000938293	0.0765	
14	250.333	0.00981	0	0	0.147	0	0	0.11	0.0642	0.0674	0.173	0.0957	0	0.10014	0.0000917547	0.07482	
15	300.328	0.0268	0	0	0.162	0	0	0.11	0.053	0.0711	0.162	0.0876	0	0.100138	0.0000902583	0.07329	
16	40	0.32	0.0476	0	0	0.181	0	0.109	0.0389	0.0753	0.148	0.0773	0.00241	0.100135	0.0000886872	0.07116	
17	500.312	0.0564	0	0	0.19	0.00432	0.107	0.0296	0.0739	0.138	0.0684	0	0.021	0.100132	0.0000873761	0.06847	
18	75	0.3	0.0677	0	0	0.201	0.0132	0.103	0.0171	0.0716	0.125	0.0563	0.0453	0.100128	0.0000860657	0.06496	
19	1000.294	0.0733	0.00113	0	0.206	0.0176	0.102	0.0107	0.0703	0.118	0.0502	0.0573	0.0573	0.100126	0.0000855993	0.06297	
20	10000.274	0.0861	0.015	0	0.219	0.0268	0.0949	0	0.064	0.0993	0.0328	0.0879	0.0879	0.100121	0.0000849909	0.05716	
21	100000.272	0.0872	0.0162	0	0.22	0.0276	0.0941	0.0633	0.0974	0.031	0.0909	0.0909	0.0909	0.10012	0.0000849859	0.05667	
22	1000000.272	0.0874	0.0164	0	0.22	0.0277	0.0941	0.0632	0.0972	0.0308	0.0912	0.0912	0.0912	0.10012	0.0000849864	0.05695	

Tabla 9: Frontera Eficiente - Modelo Markowitz

	ABE	ABG.P	ACS	AMS	ANA	BBVA	BKIA	BKT	BME	CABK	DIA	ELE	ENG	FCC	FER	GAM	GAS
ABE 1.000	0.352	0.558	0.450	0.447	0.576	0.348	0.507	0.448	0.550	0.462	0.393	0.470	0.371	0.610	0.438	0.533	
ABG.P 0.352	1.000	0.427	0.264	0.351	0.405	0.279	0.422	0.288	0.421	0.287	0.261	0.259	0.371	0.398	0.404	0.265	
ACS 0.558	0.427	1.000	0.384	0.565	0.663	0.406	0.551	0.477	0.567	0.452	0.509	0.450	0.487	0.626	0.512	0.536	
AMS 0.450	0.264	0.384	1.000	0.286	0.369	0.205	0.273	0.314	0.295	0.368	0.286	0.288	0.287	0.416	0.326	0.287	
ANA 0.447	0.351	0.565	0.286	1.000	0.514	0.365	0.407	0.361	0.481	0.352	0.432	0.380	0.381	0.463	0.442	0.455	
BBVA 0.576	0.405	0.663	0.369	0.514	1.000	0.446	0.667	0.511	0.737	0.445	0.538	0.410	0.440	0.614	0.559	0.562	
BKIA 0.348	0.279	0.406	0.205	0.365	0.446	1.000	0.446	0.296	0.674	0.384	0.439	0.344	0.389	0.515	0.558	0.485	
BKT 0.507	0.422	0.551	0.273	0.407	0.667	0.446	1.000	0.420	0.452	0.364	0.439	0.364	0.419	0.390	0.546		
BME 0.448	0.288	0.477	0.314	0.361	0.511	0.296	0.420	1.000	0.283	0.334	0.439	0.364	0.419	0.390	0.546		
CABK 0.550	0.421	0.567	0.295	0.481	0.737	0.511	0.674	0.452	1.000	0.438	0.430	0.353	0.414	0.527	0.537	0.507	
DIA 0.462	0.287	0.452	0.368	0.352	0.445	0.264	0.384	0.364	0.438	1.000	0.339	0.365	0.268	0.424	0.355	0.416	
ELE 0.393	0.261	0.509	0.286	0.432	0.538	0.283	0.439	0.334	0.430	0.339	1.000	0.479	0.364	0.419	0.390	0.546	
ENG 0.470	0.259	0.450	0.288	0.380	0.410	0.230	0.344	0.283	0.353	0.365	0.479	1.000	0.276	0.429	0.349	0.585	
FCC 0.371	0.371	0.487	0.287	0.381	0.440	0.287	0.389	0.372	0.414	0.268	0.364	0.276	1.000	0.449	0.390	0.404	
FER 0.610	0.398	0.626	0.416	0.463	0.614	0.345	0.515	0.428	0.527	0.424	0.419	0.429	0.449	1.000	0.515	0.514	
GAM 0.438	0.404	0.512	0.326	0.442	0.559	0.336	0.558	0.375	0.537	0.355	0.390	0.349	0.390	0.515	1.000	0.434	
GAS 0.533	0.265	0.536	0.287	0.455	0.562	0.307	0.485	0.366	0.507	0.416	0.546	0.585	0.404	0.514	0.434	1.000	
GRF 0.494	0.322	0.388	0.374	0.360	0.432	0.269	0.416	0.271	0.402	0.359	0.311	0.321	0.217	0.491	0.429	0.411	
IAG 0.413	0.313	0.425	0.355	0.350	0.462	0.226	0.391	0.309	0.375	0.351	0.269	0.318	0.313	0.452	0.404	0.327	
IBE 0.536	0.302	0.654	0.350	0.507	0.740	0.314	0.549	0.487	0.580	0.425	0.638	0.532	0.448	0.586	0.499	0.652	
IDR 0.415	0.376	0.440	0.372	0.399	0.491	0.300	0.388	0.340	0.404	0.332	0.348	0.311	0.342	0.421	0.358	0.350	
ITX 0.493	0.300	0.449	0.368	0.363	0.524	0.233	0.404	0.374	0.409	0.438	0.297	0.325	0.317	0.521	0.365	0.426	
JAZ 0.307	0.270	0.373	0.224	0.245	0.340	0.206	0.322	0.255	0.306	0.220	0.283	0.216	0.229	0.343	0.292	0.265	
MAP 0.531	0.344	0.580	0.370	0.379	0.656	0.339	0.523	0.434	0.576	0.450	0.382	0.370	0.412	0.587	0.488	0.491	
MTS 0.413	0.345	0.454	0.299	0.393	0.561	0.296	0.411	0.291	0.484	0.339	0.377	0.303	0.355	0.448	0.401	0.420	
OHL 0.592	0.399	0.554	0.352	0.486	0.584	0.324	0.464	0.423	0.497	0.392	0.431	0.409	0.430	0.582	0.481	0.520	
POP 0.425	0.366	0.508	0.272	0.438	0.653	0.500	0.640	0.389	0.675	0.335	0.396	0.277	0.418	0.458	0.511	0.448	
REE 0.491	0.292	0.488	0.291	0.484	0.473	0.323	0.394	0.406	0.467	0.362	0.503	0.575	0.316	0.440	0.369	0.536	
REP 0.496	0.344	0.585	0.309	0.479	0.692	0.336	0.488	0.455	0.591	0.464	0.507	0.419	0.436	0.556	0.506	0.547	
SAB 0.517	0.432	0.577	0.289	0.517	0.667	0.488	0.638	0.419	0.705	0.372	0.368	0.358	0.410	0.523	0.539	0.440	
SAN 0.593	0.399	0.679	0.363	0.547	0.928	0.464	0.667	0.505	0.740	0.453	0.559	0.422	0.427	0.627	0.567	0.582	
SCYR 0.466	0.436	0.523	0.335	0.461	0.592	0.385	0.533	0.448	0.517	0.417	0.375	0.302	0.462	0.516	0.555	0.428	
TEF 0.566	0.328	0.637	0.357	0.487	0.791	0.357	0.564	0.495	0.598	0.463	0.578	0.438	0.449	0.615	0.506	0.608	
TL5 0.433	0.398	0.473	0.353	0.369	0.479	0.315	0.487	0.357	0.416	0.361	0.377	0.333	0.353	0.471	0.440	0.414	
TRE 0.440	0.427	0.482	0.404	0.348	0.491	0.268	0.395	0.370	0.422	0.386	0.384	0.362	0.344	0.546	0.418	0.434	

Tabla 10: Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas mediante estimación robusta - MCD I

	GRF	IAG	IBE	IDR	ITX	JAZ	MAP	MTS	OHL	POP	REE	REP	SAB	SAN	SCYR	TEF	TL5	TRE
ABE	0.494	0.413	0.536	0.415	0.493	0.307	0.531	0.413	0.592	0.425	0.491	0.496	0.517	0.593	0.466	0.566	0.433	0.440
ABG.P	0.322	0.313	0.302	0.376	0.300	0.270	0.344	0.345	0.399	0.366	0.292	0.344	0.432	0.399	0.436	0.328	0.398	0.427
ACS	0.388	0.425	0.654	0.440	0.449	0.373	0.580	0.454	0.554	0.508	0.488	0.585	0.577	0.679	0.523	0.637	0.473	0.482
AMS	0.374	0.355	0.350	0.372	0.368	0.224	0.370	0.299	0.352	0.272	0.291	0.309	0.289	0.363	0.335	0.357	0.353	0.404
ANA	0.360	0.350	0.507	0.399	0.363	0.245	0.379	0.393	0.486	0.438	0.484	0.479	0.517	0.547	0.461	0.487	0.369	0.348
BBVA	0.432	0.462	0.740	0.491	0.524	0.340	0.656	0.561	0.584	0.653	0.473	0.692	0.667	0.928	0.592	0.791	0.479	0.491
BKIA	0.269	0.226	0.314	0.300	0.233	0.206	0.339	0.296	0.324	0.500	0.323	0.336	0.488	0.464	0.385	0.357	0.315	0.268
BKT	0.416	0.391	0.549	0.388	0.404	0.322	0.523	0.411	0.464	0.640	0.394	0.488	0.638	0.667	0.533	0.564	0.487	0.395
BME	0.271	0.309	0.487	0.340	0.374	0.255	0.434	0.291	0.423	0.389	0.406	0.455	0.419	0.505	0.448	0.495	0.357	0.370
CABK	0.402	0.375	0.580	0.404	0.409	0.306	0.576	0.484	0.497	0.675	0.467	0.591	0.705	0.740	0.517	0.598	0.416	0.422
DIA	0.359	0.351	0.425	0.332	0.438	0.220	0.450	0.339	0.392	0.335	0.362	0.464	0.372	0.453	0.417	0.463	0.361	0.386
ELE	0.311	0.269	0.638	0.348	0.297	0.283	0.382	0.377	0.431	0.396	0.503	0.507	0.368	0.559	0.375	0.578	0.377	0.384
ENG	0.321	0.318	0.532	0.311	0.325	0.216	0.370	0.303	0.409	0.277	0.575	0.419	0.358	0.422	0.302	0.438	0.333	0.362
FCC	0.217	0.313	0.448	0.342	0.317	0.229	0.412	0.355	0.430	0.418	0.316	0.436	0.410	0.427	0.462	0.449	0.353	0.344
FER	0.491	0.452	0.586	0.421	0.521	0.343	0.587	0.448	0.582	0.458	0.440	0.556	0.523	0.627	0.516	0.615	0.471	0.546
GAM	0.429	0.404	0.499	0.358	0.365	0.292	0.488	0.401	0.481	0.511	0.369	0.506	0.539	0.567	0.555	0.506	0.440	0.418
GAS	0.411	0.327	0.652	0.350	0.426	0.265	0.491	0.420	0.520	0.448	0.536	0.547	0.440	0.582	0.428	0.608	0.414	0.434
GRF	1.000	0.377	0.368	0.318	0.398	0.249	0.379	0.301	0.450	0.380	0.367	0.351	0.432	0.460	0.389	0.384	0.366	0.364
IAG	0.377	1.000	0.384	0.307	0.364	0.235	0.381	0.348	0.385	0.352	0.309	0.299	0.378	0.449	0.361	0.427	0.404	0.296
IBE	0.368	0.384	1.000	0.431	0.480	0.289	0.594	0.470	0.528	0.483	0.554	0.686	0.508	0.771	0.511	0.793	0.432	0.452
IDR	0.318	0.307	0.431	1.000	0.349	0.199	0.416	0.405	0.438	0.402	0.307	0.415	0.370	0.484	0.405	0.455	0.332	0.413
ITX	0.398	0.364	0.480	0.349	1.000	0.264	0.446	0.373	0.460	0.364	0.371	0.511	0.367	0.546	0.395	0.540	0.368	0.419
JAZ	0.249	0.235	0.289	0.199	0.264	1.000	0.264	0.235	0.297	0.265	0.222	0.262	0.280	0.332	0.294	0.305	0.339	0.218
MAP	0.379	0.381	0.594	0.416	0.446	0.264	1.000	0.439	0.503	0.504	0.371	0.577	0.535	0.655	0.495	0.616	0.397	0.471
MTS	0.301	0.348	0.470	0.405	0.373	0.235	0.439	1.000	0.443	0.417	0.303	0.520	0.434	0.573	0.387	0.489	0.358	0.446
OHL	0.450	0.385	0.528	0.438	0.460	0.297	0.503	0.443	1.000	0.474	0.409	0.528	0.532	0.580	0.521	0.551	0.402	0.512
POP	0.380	0.352	0.483	0.402	0.364	0.265	0.504	0.417	0.474	1.000	0.358	0.468	0.694	0.635	0.526	0.537	0.377	0.350
REE	0.367	0.309	0.554	0.307	0.371	0.222	0.371	0.303	0.409	0.358	1.000	0.445	0.418	0.504	0.383	0.484	0.331	0.379
REP	0.351	0.299	0.686	0.415	0.511	0.262	0.577	0.520	0.528	0.468	0.445	1.000	0.499	0.702	0.542	0.721	0.430	0.502
SAB	0.432	0.378	0.508	0.370	0.367	0.280	0.535	0.434	0.532	0.694	0.418	0.499	1.000	0.671	0.520	0.539	0.421	0.387
SAN	0.460	0.449	0.771	0.484	0.546	0.332	0.655	0.573	0.580	0.635	0.504	0.702	0.671	1.000	0.587	0.813	0.474	0.508
SCYR	0.389	0.361	0.511	0.405	0.395	0.294	0.495	0.387	0.521	0.526	0.383	0.542	0.520	0.587	1.000	0.526	0.424	0.437
TEF	0.384	0.427	0.793	0.455	0.540	0.305	0.616	0.489	0.551	0.537	0.484	0.721	0.539	0.813	0.526	1.000	0.448	0.460
TL5	0.366	0.404	0.432	0.332	0.368	0.339	0.397	0.358	0.402	0.377	0.331	0.430	0.421	0.474	0.424	0.448	1.000	0.368
TRE	0.364	0.296	0.452	0.413	0.419	0.218	0.471	0.446	0.512	0.350	0.379	0.502	0.387	0.508	0.437	0.460	0.368	1.000

Tabla 11: Tabla de correlaciones entre los retornos de las 35 empresas mediante estimación robusta - MCD II

mu	ABE	AMS	BME	ENG	GAS	GRF	IAG	IBE	ITX	JAZ	REE	TEF	TRE	Rend	Riesgo	SR	
1	0.01	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.100169	0.000418672	0.07699	
2	0.5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.100169	0.000418672	0.07699	
3	1	0	0	0	0	0	0.591	0	0	0	0.409	0	0	0.100162	0.000209976	0.1039	
4	2	0	0	0	0	0	0.362	0	0.0946	0	0.543	0	0	0.100157	0.000142477	0.1222	
5	3	0	0	0	0	0	0.273	0	0	0.178	0.549	0	0	0.100155	0.000123324	0.1293	
6	4	0	0	0	0	0	0.228	0	0	0.22	0.552	0	0	0.100154	0.00011662	0.1318	
7	5	0.0492	0	0	0	0	0.191	0	0	0.231	0.529	0	0	0.100152	0.000107484	0.1354	
8	8	0	0.202	0	0	0	0.119	0	0	0.223	0.455	0	0	0.100146	0.000089714	0.1423	
9	10	0	0.253	0	0	0	0.0953	0	0	0.221	0.431	0	0	0.100145	0.0000856133	0.1437	
10	12	0	0.287	0	0	0	0.0793	0	0	0.219	0.414	0	0	0.100143	0.0000833858	0.1443	
11	14	0	0.303	0.0364	0	0	0.0656	0	0	0.214	0.382	0	0	0.100141	0.0000802091	0.1448	
12	15	0	0.308	0.0535	0	0	0.0599	0	0	0.211	0.367	0	0	0.100140	0.0000789534	0.1449	
13	20	0	0.328	0	0.113	0	0.04	0	0	0.202	0.317	0	0	0.100137	0.0000752404	0.1447	
14	25	0	0.339	0	0.149	0	0.0281	0	0	0.197	0.286	0	0	0.100135	0.0000735222	0.1444	
15	30	0	0.347	0	0.173	0	0.0202	0	0	0.194	0.266	0	0	0.100134	0.0000725886	0.1437	
16	40	0	0.347	0	0.198	0	0.00714	0.0289	0.0289	0.185	0.234	0	0	0.100131	0.0000706065	0.1415	
17	50	0	0.343	0	0.211	0	0	0	0.055	0.178	0.212	0	0	0.100128	0.0000694298	0.1396	
18	75	0	0.325	0.0368	0.224	0.00476	0	0	0.077	0.163	0.169	0	0	0.100122	0.0000673727	0.1341	
19	100	0	0.310	0.0523	0.220	0.0131	0.0126	0.0119	0.0801	0.152	0.14	0.00757	1.00116	0.0000660786	0.1282		
20	1000	0.00449	0.263	0.0826	0.193	0.0463	0.0307	0	0.099	0.0774	0.120	0.0513	0	0.0323	1.00097	0.0000639565	0.1065
21	10000	0.00803	0.257	0.0845	0.19	0.048	0.0319	0	0.101	0.0753	0.117	0.0421	0.0109	0.0342	1.00094	0.0000639274	0.103
22	100000	0.00835	0.257	0.0846	0.190	0.0482	0.0321	0	0.101	0.0751	0.116	0.0412	0.0123	0.0344	1.00094	0.000063927	0.1026

Tabla 12: Frontera Eficiente - Modelo Markowitz - MCD

	mu	AMS	BME	DIA	ELE	ENG	ENG	FER	GRF	IAG	ITX	JAZ	REE	Rend	TRE	Rend	Riesgo	SR	
1	0.01	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0.100182	0.000156617	0.09135		
2	0.5	0	0	0	0.123	0	0	0	0	0.877	0	0	0	1	0.100182	0.000141986	0.09582		
3	1	0	0	0	0.142	0	0	0	0	0.858	0	0	0	1	0.100182	0.000141333	0.09602		
4	2	0	0	0	0.108	0	0	0	0	0.703	0	0.19	0	1	0.100179	0.000108653	0.1069		
5	3	0	0	0	0.0761	0	0	0	0	0.584	0	0.34	0	1	0.100177	0.000090874	0.1147		
6	4	0	0	0	0.0603	0	0	0	0	0.525	0	0.415	0	1	0.100176	0.0000846511	0.1176		
7	5	0	0	0	0.0508	0	0	0	0	0.489	0	0.46	0	1	0.100175	0.0000817709	0.1189		
8	80.146	0	0	0	0.0282	0	0	0	0	0.379	0	0.447	0	1	0.100169	0.0000641749	0.1267		
9	10 0.243	0	0	0	0.018	0	0	0	0	0.324	0	0.415	0	1	0.100166	0.0000559271	0.131		
10	12 0.3	0	0	0	0.0108	0	0	0.0149	0.285	0	0	0.39	0	1	0.100163	0.0000509291	0.1334		
11	14 0.318	0	0	0.000434	0	0	0	0.0338	0.248	0	0	0.361	0.0391	1	0	1.0016	0.0000459525	0.1357	
12	15 0.325	0	0	0	0	0	0	0.0414	0.234	0	0	0.348	0.0523	1	0.00159	0.0000443604	0.1362		
13	20 0.346	0	0	0	0	0	0	0.0665	0.182	0.00958	0.301	0.0948	0	1	0.100155	0.0000395223	0.1379		
14	25 0.349	0	0	0	0	0	0	0.0768	0.148	0.0435	0.27	0.113	0	1	0.100152	0.0000367518	0.1381		
15	30 0.347	0	0	0	0	0.026	0	0.0821	0.124	0.063	0.247	0.112	0	1	0.100149	0.0000346879	0.1369		
16	40 0.339	0	0	0	0.0804	0	0	0.0874	0.0925	0.0846	0.217	0.0986	0	1	0.100144	0.0000322278	0.1348		
17	50 0.335	0	0	0	0	0.113	0	0.0906	0.0737	0.0975	0.199	0.0908	0	1	0.100142	0.0000310891	0.1327		
18	75 0.324	0.0234	0	0	0	0.154	0	0.0939	0.0483	0.111	0.171	0.0747	0	1	0.100138	0.0000296725	0.1279		
19	100 0.316	0.0467	0	0	0	0.173	0	0.0951	0.0354	0.115	0.155	0.0638	0	1	0.100135	0.0000290524	0.1243		
20	1000 0.274	0.0924	0.0203	0	0	0.216	0.0139	0.0874	0	0	0.101	0.105	0.0177	1	0.0723	1.00122	0.0000277082	0.1022	
21	10000 0.268	0.0963	0.0245	0	0	0.22	0.016	0.0855	0	0	0.0976	0.0996	0.0122	1	0.0804	1.0012	0.0000276938	0.0999	
22	100000 0.268	0.0967	0.0249	0	0	0.22	0.0162	0.0854	0	0	0.0973	0.0991	0.0116	1	0.0812	1.0012	0.0000276935	0.09927	

Tabla 13: Frontera Eficiente - Modelo Markowitz - Semivarianza

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.2491	0.0488	5.10	0.0000
IBEX	0.7525	0.0488	15.42	0.0000

Tabla 14: Resultados del ajuste lineal: Cartera Rendimiento Máximo Vs. IBEX-35

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.4781	0.0152	31.50	0.0000
IBEX	0.5229	0.0152	34.46	0.0000

Tabla 15: Resultados del ajuste lineal: Cartera Markowitz - SR Máx Vs. IBEX-35

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.4740	0.0204	23.27	0.0000
IBEX	0.5274	0.0204	25.90	0.0000

Tabla 16: Resultados del ajuste lineal: Cartera Markowitz - Riesgo Mín Vs. IBEX-35

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.4096	0.0133	30.78	0.0000
IBEX	0.5913	0.0133	44.45	0.0000

Tabla 17: Resultados del ajuste lineal: Cartera MCD - SR Máx Vs. IBEX-35

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.4612	0.0191	24.19	0.0000
IBEX	0.5401	0.0191	28.34	0.0000

Tabla 18: Resultados del ajuste lineal: Cartera MCD - Riesgo Mín Vs. IBEX-35

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.4743	0.0151	31.46	0.0000
IBEX	0.5267	0.0151	34.96	0.0000

Tabla 19: Resultados del ajuste lineal: Cartera Semivarianza - SR Máx Vs. IBEX-35

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.4716	0.0196	24.07	0.0000
IBEX	0.5298	0.0196	27.06	0.0000

Tabla 20: Resultados del ajuste lineal: Cartera Semivarianza - Riesgo Mín Vs. IBEX-35