

2.8. La influencia de las imperfecciones en la seguridad estructural

Autores: Julián Alonso Monje

Contacto: jamonje@telefonica.net

Afiliaciones: Dpto. Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del Terreno y Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. E.T.S. de Arquitectura. Universidad de Valladolid

La influencia de las imperfecciones en la seguridad estructural

Subtítulo:

Sobre la imposibilidad de obtener resultados de las tensiones a través del análisis de una estructura, o el camino sin sentido de tratar de averiguar la tensión en un punto. (método de las tensiones admisibles)

He visto ... He visto cosas que vosotros no creeríais. He visto a estudiantes y equipos de máster, y profesores, analizando viguetas de un forjado, como continuas sobre apoyos, considerados puntos fijos. Para luego, con sus reacciones, calcular las vigas como si esos puntos pudieran descender, suponiendo que formaban pórtico con soportes, que suponían puntos inmóviles. Y luego sustentaban varias plantas en unas enormes cerchas, que, con la carga de los soportes, se deformaban y flectaban. Aportaron miles de cálculos, hojas diagramas, números, y detalles, todo basado en una incoherencia. Todo mal pero era salvable con una justificación plástica. Y no lo notaron. (José Luis de Miguel)

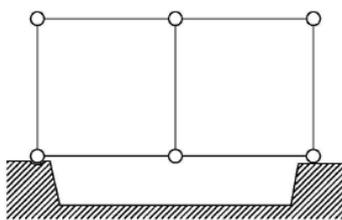
Imperfecciones j alonso monje

1

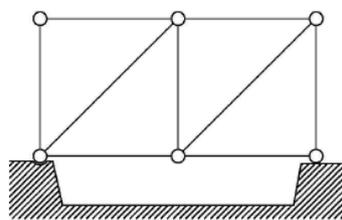
Primer modelo propuesto: 1. Entramados planos.

1.1. Estructuras analizadas.

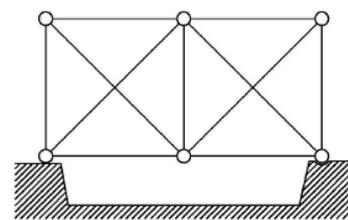
- | | | |
|----|-----------------|-----------------|
| a) | Mecanismo: | $B + C \leq 2N$ |
| b) | Isostatismo: | $B + C = 2N$ |
| c) | Hiperestatismo: | $B + C \geq 2N$ |
- Regla de *Maxwell*



(a)



(b)



(c)

Imperfecciones j alonso monje

2

1.1.b. Entramados isostáticos

El cálculo de esfuerzos puede abordarse por equilibrio. Trabajos virtuales

Nudo E
 $+N_{EA} u_E \cos 45^\circ - N_{EF} u_E \cos 0^\circ = 0$
 $+N_{EA} v_E \sin 45^\circ + N_{EB} v_E \sin 90^\circ = P v_E \sin 90^\circ$

Nudo F
 $+N_{FE} u_F \cos 0^\circ - N_{FB} u_F \cos 45^\circ = 0$
 $+N_{FC} v_F \sin 90^\circ - N_{FB} v_F \sin 45^\circ = 0$

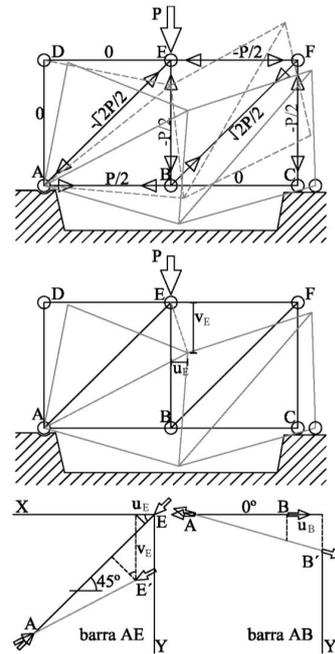
Nudo B
 $+N_{BF} u_B \cos 45^\circ - N_{BA} u_B \cos 0^\circ = 0$
 $+N_{BF} v_B \sin 45^\circ - N_{BE} v_B \cos 0^\circ = 0$

Nudo C
 $-N_{CF} v_C \sin 90^\circ + V_C v_C \sin 90^\circ = 0$
 $+N_{BC} u_C \cos 0^\circ = 0$

Nudo A
 $+N_{AB} u_A \cos 0^\circ - N_{AE} u_A \cos 45^\circ + H_A u_A \cos 0^\circ = 0$
 $+V_A v_A \sin 90^\circ - N_{AE} v_A \sin 45^\circ = 0$

$$u_A = v_A = v_C = 0$$

$$N_{BC} = 0$$



$$P v_E = +N_{EA} (u_E \cos 45^\circ + v_E \sin 45^\circ) + N_{EF} (u_F \cos 0^\circ - u_E \cos 0^\circ) + N_{BF} (u_B \cos 45^\circ + v_B \sin 45^\circ - u_F \cos 45^\circ - v_F \sin 45^\circ) + N_{FC} (v_F \sin 90^\circ) + N_{EB} (v_E \sin 90^\circ - v_B \sin 90^\circ) - N_{BA} (u_B \cos 0^\circ)$$

$$P \cdot v_E = \sum N_i \cdot \Delta_i$$

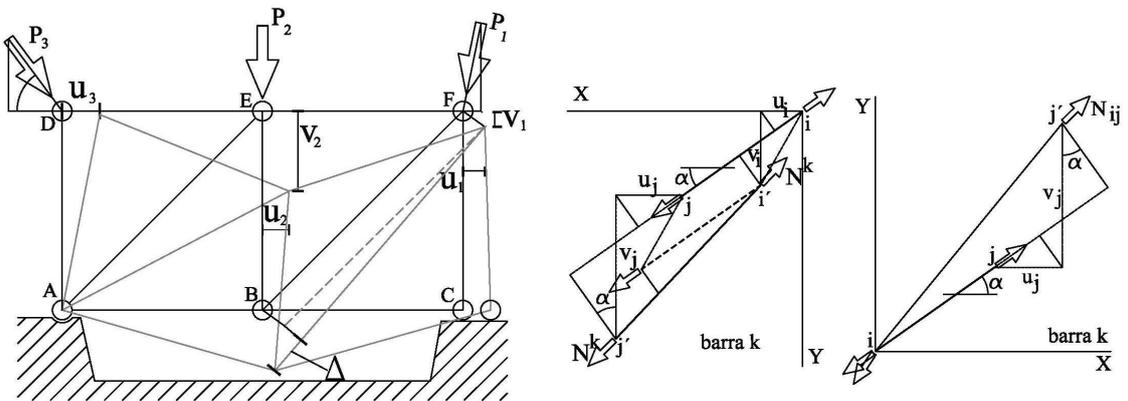
Celosía isostática: Resistencia y Rigidez

Imperfecciones j alonso monje

3

1.1.b. Entramados isostáticos

Generalización del Principio de los Trabajos Virtuales (P.T.V.)



$$\sum_{\text{nudos}} (H_i u_i + V_i v_i) = \sum_{\text{barras}} N_{ij} (u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha - u_i \cos \alpha - v_i \sin \alpha)$$

$$\sum P \delta (u, v) = \sum N \Delta$$

virtuales-reales
reales-virtuales

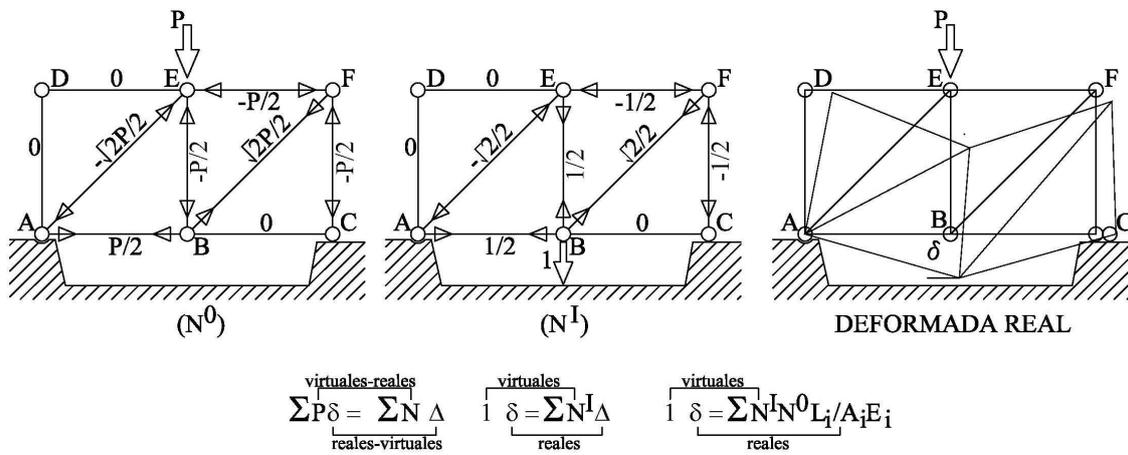
Principio de los Trabajos Virtuales

Imperfecciones j alonso monje

4

1.1.b. Entramados isostáticos

Aplicación del P.T.V. Cálculo de las deformaciones.



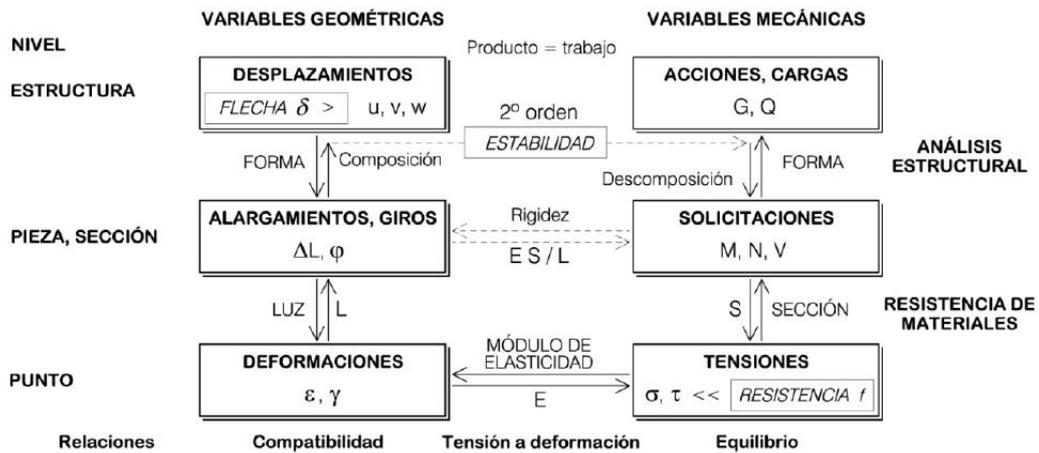
Celosía isostática: Rigidez

Imperfecciones j alonso monje

5

1.1.c. Entramados hiperestáticos

Relaciones entre las variables estructurales



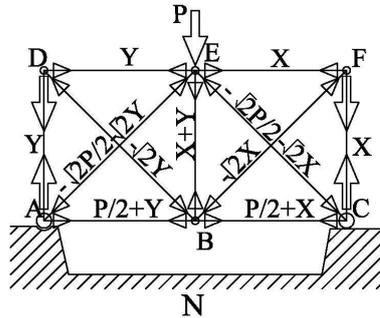
Variables Estructurales

Imperfecciones j alonso monje

6

1.1. c. Entramados hiperestáticos

Análisis: equilibrio y compatibilidad



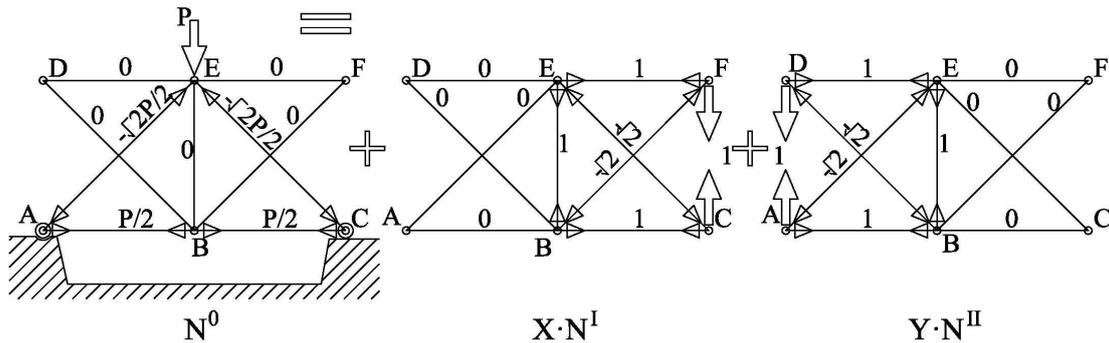
$$N = N^0 + X N^I + Y N^{II}$$

trabajo N. internas trabajo F. externas

$$\sum (N^0 + X N^I + Y N^{II}) L_i / A_i E_i \cdot N^I = 0$$

$$\sum (N^0 + X N^I + Y N^{II}) L_i / A_i E_i \cdot N^{II} = 0$$

deformaciones reales acciones virtuales



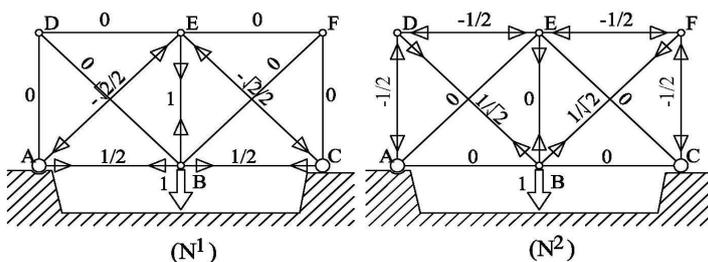
Celosía hiperestática. Resistencia

Imperfecciones j alonso monje

7

1.1.c Entramados hiperestáticos Cálculo de deformaciones.

Método: Supresión de elementos redundantes y cálculo de la deformación considerando estados isostáticos elegidos de forma aleatoria. Se aborda el cálculo de dos posibles N^I y N^2 haciendo nulas las barras redundantes



$$\sum \underbrace{(N^0 + X N^I + Y N^{II}) L_i / A_i E_i}_{\text{reales}} \cdot \underbrace{N^I}_{\text{virtuales}} = \delta \cdot 1$$

$$\sum \underbrace{(N^0 + X N^I + Y N^{II}) L_i / A_i E_i}_{\text{reales}} \cdot \underbrace{N^2}_{\text{virtuales}} = \delta \cdot 1$$

B	L	$N^0 + X N^I + Y N^{II}$	N^1	N^2	$\sum (N^0 + X N^I + Y N^{II}) L / A E \cdot N^1$	$\sum (N^0 + X N^I + Y N^{II}) L / A E \cdot N^2$
A-B	L	0.3204P	1/2	0	0.160PL/AE	0
B-C	L	0.3204P	1/2	0	0.160PL/AE	0
D-E	L	-0.1796P	0	-1/2	0	0.0898PL/AE
E-F	L	-0.1796P	0	-1/2	0	0.0898PL/AE
A-D	L	-0.1796P	0	-1/2	0	0.0898PL/AE
A-E	$L\sqrt{2}$	-0.4531P	$-\sqrt{2}/2$	0	0.453PL/AE	0
B-D	$L\sqrt{2}$	0.2540P	0	$1/\sqrt{2}$	0	0.254PL/AE
B-E	L	-0.3592P	1	0	-0.359PL/AE	0
B-F	$L\sqrt{2}$	0.2540P	0	$1/\sqrt{2}$	0	0.254PL/AE
C-E	$L\sqrt{2}$	-0.4531P	$-\sqrt{2}/2$	0	0.453PL/AE	0
C-F	L	-0.1796P	0	-1/2	0	0.0898PL/AE
$\delta =$					0.867PL/AE	0.867PL/AE

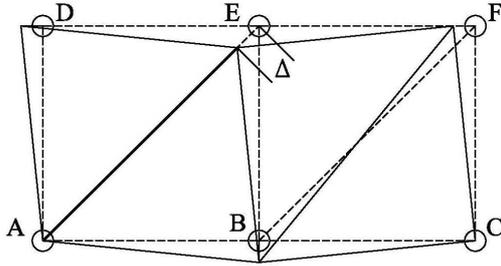
Celosía hiperestática. Rigidez

Imperfecciones j alonso monje

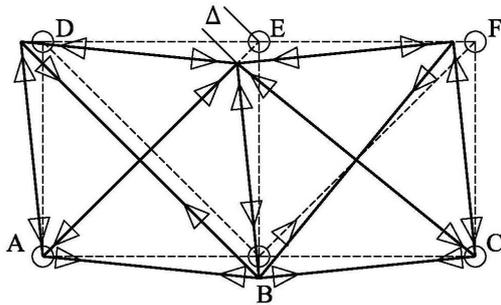
8

1.1.c. Entramados hiperestáticos: dos ejemplos de imperfecciones.

Imposibilidad de obtener el valor real de las solicitaciones en entramado hiperestático



(a) Celosía isostática



(b) Celosía hiperestática

$$\sum (XN^I + YN^{II})L_i/A_iE_i \cdot N^I + \sum N^I L_{AE,DE,EF} / 500 = 0$$

trabajo esfuerzos internos

$$\sum (XN^I + YN^{II})L_i/A_iE_i \cdot N^{II} + \sum N^{II} L_{AE,DE,EF} / 500 = 0$$

trabajo esfuerzos internos

	Sin imperfección $N^0 + XN^I + YN^{II}$	Error AE $XN^I + YN^{II}$	Error DE-EF $XN^I + YN^{II}$
A-B	0.320P	±0.159P	±0.088P
B-C	0.320P	±0.016P	±0.088P
D-E	-0.179P	±0.159P	±0.088P
E-F	-0.179P	±0.016P	±0.088P
A-D	-0.179P	±0.159P	±0.088P
A-E	-0.453P	±0.225P	±0.124P
B-D	0.254P	±0.225P	±0.124P
B-E	-0.359P	±0.143P	±0.176P
B-F	0.254P	±0.023P	±0.124P
C-E	-0.453P	±0.023P	±0.124P
C-F	-0.179P	±0.016P	±0.088P

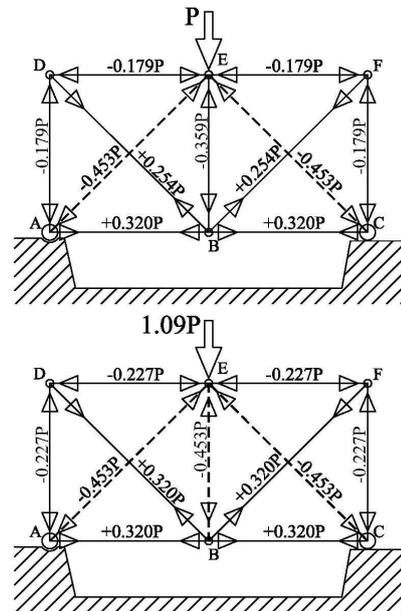
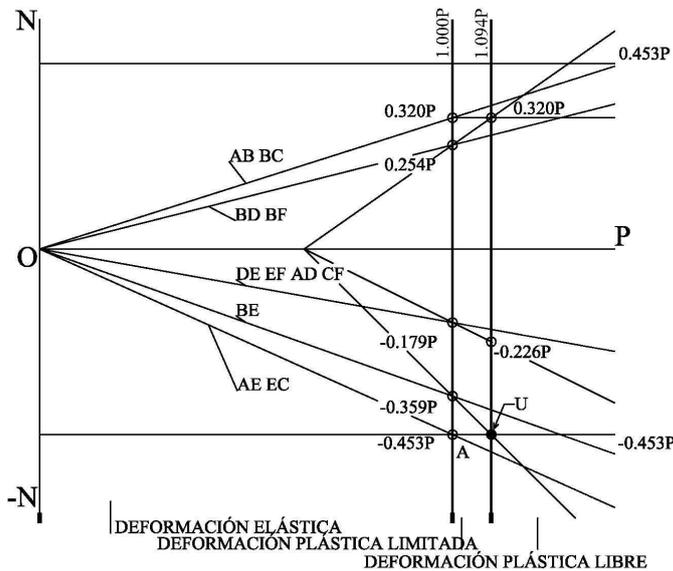
Imperfecciones geométricas: se supone la existencia de una barra con un ligero error de longitud (L/500)

Imperfecciones j alonso monje

9

1.2. Solución del problema: análisis plástico

1.2.1. Análisis plástico clásico



Análisis plástico. Método clásico

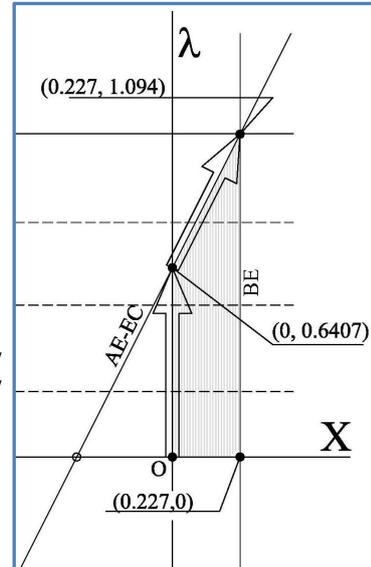
Imperfecciones j alonso monje

10

1.2.4. Algoritmo simplex

Máx. $Z = 0$
 Restricciones:
 AE-EC $+0.707 \cdot \lambda - 1.41x \leq +Np(0.453)$
 BE $+2x \leq +Np(0.453)$
 $\lambda, x \geq 0$

Renglón 0	Z -	λ				=0
Renglón 1		$+0.707 \cdot \lambda$	$-1.41x$	$+s1$		=-0.453
Renglón 2			$+2.00x$		$+s2$	=-0.453
Renglón 0'	Z -	$0 \cdot \lambda$	$-2.00x$	$+1.41s1$		=-0.6407
Renglón 1'		$1 \cdot \lambda$	$-2.00x$	$+1.41s1$		=-0.6407
Renglón 2'			$+2.00x$		$+s2$	=-0.453
Renglón 0''	Z -	$0 \cdot \lambda$	$0.00x$	$+1.41s1$	$+0.50s2$	=1.094
Renglón 1''		$1 \cdot \lambda$	$0.00x$	$+1.41s1$	$+0.50s2$	=1.094
Renglón 2''			$+1.00x$		$+0.50s2$	=-0.227

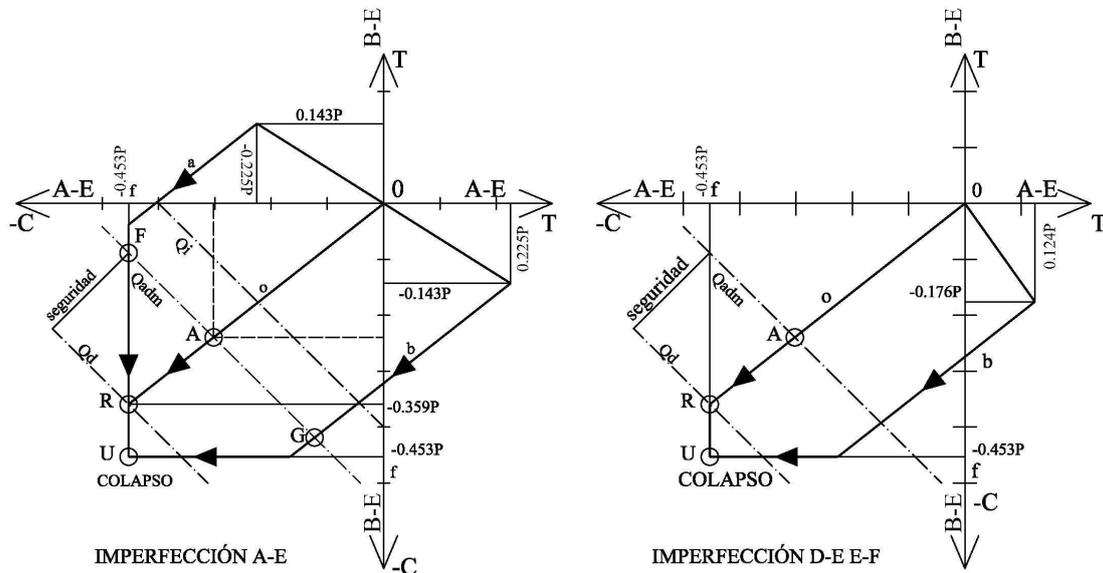


Análisis plástico mediante Programación Lineal 2/2

Imperfecciones j alonso monje

13

1.3. Entramados: resultados del análisis plástico. Solución final de colapso



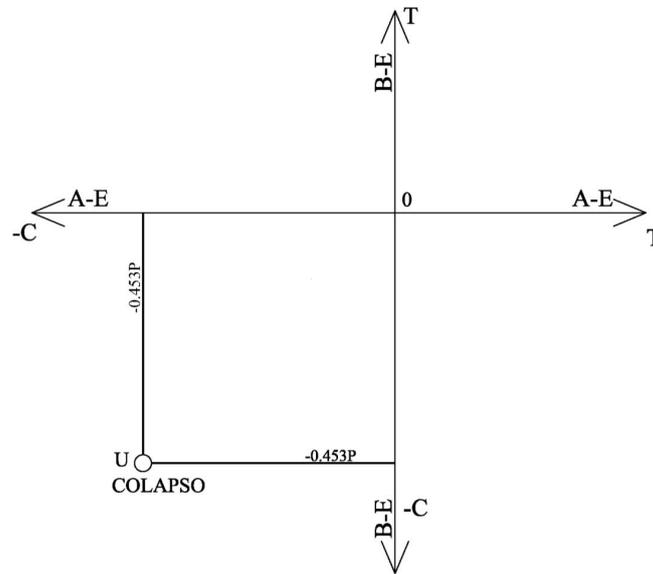
Trayectoria hasta el colapso. Imperfecciones

Imperfecciones j alonso monje

14

1.4. Entramados: Conclusión

Solución única de colapso independiente de las imperfecciones



Única solución accesible al cálculo

2. Estructuras en flexión: Resolución elástica clásica.

Ecuaciones de equilibrio:

1. Método habitual:

$$\begin{aligned} + PL/2 - V_C L + 5PL - 3V_E L - M_c &= 0 \\ + M_b - V_C L/2 + 7PL/2 - 5V_E L/2 - M_c &= 0 \\ + M_c + 2PL - 2V_E L - M_c &= 0 \\ + M_d - 4V_E L/3 - M_c &= 0 \end{aligned}$$

2. Trabajos virtuales:

$$\Sigma \mathbf{P} \delta = \int \mathbf{M} \kappa ds + \Sigma \mathbf{M} \theta$$

$$2PL(\theta) = M_c(-\theta) + M_d(3\theta/2) + M_e(-\theta/2)$$

$$PL(\theta/2) = M_b(2\theta) + M_c(-\theta)$$

$$2PL = -M_c + 3M_d/2 - M_e/2; \quad (1)$$

$$PL/2 = 2M_b - M_c; \quad (2)$$

$$0 = -m_c + 3m_d/2 - m_e/2;$$

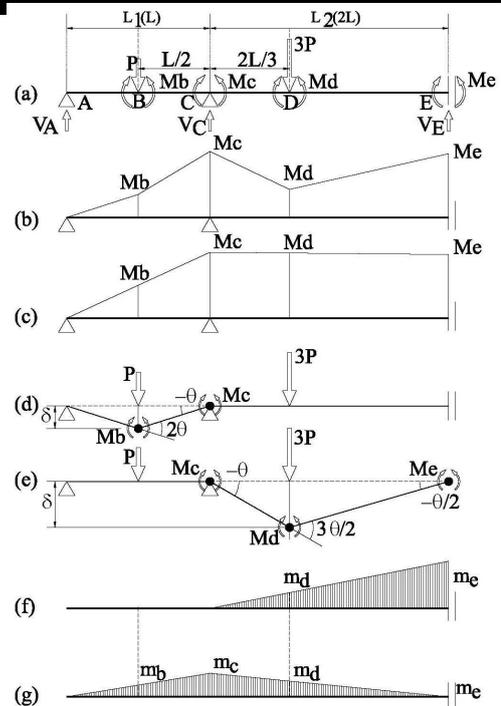
$$0 = 2m_b - m_c;$$

$$\int m M/EI ds = L(m_B(2M_B + M_C) + m_C(2M_C + M_B))/6EI = 0$$

Vano	L/2		L/2		2L/3		4L/3	
	A	B	B	C	C	D	D	E
M (b)	M _a	M _b	M _b	M _c	M _c	M _d	M _d	M _e
m (f)	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1
m (g)	0	1/2	1/2	1	1	2/3	2/3	0

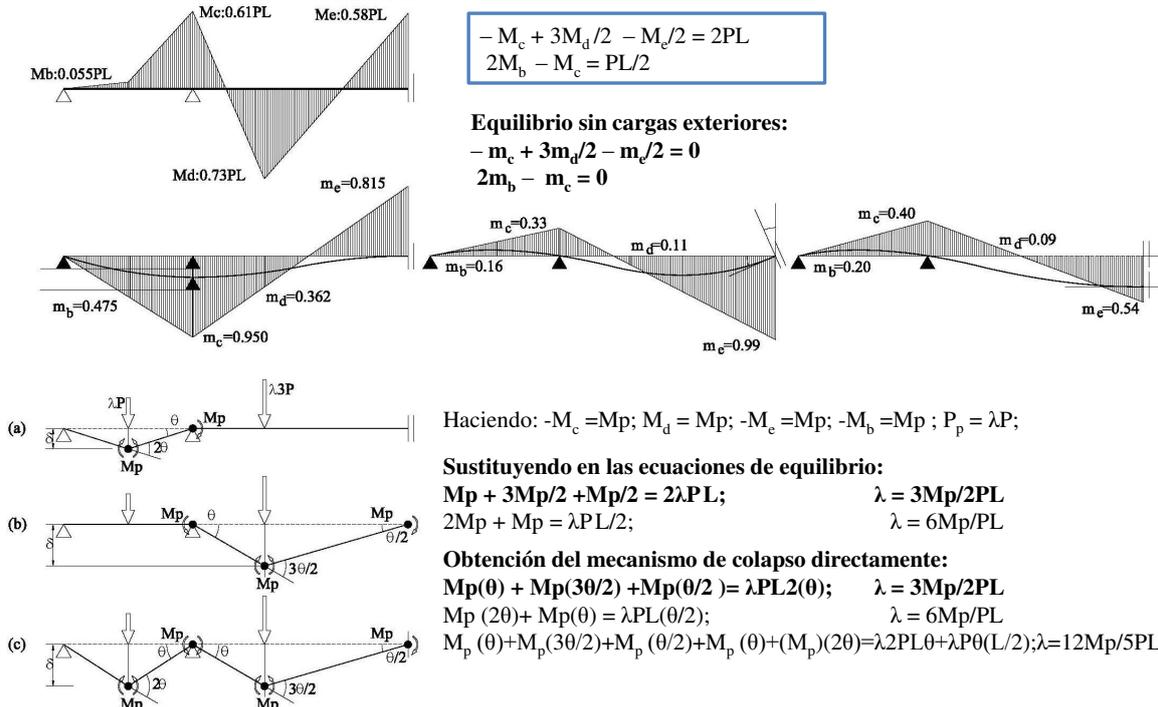
$$2M_c + 24M_d + 28M_e = 0; \quad (3)$$

$$54M_b + 109M_c + 120M_d + 32M_e = 0; \quad (4)$$



Viga continua. Resolución mediante el Principio de los Trabajos Virtuales

2.1 Estructuras en flexión : Un ejemplo de imperfecciones inevitables



Viga continua. Imperfecciones inevitables: asiento de un apoyo o giro de un empotramiento

Imperfecciones j alonso monje

17

2.2. Estructuras en flexión : solución mediante análisis plástico

$$-M_c + 3M_d/2 - M_e/2 = 2\lambda PL$$

$$2M_b - M_c = \lambda PL/2$$

De donde:

$$M_b = \lambda PL/4 - M_c/2$$

$$M_d = \lambda 4PL/3 - 2M_c/3 - M_e/3$$

El planteamiento del problema mediante programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = \lambda \\ \text{Sujeto a} & -M_p \leq (\lambda PL/4 - M_c/2) \leq M_p \quad \text{momento } M_b \\ & -M_p \leq (\lambda 4PL/3 - 2M_c/3 - M_e/3) \leq M_p \quad \text{momento } M_d \\ & -M_p \leq M_c \leq M_p \quad \text{momento } M_c \\ & -M_p \leq M_e \leq M_p \quad \text{momento } M_e \end{array}$$

$$\lambda, M_c, M_e \geq 0$$

Tabla inicial. Algoritmo Simplex:

Renglón 0	Z	-1.00	λ						=0
Renglón 1		+1.74	λ	-0.500	M_c		+s ₁		=M _p
Renglón 2		-1.74	λ	+0.500	M_c		+s ₂		=M _p
Renglón 3		+9.28	λ	-0.667	M_c	-0.334	M_e	+s ₃	=M _p
Renglón 4		-9.28	λ	+0.667	M_c	+0.334	M_e	+s ₄	=M _p
Renglón 5				+1.000	M_c			+s ₅	=M _p
Renglón 6				-1.000	M_c			+s ₆	=M _p
Renglón 7					+1.000	M_e		+s ₇	=M _p
Renglón 8					-1.000	M_e		+s ₈	=M _p

Con $M_p = 5.76 \text{ mt (IPE.200)}$. P : máxima carga en régimen elástico

Viga continua. Resolución mediante Programación Lineal

Imperfecciones j alonso monje

18

2.2. Estructuras en flexión : Análisis plástico mediante programación lineal

Iteración	V. Básica	Z	λ	M_c	M_t	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	L.D	razón
0	Z	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	s_1	0	+1.74	-0.500	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5.76	5.76/1.74
	s_2	0	-1.74	+0.500	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5.76	
	s_3	0	+9.28	-0.667	-0.334	0	0	1	0	0	0	0	0	5.76	5.76/9.28
	s_4	0	-9.28	+0.667	+0.334	0	0	0	1	0	0	0	0	5.76	
	s_5	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5.76	
	s_6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5.76	
	s_7	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	5.76	
	s_8	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	5.76	
1	Z	1	0	-0.072	-0.036	0	0	0.108	0	0	0	0	0	0.62	
	s_1	0	0	-0.375	+0.063	1	0	-0.188	0	0	0	0	0	4.68	
	s_2	0	0	0.375	-0.063	0	1	+0.188	0	0	0	0	0	6.84	6.84/0.375
	λ	0	+1	-0.072	-0.036	0	0	0.108	0	0	0	0	0	0.62	
	s_4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	11.52	
	M_c	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5.76	5.76/1
	s_6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5.76	
	s_7	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	5.76	
	s_8	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	5.76	
2	Z	1	0	0	-0.036	0	0	0.108	0	0.072	0	0	0	1.03	
	s_1	0	0	0	+0.063	1	0	-0.188	0	0.375	0	0	0	6.84	6.84/0.063
	s_2	0	0	0	-0.063	0	1	+0.188	0	-0.375	0	0	0	4.68	
	λ	0	+1	0	-0.036	0	0	0.108	0	0.072	0	0	0	1.03	
	s_4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	11.52	
	M_c	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5.76	
	s_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	11.52	
	M_t	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	5.76	5.76/1
	s_8	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	5.76	
3	Z	1	0	0	0	0	0	-0.108	0	+0.072	0	+0.036	0	1.24	
	s_1	0	0	0	0	1	0	-0.188	0	+0.375	0	-0.063	0	6.48	
	s_2	0	0	0	0	0	1	+0.188	0	-0.375	0	+0.063	0	5.04	
	λ	0	+1	0	0	0	0	+0.108	0	+0.072	0	+0.036	0	1.24	
	s_4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	11.52	
	M_c	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5.76	
	s_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	11.52	
	M_t	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	5.76	
	s_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	11.52	

Viga continua. Algoritmo Simplex

Imperfecciones j alonso monje

19

3. Bibliografía esencial

Libros:

- Baker, J.; Horne, R., y Heyman, J. *The Steel Skeleton*. Cambridge University Press 1956
- Baker, J. y Heyman, J. *Plastic Design of Frames 1, Fundamentals*. Cambridge University Press 1969
- Heyman, J. *Plastic Design of Frames 2, Applications*. Cambridge University Press 1969
- Heyman, J. *The science of structural engineering*. Imperial College Press. Londres 1999 Traducción de Gema M. López Manzanares *La ciencia de las estructuras*. Instituto Juan de Herrera. ETSAM. Madrid 2001.
- Heyman, J. *Basic structural theory*. Cambridge University Press 2008. Traducción de Alejandra Albuern *Teoría básica de estructuras* Instituto Juan de Herrera. ETSAM. Madrid 2011.
- Neal, B. G. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. Science Paperback. London Chapman and Hall 3ª Edición (1977).
- Timoshenko, S.P., and Young, D. H. *Theory of Structures*. McGraw Hill con traducción al castellano *Teoría de las Estructuras* Ed. Urmo. México 1981.

Artículos de obligada consulta:

- Neal, B. G y Symonds, P. S. *The Rapid Calculation of the Plastic Collapse Load for a Framed Structure*. Structural Paper No. 29. Primera publicación, Structural and Building Engineering Division Meeting. (1951).
- Neal, B. G y Symonds, P. S. *The Calculation of Collapse Loads for Framed Structures*. Paper No. 5772. Primera publicación, International Association for Bridge on Structural Engineering, 4th. Congress, Cambridge and London (1952).

Apuntes ETSAV y ETSAM:

- Alonso Monje, J.C. *Apuntes sobre cálculo matricial de vigas y pórticos*. Apuntes de clase. Estructuras II. ETSAV. Valladolid 1995-2011.
- de Miguel Rodríguez, J. L., Fascículos titulados "Análisis y Cálculo". n° 480 curso 2009-2010 y "De Re Calculi" n° 480 curso 2010-2011. ETSAM. Madrid.
- Font Arellano, E. *Cálculo de celosías articuladas indeterminadas*. Apuntes de clase. Estructuras I. ETSAV. Valladolid 1992-2005.

Imperfecciones j alonso monje

20