



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Autor:

Orgaz Díaz, David

Tutor:

Cacho Pérez, Mariano

**Departamento de Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería
del Terreno y Mecánica de Medios Continuos y Teoría de
Estructuras.**

Valladolid, Junio 2015

AGRADECIMIENTOS

Al fin llegó uno de los momentos más importantes de mi vida, después de más de cuatro cursos de duro trabajo para lograr el título de Graduado en Ingeniería Mecánica, quisiera mostrar mi más profundo agradecimiento a todas esas personas que han compartido conmigo cada momento de esta etapa tan intensa de mi vida. Por todo lo anterior deseo dedicarles el presente trabajo, por su ayuda, apoyo y comprensión. Asimismo quisiera agradecerles porque esta etapa no hubiera sido lo mismo sin ellos.

De nuevo, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a toda mi familia, en especial a mis padres por la oportunidad que me han dado en la vida, porque si no hubiera sido por ellos jamás habría llegado hasta aquí y a mi hermana por haberme ayudado en todo momento.

A todos mis compañeros de la universidad que he tenido durante todos estos años, con los que he compartido muy buenos momentos y otros no tan buenos y con los que espero seguir contando el día de mañana.

A todos los compañeros de trabajo de la empresa INTEROB, por la gran oportunidad que me han dado, hacerme un hueco en su empresa sin ni siquiera haber concluido mis estudios.

También quiero agradecer a todos los profesores de la Escuela de Ingenierías Industriales de la Universidad de Valladolid por su trato y dedicación durante estos años.

Especialmente, quiero agradecer su enorme dedicación al Tutor de este trabajo, el profesor Dr. Mariano Cacho Pérez del departamento de Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del Terreno y Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, por haberme mostrado su apoyo, sabiduría y comprensión en todo momento.

A todos ellos, muchas gracias.

Este trabajo va dedicado a mi abuelo recientemente fallecido.

Tu fallecimiento cambió mi vida, pero mucho más lo hizo el imborrable recuerdo del tiempo que pasaste a mi lado.

Estoy seguro que no podría expresar con palabras la emoción que sentiría si estuviera en la presentación de este trabajo.

RESUMEN

El presente trabajo, tiene como objetivo el estudio de las deformaciones que se producen a la hora de realizar un estudio sobre el pandeo de una estructura en tres dimensiones, así como analizar los diferentes modos de pandeo que se pueden producir a la hora del estudio de este tipo de inestabilidad.

También se realizará el cálculo de estos valores por diferentes métodos y se verán las diferencias entre ellos: Cálculo analítico, cálculo mediante un software específico y seguimiento de la actual norma española.

Todo esto se verá utilizando distintos casos de estructuras para diferentes estados de cargas.

PALABRAS CLAVE

PANDEO

CÁLCULO

MODO

TORSIÓN

FLEXIÓN

ABSTRACT

The present work aims to study the deformations that occur when a study on the buckling of a three-dimensional structure and analyze different buckling modes that can occur at the time of study this type of instability.

Calculate these values are also held by different methods and the differences between them will be: Analytical calculation, tracking the current Spanish norm and calculation using a specific software.

All this will be using different cases of structures for different states of loads.

KEYWORDS

BUCKLING LOAD FACTOR

NONLINEAR ANALYSIS

BUCKLING MODE SHAPE

WARPING TORSION

BENDING MOMENTS

ÍNDICE

I.	ÍNDICE DE FIGURAS	14
1.	INTRODUCCIÓN.....	19
1.1.	Motivación.....	20
1.2.	Objetivos	21
1.3.	Estructura del trabajo.....	22
2.	TEORÍA DE PANDEO	25
2.1.	Pandeo de estructuras.....	26
2.2.	Tipos de deformaciones en pandeo	27
2.3.	Tipos de perfiles.....	28
3.	ANÁLISIS DE PANDEO MEDIANTE MDR	31
3.1.	Simplificaciones habituales	32
3.2.	Demostración ecuaciones de pandeo	33
3.3.	Ejemplo de cálculo mediante MDR	52
3.3.1.	Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión	52
3.3.2.	Caso 2: Pandeo lateral o vuelco	61
3.3.3.	Caso 3: Pandeo con cargas combinadas	65
3.3.4.	Caso 4: Pandeo global de una estructura: Método lineal	69
3.3.5.	Caso 5: Pandeo global de una estructura: Método no lineal.....	74
4.	ANÁLISIS DE PANDEO MEDIANTE SOFTWARE DE SIMULACIÓN.....	79
4.1.	Simulation Mechanical 2014.....	80
4.1.1.	Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión	80
4.1.2.	Caso 2: Pandeo lateral o vuelco	94
4.1.3.	Caso 3: Pandeo con cargas combinadas	97
4.1.4.	Caso 4: Pandeo global de una estructura. Método lineal	103

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

5.	ANÁLISIS DE PANDEO MEDIANTE CTE DB SE-A.....	107
5.1.	Introducción.....	108
5.2.	Ecuaciones de Pandeo según DB SE-A.....	109
5.2.1.	Tensión máxima teórica y real.	109
5.2.2.	Cálculo a pandeo con la normativa Española: DB-SE-A (2007).....	110
5.2.3.	Curvas europeas de pandeo.....	110
5.2.4.	Comprobaciones a Pandeo Lateral.....	112
5.2.5.	Comprobaciones a Pandeo con torsión.....	116
5.3.	Ejemplo de cálculo mediante DB SE-A.....	117
5.3.1.	Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión.....	117
5.3.2.	Caso 2: Pandeo lateral o vuelco.....	122
5.3.3.	Caso 3: Pandeo con cargas combinadas.....	125
6.	VALORACIÓN DE RESULTADOS.....	129
6.1.	Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión.....	130
6.2.	Caso 2: Pandeo lateral o vuelco.....	132
6.3.	Caso 3: Pandeo con cargas combinadas.....	133
6.4.	Caso 4: Pandeo global de una estructura. Método lineal.....	133
7.	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	135
7.1.	Conclusiones.....	136
7.2.	Trabajos Futuros.....	137
8.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	139
9.	ANEXOS.....	141
	ANEXO I: Tabla perfil IPE 300.....	142
	ANEXO II: Coeficientes parciales de seguridad.....	143
	ANEXO III: Características mecánicas mínimas de los aceros.....	143
	ANEXO IV: Curva de pandeo en función de la sección transversal.....	144
	ANEXO V: Factor de imperfección α_{LT}	145
	ANEXO VI: Valor del factor C_1 correspondiente a los valores del factor K_ϕ	146

**Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T**

ANEXO VII: Coeficientes del momento equivalente	147
ANEXO VIII: Informe parte 1 "Mathematica"	148
ANEXO IX: Informe parte 2 "Simulation Mechanical"	161
ANEXO X: Informe parte 3 "CYPE"	173

I. ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1.1	Casco de acero utilizado en la edad media.....	20
Figura 1.1.2	Perfiles de acero laminados.....	20
Figura 1.1.3	Pandeo de una columna.....	21
Figura 2.1.1	– Fenómeno de inestabilidad por pandeo.....	26
Figura 2.2.1	Deformadas en pandeo.....	27
Figura 2.2.2	Pandeo Lateral o Vuelco	28
Figura 3.2.1	Sentido positivo de las magnitudes.....	34
Figura 3.2.2	Desplazamiento del punto N.....	35
Figura 3.2.3	Coeficiente \bar{K}	38
Figura 3.2.4	Desplazamiento nodal de un elemento	39
Figura 3.2.5	Sistema de coordenadas global y local	49
Figura 3.3.1.1	Viga biapoyada sometida a compresión	52
Figura 3.3.1.2.1	Carga de pandeo 1 (P_1)	54
Figura 3.3.1.2.2	Modo de pandeo para la carga 1 (P_1)	54
Figura 3.3.1.2.3	Carga de pandeo 2 (P_2)	55
Figura 3.3.1.2.4	Modo de pandeo para la carga 2 (P_2)	56
Figura 3.3.1.2.5	Carga de pandeo 3 (P_3)	56
Figura 3.3.1.2.6	Modo de pandeo para la carga 3 (P_3)	57
Figura 3.3.1.2.7	Carga de pandeo 4 (P_4)	57
Figura 3.3.1.2.8	Modo de pandeo para la carga 4 (P_4)	58
Figura 3.3.1.2.9	Carga de pandeo 5 (P_5)	58
Figura 3.3.1.2.10	Modo de pandeo para la carga 5 (P_5)	59
Figura 3.3.1.2.11	Carga de pandeo 6 (P_6)	59

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Figura 3.3.1.2.12 Modo de pandeo para la carga 6 (P_6)	60
Figura 3.3.2.1 Viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados.....	61
Figura 3.3.2.2.1 Carga de pandeo (M_{cr})	63
Figura 3.3.2.2.2 Primer modo de pandeo para M_{cr}	63
Figura 3.3.2.2.3 Segundo modo de pandeo para M_{cr}	64
Figura 3.3.3.1 Viga biapoyada sometida a distintos estados de cargas	65
Figura 3.3.3.2.1 Primer modo de pandeo para M_{cr} y $P=+10^5$	66
Figura 3.3.3.2.2 Segundo modo de pandeo para M_{cr} y $P=+10^5$	67
Figura 3.3.3.2.3 Primer modo de pandeo para M_{cr} y $P=-10^5$	67
Figura 3.3.3.2.4 Segundo modo de pandeo para M_{cr} y $P=-10^5$	67
Figura 3.3.4.1 Estructura con cargas puntuales	69
Figura 3.3.4.2.1 Esquema método lineal.....	72
Figura 3.3.4.3.1 Coeficiente de pandeo	72
Figura 3.3.5.2.1 Esquema método no lineal de una iteración.....	77
Figura 3.3.5.3.1 Coeficiente de pandeo	78
Figura 4.2.1.1.1 Viga biapoyada con dos cargas puntuales en un extremo.....	81
Figura 4.2.1.2.1 Primer modo de pandeo. Vista superior	82
Figura 4.2.1.2.2 Primer modo de pandeo. Vista 3D.....	83
Figura 4.2.1.2.3 Segundo modo de pandeo. Vista lateral	84
Figura 4.2.1.2.4 Segundo modo de pandeo. Vista 3D	85
Figura 4.2.1.2.5 Tercer modo de pandeo. Vista superior.....	86
Figura 4.2.1.2.6 Tercer modo de pandeo. Vista 3D	87
Figura 4.2.1.2.7 Cuarto modo de pandeo. Vista lateral	88
Figura 4.2.1.2.8 Cuarto modo de pandeo. Vista 3D.....	89
Figura 4.2.1.2.9 Quinto modo de pandeo. Vista superior.....	90

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Figura 4.2.1.2.10	Quinto modo de pandeo. Vista 3D.....	91
Figura 4.2.1.2.11	Sexto modo de pandeo. Vista frontal.....	92
Figura 4.2.1.2.12	Sexto modo de pandeo. Vista 3D.....	93
Figura 4.2.2.1.1	Viga biapoyada con dos momentos concentrados en los extremos..	94
Figura 4.2.2.2.1	Modo de pandeo para pandeo lateral. Vista lateral.....	95
Figura 4.2.2.2.2	Modo de pandeo para pandeo lateral. Vista superior.....	95
Figura 4.2.2.2.3	Modo de pandeo para pandeo lateral. Vista 3D	96
Figura 4.2.3.1.1	Viga biapoyada con dos momentos concentrados en los extremos y con cargas puntuales.....	97
Figura 4.2.3.2.1	Modo de pandeo para cargas combinadas (tracción). Vista lateral ...	98
Figura 4.2.3.2.2	Modo de pandeo para cargas combinadas (tracción). Vista superior	99
Figura 4.2.3.2.3	Modo de pandeo para cargas combinadas (tracción). Vista 3D.....	100
Figura 4.2.3.2.4	Modo de pandeo para cargas combinadas (compresión). Vista lateral	101
Figura 4.2.3.2.5	Modo de pandeo para cargas combinadas (compresión). Vista superior	101
Figura 4.2.3.2.6	Modo de pandeo para cargas combinadas (compresión). Vista 3D	102
Figura 4.2.4.1.1	Estructura con cargas puntuales	104
Figura 4.2.4.2.1	Modo de pandeo global de la estructura. Vista 3D	105
Figura 5.1.1	Comportamiento de un pilar sometido a cargas de compresión.....	108
Figura 5.2.1.1	Viga biapoyada sometida a cargas de compresión.....	109
Figura 5.2.3.1	Curvas de pandeo	111
Figura 5.3.1.1	Coeficiente de pandeo en el eje η	119
Figura 5.3.1.2	Coeficiente de pandeo en el eje ξ	120
Figura 6.1.1	Comparación de resultados para el caso 1	130
Figura 6.2.1	Comparación de resultados para el caso 2.....	132

**Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T**

Figura 6.3.1 Comparación de resultados para el caso 3133

Figura 6.4.1 Comparación de resultados para el caso 4.....133

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

El acero es una aleación de hierro y carbono con unas excelentes propiedades mecánicas que se usa para todo tipo de aplicaciones. Este material ya se empezaba a usar en la Edad Media, por ejemplo en la fabricación de cascos para guerreros (Figura 1.1.1), y desde entonces, la demanda del mismo ha crecido exponencialmente hasta la actualidad.



Figura 1.1.1 - Casco de acero utilizado en la edad media.

Entre las diversas aplicaciones que tiene el acero, una fundamental es la fabricación de perfiles de acero (laminados, conformados, armados, etc.). Es por este motivo por el que nos vemos obligados a realizar estudios sobre el comportamiento de los perfiles en diferentes situaciones (comportamiento del acero ante la aplicación de cargas, comportamiento del mismo ante diferentes atmósferas, etc.). En la figura 1.1.2, se muestran diversos tipos de perfiles de acero laminados que son utilizados en la actualidad.



Figura 1.1.2 - Perfiles de acero laminados.

Para el caso del comportamiento del acero ante la aplicación de cargas, se sabe que un perfil trabaja ante un determinado estado de cargas transmitiendo unos esfuerzos y produciendo una deformada de flexión de la viga.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Si estas cargas están aplicadas en el sentido longitudinal de la viga y además son de compresión, se puede producir un fenómeno de inestabilidad con deformaciones de flexión y torsión. En la figura 1.1.3 se muestra un perfil con una carga de compresión en el que se ilustra el fenómeno de pandeo con deformaciones en el plano de la estructura.

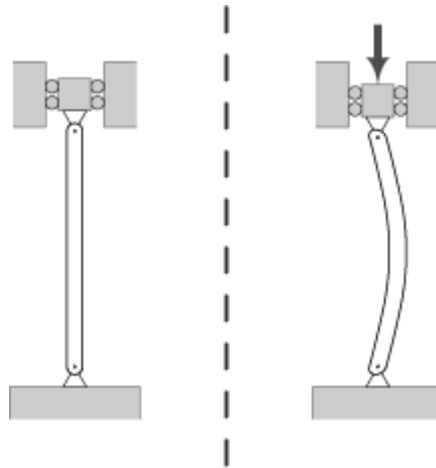


Figura 1.1.3 - Pandeo de una columna.

Este fenómeno aparece principalmente en pilares y columnas, y se traduce en la aparición de una flexión adicional, o una torsión, o las dos simultáneamente en el pilar cuando el mismo se encuentra sometido a tensiones de compresión.

1.2. Objetivos

El presente trabajo tratará de continuar estudiando los conceptos que se han estudiado en la carrera respecto a este tipo de inestabilidad, pasando del estudio de estructuras planas con 6 grados de libertad a estructuras tridimensionales con 14 grados de libertad.

Del mismo modo, se profundizará en las diferentes formas deformadas o modos, que pueden producirse por el fenómeno de pandeo y los valores de los factores críticos de carga que potencialmente lo provocan.

Para contrastar resultados, se resolverán cada uno de los casos por tres métodos diferentes. En primer lugar, se resolverá los diferentes casos mediante el uso del Método directo de la Rigidez y para facilitar los cálculos del mismo, se empleará un software propio desarrollado con el manipulador simbólico *Mathematica v10*. En

segundo lugar, se simulará el comportamiento para los diferentes casos, mediante el Método de los Elementos Finitos con ayuda del software *Autodesk Simulation Mechanical 2015*. Por último, se aplicará el Código Técnico de la Edificación para contrastar los anteriores resultados. Para este último método, los resultados serán contrastados con el software específico de cálculo de estructuras *CYPE 2015h*.

Para todos los casos analizados, se utilizarán perfiles IPE 300.

A continuación, se enumeran otros objetivos de este proyecto:

- Familiarizarse con el uso de la normativa actual para el cálculo de estructuras.
- Ampliar el manejo de diferentes herramientas de modelado, simulación y cálculo.

1.3. Estructura del trabajo

El presente trabajo está organizado en varios temas siguiendo la siguiente metodología:

El apartado 1 contempla la introducción del trabajo, en el cual se desarrolla la motivación, los objetivos y la estructura del trabajo.

En el siguiente apartado, se desarrolla el tema y los conceptos necesarios sobre el pandeo de elementos para un correcto seguimiento de este trabajo.

En el apartado 3, se realiza el cálculo mediante el Método Directo de la Rigidez (MDR), para el cual lo primero se expone la base teórica sobre la que se asienta este método y a continuación se hace uso de este método para resolver unos ejemplos sobre cálculo de cargas de pandeo. Todos los cálculos se harán mediante el software *Mathematica*.

A continuación, para contrastar resultados, se simula cada uno de los casos vistos en el apartado anterior. Para esto, se hace uso del software de simulación *Simulation Mechanical* en su versión 2014.

En el siguiente apartado, abrimos el Código Técnico de la Edificación (CTE) para ver cómo se trata todo el tema de pandeo de estructuras desde un aspecto de la normativa. Para ello, se aplica el "Documento Básico de Seguridad Estructural-Acero" (DB-SE-A) a los diferentes casos vistos en los apartados anteriores. Todos estos resultados serán contrastados con el software *CYPE 2015h*.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

En el apartado 6, se realiza una comparación de los resultados obtenidos por los tres métodos vistos anteriormente.

En el apartado 7, se incluyen las conclusiones de este trabajo y a continuación se enumeran las referencias bibliográficas usadas.

En el último apartado del documento se encuentran las diferentes tablas que se han usado a lo largo del proyecto para la realización de los cálculos. Y para concluir se adjunta un informe de cada método de resolución. Para el primer método de resolución se adjunta el código realizado y para los dos siguientes métodos se exporta directamente los informes.

2. TEORÍA DE PANDEO

2.1. Pandeo de estructuras

Para el estudio del pandeo con deformaciones de flexión, se puede analizar la siguiente estructura sencilla:

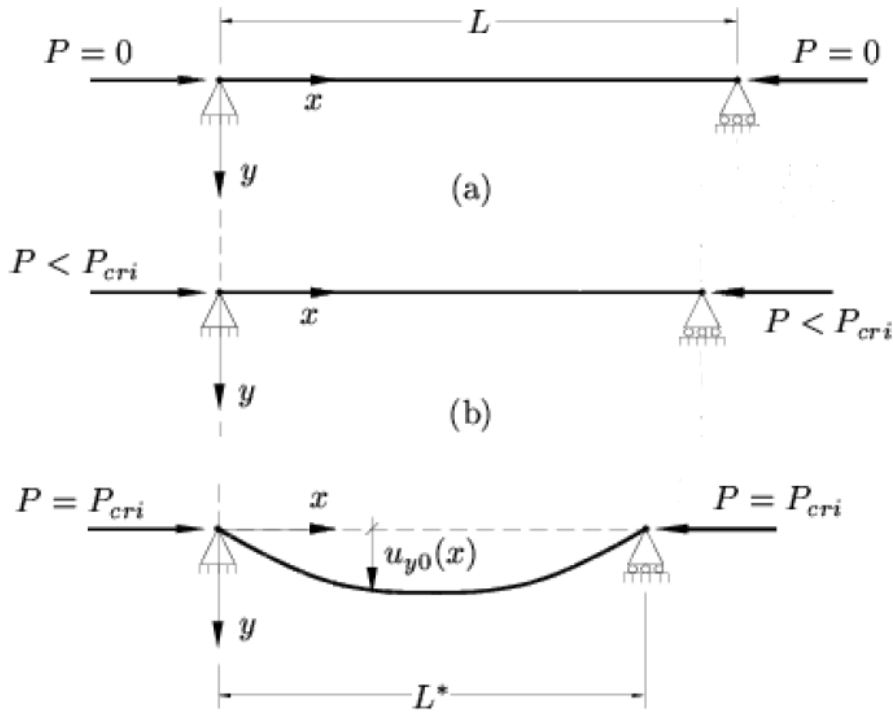


Figura 2.1.1 – Fenómeno de inestabilidad por pandeo. [3]

Para el caso (a), la viga está libre de cargas, por lo que los desplazamientos son nulos.

En el caso (b), se aplica una carga de compresión en la dirección axial de la viga que produce un acortamiento de la barra. Esta carga es inferior a la crítica, por lo que los desplazamientos que se producen son muy pequeños. Estos desplazamientos pueden ser calculados mediante la teoría de la elasticidad:

$$U_{x0} = \frac{-P}{AE} \cdot X \quad (2.1.1)$$

Se observa que estos desplazamientos son proporcionales a la carga aplicada, a las características de la sección, las características del material y a la posición de la barra en la que se quieran calcular estos.

Por último, para el caso (c), la carga aplicada supera el valor de la carga crítica, lo que produce que la viga flecte súbitamente y aparezcan grandes desplazamientos

transversales para incrementos muy pequeños de carga, es lo que se conoce como fenómeno de pandeo.

Para este caso, los desplazamientos no son proporcionales a las cargas, por lo que no van a poder ser calculados mediante la ecuación (2.1.1.)

2.2. Tipos de deformaciones en pandeo

Cuando una estructura es sometida al nivel de carga crítica se pueden producir una serie de deformaciones en el mismo:

- 1) Pandeo con deformaciones de flexión: Es el tipo de pandeo más común. Al aplicar cargas en los extremos de valor superior a la carga crítica de la viga, se genera una curvatura adicional repentina en la directriz del elemento estructural.

En la figura 2.2.1 (a) se observa este tipo de deformada.

- 2) Pandeo con deformaciones de flexión y torsional: En este tipo de pandeo, se produce una combinación de los dos tipos de deformaciones indicadas (véase la figura 2.2.1), es decir la deformada de la viga es una combinación de flexión y torsión.

En la figura 2.2.1 (c) se observa este tipo de deformada.

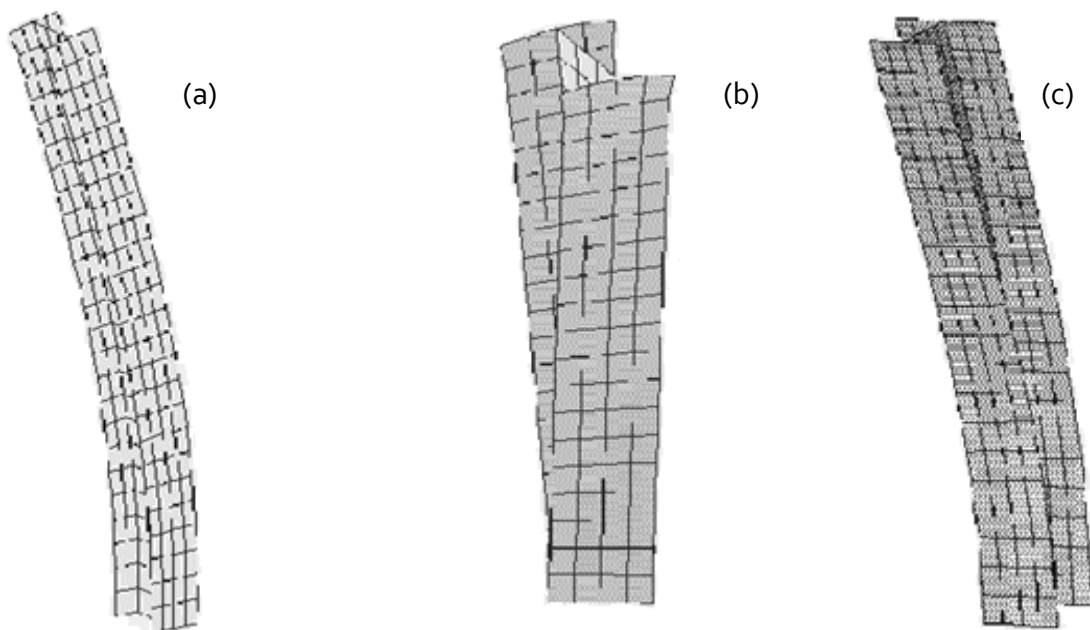


Figura 2.2.1 - Deformadas en pandeo.

Otro fenómeno que es objeto de estudio es el Pandeo Lateral o Vuelco.

En este tipo de pandeo, se produce una combinación de deformadas de torsión y flexión. La diferencia con el pandeo flexo-torsional, es que este se produce por cargas de compresión y el Pandeo Lateral se produce por la aplicación de cargas que generan una flexión en la viga.

En la figura 2.2.2 se observa este tipo de fenómeno.

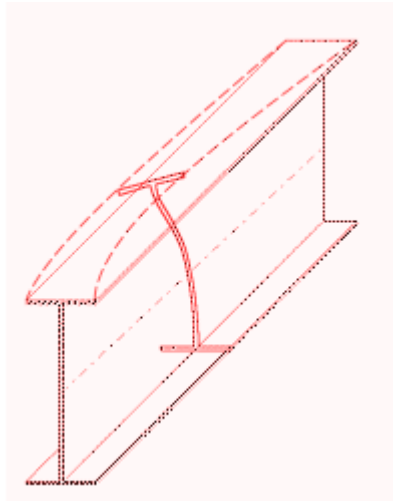


Figura 2.2.2 - Pandeo Lateral o Vuelco.

2.3. Tipos de perfiles

La sección transversal de una barra simple puede ser:

- Simetría doble o de simetría puntual
- Simetría simple
- Sin simetría

En función del tipo de sección transversal que se vaya a estudiar, hay que tener en cuenta qué tipo de deformaciones en pandeo se pueden dar en cada caso.

- **Simetría doble o simetría puntual**

Para este tipo de secciones, se pueden producir tres clases de deformadas a la hora de producirse el pandeo de una viga:

- Pandeo por flexión en el plano Oxz.
- Pandeo por flexión en el plano Oxy.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

- Pandeo por torsión alrededor del centro de esfuerzos cortantes (abreviado cec).

En general, no podrán darse simultáneamente una combinación de varias clases de deformadas.

- Simetría simple

En este caso, se puede producir dos tipos de deformada a la hora de producirse el pandeo de la viga:

- Pandeo por flexión en el plano Oxy (plano de simetría).
- Pandeo por flexión en el plano Oxz (plano de no simetría) y torsión respecto del centro de esfuerzos cortantes.

- Sin simetría

Para el caso de secciones que no poseen ningún tipo de simetría sólo se puede originar un tipo de deformada una vez alcanzada la carga crítica:

- Pandeo por flexión en ambos planos y torsión.

3. ANÁLISIS DE PANDEO MEDIANTE MDR3D

3.1. Simplificaciones habituales

Para el estudio del pandeo en barras, se tomarán una serie de hipótesis para simplificar los cálculos. Las simplificaciones son las siguientes:

- 1) **Material homogéneo e isótropo:** Se utilizarán materiales (acero) en los que haya una perfecta homogeneidad del material e isótropos en los que no haya un cambio de propiedades en función de la dirección.
- 2) **Ausencia de efectos dinámicos:** Las cargas serán aplicadas con la suficiente lentitud como para despreciar los efectos de inercia y mantener el equilibrio estático en cualquier momento.
- 3) **Comportamiento elástico:** El sólido recupera la forma inicial cuando se produce el cese de la aplicación de cargas.
- 4) **Comportamiento lineal.**
- 5) **Pequeñas deformaciones.**
- 6) **Pequeños desplazamientos:** Se considerarán pequeños desplazamientos en el instante de pandeo.
- 7) **Barra esbelta:** Se considerarán barras de suficiente esbeltez como para que aparezcan fenómenos de inestabilidad en la misma.
- 8) **Sección constante:** Para la resolución del pandeo de una barra, se utilizarán barras con secciones constantes a lo largo de toda su longitud.
- 9) **Ejes principales de inercia:** Los ejes perpendiculares al considerado a lo largo de la longitud de la barra, serán ejes principales de inercia.
- 10) **Sin imperfecciones geométricas:** La barra se considerará que está libre de este tipo de imperfecciones.
- 11) **Libre de tensiones residuales:** Se considerará que el material está libre de tensiones residuales, es decir, que para cargas nulas la tensión y las deformaciones del mismo serán también nulas.
- 12) **Compresión centrada:** Las cargas aplicadas axialmente estarán aplicadas en el centro de gravedad de la sección y en la dirección de la directriz de la barra.

3.2. Ecuaciones de pandeo

Para el estudio del comportamiento a pandeo de las diferentes estructuras que serán analizadas, se utilizará el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

El Principio de los Trabajos Virtuales, establece que para una deformación virtual infinitamente pequeña de un cuerpo que se encuentra en equilibrio, el trabajo virtual de las fuerzas exteriores es igual al trabajo virtual interno de deformación.

$$\int_V (\sigma_\zeta \delta \epsilon_\zeta + \sigma_\xi \delta \epsilon_\xi + \sigma_\eta \delta \epsilon_\eta + \tau_{\zeta\eta} \delta \gamma_{\zeta\eta} + \tau_{\xi\zeta} \delta \gamma_{\xi\zeta} + \tau_{\eta\zeta} \delta \gamma_{\eta\zeta}) dV = \int_S t_i \delta u_i ds \quad (3.2.1)$$

donde:

- Tensión normal: $\sigma_\zeta, \sigma_\xi, \sigma_\eta$
- Tensiones tangenciales $\tau_{\zeta\eta}, \tau_{\xi\zeta}, \tau_{\eta\zeta}$
- Desplazamientos virtuales: $\delta \epsilon_\zeta, \delta \epsilon_\xi, \delta \epsilon_\eta, \delta \gamma_{\zeta\eta}, \delta \gamma_{\xi\zeta}, \delta \gamma_{\eta\zeta}$
- Fuerzas de superficie (por unidad de longitud): $t_i, q_\zeta, q_\xi, q_\eta$

Vamos a realizar la aproximación de secciones de pared delgada y abierta, ya que se ha comprobado, que para estas condiciones, se puede producir más fácilmente el fallo por torsión, que en otro tipo de secciones.

Para el caso de barras esbeltas: $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau_{\zeta\eta} = 0$

Aplicando las aproximaciones anteriores, el Principio de los Trabajos Virtuales puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int_V (\sigma_\zeta \delta \epsilon + \tau_{\xi\zeta} \delta \gamma_{\xi\zeta} + \tau_{\eta\zeta} \delta \gamma_{\eta\zeta}) dV = \int_S t_i \delta u_i ds \quad (3.2.2)$$

En la figura 3.2.1, se muestra la dirección de todas las componentes así como el sentido positivo de los esfuerzos.

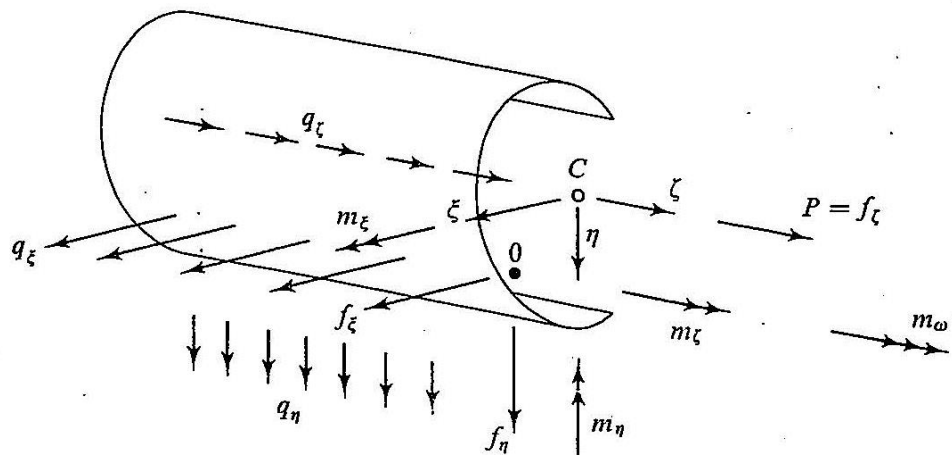


Figura 3.2.1 - Sentido positivo de las magnitudes. [1]

m_w representa el esfuerzo interno llamado Bimomento, el cual es debido a las tensiones normales a la sección transversal, que se producen debido al alabeo de la sección en problemas de torsión no uniforme, ya que nos encontramos ante perfiles de sección no circular.

f_ζ , m_ξ y m_η están reducidos al punto C, el origen de coordenadas y centro de gravedad de la sección.

f_η , f_ξ y m_ζ están reducidos al punto O, el centro de esfuerzos cortantes de la sección.

- Equivalencia estática entre tensiones y esfuerzos

Donde las fuerzas externas y las fuerzas internas (tensiones y esfuerzos) están en equilibrio.

$$f_\eta = \int_A \tau_{\eta\zeta} dA = \frac{dm_\xi}{d\zeta} = m'_\xi \quad (3.2.3)$$

$$f_\xi = \int_A \tau_{\xi\zeta} dA = \frac{dm_\eta}{d\zeta} = m'_\eta \quad (3.2.4)$$

$$f_\zeta = \int_A \sigma dA = P \quad (3.2.5)$$

$$m_\xi = \int_A \sigma \eta dA \quad (3.2.6)$$

$$m_\eta = \int_A \sigma \xi dA \quad (3.2.7)$$

$$m_{\zeta} = T_{\omega} + T_{sv}; T_{\omega} = -m'_{\omega} \quad (3.2.8)$$

$$m_{\omega} = \int_A \sigma \omega dA \quad (3.2.9)$$

Donde ω representa el área sectorial con polo en el centro de esfuerzos cortantes y T_{sv} corresponde al término de torsión uniforme.

- Relación deformaciones-desplazamientos

$$\varepsilon = u_{\zeta,\zeta} + \frac{1}{2} (u_{\xi,\zeta}^2 + u_{\eta,\zeta}^2 + u_{\zeta,\zeta}^2) \quad (3.2.10)$$

$$\gamma_{\xi\zeta} = u_{\zeta,\xi} + u_{\xi,\zeta} + (u_{\xi,\xi}u_{\xi,\zeta} + u_{\eta,\xi}u_{\eta,\zeta} + u_{\zeta,\xi}u_{\zeta,\zeta})$$

$$\gamma_{\eta\zeta} = u_{\zeta,\eta} + u_{\eta,\zeta} + (u_{\xi,\eta}u_{\xi,\zeta} + u_{\eta,\eta}u_{\eta,\zeta} + u_{\zeta,\eta}u_{\zeta,\zeta})$$

donde:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \text{ y } x' = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \quad (3.2.11)$$

- Hipótesis de pequeños desplazamientos

Definimos el punto N, como un punto del contorno

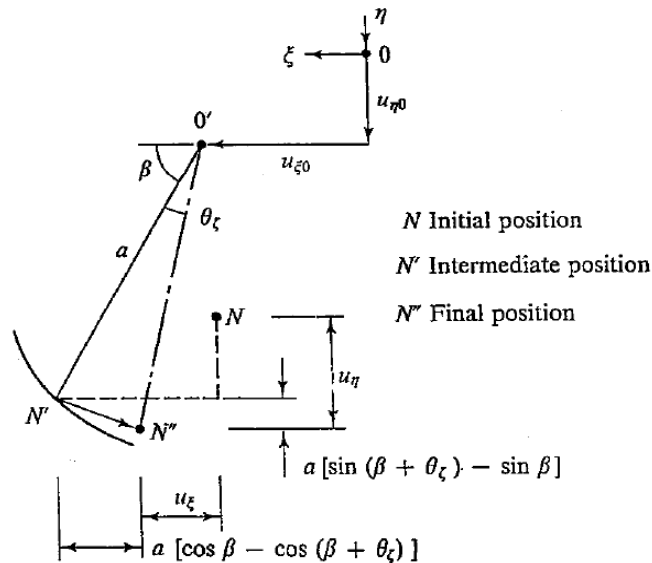


Figura 3.2.2 - Desplazamiento del punto N. [1]

Operando, podemos calcular los desplazamientos del punto N.

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= u_{\xi 0} - a \cdot \cos \beta (1 - \cos \theta_{\zeta}) - a \cdot \sin \beta \sin \theta_{\zeta} \\ u_{\eta} &= u_{\eta 0} + a \cdot \cos \beta \sin \theta_{\zeta} - a \cdot \sin \beta (1 - \cos \theta_{\zeta}) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$a \cdot \cos \beta = (\xi - e_{\xi})$$

$$a \cdot \sin \beta = (\eta - e_{\eta})$$

Donde $u_{\xi}, u_{\eta}, u_{\zeta}$, son los desplazamientos en los distintos ejes del punto N escogido y $u_{\xi 0}, u_{\eta 0}, u_{\zeta 0}$ representan los desplazamientos del punto O'.

θ_{ζ} representa el ángulo girado de la sección transversal respecto axial.

Operando las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= u_{\xi 0} - (\eta - e_{\eta}) \sin \theta_{\zeta} - (\xi - e_{\xi})(1 - \cos \theta_{\zeta}) \\ u_{\eta} &= u_{\eta 0} + (\xi - e_{\xi}) \sin \theta_{\zeta} - (\eta - e_{\eta})(1 - \cos \theta_{\zeta}) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

En base a la hipótesis de pequeños desplazamientos: ($\sin \theta_{\zeta} = \theta_{\zeta}$, $\cos \theta_{\zeta} = 1$):

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= u_{\xi 0} - (\eta - e_{\eta}) \theta_{\zeta} \\ u_{\eta} &= u_{\eta 0} + (\xi - e_{\xi}) \theta_{\zeta} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Respecto al desplazamiento en el otro eje:

$$u_{\zeta} = u_{\zeta 0} - \eta u'_{\eta 0} - \xi u'_{\xi 0} + \omega \theta'_{\zeta} \quad (3.2.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.2.10) en la ecuación (3.2.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(P \delta u'_{\zeta 0} - m_{\xi} \delta u''_{\eta 0} - m_{\eta} \delta u''_{\xi 0} + m_w \delta \theta''_{\zeta} + T_{sv} \delta \theta'_{\zeta} \right) \delta \zeta + \\ & \int_0^L \left(f_{\xi} \delta (\theta_{\zeta} u'_{\eta 0}) - f_{\eta} \delta (\theta_{\zeta} u'_{\xi 0}) + \frac{P}{2} \delta (u_{\xi 0}^2 + u_{\eta 0}^2 + 2e_{\eta} u'_{\xi 0} \theta'_{\zeta} - 2e_{\xi} u'_{\eta 0} \theta'_{\zeta}) \right) \delta \zeta + \\ & \int_0^L \left(m_{\eta} \delta (u'_{\eta 0} \theta'_{\zeta}) - m_{\xi} \delta (u'_{\xi 0} \theta'_{\zeta}) + \frac{\bar{K}}{2} \delta (\theta'_{\zeta})^2 \right) \delta \zeta = \int_0^L \left(q_{\eta} \delta u_{\eta 0} + q_{\xi} \delta u_{\xi 0} + q_{\zeta} \delta u_{\zeta 0} \right) \delta \zeta + \\ & \left(P \delta u_{\zeta 0} + f_{\xi} \delta u_{\xi 0} + f_{\eta} \delta u_{\eta 0} - m_{\xi} \delta u'_{\eta 0} - m_{\eta} \delta u'_{\xi 0} + m_{\zeta} \delta \theta_{\zeta} + m_{\omega} \delta \theta'_{\zeta} \right)_0^L \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

- Ecuaciones de compatibilidad y ecuaciones de comportamiento

Los movimientos de la estructura son compatibles con las deformaciones de los elementos y de las condiciones de contorno, y para el caso de las ecuaciones de comportamiento, se cumple la Ley de Hooke, es decir, las deformaciones son proporcionales a las tensiones.

$$P = EAu'_{\zeta} \quad (3.2.17)$$

$$m_{\xi} = -EI_{\xi}u''_{\eta 0} \quad (3.2.18)$$

$$m_{\eta} = -EI_{\eta}u''_{\xi 0} \quad (3.2.19)$$

$$m_{\omega} = EI_{\omega}\theta'_{\zeta} \quad (3.2.20)$$

$$T_{sv} = GK_T\theta'_{\zeta} \quad (3.2.21)$$

- Cálculo de magnitudes

A continuación, calculamos algunas incógnitas que serán de utilidad:

$$A = \int_A dA \quad (3.2.22)$$

$$I_{\xi} = \int_A \eta^2 dA \quad (3.2.23)$$

$$I_{\eta} = \int_A \xi^2 dA \quad (3.2.24)$$

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad (3.2.25)$$

$$K_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N b_i e_i^3 \quad (3.2.26)$$

Si sustituimos las ecuaciones de compatibilidad, comportamiento y las magnitudes en la ecuación (3.2.16), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left(EAu'_{\zeta} \delta u'_{\zeta} + EI_{\xi} u''_{\eta_0} \delta u''_{\eta_0} + EI_{\eta} u''_{\xi_0} \delta u''_{\xi_0} + EI_{\omega} \theta''_{\zeta} \delta \theta''_{\zeta} + GK_T \theta'_{\zeta} \delta \theta'_{\zeta} \right) \delta \zeta + \\
 & \int_0^L \left(f_{\xi} \delta(\theta_{\zeta} u'_{\eta_0}) - f_{\eta} \delta(\theta_{\zeta} u'_{\xi_0}) + \frac{P}{2} \delta(u_{\xi_0}^2 + u_{\eta_0}^2) + 2e_{\eta} u'_{\xi_0} \theta'_{\zeta} - 2e_{\xi} u'_{\eta_0} \theta'_{\zeta} \right) \delta \zeta + \\
 & \int_0^L \left(m_{\eta} \delta(u'_{\eta_0} \theta'_{\zeta}) - m_{\xi} \delta(u'_{\xi_0} \theta'_{\zeta}) + \frac{\bar{K}}{2} \delta(\theta'_{\zeta})^2 \right) \delta \zeta = \int_0^L (q_{\eta} \delta u_{\eta_0} + q_{\xi} \delta u_{\xi_0} + q_{\zeta} \delta u_{\zeta}) \delta \zeta + \\
 & \left(P^* \delta u_{\zeta} + f_{\xi}^* \delta u_{\xi_0} + f_{\eta}^* \delta u_{\eta_0} - m_{\xi}^* \delta u'_{\eta_0} - m_{\eta}^* \delta u'_{\xi_0} + m_{\zeta}^* \delta \theta_{\zeta} + m_{\omega}^* \delta \theta'_{\zeta} \right)_0^L
 \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

donde:

$$\bar{K} = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA \tag{3.2.28}$$

La ecuación (3.2.28) representa el coeficiente que tiene en cuenta el efecto Wagner, esto es debido al efecto de segundo orden de las tensiones normales en el problema de torsión.

Donde "a" está referida al centro de esfuerzos cortantes de la sección.

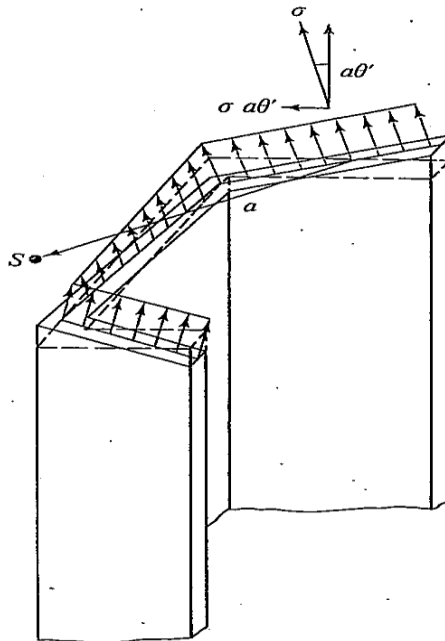


Figura 3.2.3 - Coeficiente \bar{K} . [11]

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Esta ecuación solo es válida para el caso de secciones de pared delgada y despreciando términos de orden superior.

Para la resolución de este tipo de problemas, utilizamos la formulación de MDR, ya que lo que buscamos es que la solución converja a la solución exacta del problema.

Para un elemento de una barra 3D, la relación deformación-desplazamiento contiene derivadas segundas en el desplazamiento lateral y giro, y una primera derivada en el desplazamiento axial. Por lo tanto es necesario elegir la función de desplazamiento de manera que $u_{\zeta c}; u_{\xi 0}; \theta_{\eta 0} = u'_{\xi 0}; u_{\eta 0}; \theta_{\xi 0} = u'_{\eta 0}; \theta_{\zeta}; \theta'_{\zeta}$ deben ser continuas en los nodos.

Esto puede lograrse mediante la adopción de un campo de desplazamiento lineal para $u_{\zeta c}$ ($[n_1]$) y un campo de desplazamiento cúbico para los otros grados de libertad ($[n_3]$).

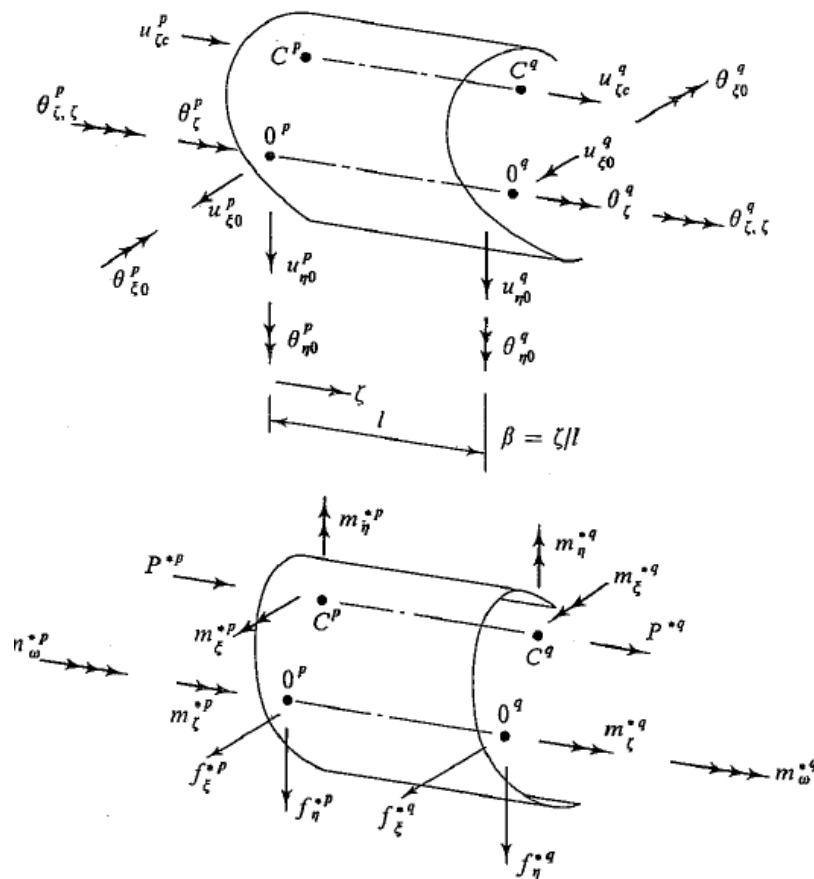


Figura 3.2.4 - Desplazamiento nodal en un elemento. [1]

$u_{\xi 0}$ puede escribirse como:

$$u_{\xi 0} = (1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (3.2.29)$$

$$\theta_{\eta 0} = \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} = (0 \quad 1 \quad 2\xi \quad 3\xi^2) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (3.2.30)$$

Si sustituimos los valores de ξ en los puntos p y q del inicio y final del elemento de la barra, obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} u_{\xi 0}^p \\ \theta_{\eta 0}^p \\ u_{\xi 0}^q \\ \theta_{\eta 0}^q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [A_\alpha] \{\alpha\} \quad (3.2.31)$$

También podemos escribir $u_{\xi 0}$ como:

$$u_{\xi 0}(\beta) = (1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3) [A_\alpha]^{-1} \begin{Bmatrix} u_{\xi 0}^p \\ \theta_{\eta 0}^p \\ u_{\xi 0}^q \\ \theta_{\eta 0}^q \end{Bmatrix} = (n_3) \{\underline{u}_{\xi 0}\} \quad (3.2.32)$$

Siendo $\underline{u}_{\xi 0}$ el desplazamiento nodal.

$$[n_3] = (1 - 3\beta^2 + 2\beta^3; \beta - 2\beta^2 + \beta^3; 3\beta^2 - 2\beta^3; \beta^3 - \beta^2) \quad (3.2.33)$$

$$\beta = \xi / L \quad (3.2.34)$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

$$u_{\xi 0} = (u_{\xi 0}^p; L\theta_{\eta 0}^p; u_{\xi 0}^q; L\theta_{\eta 0}^q)^T \quad (3.2.35)$$

Para el cálculo de las demás magnitudes $u_{\zeta c}; u_{\eta 0}; \theta_{\zeta}$ se procede de la misma manera.

$$\begin{aligned} u_{\zeta c} &= [n_1] \{u_{\zeta c}\}; & \{u_{\zeta c}\} &= (u_{\zeta c}^p; u_{\zeta c}^q)^T \\ u_{\eta 0} &= [n_3] \{u_{\eta 0}\}; & \{u_{\eta 0}\} &= (u_{\eta 0}^p; L\theta_{\xi 0}^p; u_{\eta 0}^q; L\theta_{\xi 0}^q)^T \\ \theta_{\zeta} &= [n_3] \{\theta_{\zeta}\}; & \{\theta_{\zeta}\} &= (\theta_{\zeta}^p; L\theta_{\zeta, \zeta}^p; \theta_{\zeta}^q; L\theta_{\zeta, \zeta}^q)^T \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Siendo:

$$[n_1] = (1 - \beta \ ; \ \beta) \quad (3.2.37)$$

Por lo que en cada nodo de un elemento hay 7 grados de libertad:

$$u_{\xi 0}, \theta_{\xi 0}, u_{\eta 0}, \theta_{\eta 0}, u_{\zeta c}, \theta_{\zeta}, \theta_{\zeta, \zeta}$$

- Los desplazamientos en los tres ejes
- Los giros en los tres ejes
- La derivada del giro longitudinal, que es una magnitud proporcional a los desplazamientos de alabeo por torsión de la sección.

La ecuación de equilibrio para una sección de pared delgada, puede ser obtenida sustituyendo las ecuaciones (3.2.36) de cada uno de los desplazamientos nodales en la ecuación (3.2.27).

Los términos contenidos en el primer término de la ecuación (3.2.27), constituyen la matriz de rigidez inicial $[K_s]$ y los términos restantes, representan la matriz de rigidez geométrica $[K_g]$.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Asumiendo que la carga axial es constante y la variación de momentos es lineal a lo largo del elemento, e integrando respecto a β , la ecuación total de equilibrio para el elemento de la viga elástica, se puede escribir como las siguientes cuatro ecuaciones:

1) Flexión en el plano $\zeta - \xi$:

$$\frac{EI_\eta}{L^3} K_{33}^{220} \{u_{\xi 0}\} + \frac{P}{L} K_{33}^{110} \{u_{\xi 0}\} + \left(\frac{(Pe_\eta - m_\xi^p)}{L} K_{33}^{110} - f_\eta (K_{33}^{111} + K_{33}^{100}) \right) \{\theta_\zeta\} = \begin{pmatrix} f_\xi^p \\ -m_\eta^p / L \\ f_\xi^q \\ -m_\eta^q / L \end{pmatrix} \quad (3.2.38)$$

2) Flexión en el plano $\zeta - \eta$:

$$\frac{EI_\xi}{L^3} K_{33}^{220} \{u_{\eta 0}\} + \frac{P}{L} K_{33}^{110} \{u_{\eta 0}\} - \left(\frac{(Pe_\xi - m_\eta^p)}{L} K_{33}^{110} - f_\xi (K_{33}^{111} + K_{33}^{100}) \right) \{\theta_\zeta\} = \begin{pmatrix} f_\eta^p \\ -m_\xi^p / L \\ f_\eta^q \\ -m_\xi^q / L \end{pmatrix} \quad (3.2.39)$$

3) Torsión:

$$\left(\frac{EI_\omega}{L^3} K_{33}^{220} + \frac{GK_T}{L} K_{33}^{110} \right) \{\theta_\zeta\} + \left(\frac{(Pe_\eta - m_\xi^p)}{L} K_{33}^{110} - f_\eta (K_{33}^{111} + K_{33}^{010}) \right) \{u_{\xi 0}\} - \left(\frac{(Pe_\xi - m_\eta^p)}{L} K_{33}^{110} - f_\xi (K_{33}^{111} + K_{33}^{010}) \right) \{u_{\eta 0}\} + \left(\frac{\bar{K}^p}{L} K_{33}^{110} + \frac{(\bar{K}^q - \bar{K}^p)}{L} K_{33}^{111} \right) = \begin{pmatrix} m_\zeta^p \\ m_\omega^p / L \\ m_\zeta^q \\ m_\omega^q / L \end{pmatrix} \quad (3.2.40)$$

4) Extensión:

$$\frac{EA}{L} K_{11}^{110} \{u_{gc}\} = \begin{pmatrix} P^p \\ P^q \end{pmatrix} \quad (3.2.41)$$

donde:

$$K_{gh}^{sij} = \int_0^L \beta^j \{n_g^s\} \{n_h^t\} d\beta \quad (3.2.42)$$

Los subíndices g y h corresponden al grado de interpolación, s y t representan el orden de diferenciación, en cuanto a j, representa el factor de multiplicación de β .

Algunas de las matrices utilizadas son las siguientes:

$$30 \cdot K_{33}^{110} = \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad 30 \cdot K_{33}^{111} = \begin{bmatrix} 18 & 3 & -18 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1/2 \\ -18 & -3 & 18 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$30 \cdot K_{33}^{100} = \begin{bmatrix} -15 & -3 & -15 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 1/2 \\ 15 & 3 & 15 & -3 \\ -3 & -1/2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad K_{33}^{220} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K_{33}^{010} = (K_{33}^{100})^T \quad K_{11}^{110} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay que recordar que estas matrices se obtienen de la agrupación de términos una vez resuelto el PFV y que se expresan de esta manera.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Por lo que la matriz de rigidez de manera genérica, en coordenadas locales, queda de la siguiente manera:

$$K = (K_S + K_G) \quad (3.2.43)$$

Y la ecuación a resolver sería la siguiente:

$$\{F\} = K \cdot \{u\} \quad (3.2.44)$$

Siendo cada uno de los términos:

- Grados de libertad

$$\{u\} = (u_{\xi}^p; u_{\eta}^p; u_{\zeta}^p; \theta_{\zeta}^p; L\theta_{\eta}^p; L\theta_{\xi}^p; L\theta_{\zeta}^p; u_{\xi}^q; u_{\eta}^q; u_{\zeta}^q; \theta_{\zeta}^q; L\theta_{\eta}^q; L\theta_{\xi}^q; L\theta_{\zeta}^q)^T$$

- Fuerzas aplicadas

$$\{F\} = (f_{\xi}^p; f_{\eta}^p; P^p; m_{\zeta}^p; m_{\eta}^p; m_{\xi}^p; m_{\omega}^p; f_{\xi}^q; f_{\eta}^q; P^q; m_{\zeta}^q; m_{\eta}^q; m_{\xi}^q; m_{\omega}^q)^T$$

A continuación, se explica el significado de cada término.

➤ Matriz K_S :

$$K_S = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & -e & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & j \\ c & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ SIM & e & 0 & 0 & 0 & 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{12EI_\eta}{L^3} \quad e = \frac{12EI_\xi}{L^3} \quad i = \frac{12EI_\omega}{L^3} + \frac{36}{30} \frac{GK_T}{L}$$

$$b = \frac{6EI_\eta}{L^3} \quad f = \frac{6EI_\xi}{L^3} \quad j = \frac{6EI_\omega}{L^3} + \frac{3}{30} \frac{GK_T}{L}$$

$$c = \frac{4EI_\eta}{L^3} \quad g = \frac{4EI_\xi}{L^3} \quad k = \frac{4EI_\omega}{L^3} + \frac{4}{30} \frac{GK_T}{L}$$

$$d = \frac{2EI_\eta}{L^3} \quad h = \frac{2EI_\xi}{L^3} \quad n = \frac{2EI_\omega}{L^3} - \frac{1}{30} \frac{GK_T}{L}$$

$$m = \frac{EA}{L}$$

➤ Matriz K_g :

$$K_G = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & e & b & 0 & f & -a & 0 & 0 & -k & b & 0 & g \\ a & 0 & -e' & 0 & b & -f' & 0 & -a & 0 & k' & 0 & b & -g' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m & -i & i' & n & -e & e' & 0 & -m & s & -s' & q \\ & & & c & 0 & h & -b & 0 & 0 & i & d & 0 & j \\ & & & & c & -h' & 0 & -b & 0 & -i' & 0 & d & -j' \\ & & & & & z & -f & f' & 0 & -n & t & -t' & p \\ & & & & & & a & 0 & 0 & k & -b & 0 & -g \\ & & & & & & & a & 0 & -k' & 0 & -b & g' \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & m & -s & s' & -q \\ & & & & & & & & & & c & 0 & w \\ & & & & & & & & & & & c & -w' \\ & & & & & & & & & & & & r \end{bmatrix}$$

SIM

$$\begin{aligned} a &= \frac{36 P}{30 L} & e &= \frac{36}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) - \frac{3}{30} f_\eta & e' &= \frac{36}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) - \frac{3}{30} f_\xi \\ b &= \frac{3 P}{30 L} & f &= \frac{3}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) & f' &= \frac{3}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) \\ c &= \frac{4 P}{30 L} & g &= \frac{3}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) - \frac{3}{30} f_\eta & g' &= \frac{3}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) - \frac{3}{30} f_\xi \\ d &= -\frac{1 P}{30 L} & h &= \frac{4}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) - \frac{1}{30} f_\eta & h' &= \frac{4}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) - \frac{1}{30} f_\xi \\ & & i &= -\frac{3}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) + \frac{6}{30} f_\eta & i' &= \frac{3}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) + \frac{6}{30} f_\xi \\ & & j &= -\frac{1}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) & j' &= \frac{1}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) \\ & & k &= \frac{36}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) - \frac{33}{30} f_\eta & k' &= \frac{36}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) - \frac{33}{30} f_\xi \\ & & w &= \frac{4}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) - \frac{3}{30} f_\eta & w' &= \frac{4}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) - \frac{3}{30} f_\xi \\ & & s &= \frac{3}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) + \frac{3}{30} f_\eta & s' &= \frac{3}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) + \frac{3}{30} f_\xi \\ & & t &= -\frac{1}{30L} (Pe_\eta - m_\xi^p) + \frac{1}{30} f_\eta & t' &= -\frac{1}{30L} (Pe_\xi - m_\eta^p) + \frac{1}{30} f_\xi \\ & & m &= \frac{36}{30L} \bar{K}^p + \frac{18}{30L} (\bar{K}^q - \bar{K}^p) & z &= \frac{4}{30L} \bar{K}^p + \frac{1}{30L} (\bar{K}^q - \bar{K}^p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{3}{30L} \bar{K}^p + \frac{3}{30L} (\bar{K}^q - \bar{K}^p) & p &= -\frac{1}{30L} \bar{K}^p - \frac{1}{60L} (\bar{K}^q - \bar{K}^p) \\ q &= \frac{3}{30L} \bar{K}^p & r &= \frac{4}{30L} \bar{K}^p + \frac{3}{30L} (\bar{K}^q - \bar{K}^p) \end{aligned}$$

- Fuerzas de empotramiento: $\{F_{emp}\}$

- 1) Para cualquier estado de cargas para una barra

$$\{F\} = K \cdot \{u\} + \{F_{emp}\} \quad (3.2.45)$$

- Para el eje ζ

$$(P^p; P^q) = -\int_0^1 q_\zeta n_1(\beta) L d\beta \quad (3.2.46)$$

- Para el eje ξ

$$(f_\xi^p, m_\eta^p / L; f_\xi^q, m_\eta^q / L) = -\int_0^1 q_\xi n_3(\beta) L d\beta \quad (3.2.47)$$

- Para el eje η

$$(f_\eta^p, m_\xi^p / L; f_\eta^q, m_\xi^q / L) = -\int_0^1 q_\eta n_3(\beta) L d\beta \quad (3.2.48)$$

- 2) Carga distribuida uniforme

- Para el eje ζ

$$(P^p; P^q) = \left(-\frac{q_\zeta L}{2}; -\frac{q_\zeta L}{2} \right) \quad (3.2.49)$$

- Para el eje ξ

$$(f_\xi^p, m_\eta^p / L; f_\xi^q, m_\eta^q / L) = \left(-\frac{q_\xi L}{2}; -\frac{q_\xi L}{12}; -\frac{q_\xi L}{2}; \frac{q_\xi L}{12} \right) \quad (3.2.50)$$

- Para el eje η

$$(f_{\eta}^p, m_{\xi}^p / L; f_{\eta}^q, m_{\xi}^q / L) = \left(-\frac{q_{\eta}L}{2}; -\frac{q_{\eta}L}{12}; -\frac{q_{\eta}L}{2}; \frac{q_{\eta}L}{12} \right) \quad (3.2.51)$$

3) Carga distribuida lineal

$$q_i(\beta) = q_i^p + (q_i^q - q_i^p)\beta; \quad i = \xi, \eta, \zeta \quad (3.2.52)$$

- Para el eje ζ

$$(P^p; P^q) = \left(-\frac{L}{6}(2q_{\zeta}^p + q_{\zeta}^q); -\frac{L}{6}(q_{\zeta}^p + 2q_{\zeta}^q) \right) \quad (3.2.53)$$

- Para el eje ξ

$$(f_{\xi}^p, m_{\eta}^p / L; f_{\xi}^q, m_{\eta}^q / L) = \left(-\frac{L}{20}(7q_{\xi}^p + 3q_{\xi}^q); -\frac{L}{60}(3q_{\xi}^p + 2q_{\xi}^q); -\frac{L}{20}(3q_{\xi}^p + 7q_{\xi}^q); \frac{L}{60}(2q_{\xi}^p + 3q_{\xi}^q) \right) \quad (3.2.54)$$

- Para el eje η

$$(f_{\eta}^p, m_{\xi}^p / L; f_{\eta}^q, m_{\xi}^q / L) = \left(-\frac{L}{20}(7q_{\eta}^p + 3q_{\eta}^q); -\frac{L}{60}(3q_{\eta}^p + 2q_{\eta}^q); -\frac{L}{20}(3q_{\eta}^p + 7q_{\eta}^q); \frac{L}{60}(2q_{\eta}^p + 3q_{\eta}^q) \right) \quad (3.2.55)$$

- Cambio de base 3D (de locales a globales)

Puede darse el caso de que los ejes de los perfiles no coincidan con los del problema global, en ese caso, habrá que hacer el paso de coordenadas locales a globales.

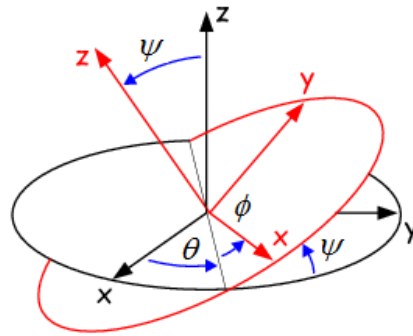


Figura 3.2.5 - Sistema de coordenadas global y local.

1) Rotación en el eje "y"

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

2) Rotación en el eje "x"

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

3) Rotación en el eje "z"

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Para el caso de que se produzca giro en los tres ejes:

$$R = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 = [\xi; \eta; \varsigma]_{x,y,z}$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

- 5) Si en vez de disponer de los ángulos, se dispone de dos de las coordenadas de los nodos:

$$P_p = (x_p; y_p; z_p)$$

$$P_q = (x_q; y_q; z_q)$$

Podremos calcular los ángulos y calcular la matriz R:

$$\cos \phi = \frac{z_q - z_p}{\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (z_q - z_p)^2}} \quad (3.2.56)$$

$$\cos \psi = \frac{y_q - y_p}{\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}} \quad (3.2.57)$$

θ suele ser dato, ya que es la orientación del perfil.

Matriz de transformación:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \theta'_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \\ \theta_\xi \\ \theta_\eta \\ \theta_\zeta \\ \theta'_\zeta \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \\ \theta_\xi \\ \theta_\eta \\ \theta_\zeta \\ \theta'_\zeta \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez elemental, en coordenadas globales, se calcularía de la siguiente manera:

$$(K)_g = T^T \cdot K \cdot T \quad (3.2.58)$$

- Fuerzas equivalentes

Las fuerzas de empotramiento, siempre están en coordenadas locales, para el paso a globales de estas, es necesario definir el concepto de Fuerzas Equivalentes, que siempre van a estar en coordenadas globales y se calculan de la siguiente manera:

$$F_{eqv} = -T^T \cdot F_{emp} \quad (3.2.59)$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

- 4) El nuevo sistema de ecuaciones a resolver, el cual implica el uso de todos los conceptos vistos anteriormente, es el siguiente:

$$\{F_{est}\} + \{F_{eqv}\} = K_{est} \cdot \{u_{est}\} \quad (3.2.60)$$

- 5) Para resolver el problema de Inestabilidad/Pandeo, será necesario resolver el determinante de la matriz de rigidez de la estructura e igualarlo a cero.

$$|K_{est}(\lambda)| = 0 \Rightarrow \lambda_{cri}$$

Siendo " λ_{cri} " el factor de multiplicación de cargas, que representa el menor valor no nulo de las raíces obtenidas de la ecuación característica.

3.3. Ejemplo de cálculo mediante MDR

3.3.1. Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión

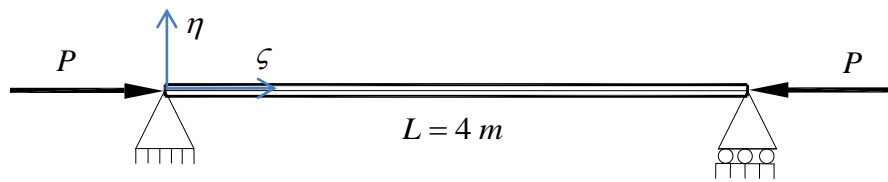


Figura 3.3.1.1 - Viga biapoyada sometida a compresión.

Los apoyos son tipo horquilla, impiden el giro longitudinal de la sección y permiten el alabeo.

Las cargas de compresión P , están aplicadas en el centro de gravedad de la sección.

Datos del material:

- $\sigma_F = 275\text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10}\text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4}\text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8}\text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8}\text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12}\text{ m}^6$
- $I_t = 20.1 \times 10^{-8}\text{ m}^4$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

A continuación se detalla el proceso seguido para determinar las cargas de pandeo del perfil seleccionado, así como los distintos modos de pandeo para cada una de estas cargas:

1- Definición de las matrices K_s y K_G .

Serán matrices cuadradas de 14×14 .

2- Descripción de las constantes del material y del perfil seleccionado.

3- Tipo de estructura y posicionamiento del sistema de coordenadas:

Viga biapoyada.

4- Elección del número de elementos escogidos para el mallado de la estructura:

Para el mallado se escoge un total de 4 elementos, lo que significa que habrá 4 elementos tipo barra y 5 nodos.

5- Construcción de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos.

6- Ensamblado de cada una de las matrices elementales para formar la matriz de rigidez de la estructura:

Será una matriz cuadrada de 35×35 .

7- Imposición de las condiciones de contorno.

La matriz de la estructura pasa de ser de 35×35 a una matriz reducida de 28×28 debido a los 7 grados de libertad nulos.

8- Búsqueda de las raíces que hacen cero el determinante de la matriz reducida.

Siempre se escoge la raíz más pequeña pero siempre positiva.

9- Se determina el modo de pandeo de la estructura.

Al querer resolver el problema para una raíz que hace que la matriz de rigidez de la estructura se vuelva una matriz singular, es necesario cambiar esta matriz para poder resolver el problema. Para ello, se sustituye alguna de las filas por "ceros" y "unos" para poder resolver.

Al cambiar estas filas, no se van a obtener los desplazamientos de la estructura, pero si se podrá obtener los modos de desplazamiento, por lo que se va a obtener unos desplazamientos escalados.

10- Repetición de los pasos 8 y 9 para cada una de las raíces obtenidas

➤ Carga P_1

Una vez calculado el determinante de la matriz de rigidez reducida e igualarlo a cero, obtenemos la siguiente función:

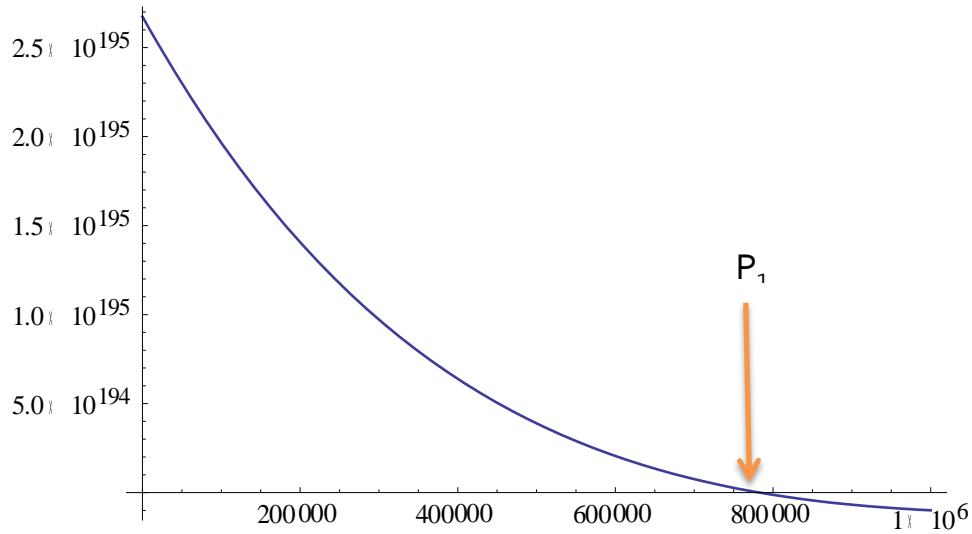


Figura 3.3.1.2.1 - Carga de pandeo 1 (P_1).

$$P_1 = 782814 \text{ N}$$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce esta carga y el modo de pandeo asociado:

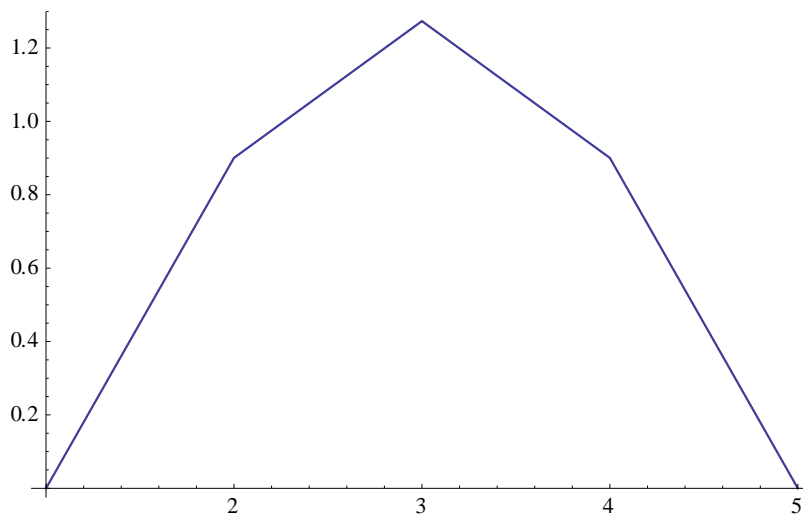


Figura 3.3.1.2.2 - Modo de pandeo para la carga 1 (P_1).

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Hay que observar que en los nodos 1 y 5 los desplazamientos son cero, ya que corresponden a las condiciones de contorno, y se imponen que los desplazamientos en el eje ξ , η y el giro respecto al eje longitudinal, sean nulos.

En la figura 3.3.1.2.2, para la carga P_1 , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 1.

Es normal que para esta carga se produzca pandeo con deformaciones de flexión en este plano, ya que es el plano que posee una menor inercia, comparado con el plano $\zeta - \eta$.

➤ Carga P_2

La segunda raíz que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz de rigidez reducida es la carga P_2 :

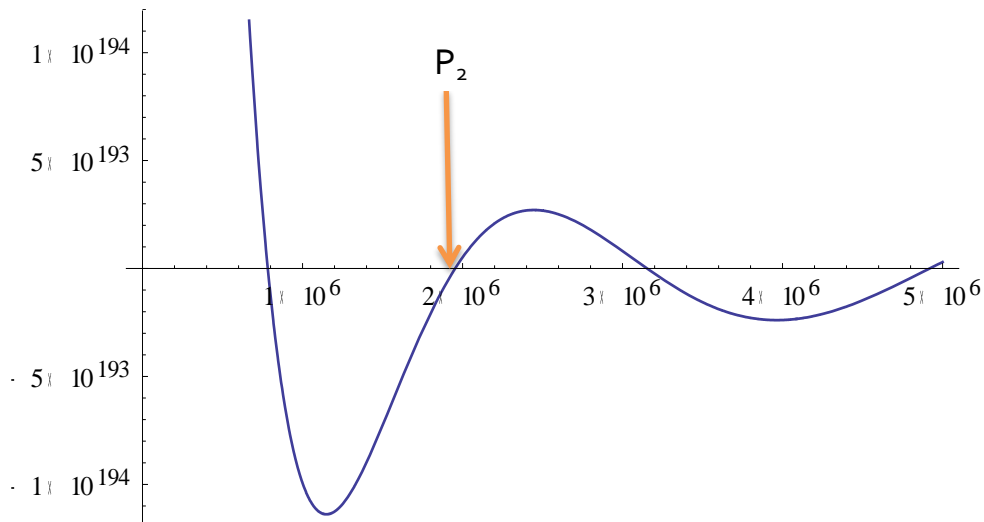


Figura 3.3.1.2.3 - Carga de pandeo 2 (P_2).

$$P_2 = 1.95369 \times 10^6 \text{ N}$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce esta carga y el modo de pandeo asociado:

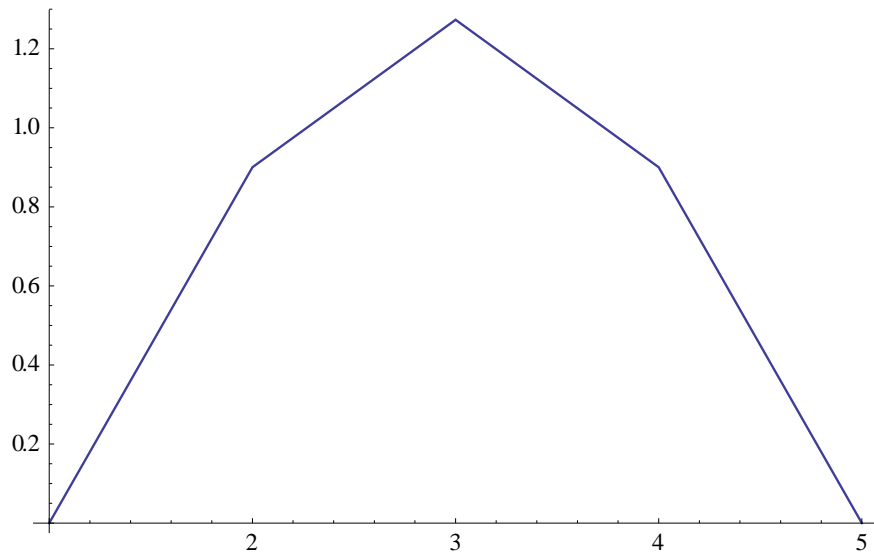


Figura 3.3.1.2.4 - Modo de pandeo para la carga 2 (P_2).

En la figura 3.3.1.2.4, para la carga P_2 , se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 1.

➤ Carga P_3

La tercera raíz que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz de rigidez reducida es la carga P_3 :

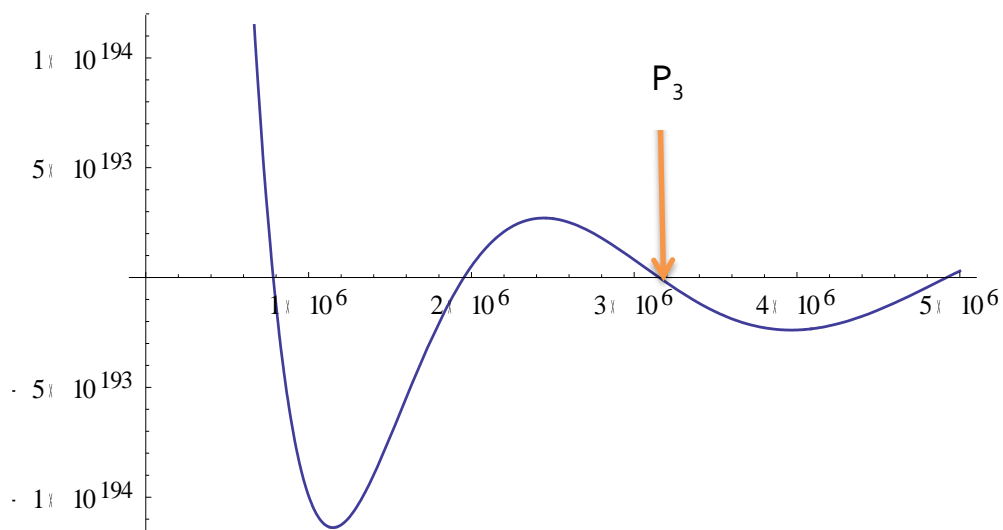


Figura 3.3.1.2.5 - Carga de pandeo 3 (P_3).

$$P_3 = 3.15319 \times 10^6 \text{ N}$$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce esta carga y el modo de pandeo asociado:

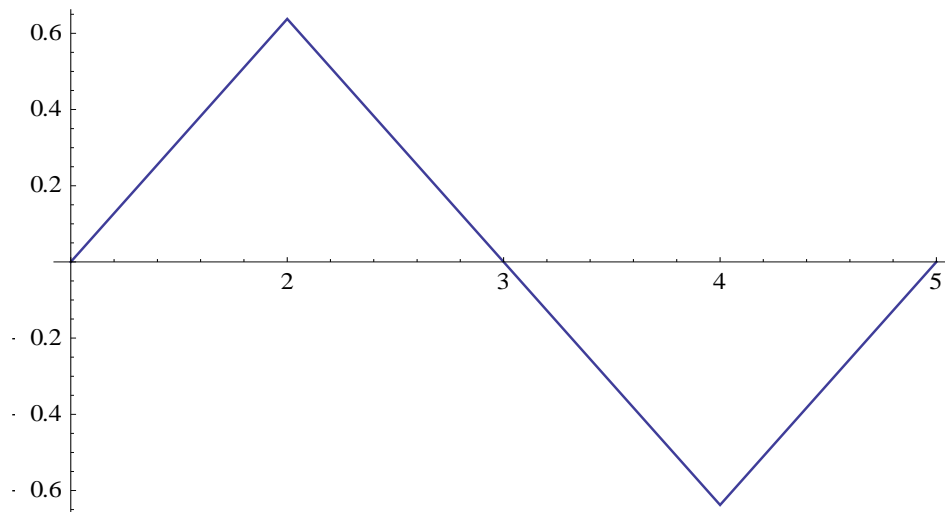


Figura 3.3.1.2.6 - Modo de pandeo para la carga 3 (P_3).

En la figura 3.3.1.2.6, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 2.

➤ **Carga P_4**

La cuarta raíz que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz de rigidez reducida es la carga P_4 :

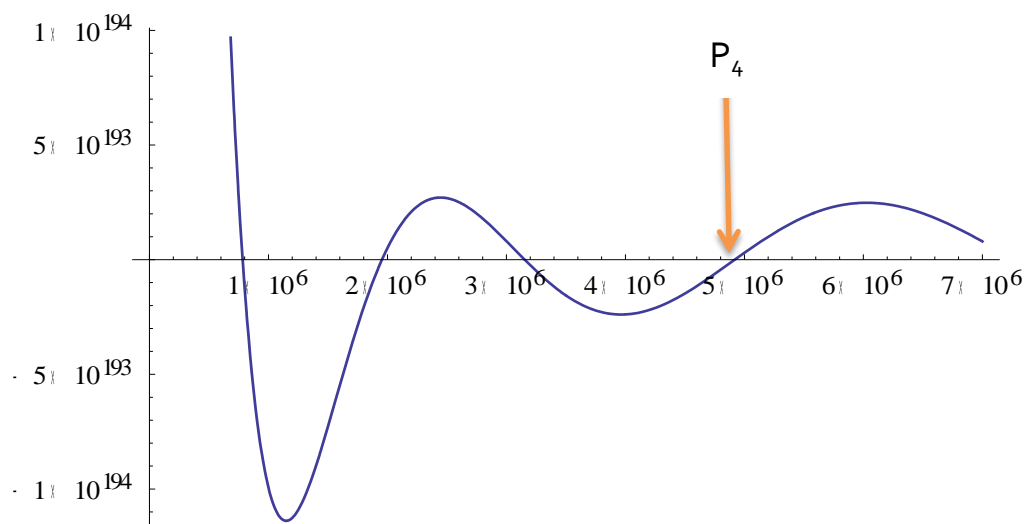


Figura 3.3.1.2.7 - Carga de pandeo 4 (P_4).

$$P_4 = 4.91912 \times 10^6 \text{ N}$$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce esta carga y el modo de pandeo asociado:

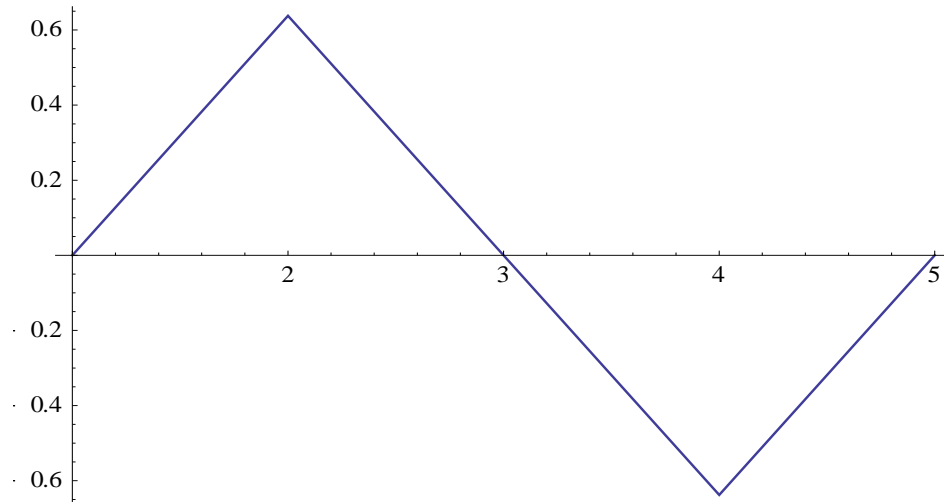


Figura 3.3.1.2.8 - Modo de pandeo para la carga 4 (P_4).

En la figura 3.3.1.2.8, para la carga P_4 , se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 2.

➤ **Carga P_5**

La quinta raíz que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz de rigidez reducida es la carga P_5 :

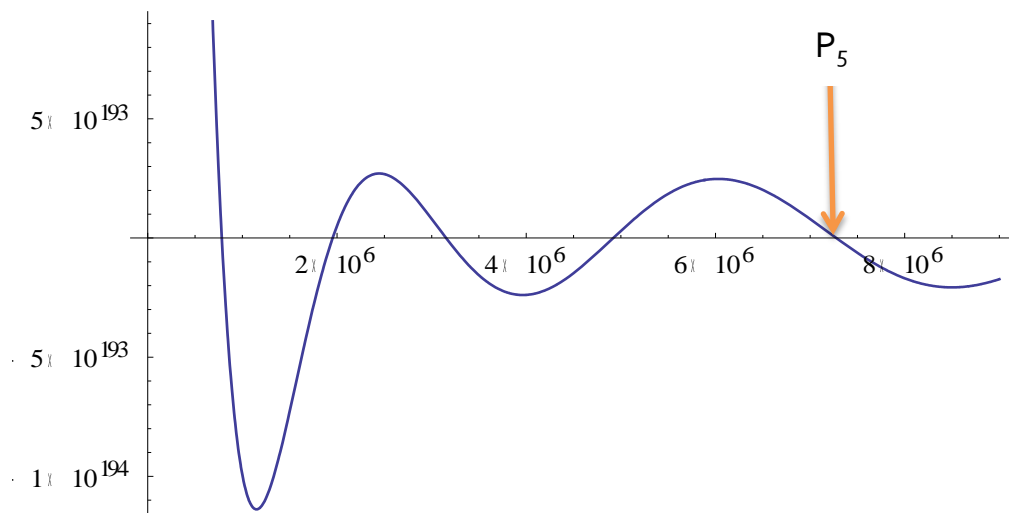


Figura 3.3.1.2.9 - Carga de pandeo 5 (P_5).

$$P_5 = 7.27623 \times 10^6 \text{ N}$$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce esta carga y el modo de pandeo asociado:

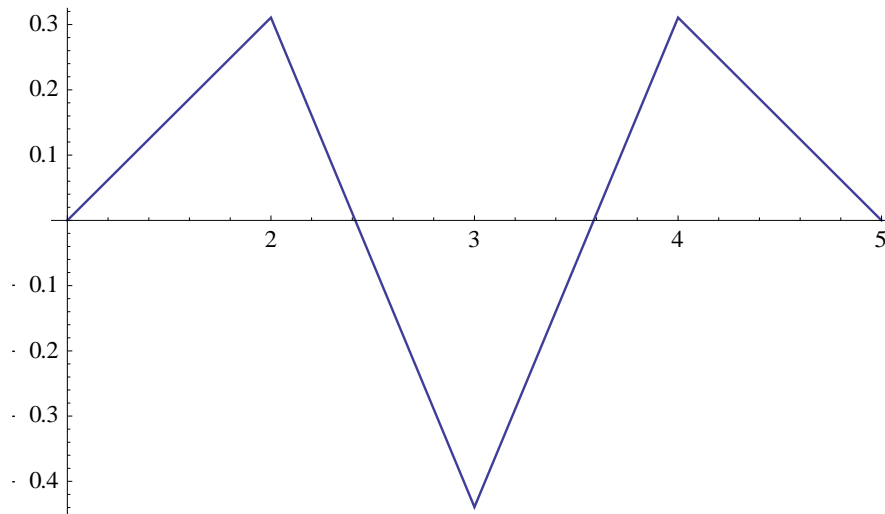


Figura 3.3.1.2.10 - Modo de pandeo para la carga 5 (P_5).

En la figura 3.3.1.2.10, para la carga P_5 , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 3.

➤ Carga P_6

La sexta raíz que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz de rigidez reducida es la carga P_6 :

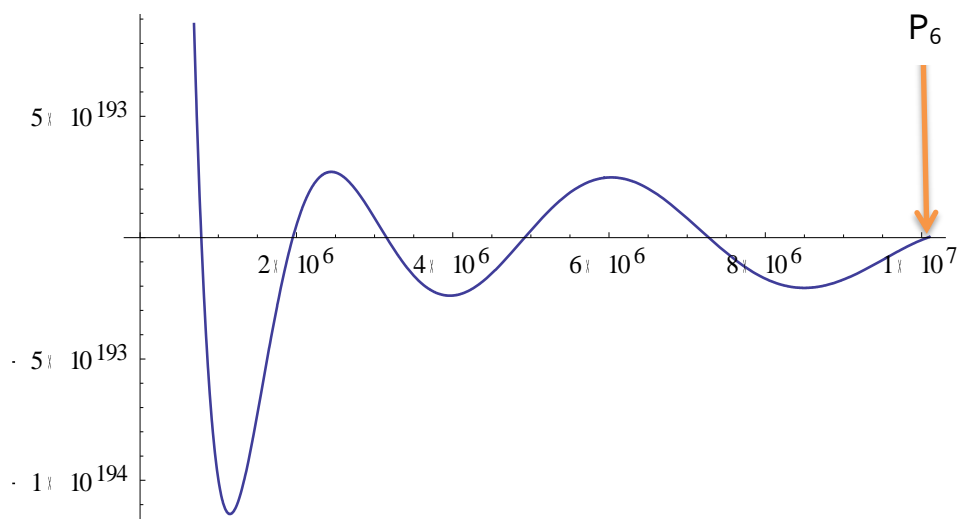


Figura 3.3.1.2.11 - Carga de pandeo 6 (P_6).

$$P_6 = 1.00772 \times 10^7 \text{ N}$$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce esta carga y el modo de pandeo asociado:

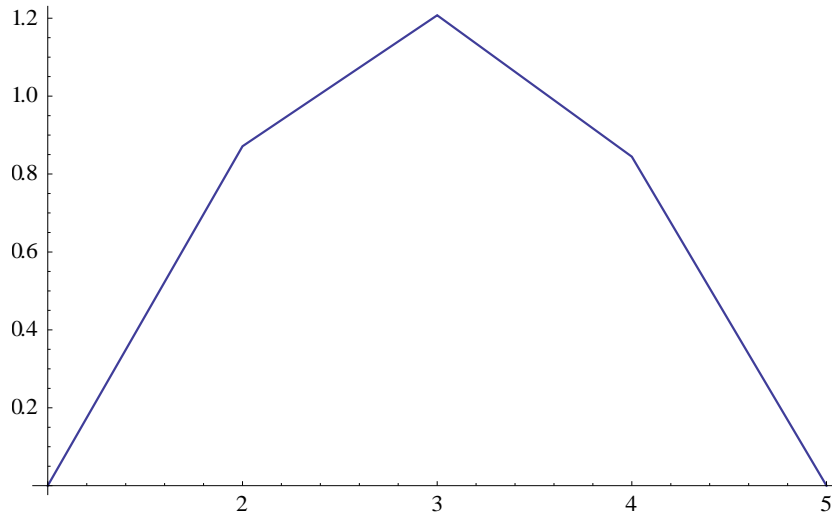


Figura 3.3.1.2.12 - Modo de pandeo para la carga 6 (P_6).

En la figura 3.3.1.2.12, para la carga P_6 , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano fuerte de la estructura (plano $\zeta - \eta$), en el modo de pandeo 1.

Para que se haya producido pandeo con deformaciones en el plano fuerte de la estructura, se ha tenido que producir los tres modos de pandeo en el plano débil y pandeo con deformaciones de torsión en dos modos, lo cual es evidente debido a la gran inercia que tiene este plano.

3.3.2. Caso 2: Pandeo lateral o vuelco

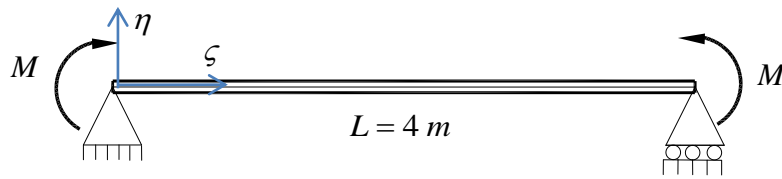


Figura 3.3.2.1 - Viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados.

Los apoyos son tipo horquilla, impiden el giro longitudinal de la sección y permiten el alabeo.

Los momentos concentrados M , están aplicados en los extremos de la estructura.

Datos del material:

- $\sigma_F = 275 \text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12} \text{ m}^6$
- $I_t = 20.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

A continuación se detalla el proceso seguido para determinar el momento crítico de vuelco para el perfil seleccionado:

- 1- Definición de las matrices K_s y K_G .
Serán matrices cuadradas de 14×14 .
- 2- Descripción de las constantes del material y del perfil seleccionado.
- 3- Tipo de estructura y posicionamiento del sistema de coordenadas:
Viga biapoyada.
- 4- Elección del número de elementos escogidos para el mallado del perfil:
Para el mallado se escoge un total de 4 elementos, lo que significa que habrá 4 elementos tipo barra y 5 nodos.
- 5- Construcción de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos.
- 6- Ensamblado de cada una de las matrices elementales para formar la matriz de rigidez de la estructura:
Será una matriz cuadrada de 35×35 .
- 7- Imposición de las condiciones de contorno.
La matriz de la estructura pasa de ser de 35×35 a una matriz reducida de 29×29 debido a los 6 grados de libertad nulos.
- 8- Búsqueda de las raíces que hacen cero el determinante de la matriz reducida.
Siempre se escoge la raíz más pequeña pero siempre positiva.
- 9- Se determina el modo de pandeo de la estructura.

Al querer resolver el problema para una raíz que hace que la matriz de rigidez de la estructura se vuelva una matriz singular, es necesario cambiar esta matriz para poder resolver el problema. Para ello, se sustituye alguna de las filas por "ceros" y "unos" para poder resolver.

Al cambiar estas filas, no se van a obtener los desplazamientos de la estructura, pero si se podrá obtener los modos de desplazamiento, por lo que se va a obtener unos desplazamientos escalados.

➤ Carga M_{cr}

Una vez calculado el determinante de la matriz de rigidez reducida e igualarlo a cero, obtenemos la siguiente función:

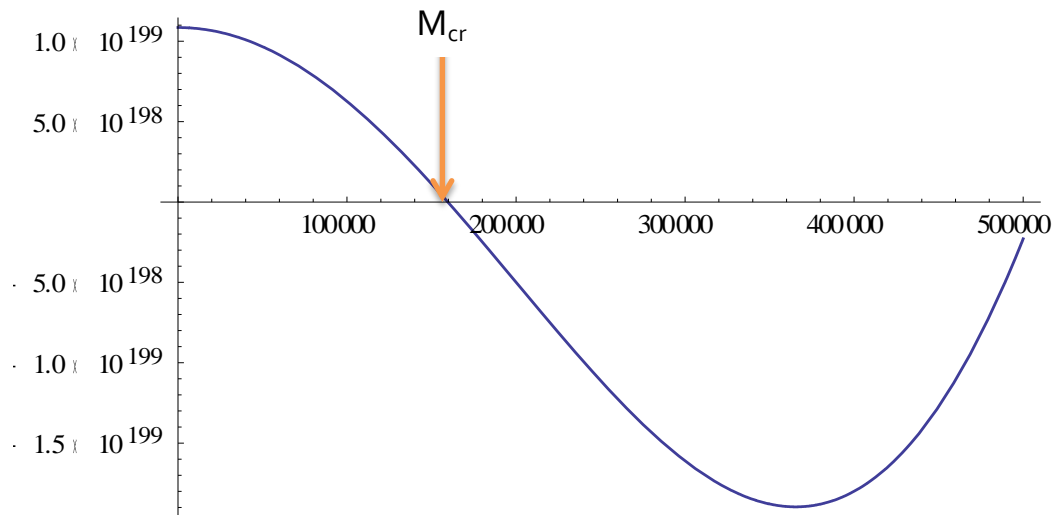


Figura 3.3.2.2.1 - Carga de pandeo (M_{cr}).

$M_{cr} = 159631 \text{ Nm}$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce esta carga y el modo de pandeo asociado:

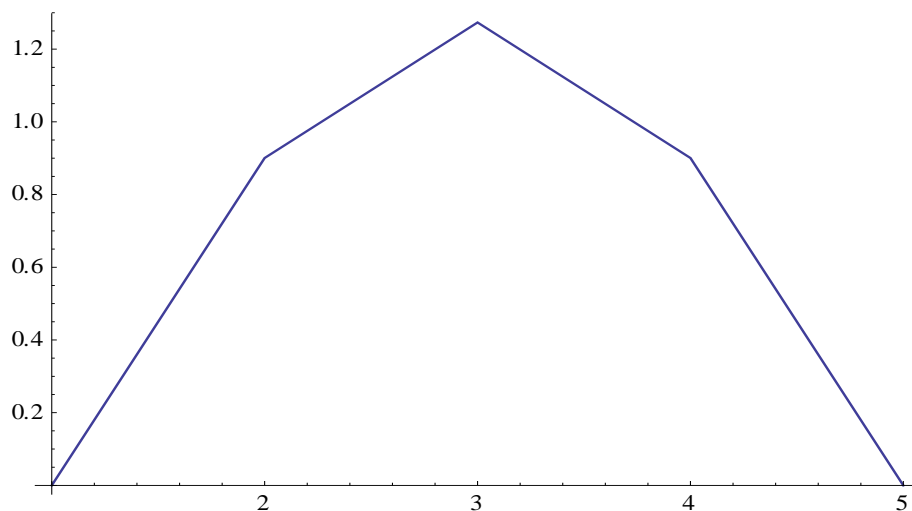


Figura 3.3.2.2.2 - Modo de pandeo para M_{cr} .

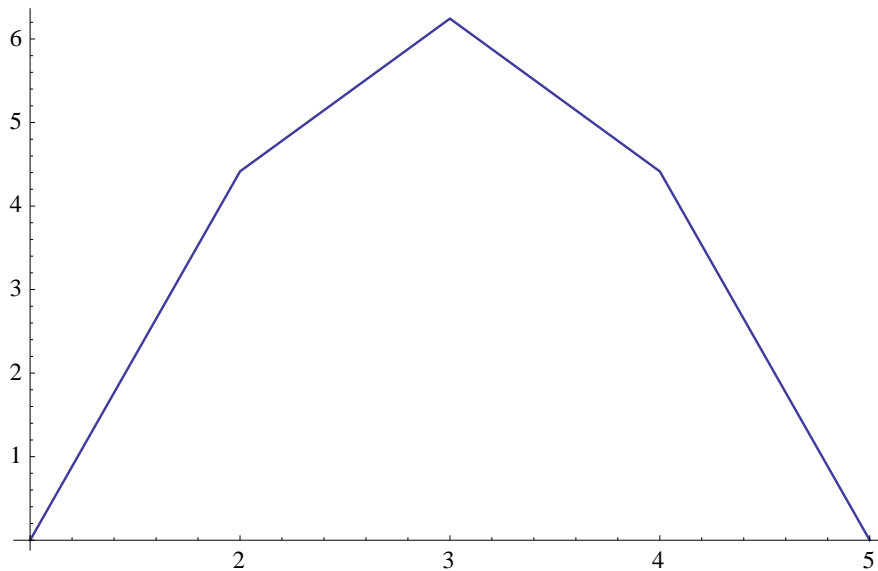


Figura 3.3.2.2.3 - Modo de pandeo para M_{cr}

En la figura 3.3.2.2.2, para M_{cr} , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 1.

En la figura 3.3.2.2.3, para M_{cr} , se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 1.

Por lo que, existe un momento crítico (M_{cr}), para el que la posición de la viga deja de ser estable, originándose un vuelco lateral. Para este caso se dan simultáneamente flexión en el plano débil y torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección.

3.3.3. Caso 3: Pandeo con cargas combinadas

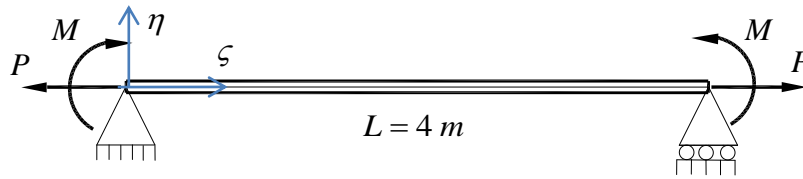


Figura 3.3.3.1 - Viga biapoyada sometida a distintos estados de cargas.

Los apoyos son tipo horquilla, impiden el giro longitudinal de la sección y permiten el alabeo.

Los momentos concentrados M , están aplicados en los extremos de la estructura.

Las cargas P , están aplicadas en el centro de gravedad de la sección.

Datos del material:

- $\sigma_F = 275 \text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12} \text{ m}^6$
- $I_t = 20.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

El proceso para determinar el momento crítico de vuelco para el perfil seleccionado es similar al del caso anterior.

➤ M_{cr} para $P=+10^5$ (tracción)

Una vez calculado el determinante de la matriz de rigidez reducida e igualarlo a cero, obtenemos el siguiente valor de M_{cr} utilizando el método de la secante para el cálculo de raíces.

$$M_{cr} = 173805 \text{ Nm}$$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce este estado de cargas y el modo de pandeo asociado:

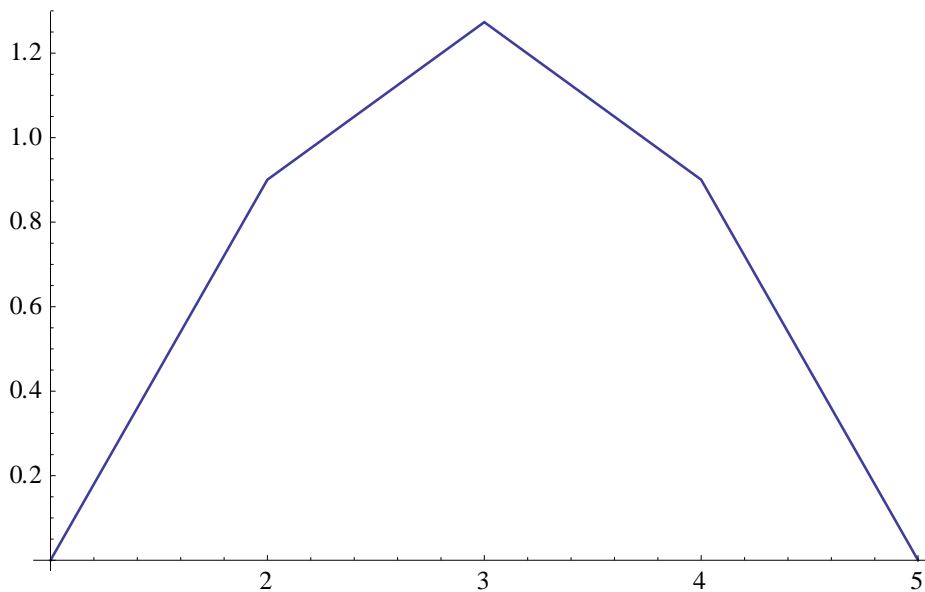


Figura 3.3.3.2.1 - Modo de pandeo para M_{cr} y $P=+10^5$.

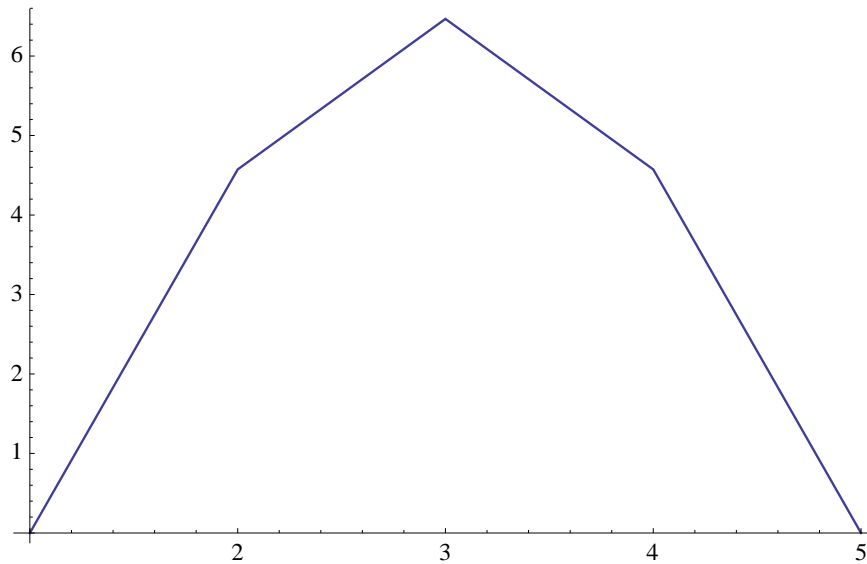


Figura 3.3.3.2.2 - Modo de pandeo para M_{cr} y $P=+10^5$.

➤ **M_{cr} para $P=-10^5$ (compresión)**

Por el mismo método que en el caso anterior, se obtiene la raíz que hace cero el determinante de la matriz de rigidez reducida:

$$M_{cr} = 145221 \text{ Nm}$$

A continuación, se determina qué tipo de deformada produce este estado de cargas y el modo de pandeo asociado:

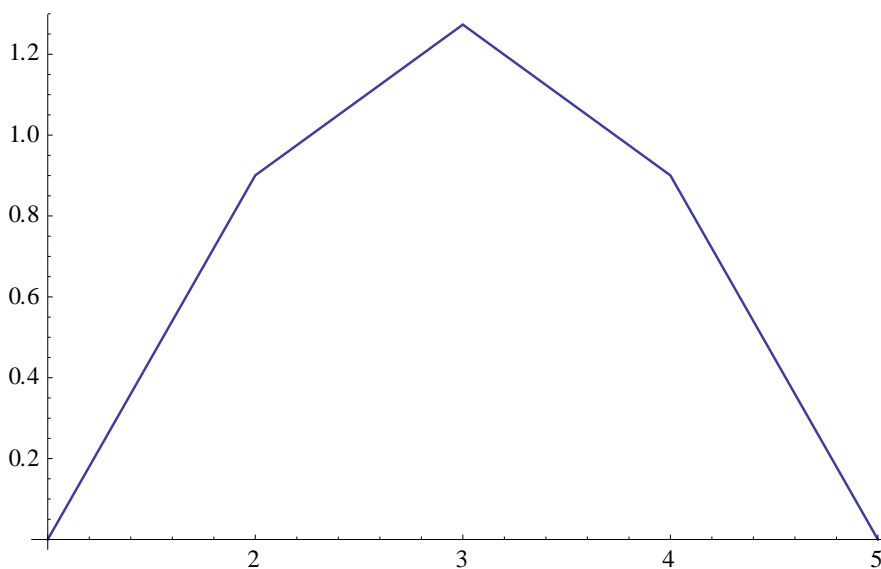


Figura 3.3.3.2.3 - Modo de pandeo para M_{cr} y $P=-10^5$.

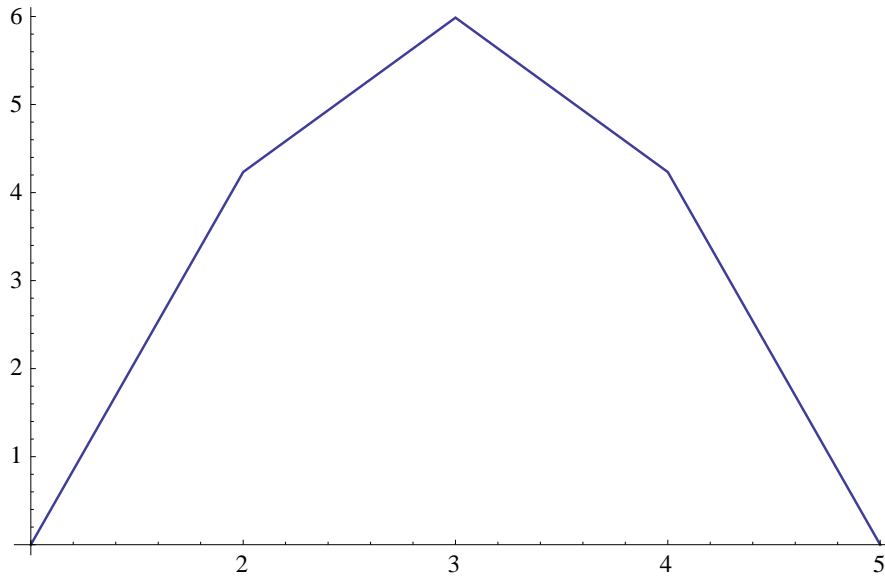


Figura 3.3.3.2.4 - Modo de pandeo para M_{cr} y $P=-10^5$.

Si comparamos ambos resultados, observamos que el hecho de que haya una carga de compresión o de tracción en la estructura, influye en el valor del momento crítico aumentándolo si es de tracción y reduciéndolo si es de compresión.

3.3.3 Caso 4: Pandeo global de una estructura: Método lineal

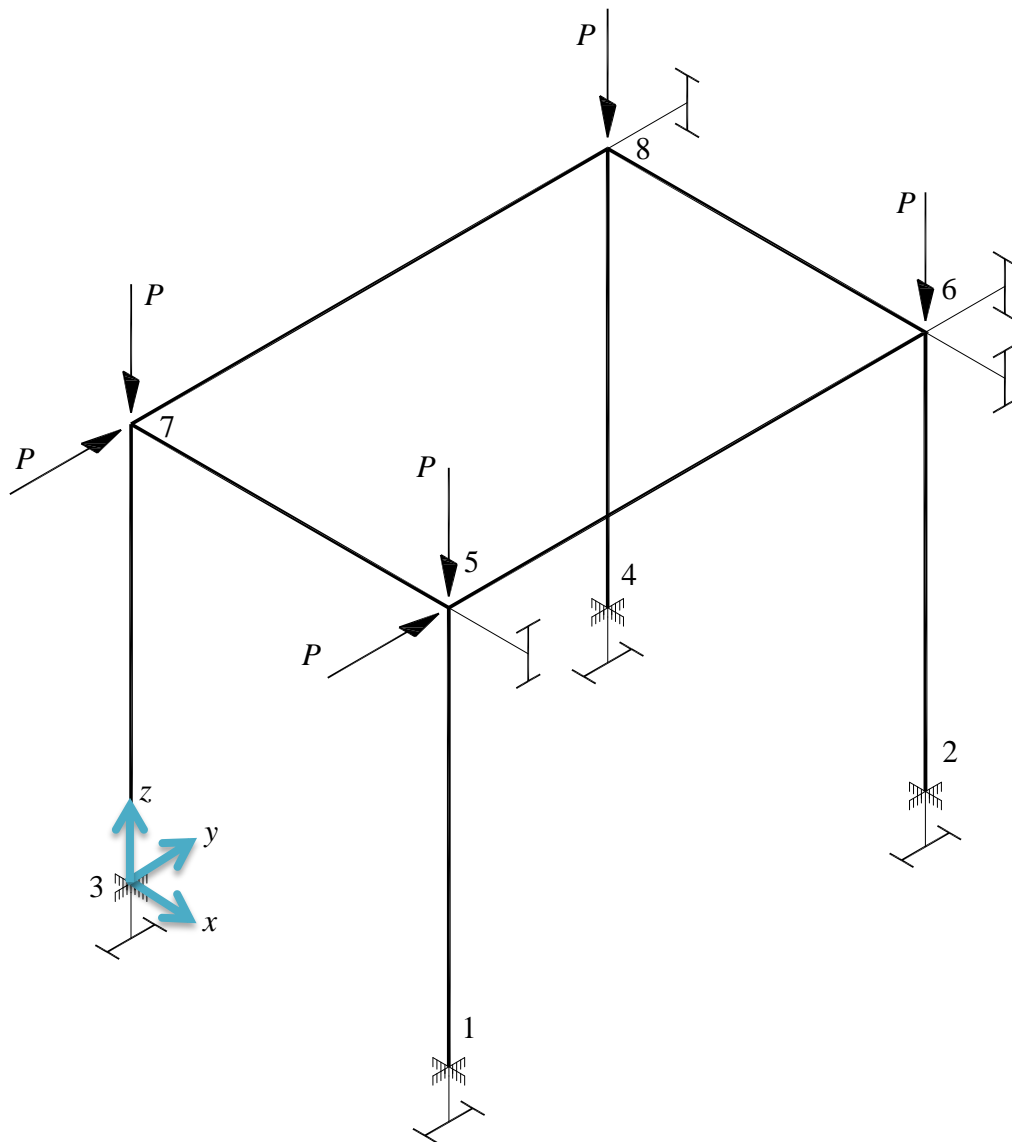


Figura 3.3.4.1 - Estructura con cargas puntuales.

Siendo x , y , z los ejes globales de la estructura y ξ , η , ζ los ejes locales de cada barra.

En los nodos 1, 2, 3 y 4 hay empotramientos.

Los nodos 5, 6, 7 y 8 son uniones rígidas.

Las cargas P , están aplicadas en el centro de gravedad de la sección.

$$P=10^5 \text{ N.}$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Datos del material:

- $\sigma_F = 275 \text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12} \text{ m}^6$
- $I_t = 20.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

A continuación se detalla el proceso seguido para determinar la carga de colapso de la estructura por el método lineal.

- 1- Definición de las matrices K_s , K_G y T
Serán matrices cuadradas de 14×14 .
- 2- Descripción de las constantes del material y del perfil seleccionado.
- 3- Tipo de estructura y posicionamiento del sistema de coordenadas:
Estructura 3D.
- 4- Elección del número de elementos escogidos para el mallado del perfil:
Para el mallado se escoge un total de 4 elementos, lo que significa que habrá 4 elementos tipo barra y 5 nodos para cada una de las barras.
8 barras
 $8 \times 4 = 32$ elementos
32 nodos
- 5- Construcción de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos.
- 6- Ensamblado de cada una de las matrices elementales para formar la matriz de rigidez de la estructura:
Será una matriz cuadrada de 224×224 .
- 7- Imposición de las condiciones de contorno.
La matriz de la estructura pasa de ser de 224×224 a una matriz reducida de 196×196 debido a los 28 grados de libertad nulos.
- 8- Resolvemos el sistema ($F = K \times U$) y obtenemos el desplazamiento de cada uno de los nodos.
- 9- A partir de los desplazamientos obtenidos en los nodos, se calculan los esfuerzos en los 32 nodos.
- 10- A continuación se construye cada una de las matrices de rigidez elementales ($K_s + K_G$). La única variable es λ .
- 11- Construcción de la matriz de pandeo de la estructura.
- 12- Búsqueda de las raíces que hacen cero el determinante de la matriz de pandeo de la estructura reducida.
Siempre se escoge la raíz más pequeña pero siempre positiva.
- 13- Se determina el coeficiente λ que al ser multiplicado por las cargas de la estructura, se obtiene el pandeo global de la estructura.

Esquema del proceso de cálculo

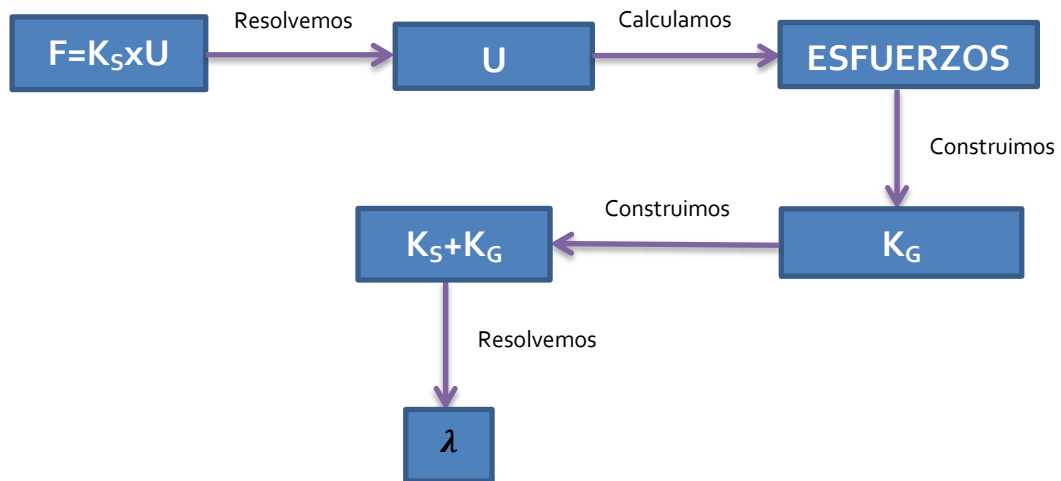


Figura 3.3.4.2.1 - Esquema método lineal.

Análisis de los resultados obtenidos

Una vez calculado el determinante de la matriz de rigidez reducida e igualarlo a cero, obtenemos la siguiente función:

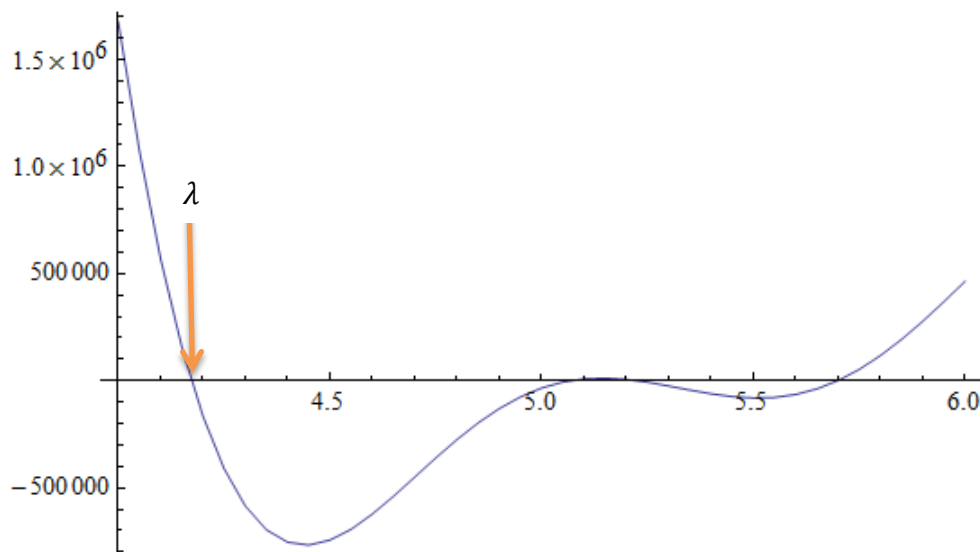


Figura 3.3.4.3.1 - Coeficiente de pandeo.

$$\lambda = 4.17295$$

El valor de la carga de pandeo de la estructura sería:

$$P_{cr} = 417295 \text{ N}$$

O lo que es lo mismo, si el valor de todas las cargas fuera P_{cr} , la estructura pandearía.

3.3.4 Caso 5: Pandeo global de una estructura: Método no lineal

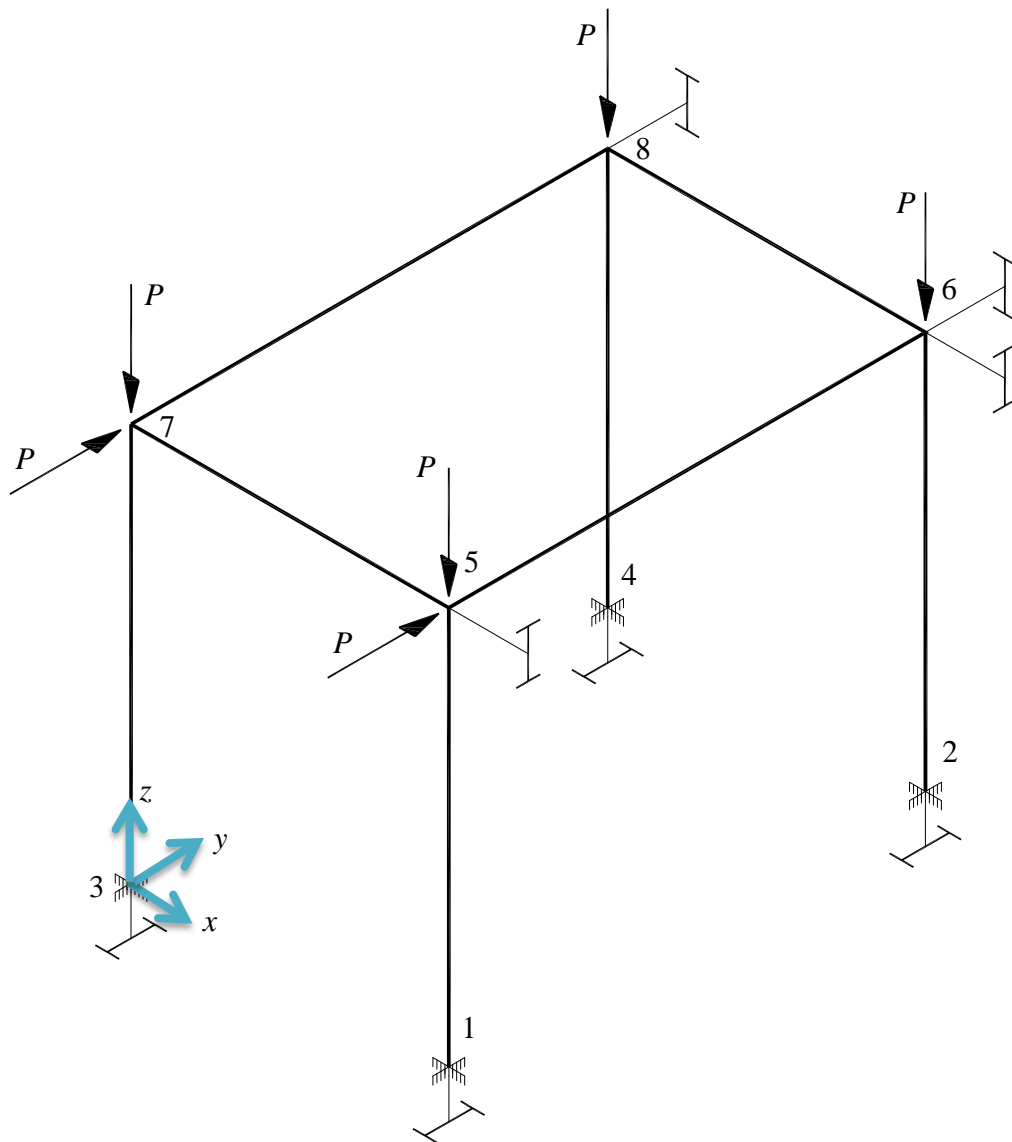


Figura 3.3.4.1 - Estructura con cargas puntuales.

Siendo x, y, z los ejes globales de la estructura y ζ, η, ξ los ejes locales de cada barra.

En los nodos 1, 2, 3 y 4 hay empotramientos.

Los nodos 5, 6, 7 y 8 son uniones rígidas.

Las cargas P , están aplicadas en el centro de gravedad de la sección.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

$$P=4 \times 10^5 \text{ N.}$$

Datos del material:

- $\sigma_F = 275 \text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12} \text{ m}^6$
- $I_t = 20.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

A continuación se detalla el proceso seguido para determinar la carga de colapso de la estructura:

Hasta el apartado 9, el proceso de cálculo es el mismo que para el método lineal.

- 10- A continuación se construye cada una de las matrices de rigidez elementales (K_s+KG). La diferencia con el método lineal es que no aplicamos la variable λ .
- 11- Construcción de la matriz de pandeo de la estructura.
- 12- Resolvemos el sistema ($F = (K_s + KG) \times U$) y calculamos los desplazamientos.
- 13- A partir de los desplazamientos obtenidos en los nodos, se calculan los esfuerzos en los 32 nodos.
- 14- A continuación se construye cada una de las matrices de rigidez elementales ($K_s + KG$). La única variable es λ .
- 15- Construcción de la matriz de pandeo de la estructura con los nuevos valores de los esfuerzos.
- 16- Búsqueda de las raíces que hacen cero el determinante de la matriz de pandeo de la estructura reducida.
Siempre se escoge la raíz más pequeña pero siempre positiva.
- 17- Se determina el coeficiente λ que al ser multiplicado por las cargas de la estructura, se obtiene el pandeo global de la estructura.

Esquema del proceso de cálculo

Para una iteración:

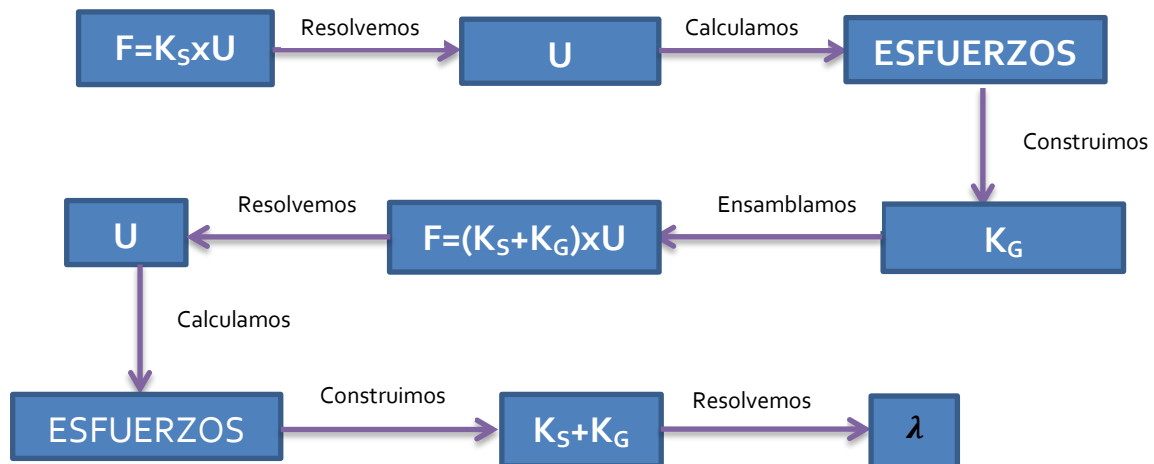


Figura 3.3.5.2.1 - Esquema método no lineal de una iteración.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Una vez calculado el determinante de la matriz de rigidez reducida e igualarlo a cero, obtenemos la siguiente función:

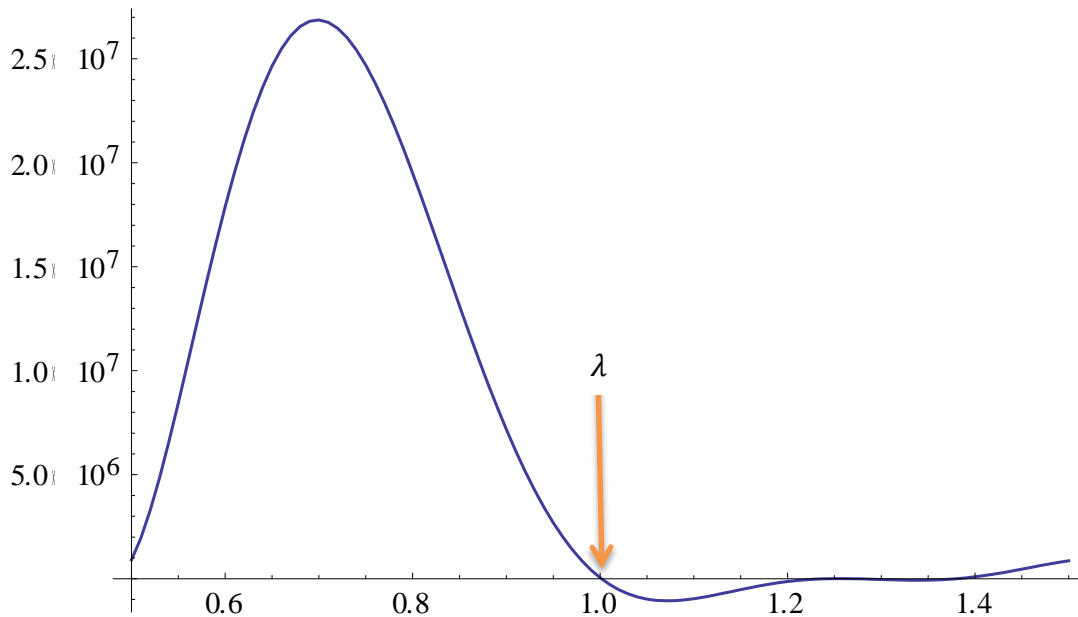


Figura 3.3.5.3.1 - Coeficiente de pandeo.

$$\lambda = 1.00135 N$$

El valor de la carga de pandeo de la estructura sería:

$$P_{cr} = 400541 N$$

Si comparamos el valor de esta carga, observamos que la carga obtenida por el método no lineal está del lado de la seguridad comparado con la del método lineal.

Por el contrario, este tipo de cálculo es mucho más laborioso. Implica realizar el doble de cálculos para obtener una variación del 4% respecto al valor del método lineal.

4. ANÁLISIS DE PANDEO MEDIANTE SOFTWARE DE SIMULACIÓN

4.1. Simulation Mechanical 2014

El software de simulación mecánica "Simulation Mechanical", es una herramienta de fácil comprensión, por lo que es un software idóneo para poder realizar cualquier tipo de simulación mecánica. También se trata de un programa muy potente que permite simular cualquier tipo de situación, por lo que para realizar este Trabajo, se ha empleado este software.

A continuación se verán diferentes casos de simulación con este software.

4.1.1. Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión

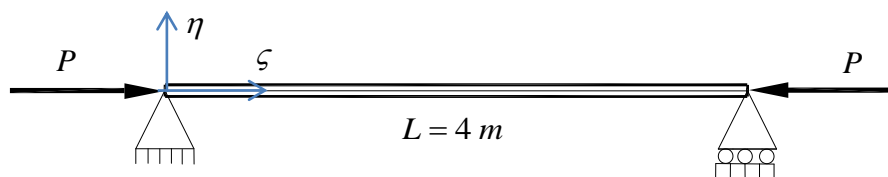


Figura 3.3.1.1 - Viga biapoyada sometida a compresión.

4.1.1.1. Realización de la simulación

- 1) La sección se ha creado mediante el software "AutoCAD 2014".
- 2) Una vez creada la sección, se ha extruido con una longitud total de 4 metros. Por lo que ya podemos exportar el perfil.
- 3) A continuación, con el software de simulación *Simulation Mechanical 2014*, se ha importado el archivo creado en el punto anterior, por lo que ya tenemos el perfil para la realización de simulaciones.
- 4) Hay que seleccionar qué tipo de unidades se van a utilizar y el tipo de análisis.
 - El sistema de unidades será el Sistema Internacional.
 - El tipo de análisis será "Critical Buckling Load" o lo que es lo mismo "Análisis de estabilidad", lo que permitirá calcular las diferentes cargas de pandeo para el perfil.
- 5) A continuación se realiza el mallado de toda la estructura y se definen las propiedades del modelo.
 - El tipo de elemento será tipo "Plate" o "Shell".
 - En la definición del elemento se selecciona el espesor del alma y de las alas, siendo 0.0071 m y 0.0107 m respectivamente.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

- También hay que seleccionar el tipo de material: Para este caso será el "Steel (ASTM – A 36)".
- 6) El siguiente paso es la imposición de las condiciones de contorno.
La imposición de las condiciones de contorno se ha realizado restringiendo los grados de libertad.

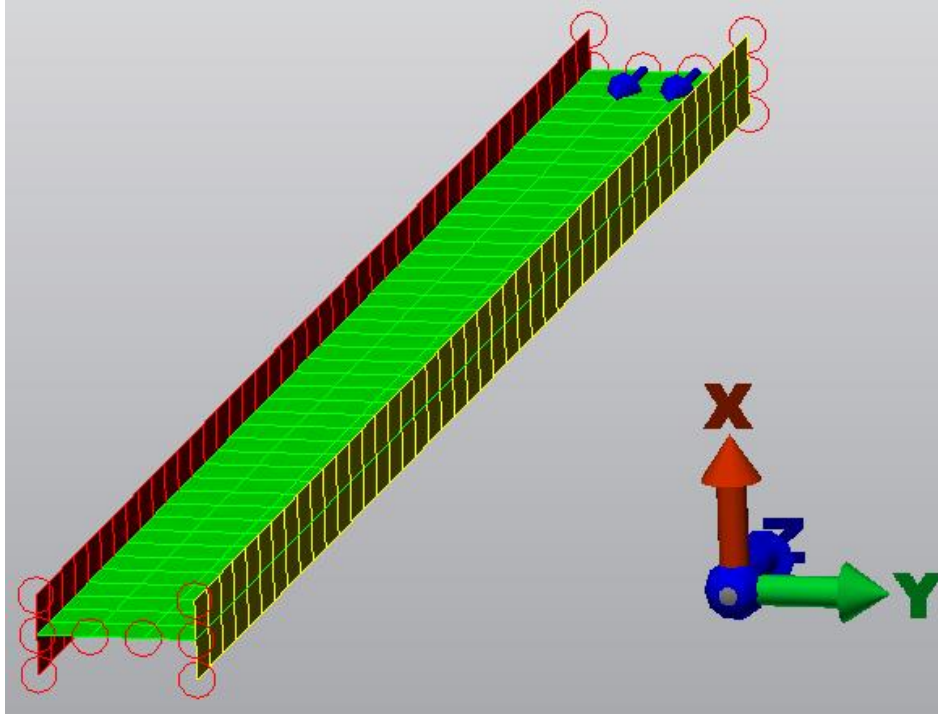


Figura 4.2.1.1.1 - Viga biapoyada con dos cargas puntuales en un extremo.

Los nodos de la parte inferior tienen los mismos grados de libertad restringidos que los nodos de la parte superior, excepto el desplazamiento en el eje Z.

- 7) A la hora de imponer el estado de cargas al que está sometida la viga, se han añadido dos cargas de igual valor e igual distancia respecto al centro de gravedad de la sección, para simular una carga axial centrada.
- 8) Cada una de las cargas es de 5000 N.
- 9) A continuación se realiza la simulación.

4.1.1.2. Resultados de la simulación

Una vez realizada la simulación, el programa muestra diferentes modos de fallo de la viga, pero para este trabajo solamente son de interés los relacionados con el pandeo de la viga y las cargas asociadas a estos fallos.

➤ Carga 1

Para el primer modo de fallo por pandeo, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 1.

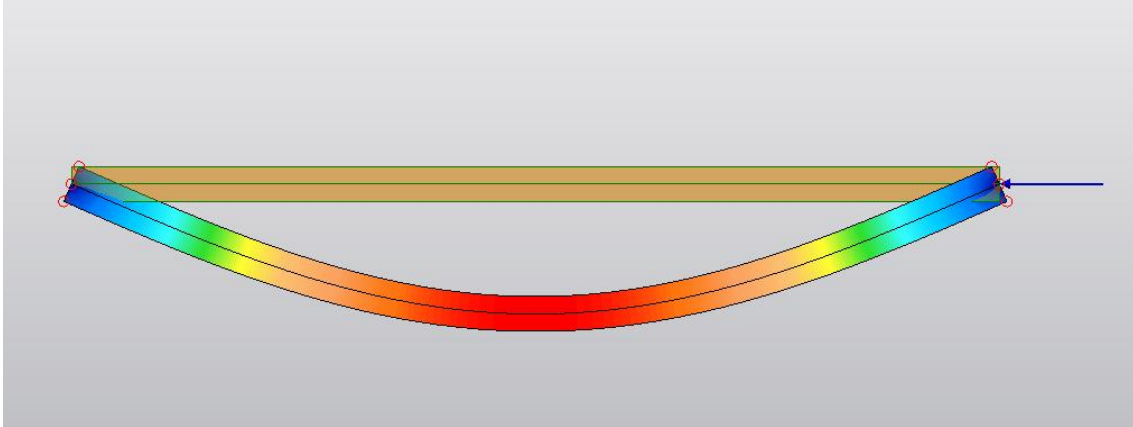


Figura 4.2.1.2.1 – Primer modo de pandeo. Vista superior.

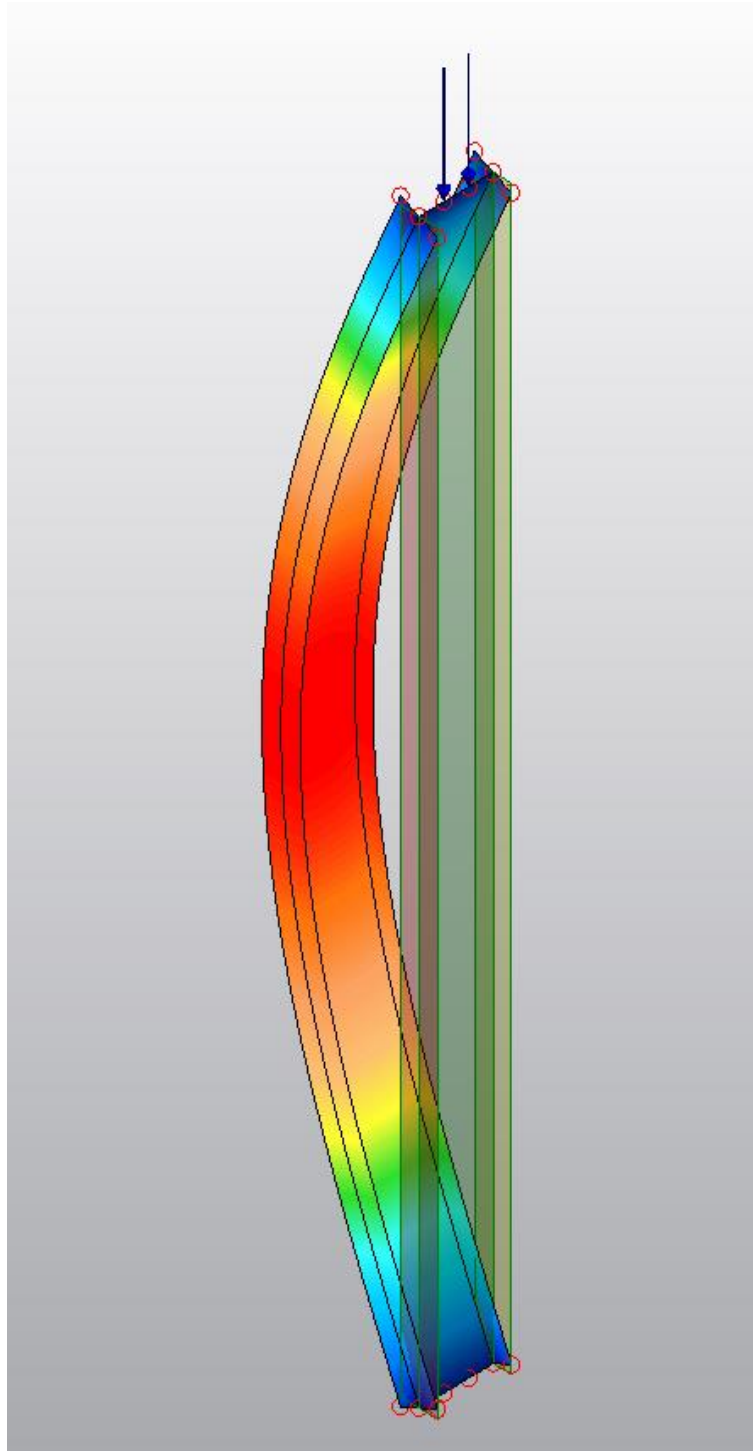


Figura 4.2.1.2.2 – Primer modo de pandeo. Vista 3D.

La carga que produce este modo de pandeo es de **740129 N**.

➤ Carga 2

Para el segundo modo de fallo por pandeo, se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 1.

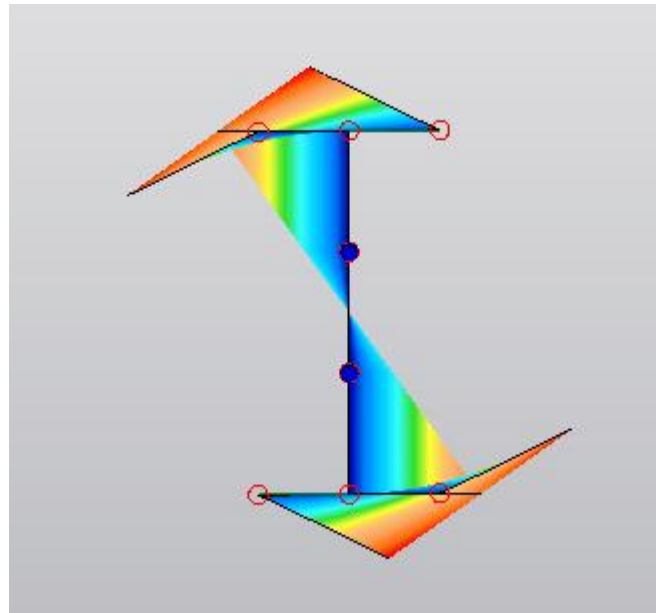


Figura 4.2.1.2.3 – Segundo modo de pandeo. Vista lateral.

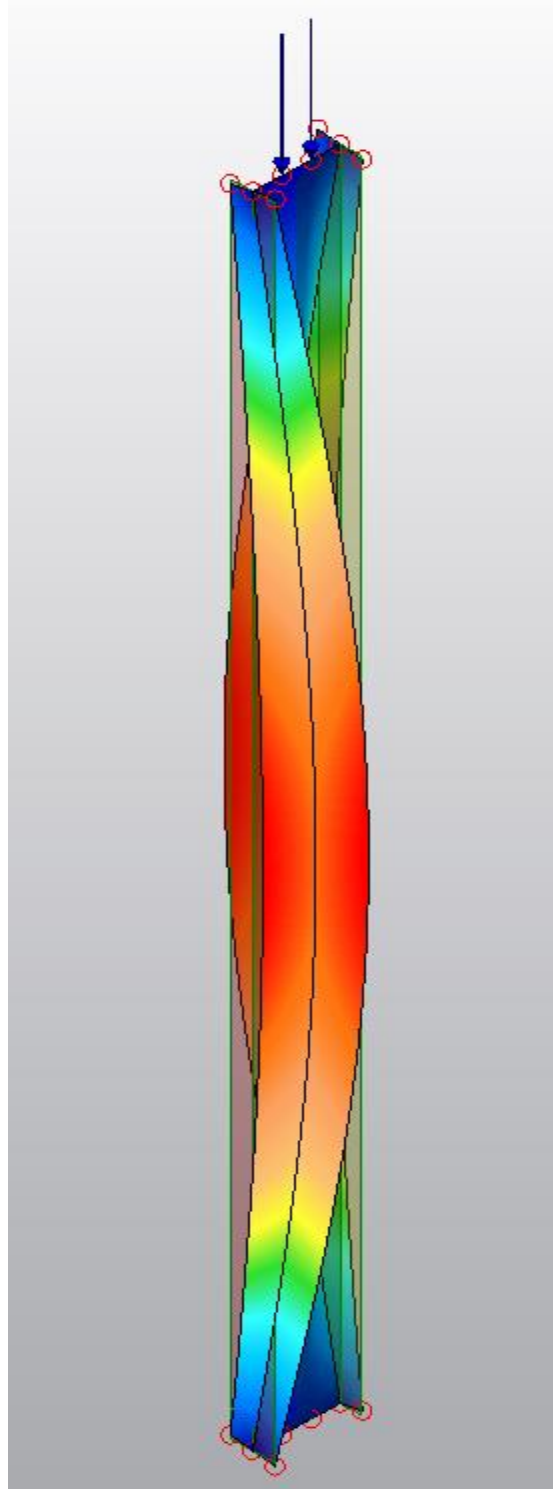


Figura 4.2.1.2.4 – Segundo modo de pandeo. Vista 3D.

La carga que produce este modo de pandeo es de **1613210 N**.

➤ Carga 3

Para el tercer modo de fallo por pandeo, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 2.

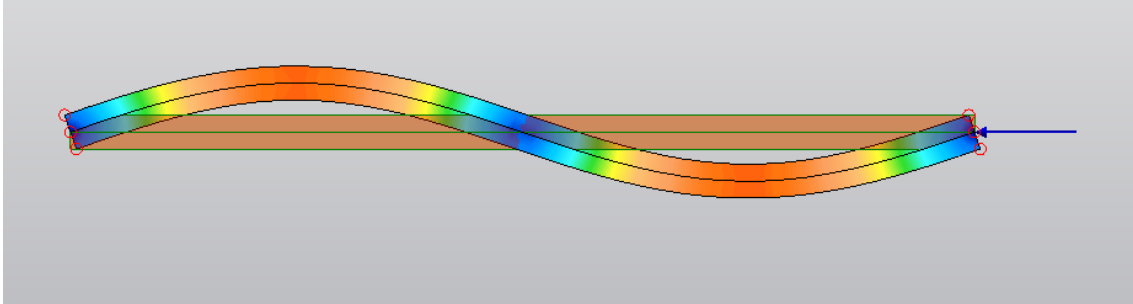


Figura 4.2.1.2.5 – Tercer modo de pandeo. Vista superior.

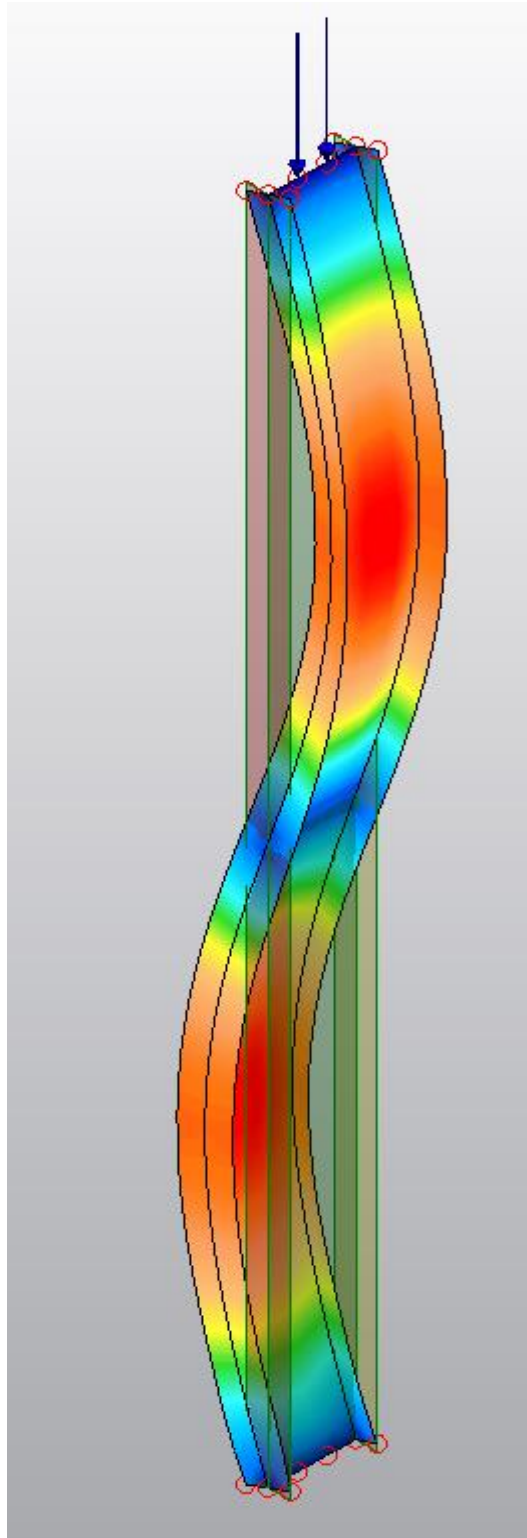


Figura 4.2.1.2.6 – Tercer modo de pandeo. Vista 3D.

La carga que produce este modo de pandeo es de **2857750 N**.

➤ Carga 4

Para el cuarto modo de fallo por pandeo, se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 2.

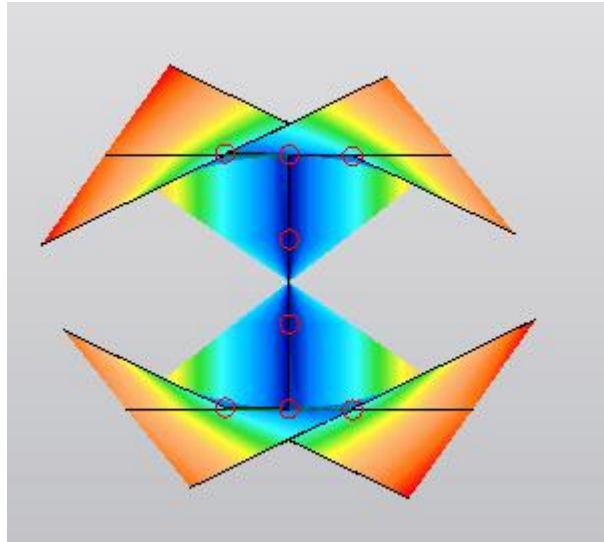


Figura 4.2.1.2.7 – Cuarto modo de pandeo. Vista lateral.

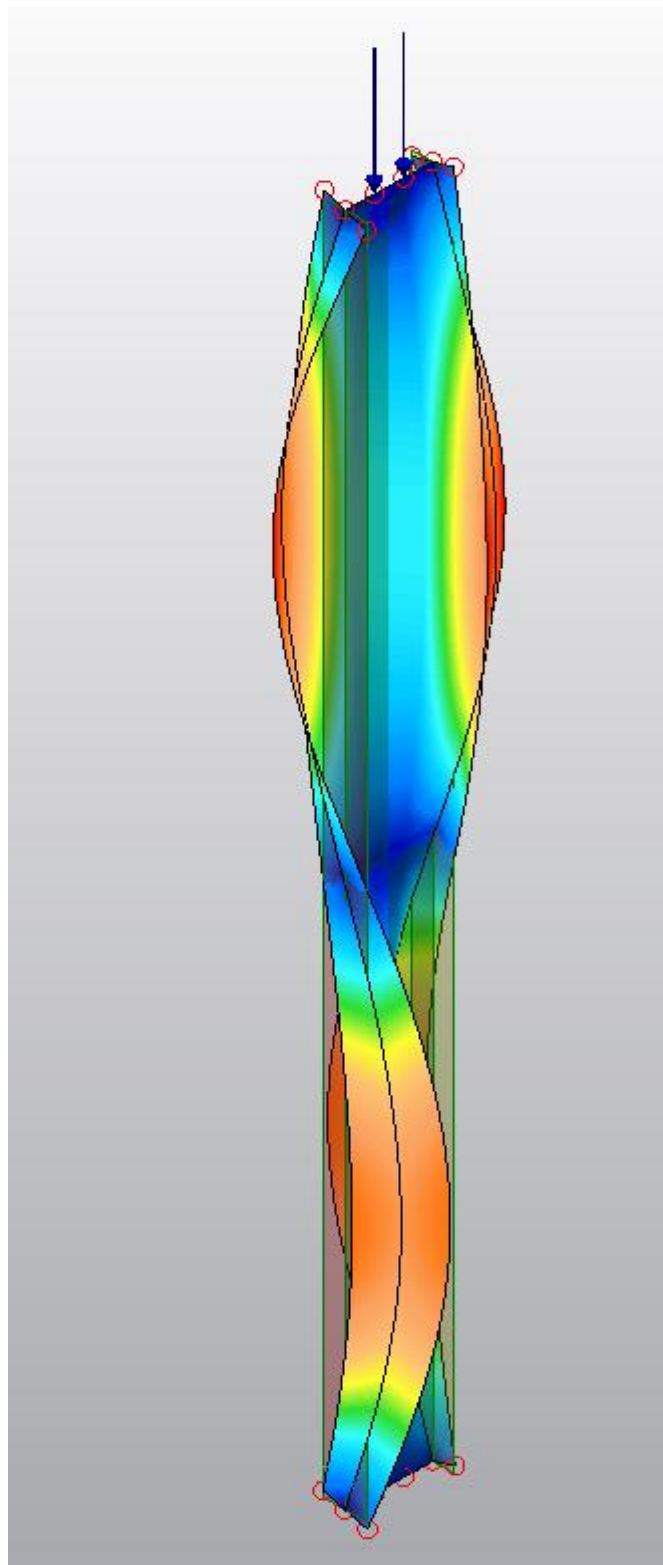


Figura 4.2.1.2.8 – Cuarto modo de pandeo. Vista 3D.

La carga que produce este modo de pandeo es de **4365420 N**.

➤ Carga 5

Para el quinto modo de fallo por pandeo, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 3.

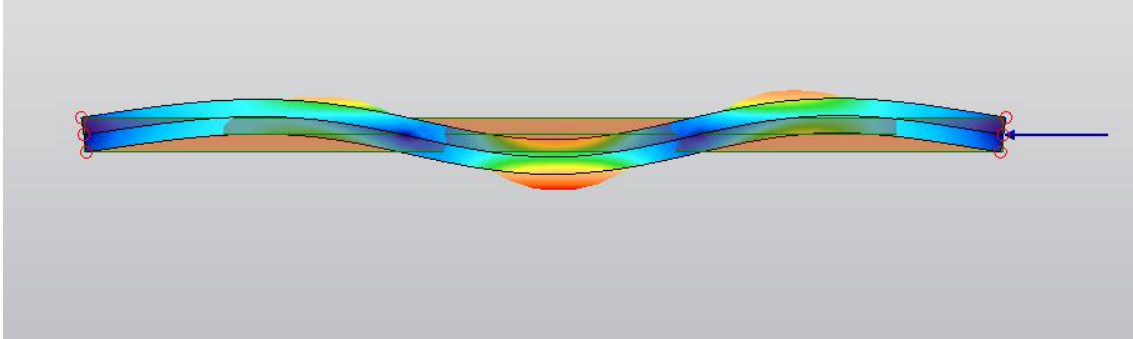


Figura 4.2.1.2.9 – Quinto modo de pandeo. Vista superior.

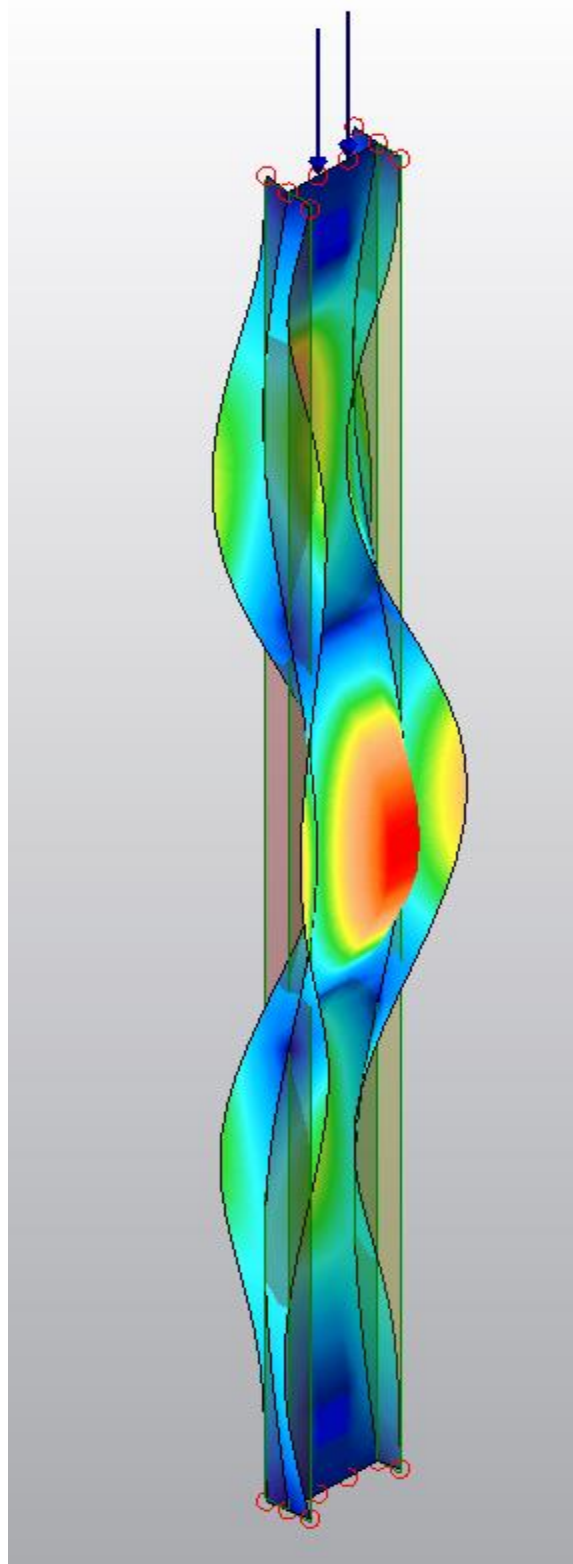


Figura 4.2.1.2.10 – Quinto modo de pandeo. Vista 3D.

La carga que produce este modo de pandeo es de **5341440 N**.

➤ Carga 6

Para el sexto modo de fallo por pandeo, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano fuerte de la estructura (plano $\zeta - \eta$), en el modo de pandeo 1.

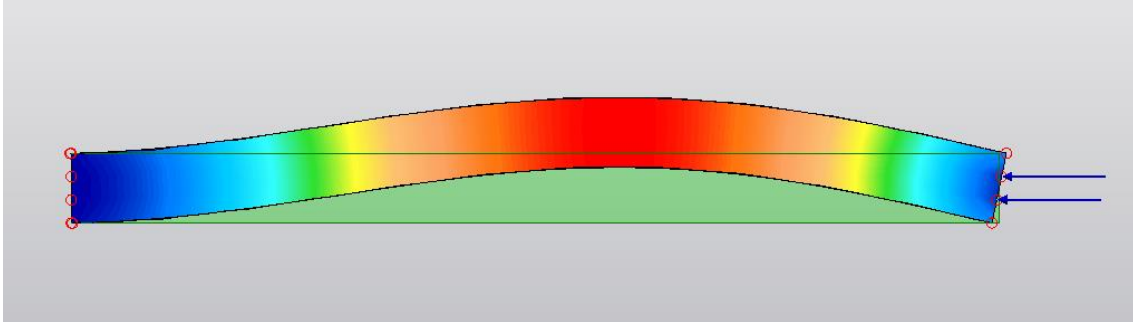


Figura 4.2.1.2.11 – Sexto modo de pandeo. Vista frontal.

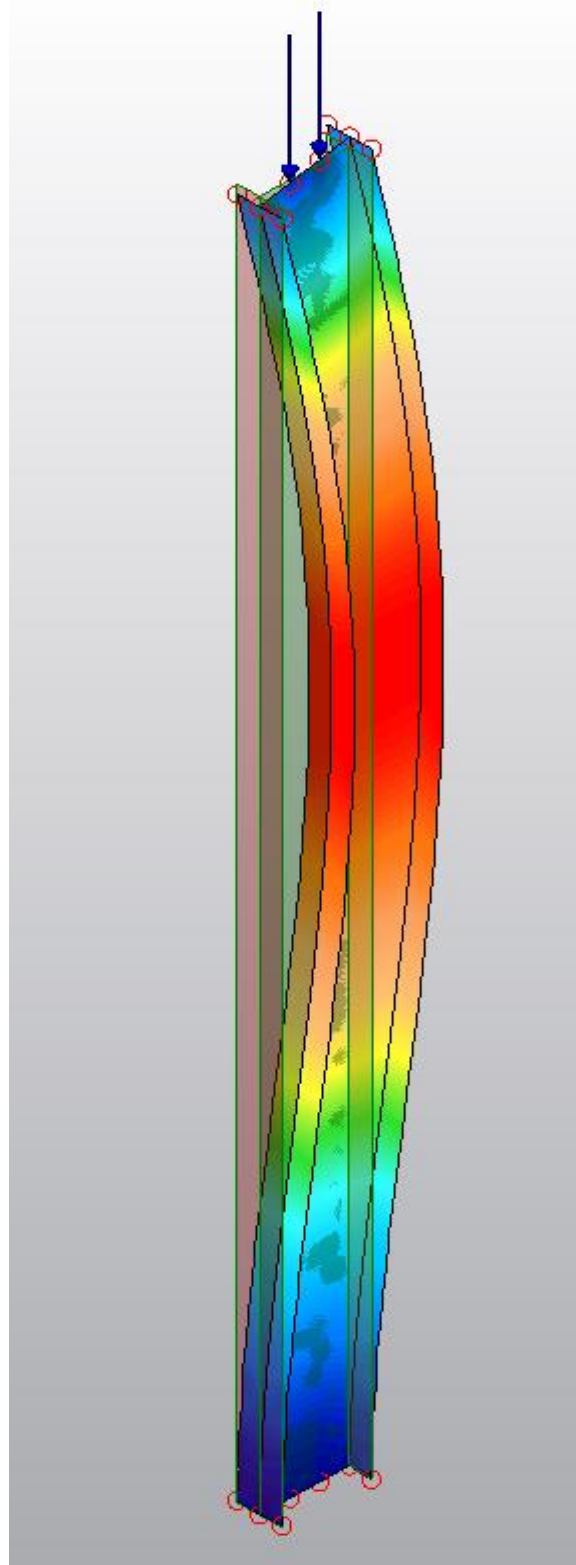


Figura 4.2.1.2.12 – Sexto modo de pandeo. Vista 3D.

La carga que produce este modo de pandeo es de **18657300 N**.

4.1.2. Caso 2: Pandeo lateral o vuelco

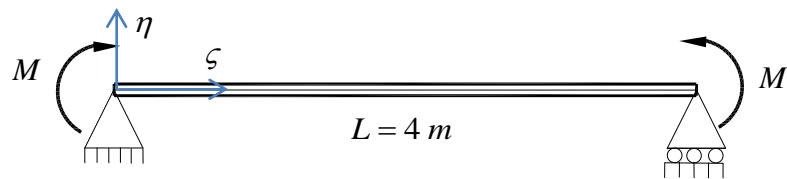


Figura 3.3.2.1 - Viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados.

4.1.2.1. Realización de la simulación

El proceso de simulación es similar al del caso anterior, excepto en las cargas aplicadas.

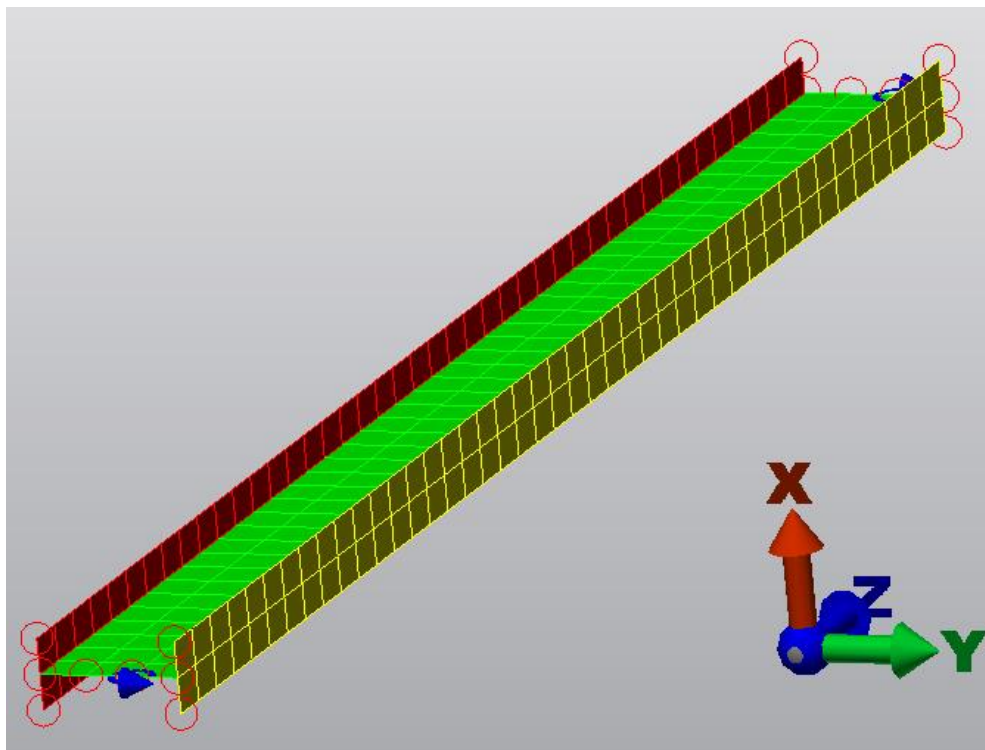


Figura 4.2.2.1.1 - Viga biapoyada con dos momentos concentrados en los extremos.

- 8) Cada uno de los momentos concentrados es de 1000 Nm.
- 9) A continuación se realiza la simulación.

4.1.2.2. Resultados de la simulación

Una vez realizada la simulación, el programa muestra diferentes modos de fallo de la viga, pero para este caso solamente son de interés los relacionados con el pandeo lateral o vuelco de la viga y la carga asociada.

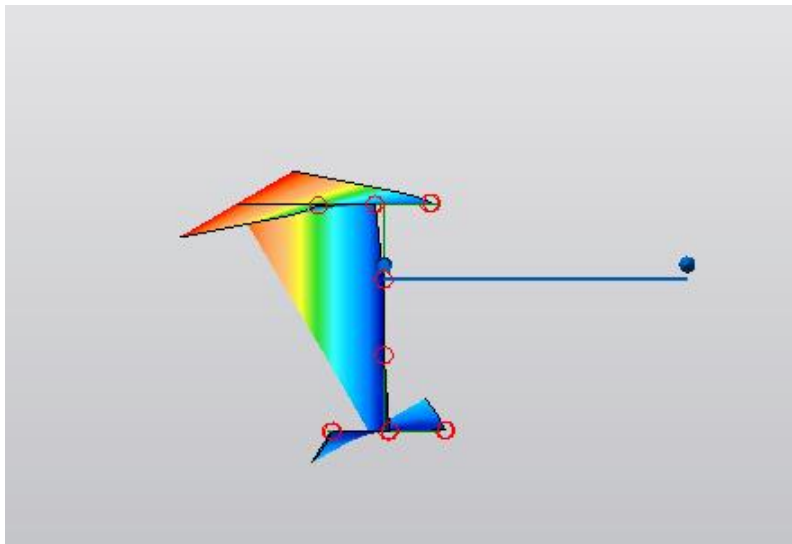


Figura 4.2.2.2.1 – Modo de pandeo para pandeo lateral. Vista lateral.

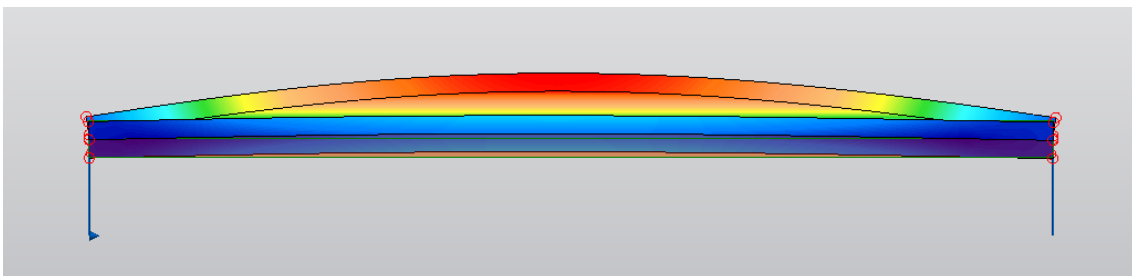


Figura 4.2.2.2.2 – Modo de pandeo para pandeo lateral. Vista superior.

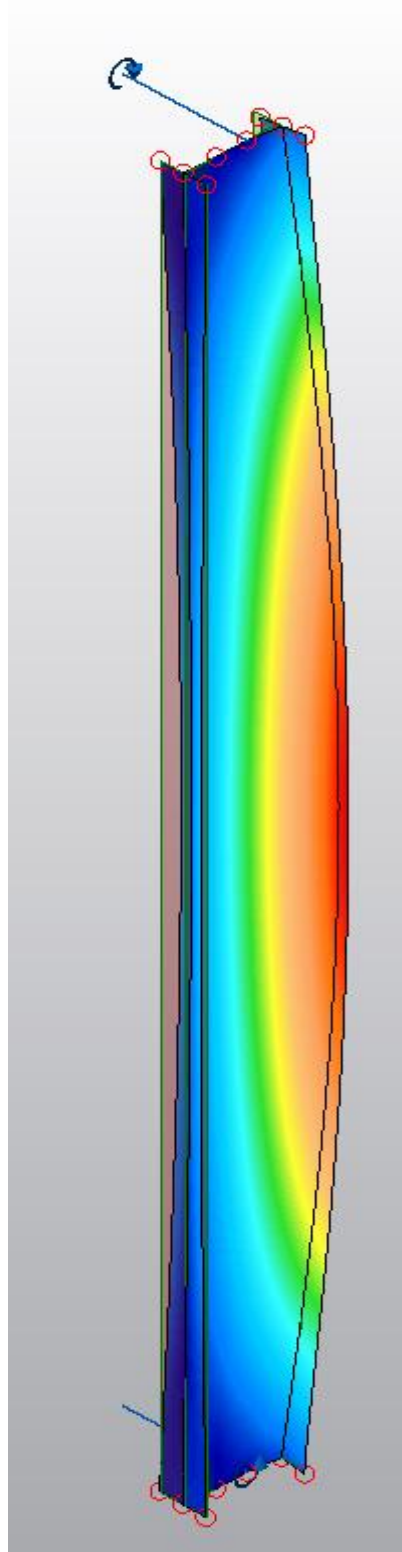


Figura 4.2.2.2.3 – Modo de pandeo para pandeo lateral. Vista 3D.

El momento que produce el pandeo lateral o vuelco es de **153764 Nm**.

4.1.3. Caso 3: Pandeo con cargas combinadas

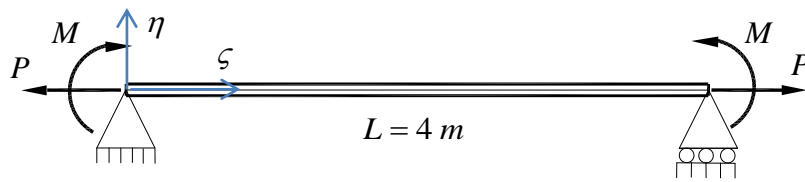


Figura 3.3.3.1 - Viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados.

4.1.3.1. Realización de la simulación

Como en el caso anterior, el proceso de simulación es el mismo.

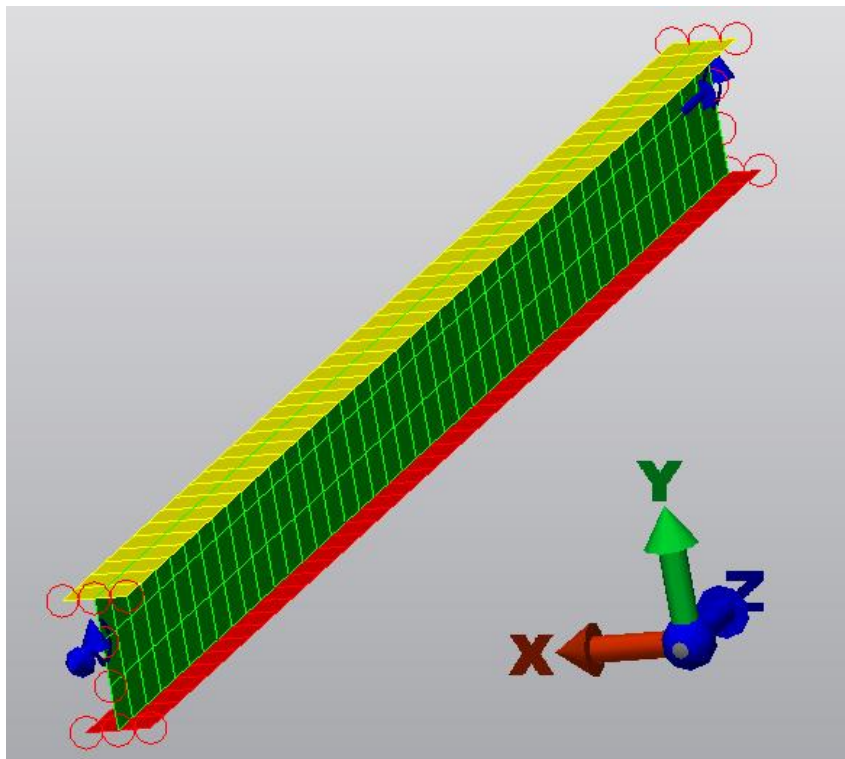


Figura 4.2.3.1.1 - Viga biapoyada con dos momentos concentrados en los extremos y con cargas puntuales.

- 8) Cada uno de los momentos concentrados es de 1000 Nm.
- 9) Cada una de las cargas es de 100000 N.
- 10) A continuación se realiza la simulación.

4.1.3.2. Resultados de la simulación

Una vez realizada la simulación, el programa muestra diferentes modos de fallo de la viga, pero para este caso solamente son de interés los relacionados con el pandeo lateral o vuelco de la viga y la carga asociada.

➤ **M_{cr} para $P=+10^5$ (tracción)**

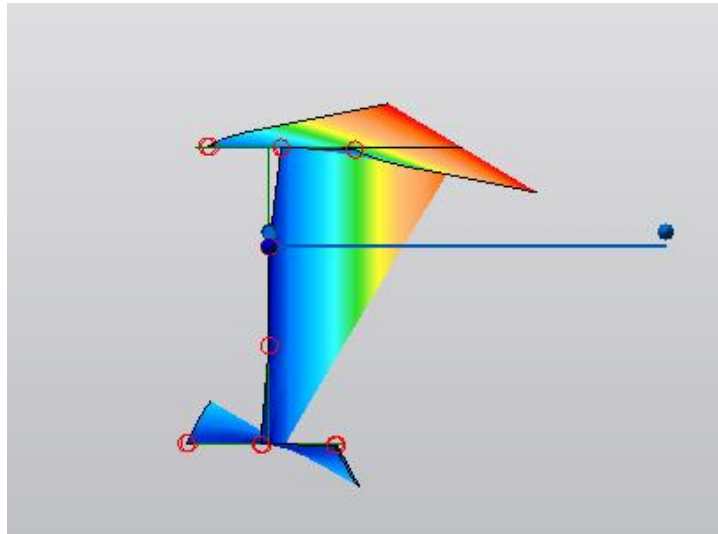


Figura 4.2.3.2.1 – Modo de pandeo para cargas combinadas (tracción). Vista lateral.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

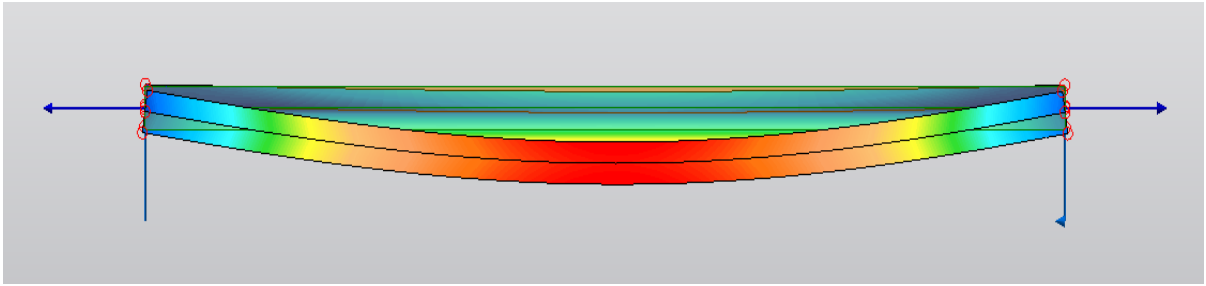


Figura 4.2.3.2.2 – Modo de pandeo para cargas combinadas (tracción). Vista superior.

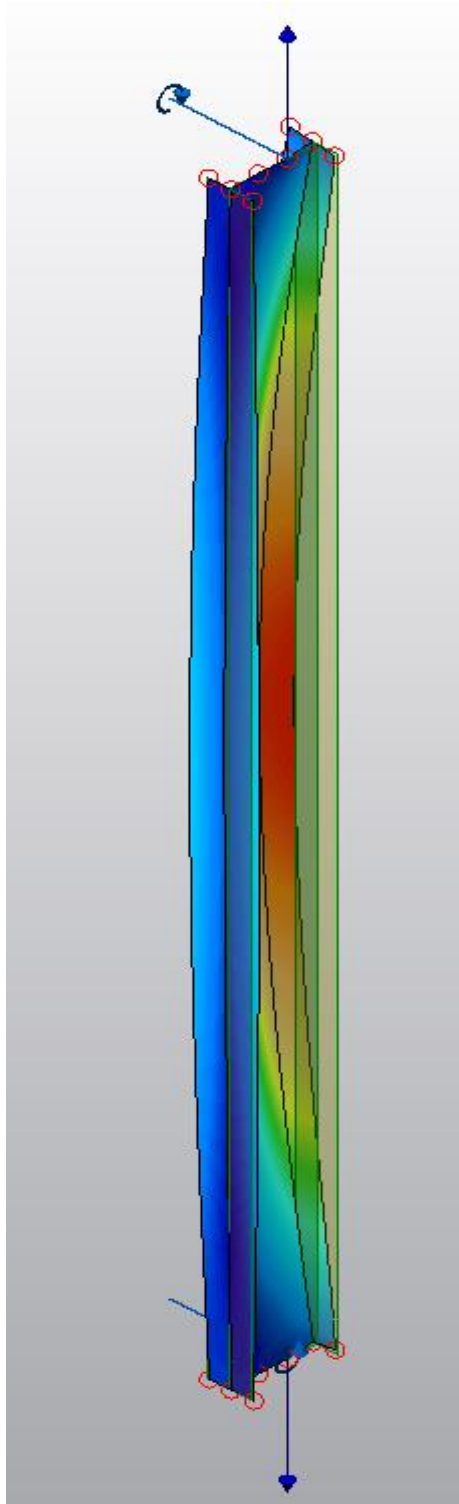


Figura 4.2.3.2.3 – Modo de pandeo para cargas combinadas (tracción). Vista 3D.

Para cargas de tracción, el momento que produce el pandeo lateral o vuelco para cargas combinadas es de **169723 Nm**.

➤ M_{cr} para $P=-10^5$ (compresión)

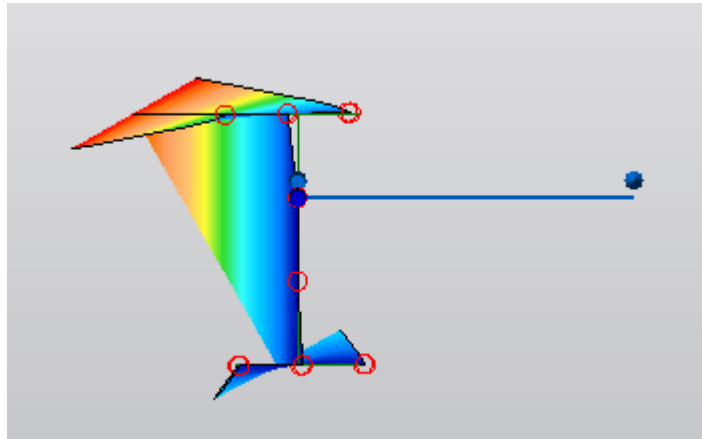


Figura 4.2.3.2.4 – Modo de pandeo para cargas combinadas (compresión). Vista lateral.

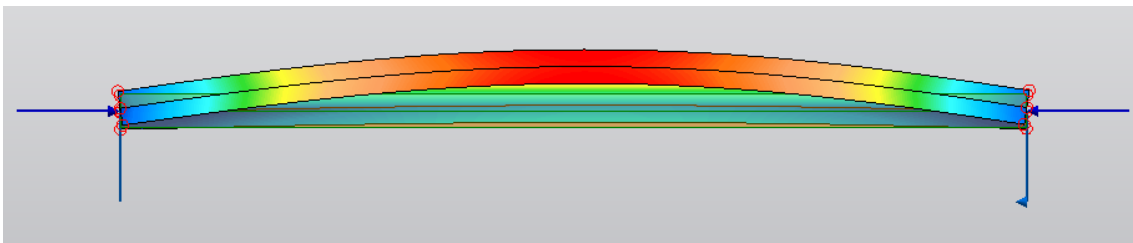


Figura 4.2.3.2.5 – Modo de pandeo para cargas combinadas (compresión). Vista superior.

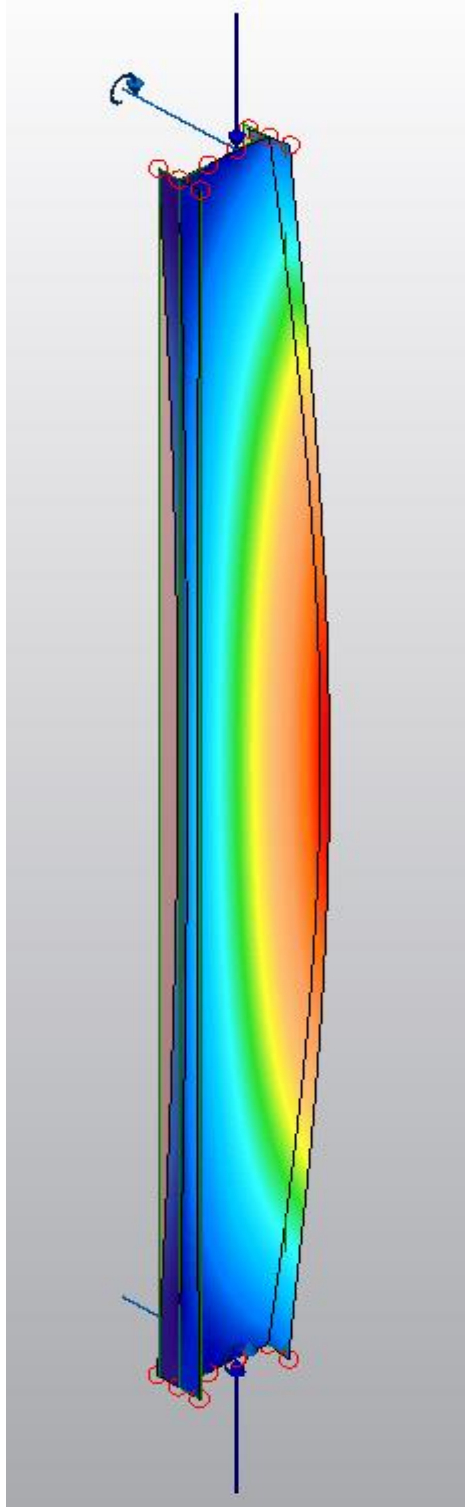


Figura 4.2.3.2.6 – Modo de pandeo para cargas combinadas (compresión). Vista 3D.

Para cargas de compresión, el momento que produce el pandeo lateral o vuelco para cargas combinadas es de **140116 Nm**.

4.1.4. Caso 4: Pandeo global de una estructura. Método lineal

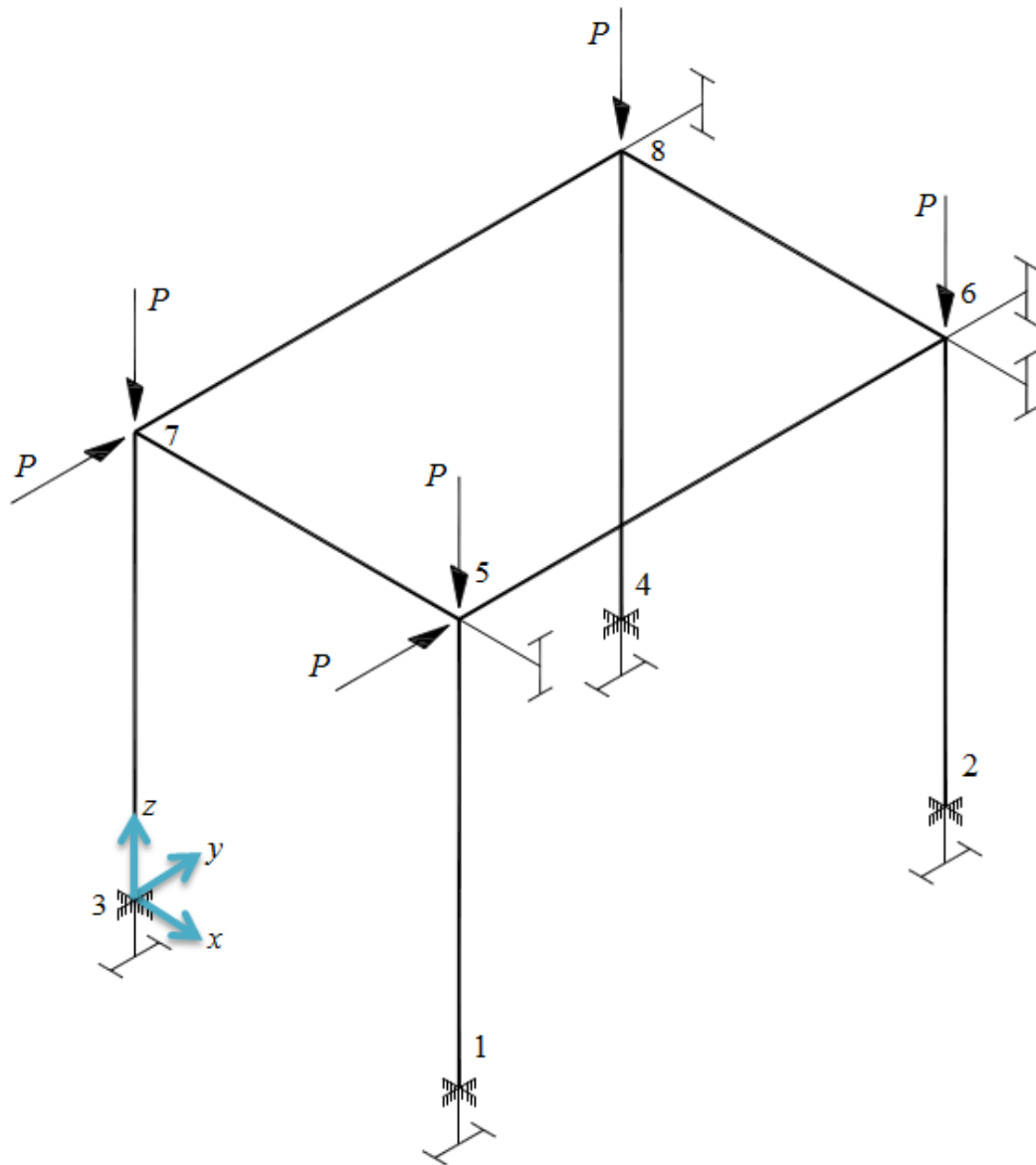


Figura 3.3.4.1 – Estructura con cargas puntuales.

4.1.4.1. Realización de la simulación

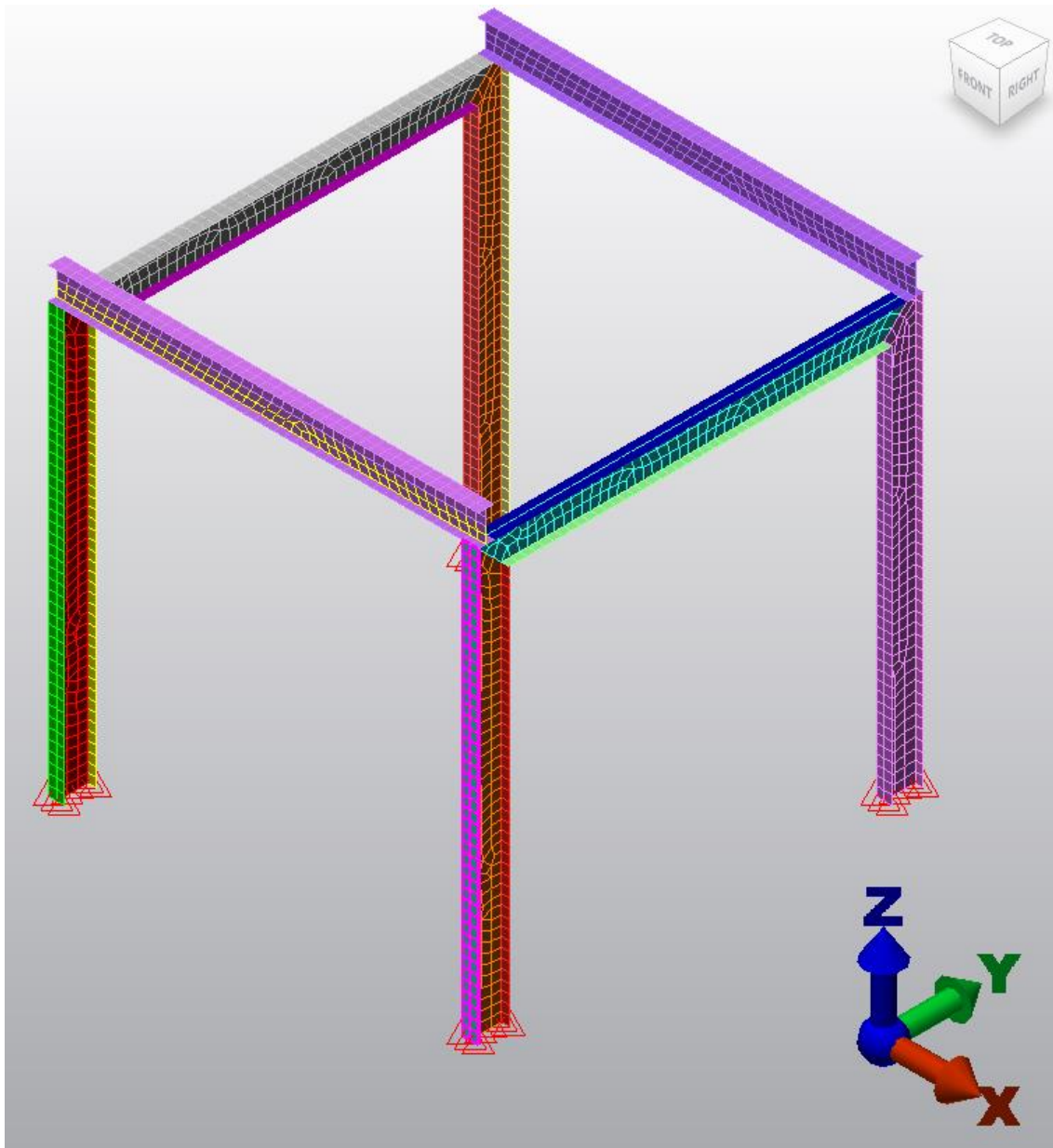


Figura 4.2.4.1.1 – Estructura con cargas puntuales.

El proceso seguido es el mismo que para los casos anteriores.

- 8) A la hora de imponer el estado de cargas al que está sometida la estructura, se añaden cargas en dirección axial.
- 9) Cada una de las cargas puntuales es de 1000 N.
- 10) A continuación se realiza la simulación.

4.1.4.2. Resultados de la simulación

Una vez realizada la simulación, el programa muestra diferentes tipos de fallos de la estructura, pero para este caso solamente son de interés el que provoca el pandeo global de la estructura.

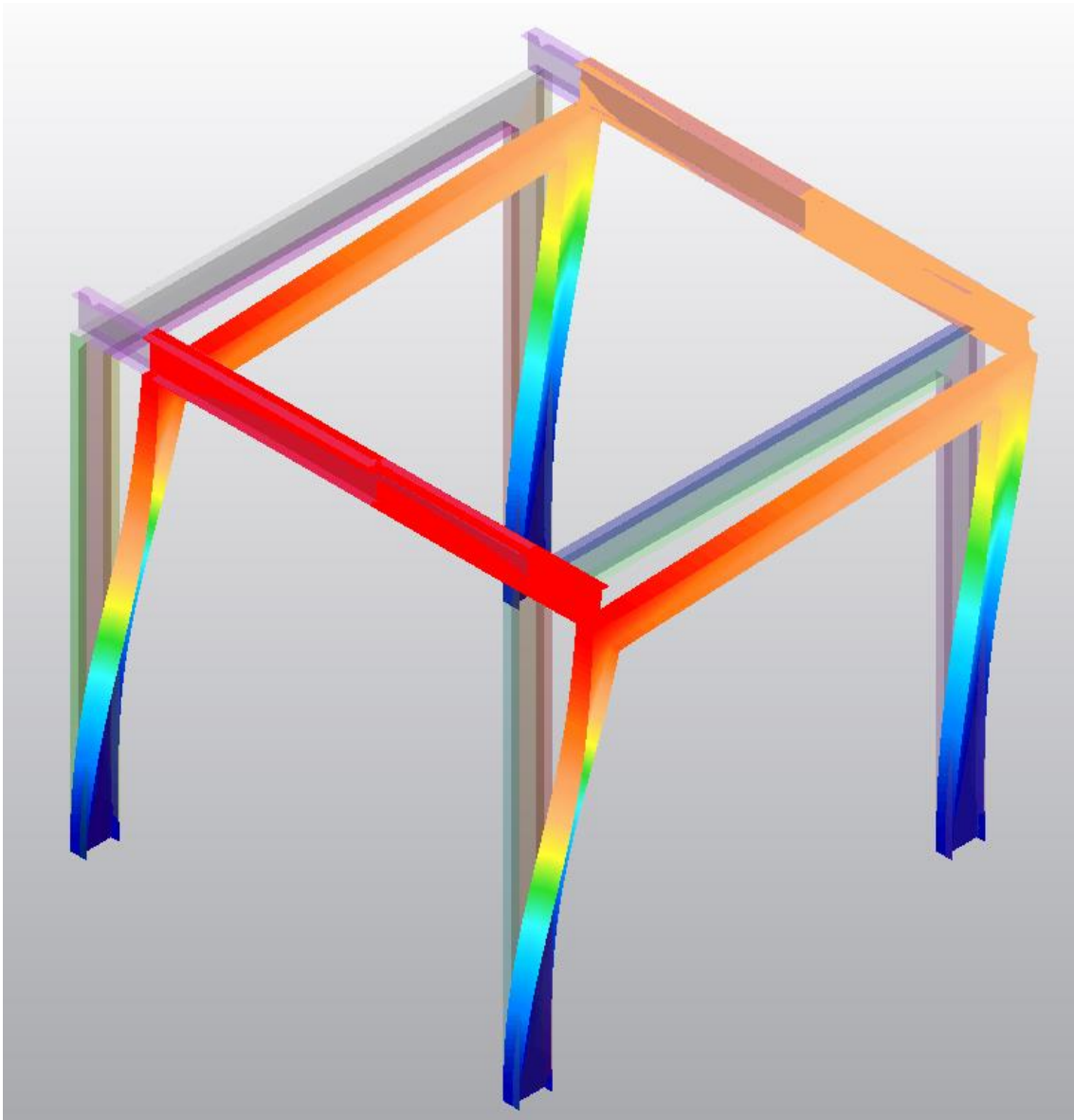


Figura 4.2.4.2.1 – Modo de pandeo global de la estructura. Vista 3D.

El factor de multiplicación de cargas de pandeo es 441.99.

Por lo que si todas las cargas aplicadas en la estructura fueran de **441990 N**, se produciría el pandeo global de la estructura.

5. ANÁLISIS DE PANDEO MEDIANTE CTE DB SE-A

5.1. Introducción

El comportamiento real de los pilares, difiere mucho del comportamiento teórico que se hace en los cálculos. Esto es debido a las diversas imperfecciones en el cálculo de la carga de pandeo que no se han tenido en cuenta en el estudio teórico.

Algunas de estas imperfecciones son:

- Falta de rectitud inicial del eje del pilar.
- Cargas axiales que no están aplicadas en el centro de gravedad del perfil.
- Tensiones residuales debidas a la fabricación del perfil.
- Otras.

Algunos estudios muestran una relación entre el comportamiento teórico y el real de un pilar sometido a compresión:

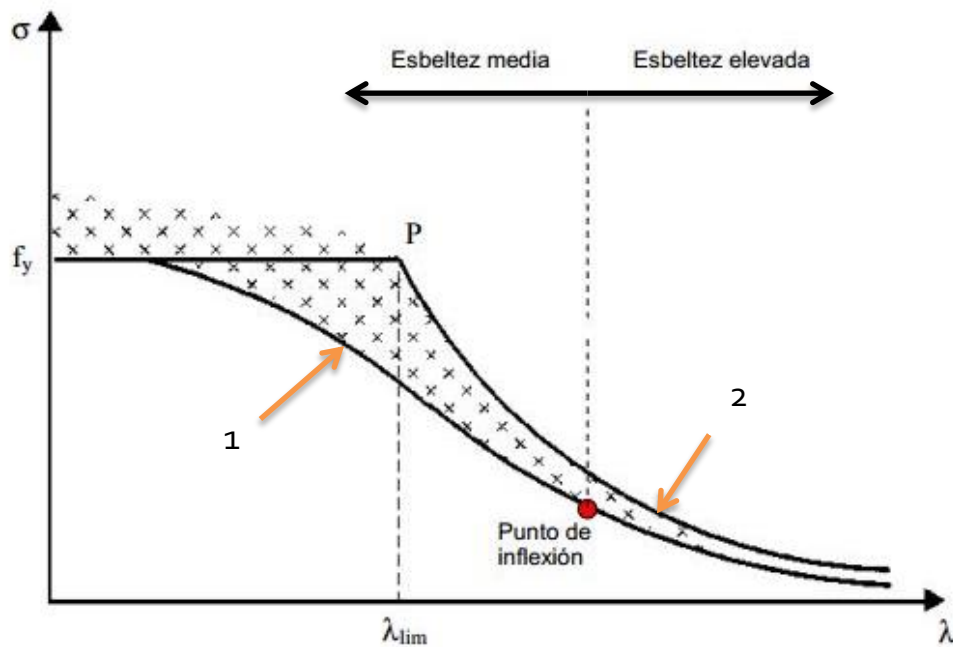


Figura 5.1.1 – Comportamiento de un pilar sometido a cargas de compresión.

La curva 1 de la figura 5.1.1, representa el límite de carga con los respectivos coeficientes de seguridad aplicados y la curva 2 de la figura 5.1.1, representa el valor teórico (carga crítica de Euler).

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Un pilar se considera de esbeltez elevada si su esbeltez es superior a la correspondiente al punto de inflexión, y se considera de esbeltez media si su esbeltez es inferior a la correspondiente al punto de inflexión.

La mayoría de los pilares se encuentra en la zona de esbelteces medias, por lo que es necesario considerar los defectos que puede tener un pilar. Las imperfecciones que más se presentan un efecto más significativo son la presencia de tensiones residuales y la falta de rectitud del pilar.

5.2. Ecuaciones de Pandeo según DB SE-A

5.2.1. Tensión máxima teórica y real.



Figura 5.2.1.1 - Viga biapoyada sometida a cargas de compresión.

- Pandeo teórico: Carga de Euler (solo compresión)

$$\sigma_{\max} = \sigma(N) = \frac{N}{A} = \sigma = \text{cte} \quad (5.2.1.1)$$

- Pandeo real: Compresión + Flexión + Tensiones residuales

$$\sigma_{\max} = \sigma(N) + \left(\frac{M_z}{W}\right) + \sigma_{\text{residuales}} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} + \sigma_{\text{residuales}} = K_1 \cdot \sigma = \text{no cte} \quad (5.2.1.2)$$

Donde K_1 es el coeficiente de amplificación de la tensión de compresión.

5.2.2. Cálculo a pandeo con la normativa Española: DB-SE-A (2007)

Según el DB-SE-A 2007 (Documento Básico de Seguridad Estructural para el Acero), la fórmula propuesta para la comprobación a pandeo es:

$$\sigma_{\max} = K_1 \cdot \sigma = K_1 \cdot \frac{N}{A} \leq f_{y,d} \rightarrow N \leq \frac{1}{K_1} \cdot A \cdot f_{y,d} \rightarrow N \leq \chi \cdot A \cdot f_{y,d} \quad (5.2.2.1)$$

donde: $N_{b,Rd}$ es la resistencia última a pandeo de la barra = $\chi \cdot A \cdot f_{y,d}$.

$\chi = \frac{1}{K_1}$, es el coeficiente de reducción por pandeo.

Por lo que la fórmula final para la comprobación de pandeo para un pilar de sección constante y compresión centrada es la siguiente:

$$M_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{y,d} \quad (5.2.2.2)$$

Se tiene que cumplir que: $\chi \leq 1$, ya que es un coeficiente que incluye las tensiones debidas a la flexión y a las tensiones residuales.

5.2.3. Curvas europeas de pandeo

Las curvas de pandeo ECCS están basadas en más de 1000 ensayos realizados sobre diferentes tipos de perfiles; perfiles en I, en H, en T, etc, y con diferentes valores de esbeltez (entre 55 y 160). En este tipo de ensayos se han tenido en cuenta las diferentes imperfecciones que pueden tener los perfiles.

Se trata de 5 curvas que dependen de la forma de la sección transversal, del eje en el que se produzca las deformaciones y del proceso de fabricación escogido para el perfil.

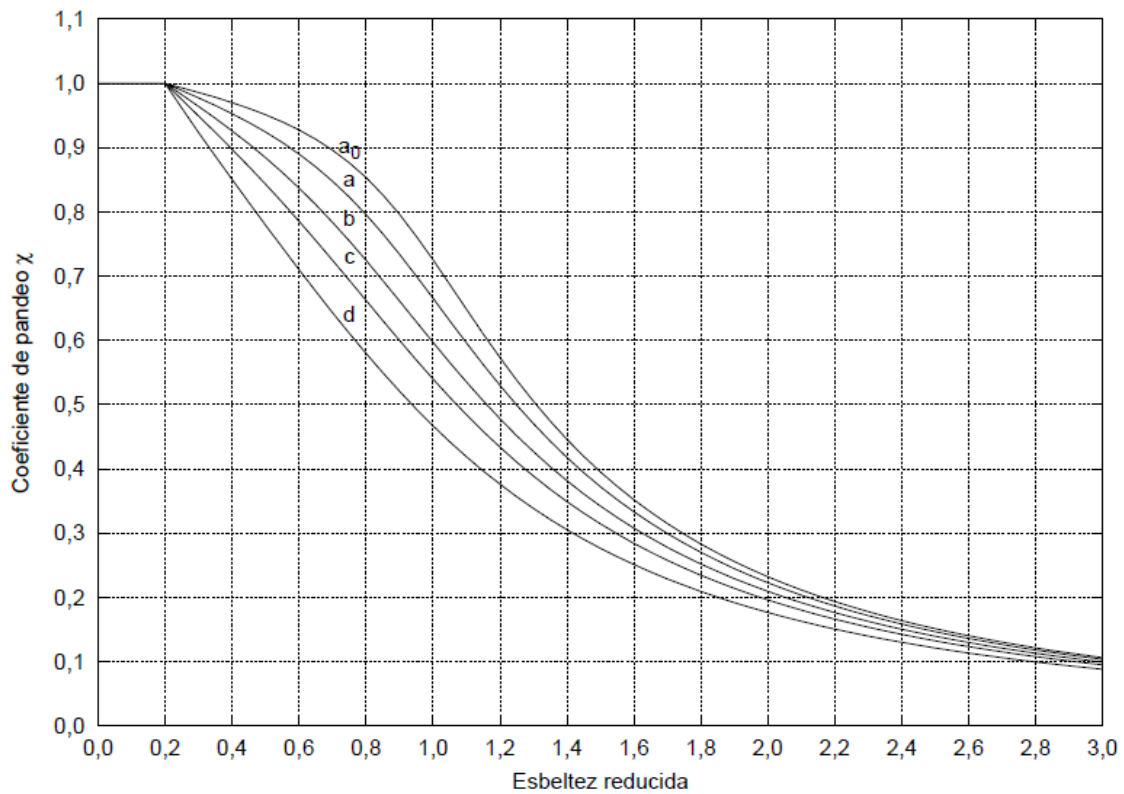


Figura 5.2.3.1 - Curvas de pandeo.

Estas curvas relacionan el coeficiente de reducción por pandeo χ con el valor de la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_K^2} \quad (5.2.3.1)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_{y,d}}{N_{cr}}} \quad (5.2.3.2)$$

La ecuación (5.2.3.1) corresponde al cálculo de la Carga Crítica de Euler y la ecuación (5.2.3.2) corresponde al cálculo de la esbeltez reducida.

La elección del tipo de curva se realiza en función de los datos de la tabla del ANEXO V.

5.2.4. Comprobaciones a Pandeo Lateral

Cuando exista la posibilidad de que una viga pueda pandear lateralmente, deberá comprobarse que el valor del momento que se ha calculado debe de ser menor que el valor de cálculo de la resistencia frente a pandeo lateral de la viga.

$$M_{Ed} \leq M_{b,Rd} \quad (5.2.4.1)$$

donde: M_{Ed} : Representa el valor del momento flector calculado.

$M_{b,Rd}$: Representa el valor de cálculo de la resistencia frente a pandeo lateral.

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \quad (5.2.4.2)$$

donde: W_y representa el módulo resistente de la sección, según del tipo que sea:

$W_{pl,y}$: para secciones de clases 1 y 2.

$W_{el,y}$: para secciones de clase 3.

$W_{ef,y}$: para secciones de clase 4.

χ_{LT} es el factor de reducción para el pandeo lateral y se podrá calcular a partir de la siguiente expresión (5.2.4.3).

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad (5.2.4.3)$$

donde:

$$\phi_{LT} = 0.5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + (\bar{\lambda}_{LT})^2 \right] \quad (5.2.4.4)$$

siendo:

$\bar{\lambda}_{LT}$ es la esbeltez relativa frente a pandeo lateral.

α_{LT} corresponde al factor de imperfección, obtenido en la tabla del ANEXO VI.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

La esbeltez relativa frente al pandeo lateral se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} \quad (5.2.4.5)$$

donde: M_{cr} corresponde al momento crítico elástico de pandeo lateral que puede ser determinado según la teoría de la elasticidad, por ejemplo mediante la ecuación (5.2.4.6).

Observaciones: Para el caso de perfiles laminados o para el caso de perfiles armados equivalentes cuando $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0.4$ se podrá utilizar un valor de $\chi_{LT} = 1$.

Cálculo del momento crítico elástico de pandeo lateral

Para los casos en los que los apoyos de los extremos de una barra, impidan su deformación por torsión, y cuando las cargas actúen en el eje de la barra, el momento crítico elástico de pandeo lateral podrá ser calculado mediante la siguiente ecuación:

$$M_{cr} = \sqrt{M_{LTv}^2 + M_{LTw}^2} \quad (5.2.4.6)$$

donde: M_{LTv} es la componente de M_{cr} que representa la resistencia por torsión uniforme de la barra (S. Venant).

M_{LTw} es la componente de M_{cr} que representa la resistencia por torsión no uniforme de la barra.

La componente M_{LTv} puede ser calculada a partir de la siguiente ecuación:

$$M_{LTv} = C_1 \cdot \frac{\pi}{L_c} \cdot \sqrt{G \cdot I_T \cdot E \cdot I_\eta} \quad (5.2.4.7)$$

donde: C_1 es un factor que depende de las condiciones de apoyo y de la ley de momentos flectores.

L_c representa la distancia entre apoyos laterales que impidan el pandeo lateral.

La componente M_{LTw} , viene determinada por la carga crítica elástica de pandeo del soporte comprimido del perfil. Este soporte está formado por el ala comprimida y

la tercera parte de la zona comprimida, esta componente puede ser calculada a partir de la siguiente ecuación:

$$M_{LTw} = W_{el,y} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{L_c^2} \cdot C_1 \cdot i_{f,z}^2 \quad (5.2.4.8)$$

donde: $W_{el,y}$ corresponde al módulo resistente elástico de la sección, según el eje de inercia, correspondiente a la fibra más comprimida.

$i_{f,z}$ corresponde al radio de giro, con respecto al eje de menor inercia de la sección, del soporte formado por el ala comprimida y la tercera parte de la zona comprimida del alma, adyacente al ala comprimida.

El factor C_1 puede ser calculado mediante la tabla del ANEXO VII.

5.2.4.1. Comprobaciones a Pandeo Lateral para elementos flectados y traccionados

Para la comprobación de elementos flectados y traccionados, se tiene que cumplir la siguiente ecuación:

$$\eta = \frac{M_{ef,Ed}}{M_{b,Rd,y}} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{pl,Rd,z}} \leq 1 \quad (5.2.5.1)$$

donde: $M_{ef,Ed}$ = Momento flector solicitante de cálculo pésimo.

$$M_{ef,Ed} = W_y \cdot \sigma_{com,Ed} \quad (5.2.5.2)$$

$$\sigma_{com,Ed} = \frac{M_{y,Ed}}{W_{y,com}} - 0.8 \cdot \frac{N_{t,Ed}}{A} \quad (5.2.5.3)$$

$M_{b,Rd,y}$ = Momento flector resistente de cálculo.

$M_{z,Ed}$ = Momento flector de solicitante de cálculo pésimo según el eje Z.

$M_{y,Ed}$ = Momento flector de solicitante de cálculo pésimo según el eje Y.

$M_{pl,Rd,z}$ = Resistencia a flexión de la sección bruta en condiciones plásticas respecto al eje Z.

$N_{t,Ed}$ = Axil de tracción de cálculo pésimo.

A = Área de la sección.

5.2.4.2. Comprobaciones a Pandeo Lateral para elementos flectados y comprimidos

Para el cálculo de elementos flectados y comprimidos, se tiene que cumplir la siguiente ecuación:

$$\eta = \frac{N_{c,Ed}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yd}} + K_{y,LT} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot W_{el,y} \cdot f_{yd}} + K_z \cdot \frac{c_{m,z} \cdot M_{z,Ed}}{W_{el,z} \cdot f_{yd}} \leq 1 \quad (5.2.6.1)$$

donde: $N_{c,Ed}$ = Axil de compresión solicitante de cálculo pésimo.

χ_z = Coeficiente de reducción por pandeo alrededor del eje Y.

A = Representa el área de la sección.

f_{yd} = Resistencia de cálculo del acero.

$K_{y,LT}$ = Es el coeficiente de interacción.

$$K_{y,LT} = 1 - \frac{0.05 \cdot \bar{\lambda}_z}{c_{m,LT} - 0.25} \cdot \frac{N_{c,Ed}}{\chi_z \cdot N_{c,Rd}} \quad (5.2.6.2)$$

$M_{y,Ed}$ = Es el momento flector solicitante de cálculo pésimo respecto al eje Y.

χ_{LT} = Coeficiente de reducción por pandeo lateral.

$W_{el,y}$ = Módulo resistente elástico correspondiente a la fibra comprimida alrededor del eje Y.

K_z = Es otro de los coeficientes de interacción.

$$K_z = 1 + 0.6 \cdot \bar{\lambda}_z \cdot \frac{N_{c,Ed}}{\chi_z \cdot N_{c,Rd}} \quad (5.2.6.3)$$

$c_{m,z}$ = Factor de momento flector uniforme equivalente.

$M_{z,Ed}$ = Es el momento flector solicitante de cálculo pésimo respecto al eje Z.

$W_{el,z}$ = Módulo resistente elástico correspondiente a la fibra comprimida alrededor del eje Z.

5.2.5. Comprobaciones a Pandeo con torsión

El DB no cubre el fenómeno de pandeo por torsión, que puede presentarse en piezas, generalmente abiertas con paredes delgadas, en las que el eje de la barra deformada no queda contenido en un plano.

Aunque no se contemple en el DB, si se recomienda comprobar este tipo de fenómeno, por lo que si se comprobará.

Para ello se utilizará la siguiente ecuación:

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2} \cdot \left[G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_w}{L_{kt}^2} \right] \quad (5.2.7.1)$$

donde: i_0 = Radio de giro de la sección bruta respecto al centro de torsión.

$$i_0 = (i_y^2 + i_z^2 + y_0^2 + z_0^2)^{0.5} \quad (5.2.7.2)$$

i_y = Radio de giro de la sección bruta respecto al eje Y.

i_z = Radio de giro de la sección bruta respecto al eje Z.

y_0 = Coordenadas del centro de torsión en el eje Y respecto al c.d.g.

z_0 = Coordenadas del centro de torsión en el eje Z respecto al c.d.g.

G = Módulo de elasticidad transversal.

I_t = Momento de inercia a torsión uniforme.

E = Módulo de elasticidad.

I_w = Constante de alabeo de la sección.

L_{kt} = Longitud efectiva de pandeo por torsión.

5.3. Ejemplo de cálculo mediante DB SE-A

5.3.1. Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión

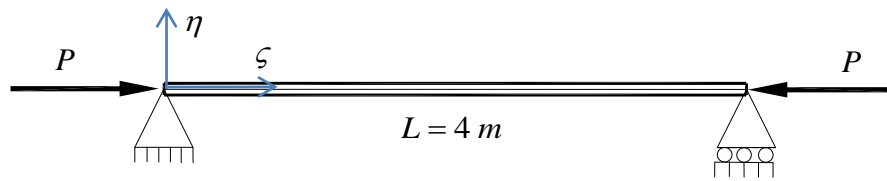


Figura 3.3.1.1 - Viga biapoyada sometida a compresión.

Datos del material:

- $\sigma_F = 275 \text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12} \text{ m}^6$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Para el cálculo de cargas de pandeo con la norma, sólo se calcularán los fallos para el modo 1 para cada una de las deformaciones, ya que una vez que se alcanza el modo 1, la normativa considera que el perfil queda fuera de servicio.

➤ Pandeo respecto al eje η :

Para el cálculo de la carga de pandeo respecto al eje η se usa la ecuación (5.2.2.2):

$$N \leq N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{y,d}$$

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L_k}\right)^2 \cdot E \cdot I_{\eta} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 604 \cdot 10^{-8} = 782413 \text{ N}$$

$$f_{y,d} = \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{275 \cdot 10^6}{1.05} = 244.8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_{y,d}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{53.8 \cdot 10^{-4} \cdot 244.8 \cdot 10^6}{782413}} = 1.3$$

De la tabla del ANEXO IV, obtenemos:

- Perfil de doble simetría
 - $h/b = 300/150 = 2 > 1.2$
 - $t = 10.7 \leq 40$
 - S275
 - Eje z
- } Curva "b"

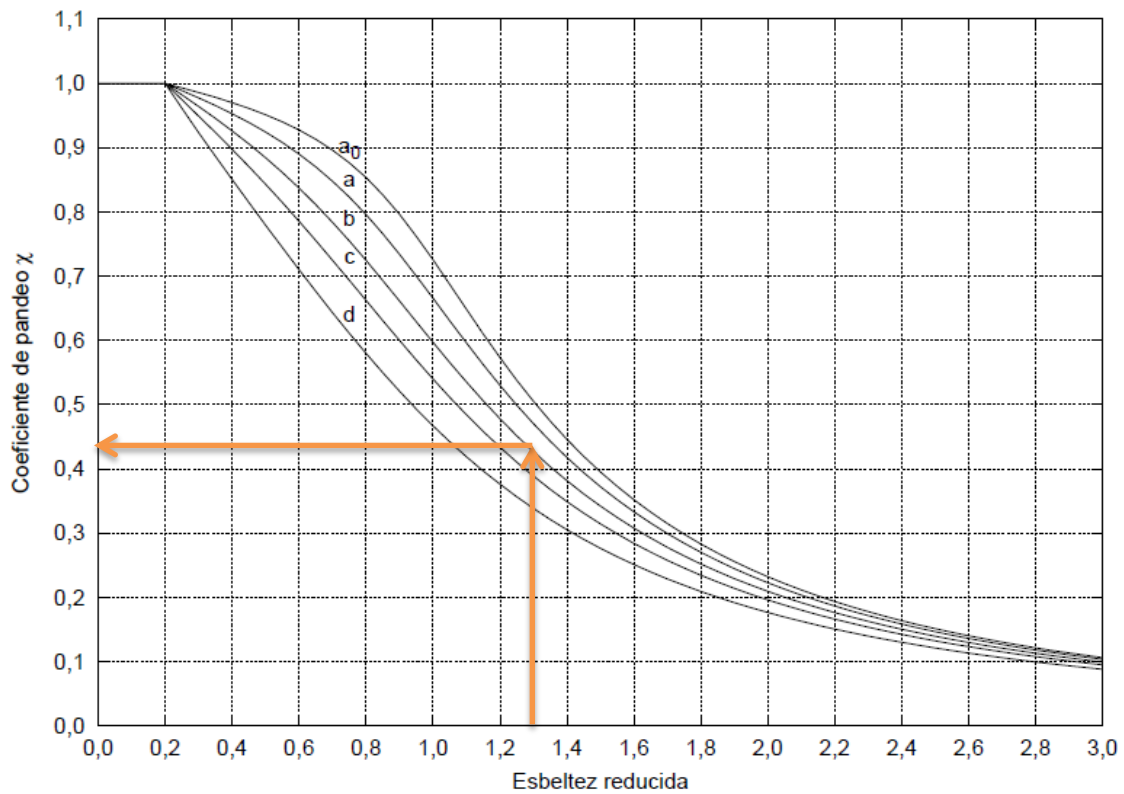


Figura 5.3.1.1 - Coeficiente de pandeo en el eje η .

De la figura 5.3.1.1, obtenemos el coeficiente de pandeo:

$$\chi = 0.43$$

A partir de la ecuación (5.2.2.2), obtenemos:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{y,d} = 0.43 \cdot 53.8 \cdot 10^{-4} \cdot 244.8 \cdot 10^6 = 566320 \text{ N}$$

➤ **Pandeo respecto al eje ξ :**

Para el cálculo de la carga de pandeo respecto al eje ξ se usa la ecuación (5.2.2.2):

$$N \leq N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{y,d}$$

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L_k}\right)^2 \cdot E \cdot I_{\xi} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 8360 \cdot 10^{-8} = 10829423 \text{ N}$$

$$f_{y,d} = \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{275 \cdot 10^6}{1.05} = 244.8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_{y,d}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{53.8 \cdot 10^{-4} \cdot 244.8 \cdot 10^6}{10829423}} = 0.35$$

De la tabla del ANEXO IV, obtenemos:

- Perfil de doble simetría
 - $h/b = 300/150 = 2 > 1.2$
 - $t = 10.7 \leq 40$
 - S275
 - Eje y
- } Curva "a"

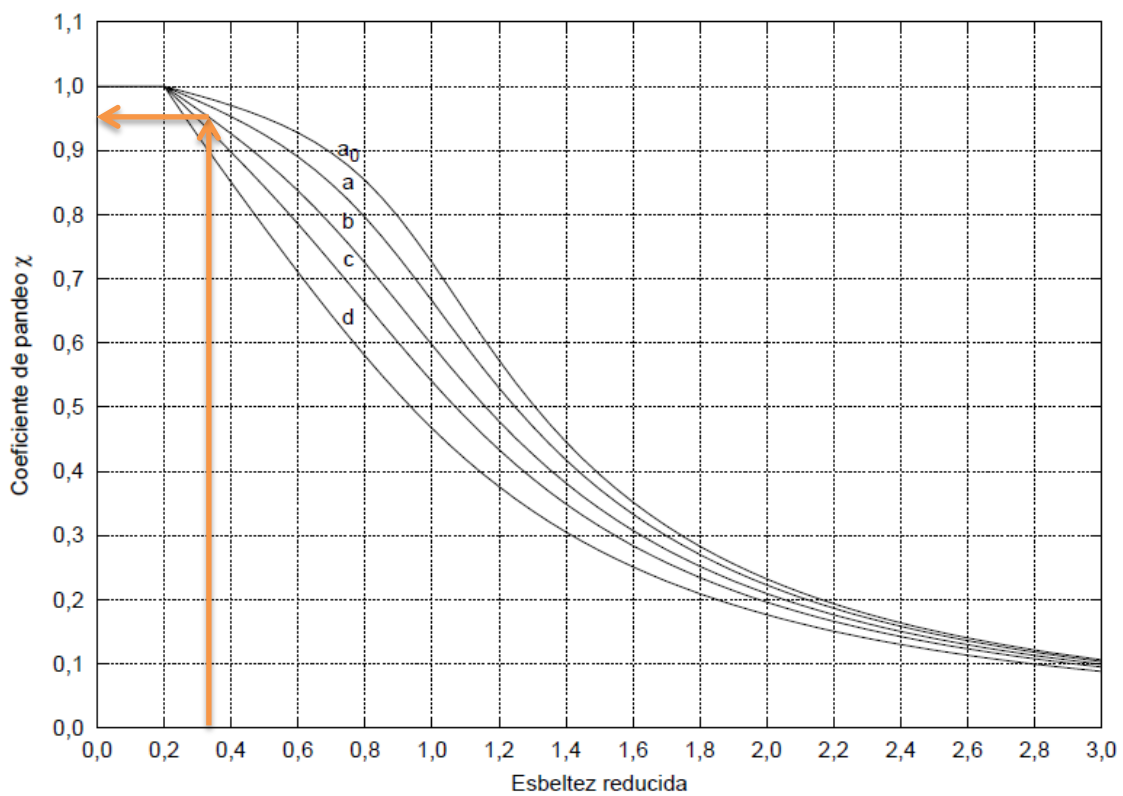


Figura 5.3.1.2. - Coeficiente de pandeo en el eje ξ

De la figura 5.3.1.2, obtenemos el coeficiente de pandeo:

$$\chi = 0.95$$

A partir de la ecuación 5.2.2.2, obtenemos:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{y,d} = 0.95 \cdot 53.8 \cdot 10^{-4} \cdot 244.8 \cdot 10^6 = 1251172 \text{ N}$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Comprobamos que el perfil no haya plastificado:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1251172}{53.8 \cdot 10^{-4}} = 233 \text{MPa} \leq 275 \text{MPa}$$

➤ Pandeo por torsión:

Para la comprobación del pandeo por torsión, utilizamos la ecuación (5.2.7.1):

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2} \cdot \left[G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_W}{L_{Kt}^2} \right] =$$
$$\frac{1}{0.13^2} \cdot \left[8.077 \times 10^{10} \cdot 20.1 \times 10^{-8} + \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \times 10^{11} \cdot 125900 \times 10^{-12}}{4^2} \right] = \mathbf{1925661 \text{ N}}$$

$$i_0 = \left(i_y^2 + i_z^2 + y_0^2 + z_0^2 \right)^{0.5} = \left(0.125^2 + 0.035^2 + 0 + 0 \right)^{0.5} = 0.13$$

5.3.2. Caso 2: Pandeo lateral o vuelco

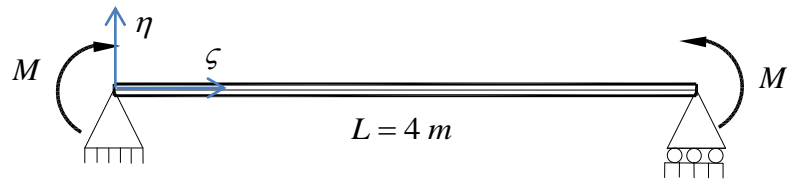


Figura 3.3.2.1 - Viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados.

Datos del material:

- $\sigma_F = 275 \text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12} \text{ m}^6$
- $I_t = 20.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Para el cálculo de la estabilidad lateral de la viga, es necesario cumplir la siguiente relación (5.2.4.1):

$$M_{Ed} \leq M_{b,Rd} \quad (5.2.4.1)$$

En primer lugar, calculamos el momento crítico elástico de pandeo lateral mediante la ecuación (5.2.4.6):

$$M_{cr} = \sqrt{M_{LTv}^2 + M_{LTw}^2} \quad (5.2.4.2)$$

Mediante la ecuación (5.2.4.7) calculamos la primera de las componentes:

$$M_{LTv} = C_1 \cdot \frac{\pi}{L_c} \cdot \sqrt{G \cdot I_T \cdot E \cdot I_\eta} =$$

$$1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{8.077 \times 10^{10} \cdot 20.10 \times 10^{-8} \cdot 2.1 \times 10^{11} \cdot 604 \times 10^{-8}} = 112704 \text{ Nm}$$

De la tabla del ANEXO VI obtenemos: $\Psi=1 \rightarrow C_1=1$

Aplicando la ecuación (5.2.4.8), obtenemos el valor de la otra de las componentes:

$$M_{LTw} = W_{el,y} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{L_c^2} \cdot C_1 \cdot i_{f,z}^2 = 557.07 \times 10^{-6} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \times 10^{11}}{16} \cdot 1 \cdot (3.94 \times 10^{-2})^2$$

$$= 112021 \text{ Nm}$$

Ya se han calculado las dos componentes del momento crítico, aplicando la ecuación (5.2.4.6):

$$M_{cr} = \sqrt{M_{LTv}^2 + M_{LTw}^2} = \sqrt{112704^2 + 112021^2} = 158905 \text{ Nm}$$

Una vez calculado el momento crítico, calculamos la esbeltez relativa frente al pandeo aplicando la ecuación (5.2.4.5):

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} = \sqrt{\frac{628 \times 10^{-6} \cdot 275 \times 10^6}{158905}} = 1.04$$

$W_y = W_{pl,y}$ por ser de clase 1.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

De la tabla del ANEXO V, obtenemos:

$$h/b = 300/150 = 2 \quad \rightarrow \text{curva de pandeo "a"}$$

$$\rightarrow \alpha_{LT} = 0.21$$

$$\begin{aligned} \phi_{LT} &= 0.5 \left[1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + (\bar{\lambda}_{LT})^2 \right] = 0.5 [1 + 0.21(1.04 - 0.2) + (1.04)^2] \\ &= 1.13 \end{aligned}$$

A continuación calculamos el factor de reducción para el pandeo lateral:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \frac{1}{1.13 + \sqrt{1.13^2 - 1.04^2}} = 0.64$$

Por último calculamos el valor de la Resistencia frente a pandeo lateral:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.64 \cdot 628 \times 10^{-6} \cdot \frac{275 \times 10^6}{1.05} = 105267 \text{ Nm}$$

5.3.3. Caso 3: Pandeo con cargas combinadas

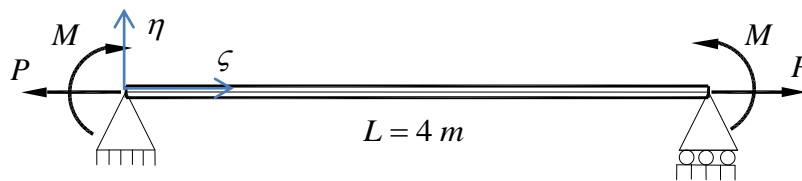


Figura 3.3.3.1 - Viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados.

Datos del material:

- $\sigma_F = 275 \text{ MPa}$
- $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- $\nu = 0.3$
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^{11}}{2(1+0.3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Datos de la sección: Perfil de doble simetría IPE 300

- $A = 53.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $I_\xi = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\eta = 604 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $I_\omega = 125900 \times 10^{-12} \text{ m}^6$
- $I_t = 20.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
- $e_\xi = e_\eta = 0$
- $K_P = K_Q = \int_A \sigma \cdot a^2 \cdot dA = \frac{P(I_\xi + I_\eta)}{A}$

➤ Cálculo de M_{cr} para una carga de tracción

Para el cálculo de elementos flectados y traccionados, se tiene que cumplir la ecuación (5.2.5.1):

$$\eta = \frac{M_{ef,Ed}}{M_{b,Rd,y}} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{pl,Rd,z}} \leq 1$$

Por lo que el máximo valor que puede alcanzar $M_{ef,Ed}$ es $M_{b,Rd,y}$ ya que $M_{z,Ed} = 0$

Aplicamos la ecuación (5.2.5.2)

$$\sigma_{com,Ed} = \frac{M_{ef,Ed}}{W_{y,com}} = \frac{105267}{628 \times 10^{-6}} = 167.6 \times 10^6$$

Y a continuación, aplicamos la ecuación (5.2.5.3)

$$\sigma_{com,Ed} = 167.6 \times 10^6 = \frac{M_{y,Ed}}{W_{y,com}} - 0.8 \cdot \frac{N_{t,Ed}}{A} = \frac{M_{y,Ed}}{628 \times 10^{-6}} - 0.8 \cdot \frac{135000}{53.8 \times 10^{-4}}$$

donde: $N_{t,Ed} = 100000 \cdot 1.35 = 135000 \text{ Nm}$

La única incógnita de la ecuación (5.2.5.3) es $M_{y,Ed}$, si despejamos esta incógnita, obtenemos el momento crítico que produce pandeo lateral con cargas de tracción:

$$\mathbf{M_{y,Ed} = 117.859 \text{ Nm}}$$

➤ Cálculo de M_{cr} para una carga de compresión

Para el cálculo de elementos flectados y comprimidos, se tiene que cumplir la ecuación (5.2.6.1):

$$\eta = \frac{N_{c,Ed}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yd}} + K_{y,LT} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot W_{el,y} \cdot f_{yd}} + K_z \cdot \frac{c_{m,z} \cdot M_{z,Ed}}{W_{el,z} \cdot f_{yd}} \leq 1$$

donde: $N_{c,Ed} = 100000 \cdot 1.35 = 135000 \text{ N}$

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{275 \times 10^6}{1.05} = 244.8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A \cdot f_{y,d}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{53.8 \cdot 10^{-4} \cdot 244.8 \cdot 10^6}{782413}} = 1.3$$

De la tabla del ANEXO IV, obtenemos:

- Perfil de doble simetría
 - $h/b = 300/150 = 2 > 1.2$
 - $t = 10.7 \leq 40$
 - S275
 - Eje z
- } Curva "b"

$$\chi_z = 0.39$$

De la tabla del ANEXO VII: $C_{m,y} = C_{m,z} = C_{m,LT} = 1$

$$K_{y,LT} = 1 - \frac{0.05 \cdot \bar{\lambda}_z}{C_{m,LT} - 0.25} \cdot \frac{N_{c,Ed}}{\chi_z \cdot N_{c,Rd}} = 1 - \frac{0.05 \cdot 1.3}{1 - 0.25} \cdot \frac{135000}{0.39 \cdot 1317024} = 0.98$$

$$N_{c,Rd} = A \cdot f_{y,d} = 1317024 \text{ N}$$

De la tabla del ANEXO V, obtenemos:

$$h/b = 300/150 = 2 \quad \rightarrow \text{curva de pandeo "a"}$$

$$\rightarrow \alpha_{LT} = 0.21$$

$$\phi_{LT} = 0.5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + (\bar{\lambda}_{LT})^2 \right] = 0.5 [1 + 0.21(1.04 - 0.2) + (1.04)^2]$$

$$= 1.13$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} = \sqrt{\frac{628 \times 10^{-6} \cdot 275 \times 10^6}{158905}} = 1.04$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \frac{1}{1.13 + \sqrt{1.13^2 - 1.04^2}} = 0.64$$

$$W_{el,y} = 557 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$M_{z,Ed} = 0$$

Aplicando la ecuación (5.2.6.1):

$$\eta = \frac{135000}{0.39 \cdot 53.8 \times 10^{-4} \cdot 244.8 \cdot 10^6} + 0.98 \cdot \frac{M_{y,Ed}}{0.64 \cdot 557 \times 10^{-6} \cdot 244.8 \cdot 10^6} \leq 1$$

La única incógnita es $M_{y,Ed}$ por lo que despejamos:

$$\mathbf{M_{y,Ed} = 65643 Nm}$$

6. VALORACIÓN DE RESULTADOS

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Una vez vistos los tres métodos que sirven para calcular la carga de pandeo en las diferentes situaciones, es necesario realizar una comparativa entre los resultados que se han arrojado para cada uno de los casos y ver las diferencias entre ellos.

6.1. Caso 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión

Para el estudio de la viga biapoyada sometida a cargas de compresión, se han obtenido los siguientes valores:

Carga	MÉTODO DE CÁLCULO		
	MDR	SIMULATION MECHANICAL	DB SE-A
P1	782.814 N	740.129 N	566.320 N
P2	1.953.690 N	1.613.210 N	1.925.661 N
P3	3.153.190 N	2.857.750 N	
P4	4.919.120 N	4.365.420 N	
P5	7.276.230 N	5.341.440 N	
P6	10.077.200 N	18.657.300 N	1.251.172 N

Figura 6.1.1 – Comparación de resultados para el caso 1.

➤ Carga P1

Para esta carga se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 1.

De la carga crítica de Euler calculada mediante la ecuación (5.2.2.2) obtenemos un valor de 782.413 N. Si comparamos este valor con el obtenido en el MDR y en el *Simulation Mechanical* se aproxima más al obtenido en el Método Directo de la Rigidez.

Sin embargo, a la hora de calcular el valor de la resistencia de cálculo a pandeo, este valor se reduce bastante. Esto es debido a que los valores anteriores son valores teóricos y el valor calculado por la norma está basado en datos reales.

➤ Carga P2

Para esta carga se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 1.

Se puede calcular la carga que produce este modo de pandeo mediante el MDR y el software de simulación *Simulation Mechanical*, sin embargo, la normativa no dice cómo calcularlo, pero si se ha comprobado.

➤ Carga P3, P4 y P5

Para la carga P3, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 2.

Para la carga P4, se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 2.

Para la carga P5, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$), en el modo de pandeo 3.

Para el cálculo de estas cargas no hay ningún problema si se calcula por el MDR o por el software *Simulation Mechanical*, pero la normativa no contempla el cálculo de cargas que provoquen deformaciones con modos superiores a uno ya que si se alcanza el modo uno para una carga que provoque pandeo en un determinado eje, no tiene sentido buscar cargas superiores a una que ya provoca la inestabilidad de la viga.

➤ Carga P6

Para esta carga, se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano fuerte de la estructura (plano $\zeta - \eta$), en el modo de pandeo 1.

De la carga crítica de Euler calculada mediante la ecuación (5.2.2.2) obtenemos un valor de 10.824.246 N. Si comparamos este valor con el obtenido en el MDR y en el *Simulation Mechanical* se aproxima más al obtenido en el Método Directo de la Rigidez.

Pero al igual que pasaba para el cálculo de la carga P1, a la hora de calcular el valor de la resistencia de cálculo a pandeo, este valor se reduce bastante debido a que los valores anteriores son valores teóricos y el valor calculado por la norma está basado en datos reales.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Recordemos que este valor es muy superior si lo comparamos con el de la carga P_1 , por lo que si para la carga P_1 se considera que la viga ha fallado por pandeo, este valor carecerá de sentido a no ser que la viga posea unas condiciones de contorno tales que no permitan que se produzca pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura.

Euler mostró que había una relación entre las cargas de pandeo para un determinado modo de deformación. Por ejemplo si analizamos las cargas de pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura (plano $\zeta - \xi$):

$$P_{cr,1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} = 782.413 \text{ N}$$

$$P_{cr,2} = 4 \cdot P_{cr,1} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} = 3.129.652 \text{ N}$$

$$P_{cr,3} = 9 \cdot P_{cr,1} = \frac{9 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} = 7.041.717 \text{ N}$$

Estos valores se ajustan razonablemente a los valores teóricos obtenidos.

6.2. Caso 2: Pandeo lateral o vuelco

Para el estudio de la viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados aplicados en los extremos de la misma, se han obtenido los siguientes valores:

	MÉTODO DE CÁLCULO		
Carga	MDR	SIMULATION MECHANICAL	DB SE-A
M_{cr}	159.631 Nm	153.764 Nm	105.267 Nm

Figura 6.2.1 – Comparación de resultados para el caso 2.

Para las cargas que se muestran en la figura 6.2.1 se produce fallo por pandeo lateral, o lo que es lo mismo, se produce simultáneamente una flexión en el plano débil de la estructura junto con una torsión alrededor del centro de esfuerzos cortantes de la sección.

Al igual que ocurría en el caso 1, el momento crítico calculado mediante el DB SE-A es inferior al teórico ya que está basado en datos reales, sin embargo los calculados a partir del MDR y del software *Simulation Mechanical* son valores teóricos por lo que siempre van a ser superiores al real.

6.3. Caso 3: Pandeo con cargas combinadas

Para el estudio de la viga biapoyada sometida a dos momentos concentrados aplicados en los extremos de la misma y cargas de tracción y de compresión, se han obtenido los siguientes valores:

Carga	MÉTODO DE CÁLCULO		
	MDR	SIMULATION MECHANICAL	DB SE-A
Tracción	173805 Nm	169723 Nm	117859 Nm
Compresión	145.221 Nm	140.116 Nm	65.643 Nm

Figura 6.3.1 – Comparación de resultados para el caso 3.

Para las cargas que se muestran en la figura 6.3.1 se produce fallo por pandeo lateral, o lo que es lo mismo, se produce simultáneamente una flexión en el plano débil de la estructura junto con una torsión alrededor del centro de esfuerzos cortantes de la sección, al igual que ocurría en el ejemplo visto del caso 2.

La diferencia con el caso 2, es que el hecho de haber cargas de tracción en la viga (estado de flexión y de compresión), la carga crítica que produce el fallo por pandeo lateral es superior si la comparamos con la del caso 2 en la que no hay cargas de tracción.

Análogamente, la presencia de cargas de compresión (estado de flexión y compresión), favorece el fallo por pandeo lateral disminuyendo la carga crítica.

Estos dos hechos, se pueden apreciar fácilmente en la figura 6.3.1 para los diferentes métodos de resolución.

6.4. Caso 4: Pandeo global de una estructura. Método lineal

Para el estudio de la estructura tridimensional sometida a cargas de compresión, se han obtenido los siguientes valores:

Carga	MÉTODO DE CÁLCULO		
	MDR	SIMULATION MECHANICAL	DB SE-A
P_{cr}	417.295 N	441.990 N	

Figura 6.4.1 – Comparación de resultados para el caso 4.

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Para el cálculo de la carga de pandeo de la estructura (pandeo global) por el método lineal, se puede usar el Método Directo de la Rigidez o el software de simulación *Simulation Mechanical*, pero no puede ser calculada si se usa el DB SE-A.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

7.1. Conclusiones

En este trabajo se han calculado las diferentes cargas de pandeo para una determinada estructura. A la vista del trabajo realizado, a modo de resumen se pueden realizar las siguientes conclusiones:

- Se ha empleado un método de cálculo genérico y mucho más amplio que el visto hasta ahora en los estudios académicos ya que permite el cálculo de cualquier tipo de estructura tridimensional a partir de la definición de los 14 grados de libertad de cada nudo, comparado con los 6 grados de libertad que se han visto hasta ahora en la carrera.
- Una de las cosas que se ha aprendido con este trabajo ha sido la estimación del cálculo de la carga de pandeo de una determinada viga, así como el tipo de deformada que se produce y el modo de pandeo.
- Todos los cálculos realizados se han hecho en perfiles de doble simetría IPE y se ha realizado un ejemplo para ver las diferentes deformadas que pueden producirse a la hora de alcanzarse la carga crítica de pandeo.
- Respecto a los programas utilizados, para el primer caso para la resolución de los cálculos con "Mathematica" hemos obtenido solamente las diferentes cargas de pandeo así como los diferentes modos de pandeo de las vigas. A la hora de resolver estos casos con "Simulation Mechanical", además de calcular las diferentes cargas de pandeo de la columna, nos resuelve los diferentes modos de fallo del material, por ejemplo abolladura del alma, etc. De igual manera el software de cálculo "CYPE" muestra los diferentes tipos de fallo del material.
- Con este trabajo se ha conseguido hacer un ejemplo de las diferentes deformaciones que ocurren en pandeo: Pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura, pandeo con deformaciones de flexión en el plano fuerte de la estructura, pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura junto con una torsión alrededor del centro de esfuerzos cortantes de la sección (pandeo lateral) y el pandeo global de una estructura.
- También ha sido de interés conocer los límites de aplicación de la Normativa Española, ya que los casos sencillos de vigas con un determinado estado de cargas se contemplan en el cálculo de la norma, sin embargo no se puede aplicar la normativa a estructuras tridimensionales para el cálculo de cargas que produzcan un pandeo global de la estructura.

- Este hecho hace que para el cálculo de una estructura real sea necesario la implementación en software de simulación, sirviendo la norma en estos casos para el sobredimensionamiento de acciones.

7.2. Trabajos Futuros

Entre los trabajos que podrían ser realizados a partir de la presentación del presente trabajo, destacan los siguientes.

- Analizar los diferentes modos de pandeo y las diferentes deformadas que se producen con el fallo por pandeo, en perfiles de simple simetría, perfiles con un solo eje de simetría y perfiles sin ningún eje de simetría.
- De esta manera se analizaría en qué casos pueden darse varios tipos de deformadas para una determinada carga crítica.
- Profundizar en los diferentes fallos que pueden ocurrir en estructuras, además del fallo por pandeo, defectos en uniones, fallo por fatiga del material, análisis de vibraciones, etc.
- Realizar estos análisis en diferentes software como ANSYS, NASTRAN, etc para realizar una mejor comparación de los resultados obtenidos.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

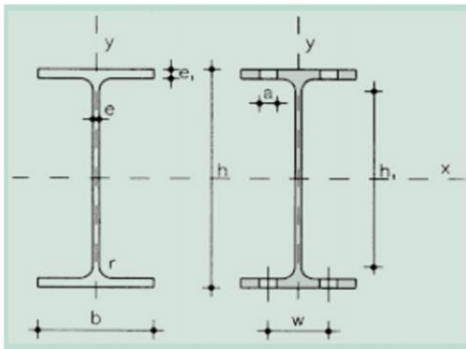
Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Para la realización de este Trabajo Fin de Grado, se han consultado las siguientes referencias:

- [1] W.F. CHEN and T. ASTUTA, "Theory of Beam-Columns", J. Ross Publishing Classics, Volume 1, 2007.
- [2] J.M. GERE, "Timoshenko. Resistencia de Materiales", S.A. Ediciones Paraninfo, 2004.
- [3] J.A. GARRIDO y A. M. FOCES, "Resistencia de Materiales", Universidad de Valladolid, 1996.
- [4] L. ORTIZ, "Resistencia de Materiales", McGraw Hill, 1990.
- [5] E. POPOV, "Introducción a la Mecánica de los Sólidos", Ed. Limusa, 1981.
- [6] W. MCGUIRE, R. H. GALLAGHER, R. D. ZIEMIAN, "Matrix Structural Analysis". Second Edition. 1999.
- [7] A. CHAJES, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, 1974.
- [8] J. SANTO DOMINGO, "Pandeo", Universidad de Salamanca, 2008.
- [9] J.C. del CAÑO, "Elasticidad", Universidad de Valladolid.
- [10] A. M. FOCES, "Apuntes de la asignatura Elasticidad y Resistencia de Materiales". Grado en Ingeniería Mecánica. Universidad de Valladolid. 2013.
- [11] M. CACHO, A. LORENZANA, J. PEREDA, "Apuntes de la asignatura Teoría de Estructuras y Construcciones Industriales". Grado en Ingeniería Mecánica. Universidad de Valladolid. 2014.
- [12] M. P. ALONSO, "Apuntes de la asignatura Estructuras Metálicas". Grado en Ingeniería Mecánica. Universidad de Valladolid. 2014.
- [13] "Código Técnico de la Edificación", Ministerio de la Vivienda, <http://www.codigotecnico.org>
- [14] Página web oficial del software de cálculo CYPE Ingenieros, S.A, <http://www.cype.com/>
- [15] Página web oficial del software de simulación Simulation Mechanical, <http://www.autodesk.com/>
- [16] Página web para la resolución de dudas relacionadas con el ámbito de la Ingeniería Industrial, <http://www.soloingenieria.net/>

9. ANEXOS

ANEXO I: Tabla perfil IPE 300



- A = Área de la sección
- S_x = Momento estático de media sección, respecto a X
- I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X
- $W_x = 2I_x : h$: Módulo resistente de la sección, respecto a X
- $i_x = \sqrt{I_x : A}$: Radio de giro de la sección, respecto a X
- I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y
- $W_y = 2I_y : b$: Módulo resistente de la sección, respecto a Y
- $i_y = \sqrt{I_y : A}$: Radio de giro de la sección, respecto a Y
- I_t = Módulo de torsión de la sección
- I_a = Módulo de alabeo de la sección
- u = Perímetro de la sección
- a = Diámetro del agujero del roblón normal
- w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros
- h_t = Altura de la parte plana del alma
- p = Peso por m

Perfil	Dimensiones							Términos de sección										Agujeros			Peso	
	h mm	b mm	e mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h _t mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	I _a cm ⁵	w mm	a mm	e ₂ mm	p kp/m	
IPE 80	80	46	3,8	5,2	5	60	328	7,64	11,6	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	0,721	118	—	—	3,8	6,00	C
IPE 100	100	55	4,1	5,7	7	75	400	10,30	19,7	171,0	34,2	4,07	15,90	5,79	1,24	1,140	351	—	—	4,1	8,10	C
IPE 120	120	64	4,4	6,3	7	93	475	13,20	30,4	318,0	53,0	4,90	27,70	8,65	1,45	1,770	890	35	—	4,4	10,40	C
IPE 140	140	73	4,7	6,9	7	112	551	16,40	44,2	541,0	77,3	5,74	44,90	12,30	1,65	2,630	1.981	40	11	4,7	12,90	C
IPE 160	160	82	5,0	7,4	9	127	623	20,10	61,9	869,0	109,0	6,58	68,30	16,70	1,84	3,640	3.959	44	13	5,0	15,80	P
IPE 180	180	91	5,3	8,0	9	146	698	23,90	83,2	1.320,0	146,0	7,42	101,00	22,20	2,05	5,060	7.431	48	13	5,3	18,80	P
IPE 200	200	100	5,6	8,5	12	159	788	28,50	110,0	1.940,0	194,0	8,26	142,00	28,50	2,24	6,670	12.990	52	13	5,6	22,40	P
IPE 220	220	110	5,9	9,2	12	178	848	33,40	143	2.770	252	9,11	205	37,3	2,48	9,15	22.670	58	17	5,9	26,20	P
IPE 240	240	120	6,2	9,8	15	190	922	39,10	183	3.890	324	9,97	284	47,3	2,69	12,00	37.390	65	17	6,2	30,70	P
IPE 270	270	135	6,6	10,2	15	220	1.040	45,90	242	5.790	429	11,20	420	62,2	3,02	15,40	70.580	72	21	6,6	36,10	P
IPE 300	300	150	7,1	10,7	15	249	1.160	53,80	314	8.360	557	12,50	604	80,5	3,35	20,10	125.900	80	23	7,1	42,20	P
IPE 330	330	160	7,5	11,5	18	271	1.250	62,60	402	11.770	713	13,70	788	98,5	3,55	26,50	199.100	85	25	7,5	49,10	P
IPE 360	360	170	8,0	12,7	18	299	1.350	72,70	510	16.270	904	15,00	1.040	123,0	3,79	37,30	313.600	90	25	8,0	57,10	P
IPE 400	400	180	8,6	13,5	21	331	1.470	84,50	654	23.130	1.160	16,50	1.320	146,0	3,95	48,30	490.000	95	28	8,6	66,30	P
IPE 450	450	190	9,4	14,6	21	379	1.610	98,80	851	33.740	1.500	18,50	1.680	176,0	4,12	65,90	791.000	100	28	9,4	77,60	P
IPE 500	500	200	10,2	16,0	21	426	1.740	116,00	1.100	48.200	1.930	20,40	2.140	214,0	4,31	91,80	1.249.000	110	28	10,2	90,70	P
IPE 550	550	210	11,1	17,2	24	468	1.880	134,00	1.390	67.120	2.440	22,30	2.670	254,0	4,45	122,00	1.884.000	115	28	11,1	106,00	C
IPE 600	600	220	12,0	19,0	24	514	2.010	155,00	1.760	92.080	3.070	24,30	3.390	308,0	4,66	172,00	2.846.000	120	28	12,0	122,0	C

ANEXO II: Coeficientes parciales de seguridad

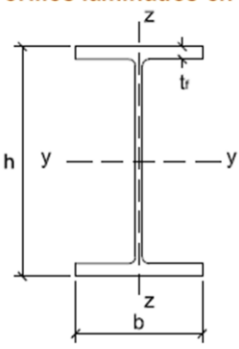
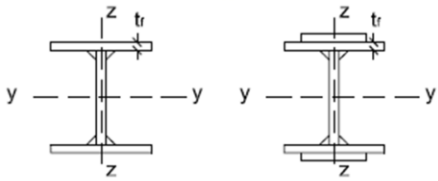

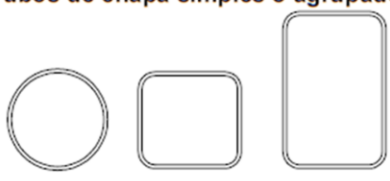
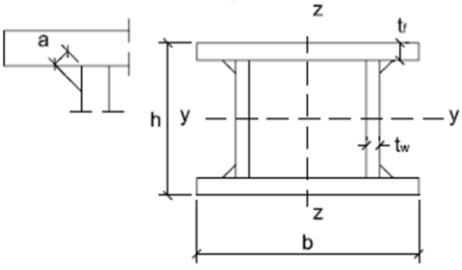
$\gamma_{M0} = 1,05$	coeficiente parcial de seguridad relativo a la plastificación del material
$\gamma_{M1} = 1,05$	coeficiente parcial de seguridad relativo a los fenómenos de inestabilidad
$\gamma_{M2} = 1,25$	coeficiente parcial de seguridad relativo a la resistencia última del material o sección, y a la resistencia de los medios de unión
$\gamma_{M3} = 1,1$	coeficiente parcial para la resistencia al deslizamiento de uniones con tornillos pretensados en Estado Límite de Servicio.
$\gamma_{M3} = 1,25$	coeficiente parcial para la resistencia al deslizamiento de uniones con tornillos pretensados en Estado Límite de Último.
$\gamma_{M3} = 1,4$	coeficiente parcial para la resistencia al deslizamiento de uniones con tornillos pretensados y agujeros rasgados o con sobremedida.

ANEXO III: Características mecánicas mínimas de los aceros

DESIGNACIÓN	Espesor nominal t (mm)				Temperatura del ensayo Charpy °C
	Tensión de límite elástico f_y (N/mm ²)			Tensión de rotura f_u (N/mm ²)	
	t ≤ 16	16 < t ≤ 40	40 < t ≤ 63	3 ≤ t ≤ 100	
S235JR					20
S235J0	235	225	215	360	0
S235J2					-20
S275JR					20
S275J0	275	265	255	410	0
S275J2					-20
S355JR					20
S355J0	355	345	335	470	0
S355J2					-20
S355K2					-20 ⁽¹⁾
S450J0	450	430	410	550	0

⁽¹⁾ Se le exige una energía mínima de 40J.

ANEXO IV: Curva de pandeo en función de la sección transversal

Tipo de sección	Tipo de acero Eje de pandeo ⁽¹⁾	S235 a S355		S450		
		y	z	y	z	
Perfiles laminados en I 	$h/b > 1,2$	$t \leq 40$ mm	a	b	a_0	a_0
		$40 \text{ mm} < t \leq 100$ mm	b	c	a	a
	$h/b \leq 1,2$	$t \leq 100$ mm	b	c	a	a
		$t > 100$ mm	d	d	c	c
Perfiles armados en I 		$t \leq 40$ mm	b	c	b	c
		$t > 40$ mm	c	d	c	d
Agrupación de perfiles laminados soldados 			c	c	c	c
Tubos de chapa simples o agrupados 		laminados en caliente	a	a	a_0	a_0
		conformados en frío	c	c	c	c
Perfiles armados en cajón ⁽²⁾ 		soldadura gruesa: $a/t > 0,5$ $b/t < 30$ $h/t_w < 30$	c	c	c	c
		en otro caso	b	b	b	b

ANEXO V: Factor de imperfección α_{LT}

Elemento	Límites	Curva de pandeo	α_{LT}
Perfil laminado con sección en doble T	$h/b \leq 2$	a	0,21
	$h/b > 2$	b	0,34
Elemento armado con sección en doble T	$h/b \leq 2$	c	0,49
	$h/b > 2$	d	0,76
Elementos con otras secciones	-	d	0,76

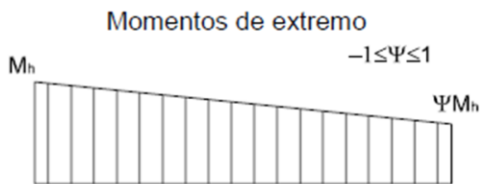
ANEXO VI: Valor del factor C_1 correspondiente a los valores del factor K_ϕ

Condiciones de apoyo y tipo de sollicitación	Diagrama de momentos flectores	C_1
	$\Psi=+1$ 	1
	$\Psi=+3/4$ 	1,14
	$\Psi=+1/2$ 	1,32
	$\Psi=+1/4$ 	1,56
	$\Psi=0$ 	1,88
	$\Psi=-1/4$ 	2,28
	$\Psi=-1/2$ 	2,7
	$\Psi=-3/4$ 	2,93
	$\Psi=-1$ 	2,75

ANEXO VII: Coeficientes del momento equivalente

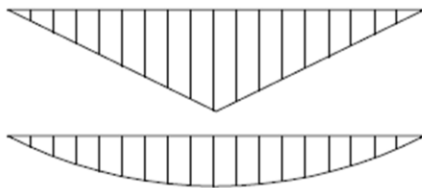
Factor de momento flector	Eje de flexión	Puntos arriostrados en dirección
$C_{m,y}$	y-y	Z - Z
$C_{m,z}$	Z - Z	y-y
$C_{m,LT}$	y - y	y-y

Diagrama de Flectores	Factor de momento uniforme equivalente
	$C_{m,y} = C_{m,i} (i=y)$
	$C_{m,z} = C_{m,i} (i=Z)$
	$C_{m,LT} = C_{m,i} (i=LT)$



$$C_{m,i} = 0,6 + 0,4 \cdot \psi \geq 0,4$$

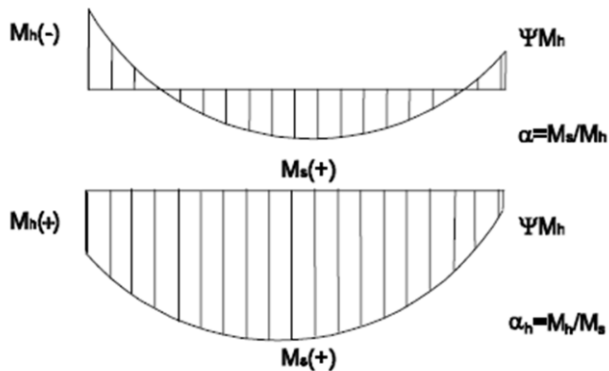
Momento debido a cargas laterales coplanarias



$$C_{m,i} = 0,9$$

$$C_{m,i} = 0,95$$

Momentos debidos a cargas laterales y momentos de extremos



$$C_{m,i} = 0,1 - 0,8 \cdot \alpha \geq 0,4 \quad \text{si } -1 \leq \alpha \leq 0$$

$$C_{m,i} = 0,2 + 0,8 \cdot \alpha \geq 0,4 \quad \text{si } 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$C_{m,i} = 0,95 + 0,05 \cdot \alpha_h \quad \text{con } -1 \leq \alpha_h \leq 1$$

ANEXO VIII: Informe parte 1 "Mathematica"

(* Ejemplo 1: Pandeo con deformaciones de flexión y torsión *)

(* Matriz Ks *)

$$\begin{aligned}
 K_s := & \left\{ \left\{ \frac{12 I \eta v E}{L^3}, 0, 0, 0, \frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0, -\frac{12 I \eta v E}{L^3}, 0, 0, 0, \frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0 \right\}, \right. \\
 & \left\{ 0, \frac{12 I \xi v E}{L^3}, 0, \frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{12 I \xi v E}{L^3}, 0, \frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ 0, 0, \frac{A v E}{L}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{A v E}{L}, 0, 0, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ 0, \frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, \frac{4 I \xi v E}{L}, 0, 0, 0, 0, -\frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, \frac{2 I \xi v E}{L}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ \frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0, 0, \frac{4 I \eta v E}{L}, 0, 0, -\frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0, 0, \frac{2 I \eta v E}{L}, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{6 (10 I \omega v E + K T L^2 v G)}{5 L^3}, \frac{6 I \omega v E}{L^2} + \frac{K T v G}{10}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \right. \\
 & \left. -\frac{6 (10 I \omega v E + K T L^2 v G)}{5 L^3}, \frac{6 I \omega v E}{L^2} + \frac{K T v G}{10} \right\}, \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{6 I \omega v E}{L^2} + \frac{K T v G}{10}, \right. \\
 & \left. \frac{4 I \omega v E}{L} + \frac{2 K T L v G}{15}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{6 I \omega v E}{L^2} - \frac{K T v G}{10}, \frac{2 I \omega v E}{L} - \frac{K T L v G}{30} \right\}, \\
 & \left\{ -\frac{12 I \eta v E}{L^3}, 0, 0, 0, -\frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0, \frac{12 I \eta v E}{L^3}, 0, 0, 0, -\frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ 0, -\frac{12 I \xi v E}{L^3}, 0, -\frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, 0, 0, 0, \frac{12 I \xi v E}{L^3}, 0, -\frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ 0, 0, -\frac{A v E}{L}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{A v E}{L}, 0, 0, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ 0, \frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, \frac{2 I \xi v E}{L}, 0, 0, 0, 0, -\frac{6 I \xi v E}{L^2}, 0, \frac{4 I \xi v E}{L}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ \frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0, 0, \frac{2 I \eta v E}{L}, 0, 0, -\frac{6 I \eta v E}{L^2}, 0, 0, 0, \frac{4 I \eta v E}{L}, 0, 0 \right\}, \\
 & \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{6 (10 I \omega v E + K T L^2 v G)}{5 L^3}, -\frac{6 I \omega v E}{L^2} - \frac{K T v G}{10}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \right. \\
 & \left. \frac{6 (10 I \omega v E + K T L^2 v G)}{5 L^3}, -\frac{6 I \omega v E}{L^2} - \frac{K T v G}{10} \right\}, \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{6 I \omega v E}{L^2} + \frac{K T v G}{10}, \right. \\
 & \left. \frac{2 I \omega v E}{L} - \frac{K T L v G}{30}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{6 I \omega v E}{L^2} - \frac{K T v G}{10}, \frac{4 I \omega v E}{L} + \frac{2 K T L v G}{15} \right\} \};
 \end{aligned}$$

(* Matriz Kg *)

$$\begin{aligned}
 K_G := & \left\{ \left\{ \frac{6 P}{5 L}, 0, 0, 0, \frac{P}{10}, -\frac{f \eta L + 12 m \xi - 12 e \eta P}{10 L}, \frac{1}{10} (-m \xi + e \eta P), \right. \right. \\
 & \left. -\frac{6 P}{5 L}, 0, 0, 0, \frac{P}{10}, \frac{11 f \eta L + 12 m \xi - 12 e \eta P}{10 L}, \frac{1}{10} (-f \eta L - m \xi + e \eta P) \right\}, \\
 & \left\{ 0, \frac{6 P}{5 L}, 0, \frac{P}{10}, 0, \frac{1}{10} \left(f \xi + \frac{12 (m \eta - e \xi P)}{L} \right), \frac{1}{10} (m \eta - e \xi P), 0, \right. \\
 & \left. -\frac{6 P}{5 L}, 0, \frac{P}{10}, 0, -\frac{11 f \xi}{10} + \frac{6 (-m \eta + e \xi P)}{5 L}, \frac{1}{10} (f \xi L + m \eta - e \xi P) \right\}, \\
 & \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 0, \frac{P}{10}, 0, \frac{2LP}{15}, 0, \frac{1}{10} (2f\xi L + m\eta - e\xi P), \frac{1}{30} L (f\xi L + 4m\eta - 4e\xi P), \right. \\
 & \left. 0, -\frac{P}{10}, 0, -\frac{LP}{30}, 0, \frac{1}{10} (-2f\xi L - m\eta + e\xi P), -\frac{1}{30} L (m\eta - e\xi P) \right\}, \\
 & \left\{ \frac{P}{10}, 0, 0, 0, \frac{2LP}{15}, \frac{1}{10} (-2f\eta L - m\xi + e\eta P), -\frac{1}{30} L (f\eta L + 4m\xi - 4e\eta P), \right. \\
 & \left. -\frac{P}{10}, 0, 0, 0, -\frac{LP}{30}, \frac{1}{10} (2f\eta L + m\xi - e\eta P), \frac{1}{30} L (m\xi - e\eta P) \right\}, \\
 & \left\{ -\frac{f\eta L + 12m\xi - 12e\eta P}{10L}, \frac{1}{10} \left(f\xi + \frac{12(m\eta - e\xi P)}{L} \right), 0, \frac{1}{10} (2f\xi L + m\eta - e\xi P), \right. \\
 & \frac{1}{10} (-2f\eta L - m\xi + e\eta P), \frac{3(Kp + Kq)}{5L}, \frac{Kq}{10}, \frac{f\eta L + 12m\xi - 12e\eta P}{10L}, \\
 & \left. -\frac{f\xi L + 12m\eta - 12e\xi P}{10L}, 0, \frac{1}{10} (-f\xi L + m\eta - e\xi P), \frac{1}{10} (f\eta L - m\xi + e\eta P), \right. \\
 & \left. -\frac{3(Kp + Kq)}{5L}, \frac{Kp}{10} \right\}, \left\{ \frac{1}{10} (-m\xi + e\eta P), \frac{1}{10} (m\eta - e\xi P), 0, \frac{1}{30} L (f\xi L + 4m\eta - 4e\xi P), \right. \\
 & \left. -\frac{1}{30} L (f\eta L + 4m\xi - 4e\eta P), \frac{Kq}{10}, \frac{1}{30} (3Kp + Kq)L, \frac{1}{10} (m\xi - e\eta P), \frac{1}{10} (-m\eta + e\xi P), \right. \\
 & \left. 0, -\frac{1}{30} L (f\xi L + m\eta - e\xi P), \frac{1}{30} L (f\eta L + m\xi - e\eta P), -\frac{Kq}{10}, -\frac{1}{60} (Kp + Kq)L \right\}, \\
 & \left\{ -\frac{6P}{5L}, 0, 0, 0, -\frac{P}{10}, \frac{f\eta L + 12m\xi - 12e\eta P}{10L}, \frac{1}{10} (m\xi - e\eta P), \frac{6P}{5L}, 0, \right. \\
 & \left. 0, 0, -\frac{P}{10}, -\frac{11f\eta}{10} + \frac{6(-m\xi + e\eta P)}{5L}, \frac{1}{10} (f\eta L + m\xi - e\eta P) \right\}, \\
 & \left\{ 0, -\frac{6P}{5L}, 0, -\frac{P}{10}, 0, -\frac{f\xi L + 12m\eta - 12e\xi P}{10L}, \frac{1}{10} (-m\eta + e\xi P), 0, \right. \\
 & \left. \frac{6P}{5L}, 0, -\frac{P}{10}, 0, \frac{11f\xi}{10} + \frac{6(m\eta - e\xi P)}{5L}, \frac{1}{10} (-f\xi L - m\eta + e\xi P) \right\}, \\
 & \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \\
 & \left\{ 0, \frac{P}{10}, 0, -\frac{LP}{30}, 0, \frac{1}{10} (-f\xi L + m\eta - e\xi P), -\frac{1}{30} L (f\xi L + m\eta - e\xi P), 0, \right. \\
 & \left. -\frac{P}{10}, 0, \frac{2LP}{15}, 0, \frac{1}{10} (f\xi L - m\eta + e\xi P), \frac{1}{30} L (3f\xi L + 4m\eta - 4e\xi P) \right\}, \\
 & \left\{ \frac{P}{10}, 0, 0, 0, -\frac{LP}{30}, \frac{1}{10} (f\eta L - m\xi + e\eta P), \frac{1}{30} L (f\eta L + m\xi - e\eta P), -\frac{P}{10}, \right. \\
 & \left. 0, 0, 0, \frac{2LP}{15}, \frac{1}{10} (-f\eta L + m\xi - e\eta P), -\frac{1}{30} L (3f\eta L + 4m\xi - 4e\eta P) \right\}, \\
 & \left\{ \frac{11f\eta L + 12m\xi - 12e\eta P}{10L}, -\frac{11f\xi}{10} + \frac{6(-m\eta + e\xi P)}{5L}, 0, \frac{1}{10} (-2f\xi L - m\eta + e\xi P), \right. \\
 & \frac{1}{10} (2f\eta L + m\xi - e\eta P), -\frac{3(Kp + Kq)}{5L}, -\frac{Kq}{10}, -\frac{11f\eta}{10} + \frac{6(-m\xi + e\eta P)}{5L}, \\
 & \left. \frac{11f\xi}{10} + \frac{6(m\eta - e\xi P)}{5L}, 0, \frac{1}{10} (f\xi L - m\eta + e\xi P), \frac{1}{10} (-f\eta L + m\xi - e\eta P), \frac{3(Kp + Kq)}{5L}, \right. \\
 & \left. -\frac{Kp}{10} \right\}, \left\{ \frac{1}{10} (-f\eta L - m\xi + e\eta P), \frac{1}{10} (f\xi L + m\eta - e\xi P), 0, -\frac{1}{30} L (m\eta - e\xi P), \right. \\
 & \left. \frac{1}{30} L (m\xi - e\eta P), \frac{Kp}{10}, -\frac{1}{60} (Kp + Kq)L, \frac{1}{10} (f\eta L + m\xi - e\eta P), \frac{1}{10} (-f\xi L - m\eta + e\xi P), \right.
 \end{aligned}$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

$$0, \frac{1}{30} L (3 f_{\xi} L + 4 m_{\eta} - 4 e_{\xi} P), -\frac{1}{30} L (3 f_{\eta} L + 4 m_{\xi} - 4 e_{\eta} P), -\frac{K_p}{10}, \frac{1}{30} (K_p + 3 K_q) L \}};$$

```
(* Datos sobre el material: perfil de doble simetria tipo IPE 300 *)
datos = {vE -> 2.1 x 10^11, v -> 0.3, vG -> vE / (2 (1 + v)), L0 -> 4, A -> 53.8 x 10^-4,
  Ixi -> 8360 x 10^-8, Iyi -> 604.0 x 10^-8, Iw -> 125 900 x 10^-12, KT -> 20.10 x 10^-8};
exi = eeta = 0;
feta = fxi = mxi = meta = 0;
Kq = Kp = P / A (Ixi + Iyi);
(* Tipo de estructura: viga biapoyada *)
nodos = {{{0, 0, 0}, {0, 0, 0, "x", "x", 0, "x"}, {0, 0, P, 0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, L0}, {0, 0, "x", "x", "x", 0, "x"}, {0, 0, -P, 0, 0, 0, 0}}};
(* coordenadas de los nodos/desplazamientos de los
nodos/fuerzas en los nodos *)
material = {{vE, v}}; (* Se realiza una lista por cada material*)
perfil = {{A, Ixi, Iyi, KT, Iw}}; (* Se realiza una lista por cada perfil*)
barras = {{{1, 2}, {1, 1}}}; (* Nodos de la estructura/material y perfil*)

(* Discretizamos -> mallamos con N elementos *)
ne = 4; (* numero de elementos (N) *)
nn = ne + 1;
nnodos = Table[0, {nn}];
nbarras = Table[0, {ne}];

nnodos[[1]] = nodos[[1]];
nnodos[[nn]] = nodos[[Dimensions[nodos][[1]]]];
For[i = 1, i < ne, i++,
  nnodos[[i + 1]] =
    {{0, 0, i L0 / ne}, {"x", "x", "x", "x", "x", "x", "x"}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}};
];
For[i = 1, i <= ne, i++,
  nbarras[[i]] = {{i, i + 1}, {1, 1}};
];

nd = Dimensions[nnodos][[1]];
nb = Dimensions[nbarras][[1]];
Ngdln = 7; (* Grados de libertad en cada nudo*)
```

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

```
(* Matriz de rigidez elemental *)
Ke = Table[0, {nb}, {2 Ngdln}, {2 Ngdln}];

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  i = nbarras[[b]][[1]][[1]],
  j = nbarras[[b]][[1]][[2]],
  xy = Join[{nnodos[[i]][[1]]}, {nnodos[[j]][[1]]}],
  L =  $\sqrt{((xy[[2]][[1]] - xy[[1]][[1]])^2 +$ 
     $(xy[[2]][[2]] - xy[[1]][[2]])^2 + (xy[[2]][[3]] - xy[[1]][[3]])^2)}$ ,
  Part[Ke, b] = (Ks - KG) //. datos ,
}
```

1

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

```

(* Matriz de rigidez de la estructura*)
s = 7; (* Grados de libertad por cada nudo *)
ngdl = s nd; (* Grados de libertad de la estructura*)
K = Table[0, {ngdl}, {ngdl}];

For[b = 1, b <= nb, b++, {
  i = nbarras[[b]][[1]][[1]];
  j = nbarras[[b]][[1]][[2]];
  (* Submatriz 11 *)
  For[f = 1, f <= s, f++, (* Filas *)
    For[c = 1, c <= s, c++, (* Columnas *)
      Part[K, s (i - 1) + f, s (i - 1) + c] += Part[Ke, b, f, c]
    ]
  ]

  (* Submatriz 12 *)
  For[f = 1, f <= s, f++,

For[c = 1, c <= s, c++, Part[K, s (i - 1) + f, s (j - 1) + c] += Part[Ke, b, f, s + c]
]
]

  (* Submatriz 21 *)
  For[f = 1, f <= s, f++,

For[c = 1, c <= s, c++, Part[K, s (j - 1) + f, s (i - 1) + c] += Part[Ke, b, s + f, c]
]
]

  (* Submatriz 22 *)
  For[f = 1, f <= s, f++,
    For[c = 1, c <= s, c++,
      Part[K, s (j - 1) + f, s (j - 1) + c] += Part[Ke, b, s + f, s + c]
    ]
  ]
}
]

(* Aplicamos las condiciones de contorno *)
orden = 0;
For[i = 1, i <= nd, i++, {
  For[j = 1, j <= s, j++, {
    If[(nnodos[[i]][[2]][[j]] == "x"), orden++];
  }
];
}
];

```


Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

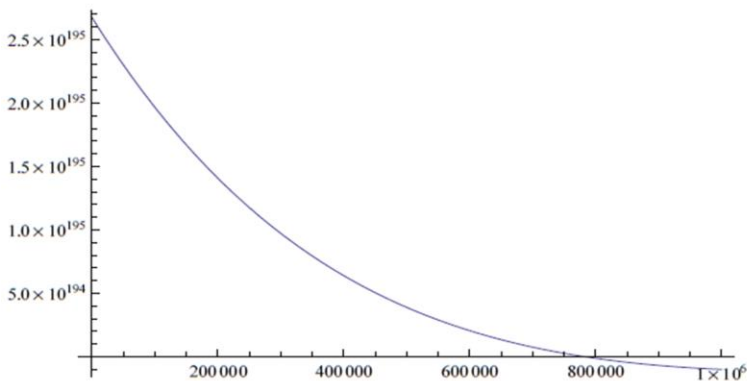
```

incog = Table[0, {orden}];
a = 1;
For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
  For[j = 1, j ≤ s, j++, {
    If[(nnodos[[i]][[2]][[j]] == "x"), {Part[incog, a] = s (i - 1) + j, a++}];
  }
];
];

M = K[[incog, incog]];
kk = Det[M];

(* Buscamos la raiz más pequeña, es decir la carga de pandeo P1 *)
Plot[kk, {P, 0, 1.0 × 10^6}]

```



```

P1 = P /. FindRoot[kk, {P, 5.0 × 10^5}]

```

782 814.

```

u = Array[Δ, {ngdl}]; (* Desplazamientos de los nodos *)

```

```

F = Array[W, {ngdl}]; (* Fuerzas en los nudos *)

```

```

For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
  For[j = 1, j ≤ s, j++, {
    If[(nnodos[[i]][[2]][[j]] == "x"), F[[s i - (s - j)]] = 0 nnodos[[i]][[3]][[j]],
      u[[s i - (s - j)]] = nnodos[[i]][[2]][[j]];
    }
];
];
];

```

(* Sustituimos una fila de la matriz para
pasar de de una matriz singular a una no singular *)

```

n1 = Dimensions[incog][[1]];

```

```

u1 = u[[incog]];

```

```

F1 = Table[0, {n1}];

```

```

F1[[2]] = 1;

```

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

```

ec = Table[0, {n1}];
ec[[2]] = 1;

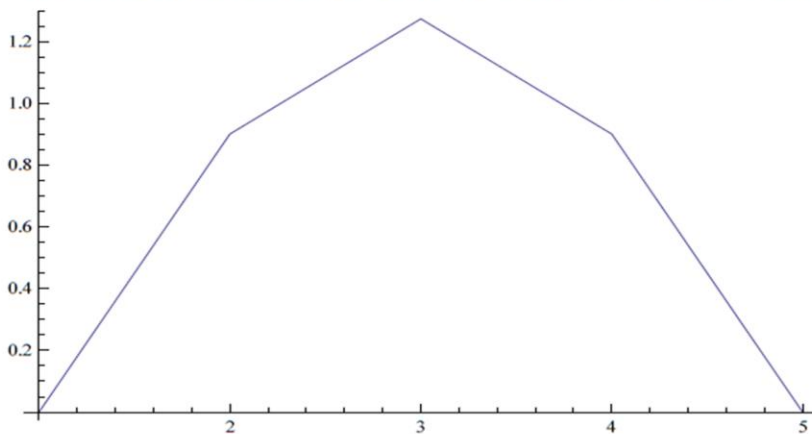
K1 = K[[incog, incog]];
K1[[2]] = ec;

sol = Solve[F1 == (K1 /. P -> P1) . u1][[1]]
{Δ[5] → 1., Δ[4] → 0., Δ[9] → 0., Δ[11] → 0., Δ[7] → 0., Δ[13] → 0.,
 Δ[14] → 0., Δ[10] → 0., Δ[17] → 0., Δ[16] → 0., Δ[18] → 0., Δ[8] → 0.90034,
 Δ[15] → 1.27327, Δ[19] → 2.90273 × 10-15, Δ[12] → 0.707107, Δ[20] → 0., Δ[21] → 0.,
 Δ[24] → 0., Δ[23] → 0., Δ[25] → 0., Δ[22] → 0.90034, Δ[26] → -0.707107,
 Δ[27] → 0., Δ[28] → 0., Δ[31] → 0., Δ[32] → 0., Δ[33] → -1., Δ[35] → 0.}

u /. sol
{0, 0, 0, 0., 1., 0, 0., 0.90034, 0., 0., 0., 0.707107,
 0., 0., 1.27327, 0., 0., 0., 2.90273 × 10-15, 0., 0., 0.90034,
 0., 0., 0., -0.707107, 0., 0., 0, 0, 0., 0., -1., 0, 0.}

```

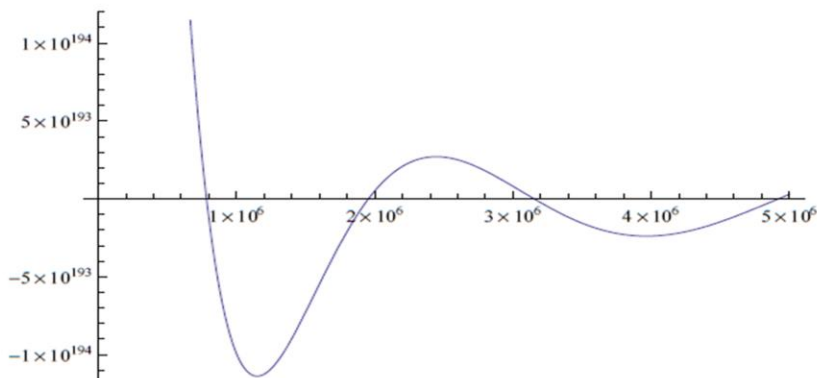
```
ListPlot[Table[u[[1 + 7 i]] /. sol, {i, 0, 4}], Joined -> True]
```



(* Para la carga P1 , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura, en el modo de pandeo 1 *)

(* Buscamos la segunda raíz más pequeña, es decir la carga de pandeo P2 *)

```
Plot[kk, {P, 0, 5.0 × 106}]
```



Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

```

P2 = P /. FindRoot[kk, {P, 1.5 × 10^6}]
1.95369 × 10^6

F1 = Table[0, {n1}];
F1[[3]] = 1;
F1[[n1]] = 1;

K1 = K[[incog, incog]];

ec = Table[0, {n1}];
ec[[3]] = 1;
K1[[3]] = ec;

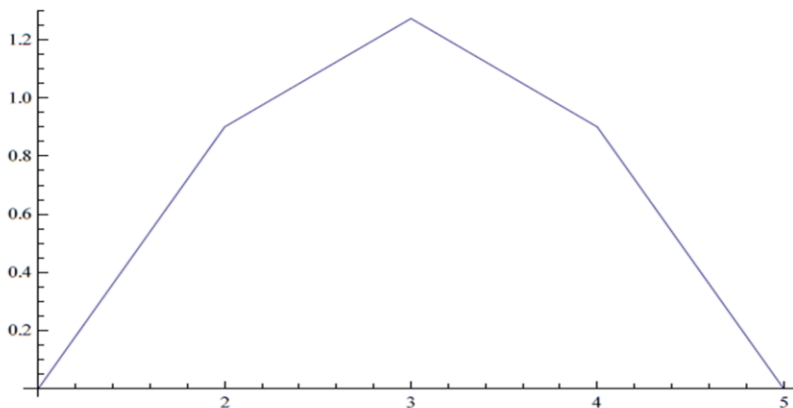
ec = Table[0, {n1}];
ec[[n1]] = -1;
K1[[n1]] = ec;

sol = Solve[F1 == (K1 /. P → P2) . u1][[1]]
{Λ[7] → 1., Λ[4] → 0., Λ[9] → 0., Λ[11] → 0., Λ[5] → 0., Λ[8] → 0., Λ[12] → 0.,
Λ[10] → 0., Λ[17] → 0., Λ[16] → 0., Λ[18] → 0., Λ[15] → 0., Λ[19] → 0.,
Λ[13] → 0.90034, Λ[20] → 1.27327, Λ[21] → -3.62649 × 10-17, Λ[14] → 0.707107,
Λ[24] → 0., Λ[23] → 0., Λ[25] → 0., Λ[22] → 0., Λ[26] → 0., Λ[27] → 0.90034,
Λ[28] → -0.707107, Λ[31] → 0., Λ[32] → 0., Λ[33] → 0., Λ[35] → -1.}

u /. sol
{0, 0, 0, 0., 0., 0, 1., 0., 0., 0., 0., 0., 0.90034,
0.707107, 0., 0., 0., 0., 1.27327, -3.62649 × 10-17, 0.,
0., 0., 0., 0.90034, -0.707107, 0, 0, 0., 0., 0., 0, -1.}

ListPlot[Table[u[[6 + 7 i]] /. sol, {i, 0, 4}], Joined → True]

```

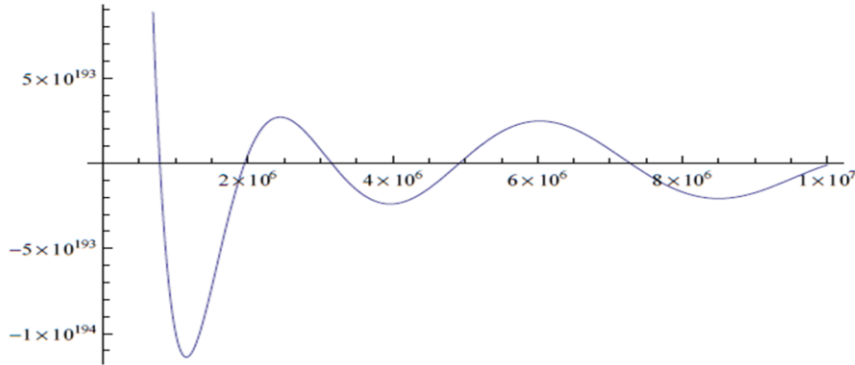


(* Para la carga P2 , se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 1 *)

(* Buscamos la tercera raíz más pequeña, es decir la carga de pandeo P3 *)

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

```
Plot[kk, {P, 0, 1.0 × 107}]
```



```
P3 = P /. FindRoot[kk, {P, 3.0 × 106}]
```

```
3.15319 × 106
```

```
F1 = Table[0, {n1}];
```

```
F1[[2]] = 1;
```

```
ec = Table[0, {n1}];
```

```
ec[[2]] = 1;
```

```
K1 = K[[incog, incog]];
```

```
K1[[2]] = ec;
```

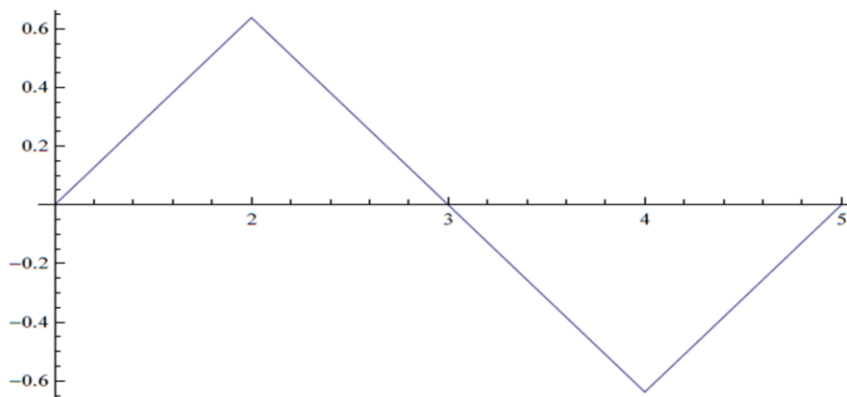
```
sol = Solve[F1 == (K1 /. P → P3) . u1][[1]]
```

```
{Λ[5] → 1., Λ[4] → 0., Λ[9] → 0., Λ[11] → 0., Λ[7] → 0.,  
Λ[13] → 0., Λ[14] → 0., Λ[10] → 0., Λ[17] → 0., Λ[16] → 0.,  
Λ[18] → 0., Λ[8] → 0.637851, Λ[15] → -2.33236 × 10-14, Λ[19] → -1.,  
Λ[12] → -2.18572 × 10-14, Λ[20] → 0., Λ[21] → 0., Λ[24] → 0.,  
Λ[23] → 0., Λ[25] → 0., Λ[22] → -0.637851, Λ[26] → 1.52807 × 10-14,  
Λ[27] → 0., Λ[28] → 0., Λ[31] → 0., Λ[32] → 0., Λ[33] → 1., Λ[35] → 0.}
```

```
u /. sol
```

```
{0, 0, 0, 0., 1., 0, 0., 0.637851, 0., 0., 0., -2.18572 × 10-14,  
0., 0., -2.33236 × 10-14, 0., 0., 0., -1., 0., 0., -0.637851,  
0., 0., 0., 1.52807 × 10-14, 0., 0., 0, 0, 0, 0., 1., 0, 0.}
```

```
ListPlot[Table[u[[1 + 7 i]] /. sol, {i, 0, 4}], Joined → True]
```

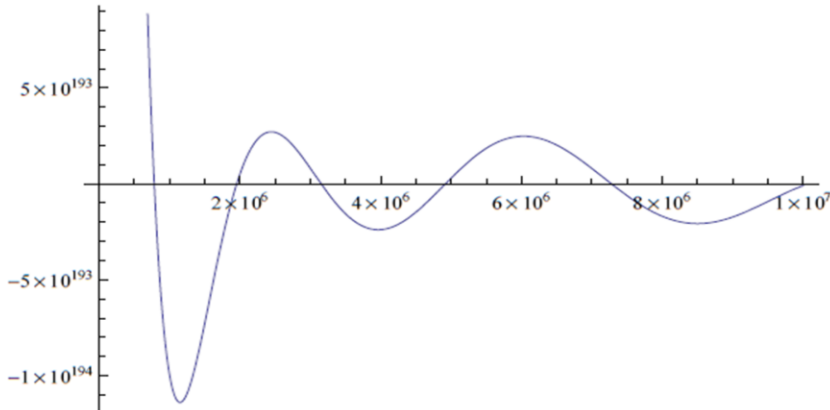


Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

(* Para la carga P3 , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura, en el modo de pandeo 2 *)

(* Buscamos la cuarta raíz más pequeña, es decir la carga de pandeo P4 *)

```
Plot[kk, {P, 0, 1.0 × 10^7}]
```



```
P4 = P /. FindRoot[kk, {P, 4.0 × 10^6}]
```

```
4.91912 × 10^6
```

```
F1 = Table[0, {n1}];
```

```
F1[[3]] = 1;
```

```
K1 = K[[incog, incog]];
```

```
ec = Table[0, {n1}];
```

```
ec[[3]] = 1;
```

```
K1[[3]] = ec;
```

```
sol = Solve[F1 == (K1 /. P → P4).u1][[1]]
```

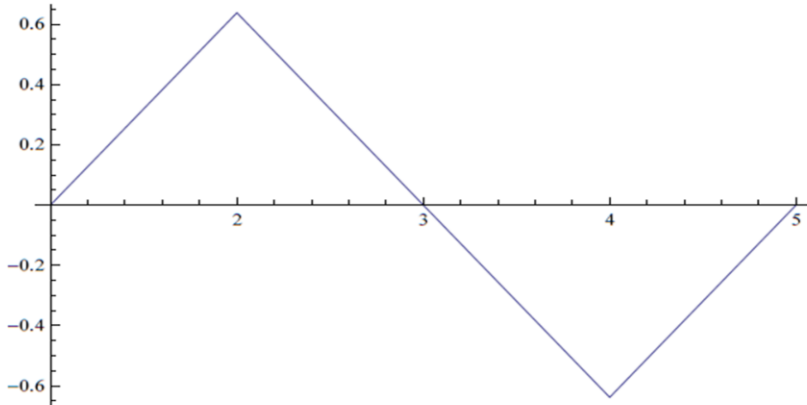
```
{Λ[7] → 1., Λ[4] → 0., Λ[9] → 0., Λ[11] → 0., Λ[5] → 0., Λ[8] → 0., Λ[12] → 0.,  
Λ[10] → 0., Λ[17] → 0., Λ[16] → 0., Λ[18] → 0., Λ[15] → 0., Λ[19] → 0.,  
Λ[13] → 0.637851, Λ[20] → -1.01358 × 10-14, Λ[21] → -1., Λ[14] → -9.09029 × 10-15,  
Λ[24] → 0., Λ[23] → 0., Λ[25] → 0., Λ[22] → 0., Λ[26] → 0., Λ[27] → -0.637851,  
Λ[28] → 6.595 × 10-15, Λ[31] → 0., Λ[32] → 0., Λ[33] → 0., Λ[35] → 1.}
```

```
u /. sol
```

```
{0, 0, 0, 0., 0., 0, 1., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.637851,  
-9.09029 × 10-15, 0., 0., 0., 0., 0., -1.01358 × 10-14, -1., 0.,  
0., 0., 0., 0., -0.637851, 6.595 × 10-15, 0, 0, 0., 0., 0., 0., 0., 1.}
```

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

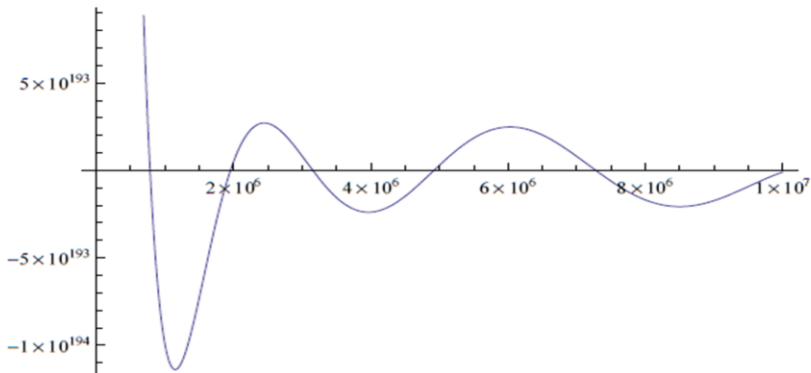
```
ListPlot[Table[u[[6 + 7 i]] /. sol, {i, 0, 4}], Joined -> True]
```



(* Para la carga P4 , se produce pandeo con deformaciones de torsión respecto al centro de esfuerzos cortantes de la sección, en el modo de pandeo 2 *)

(* Buscamos la quinta raíz más pequeña, es decir la carga de pandeo P5 *)

```
Plot[kk, {P, 0, 1.0 × 10^7}]
```



```
P5 = P /. FindRoot[kk, {P, 8.0 × 10^6}]
```

```
7.27623 × 10^6
```

```
K1 = K[[incog, incog]];
```

```
F1 = Table[0, {n1}];
```

```
F1[[2]] = 1;
```

```
ec = Table[0, {n1}];
```

```
ec[[2]] = 1;
```

```
K1 = K[[incog, incog]];
```

```
K1[[2]] = ec;
```

```
sol = Solve[F1 == (K1 /. P -> P5) . u1][[1]]
```

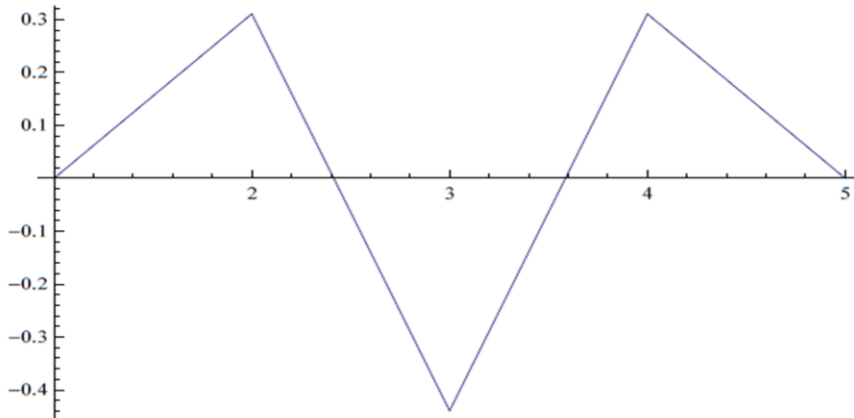
```
{Δ[5] -> 1., Δ[4] -> 0., Δ[9] -> 0., Δ[11] -> 0., Δ[7] -> 0., Δ[13] -> 0.,  
Δ[14] -> 0., Δ[10] -> 0., Δ[17] -> 0., Δ[16] -> 0., Δ[18] -> 0., Δ[8] -> 0.310652,  
Δ[15] -> -0.439328, Δ[19] -> 1.02955 × 10^-14, Δ[12] -> -0.707107, Δ[20] -> 0.,  
Δ[21] -> 0., Δ[24] -> 0., Δ[23] -> 0., Δ[25] -> 0., Δ[22] -> 0.310652, Δ[26] -> 0.707107,  
Δ[27] -> 0., Δ[28] -> 0., Δ[31] -> 0., Δ[32] -> 0., Δ[33] -> -1., Δ[35] -> 0.}
```

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

```
u /. sol
```

```
{0, 0, 0, 0., 1., 0, 0., 0.310652, 0., 0., 0.,  
-0.707107, 0., 0., -0.439328, 0., 0., 0., 1.02955 × 10-14, 0., 0.,  
0.310652, 0., 0., 0., 0.707107, 0., 0., 0, 0, 0., 0., -1., 0, 0.}
```

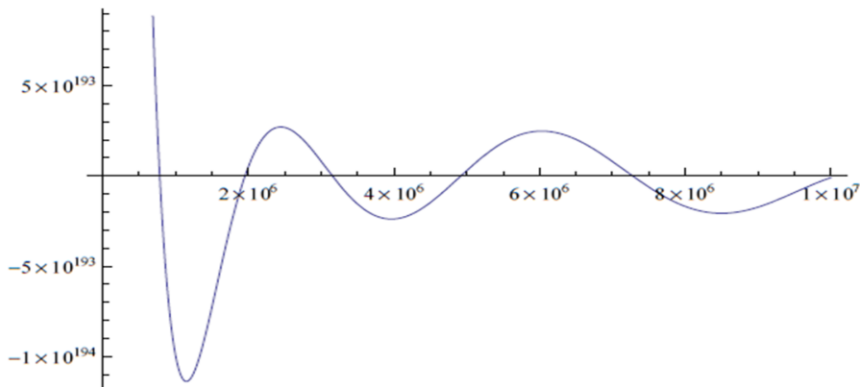
```
ListPlot[Table[u[[1 + 7 i]] /. sol, {i, 0, 4}], Joined → True]
```



(* Para la carga P5 , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano débil de la estructura, en el modo de pandeo 3 *)

(* Buscamos la sexta raíz más pequeña, es decir la carga de pandeo P6 *)

```
Plot[kk, {P, 0, 1.0 × 107}]
```



```
P6 = P /. FindRoot[kk, {P, 1.0 × 107}]
```

```
1.00772 × 107
```

```
K1 = K[[incog, incog]];
```

```
F1 = Table[0, {n1}];
```

```
F1[[1]] = 1;
```

```
ec = Table[0, {n1}];
```

```
ec[[1]] = 1;
```

```
K1 = K[[incog, incog]];
```

```
K1[[1]] = ec;
```

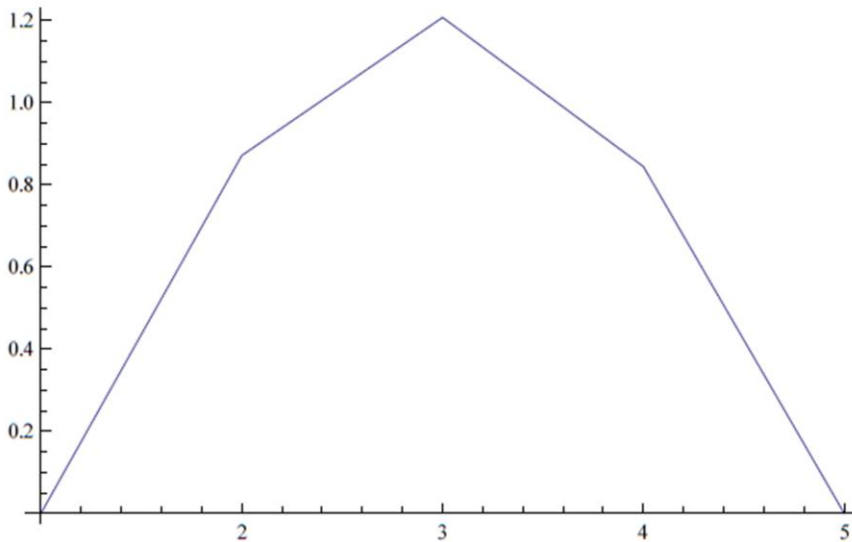
```
sol = Solve[F1 == (K1 /. P -> P6) . u1][[1]]
```

```
{Λ[4] → 1., Λ[5] → 0., Λ[8] → 0., Λ[12] → 0., Λ[7] → 0. - 1. Λ[35],
Λ[13] → 0. - 0.310652 Λ[35], Λ[14] → 0. + 0.707107 Λ[35], Λ[10] → 0.,
Λ[17] → 0., Λ[9] → 0.871358, Λ[16] → 1.20764, Λ[18] → -0.0184738,
Λ[11] → 0.662, Λ[15] → 0., Λ[19] → 0., Λ[20] → 0. + 0.439328 Λ[35],
Λ[21] → 0. - 2.1393 × 10-14 Λ[35], Λ[24] → 0., Λ[23] → 0.844479,
Λ[25] → -0.669316, Λ[22] → 0., Λ[26] → 0., Λ[27] → 0. - 0.310652 Λ[35],
Λ[28] → 0. - 0.707107 Λ[35], Λ[31] → 0., Λ[32] → -0.934623, Λ[33] → 0.}
```

```
u /. sol
```

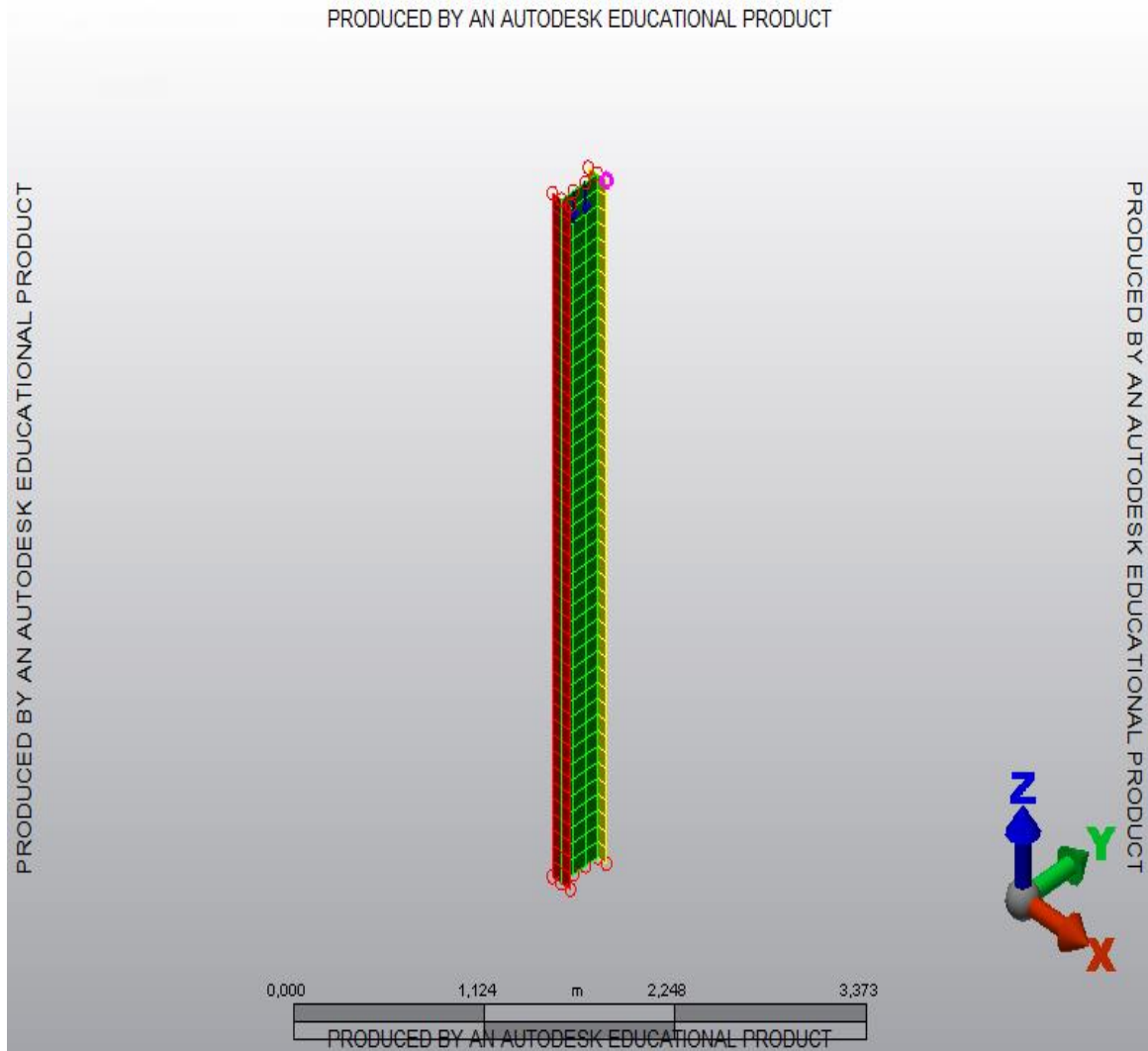
```
{0, 0, 0, 1., 0., 0, 0. - 1. Λ[35], 0., 0.871358, 0., 0.662, 0.,
0. - 0.310652 Λ[35], 0. + 0.707107 Λ[35], 0., 1.20764, 0., -0.0184738, 0.,
0. + 0.439328 Λ[35], 0. - 2.1393 × 10-14 Λ[35], 0., 0.844479, 0., -0.669316, 0.,
0. - 0.310652 Λ[35], 0. - 0.707107 Λ[35], 0, 0, 0., -0.934623, 0., 0, Λ[35]}
```

```
ListPlot[Table[u[[2 + 7 i]] /. sol, {i, 0, 4}], Joined -> True]
```



(* Para la carga P6 , se produce pandeo con deformaciones de flexión en el plano fuerte de la estructura, en el modo de pandeo 1 *)

ANEXO IX: Informe parte 2 “Simulation Mechanical”



Análisis de Pandeo

Created by

Author: David Orgaz
Department: D.C.A.I.T.Y.M.M.C.Y.T.E.
Created Date: 22/01/2015

Reviewed by

Reviewer: David Orgaz
Department: D.C.A.I.T.Y.M.M.C.Y.T.E.
Model Created: 22/01/2015

Executive Summary

Se trata de calcular los diferentes modos de fallo de la viga biapoyada sometida a cargas de compresión.

Solamente serán de interés los que producen fallo por pandeo de la viga.

Summary

Model Information

Analysis Type - Critical Buckling Load

Units - Metric mks (SI) - (N, m, s, °C, K, V, ohm, A, J)

Model location - D:\Desktop\Proyecto\Proyecto\Parte 2\Autocad\Parte
1\Pilar_3D_shell_1.fem

Design scenario description - Pandeo con deformaciones de flexión y torsión

Analysis Parameters Information

Centrifugal Information

Angular Velocity (Omega) Magnitude = 0 (RPM)

	X	Y	Z
Rotation Center Point (m)	0	0	0
Rotation Axis			

Multiphysics Information

Default Nodal Temperature	0 °C
---------------------------	------

Processor Information

Maximum Number of Iterations	32
Convergence Value for Eigenvalue	1e-005
Load Case Multiplier 1 - Pressure	1
Load Case Multiplier 1 - Accel/Gravity	0
Load Case Multiplier 1 - Boundary	0
Load Case Multiplier 1 - Thermal	0
Acceleration Due To Body Force	9 m/s ²

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

Acceleration/Gravity X Multiplier	0
Acceleration/Gravity Y Multiplier	0
Acceleration/Gravity Z Multiplier	-1
Avoid Bandwidth Minimization	No
Stop After Stiffness Calculations	No
Displacement Data in Output File	No
Stress Data in Output File	No
Equation Numbers Data in Output File	No
Element Input Data in Output File	No
Nodal Input Data in Output File	No
Centrifugal Load Data in Output File	No

Part Information

Part ID	Part Name	Element Type	Material Name
1	ALMA	Plate	Steel (ASTM - A36)
2	ALA 1	Plate	Steel (ASTM - A36)
3	ALA 2	Plate	Steel (ASTM - A36)

Element Information

Element Properties used for:

- ALMA
- ALA 1
- ALA 2

Element Type	Plate
Material Model	Isotropic
Element Formulation	Veubeke
Stress Free Reference Temperature	0 °C
Temperature Method	Stress Free
Twisting Coefficient Ratio	0.001
Plate Properties	Part Based
Thickness	0 m
Element Normal X Coordinate	0 m
Element Normal Y Coordinate	0 m
Element Normal Z Coordinate	0 m
delta T Through Thickness	0 °C/m
Nodal Order Method	Default
Nodal Order X Coordinate	0 m
Nodal Order Y Coordinate	0 m
Nodal Order Z Coordinate	0 m

Material Information

Steel (ASTM - A36) -Plate

Material Model	Standard
Material Source	Autodesk Simulation Material Library
Material Source File	D:\Autodesk\Simulation 2014\matlibs\alformat.mlb
Date Last Updated	2012/07/12-16:56:00
Material Description	Structural Steel
Mass Density	7854 kg/m ³
Modulus of Elasticity	199947961490 N/m ²
Poisson's Ratio	0.29
Thermal Coefficient of Expansion	1 1/°C
Yield Strength	248211262 N/m ²
Ultimate Strength	399895922 N/m ²

Loads

FEA Object Group 20: Fuerza puntual 1

Nodal Force

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Magnitude (N)	Vx	Vy	Vz	Load Case / Load Curve
3	Unnamed	5	5	- 5000,000000	0,00000 0	0,00000 0	1,00000 0	1

FEA Object Group 21: Fuerza puntual 2

Nodal Force

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Magnitude (N)	Vx	Vy	Vz	Load Case / Load Curve
4	Unnamed	6	6	- 5000,000000	0,00000 0	0,00000 0	1,00000 0	1

Constraints

FEA Object Group 1: Restricción del nodo 1 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
1	Restricción	314	268	No	No	No	No	No	Yes

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

FEA Object Group 2: Restricción del nodo 2 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
2	Restricción	310	N/A	Yes	Yes	Yes	No	No	Yes

FEA Object Group 3: Restricción del nodo 3 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
3	Restricción	311	265	No	No	No	No	No	Yes

FEA Object Group 4: Restricción del nodo 4 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
4	Restricción	50	50	Yes	Yes	Yes	No	No	Yes

FEA Object Group 5: Restricción del nodo 5 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
5	Restricción	49	49	Yes	Yes	Yes	No	No	Yes

FEA Object Group 6: Restricción del nodo 6 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
6	Restricción	178	N/A	Yes	Yes	Yes	No	No	Yes

FEA Object Group 7: Restricción del nodo 7 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
7	Restricción	182	180	No	No	No	No	No	Yes

FEA Object Group 8: Restricción del nodo 8 de la parte inferior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
8	Restricción	179	177	No	No	No	No	No	Yes

FEA Object Group 9: Restricción del nodo 9 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
9	Restricción	181	179	No	No	No	No	No	Yes

FEA Object Group 10: Restricción del nodo 10 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
10	Restricción	177	N/A	Yes	Yes	No	No	No	Yes

FEA Object Group 11: Restricción del nodo 11 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
11	Restricción	180	178	No	No	No	No	No	Yes

FEA Object Group 12: Restricción del nodo 12 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
12	Restricción	6	6	Yes	Yes	No	No	No	Yes

FEA Object Group 13: Restricción del nodo 13 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
13	Restricción	5	5	Yes	Yes	No	No	No	Yes

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo
doble-T

FEA Object Group 14: Restricción del nodo 14 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
14	Restricción	312	266	No	No	No	No	No	Yes

FEA Object Group 15: Restricción del nodo 15 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
15	Restricción	309	N/A	Yes	Yes	No	No	No	Yes

FEA Object Group 16: Restricción del nodo 16 de la parte superior

Nodal General Constraint

ID	Description	Vertex Number	Node Number	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
16	Restricción	313	267	No	No	No	No	No	Yes

ANEXO X: Informe parte 3 "CYPE"

Barra N1/N2

Perfil: IPE 300 Material: Acero (S275)						
Nudos	Longitud (m)	Características mecánicas				
		Área (cm ²)	I _y ⁽¹⁾ (cm ⁴)	I _z ⁽¹⁾ (cm ⁴)	I _t ⁽²⁾ (cm ⁴)	
Inicial	Final					
N1	N2	4.000	53.80	8356.00	604.00	20.10
Notas: (1) Inercia respecto al eje indicado (2) Momento de inercia a torsión uniforme						
Pandeo			Pandeo lateral			
		Plano XY	Plano XZ	Ala sup.	Ala inf.	
β	1.00	1.00	0.00	0.00		
L _K	4.000	4.000	0.000	0.000		
C _m	1.000	1.000	1.000	1.000		
C ₁	-			1.000		
Notación: β: Coeficiente de pandeo L _K : Longitud de pandeo (m) C _m : Coeficiente de momentos C ₁ : Factor de modificación par el momento crítico						

Barra	COMPROBACIONES (CTE DB SE-A)													Estado		
	$\bar{\lambda}$	λ_w	N _t	N _c	M _y	M _z	V _z	V _y	M _y V _z	M _z V _y	NM _y M _z	NM _y M _z V _y V _z	M _t		M _t V _z	M _t V _y
N1/N2	$\bar{\lambda} < 2.0$ Cumple	x: 0.25 m $\lambda_w \leq \lambda_{w,m\acute{a}x}$ Cumple	N _{Ed} = 0.00 N.P. ⁽¹⁾	η = 48.1	x: 2 m η = 0.7	M _{Ed} = 0.00 N.P. ⁽²⁾	x: 0 m η = 0.3	V _{Ed} = 0.00 N.P. ⁽³⁾	x: 0.25 m η < 0.1	N.P. ⁽⁴⁾	x: 2 m η = 48.5	x: 0.25 m η < 0.1	M _{Ed} = 0.00 N.P. ⁽⁵⁾	N.P. ⁽⁶⁾	N.P. ⁽⁶⁾	CUMPLE η = 48.5
Notación: $\bar{\lambda}$: Limitación de esbeltez λ_w : Abolladura del alma inducida por el ala comprimida N _t : Resistencia a tracción N _c : Resistencia a compresión M _y : Resistencia a flexión eje Y M _z : Resistencia a flexión eje Z V _z : Resistencia a corte Z V _y : Resistencia a corte Y M _y V _z : Resistencia a momento flector Y y fuerza cortante Z combinados M _z V _y : Resistencia a momento flector Z y fuerza cortante Y combinados NM _y M _z : Resistencia a flexión y axil combinados NM _y M _z V _y V _z : Resistencia a flexión, axil y cortante combinados M _t : Resistencia a torsión M _t V _z : Resistencia a cortante Z y momento torsor combinados M _t V _y : Resistencia a cortante Y y momento torsor combinados x: Distancia al origen de la barra η: Coeficiente de aprovechamiento (%) N.P.: No procede																
Comprobaciones que no proceden (N.P.): (1) La comprobación no procede, ya que no hay axil de tracción. (2) La comprobación no procede, ya que no hay momento flector. (3) La comprobación no procede, ya que no hay esfuerzo cortante. (4) No hay interacción entre momento flector y esfuerzo cortante para ninguna combinación. Por lo tanto, la comprobación no procede. (5) La comprobación no procede, ya que no hay momento torsor. (6) No hay interacción entre momento torsor y esfuerzo cortante para ninguna combinación. Por lo tanto, la comprobación no procede.																

Limitación de esbeltez (CTE DB SE-A, Artículos 6.3.1 y 6.3.2.1 - Tabla 6.3)

La esbeltez reducida $\bar{\lambda}$ de las barras comprimidas debe ser inferior al valor 2.0.

$\bar{\lambda}$: **1.36** ✓

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Donde:

Clase: Clase de la sección, según la capacidad de deformación y de desarrollo de la resistencia plástica de los elementos planos comprimidos de una sección.

Clase : 4

A_{ef}: Área de la sección eficaz para las secciones de clase 4.

A_{ef} : 52.70 cm²

f_y: Límite elástico. (CTE DB SE-A, Tabla 4.1)

f_y : 2803.26 kp/cm²

N_{cr}: Axil crítico de pandeo elástico.

N_{cr} : 79.757 t

El axil crítico de pandeo elástico **N_{cr}** es el menor de los valores obtenidos en a), b) y c):

a) Axil crítico elástico de pandeo por flexión respecto al eje Y.

N_{cr,y} : 1103.389 t

b) Axil crítico elástico de pandeo por flexión respecto al eje Z.

N_{cr,z} : 79.757 t

c) Axil crítico elástico de pandeo por torsión.

N_{cr,T} : ∞

Donde:

I_y: Momento de inercia de la sección bruta, respecto al eje Y.

I_y : 8356.00 cm⁴

I_z: Momento de inercia de la sección bruta, respecto al eje Z.

I_z : 604.00 cm⁴

I_t: Momento de inercia a torsión uniforme.

I_t : 20.10 cm⁴

I_w: Constante de alabeo de la sección.

I_w : 126000.00 cm⁶

E: Módulo de elasticidad.

E : 2140673 kp/cm²

G: Módulo de elasticidad transversal.

G : 825688 kp/cm²

L_{ky}: Longitud efectiva de pandeo por flexión, respecto al eje Y.

L_{ky} : 4.000 m

L_{kz}: Longitud efectiva de pandeo por flexión, respecto al eje Z.

L_{kz} : 4.000 m

L_{kt}: Longitud efectiva de pandeo por torsión.

L_{kt} : 0.000 m

i₀: Radio de giro polar de la sección bruta, respecto al centro de torsión.

i₀ : 12.91 cm

Siendo:

i_y , i_z: Radios de giro de la sección bruta, respecto a los ejes principales de inercia Y y Z.

i_y : 12.46 cm

i_z : 3.35 cm

y₀ , z₀: Coordenadas del centro de torsión en la dirección de los ejes principales Y y Z, respectivamente, relativas al centro de gravedad de la sección.

y₀ : 0.00 mm

z₀ : 0.00 mm

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Abolladura del alma inducida por el ala comprimida (Criterio de CYPE Ingenieros, basado en: Eurocódigo 3 EN 1993-1-5: 2006, Artículo 8)

Se debe satisfacer:

$$39.24 \leq 254.33 \quad \checkmark$$

Donde:

h_w : Altura del alma.

t_w : Espesor del alma.

A_w : Área del alma.

$A_{fc,ef}$: Área reducida del ala comprimida.

k : Coeficiente que depende de la clase de la sección.

E : Módulo de elasticidad.

f_{yf} : Límite elástico del acero del ala comprimida.

Siendo:

$$h_w : \underline{278.60} \text{ mm}$$

$$t_w : \underline{7.10} \text{ mm}$$

$$A_w : \underline{19.78} \text{ cm}^2$$

$$A_{fc,ef} : \underline{16.05} \text{ cm}^2$$

$$k : \underline{0.30}$$

$$E : \underline{2140673} \text{ kp/cm}^2$$

$$f_{yf} : \underline{2803.26} \text{ kp/cm}^2$$

Resistencia a tracción (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.3)

La comprobación no procede, ya que no hay axil de tracción.

Resistencia a compresión (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.5)

Se debe satisfacer:

$$\eta : \underline{0.192} \quad \checkmark$$

$$\eta : \underline{0.481} \quad \checkmark$$

El esfuerzo solicitante de cálculo pésimo se produce para la combinación de acciones 1.35·PP.

$N_{c,Ed}$: Axil de compresión solicitante de cálculo pésimo.

$$N_{c,Ed} : \underline{27.000} \text{ t}$$

La resistencia de cálculo a compresión $N_{c,Rd}$ viene dada por:

$$N_{c,Rd} : \underline{140.687} \text{ t}$$

Donde:

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Clase: Clase de la sección, según la capacidad de deformación y de desarrollo de la resistencia plástica de los elementos planos comprimidos de una sección.

Clase : 4

A_{ef}: Área de la sección eficaz para las secciones de clase 4.

A_{ef} : 52.70 cm²

f_{vd}: Resistencia de cálculo del acero.

f_{vd} : 2669.77 kp/cm²

Siendo:

f_v: Límite elástico. (CTE DB SE-A, Tabla 4.1)

f_v : 2803.26 kp/cm²

γ_{M0}: Coeficiente parcial de seguridad del material.

γ_{M0} : 1.05

Resistencia a pandeo: (CTE DB SE-A, Artículo 6.3.2)

La resistencia de cálculo a pandeo **N_{b,Rd}** en una barra comprimida viene dada por:

N_{b,Rd} : 56.083 t

Donde:

A_{ef}: Área de la sección eficaz para las secciones de clase 4.

A_{ef} : 52.70 cm²

f_{vd}: Resistencia de cálculo del acero.

f_{vd} : 2669.77 kp/cm²

Siendo:

f_v: Límite elástico. (CTE DB SE-A, Tabla 4.1)

f_v : 2803.26 kp/cm²

γ_{M1}: Coeficiente parcial de seguridad del material.

γ_{M1} : 1.05

χ: Coeficiente de reducción por pandeo.

χ_y : 0.96

χ_z : 0.40

Siendo:

φ_v : 0.58

φ_z : 1.62

α: Coeficiente de imperfección elástica.

α_y : 0.21

α_z : 0.34

λ̄: Esbeltez reducida.

λ̄_y : 0.37

λ̄_z : 1.36

N_{cr}: Axil crítico elástico de pandeo, obtenido como el menor de los siguientes valores:

N_{cr} : 79.757 t

N_{cr,y}: Axil crítico elástico de pandeo por flexión respecto al eje Y.

N_{cr,y} : 1103.389 t

N_{cr,z}: Axil crítico elástico de pandeo por flexión respecto al eje Z.

N_{cr,z} : 79.757 t

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

$N_{cr,T}$: Axil crítico elástico de pandeo por torsión.

$$N_{cr,T} : \infty$$

Resistencia a flexión eje Y (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.6)

Se debe satisfacer:

$$\eta : 0.007 \checkmark$$

Para flexión positiva:

El esfuerzo solicitante de cálculo pésimo se produce en un punto situado a una distancia de 2.000 m del nudo N1, para la combinación de acciones 1.35·PP.

M_{Ed}^+ : Momento flector solicitante de cálculo pésimo.

$$M_{Ed}^+ : 0.114 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Para flexión negativa:

M_{Ed}^- : Momento flector solicitante de cálculo pésimo.

$$M_{Ed}^- : 0.000 \text{ t}\cdot\text{m}$$

El momento flector resistente de cálculo $M_{c,Rd}$ viene dado por:

$$M_{c,Rd} : 16.766 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Donde:

Clase: Clase de la sección, según la capacidad de deformación y de desarrollo de la resistencia plástica de los elementos planos de una sección a flexión simple.

$$\text{Clase} : 1$$

$W_{pl,y}$: Módulo resistente plástico correspondiente a la fibra con mayor tensión, para las secciones de clase 1 y 2.

$$W_{pl,y} : 628.00 \text{ cm}^3$$

f_{yd} : Resistencia de cálculo del acero.

$$f_{yd} : 2669.77 \text{ kp/cm}^2$$

Siendo:

f_y : Límite elástico. (CTE DB SE-A, Tabla 4.1)

$$f_y : 2803.26 \text{ kp/cm}^2$$

γ_{M0} : Coeficiente parcial de seguridad del material.

$$\gamma_{M0} : 1.05$$

Resistencia a pandeo lateral: (CTE DB SE-A, Artículo 6.3.3.2)

No procede, dado que las longitudes de pandeo lateral son nulas.

Resistencia a flexión eje Z (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.6)

La comprobación no procede, ya que no hay momento flector.

Resistencia a corte Z (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.4)

Se debe satisfacer:

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

$$\eta : \underline{0.003} \quad \checkmark$$

El esfuerzo solicitante de cálculo pésimo se produce en el nudo N1, para la combinación de acciones 1.35·PP.

$$V_{Ed} : \text{Esfuerzo cortante solicitante de cálculo pésimo.} \quad V_{Ed} : \underline{0.114} \text{ t}$$

El esfuerzo cortante resistente de cálculo $V_{c,Rd}$ viene dado por:

$$V_{c,Rd} : \underline{32.832} \text{ t}$$

Donde:

$$A_v : \text{Área transversal a cortante.} \quad A_v : \underline{21.30} \text{ cm}^2$$

Siendo:

$$h : \text{Canto de la sección.} \quad h : \underline{300.00} \text{ mm}$$

$$t_w : \text{Espesor del alma.} \quad t_w : \underline{7.10} \text{ mm}$$

$$f_{yd} : \text{Resistencia de cálculo del acero.} \quad f_{yd} : \underline{2669.77} \text{ kp/cm}^2$$

Siendo:

$$f_y : \text{Límite elástico. (CTE DB SE-A, Tabla 4.1)} \quad f_y : \underline{2803.26} \text{ kp/cm}^2$$

$$\gamma_{M0} : \text{Coeficiente parcial de seguridad del material.} \quad \gamma_{M0} : \underline{1.05}$$

Abolladura por cortante del alma: (CTE DB SE-A, Artículo 6.3.3.4)

Aunque no se han dispuesto rigidizadores transversales, no es necesario comprobar la resistencia a la abolladura del alma, puesto que se cumple:

$$39.24 < 64.71 \quad \checkmark$$

Donde:

$$\lambda_w : \text{Esbeltez del alma.} \quad \lambda_w : \underline{39.24}$$

$$\lambda_{m\acute{a}x} : \text{Esbeltez máxima.} \quad \lambda_{m\acute{a}x} : \underline{64.71}$$

$$\varepsilon : \text{Factor de reducción.} \quad \varepsilon : \underline{0.92}$$

Siendo:

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

f_{ref} : Límite elástico de referencia.

f_{ref} : 2395.51 kp/cm²

f_v : Límite elástico. (CTE DB SE-A, Tabla 4.1)

f_v : 2803.26 kp/cm²

Resistencia a corte Y (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.4)

La comprobación no procede, ya que no hay esfuerzo cortante.

Resistencia a momento flector Y y fuerza cortante Z combinados (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.8)

No es necesario reducir la resistencia de cálculo a flexión, ya que el esfuerzo cortante solicitante de cálculo pésimo V_{Ed} no es superior al 50% de la resistencia de cálculo a cortante $V_{c,Rd}$.

$$0.100 \text{ t} \leq 16.416 \text{ t} \quad \checkmark$$

Los esfuerzos solicitantes de cálculo pésimos se producen en un punto situado a una distancia de 0.250 m del nudo N1, para la combinación de acciones 1.35·PP.

V_{Ed} : Esfuerzo cortante solicitante de cálculo pésimo.

V_{Ed} : 0.100 t

$V_{c,Rd}$: Esfuerzo cortante resistente de cálculo.

$V_{c,Rd}$: 32.832 t

Resistencia a momento flector Z y fuerza cortante Y combinados (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.8)

No hay interacción entre momento flector y esfuerzo cortante para ninguna combinación. Por lo tanto, la comprobación no procede.

Resistencia a flexión y axil combinados (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.8)

Se debe satisfacer:

$$\eta : \underline{0.196} \quad \checkmark$$

$$\eta : \underline{0.204} \quad \checkmark$$

$$\eta : \underline{0.485} \quad \checkmark$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Los esfuerzos solicitantes de cálculo p^{ésimos} se producen en un punto situado a una distancia de 2.000 m del nudo N1, para la combinación de acciones 1.35·PP.

Donde:

N_{c,Ed} : Axil de compresión solicitante de cálculo p ^{ésimo} .	N_{c,Ed} : <u>27.000</u> t
M_{y,Ed}, M_{z,Ed} : Momentos flectores solicitantes de cálculo p ^{ésimos} , según los ejes Y y Z, respectivamente.	M_{y,Ed}⁺ : <u>0.114</u> t·m
	M_{z,Ed}⁺ : <u>0.000</u> t·m
Clase : Clase de la sección, según la capacidad de deformación y de desarrollo de la resistencia plástica de sus elementos planos, para axil y flexión simple.	Clase : <u>3</u>
N_{pl,Rd} : Resistencia a compresión de la sección bruta.	N_{pl,Rd} : <u>143.634</u> t
M_{el,Rd,y}, M_{el,Rd,z} : Resistencia a flexión de la sección bruta en condiciones elásticas, respecto a los ejes Y y Z, respectivamente.	M_{el,Rd,y} : <u>14.872</u> t·m
	M_{el,Rd,z} : <u>2.150</u> t·m
Resistencia a pandeo: (CTE DB SE-A, Artículo 6.3.4.2)	
A : Área de la sección bruta.	A : <u>53.80</u> cm ²
W_{el,y}, W_{el,z} : Módulos resistentes elásticos correspondientes a la fibra comprimida, alrededor de los ejes Y y Z, respectivamente.	W_{el,y} : <u>557.07</u> cm ³
	W_{el,z} : <u>80.53</u> cm ³
f_{yd} : Resistencia de cálculo del acero.	f_{yd} : <u>2669.77</u> kp/cm ²

Siendo:

f _v : Límite elástico. (CTE DB SE-A, Tabla 4.1)	f _v : <u>2803.26</u> kp/cm ²
γ _{M1} : Coeficiente parcial de seguridad del material.	γ _{M1} : <u>1.05</u>

k_y, k_z: Coeficientes de interacción.

$$k_y : \underline{1.04}$$

$$k_z : \underline{1.29}$$

C_{m,y}, C_{m,z}: Factores de momento flector uniforme equivalente.

$$C_{m,y} : \underline{1.00}$$

$$C_{m,z} : \underline{1.00}$$

χ_y, χ_z: Coeficientes de reducción por pandeo, alrededor de los ejes Y y Z, respectivamente.

$$\chi_y : \underline{0.96}$$

$$\chi_z : \underline{0.39}$$

λ̄_y, λ̄_z: Esbelteces reducidas con valores no mayores que 1.00, en relación a los ejes Y y Z, respectivamente.

$$\bar{\lambda}_y : \underline{0.37}$$

$$\bar{\lambda}_z : \underline{1.38}$$

α_y, α_z: Factores dependientes de la clase de la sección.

$$\alpha_y : \underline{0.80}$$

$$\alpha_z : \underline{1.00}$$

Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T

Resistencia a flexión, axil y cortante combinados (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.8)

No es necesario reducir las resistencias de cálculo a flexión y a axil, ya que se puede ignorar el efecto de abolladura por esfuerzo cortante y, además, el esfuerzo cortante solicitante de cálculo pésimo V_{Ed} es menor o igual que el 50% del esfuerzo cortante resistente de cálculo $V_{c,Rd}$.

Los esfuerzos solicitantes de cálculo pésimos se producen en un punto situado a una distancia de 0.250 m del nudo N1, para la combinación de acciones 1.35·PP.

$$0.100 \text{ t} \leq 16.416 \text{ t} \quad \checkmark$$

Donde:

$V_{Ed,z}$: Esfuerzo cortante solicitante de cálculo pésimo.

$V_{c,Rd,z}$: Esfuerzo cortante resistente de cálculo.

$$V_{Ed,z} : \frac{0.100}{t}$$

$$V_{c,Rd,z} : \frac{32.832}{t}$$

Resistencia a torsión (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.7)

La comprobación no procede, ya que no hay momento torsor.

Resistencia a cortante Z y momento torsor combinados (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.8)

No hay interacción entre momento torsor y esfuerzo cortante para ninguna combinación. Por lo tanto, la comprobación no procede.

Resistencia a cortante Y y momento torsor combinados (CTE DB SE-A, Artículo 6.2.8)

No hay interacción entre momento torsor y esfuerzo cortante para ninguna combinación. Por lo tanto, la comprobación no procede.

