Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas.

Bases en espacios de Banach

Autor: Andrés Sanz Torres

Tutor: Félix Galindo Soto

Índice general

Resumen

Argebraic basis are not suitable for operations involving limits in infinite dimensional normed spaces. Morover, these basis usually cannot be specifically constructed without appeal Zorn's lemma. However, there exist generalized basis, called Schauder basis, on which representation of a vector is obtained as a limit, which represent an essential tool in the theorical and practical study of Banah spaces. Orthonormal basis in Hilbert spaces are a particular example. We explain here the most basic facts about Schauder basis.

En un espacio normado de dimensión infinita las bases algebraicas no son adecuadas, en general, para procesos que involucran un paso al límite. De hecho la prueba de la existencia de tales bases se basa en el lema de Zorn, no siendo, normalmente, posible su construcción, lo que limita de manera notable su utilidad. En este Trabajo de Fin de Grado se trata de estudiar otro tipo de bases, conocidas como bases de Schauder, con las cuales la representación de un vector es obtenida mediante un paso al límite, lo que proporciona una herramienta esencial en el estudio teórico y práctico de los espacios de Banach. Las bases ortonormales en los espacios de Hilbert son un caso particular. Expondremos aquí algunos resultados necesarios para empezar a trabajar con las bases de Schauder.

Introducción

En un espacio normado de dimensión infinita las bases lineales no son adecuadas, en general, para procesos que involucran un paso al límite. De hecho la prueba de la existencia de tales bases se basa en el lema de Zorn, no siendo, normalmente, posible su construcción, lo que limita de manera notable su utilidad. En este Trabajo de Fin de Grado se trata de estudiar otro tipo de bases, conocidas como bases de Schauder, de las cuales un caso particular son las bases ortonormales en espacios de Hilbert, que nos permiten representar los elementos del espacio como suma de una serie en términos de la base y de forma única, lo que proporciona una herramienta esencial en el estudio teórico y práctico de los espacios de Banach.

El contenido de este trabajo se puede enmarcar en el Grado en Matemáticas dentro de la asignatura "Introducción a los espacios de funciones", de carácter obligatorio, y como indica la normativa vigente, con él se pretende hacer patente que el autor ha adquirido el conjunto de competencias, tanto generales como específicas, asociadas al título.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos y un apéndice. En el primer capítulo se hará una introducción a la noción de base de Schauder, una gran parte de los resultados de éste capítulo se puede encontrar en [4] y [2]. Mostraremos la continuidad de los coeficientes, daremos una caracterización de base de Schauder y probaremos que la sucesión de los funcionales coeficiente es una base del subespacio cerrado que genera en el espacio dual. Acabaremos este capítulo probando que todo espacio de Banach con base verifica una cierta propiedad de aproximación. Aunque en este trabajo no trataremos el "problema de la base", el cual plantea si todo espacio separable tiene base, parece necesario mencionar que éste fue un problema abierto durante muchos años hasta que Per Enflo en 1972 probó que la respuesta es negativa construyendo un espacio de Banach separable que no verifica la citada propiedad de aproximación [3].

Dedicaremos el segundo capítulo a exponer algunos ejemplos de bases de espacios de Banach. Comenzaremos con el sistema de Schauder, construido en [6], que es una base de $\mathcal{C}[a,b]$. Después trataremos el sistema de Haar, base de $L^p[0,1]$, importante por su relación con las ondículas. Y finalizaremos el capítulo con el estudio del sistema trigonométrico en los espacios $L^p[-\pi, \pi]$.

En el tercer capítulo se tratarán una clase particular de bases de Schauder que son las bases incondicionales. Comenzaremos hablando de la sumabilidad y la convergencia incondicional, lo que nos servirá, no sólo para motivar el concepto de base incondicional, sino que también nos permitirá dar diferentes caracterizaciones del mismo. Cerraremos el capítulo con algunos ejemplos de bases incondicionales.

En el último capítulo introduciremos el concepto de base equivalente y nos centraremos en los espacios de Hilbert, estudiando las bases de Riesz, las cuales están íntimamente relacionado con las bases ortonormales. Terminaremos hablando de la estabilidad de las bases en espacios de Banach.

La memoria finaliza con un apéndice en el que se relacionan algunos resultados utilizados en el desarrollo del trabajo y cuyo enunciado y demostración son estudiados en alguna de las asignaturas del Grado en Matemáticas.

A lo largo de todo el trabajo $\mathbb{K}$ será el cuerpo de los números reales o complejos, E y F representarán espacios de Banach separables sobre $\mathbb{K}$ y usaremos H para denotar un espacio de Hilbert separable sobre $\mathbb{K}$.

Capítulo 1

Bases de Schauder

1.1. Conceptos básicos

El concepto de base en un espacio de Banach fue introducido por Schauder [6] en 1927, y al igual que en las bases algebraicas, la idea de base consiste en tener una familia de vectores tal que, para cada x del espacio, exista una única representación de éste en términos de la familia, por ejemplo, como combinación lineal de los elementos de la familia como ocurre en el caso algebraico, o como suma de una serie en el caso de espacios de Banach.

Definición 1.1 Diremos que un conjunto numerable $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de elementos de E es una **base de Schauder** de E si para cada $x \in E$ existe una única sucesión $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{K}$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j,$$

donde la convergencia de las sumas parciales viene dada por la norma de E, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\| = 0.$$

De la unicidad de la expresión $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ se deduce que los vectores e_j son linealmente independientes, y por tanto no nulos.

En este trabajo usaremos el término base para referirnos a una base de Schauder si no se especifica otra cosa. En un espacio normado de dimensión finita, una base de Schauder es una base en el sentido algebraico usual.

Proposición 1.2 Si E tiene una base de Schauder, entonces E es separable.

Demostración:

Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base de E. Tenemos que demostrar que existe un subconjunto de E que es denso y numerable. Consideremos

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n,$$

donde $S_n = \{\sum_{j=1}^{n} q_j e_j : q_j \in D\}$ siendo D un conjunto denso y numerable de $\mathbb{K}$ (por ejemplo, $\mathbb{Q}$ en el caso de los reales y $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ en el de los complejos). Identificando S_n con D^n, concluimos que S_n es numerable, y por tanto S también lo es, por ser unión numerable de conjuntos numerables.

Veamos que S es denso en E. Dado $x \in E$, por ser $\mathfrak{B}$ una base de E, existe una sucesión $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Ahora bien, como D es denso, para cada $j = 1, 2, \ldots, N$, existe $q_j \in D$ tal que $|\alpha_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{2N\|e_j\|}$, luego se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{j=1}^{N} q_j e_j \right\| &\leq \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j - \sum_{j=1}^{N} q_j e_j \right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{j=1}^{N} (\alpha_j - q_j) e_j \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j - q_j| \|e_j\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N\|e_j\|} \|e_j\| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, S es numerable y denso en E, luego E es separable. ∎

1.2. Los funcionales coeficiente

Observemos que los coeficientes α_j dependen de x, es decir, $\alpha_j = \alpha_j(x)$, lo cual nos dice que, asociado a la base $\mathfrak{B}$, tenemos una sucesión de funcionales $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ que llamaremos **funcionales coeficiente** asociados a la base $\mathfrak{B}$.

Proposición 1.3 Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base de E. Los funcionales coeficiente asociados a la base $\mathfrak{B}$ son lineales.

Demostración: La linealidad de estos funcionales viene de la linealidad de la 'suma y el producto por escalares junto a la unicidad de la expresión en términos de la base $\mathcal{B}$; veámoslo:

$$\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) e_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(y) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda \alpha_j(x) + \mu \alpha_j(y)) e_j,$$

por lo que ha de ser $\alpha_j(\lambda x + \mu y) = \lambda\alpha_j(x) + \mu\alpha_j(y)$. ■

De hecho, los funcionales coeficiente asociados a una base son continuos. Para probarlo definiremos una nueva norma equivalente a la de E, con la cual será más fácil probar su carácter acotado.

Proposición 1.4 Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base de E. Entonces

$$|||\, x \,||| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j \right\| \tag{1.1}$$

es una norma en E equivalente a $\|\cdot\|$.

Demostración: Para cada $x \in E$ es claro que $|||\, x \,||| < \infty$, porque la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$ converge. Ahora veamos que define una norma:

1. $|||\, x \,||| \geq 0$.

   Es evidente por ser el superior de números reales no negativos.

2. $|||\, x \,||| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

   $|||\, x \,||| = 0$ si, y sólo si, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j\| = 0$, y esto sucede sólo cuando $x = 0$. En efecto, si $x \neq 0$, existe algún $\alpha_j(x) \neq 0$ y si tomamos $j_0 = \text{mín}\{j : \alpha_j(x) \neq 0\}$, se tiene que

$$|||\, x \,||| \geq \left\| \sum_{j=1}^{j_0} \alpha_j(x)e_j \right\| = \|\alpha_{j_0}(x)e_{j_0}\| > 0.$$

3. $|||\, \lambda x \,||| = |\lambda| |||\, x \,|||$.

$$\begin{aligned} |||\, \lambda x \,||| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\lambda x)e_j \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda\alpha_j(x)e_j \right\| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j \right\| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j \right\| = |\lambda| |||\, x \,|||. \end{aligned}$$

4. $|||\, x + y \,||| \leq |||\, x \,||| + |||\, y \,|||$.

$$\begin{aligned} |||\, x + y \,||| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x+y)e_j \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j(x) + \alpha_j(y))e_j \right\| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y)e_j \right\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y)e_j \right\| \right) \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j \right\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y)e_j \right\| = |||\, x \,||| + |||\, y \,|||. \end{aligned}$$

Así hemos probado que $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ es una norma; además: $\|x\| \leq |\!|\!| x |\!|\!|$, pues

$$\|x\| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\| = |\!|\!| x |\!|\!|.$$

Si probamos que $(E, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ es un espacio de Banach, entonces $(E, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ y $(E, \|\cdot\|)$ serán dos espacios de Banach donde $\|x\| \leq |\!|\!| x |\!|\!|$, y por el teorema de la aplicación abierta (corolario A.11), al ser comparables, ambas normas serán equivalentes.

Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy para $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$; veamos que la sucesión es convergente.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, m > N$

$$|\!|\!| x_k - x_m |\!|\!| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \big(\alpha_j(x_k) - \alpha_j(x_m)\big) e_j \right\| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Para simplificar la notación, escribiremos $\alpha_j^{(k)} \equiv \alpha_j(x_k)$. Entonces por (1.2)

$$\begin{aligned} |\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(m)}| \|e_n\| \;&=\; \left\| \sum_{j=1}^{n} \big(\alpha_j^{(k)} - \alpha_j^{(m)}\big) e_j - \sum_{j=1}^{n-1} \big(\alpha_j^{(k)} - \alpha_j^{(m)}\big) e_j \right\| \\ &\leq\; \left\| \sum_{j=1}^{n} \big(\alpha_j^{(k)} - \alpha_j^{(m)}\big) e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \big(\alpha_j^{(k)} - \alpha_j^{(m)}\big) e_j \right\| \\ &\leq\; 2 |\!|\!| x_k - x_m |\!|\!| < 2\varepsilon \qquad \text{para } k, m > N. \end{aligned}$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\|e_n\|$ es una constante positiva, $\{\alpha_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que tiene límite. Llamemos $\alpha_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_n^{(k)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De (1.2) deducimos que existe N tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \big(\alpha_j^{(k)} - \alpha_j^{(m)}\big) e_j \right\| < \varepsilon,$$

para $k, m > N$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Y haciendo $m \to \infty$, obtenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(k)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \varepsilon, \tag{1.3}$$

para $k > N$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado que para cada $n, l \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j e_j \;=\; \sum_{j=1}^{n+l} (\alpha_j - \alpha_j^{(k)}) e_j - \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_j^{(k)}) e_j + \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j^{(k)} e_j,$$

sabemos por (1.3) que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N$ se tiene que

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j e_j \right\| \leq \varepsilon + \varepsilon + \left\| \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j^{(k)} e_j \right\|.$$

Además, puesto que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(k)} e_j$ converge en la norma $\| \cdot \|$ hacia x_k, la serie verifica la condición de Cauchy y, por la desigualdad anterior, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ también lo hace. Por ser $(E, \| \cdot \|)$ completo, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ converge hacia un elemento $x \in E$ para esa norma.

Finalmente, tomando supremos en (1.3),

$$|\!|\!| x_k - x |\!|\!| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(k)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \varepsilon,$$

para todo $k > N$, por lo que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia x en E para la norma $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ y $(E, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ es un espacio de Banach. ■

Definición 1.5 Diremos que un subconjunto A de E es **completo**, si el espacio vectorial generado por los elementos de A es denso en E.

Obviamente, una base de E es un conjunto completo de E.

Proposición 1.6 Una familia completa $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ en E es una base si, y sólo si, existe una constante $K > 0$ tal que para toda sucesión $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{K}$ y para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ se tiene que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \right\| \leq K \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\|.$$

Demostración: Supongamos que $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base. Por la proposición 1.4 existe K tal que $|\!|\!| x |\!|\!| \leq K \|x\|$. Dada una sucesión $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ y dado $n \in \mathbb{N}$, si consideramos $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, tenemos lo pedido pues para $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, se tiene que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \right\| \leq |\!|\!| x |\!|\!| \leq K \|x\| = K \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\|.$$

Para la otra implicación consideremos A el espacio vectorial de los elementos x de E tales que existe $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, sucesión de elementos de $\mathbb{K}$, con $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. Veamos primero que $A = E$. Al ser $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ completa, A es denso en E, luego será suficiente ver que es cerrado. Sean $x \in E$ y $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de A que converge hacia x. Escribamos $x_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(j)} e_k$.

Por hipótesis, para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $n, j, l \in \mathbb{N}$, $n \geq i$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\alpha_i^{(j)} - \alpha_i^{(l)}|\|e_i\| &= \left\| \sum_{k=1}^{i} (\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}) e_k - \sum_{k=1}^{i-1} (\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}) e_k \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{i} (\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}) e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{i-1} (\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}) e_k \right\| \\
&\leq 2K \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}) e_k \right\| \\
&\leq 2K \Bigg(\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(j)} e_k - x_j \right\| + \|x_j - x\| + \\
&\qquad + \|x - x_l\| + \left\| x_l - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(l)} e_k \right\| \Bigg). \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - x_j\| < \varepsilon \qquad \text{para todo } j \geq N.$$

Para $j, l \geq N$, haciendo $n \to \infty$ en (1.4) se tiene que

$$|\alpha_i^{(j)} - \alpha_i^{(l)}|\|e_i\| \leq 4K\varepsilon \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Por lo que para cada i la sucesión $\{\alpha_i^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, y por tanto, convergente. Llamemos α_i a su límite.

Además, dados $m \in \mathbb{N}$ y $j, l \geq N$, si $n \geq m$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}\right) e_k \right\| &\leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}\right) e_k \right\| \\
&\leq K \Bigg(\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(j)} e_k - x_j \right\| + \|x_j - x\| + \\
&\qquad + \|x - x_l\| + \left\| x_l - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(l)} e_k \right\| \Bigg),
\end{aligned}$$

y de nuevo, si $n \to \infty$ se tiene que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k^{(j)} - \alpha_k^{(l)}\right) e_k \right\| < 2K\varepsilon,$$

de donde cuando $l \to \infty$ obtenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k^{(j)} - \alpha_k\right) e_k \right\| \leq 2K\varepsilon \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}, \quad j \geq N.$$

Como para cada $x_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(j)} e_k$ existe N_j tal que si $n > N_j$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(j)} e_k - x_j \right\| < \varepsilon,$$

si tomamos $m \geq \max\{N_N, N\}$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \right\| &\leq \|x - x_N\| + \left\| x_N - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(N)} e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k^{(N)} - \alpha_k \right) e_k \right\| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + 2K\varepsilon = \varepsilon(2K+2). \end{aligned}$$

Luego $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in A$, por lo tanto, A es cerrado y por ser denso $A = E$.

Para probar la unicidad de la representación, basta ver que si $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j = 0$ entonces $\alpha_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $j \in \mathbb{N}$ y $n > j$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\alpha_j| \|e_j\| &= \left\| \sum_{k=1}^{j} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k e_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{j} \alpha_k e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k e_k \right\| \\ &\leq 2K \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|, \end{aligned} \tag{1.5}$$

si $n \to \infty$, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\| = 0,$$

concluimos que $0 \leq |\alpha_j| \|e_j\| \leq 0$, luego $\alpha_j = 0$. ■

Observación 1.7 Dada una base $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de E, con funcionales coeficiente asociados $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, se define el operador **suma parcial** S_n como:

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j. \tag{1.6}$$

Es claro que $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = x$, y también que es lineal, pues por la proposición 1.3 los α_i son lineales.

Además, en virtud de la proposición 1.6, dados $x \in E$ y $n \in \mathbb{N}$, si $n \leq m$, entonces

$$\|S_n(x)\| \leq K \|S_m(x)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} K\|x\|,$$

por lo que para cada $x \in E$, S_n es acotado, por lo tanto continuo. Además la cota de la norma no depende de n.

Corolario 1.8 Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base de E. Entonces los funcionales coeficiente $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ asociados a la base $\mathfrak{B}$ son lineales y continuos. De hecho, existe una constante $M > 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$1 \leq \|e_j\| \|\alpha_j\| \leq M.$$

Demostración: La linealidad ya la vimos en la proposición 1.3, por lo que veamos que son acotados. Si escribimos $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$, entonces por la proposición 1.6, para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $n \geq j$ se tiene que

$$|\alpha_j(x)|\|e_j\| = \left\| \sum_{k=1}^{j} \alpha_k(x)e_k - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k(x)e_k \right\| \leq 2K \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)e_k \right\|,$$

de donde haciendo $n \to \infty$ se tiene que

$$|\alpha_j(x)| \leq \frac{2K}{\|e_j\|}\|x\|, \tag{1.7}$$

luego α_i es un funcional acotado y por lo tanto continuo.

Para ver que existe $M > 0$ tal que $1 \leq \|e_j\|\|\alpha_j\| \leq M$, de (1.7), se deduce que $\|\alpha_j\| \leq \frac{2K}{\|e_j\|}$, por lo que $\|e_j\|\|\alpha_j\| \leq 2K$. La otra desigualdad es trivial pues

$$1 = \alpha_j(e_j) \leq \|e_j\|\|\alpha_j\|.$$

■

1.3. Dualidad

Supongamos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de E y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la familia de funcionales coeficiente asociada. Podemos preguntarnos si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ es una base de E', el espacio dual de E. No siempre será así, pues puede ser que E' no sea separable, por ejemplo si $E = L^1$. En esta sección estudiaremos cuando sí será una base.

Definición 1.9 Sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E y $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E'. Diremos que $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ son **biortogonales** si

$$f_k(x_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Corolario 1.10 Sean $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base de E, y $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E'. Entonces $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ es la sucesión de los funcionales coeficiente asociados a la base $\mathfrak{B}$ si, y sólo si, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ constituyen un sistema biortogonal.

Demostración: Si $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales coeficiente asociados a la base $\mathfrak{B}$, como $e_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(e_j)e_j$, el hecho de que se tenga que

$$f_k(e_j) = \delta_{k,j}$$

es simplemente debido a la unicidad de la expresión en términos de la base.

Recíprocamente si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ constituyen un sistema biortogonal, si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ son los funcionales coeficiente asociados a la base $\mathfrak{B}$, entonces para todo $x \in E$

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) e_j \\ f_k(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_k(e_j) = \alpha_k(x) f_k(e_k) = \alpha_k(x). \end{aligned}$$

■

De éste último resultado es sencillo deducir que los funcionales coeficiente $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ son linealmente independientes. Obviamente, en general no podemos esperar que $\{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\}$ sea una base de E', pues puede ocurrir que E' no sea separable. Lo que ocurre es que $\{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una base del subespacio cerrado que genera. En la demostración de este hecho, usaremos el operador traspuesto de los operadores suma parcial, cuya definición recordaremos a continuación.

Definición 1.11 Sea T un operador lineal y continuo de E en F. Se denomina **traspuesto** de T a la aplicación $T' : F' \to E'$ dada por

$$T'(f)(x) = f(T(x)) \qquad \text{para todos } x \in E, f \in F'$$

Es sencillo comprobar que $T'(f)$ es lineal, pues tanto f como T lo son. Además se tiene que

$$|T'(f)(x)| = |f(T(x))| \leq \|f\| \|T(x)\| \leq \|f\| \|T\| \|x\|, \tag{1.8}$$

por lo que $T'(f) \in E'$ y por tanto T' está bien definido.

Proposición 1.12 Sea T un operador lineal y continuo de E en F. Su operador traspuesto T' es un operador lineal y continuo. Además, verifica que $\|T\| = \|T'\|$.

Demostración: La linealidad es sencilla de comprobar pues. Además como vimos en 1.8

$$|T'(f)(x)| \leq \|f\| \|T\| \|x\|,$$

entonces $\|T'(f)\| \leq \|f\| \|T\|$, luego T es un operador acotado y $\|T'\| \leq \|T\|$.

Por otro lado en virtud del teorema de Hahn-Banach (cololario A.3), se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sup\{|f(T(x))| : f \in F', \|f\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|T'(f)(x)| : f \in F', \|f\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T'(f)\| \|(x)\| : f \in F', \|f\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T'\| \|f\| \|(x)\| : f \in F', \|f\| \leq 1\} \leq \|T'\| \|x\|, \end{aligned}$$

por lo que $\|T\| = \|T'\|$. ■

Teorema 1.13 Sean $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base de E, y $\{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\}$ los funcionales coeficiente asociados a la base $\mathfrak{B}$. Entonces:

(i) La familia $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de $\overline{\langle \alpha_j \rangle}$, el subespacio vectorial cerrado que generan.

(ii) Si E es reflexivo, entonces $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de E'. Además $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ son los funcionales coeficiente asociados a la base, vistos como elementos de E''.

Demostración:

(i) Dada $f \in \overline{\langle \alpha_j \rangle}$ veamos que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n)\alpha_n$. Sean S_n los operadores suma parcial definidos en (1.6). Si consideramos su traspuesto S_n', entonces para todo $f \in E'$ se tiene que

$$\begin{aligned} S_n'(f)(x) &= f(S_n(x)) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)f(e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\alpha_i\right)(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, luego $S_n'(f) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\alpha_i$ para toda $f \in E'$.

Veamos que $S_n'(f) \to f$ para toda $f \in \overline{\langle \alpha_j \rangle}$. Si $f \in \langle \alpha_j \rangle$, digamos $f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\alpha_j$,entonces por ser los $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ linealmente independientes, para todo $n \geq m$ se tiene que

$$S_n'(f) = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\alpha_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\alpha_j = f,$$

luego trivialmente se da la convergencia.

Como vimos en la observación 1.7, existe $M > 0$ tal que $\|S_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $f \in \overline{\langle \alpha_j \rangle}$ arbitrario y dado $\varepsilon > 0$ existe $g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\alpha_i$ tal que $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{M+1}$. Luego para todo $n \geq m$, como $S_n'(g) = g$,

$$\begin{aligned} \|S_n'f - f\| &\leq \|S_n'f - S_n'g\| + \|S_n'g - g\| + \|g - f\| \\ &= \|S_n'f - S_n'g\| + \|g - f\| \leq \|S_n'\|\|f - g\| + \|f - g\| \\ &= \|S_n\|\|f - g\| + \|f - g\| \leq (M+1)\|f - g\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego todo elemento de $\overline{\langle \alpha_j \rangle}$ tiene al menos una representación de la forma $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\alpha_i$, pero como al evaluar en e_n se tiene que $f(e_n) = \lambda_n$, dicha representación es de hecho única, por lo que $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de $\overline{\langle \alpha_j \rangle}$, y $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales coeficiente asociada a ella.

(ii) En virtud de el apartado *(i)* basta con ver que $\{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\}$ es completo en E'.

De no ser completo, existiría $f \in E'$, $f \notin \overline{\langle \alpha_j \rangle}$, luego, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach (corolario A.4), existiría $y \in E''$, tal que $y(g) = 0$ para todo $g \in \overline{\langle \alpha_j \rangle}$ e $y(f) \neq 0$, veamos que esto no es posible.

Supongamos que $y \in E''$ y que $y(g) = 0$ para todo $g \in \overline{\langle \alpha_j \rangle}$, en consecuencia, $y(\alpha_n) = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ Tenemos que probar que entonces $y = 0$. Sea P la aplicación canónica de E en E'' dada por

$$(Px)(f) = f(x)$$

para $f \in E'$ y $x \in E$. Como E es reflexivo, entonces $y = Px$ para algún $x \in E$, por lo tanto $\alpha_n(x) = Px(\alpha_n) = y(\alpha_n) = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ Como $\{e_n\}$ es una base, se tiene que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) e_n = 0$, por lo que $y = P(x) = 0$.

■

Corolario 1.14 Si H es un espacio de Hilbert y $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de H, existe una única familia $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de H tal que

$$\langle e_j, v_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Además, $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de H.

Demostración: Sea $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ la sucesión de los funcionales coeficiente, que por el teorema de representación de Riesz A.16, existe una única sucesión $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\alpha_j = \langle \cdot, v_j \rangle$.

El corolario 1.10, nos garantiza la unicidad y que $\langle e_j, v_k \rangle = \delta_{j,k}$. El hecho de que $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ sea una base de H es consecuencia del teorema previo, pues todo espacio de Hilbert es reflexivo. ■

1.4. Propiedad de aproximación

Como vimos en la proposición 1.2, un espacio de Banach que tenga una base es necesariamente separable. El recíproco en general no es cierto, no todos los espacios de Banach separables tienen base; el primer ejemplo de un espacio de Banach separable sin base fue construido por Enflo [3] en 1973, encontrando un espacio de Banach separable que no cumple la propiedad de aproximación que ahora definiremos.

Definición 1.15 Decimos que un espacio de Banach E posee la **propiedad de aproximación** si existe sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de operadores continuos de rango finito que aproximan uniformemente al operador identidad en los compactos de E.

Proposición 1.16 Todo espacio de Banach con base posee la propiedad de aproximación.

Demostración: Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base del espacio de Banach E, con funcionales coeficiente asociados $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$. Consideremos la sucesión de operadores suma parcial $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidos en 1.6, donde, recordemos

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)e_i \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$$

Veamos que estos operadores, que son de rango finito, y continuos, aproximan a la identidad en los compactos de E.

Sean C un compacto de E y $\varepsilon > 0$. Por ser C precompacto existen $x_1, \ldots, x_n \in E$ tales que

$$C \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_m, \varepsilon).$$

Para $k = 1, \ldots, m$, consideremos N_k tal que

$$\|S_n(x_k) - x_k\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x_k)e_j - x_k \right\| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N_k,$$

y sea $N = \text{máx}\{N_1, \ldots, N_m\}$. Para cada $x \in C$ existe $i = i(x)$ tal que $\|x_i - x\| < \varepsilon$, además, por construcción $\|S_n(x_i) - x_i\| < \varepsilon$ si $n \geq N$, y por la acotación de los S_n (vista en la observación 1.7) se tiene que

$$\|S_n(x) - S_n(x_{i_0})\| = \|S_n(x - x_{i_0})\| \leq M\|x - x_{i_0}\| < M\varepsilon.$$

Por tanto para $n \geq N$ se tiene que

$$\|S_n(x) - x\| \leq \|S_n(x) - S_n(x_i)\| + \|S_n(x_i) - x_i\| + \|x_i - x\| > (M + 2)\varepsilon,$$

es decir, E posee la propiedad de aproximación. ■

Como consecuencia de este resultado, si E no posee la propiedad de aproximación, entonces E no tiene base.

Capítulo 2

Ejemplos

Es conocido que un sistema ortonormal y completo $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert separable H es una base de Schauder. Es sencillo comprobar que los funcionales coeficiente asociados vienen dados por el producto interno de H de la forma siguiente, $\alpha_i = \langle \cdot, e_i \rangle$. En esta sección proporcionaremos otros ejemplos en los espacios de Banach más conocidos, como los espacios L^p o el espacio de las funciones continuas.

Proposición 2.1 Consideremos las sucesiones $e_j = \{\delta_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\ell^p(\mathbb{N})$, para $1 \leq p < \infty$, con su norma $\|\cdot\|_p$, y también lo es para c_0 con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración: Dado $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{N})$, con $1 \leq p < \infty$, se tiene que

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \Big\|_p = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k e_k \Big\|_p = \big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \big)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

pues $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ y estamos tomando el resto de una serie convergente.

Si $x \in c_0$, como $\lim_{k\to\infty} |x_k| = 0$, entonces $\sup_{k>n} |x_k| \to 0$ si $n \to \infty$, y por tanto se tiene que

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \Big\|_\infty = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k e_k \Big\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La unicidad se deduce de que en ambos casos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$.
■

Esta base se conoce como la **base natural** de los espacios c_0 y $\ell^p(\mathbb{N})$, con $1 \leq p < \infty$.

Es sencillo comprobar que si añadimos la sucesión $e_0 = (1, 1, 1, \ldots)$, entonces $\{e_j : j = 0, 1, 2, \ldots\}$ es una base de c. En efecto, dado $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in c$, si $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ entonces $x - le_0 \in c_0$ y tiene una única representación en términos de la base $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de c_0.

Hemos de tener en cuenta que no nos podemos plantear el problema anterior para $\ell^\infty(\mathbb{N})$ pues no es separable, por tanto, en virtud de 1.2 no tiene base.

2.1. El sistema de Schauder

El siguiente ejemplo fue construido por Schauder en [6], es la primera base, en el sentido de Schauder, del espacio $\mathcal{C}[a,b]$.

Proposición 2.2 El espacio $\mathcal{C}[a,b]$ tiene base.

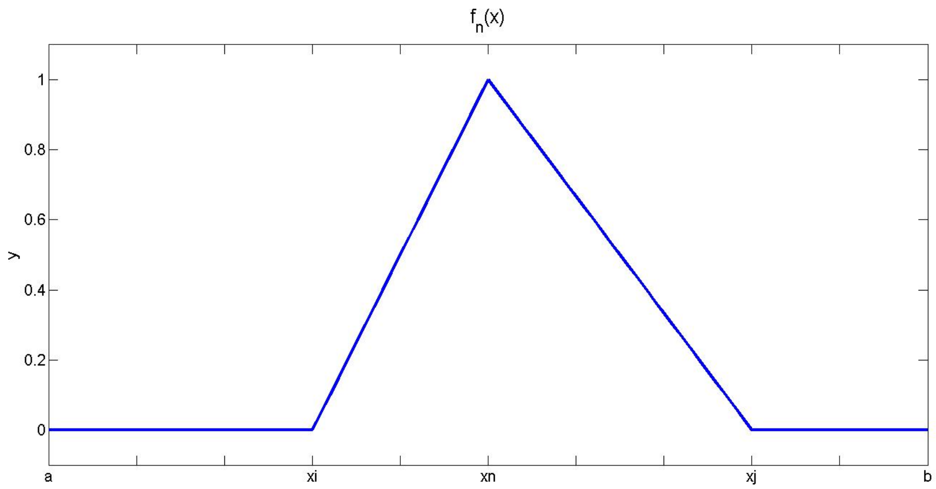
Demostración: La demostración será constructiva. Sea $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ un subconjunto denso y numerable de $[a,b]$ con $x_0 = a$, $x_1 = b$, y sean

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Si $n \geq 2$ el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ genera una partición de $[a,b]$ en intervalos abiertos disjuntos, de los cuales uno debe contener a x_n, al cual llamaremos I. Consideremos la función f_n continua en $[a,b]$, lineal el los subintervalos que define la partición y tal que

$$f_n(x_k) = 0; \;\; k = 1, \ldots, n-1; \quad f_n(x_n) = 1.$$

Observemos que $f_n(x) = 0$ si $x \notin I$.



Gráfica de la función f_n, donde $I = [x_i, x_j]$.

La sucesión $\{f_n : n = 0, 1, \ldots\}$ es una base de $\mathcal{C}[a,b]$. Para probarlo, consideremos funcionales definidos por recurrencia de la siguiente manera:

$$\alpha_0(f) = f(x_0), \qquad \alpha_{n+1}(f) = f(x_{n+1}) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(f) f_i(x_{n+1}). \tag{2.1}$$

Es sencillo comprobar que $S_n f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(f) f_i$ es una poligonal de vértices $x_0, \ldots, x_n$, pues $f_0, \ldots, f_n$ lo son, y que coincide con f en dichos vértices, pues despejando f_{n+1} de (2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} S_n f(x_0) &= \alpha_0 f_0(x_0), \\ S_n f(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(f) f_i(x_k) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i(f) f_i(x_k) = f(x_k). \end{aligned}$$

Veamos que $S_n f$ converge hacia f uniformemente en $[a,b]$. Por ser $[a,b]$ compacto, las funciones continuas son uniformemente continuas, por lo que dados $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(f,\varepsilon) > 0$ tal que si $x, y \in [a,b]$, con $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_N$ forman una partición de $[a,b]$ con diámetro menor que δ. De esta forma, para $n \geq N$, dado $x \in [a,b]$ existen $0 \leq i, j, \leq n$ tales que $x \in [x_i, x_j]$ siendo $[x_i, x_j]$ un intervalo de la partición y, por tanto, $|x_i - x_j| < \delta$. Entonces,

$$|S_n f(x_i) - S_n f(x)| \leq |S_n f(x_i) - S_n f(x_j)| = |f(x_i) - f(x_j)| < \varepsilon,$$

de donde se deduce que

$$|f(x) - S_n f(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |S_n f(x_i) - S_n f(x)| < 2\varepsilon.$$

Con esto hemos probado que $\|f - S_n f\|_\infty \leq 2\varepsilon$ si $n \geq N$ y, en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(f) f_j - f \right\|_\infty = 0,$$

es decir $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(f) f_j$.

Veamos que la representación es única. Si $f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j f_j$ en $\mathcal{C}[a,b]$, puesto que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sum_{nj=0}^{\infty} \lambda_j f_j(x_0) = \lambda_0 f_0(x_0) = \lambda_0, \\ f(x_k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j f_j(x_k) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j f_j(x_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j f_j(x_k) + \lambda_k \text{ si } k \geq 1, \end{aligned}$$

teniendo así, de acuerdo con (2.1), que $\lambda_k = \alpha_k(f)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$. ∎

Acabamos de probar que $\mathcal{C}[a,b]$ tiene base. Por otro lado, en virtud del teorema de aproximación de Weierstrass, sabemos que el conjunto de los polinomios es denso en $\mathcal{C}[a,b]$, lo que implica que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es una familia completa en $\mathcal{C}[a,b]$. Resulta natural preguntarse si es una base. La respuesta es negativa, como veremos en el siguiente resultado (véase [7]).

Proposición 2.3 Dada $g \in \mathcal{C}[a,b]$ entonces $\{g^n\}_{n=0}^{\infty}$ no es una base de $\mathcal{C}[a,b]$.

Demostración: Supongamos que sí lo es. Sea $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de funcionales coeficiente asociados a la base.

Si g no se anulase en $[a,b]$, $f = \frac{1}{g} \in \mathcal{C}[a,b]$, entonces

$$f = \frac{1}{g} = \alpha_0(f) + \alpha_1(f) g + \ldots + \alpha_n(f) g^n + \ldots$$

Como g esta acotada en $[a,b]$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(f)g^{j+1}(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$, por lo que

$$g^0 = 1 = \alpha_0(f)g + \ldots + \alpha_n(f)g^{n+1} + \ldots$$

Luego la función 1 tiene dos desarrollos distintos en términos de la base, pues en uno el coeficiente $\alpha_0(f)$ es uno, mientras que en el otro es 0. Esto implica que $\{g^n\}_{n=0}^{\infty}$ no es una base, por lo tanto g se debe anular en algún punto.

Si g se anulara en dos puntos distintos, $g(t_1) = g(t_2) = 0$, y consideramos $f \in \mathcal{C}[a,b]$, con $f(t_1) \neq f(t_2)$, entonces

$$\begin{aligned} f(t_1) &= \alpha_0(f) + \alpha_1(f)g(t_1) + ... + \alpha_n(f)g^n(t_1) + ... = \alpha_0(f), \\ f(t_2) &= \alpha_0(f) + \alpha_1(f)g(t_2) + ... + \alpha_n(f)g^n(t_2) + ... = \alpha_0(f), \end{aligned}$$

llegando a un absurdo. En consecuencia, g se anula sólo en un punto.

Sea $t_0 \in [a,b]$ el único punto donde se anula g. Consideremos φ definida por:

$$\varphi(t) = \begin{cases} g(t)\sin\left(\frac{1}{t-t_0}\right) & \text{si } t \neq t_0, \\ 0 & \text{si } t = t_0. \end{cases}$$

Esta función es continua en $[a,b]$. Si $t \neq t_0$ es obvio, y en t_0 es continua pues $\sin\left(\frac{1}{t-t_0}\right)$ es acotada y $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Entonces, se puede escribir

$$\varphi = \alpha_0(\varphi) + \alpha_1(\varphi)g + ... + \alpha_n(\varphi)g^n + ...$$

Tras evaluar en $t = t_0$ en la identidad anterior, deducimos que necesariamente $\alpha_0(\varphi) = 0$. Luego si $t \neq t_0$ se tiene

$$\varphi(t) = g(t)\sin\left(\frac{1}{t-t_0}\right) = \alpha_1(\varphi)g(t) + \alpha_2(\varphi)g^2(t) + ... + \alpha_n(\varphi)g^n(t) + ...$$

y por tanto

$$\sin\left(\frac{1}{t-t_0}\right) = \alpha_1(\varphi) + \alpha_2(\varphi)g(t) ... + \alpha_{n-1}(\varphi)g^n(t) + ... \tag{2.2}$$

Veamos que el lado derecho es continuo en $t = t_0$ y al no serlo $\sin\left(\frac{1}{t-t_0}\right)$ habremos llegado a una contradicción.

Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varphi)g(t)^n$ converge, además, por ser g continua y $[a,b]$ compacto, existe $s_0 \in [a,b]$ tal que

$$|g(s_0)| = \max\{|g(t)| : t \in [a,b]\} > 0.$$

De modo que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varphi)z^n$ tiene radio de convergencia $R \geq |g(s_0)|$. Además para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varphi)z^n \quad \text{converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\varphi)z^{n-1} \quad \text{converge},$$

luego el radio de convergencia de la segunda será también R. Si consideramos la función $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\varphi) z^{n-1}$ que sabemos que es continua en $B(0,R)$, como $z_0 = g(t_0) = 0 \in B(0,R)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\varphi) g^{n-1}(t) = G(g(t))$$

es continua en t_0, por ser composición de funciones continuas, llegando así a la contradicción con (2.2). ■

2.2. El sistema de Haar

El siguiente ejemplo, conocido como sistema de Haar, proporciona una base para los espacios $L^p[0,1]$ con $1 \leq p < \infty$.

Proposición 2.4 Se definen funciones de Haar $\{f_i : i = 0,1,2,\ldots\}$, que están definidas en $[0,1]$ por

$$f_0(t) = 1,$$
$$f_{2^m+k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} & \text{para } t \in \left[\dfrac{2k}{2^{m+1}}, \dfrac{2k+1}{2^{m+1}}\right), \\ -2^{\frac{m}{2}} & \text{para } t \in \left[\dfrac{2k+1}{2^{m+1}}, \dfrac{2k+2}{2^{m+1}}\right), \\ 0 & \text{en otro caso }, \end{cases}$$
$$(m = 0,1,2,\ldots; k = 0,2,\ldots,2^k - 1).$$

El sistema de Haar $\{f_i : i = 0,1,2,\ldots\}$, es una base de $L^p[0,1]$ para $p \geq 1$.

Demostración: Para simplificar la notación llamaremos $I(k,m) = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$. Observemos que $I(k,m) = I(2k, m+1) \cup I(2k+1, m+1)$. Entonces

$$f_0(t) = 1,$$
$$f_{2^m+k}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \chi_{I(2k,m+1)} - 2^{\frac{m}{2}} \chi_{I(2k+1,m+1)},$$
$$(m = 0,1,2,\ldots; k = 0,2,\ldots,2^k - 1),$$

Para probar el resultado aplicaremos la proposición 1.6, luego veamos que es un sistema completo y que $\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \|_p \leq \| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k \|_p$ si $n \leq m$.

Sea $f \in L^p[0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{C}[0,1]$ es denso en $L^p[0,1]$ existe $g \in \mathcal{C}[0,1]$ tal que $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Por ser $[0,1]$ compacto, g es uniformemente continua, luego existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m} < \delta$, y consideremos la partición de $[0,1]$ dada por los puntos $\frac{k}{2^m}$ con $0 \leq k \leq 2^m$. La función escalonada

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2^m - 1} g\Big(\frac{k}{2^m}\Big) \chi_{I(k,m)}$$

verifica que
$$\|g-P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)-P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
luego
$$\|g-P\|_p = \left(\int_0^1 |g(x)-P(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$
Por tanto
$$\|f-P\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-P\|_p < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Veamos a continuación que P es combinación lineal de las funciones de Haar, teniendo así la completitud. Para ello veamos que las funciones $\chi_{I(k,m)}$ con $m \in \mathbb{N}$ y $k = 0,\dots,2^m-1$ son combinación lineal de estas. Hagámoslo por inducción sobre m; para $m=0$ y $k=0$, es cierto pues tenemos $f_0 = 1 = \chi_{[0,1)}$.

Supongámoslo cierto para un $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y veamos que es también cierto para $m+1$. Sea $0 \leq k \leq 2^{m+1}-1$; entonces, $I(k,m+1) \subset I(l,m)$ con $0 \leq l \leq 2^m-1$. Tenemos dos posibilidades:

Si $k=2l$, entonces
$$2\chi_{I(k,m+1)} = \chi_{I(l,m)} + \left[\chi_{I(2l,m+1)} - \chi_{I(2l+1,m+1)}\right] = \chi_{I(l,m)} + 2^{-\frac{m}{2}} f_{2^m+l}.$$
Si $k=2l+1$, entonces
$$2\chi_{I(k,m+1)} = \chi_{I(l,m)} - \left[\chi_{I(2l,m+1)} - \chi_{I(2l+1,m+1)}\right] = \chi_{I(l,m)} - 2^{-\frac{m}{2}} f_{2^m+l}.$$
En ambos casos concluimos puesto que por hipótesis de inducción sabemos que $\chi_{I(l,m)}$ es combinación lineal de las cunciones de Haar.

Sea ahora una sucesión arbitraria $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$; veamos que
$$\left\|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k\right\|_p^p \leq \left\|\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k\right\|_p^p.$$
Si $n+1 = 2^m+l$ con $0 \leq l \leq 2^m-1$ entonces $f_{n+1}(t) = 0$ salvo para $t \in I = I(l,m)$, por lo que
$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t)\right|^p dt &= \int_{t\in I} \left|\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t)\right|^p dt + \int_{t\notin I} \left|\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t)\right|^p dt \\ &= \int_{t\in I} \left|\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t)\right|^p dt + \int_{t\notin I} \left|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k(t)\right|^p dt.\end{aligned}$$
Sabemos que $f_1,\dots,f_n$ son constantes en I. Si llamamos c al valor que toma $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t)$ en todo el intervalo, y siendo d y $-d$ los que toma $\alpha_{n+1}f_{n+1}(t)$ en cada subintervalo $I_1 = I(2l,m+1)$ y $I_2 = I(2l+1,m+1)$ respectivamente, por convexidad de la función $\varphi(x) = x^p$ en $\mathbb{R}^+$ se tiene que
$$\begin{aligned}|c|^p &= \left|\frac{1}{2}(c+d) + \frac{1}{2}(c-d)\right|^p \leq \left(\frac{1}{2}|c+d| + \frac{1}{2}|c-d|\right)^p \\ &\leq \frac{1}{2}|c+d|^p + \frac{1}{2}|c-d|^p = \frac{1}{2}(|c+d|^p + |c-d|^p),\end{aligned}$$

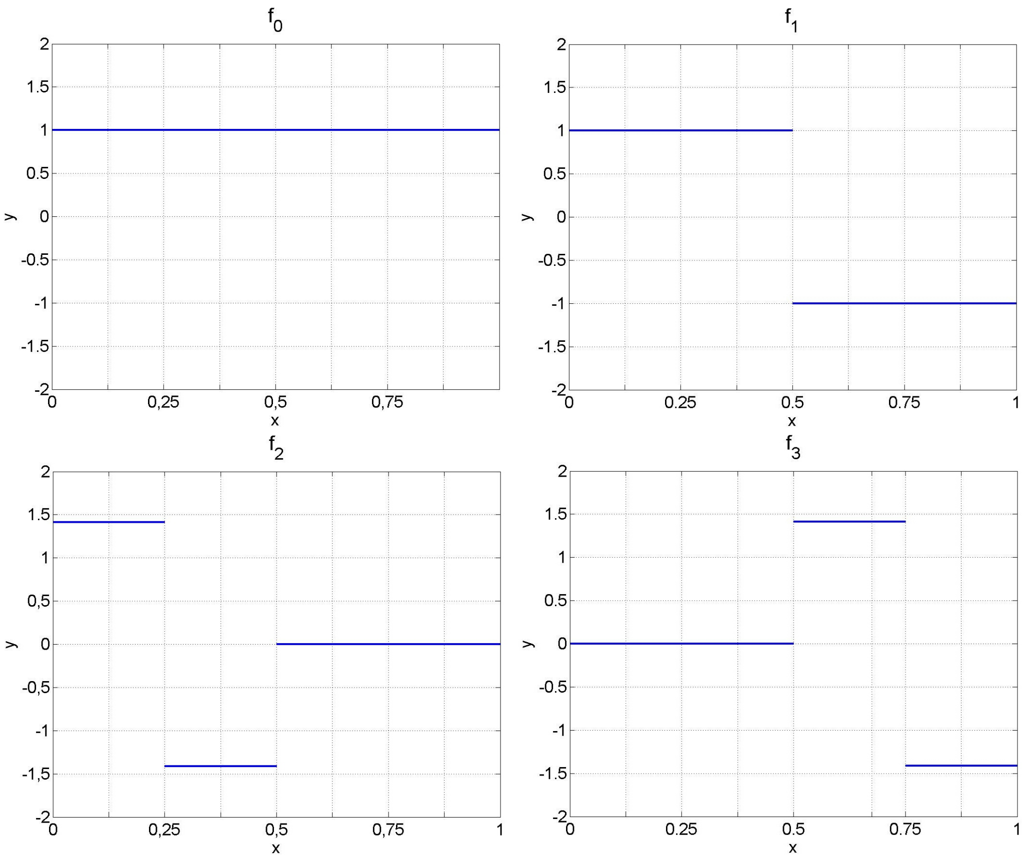
y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{t\in I}\left|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k f_k(t)\right|^p dt &= \int_{I_1}|c+d|^p dt+\int_{I_2}|c-d|^p dt\\ &= \frac{1}{2^{m+1}}(|c+d|^p+|c-d|^p)\\ &\geq \frac{2}{2^{m+1}}|c|^p=\int_{t\in I}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(t)\right|^p dt.\end{aligned}$$

Es decir, $\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|_p \leq \|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k f_k\|_p$. Razonando por inducción, dados $m\leq n$ se tiene que

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k f_k\right\|_p \leq \left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\right\|_p,$$

por lo que estamos en las condiciones de la proposición 1.6, y concluimos que el sistema de Haar es una base de $L^p[0,1]$. ∎



Las cuatro primeras funciones de Haar.

Es importante señalar que las funciones de Haar verifican la siguiente condición de *"ortonormalidad"*:

$$\int_0^1 f_n(x)f_m(x)dx=0 \text{ si } n\neq m \qquad \int_0^1 f_n^2(x)dx=1$$

por lo que el sistema de Haar es un sistema ortonormal y completo en el espacio de Hilbert $L^2[0,1]$. Estas condiciones hacen muy sencillo calcular los funcionales coeficiente asociados a esta base:

$$\alpha_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x) dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Además, también se verifica que f_n con $n = 1, 2, \ldots$ se consigue mediante traslación y dilatación de f_1 de la siguiente manera:

$$f_{2^m+k}(t) = 2^{\frac{m}{2}} f_1\Big(2^m\Big(t - \frac{k}{2^m}\Big)\Big).$$

Esta propiedad es relevante, pues estamos viendo que f_1 es una ondícula.

2.3. El sistema trigonométrico

El sistema trigonométrico, $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$, es una base de los espacios $L^p[0,2\pi]$ con $1 < p < \infty$. Aunque no presentaremos la demostración completa (que se puede encontrar en [5]). Para terminar esta sección veremos algunos resultados encaminados a demostrar este hecho.

Representamos por S_n al operador definido por:

$$S_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt},$$

siendo $\hat{f}(j)$ el j-ésimo coeficiente de Fourier de f. Cada S_n es un operador acotado, pues por las propiedades dadas en la definición A.22

$$\|S_n(f)\|_p = \left\| \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt} \right\| \leq \sum_{j=-n}^{n} |\hat{f}| \leq \frac{2n}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_p.$$

Observemos que el sistema trigonométrico es una base de $L^p[0,2\pi]$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = f$ en $L^p[0,2\pi]$.

Por simplificar la notación, en los siguientes resultados de esta sección escribiremos $L^p = L^p[0,2\pi]$.

Proposición 2.5 Sea $1 \leq p < \infty$. La sucesión $\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en la norma de L^p para todo $f \in L^p$ si, y sólo si, existe una constante C tal que

$$\|S_n(f)\|_p \leq C\|f\|_p \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y para toda } f \in L^p.$$

Demostración: Si la sucesión $\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f para todo $f \in L^p$ entonces para cada $f \in L^p$, tomando n suficientemente grande podemos hacer $\|S_n(f)\|_p < \|f\|_p + 1 < \infty$. Por tanto como los S_n son operadores acotados y $\sup\{\|S_n(f)\|_p : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, en virtud del teorema de Banach-Steinhaus, existe $C > 0$ tal que $\|S_n\|_p \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que se tiene lo pedido.

Recíprocamente, supongamos que $\|S_n(f)\|_p \leq C\|f\|_p$ para todo $f \in L^p$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por densidad de los polinomios trigonométricos en L^p, existe P polinomio trigonométrico tal que

$$\|f - P\|_p < \frac{\varepsilon}{C+1},$$

por lo que, si n es mayor que el grado de P, y por tanto $S_n(P) = P$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_p &\leq \|S_n(f) - S_n(P)\|_p + \|P - f\|_p \\ &= \|S_n(f - P)\|_p + \|P - f\|_p \\ &\leq \|S_n\|\|f - P\|_p + \|f - P\| \\ &\leq (C+1)\|P - f\|_p < \varepsilon \end{aligned}$$

luego $\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en L^p. ■

Proposición 2.6 El sistema trigonométrico $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ no constituye una base de L^1.

Demostración: Veamos que $\lim_{n\to\infty} \|S_n\|_1 = \infty$, y en virtud de la proposición 2.5, obtendremos que en L^1 el sistema trigonométrico no es una base.

En lo que sigue usaremos las propiedades de los núcleos de Dirichlet y Fejér citadas en la proposición A.25.

Si D_n son los núcleos de Dirichlet, puesto que $S_n(f) = f * D_n$, y además $\|f * D_n\|_1 \leq \|f\|_1\|D_n\|_1$, se tiene que $\|S_n\|_1 \leq \|D_n\|_1$.

Si K_m los núcleos de Fejér. Puesto que $\|K_m\|_1 = 1$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|S_n\|_1 \geq \|S_n(K_m)\|_1 = \|D_n * K_m\|_1 = \|\sigma_m(D_n)\|_1.$$

Como $\lim_{m\to\infty} \sigma_m(D_n) = D_n$, entonces se tiene que $\|S_n\|_1 \geq \|D_n\|_1$ luego $\|S_n\|_1 = \|D_n\|_1$. En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} \|S_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty$ y se tiene lo pedido. ■

Un problema relacionado con la convergencia de $\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ hacia f es la conjugación. Dada una serie trigonométrica, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, su **conjugada** es la serie $-i\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) a_n e^{int}$, donde $\operatorname{sgn}(n)$ es el signo de n. Si $f \in L^1$ y la conjugada de $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt}$ (su serie de Fourier), es la serie de Fourier de alguna función $g \in L^1$ entonces llamaremos a g **función conjugada** de f, y la denotaremos por $\tilde{f}$.

Los espacios L^p, con $1 < p < \infty$, admiten conjugación, es decir, para cada $f \in L^p$, su conjugada $\tilde{f}$ está bien definida y pertenece a L^p. La demostración de este hecho se puede encontrar en [5]. Admitiremos esta propiedad sin demostrarla y veremos que el sistema trigonométrico es una base de L^p, con $1 < p < \infty$.

Lema 2.7 La aplicación que envía f a $\tilde{f}$ es un operador lineal y acotado en L^p.

Demostración: La linealidad es evidente. Para ver el carácter acotado o, equivalentemente, su continuidad, apliquemos el teorema del grafo cerrado, es decir, veamos que si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = g$, entonces $g = \tilde{f}$.

Notemos que si $f_n \to f$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Entonces, en virtud del lema A.22, para todo $n \geq N$, y todo $j \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{f}_n(j) - \hat{f}(j)| = |(\widehat{f_n - f})(j)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}\|f_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}},$$

luego $\hat{f}_n(j) \to \hat{f}(j)$.

Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{g}(j) &= \lim_{n\to\infty} \hat{\tilde{f}}_n(j) = \lim_{n\to\infty} -i\,\mathrm{sgn}(j)\hat{f}_n(j) \\ &= -i\,\mathrm{sgn}(j)\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(j) = -i\,\mathrm{sgn}(j)\hat{f}(j) = \hat{\tilde{f}}(j) = 2.\end{aligned}$$

Como $\hat{g}(j) = \hat{\tilde{f}}(j)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, por el teorema de unicidad A.23 ha de ser $g = \tilde{f}$. ∎

Observación 2.8 En virtud del resultado anterior, la aplicación

$$f \mapsto f^c = \frac{1}{2}\hat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\tilde{f}) \tag{2.3}$$

define un operador lineal y acotado en L^p. La linealidad es sencilla, y la acotación se debe a la acotación de $\tilde{f}$. Pues si $\|\tilde{f}\| \leq C\|f\|$, entonces

$$2\|f^c\|_p = \|\hat{f}(0) + (f + i\tilde{f})\|_p \leq \|\hat{f}(0)\|_p + \|f\|_p + \|i\tilde{f}\|_p \leq (1 + 1 + C)\|f\|_p,$$

además, la serie de Fourier de f^c es $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt}$.

Del mismo modo, si la aplicación $f \mapsto f^c$ está bien definida en L^p, siendo f^c la función cuya serie de Fourier es $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt}$, entonces L^p admite conjugación, pues $\tilde{f} = -i(2f^c - f - \hat{f}(0))$, que está bien definida.

Además, por el lema anterior tendríamos que $f \mapsto \tilde{f}$ está acotado y por tanto $f \mapsto f^c$ también lo será.

Proposición 2.9 Para $1 \leq p < \infty$, la sucesión $\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en L^p si, y sólo si, L^p admite conjugación.

Demostración: Observemos primero que para toda $f \in L^p$ y todo $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $e^{int}f \in L^p$ y $\|e^{int}f\|_p = \|f\|_p$.

En virtud de la proposición 2.5 y la observación 2.8, basta probar que la aplicación $f \mapsto f^c$ está bien definida en L^p si, y sólo si, los operadores S_n están uniformemente acotados.

Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|S_n\| \leq C$, y definamos el operador S_n^c como

$$S_n^c(f) = \sum_{j=0}^{2n} \hat{f}(j)e^{ijt} = e^{int}\left(\sum_{j=0}^{2n} \hat{f}(j)e^{i(j-n)t}\right) = e^{int}S_n(e^{-int}f).$$

De esta igualdad se deduce que

$$\|S_n^c(f)\|_p = \|e^{int}S_n(e^{-int}f)\|_p = \|S_n(e^{-int}f)\|_p \leq C\|e^{-int}f\|_p = C\|f\|_p,$$

luego $\|S_n^c\| \leq C$. Sea $f \in L^p$ y $\varepsilon > 0$, consideremos P un polinomio trigonométrico tal que $\|P - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2C}$, entonces, se tiene que

$$\|S_n^c(f) - S_n^c(P)\|_p = \|S_n^c(f - P)\|_p \leq \|S_n^c\|\|f - P\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si n, m son ambos mayores que el grado de P, entonces $S_n^c(P) = S_m^c(P)$, por lo tanto,

$$\|S_n^c(f) - S_m^c(f)\|_p \leq \|S_n^c(f) - S_n^c(P)\|_p + \|S_m^c(f) - S_m^c(P)\|_p \leq \varepsilon,$$

es decir, la sucesión $\{S_n^c(f)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en L^p, luego convergente. Además la serie de Fourier de su límite es $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt}$, luego $f^c = \lim_{n\to\infty} S_n^c(f) \in L^p$.

Recíprocamente, supongamos que la aplicación $f \mapsto f^c$ está bien definida, y por la observación 2.8, es acotada en L^p. Teniendo en cuenta que la serie de Fourier de $g = f^c - e^{i(2n+1)t}(e^{i(2n+1)t}f)^c$ es

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{g}(j)e^{ijt} &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt} - e^{i(2n+1)t}\sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{e^{-i(2n+1)t}f})(j)e^{ijt} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt} - e^{i(2n+1)t}\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j+2n+1)e^{ijt} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt} - \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j+2n+1)e^{i(j+2n+1)t} \\
&= \sum_{j=0}^{2n} \hat{f}(j)e^{ijt} = S_n^c(f).
\end{aligned}$$

Además por resultar una suma finita ha de ser ésta igual a la función, es decir,

$$S_n^c(f) = f^c - e^{i(2n+1)t}(e^{-i(2n+1)t}f)^c,$$

por lo que $\|S_n^c\| \leq M$, siendo M el doble de la norma de la aplicación $f \mapsto f^c$. Por tanto como para toda $f \in L^p$,

$$\|S_n(f)\| = \|e^{-int}S_n^c(e^{int}f)\| = \|S_n^c(e^{int}f)\| \leq M\|e^{int}f\| = M\|f\|,$$

se tiene lo pedido. ∎

Capítulo 3

Bases incondicionales

En este capítulo se hablara de las bases condicionales, que son un caso particular de base de Schauder, con las cuales da igual el orden en que se sume la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(x)e_j$, como ocurre con los sistemas ortonormales completos en un espacio de Hilbert.

3.1. Convergencia incondicional

Definición 3.1 Diremos que una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ **converge incondicionalmente** si para cualquier permutación σ de $\mathbb{N}$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)}$ converge.

Recordemos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge incondicionalmente si, y sólo si, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es sumable (deficición A.13 y proposición A.14).

Lema 3.2 Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia sumable. Entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|$ converge uniformemente para toda $f \in E_1' = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} |f(x_i)| < \varepsilon \qquad \text{para todos } n \geq N, k \in \mathbb{N}, f \in E_1'.$$

Demostración:

Sea $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que

$$\left\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{8} \qquad \text{para todo } \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \text{ finito, con } \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

Sea $N = \sup \mathcal{N}_0$. Para $n \geq N$, $k \geq 1$ y $f \in E_1'$ definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \mathcal{N}_1(f,n,k) = \{i : n+1 \leq i \leq n+k, \mathrm{Re} f(x_i) \geq 0\}, \\ \mathcal{N}_2 &= \mathcal{N}_2(f,n,k) = \{i : n+1 \leq i \leq n+k, \mathrm{Re} f(x_i) < 0\}. \end{aligned}$$

Por lo que, como f es lineal y $\|f\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{n+k} |\mathrm{Re} f(x_i)| &= \sum_{i\in\mathcal{N}_1} \mathrm{Re} f(x_i) - \sum_{i\in\mathcal{N}_2} \mathrm{Re} f(x_i) = \mathrm{Re} f(\sum_{i\in\mathcal{N}_1} x_i) - \mathrm{Re} f(\sum_{i\in\mathcal{N}_2} x_i) \\
&= \left|\mathrm{Re} f\big(\sum_{i\in\mathcal{N}_1} x_i\big)\right| + \left|\mathrm{Re} f\big(\sum_{i\in\mathcal{N}_2} x_i\big)\right| \\
&\leq \left|f\big(\sum_{i\in\mathcal{N}_1} x_i\big)\right| + \left|f\big(\sum_{i\in\mathcal{N}_2} x_i\big)\right| \\
&\leq \left\|\sum_{i\in\mathcal{N}_1} x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in\mathcal{N}_2} x_i\right\| = \mathbf{I} + \mathbf{II},
\end{aligned}$$

Por (3.1) se tiene que

$$\mathbf{I} = \left\|\sum_{i\in\mathcal{N}_1} x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i\in\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_0} x_i - x\right\| + \left\|x - \sum_{i\in\mathcal{N}_0} x_i\right\| \leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Observemos que $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_0 = \varnothing$, y evidentemente tanto $\mathcal{N}_0$ como $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_0$ están contenidos en $\mathcal{N}_0$. Para **II** y para $\mathrm{Im}(f)$ se razona de forma similar. Luego para cada $n \geq N$, $k \in \mathbb{N}$ y $f \in E_1'$, tenemos lo pedido pues

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} |f(x_i)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |\mathrm{Re} f(x_i)| + \sum_{i=n+1}^{n+k} |\mathrm{Im} f(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Teorema 3.3 Dada una familia $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de E, son equivalentes:

(*i*) La familia $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es sumable.

(*ii*) La serie $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ converge para toda sucesión de escalares $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $|\beta_j| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(*iii*) La serie $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j x_j$ converge para toda sucesión $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\varepsilon_j = \pm 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(*iv*) La serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ converge para toda sucesión creciente $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$

Por el lema anterior, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} |f(x_j)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } f \in E_1', n > N, k \in \mathbb{N},$$

en virtud del teorema de Hahn-Banach, para todo $n \geq N$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=n+1}^{n+k} \beta_j x_j \right\| &= \sup_{f \in E_1'} \left| f\Big(\sum_{j=n+1}^{n+k} \beta_j x_j \Big) \right| = \sup_{f \in E_1'} \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} \beta_j f(x_j) \right| \\ &\leq \sup_{f \in E_1'} \sum_{j=n+1}^{n+k} |\beta_j||f(x_j)| \leq \sup_{f \in E_1'} \sum_{j=n+1}^{n+k} |f(x_j)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ verifica la condición de Cauchy y, como E es completo, converge.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Trivial pues (iii) es un caso particular de (ii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$

Si en (iii) tomamos $\varepsilon_k = 1$ para todo k se deduce que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge. Dada $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ creciente, si consideramos

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n_j \text{ para algún } j, \\ -1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene que $\frac{1}{2}\big(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x_k + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \big) = \sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$, luego por (iii) la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ converge.

$(iv) \Rightarrow (i)$

Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ no es sumable pero sí se da (iv).

Sea x la suma de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Al no ser $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sumable, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ finito existe $\mathcal{N}' \subset \mathbb{N}$ finito con $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ tal que

$$\left\| \sum_{j \in \mathcal{N}'} x_j - x \right\| \geq \varepsilon.$$

Tomemos $\mathcal{N}_0 = \{1\}$; existe $\mathcal{N}_0' \subset \mathbb{N}$ finito, con $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0'$, tal que $\left\| \sum_{i \in \mathcal{N}_0'} x_i - x \right\| \geq \varepsilon$. Sea ahora $n_1 = \sup \mathcal{N}_0'$, y consideremos $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, ..., n_1 + 1\}$, nuevamente encontramos un conjunto $\mathcal{N}_1' \subset \mathbb{N}$ finito, con $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_1'$, tal que $\left\|\sum_{i\in\mathcal{N}_1'} x_i - x\right\| \geq \varepsilon$. Por recurrencia construimos una sucesión de conjuntos

$$\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0' \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_1' \subset ... \subset \mathcal{N}_{k-1}' \subset \mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_k' \subset ...$$

tal que $\mathcal{N}_k, \mathcal{N}_k' \subset \mathbb{N}$ finitos, $n_k = \sup \mathcal{N}_{k-1}'$, $\mathcal{N}_k = \{1, 2, ..., n_k + 1\}$, $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_k'$ y

$$\left\|\sum_{j\in\mathcal{N}_k'} x_j - x\right\| \geq \varepsilon. \tag{3.2}$$

Sea $\mathcal{D}_k = \mathcal{N}_k' \setminus \mathcal{N}_k$ para $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{D}_k \subset \{n_k + 2, ..., n_{k+1}\}$ y, como se tiene que $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_k' \subset \mathcal{N}_{k+1}$, los conjuntos $\mathcal{D}_k$ son todos ellos disjuntos dos a dos. Además,

$$\sup \mathcal{D}_k < \text{ínf}\, \mathcal{D}_{k+1}.$$

Por lo tanto la unión de los $\mathcal{D}_k$ en su orden natural corresponde a una sucesión $\{p_j\}_{j=1}^\infty$ creciente de números naturales, pero por (3.2)

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon &\leq \left\|\sum_{j\in\mathcal{N}_k'} x_j - x\right\| = \left\|\sum_{j\in\mathcal{N}_k} x_j - x + \sum_{j\in\mathcal{D}_k} x_j\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{j=1}^{n_k+1} x_j - x\right\| + \left\|\sum_{j\in\mathcal{D}_k} x_j\right\|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como la serie $\sum_{j=1}^\infty x_j$ converge hacia x, si tomamos k lo suficientemente grande, puesto que $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ es estrictamente creciente, entonces

$$\left\|\sum_{j=1}^{n_k+1} x_j - x\right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y por (3.3) tendríamos que

$$\left\|\sum_{j\in\mathcal{D}_k} x_j\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.4}$$

para k suficientemente grande.

Sin embargo, como $\sum_{i=1}^\infty x_{p_i}$ converge, verifica la condición de Cauchy, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j, k \geq N$, $j \leq k$, se tiene que $\|\sum_{i=j}^k x_{p_i}\| < \frac{\varepsilon}{2}$, y en particular si k es lo suficientemente grande para que $n_k + 2 \geq N$, se tiene que

$$\left\|\sum_{j\in\mathcal{D}_k} x_j\right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

llegando a una contradicción con (3.4). En consecuencia, la familia ha de ser sumable.

■

3.2. Bases incondicionales

Definición 3.4 Diremos que $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una **base incondicional** de E si, y sólo si, es una base y para todo $x \in E$, la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j(x)e_j$ converge incondicionalmente hacia x, donde $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ son los funcionales coeficiente asociados a la base $\mathfrak{B}$.

Teorema 3.5 Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base de E. Entonces los siguientes asertos son equivalentes:

(i) $\mathfrak{B}$ es una base incondicional de E.

(ii) Para toda permutación σ de $\mathbb{N}$, $\mathfrak{B}^{\sigma} = \{e_{\sigma(j)} : j \in \mathbb{N}\}$ es una base de E.

(iii) Si la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ converge, para toda sucesión $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ con $|\beta_j| \leq 1$ la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\beta_j e_j$ converge.

Demostración:

$(i) \Leftrightarrow (ii)$

$\mathfrak{B}$ es una base incondicional si, y sólo si, para todo $x \in E$ la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j(x)e_j$ converge incondicionalmente hacia x luego, por definición, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(j)}(x)e_{\sigma(j)}$ converge hacia x para toda permutación σ de $\mathbb{N}$. Por tanto,

$$\mathfrak{B}^{\sigma} = \{e_{\sigma(j)} : j \in \mathbb{N}\}$$

es una base de E para toda permutación σ de $\mathbb{N}$.

$(i) \Rightarrow (iii)$

Supongamos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ converge y $x \in E$ es su suma. Como $\mathfrak{B}$ es una base incondicional, ha de ser $\alpha_j = \alpha_j(x)$, por tanto, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$ converge incondicionalmente hacia x, luego, en virtud de la proposición A.14 la familia $\{\alpha_j(x)e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es sumable. Por la equivalencia de (i) y (ii) del teorema 3.3, la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j\alpha_j(x)e_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j\alpha_j e_j$ converge para toda sucesión $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $|\beta_j| \leq 1$.

$(iii) \Rightarrow (i)$

Si $x \in E$, por ser $\mathfrak{B}$ una base, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$ converge y, por hipótesis, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)\beta_j e_j$ converge para toda sucesión $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $|\beta_j| \leq 1$. En virtud del teorema 3.3, la familia $\{\alpha_j(x)e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es sumable, es decir, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$ converge incondicionalmente, por lo que $\mathfrak{B}$ es una base incondicional.

■

Dada una base incondicional $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de E y una sucesión $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ con $|\beta_j| \leq 1$, el resultado anterior nos permite definir nuevos operadores.

Definición 3.6 Sean $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base incondicional de E y $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$ con $|\beta_j| \leq 1$. Definimos $S_\beta : E \to E$ de la siguiente manera:

$$S_\beta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \alpha_j(x) e_j \qquad \text{para todo } x \in E. \tag{3.5}$$

Proposición 3.7 Los operadores S_β definidos en 3.5 son lineales y continuos.

Demostración:
Es sencillo comprobar la linealidad. Para probar su continuidad, veamos que el grafo de S_β es cerrado en $E \times E$ y apliquemos el teorema del grafo cerrado A.12.

Supongamos que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia x y $\{S_\beta(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ lo hace hacia y; veamos que $S_\beta(x) = y$.

Como $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia x y los funcionales coeficiente son continuos, fijado j tenemos que $\{\beta_j \alpha_j(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia $\beta_j \alpha_j(x)$. Por otro lado, como $\{S_\beta(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia y, y $\beta_j \alpha_j(x_k)$ es el coeficiente de e_j en el desarrollo de $S_\beta(x_k)$, es decir, $\beta_j \alpha_j(x_k) = \alpha_j(S_\beta(x_k))$, entonces

$$\beta_j \alpha_j(x_k) = \alpha_j(S_\beta(x_k)) \xrightarrow{k \to \infty} \alpha_j(y).$$

Es decir, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \alpha_j(x) = \alpha_j(y)$, lo que prueba que

$$S_\beta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \alpha_j(x) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(y) e_j = y.$$

■

A priori, la norma de S_β varía con $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ aunque, como veremos a continuación, $\|S_\beta\|$ está uniformemente acotada con respecto a $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Proposición 3.8 Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base incondicional de E, y sean S_β los operadores definidos en (3.5). Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in E$ se tiene que

$$\|S_\beta(x)\| \leq C\|x\| \qquad \text{para toda } \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}, \text{ con } |\beta_j| \leq 1.$$

Demostración: Sea $x \in E$, $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j(x) e_j$. Sabemos que $\{\alpha_j(x) e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es sumable. Por el lema 3.2, $\{f(\alpha_j(x) e_j)\}_{j=1}^{\infty} = \{\alpha_j(x) f(e_j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$ para todo $f \in E_1'$, luego el operador

$$\begin{aligned} T_f(x) \quad : \quad & E \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N}) \\ & x \mapsto \{\alpha_j(x) f(e_j)\}_{j=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

está bien definido, y se comprueba fácilmente que es lineal.

Si consideramos $T_{f,n} = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\alpha_i$, donde $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la base natural de $\ell^1(\mathbb{N})$, es decir,

$$T_{f,n}(x) = (\alpha_1(x)f(e_1), \alpha_2(x)f(e_2), \ldots, \alpha_n(x)f(e_n), 0, 0, \ldots),$$

cada $T_{f,n}$ es claramente lineal y continuo por serlo los funcionales coeficiente. Además $T_f = \text{lím}_{n\to\infty} T_{f,n}$ ya que

$$\|T_f(x) - T_{f,n}(x)\|_1 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i(x)f(e_i)| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |f(\alpha_i(x)e_i)|,$$

que converge hacia 0 por 3.2. Entonces, en virtud del teorema de Banach-Steinhaus (corolario A.7), T_f es lineal y continuo.

Para un x fijo, tomando $\varepsilon = 1$ en el lema 3.2 existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $f \in E_1'$ y $n \geq N$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i(x)f(x_i)| \leq 1$$

luego,

$$\begin{aligned} \|T_f(x)\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i(x)f(x_i)| = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i(x)f(e_i)| + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i(x)f(x_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \|\alpha_i\|\|x\|\|e_i\| + 1 = C(x) + 1, \end{aligned}$$

para toda $f \in E_1'$. Como cada T_f es acotado y

$$\sup\{\|T_f(x)\| : f \in E_1'\} \leq C(x) + 1 < \infty,$$

en virtud del teorema de Banach-Steinhaus A.6, existe M tal que $\|T_f\| \leq M$ para toda $f \in E_1'$.

Con esto, para cualquier sucesión $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ con $|\beta_j| \leq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(S_\beta(x))| &= \left| f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \alpha_j(x) e_j \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \alpha_j(x) f(e_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j \alpha_j(x) f(e_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) f(e_j)| = \|T_f(x)\|_1 \leq M\|x\|, \end{aligned}$$

para todo $x \in E$ y toda $f \in E_1'$. Tomando el supremo cuando $f \in E_1'$ obtenemos lo buscado,

$$\|S_\beta(x)\| = \sup_{f\in E_1'} |f(S_\beta(x))| \leq M\|x\|$$

para todo $x \in E$ y toda sucesión $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ con $|\beta_j| \leq 1$. ■

Si $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión con un número finito de elementos distintos de cero, se pueden considerar los operadores S_β definidos por (3.5), aunque $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ no sea una base incondicional. Esta observación, permite considerar el recíproco de la proposición anterior.

Proposición 3.9 Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in E\}$ una base de E. Si existe una constante $C < \infty$ tal que $\|S_\beta(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$ y toda sucesión $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ con un número finito de elementos distintos de cero y tal que $\beta_j = 0$ o 1, entonces $\mathfrak{B}$ es una base incondicional.

Demostración: Sean $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$, y σ una permutación cualquiera de $\mathbb{N}$. Veamos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(j)}(x)e_{\sigma(j)}$ converge hacia x.

Como $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=n}^{n+k} \alpha_j(x)e_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2C+2} \qquad \text{para todo } n \geq N, k \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Sea ahora $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(M)\}$, con esto, M depende tanto de ε como de σ. Si $m \geq M$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\sigma(j)}(x)e_{\alpha(j)} \right\| &\leq \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)e_j \right\| + \left\| \sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ \sigma(j)>N}} \alpha_{\sigma(j)}(x)e_{\alpha(j)} \right\| \\ &= \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)e_j \right\| + \left\| \sum_{i=N+1}^{M_0} \beta_i\alpha_i(x)e_i \right\|, \end{aligned}$$

donde $M_0 = \text{máx}\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m)\}$ y

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \quad \text{para algún } j \leq m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos $y = \sum_{i=N+1}^{M_0} \alpha_i(x)e_i \in E$. Observemos que $\alpha_i(y) = \alpha_i(x)$ cuando $N+1 \leq i \leq M_0$ y $\alpha_i(y) = 0$ en el resto. Usando (3.6) obtenemos que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)e_j \right\| = \left\| \sum_{j=N+1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2C+2} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y de la hipótesis del enunciado junto a (3.6) se sigue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=N+1}^{M_0} \beta_j\alpha_j(x)e_j \right\| &= \left\| \sum_{j=N+1}^{M_0} \beta_j\alpha_j(y)e_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\alpha_j(y)e_j \right\| = \|S_\beta(y)\| \\ &\leq C\|y\| = C\left\| \sum_{j=N+1}^{M_0} \alpha_j(y)e_j \right\| = C\left\| \sum_{j=N+1}^{M_0} \alpha_j(x)e_j \right\| \\ &< \frac{C\varepsilon}{2C+2} < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

por lo que finalmente se tendría que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\sigma(j)}(x) e_{\alpha(j)} \right\| < \varepsilon \qquad \text{para todo } m \geq M.$$

■

Con estos dos últimos resultados podemos encontrar nuevas caracterizaciones para bases incondicionales.

Teorema 3.10 Sea $\mathfrak{B} = \{e_j : j \in E\}$ una base de E y sean $S_\beta(x)$ los operadores definidos en (3.5). Los siguientes asertos son equivalentes:

(i) $\mathfrak{B}$ es una base incondicional de E.

(ii) Existe una constante $C > 0$ tal que $\|S_\beta(x)\| \leq C\|x\|$ para toda sucesión $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $|\beta_j| \leq 1$.

(iii) Existe una constante $C > 0$ tal que $\|S_\varepsilon(x)\| \leq C\|x\|$ para toda sucesión $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\varepsilon_j = \pm 1$.

(iv) Existe una constante $C > 0$ tal que $\|S_\beta(x)\| \leq C\|x\|$ para toda sucesión $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ con un número finito de elementos distintos de cero y tal que $\beta_j = 1$ o 0.

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es la proposición 3.8.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es un caso particular.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Dado $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ en las condiciones de (iv) tomemos

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_j = 1, \\ -1 & \text{si } \beta_j = 0, \end{cases}$$

por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \alpha_j(x) e_j = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \alpha_j(x) e_j - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) e_j,$$

de donde tomando normas obtenemos que

$$\|S_\beta(x)\| \leq \frac{1}{2}(\|S_\varepsilon(x)\| + \|x\|) \leq \frac{C+1}{2}\|x\|.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Es la proposición 3.9.

■

En los apartados (ii) y (iii) del teorema anterior, se asume implícitamente que los operadores S_β están bien definidos.

3.3. Ejemplos

Observación 3.11 Como ya comentamos en el capítulo 1, un sistema ortonormal completo $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Hilbert separable H, es una base de Schauder de H. De hecho, es una base incondicional puesto que sabemos que para cada $x \in H$ la familia $\{\langle x, e_j\rangle e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es sumable.

También es sencillo comprobar esta afirmación usando el teorema anterior. Si $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de elementos de $\mathbb{K}$ tal que $\varepsilon_j = \pm 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|S_\varepsilon(x)\|_2^2 &= \left\| S_\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle e_j\right)\right\|_2^2 = \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j\langle x, e_j\rangle e_j\right\|_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\varepsilon_j\langle x, e_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}|\langle x, e_j\rangle|^2 = \|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

Para terminar el capítulo veremos algunos ejemplos sobre bases incondicionales.

Proposición 3.12 La base natural de c_0 y $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \le p < \infty$, es una base incondicional.

Demostración:

Ya vimos en la proposición 2.1 que la base natural es, efectivamente, una base de ℓ^p y c_0. Para toda sucesión arbitraria $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\varepsilon_j = \pm 1$, y para todo $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$, es sencillo comprobar que $S_\varepsilon(x) \in \ell^p$ luego S_ε está bien definida, y además se tiene que

$$\begin{aligned}
\|S_\varepsilon(x)\|_p &= \left\| S_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right)\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i x_i e_i\right\|_p \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\varepsilon_i x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.
\end{aligned}$$

De manera análoga, si $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0$,

$$\begin{aligned}
\|S_\varepsilon(x)\|_\infty &= \left\| S_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right)\right\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i x_i e_i\right\|_\infty \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}|\varepsilon_i x_i| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_i| = \|x\|_\infty,
\end{aligned}$$

teniendo así en ambos casos la condición (iii) del teorema 3.10 con $C = 1$ y, por tanto, $\mathfrak{B}$ es una base incondicional. ■

Proposición 3.13 La sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de c_0, dónde

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,\ldots) \\ e_2 &= (1,1,0,0,\ldots) \\ e_3 &= (1,1,1,0,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

forma una base de c_0 con la norma $\|\cdot\|_\infty$, pero no una base incondicional.

Demostración: Sea $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Consideremos $\alpha_i(x) = x_i - x_{i+1}$; entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}) e_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}), \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i+1}), \ldots, \sum_{i=n}^{n} (x_i - x_{i+1}), 0 \ldots \right) \\ &= (x_1 - x_{n+1}, x_2 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1}, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $x \in c_0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, por lo que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i \right\|_\infty &= \|(x_{n+1}, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)\|_\infty \\ &= \sup_{k \geq n+1} |x_k| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Veamos que esta representación es única. Dado un vector $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x = \sum_{i=}^{\infty} \lambda_i e_i$, la n-ésima coordenada del vector, por definición de los e_n ha de ser $x_n = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i$, luego

$$x_n - x_{n+1} = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i = \lambda_n,$$

de forma que los coeficientes quedan unívocamente determinados por la sucesión.

Para ver que no es una base incondicional probaremos no se cumple la condición (iii) del teorema 3.10. Para ello consideremos

$$\alpha_i = \frac{(-1)^i}{i}$$

la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ converge hacia

$$x = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

que es un elemento de c_0 pues cada elemento de la sucesión es finito por el criterio de Leibnitz, y además

$$\left|\sum_{i=n}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Si consideramos $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $S_\varepsilon(x)$ no está bien definido, pues si primera componente debería ser $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = \infty$, por lo que la base no es incondicional. ■

Por último mencionaremos sin demostración que el sistema trigonométrico es incondicional en $L^p[0, 2\pi]$ sólo cuando $p = 2$; el sistema de Haar es una base incondicional de $L^p[0, 2\pi]$ para $1 < p < \infty$; y el sistema de Schauder no es una base incondicional de $\mathcal{C}[0, 1]$. De hecho se puede probar que $\mathcal{C}[0, 1]$ y $L^1[0, 1]$ no tienen bases incondicionales (para más detalles y referencias puede consultarse [10, p. 204]).

Capítulo 4

Bases de Riesz

4.1. Bases equivalentes

La imagen de una base algebraica por una aplicación lineal y biyectiva es también una base algebraica. En esta sección veremos que esta idea se puede extender a las bases de Schauder, si además pedimos que el operador sea acotado. De este modo tendremos una forma muy simple de, conocida una base, generar más bases a partir de ella, con la propiedad añadida de que si la base es incondicional, la nueva base también lo será.

Proposición 4.1 Sea $T : E \to F$ un operador lineal, acotado y biyectivo. Si la familia $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de E, entonces la familia $\{T(e_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de F.

Demostración: Dado $y \in F$, como es T sobreyectiva, existe $x \in E$ tal que $y = T(x)$. Por ser $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ base, se tiene que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. De la linealidad y acotación de T se deduce que

$$\begin{aligned} y &= T(x) = T\big(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j\big) = T\big(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\big) = \lim_{n\to\infty} T\big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T(e_j). \end{aligned}$$

Si $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T(e_j) = 0$, por inyectividad de T ha de ser $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j = 0$, y por ser $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base, $\alpha_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, de donde se tiene la unicidad, y $\{T(e_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es base. ■

Corolario 4.2 Si $T : E \to F$ un operador lineal, acotado y biyectivo, y $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de E, entonces $\{T(e_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de F.

Demostración: Para probar que es base incondicional usaremos el teorema 3.5. Sea σ una permutación de $\mathbb{N}$. Como $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional,

$\{e_{\sigma(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base y, por la proposición anterior, $\{T(e_{\sigma(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}$ también es una base. Luego $\{T(e_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional. ■

Observación 4.3 Dada una base $\mathfrak{B}_1 = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, cuando generamos una nueva base $\mathfrak{B}_2 = \{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mediante un operador acotado y biyectivo T, es decir, $T(e_j) = v_j$, los coeficientes de x y $T(x)$, respecto de las bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ respectivamente, son los mismos en el siguiente sentido: si $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son los funcionales coeficiente asociados $\mathfrak{B}_1$ y $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son los asociados a $\mathfrak{B}_2$, entonces $\alpha_j = \beta_j \circ T$. Ademas como un operador biyectivo y continuo entre espacios de Banach es invertible, T y T^{-1} son continuas, luego la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ converge hacia x si, y sólo si, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T(e_j)$ lo hará hacia $T(x)$. En consecuencia, ambas series convergen al mismo tiempo. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 4.4 Dos bases $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de E, se dice que son **equivalentes** si dada una sucesión $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{K}$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \text{ es convergente si, y sólo si, } \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j v_j \text{ es convergente.}$$

Proposición 4.5 Dos bases $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de E son equivalentes si, y sólo si, existe un operador acotado y biyectivo $T : E \to E$ tal que $T(e_j) = v_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración: Si T es un operador lineal acotado y biyectivo, de la observación 4.3 se deduce que que ambas bases son equivalentes.

Recíprocamente, supongamos que $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son bases equivalentes de E. Si $x \in E$ con $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j$, entonces la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)v_j$, converge hacia un elemento, que denotamos por $T(x) \in E$. Así definida, la función T es lineal, y además $T(e_j) = v_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Para ver que T es un operador acotado y biyectivo, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el operador T_n por $T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)v_i$. Entonces para todo $x \in E$ se tiene que

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

El operador T_n es acotado, pues

$$\begin{aligned} \|T_n(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i(x)v_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i(x)\|\|v_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|\|x\|\|v_i\| = \|x\| \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|\|v_i\| = C(n)\|x\|, \end{aligned}$$

entonces, en virtud del teorema de Banach-Steinhaus (corolario A.7), T es acotado.

La biyectividad de T se deduce fácilmente del hecho de que $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son bases equivalentes, junto con la observación 4.3. ■

Es sencillo comprobar que, igual que ocurre con las aplicaciones lineales y las bases algebraicas, el operador T queda unívocamente determinado por la condición $T(e_j) = v_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.6 En un espacio de Hilbert separable H, bases equivalentes poseen sucesiones biortogonales que son bases equivalentes.

Demostración: Sean $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, bases equivalentes con sistemas biortogonales $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Por el corolario 1.14, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son bases de H.

Sea T el operador acotado y biyectivo en H tal que $T(e_j) = v_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Su operador adjunto T^* es también acotado, y es biyectivo por serlo T,(véase definición A.19 y proposición A.20). Veamos que $T^*(g_j) = f_j$.

Dado $j \in \mathbb{N}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\langle T^*(g_j), e_k\rangle = \langle g_j, T(e_k)\rangle = \langle g_j, v_k\rangle = \delta_{j,k} = \langle f_j, e_k\rangle.$$

Como $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es completo, entonces $T^*(g_j) = f_j$, y por la proposición anterior, se tiene el resultado. ■

4.2. Bases de Riesz

En un espacio de Hilbert, como comentamos en la observación 3.11, un sistema ortonormal y completo es una base. De hecho las bases ortonormales son las más importantes en los espacios de Hilbert. No resulta extraño que las bases equivalentes a ellas también jueguen un papel importante.

Definición 4.7 Una base de un espacio de Hilbert se dice que es una **base de Riesz** si es equivalente a una base ortonormal.

Una base de Riesz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Hilbert ha de ser necesariamente acotada, es decir,

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty.$$

De hecho, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene de una base ortonormal $\mathfrak{B} = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mediante el operador biyectivo y acotado T, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 1 &= \|v_n\| = \|T^{-1}(e_n)\| \leq \|T^{-1}\|\|e_n\|, \\ \|e_n\| &= \|T(v_n)\| \leq \|T\|\|v_n\| = \|T\|. \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \|e_n\| \leq \|T\|. \tag{4.1}$$

Teorema 4.8 Sea H un espacio de Hilbert separable. Son equivalentes:

(i) La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz de H.

(ii) Existe un producto interno equivalente al de H, es decir, que genera una norma equivalente, con el cual la familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H.

(iii) La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completa en H y existen constantes $A, B > 0$ tales que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$A \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 \leq B \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Puesto que, por la proposición 4.5, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Riesz, existe un operador acotado y biyectivo T que transforma $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en una base ortonormal $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir,

$$T(e_n) = v_n \quad n = 1, 2, \ldots$$

Definimos un nuevo producto interno $\langle x, y\rangle_1$ en H de la siguiente manera:

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle T(x), T(y)\rangle.$$

Veamos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ es, en efecto, un producto interno. Sean $x, y, z \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle_1 &= \langle T(x+y), T(z)\rangle = \langle T(x)+T(y), T(z)\rangle \\
&= \langle T(x), T(z)\rangle + \langle T(y), T(z)\rangle = \langle x, z\rangle_1 + \langle y, z\rangle_1, \\
\langle \lambda x, y\rangle_1 &= \langle T(\lambda x), T(y)\rangle = \langle \lambda T(x), T(y)\rangle \\
&= \lambda\langle T(x), T(y)\rangle = \lambda\langle x, y\rangle_1, \\
\langle x, y\rangle_1 &= \langle T(x), T(y)\rangle = \overline{\langle T(y), T(x)\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle_1}, \\
\langle x, x\rangle_1 &= \langle T(x), T(x)\rangle \geq 0, \\
\langle x, x\rangle_1 &= \langle T(x), T(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow T(x) = 0, \\
&\ \text{o, equivalentemente (por ser } T \text{ inyectivo), si } x = 0.
\end{aligned}$$

Sea $|||\cdot|||_1$ la norma generada por el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\| = \|T^{-1}\| |||x|||_1, \\
|||x|||_1 &= \|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq |||x|||_1 \leq \|T\|\|x\|$$

para toda $x \in H$. Luego el nuevo producto interno genera una norma equivalente a la original. Además, para todo $i, j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\langle e_i, e_j \rangle_1 = \langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j},$$

luego la base es ortonormal para este producto interno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Supongamos que $\langle x, y \rangle_1$, es un producto interno de H para el cual $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en una base ortonormal. Si $|||\cdot|||_1$ es la norma generada por ese producto interno, por hipótesis, $m|||x|||_1 \leq \|x\| \leq M|||x|||_1$ para toda $x \in H$. La completitud en H respecto a la norma $\|\cdot\|$ es inmediata por el hecho de ser una base respecto de $|||\cdot|||_1$ y la equivalencia entre las normas.

Por tanto, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, como $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = |||\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i|||_1^2$, se tiene que

$$m^2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$

Sea $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal cualquiera de H. Consideremos los operadores lineales T y S, definidos en $\langle v_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ y $\langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ respectivamente, por:

$$T(v_n) = e_n \qquad \text{y} \qquad S(e_n) = v_n.$$

La acotación de T se debe a que si $x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle v_i$, entonces, por (iii)

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &\leq B \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2 = B\|x\|^2. \end{aligned}$$

Y para S, dado $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, por (iii) se tiene que

$$\begin{aligned} \|S(x)\|^2 &= \left\| S\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \\ &\leq A^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|^2 \leq A^{-1}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Luego S y T son acotados en sus dominios. Por ser lineales y acotados, y sus dominios respectivos densos en H, tanto S como T se pueden extender por continuidad a todo H.

Evidentemente, si I denota el operador identidad, se tiene que $ST = I$ y $TS = I$ cuando nos restringimos a $\langle v_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ y $\langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ respectivamente. Como ambas familias son completas, y ambos operadores son acotados se tiene que $ST = I$ y $TS = I$ en todo H. Luego, por tener inverso, T es biyectivo y en consecuencia, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz.

■

Proposición 4.9 Una familia biortogonal a una base de Riesz es también una base de Riesz.

Demostración: Sean $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Riesz y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia biortogonal a ella.

Como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz, entonces es equivalente a una base ortonormal $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En virtud la proposición 4.6, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha de ser equivalente a $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pues ella es biortogonal con ella misma, por tanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz. ■

Para una sucesión completa de elementos de un espacio de Hilbert, la existencia de una familia biortogonal resulta ser suficiente para garantizar que se trata de una base de Riesz si añadimos una cierta condición de estabilidad a los coeficientes de Fourier. Antes de probar este resultado introduciremos un lema que necesitaremos para su demostración.

Lema 4.10 Sean H un espacio de Hilbert y $S : H \to H$ un operador lineal y acotado. Si S^* es sobreyectivo, entonces existe una constante $m > 0$ tal que

$$\|S(x)\| \geq m\|x\| \qquad \text{para todo } x \in H.$$

Demostración: Sea $m = \inf\left\{\dfrac{\|S(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$.

Razonemos por reducción al absurdo: supongamos que $m = 0$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de H, con $\|x_n\| = 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|S(x_n)\| = m = 0.$$

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \max\{\|S(x_n)\|, \frac{1}{2}\} \qquad \text{y} \qquad u_n = \frac{1}{\alpha_n} x_n.$$

Obviamente, $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty$, y $\lim_{n\to\infty} S(u_n) = 0$ ya que

$$\|S(u_n)\| = \frac{1}{\alpha_n}\|S(x_n)\| \leq \|S(x_n)\|^{\frac{1}{2}} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Entonces para cada $y \in H$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, S^*(y)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S(u_n), y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0.$$

Puesto que S^* es sobreyectiva, esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, x\rangle = 0 \qquad \text{para cada } x \in H.$$

Por tanto, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión débilmente acotada en H y, en virtud de la proposición A.9 la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada en H, y llegamos a una contradicción, ya que la sucesión $\{\|u_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia infinito. ■

Teorema 4.11 Sea H un espacio de Hilbert separable. La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Riesz de H si, y sólo si, la familia es completa en H y posee una familia biortogonal $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $x \in H$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle|^2 < \infty.$$

Demostración: Supongamos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la única familia biortogonal a la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, la de los funcionales coeficiente asociados a la base (véase 1.10). Por la proposición anterior $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una base de Riesz. Dado $x \in H$, si $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_n e_n$, entonces $\langle x, f_n\rangle = c_n$, y por tanto

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n\rangle e_n.$$

Análogamente se obtiene que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle f_n.$$

Entonces, por el teorema 4.8, existe una norma $|||\cdot|||_1$ equivalente a la de H, para la cual $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortonormal, y por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle|^2 = |||\, x\, |||_1 \leq M\|x\| < \infty.$$

Para probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$, el razonamiento es el mismo.

Recíprocamente, supongamos que la familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completa y que posee una familia biortogonal $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las hipótesis del enunciado. Consideremos la aplicación lineal de H en ℓ^2 definida por

$$x \to \{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

El grafo de esta aplicación es cerrado. Supongamos que la sucesión $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge hacia x en H y la sucesión $\left\{\{\langle x_j, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge hacia $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\ell^1(\mathbb{N})$. Por la continuidad del producto escalar se tiene que

$$\langle x, e_n\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle x_j, e_n\rangle = y_n,$$

luego ha de ser $\{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Por el teorema del grafo cerrado la aplicación es continua, y existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq C^2\|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in H. \tag{4.2}$$

Usando el mismo razonamiento, existe una constante $D > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle|^2 \leq D^2\|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in H. \tag{4.3}$$

Fijada una base ortonormal $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H,consideremos los operadores lineales S y T definidos en $\langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ y $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ respectivamente por $S(e_i) = v_i$ y $T(f_i) = v_i$. Observemos que dado $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, entonces

$$\langle x, f_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\langle e_i, f_j\rangle = \begin{cases} a_j & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{si } j > n, \end{cases}$$

luego $x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle e_i$, siendo la suma finita. Por simetría si $x = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle f_i$, siendo la suma finita. De este modo

$$\begin{aligned} S(x) &= S\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle e_i\Bigg) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle v_i, \\ T(x) &= T\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle f_i\Bigg) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle v_i. \end{aligned}$$

En virtud de las desigualdades (4.2) y (4.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \|S(x)\|^2 &= \Bigg\|\sum_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle v_i\Bigg\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, f_i\rangle|^2 \leq D^2\|x\|^2, \\ \|T(x)\|^2 &= \Bigg\|\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle v_i\Bigg\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq C^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Luego S y T son continuos en $\langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ y $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ respectivamente. Si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ e $y = \sum_{j=1}^{n} b_j f_j$, son sumas finitas, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle S(x), T(y)\rangle &= \langle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle a_i v_i, b_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle a_i v_i, b_i v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i = \sum_{i=1}^{n}\langle a_i e_i, b_i f_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle a_i e_i, b_j f_j\rangle \\ &= \langle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j f_j\rangle = \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Razonando como en la demostración del teorema 4.8, se extienden S y T a todo H, y esta igualdad se tiene para todo par de vectores $x, y \in H$. Luego se tiene que

$$\langle x, S^*T(y)\rangle = \langle T^*S(x), y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

luego, $T^*S = I$, lo que implica la inyectividad de S y $S^*T = I$ lo que implica la sobreyectividad de S^*. Además se tiene que $S(H) \supset \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en H. Para ver la sobreyectividad de S y concluir que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz de H veamos que $S(H)$ es cerrado. Si $\{S(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un $y \in H$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $i, j \geq N$, $\|S(x_i) - S(x_j)\| < \varepsilon$. Luego por el lema 4.10, si $i, j \geq N$ entonces

$$\|x_i - x_j\| \leq m^{-1}\|S(x_i) - S(x_j)\| < m^{-1}\varepsilon,$$

de modo que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un elemento $x \in H$. Por continuidad de S ha de ser $S(x) = y$ luego $S(H)$ es cerrado y se sigue el resultado. ■

4.3. Estabilidad de las bases de Schauder

Dos objetos matemáticos que están en cierto sentido “cerca”, suelen tener propiedades en común. En esta sección veremos que las bases en los espacios de Banach son una clase “estable”, es decir, que si una familia está lo suficientemente “cerca” a una base, entonces será una base. Evidentemente, hay que darle un sentido al significado de “cerca”.

Lema 4.12 Sean E y F dos espacios de Banach y $T : E \to F$ un operador lineal con $\|T\| < 1$. Entonces $I - T$ es invertible, es decir, $I - T$ es biyectivo y $I - T$ y $(I - T)^{-1}$ son operadores lineales y continuos.

Demostración: Como para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario se tiene que

$$\|T^j\| \leq \|T\|^j,$$

entonces, puesto que $\|T\| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ es absolutamente convergente con la norma de los operadores. Por tanto, existe S lineal y continuo tal que $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

Además $ST = TS = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = S - I$, de donde se obtiene que

$$(I - T)S = S - TS = I, \qquad S(I - T) = S - ST = I.$$

Por lo tanto, $I - T$ es invertible con inverso $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. ■

Teorema 4.13 Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de E y supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de E tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i(e_i - x_i)\right\| \leq \lambda \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\| \tag{4.4}$$

para alguna constante $0 \leq \lambda < 1$, y cualesquiera escalares $c_1, \ldots, c_n$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base equivalente a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración: Si $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ converge, entonces la serie verifica la condición de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} c_i e_i \right\| < \varepsilon.$$

Por (4.4), también se tiene que

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} c_i (e_i - x_i) \right\| < \lambda\varepsilon < \varepsilon,$$

es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(e_i - x_i)$ verifica la condición de Cauchy y por tanto converge. Esto nos permite definir la aplicación $T : E \to E$ como

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) e_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)(e_i - x_i).$$

Es sencillo comprobar que la aplicación es lineal. Haciendo $n \to \infty$ en(4.4) se deduce que

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)(e_i - x_i) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(c) e_i \right\| = \lambda \|x\|,$$

luego la aplicación es acotada y $\|T\| \leq \lambda < 1$. En virtud del lema 4.12 el operador $I - T$ es invertible, luego biyectivo.

Como $(I - T)(e_n) = x_n$, por la proposición 4.5 se sigue el resultado. ■

Corolario 4.14 Sean $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos de H tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i (e_i - x_i) \right\| \leq \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para alguna constante $0 \leq \lambda < 1$, y cualesquiera escalares $c_1, \ldots c_n$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz de H.

Corolario 4.15 Sean $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de E y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los funcionales coeficiente asociados. Si $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de vectores de E tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - v_n\| \|\alpha_n\| < 1,$$

entonces $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base equivalente a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración: Sea $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - v_n\| \|\alpha_n\|$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ es una suma finita arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i(e_i - v_i) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)(e_i - v_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\alpha_i(x)(e_i - v_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\alpha_i\| \|x\| \|e_i - v_i\| = \lambda \|x\| = \lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, en virtud del teorema anterior se da el resultado. ■

Corolario 4.16 Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de ortonormal de H y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de vectores de H tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - v_n\| < 1,$$

entonces $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz de H.

Demostración: Es un caso particular del corolario anterior, teniendo en cuenta que la familia de funcionales coeficiente asociado a la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ella misma, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\| = 1$ por ser ortonormal, y que una base de Riesz es aquella equivalente a una ortonormal. ■

Corolario 4.17 Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números reales. Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|e^{int} - e^{i\lambda_n t}\|_2 < 1$ entonces $\{e^{i\lambda_n zt}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2[-\pi, \pi]$.

Observación 4.18 Una condición suficiente para que se den las hipótesis del corolario anterior es que

$$|\lambda_n - n| \leq K < \frac{1}{4} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Este resultado es el llamado teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec, cuya prueba se puede encontrar en [10].

Teorema 4.19 Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de E, entonces existen una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $\varepsilon_n > 0$, con la siguiente propiedad: si $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de elementos de E tal que

$$\|e_n - v_n\| < \varepsilon_n \quad n = 1, 2, \ldots$$

entonces $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de E equivalente a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración: Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los funcionales coeficiente asociados a la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por el corolario anterior basta escoger ε_n lo suficientemente pequeño para que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|\alpha_n\| < 1$, por ejemplo, $\varepsilon_n = 2^{-(n+1)} \|\alpha_n\|$. ■

Corolario 4.20 Si E es un espacio de Banach con base, entonces cada conjunto denso en E contiene una base.

Demostración: Sean $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de E y D un conjunto denso en E. Tomemos $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ como en el teorema anterior. Como D es denso en E, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $v_n \in D$ tal que $\|e_n - v_n\| < \varepsilon_n$. Entonces $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base equivalente a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Aunque vimos en la proposición 2.3 que $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ no es una base de $\mathcal{C}[a,b]$, por el resultado anterior concluimos que existe una base de $\mathcal{C}[a,b]$ constituida únicamente por polinomios, ya que $\mathcal{C}[a,b]$ tiene base y los polinomios son densos en $\mathcal{C}[a,b]$.

Apéndice A

En este apéndice se exponen algunos resultados que se utilizan en el desarrollo de este trabajo y que han sido vistos previamente en alguna de las asignaturas del Grado en Matemáticas, principalmente en la asignatura “Introducción a los espacios de funciones”. Estos resultados se pueden encontrar en [1], [5] y [9].

A.1. Teoremas fundamentales del análisis funcional

Definición A.1 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación de E en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $\|\cdot\|$, es una **norma** sobre E si verifica las cuatro propiedades siguientes:

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$.
2. $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para cada $x \in E$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada $x, y \in E$.

Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\|\cdot\|$ es una norma sobre E.

Un **espacio de Banach** es un espacio normado que es completo para la métrica de la norma.

Teorema A.2 (de Hahn-Banach) Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y p una seminorma en E. Sean M un subespacio vectorial sobre E y $f : M \to \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Entonces existe $F : E \to \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que $f(x) = F(x)$ si $x \in M$ y $|F(x)| \leq P(x)$ si $x \in E$.

Corolario A.3 Sea E un espacio normado. Para cada $x \in E$ se tiene que

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E', \|f\| \leq 1\}.$$

Corolario A.4 Sean E un espacio normado y M un subespacio de E. Entonces $x_0 \notin \bar{M}$ si, y sólo si, existe $f \in E'$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Definición A.5 Un espacio de Banach E es **reflexivo** si la inyección canónica $E \to E''$ es sobreyectiva.

Teorema A.6 (de Banach-Steinhaus) Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado. Si $\{T_i\}_{i\in I}$ es una familia de aplicaciones lineales y continuas de E en F, se verifica una de las dos alternativas siguientes:

1. Existe $M > 0$ tal que $\|T_i\| \leq M$ para cada $i \in I$.

2. Existe un conjunto G intersección numerable de abiertos y denso en E, tal que
$$\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} = \infty \quad \text{para cada } x \in G.$$

Corolario A.7 Sea E un espacio de Banach y F un espacio normado. Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de aplicaciones lineales y continuas de E en F tal que para cada $x \in E$ existe $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Entonces T es una aplicación lineal y continua de E en F y $\|T\| \leq \sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Definición A.8 Sea E un espacio normado y A un subconjunto de E. Se dice que A es **débilmente acotado** si $f(A)$ es acotado en $\mathbb{K}$ para cada $f \in E'$.

Proposición A.9 Sea E un espacio normado y A un subconjunto de E. Entonces A es acotado si, y sólo si, A es débilmente acotado.

Teorema A.10 (de la aplicación abierta) Sean E y F espacios de Banach. Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal, continua y sobre, entonces T es abierta.

Corolario A.11 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre E de espacio de Banach. Si una es más fina que la otra, entonces son equivalentes.

Teorema A.12 (del grafo cerrado) Sean E y F dos espacios de Banach y T una aplicación lineal de E en F. Entonces T es continua si, y sólo si, su grafo $G(T) = \{(x, T(x)); x \in E\}$ es un conjunto cerrado en $E \times F$.

A.2. Espacios de Hilbert

Definición A.13 Sea I un conjunto no vacío, y sea $\Re$ la clase de los subconjuntos finitos $\mathcal{N}$ de I. Diremos que la familia $\{x_i\}_{i\in I}$ es **sumable** si existe un $x \in E$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{N}$ finito de tal modo que
$$\left\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}} x_i \right\| < \varepsilon \qquad \text{para todo } \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \text{ finito con } \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}.$$

En este caso diremos que x es la suma de la familia $\{x_i\}_{i\in I}$ y escribiremos $x = \sum_{j\in I} x_j$.

Proposición A.14 La sucesion $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de E es sumable, y su suma es x si, y sólo si, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)}$ converge hacia x en la norma de E para toda permutación σ de $\mathbb{N}$.

Definición A.15 Sean H un espacio vectorial y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno sobre H. Se dice que H es un espacio de **Hilbert** si es completo para la norma definida por el producto interno,

$$\|x\| = \langle x, x\rangle.$$

Teorema A.16 (de representación de Riesz) Sea H un espacio de Hilbert y f un funcional lineal sobre H. Son equivalentes:

1. f es continuo en H
2. Existe $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$.

Además, en estas condiciones, el punto y es único y $\|f\| = \|y\|$.

Teorema A.17 (de Riesz-Fischer) Sean H un espacio de Hilbert, $\{u_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormal y $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ una familia de escalares. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. Existe $x \in H$ tal que $\langle x, u_i\rangle = \lambda_i$ para cada $i \in I$.
2. La familia $\{|\lambda_i|^2\}_{i\in I}$ es sumable.
3. La familia $\{\lambda_i u_i\}_{i\in I}$ es sumable en H.

Teorema A.18 Sean H un espacio de Hilbert y $B = \{u_i : i \in I\}$ un sistema ortonormal de H. Son equivalentes:

1. B es una base ortonormal de H.
2. $x = \sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle u_i$ para cada $x \in H$.
3. $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle\langle u_i, y\rangle$ para todos $x, y \in H$.
4. $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2$ para cada $x \in H$ (Identidad de Parseval).
5. $\langle B\rangle$ es denso en H.

.

Definición A.19 Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador lineal y continuo. Se llama **operador adjunto** de T al único operador T^* que verifica que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todos $x, y \in H$.

Proposición A.20 Sean H un espacio de Hilbert y S, T operadores lineales y continuos de H en H, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces:

1. $(T+S)^* = T^* + S^*$.

2. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

3. $(TS)^* = S^* T^*$.

4. $(T^*)^* = T$.

5. $\|T\| = \|T^*\|$.

6. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

A.3. Series de Fourier

Definición A.21 Sea $f \in L^1[-\pi, \pi]$. Llamaremos **serie de Fourier** de f a la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int},$$

Se define la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f en el punto t como:

$$S_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt},$$

donde $\hat{f}(n)$ es el coeficiente n-ésimo de Fourier de f definido por

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

Lema A.22 Si $f \in L^p[-\pi, \pi]$ se tiene que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_p.$$

Teorema A.23 (de unicidad) Sean $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$. Si $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $f = g$ c.s.

Definición A.24 Sea n un entero no negativo

- Se define **núcleo de Dirichlet** como

$$D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}$$

- Se define **núcleo de Fejér** como

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(t)$$

Proposición A.25 Sea $f \in L^1$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $S_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$
2. $\sigma_n(f)(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} S_j(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty.$
4. $\|K_n\|_1 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f) = f$ en $L^p[-\pi,\pi]$ para toda $f \in L^p[-\pi,\pi]$, con $1 \leq p < \infty$.

Bibliografía

[1] Cascales B., Mira J.M., Orihuela J. y Raja M. "Análisis funcional" *Ediciones Electolibris*, 2012.

[2] Christensen O. "An introduction to frames and Riesz bases", *Birkhäuser,* 1966.

[3] Enflo P."A counterexample to the aproximation propety in Banach spaces", *Acta Mathematica,* No. 130, p. 109-117, 1973.

[4] Hernández E. y Weiss G."A first course on Wavelets", *CRC Press*, 1996.

[5] Katznelson, Y. "An introduction to nonharmonic analysis", *Cambridge Matematical Library*, 2004.

[6] Schauder J. "Zur theorie stetiger Abbildungen in Funktionenräumen", *Math. Zeitsch* Vol. 26 p.47-65, 1927.

[7] Shukurov A." The Power System is Never a Basis in the Space of Continuous Functions", *The American Mathemathical Monthly,* Vol. 122, No. 2 (Febrero 2015), p. 137.

[8] Singer I. "Bases in Banach Spaces I", *Springer-Verlag,* 1970.

[9] Rudin W." Functional Analysis", *McGraw-Hill,* 1991.

[10] Young R.M. "An introduction to nonharmonic Fourier series", *Academic Press,* 1980.