

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER EN INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA
CAÓTICA Y APLICACIÓN A MODELOS
NEURONALES

LUCÍA PÉREZ PÉREZ

CURSO 2014/2015

Índice

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Definiciones generales	5
1.2. Comportamiento hiperbólico	9
1.2.1. Aplicaciones lineales hiperbólicas	10
1.2.2. Comportamiento hiperbólico local	10
2. Definiciones de caos	11
2.1. Definición según Li y Yorke	11
2.1.1. Conjuntos <i>scrambled</i> y noción de caos en el sentido de Li-Yorke . .	11
2.1.2. Teorema de Marotto	13
2.2. Definición según Devaney	20
2.2.1. Transitividad y órbitas densas	20
2.2.2. Sensibilidad a las condiciones iniciales	22
2.2.3. Caos según Devaney	23
2.3. Dinámica simbólica. Definición según Block y Copell	26
2.3.1. Shift de Bernoulli	26
2.3.2. Caos según Block y Coppel	28
3. Dinámica discreta en dimensión uno	30
3.1. Algunas relaciones entre las definiciones de caos	30

3.2.	Teorema de Sarkovskii	31
3.3.	Aplicaciones tienda y tienda truncada	35
3.3.1.	Propiedades generales	35
3.3.2.	Comportamiento caótico de las aplicaciones tienda truncada	37
3.4.	La aplicación logística	41
3.4.1.	Primeras propiedades. Estudio local.	41
3.4.2.	Caos en la aplicación logística	45
4.	Dinámica en dimensiones superiores	55
4.1.	La aplicación herradura	55
4.1.1.	Construcción cualitativa de la herradura de Smale	55
4.1.2.	Dinámica simbólica para el análisis de la aplicación herradura	58
4.2.	El solenoide	61
4.2.1.	Definición y primeras propiedades	61
4.2.2.	Caos en el solenoide	63
4.3.	El atractor de Lorenz	67
4.3.1.	Primeras propiedades	67
4.3.2.	Un modelo para el atractor de Lorenz	69
4.3.3.	El atractor caótico	77
5.	Aplicaciones en neurociencia	82
5.1.	Nociones básicas en neurociencia	82
5.1.1.	Biología neuronal básica	82
5.1.2.	Los canales iónicos.	83
5.1.3.	El potencial de acción o spike.	86
5.2.	Modelos neuronales	88
5.2.1.	Modelo de Hodgkin y Huxley	89
5.2.2.	Modelo de integración y disparo (LIF)	90
5.2.3.	Modelo de resonancia y disparo (RF)	91
5.2.4.	Modelo de integración y disparo cuadrático (QIF)	91

<i>ÍNDICE</i>	III
---------------	-----

5.3. Caos en neurociencia	92
5.3.1. Modificación del modelo QIF	92
5.4. El modelo de Hindmarsh-Rose y algunas cuestiones abiertas	96
5.4.1. Bifurcaciones	96
5.4.2. Bursting	97
5.4.3. El modelo de Hindmarsh-Rose	99
5.4.4. Cuestiones abiertas	100

Apéndices

Apéndice A. Conjunto de Cantor	107
---------------------------------------	------------

Introducción

El tema de mi Trabajo de Fin de Grado del curso 2013/2014 en la Universidad de Oviedo trataba sobre el modelado de fenómenos neuronales mediante ecuaciones diferenciales. Más concretamente, desarrollamos algunos modelos clásicos del potencial de acción, el fenómeno neuronal más sencillo, y del *bursting*, un fenómeno más complejo y de gran importancia fisiológica; enunciamos algunos resultados clásicos del campo de la Teoría de Bifurcaciones y, en el marco de las bifurcaciones locales y de los sistemas *slow-fast*, presentamos una de las clasificaciones más recientes de ciertos modelos neuronales de *bursting*; finalmente, utilizamos la clasificación anterior para estudiar el modelo de *bursting* de Hindmarsh-Rose. Al realizar este estudio del modelo de Hindmarsh-Rose encontramos algunos comportamientos dinámicos que podrían estar relacionados con fenómenos caóticos.

A partir de ciertas discusiones con Santiago Ibáñez, tutor de dicho trabajo, así como con Fernando Sanz, tutor del presente, se abrió la posibilidad de abordar un estudio sobre el posible comportamiento “caótico” en ciertos modelos neuronales. Esta memoria es una de las primeras etapas para abordar dicho estudio.

Si bien el último capítulo se centra en las aplicaciones específicas de ciertos modelos neuronales, la mayor parte del contenido de este trabajo está dedicada a entender, desde el punto teórico, algunas de las nociones de “caos” que se encuentran en la bibliografía, las relaciones entre ellas, el alcance y significado de las implicaciones dinámicas que conllevan, etc. En este sentido, el presente trabajo también representa una continuación natural a los contenidos de la asignatura “Geometría de Ecuaciones Diferenciales” del

Máster de Investigación de la UVa que he cursado en 2014-15.

El término “caos” se usa en muchos aspectos de las Matemáticas. Incluso en el campo de los Sistemas Dinámicos se presenta con muchas acepciones y connotaciones distintas, incluso a veces sin definiciones precisas. Se hacía necesario para nosotros estudiar con detalle algunas de las nociones más utilizadas. Nos hemos centrado en las nociones de caos en el sentido de Devaney, en el sentido de Li-Yorke y en el sentido de Block-Coppel, siguiendo las referencias [1], [3], [12], [13], [16] y [18], principalmente. Sobre todo hemos abordado el caso de sistemas dinámicos en intervalos de la recta real. Hemos presentado también una introducción a sistemas dinámicos caóticos en dimensión superior a través de ejemplos clásicos: la aplicación de herradura de Smale, el solenoide y el atractor extraño de Lorenz.

Propongamos una brevísima (e incompleta) sinopsis histórica de cómo ha surgido y evolucionado el término “caos” en el campo de los Sistemas Dinámicos.

El objeto de estudio de los Sistemas Dinámicos es el comportamiento a largo plazo de un sistema que evoluciona a lo largo del tiempo. Cualquier sistema que evoluciona con el tiempo puede modelarse como un sistema dinámico (X, f) , compuesto por un espacio X , el conjunto de posibles estados que puede presentar el sistema, y por una aplicación $f : X \rightarrow X$, una ley de evolución que relaciona el estado del sistema en un instante determinado con su comportamiento posterior. Existen sistemas dinámicos tanto continuos (representados mediante ecuaciones diferenciales) como discretos (representados mediante ecuaciones en diferencias).

Partiendo de una cierta configuración $x_0 \in X$, se estudia la trayectoria del sistema desde esta condición inicial x_0 . La trayectoria queda determinada una vez fijada la condición inicial, dado que estamos ante sistemas deterministas. Es habitual que el sistema dinámico a estudiar sea un modelo de un cierto fenómeno de interés, pudiendo pertenecer dicho fenómeno a campos como la Física, la Biología o la Economía, entre muchos otros.

Muy frecuentemente, resulta imposible realizar mediciones exactas de las magnitudes que se estudian. Por tanto, la condición inicial que se toma para estudiar el comportamiento del modelo correspondiente es solamente aproximada, si bien es habitual que el

margen de error sea razonablemente reducido. Sin embargo, un margen de error reducido en la medición de la condición inicial de un sistema determinista no siempre garantiza la predictibilidad del mismo. La sensibilidad a las condiciones iniciales, y la consecuente impredecibilidad práctica de ciertos sistemas deterministas, ya fue observada en el siglo XIX por H. Poincaré en el famoso problema de tres cuerpos. Sin embargo, debido a la mentalidad científica del momento, el descubrimiento de Poincaré fue relegado a un segundo plano. La posibilidad de impredecibilidad en sistemas deterministas no fue tomada en cuenta hasta la década de 1960. Fue entonces cuando E. Lorenz redescubrió la sensibilidad a las condiciones iniciales al realizar experimentos numéricos con su modelo meteorológico.

En el pensamiento colectivo, la sensibilidad a las condiciones iniciales es un rasgo frecuentemente asociado a la idea de caos, así como un comportamiento complejo y extraño. Existen diversas formalizaciones matemáticas de esta idea, de manera que no existe una definición de caos universalmente aceptada, a pesar de que los estudios sobre comportamientos caóticos son abundantes en las últimas décadas. Por ello, el objetivo del presente trabajo es estudiar de manera precisa varias de las definiciones de caos más frecuentes en la bibliografía, así como su presencia en modelos conocidos.

A continuación detallaremos el contenido de cada uno de los capítulos del presente trabajo.

En el Capítulo 1 daremos las nociones básicas necesarias para entender la teoría desarrollada más adelante y algunos de los resultados más relevantes relativos a ellas. Las fuentes utilizadas en este capítulo son [1], [2], [17] y [15].

En el Capítulo 2 presentaremos las tres nociones de caos en las que nos hemos centrado: las nociones de caos de Li-Yorke, de Devaney y de Block-Coppel. En relación al caos en el sentido de Li-Yorke, detallaremos la demostración del Teorema de Marotto, que provee de una condición suficiente para determinar la presencia de esta noción de caos para el caso $X = \mathbb{R}^n$. En la sección dedicada al caos en el sentido de Devaney veremos algunos resultados en cuanto a las nociones de transitividad y de sensibilidad a las condiciones iniciales, que son dos de las condiciones para que un sistema dinámico pre-

sente caos en este sentido. Finalmente construiremos la aplicación *shift* y estudiaremos sus propiedades básicas, lo que nos permitirá presentar la noción de caos en el sentido de Block-Coppel. Las fuentes utilizadas en este capítulo son [3], [11], [16], [12], [13], [2], [1], [18] y [15].

En el Capítulo 3 veremos las relaciones entre las distintas nociones de caos para el caso en que X es un intervalo compacto. Daremos la demostración de uno de los resultados más conocidos de dinámica real unidimensional, el Teorema de Sarkovski. Una vez detectado un punto periódico de período l , este teorema permite concluir la presencia de puntos periódicos de período k para todo natural $k \triangleleft l$, siendo “ \triangleleft ” una cierta relación de orden en \mathbb{N} . Estudiaremos el comportamiento de la familia uniparamétrica de las aplicaciones tienda truncada, que presentan distintas de las nociones de caos vistas según el valor que tome su parámetro. Para ello utilizaremos los resultados vistos en el Capítulo 2. Finalmente, estudiaremos una de las familias de ecuaciones más utilizadas en el contexto de dinámica unidimensional, la aplicación logística, y su comportamiento caótico para valores adecuados de su parámetro. En este capítulo hemos utilizado las referencias [3], [1] y [17].

En el Capítulo 4 estudiaremos tres de los modelos más conocidos en el marco de los sistemas caóticos: la herradura de Smale y el solenoide, como representantes de la dinámica discreta, y el modelo de Lorenz, como representante del caso continuo. Todos ellos son modelos en dimensión superior (2 o 3), que nos permitirán ver cómo se efectúa un estudio dinámico en modelos no unidimensionales. En este capítulo hemos seguido [2], [17] y [1] como referencias.

En el Capítulo 5 veremos algunos modelos de dinámica neuronal, y probaremos que uno de ellos, de apariencia relativamente sencilla, es caótico en el sentido de Li-Yorke. Para ello utilizaremos la teoría desarrollada en el Capítulo 2. La bibliografía correspondiente a este capítulo es [9], [4], [7], [5], [8], [6] y [10].

Capítulo 1

Preliminares

Como se indicó en la Introducción, para la redacción de este capítulo hemos seguido [1], [15], [?] y [17].

1.1. Definiciones generales

Un *sistema dinámico* es un par (X, f) donde X es un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ es una aplicación continua. Consideremos un sistema dinámico dado por la iteración de cierta aplicación f en un espacio X . En este caso (X, f) es un sistema dinámico discreto. Una interpretación natural de la función f es la de una ley de evolución, de forma que, dado un punto $x \in X$, los puntos $x, f(x), f(f(x)), \dots$ pueden verse como los estados del punto original en distintos instantes de tiempo. Para $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ denotaremos por $f^n(x)$ el n -ésimo iterado de x por f . Por convención se toma $f^0 = Id$. Si f tiene inversa denotaremos, para $n < 0$, como $f^{-n}(x)$ el n -ésimo iterado de x por f^{-1} .

En las definiciones que siguen, consideraremos fijado un sistema dinámico discreto (X, f) cualquiera, aunque en muchos de los casos se pueden generalizar al caso en que X sea solamente un espacio topológico.

Un subconjunto $Y \subset X$ es *invariante* por f si $f(Y) \subset Y$. Es evidente que tanto la unión como la intersección de conjuntos invariantes es invariante. Si $Y \subset X$ es invariante por f , entonces $(Y, f|_Y)$ es un sistema dinámico discreto, llamado *restricción*.

La *órbita positiva* de x por f , $\mathcal{O}_f^+(x)$, es el conjunto de puntos

$$\mathcal{O}_f^+(x) := \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si f tiene inversa f^{-1} , la *órbita negativa* de x por f , $\mathcal{O}_f^-(x)$, es el conjunto de puntos

$$\mathcal{O}_f^-(x) := \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x), \dots\} = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

En este caso llamaremos *órbita* de p al conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) := \{\dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-1}(x), x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Diremos que un punto $p \in X$ es *periódico* si existe $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tal que $f^n(p) = p$. En los casos en que $n = 1$ diremos que el punto p es *fijo* para f . El menor entero n para el que p es un punto fijo de f^n es el *período* de p para f . Denotaremos por $Per(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f , por $Per_n(f)$ el conjunto de sus puntos periódicos de período menor o igual que n y por $Fix(f)$ el conjunto de sus puntos fijos. Se llama *órbita periódica* al conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico. Es fácil ver que $O^+(f)$, $O(f)$, $Per(f)$ y $Fix(f)$ son conjuntos invariantes.

Dado un punto fijo p de f , llamaremos *variedad estable* de p al conjunto

$$W^s(f, p) := \{q \in X : f^n(q) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$$

y, si f tiene inversa, llamaremos *variedad inestable* de p al conjunto

$$W^u(f, p) := \{q \in X : f^{-n}(q) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Si p es un punto periódico de período k , entonces las variedades estable e inestable de p son respectivamente los conjuntos

$$W^s(f, p) := W^s(f^k, p) \quad \text{y} \quad W^u(f, p) := W^u(f^k, p).$$

Dado un entorno U de un punto fijo p , llamaremos *variedad estable local* de p al conjunto

$$W^s(f, p, U) := \{q \in U : f^n(q) \in U \quad \forall n\}$$

Análogamente se define *variedad inestable local*.

Es claro que dado un punto periódico, sus variedades estable e inestable, locales o no, son las mismas que las asociadas a cualquier punto de su órbita. (Nótese que si p tiene período k y para cada $0 < s < k$, tendremos cada uno de los puntos de la órbita de p , $f^s(p)$. Basta aplicar f^{ns} en los límites de las definiciones de variedades estable e inestable. El caso de las variedades locales es trivial.)

Dado $x \in X$, diremos en un punto $y \in X$ está en el ω -límite de x si existe una sucesión $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tal que $n_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ para la que $f^{n_k}(y) \rightarrow x$ cuando $k \rightarrow \infty$. El conjunto ω -límite se denota por $\omega(x, f)$. Si f posee inversa, se define el conjunto α -límite como $\alpha(x, f) := \omega(x, f)$. Es fácil ver que

$$\omega(x, f) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\bigcap_{n \geq N} \{f^n(x)\}},$$

y que tiene el resultado análogo para el conjunto $\alpha(x, f)$. Además, ambos conjuntos son invariantes para f y f^{-1} , respectivamente.

Diremos que un punto $p \in X$ es *eventualmente periódico de período n* si no es periódico y existe $m > 0$ tal que $f^{n+i}(x) = f^i(x) \quad \forall i \geq m$.

Primeros ejemplos

La aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x + 1$ no tiene puntos fijos (basta observar que $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene raíces reales).

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Es claro que los puntos fijos son $x = 0, \pm 1$. Es inmediato comprobar que $W^s(0) = (-1, 1)$, $W^u(1) = (0, +\infty)$, $W^u(-1) = (-\infty, 0)$.

Ninguna rotación irracional tiene puntos periódicos. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $x \mapsto x + a$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sea el revestimiento universal $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Por rotación irracional entendemos la aplicación $\tilde{a} : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $a \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{a}$.

El conjunto de puntos periódicos de la aplicación $g : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $g(\theta) = 2\theta$ es denso. Sea $\theta \in \text{Per}(g)$. $g^n(\theta) = 2^n\theta = \theta + 2k\pi$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Despejando tenemos que $\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$. Es decir, los puntos periódicos de g son exactamente las $(2^n - 1)$ raíces de la unidad. Por tanto el conjunto de puntos periódicos es denso en S^1 .

Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. El punto $x = 1$ es fijo y

el punto $x = -1$ es eventualmente periódico de período 1.

Definición 1. Sean (X, f) e (Y, g) sistemas dinámicos. Diremos que (X, f) es topológicamente conjugado a (Y, g) si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f \circ h^{-1} = g$.

La conjugación topológica es claramente una relación de equivalencia. Además, si dos aplicaciones f y g son topológicamente conjugadas, también lo son f^n y g^n . Más aún, lo son por el mismo homeomorfismo. Así, las órbitas de una de las aplicaciones pueden ser estudiadas a partir de las órbitas de la otra, lo que en numerosas ocasiones facilita el análisis del comportamiento dinámico de la aplicación original.

Ejemplo 1. ▪ Las aplicaciones f_μ y g_a son conjugadas, siendo

$$f_\mu = \mu x(1 - x), a = \mu/2 \quad \text{y} \quad g_a(x) = a(1 - x^2) - 1$$

▪ Las aplicaciones f_μ y \bar{g}_b son conjugadas para $\mu \in [1, 4]$, siendo

$$b = (\mu/2)(1 - \mu/2) \quad \text{y} \quad \bar{g}_b(x) = x^2 - b$$

Demostración. g_a es conjugada a f_μ mediante el cambio de variable $h(x) = (x + 1)/2$:
 $g_a = h^{-1} \circ f_\mu \circ h$.

Por otra parte, tomando $\mu \in [1, 4]$ y definiendo el cambio de variable $h(x) = 1/2 - x/\mu$ es claro que $\bar{g}_b = h^{-1} \circ f_\mu \circ h$ con $b = (\mu/2)(1 - \mu/2)$. Notemos que restricción de los valores de μ a $[1, 4]$ es necesaria para que la relación entre los parámetros sea biyectiva (no lo es en $[0, 4]$). □

Veamos un resultado sobre la conservación de propiedades dinámicos por conjugación topológica.

Lema 1. Sean $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ aplicaciones conjugadas por un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$. Entonces $Per(f) = Per(g)$. Más aún, la conjugación conserva los períodos.

Demostración. Sea p un punto periódico de período n para f . Entonces $h(p) = h(f^n(p)) = g^n(h(p))$ y $h(p)$ es periódico para g con período n .

Recíprocamente, sea p tal que $h(p)$ es periódico para g con período n . Es decir, $g^n(h(p)) = h(p)$. Entonces $h(f^n(p)) = h(p)$, y al ser h inyectiva, $f^n(p) = p$. \square

Es fácil ver que, además, la conjugación topológica lleva conjuntos invariantes a conjuntos invariantes y variedades estables e inestables a variedades estables e inestables, respectivamente; así como que la conjugación topológica conserva los ω -límites (y por tanto los α -límites, cuando tales conjuntos están definidos).

Una noción más débil que la de conjugación topológica es la de semiconjugación topológica:

Definición 2. Sean (X, f) e (Y, g) sistemas dinámicos. Diremos que (Y, g) es un factor de (X, f) si existe una aplicación bicontinua y suprayectiva $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f \circ h^{-1} = g$. La aplicación h se llama semiconjugación topológica entre (X, f) e (Y, g) .

A diferencia del caso de la conjugación topológica, las propiedades dinámicas no son en general invariantes por semiconjugación. Sin embargo, en ocasiones es posible deducir propiedades de un sistema dinámico a partir de propiedades conocidas de otro sistema dinámico del que el primero es factor. Veremos un ejemplo de ello en el Capítulo 2.

1.2. Comportamiento hiperbólico

En esta sección daremos a conocer los resultados más importantes en relación a ciertos puntos fijos para los que localmente la dinámica es más sencilla que para puntos fijos de otro tipo, los puntos fijos hiperbólicos.

Definición 3. Sean X una variedad diferenciable y $f : X \rightarrow X$ un difeomorfismo. Sea $p \in \text{Fix}(f)$. Si todos los autovalores de $Df(p) : T_pX \rightarrow T_pX$ tienen módulo distinto de 1, diremos que p es un punto fijo hiperbólico. Si todos los autovalores de $Df(p) : T_pX \rightarrow T_pX$ tienen módulo menor que 1, diremos que p es un punto fijo hiperbólico atractor. Si todos los autovalores de $Df(p) : T_pX \rightarrow T_pX$ tienen módulo

mayor que 1, diremos que p es un punto fijo hiperbólico repulsor. Si p es un punto fijo hiperbólico no atractor ni repulsor, diremos que es un punto de silla.

1.2.1. Aplicaciones lineales hiperbólicas

Teorema 1. *Sea $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un difeomorfismo lineal hiperbólico. Entonces existen subespacios $E^u, E^s \subset \mathbb{R}^d$ invariantes por A , tales que $A|_{E^s}$ es una contracción, $A|_{E^u}$ es una expansión y $E^u \oplus E^s = \mathbb{R}^d$. Se tiene además que dos aplicaciones lineales hiperbólicas son topológicamente conjugadas si y sólo si la dimensión de su espacio estable E^s (o equivalentemente, la de su espacio inestable E^u), coincide.*

1.2.2. Comportamiento hiperbólico local

Los siguientes resultados son básicos y de uso habitual en la bibliografía.

Teorema 2 (Variedades invariantes). *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ un difeomorfismo, siendo U algún abierto de \mathbb{R}^d . Sea $x_0 \in U$ un punto fijo hiperbólico. Entonces, existe $N \subset U$ un entorno de x_0 en el cual existen las variedades locales estables e inestables $W_{loc}^s(x_0), W_{loc}^u(x_0)$ de la misma dimensión que los espacios E^s y E^u de $Df(x_0)$ respectivamente y tangentes a cada uno de ellos en x_0 .*

Teorema 3 (Hartman-Grobman). *Sea x_0 un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$, siendo U algún abierto de \mathbb{R}^d . Entonces existe un entorno $V \subset U$ de x_0 y un entorno V' del origen tal que $f|_V$ es topológicamente conjugada a $Df(x_0)|_{V'}$.*

Capítulo 2

Definiciones de caos

Intuitivamente un sistema es caótico cuando exhibe un comportamiento rico, complejo e impredecible. Es habitual escuchar que determinados sistemas son caóticos sin haber sido dada previamente una definición precisa de caos. En este capítulo presentaremos varias de las definiciones más utilizadas de caos, así como algunos resultados relacionados con ellas. Al igual que en Capítulo 1, fijaremos un sistema dinámico (X, f) .

2.1. Definición según Li y Yorke

2.1.1. Conjuntos *scrambled* y noción de caos en el sentido de Li-Yorke

Definición 4. Sean $x, y \in X$. Diremos que (x, y) es un par de Li-Yorke (para f) si se cumple:

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$
2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

Sea $S \subset X$. Diremos que S es un conjunto *scrambled* si (x, y) es un par de Li-Yorke para cada $x, y \in S, x \neq y$.

Diremos que un sistema dinámico (X, f) es un caótico en el sentido de Li-Yorke si f posee un conjunto *scrambled* no numerable.

Nota 1. En el artículo de Li y Yorke que dio lugar a su definición de caos se exigen dos condiciones más para que un sistema sea caótico. Una de ellas es que f tenga puntos periódicos de todos los períodos. Sin embargo en la mayor parte de las publicaciones en las que se menciona esta noción de caos no se considera dicha condición. La otra exigencia original de Li y Yorke es la siguiente:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0 \quad \text{para todo } x \in S, p \text{ periódico} \quad (2.1)$$

La razón de que esta condición se elimine es que es redundante. Dos puntos aproximadamente periódicos x, y no pueden satisfacer a la vez las condiciones 1 y 2 de la Definición 4. Así, existe a lo sumo un punto aproximadamente periódico que las cumpla a la vez. Basta eliminar este punto del conjunto S para ver que entonces se cumple 2.1.

Como muestra la siguiente proposición (véase [3]), la noción de caos en el sentido de Li-Yorke es invariante por conjugación topológica si X es compacto.

Proposición 1. Sean $(X, f), (Y, g)$ dos sistemas dinámicos topológicamente conjugados con X e Y compactos. Entonces (X, f) es caótico en el sentido de Li-Yorke si y sólo si (Y, g) lo es.

Sin embargo, el resultado no es cierto para espacios métricos generales, como prueba el siguiente ejemplo, obtenido de [16].

Ejemplo 2. Sea $X = [0, \infty)$. Definimos la métrica $d_1 : X \times X \rightarrow [0, 1]$ por $d_1(x, y) = 0$ si $x = y$, $d_1(x, y) = 1/2^{[x]}$ si $[x] = [y] = 1 \pmod{2}$ y $d_1(x, y) = 1$ en el resto de los casos. Definimos la aplicación $f : (X, d_1) \rightarrow (X, d_1)$ por $f(0) = 0$, $f(x) = x + 1$ si $x \in X \setminus \mathbb{Z}^+$, $f(\frac{n(n-1)}{2} + k) = \frac{n(n-1)}{2} + k + 1$ si $0 \leq k \leq n-2$ y $f(\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)) = \frac{n(n-1)}{2}$ en el resto de los casos. Definimos la métrica $d_2 : X \times X \rightarrow [0, 1]$ por $d_2(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d_2(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Definimos la aplicación $g : (X, d_2) \rightarrow (X, d_2)$ por $g(x) = f(x)$. Es fácil ver que $h : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ es un homeomorfismo (y por tanto una conjugación topológica entre f y g). Veamos que el sistema dinámico (X, f) es caótico en el sentido de Li-Yorke. Sea $S = (0, 1)$.

Para $x, y \in S$ cualesquiera con $x \neq y$,

$$\begin{aligned}
1 &> \limsup_{n \rightarrow \infty} d_1(f^n(x), f^n(y)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d_1(x+n, y+n) \\
&\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} d_1(f^{2n}(x), f^{2n}(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x+2n, y+2n) = 1.
\end{aligned}$$

Luego $\limsup_{n \rightarrow \infty} d_1(f^n(x), f^n(y)) = 1 > 0$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} d_1(f^n(x), f^n(y)) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} d_1(x+n, y+n) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x+2n+1, y+2n+1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto (X, f) es caótica en el sentido de Li-Yorke. Sin embargo, g no lo es, ya que para $x, y \in S$, $x \neq y$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d_2(g^n(x), g^n(y)) = 1.$$

En el caso en que $X = I]$ con I un intervalo compacto, es posible caracterizar la noción de caos en el sentido de Li-Yorke en términos de la presencia de puntos no aproximadamente periódicos:

Proposición 2. *Sea una aplicación continua $f : I \rightarrow I$ con I un intervalo compacto no trivial. Entonces f es caótica en el sentido de Li-Yorke si y sólo si no todo punto en I es aproximadamente periódico.*

2.1.2. Teorema de Marotto

El resultado central de esta sección, el Teorema de Marotto, da una condición suficiente que permite detectar comportamiento caótico en el sentido de Li-Yorke para sistemas dinámicos en \mathbb{R}^n . Esta condición suficiente es la presencia de un cierto tipo de punto fijo, el *snap-back repeller*, que puede considerarse un análogo discreto de una órbita homoclínica. Las referencias que hemos utilizado son [12] y [13]

Definición 5. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Sea z un punto fijo repulsor de f . Fijemos $W_{loc}^u(z)$ un entorno de z que sea una variedad inestable local. Diremos que z es un *snap-back repeller* (SBR) si existen una bola repulsora $\overline{B_r(z)}$ contenida en $W_{loc}^u(z)$ y $x_0 \neq z, x_0 \in \overline{B_r(z)}$ de manera que, si $x_k = f(x_{k-1})$, para un cierto entero M $x_M = z$ y $|Df(x_k)| \neq 0 \quad \forall 1 \leq k \leq M$.

Será de utilidad definir los siguientes conceptos auxiliares.

Definición 6. Sea z un punto fijo de una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si z es un repulsor, es decir, si todos los autovalores de $|Df(z)|$ son mayores que 1 en módulo, entonces por continuidad de Df se cumple que los autovalores de $|Df(x)|$ son mayores que 1 en módulo para $x \in B_s(z)$ para r suficientemente pequeño. En esta situación, diremos que z es repulsor en $\overline{B_s(z)}$.

Definición 7. Dada una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un punto $z \in \mathbb{R}^n$, z es un punto expansivo si existen $s > 1, r > 0$ de manera que

$$\|f(x) - f(y)\| > s\|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{B_r(z)}.$$

En estas condiciones, diremos que el punto z es expansivo en $\overline{B_r(z)}$.

Teorema 4 (Marotto). *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si f posee un snap-back repeller entonces*

1. *Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p \geq N$ hay órbitas periódicas de período p .*
2. *Existe un conjunto no numerable $S \subset \mathbb{R}^n$ invariante por f que no contiene puntos periódicos y tal que para cada $x, y \in S, x \neq y$ se tiene que*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x) - f^k(y)\| > 0$$

y para cada $p \in \text{Per}(f)$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x) - f^k(p)\| > 0.$$

3. *Existe un conjunto no numerable $S_0 \subset S$ tal que $\forall x_0, y_0 \in S_0, x_0 \neq y_0$ se tiene que*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x_0) - f^k(y_0)\| = 0$$

Corolario 1. *Si f en las condiciones anteriores posee un punto snap-back repeller, f es caótica en el sentido de Li-York.*

Es digno de mención que cuando Marotto publicó en 1978 el resultado anterior cometió el error de asumir que, para un punto fijo, ser repulsor es equivalente a ser expansivo, lo que es cierto en dimensión 1 pero no en general. Al tratarse de un error de fácil arreglo no publicó ninguna corrección hasta 2005, cuando habían aparecido diversas versiones, anunciadas como mejoradas, de su trabajo original. En su nuevo artículo alteró la definición de *snap-back repeller*, de forma que el error del artículo original queda solucionado satisfactoriamente, manteniendo el resultado más fiel a su primer intento que las versiones publicadas por otros autores. Esta definición modificada es la que hemos tomado para rehacer la demostración, para lo que es indispensable hacer la siguiente observación.

Observación 1. Si x_0 es un punto en las condiciones del Teorema 4, sin pérdida de generalidad podemos suponer que x_0 se encuentra en un entorno expansivo de z . Dicho entorno expansivo existe dado que, si bien z es tan sólo repulsor, ha sido probado que existe una cierta norma en \mathbb{R}^n para la que sí se verifica la condición de expansividad. Los detalles de este resultado pueden encontrarse en [14]. Sea $\overline{B'_s(z)}$ el entorno expansivo dado por esta nueva norma. Al encontrarse $\overline{B'_s(z)}$ en el interior de un entorno repulsor dentro de la variedad inestable local, podemos aplicar f^{-n} para cualquier n . Tenemos que $\overline{B'_s(z)}$ será invariante por f^{-n} . Dado que la sucesión $(x_k)_k$ converge a z , existirá algún punto $x'_0 \in \overline{B'_s(z)}$, de forma que $x_0 = f^k(x'_0)$ para algún entero positivo k . Además, aplicando la Regla de la Cadena y que $|Df(x_k)| \neq 0 \quad 1 \leq k \leq M$, se obtiene que $|Df^M(x'_0)| \neq 0$.

Demostración del Teorema 4.

Lema 2. Sea z un snap-back repeller para f . Para algún $s > 0$ existen $y_0 \in B(z, s)$ y un entero L tales que $f^k(y_0) \notin \overline{B(z, s)}$ para $1 \leq k \leq L$ y $f^L(y_0) = z$. Además, $|Df^L(y_0)| \neq 0$ y z es repulsor en $\overline{B(z, s)}$.

Demostración. Al ser z un snap-back repeller para algún $r > 0$ existe $x_0 \in \overline{B(z, r)}$ con $x_0 \neq z$, $f^M(x_0) = z$ y $|Df^M(x_0)| \neq 0$. Sea $x_k = f^k(x_0)$ para $k \geq 1$. Aplicando la Regla de la Cadena tenemos que $0 < |Df^M(x_0)| \leq |Df^{M-k}(x_k)| |Df^k(x_0)|$. Entonces

$$|Df^k(x_0)| \neq 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq k < M$$

y

$$|Df^{M-k}(x_k)| \neq 0 \quad \text{para } 1 \leq k < M.$$

Como $x_0 \neq z$ $x_M = z$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_{M-1} \neq z$. En caso contrario basta tomar un entero M menor, y se cumplirán las mismas propiedades que acabamos de ver.

Tenemos que f es inyectiva en $\overline{B(z, s)}$ y $f(z) = f(x_{M-1}) = z$, pero $x_{M-1} \neq z$. Luego $x_{M-1} \notin \overline{B(z, s)}$. Además, como $x_0 \in \overline{B(z, r)}$ existe un entero T con $0 \leq T < M$ tal que

$$x_t \in \overline{B(z, r)} \quad \text{y} \quad x_{T+k} \notin \overline{B(z, r)} \quad \text{para } 1 \leq k < M - T.$$

Es decir, x_T es la última iterada de x_0 que cae en $\overline{B(z, r)}$ antes de z . Notemos que $|Df^{M-T}(x_T)| \neq 0$. Sean $y_0 = x_T, L = M - T$. Si $x_T \in B(z, s)$, basta tomar $s = r$. Supongamos que $x_T \notin B(z, s)$. En este caso $\|x_T\| = r$, pues $x_T \in \overline{B(z, r)}$, y al ser z repulsor en $\overline{B(z, r)}$, por la continuidad de Df existiría $w > r$ de forma que z cumpliera esta misma condición para $\overline{B(z, w)}$. Así, para w tendríamos que $y_0 = x_T \in B(z, w)$ y $f^k(y_0) = x_{T+k} \notin \overline{B(z, w)}$ para $1 \leq k < L$. Tomando $s = w$, queda probado el resultado. \square

Lema 3. Sea $(C_k)_k$ una sucesión de compactos de \mathbb{R}^n y sea $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $C_{k+1} \subset H(C_k)$ para todo $k \geq 0$, entonces existe un compacto no vacío $C \subset C_0$ con $H^k(C) \subset C_k$ para todo $k \geq 0$.

Demostración. La demostración es similar a la del Lema 7. \square

Demostración del teorema. Sea z el punto *snap-back repeller*. Sea $x_0 \in B(z, r), x_0 \neq z, f^M(x_0) = z$ y $|Df^m(x_0)| \neq 0$, siendo $\overline{B(z, r)}$ un entorno expansivo de z (recuérdese la Observación 1).

1. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$x_0 \in B(z, r), \quad f^k(x_0) \notin \overline{B(z, r)} \quad 1 \leq k < M. \quad (2.2)$$

En caso contrario aplicaríamos el Lema 2.

Dado que $f^M(x_0) = z$ y $|Df^M(x_0)| \neq 0$, por el Teorema de la Función Inversa podemos asegurar que para algún $0 < \varepsilon < r$ existirá una función continua e inyectiva g definida en $\overline{B(z, \varepsilon)}$, con $g(z) = x_0$ y

$$g^{-1}(x) = f^M(x) \quad \text{para todo } x \in g(\overline{B(z, \varepsilon)}) := Q. \quad (2.3)$$

Utilizando 2.2, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_0 \in Q \subset \overline{B(z, r)}$ y que

$$f^m(Q) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(z, r)} \quad \text{para } 1 \leq m < M. \quad (2.4)$$

En caso contrario basta elegir ε menor.

Tenemos que $Q \subset \overline{B(z, r)}$, por tanto (utilizando de nuevo la Observación 1)

$$f^{-m}(Q) \subset \overline{B(z, r)} \quad \text{para } m \geq 0. \quad (2.5)$$

Para cualquier $x \in Q$, $f^k(x) \rightarrow z$ cuando $k \rightarrow \infty$, luego existe un entero $J = J(x) \geq 0$ tal que $f^{-j}(x) \in B(z, \varepsilon)$. Por un argumento de continuidad existe $\delta = \delta(x) > 0$ con $f^{-j}(B(x, \delta)) \subset B(z, \varepsilon)$. Consideremos la colección de bolas abiertas $D = \{B(x, \delta)/x \in Q\}$. El conjunto D es un recubrimiento abierto de Q . Al ser Q compacto, posee un subrecubrimiento finito D_0 :

$$D_0 = \{B(x_i, \delta)/i = 1, \dots, L\}.$$

Tomando $T = \max\{J(x_i)/i, \dots, L\}$ tenemos $f^{-T}(x) \in B(x, \varepsilon)$ para todo $x \in Q$.

Dado que $\varepsilon < r$,

$$f^{-k}(Q) \subset \overline{B(z, \varepsilon)} \quad \text{para } k \geq T. \quad (2.6)$$

Para cada $k \geq T$ consideremos la función $f^{-k} \circ g$ definida en $\overline{B(z, \varepsilon)}$. Esta aplicación es continua e inyectiva en su dominio de definición. Por 2.6 y por definición de Q , $f^{-k} \circ g(\overline{B(z, \varepsilon)}) \subset \overline{B(z, \varepsilon)}$. Por el Teorema del Punto Fijo de Brouwer $f^{-k} \circ g$ tiene un punto fijo $y_k \in \overline{B(z, \varepsilon)}$; es decir, $f^{-k} \circ g(y_k) = y_k$. Tenemos que $f^{M+k}(y_k) = f^M \circ g(y_k) = g^{-1} \circ g(y_k) = y_k$. Por tanto y_k es un punto fijo para f^{M+k} . Probemos que y_k tiene período $M + k$. Sabemos que $f^k(y_k) = g(y_k)$ y $y_k \in \overline{B(z, \varepsilon)}$. Entonces

$$f^k(y_k) \in Q = g(\overline{B(z, \varepsilon)}) \quad \text{para todo } k \geq T. \quad (2.7)$$

Aplicando f^{-k} en el punto $f^k(y_k)$ obtenemos que $y_k \in f^{-k}(Q)$. Tomando $m = k - n$ en 2.5 obtenemos que $f^n(y_k) \in f^{n-k}(Q) \subset \overline{B(z, r)}$ para todo m tal que $1 \leq m < M$. Además, 2.4 y 2.7 implican que $f^{m+k}(y_k) \notin B_r(z)$ para todo m tal que $1 \leq m < M$. Así,

$$\begin{aligned} f^n(y_k) &\in \overline{B(z, r)} \quad \text{para } 0 \leq n \leq k, \\ f^n(y_k) &\notin B(z, r) \quad \text{para } k+1 \leq n < M+k, \\ f^{m+k}(y_k) &= y_k. \end{aligned}$$

Por tanto y_k tiene período $M+k$. Basta elegir $N = M+T$ y $p = M+k$ para todo $k \geq T$. \square

2. Sean M, T y N como en la demostración del apartado 1. Sean U y V los compactos definidos por

$$U = f^{M-1}(Q) \quad V = \overline{B_\varepsilon(z)}.$$

Observación 2. $U \cap V = \emptyset$

Demostración Tenemos que $U = f^{M-1}(Q) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(z)}$. Como $\varepsilon < r$, entonces $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\varepsilon(z)}$. Al ser $V = \overline{B_\varepsilon(z)}$, $U \cap V = \emptyset$.

Observación 3. $V \subset f^N(U)$. *Demostración* Por definición de U , $f(U) = f \circ f^{M-1}(Q) = f^M(Q)$. Pero $f^M(Q) = f^M \circ G(\overline{B_\varepsilon(z)}) = \overline{B_\varepsilon(z)}$. Así, $f(U) = \overline{B_\varepsilon(z)}$. \square

Observación 4. $U, V \subset f^N(V)$

Demostración $f^N(V) = f^N(\overline{B_\varepsilon(z)}) \supset \overline{B_\varepsilon(z)} = V$. Una vez más utilizamos la Observación 1, ya que es la hipótesis de expansividad sobre $\overline{B_\varepsilon(z)}$ la que permite concluir la inclusión de $f^N(\overline{B_\varepsilon(z)})$ en $f^N(\overline{B_\varepsilon(z)})$. Veamos ahora que $U \subset f^N(V)$. Tomando $k = T+1$ en 2.6 obtenemos que $f^{-T-1}(Q) \subset \overline{B_\varepsilon(z)}$. Por tanto, $f^{N-T-1}(Q) \subset f^N(\overline{B_\varepsilon(z)}) = f^N(V)$. Como $U = f^{M-1}(Q) = f^{N-T-1}(Q)$, $U \subset f^N(V)$.

Sea h la aplicación definida en $\overline{B_r(z)}$ dada por $h(x) = f^N(x)$. De la observaciones previas deducimos lo siguiente:

$$\inf\{\|x - y\| : x \in U, y \in V\} > 0 \quad (2.8)$$

$$V \subset h(U), \quad U, V \subset V \quad (2.9)$$

Sea \mathcal{A} el conjunto de secuencias de la forma $E = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de manera que E_n es U o V , y si $E_n = U$ entonces $E_{n+1} = E_{n+2} = V$. Sea $R(E, n)$ el número de elementos E_i de la sucesión E tales que $E_i = U$, con $1 \leq i \leq n$. Para cada $w \in (0, 1)$ elegimos $E^w = \{E_n^w\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia que verifique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(E^w, n^2)}{n} = w.$$

Definimos $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ como $\mathcal{B} = \{E^w : w \in (0, 1)\}$. Claramente \mathcal{B} es no numerable. De 2.8 deducimos que $H(E_n^w) \supset E_{n+1}^w$. Aplicando el Lema 3, tenemos que para cada $E^w \in \mathcal{B}$ existe un punto $X_w \in U \cup V$ con $H^n(X_w) \in E_n^w$ para $n \geq 1$. Sea $S_h = \{h^n(X_w) : n \geq 0, E^w \in \mathcal{B}\}$. Entonces $H(S_h) \subset S_h$, S_h no contiene puntos periódicos de h y existe una cantidad infinita de naturales n tales que $h^n(x) \in U$ y $h^n(y) \in V$ para $x, y \in S_h$ cualesquiera (con $x \neq y$). De estas propiedades y de 2.8 deducimos que para cualquier par $x, y \in S_h$ con $x \neq y$

$$L_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|h^n(x) - h^n(y)\| > 0.$$

Tomamos $S = \{f^n(x) : x \in S_h, n \geq 0\}$. Recordando que por definición $h(x) = f^N(x)$, tenemos que $f(S) \subset S$, S no contiene ningún punto periódico de f y para cualquier par de elementos $x, y \in S$ con $x \neq y$,

$$\limsup_{n \in \infty} \|f^n(x) - f^n(y)\| \geq L_1 > 0.$$

□

3. Sea $D_n = h^{-n}(\overline{B_\varepsilon(z)})$ para cada $n \geq 0$. Al ser $\overline{B_\varepsilon(z)}$ un entorno expansivo de z , dado $\delta > 0$ existe $J = J(\delta)$ de forma que $\|x - z\| < \delta$ para todo $x \in D_n$ y $n > J$.

Esta vez exigimos a las secuencias E^w lo siguiente. Si $E_n^w = U$ entonces $n = m^2$ para algún m , y si $E_n^w = V$ para m^2 y para $(m+1)^2$, entonces $E_j^w = V$ para $j = m^2 + k$, con $k = 1, \dots, 2m$. En cuanto al resto de los elementos de la secuencia, podemos suponer que son V . Es fácil probar que $h(E_n^w) \supset E_{n+1}^w$. Por el Lema 3 tenemos que existe un punto x_w de forma que $h^n(x_w) \in E_n^w$ para todo $n \geq 0$. Definimos $S_0 = \{x_w : w \in (4/5, 1)\}$.

Entonces, S_0 es no numerable, $S_0 \subset S_h \subset S$ y para cualquier par $s, t \in (4/5, 1)$, existe una cantidad infinita de naturales m tales que $h^n(x_s) \in E_n^s = D_{2m-1}$ y $h^n(x_t) \in E_n^t$, con $n = m^2 + 1$ y m suficientemente grande. Pero dado $\delta > 0$, $\|x - z\| < \delta/2$ para todo $x \in D_{2m-1}$ y m suficientemente grande. Así, para todo $\delta > 0$ existe un entero m tal que $\|h^n(x_s) - h^n(x_t)\| < \delta$, siendo $n = m^2 + 1$. Al ser δ arbitrario,

$$L_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|h^n(x_s) - h^n(x_t)\| = 0.$$

Por tanto, para cualesquiera $x, y \in S_0$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f^n(x) - f^n(y)\| \leq L_2 = 0.$$

□

2.2. Definición según Devaney

2.2.1. Transitividad y órbitas densas

Definición 8. Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que (X, f) es transitivo (o que $f : X \rightarrow X$ es una aplicación transitiva) si para cualquier par de abiertos $U, V \subset X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Al igual que en el caso la gran mayoría de las propiedades dinámicas, la conjugación topológica conserva la transitividad.

Proposición 3. Sean $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ aplicaciones entre espacios topológicos conjugadas por un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$. Entonces (X, f) es transitivo si y sólo si (Y, g) lo es.

Demostración. Sean U', V' abiertos de X . Al ser h homeomorfismo $f^n(U') \cap V' \neq \emptyset$ si y sólo si $h(f^n(U') \cap V') \neq \emptyset$, lo que equivale, de nuevo por ser h homeomorfismo, a que $h(f^n(U')) \cap h(V') \neq \emptyset$. Al tener una correspondencia exacta entre los abiertos de X y de Y podemos escribir $U' = h^{-1}(U), h(V') = V$ para ciertos U, V abiertos de Y . Es decir, podemos escribir la última expresión como $h \circ f^n \circ h^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset$, o equivalentemente, $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Tenemos entonces que $f^n(U') \cap V' \neq \emptyset \Leftrightarrow g^n(U) \cap V \neq \emptyset$. □

La siguiente proposición permite caracterizar la noción de transitividad en términos del ω -límite de un punto del espacio. Este resultado puede encontrarse en [20], entre otros.

Proposición 4. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X compacto. Entonces (X, f) es transitivo si y sólo existe un punto $x \in X$ de forma que $\omega(x, f) = X$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$. Sean U, V dos abiertos no vacíos. Entonces existen n, m naturales positivos para los que $f^n(x) \in U, f^m(x) \in V$. Supongamos que $n > m$. Entonces $f^n(x) \in f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por tanto (X, f) es transitivo.

Supongamos que (X, f) es un sistema dinámico transitivo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, X admite un recubrimiento finito de bolas de radio n . Sea $\{U_i\}$ dicho recubrimiento. Para cada $k > 0$, $G_k = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U_k)$ es abierto y denso en X . Al ser X de Banach, por el Teorema de la Categoría de Baire existe $x \in X$ tal que $x \in G_k$ para todo k . La órbita de x interseca cada bola U_k . Por tanto la órbita de x es densa. Al ser (X, f) transitivo, $f(X) = X$. (Basta notar que $f(X) \cap V$ para cualquier abierto V , por lo que $f(X)$ en X , pero $f(X)$ es cerrado por ser la imagen continua de un compacto). Entonces existe $y \in X$ tal que $f(y) = x$. Si y es un punto de la órbita de x , x sería periódico y su omega límite (que es un conjunto cerrado) sería su órbita (que es densa). En caso contrario, y sería un punto de $\omega(x, f)$. Por tanto $x \in \omega(x, f)$ y de nuevo $\omega(x, f) = X$. \square

En mucho textos se da como noción de transitividad el que exista una órbita densa en X . Sin embargo estas dos nociones no son equivalentes. Por un lado, la existencia de órbitas periódicas no implica la condición de transitividad. Basta considerar $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la métrica usual de \mathbb{R} restringida al subespacio, y la aplicación $f : X \rightarrow X$ dada por $f(0) = 0$ y $f(1/n) = 1/(n+1)$. Por otro lado, la condición de transitividad no implica la condición de existencia de órbitas densas; un ejemplo puede construirse usando las funciones tienda que tratamos más abajo. Bajo ciertas condiciones sí es posible establecer una relación ambas nociones. Si X no posee puntos aislados entonces la existencia de una órbita densa garantiza la transitividad del sistema. Si X es separable y de segunda categoría entonces se da el resultado recíproco. Véase

[19]. Finalmente, si todas las órbitas de f son densas (se dice entonces que f es *minimal*) entonces es claro que f es transitiva. Como ejemplo de aplicación minimal y, por tanto transitiva, podemos poner una rotación de S^1 con ángulo irracional.

2.2.2. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Definición 9. Sean (X, f) un sistema dinámico y sea d la métrica asociada a X . Diremos que (X, f) es sensible respecto a las condiciones iniciales (o que la aplicación f lo es) si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo U entorno de x existen $y \in U, n = n(y)$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

La noción de sensibilidad a las condiciones iniciales claramente refleja la idea de que en un cierto sistema un pequeño error de medida en las condiciones iniciales conduce a grandes errores en la predicción del comportamiento futuro del sistema. A diferencia de la transitividad, la sensibilidad a las condiciones iniciales es una condición métrica, no topológica, que en general no se conserva por conjugación topológica. Basta considerar el caso de $X = (1, \infty), Y = \mathbb{R}^+$ (ambos conjuntos dotados de las respectivas restricciones de la métrica real usual), y las aplicaciones $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dadas por $f(x) = 2x$ y $g(y) = y + \log 2$. Es fácil ver que la aplicación $h : X \rightarrow Y$ dada por $h(x) = \log x$ conjugua f y g . Es claro que (X, f) es sensible respecto a las condiciones iniciales (con cota $\delta = 2$) y que (Y, g) no lo es (pues es una traslación). Sin embargo, en el caso de espacios topológicos compactos sí es posible concluir que la invarianza por conjugación topológica de la sensibilidad a las condiciones iniciales. El siguiente resultado puede encontrarse en [21].

Proposición 5. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ aplicaciones. Si existe $h : X \rightarrow Y$ una conjugación topológica entre f y g , entonces (X, f) es sensible respecto a las condiciones iniciales si y sólo si lo es (Y, g) .

Demostración. Notemos que al estar en espacios métricos podemos restringir nuestra atención a los entornos dados por las bolas de la métrica pertinente.

Definimos

$$e(\delta) = \inf\{d_Y(h(x), h(x'))/x, x' \in X, d_X(x, x') \geq \delta\}$$

$$r(\delta) = \sup\{d_Y(h(x), h(x'))/x, x' \in X, d_X(x, x') \leq \delta\}$$

Por un argumento de compacidad puede probarse que $\delta > 0 \Rightarrow e(\delta) > 0$ y que $r(\delta) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Supongamos que (X, f) es sensible a las condiciones iniciales ea δ_X la cota para $f : X \rightarrow X$ en la definición 9. Tomamos $\delta_Y = e(\delta_X)$. Sea $y \in Y$. Al ser h biyectiva existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$. Sean $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $r(\delta) < \epsilon$. Por ser f sensible a las condiciones iniciales existen $x' \in X$ tal que $d_x(x, x') < \delta$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(f^n(x), f^n(x')) \geq \delta_X$. Tomamos $y' = h(x')$. Tenemos entonces que

$$d_Y(y, y') = d_Y(h(x), h(x')) \leq r(\delta) < \epsilon$$

y

$$d_Y(g^n(y), g^n(y')) = d_Y(h(f^n(x)), h(f^n(x'))) \geq e(\delta_X) = \delta_Y$$

lo que prueba que g es sensible a las condiciones iniciales. \square

2.2.3. Caos según Devaney

Una vez introducidas las nociones de transitividad y sensibilidad a las condiciones iniciales podemos dar una de las nociones de caos más conocidas, el caos en el sentido de Devaney.

Definición 10. Sean (X, f) un sistema dinámico. Diremos que (X, f) es caótico en el sentido de Devaney (o que $f : X \rightarrow X$ lo es) si:

1. f es transitiva
2. $\overline{Per(f)} = X$
3. f es sensible respecto a las condiciones iniciales

Nótese que si se tiene un subconjunto $Y \subset X$ compacto e invariante por f , podemos hablar de caos para el sistema restricción $(Y, f|_Y)$.

La condición 3 es redundante en el caso de que X sea infinito, como muestra la siguiente proposición, obtenida de [18].

Proposición 6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un conjunto infinito. Entonces, si (X, f) es transitivo y $\overline{Per(f)} = X$, (X, f) es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Existe un número $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe un punto periódico $q \in X$ cuya órbita $O(q)$ está a distancia al menos $\delta_0/2$ de x . Para ver esto, tomemos dos puntos periódicos cualesquiera q_1, q_2 de órbitas disjuntas. Sea δ_0 la distancia entre sus órbitas $O(q_1), O(q_2)$. Aplicando la Desigualdad Triangular, tenemos que todo punto $x \in X$ está a distancia al menos $\delta_0/2$ de alguno de los puntos q_1, q_2 . Veamos ahora que (X, f) posee sensibilidad a las condiciones iniciales con cota $\delta = \delta_0/8$.

Sea $x \in X$ un punto cualquiera y sea U un entorno de x . Al ser los puntos periódicos de f densos en X , existe algún punto $p \in Per(f)$ en $W = U \cap B_\delta(x)$. Sea n el periodo de p . Como hemos observado antes, existe algún punto periódico $q \in X$ cuya órbita está a distancia al menos 4δ de x . Sea

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q))).$$

Es evidente que V es abierto y no vacío ($q \in V$). Al ser f transitiva, existe $y \in W$ y $k > 0$ tales que $f^k(y) \in V$. Sea j la parte entera de $k/n + 1$. Entonces $1 \leq nj - k \leq n$. Por construcción

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subset B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Pero $f^{nj}(p) = p$, y aplicando de nuevo la Desigualdad Triangular,

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) = d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) = d(p, x)$$

siendo d la métrica de X . Por tanto, dado que $p \in B_\delta(x)$ y $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$, tenemos que

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Utilizando una vez más la Desigualdad Triangular concluimos que $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$ o $d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$. En cualquiera de los casos, tenemos un punto en U cuya nj -ésima iterada por f está a distancia mayor que δ de $f^{nj}(x)$. Es decir, queda probado que (X, f) posee sensibilidad respecto a las condiciones iniciales. \square

En el caso en que $X = I$ con I un intervalo compacto, es fácil ver que la noción de caos en el sentido de Devaney queda reducida a la condición de transitividad, como muestra la siguiente observación, que puede encontrarse en [15].

Observación 5. Sea (I, f) un sistema dinámico con I un intervalo compacto. Entonces, si (I, f) es transitivo, es caótico en el sentido de Devaney.

Demostración. Por la Proposición 6 es suficiente ver que $\overline{P(f)} = I$. Al ser (I, f) transitivo, $\Omega(f) = I$, y tenemos que $\overline{P(f)} = \Omega f|_{\Omega(f)} = I$. \square

Del Lema 1 y de las proposiciones ?? y ?? deducimos el siguiente teorema:

Teorema 5. Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos topológicamente conjugados. Entonces (X, f) es caótico en el sentido de Devaney si y sólo si (Y, g) lo es.

Además, en ocasiones es útil tener en cuenta el siguiente resultado, que puede encontrarse en [22].

Teorema 6. Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos de forma que (Y, g) es un factor de (X, f) . Entonces, si (X, f) es caótico en el sentido de Devaney también lo es (Y, g) .

El siguiente ejemplo ilustra que una aplicación aparentemente sencilla, como es la duplicación del ángulo en S^1 , puede presentar comportamiento caótico en el sentido de Devaney.

Ejemplo 3. La aplicación $g : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $g(e^{2i\pi\theta}) = (e^{2i\pi\theta})^2$ es caótica.

Demostración. Para probar la transitividad es suficiente comprobar que se cumple para abiertos básicos, es decir, arcos. Consideremos la aplicación $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{g}(x) = 2x$. Es claro que $g \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{g}$, siendo $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ el revestimiento universal.

Dado cualquier par de intervalos es claro que, por iteración de \tilde{g} , el menor de ellos finalmente cubre el mayor. Por tanto se tiene la misma propiedad para g . En particular, g es transitiva.

En cuanto a la densidad de puntos periódicos, recuérdese que quedó probada en el Capítulo 1 (Primeros ejemplos). \square

2.3. Dinámica simbólica. Definición según Block y Copell

Para realizar esta sección hemos seguido [1].

2.3.1. Shift de Bernoulli

A continuación presentaremos una de las aplicaciones más conocidas en el marco de los sistemas dinámicos definidos por iteración de aplicaciones, el *shift* de Bernoulli. Como veremos, está fuertemente relacionada con otra de las definiciones más conocidas de sistema caótica, el caos en el sentido de Block-Copell. Comenzaremos presentando el espacio en el que actúa la aplicación *shift* y, una vez definida ésta, estudiaremos algunas de sus propiedades más relevantes.

Definición 11. El espacio de secuencias binarias es el conjunto $\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2 \dots) / s_j = 0, 1 \ \forall j\}$

Podemos convertir este conjunto en un espacio métrico definiendo la distancia

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Dado que $|s_i - t_i| = 0, 1$, $d(s, t)$ es una serie mayorada por $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$, por tanto converge. Es inmediato comprobar que d es una métrica en Σ_2 . Como se indica en el Apéndice A, Σ_2 es un conjunto de Cantor.

Definición 12. Llamamos aplicación *shift* de Bernoulli, y denotamos por σ , a la aplicación $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ dada por $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$.

Lema 4. Sean $s, t \in \Sigma_2$ tales que $s_i = t_i$ para $i = 0 - n$. Entonces $d(s, t) \leq 1/2^n$. Recíprocamente, si $d(s, t) < 1/2^n$, entonces $s_i = t_i$ para $i = 0 - n$.

Demostración. Si $s_i = t_i$, entonces

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^n \frac{s_i - t_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Por otra parte, si $s_j \neq t_j$ para algún $j \leq n$, entonces

$$d(s, t) > \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

□

Proposición 7. 1. El shift de Bernouilli σ es continuo.

2. $\#Per_n(\sigma) = 2^n$.

3. $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma_2$.

4. Existe una órbita periódica densa para σ en Σ_2 .

Demostración. Veamos que se cumple 1. Sean $\varepsilon > 0$ y $s = (s_0 s_1 \dots)$. Tomamos n tal que $1/2^n < \varepsilon$. Sea $\delta = 1/2^{n+1}$. Si $t = (t_1 t_2 \dots)$ cumple $d(s, t) < \delta$, entonces por 4 tenemos que $s_i = t_i \quad \forall i \leq n+1$. Por tanto $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq 1/2^n < \varepsilon$.

Probemos ahora el punto 2. Basta notar que los puntos periódicos de σ son exactamente las secuencias formadas por cadenas que se repiten, es decir, secuencias de la forma $s = (s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots)$. Hay 2^n puntos periódicos de período menor o igual que n , ya que son las posibles combinaciones de longitud n que se pueden formar con dos símbolos.

Probemos ahora el punto 3. Dado un punto cualquiera $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots) \in \Sigma_2$, busquemos una sucesión $(s_n)_n \subset Per(\sigma)$ tal que $s_n \rightarrow \tau$. Basta definir, para cada n , el elemento s_n de Σ_2 periódico de período n cuyas n primeras coordenadas coincidan con las de τ . Por el Lema ?? tenemos que $d(\tau, s_n) \leq 1/2^n$, por lo que $s_n \rightarrow \tau$.

Probemos ahora el punto 4. Basta definir

$$\bar{s} = (\underbrace{01}_{1\text{-bloques}} \mid \underbrace{00011011}_{2\text{-bloques}} \mid \underbrace{000001010001\dots}_{3\text{-bloques}} \mid \dots)$$

donde por n -bloques entendemos los bloques de símbolos formados por todas las combinaciones posibles de 0's y 1's de n elementos. Veamos que para cada n_0 natural, la órbita de \bar{s} para la aplicación composición σ^{n_0} es densa. Al no poseer Σ_2 puntos aislados, esto probará la existencia de un conjunto ω -límite de un punto que es el total. Es evidente que dado cualquier punto de Σ_2 , es decir, cualquier secuencia s de 0's y 1's, existe alguna iteración $\sigma^n(\bar{s})$ arbitrariamente cercana a s , teniendo en cuenta la definición la distancia de la que hemos dotado al conjunto Σ_2 y que σ^n actúa sobre una secuencia eliminando sus n primeros símbolos. \square

Hemos visto en la Proposición 4 que la transitividad es equivalente a la existencia de un punto x para el cual $\omega(x) = X$. Del hecho de que la sensibilidad a las condiciones iniciales es redundante en la definición de caos según Devaney (Proposición 6), tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2. *El shift de Bernouilli $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es caótico en el sentido de Devaney.*

2.3.2. Caos según Block y Coppel

Definición 13. Una aplicación continua (X, f) con X compacto es caótico en el sentido de Block-Copell si existe $M \in \mathbb{N}$ y un subconjunto compacto $Y \subset X$ invariante por f^M tal que $f^M|_Y$ es semiconjugada al shift σ .

Como era de esperar, esta nueva definición de caos tiene un buen comportamiento en cuanto a conjugación topológica, como se establece en el siguiente enunciado.

Proposición 8. *Sean X, Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ aplicaciones continuas topológicamente conjugadas. Entonces f es caótica en el sentido de Block-Coppel si y sólo si g lo es.*

Las siguientes definiciones son necesarias para poder reformular la definición de caos en el sentido de Block-Coppel en un lenguaje que en ocasiones resulta más útil.

Definición 14. Un punto $x \in X$ es aproximadamente periódico para $f : X \rightarrow X$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe un punto periódico $z \in X$ tal que $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(z)) < \varepsilon$.

Definición 15. Sea I un intervalo real no trivial, es decir, no vacío ni unipuntual. Una aplicación $f : I \rightarrow I$ es turbulenta si existen subintervalos compactos $J, K \subset I$ con a lo sumo un punto en común y de forma que $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$. Si además J y K son disjuntos f es estrictamente turbulenta.

La siguiente proposición caracteriza la noción de caos en el sentido de Block-Coppel en el caso de $X = I$ con I un intervalo.

Proposición 9. *Una aplicación continua $f : I \rightarrow I$ con I un intervalo compacto no trivial es caótica en el sentido de Block-Copell si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones equivalentes:*

- f^m es turbulenta para algún $m \in \mathbb{N}$
- f^m es estrictamente turbulenta para algún $m \in \mathbb{N}$
- f tiene algún punto periódico cuyo período no es una potencia de 2

Capítulo 3

Dinámica discreta en dimensión uno

En este capítulo presentaremos algunos resultados sobre sistemas dinámicos en la recta real o en intervalos de la recta real. La mayor parte de las nociones que se han recogido en esta memoria proceden del estudio de sistemas dinámicos en dimensión uno. Además, existen muchos ejemplos de dinámica unidimensional que ilustran suficientemente los comportamientos caóticos más conocidos.

3.1. Algunas relaciones entre las definiciones de caos

En el caso de X un intervalo compacto es posible derivar algunas relaciones entre las nociones de caos que hemos definido previamente. Los resultados que enunciaremos en esta sección pueden encontrarse en ???. Fijaremos (I, f) un sistema dinámico con I un intervalo compacto no trivial. En estas condiciones las nociones de Devaney y de Black-Coppel resultan ser equivalentes, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 7. *(I, f) caótico en el sentido de Devaney si y sólo si lo es en el sentido de Black-Coppel.*

Además, la noción de Li-Yorke resulta ser la más débil de las tres:

Teorema 8. *Si (I, f) en el sentido de Black-Coppel, lo es en el sentido de Li-Yorke.*

Finalmente, el siguiente resultado provee de un criterio para probar que un sistema no posee caos en el sentido de Li-Yorke ni, por tanto, en ninguno de los otros dos sentidos que hemos visto.

Proposición 10. *Si (I, f) es caótico en el sentido de Li-Yorke, entonces $f : I \rightarrow I$ posee infinitos puntos periódicos.*

3.2. Teorema de Sarkovskii

En esta sección enunciaremos y demostraremos uno de los resultados más fuertes que aportan información sobre los puntos periódicos de un sistema dinámico discreto unidimensional, el Teorema de Sarkovskii.

Teorema 9 (Sarkovskii). *Consideremos la siguiente reordenación de los números naturales:*

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \cdots 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Si f tiene un punto periódico de período l , entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \triangleleft l$, f tiene un punto periódico de período k .

A lo largo de la demostración de este resultado utilizaremos varios lemas.

Lema 5. *Sea I un intervalo cerrado y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $I \subset f(I)$, entonces f tiene algún punto fijo en I .*

Demostración. Dado que $I \subset f(I)$, existen $\alpha_0, \alpha_1 / \alpha_0 - f(\alpha_0) \geq 0$ y $\alpha_1 - f(\alpha_1) \leq 0$. Por el Teorema de Bolzano, existe $\beta \in [\alpha_0, \alpha_1]$ tal que $f(\beta) - \beta = 0$. \square

Lema 6. *Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua e I un intervalo. Entonces para todo I_1 intervalo compacto tal que $I_1 \subset f(I)$ existe $Q \subset I$ tal que $f(Q) = I_1$.*

Demostración. Dado que $I_1 \subset f(I)$, I_1 será de la forma $[f(p), f(q)]$ para ciertos $p, q \in I$. Supongamos $p < q$ (el caso $p > q$ es análogo). Definimos $r = \max\{x \in [p, q] : f(x) = f(p)\}$, $s = \min\{x \in [p, q] : f(x) = f(q)\}$. El intervalo Q buscado es $[r, s]$, pues $f([r, s]) = I_1$ por construcción. \square

Lema 7. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua e I un intervalo. Sea $\{I_n\}_n \subset I$ una sucesión de intervalos tales que $I_{n+1} \subset f(I_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\{Q_n\}_n$ sucesión de intervalos compactos tales que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$, $f^n(Q_n) = I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Definimos $Q_0 = I_0$. Obviamente $f^0(Q_0) = I_0$. Supongamos que la propiedad se cumple hasta un cierto natural $n - 1$. Tenemos un intervalo Q_{n-1} tal que $f^{n-1}(Q_n) = I_{n-1}$. Entonces $I_n \subset f(I_{n-1}) \subset f^n(Q_{n-1})$. Veamos que entonces $\exists Q_n$ en las condiciones deseadas. Aplicando el lema 6 a f^n , I_n y Q_{n-1} encontramos Q_n compacto cumpliendo que $Q_n \subset Q_{n-1}$. \square

Prueba del Teorema de Sarkovskii. De aquí en adelante, dados I, J intervalos tales que $J \subset f(I)$, escribiremos $I \rightarrow J$.

Supongamos primero que f posee puntos periódicos de período impar mayor que uno. Sea n el mínimo número impar con $n > 1$ tal que f tiene un punto periódico x de período n . Sean $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ los puntos de la órbita de x . Claramente $f(x_n) < x_n$, pues $f(x_n) = x_i$ para cierto $i \neq n$. Sea $i = \max\{j/f(x_j) > x_j\}$. Sea $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$. Dado que $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$, tenemos que $f(x_{i+1}) \leq x_i$. Además $x_i < f(x_i)$ entonces $x_{i+1} \leq f(x_i)$. Por tanto $I_1 \subset f(I_1)$. Es decir, tenemos $I_1 \rightarrow I_1$.

Se tiene $f(x_i) \neq x_{i+1}$ o $f(x_{i+1}) \neq x_i$. De otro modo, x_i sería un punto de período 2, lo que obligaría a que $x = x_i$ fuera de período 2, contra la suposición de que su período n es impar. Luego $f(x_{i+1}) \neq x_i$ ó $f(x_i) \neq x_{i+1}$. Entonces $f(I_1)$ contiene algún intervalo de la forma $[x_j, x_{j+1}]$, $i \neq j$. Veamos que sólo contiene un intervalo de esta forma. Sea \mathcal{O}_2 la unión de los intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ contenidos en $f(I_1)$. Tenemos que $I_1 \subset \mathcal{O}_2$ y $I_1 \neq \mathcal{O}_2$. Si I_2 es otro intervalo de \mathcal{O}_2 , por definición de \mathcal{O}_2 tendremos que $I_2 \subset f(I_1)$, es decir, $I_1 \rightarrow I_2$.

Sea \mathcal{O}_3 la unión de los intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ contenidos en la imagen de algún intervalo de \mathcal{O}_2 . Debido a que $I_1 \in \mathcal{O}_2 \Rightarrow I_1 \subset f(I_1)$ se tiene que $I_1 \in \mathcal{O}_3$. Deducimos también entonces que $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3$. Inductivamente se define \mathcal{O}_{l+1} como el conjunto de los intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ contenidos en la imagen de algún intervalo de \mathcal{O}_l . Se tiene

que \mathcal{O}_l forma una sucesión creciente de conjuntos. Por otro lado, si I_{l+1} es un intervalo de \mathcal{O}_{l+1} tenemos I_2, \dots, I_l con $I_j \subset \mathcal{O}_j$ de forma que $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_l \rightarrow I_{l+1}$. Dado que tenemos un número finito de intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$, en algún momento la sucesión $\{\mathcal{O}_n\}_n$ se estaciona, es decir, existe l tal que $\mathcal{O}_{l+1} = \mathcal{O}_l$.

Afirmación Hay al menos un intervalo de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ distinto de I_1 en algún \mathcal{O}_k cuya imagen cubre I_1 . Esto se debe a que, al ser n impar, necesariamente hay más puntos de la órbita a un lado del intervalo I_1 que al otro. Por tanto, al aplicar f algunos de estos puntos se mantendrán al mismo lado de I_1 y otros no. Así, habrá algún intervalo $[x_j, x_{j+1}] \neq [x_i, x_{i+1}] = I_1$ de forma que, si $x_{j+1} \leq x_i$, $f(x_j) \geq x_{i+1}$ y $f(x_{j+1}) \leq x_i$ o $f(x_j) \leq x_i$ y $f(x_{j+1}) \geq x_{i+1}$, y análogamente en el caso $x_j \geq x_i$.

Existen entonces cadenas de intervalos $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ donde cada intervalo I_l es de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ para algún j y con $I_1 \neq I_2$. Tomamos k el menor entero posible para el que existe una cadena de esa forma que fijamos y que denotamos por $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$.

De la cadena $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ obtenemos que $i_1 \subset f^k(I_1)$ y, usando el Lema 1, tendríamos un punto fijo de f^k , esto es, un punto periódico de período un divisor de k . De la misma manera, de la sucesión $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ obtendríamos un punto periódico de período un divisor de $k+1$. Uno de los dos números k o $k+1$ es impar y por la minimalidad de n que hemos considerado tenemos la siguiente

Afirmación. $k = n - 1$.

Debido a la minimalidad con que hemos definido k , 'para los intervalos de la sucesión considerada no es posible que $I_a \rightarrow I_b$ si $b > a + 1$ '. Luego los puntos de la órbita de x están ordenados o bien como indica la Figura 3.1 o bien como en su imagen simétrica especular respecto a I_1 .

Tenemos entonces que se da el diagrama indicado en la Figura 3.2.

Veamos ahora que para cada m impar con $m > n$ existe un punto periódico de período m (parte del Teorema de Sarkovskii para períodos impares). Por ejemplo, un punto de período $n+2$ se obtiene a partir del ciclo $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$. (Observemos que esta sucesión tiene $n+3$ elementos y que, por tanto,

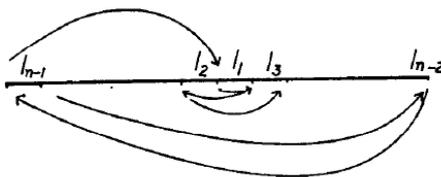


Figura 3.1: Una de las dos posibles ordenaciones de los puntos de la órbita de x . La otra posibilidad es la imagen simétrica.

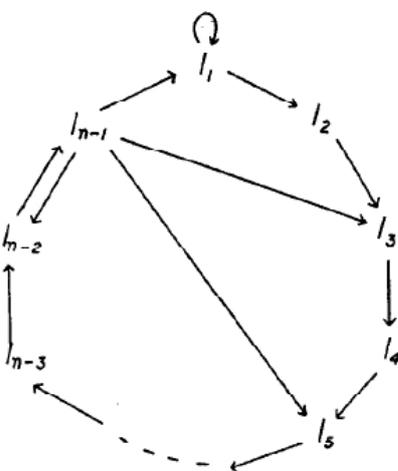


Figura 3.2: Ciclos formados a partir de los intervalos I_i para x punto fijo de periodo impar y mayor que 3.

I_1 contiene un punto fijo de f^{n+2} .)

Tenemos entonces que en el caso n impar el teorema se cumple. Los períodos mayores que n se obtienen a partir de ciclos de la forma $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$. Los períodos pares menores vienen dados por ciclos de la forma $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$, $I_{n-1} \rightarrow I_{n-4} \rightarrow I_{n-3} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$, etc.

Para el resto de los casos utilizaremos la siguiente observación: si n es par, f tendrá un punto periódico de período 2. Si algunos puntos cambian de lado respecto a I_1 y otros no, utilizando los argumentos anteriores tenemos que existe un punto periódico

de período 2, teniendo en cuenta que $I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$ y $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2}$. Si todos los puntos cambiasen de lado, $[x_{i+1}, x_n] \subset f([x_1, x_i])$ y $[x_1, x_i] \subset f([x_{i+1}, x_n])$ y entonces también tendríamos un punto periódico de período 2 en $[x_1, x_i]$.

Estudieemos ahora el caso en que f tiene un punto periódico de período $n = 2^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sea $k = 2^l$, con $l < m$. Definimos $g = f^{k/2}$. Claramente $g = f^{2^{l-1}}$. Al tener f un punto fijo de período $n = 2^m$ por hipótesis, g lo tiene de período 2^{m-l+1} . Entonces g tendrá un punto periódico de período 2. Tal punto tendrá período 2^l para f .

El caso restante es el de $n = p \cdot 2^m$, con p impar. Veamos primero que f tiene algún punto periódico de período $k = q \cdot 2^m$ para cualquier $q > p$, q impar. Sea $g = f^{2^m}$. Dado que f tiene un punto periódico de período $p \cdot 2^m$, g lo tiene de período m (impar). Hemos visto que entonces g tiene algún punto periódico de período q con q un impar cualquiera mayor que p . Este punto tiene período $q \cdot 2^m$ para f .

Veamos ahora que tiene algún punto periódico de período $k = q \cdot 2^l$, $l > m$. Sea $g = f^m$. Entonces g tiene un punto periódico de período p . Luego tendrá algún punto periódico de período $q \cdot 2^{l-m}$, $l > m$. Tal punto tiene período $q \cdot 2^l$ para f .

Finalmente veamos que f tiene algún punto periódico de período $k = 2^l$ para $l > m$. Basta notar que podemos usar el razonamiento anterior, pues $2^l = 2^{l-m} \cdot 2^m$. - \square

3.3. Aplicaciones tienda y tienda truncada

En esta sección introduciremos una familia de aplicaciones del intervalo $[0,1]$ en sí mismo: las llamadas aplicaciones tienda y las aplicaciones tienda truncadas. Su construcción es muy sencilla (son aplicaciones afines a trozos) pero presentan comportamientos dinámicos bastante ricos. Las usaremos para mostrar diferencias entre las distintas nociones de caos. Todo el contenido de esta sección la hemos tomado del artículo ??.

3.3.1. Propiedades generales

Definimos la aplicación tienda como la aplicación $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ afín a trozos determinada por los valores $g(0) = 0, g(1/2) = 1, g(1) = 0$ y que es afín en restricción a

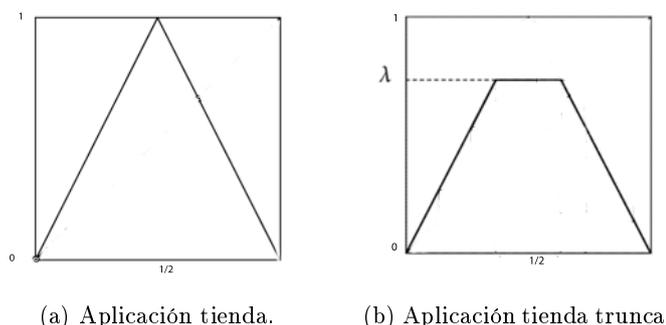


Figura 3.3: Gráficas de las aplicaciones tienda y tienda truncada.

$[0, 1/2]$ y en restricción a $[1/2, 1]$. Véase la Figura 3.3 (a).

Una modificación de esta aplicación es considerar un peso $\lambda \in [0, 1]$ y definir $g_\lambda[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por $g_\lambda(x) = \min\{\lambda, g(x)\}$. A tal modificación se la llama aplicación tienda truncada. Véase la Figura 3.3 (b).

Es fácil ver que dados $0 \leq \lambda \leq \gamma \leq 1$, g_λ y g_γ coinciden en el conjunto $J_\lambda = [0, \lambda/2] \cup [1 - \lambda/2, 1]$ y que las órbitas (periódicas) de g_γ en J_λ también son órbitas (periódicas) de g_λ . Más aún, al ser g_λ constante en el intervalo abierto $K_\lambda = (\lambda/2, 1 - \lambda/2)$, g_λ tiene a lo sumo un punto periódico en $\overline{K_\lambda}$.

Para la aplicación tienda original $g = g_1$ puede probarse que $\{2/7, 4/7, 6/7\}$ es una órbita periódica. Por tanto, aplicando el Teorema de Sarkovskii, tenemos que g posee órbitas periódicas de todos los períodos. Puede probarse que el conjunto de puntos de período m de g tiene a lo sumo 2^m elementos. Es decir,

$$\text{card}\{x \in [0, 1] : x \in \text{Per}(g) \text{ con período } m\} \leq 2^m \quad (3.1)$$

Entonces el número

$$\lambda_n = \min\{\lambda \in [0, 1] : g \text{ tiene un punto periódico de período } 2^n \text{ en } [0, \lambda]\}$$

está bien definido. Además λ_n es un punto periódico de período 2^n de $g \quad \forall n$. Como $\lambda_n \in [0, 1]$, $\lambda_n/2 \in [0, 1/2]$ y $g(\lambda_n/2) = \lambda_n$. Además $\lambda_n < 1 < 2 - \lambda_n$, por lo que $1/2 \in (\lambda_n/2, 1 - \lambda_n/2 = K_{\lambda_n})$. Así, $1 = g(1/2) \in g(K_{\lambda_n})$. Por tanto $g(K_{\lambda_n}) = (\lambda_n, 1]$.

Puede comprobarse que entonces $O_{\lambda_n}(g) \subset J_{\lambda_n}$. Dado que g y g_{λ_n} coinciden en J_{λ_n} , λ_n es un punto periódico también para g_{λ_n} (del mismo período que para g).

Probemos ahora que el conjunto de periodos de puntos periódicos de g_{λ_n} es el conjunto de potencias de dos $\{2^i : i = 0, \dots, n\}$, es decir,

$$\{2^i : i = 0, \dots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : x \in Per(g_{\lambda_n}) \text{ con período } k\} \quad (3.2)$$

En efecto, si g_{λ_n} tuviera puntos periódicos de períodos distintos a dichas potencias, por el Teorema de Sarkovski, tendría un punto periódico de periodo m con $m \triangleright 2^n$ para cualquier n . Sea γ la órbita periódica correspondiente. Como λ_n es el único punto periódico en K_{λ_n} , necesariamente $\gamma \subset J_{\lambda_n}$. Sea $\rho = \max \gamma < \lambda_n$, es decir, el mayor de los puntos de la órbita de γ . La aplicación g_ρ y por tanto también g_{λ_n} tienen una órbita periódica de período 2^n en $[0, \rho] \cup J_\rho$. Esto contradiría la minimalidad de λ_n .

Por tanto, la sucesión $(\lambda_n)_n$ es estrictamente creciente, ya que en caso contrario existirían dos índices $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ para los que $\lambda_m \leq \lambda_n$ de forma que la aplicación g_{λ_n} tendría una órbita periódica de período 2^n en $[0, \lambda_m)$ y de nuevo tendríamos una contradicción con la minimalidad de λ_n . Como la sucesión $(\lambda_n)_n$ está acotada por 1, existirá el límite

$$\lambda^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n. \quad (3.3)$$

Se tiene que λ^* es menor que $6/7$, ya que $g_{6/7}$ tiene puntos periódicos de todos los períodos (aplicando el Teorema de Sarkovskii). También sabemos que es mayor que $4/5$, pues $\lambda_2 = 4/5$.

3.3.2. Comportamiento caótico de las aplicaciones tienda truncada

A continuación veremos cuál es el comportamiento de la familia de las aplicaciones tienda truncadas en cuanto a las distintas nociones de caos que hemos estudiado en el Capítulo 1, según los valores que tome el parámetro λ .

1) Para $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ la aplicación g_λ no es caótica en ninguno de los tres sentidos de caos.

Demostración. Para cualquier $\lambda \in [0, \lambda^*)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < \lambda_n$. Por tanto cualquier órbita periódica de g_λ en J_λ es también una órbita periódica para g_{λ_n} . Por otra parte, g_{λ_n} tiene un número finito de puntos periódicos por 3.1 y 3.2 (sólo tiene puntos periódicos de la forma 2^i con $i = 0, \dots, n$, y una cantidad finita de cada uno de ellos. Así, también g_λ tiene un número finito de puntos periódicos, ya que al menos una órbita periódica de g_{λ_n} tiene intersección no vacía con K_λ . Por tanto, aplicando la Proposición 10 g_λ no puede ser caótica en el sentido de Li-Yorke. Aplicando 7 y 8, tampoco en los sentidos de Devaney ni de Block-Coppel. \square

2) Para $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ la aplicación g_λ es caótica en el sentido de Li-Yorke pero no en el de Block-Coppel ni en el de Devaney.

Demostración. En ?? se prueba que no todos los puntos en $[0, 1]$ son aproximadamente periódicos para g_{λ^*} (véase el ejemplo 29 del Capítulo 6). Por tanto g_{λ^*} es caótica en el sentido de Li-Yorke por la Proposición 2. Por otra parte, si g_{λ^*} fuera caótica en el sentido de Block-Copell, por la Proposición 9 existiría un número impar $q > 1$ tal que g_{λ^*} tendría una órbita periódica γ de período $q2^k$ para algún $k \geq 0$. Definamos $p = \max \gamma$. Si $p < \lambda^*$ tendríamos $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda_n > p$ de forma que γ sería una órbita periódica de g_{λ_n} . Esto contrariaría 3.3. En el caso $p = \lambda^*$ tendríamos, aplicando el Teorema de Sarkovskii, que g_{λ^*} tendría una órbita periódica Q de período $(q+2)2^k$, pero entonces $\max Q < \lambda^*$ y tendríamos también una contradicción. Luego g_{λ^*} no puede ser caótica en el sentido de Block-Copell. De nuevo utilizando 7, deducimos que tampoco en el sentido de Devaney. \square

3) Para $\lambda^* < \lambda \leq 1$ la aplicación g_λ es caótica en los tres sentidos de caos estudiados.

Demostración. La demostración se basa en varios lemas, que veremos a continuación.

Lema 8. *La aplicación tienda original $g = g_1$ es caótica en el sentido de Devaney, por lo que g tiene un punto periódico $\rho \in [\lambda^*, \lambda]$.*

Demostración. Para ello probaremos que la aplicación tienda es topológicamente conjugada a la aplicación logística $f_4 = 4x(1-x)$, que es caótica en el sentido de Devaney, como

veremos en la Proposición 15 de la siguiente sección. Construyamos el homeomorfismo que conjuga ambas aplicaciones. Definimos $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por $h(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{2}$. Veamos que es homeomorfismo y que conjuga las aplicaciones tienda original y logística de parámetro $\mu = 4$.

Es biyectiva y continua evidentemente, por tanto, al ser $[0, 1]$ compacto y de Hausdorff, es homeomorfismo. Veamos que conjuga g y f_4 .

$$(f_4 \circ h)(x) = 4 \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{2} \right) \left(1 - \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} \right) = 1 - \cos^2(\pi x) = \sin^2(\pi x)$$

Si $x \leq 1/2$:

$$(h \circ g)(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} = \frac{1 - (1 - 4\sin^2(\pi x))}{2} = \sin^2(\pi x)$$

Si $x \geq 1/2$:

$$(h \circ g)(x) = \frac{1 - \cos(2\pi - 2\pi x)}{2} = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} = \sin^2(\pi x)$$

□

Lema 9. *La aplicación g_ρ es caótica en el sentido de Block-Coppel, donde $\rho \in [\lambda^*, \lambda]$ es un punto periódico de g_1 según el Lema 8.*

Demostración. Notemos que ρ es un punto periódico de g_ρ . Esto se debe a que $\mathcal{O}_g(\rho) \cup K_\rho = \emptyset$, y entonces $\mathcal{O}_g(\rho) = \mathcal{O}_{g_\rho}(\rho)$, o $g^j(\rho) \in K_\rho$ para algún $j \in \mathbb{N}$ minimal, y entonces $g_\rho^{j+1}(\rho) = \rho$. El caso de ρ periódico de período m para g_ρ para algún $m \in \{\mathbb{N} \setminus \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}\}$ resulta inmediato, ya que en este caso tenemos que g_ρ es caótica en el sentido de Block-Copell gracias a la Proposición 9. Asumiremos entonces que ρ es un punto periódico de período de la forma 2^n para g_ρ . Definimos los intervalos

$$K = [g_\rho^{2^n}(\lambda_{n+1}), \lambda_{n+1}] \quad J = [\lambda_{n+1}, \rho]$$

y veremos que existe un natural N con la propiedad

$$K \cup J \subset g_\rho^N(K) \cap g_\rho^N(J) \tag{3.4}$$

lo que junto a la Proposición 9 nos permitirá concluir que g_ρ es caótica en el sentido de Block-Copell. Notemos primero que los intervalos K y J están bien definidos ya que $\rho > \lambda^*$ y $\mathcal{O}_{g_\rho}(\lambda_{n+1}) = \mathcal{O}_g(\lambda_{n+1})$. Dado que ρ es periódico de período 2^n tenemos que

$$K \cup J \subset g_\rho^{2^n}(J) \quad (3.5)$$

Para probar que para algún $r \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$K \cup K \subset g_\rho^r(K) \quad (3.6)$$

usaremos la siguiente propiedad, válida para $\tau \in [0, 1], j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |g_\tau^j(x) - g_\tau^j(y)| &= 2^j|x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1]/ \\ g_\tau^i(x), g_\tau^i(y) &\geq 1 - \tau/2 \text{ o } g_\tau^i(x), g_\tau^i(y) \leq \tau/2, i = 0, 1, \dots, j. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando 3.7 y que λ_{n+1} y $g_\rho^{2^n}(\lambda_{n+1})$ son periódicos de período 2^{n+1} para g_ρ , tenemos que existe $j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ con la propiedad siguiente:

$$\begin{aligned} g_\rho^j(\lambda_{n+1}) < \rho/2 \quad \text{y} \quad g_\rho^{2^n+j}(\lambda_{n+1}) > 1 - \rho/2 \quad \text{o} \\ g_\rho^j(\lambda_{n+1}) > 1 - \rho/2 \quad \text{y} \quad g_\rho^{2^n+j}(\lambda_{n+1}) < \rho/2 \end{aligned}$$

Tomamos entonces $\rho \in g_\rho^{j+1}(K)$. Entonces $[\lambda_{n+1}, \rho] \subset g_\rho^{j+1}(K)$. Con $r = 2^n + j + 1$ la condición 3.6 se satisface. Usando 3.6, 3.5 y definiendo $N = r + 2^n$ vemos que se cumple 3.4 y por tanto g_ρ^N es turbulenta. La Proposición 9 nos permite concluir que g_ρ es caótica en el sentido de Block-Copell. \square

Por último, dado que g_ρ es caótica en el sentido de Black-Copell, existe una órbita periódica P de período p para g_ρ en J_ρ para algún $p \in \mathbb{N}, p \notin \{2^n/n \in \mathbb{N}\}$. Al ser $\lambda > \rho$ la órbita P también es periódica de período p para g_λ y por tanto g_λ es caótica en el sentido de Block-Copell, aplicando la Proposición 9. Por 7 y ?? tenemos que también es caótica en los sentidos de Devaney y de Li-Yorke. \square

3.4. La aplicación logística

En el último tercio del siglo XX el físico y biólogo Robert May planteó el siguiente modelo de dinámica de poblaciones de insectos.

$$x_{n+1} = ax_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right).$$

En este modelo la variable x_n representa el número de individuos en la n -ésima generación y el parámetro a la tasa de reproducción. Partió de las premisas de que no existe superposición de generaciones (los padres mueren antes de que eclosionen los huevos) y de que existen recursos limitados (el número de individuos no puede superar un cierto valor K). El modelo de May se formula como Adimensionalizando esta ecuación se obtiene la conocida ecuación logística en tiempo discreto $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$; es decir, el sistema dinámico discreto dado por la aplicación

$$f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$$

algunas de cuyas propiedades estudiaremos a lo largo de la presente sección.

En principio consideramos f_μ como una aplicación de \mathbb{R} en \mathbb{R} , si bien, dado el significado de la variable x en el modelo, los valores razonables de la misma son los que se encuentran en el intervalo $[0, 1]$. Por ello May, al hacer un análisis de la ecuación, restringió el parámetro μ al intervalo $[0, 4]$, que como veremos, es el que hace que el intervalo $[0, 1]$ sea invariante.

A partir de este momento, para cada $\mu \in [0, 4]$ denotamos por $g_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a la restricción de f_μ al intervalo $I = [0, 1]$; de esta manera consideramos, para cada $\mu \in [0, 4]$, el sistema dinámico (I, g_μ) .

3.4.1. Primeras propiedades. Estudio local.

Comencemos probando que efectivamente (I, g_μ) es un sistema dinámico para $\mu > 4$.

Proposición 11. *El intervalo $I = [0, 1]$ es invariante por f_μ si y sólo si $\mu \in [0, 4]$.*

Demostración. Al ser f_μ una aplicación continua es suficiente demostrar que la imagen de los puntos críticos y de los extremos del intervalo permanecen en el mismo. Es claro que $f_\mu(0) = f_\mu(1) = 0 \quad \forall \mu$. Por otra parte

$$f'_\mu(x) = -2\mu x + \mu = 0 \Leftrightarrow x = 1/2; f_\mu(1/2) = \mu/4 \in [0, 1] \Leftrightarrow \mu \in [0, 4]$$

□

Veamos cómo se comporta la aplicación f_μ fuera del intervalo I .

Proposición 12. *Sea $\mu > 1$. Si $x \notin I = [0, 1]$, entonces $(f_\mu^n(x))_n \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Sea $x < 0$. Entonces $f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x > 1$, y tenemos que $0 > x > f_\mu(x) > \dots > f_\mu^n(x) > \dots$ es una sucesión decreciente. O bien está acotada o bien diverge a $-\infty$. Si estuviera acotada, convergería a algún punto fijo, que sería un punto negativo, pero sabemos que tal punto no existe. Luego tenemos el resultado probado en el caso $x < 0$.

En cuanto al caso $x > 1$, basta notar que $f_\mu(x) < 0$ y aplicar el razonamiento anterior. □

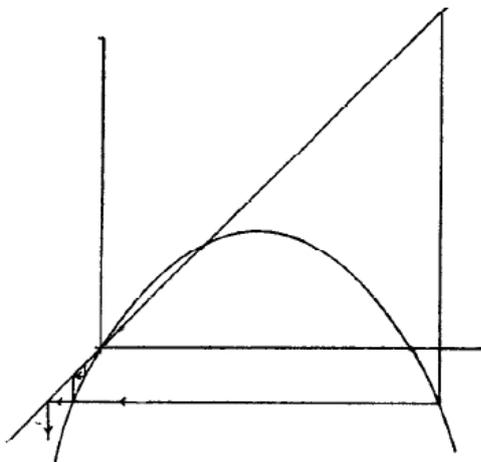


Figura 3.4

A continuación estudiaremos la evolución de los distintos puntos por la aplicación, según su situación y según los distintos valores del parámetro μ .

Proposición 13. ■ *El punto $x = 0$ es el único punto fijo de g_μ para $\mu \in [0, 1]$. Además es un atractor global del sistema.*

- *Los puntos $x = 0, x = p = 1 - 1/\mu$ son los únicos puntos fijos de g_μ para $\mu \in (1, 4]$. El punto $x = 0$ es repulsor. El punto $x = p$ es asintóticamente estable para $\mu \in [1, 3]$ y repulsor para $\mu \in (3, 4]$.*

Demostración. Comencemos observando que

$$g_\mu(x) = \mu x(1 - x) = x \Leftrightarrow \mu x^2 + (1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = p = 1 - 1/\mu$$

Tenemos que $p > 0 \Leftrightarrow \mu > 1$. Por tanto los puntos fijos del sistema están totalmente determinados.

Tenemos que $|g'_\mu(0)| = \mu$, por lo que en el caso $\mu < 1$ el origen es un atractor. De hecho es un atractor de todo el intervalo, ya que $g_\mu(x) < x$ para todo $x \neq 0$.

En el caso $\mu = 1$ tenemos que $|g'_1(0)| = 1$; es decir, el origen es un punto hiperbólico. Pese a ello es fácil determinar que es un punto asintóticamente estable, ya que $g_1(x) = x(1 - x) < x \quad \forall x \neq 0$: de nuevo es un atractor global.

Supongamos ahora que $\mu \in (1, 3)$. En este caso el punto $x = 0$ es repulsor, ya que $|g'_\mu(0)| = \mu > 1$. El punto $x = p$ se encuentra en el intervalo $(0, 1)$ y cumple que $|g'_\mu(0)| = |2 - \mu| < 1$. Es decir, $x = p$ es un punto atractor. Análogamente se tiene que para $\mu \in (3, 4]$ el punto $x = p$ es repulsor. \square

Proposición 14. *Si $\mu \in (1, 3)$, $g_\mu^n(x) \rightarrow p \quad \forall x \in (0, 1)$.*

Demostración. Caso $1 < \mu \leq 2$

La aplicación alcanza su máximo en el punto $x = 1/2$. Teniendo en cuenta el rango del parámetro μ , tenemos que $g_\mu(1/2) = \mu/4 \leq 1/2$. Además, dado que $1 < \mu \leq 2$, tenemos que $p \leq 1/2$. La aplicación es creciente en $(0, p)$ y es fácil ver que su grafo se encuentra por encima de la diagonal. Deducimos entonces que para $x \in (0, p)$, $(g_\mu^n(x))_n$ es una

sucesión creciente que necesariamente converge a p . En el intervalo $(p, 1/2]$ la aplicación es creciente y el grafo se mantiene por debajo de la diagonal. Para $x \in (p, 1/2]$, $(g_\mu^n(x))_n$ es una sucesión creciente que tiende a p . En el caso $x \in (1/2, 1)$, $g_\mu(x) \in (0, 1/2)$, luego $g_\mu^n(x) \rightarrow p$.

Caso $2 < \mu < 3$

Se tiene en este caso que $p > 1/2$. Consideremos primero el intervalo $[1/2, p]$. Es fácil ver que g_μ^2 es monótona en $[1/2, p]$. Por tanto para hallar su imagen basta hallar la de los extremos del intervalo. Tenemos que $g_\mu^2([1/2, p]) = g_\mu([p, \mu/4]) = [\mu(\mu/4)(1 - \mu/4), p]$. Veamos que esta imagen está contenida en $[1/2, p]$, es decir, que $\mu(\mu/4)(1 - \mu/4) > 1/2$, o equivalentemente, que $\mu^3 - 4\mu^2 + 8 = (\mu - 2)(\mu^2 - 2\mu - 4) < 0$. Las raíces de $\mu^2 - 2\mu - 4$ son $1 \pm \sqrt{5}$, luego este factor es negativo, pues $\mu < 3$. El factor $\mu - 2$ es positivo, luego el producto de ambos factores es negativo y tenemos que $g_\mu^2(1/2) = \mu(\mu/4)(1 - \mu/4) > 1/2$ y por tanto $g_\mu^2([1/2, p]) \subset [1/2, p]$. Dado que g_μ^2 es monótona en $[1/2, p]$, el grafo de g_μ^2 corta a la diagonal una vez en $[1/2, p]$, en p . Al encontrarse el grafo de g_μ^2 sobre la diagonal pero por debajo de $1/2$ en $[1/2, p]$, todos los puntos de este intervalo convergen a p .

Consideremos ahora el intervalo $[\bar{p}, 1/2]$, siendo $\bar{p} = 1/\mu < 1/2$. Tenemos que $g_\mu(\bar{p}) = p$, $g_\mu([\bar{p}, 1/2]) = g_\mu([1/2, p])$ y $g_\mu^2([\bar{p}, 1/2]) \subset [1/2, p]$. Luego todos los puntos de $[\bar{p}, 1/2]$ convergen a p .

Estudiemos ahora el intervalo $(0, \bar{p})$. La aplicación g_μ es creciente en este intervalo, y su grafo se encuentra sobre la diagonal. Entonces $(g_\mu^n(x))_n$ es creciente mientras se mantiene en este intervalo. Dado que $g_\mu(\bar{p}) = p$, la primera vez que una de las iteradas de x deja este intervalo, es decir, la primera vez que la sucesión lo abandona, dicha iterada debe encontrarse en $[\bar{p}, p]$; es decir, $g_\mu^k(x) \in [\bar{p}, p]$ para cierto k . Entonces $(g_\mu^{k+j}(x))_j$ converge a p .

Por último analicemos el intervalo $(p, 1)$. En este caso $g_\mu(x) \in (0, p)$, luego convergerá a p .

□

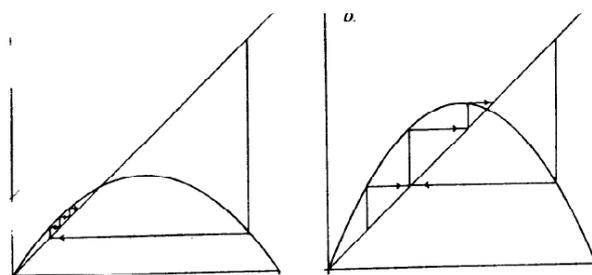


Figura 3.5

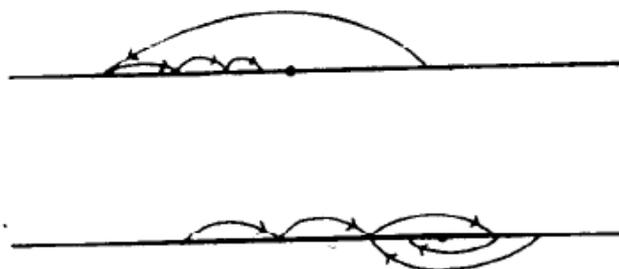


Figura 3.6

3.4.2. Caos en la aplicación logística

Comportamiento caótico en el caso $\mu = 4$

Comencemos estudiando el sistema dinámico (I, g_μ) con $\mu = 4$. (Recordemos que para $\mu = 4$ el intervalo $I = [0, 1]$ es invariante por g_μ .)

Proposición 15. *El sistema dinámico (I, g_μ) es caótico en el sentido de Devaney para $\mu = 4$.*

Demostración. Sea $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $g(e^{2i\pi\theta}) = e^{4i\pi\theta}$. En el Ejemplo 3 hemos visto que (\mathbb{S}^1, g) es un sistema dinámico caótico en el sentido de Devaney. A partir de este hecho probaremos que (I, g_4) es un sistema caótico en el sentido de Devaney. Aplicando los teoremas 7 y 8 tendremos que es un sistema caótico en los sentidos de Li-Yorke y de Block-Coppel. Sea $h_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow [-1, 1]$ dada por $h_1(e^{2i\pi\theta}) = \cos\theta$. Es decir, h_1 es la proyección de \mathbb{S}^1 al eje horizontal. Sea $q : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ la aplicación dada por

$q(x) = 2x^2 - 1$. Tenemos que

$$h_1 \circ g(\theta) = \cos(2\theta) = 1\cos^2\theta - 1 = q \circ h_1(\theta).$$

Al ser h_1 bicontinua y suprayectiva, tenemos que $([-1, 1], q)$ es un factor de (\mathbb{S}^1, g) .

Por otra parte, q y g_4 son topológicamente conjugadas mediante la aplicación $h_2(t) = \frac{1}{2}(1-t)$. Luego g_4 es un factor de g . Al ser (\mathbb{S}^1, g) caótico (véase el Ejemplo 3) y gracias al Teorema 6, concluimos que (I, g_4) es también caótico. \square

Caso $\mu > 4$: conjunto de Cantor invariante para la aplicación logística

Veamos ahora un resultado sobre propiedades caóticas de la aplicación logística. Recordemos que hemos fijado $I = [0, 1]$ y que si $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación logística de parámetro μ , entonces estamos interesados en la restricción $g_\mu = f_\mu|_I : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sin embargo la imagen de I por g_μ no está contenida en I para $\mu > 4$ y, por tanto, g_μ no define un sistema dinámico en el espacio I . Aquí probamos que el subespacio de I en el que g_μ define un sistema dinámico es un conjunto de Cantor. Más precisamente:

Teorema 10. *Sea $\mu > 4$ y sea $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación logística de parámetro μ . Entonces el conjunto $\Lambda_\mu = \{x/f_\mu^n(x) \in I \ \forall n \geq 0\}$ es un conjunto de Cantor.*

Fijemos $\mu > 4$. Definimos $h_\mu : \Lambda_\mu \rightarrow \Lambda_\mu$ como la aplicación dada por $h_\mu(x) = f_\mu(x)$. Para probar que Λ_μ es un conjunto de Cantor necesitaremos fijar cierta notación.

Con $\mu > 4$ fijado, existe un intervalo abierto A_0 en el que g_μ toma valores superiores a 1. En este intervalo A_0 se tiene que $g^2(x) < 0$, y por tanto $(g_\mu(x))_n \rightarrow -\infty$. Los puntos extremos de A_0 van a parar al 0 al cabo de un cierto número de iteraciones por g_μ , por lo que dichos puntos están en Γ_μ . Sea A_1 la antiimagen de A_0 por g_μ . El conjunto A_1 está formado por dos intervalos abiertos en I , cada uno a un lado de A_0 . Los extremos de los intervalos que forman A_1 son puntos fijos para alguna iteración de g_μ . Por inducción podemos construir una sucesión de conjuntos A_n , de manera que cada A_n sea el conjunto de puntos de I tales que su imagen por g_μ^n está en A_0 . Denotemos por I_1 y por I_2 los intervalos cerrados que forman $I \setminus A_0$, de forma que I_1 sea el izquierdo e I_2 el derecho. Definimos

$$I_{i_0, \dots, i_{n-1}} = \bigcup_{k=0}^{n-1} g_\mu^{-k}(I_{i_k}) = \{x \in I : g_\mu^k(x) \in I_{i_k} \text{ para } 0 \leq k \leq n-1\} \text{ con } i_k \in \{1, 2\}$$

$$S_n = \bigcup_{k=0}^n g_\mu^{-k}(I) = \bigcup_{k=0}^{n-1} g_\mu^{-k}(I_1 \cap I_2) = \bigcap_{i_0, \dots, i_{n-1} \in \{1, 2\}} I_{i_0, \dots, i_{n-1}}$$

Lema 10. Sea $\mu > 4$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente.

1. Para todo $\{i_0, \dots, i_{n-1}\} \in \{1, 2\}^n$, $I_{i_0, \dots, i_{n-1}} \cap S_n = I_{i_0, \dots, i_{n-1}, 1} \cup I_{i_0, \dots, i_{n-1}, 2}$ (es unión disjunta de dos intervalos cerrados no vacíos que son subconjuntos de $I_{i_0, \dots, i_{n-1}}$).
2. Si $(i_0, \dots, i_{n-1}) \neq (i'_0, \dots, i'_{n-1})$ entonces $I_{i_0, \dots, i_{n-1}} \cap I_{i'_0, \dots, i'_{n-1}} = \emptyset$. Por tanto S_n es unión de 2^n intervalos disjuntos.
3. La aplicación $g_\mu : I_{i_0, \dots, i_{n-1}} \subset S_n \longrightarrow I_{i_1, \dots, i_{n-1}} \subset S_{n-1}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Inducción sobre n . Para $n = 0$, $S_0 = I = [0, 1]$ y es resultado es evidente. Supongamos que el lema es cierto para n y veamos que entonces es cierto para $n + 1$. Sea $I_{i_0, \dots, i_{n-1}}$ una componente de S_n . Entonces $g_\mu(I_{i_0, \dots, i_{n-1}}) = I_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ es una componente de S_{n-1} , y $I_{i_1, \dots, i_{n-1}} \supset I_{i_0, \dots, i_{n-1}} \cap S_n = I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1} \cup I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 2}$. Entonces

$$I_{i_0, \dots, i_{n-1}} \cap S_{n+1} = g_\mu^{-1}(S_n) \cap I_{i_0, \dots, i_{n-1}} = f_\mu^{-1}(S_n \cap I_{i_1, \dots, i_{n-1}}) \cap I_{i_0} = \\ [g_\mu^{-1}(I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1}) \cup g_\mu^{-1}(I_{i_1, \dots, i_{n-1}, 2})] \cap I_{i_0}$$

es unión de dos intervalos cerrados no vacíos, cerrados y disjuntos. Tenemos que la condición (1) se cumple. Dado que hay 2^n posibilidades para el conjunto $\{i_0, \dots, i_{n-1}\}$, S_n es la unión de $2(2^n) = 2^{n+1}$ intervalos. Luego tenemos la condición (2). La aplicación g_μ es monótona en $I_{i_0, \dots, i_{n-1}, j}$, luego es un homeomorfismo de este conjunto en su imagen, $I_{i_1, \dots, i_{n-1}, j}$, por lo que la condición (3) también se cumple. \square

Posteriormente utilizaremos este lema para probar que Γ_μ es perfecto y denso en ninguna parte. Sin embargo, para ello es necesario probar que la longitud (asociada a la distancia euclídea) de las componentes tiende a cero cuando n tiende a infinito. Para

lograrlo utilizaremos una medida auxiliar construída a partir de una función de densidad adecuada. Comencemos asociado a una función de densidad ρ , por el momento cualquiera satisfaciendo ciertas hipótesis que detallaremos a continuación, una distancia d_ρ .

Definición 16. Sea ρ una función de densidad estrictamente positiva y continua en un intervalo J ; es decir, $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente positiva y continua que verifica que su integral sobre J es 1. Si $x, y \in J$, la ρ -distancia de x a y se define como

$$d_\rho(x, y) = \left| \int_x^y \rho(t) dt \right|.$$

Es fácil ver que d_ρ define una métrica en J . Fijado un punto x , la aplicación ρ define una longitud o norma vectorial dada por $\|v\|_{\rho, x} = |v|\rho(x)$, donde $|v|$ es la norma usual del vector v . Trabajaremos con esta nueva norma $\|\cdot\|_{\rho, x}$ y posteriormente con una cierta función de densidad ρ para la que tendremos que la medida de las componentes de S_n tienda a cero. La siguiente observación será clave para aplicar nuestras conclusiones sobre la norma $\|\cdot\|_{\rho, x}$ a la distancia euclídea.

Observación 6. Si se tiene que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1 \leq \rho(x) \leq C_2$ para todo $x \in J$, entonces

$$C_1|x - y| \leq d_\rho(x, y) \leq C_2|x, y| \quad \forall x, y \in J.$$

En este caso tenemos una sucesión encajada de intervalos cuya ρ -longitud tiende a cero, por lo que la longitud usual de ellos también tenderá a cero.

Posteriormente utilizaremos el siguiente lema técnico.

Lema 11. Sean J un intervalo y $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de densidad positiva. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^∞ . Si existe $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{\rho(f(x))|f'(x)|}{\rho(x)} = \frac{\|f'(x)v\|_{\rho, f(x)}}{\|v\|_{\rho, x}} \geq \lambda \quad \forall x \in J'$$

siendo J' un subintervalo de J con $f(J) \subset J$, entonces

$$L_p(f(J')) \geq \lambda L_p(J').$$

Demostración.

$$\begin{aligned} L_p(f(J')) &= \left| \int_{t \in f(J')} \rho(t) dt \right| = \left| \int_{s \in J} \rho(f(s)) f'(s) ds \right| \quad \text{con } t = f(s) \\ &\geq \int_{s \in J'} \left| \frac{\rho(f(s)) f'(s)}{\rho(s)} \right| \rho(s) ds \geq \int_{s \in J'} \lambda \rho(s) ds = \lambda L_p(J') \end{aligned}$$

□

El siguiente lema relaciona una condición de acotación en la norma $\|\Delta\|_{\rho,x}$ con una condición de acotación en la norma usual (euclídea).

Lema 12. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ . Sea J un intervalo y $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de densidad positiva tal que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ para las que $C_1 \leq \rho(x) \leq C_2 \quad \forall x \in J$. Supongamos que existe $\lambda > 0$ tal que*

$$\|f'(x)v\|_{\rho, f(x)} \geq \lambda \|v\|_{\rho, x} \quad \forall x, f(x) \in J.$$

Entonces, tomando $C = C_1/C_2 \leq 1$, se cumple que

$$|(f^n)'(x)v| \geq C\lambda^n |v| \quad \forall n \geq 0, x \in J.$$

Demostración. Basta utilizar que las normas son uniformemente equivalentes:

$$|(f^n)'(x)v| \geq C_2^{-1} \|(f^n)'(x)v\|_{\rho, f^n(x)} \geq C_2^{-1} \lambda^n \|v\|_{\rho, x} \geq C_2^{-1} C_1 \lambda^n |v|$$

□

Para usar el Lema 11 podemos elegir la función de densidad ρ . Para definir una métrica sobre la que podamos aplicar los resultados vistos utilizaremos el conocido Lema de Schwarz.

Lema 13. *Sea $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. Sea $f : D \rightarrow D$ analítica con $f(0) = 0, f(D) \neq D$. Entonces $|f'(0)| < 1$.*

Corolario 3. Sea $f : D \rightarrow D$ una función compleja analítica con $f(D) \neq D$. Sea $\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$. Entonces

$$\frac{\rho(f(z))|f'(z)|}{\rho(z)} = \frac{\|f'(z)v\|_{\rho, f(z)}}{\|v\|_{\rho, x}} < 1 \quad \forall z \in D$$

Demostración. Sean $z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$. Para $j = 1, 2$ existen transformaciones

$$T_j(z) = \frac{a_j - z}{1 - \bar{a}_j z}$$

con $|a_j| < 1, T_1(w_0) = z_0, T_2(w_0) = 0$ preservan D . $T_2 \circ f \circ T_1(0) = 0$. Las transformaciones lineales fraccionarias preservan la longitud de los vectores en términos de la norma $\|\cdot\|_{\rho, x}$, por lo que

$$1 = \frac{\|T_2'(w_0)\|_{\rho, 0}}{\|1\|_{\rho, w_0}} = \frac{\|T_1'(0)\|_{\rho, x_0}}{\|1\|_{\rho, 0}}.$$

Por el Lema de Schwarz

$$1 > |(T_2 \circ f \circ T_1)'(0)| > \frac{\|T_2'(w_0)\|_{\rho, 0}}{\|1\|_{\rho, w_0}} \frac{\|f'(z_0)\|_{\rho, w_0}}{\|1\|_{\rho, x_0}} \frac{\|T_1'(0)\|_{\rho, x_0}}{\|1\|_{\rho, 0}} = \frac{\|f'(z_0)\|_{\rho, w_0}}{\|1\|_{\rho, z_0}}.$$

□

La norma $\|\cdot\|_{\rho, x}$ se llama norma de Poincaré, y la métrica que induce se denomina la métrica de Poincaré.

Lema 14. Sea $\rho(x) = (x(1-x))^{-1}$ en $(0, 1)$. Entonces para $\mu > 4$ y $x, g_\mu(x) \in (0, 1)$,

$$\frac{\rho(g_\mu(x))|g'_\mu(x)|}{\rho(x)} = \frac{\|g'_\mu(x)\|_{\rho, g_\mu(x)}}{\|1\|_{\rho, x}} > 1.$$

Demostración. Consideremos $\tilde{g}_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como la función compleja dada por $\tilde{g}_\mu(z) = \mu z(1-z)$. Sea $D_{1/2}$ el disco de radio $1/2$ centrado en $1/2$. Es claro que \tilde{g}_μ lleva círculos de radio r centrados en $1/2$ en círculos de radio μr^2 centrados en $\mu/4$ de forma suprayectiva, pues $\tilde{g}_\mu(1/2 + re^{i\theta}) = \mu/4 - \mu r^2 e^{i2\theta}$. En particular \tilde{g}_μ lleva el círculo de radio $1/2$ en el de radio $\mu/4$ centrado de $\mu/4$. Para $\mu > 4$, \tilde{g}_μ lleva el círculo de radio $1/2$ al exterior de $D_{1/2}$. Además $z = 1/2$ es el punto crítico de \tilde{g}_μ , y para $\mu > 4$, este punto está fuera del disco $D_{1/2}$: $f_{1/2}(1/2) = \mu/4 > 1$. Entonces $\tilde{g}_\mu(D_{1/2})$ cubre $D_{1/2}$ de forma 2 a 1. Tenemos que \tilde{g}_μ^{-1} tiene dos ramas llevando $D_{1/2}$ a sí mismo y cada una de ellas es inyectiva. (Las

ramas se corresponden a la inversa de la aplicación restringida a los intervalos I_1, I_2 . Al haber dos ramas de la aplicación inversa, es suprayectiva en $D_{1/2}$. Por el Corolario 3, cada una de estas inversas es una contracción en términos de la métrica en $D_{1/2}$, por tanto \tilde{g}_μ es una expansión para los puntos cuya imagen está en el disco $D_{1/2}$.

Veamos que la norma de Poincaré está en $D_{1/2}$. Es claro que la aplicación $h(z) = 2z - 1$ lleva $D_{1/2}$ al disco unidad D de forma suprayectiva. Si $\rho(\psi) = (1 - \psi\bar{\psi})^{-1}$ es la norma de Poincaré en D , entonces $\rho \circ h(z) = [4z\bar{z} - 2z - 2\bar{z}]^{-1}$. Para $z \in \mathbb{R}$ esta igualdad nos da un valor proporcional a la norma establecida en el lema. Para obtener la norma deseada basta definir $\|v\|_{.,z} = \|h'(z)v\|_{\rho, h(z)}$. Dado que $h'(z) = 2$, tenemos la norma inducida $\|v\|_{.,z} = |v|[2z\bar{z} - z - \bar{z}]^{-1}$, que en el caso en que $z = x \in \mathbb{R}$ es $|v|2^{-1}[x(1-x)]^{-1}$. Aplicando esta norma dos veces obtenemos la norma del enunciado. \square

Proposición 16. *Sea $\mu > 4$. Sea $\rho(x) = [(x + \epsilon)(1 + \epsilon - x)]^{-1}$ en $(0, 1)$. Entonces para $\epsilon \in (0, \mu/4 - 1)$ y $x, g_\mu(x) \in (0, 1)$ se cumple que*

$$\frac{\|g'_\mu(x)\|_{\rho, g_\mu(x)}}{\|1\|_{\rho, x}} = \frac{\rho(g_\mu(x))|g'_\mu(x)|}{\rho(x)} > 1.$$

Demostración. Modificaremos la demostración del Lema 14 para que la función h lleve el disco de radio $1 + \epsilon$ centrado en $1/2$ al disco unidad D . Para ello tomamos

$$h(z) = 2(1 + 2\epsilon)^{-1}(z - 1/2).$$

De esta forma la norma inducida es

$$\|v\|_{.,z} = \frac{(1 + 2\epsilon)2^{-1}}{(x + \epsilon)(1 + \epsilon - x)}$$

Como antes, esta norma inducida es, salvo constante, la que se establece en el enunciado. Para obtener el resultado basta probar que \tilde{g}_μ lleva el punto crítico $z = 1/2$ fuera del disco $D_{1/2+\epsilon}$ de radio $1/2 + \epsilon$ centrado en $1/2$ y que $f_\mu(D_{1/2+\epsilon})$ cubre $D_{1/2+\epsilon}$ de forma 2 a 1.

Para probar la primera condición es conveniente recordar (véase la demostración del Lema 14) que \tilde{g}_μ lleva el punto crítico $z = 1/2$ al punto $\mu/4$; por tanto necesitamos $\epsilon > 0$ tal que $\mu/4 > 1 + \epsilon$ o $\epsilon < \mu/4 - 1$, que tenemos por hipótesis.

Para probar la segunda condición, tengamos en cuenta que, como se vio en la demostración del Lema 14, \tilde{g}_μ lleva círculos de radio r centrados en $z = 1/2$ en círculos de radio μr^2 centrados en $\mu/4$. Necesitamos entonces que $\mu(1/2 + \epsilon)^2 > \mu/4 + \epsilon$, condición que se cumple para $\epsilon > 0$ y $\mu > 4$. Tomando $\epsilon \in (0, \mu/4 - 1)$ tenemos el resultado. \square

Para $\mu > 4$ esta proposición demuestra que la ρ -medida de los intervalos $I_{i_0, \dots, i_{n-1}}$ está acotada por λ^{-n} , y por tanto la norma euclídea está acotada por $C\lambda^{-n}$ para cierto $C > 0$.

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 10.

Prueba del Teorema 10. El conjunto Λ_μ es cerrado por ser intersección de los conjuntos S_n , que son cerrados. Al ser acotado es además compacto. Veamos que es perfecto y nunca denso. Sea $p \in \Lambda_\mu$. Para $j \in \mathbb{N}$, tomamos n tal que $C\lambda^{-n} < 2^{-j}$. Entonces $p \in I_{i_0, \dots, i_{n-1}}$ para algún $\{i_0, \dots, i_{n-1}\} \in \{1, 2\}^n$. Tenemos que $I_{i_0, \dots, i_{n-1}} \cap S_{n+1} = I_{i_0, \dots, i_{n-1}, 1} \cup I_{i_0, \dots, i_{n-1}, 2}$, utilizando el Lema 10. Tomamos $y_j \in I_{i_0, \dots, i_{n-1}} \setminus S_{n+1}$ y q_j un punto extremo de I_{i_0, \dots, i_n} , eligiendo I_n tal que $p \notin I_{i_0, \dots, i_n}$. Entonces y_j no está en S_{n+1} y por tanto no está en Λ_μ . Tenemos una secuencia $(y_j)_j$ que converge a p con $y_j \notin \Lambda_\mu$; es decir, $p \notin \text{int}(\Lambda_\mu)$. Hemos probado entonces que $\text{int}(\overline{\Lambda_\mu}) = \text{int}(\Lambda_\mu) = \emptyset$. Por tanto Λ_μ es denso en ninguna parte. Además tenemos que $q_j \neq p$, $q_j \in \Lambda_\mu$ y $(q_j)_j \rightarrow p$. Por tanto Λ_μ es perfecto. \square

Dinámica simbólica para el análisis de la aplicación logística

A continuación veremos la relación existente entre la aplicación *shift* definida en el Capítulo 2 y la aplicación logística.

Definición 17. Sean I_0 el conjunto de puntos de Λ_μ menores que $1/2$ e I_1 el conjunto de puntos de Λ_μ mayores que $1/2$. El itinerario de un punto $x \in \Lambda_\mu$ es una secuencia $S(x) \in \Sigma_2$ dada por $s_j = 0$ si $h_\mu^j(x) \in I_0$, $s_j = 1$ si $h_\mu^j(x) \in I_1$, donde como antes $h_\mu : \Lambda_\mu \rightarrow \Lambda_\mu$ es la restricción de f_μ al conjunto invariante Λ_μ .

Podemos entender el itinerario S como una aplicación $S : \Lambda_\mu \rightarrow \Sigma_2$.

Teorema 11. *Si $\mu > 4$, entonces $S : \Lambda_\mu \longrightarrow \Sigma_2$ es una conjugación topológica entre (Γ_μ, h_μ) y (Σ_2, σ) .*

Demostración. Inyectividad

Por simplicidad asumiremos que $\mu > 2 + \sqrt{5}$, si bien el resultado es cierto para $\mu > 4$. Bajo la hipótesis de que $\mu > 2 + \sqrt{5}$ es fácil probar que $|f'_\mu| > K > 1$ en $I_0 \cup I_1$. La demostración del caso $4 < \mu < 2 + \sqrt{5}$, véase [?].

Sean $x, y \in \Lambda_\mu$ tales que $S(x) = S(y)$ con $x \neq y$. Como $S(x) = S(y)$ para cada n , $h_\mu^n(x)$ y $h_\mu^n(y)$ están al mismo lado de $1/2$. Por tanto que h_μ es monótona en el subconjunto de los puntos de Λ_μ que están en el intervalo de extremos $h_\mu^n(x)$ y $h_\mu^n(y)$. Sea Γ dicho subconjunto. Entonces $h_\mu^n(\Gamma) \subset I_0 \cup I_1$. Como $|f'_\mu| > K > 1$ en $I_0 \cup I_1$, cada iteración de h_μ expande Γ por un factor K . Así, la distancia entre $h_\mu^n(x)$ y $h_\mu^n(y)$ crece de forma no acotada, por lo que, a partir de cierto n , $h_\mu^n(x)$ y $h_\mu^n(y)$ estarán en lados distintos de $1/2$, lo que nos lleva a una contradicción.

Suprayectividad

Sea $s = (s_0 s_1 \dots) \in \Sigma_2$. Contruiremos $x \in \Lambda_\mu$ tal que $S(x) = s$. Definimos

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{x \in I : x \in I_{s_0}, g_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, g_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} = I_{s_0} \cap g_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap g_\mu^{-n}(I_{s_n}).$$

Veremos, por inducción sobre n , que $(I_{s_0 s_1 \dots s_n})_n$ forma una cadena encajada de intervalos cerrados no vacíos. Notemos que

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap g_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$$

y que si $J \subset I$ es intervalo cerrado, $g_\mu^{-1}(J)$ está formado por dos subintervalos, uno de ellos contenido en I_0 y otro en I_1 .

Por hipótesis de inducción suponemos que $I_{s_1 \dots s_n}$ es una subintervalo no vacío. Por tanto $g_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ consiste en dos intervalos, uno en I_0 y otro en I_1 . Tenemos que $I_{s_0} \cap g_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ es un intervalo cerrado. Estos intervalos están encajados, ya que

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap g_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}.$$

Concluimos entonces que

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$$

es no vacío. Nótese que si $x \in \bigcup_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$, entonces $x \in I_{s_0}$, $g_\mu(x) \in I_{s_1}$, etc. Luego $S(x) = s = (s_0 s_1 \dots)$ y tenemos que S es suprayectiva.

Bicontinuidad Sea $x \in \Lambda_\mu$ y supongamos que $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos n tal que $1/2^n < \varepsilon$. Consideremos el intervalo $I_{t_0 \dots t_n}$ definido como antes. Estos intervalos son disjuntos y Λ_μ está contenido en su unión. Hay 2^{n+1} de estos intervalos, siendo $I_{s_0 \dots s_n}$ uno de ellos. Luego podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ y $y \in \Lambda_\mu$ entonces $y \in I_{s_0 \dots s_n}$. Entonces $S(y)$ tiene las mismas $n + 1$ primeras componentes que $S(x)$. Por Lema ??,

$$d(S(x), S(y)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Luego S es continua. Al tener una biyección continua entre un espacio compacto y un espacio de Hausdorff (todo espacio métrico lo es), tenemos que S es un homeomorfismo.

$$\underline{S \circ f_\mu = \sigma \circ S}$$

Un punto $x \in \Lambda_\mu$ queda determinado por la cadena encajada de intervalos $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n \dots}$ determinada a su vez por $S(x)$. De la definición

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap g_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap g_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

podemos escribir $g_\mu(I_{s_0 \dots s_n})$ como

$$I_{s_1} \cap g_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap g_\mu^{-(n+1)}(I_{s_n}) \setminus I_{s_1 \dots s_n}$$

dado que $g_\mu(I_{s_0}) = I$. Así,

$$Sf_\mu(x) = Sf_\mu \left(\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n \dots} \right) = S \left(\bigcap_{n \geq 0} I_{s_1 \dots s_n \dots} \right) = (s_1, s_2, \dots) = \sigma S(x)$$

□

Por tanto (Λ_μ, h_μ) es un sistema dinámico caótico en el sentido de Block-Coppel. De los teoremas 2 y 5 deducimos que (Λ_μ, h_μ) es caótico en el sentido de Devaney.

Capítulo 4

Dinámica en dimensiones superiores

4.1. La aplicación herradura

Para la realización de esta sección nos hemos basado en [1].

En esta sección estudiaremos un sistema clásico, debido a Smale, de un difeomorfismo con infinitos puntos periódicos y aun así estructuralmente estable. Veremos que existen importantes coincidencias entre esta aplicación y la aplicación logística, estudiada en el Capítulo 2.

4.1.1. Construcción cualitativa de la herradura de Smale

Para definir la aplicación consideremos una región $R \subset \mathbb{R}^2$ compuesta de un cuadrado central S y de dos semicírculos D_1, D_2 unidos a él de forma que sus diámetros coinciden cada uno con uno de los lados del cuadrado, y ambos semicírculos están sobre lados opuestos del mismo. Véase la Figura 4.1.

La aplicación herradura, que denotaremos F , transforma la región original D de la forma siguiente. Primero actúa linealmente contrayendo D en dirección vertical, con un factor $\delta < 1/2$, y expandiéndolo horizontalmente con un factor $1/\delta$. Después torsiona esta nueva región y la convierte en la herradura que da nombre a la aplicación, y que podemos ver en la Figura 4.2. F es inyectiva y $F(D) \subset D$. Al no ser suprayectiva f^{-1} no está definida globalmente.

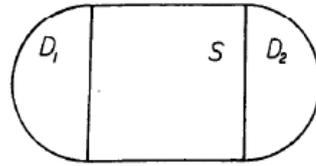


Figura 4.1: La región D sobre la que actuará la aplicación herradura F .

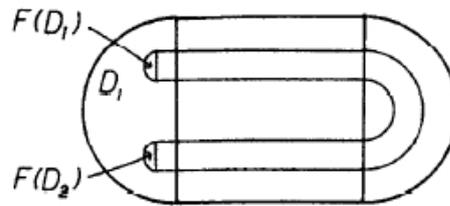
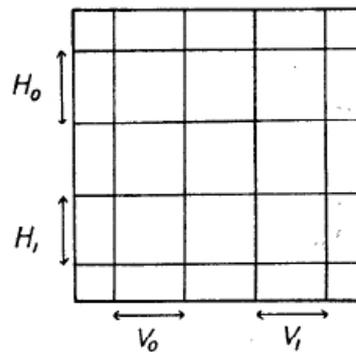


Figura 4.2: Región D transformada por la aplicación herradura F .

A continuación estudiaremos la dinámica de la aplicación F . Notemos primero que la antiimagen de S consiste en dos rectángulos verticales V_0, V_1 que podemos asumir que son llevados por F de forma suprayectiva a las componentes horizontales H_0, H_1 de $F(S) \cap S$. Véase la Figura ??.



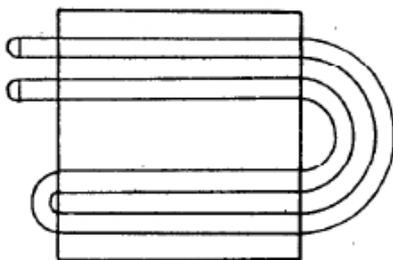
Al ser $F : V_0 \rightarrow H_0, F : V_1 \rightarrow H_1$ lineales, F mantiene las líneas horizontales y verticales de S . Notemos que si h es un segmento horizontal en S cuya imagen está

en S , la medida de $F(h)$ es $1/\delta$ veces la longitud de h . Análogamente, si v y $F(v)$ son segmentos verticales en S , la medida de $F(v)$ es δ veces la de v .

Al ser F una contracción en D_1 , F tiene un único punto fijo p en D_1 y $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(q) = p \quad \forall q \in D_1$. Dado que $F(D_2) \subset D_1$, todas las órbitas de D_2 avanzan en el tiempo de igual forma. Si $q \in S$ pero $F^k(q) \notin S$ para algún $k > 0$, entonces $F^k(q) \in D_1 \cup D_2$, y así $F^n(q) \rightarrow p$. Por tanto para comprender cómo avanzan las órbitas de F basta considerar el conjunto de puntos cuyas órbitas positivas se mantienen en S . Describiremos el conjunto

$$\Gamma = \{q \in S / F^k(q) \in S \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Si la órbita positiva de q se mantiene en S , entonces $q \in V_0$ o $q \in V_1$. Si $F^2(q) \in S$, análogamente $F(q) \in V_0 \cup V_1$, es decir, $q \in F^{-1}(V_0) \cap F^{-1}(V_1)$. Claramente hay bandas en V_0 y en V_1 que son llevadas a V_0 por F como se muestra en la Figura ??.



Si V es cualquier rectángulo vertical conectando las fronteras superior e inferior de S con anchura w , entonces $F^{-1}(V)$ es un par de rectángulos verticales de anchura w , uno de ellos en V_0 y otro en V_1 . Por tanto, $F^{-1}(F^{-1}(V_i)) = F^{-2}(V_i)$ consiste en cuatro rectángulos verticales, cada uno de anchura δ^2 , $F^{-3}(V_i)$ consistirá en och rectángulos verticales de anchura δ^3 y así sucesivamente. Con un razonamiento similar al usado en el caso de la familia cuadrática, puede probarse que

$$\Gamma_+ = \{q / F^k(q) \in S \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots\}$$

es el producto de un conjunto de cantor por un intervalo vertical. Por un argumento

análogo se tiene que

$$\Gamma_- = \{q/F^{-k}(q) \in S \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots\}$$

consiste en el producto de un conjunto de Cantor y un intervalo horizontal. Es claro que

$$\Gamma = \Gamma_+ \cap \Gamma_-.$$

4.1.2. Dinámica simbólica para el análisis de la aplicación herradura

Al igual que en el caso de la familia cuadrática, introduciremos una dinámica simbólica que nos facilitará el estudio de la aplicación. Escojamos un intervalo vertical l cualquiera en Γ_+ . Entonces $F^k(l)$ es un segmento vertical lineal de longitud δ^k en V_0 o en V_1 . Podemos construir una secuencia infinita $x = (x_0 s_1 \dots)$ de ceros y unos de la forma siguiente: $s_j = \alpha$ si y sólo si $F^j(l) \subset V_\alpha$. De forma similar podemos asociar una secuencia de ceros y unos a cualquier segmento horizontal h . Escribiremos las secuencias asociadas a intervalos horizontales como $s = (\dots s_{-2} s_{-1})$, con $s_{-j} = \alpha$ si y sólo si $F^{-j}(h) \subset V_\alpha$ para $j = 1, 2, \dots$. Es claro que $F^{-1}(h), F^{-2}(h), \dots$ son segmentos horizontales de longitud decreciente.

Si p es un cualquier punto en Γ , podemos asociar a p dos secuencias de ceros y unos, de forma que una de ellas da el itinerario de la órbita positiva de p y otra el de la órbita negativa. Para reunir la información definimos el itinerario del punto p como

$$S(p) = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots)$$

con $s_j = k$ si y sólo si $F^j(p) \in V_k$.

Esto permite introducir la dinámica simbólica en Γ . Sea Σ_2 el conjunto de todas las secuencias infinitas a izquierda y derecha, es decir,

$$\Sigma_2 = \{s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) / s_j = 0, 1\}.$$

Dotamos a este conjunto de la métrica d dada por

$$d(s, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}.$$

Definimos la aplicación *shift* como

$$\Sigma((\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)) = ((\dots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3, \dots)).$$

Es decir, σ actúa sobre una secuencia desplazándola hacia la izquierda. Evidentemente la aplicación que desplaza cada secuencia un lugar a la derecha es su inversa. Es fácil ver que σ es un homeomorfismo.

La aplicación σ es un modelo de la restricción de F a Γ . Las propiedades vistas para el *shift* unilateral en el Capítulo 1 se mantienen, como que el número de puntos periódicos de período N es 2^N , o que existe una órbita densa. Además aparecen algunos fenómenos nuevos que veremos a continuación.

Definición 18. Dos puntos p_1, p_2 son asintóticos (respectivamente asintóticos en tiempo negativo) si $F^n(p_1), F^n(p_2) \in D \quad \forall n \geq 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F^n(p_1) - F^n(p_2)| = 0$$

(respectivamente $n \rightarrow \infty$).

Intuitivamente, dos puntos son asintóticos en D si sus órbitas se aproximan infinitamente. Cualquier punto que abandone S por interacción de F es asintótico al punto fijo $p \in D$. Si p_1 y p_2 están en la misma línea vertical (respectivamente horizontal) en Γ^+ (resp. Γ_- , entonces son asintóticos (respect. asintóticos en tiempo negativo).

Definición 19. El conjunto estable para p es

$$W^s(p) = \{z / |F^n(p) - F^n(z)| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

El conjunto inestable para p es

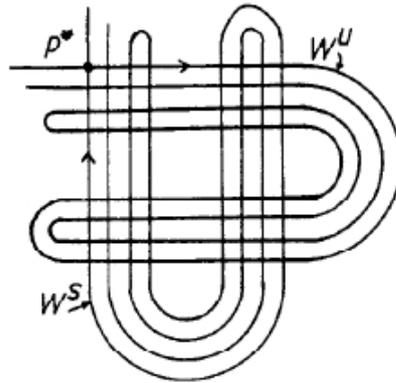
$$W^u(p) = \{z / |F^{-n}(p) - F^{-n}(z)| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Equivalentemente, un punto z se encuentra en $W^s(p)$ ($W^u(p)$) si p y z son asintóticos (asintóticos en tiempo negativo). Cualquier punto de S que abandona S por iteración de la aplicación herradura está en el conjunto estable del punto fijo p de D .

Los conjuntos estable e inestable de puntos de Γ son más complejos. Consideremos el punto fijo p^* , que se encuentra en V_0 y por tanto tiene como secuencia asociada $(\dots 000\dots)$. Cualquier punto que se encuentra en el segmento vertical l_s que determina p^* está en $W^s(p^*)$, pero existen otros puntos en el conjunto estable. Supongamos que un punto q se encuentra en l_s a partir de un cierto número de iteraciones. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|F^n(q) - p^*| < 1$. Luego

$$|F^{n+k}(q) - p^*| < \delta^k$$

y $q \in W^s(p^*)$. La unión de los intervalos verticales dada por $F^{-k}(l_s)$ para $k = 1, 2, \dots$ está en $W^s(p^*)$. Es fácil comprobar que hay 2^k intervalos de este tipo. Véase la Figura ??.



Dado que $F(D) \subset D$, el conjunto inestable $W^u(p^*)$ tiene una forma distinta. El segmento horizontal l_u que determina p^* se encuentra en $W^u(p^*)$ claramente. Las iteraciones de l_u se mantienen en D . Puede probarse que hay una curva en D que atraviesa S exactamente 2^k veces en un segmento horizontal. Véase la Figura ??.

La aplicación *shift* permite describir fácilmente los conjuntos $W^s(p^*)$ y $W^u(p^*)$. Sea

$$s^* = (\dots s_{-2}^* s_{-1}^* s_0^* s_1^* s_2^* \dots) \in \Sigma_2.$$

Si t es una secuencia, sus entradas coinciden con las de s^* a partir de un cierto índice si y sólo si $t \in W^s(s^*)$.

Por último, cabe mencionar que los conjuntos Γ de la aplicación logística y de la aplicación herradura son homeomorfos. Sean Σ_2^1 el conjunto de las secuencias de ceros y unos infinitas hacia la derecha y Σ_2 el de las infinitas a ambos lados. Entonces la aplicación

$$\phi : \Sigma_2^1 \longrightarrow \Sigma_2$$

dada por $\phi(s_0s_1\dots) = (\dots s_5s_3s_1s_0s_2s_4)$ (que mantiene s_0 en su entrada original de la secuencia) es un homeomorfismo.

4.2. El solenoide

Para la realización de esta sección hemos seguido [17].

4.2.1. Definición y primeras propiedades

Sean

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\} \quad S^1 = \{t \in \mathbb{R}/|t| = 1\}$$

$$N = S^1 \times D^2 \quad D(t) = \{t\} \times D^2$$

$$g : t \in S^1 \longrightarrow g(t) = 2t \text{ mod } (1) \in S^1$$

Definimos la siguiente aplicación

$$f : N \longrightarrow N$$

$$(t, z) \longrightarrow \left(g(t), \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}e^{2\pi ti} \right)$$

Teorema 12. $\Gamma = \bigcap f^k(N)$ es un atractor hiperbólico expansor de dimensión topológica 1.

Observación 7. $f(D(t)) \subset D(2t)$

Proposición 17. Para cada t_0 fijo, $\Gamma \cap D(t_0)$ es un conjunto de Cantor.

Demostración. Si $f(t, z) \in D(t_0)$, entonces $g(t) = t_0 \text{ mod } (1)$, luego $t = \frac{t_0}{2}$ o $\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}$.

Notemos que

$$f \left(D \left(\frac{t_0}{2} \right) \right) = \left(t_0, \frac{1}{4}D^2 + \left(\frac{1}{2}e^{\pi t_0 i} \right) \right)$$

$$f \left(D \left(\frac{t_0 + 1}{2} \right) \right) = \left(t_0, \frac{1}{4}D^2 - \left(\frac{1}{2}e^{2\pi t_0 i} \right) \right)$$

pues $e^{\pi t_0 i + \pi i} = e^{\pi t_0 i}$. Entonces, ambas imágenes están en la misma fibra y son reflexiones uno de la otra respecto al origen de la fibra $D(t_0)$. Son disjuntas, ya que $1/2 - 1/4 \gg 0$. Ambas imágenes se encuentran en $D(t_0)$ porque $1/2 + 1/4 < 1$ y por tanto $f(N) \subset N$.

Sea

$$N_k = \bigcap_{j=0}^k f^j(N) = f^k(N).$$

Veamos que $\forall t \in S^1, N_k \cap D(t)$ es unión de 2^k discos de radio $(1/4)^k$. Para $k = 0$ es evidente. Supongamos que la propiedad es cierta para $k - 1$ y veamos que entonces se cumple para k . Basta observar que

$$N_k \cap D(t) = f(N_{k-1} \cup D(t/2)) \cap f(N_{k-1} \cap D(t/2 + 1/2))$$

y tener en cuenta que, por hipótesis de inducción, $N_{k-1} \cup D(t/2)$ y $(N_{k-1} \cap D(t/2 + 1/2))$ son cada uno una unión de 2^{k-1} discos de radio $(1/4)^{k-1}$. Al ser f una contracción en las fibras de factor $1/4$, $f(N_{k-1} \cup D(t/2))$ y $f(N_{k-1} \cap D(t/2 + 1/2))$ son cada uno una unión de 2^{k-1} discos de radio $(1/4)^k$. Su unión es entonces una unión de 2^k discos de radio $(1/4)^k$. Luego

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(N) = \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j \Rightarrow \Gamma \cap D(t_0)$$

es un conjunto de Cantor. □

El conjunto Γ se conoce como solenoide. A continuación veremos algunas de sus propiedades topológicas más relevantes.

Teorema 13. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. Γ es conexo.
2. Γ no es localmente conexo.
3. Γ no es conexo por caminos.
4. Γ tiene dimensión topológica 1.

Demostración

1. Basta notar que los conjuntos N_k son compactos, conexos y están encajados, por lo que su intersección es conexa. \square

2. Para $0 < t_2 - t_1 < 1$, $D[t_1, t_2] \cap N_k$ es unión de 2^k cubos *retorcidos* (*twisted cubes*). Para cada entorno U de un punto $p \in \Gamma$ existe una elección de t_1, t_2 tal que U contiene dos de estos tubos. Como cada tubo contiene algún punto de Γ , tenemos que Γ no es localmente conexo. \square

Demostración. 3] Fijemos $p = (t_0, z_0) \in \Gamma$. Por inducción, para $k \geq 1$ existe $q_k \in \Gamma \cup D(t_0)$ tal que

1. Para $k \geq 2$, q_k está en la misma componente de $N_k \cap D(t_0)$ que q_{k-1} .
2. Todo camino de p a q_k debe rodear S^1 al menos 2^{k-1} veces

Por construcción, la sucesión $(q_k)_k$ es de Cauchy. Su límite q está en Γ por ser Γ cerrado. Veamos que no existe ningún camino en Γ de p a q . Notemos que q se encuentra en la misma componente de $N_k \cap D(t_0)$ que q_k . Cualquier camino de p a q en N_k debe intersectar $D(t_0)$ al menos 2^{k-1} veces, rodeando S^1 en cada una de las intersecciones. Entonces, si existiera un camino continuo en Γ de p a q , tendría que intersectar $D(t_0)$ infinitas veces, y tendríamos una contradicción. \square

4. En cada fibra, $\Gamma \cap D(t_0)$ es totalmente desconexo y tiene dimensión topológica 0. En un segmento de N , $N \cap D([t_1, t_2])$ es homeomorfo al producto de $\Gamma \cap D(t_1) \cap D([t_1, t_2])$ y por tanto tiene dimensión topológica 1. \square

4.2.2. Caos en el solenoide

Teorema 14. $f|_\Gamma$ verifica las siguientes propiedades:

1. El conjunto de sus puntos periódicos es denso en Γ .
2. Es topológicamente transitiva.

Demostración

1. Recordemos que el conjunto de puntos periódicos de g es denso en S^1 . Notemos que $g(t_0) = t_0$, $f^k(D(t_0)) \subset D(t_0)$ y f^k tiene un punto fijo en $D(t_0)$ ($f^k|_{D(t_0)}$ es una contracción. Por tanto las fibras con puntos periódicos para f son densas en el conjunto de fibras. Ahora podemos probar que el conjunto de puntos periódicos de f es denso en Γ . Sea $p \in \Gamma$ y un entorno U de p . Podemos elegir k, t_1 y t_2 tal que $f^k(D([t_1, t_2])) \subset U$. Hemos visto que f tiene un punto periódico en $f^k(D([t_1, t_2])) \subset U$, luego el resultado queda probado. \square

2. Sean U, V dos abiertos de Γ . Entonces existen otros dos abiertos U', V' en $S^1 \times D^2$ de forma que $U' \cap \Gamma = U, V' \cap \Gamma = V$. Existen algún natural $k, 0 < t_1 - t_2 < 1, 0 < t'_2 - t'_1 < 1$ de forma que $f^k(D([t_1, t_2])) \subset U', f^k(D([t'_1, t'_2])) \subset V'$. Entonces existe $j > 0$ tal que $f^j(D([t_1, t_2])) \cap D([t'_1, t'_2]) \neq \emptyset$. De hecho, como podemos encontrar j de forma que $f^j(D([t_1, t_2]))$ cruza $D([t'_1, t'_2])$, se tiene que

$$f^j(D[t_1, t_2] \cap \Gamma) \cap D([t_1, t_2]) \cap \Gamma \neq \emptyset$$

Entonces

$$\begin{aligned} f^j(f^k(D[t_1, t_2] \cap \Gamma)) \cap f^k D(t'_1, t'_2) \cap \Gamma &\neq \emptyset \\ f^j(U) \cap V &= f^j(U' \cap \Gamma) \cap [V' \cap \Gamma] \neq \emptyset \end{aligned}$$

y queda probada la transitividad. \square

Sean $\Sigma = \{s \in (S^1)^\mathbb{N} / g(s_{j+1}) = s_j\}$. Definimos $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ como

$$\sigma(s) = t \quad \text{si} \quad t_j = \begin{cases} s_{j-1} & \text{si } j \geq 1 \\ g(s_0) & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

Es decir, si $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma, g(s_{j+1}) = s_j$, entonces $\sigma(s) = (g(s_0) s_0 s_1 \dots)$. Σ, σ es el límite inverso de g .

Definimos $h : \Gamma \rightarrow (S^1)^\mathbb{N}$ como $h(p) = s$ de forma que $f^{-j}(p) \in S^1$ para $j = 0, 1, \dots$.

Teorema 15. *La aplicación h es un conjugación entre f y σ .*

Paso 1: $h(\Gamma) \subset \Sigma$. Sea $h(p) = s$. Entonces

$$f^{-j}(p) \in D(s_j) \quad f^{-(j+1)}(p) \in D(s_{j+1}) \quad \text{por definición.}$$

Entonces

$$f^{-j}(p) \in D(s_{j+1}) \Rightarrow f^{-j}(p) \in f(D(s_{j+1})) \cap D(s_j) \Rightarrow D(s_j) \cap f(D(s_{j+1})) \neq \emptyset$$

y como por la definición del solenoide $D(s_j)$ y $D(s_{j+1})$ o son disjuntos o uno está contenido en otro, tenemos que

$$f(D(s_{j+1})) \subset D(s_j).$$

Así,

$$g(s_{j+1}) = s_j \quad \forall j \Rightarrow s \in \Sigma.$$

□

Paso 2: $h \circ f = \sigma \circ h$. Sean $p \in \Sigma$, $h(p) = s$ y $h(f(p)) = t$. Dado que $h(p) = s$, tenemos que

$$f^{-(j+1)}(f(p)) = f^{-j}(p) \in D(s_j) \quad \forall j \geq 0.$$

Al ser $h(f(p)) = t$,

$$f^{-j}(p) = f^{-j}(p) = f^{-(j+1)}(f(p)) \in D(t_{j+1}) \quad \forall j \geq 0.$$

Entonces,

$$f^{-j}(p) = (s_j, \dots) = (t_{j+1}, \dots) \Rightarrow s_j = t_{j+1} \quad \forall j \geq 0.$$

Además

$$f(p) = f^{-0}(f(p)) \in D(t_0),$$

$$f^{-0}(p) \in D(s_0) \Rightarrow f(p) \in f(D(s_0))$$

luego

$$f(p) \in D(t_0) \cap f(D(s_0)) \Rightarrow t_0 = g(s_0).$$

Sean $h \circ f(p) = t = (t_0 t_1 \dots)$ y $\sigma \circ h(p) = \sigma(s) = (g(s_0), s_0 s_1 \dots)$. Por lo anterior tenemos que $t_0 = g(s_0)$ y $t_{j+1} = s_j \quad \forall j \geq 0$, como queríamos demostrar. □

h es inyectiva. Supongamos que $h(p) = h(q)$. Veamos que entonces $p = q$. Sabemos que $f^{-j}(p), f^{-j}(q) \in D(s_j) \quad \forall j \geq 0$. Entonces $p, q \in f^j(D(s_j)) \quad \forall j \geq 0$. Luego

$$p, q \in \bigcap_{j=0}^k f^j(D(s_j)) = B_k.$$

Como $s \in \Sigma$ entonces

$$g(s_{j+1}) = s_j \Rightarrow f(D(s_{j+1})) \subset D(s_j)$$

$$f^j(D(s_j)) \subset f^{j+1}(D(s_{j-1})) \subset \cdots \subset f(D(s_1)) \subset D(s_0).$$

Utilizando lo anterior, tenemos que

$$p, q \in \bigcap_{j=0}^k f^j(D(s_j)) = f^k(D(s_k)) = B_k,$$

siendo B_k una de las bolas encajadas de radio tendiendo a 0, y concluimos que $p = q$. \square

Paso 4: h es suprayectiva. Sea $s \in \Sigma$. Veamos que existe algún $p \in (S^1)^{\mathbb{N}}$ tal que $h(p) = s$. Por definición de Σ tenemos que $g(s_{j+1}) = s_j$. Entonces $f(D(s_{j+1})) \subset D(s_j)$. Como en el paso anterior tenemos

$$\bigcap_{j=0}^k f^j(D(s_j)) = B_k, \quad B_{k+1} \subset B_k, \quad \text{compacto}$$

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} B_k \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{j=0}^{\infty} B_k = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(D(s_j)) \neq \emptyset.$$

Entonces existe $p \in \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(D(s_j))$, luego $p \in f^j(D(s_j)) \quad \forall j \geq 0$. Luego $h(p) = s$, como queríamos demostrar. \square

Paso 5: h es homeomorfismo. Basta notar que h es continua por definición, y por tanto tenemos una biyección entre un espacio de Hausdorff y uno compacto, por tanto un homeomorfismo. \square

4.3. El atractor de Lorenz

En esta sección hemos seguido [?] como referencia. Las definiciones dadas para sistema discretos pueden extenderse al caso continuo, en el que el lugar de los puntos fijos lo ocupan los puntos de equilibrio, es decir, aquellos puntos $x \in X$ tales que $x' = f(x) = 0$. Para sistemas continuos los puntos hiperbólicos son los que tienen todos los autovalores con parte real no nula. Un punto de equilibrio es atractor si todos sus autovalores tienen parte real negativa y repulsor si todos los autovalores tienen parte real positivo. En el resto de los casos se tiene un punto de tipo silla. El Teorema de Hartman-Grobman y el de Variedades Invariantes también se cumple. Puede consultarse [17], entre otros muchos.

El modelo de Lorenz es un conocido modelo para el movimiento de masas de la atmósfera. Sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

con $\{\sigma, r, b\} \subset \mathbb{R}^+$ siendo

- σ : número de Prandtl
- r : número de Rayleigh
- b : razón entre la compresión y la altura del sistema

4.3.1. Primeras propiedades

Algunas propiedades elementales del modelo de Lorenz son las siguientes.

1. Simetría: si $(x(t), y(t), z(t))$ es solución de las ecuaciones del Lorenz, también lo es $-(x(t), y(t), z(t))$.
2. El eje z es invariante: $x_t(0, 0, z)$ permanece en el eje z , donde $x_t(0, 0, z) = cte e^{-bt}$. Si $t \rightarrow 0$, entonces $x_t \rightarrow 0$.

3. Contracción del volumen: sea $V(t) = \text{vol}(X_t(U))$. Entonces $V(t + dt) = V(t) + \int_s (X \cdot \nu dt) dS$.

$$\dot{V}(t) = \int_S X \cdot \nu dS = \int_V \nabla X dV.$$

Como $\nabla X = -(\sigma + 1 + b)$, entonces $\dot{V}(t) = -(\sigma + 1 + b)V$ y $V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$.

4. Hay un elipsoide aislante: consideremos $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2,$$

y $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ solución del sistema de Lorenz. Sea $\phi = L \circ \varphi$. Tenemos que

$$\phi'(t) = 2\sigma(rx^2(t) + y^2(t) + bz^2(t) - 2rbz(t)) < 0$$

para valores de z suficientemente grandes. Como L es una función de Lyapunov,

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / L(x, y, z) < c\}$$

es un bloque aislante para el conjunto $\Gamma = \cap_{t>0} X_t(U)$. Luego para cada $t > 0$ tenemos que $\text{vol}\Gamma < \text{vol}x_t(U)$, y por lo anterior, $\text{vol}\Gamma = 0$.

Puntos de equilibrio Evidentemente el origen es un punto de equilibrio. Su parte lineal es

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Es inmediato comprobar que su polinomio característico es

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)$$

y los autovalores correspondientes son

$$\lambda_1 = -b \quad \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2}$$

Al ser todos los parámetros positivos tenemos que $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ en general. El signo del autovalor λ_2 es positivo si $r > 1$ y negativo en caso contrario. Por tanto en el caso $r < 1$ el origen es un atractor local y en el caso $r > 1$ es un punto de silla.

Además, en el caso $r > 1$ aparecen otros dos puntos de equilibrio:

$$P_{1,2} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

La parte lineal correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

y sus polinomios característicos son

$$p_{2,3}(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

Para $r = 1$, las raíces son $0, -b$ y $-\sigma - 1$. Para $r > 1$ suficientemente cercano a 1 las raíces siguen siendo reales por un argumento de continuidad. Además deberán ser negativas, pues si $\lambda \geq 0$ fuera raíz de $p_i (i = 1, 2)$, teniendo en cuenta que todos los parámetros son positivos y que $r > 1$, al sustituir en el polinomio característico obtendríamos que $p_i(\lambda) > 0$. Por tanto para valores de $r > 1$ y suficientemente cercanos a 1, los nuevos equilibrios son atractores. Para delimitar los valores de r para los que los equilibrios $P_{1,2}$ son atractores, basta notar que para que se vuelvan inestables es necesario que la parte real de alguno de ellos debe hacerse 0. A la vista del polinomio característico, esto no es posible para valores de las raíces reales. Por tanto para el valor del r para el que los autovalores atraviesan el eje real hay dos raíces de la forma $\pm iw$, con $w \neq 0$. Al operar con $f(iw)$ se puede comprobar que el valor de r para los que los nuevos equilibrios son atractores es $\sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$.

4.3.2. Un modelo para el atractor de Lorenz

Definición 20. Sea $x' = f(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n con flujo ϕ_t . Un conjunto Γ es un atractor si

1. Γ es compacto e invariante.
2. Existe un abierto U que contiene a Γ tal que para cada $y \in U$, $\phi_t(y) \in U$ y $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_t(U)}$.

3. Dados $y_1, y_2 \in \Gamma$ y dos entornos U_1, U_2 de y_1 e y_2 respectivamente, existe una solución del sistema que pasa por ambos abiertos.

Los valores de los parámetros más usuales en estudios del sistema de Lorenz son $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$. Estos valores son los que Lorenz usaba cuando encontró por primera vez un comportamiento caótico en el sistema que hoy lleva su nombre. Un cálculo sencilla y la aplicación de los resultados dados en la subsección 4.3.1 muestra que para estos valores de los parámetros el sistema presenta tres equilibrios, de manera que todos ellos son inestables. Numéricamente es fácil ilustrar que las soluciones en el plano estable correspondiente a los autovalores de parte real negativa del sistema linealizado en el origen tienden al origen tangencialmente al eje z . En la Figura ?? se muestra dos simulación del sistema en la que se aprecia que las soluciones espiralan alrededor de ambos equilibrios. También ilustra la sensibilidad a las condiciones iniciales que el sistema exhibe para los valores de los parámetros elegidos. Todas las soluciones no triviales tienen, a partir de algún momento, al mismo conjunto que vemos en la Figura ??, el conocido atractor de Lorenz.

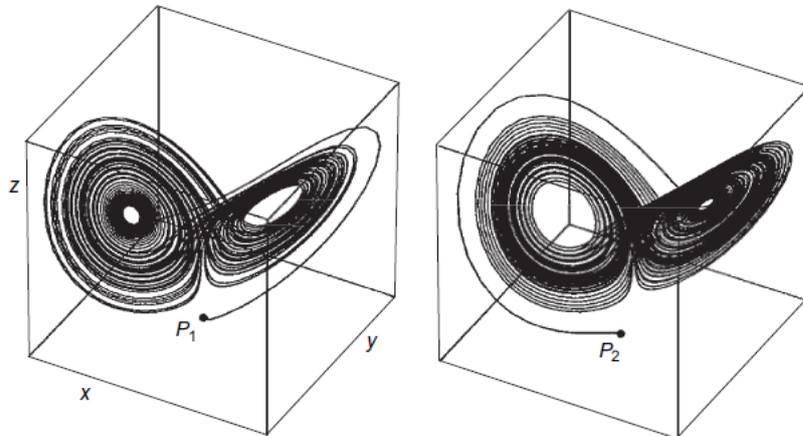


Figura 4.3: Dos soluciones del sistema de Lorenz con condiciones iniciales P_1, P_2 muy próximas.

A continuación estudiaremos un modelo geométrico del atractor de Lorenz, propuesto

por Guckenheimer y Williams. Tucker probó que este modelo se corresponde con el atractor de Lorenz para valores adecuados de los parámetros.

Para su desarrollo, comenzaremos asumiendo que el demolo es simétrico respecto a la reflexión $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ y que posee un equilibrio en el origen, al igual que el sistema de Lorenz. Además supondremos que en el cubo S dado por $|x|, |y|, |z| \leq 5$ el sistema es lineal. Por simplicidad asumiremos que los autovalores de la parte lineal en el origen son $-1, 2$ y 3 , y que el sistema en S viene dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

Los autovalores asociados al equilibrio del origen tienen la misma relación entre ellos que en el sistema de Lorenz. Veamos cuál es el comportamiento de las soluciones en un entorno del origen. Consideremos un rectángulo R_1 en el plano $z = 1$ dado por $|x| \leq 1, 0 < y \leq \varepsilon < 1$. A medida que el tiempo avanza, todas las soluciones que empiezan en R_1 entran en algún momento en el rectángulo R_2 del plano $y = 1$ dado por $|x| \leq 1, 0 < z \leq 1$. Tenemos entonces una aplicación $h : R_1 \rightarrow R_2$ que queda definida por las curvas de soluciones que pasan por R_1 . Puede probarse que esta función es de la forma

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^{3/2} \\ y^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que h lleva las líneas de la forma $y = c$ de R_1 en líneas $z = c^{1/2}$ de R_2 . Además, h lleva las líneas $x = c$ en curvas de la forma $x_1 = cz_1^3$. Cada una de estas curvas imagen corta al plano xy perpendicularmente, como se muestra en la Figura ??.

Al igual que en el caso del sistema de Lorenz, existen dos equilibrios en el plano $z = 27$: $Q_- = (-10, -20, 27), Q_+ = (10, 20, 27)$. Asumimos que las líneas dadas por $y = \pm 20, z = 27$ forman porciones de las curvas estables en Q_+ u que los otros dos autovalores en estos puntos son complejos con parte real positiva.

Sea Σ el cuadrado dado por $|x|, |y| \leq 20, z = 27$. Asumimos que el campo de vectores se mueve hacia abajo en el interior de Σ . Las soluciones espiralarán entonces desde Q_+ de

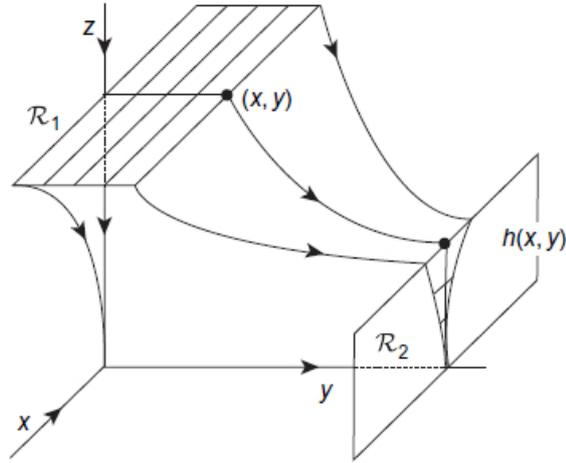


Figura 4.4: Comportamiento de las soluciones del modelo del atractor de Lorenz en un entorno del 0.

la misma forma que en el sistema de Lorenz. Asumimos también que la superficie estable asociada al equilibrio del origen corta primero Σ en la línea de intersección del plano xz y Σ .

Sean ψ_{\pm} las dos ramas de la curva inestable del origen. Asumimos que estas curvas primero rodean Σ y después entran en el cuadrado Σ como se muestra en la Figura ?? . Denotaremos el primer punto de intersección de ψ_{\pm} con Σ como $\rho_{\pm}(\pm x^*, \mp y^*)$.

Consideremos ahora la línea $y = v$ en Σ . Si $v = 0$, entonces todas las soluciones que comienzan en este punto tienden al origen. Luego dichas soluciones nunca vuelven a alcanzar Σ . Asumiremos que el resto de soluciones con conducción inicial en Σ vuelven a entrar en Σ (para tiempos positivos). La forma en que se produce este retorno da lugar a las hipótesis más importantes en la construcción del modelo del atractor de Lorenz:

1. *Condición de retorno:* Sean $\Sigma_+ = \Sigma \cap \{y = 0\}$ y $\Sigma_- = \Sigma \cap \{y = 0\}$. Asumimos que las soluciones que pasan por cualquier punto en Σ_{\pm} vuelven a Σ (en tiempo positivo). Por tanto tenemos una aplicación de Poincaré $\Phi : \Sigma_+ \cup \Sigma_- \rightarrow \Sigma$. Supondremos que las imágenes $\Phi(\Sigma_{\pm})$ son como las que se muestran en la Figura

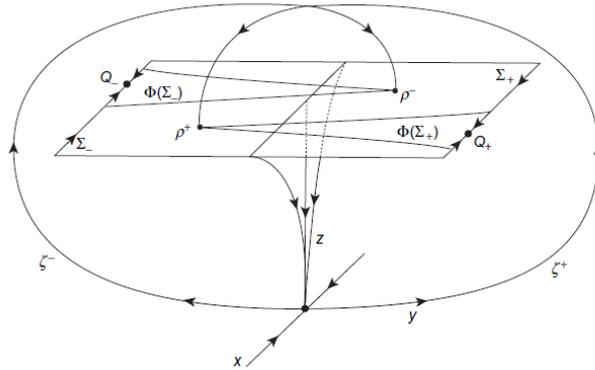


Figura 4.5: Comportamiento de las soluciones del modelo del atractor de Lorenz cuando espiralan alrededor de Q_+ .

???. Por la simetría, tenemos que $\Phi(x, y) = \Phi(-x, -y)$.

2. *Dirección de contracción:* Para cada $v \neq 0$ asumimos que Φ lleva la línea $y = v$ de Σ a la curva $y = g(v)$ para cierta función g . Más aún, asumimos que Φ contrae esta línea en la dirección horizontal.
3. *Dirección de expansión:* Asumimos que ϕ expande Σ_+ y Σ_- en la dirección de y por un factor mayor que $\sqrt{2}$, de forma que $g'(y) > \sqrt{2}$.
4. *Condición de hiperbolicidad:* Supondremos que $D\Phi$ lleva vectores tangentes a Σ_{\pm} de pendientes ± 1 a vectores de pendiente de mayor absoluto μ mayor que 1.

Analíticamente estas suposiciones fuerzan a que la aplicación Φ sea de la forma

$$\phi(x, y) = (f(x, y), g(y))$$

con $g'(y) > \sqrt{2}$ y $0 < \frac{\partial f}{\partial x} < c < 1$. La condición de hiperbolicidad hace que

$$g'(y) > \mu \mu \left| \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

Geométicamente, esta condición implica que los sectores en los planos tangentes dados por $|y| \geq |x|$ son llevados por $D\phi$ al interior de un sector con tangentes más pronunciadas. Nótese que esta condición se da si $|\partial f / \partial y|$ y c son suficientemente pequeños en Σ_{\pm} .

Técnicamente $\Phi(x, 0)$ no está definido, pero no supone un problema, ya que

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \phi(x, y) = \rho^\pm.$$

(Recuérdese que ρ^\pm denota el primer punto de intersección de ψ^\pm y Σ .) Nos referiremos a ρ^\pm como la *punta* de $\Phi(\Sigma_\pm)$. Las hipótesis asumidas de los autovalores garantizan que $g'(y) \rightarrow \infty$ cuando $y \rightarrow 0$.

Para encontrar el atractor podemos restringirnos al rectángulo $R \subset \Sigma$ dado por $|y| \leq y^*$. (Recordemos que $\mp y^*$ es la coordenada en y de las puntas ρ^\pm . Sean $R_\pm = R \cap \Sigma_\pm$. Es fácil comprobar que cualquier solución que comienza en el interior de Σ_\pm pero fuera de R debe alcanzar R en algún momento, por lo que basta analizar el comportamiento de Φ en R . Véase la Figura ??.

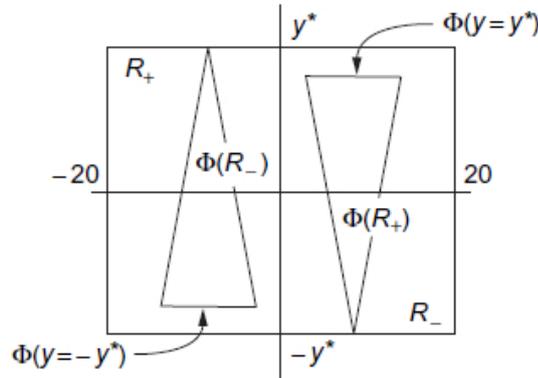


Figura 4.6: Aplicación de Poincaré Φ en R .

Sean

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Phi^n(R)}$$

y

$$\mathcal{A} = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(A) \right) \cup \{(0, 0, 0)\}.$$

Al añadir el origen a la unión de los conjuntos $\phi_t(A)$ conseguimos que \mathcal{A} sea un conjunto cerrado.

Teorema 16. \mathcal{A} es un atractor del modelo del sistema de Lorenz.

Demostración. \mathcal{A} es un atractor para el flujo por ser un A un atractor para Φ . (Un atractor para una aplicación se define de forma análoga al caso de flujos). Es claro que A es cerrado. A no es invariante por Φ dado que Φ no está definido a lo largo de $y = 0$. Sin embargo, esto no es resulta problemático ya que para el flujo las soluciones a lo largo de todos estos puntos caen en \mathcal{A} y por tanto \mathcal{A} es invariante. Si definimos \mathcal{O} como el abierto dado por $|x| < 20, |y| < 20 - \varepsilon$ para algún ε tal que $y^* < 20 - \varepsilon$, entonces $\forall (x, y) \in \mathcal{O}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi^n(x, y) \in R$. Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(x, y) \subset A \quad \forall (x, y) \in \mathcal{O}.$$

Por definición $A = \bigcap_{n \geq 0} \Phi^n(\mathcal{O})$. Tenemos entonces que las condiciones 1 y 2 de la definición de atractor se satisfacen. Para la tercera condición, necesitamos probar que si P_1, P_2 son puntos en A y $W_j (j = 1, 2)$ son entornos abiertos de $P_j (j = 1, 2)$, entonces existe $n \geq 0$ tal que $\Phi^n(W_1) \cap W_2 \neq \emptyset$.

Dado un conjunto $U \subset R$, sea $\Pi_y(U)$ la proyección de U en el eje y . Denotemos por $l_y(U)$ la medida de esta proyección. En lo que sigue U será una colección de conjuntos conexos, por lo que $l_y(U)$ estará bien definida. Utilizaremos el siguiente lema, que demostraremos tras completar la prueba del teorema.

Lema 15. Para todo abierto $W \subset R$, existe $n > 0$ tal que $\Pi_y(\Phi^n(W))$ es el intervalo abierto $(-y^*, y^*)$. Equivalentemente, $\Phi^n(W)$ corta a cada línea $y = c$ en el interior de R .

Veamos que existe un punto en W_1 cuya imagen por una iterada de Φ cae en W_2 . Notemos que

$$|\Phi^k(x_1, y) - \Phi^k(x_2, y)| \leq c^k |x_1 - x_2|$$

dado que $\Phi^k(x_1, y)$ y $\Phi^k(x_2, y)$ caen en la misma línea paralela al eje x para cada j y que Φ contrar distancias en la dirección de x con un factor $c < 1$.

Podemos asumir que W_2 es un disco de diámetro ε . Teniendo en cuenta que la anchura de R en la dirección de x es 40, escogemos m tal que $40c^m < \varepsilon$. Consideremos $\Phi^{-m}(P_2)$.

Tenemos que está bien definido, ya que $P_2 \in \bigcap_{n \geq 0} \Phi^n(R)$. Sea $\Phi^{-m}(P_2) = (\psi, \nu)$. Del Lema ?? deducimos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Pi_y(\Phi^n(W_1)) = [-y^*, y^*].$$

Por tanto podemos elegir un punto $(\psi_1, \nu) \in \Phi^n(W_1)$. Sean \bar{x}, \bar{y} tales que $(\psi_1, \nu) = \Phi^n(\bar{x}, \bar{y})$. $\Phi^n(\bar{x}, \bar{y})$ y $\Phi^{-m}(P_2)$ tienen la misma coordenada en y . Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |\Phi^{m+n}(\bar{x}, \bar{y}) - P_2| &= |\Phi^m(\psi_1, \nu) - P_2| \\ |\Phi^m(\psi_1, \nu) - \Phi^m(\psi, \nu)| &\leq 40c^m < \varepsilon \end{aligned}$$

Hemos encontrado un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in W_1$ con una solución que pasa por W_2 . Por tanto el resultado queda probado. \square

Probemos ahora el Lema 15.

Demostración. Supongamos primero que W contiene una componente conexa W' que se extiende desde una de las puntas a $y = 0$. Entonces $l_y(W)$, $\Phi(W')$ es conexo y tenemos que $l_y(\Phi(W')) > \sqrt{2}y^*$. Más aún, $\Phi(W')$ se extiende desde una de las puntas y cruza $y = 0$, pues la longitud en la componente y supera y^* .

Apliquemos Φ de nuevo. $\Phi^2(W')$ tiene dos componentes, de forma que una de ellas extiende ρ^+ y la otra ρ^- . De hecho $l_y(\Phi^2(W)) > 2y^*$, dado que $\Pi_y(\Phi^2(W')) = [-y^*, y^*]$ y este caso queda probado.

Supongamos ahora que W es conexo y no cruza $y = 0$. Entonces tenemos que $l_y(\Phi(W)) > \sqrt{2}l_y(W)$, luego la medida en y de $\Phi(W)$ aumenta con un factor superior a $\sqrt{2}$.

Si W no cruza $y = 0$, entonces podemos encontrar un par de conjuntos conexos W^\pm con $W^\pm \subset \{R^\pm \cap W\}$ y $l_y(W^+ \cup W^-) = l_y(W)$. Las imágenes $\Phi(W^\pm)$ se extienden a las puntas ρ^\pm . Si alguno de estos conjuntos intersecara $y = 0$, entonces podríamos aplicar y caso anterior y tendríamos el resultado. Si no, aplicamos Φ de nuevo. Tanto $\Phi(W^-)$ como $\Phi(W^+)$ son conjuntos conexos, y tenemos que $l_y(\Phi^2(W^\pm)) > 2l_y(W^\pm)$. Entonces, para W^- o para W^+ tenemos que $l_y(\Phi^2(W^\pm)) > l_y(W^\pm)$, y de nuevo la medida en y crece con el número de iteraciones. \square

4.3.3. El atractor caótico

En la subsección anterior hemos reducido el estudio del comportamiento de las soluciones del sistema de Lorenz al análisis de la dinámica de la aplicación de Poincaré Φ , pasando de un sistema de tres ecuaciones diferenciales a una aplicación bidimensional. En esta subsección haremos una reducción más. Según las hipótesis que hemos asumido, dos puntos con la misma coordenada en y en Σ son llevados a dos puntos de coordenada en y $g(y)$, por tanto de nuevo la misma. Más aún, la distancia entre estos puntos se reduce. Por tanto, por iteraciones de Φ , no es necesario ocuparse de todos los puntos de una línea $y = cte$. Basta entender cómo la coordenada en y varía bajo las iteraciones de g . Luego la aplicación de Poincaré Φ está completamente determinada por la dinámica de una función unidimensional g definida en el intervalo $[-y^*, y^*]$. Así, tenemos que el comportamiento de las iteradas de g explica el comportamiento del atractor. Por ello, analizaremos la dinámica de la función g .

Sea $I = [-y^*, y^*]$. Recordemos que g está definida en I salvo en $y = 0$, y que cumple que $g(-y) = -g(y)$. Por los resultados anteriores tenemos que $g'(y) > \sqrt{2}$, $0 < g(y^*) < y^*$, y que $-y^* < g(-y^*) < 0$. Además,

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} g(y) = \mp y^*.$$

Por tanto el grafo de g es similar al que se muestra en la Figura ??.

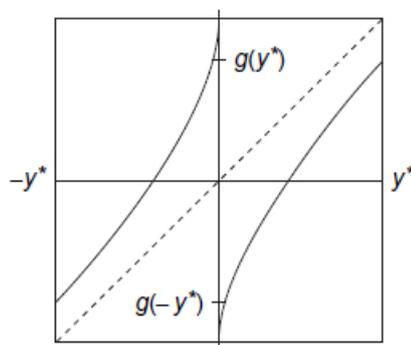


Figura 4.7: Grafo de g .

Todos los puntos en el intervalo $[g(-y^*), g(y^*)]$ tienen dos antiimágenes, mientras que los de los intervalos $(-y^*, g^*(-y^*))$ y $(g(y^*), y^*)$ tienen sólo una. Los puntos de los extremos de I , $\pm y^*$, no tienen antiimágenes, dado que $g(0)$ no está definido. Todo punto $y_0 \neq \pm y^*$ tiene infinitas órbitas negativas. Para probar esto, supongamos primero que y_0 no está en la órbita positiva de $\pm y^*$. Entonces cada punto $y_{-k} \neq \pm y^*$. Si y_{-k} sólo tiene una antiimagen y_{-k-1} , entonces y_{-k} está o bien en $(-y^*, g(-y^*))$ o bien en $(g(y^*), y^*)$. Pero el grafo de g muestra que y_{-k-1} debe tener dos antiimágenes, luego es imposible que dos puntos consecutivos en una órbita negativa tengan sólo una antiimagen. Por tanto y_0 debe tener infinitas órbitas negativas.

Si $y_{-k} = \pm y^*$ para algún $k > 0$, entonces su órbita negativa se estaciona, ya que $\pm y^*$ no tiene antiimagen en I . En cualquier caso, y_{k-1} debe tener dos antiimágenes, una de las cuales es el punto final de I . Luego podemos continuar tomando antiimágenes de esta segunda órbita negativa como antes, generando entonces infinitas órbitas negativas, como en el caso anterior.

Cada una de estas infinitas órbitas negativas de y_0 se corresponde a un único punto en $A \cup \{y = 0\}$. Para probar esto, consideremos la línea J_{-k} dada por $y = y_{-k}$ en R . Entonces $\Phi^k(J_{-k})$ es un subintervalo cerrado de J_0 para cada k . Tenemos que $\Phi(J_{-k-1}) \subset J_{-k}$, ya que DUDA!!. Entonces la intersección anidada de los conjuntos $\Phi^k(J_{-k})$ es no vacía, y todo punto en esta intersección tiene órbita negativa $(y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots)$ por construcción. Más aún, el punto de intersección es único, dado que cada vez que se aplica Φ se contraen los intervalos DUDA por un factor $c < 1$. Podemos resumir lo anterior en términos del atractor \mathcal{A} en la siguiente proposición.

Proposición 18. *El atractor \mathcal{A} del modelo del sistema de Lorenz corta cada una de las líneas $y = y_0 \neq y^*$ en R en infinitos puntos. En tiempo positivo todas las soluciones que pasan por cada punto cumplen alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Cortan la línea $y = 0$. (En este caos todas las soluciones tienden al equilibrio del origen).*
2. *Continuamente intersecan R , y las distancias entre estos puntos de intersección en*

la línea $y = y_k$ tienden a 0 cuando el tiempo tiende a infinito.

Volvamos ahora a la dinámica de Φ en R . Discutiremos primero el comportamiento de la función unidimensional g , y usaremos esa información para entender el de Φ . Dado un punto cualquiera $y_0 \in I$, las órbitas positivas cercanas de g se alejan de la órbita de y_0 , dado que $g' > \sqrt{2}$. Más precisamente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 19. Sean $0 < v < y^*$ y $y_0 \in I = [-y^*, y^*]$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen $u_0, v_0 \in I, n \in \mathbb{N}$ tales que $|u_0 - y_0|, |v_0 - y_0| < \varepsilon$ y $|g^n(u_0) - g^n(v_0)| \geq 2v$.

Demostración. Sea J el intervalo de longitud 2ε centrado en y_0 . Cada iteración de g expande la medida de J por un factor igual o superior a $\sqrt{2}$, por lo que existe n tal que $g^n(J)$ contiene al 0 en su interior. Entonces $g^{n+1}(J)$ contiene puntos arbitrariamente cercanos a $\pm y_0$, por lo que hay puntos en $g^{n+1}(J)$ para los que la distancia entre ellos es al menos $2v$. \square

Interpretemos el significado de esta proposición en términos del atractor A . Dado cualquier punto en el atractor, podemos encontrar puntos arbitrariamente cercanos con órbitas positivas que se alejan tanto como se quiera. Es decir, el sistema presenta sensibilidad a las condiciones iniciales. También existe una sensibilidad a las condiciones iniciales para el flujo en \mathcal{A} , como se muestra en la Figura ??.

La siguiente proposición aportará información sobre la abundancia de soluciones periódicas del flujo. (Nótese que los puntos periódicos de g se corresponden con soluciones periódicas del flujo).

Proposición 20. Los puntos periódicos de g son densos en I .

Demostración. Al igual que en la demostración de que A es un atractor, dado cualquier subintervalo J de $I \setminus \{0\}$ existe n tal que g^n lleva algún subintervalo $J' \subset J$ de forma inyectiva a $(-y^*, 0)$ o a $(0, y^*)$. Luego $g^n(J')$ o $g^{n+1}(J')$ contiene a J' , por lo que alguno de sus grafos cruzan la diagonal sobre J' . Por tanto existe un punto periódico de g en J' . \square

Interpretemos el resultado en términos del atractor A . Veamos que los puntos periódicos de Φ son también densos en A . Sean $P \in A$ y U un entorno de P . Podemos suponer que U no cruza la línea $y = 0$, pues en caso contrario elegiríamos un entorno más reducido que no lo hiciera. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, consideremos un rectángulo $W \subset U$ centrado en P de anchura 2ε y altura ε .

Sea $W_1 \subset W$ un cuadrado centrado en P de longitud de lado $\varepsilon/2$. Por el resultado de transitividad de la subsección anterior, tenemos que existe $Q_1 \in W_1$ tal que $\Phi^n(Q_1) = Q_2 \in W_1$. Eligiendo un subconjunto de W_1 si fuera necesario, podemos suponer que $n > 4$ e incluso que $c^n < \varepsilon/8$. Entonces la imagen de $\Phi^n(W_1)$ cruza el interior de W de forma casi vertical y extiéndose hasta sus fronteras superior e inferior, como se muestra en la Figura ??, gracias a la condición de hiperbolicidad.

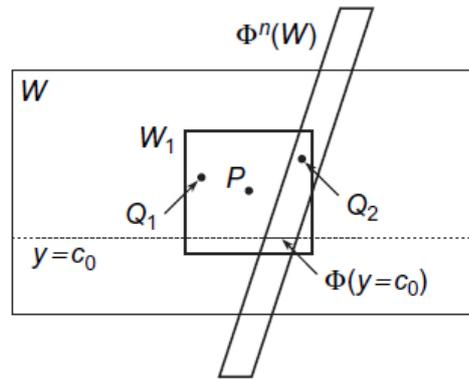


Figura 4.8: Φ lleva W a través de sí mismo.

Consideremos las líneas $y = c$ en W . Estas líneas son llevadas a otras del mismo tipo en R por Φ^n . Dado que la dirección vertical se expande, algunas de estas líneas serán llevadas bajo W y otras sobre W . Por tanto sólo habrá una línea $y = c_0$ que será llevada a ella misma por Φ^n . Así, habrá un punto fijo de Φ^n en esta línea. Como esta línea está contenida en W , tenemos un punto periódico de Φ en W , y queda probada la densidad de puntos periódicos en A . Es fácil probar que g además es transitiva. Podemos resumir la información recabada hasta ahora en el siguiente teorema.

Teorema 17. *La aplicación de Poincaré Φ restringida al atractor A del modelo de Lorenz es caótica.*

Capítulo 5

Aplicaciones en neurociencia

Parte de este capítulo está recogido en la memoria de mi Trabajo de Fin de Grado, Sistemas Dinámicos en Neurobiología, realizado en la Universidad de Oviedo en el curso 2013,/2014. Concretamente, la sección 5.1, la subsección 5.2.1 y la sección 5.4.

5.1. Nociones básicas en neurociencia

La información correspondiente a esta sección puede encontrarse en [4], entre muchos otros.

5.1.1. Biología neuronal básica

Una neurona típica tiene la siguiente estructura básica: el cuerpo celular o soma, las dendritas, el axón y las terminales presinápticas. El cuerpo celular o soma es el centro metabólico de la neurona. Contiene el núcleo, en el que se encuentra el material genético, y el retículo endoplasmático, una extensión del núcleo donde se sintetizan las proteínas de la célula. Del soma parten normalmente dos tipos de prolongaciones: varias dendritas y un único axón, el cual tiene forma tubular y es largo en comparación con las dendritas. Las dendritas presentan múltiples ramificaciones y son el principal aparato receptor de las señales procedentes de otras neuronas. Por su parte el axón es el principal medio de conducción de señales emitidas hacia otras neuronas. Cerca de su terminación, el axón

se divide en finas ramas que constituyen las zonas de comunicación interneuronal. El punto en el que se comunican dos neuronas es la sinapsis (palabra que también designa al propio proceso de comunicación). En la Figura ?? se muestra la morfología neuronal básica.

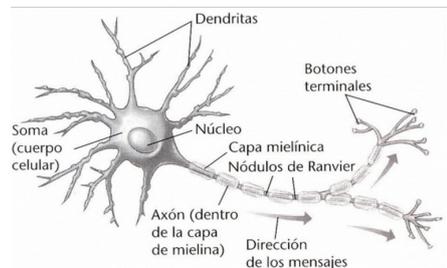


Figura 5.1: Esquematación de una neurona típica.

5.1.2. Los canales iónicos.

La comunicación neuronal se basa en la respuesta de las neuronas a diversos estímulos. Estas respuestas en variaciones rápidas de la diferencia de potencial eléctrico a través de las membranas neuronales. Dichas variaciones se dan gracias a los canales iónicos. Para entender el funcionamiento neuronal es conveniente recordar algunos conceptos de física básica relacionados con fenómenos eléctricos. Los fenómenos eléctricos ocurren cuando cargas de signos opuestos se separan o pueden moverse independientemente. Cualquier flujo neto de cargas es una *corriente*. La cantidad de este flujo de cargas entre dos puntos está determinada por la diferencia de potencial entre los puntos y la conductancia del medio en que se mueve. La *diferencia de potencial* se mide en voltios y se define como el trabajo necesario para mover una unidad de carga sin resistencia de un punto a otro. La *conductancia* se mide en siemens y mide la facilidad con que se produce flujo de corriente de un punto a otro en un cierto medio. El recíproco de la conductancia es la *resistencia*, que se mide en ohmios. Posteriormente utilizaremos estos conceptos para describir cambios en la membrana neuronal y para la formulación de modelos.

Como hemos dicho antes, la actividad eléctrica de la neurona se da gracias a los

canales iónicos, que son proteínas incrustadas en la membrana neuronal. La membrana, por su composición, es prácticamente impermeable al paso de iones. Es la presencia de estos canales la que permite la circulación de cargas a un lado y a otro de la membrana. En la Figura ?? podemos ver una representación de la misma.

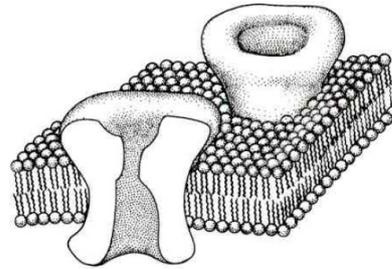


Figura 5.2: Membrana celular, formada por una bicapa de fosfolípidos y atravesada por canales iónicos representados por poros.

Los canales son específicos, es decir, cada tipo de canal permite el paso de ciertas especies iónicas. Los más relevantes son los iones sodio, potasio y cloro. En general su grado de apertura depende del potencial que exista en cada instante, aunque hay algunos canales (los de *de fuga* o *leak*) que se encuentran siempre abiertos.

Existe una separación de cargas a través de la membrana neuronal, que consiste en una fina nube de iones positivos y negativos diseminados por la superficie externa e interna de la neurona. En reposo, la neurona tiene un exceso de cargas positivas en la parte externa y un exceso de cargas negativas en la cara interna de la membrana. La separación de cargas da lugar a una diferencia de potencial eléctrico, denominado potencial de membrana. El potencial de membrana, V , se define como

$$V = V_{int} - V_{ext}$$

donde V_{int} es el potencial en la parte interna de la célula y V_{ext} el potencial en la parte externa. El potencial de la membrana de una célula en reposo recibe el nombre de potencial de reposo. Dado que, por convención, el potencial fuera de la célula se define como cero, el potencial de reposo es igual al potencial interior V_{int} , que será siempre

negativo.

La asimetría de cargas a un lado y otro de la membrana se mantiene gracias a la distribución pasiva, debida a los gradientes de concentración, y al transporte activo, que se produce gracias a mecanismos como la bomba de sodio-potasio, que mueve los iones en contra de su gradiente electroquímico para mantener el gradiente eléctrico transmembranal. La distribución desigual de iones a través de la membrana y su permeabilidad selectiva para distintas especies iónicas genera el potencial de membrana como respuesta a gradientes de concentración de las especies iónicas.

El movimiento de corrientes iónicas transmembranales: el potencial de Nernst Hay dos fuerzas que dirigen cada especie iónica difusible a través de la membrana: la diferencia de concentración de la especie iónica y la diferencia de potencial eléctrico. Estas dos fuerzas se compensan en un cierto punto, que viene dado por la ecuación de Nernst:

$$E_{ion} = \frac{RT}{zF} \ln \frac{[Ion]_{ext}}{[Ion]_{int}} \quad (V)$$

siendo $[Ion]_{ext}$ la concentración de la especie iónica en el exterior, $[Ion]_{int}$ la concentración en el interior, R la constante universal de los gases, T la temperatura en Kelvin, F la constante de Faraday y z la valencia del ion (la carga que tiene teniendo en cuenta el signo: +1 para K^+ , -1 para Cl^- , +2 para Ca^{+2} , etc).

El potencial de Nernst es el potencial de la membrana asociado al equilibrio de un cierto ion. Debido a las magnitudes de voltaje que aparecen en las membranas biológicas, se utilizan los mV como unidad de medida. Sin embargo, si escribimos todos los factores de la fórmula en unidades del sistema internacional, obtendremos el potencial en voltios. Si la membrana fuera exclusivamente permeable a un cierto ion, tendríamos que cuando la membrana alcanzara el potencial de Nernst para ese ion no habría más flujo neto espontáneo de él a través de la membrana.

5.1.3. El potencial de acción o spike.

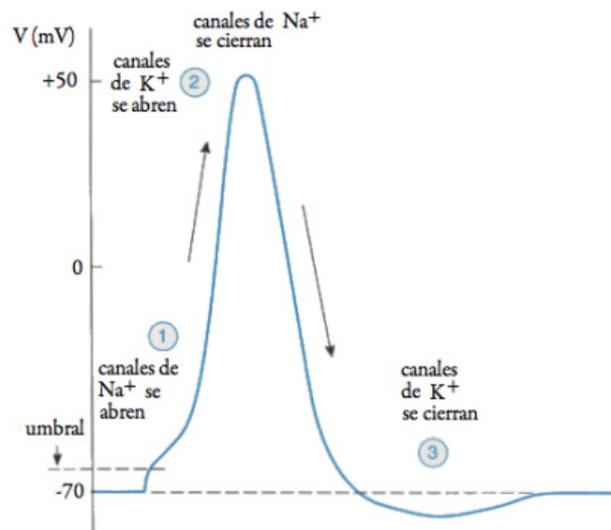
Cada vez que hay un flujo neto de cationes y de aniones a través de la célula se altera su polarización. Una reducción de la separación de carga, que da lugar a un potencial de membrana menos negativo, recibe el nombre de despolarización. Un aumento de la separación, que produce el efecto contrario, se denomina hiperpolarización. Cuando la despolarización alcanza un nivel crítico, denominado umbral, la neurona responde con la apertura de los canales de iones sensibles al voltaje, produciendo una respuesta de tipo todo o nada, llamada potencial de acción o *spike*. Este efecto todo o nada consiste en que si el voltaje recibido no excede del valor umbral no se produce ningún *spike* en respuesta, y el potencial vuelve a su nivel de reposo; en cambio, si el umbral es excedido, la membrana responde produciendo un cambio importante y brusco del voltaje, es decir, genera un potencial de acción, de manera que aunque se aumente más la intensidad de estimulación por encima del umbral, el *spike* no crece más. Es necesario mencionar que este umbral es algo difuso en muchas neuronas, si bien se habla del efecto todo o nada referido a todas ellas para simplificar su estudio.

Al aplicar secuencialmente estímulos breves (por encima del umbral) suficientemente espaciados en el tiempo, la membrana responde cada vez produciendo idénticos potenciales de acción. Si el lapso entre los estímulos se va reduciendo, es imposible excitar a la membrana por segunda vez. Este lapso crítico se conoce como período refractario. Es absoluto si, a pesar de la intensidad de la estimulación es imposible lograr respuesta y relativo si es posible provocar una señal (disparo) menor.

Fases del potencial de acción

En reposo, los canales de K^+ y Na^+ están cerrados. Cuando la despolarización alcanza el umbral, se inicia el proceso del potencial de acción de la siguiente manera. Primero se abren los canales de Na^+ , con lo que aumenta la permeabilidad de la membrana a este elemento y aumenta su concentración intracelular. El potencial de membrana se acerca a E_{Na} , alcanzando valores muy positivos. Después se abren los canales de K^+ (que siempre se abren con un cierto retraso respecto a los de Na^+). Al alcanzar el potencial

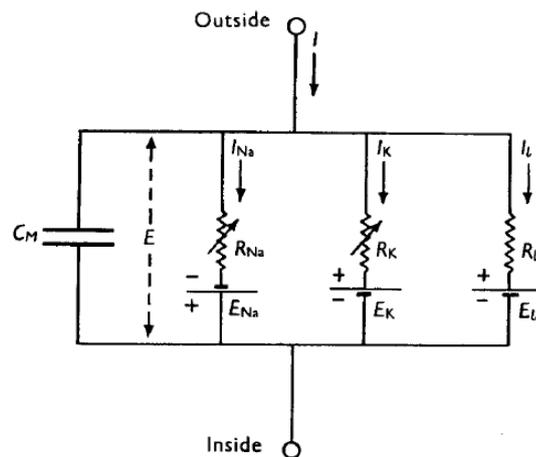
de acción un cierto valor, los canales de Na^+ se inactivan, con lo que se imposibilita que ocurra un nuevo potencial de acción por un tiempo. Este lapso de tiempo en el que no puede originarse otro potencial de acción es el período refractario absoluto. Mientras, los canales de K^+ siguen abiertos, por lo que la permeabilidad de la membrana al K^+ es mucho mayor que al Na^+ . El potencial de membrana se acerca a E_K , tomando valores más negativos que el valor en reposo. Tras esto, los canales de Na^+ pasan de inactivados a cerrados, mientras los de K^+ aún están abiertos y el potencial sigue hiperpolarizado. Finalmente el potencial vuelve al reposo y los canales de K^+ se cierran. Es posible que se produzca un nuevo potencial de acción, pero la apertura de canales requerirá un voltaje mayor durante un intervalo de tiempo. Este intervalo se conoce como período refractario relativo.



El circuito eléctrico equivalente

Es habitual que el funcionamiento del potencial de acción se represente a través de un circuito eléctrico con sus mismas propiedades principales. Podemos asociar a diferentes elementos biológicos un representante eléctrico. Los iones difunden a través de la membrana por canales voltaje-dependientes, que ofrecen una cierta dificultad al paso de los

iones, comportándose como resistencias. Por otra parte, el Na^+ y el K^+ no atraviesan la membrana sólo en el sentido exigido por el gradiente transmembranal, sino que también lo hacen en el sentido contrario gracias a la bomba de sodio-potasio, que actúa como un generador de corriente en un circuito, impidiendo que la batería se descargue (es decir, evitando que los diferentes gradientes iónicos se hagan 0). Dado que los canales están inmersos en una diferencia de potencial, podemos representarlos como una resistencia en serie con una batería. Por su parte, la membrana neuronal es un aislante fino entre dos medios conductores (en este caso el medio intracelular y el extracelular); por tanto actúa como un condensador en un circuito eléctrico. Al conectar un condensador a una batería en un circuito eléctrico, provocamos un movimiento de cargas desde el extremo positivo de la batería hacia una de las placas del condensador, acumulándose y provocando que se desplacen cargas positivas del otro lado por magnetismo. Este movimiento de cargas se conoce como corriente capacitiva I_c asociada al condensador.



5.2. Modelos neuronales

Los modelos presentados en esta sección pueden encontrarse en [4]. En el caso del modelo de Hodgkin y Huxley, que veremos a continuación, puede consultarse también [9].

5.2.1. Modelo de Hodgkin y Huxley

Este modelo, uno de los más conocidos en la historia de la neurociencia, reproduce con gran realismo diversos comportamientos neuronales. Consta de cuatro ecuaciones, de forma que la primera de ellas es la que refleja la evolución del potencial de membrana. Para desarrollar esta primera ecuación se tienen en cuenta las corrientes capacitiva, las corrientes iónicas de Na^+ y K^+ y la corriente aplicada (la que el investigador aplica a la neurona). Por la ley de Kirchoff tenemos que en un punto cualquiera de un circuito la suma de todas las corrientes es 0:

$$I_c + I_{Na} + I_K + I_l - I_{apl} = 0$$

La convención para los signos de la intensidad de corriente es que una corriente positiva tiende a despolarizar la neurona, es decir, hace que V tome valores más positivos. Es decir, un flujo entrante de iones positivos se considera una corriente negativa. Teniendo en cuenta la relación de la carga con la corriente ($V = q/C$), así como que la corriente es el flujo de carga por unidad de tiempo, es decir, $\dot{q} = I_c$, la anterior ecuación pasa a ser

$$\dot{V} = \frac{1}{C}(I_{apl} - I_{Na} - I_K - I_l)$$

Hodgkin y Huxley modificaron la ley de Ohm ($I = gV$) para lograr un mejor ajuste a los datos, obteniendo la expresión $I_{ion} = g_{ion}(V - E_{ion})$. Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{C}(I_{apl} - g_{Na}(V - E_{Na}) - g_K(V - E_K) - g_l(V - E_l))$$

Por último, modelando las conductancias de K^+ y Na^+ , que varían a lo largo del tiempo según el potencial de membrana mediante funciones que representan la probabilidad de que las compuertas de los canales iónicos estén en posición permisiva para el paso de iones se tiene la primera ecuación del modelo:

$$\dot{V} = \frac{1}{C}(I_{apl} - \overline{g_{Na}}m^3h(V - E_{Na}) - \overline{g_K}n^4(V - E_K) - g_l(V - E_l))$$

Las otras tres son ecuaciones auxiliares que reflejan la evolución de las probabilidades de que las compuertas de activación e inactivación de los canales de Na^+ y K^+ estén en

posición permisiva:

$$\dot{m} = (m_{\infty}(V) - m)/\tau_m(V)$$

$$\dot{n} = (n_{\infty}(V) - n)/\tau_n(V)$$

$$\dot{h} = (h_{\infty}(V) - h)/\tau_h(V)$$

donde $m_{\infty}, n_{\infty}, h_{\infty}, \tau_m, \tau_n, \tau_h$ son ciertas funciones obtenidas a partir de datos experimentales.

5.2.2. Modelo de integración y disparo (LIF)

El modelo de integración y disparo se basa en tener en cuenta únicamente la corriente iónica debida a los canales de fuga (aquellos canales iónicos que se encuentran siempre abiertos y por tanto tienen conductancia constante). Podemos verlo como una simplificación del modelo de Hodgkin y Huxley, consistente en no tener en cuenta las corrientes de Na^+ y K^+ . De esta forma no es necesario incluir más que una ecuación para modelar el comportamiento neuronal. Este modelo tiene la forma

$$C\dot{V} = I - g_l(V - E_l)$$

donde todos los términos involucrados tienen significado biológico, concretamente el mismo que en el modelo de Hodgkin y Huxley. Tras un reescalado apropiado este modelo se puede escribir como

$$\dot{v} = b - v, \quad \text{si } v = 1 \quad \text{entonces } v \rightarrow 0.$$

Es claro que el equilibrio del sistema es $v = b$, el valor umbral para el cual el sistema se resetea es $v = 1$, y este valor de *reset* es $v = 0$. Este modelo posee las siguientes cualidades: los *spikes* que produce son del tipo todo o nada, el umbral está perfectamente definido, tiene un período de refractoriedad relativo, distingue entre impulsos excitatorios ($I > 0$) e inhibitorios ($I < 0$) y puede codificar continuamente la fuerza de un impulso en la frecuencia del *spiking*.

5.2.3. Modelo de resonancia y disparo (RF)

El modelo de resonancia y disparo es una modificación bidimensional del modelo de integración y disparo. Además de tener en cuenta las corrientes iónicas de los canales de fuga, también incluye el efecto de las corrientes de K^+ . Sea W la magnitud de dicha corriente. El modelo de resonancia y disparo tiene la forma

$$\begin{cases} C\dot{V} = I - g_l(V - E_l) - W \\ \dot{W} = (V - V_{1/2})/k - W \end{cases}$$

Si a este modelo se le añade el *reset*

$$\text{si } V \geq V_{umbral} \text{ entonces } V \rightarrow V_{reset}.$$

Este modelo ilustra algunos de los rasgos más importantes de cierto tipo de neuronas, llamadas resonadoras, muy habituales en la naturaleza. Por ejemplo, presenta oscilaciones subumbrales y preferencia de un cierto tipo de frecuencias de estímulos.

5.2.4. Modelo de integración y disparo cuadrático (QIF)

El modelo de integración y disparo cuadrático es una modificación del modelo de integración y disparo ya presentado, consistente en sustituir el término $-v$ por $+v^2$, obteniendo así la expresión

$$\dot{v} = b + v^2, \quad \text{si } v = v_{peak} \text{ entonces } v \rightarrow v_{reset}$$

El término v_{peak} es el valor máximo que alcanza un *spike* genérico. La ecuación $\dot{v} = b + v^2$ es la forma normal de bifurcación de nodo-silla véase el Apéndice ??), lo que garantiza la aparición y desaparición bruscas de un equilibrio atractor (es decir, la interrupción de la fase de reposo) para valores adecuados de los parámetros. El término de *reset* hace que el sistema se comporte de forma similar a la de un sistema bajo la bifurcación SNIC (*saddle-node on invariant circle*).

Para $b > 0$ el sistema produce un comportamiento periódico, por tanto *spiking* (una sucesión o tren de *spikes*). Para $b < 0$ el sistema posee dos equilibrios: un nodo estable

y uno inestable. Evidentemente el nodo estable es el asociado al reposo neuronal. Por tanto para este valor del parámetro b el sistema posee oscilaciones sumumbrales: un estímulo de baja magnitud hará que el sistema abandone temporalmente el nodo estable pero no será lo bastante fuerte como para que deje su cuenca de atracción, por lo que rápidamente retornará a su posición inicial, no habiéndose alejado apenas (en un sentido cualitativo). En cambio, si el estímulo es mayor el sistema se alejará más, acercándose al nodo inestable, y este viaje producirá un *spike*, que acabará cuando la variable v alcance el valor v_{peak} . Debido a su construcción, este modelo posee un umbral menos definido (más abundante en la naturaleza), y *spikes* con un período de latencia. Además, es canónico, pues todos los modelos neuronales cerca de una bifurcación SNIC pueden ser transformados en este modelo mediante un cambio de variable continuo a trozos.

5.3. Caos en neurociencia

Para la realización de la siguiente sección nos hemos basado en [10].

5.3.1. Modificación del modelo QIF

Recientemente se ha planteado el siguiente modelo en ecuaciones diferenciales del comportamiento neuronal, que es una modificación del modelo de integración y disparo cuadrático presentado en la subsección 5.2.4:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + a - y \\ \dot{y} = x \frac{b - y}{\tau} \end{cases} \quad (5.1)$$

con la regla de *spike*

$$\begin{aligned} x(t^+) &= q \quad \text{si } x(t) = h \\ y(t^+) &= cy(t) + p \quad \text{si } x(t) = h \end{aligned} \quad (5.2)$$

En la ecuación del potencial de membrana x sólo se ha añadido un término lineal en y , usual en los modelos. La segunda ecuación es lineal en y y tiene una tasa de tiempo $\tau(x) = x/\tau$. Por simplicidad en el análisis que realizaremos supondremos que $\tau = 1$. El término de *reset* en x es el mismo que en el modelo original, y el de y se

escogió lineal, dependiente de un par de parámetros para una mayor versatilidad del modelo. Además de suponer un modelo más fiel de la neurona, presenta comportamientos interesante relacionados con fenómenos caóticos. Para estudiar dichos comportamientos recurriremos a estudiar el comportamiento de una aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que define un sistema dinámico discreto y que da los sucesivos valores de la variable de adaptación y en los momentos en que el sistema produce *spikes*.

Sea $\mathcal{S} = \{(x, y) : x = h\}$. Es fácil ver que \mathcal{S} es una sección de Poincaré y que el sistema 5.1 es conservativo. La aplicación $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - y(a + x^2) + \frac{b}{2}x^2 \quad (5.3)$$

es una función de Lyapunov para 5.1. Consideremos una trayectoria que alcanza la sección \mathcal{S} (en ese momento la neurona está produciendo un *spike*) en un punto $P_k = (h, y_k)$. El sistema, debido a la regla de *reset* 5.2, la trayectoria “salta” al punto $(q, cy_k + h)$. Después la trayectoria evoluciona de acuerdo a las ecuaciones del sistema 5.1 y puede alcanzar de nuevo la sección \mathcal{S} en un punto $P_{k+1} = (h, y_{k+1})$. Dado que los puntos P_k y P_{k+1} se encuentran en una trayectoria del sistema 5.1 donde no se producen impulsos, ambos puntos satisfacen la ecuación 5.3. Es decir, se tiene que:

$$\frac{1}{2}y_{k+1}^2 - (a + h^2)y_{k+1} + \frac{b}{2}h^2 = \frac{1}{2}(cy_k + p)^2 - (q^2 + a)^2(cy_k + p) + \frac{b}{2}q^2 \quad (5.4)$$

Operando, de 5.4 se obtiene

$$(y_{k+1} - a - h^2)^2 = (cy_k + p - a - q^2)^2 + (2a + h^2 + q^2 - b)(h^2 - q^2),$$

lo que define una relación implícita para la variable adaptativa y en los tiempos en los que se producen *spikes*. Asumiendo que para todo k se cumple que $y_k < a + h^2$ y tomando $L = (2a + h^2 + q^2 - b)(h^2 - q^2)$, $H = a + h^2$, $Q = p - a + q^2$, entonces obtenemos

$$y_{k+1} = f(y_k) = H - \sqrt{(cy_k + Q)^2 + L} \quad (5.5)$$

Esta es la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para la que probaremos que exhibe caos en el sentido de Li-Yorke. Para ello utilizaremos el Teorema 4. Al estar en el caso unidimensional, es evidente que las nociones de punto fijo repulsor y punto fijo expansivo coinciden. Basta probar que existe un punto fijo y^* tal que

1. f es diferenciable en un entorno repulsor $B_r(y^*)$ de y^*
2. existe un punto $y_m \in B_r(y^*)$ con $y_m \neq y^*$ tal que para algún entero positivo m , $f^m(y_m) = y^*$ y f^m es diferenciable en y_m de manera que $Df^m(y_m) \neq 0$.

Para ver que en el caso unidimensional es suficiente trabajar con esta versión de la definición de *snap-back repeller* basta comprobar en la demostración del Teorema 4 que el resto de exigencias solamente se utilizan en la demostración para suponer, sin pérdida de generalidad, que se cumple la condición de expansividad para el punto fijo *snap-back repeller*.

Veamos que se verifica la condición 1. Operando con 5.5 se obtiene que hay un punto fijo para f si se verifica

$$(cQ + H)^2 - (Q^2 - H^2 + L)(c^2 - 1) \geq 0.$$

Tenemos entonces dos puntos fijos:

$$y_{\pm}^* = \frac{\pm \sqrt{(cQ + H)^2 - (Q^2 - H^2 + L)(c^2 - 1)} - (cQ + H)}{c^2 - 1}. \quad (5.6)$$

Tomamos $y^* = y_+^*$. Además, de nuevo operando con 5.5, se obtiene que

$$Df(y) = -c \frac{cy + Q}{\sqrt{(cy + Q)^2 + L}}. \quad (5.7)$$

La aplicación Df es decreciente si $L \geq L$, dado que $c > 0$. Definiendo $y_z = -\frac{Q}{c}$ es fácil comprobar que f es creciente si $y < y_z$ y decreciente si $y > y_z$.

Sea y_c tal que $Df(y_c) = -1$. Como $\lim_{y \rightarrow -\infty} Df(y) = c$ y $\lim_{y \rightarrow \infty} Df(y) = -c$, una condición necesaria y suficiente para que exista y_c en las condiciones indicadas es que $c > 1$.

Además, como $Df(y_c) < Df(y_z)$ y Df es decreciente cuando $y > y_z$, tenemos que $y_c > y_z$.

Consideremos un entorno $B_r(y^*)$ de y^* tal que

$$0 < r \leq \min\{|y^* - y_c|, H - y^*\}. \quad (5.8)$$

Por construcción, para todo $y \in V_r(y^*)$, se tiene que $|Df(y)| > 1$, pues $y^* > y_c > y_z$. Por tanto se satisface la condición 1.

Veamos que se cumple la condición 2. Construiremos y_k con $1 \leq k \leq m$ tal que $y_m \neq y^*$ para cierto entero positivo m de manera que $y_k = f(y_{k+1})$ y $|Df(y_k)| \neq 0$ para todo k . Operando con 5.5 se obtiene que $y^* = f(y_1)$, con

$$y_1^\pm = \frac{\pm \sqrt{(y^* - H)^2 - L} - Q}{c} \quad (5.9)$$

La primera solución se corresponde con el propio punto fijo. La segunda será la que nos permitirá verificar la condición 2. Supongamos que se cumple

$$\begin{aligned} H &> f(y_z) = y_A > y^* \\ f(y_A) &= y_B < y_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Como $f(y_A) = y_B$, $f(y^*) = y^*$ y f es una función continua decreciente en $[y^*, y_A]$, existe algún punto $y_2 \in [y^*, y_A]$ tal que $y_1 = f(y_2)$. Si $y_2 \in B_r(y^*)$, entonces tomamos $m = 2$.

Si no es así, consideramos el intervalo (y_1, y_z) . Como $y^* = f(y_1)$, $y_A = f(y_z)$ y f es creciente en $[y_1, y_z]$, existe $y_3 \in [y_z, y^* +]$ tal que $y_2 = f(y_3)$. Nótese que existe otro punto $y'_3 \in [y_z, y^*]$ tal que $y_2 = f(y_3)$, pues $y^* = f(y^*)$, $y_A = f(y_z)$ y f es decreciente en $[y_z, y^*]$. Si cualquiera de los puntos $y_3, y'_3 \in B_r(y^*)$, tomamos $m = 3$.

Si no es así, consideremos y_3 . Como $f(y_2) = y_1$ y $f(y^*) = y^*$, existe $y_4 \in [y^*, y_2]$ tal que $f(y_4) = y_3$. Si $y_4 \notin B_r(y^*)$, obtenemos $y_5 \in [y_z, y^*]$ utilizando que $f(y_3) = y_2$, $f(y_z) = y_A$, $f(y^*) = y^*$ y que f es creciente en $[y_3, y_z]$ y decreciente en $[y_z, y^*]$. Por inducción, y si ninguno de los puntos encontrados se encuentra en $B_r(z^*)$, construimos una sucesión $Y_B < y_1 < y_3 < y_z < y_5 < \dots < y^* < \dots < y_4 < y_2 < y_A < H$ que tiende al punto fijo y^* .

Para probar la convergencia de la sucesión anterior a y^* , analizaremos el comportamiento de los términos de subíndice par.

$$y_{2k} = f(f(y_{2k+2})) = H - \sqrt{\left(c \left(H - \sqrt{(cy_{2k+2} + Q)^2 + L}\right) + Q\right)^2 + L}$$

con $k \geq 1$. Cuando $k \rightarrow \infty$, y_{2k} se estaciona en un cierto valor y_{lim} , que es solución de la ecuación $y_{lim} = f^2(y_{lim})$. Dicha ecuación tiene dos soluciones bajo la condición

$y^* < y_{2k+2} < y_{2k} < H$. Es fácil comprobar que los puntos fijos de 5.6 son precisamente estas dos soluciones y que $y_{lim} = y^*$. Un resultado similar se obtiene para el caso de los elementos de la sucesión con subíndice impar. Así, la sucesión converge a y^* a ambos lados. Por tanto siempre podemos encontrar un punto $y_m \in B_r(y^*)$ tal que $f^m(y_m) = y^*$ para algún entero positivo m .

Para el caso de y'_3 se procede análogamente.

Finalmente, dado que $Df(y_k) = -c \frac{cy_k + Q}{\sqrt{(cy_k + Q)^2 + L}}$, si $y_k \neq -\frac{Q}{c}$ tenemos que $|Df^m(y_k)| \neq 0$ y se cumple la condición 2.

Por tanto f es caótica en el sentido de Li-Yorke para valores adecuados de los parámetros.

5.4. El modelo de Hindmarsh-Rose y algunas cuestiones abiertas

Para la realización de esta sección hemos seguido [5], [4], [7], [6] y [8].

5.4.1. Bifurcaciones

Consideremos un conjunto \mathcal{X} de sistema dinámicos dotado de una topología y de una relación de equivalencia. En nuestro caso \mathcal{X} será el conjunto de los campos de vectores de clase C^∞ en \mathbb{R}^n , y la relación de equivalencia será la conjugación topológica. Un sistema dinámico es estructuralmente estable si pertenece al interior de su clase de equivalencia. Denotando por \mathcal{E} al conjunto de sistemas estructuralmente estables, se define el conjunto de bifurcación de \mathcal{X} como $\mathcal{B} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{E}$. El objetivo de la Teoría de Bifurcación es comprender la estructura y disposición de este conjunto dentro del conjunto \mathcal{X} . Se distingue entre bifurcaciones locales y globales. Las locales surgen en un entorno de un punto, las globales son aquellas que no son locales. Gracias al Teorema de Rectificación del Flujo sabemos que en un entorno de un punto regular el sistema es conjugado al que posee un flujo rectilíneo, por tanto estructuralmente estable. Además, gracias al Teorema de Hartman-Grobman tenemos que en un entorno de un punto de equilibrio hiperbólico

los sistemas son conjugados a su parte lineal; por tanto presentan una dinámica bien conocida y de nuevo estructuralmente estable. Los únicos puntos alrededor de los que el comportamiento no es totalmente conocido a priori son los equilibrios no hiperbólicos; es decir, éstos son los únicos puntos para los que la dinámica local no está totalmente determinada frente a pequeñas perturbaciones. La Teoría de Bifurcaciones Locales considera familias paramétricas de sistemas dinámicos que contengan al sistema de interés X , llamadas despliegues. Se determinan los posibles puntos de corte con X para así conocer las distintas posibilidades dinámicas que puede exhibir el sistema original al sufrir pequeñas perturbaciones. Uno de los trabajos comúnmente utilizados como bibliografía básica en el campo es [5], entre otros. Mediante la aplicación de diferentes resultados de la Teoría de la Bifurcación, no es difícil encontrar numéricamente que el sistema rápido del modelo de Hindmarsh-Rose presenta bifurcaciones de nodo-silla, de Hopf supercrítica y homoclínica. En una bifurcación de nodo-silla, un equilibrio atractor y otro equilibrio inestable se acercan hasta colapsar en un equilibrio no hiperbólico (llamado nodo-silla), que desaparece tras el momento de la bifurcación. En una bifurcación de Hopf, un ciclo límite atractor que rodea a un equilibrio repusor reduce su amplitud hasta que colapsa en el mencionado equilibrio, momento a partir del cual el ciclo límite desaparece y, localmente, en el sistema sólo hay un equilibrio ahora estable. En el caso de la bifurcación homoclínica, un equilibrio de silla y un ciclo límite atractor se acercan hasta colapsar, de forma que aparece un lazo homoclínico que desaparece tras el momento de la bifurcación. Véase [5] para un tratamiento formal y detallado de estas bifurcaciones.

5.4.2. Bursting

Puede encontrarse información más detallada sobre el *bursting* y la clasificación que presentaremos en [4].

Una forma de comunicación neuronal, muy usual y más compleja que el *spiking*, es el *bursting*, que consiste en la alternancia de una fase de *spiking* y una de reposo. En la Figura 5.3 podemos ver este fenómeno. La fase de reposo se asocia a que el sistema se encuentre en un equilibrio atractor, y la fase de *spiking* con que el modelo se esté

moviendo en un ciclo límite (también atractor). Para llevar al sistema de un atractor a otro sin necesidad de variar parámetros se añade una variable, lenta en comparación con el resto. Los modelos típicos de *bursting* son entonces del tipo rápido-lento:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \varepsilon \dot{u} = g(x, u) \end{cases}$$

usualmente con x una variable bidimensional y u de dimensión 1 o 2. El comportamiento de los modelos de este tipo queda en buena parte determinado por el del subsistema rápido, más concretamente, por el del límite del sistema global cuando $\varepsilon = 0$. Puede encontrarse una formalización de esta idea, que pasa por resultados de variedades normalmente hiperbólicas y persistencia, en [6]. Tenemos entonces que un modelo de *bursting* típico será un sistema de dimensión 3 o 4 que irá recorriendo una variedad de ciclos límite atractores de su subsistema rápido (variedad asociada a la fase de *spiking*) y una variedad formada por puntos de equilibrios atractores, también de su subsistema rápido (variedad asociada a la fase de reposo). Parte de las características que presentarán estos modelos vendrán dadas por la forma en que el sistema pase del reposo al *spiking* y viceversa; es decir, por la manera en que el sistema (rápido) pase de un equilibrio a un ciclo límite. Este paso de un atractor a otro se corresponde con una bifurcación del sistema rápido con la variable lenta vista como parámetro. Si trabajamos con modelos de tipo 2+1 o 2+2, es decir, 2 variables rápidas y 1 o 2 variables, estamos restringiendo las bifurcaciones que pueden darse: serán las que ocurran en una variedad central de dimensión central no superior a 2 y una codimensión de 1 o 2. Hay exactamente 4 bifurcaciones en estas condiciones que permiten el paso de un sistema de un reposo atractor a un ciclo límite atractor, y 4 para el caso contrario; luego hay 16 posibles configuraciones dinámicas de *bursting* teniendo como criterio las dos bifurcaciones notables que ocurrirán en el sistema rápido. Diferentes configuraciones darán lugar a distintos rasgos neurocomputacionales. A continuación presentaremos uno de los modelos de *bursting* más conocidos, el modelo de Hindmarsh-Rose de 1984, y posteriormente veremos qué configuraciones de *bursting* presenta, así como algunos comportamientos de interés que ocurren en el paso de una configuración a otra.

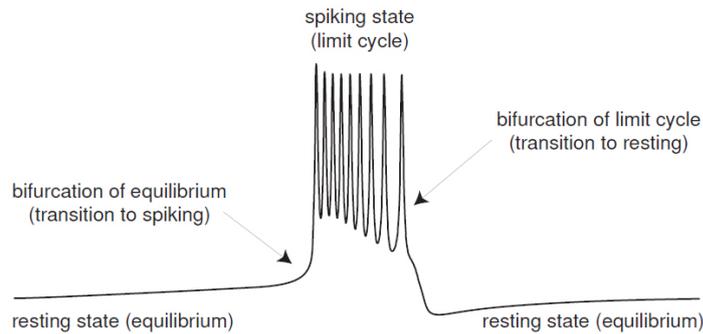


Figura 5.3: En los sistemas del tipo rápido-lento que exhiben bursting hay dos bifurcaciones señaladas en el sistema rápido: la bifurcación responsable del paso del reposo al spiking y la asociada con la transición del spiking al reposo.

5.4.3. El modelo de Hindmarsh-Rose

Puede consultarse más información sobre la construcción de este modelo en [7], y sobre su análisis en [8].

En 1984 Hindmarsh y Rose propusieron uno de los modelos de *bursting* más conocidos. Para su construcción impusieron que en el retrato de fases del sistema aparecieran tres puntos de equilibrio. Uno de ellos sería el equilibrio atractor asociado al reposo; el segundo, un equilibrio inestable que rodeado de un ciclo límite atractor asociado al *spiking* -recordemos el Teorema de Poincaré-Bendixson y sus consecuencias, así como la Teoría de Índice; el tercero sería una silla que separaría ambas cuencas de atracción. Así, el nuevo modelo dispondría del escenario adecuado para su subsistema rápido. La elección de las ecuaciones fue

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \end{cases}$$

La variable lenta que consigue la alternancia entre el reposo y el ciclo límite característica del *bursting* se escogió de la forma más sencilla posible, de forma que el sistema global es

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 + I - z \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \\ \dot{z} = r(s(x - x_{rest}) - z) \end{cases}$$

Fijando los parámetros b, c, d, I, s, r y x_r en valores adecuados y haciendo variar a , aparecen en el sistema rápido bifurcaciones de nodo-silla, de Hopf supercrítica y homoclínica, que dan lugar a las configuraciones de *bursting* fold/Hopf y fold/homoclinic. (véanse las Figuras 5.5 y 5.4). En el caso fold/homoclinic, el sistema rápido se encuentra inicialmente en reposo, en el equilibrio atractor situado a la izquierda. La variable lenta hace que este equilibrio se acerque cada vez más al equilibrio de silla situado a su lado, hasta que finalmente colisionan cuando z alcanza el valor de bifurcación. Entonces el sistema rápido salta al único atractor disponible, el ciclo límite, iniciándose así la fase de *spiking*. La evolución de la variable lenta hace que reaparezca el equilibrio atractor, pero el sistema rápido seguirá en el ciclo límite hasta que éste desaparezca. El ciclo límite se acerca al reaparecido equilibrio de silla hasta que ambos chocan y el ciclo límite desaparezca. El sistema viaja al equilibrio atractor original, terminando la fase de *spiking* y cerrándose el ciclo del *bursting*.

En el caso fold/Hopf, la transición de reposo a *spiking* es la misma. La transición contraria se da debido a que el ciclo límite disminuye progresivamente su amplitud hasta colapsar en el equilibrio repulsor que rodea, que se vuelve atractor en ese momento. El sistema pasa a estar entonces en este equilibrio ahora atractor, que desaparece rápidamente debido a una bifurcación auxiliar de nodo-silla. Debido a esta bifurcación el sistema vuelve al equilibrio original, cerrando el ciclo de *bursting*.

5.4.4. Cuestiones abiertas

Cuando el parámetro b toma valores intermedios, se ha observado un fenómeno inesperado que se ilustra en la Figura 5.6. Como vemos, el sistema alterna, de forma aparentemente impredecible, *bursts* correspondientes a las dos configuraciones presentes en el modelo. La duración de estos trenes de pulsos tampoco parece seguir un patrón de-

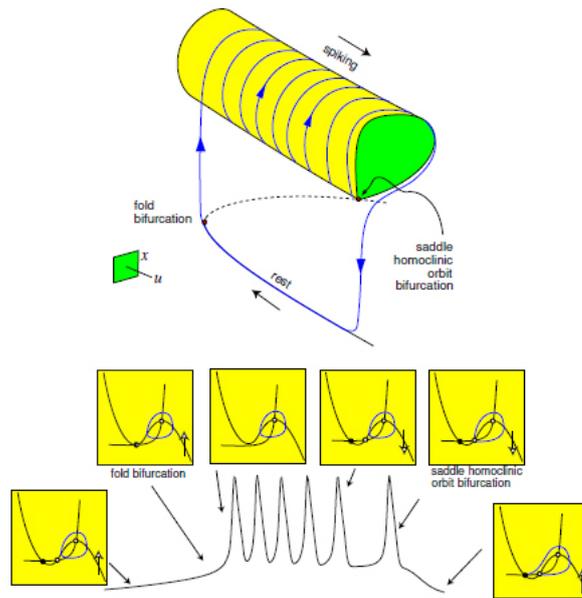


Figura 5.4: Retrato de fases de un burster fold/ homoclinic típico. Retratos de fase de su sistema rápido en distintos momentos del ciclo del bursting y oscilaciones del potencial de membrana en un burst.

terminado. La aparición de este comportamiento sugiere un comportamiento caótico del sistema. La determinación del tipo de caos o incluso su propia existencia requerirían un trabajo de investigación futuro.

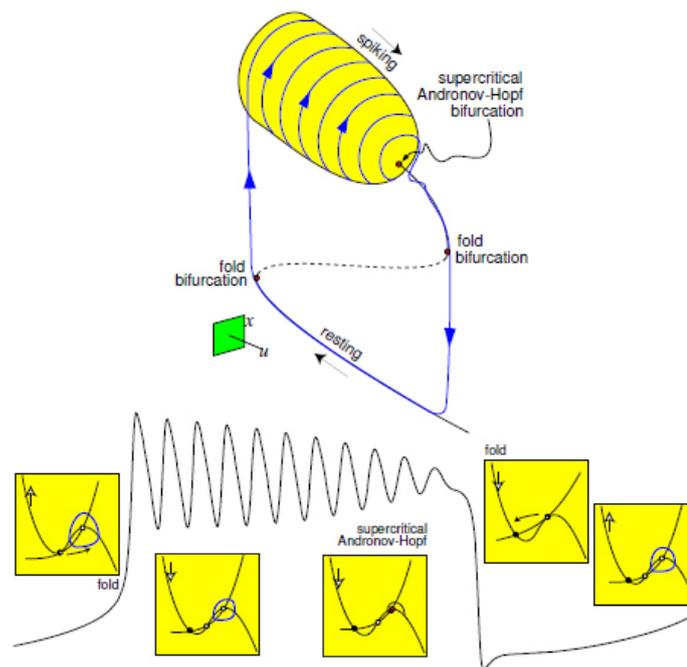


Figura 5.5: Retrato de fases típico del bursting fold/Hopf y retratos del sistema rápido en distintos momentos del ciclo, señalados sobre distintos puntos de un burst.

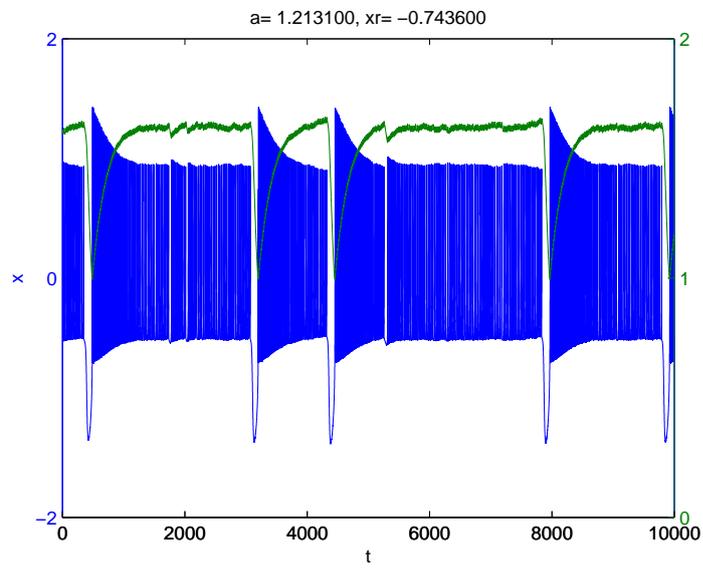


Figura 5.6

Bibliografía

- [1] Devaney., Robert L., An Introduction to Chaotic Dynamical Systems., *Addison-Wesley*, 1989.
- [2] M. W. Hirsch, S. Smale y R.L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. *Academic Press*, 2004.
- [3] B. Auslbach y B. Kieninger. On three definitions of chaos. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 1:23-37, 2011.
- [4] E.M. Izhikevich, Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting. *The MIT Press*, 2007.
- [5] Y. A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory. *Springer-Verlag*, 1995.
- [6] M. W. Hirsch, C. C. Pugh y M. Shub. Invariant Manifolds. *Springer-Verlag*, 1977l.
- [7] J. L. Hindmarsh y M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first-order differential equations. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, B 221:162-164, 1984.
- [8] A. Shilnikov y M. Kolomiets. Methods of Qualitative Theory for the Hindmarsh-Rose Model: a Case Study- a Tutorial. *I.J. Bifurcations and Chaos*, 18(8): 2141-2168, 2008.
- [9] A.L. Hodgkin y A.F. Huxley. A quantitative description of membrane currents and its applications to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117:500-544, 1952.

- [10] G. Zheng y A. Tinnelier. Chaotic solutions in the quadratic integrate-and-fire neuron with adaptation. *Cognitive Neurodynamics*, 3(3): 197-204, 2009.
- [11] T. Li and A. Yorke. Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10): 985-992, 1975.
- [12] F.R. Marotto. Snap-Back Repellers Imply Chaos in \mathbb{R}^n . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 63: 199-223, 1978.
- [13] F. R. Marotto. On redefining a snap-back repeller. *Chaos, Solitons and Fractals*, 25:25-28, 2005.
- [14] M. Hirsch y S. Smale. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. *NY Academic Press*, 278-289, 1974.
- [15] L.S. Block y W.A. Coppel. Dynamics in One Dimension. *Springer Verlag*, 1992.
- [16] T. Lu, P. Zhu y X. Wu. The Retentivity of Chaos under Topological Conjugation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 4 pages, 2013.
- [17] C. Robinson. Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. *CRC Press*, 1994.
- [18] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns., G. Davis y P. Stacey. On Devaney's Definition of Chaos. *The American Mathematical Society*, 99(4): 332-334, 1992.
- [19] S. Silverman. On maps with dense orbits and the definition of chaos. *Rocky Mountain Jour. Math*, 22, 1992.
- [20] ω -Limit Sets of Discrete Dynamical Systems. A.D. Barwell. *University of Birghinman*. 2010.
- [21] U. Kirchgraber y D. Stoffer. On the Definition of Chaos. *Math. Mech.*, 69(7):175-185, 1989.
- [22] J.M. Bahi y C. Guyeux. Discrete Dynamical Systems and Chaotic Machines: Theory and Applications. *CRC Press*, 2013.

Apéndices

Apéndice A

Conjunto de Cantor

Definición 21. Sea X un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. S es denso en ninguna parte si $\text{int}(\overline{S}) = \emptyset$.

Se sigue fácilmente de la definición el siguiente

Lema 16. Sea X un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. S es denso en ninguna parte si y sólo si para cada abierto no vacío U existe un abierto no vacío $V \subset U$ tal que $V \cap S = \emptyset$.

Definición 22. Sea X un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. S es totalmente desconexo si sus componentes conexas son unipuntuales.

Observación 8. En el caso $X = \mathbb{R}$ un subconjunto es denso en ninguna parte si y sólo es totalmente desconexo.

Definición 23. Sea X un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. S es perfecto si es cerrado y $\forall p \in S \quad p = \lim q_n$ con $q_n \in S, q_n \neq p$.

Teorema-Definición.- Todos los espacios métricos que son compactos, totalmente desconexos y perfectos son homeomorfos entre sí. Cualquiera de ellos se llama *conjunto de Cantor*

Una vez definido el conjunto de Cantor, veremos una de las construcciones más conocidas, el conjunto de Cantor del α -Medio. De aquí en adelante escribiremos $l(I)$ para referirnos a la longitud del intervalo I .

Sean $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, \infty)$ tales que $\alpha + 2\beta = 1$. Es claro que $\beta \in (0, 1/2)$. Sea $S_0 = I = [0, 1]$. El primer paso para construir el conjunto de Cantor del α -Medio es eliminar la porción central del intervalo original que supone una proporción α del mismo; es decir, definiendo $G = (\beta, 1-\beta)$, tomamos $S_1 = I \setminus G$. Podemos escribir S_1 como la unión de dos intervalos de longitud β cada uno. Denotemos por J_0 y J_2 a estos intervalos, de izquierda a derecha. Para $j \in \{0, 2\}$ sea G_j el intervalo central que supone una proporción α de J_j . Notemos que $l(G_j) = \alpha\beta$. Sea $J_{j,0}$ la componente izquierda de $J_j \setminus G_j$ y $J_{j,2}$ la derecha. Para $j_1, j_2 \in \{0, 2\}$ tenemos que $l(J_{j_1, j_2}) = l(J_{j_1})(1 - \alpha)/2 = \beta^2$.

Sea $S_2 = S_1 \setminus (G_0 \cup G_2) = \bigcup_{j_1, j_2 \in \{0, 2\}} J_{j_1, j_2}$. Este conjunto es unión de 2^2 intervalos cerrados, cada uno de longitud β^2 . Supongamos que S_{n-1} es unión de 2^{n-1} intervalos cada uno de longitud β^{n-1} . Denotemos por $J_{j_1, \dots, j_{n-1}}$ todas las combinaciones con $j_k \in \{0, 2\}$. Para cada uno de estos intervalos, sea $G_{j_1, \dots, j_{n-1}}$ el intervalo centrado que supone una proporción α de $J_{j_1, \dots, j_{n-1}}$. Entonces $l(G_{j_1, \dots, j_{n-1}}) = \alpha l(J_{j_1, \dots, j_{n-1}}) = \alpha \beta^{n-1}$.

Sean $J_{j_1, \dots, j_{n-1}, 0}$ y $J_{j_1, \dots, j_{n-1}, 2}$ las componentes izquierda y derecha, respectivamente, de $J_{j_1, \dots, j_{n-1}} \setminus G_{j_1, \dots, j_{n-1}}$. Cada una de estas componentes tiene longitud β^2 : $l(J_{j_1, \dots, j_{n-1}, j_n}) = l(J_{j_1, \dots, j_{n-1}})(1 - \alpha)/2 = \beta^n$, siendo $j_n = 0, 2$.

Sea

$$S_n = S_{n-1} \setminus \bigcup_{j_1, \dots, j_{n-1} = 0, 2} G_{j_1, \dots, j_{n-1}} = \bigcup_{j_1, \dots, j_n = 0, 2} J_{j_1, \dots, j_n}.$$

Dado que cada intervalo $J_{j_1, \dots, j_{n-1}}$ tiene asociados dos intervalos cerrados de S_n , S_n tiene $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ intervalos cerrados, y queda completada la inducción. El conjunto de Cantor del α -Medio se define como $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$.

Veamos que el conjunto de Cantor α -Medio que acabamos de construir es efectivamente un conjunto de Cantor.

Proposición 21. *Para cualquier $\alpha \in (0, 1)$, el conjunto C_α es compacto, perfecto y denso en ninguna parte.*

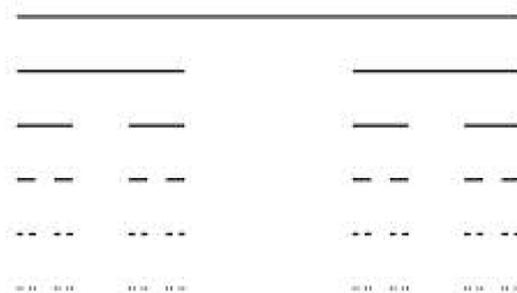


Figura A.1: Conjunto de Cantor del Tercer Medio.

Demostración. C_α es cerrado, pues es intersección de los conjuntos S_n , que son cerrados. Al ser acotado, es compacto. Veamos que C_α es perfecto, es decir, que todo punto es de acumulación. Sean $p \in C, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tomemos n tal que $\beta^n < 2^{-j}$ y sea K la componente de S_n que contiene a p . Entonces $K \cap S_{n+1}$ puede escribirse como unión de dos intervalos disjuntos. Sea q_j uno de los puntos extremos del intervalo de $K \cap S_{n+1}$ que no tiene a p . Entonces $q_j \neq p, |p - q_j| < \beta^n < 2^{-j}$ y $q_j \in C$. Hemos encontrado una secuencia $(q_j)_j \subset C_\alpha$ que converge a p , con $q_j \neq p$ para todo j . Para ver que C_α es denso en ninguna parte utilizaremos el Lema 16, es decir, probaremos que dado U un abierto no vacío, existe otro abierto no vacío $V \subset U$ tal que $V \cap C_\alpha = \emptyset$. Basta verificar la condición para abiertos básicos que corten a $[0, 1]$, es decir, intervalos abiertos (a, b) con algún punto en $[0, 1]$. Dado un intervalo de esta forma, es claro que $(a, b) \not\subset C_\alpha$. Por tanto existe $x \in (a, b)$ tal que $x \notin C_\alpha$. Pero C_α es cerrado, luego existe $(c, d) \subset (a, b)$ tal que $x \in (c, d)$ y $(c, d) \cap C_\alpha = \emptyset$. \square

Observación 9. La medida de Lebesgue de cada conjunto S_n es $2^n \beta^n$. Al ser $\beta < 1/2$, la medida de S_n tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Por tanto, la medida de Lebesgue de C es 0.